Universitat Autònoma de Barcelona

Els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament

Isabel Sellas i Ayats

Tesi doctoral

Els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament

Isabel Sellas i Ayats
Director: Jordi Deulofeu i Piquet

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra, desembre de 2015

UAB

Universitat Autònoma
de Barcelona

A l'Abel i a en Cai, pel temps que els he pres

i que no els podré tornar

A en Quim, per acompanyar amb estima

els meus pensaments

Agraïments

Vull agrair a totes les persones que m'han donat suport durant el procés d'elaboració d'aquesta tesi, tant si ha estat més petit o més gran, més puntual o més continuat, més suau o més intens, a tots i a totes els vull donar les gràcies.

Al meu director de tesi: en Jordi Deulofeu. Als estudiants del Grau d'Educació Primària de la promoció 2011-15. Al meu company i als meus fills: Quim, Abel i Cai. A la meva família: Cinto, Concepció, Àngel, Glòria, Eva, Pep, Manoli i Jordi. Als meus companys de departament i amics: Jordi, Mercè, Arnau, Víctor, Laura, Sònia, Pau, Sebastià, Joan i Cinto. A les meves amigues: Tona, Tàmia i M. Rosa. A la correctora: Laia. Al maquetador: Guillem.

Gràcies a tots i a totes!!

Índex

1 Introducció

Fa més de dos-cents anys que els mestres i els seus coneixements són objecte d'estudi i anàlisi. En el transcurs de tot aquest temps, el centre d'interès en les avaluacions dels mestres ha variat (Hill, Sleep, Lewis i Ball, 2007). A finals del segle XIX, es donava preferència al coneixement del contingut, mentre que, un segle més tard, es prioritzaven els procediments d'ensenyament més que no pas el contingut a ensenyar (Shulman, 1986).

L'establiment que fa Shulman (1986) de la dimensió del coneixement didàctic del contingut, que relaciona el coneixement de la disciplina amb la pràctica de l'ensenyament, ajuda a redreçar aquesta absència d'interès en el contingut a ensenyar i és un punt d'inflexió en les recerques sobre els coneixements dels mestres. En les últimes dècades, molts estudis han proposat models per caracteritzar el coneixement necessari per a l'ensenyament (Shulman, 1986, 1987; Grossman, 1990; Marks, 1990; Hashweh, 2005, 2013).

Algunes recerques han plantejat com definir aquest coneixement més específic per ensenyar matemàtiques i, en algun cas, també han volgut establir models per explicar els coneixements involucrats en l'ensenyament de les matemàtiques (Ball, Thames i Phelps, 2008; Fennema i Franke, 1992; Ma, 1999; Petrou i Goulding, 2011; Turner i Rowland, 2011).

El model Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008) ["coneixement matemàtic per a l'ensenyament"] és un dels models actualment més rellevants en què es concreta la categoria del coneixement especialitzat del contingut, el qual fa referència al coneixement i l'habilitat matemàtica necessaris per a l'ensenyament.

A banda dels estudis sobre els mestres en exercici, en els darrers anys es detecta el creixent interès a millorar la formació inicial dels mestres respecte a l'ensenyament de les matemàtiques, un fet que es pot deduir de les nombroses investigacions en aquest camp. Algunes d'aquestes investigacions es poden consultar en la publicació *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan i Wood, 2008).

La majoria de les recerques dedicades a l'estudi dels coneixements de les matemàtiques dels futurs mestres examinen els coneixements que tenen sobre un contingut específic d'aquesta disciplina o més d'un. Són nombrosos els treballs que concreten l'estudi dels coneixements dels mestres en el contingut de les fraccions (Lamon, 2012; Olanoff, Lo i Tobias, 2014). Aquesta concreció és rellevant per diversos motius. Les fraccions són un contingut fonamental per entendre conceptes més complexos de l'educació secundària, alhora que esdevenen un dels més difícils de les matemàtiques que s'ensenyen a l'etapa d'educació primària (Ma, 1999) i respecte al qual els estudiants de mestre presenten, d'una banda, dificultats i, de l'altra, uns coneixements molt procedimentals (Ball, 1990a, 1990b).

En el marc exposat, la tesi que es presenta se centra en l'estudi dels coneixements dels estudiants de primer curs del grau de mestre d'educació primària sobre les fraccions i el seu ensenyament. Tal com es veurà al llarg del treball, no solament és molt important identificar els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions, sinó que també ho és detectar quins coneixements tenen sobre com ensenyar aquest contingut.

Aquesta tesi s'ha estructurat en set capítols, al marge de la present introducció. Per començar, en el segon capítol es presenta el problema i els objectius de la recerca. En el tercer capítol s'exposa el marc teòric de referència en el qual s'ha fonamentat l'estudi. Aquest marc teòric s'ha centrat en els coneixements dels mestres per ensenyar, en els coneixements concrets per ensenyar matemàtiques, en el contingut de les fraccions i en les diverses recerques sobre els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb les fraccions. El capítol quatre conté els aspectes metodològics que han permès analitzar els coneixements dels estudiants de mestre d'educació primària sobre les fraccions i el seu ensenyament des d'un punt de vista qualitatiu i seguint el mètode de l'estudi de cas.

L'anàlisi de dades es desenvolupa en els tres capítols següents: en el capítol cinc s'analitzen els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions; en el capítol sis, els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de les fraccions, i en el setè capítol, les relacions entre els coneixements de fraccions i els coneixements de l'ensenyament de fraccions. En el següent capítol, el vuitè, s'exposen les conclusions i implicacions educatives que s'han extret d'aquest treball, contrastant els resultats obtinguts en l'anàlisi de dades amb el marc teòric de referència. Aquesta memòria es completa amb la bibliografia i l'índex de taules i figures.

2 Plantejament del problema i objectius de la recerca

2.1 Presentació del problema de recerca i la seva justificació

Massa sovint es considera que els bons mestres tenen una habilitat innata per ensenyar i que de fer de mestre no se n'aprèn. Aquesta idea és falsa, ja que per ensenyar adequadament no n'hi ha prou que els mestres siguin intel·ligents i provin de manera intuïtiva què funciona i què no (Ball i Forzani, 2011). Aprendre a ensenyar i fer la feina de mestre no és una tasca natural (Ball i Forzani, 2009).

En les últimes dècades molts estudis han orientat la recerca cap als coneixements que han de tenir els mestres per ensenyar d'una manera efectiva i han proposat models per caracteritzar el coneixement necessari per a l'ensenyament (Shulman, 1986, 1987; Grossman, 1990; Marks, 1990; Segall, 2004; Hashweh, 2005, 2013). L'establiment de la dimensió del coneixement didàctic del contingut (Shulman, 1986), que relaciona el coneixement de la disciplina amb la pràctica de l'ensenyament, és un punt d'inflexió en les recerques sobre els coneixements dels mestres i implica la concreció d'aquests coneixements per ensenyar en el marc de les didàctiques específiques.

En el cas de les matemàtiques, són molts els autors que investiguen quins coneixements han de tenir els mestres per ensenyar-les (Marks, 1990; Meredith, 1993, 1995; Ball et al., 2008; Blanco i Contreras, 2012; Van den Kieboom, 2013). A hores d'ara, el model Mathematical Knowledge for Teaching presentat per Ball i els seus col·legues (2008) és molt rellevant i s'hi estableixen els dominis per a l'ensenyament de les matemàtiques. L'interès d'aquest model és la diferenciació que fa del coneixement del contingut en tres subapartats: coneixement comú del contingut (*common content knowledge*, CCK), coneixement especialitzat del contingut (*specialized content knowledge*, SCK) i coneixement de l'horitzó matemàtic (*horizon content knowledge*).

L'interès del coneixement especialitzat del contingut rau en el fet que és un coneixement específic del mestre i no és necessari en altres professions en què no s'ensenyen matemàtiques (Ball et al., 2008). Això significa que, per aprendre a ensenyar matemàtiques, els futurs mestres han de tenir uns coneixements específics. En tot cas, per aconseguir que els estudiants[1][2] assoleixin aquests coneixements, els formadors han de partir dels coneixements amb què arriben a la Facultat d'Educació.

Una font que condiciona el coneixement dels mestres és la formació acadèmica en la disciplina a ensenyar (Shulman, 1987; Grossman, 1990). Els estudiants de mestre han estat, pel cap baix, tretze anys aprenent matemàtiques, alguns d'ells amb moltes dificultats en l'aprenentatge d'aquesta àrea, tal com mostra l'estudi de Montes et al. (2015) i tal com

[1] En aquesta tesi, "estudiant" es farà servir per denominar els estudiants de mestre d'educació primària. El terme "alumne" denota els estudiants d'educació primària.

[2] En aquesta recerca es farà servir el terme "els estudiants" per referir-nos tant a nois com a noies.

l'autora d'aquesta tesi ha pogut constatar després d'impartir els cursos de didàctica de les matemàtiques a primer curs dels estudis de mestre. Els coneixements de matemàtiques que tinguin en iniciar els estudis condicionaran l'aprenentatge del coneixement didàctic de les matemàtiques i, com a conseqüència, el *com* ensenyaran matemàtiques quan esdevinguin mestres (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2012; p. 6). És important, doncs, identificar els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb els continguts matemàtics.

D'altra banda, els mestres repeteixen experiències viscudes en l'etapa d'alumne i adquireixen algunes idees sobre com s'ha d'ensenyar a partir de l'observació dels mestres que els van formar (Grossman, 1990). Podem inferir d'aquest fet que els estudiants de primer curs de mestre inicien els estudis amb una idea preconcebuda de què vol dir ensenyar, pel fet que fa quinze anys o més que observen com ensenyen altres mestres. Interessa, per tant, identificar els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb l'ensenyament de les matemàtiques.

En els darrers anys s'ha mostrat molt d'interès a millorar la formació inicial del professorat respecte a l'ensenyament de les matemàtiques, un fet que es pot deduir de les nombroses investigacions en aquest camp. Algunes d'aquestes investigacions es poden consultar en la publicació *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan i Wood, 2008), en què es veu exposat clarament com aquests estudis han permès elaborar noves propostes per a la formació inicial.

El marc presentat fa que es tingui interès a centrar la recerca en la formació inicial. L'objectiu general d'aquesta és investigar quins coneixements de matemàtiques i sobre l'ensenyament de les matemàtiques tenen els estudiants de primer curs del grau de mestre d'educació primària. És primordial concretar l'estudi en un contingut de matemàtiques, per la qual cosa s'ha escollit el contingut de les fraccions, perquè apareix als diferents cicles del currículum actual d'educació primària, si bé té més presència als cicles mitjà i superior. També, perquè les fraccions són un dels continguts més complexos de les matemàtiques que s'ensenyen a l'etapa d'educació primària (Ma, 1999). A més, és un contingut bàsic per entendre conceptes més complexos de l'educació secundària. S'ha pogut constatar, a les diferents classes que hem impartit a primer curs de mestre, que les dificultats que presenten els estudiants en relació amb les matemàtiques s'intensifiquen especialment en el contingut de les fraccions i, tal com mostren algunes recerques (Ball, 1990a, 1990b; Harvey, 2012; Kajander i Holm, 2011; McAllister i Beaver, 2012), gran part dels estudiants de mestre presenten uns coneixements dels continguts de fraccions molt procedimentals.

Són nombrosos els estudis que s'ocupen dels coneixements dels futurs mestres sobre l'ensenyament i aprenentatge d'aspectes propis de les fraccions (Ball, 1990a, 1990b; Caglayan i Olive, 2011; Domoney, 2002; Isiksal i Cakiroglu, 2010; Li i Smith, 2008; Lin, Becker, Byun, Yang i Huang, 2013; Newton, 2008; Tirosh, 2000; Tobias, 2013) i que revelen la manca de coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament. Tot i que hi ha recerques espanyoles en relació amb als coneixements dels mestres sobre les matemàtiques (Climent i Carrillo, 2002; Contreras i Blanco, 2001; Montes et al., 2015), la majoria d'investigacions sobre els coneixements dels mestres en l'àmbit de les fraccions s'han dut a terme a l'estranger, moltes als Estats Units.

En la revisió de la literatura que fa referència als coneixements dels mestres sobre les fraccions, s'observa que gran part dels treballs se centren només en l'estudi d'un contingut de fraccions, com per exemple la divisió. Per això, creiem necessari fer un estudi més ampli dels coneixements dels estudiants de mestre, que englobi més continguts de fraccions.

D'altra banda, la majoria d'estudis revisats focalitzen l'atenció en els coneixements dels estudiants de mestre sobre un contingut de fraccions o més, però no en els coneixements dels estudiants sobre com ensenyar aquests continguts. Considerem que és molt important identificar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament dels continguts de fraccions, atès que, tal com s'ha dit més amunt, comencen els estudis de mestre amb una idea preconcebuda de què vol dir ensenyar i, en concret, de què vol dir ensenyar matemàtiques.

2.2 Objectius de la recerca

Recapitulant, la present recerca té per objectiu general *descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions i sobre l'ensenyament de les fraccions.*

Per tal d'assolir l'objectiu general exposat, es volen contestar les preguntes següents:

- Quins són els coneixements sobre fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària?
- Quins són els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària?
- Quines relacions es poden evidenciar entre els coneixements que tenen els estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre fraccions i sobre com ensenyar-les?

Amb la finalitat de contestar aquestes preguntes, s'han definit uns objectius específics a abastar:

- Objectiu 1: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions.

- Objectiu 2: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre l'ensenyament de les fraccions.
- Objectiu 3: Descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre les fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària.

En la figura 2.1 es mostra un esquema amb l'objectiu general i els objectius específics.

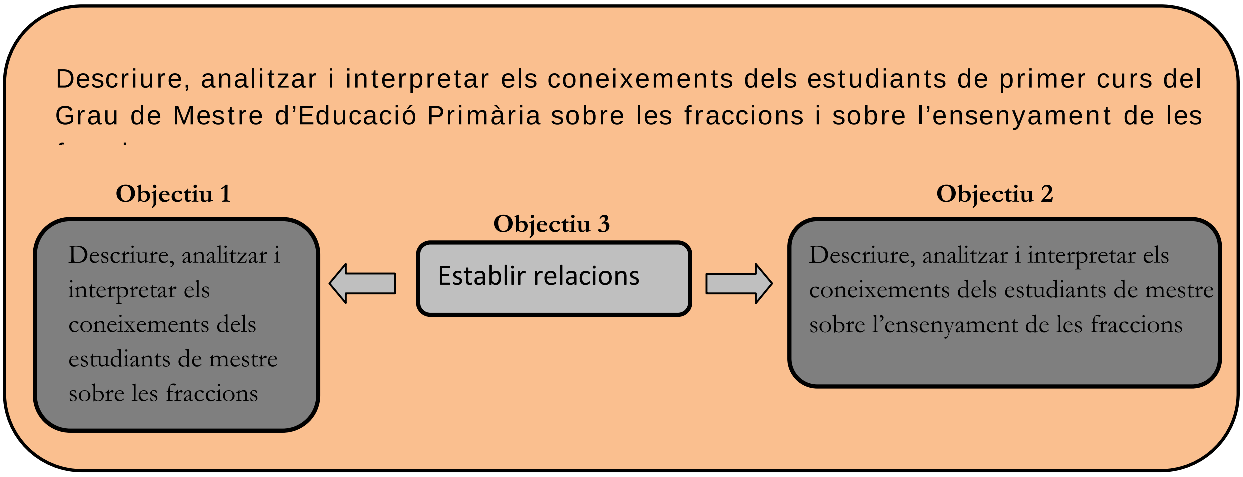


Figura 2.1. Objectius de la recerca i la seva relació.

3 Marc teòric

En aquest capítol es presenten els antecedents i les bases teòriques que fonamenten aquesta recerca. S'ha estructurat en quatre apartats. En el primer, es parla de la caracterització del coneixement professional del professorat, fent un èmfasi especial en la categoria del coneixement didàctic del contingut definida per Shulman (1986, 1987).

El segon centra l'atenció en el coneixement del professorat per ensenyar matemàtiques. Primerament, s'explica el model Mathematical Knowledge for Teaching de Ball et al. (2008) com un dels models més rellevants i utilitzats per identificar els coneixements matemàtics dels mestres. A continuació, s'exposen altres models del coneixement del professorat en l'ensenyament de les matemàtiques. Finalment, es presenten estudis que mesuren el coneixement dels mestres per ensenyar matemàtiques.

El tercer apartat fa referència a les fraccions, perquè l'estudi que es fa dels coneixements dels estudiants de mestre s'ha realitzat sobre aquest contingut; per tant, s'ha considerat necessari aprofundir en aquest tema abans de parlar dels coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i sobre el seu ensenyament.

En el quart i darrer apartat s'entra de ple en el centre d'estudi d'aquesta recerca, els coneixements dels estudiants de mestre sobre fraccions. Concretament, es presenten diverses investigacions en relació amb els coneixements que tenen sobre el significat de fracció, l'equivalència de fraccions, la comparació i ordenació de fraccions, les operacions amb fraccions i la densitat i infinitud dels nombres racionals.

3.1 El coneixement professional del professorat

Difícilment trobarem un estudi sobre el coneixement dels professors que no faci referència a les categories que proposa Shulman (1986, 1987) sobre aquest coneixement. Tenint això present, iniciem aquest apartat fent esment d'alguns dels estudis d'aquest autor que més empremtes han deixat en relació amb la caracterització del coneixement professional del professorat.

Si a finals del segle XIX es donava preferència al coneixement del contingut en les avaluacions dels professors, un segle més tard, emfasitzant la idea del professor efectiu (*teacher effectiveness*), es prioritzaven els procediments d'ensenyament més que no pas el contingut a ensenyar. Aquesta manera d'avaluar de finals del segle XX venia determinada per les recerques creixents destinades a estudiar quins comportaments dels mestres eren necessaris per millorar l'aprenentatge dels alumnes. En aquestes recerques se simplificava la complexitat de l'ensenyament sense tenir-ne en compte un aspecte fonamental: el contingut que s'ensenyava (*the subject matter*) (Shulman, 1986).

Shulman (1986) anomena "*missing paradigm problem*" aquesta absència d'interès en el contingut a ensenyar en les recerques sobre l'estudi de l'ensenyament. Segons l'autor, aquesta desestimació del contingut és greu pel fet que aquestes investigacions condicionen els programes d'avaluació i certificació dels mestres. Des de les polítiques educatives es tenen en compte aquestes recerques que no fan referència al contingut a ensenyar i, com a conseqüència, tampoc es fa referència al contingut en els estàndards d'ensenyament.

Per redreçar aquesta situació, Shulman (1986) i els seus col·legues implementen el programa de recerca "Knowledge Growth in Teaching" per estudiar com els professors aprenen a ensenyar. L'objecte d'estudi es concreta en quines són les fonts del coneixement dels professors, què sap un professor i quan ho sap, com s'adquireixen els nous coneixements, com es recuperen els antics i com es combinen aquests coneixements per formar un coneixement base. Focalitzen aquesta recerca en el desenvolupament de professors de secundària d'anglès, de biologia, de matemàtiques i de ciències socials.

Coincidint amb les reformes per la professionalització de l'ensenyament, Shulman (1987) participa en el projecte de dissenyar una comissió nacional per l'ensenyament en què es volen definir uns estàndards ben fonamentats per poder acreditar els professors. Tot i que els partidaris de la reforma professional afirmen també que existeix un coneixement base per a l'ensenyament, segons Shulman (1987), quan es fa referència a aquest coneixement base no se n'especifica el caràcter. Per això, aquest autor el vol caracteritzar i identificar les fonts d'aquest coneixement per a l'ensenyament, els termes en què es poden conceptualitzar aquestes fonts i quines són les implicacions per a les polítiques docents i la reforma educativa. A més, vol identificar els processos de raonament i acció didàctica dins dels quals els professors utilitzen el coneixement.

La realització dels dos projectes esmentats permet a Shulman (1986, 1987) definir les categories del coneixement base que es mostren a la figura 3.1.

- Coneixement del contingut (*Content knowledge*)
- Coneixement didàctic general, referint-nos especialment a aquells principis i estratègies de gestió i organització d'aula que van més enllà de l'assignatura (*General pedagogical knowledge*)
- Coneixement del currículum, amb un domini especial dels materials i programes que serveixen com a "eina de l'ofici" del docent (*Curriculum knowledge*)
- Coneixement didàctic del contingut, l'especial amalgama entre el contingut i la pedagogia que és pròpia dels docents, la seva manera especial de comprensió professional (*Pedagogical content knowledge*)
- Coneixement dels alumnes i de les seves característiques (*Knowledge of learners and their characteristics*)
- Coneixement dels contextos educatius, que van des del funcionament del grup o aula i la gestió i finançament dels districtes escolars fins al caràcter de les comunitats i cultures (*Knowledge of educational contexts*)
- Coneixement dels objectius, les finalitats i els valors, i els seus fonaments filosòfics i històrics (*Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds*)

Figura 3.1. Categories del coneixement base segons Shulman. Extret de "Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform", de L. S. Shulman, 1987, *Harvard Educational Review*, *57*(1), p. 8.

D'aquestes set categories, tres fan referència a aspectes específics del contingut a ensenyar: coneixement del contingut, coneixement del currículum i coneixement didàctic del contingut. Segons Shulman (1986), el coneixement del contingut "es refereix a la quantitat i l'organització del coneixement *per se* en la ment dels docents. [...] En les diferents disciplines, les maneres d'examinar l'estructura del contingut són diferents" (p. 9). Per Shulman, pensar correctament en el contingut vol dir entendre les estructures de la disciplina en la línia en què la va definir Joseph Schwab.[3] És a dir, "les estructures substantives són la varietat de maneres en què s'organitzen els conceptes bàsics i els principis de la disciplina per incorporar-s'hi com a fets. Les estructures sintàctiques d'una disciplina són les normes que estableixen veritat o falsedat" (Shulman, 1986; p. 9). S'inclou també en aquest domini el coneixement de quins tòpics són centrals i quins són més perifèrics.

El coneixement didàctic del contingut fa referència al coneixement del contingut per a l'ensenyament i, per tant, va més enllà del contingut per si mateix. En aquest domini, Shulman (1986), per als temes que s'ensenyen en una disciplina, hi inclou "les formes més útils de representació d'aquestes idees, les analogies més potents, il·lustracions, exemples, explicacions i demostracions; en poques paraules, les maneres de representar i formular el contingut per fer-lo comprensible als altres" (p. 9). A més, inclou què fa que un contingut sigui fàcil o difícil d'aprendre i quines són les idees dels alumnes a les diferents edats.

El coneixement del currículum "és representat per l'àmplia gamma dels programes dissenyats per a l'ensenyament de continguts i els temes específics en un nivell determinat, la varietat de materials didàctics disponibles en relació amb aquests programes" (Shulman, 1986; p. 10). A més, inclou les característiques per decidir quins currículums o materials concrets convé utilitzar i en quines situacions cal utilitzar-los.

D'ençà que Shulman (1986) va presentar el coneixement didàctic del contingut, són diversos els autors que fan una revisió de diferents investigacions sobre aquest terme (Segall, 2004; Hashweh, 2005, 2013; Ball et al., 2008; Graeber i Tirosh, 2008; Blanco i Contreras, 2012; Kleickmann et al., 2012; Van Driel i Berry, 2012). L'interès pel coneixement didàctic del contingut continua vigent pel fet de ser una categoria que relaciona el contingut a ensenyar i la pràctica educativa. De fet, els articles *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching* (Shulman, 1986) i *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform* (Shulman, 1987), on s'exposa la categoria del coneixement didàctic del contingut, han estat citats en més de 1.200 revistes d'investigació durant les dues dècades posteriors a la seva publicació (Ball et al., 2008). Fins al moment actual, l'article de 1986 de Shulman ha estat citat unes 7.400 vegades i el de 1987, unes 7.500 (Hashweh, 2013).

[3] Vegeu-ne més informació a Shulman, 1986.

Tanmateix, aquesta nova categoria del coneixement didàctic del contingut que proposa Shulman (1986, 1987) ha estat criticada per alguns autors que no estan d'acord amb la seva definició (McEwan i Bull, 1991; Segall, 2004). McEwan i Bull (1991), si bé argumenten que els estudis de Shulman han contribuït en gran mesura a comprendre l'ensenyament, no estan d'acord a distingir el coneixement del contingut i el coneixement didàctic del contingut i proposen l'alternativa que tot coneixement té una dimensió pedagògica:

> Ens preocupa, això no obstant, que la distinció que fa entre coneixement del contingut i coneixement didàctic del contingut introdueixi una complicació innecessària i insostenible dins del marc conceptual en el qual es basa aquesta recerca. [...] La distinció de Shulman no té prou base, perquè tot el coneixement del contingut, tant si el tenen experts com si el tenen professors, té una dimensió pedagògica. (p. 318)

En la mateixa línia dels autors esmentats, Segall (2004), amb interès per com ha de ser la formació dels mestres, proposa examinar la naturalesa educativa del contingut:

> L'enfocament de la formació del professorat respecte al coneixement didàctic del contingut ha d'anar més enllà de la idea d'ensenyar als estudiants a «pedagogitzar» («*pedagogize*») contingut pedagògicament lliure i els ha d'ajudar a reconèixer la naturalesa inherentment pedagògica dels continguts i les seves implicacions per a l'ensenyament i en l'ensenyament. (p. 1)

Marks (1990), com a resultat d'un estudi mitjançant entrevistes a mestres de cinquè de primària sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions, suggereix modificar la descripció del coneixement didàctic del contingut de Shulman (1986, 1987); en concret, estableix que el coneixement didàctic del contingut en matemàtiques està compost per quatre grans àrees: la disciplina per a finalitats educatives, comprensió de la disciplina per part dels estudiants, mitjans per ensenyar la disciplina (textos i materials) i processos d'ensenyament de la disciplina.

Aquest mateix autor (Marks, 1990) explica que "el punt de vista més acceptat sobre el coneixement didàctic del contingut és una adaptació del coneixement de la matèria amb finalitats pedagògiques" (p. 7). Assenyala, però, que hi ha un altre punt de vista: "L'aplicació de principis pedagògics generals a contextos particulars d'una àrea de coneixement" (p. 7).

Aglutinant les dues visions anteriors, el coneixement didàctic del contingut es podria generar de tres maneres diferents: interpretació, especificació i síntesi. El procés d'interpretació es donaria quan el coneixement didàctic del contingut s'obté fent una interpretació del contingut. El procés d'especificació es dóna quan s'apliquen coneixements genèrics a un context concret. El procés de síntesi es porta a terme quan s'obté el coneixement didàctic del contingut com a síntesi del contingut i de coneixements pedagògics generals (Marks, 1990).

Marks (1990) exposa algunes ambigüitats a l'hora de definir el coneixement didàctic del contingut, ja que costa saber on comencen i on acaben el coneixement didàctic del contingut, el coneixement del contingut i el coneixement pedagògic general; tot depèn d'on centrem l'atenció. Però per aquest autor, tot i la dificultat de definir teòricament el coneixement didàctic del contingut, és un coneixement indispensable per a la feina de mestre.

Grossman (1990), en l'estudi amb professors d'anglès de secundària, proposa quatre categories en el seu model de coneixement dels mestres: coneixement de la matèria, coneixement didàctic general, coneixement didàctic del contingut i coneixement del context. Inclou en el coneixement didàctic general la categoria de coneixement dels alumnes i de les seves característiques que proposa Shulman (1986). I les categories de coneixement del currículum i coneixement dels objectius, les finalitats i els valors, les inclou a la seva categoria del coneixement didàctic del contingut. D'aquesta manera, segons Grossman (1990), la categoria de coneixement didàctic del contingut queda formada per quatre components: concepcions de les finalitats de l'ensenyament de la matèria, coneixement de la comprensió dels estudiants, coneixement del currículum i coneixement d'estratègies d'ensenyament.

Comparant els models dels coneixements per ensenyar de Shulman (1986, 1987) i Grossman (1990), es pot veure que el que canvia són les categories generals, però globalment tots dos inclouen els mateixos apartats. Grossman amplia la idea de coneixement didàctic del contingut incloent-hi categories que Shulman (1986, 1987) considerava a banda del coneixement didàctic del contingut: el coneixement del currículum i el coneixement dels objectius, les finalitats i els valors.

Un aspecte que cal mencionar de l'estudi de Grossman (1990) és la caracterització que fa de les fonts a partir de les quals els mestres construeixen el coneixement didàctic del contingut: aprenentatge de l'observació, antecedents disciplinaris, cursos professionals i aprenentatge de l'experiència. Dins de l'aprenentatge de l'observació, Grossman (1990) hi considera "com els mestres repeteixen les experiències que ells van experimentar com a estudiants" (p. 10), com els futurs mestres "se serveixen del que recorden dels seus interessos i habilitats en una matèria concreta per formar-se un coneixement de la comprensió dels estudiants en aquella àrea" (p. 11) i com escullen els continguts curriculars segons la seva experiència. En els antecedents disciplinaris, l'autora hi inclou el coneixement de la disciplina com a aspecte que condiciona la decisió de quins són els continguts importants i com seqüenciar-los. En referència a l'aprenentatge de l'experiència, segons Grossman (1990), els mestres "adquireixen coneixement didàctic del contingut a partir de l'experiència de l'aula" (p. 15).

Hashweh (2013) conceptualitza el coneixement didàctic del contingut com una recopilació de construccions professionals del docent (*collection of teacher professional constructions*), és a dir: "El coneixement didàctic del contingut és el conjunt del repertori personal i privat de contingut específic basat en esdeveniments generals, així com les construccions basades en històries pedagògiques que el mestre amb experiència ha desenvolupat com a resultat de la planificació repetida, l'ensenyament i la reflexió sobre l'ensenyament dels temes que ha ensenyat més habitualment" (p. 120-121). Una de les fonts principals per al desenvolupament de les construccions professionals del docent és l'experiència. Els mestres construeixen i acumulen coneixement quan planifiquen les sessions d'un tema determinat. Per portar a terme aquesta planificació necessiten altres fonts: "Les més importants d'aquestes fonts són les altres categories del coneixement i les creences dels mestres: coneixement de la matèria, dels estudiants, de l'avaluació i altres categories" (Hashweh, 2005; p. 278).

Pel que fa a l'adquisició del coneixement base per a l'ensenyament, Shulman (1987) apunta quatre fonts: la formació acadèmica en la disciplina a ensenyar, les estructures i els materials didàctics, la literatura educativa especialitzada i la saviesa adquirida amb la pràctica. Tant Shulman (1987) com Grossman (1990) i Hashweh (2013) fan referència a l'experiència com a aspecte clau per al coneixement didàctic del contingut. Conèixer les fonts del coneixement didàctic del contingut dels mestres és bàsic per dissenyar els programes de formació inicial i millorar el desenvolupament professional dels docents.

Després d'examinar diversos estudis sobre el coneixement didàctic del contingut definit per Shulman (1986), es pot concloure de manera plausible que aquest concepte ha canviat la perspectiva de les recerques sobre els coneixements que han de tenir els mestres per ensenyar una disciplina. Això no significa que el coneixement didàctic del contingut sigui un concepte estàtic; més aviat és una idea que ha generat tant crítiques com reformulacions i ampliacions. El model de Shulman, cal tenir-lo en compte com a punt de partida en la formació de professors, però, tanmateix, té un abast excessivament general en relació amb quin ha de ser el coneixement dels mestres que ensenyen matemàtiques a primària. A banda d'això, els estudis de Shulman (1986, 1987) es focalitzen en professors de secundària i, malgrat que el mateix Shulman opina que els resultats poden traslladar-se a mestres d'educació primària, no ho afirma de forma taxativa. En l'apartat següent ens centrarem en recerques relatives al model necessari per ensenyar matemàtiques i ens aproximarem més al centre d'estudi d'aquest treball.

3.2 El coneixement del professorat per ensenyar matemàtiques

En l'ensenyament de les matemàtiques hi ha tres motius principals per dissenyar sistemes d'avaluació dels coneixements matemàtics dels mestres. Primerament, l'entorn polític exigeix que els mestres estiguin altament qualificats per ensenyar matemàtiques. El segon motiu neix de la necessitat d'establir evidències entre els efectes de la formació dels mestres en els seus coneixements i habilitats i en l'aprenentatge dels seus alumnes. El tercer motiu passa per la necessitat de caracteritzar el coneixement professional dels mestres (Hill et al., 2007). Hill et al. (2007) fan una revisió històrica dels exàmens per a la certificació dels mestres als Estats Units i la relacionen amb l'avaluació del coneixement matemàtic dels mestres:

> Tant els primers exàmens de certificació com els estudis acadèmics es van construir en absència d'una teoria elaborada sobre els elements del coneixement matemàtic per a l'ensenyament, un fet que va conduir a importants limitacions a l'hora d'interpretar aquests primers treballs. (p. 112)

La introducció de la categoria de coneixement didàctic del contingut en els estudis de Shulman (1986, 1987) exposats en l'apartat 3.1 d'aquest capítol, que posa en evidència que els mestres han de tenir un coneixement de la disciplina diferent del que necessiten els professionals que no són mestres, és una base important dels estudis sobre la mesura dels coneixements matemàtics dels mestres i del disseny dels models sobre els coneixements matemàtics per a l'ensenyament. Alguns estudis han fet propostes de com definir aquest coneixement més específic per ensenyar matemàtiques i, en algun cas, també definir models per explicar els coneixements involucrats en l'ensenyament de les matemàtiques (Ball et al., 2008; Fennema i Franke, 1992; Ma, 1999; Petrou i Goulding, 2011; Turner i Rowland, 2011).

El model Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008) és un dels models actualment més rellevants i s'ha utilitzat tant per identificar els coneixements matemàtics dels mestres com per dissenyar nous models del coneixement matemàtic dels mestres a partir de fer-ne modificacions (Blanco i Contreras, 2012; Kleickmann et al., 2012; Tatto i Senk, 2011; Van den Kieboom, 2013).

3.2.1 El model Mathematical Knowledge for Teaching

Ball et al. (2008) fan un pas endavant a l'hora de definir què s'entén per coneixement del contingut (*content knowledge*) i coneixement didàctic del contingut (*pedagogical content knowledge*) en el cas de l'ensenyament de les matemàtiques. A aquest efecte, porten a terme dos projectes: "Mathematics Teaching and Learning to Teach" i "Learning Mathematics for Teaching". En el primer projecte, estudien pràctiques d'ensenyament per tal d'analitzar les necessitats matemàtiques de l'ensenyament; en el segon, pretenen mesurar el coneixement del contingut per a l'ensenyament de les matemàtiques. "Les mesures van proporcionar un camí per investigar la naturalesa, el rol i la importància dels diferents tipus de coneixement matemàtic per a l'ensenyament" (Ball et al., 2008; p. 390).

Ambdós projectes volen estudiar quin és el coneixement matemàtic necessari per a l'ensenyament, tal com diu el nom del seu model, entenent aquest coneixement com el coneixement matemàtic per portar a terme la tasca d'ensenyar matemàtiques. Això significa que no focalitzen les investigacions només en els temes del currículum escolar que volem que els nens aprenguin, sinó que les dirigeixen a estudiar quin és el coneixement que necessiten els mestres per ensenyar de manera efectiva:

> Com que sembla obvi que els professors han de conèixer els temes i procediments que ensenyen –primers, fraccions equivalents, funcions, translacions i rotacions, factorització, etc.–, hem decidit centrar-nos en la manera com els professors han de conèixer aquest contingut. A més a més, volem determinar què més han de saber sobre matemàtiques i com i on podrien utilitzar aquest coneixement matemàtic a la pràctica. (Ball et al., 2008; p. 395)

Des d'aquesta perspectiva, el subjecte d'aquests estudis no és el mestre, sinó la "tasca d'ensenyament" (*work of teaching*), un concepte utilitzat per Ball, Hill i Bass (2005) i Ball et al. (2008) en el sentit que apareix en els estudis de Ball i Lampert (citats a Ball et al., 2005), els quals analitzen què fan els mestres quan ensenyen matemàtiques.

Per ensenyament, Ball et al. (2005) entenen "totes les coses que fan els mestres per donar suport a la instrucció dels alumnes" (p. 17) o, dit d'altra manera, "totes les coses que els mestres han de fer per donar suport a l'aprenentatge dels alumnes" (Ball et al., 2008; p. 395). Es refereixen tant a la feina d'ensenyar lliçons a l'aula com a altres tasques presents durant el curs: planificar classes, avaluar la feina dels alumnes, parlar amb els pares, preparar els deures, atendre la diversitat, etc. Segons Kilpatrick, Swafford i Findell (citat a Ball et al., 2005; p. 17), "cadascuna d'aquestes tasques implica un coneixement de les idees matemàtiques, habilitats de raonament i comunicació matemàtica, agilitat amb exemples i termes i consideració sobre la naturalesa del domini matemàtic".

Un altre concepte que guia les investigacions de Ball i els seus col·legues a l'hora de definir el coneixement matemàtic necessari per a l'ensenyament i també les de Shulman per definir el concepte de coneixement didàctic del contingut és el de "psicologització" de la disciplina (*"psychologizing" the subject matter)* de Dewey (Ball et al., 2005; Ball et al., 2008). Aquest mateix autor precisa: "«psicologització» del contingut veient les estructures de la disciplina mentre s'aprèn i no només en la seva forma lògica acabada" (Ball et al., 2005; p. 21). És en aquest sentit que els mestres haurien de ser capaços d'ajudar els alumnes a entendre una idea i no només saber contestar les preguntes amb contingut matemàtic, i aquí pren importància el discurs dels mestres per provocar comprensió en els alumnes i per no potenciar les idees errònies (Ball et al., 2005).

Basant-se en diferents estudis qualitatius de l'ensenyament i dels resultats de "Study of Instructional Improvement", Ball et al. (2008) desenvolupen i validen com mesurar el coneixement matemàtic per a l'ensenyament i arriben a la conclusió que el coneixement matemàtic necessari per a l'ensenyament és multidimensional. Hill et al. (citat a Ball et al., 2008) ho defineixen així: "L'habilitat matemàtica general no és suficient per al coneixement i les habilitats que s'impliquen en l'ensenyament de les matemàtiques" (p.396). En el marc presentat, Ball et al. (2008) defineixen l'estructura del coneixement matemàtic per a l'ensenyament (Mathematical Knowledge for Teaching) a partir de sis categories:

-El coneixement comú del contingut (*common content knowledge*, CCK) fa referència al coneixement matemàtic i les tècniques que s'utilitzen en àmbits diferents de l'ensenyament. "Els mestres necessiten saber allò que ensenyen; saber reconèixer quan els alumnes donen respostes incorrectes o quan els llibres de text donen definicions inexactes. [...] En resum, han de ser capaços de fer la feina que assignen als alumnes" (p. 399). El terme *comú* no vol dir que tothom l'utilitzi; vol dir que es fa servir en altres àmbits i que, per tant, no és específic de l'ensenyament.

-El coneixement especialitzat del contingut (*specialized content knowledge*, SCK) "és el coneixement i l'habilitat matemàtica únics per a l'ensenyament" (p. 400). Els mestres han de ser capaços de descomprimir el coneixement matemàtic de manera que els alumnes el comprenguin i puguin després utilitzar idees i procediments matemàtics més complexos. Alguns exemples de maneres com els mestres descomprimeixen el coneixement matemàtic els trobem quan fan servir el llenguatge matemàtic correctament, escullen i utilitzen les representacions efectivament i expliquen i justifiquen idees matemàtiques.

De fet, un dels resultats més importants de Ball et al. (2008) és que l'ensenyament de les matemàtiques requereix aquesta forma especialitzada de coneixement "pur" del contingut:

> Potser el més interessant per nosaltres ha estat l'evidència que l'ensenyament requereix una forma especialitzada del coneixement pur de la disciplina: «pura» perquè no està barrejada amb el coneixement dels alumnes o de pedagogia i és, per tant, diferent del coneixement didàctic del contingut identificat per Shulman i els seus col·legues, i «especialitzada» perquè no s'utilitza en àmbits diferents de l'ensenyament de les matemàtiques. Aquesta singularitat és el que fa especial aquest coneixement del contingut. (p. 396)

-El coneixement del contingut i dels alumnes (*knowledge of content and students*, KCS) "és un coneixement que combina coneixement sobre els alumnes i coneixement sobre les matemàtiques. Els mestres haurien d'anticipar què és probable que pensin els alumnes i què els confondrà" (p. 401). Els mestres cal que sàpiguen anticipar quins exemples interessaran als alumnes i els motivaran, quines tasques trobaran fàcils o difícils i interpretar els seus pensaments. En resum, "és central per a aquestes tasques conèixer les concepcions i idees errònies habituals en els alumnes sobre un contingut matemàtic determinat" (p. 401).

-El coneixement del contingut i de l'ensenyament (*knowledge of content and teaching*, KCT) "combina coneixement sobre l'ensenyament i coneixement sobre les matemàtiques. [...] És una amalgama que mescla una idea o un procediment matemàtic específic i la familiaritat amb els principis pedagògics per a l'ensenyament d'aquest contingut concret" (p. 402). El coneixement del contingut i de l'ensenyament, per exemple, requereix saber quins exemples escollir perquè els alumnes aprofundeixin en la comprensió d'un contingut, avaluar quina representació és més adequada per ensenyar una idea concreta o quina tasca triar en funció del que es vol ensenyar.

-El coneixement del contingut i del currículum (*knowledge of content and curriculum*) fa referència a la categoria de currículum de Shulman (1986), explicada en l'apartat anterior.

-El coneixement de l'horitzó del contingut matemàtic (*horizon content knowledge o horizon knowledge*) és el que fa referència a les relacions entre els temes matemàtics. Per exemple, un mestre ha de saber les relacions que hi ha entre els continguts que estan aprenent els seus alumnes en un curs i els que aprendran en els cursos següents.

Ball et al. (2008) consideren les categories de coneixement comú del contingut (CCK), coneixement especialitzat del contingut (SCK) i coneixement de l'horitzó del contingut matemàtic (*horizon content knowledge*) dins del coneixement de la disciplina (*subject matter knowledge*), mentre que les categories de coneixement del contingut i dels alumnes (KCS), coneixement del contingut i de l'ensenyament (KCT) i coneixement del contingut i del currículum, les engloben en el coneixement didàctic del contingut definit per Shulman (1986, 1987).

Tal com proposa Grossman (1990), la categoria de coneixement del contingut i del currículum s'ha considerat, si bé provisionalment, dins del coneixement didàctic del contingut, però no és clar si es tracta d'una categoria a part, si forma part de la categoria de coneixement del contingut i de l'ensenyament o bé si podria coincidir amb altres categories (Ball et al., 2008).

Passa el mateix amb la categoria de coneixement de l'horitzó del contingut. Ball et al. (2008) no estan segurs que formi part del coneixement de la disciplina, ja que podria ser una categoria que coincidís amb d'altres. Fernández, Figueiras, Deulofeu i Martínez (2011) refinen el concepte d'horitzó del contingut matemàtic avançant en la línia de definir el paper d'aquest coneixement en l'esquema del coneixement matemàtic per a l'ensenyament (MKT).

A la figura 3.2 es mostra l'estructura del coneixement matemàtic per a l'ensenyament proposat per Ball et al., (2008) que classifica les sis categories explicades més amunt en coneixement de la disciplina i coneixement didàctic del contingut.

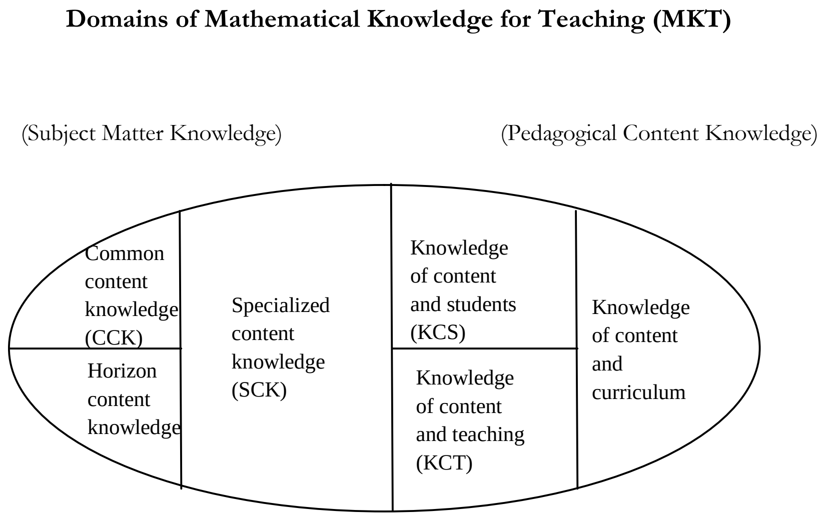


Figura 3.2. Esquema dels dominis del coneixement matemàtic per a l'ensenyament (MKT). Extret de "Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?", de D. L. Ball et al., 2008, *Journal of Teacher Education*, *59*(5), p. 403.

Ball et al. (2008) concreten molt més el model de Shulman (1987) en el cas de l'ensenyament de les matemàtiques. Aquesta concreció pot ajudar a l'hora d'implementar tant programes de desenvolupament professional dels mestres en exercici com programes de formació inicial.

Tot i la concreció d'aquest model respecte als dominis del coneixement matemàtic per a l'ensenyament, es fan necessàries més revisions, ja que els mateixos autors hi detecten problemes. El primer rau en el fet que el model s'emmarca en la pràctica dels mestres. En situacions d'ensenyament en què els mestres han de fer ús de les matemàtiques, pot passar que aquestes situacions es puguin gestionar utilitzant tipus de coneixement diferents: un mestre pot fer servir el coneixement especialitzat i un altre, el coneixement del contingut i dels alumnes (Ball et al., 2008).

Un problema derivat de l'anterior resulta de com mesurar el coneixement en el context en què s'utilitza per poder estudiar amb més detall el paper d'aquestes categories de coneixement en els cursos d'ensenyament (Ball et al., 2008).

També és un problema relacionat amb l'anterior el fet de delimitar les categories: "No sempre és fàcil discernir on se separa una de les nostres categories de la següent, i això afecta la precisió (o la manca de precisió) de les nostres definicions" (Ball et al, 2008; p. 403). Hi ha temes matemàtics en què no és fàcil diferenciar quin coneixement és coneixement comú del contingut o bé coneixement especialitzat del contingut.

Malgrat aquesta manca de definició per diferenciar totalment els coneixements que fan referència a una categoria o una altra del model MKT, podem dir que, encara avui, és un model en què s'està treballant.

3.2.2 Altres models del coneixement del professorat en l'ensenyament de les matemàtiques

El grup d'investigació de la Universitat de Huelva presenta el model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) ["coneixement especialitzat del professor de matemàtiques"] com a refinament del model MKT de Ball i els seus col·legues (Montes et al., 2015). És destacable el fet que els autors parlen de coneixement especialitzat del professor de matemàtiques en comptes de coneixement del contingut especialitzat, tal com apareix en el model MKT. En el seu model, presenten tres subdominis corresponents a la categoria de coneixement de la disciplina de Shulman i tres més a la categoria de coneixement didàctic del contingut.

Els tres subdominis que formen part del coneixement de la matèria, anomenada pels autors coneixement de les matemàtiques, són: coneixement dels temes (KOT), coneixement de l'estructura de les matemàtiques (KSM) i coneixement de les pràctiques matemàtiques (KPM). La categoria de coneixement didàctic del contingut conté els subdominis següents: coneixement de l'ensenyament de les matemàtiques (KMT), coneixement de les característiques de l'aprenentatge de les matemàtiques (KFLM) i coneixement dels estàndards d'aprenentatge en matemàtiques (KMLS).

El coneixement dels temes (KOT) fa referència als continguts matemàtics i als seus significats, com també a les definicions i representacions del contingut. El coneixement de l'estructura de les matemàtiques (KSM) es refereix a les relacions matemàtiques podent tractar la matemàtica elemental des d'una perspectiva avançada o, a la inversa, abordar matemàtiques avançades de forma elemental. El coneixement de les pràctiques matemàtiques (KPM) conté el coneixement sobre com es construeix la matemàtica, com ara conèixer els tipus de demostració o raonament matemàtic.

El coneixement de l'ensenyament de les matemàtiques (KMT) inclou el coneixement de diferents estratègies, materials, recursos o ajudes. El coneixement de les característiques de l'aprenentatge de les matemàtiques (KFLM) engloba els coneixements sobre l'aprenentatge del contingut per part dels alumnes, com ara el coneixement de les dificultats, els errors i els obstacles dels alumnes o les concepcions i idees prèvies. El coneixement dels estàndards d'aprenentatge en matemàtiques (KMLS) es refereix a les guies i els documents que poden ajudar a seqüenciar els continguts, incloent-hi el currículum.

Investigadors de la Universitat Autònoma de Barcelona (Fernández et al., 2011), estudiant la transició de primària a secundària i focalitzant la recerca en els professors i en el seu coneixement matemàtic, perfilen la categoria d'horitzó del contingut matemàtic definit per Ball et al. (2008) i també el paper de les categories del model de Ball et al. (2008). Inicialment, interpreten el model MKT sense incloure-hi la categoria d'horitzó del contingut matemàtic. Distingeixen les categories del model MKT que s'expressen durant la pràctica docent i les que no hi estan vinculades necessàriament. Fernández et al. (2011) consideren que les categories de coneixement especialitzat del contingut (SCK), coneixement del contingut i dels alumnes (KCS) i coneixement del contingut i de l'ensenyament (KCT) intervenen directament en la pràctica docent i, per tant, són de naturalesa *en acció*, mentre que les categories de coneixement comú del contingut (CCK) i coneixement del contingut i del currículum (KCC) no hi estan relacionades i, per això, els autors esmentats les consideren coneixement fonamental (vegeu figura 3.3).

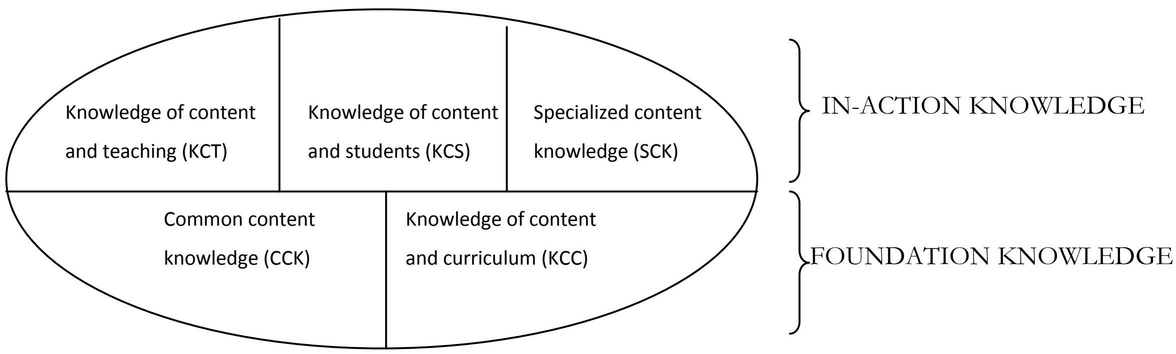
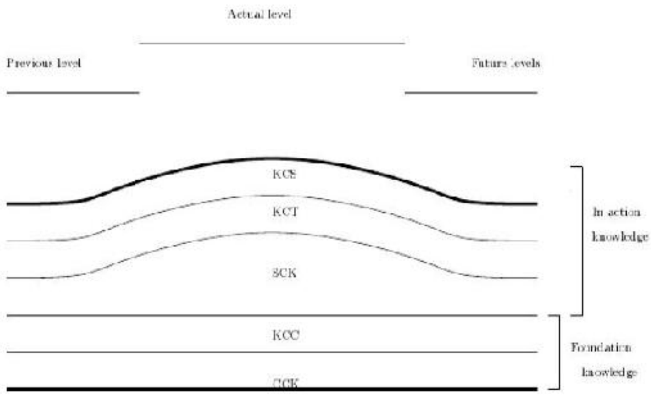


Figura 3.3. Categories del coneixement matemàtic per a l'ensenyament sense l'horitzó del contingut matemàtic. Extret de "Re-defining HCK to Approach Transition", de S. Fernández et al., 2011, dins M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (ed.), *Actas del CERME 7*, (p. 2644). Rzeszów, Polònia: ERME.

La categoria d'horitzó del contingut matemàtic (HCK), segons Fernández et al. (2011), no té la mateixa naturalesa que les altres. Aquesta categoria engloba coneixement tant matemàtic com pedagògic i influencia els coneixements de les categories KCT, KCS i SCK. A més, sense aquestes categories no pot aparèixer el coneixement de l'horitzó del contingut matemàtic. Tals idees expliquen per què els autors no consideren la categoria d'horitzó matemàtic una categoria a part del model MKT. Sí que la consideren una categoria necessària per a la perspectiva longitudinal dels mestres en l'ensenyament de les matemàtiques. Amb aquestes premisses, doncs, proposen un nou marc del coneixement per ensenyar matemàtiques incloent-hi la categoria d'horitzó del contingut matemàtic (vegeu figura 3.4)



Actual level
Previous level
Future levels
KCS
KCT
SCK
KCC
CCK
In action knowledge
Foundation knowledge

interrelació dels tres components del coneixement en combinació amb les creences crearan un únic conjunt de coneixements per a aquest context.

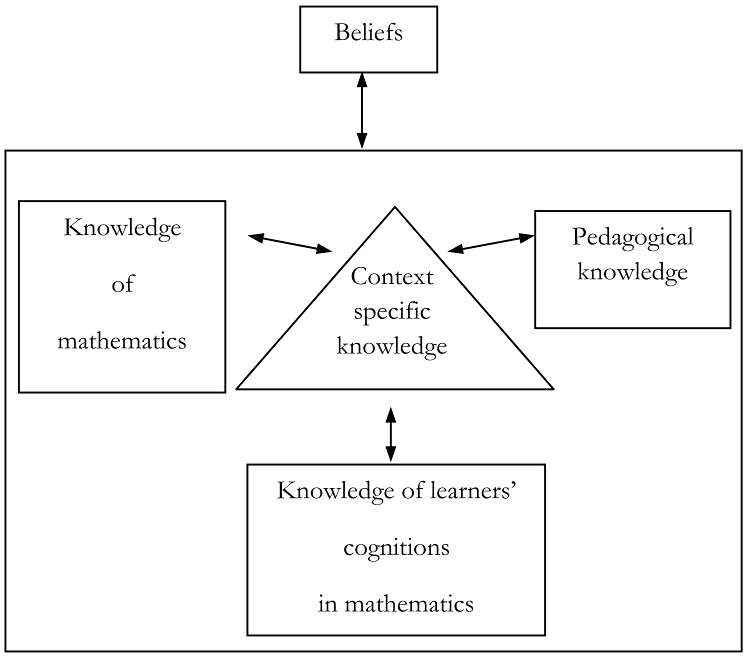


Figura 3.5. El coneixement dels mestres: Desenvolupament en el seu context. Extret de "Teachers' Knowledge and its Impact", d'E. Fennema i M. L. Franke, 1992, dins D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (p. 162). Nova York: Macmillan.

D'altra banda, el Knowledge Quartet ["quartet de coneixement"] és un altre model que posa de manifest la importància d'examinar el coneixement del contingut matemàtic dels mestres durant la pràctica de l'ensenyament (Rowland, 2008). Aquest és un model obtingut de l'anàlisi de la pràctica. Per obtenir les quatre categories d'aquest model, es van observar i analitzar unes gravacions de sessions portades a terme per futurs mestres del Regne Unit que seguien el curs per obtenir el certificat del postgrau en educació (PGCE): futurs mestres de 3 a 8 anys (*early years*) i futurs mestres de 7 a 11 anys (*primary years*) (Rowland, 2008; Turner i Rowland, 2011). Les categories del quartet de coneixement són: fonaments (*foundation*), transformació (*transformation*), connexió (*connection*) i contingència (*contingency*).

A la categoria de fonaments, s'hi inclou la base teòrica i les creences del mestre que ha adquirit fins al moment, des de la seva escolarització fins a la formació de mestre. Aquesta categoria és la base per a les altres tres. Forma part d'aquesta categoria:

> El coneixement i la comprensió de les matemàtiques per si mateixes; el coneixement dels tractats significatius de la literatura i el pensament que ha resultat de la investigació sistemàtica en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques; el sistema de creences sobre matemàtiques, incloent-hi les creences sobre per què i com s'aprenen les matemàtiques. (Turner i Rowland, 2011; p. 200)

Dins la categoria de transformació, s'hi contemplen les maneres i els contextos en què el coneixement influencia la preparació i la realització de l'ensenyament. S'hi considera el coneixement en acció, tant per la planificació com pel fet d'ensenyar. En aquesta categoria els alumnes són el punt de mira. Aquesta categoria "inclou l'ús d'exemples per ajudar a adquirir un concepte i per mostrar procediments, i la selecció d'exemples d'exercicis per a l'activitat de l'alumne" (Turner i Rowland, 2011; p. 201).

La categoria de connexió fa referència a la coherència de la planificació o de l'ensenyament en una activitat o una seqüència d'activitats. Per tal que hi hagi aquesta coherència cal seqüenciar temes tenint en compte l'ordenació d'activitats. Per dur a terme aquesta seqüenciació, a més de les connexions en les matemàtiques en si mateixes, cal ser conscient de les demandes cognitives de cada tema i tasca (Turner i Rowland, 2011).

La quarta i última categoria del model Knowledge Quartet s'anomena contingència i fa referència a les respostes i decisions que pren el mestre mentre ensenya en situacions que no estaven planificades, com per exemple què fer segons les intervencions dels alumnes que no es poden planificar (Turner i Rowland, 2011).

Petrou i Goulding (2011) presenten un model del coneixement matemàtic del mestre com a síntesi dels models de Shulman (1986, 1987), Ball et al. (2008), Fennema i Franke (1992) i Rowland (2008). Proposen tres categories interrelacionades: coneixement del contingut, coneixement didàctic del contingut i coneixement del currículum. El coneixement del contingut el troben necessari per poder desenvolupar el coneixement didàctic del contingut. El coneixement del currículum, aspecte que consideren central, també està relacionat amb les altres dues categories (vegeu figura 3.6). El coneixement del contingut i el coneixement didàctic del contingut determinen com els mestres interpreten i utilitzen el currículum i, d'altra banda, segons Ball i Cohen o Petrou (citats a Petrou i Goulding, 2011; p. 22), la interpretació dels materials curriculars condicionarà la manera com els mestres fan servir aquests materials en l'ensenyament.

En la línia de Fennema i Franke (1992), en aquest model el coneixement s'entén en el context i "el context en què treballen els mestres és l'estructura que defineix els components del coneixement central per a l'ensenyament de les matemàtiques" (Petrou i Goulding, 2011; p. 21). Petrou i Goulding (2011) inclouen en aquest "context" el sistema educatiu, els objectius de l'educació matemàtica, el currículum i materials associats (com ara llibres de text) i el sistema d'avaluació.

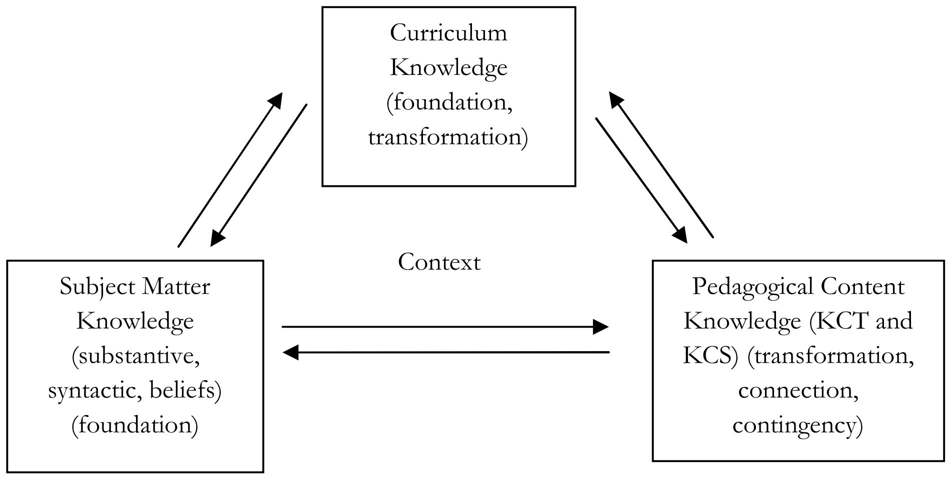


Figura 3.6. Síntesi dels models del coneixement matemàtic dels professors. Extret de "Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching", de M. Petrou i M. Goulding, 2011, dins T. Rowland i K. Ruthven (ed.), *Mathematical Knowledge in Teaching*, (p. 21). Londres: Springer.

Ma (1999) estudia les diferències entre els coneixements de matemàtiques per a l'ensenyament de vint-i-tres mestres dels Estats Units i de setanta-dos mestres de la Xina i com la manera com comprenen els mestres xinesos les matemàtiques i el seu ensenyament condiciona l'èxit dels alumnes. En aquesta recerca també es mostren factors que expliquen la comprensió que tenen els mestres xinesos dels coneixements matemàtics i les dificultats que s'hi troben els mestres dels Estats Units. La investigació es focalitza en quatre temes concrets: resta, multiplicació, divisió de fraccions i la relació entre l'àrea i el perímetre. Per a cada tema es presenta als mestres de la recerca una situació d'aula on intervé una de les quatre tasques d'ensenyament: ensenyar un tema, respondre a un error d'un estudiant, generar una representació d'un tema determinat i respondre a una idea nova plantejada per un alumne. Els mestres dels Estats Units es van centrar sobretot en els procediments i van demostrar que dominaven la competència algorítmica de la resta i la multiplicació i que tenien dificultats en la divisió de fraccions i la relació del perímetre i l'àrea, mentre que la majoria dels mestres xinesos van demostrar competència algorítmica i comprensió conceptual en els quatre temes.

Els mestres xinesos de la recerca de Ma (1999), a diferència dels mestres dels Estats Units, eren capaços d'explicar el perquè dels passos d'un algoritme, justificar les explicacions segons propietats matemàtiques, trobar diferents maneres de resoldre un càlcul o connectar diferents conceptes matemàtics, com ara les operacions bàsiques. De fet, Ma va concloure que un grup d'aquests mestres xinesos tenia una comprensió profunda de les matemàtiques fonamentals (*profound understanding of fundamental mathematics*, PUFM) i que l'havien desenvolupat durant la seva carrera docent. Aquesta comprensió profunda de les matemàtiques manifesta les quatre propietats següents: connectivitat (*connectedness*), perspectives múltiples (*multiple perspectives*), idees bàsiques (*basic ideas*) i coherència longitudinal (*longitudinal coherence*). Connectivitat fa referència a les connexions que estableix el mestre entre conceptes i procediments matemàtics. Perspectives múltiples inclou el fet de veure una mateixa idea des de diferents punts de vista o d'arribar a una solució de diferents maneres. Per tant, doncs, "els mestres poden conduir els alumnes a la comprensió flexible de la disciplina" (p. 122). Idees bàsiques fa referència al fet de tenir present les idees i els principis bàsics en matemàtiques. Coherència longitudinal vol dir entendre tot el currículum de primària, i no només els continguts del curs que s'imparteix, de manera que un mestre amb aquesta propietat pot ajudar un alumne a repassar conceptes apresos prèviament i saber què haurà d'aprendre més endavant per oferir-li oportunitats d'assolir-ho. La coherència longitudinal coincideix amb la categoria d'horitzó matemàtic definit per Ball et al. (2008).

Examinant els diferents models dels coneixements dels mestres per ensenyar matemàtiques, s'aprecia que no hi ha un únic model consensuat pels investigadors. L'existència de tal varietat de models es pot deure a les diferències significatives a l'hora d'entendre el coneixement del contingut (CK) i el coneixement didàctic del contingut (PCK) (Askew, 2014). Fins i tot, tal com argumenta Huillet (citat a Askew, 2014), hi ha poca coherència per part d'alguns autors a l'hora de definir els mateixos termes en diferents estudis.

El model de Petrou i Goulding (2011) intenta aglutinar aspectes essencials dels altres models (Shulman, 1986, 1987; Ball et al., 2008; Fennema i Franke, 1992, i Turner i Rowland, 2011) i relacionar les categories de cada model. Té en compte el coneixement dels mestres en el context, element essencial en els models de Fennema i Franke (1992), del Knowledge Quartet i del Mathematical Knowledge for Teaching. Les categories proposades per Petrou i Goulding (2011) són les tres categories de Shulman (1986) que fan referència al contingut (coneixement del currículum, coneixement del contingut i coneixement didàctic del contingut), però emfasitzant les interrelacions entre aquestes. Per Fennema i Franke (1992), aquestes interrelacions culminen en un conjunt de coneixements per ensenyar en un context determinat. Les creences es tenen en compte en tots els models presentats a excepció del de Ball et al. (2008).

En un sentit o en un altre, tots aquests models fan referència al coneixement del contingut, al coneixement didàctic del contingut, al coneixement del currículum, al coneixement de les idees dels alumnes i a les estratègies d'ensenyament, tot i que cada model els distribueix, concreta i relaciona de manera diferent en categories diferents. Algunes categories, però, presenten força semblances: per exemple, la categoria de connexió del Knowledge Quartet té relació amb la característica del model de Ma anomenada connectivitat.

Els mateixos autors que exposen el model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) (Montes et al., 2015) expliquen que la categoria de coneixement matemàtic del professor de matemàtiques (MK), dividida en els tres subdominis coneixement dels temes

(KOT), coneixement de l'estructura de les matemàtiques (KSM) i coneixement de les pràctiques matemàtiques (KSM), està estretament relacionada amb les propietats de la comprensió profunda de la matemàtica fonamental definida per Ma (1999). Concretament, relacionen el coneixement dels temes (KOT) i de l'estructura de les matemàtiques (KSM) amb les propietats de connectivitat i idees bàsiques de Ma (1999); el coneixement dels temes (KOT) el relacionen també amb les múltiples perspectives, i el coneixement curricular, amb la coherència longitudinal.

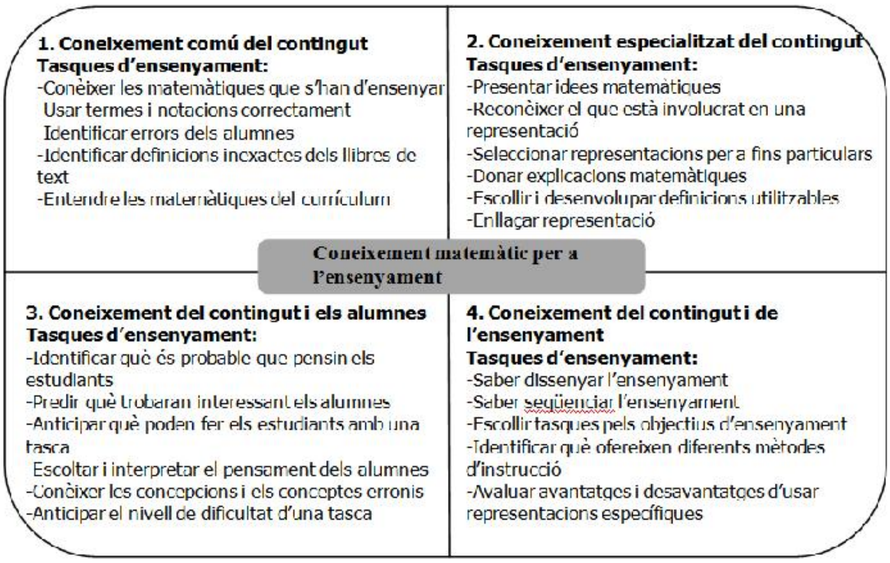
El model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) del grup d'investigadors de Huelva també coincideix amb el model MKT de Ball et al. (2008) en la manera de dividir els coneixements que han tenir els mestres per a l'ensenyament de les matemàtiques en dues grans categories, l'una referida al coneixement de la matèria i l'altra al coneixement didàctic del contingut. La divisió en subcategories del coneixement didàctic del contingut té més semblances en els dos models que no pas la divisió en categories del coneixement de la disciplina. Tots dos models consideren una categoria que fa referència als alumnes i al contingut, una altra a l'ensenyament i una tercera al coneixement dels documents curriculars.

En els diferents models, a part de la concreció de cada categoria, també canvia la relació entre aquestes. El model de Ball (2008) pensem que és aquell en què es perceben menys les relacions entre les diferents categories, però, en canvi, és el que perfila millor el coneixement matemàtic amb la distinció entre coneixement comú i coneixement especialitzat del contingut.

Malgrat la diversitat de models per als coneixements dels mestres, segons Van Driel, Verloop i De Vos (citat a Askew, 2014), hi ha dos aspectes del coneixement didàctic del contingut que els autors consideren essencials: "(*a*) coneixement de concepcions específiques i dificultats d'aprenentatge pel que fa a un contingut determinat i (*b*) coneixement de representacions i estratègies d'ensenyament pel que fa a un contingut concret" (p. 8). Aquestes idees reforcen l'existència d'un coneixement específic de la disciplina per a l'ensenyament que és diferent del coneixement de la disciplina.

3.2.3 El model Mathematical Knowledge for Teaching i els estudis que mesuren els coneixements dels mestres

Si bé no hi ha evidències que vinculin de forma clara el coneixement del contingut matemàtic amb els resultats d'aprenentatge dels alumnes, el coneixement matemàtic per a l'ensenyament dels mestres sí que condiciona com es porten a terme les sessions d'ensenyament (Askew, 2014). Aquest fet justifica la necessitat de mesurar els coneixements per ensenyar matemàtiques dels mestres i també el fet de voler-ne determinar la naturalesa.


1. Coneixement comú del contingut
Tasques d'ensenyament:
-Conèixer les matemàtiques que s'han d'ensenyar
Usar termes i notacions correctament
Identificar errors dels alumnes
-Identificar definicions inexactes dels llibres de text
-Entendre les matemàtiques del currículum
2. Coneixement especialitzat del contingut
Tasques d'ensenyament:
-Presentar idees matemàtiques
-Reconèixer el que està involucrat en una representació
-Seleccionar representacions per a fins particulars
-Donar explicacions matemàtiques
-Escollir i desenvolupar definicions utilitzables
-Enllaçar representació
Coneixement matemàtic per a l'ensenyament
3. Coneixement del contingut i els alumnes
Tasques d'ensenyament:
-Identificar què és probable que pensin els estudiants
-Predir què trobaran interessant els alumnes
-Anticipar què poden fer els estudiants amb una tasca
Escoltar i interpretar el pensament dels alumnes
-Conèixer les concepcions i els conceptes erronis
-Anticipar el nivell de dificultat d'una tasca
4. Coneixement del contingut i de l'ensenyament
Tasques d'ensenyament:
-Saber dissenyar l'ensenyament
-Saber seqüenciar l'ensenyament
-Escollir tasques pels objectius d'ensenyament
-Identificar què ofereixen diferents mètodes d'instrucció
-Avaluar avantatges i desavantatges d'usar representacions específiques

que és factible utilitzar el model de Ball et al. (2008) per analitzar els coneixements dels mestres.

Blanco i Contreras (2012) proposen la resolució de tasques/problemes/situacions didàctiques i professionals als estudiants de mestre amb l'objectiu que construeixin el seu propi coneixement matemàtic especialitzat i el seu coneixement didàctic de les matemàtiques. El procés de resolució d'aquestes activitats ha de permetre als estudiants de mestre reflexionar al voltant de les categories proposades en el model del coneixement matemàtic per a l'ensenyament de Ball et al. (2008). Concretament, examinen les categories esmentades a partir d'una tasca didàctica sobre el concepte d'altura, de circumcentre d'un triangle i de construcció de punts notables d'un triangle proposada a mestres d'educació primària i de secundària en formació. Els mateixos autors esmenten el model del coneixement matemàtic per a l'ensenyament de Ball et al. (2008) com un model útil en els processos de formació de mestres.

Un altre estudi en què es mesura el coneixement dels mestres és el de Kleickmann et al. (2012). Investiga el coneixement del contingut i el coneixement didàctic del contingut d'estudiants de mestre i professors de matemàtiques a Alemanya en diferents moments de la seva formació. Es basa en quatre mostres: 117 estudiants de mestre de primer curs, 126 estudiants de mestre de tercer curs, 539 estudiants de professor al final de la fase de pràctiques i 198 professors experimentats en exercici. Pel que fa als estudiants, n'hi ha que segueixen un itinerari acadèmic (durant els primers anys se centren en el coneixement del contingut de dues àrees) i n'hi ha que no segueixen cap itinerari (se centren en el coneixement didàctic del contingut i en pedagogia).

Per avaluar el coneixement del contingut, es passa als participants un test de vint-i-tres preguntes sobre aritmètica, àlgebra, geometria i funcions. Les preguntes estan dissenyades per avaluar la comprensió conceptual dels continguts del currículum de matemàtiques de secundària. El test del coneixement didàctic del contingut avalua aspectes dels alumnes, de l'ensenyament i de les tasques inclosos respectivament a les categories de coneixement del contingut i dels alumnes, de coneixement del contingut i de l'ensenyament i de coneixement especialitzat del contingut, categories del coneixement matemàtic per a l'ensenyament de Ball et al. (2008).

En aquesta recerca, Kleickmann et al. (2012) consideren la categoria de coneixement especialitzat del contingut dins del coneixement didàctic del contingut, mentre que Ball et al. (2008) el col·loquen dins del coneixement de la disciplina. En la línia de Kleickmann et al. (2012), Petrou i Goulding (2011) argumenten que no es distingeix prou clarament el terme coneixement especialitzat del contingut del terme coneixement didàctic del contingut.

Una conclusió rellevant que extreuen Kleickmann et al. (2012) d'aquesta investigació és que el coneixement del contingut i el coneixement didàctic del contingut es desenvolupen més durant la formació inicial a la universitat i a les pràctiques que durant la formació permanent. Una altra conclusió, en funció de si els estudiants de mestre segueixen un itinerari acadèmic o no, és que els estudiants que segueixen un itinerari tenen un coneixement del contingut i un coneixement didàctic del contingut més elevat que els que no el segueixen.

En el terreny d'estudis internacionals, cal destacar el que ha portat a terme l'Associació Internacional per a l'Avaluació del Rendiment Educatiu (IEA) sobre formació inicial del professorat de matemàtiques (TEDS-M) amb l'objectiu d'analitzar les diferències dels programes de formació entre països i quin impacte tenen en la formació inicial. "L'estudi TEDS-M és el primer estudi comparatiu en l'àmbit internacional i a gran escala sobre educació superior, centrat en la formació inicial dels professors de matemàtiques d'educació primària i primers cursos d'educació secundària" (MECD, 2012; p. 6).

L'estudi TEDS-M, portat a terme del 2006 al 2012, analitza les interrelacions entre tres subestudis: el subestudi I se centra en les polítiques educatives sobre la formació del professorat en matemàtiques i el context cultural i social a fi d'examinar les polítiques dirigides al professorat de matemàtiques, tenint-ne en compte la preparació, la certificació, la selecció i la contractació. El subestudi II està focalitzat en l'anàlisi dels currículums i programes de formació inicial del professorat de matemàtiques amb l'objectiu d'examinar el currículum de formació del professorat de matemàtiques. El subestudi III se centra en el coneixement matemàtic i didàctic que adquireixen els futurs professors de matemàtiques per tal d'examinar els resultats pretesos i els adquirits en la formació de professors (MECD, 2012).

Per avaluar els coneixements de matemàtiques, dins el subestudi III, els investigadors de TEDS-M es basen en el marc conceptual elaborat per a les proves TIMSS 2007 (Estudi internacional de tendències en matemàtiques i ciències), mentre que l'equip de direcció del TEDS-M i altres investigadors utilitzen preguntes dels estudis de Hill i Ball o Schmidt, Blomeke i Tatto (citats a MECD, 2012; p. 79) per crear les preguntes que han d'avaluar els coneixements de didàctica de la matemàtica dels futurs mestres.

Per analitzar els coneixements de matemàtiques i de didàctica de la matemàtica, s'han tingut en compte aspectes del subestudi II, com ara els programes de formació de cada país. La comparació de resultats entre països no ha estat senzilla, ja que només hi han participat disset països, però s'han obtingut sis grups de programes diferents. Una conclusió que se n'extreu és que la puntuació mitjana tant dels coneixements de matemàtiques com de la didàctica de la matemàtica dels futurs mestres que van seguir programes de formació de mestres especialistes en matemàtiques és més alta que la dels que van seguir programes generalistes, amb l'excepció de la Xina-Taipei i Singapur, que van obtenir resultats molt alts tot i seguir programes generalistes. Cal assenyalar que Espanya se situa en la mitjana internacional. Una dada que convé destacar és que van obtenir més bons resultats els futurs mestres que havien estudiat matemàtiques a Batxillerat (MECD, 2012).

L'informe TEDS-M és rellevant perquè és el primer estudi comparatiu i a gran escala que se centra en la formació inicial del professorat de matemàtiques de primària i secundària, però no només ho és per això, sinó també perquè indica que, tot i que els futurs mestres cursin els estudis de formació inicial per aprendre a ensenyar matemàtiques, els seus coneixements de matemàtiques i de didàctica de les matemàtiques estan condicionats, entre altres aspectes, pels seus antecedents acadèmics i els programes de formació inicial que segueixin. Amb aquests resultats, es percep la importància d'avaluar els coneixements de matemàtiques dels futurs mestres al primer curs del grau de mestre, ja que els coneixements de matemàtiques que tinguin en iniciar els estudis de magisteri podrien condicionar els coneixements amb què acabaran la seva formació inicial si no es fa una formació prou adequada.

3.3 Ensenyament i aprenentatge de les fraccions

L'ensenyament de les fraccions és fonamental a l'etapa d'educació primària. Les fraccions són la base per entendre, en aquesta etapa i en etapes posteriors, els nombres racionals. Comprendre alguns conceptes relacionats amb les fraccions no resulta simple, ja que algunes propietats que es compleixen per als nombres enters no es compleixen en les fraccions. A més, en algunes aules de primària l'ensenyament de les fraccions queda focalitzat en l'ensenyament d'interpretacions concretes de la fracció, com ara la comparació part–tot, en detriment d'altres, igual d'importants i necessàries per relacionar conceptes, com poden ser la fracció com a mesura, com a operador o com a divisió. Cal entendre molts conceptes relacionats amb les fraccions, per tenir-ne un coneixement complert: concepte d'unitat, partició, densitat dels nombres racionals, etc. Per aquest motiu, s'ha cregut convenient aprofundir en els aspectes referents al concepte de fracció i al seu ensenyament i aprenentatge.

En aquest apartat, en primer lloc s'explica què s'entén per fracció, així com la diferència entre fracció i nombre racional. A continuació s'exposa el paper de les representacions en l'ensenyament de les fraccions. El següent apartat fa referència a les diferents interpretacions de fracció i les representacions de les fraccions segons cada interpretació. Seguidament s'expliquen aspectes rellevants per entendre les fraccions, en concret el paper de la unitat, la importància de les particions i la noció de magnitud. Tot seguit s'introdueixen explicacions referents a la comparació i ordenació de fraccions, a les fraccions equivalents, a les operacions amb fraccions i a la densitat i infinitud de les fraccions.

3.3.1 Què són les fraccions?

Quan els alumnes aprenen conceptes relacionats amb les fraccions necessiten més abstracció que quan aprenen conceptes només amb nombres enters. "Entendre les fraccions és el pas més crític en la comprensió dels nombres racionals i en la preparació per a l'àlgebra. Per aprendre fraccions, els alumnes han de saber què és una fracció" (Wu, 2009; p. 8).

Segons Lamon (2007, 2012), la fracció s'utilitza en dos sentits diferents, com un numeral i com un nombre:

- La fracció com a numeral s'entén com un símbol per escriure nombres, com un sistema de notació: $\frac{a}{b}$.
- La fracció com a nombre s'entén com un nombre racional no negatiu. El nombre de sobre s'anomena numerador i, el de sota, denominador. El numerador i el denominador són nombres enters no negatius. L'ordre d'aquests dos nombres és important; no és el mateix $\frac{3}{4}$ que $\frac{4}{3}$. El zero pot aparèixer al numerador, però no al denominador.

La mateixa autora puntualitza que hi ha un seguit de nombres que es poden escriure en forma de fracció (*fraction form*) però que no són fraccions: $\frac{-3}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{-12.2}{14.4}$.

La fracció com a nombre es refereix al subjacent nombre racional i no tant a la forma en què s'escriu aquest nombre. El centre d'atenció és aleshores la quantitat relativa que transmeten les dues parts en la fracció escrita. Per exemple, no és tan important si escrivim $\frac{1}{4}, \frac{4}{16}$ o $\frac{3}{12}$ com la relació que es transmet amb aquests símbols De totes maneres, quan s'ensenyen fraccions i es connecten amb representacions gràfiques, sí que és rellevant connectar el nom de la fracció amb el dibuix (Lamon, 2012).

Wu (2009) també defineix la fracció com un nombre. Argumenta que "les fraccions han de ser nombres perquè hi sumarem, restarem, multiplicarem i dividirem" (p. 8). Segons aquest autor, la representació sobre la recta numèrica és el que pot mostrar millor als alumnes què és una fracció, ja que és un punt de referència natural per a les fraccions. Les fraccions, per tant, són punts en la recta numèrica. Un aspecte important que cal tenir en compte és que el segment [0,1] no és la unitat, perquè la fracció és un nombre i no una figura geomètrica. Concretament, la unitat és la longitud d'aquest segment [0,1]. Quan es divideix aquest segment en tres parts, per exemple, per obtenir les fraccions $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ i $\frac{3}{3}$, en realitat cal que la longitud dels segments obtinguts entre 0 i 1 sigui la mateixa.

El terme fracció s'utilitza tant col·loquialment com matemàticament i no sempre amb el mateix significat. A fora de l'aula, pot significar una part petita o menys que el total. Aquestes interpretacions no es poden aplicar a la fracció $\frac{4}{3}$ pel fet que aquesta fracció fa referència a més d'una unitat. Matemàticament també hi ha confusions; s'utilitzen de la mateixa manera les paraules fracció i nombre racional i s'utilitza la paraula fracció per referir-se només a la interpretació de la fracció com a comparació part–tot (Lamon, 2007, 2012). En aquest sentit, Wu (2009) argumenta que s'utilitzen exemples concrets per explicar què és una fracció, com pot ser un tros de pizza o una part d'un tot. Segons aquest autor, aquestes analogies no són suficients per explicar què és una fracció.

Encara que es fan servir els termes nombres racionals i fraccions indistintament, són conjunts diferents. Segons Lamon (2007; p. 635, 2012; p. 29), les distincions més importants entre fraccions i nombres racionals són:

- Tots els nombres racionals es poden escriure en forma de fracció. $\frac{3}{4}$, $\frac{\sqrt{4}}{3}$ (generalment escrit $\frac{2}{3}$), $\frac{2.1}{4.1}$ (generalment escrit $\frac{21}{41}$) i $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ (generalment escrit $\frac{2}{1}$) són tot fraccions i nombres racionals.
- No tots els nombres escrits en forma de fracció són racionals. $\frac{\pi}{2}$ no és un nombre racional i està escrit en forma de fracció.
- Cada fracció no correspon a un nombre racional diferent. No hi ha un nombre racional diferent per a cada una de les fraccions $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{10}{15}$. [...] Darrere de totes les formes equivalents d'una fracció només hi ha un nombre racional.
- Els nombres racionals es poden escriure en forma de fracció, però també es poden escriure d'altres maneres.

  Els decimals limitats són nombres racionals. Els decimals periòdics són nombres racionals. Els percentatges són nombres racionals. Els decimals infinits i no periòdics no són nombres racionals. Les raons i taxes són nombres racionals.

Al llarg del temps s'ha anat parlant de diferents tipus de fraccions (Lamon, 2012):

- Fraccions unitàries: fraccions inverses dels nombres enters ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,...).
- Fraccions "vulgars": fraccions comunes que s'utilitzen habitualment.
- Fraccions decimals: són les fraccions en què el denominador és una potència de 10 ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...). Els nombres decimals es poden escriure mitjançant fraccions decimals: $1.345 = 1 + 3(\frac{1}{10}) + 4(\frac{1}{100}) + 5(\frac{1}{1000})$
- Percentatges: són les fraccions en què el denominador és 100 ($\frac{75}{100}$, $\frac{40}{100}$...)

En el present treball es diferenciarà entre els nombres escrits en forma de fracció ($\frac{a}{b}$) i les fraccions (nombres racionals no negatius) en el sentit que ho defineix Lamon (2007, 2012).

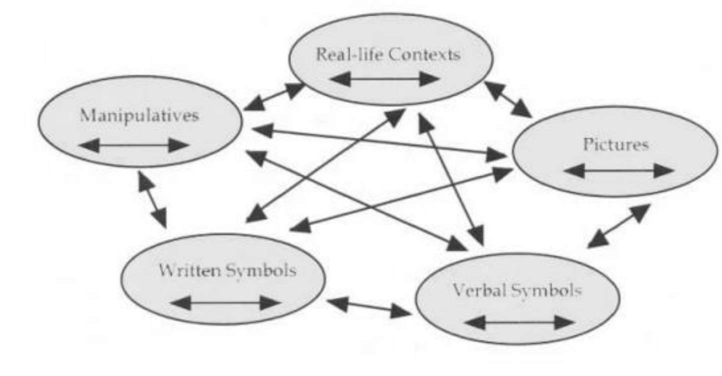
3.3.2 Les representacions en l'ensenyament de les fraccions

Segons Goldin i Shteingold (2001), "una representació és, típicament, un signe o una configuració de signes, caràcters o objectes" (p. 3). L'NCTM (2000) argumenta que la representació es refereix tant al procés (el fet d'entendre un concepte matemàtic) com al resultat (a la forma en si mateixa). Les representacions poden ser externes o internes. Les representacions externes poden incloure tant els símbols convencionals matemàtics com els materials manipulatius, mentre que les internes fan referència als processos en les ments dels alumnes (Goldin i Shteingold, 2001; NCTM, 2000).

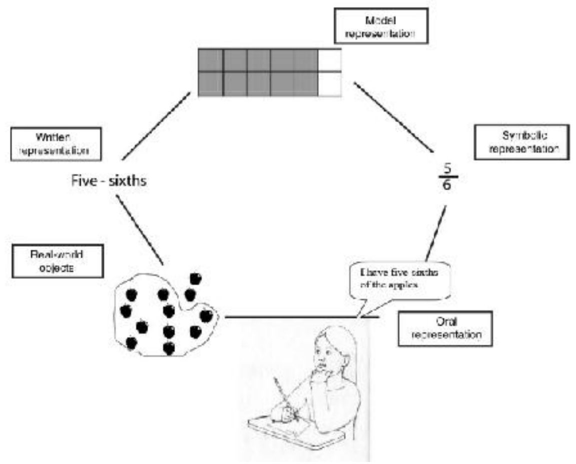
Les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000). En el mateix currículum de matemàtiques de l'etapa d'educació primària es proposa desenvolupar la capacitat següent fent referència a la representació: "Crear i utilitzar representacions per organitzar, registrar i comunicar les idees i els processos matemàtics, així com interpretar i usar el llenguatge matemàtic, com ara xifres, signes, dibuixos geomètrics, taules i gràfics per a descriure fenòmens habituals" (Generalitat de Catalunya, 2007; p. 43).

En l'ensenyament de les fraccions generalment s'utilitzen representacions, però no sempre són prou variades per comprendre bé els conceptes que s'hi relacionen. Per exemple, en el cas de la interpretació de la fracció com a part–tot, molts nens tenen experiències amb exemples que representen una unitat contínua, però no en tenen tantes amb grups d'objectes (Feikes, Schwingendorf i Gregg, 2009). Els mateixos autors esmenten que "els nens desenvoluparan una comprensió conceptual més profunda de les fraccions utilitzant múltiples maneres de representació: pictòrica, manipulativa, verbal, context real i simbòlica. L'èmfasi també s'ha de basar en l'ús de múltiples models físics i la connexió entre ells" (Feikes et al., 2009; p. 105). En la mateixa línia, Goldin i Shteingold (2001) fan èmfasi en els sistemes de representació per aprendre matemàtiques, uns sistemes que presenten una estructura que propicia que les representacions dins el sistema estiguin relacionades: "Una representació matemàtica no es pot entendre de manera aïllada [...] té sentit només com a part d'un *sistema* més ampli dins el qual s'han establert significats i convencions" (p. 1).

En aquest sentit, el model de traducció de Lesh (The Lesh Translation Model) proposa cinc maneres diferents de representar les idees matemàtiques elementals: manipulativa, pictòrica, contextos reals, símbols verbals i símbols escrits (vegeu figura 3.8) (Lesh, citat a Cramer, 2003).



Real-life Contexts
Manipulatives
Pictures
Written Symbols
Verbal Symbols


Model representation
Written representation
Five - sixths
Symbolic representation
5/6
Real-world objects
I have five sixths of the apples
Oral representation

En la mateixa línia, Lamon (2012) argumenta que l'ensenyament tradicional de les fraccions ha fracassat per culpa d'una utilització incorrecta dels models:

- Molts models de fraccions són utilitzats més enllà de les seves possibilitats.
- No es pregunten idees i qüestions importants.
- S'atribueix un poder "màgic" a aquests materials. [...] Que siguin de colors i divertits i que ocupin les mans no vol dir que ocupin les ments.
- Cada model s'adapta a un nombre limitat de denominadors fraccionaris. (p. 149)

Aquestes afirmacions indiquen que els mestres haurien de tenir un coneixement profund dels diferents models per ensenyar fraccions a fi que els alumnes puguin generalitzar conceptes relacionats amb les fraccions.

El mestre té un paper important a l'hora de triar i fer servir els models per tal d'ajudar els alumnes a desenvolupar comprensió matemàtica (Ball, 1993). S'esculli el model que s'esculli, cal tenir en compte que les idees matemàtiques són més àmplies que el model triat. Per exemple, el model d'àrea, com ara un model circular de 1/2, representa només una interpretació de les moltes que poden tenir les fraccions (Ohlsson, citat a Ball, 1993). Amb això, volem destacar que no hi ha un model que serveixi per a totes les interpretacions de fracció.

En fer referència als models, no només pren èmfasi el que el mestre proposa als alumnes, sinó que cal que els alumnes aprenguin a construir-ne. Hi ha idees matemàtiques sobre les fraccions, com ara el concepte d'unitat, que queden "difuminades" quan s'utilitzen models físics i, en canvi, s'expliciten i s'entenen millor si els mateixos alumnes creen el model (Ball, 1993).

Als següents subapartats es pararà atenció a diverses representacions de diferents conceptes relacionats amb les fraccions.

3.3.3 Diferents interpretacions de les fraccions

Es produeixen moltes situacions diferents que donen significat a les fraccions, però no totes s'utilitzen per ensenyar-les: "Entendre els nombres racionals implica coordinar moltes idees i interpretacions diferents però interconnectades. Malauradament, l'ensenyament de les fraccions s'ha centrat tradicionalment en una sola interpretació dels nombres racionals, la de comparacions part–tot" (Lamon, 2012; p. 32).

Lamon (2007, 2012) proposa cinc interpretacions diferents dels nombres racionals i les formes que es poden abordar quan s'ensenyen fraccions (taula 3.1).

Taula 3.1. Diferents interpretacions dels nombres racionals.

Interpretacions de $\frac{3}{4}$	**Significat**	**Activitats de classe seleccionades**
Comparació part–tot amb divisions de la unitat “3 parts de cada 4 parts iguals”	$\frac{3}{4}$ significa tres parts de cada quatre parts iguals de la unitat. Respecte a les fraccions equivalents, considerar les parts en termes de trossos més grans o més petits. $\frac{3}{4}$ pastissos $= \frac{12}{16}$ ($\frac{1}{4}$ de pastís) $= \frac{1\frac{1}{2}}{2}$ (parell de pastissos)*	Dividir quantitats en parts per produir fraccions equivalents i comparar fraccions.
Mesura “3 ($\frac{1}{4}$ – unitats) ”*	$\frac{3}{4}$ significa una distància de 3 ($\frac{1}{4}$ d'unitat) des de 0 a la recta numèrica o 3 ($\frac{1}{4}$ d'unitat) d'una àrea determinada.	Successives particions de la recta numèrica; lectura de metres i mesuradors
Operador “$\frac{3}{4}$ d'alguna cosa”	$\frac{3}{4}$ dóna una regla que explica com operar sobre una unitat (o sobre el resultat d'una operació prèvia); multiplicar per 3 i dividir el resultat per 4 o dividir per 4 i multiplicar el resultat per 3. Això es tradueix en múltiples significats per a $\frac{3}{4}$: 3 ($\frac{1}{4}$ d'unitat), 1 ($\frac{3}{4}$ d'unitat) i $\frac{1}{4}$ (3 unitats) *	Màquines, papiroflèxia, fer fotocòpies (*Xeroxing*), descomptes, models d'àrea per a la multiplicació i la divisió.
Quocient “3 dividit per 4”	$\frac{3}{4}$ és la quantitat que cada persona rep quan 4 persones es reparteixen un paquet de 3 d'alguna cosa*	Particions, repartiments
Raons “3 a 4”	3:4 és una relació en la qual es comparen 3 A, en un sentit multiplicador més que additiu, amb 4 B.	Activitats amb fitxes bicolor

Nota. Extret de “Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers”, de S. J. Lamon, 2012, p. 257. Nova York, NY: Taylor & Francis. *Notació explicada al subapartat 3.3.4.1.

Altres autors (Clarke, Roche i Mitchell, 2008, 2011; Feikes et al., 2009; Van de Walle et al., 2010) proposen els mateixos significats de fracció que Lamon (2007, 2012): part–tot, mesura, operador, divisió i raó. Ball (1993), fent referència a diferents estudis sobre els nombres racionals, exposa que hi ha un cert consens en el fet que les fraccions es poden interpretar com a part–tot, com un nombre en la recta numèrica, com un operador, com un quocient de dos enters, com una raó o com una taxa.

Tanmateix, hi ha autors que fan altres distincions o matisacions a les interpretacions de fracció de Lamon (2012). Nesher (citat a Ball, 1993), per exemple, afegeix a les interpretacions de Lamon la fracció com a representació de probabilitats. En canvi, Haylock (2010) assenyala que les fraccions es podrien utilitzar com a mínim de quatre maneres diferents: com una part d'un tot o d'una unitat, com una part d'un conjunt, com a model d'un problema de divisió i com una raó. No inclou, per tant, la interpretació de fracció com a operador ni com a mesura.

Schwartz (2008) també proposa quatre manifestacions de les fraccions: parts fraccionàries d'un tot numèric, parts fraccionàries d'un tot geomètric, les accions de dividir i els problemes de raons i taxes. La interpretació de les parts fraccionàries d'un tot numèric coincideix amb la interpretació de fracció com a operador que proposa Lamon (2012), mentre que les parts fraccionàries d'un tot geomètric coincideix amb la interpretació de part–tot.

A l'estudi de Behr, Wachsmuth, Post i Lesh (1984) es fa referència als subconceptes de nombre racional següents: part–tot, mesura, quocient, decimal i raó. Porten a terme un projecte per desenvolupar materials d'ensenyament i avaluació referents a l'aprenentatge d'aquests subconceptes. Respecte a les interpretacions de Lamon (2012), Behr et al. no tenen en compte la fracció com a operador, però, en canvi, hi afegeixen els nombres decimals.

3.3.3.1 Fracció com a comparació part–tot

Segons Lamon (2012), una comparació part–tot fa referència a un nombre de parts iguals del total de parts iguals en què s'ha dividit la unitat: "Aquí, igual significa el mateix en quantitat, o el mateix en longitud, o el mateix en àrea, etc., depenent de la naturalesa de la unitat sencera, és a dir, si es tracta d'un recompte, d'una longitud o d'una àrea" (p. 145). Feikes et al. (2009) consideren que la fracció com a part d'un tot té dues formes: una fracció d'un tot (continu) o una fracció d'un conjunt (discret).

A continuació s'expliquen algunes característiques de les fraccions interpretades com a part–tot segons Lamon (2012):

- El símbol $\frac{a}{b}$ significa *a* parts de *b* parts iguals. Però una part no significa el mateix que una porció. [...] Per exemple, la unitat pot ser un conjunt de 18 cromos de beisbol. Aleshores, $\frac{1}{6}$ significa una part de sis parts iguals, on una part està formada per 3 cromos.
- La quantitat d'una part depèn de les parts iguals que es tinguin. Si s'augmenta el nombre de parts, disminueix la quantitat de cada part. Com menys parts hi ha, més quantitat hi ha en cada part.
- Molts noms fraccionaris diferents designen la mateixa quantitat. Dues fraccions diferents que representen la mateixa quantitat relativa s'anomenen fraccions equivalents.

- En cada problema de fraccions és important identificar la unitat i interpretar cada fracció en termes d'aquesta unitat. No es poden comparar fraccions basades en unitats diferents. Quan es fan càlculs abstractes [...] no cal preocupar-se de les unitats.(p. 145)

Per explicar la interpretació part–tot, no tots els autors es basen en la idea presentada per Lamon (2012) "d'agafar un nombre de parts iguals del total de parts en què s'ha dividit la unitat". Siebert i Gaskin (2006) proposen explicar el concepte part–tot utilitzant la iteració i la partició. Les fraccions unitàries es podrien obtenir tant per mitjà de la iteració com de la partició. Per exemple, la fracció $\frac{1}{8}$ es pot obtenir tal com es mostra a continuació:

"-Partició: $\frac{1}{8}$ és la quantitat que obtenim mitjançant una unitat, dividint-la en 8 parts iguals i prenent-ne 1.

-Iteració: $\frac{1}{8}$ és la quantitat tal que 8 còpies d'aquesta quantitat, posades juntes, fan una unitat" (Siebert i Gaskin, 2006; p. 395).

Els mateixos autors expliquen com obtenir totes les fraccions, no només les unitàries, a partir de la partició o de la iteració. Per exemple, la fracció $\frac{5}{8}$ es pot obtenir de les maneres següents:

"-Partició: $\frac{5}{8}$ és 5 vuitens, on $\frac{1}{8}$ és la quantitat que obtenim mitjançant una unitat, dividint-la en 8 parts iguals i prenent-ne una.

-Iteració: $\frac{5}{8}$ és 5 un vuitens, on $\frac{1}{8}$ és la quantitat tal que 8 còpies d'aquesta quantitat, posades juntes, fan una unitat" (Siebert i Gaskin, 2006; p. 397).

Aquesta interpretació de Siebert i Gaskin (2006) de la fracció part–tot explicada mitjançant la partició i la iteració (s'entén que $\frac{5}{8}$ és cinc un vuitens) va més enllà de considerar la fracció com "tantes parts de les parts totals" (de 8 parts se n'agafen 5), on el numerador i el denominador no són més que nombres enters.

3.3.3.2 Representacions de la fracció part–tot

Petit et al. (2010) presenten les característiques de dos models per a l'ensenyament de fraccions com a comparació part–tot: models d'àrea (regions) i models de grup (conjunts d'objectes). Concretament, expliquen com es defineix la unitat, com es defineixen les "parts iguals" i què indica la fracció (vegeu taula 3.2).

Taula 3.2. Característiques dels models d'àrea i de grup.

	La unitat	"Les parts iguals" són definides per	El que indica la fracció
Model d'àrea	La unitat està determinada per l'àrea d'una regió definida	Àrea igual	La part coberta de tota l'àrea de la unitat
Model de grup	La unitat està determinada per la definició del que hi ha en el conjunt	Nombre d'objectes iguals	El recompte d'objectes en el subconjunt del conjunt d'objectes definit

Nota. Adaptat de "A Focus on Fractions. Bringing Research to the Classroom", de M. M. Petit et al., 2010, p. 9. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Model d'àrea

En aquest model, el tot o unitat es defineix com una àrea o regió. Cada part té la mateixa àrea, encara que no ha de tenir la mateixa forma. La fracció fa referència a la part que es considera de la unitat. S'utilitzen tant representacions gràfiques (cercles, rectangles, pentàgons, dibuixos en paper quadriculat,...) com materials manipulatius (regions rectangulars, geoplans, blocs de patrons, papiroflèxia). Els models de peces de fracció circular són els que es fan servir més habitualment. "Un avantatge de les regions circulars és que emfasitzen el concepte part–tot de fracció i el significat de la mida relativa d'una part al tot" (Cramer, Wyberg i Leavitt, citat a Van de Walle, 2010; p. 288).

Són diversos els autors que esmenten o expliquen les característiques d'aquests materials com a model d'àrea en l'ensenyament de la interpretació de la fracció com a part–tot (Feikes et al., 2009; Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010).

Model de grup

En el model de grup, la unitat està determinada per un conjunt d'objectes, i cada part en què es divideix la unitat té la mateixa quantitat d'objectes independentment d'altres característiques (forma, mida, color,...). Com a models de grup, es poden utilitzar representacions gràfiques (dibuixos d'objectes) o materials manipulatius (monedes, fitxes de colors, pedres,...).

3.3.3.3 Fracció com a operador

La fracció com a operador es pot entendre com una funció que actua sobre una quantitat o regió i li assigna una altra quantitat o regió. Els nombres racionals poden operar reduint i ampliant, contraient i expandint o multiplicant i dividint. Per tant, poden allargar o escurçar segments, incrementar o disminuir el nombre d'elements d'un conjunt d'objectes o empetitir o fer més gran una figura geomètrica mantenint-ne la forma (Lamon, 2012).

"Un operador és un conjunt d'instruccions per dur a terme un procés. Per exemple, $\frac{2}{3}$ *de* és un operador que t'indica que cal multiplicar per 2 i dividir el resultat per 3" (Lamon, 2012; p. 191). Però l'operador $\frac{2}{3}$ es pot interpretar com una operació d'una quantitat Q, com la multiplicació per 2 del resultat de la divisió Q : 3 o com la divisió per 3 del resultat de la multiplicació 2 x Q.

La interpretació dels nombres racionals com a operador és molt diferent de la interpretació com a part–tot. L'operador defineix la relació entre la quantitat que resulta de l'operació i la quantitat inicial: $\frac{quantitat\ que\ surt}{quantitat\ que\ entra}$. Per exemple, 12 i 18 llaminadures estan relacionades com a dos-tres: l'operador $\frac{2}{3}$ *de* quan actua sobre 18 llaminadures en produeix 12 (Lamon, 2012).

3.3.3.4 Representacions de la fracció com a operador

Model de grup

Utilitzar objectes discrets permet representar com actua la fracció com a operador en aquest conjunt d'objectes. Lamon (2012) presenta els dos exemples següents:

- Per calcular 9/2 de 4, es pot representar amb dues operacions sobre 4 objectes. La primera operació transforma 4 objectes en 2 dividint per 2, i la segona operació és la multiplicació per 9 dels 2 objectes que s'han obtingut després de la primera operació (vegeu figura 3.10).

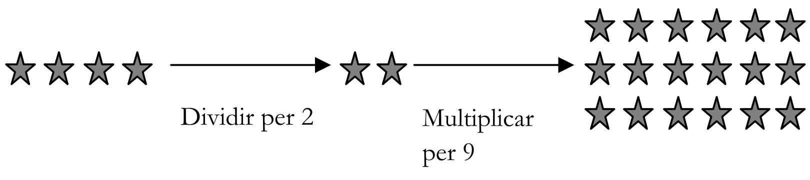


Figura 3.10. Representació de 9/2 de 4 estrelles. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 192. Nova York, NY: Taylor & Francis.

- Per calcular 3/8 de 24, es pot representar agafant un grup de 24 objectes, fent-ne 8 parts iguals i, a continuació, agafar 3 parts d'aquestes 8 parts (vegeu figura 3.11).

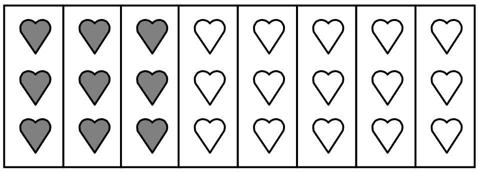


Figura 3.11. Representació de 3/8 de 24 cors. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 193. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Model d'àrea o longitud

Un operador també pot actuar sobre una longitud o una àrea. La relació entre la figura inicial i la final es pot representar mitjançant imatges (vegeu figura 3.12).

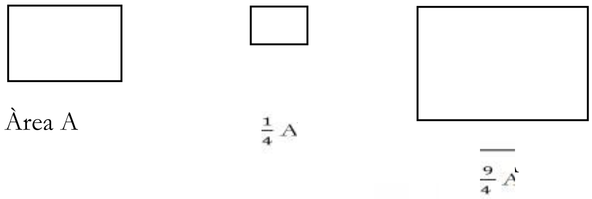


Figura 3.12. Representació de com els operadors $\frac{1}{4}$ i $\frac{9}{4}$ actuen sobre una àrea A. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 193. Nova York, NY: Taylor & Francis

Model de canvi

L'operador es pot relacionar amb les funcions; es pot utilitzar la representació d'una taula amb els valors d'entrada i sortida i l'operador relaciona aquests valors (Lamon, 2012). Per exemple, l'operador $\frac{2}{3}$ relaciona els valors de la taula 3.3.

Taula 3.3. Representació d'una taula de valors on l'operador és $\frac{2}{3}$: sortida = $\frac{2}{3}$ entrada.

Entrada	6	9	60	150
Sortida	4	6	40	100

Nota. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 194. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Les funcions d'entrada i sortida es poden representar amb una màquina. De fet, es poden utilitzar els models de màquines intercanviadores, en les quals hi entra un valor i en surt un altre (figura 3.13) (Lamon, 2012). Per exemple, uns nens estan d'acord a bescanviar 3 xocolatines per 4 paquets de xiclets. Ens podem preguntar que si un dels nens té 42 xocolatines, quants paquets de xiclets li haurà de donar l'altre nen. L'operador, en aquest cas, és $\frac{4}{3}$, i les 42 xocolatines les bescanviarien per $\frac{4}{3}$ $42 = 56$ paquets de xiclets (Lamon, 2012).

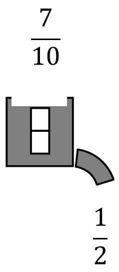


Figura 3.13. Màquina d'intercanvi, entra la fracció $\frac{7}{10}$ i surt la fracció $\frac{1}{2}$. L'operador és $\frac{5}{7}$. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 195. Nova York, NY: Taylor & Francis.

3.3.3.5 Fracció com a mesura

Lamon (2012) es refereix a la fracció com a mesura en el sentit que els nombres racionals positius mesuren la distància de 0 a alguns punts segons una unitat de mesura. Els nombres racionals s'associen a aquests punts, però, de fet, són mesures de distància. "Sota la interpretació de mesura, una fracció és, en general, la mesura assignada a un interval o regió, depenent de si estem utilitzant un model unidimensional o bidimensional" (Lamon, 2012; p. 210). Considerant un espai unidimensional, la fracció mesura la distància de 0 a un punt de la recta numèrica. Si es té un interval de longitud 1 i el dividim en *b* subintervals, la fracció $\frac{a}{b}$ com a mesura voldrà dir *a* intervals de longitud $\frac{1}{b}$. En un espai bidimensional, la fracció mesura l'àrea.

El procés de partició és present en totes les interpretacions de fracció; en aquest cas, però, és dinàmic. En la fracció com a mesura, es van realitzant successives particions de la unitat, a diferència, per exemple, de la fracció com a part–tot, en què es comparen les parts iguals que s'agafen amb les parts fixades en què s'ha dividit la unitat (Lamon, 2012).

3.3.3.6 Representacions de la fracció com a mesura

Model de longitud

El model de longitud s'utilitza en l'ensenyament de les fraccions com a mesura. Van de Walle et al. (2010) proposen com a model de longitud tant rectes numèriques com materials físics que es comparen tenint-ne en compte la longitud (tires de fraccions, tires de paper o els reglets de Cuisenaire). Altres autors, en la interpretació de la fracció com a mesura, suggereixen bàsicament com a model la recta numèrica (Lamon, 2012; Petit et al., 2010).

“La recta numèrica és significativament un model de mesura més sofisticat” (Bright, Behr, Post i Wachsmuth, citat a Van de Walle et al., 2010; p. 290).

Petit et al. (2010) expliquen les característiques del model de recta numèrica: com es defineix la unitat, com es defineixen les “parts iguals” i què indica la fracció (vegeu taula 3.4).

Taula 3.4. Característiques de la recta numèrica.

	La unitat	“Les parts iguals” són definides per	El que indica la fracció
Recta numèrica	Unitat de distància o longitud (continu)	Distància igual	La localització d’un punt en relació amb la distància de zero respecte a la unitat definida

Nota. Adaptat de “A Focus on Fractions. Bringing Research to the Classroom”, de M. M. Petit et al., 2010, p. 9. Nova York, NY: Taylor & Francis.

“Utilitzar la recta numèrica implica pensar en la distància recorreguda en una línia o la localització d’un punt en les rectes numèriques, regles o altres eines de mesura” (Petit et al., 2010; p. 7). Les unitats es defineixen amb nombres, són contínues i estan connectades, a diferència de les unitats del model d’àrea, que estan físicament separades. Es tenen iteracions contínues de la unitat i cada unitat es divideix amb contínues subdivisions (Petit et al., 2010). El model de la recta numèrica pot ajudar a entendre que la fracció és un nombre i la seva grandària respecte a altres nombres, a la vegada que pot reforçar la idea que, entre dues fraccions, sempre es pot trobar una altra fracció (Van de Walle et al., 2010). Són molts els autors que creuen que aquest model és essencial en l’ensenyament de les fraccions i que s’hauria de potenciar més (Clarke et al., 2008; Flores, Samson i Yanik, 2006; Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen i Shew, 1998; Usiskin, 2007; Watanabe, 2006, citats a Van de Walle et al., 2010).

3.3.3.7 Fracció com a quocient

Un nombre racional es pot veure com un quocient, com el resultat d’una divisió. Dit de manera molt simple, es pot interpretar com la quantitat de pastís que tocarà a cada persona si repartim uns pastissos entre un grup de persones; de manera més complexa, el nombre racional com a quocient es pot interpretar com un camp quocient. Per comprendre la fracció com a quocient, és essencial la partició com a procés de dividir un objecte o diversos en un nombre de parts disjuntes i exhaustives (Lamon, 2012). A l’apartat 3.3.4.2 s’expliquen alguns aspectes que cal tenir en compte quan es porten a terme particions.

3.3.3.8 Representacions de la fracció com a quocient

Model d'àrea

El model d'àrea és adequat en les representacions de la fracció com a quocient. Els contextos que permeten fer una partició per fer un repartiment solen ser aquells en què es demana subdividir una àrea (pastissos, pizzes, xocolatines, etc.) (Van de Walle et al., 2010). Per poder representar les particions, es poden utilitzar tant imatges com objectes físics. És adequat fer servir unitats on hi hagi marques, com ara línies, que indiquin com fer les possibles particions (per exemple, segells o xocolatines) (Lamon, 2012). Segons la mateixa autora, és important que els alumnes intentin, primer, resoldre els problemes visualment i s'imaginin com fer la partició. Per facilitar aquesta visualització del repartiment, es poden mostrar imatges, com ara el dibuix de tres cercles que representin tres pizzes i sis "ninotets" que representin sis persones, i preguntar com es poden repartir tres pizzes entre sis persones.

3.3.3.9 Fracció com a raó

Segons Lamon (2012), la raó és una comparació entre dues quantitats i permet transmetre idees que no es poden explicar amb un sol nombre. Les raons poden comparar mesures tant de la mateixa magnitud com de tipologies diferents.

Els dos tipus de raó que comparen mesures del mateix tipus són: comparacions part–tot i comparacions part–part. "Les comparacions part–tot són raons que comparen la mesura de la part d'un conjunt amb la mesura del conjunt sencer. Les comparacions part–part comparen la mesura d'una part del conjunt amb la mesura d'una altra part del conjunt" (Lamon, 2012; p. 225).

Si la raó compara mesures de tipus diferents i es pot aplicar a moltes situacions, esdevé una taxa. Les taxes es poden considerar extensions de les raons i, en concret, descriuen com les quantitats varien en el temps. Se sol utilitzar la paraula "per" quan es diu una taxa i es poden reduir obtenint la relació entre una quantitat i una unitat d'una altra quantitat. Aquesta unitat s'anomena unitat de la taxa. Alguns exemples de taxa són "el cotxe anava a 30 quilòmetres per hora" o "el cor bategava a 70 pulsacions per minut" (Lamon, 2012).

Les raons tenen algunes característiques específiques i diferents de les altres interpretacions de nombre racional (Lamon, 2012):

- Una raó de *a coses a b coses* es pot escriure de moltes maneres: $\frac{a}{b}$ o a/b, a→b, a:b. En canvi, les fraccions part–tot, operador, mesura i quocient s'escriuen generalment amb la forma $\frac{a}{b}$.

- Les raons no sempre són nombres racionals, a diferència de les fraccions part–tot, operador, mesura i quocient, que sempre ho són. Es pot veure amb l'exemple de la raó entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre, que és el nombre π, i π no és un nombre racional.
- El segon component de les raons pot ser 0; en canvi, el denominador de les fraccions no pot ser 0. Per exemple, la raó d'homes i dones en una trobada on hi ha 10 homes i cap dona, es pot escriure 10:0.
- Una fracció $\frac{a}{b}$ és un parell ordenat en què, si canvies l'ordre d'*a* i *b*, obtens una fracció diferent. Amb les raons també passa, que és diferent (4 nois : 3 noies i 3 noies : 4 nois), però totes dues donen la mateixa informació de la situació.
- L'aritmètica de les raons pot ser diferent de l'aritmètica de les fraccions. Per exemple, ahir la Maria va encertar 3 llançaments amb el bat de 5 intents, i avui n'ha encertat 2 dels 6 que ha fet. La raó d'encerts dels dos dies és 3:5 * 2:6 = (3+2):(5+6)=5:11, és a dir, 5 encerts d'11 llançaments. Aquesta operació, que es podria interpretar com una suma de raons, és clarament diferent a la suma de fraccions $\frac{3}{5} + \frac{2}{6}$.

3.3.3.10 Representacions de la fracció com a raó

Model d'àrea i model de grup

A l'etapa d'educació primària, la raó es pot iniciar amb representacions gràfiques de regions contínues i de grups d'objectes (Lamon, 2012). Per exemple, es pot representar la raó 2:3 tal com es mostra a la figura 3.14.

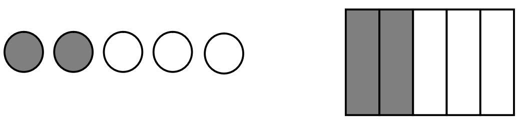
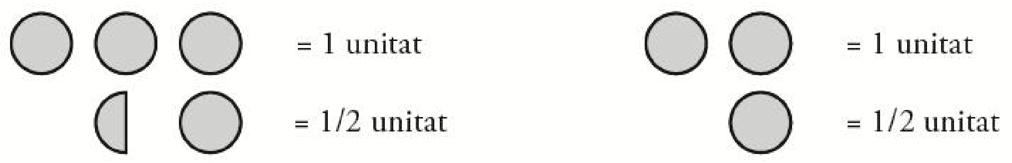
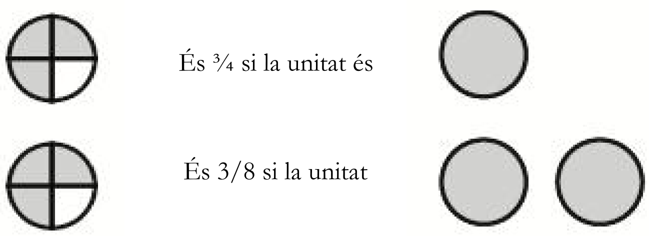


Figura 3.14. Representació de la raó 2:3. Extret de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 228. Nova York, NY: Taylor & Francis.

3.3.4 Aspectes unificadors

Tot i les diferents interpretacions dels nombres racionals, hi ha alguns aspectes unificadors que permeten fer connexions entre aquestes interpretacions. Aquests aspectes unificadors són el concepte d'unitat, el procés de partició i la noció de quantitat (Carpenter, Fennema i Romberg, 1993).


= 1 unitat
= 1/2 unitat
= 1 unitat
= 1/2 unitat


És ¾ si la unitat és
És 3/8 si la unitat

Un tercer element que cal tenir en compte és que no hi ha un únic símbol per referir-se a la part d'una unitat: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ i $\frac{6}{12}$ d'una mateixa unitat representen la mateixa quantitat (Lamon, 2012).

Lligat al concepte d'unitat, cal parlar dels diferents tipus d'unitats amb els quals es poden ensenyar fraccions. La dificultat d'un problema pot variar depenent del tipus d'unitat que hi apareix. Lamon (2012) esmenta els següents:

- Un element continu (com un pastís)
- Més d'un element continu (com tres pastissos)
- Un o més elements continus en què hi ha les marques d'una partició (com una xocolatina)
- Objectes discrets (com un grup de caramels)
- Objectes discrets que normalment estan col·locats d'una manera especial (com ous en una ouera)
- Unitats compostes (com un paquet de xiclets)

Schwartz (2008), en canvi, diferencia dos tipus d'unitats de les quals es poden fer parts fraccionàries: un tot numèric (quantitats) i un tot geomètric (formes). Schwartz diu que, depenent de la situació, es té el tot numèric o geomètric, encara que poden haver-hi situacions en què la unitat es pot interpretar de totes dues maneres. Per exemple, si es demana calcular $\frac{1}{4}$ part d'una hora, tant es pot pensar en la unitat com a 60 minuts (unitat numèrica) com en un cercle (unitat geomètrica).

En cada situació cal saber com referir-se a les fraccions que s'obtenen segons el tipus d'unitat que es té. Per exemple, es pot tenir una pizza o un grup de tres pizzes. En el primer cas, que la unitat és una pizza, quan ens referim a tres pizzes direm que tenim 3 (pizzes); en el segon cas, que la unitat és un grup de tres pizzes, direm que tenim 1 (paquet de tres pizzes) (Lamon, 2012). De fet, un mateix conjunt d'objectes o una unitat contínua es pot imaginar de maneres diferents; Lamon utilitza el terme *unitizing* per referir-se al "procés mental de construcció de parts per pensar en una quantitat donada" (p. 104). Per exemple, si es tenen 24 llaunes, es poden pensar com a 2 paquets de 12 llaunes, 4 paquets de 6 llaunes o un sol paquet de 24 llaunes. Lamon utilitza la notació següent per fer referència a com un s'imagina un conjunt d'objectes: # de parts (mida de les parts), on # vol dir cardinal. Amb aquesta notació, l'exemple anterior de les llaunes s'escriu així: 24 llaunes = 2 (paquets de 12) = 4 (paquets de 6) = 1 (paquet de 24).

Quan es té una unitat contínua també es pot pensar com dividir la unitat de maneres diferents, un procés fonamental per entendre l'equivalència de fraccions (vegeu apartat 3.3.6).

A l'hora de resoldre problemes de fraccions, però, és important que la unitat estigui definida, sigui de forma explícita o implícita. En alguns textos tradicionals, sembla que la unitat no sigui important o que sigui una qüestió de gust personal, la qual cosa pot confondre els alumnes (Lamon, 2012).

3.3.4.2 El procés de partició

"El procés de partició és l'acció de dividir" (Petit et al., 2010; p. 59) o, sent més precisos, "en matemàtiques, el procés de partició és l'acció de dividir un conjunt o una unitat en parts que no se superposen i que no són buides" (Lamon, 2012; p. 49). En l'àmbit de les fraccions, segons Lamon, quan s'utilitza el terme partició, és necessari que les parts tinguin la mateixa àrea. És un concepte fonamental per entendre conceptes relacionats amb les fraccions, com ara comparar i ordenar fraccions, operar amb fraccions, trobar repartiments justos, fer entendre la densitat dels nombres racionals, localitzar fraccions a la recta numèrica o trobar fraccions equivalents (Lamon, 2012; Petit et al, 2010). No és estrany que nombrosos autors expliquin què s'entén pel procés de partició i quin paper té en l'aprenentatge de les fraccions (Carpenter et al., 1993; Feikes et al., 2009; Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Pothier i Sawada, 1983; Schwartz, 2008; Tipps, Johnson i Kennedy, 2011; Van de Walle et al., 2010).

El procés de partició de la unitat és diferent segons la interpretació de nombre racional. En el cas de la interpretació com a mesura, els nombres racionals s'obtenen per particions de la unitat de mesura; en canvi, la fracció com a quocient es representa amb la partició de la quantitat que es vol repartir (numerador) en les parts en què s'ha de repartir (denominador) (Carpenter et al., 1993).

Lamon (2012), en la línia de guiar l'ensenyament de les particions, quan es fan repartiments segons la interpretació de fracció com a quocient, si bé esmenta que els nens poden trobar estratègies intuïtives adequades, comenta que cal recordar als alumnes les regles bàsiques següents:

- La unitat s'ha de dividir en parts iguals.
- Si una unitat està formada per més d'un element, els elements han de ser de la mateixa mida.
- *Igual* significa igual en quantitat, però les parts no sempre tenen el mateix nombre de trossos.
- Les parts iguals no han de tenir necessàriament la mateixa forma.
- Quan escollim una forma per utilitzar, per exemple, en la representació d'una coca, anticipem el nombre de trossos que necessitarem per triar la forma en conseqüència. A vegades és més fàcil utilitzar una coca rectangular en comptes d'una de circular. (p. 173)

Segons Pothier i Sawada (1983), el progrés en l'aprenentatge del concepte de partició per part dels alumnes, observat a partir d'un estudi amb quaranta-tres nens de parvulari a tercer de primària, segueix cinc nivells. Quatre d'aquests cinc nivells que proposen es detecten en les dades i el cinquè és hipotètic, el dedueixen com a conseqüència lògica dels altres nivells.

Per a cada nivell, expliquen el concepte clau, l'algoritme o procés seguit per dur a terme la partició i el domini de les habilitats de partició. El resum dels nivells de la recerca de Pothier i Sawada (1983) és el següent:

(a) Partició (nivell I): en aquest nivell apareixen les idees clau de trencament, repartiment i divisió per la meitat. El procés que se segueix és l'assignació de trossos i el domini són entorns socials i comptar nombres. En situacions de la vida quotidiana els nens aprenen a dividir objectes en meitats. Aprenen a traçar una línia en una regió i obtenir dues parts iguals, tot i que encara els falta sentit numèric. De fet, poden dir que han dividit un objecte per la meitat i obtenir-ne quatre trossos. En aquest nivell els nens donen més importància al nombre de trossos que obtenen, a l'assignació de trossos, que no pas a la mida de cada tros.

(b) Algoritme per fer meitats (nivell II): la idea clau d'aquesta fase és la partició sistemàtica en dos sense la noció d'igualtat. El procés que segueixen els nens és repetir dicotomies. El domini són un mig i altres fraccions unitàries en què el denominador és una potència de dos. En aquest nivell aprenen a dividir un rectangle o un cercle en un nombre de parts igual a una potència de dos: dues, quatre, vuit o setze parts. Aquest procés de dividir en meitats per obtenir el nombre de parts a vegades no l'utilitzen correctament, la unitat els pot quedar dividida en tres o cinc parts. Encara no es fixen en la igualtat de les parts.

(c) Restricció als parells (nivell III): en aquest nivell les idees clau són igualtat, congruència i el fet que les dicotomies repetides prenen significat. L'algoritme present en aquest nivell és l'algoritme per fer meitats i les transformacions geomètriques. El domini són fraccions unitàries amb denominadors parells. En aquest nivell els nens tenen en compte si la repartició és justa o no, és a dir, si les parts que han obtingut tenen la mateixa mida. Encara no són capaços d'obtenir terços ni cinquens.

(d) Senars (nivell IV): Les idees clau d'aquest nivell tenen a veure amb els nombres parells i senars, amb buscar un primer moviment i amb transformacions geomètriques. Els procediments o algoritmes que utilitzen els nens que han assolit aquest nivell són les mesures exploratòries, l'assaig i error i comptar per repartir un per un els trossos. El domini són totes les fraccions unitàries. És en aquest nivell que els nens s'adonen que l'algoritme de fer meitats no sempre funciona, com ara quan volen repartir un cercle en un nombre senar de parts. De fet, els sembla que no és possible repartir una regió en un nombre de parts senar.

(e) Composició (nivell V): En aquest nivell els nens s'adonen que el mètode de repartir comptant d'un en un és ineficient quan es vol dividir una unitat en molts trossos, com nou o quinze. Utilitzarien, en aquest cas, un algoritme multiplicatiu: per exemple, per

aconseguir quinze trossos, podrien primer dividir la regió en cinc parts i, després, cada una en tres parts. Aquest nivell, però, és teòric, ja que no s'ha observat de les dades.

En la recerca de Pothier i Sawada (1983) es mostra com l'aprenentatge del procés de partició segueix successivament cinc subconjunts de les fraccions unitàries: "La fracció $\frac{1}{2}$, fraccions amb denominadors que són potències de 2, fraccions amb denominadors parells, fraccions amb denominadors senars i fraccions amb denominadors compostos" (p. 316). Aquest resultat pot guiar l'ensenyament dels conceptes relacionats amb el procés de partició de la unitat.

3.3.4.3 La noció de quantitat

La noció de quantitat té relació amb el concepte explicat en el subapartat anterior, el concepte de partició de la unitat. Quan es porta a terme una partició, s'obtenen parts que es poden comptar, cosa que fa que els alumnes tractin aquestes parts com a quantitats discretes. Per tant, "per entendre el concepte de nombre racional, cal entendre que la partició deriva en una quantitat que és representada per un nou tipus de nombre. La pregunta passa de ser «quants?» a «quant?»" (Carpenter et al., 1993; p. 3-4).

Lamon (2012), en aquest sentit, diu que quan es resolen problemes de fraccions no es poden acceptar nombres. Per exemple, si es proposa un problema en què intervé una pizza, no es podria considerar acceptable la resposta "2 trossos". Com a resposta que contesti a la pregunta "quanta pizza?" o "quina part de la pizza?", es vol una fracció.

3.3.5 Comparació, ordenació i equivalència de fraccions

Els alumnes de l'etapa d'educació primària "haurien de desenvolupar estratègies per ordenar i comparar fraccions, utilitzant sovint referents com $\frac{1}{2}$ i 1 [...], veure relacions entre elles, incloent-hi l'equivalència" (NCTM, 2000; p. 154). En el currículum de Catalunya de l'etapa d'educació primària també s'esmenten aquests continguts: "Reconeixement i cerca de fraccions equivalents seguint camins diversos. [...] Ús de diferents models per comparar i ordenar fraccions i decimals" (Generalitat de Catalunya, 2007; p. 47). L'ordenació i equivalència de fraccions són bàsiques per comprendre altres continguts, són conceptes fonamentals i molt importants per entendre les operacions de fraccions i decimals (Post et al., 1993). A l'etapa d'educació primària l'equivalència és un concepte crític (Van de Walle et al., 2010), i concretament, l'equivalència de fraccions és un concepte matemàtic molt important (Feikes et al., 2009).

"Comparar dues fraccions implica determinar la magnitud relativa de les dues fraccions; és a dir, si es tenen dues fraccions, són iguals (=) entre si, o una fracció és més petita (<) o és més gran (>) que l'altra?" (Petit et al., 2010; p. 83). En aquesta definició s'assumeix que les fraccions que es comparen s'associen a unitats de la mateixa mida. Comparar fraccions permet realitzar ordenacions de fraccions: "Ordenar fraccions implica posar un conjunt de fraccions en ordre, de la més petita a la més gran o de la més gran a la més petita" (Petit et al., 2010; p. 83).

En la recerca de Behr et al. (1984) es diferencia la comparació de fraccions segons si els numeradors o els denominadors són iguals o diferents entre si, i s'obtenen d'aquesta manera les comparacions entre:

- Fraccions amb els mateixos numeradors
- Fraccions amb els mateixos denominadors
- Fraccions amb numeradors i denominadors diferents

El cas de la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents és el que està més relacionat amb els coneixements de fracció equivalent i no equivalent (Behr et al., 1984). Quan es comparen fraccions que tenen els mateixos numeradors o els mateixos denominadors, si les dues fraccions són equivalents és perquè són la mateixa fracció.

En relació amb l'equivalència de fraccions, Petit et al. (2010) esmenten que hi ha dues propietats centrals:

> - Dir que dues fraccions són equivalents és dir que les dues fraccions són denominacions (símbols) pel mateix nombre.
> - El nombre de denominacions diferents per a una fracció donada és infinit. Per exemple, la fracció $\frac{1}{2}$ es pot expressar per qualsevol dels noms (símbols) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, etc. (p. 134)

A l'escola, però, no només s'ensenya la definició conceptual de l'equivalència de fraccions, sinó que la comprensió de l'equivalència molt sovint es basa en un algoritme:

> - Concepte: dues fraccions són equivalents si són representacions de la mateixa quantitat, si són el mateix nombre.
> - Algoritme: per obtenir una fracció equivalent, multiplica (o divideix) els nombres superior i inferior pel mateix nombre diferent de zero. (Van de Walle et al., 2010; p. 302)

A diferència d'alguns autors esmentats (Feikes et al., 2009; Petit et al., 2010, i Van de Walle et al., 2010), Musser, Burger i Peterson (2011) diferencien els termes "igual" i "equivalent". El terme "igual" es refereix a les fraccions com a nombres, mentre que "equivalent" fa referència a les fraccions com a numerals.

Musser et al. (2011) defineixen igualtat de fraccions a partir d'un algoritme: "Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ fraccions qualssevol. Aleshores, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si i només si ad = bc" (Musser et al., p. 221). Aquesta "regla de multiplicar en creu" per comprovar que dues fraccions són iguals és la que se sol utilitzar a la majoria d'escoles. Segons els mateixos autors, d'aquesta definició es pot deduir el teorema següent: "Sigui $\frac{a}{b}$ una fracció qualsevol i, *n*, un nombre enter diferent de zero. Llavors, $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}=\frac{na}{nb}$" (Musser et al., p. 221). És un teorema que coincideix amb la comprensió de l'equivalència de fraccions a partir de l'algoritme que s'ha explicat anteriorment (Van de Walle et al., 2010). Musser et al. (2011) argumenten que "des que $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$ per n=1,2,3..., cada fracció té un nombre infinit de representacions (numerals) [...] i que el terme equivalent es refereix a les fraccions com a numerals" (p. 222). Concretament, diuen que "dues fraccions que representen la mateixa quantitat relativa es diuen fraccions equivalents" (p. 220).

El teorema anterior es pot utilitzar tant per canviar la fracció $\frac{a}{b}$ per $\frac{an}{bn}$ com la fracció $\frac{an}{bn}$ per $\frac{a}{b}$. Quan es canvia la fracció $\frac{an}{bn}$ per $\frac{a}{b}$ es diu que se simplifica la fracció $\frac{an}{bn}$. "El terme simplificar pot ser enganyós, ja que les fraccions no es redueixen en mida (la quantitat relativa que representen), sinó només en complexitat (els numeradors i els denominadors són més petits)" (Musser et al. 2011; p. 221).

En el present treball s'entendrà l'equivalència de fraccions en el sentit que ho han definit Petit et al. (2010) i Van de Walle et al. (2010): dues fraccions són equivalents si són representacions de la mateixa quantitat, si són el mateix nombre.

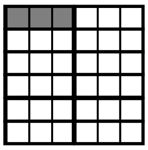
3.3.6 Representacions per a l'ensenyament de la comparació, ordenació i equivalència de fraccions

Els materials i contextos adequats per entendre el concepte d'equivalència de fraccions han de permetre trobar diferents noms per a una fracció (Van de Walle et al., 2010). Per comparar i ordenar fraccions, es poden fer servir les mateixes representacions que per entendre l'equivalència de fraccions. De fet, l'equivalència de fraccions és un concepte molt important a l'hora de comparar i ordenar fraccions, sobretot en cas que els denominadors i els numeradors siguin diferents. A més, depenent de la interpretació de fracció que es tingui en compte, es poden utilitzar diferents representacions per ensenyar els conceptes de comparació, ordenació i equivalència de fraccions.

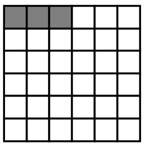
Model d'àrea

Lamon (2012) relaciona el concepte d'equivalència de fraccions amb el procés mental de separació de la unitat en parts (*unitizing*): "Mirant una imatge donada, digues com es pot veure una fracció determinada i utilitza *unitizing* (fragmentació mental de l'àrea en trossos de diferent mida) per anomenar fraccions equivalents" (p. 135). Als quadrats de la figura 3.17 es pot veure com la mateixa regió es pot anomenar $\frac{1}{12}$ o bé $\frac{3}{36}$, depenent de la mida dels trossos en què es divideix el quadrat. Si es considera que cada part és mitja fila, aleshores la part acolorida de la figura 3.17 és $\frac{1}{12}$ perquè hi ha 12 parts. En canvi, si es era qu

$\frac{3}{36}$.

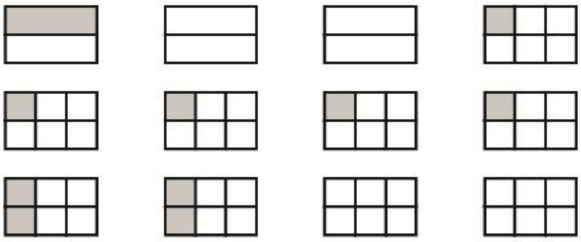


$\frac{1}{12}$



$\frac{3}{36}$

$\frac{1}{12}$ i $\frac{3}{36}$ cor



a) Fraccions amb numeradors iguals

El cas més simple és quan es tenen fraccions unitàries. Aleshores es pot veure, utilitzant un model d'àrea, que la fracció amb el denominador més petit és la fracció més gran, ja que vol dir que la unitat s'ha dividit amb menys parts i, per tant, les parts són més grans (vegeu figura 3.19) (Petit et al., 2010).

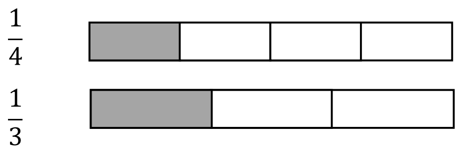


Figura 3.19. Representació a partir d'un model d'àrea de les fraccions $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{3}$ per poder-les comparar.

Quan els numeradors són iguals però diferents de la unitat, es pot utilitzar el que s'acaba de presentar sobre la comparació de fraccions unitàries. Si es volen comparar les fraccions $\frac{2}{4}$ i $\frac{2}{3}$, com que totes dues indiquen que s'agafen dues parts, sabent quina unitat té les parts més grans n'hi ha prou. Per tant, $\frac{2}{3}$ és més gran que $\frac{2}{4}$ perquè $\frac{1}{3}$ és més gran que $\frac{1}{4}$ (vegeu figura 3.20).

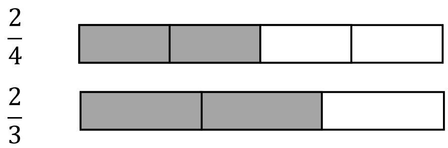


Figura 3.20. Representació a partir d'un model d'àrea de les fraccions $\frac{2}{4}$ i $\frac{2}{3}$ per poder-les comparar.

b) Fraccions amb denominadors iguals

Si es tenen denominadors iguals, vol dir que la unitat s'ha dividit en les mateixes parts; per tant, fent la representació, es veu clar que la fracció amb numerador més gran és la fracció més gran (vegeu imatge 3.21).

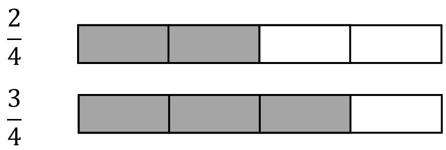


Figura 3.21. Representació a partir d'un model d'àrea de les fraccions $\frac{2}{4}$ i $\frac{3}{4}$ per poder-les comparar.

c) Fraccions amb numeradors i denominadors diferents

El cas de la comparació de dues fraccions amb els numeradors i els denominadors diferents és el més difícil dels tres casos possibles. Però utilitzar representacions pot ajudar a veure quina de les dues fraccions és més gran o més petita (vegeu figura 3.22).

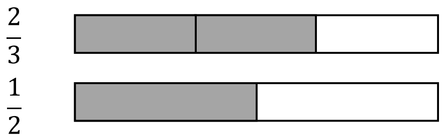


Figura 3.22. Representació a partir d'un model d'àrea de les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ per poder-les comparar. Extret de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding", de S. J. Lamon, 2012, p. 151. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Lamon (2012) proposa fer aquesta activitat més productiva demanant "com de més gran" és la fracció $\frac{2}{3}$ que la fracció $\frac{1}{2}$. En aquest cas, es pot dividir la unitat en més parts per buscar fraccions equivalents a $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ i poder observar que $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{6}$ més gran que $\frac{1}{2}$ (vegeu figura 3.23).

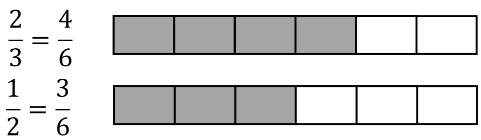


Figura 3.23. Divisió de la unitat en sis parts per comparar $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ i veure que $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{6}$ part més gran que $\frac{1}{2}$. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 151. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Model de grup

Quan es representen fraccions a partir del model de grup (interpretació part–tot), també es pot representar l'equivalència mitjançant el concepte de dividir un grup d'objectes en diferents parts (*unitizing*). A la figura 3.24 es pot veure la representació de fraccions equivalents amb peces grogues i vermelles: concretament, $\frac{16}{24}$ és equivalent a $\frac{4}{6}$ i a $\frac{2}{3}$ i la fracció $\frac{8}{24}$ és equivalent a $\frac{2}{6}$ i $\frac{1}{3}$.

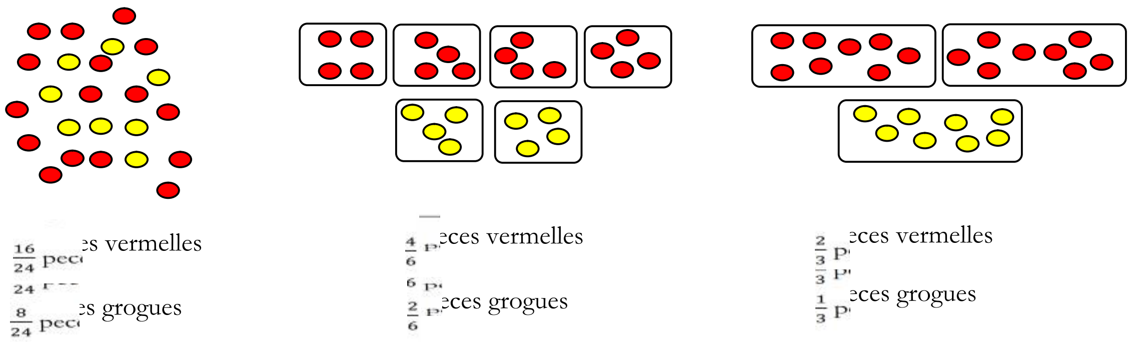


Figura 3.24. Exemples de fraccions equivalents mitjançant el model de grup. Extret i adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de Van de Walle et al., 2010, p. 303. Boston, MA: Pearson Education.

Aquest mateix model de grup també permet comparar i ordenar fraccions. El mateix que s'ha explicat en el model d'àrea es pot utilitzar amb aquest model, però cada part estarà formada per un element o més. Per exemple, per comparar $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$, es pot buscar una fracció equivalent a $\frac{3}{4}$ amb denominador 8, la fracció $\frac{6}{8}$. D'aquesta manera es veu que $\frac{3}{4}$ és més gran que $\frac{5}{8}$ (vegeu figura 3.25).

Figura 3.25. Representació de $\frac{3}{4}$ com $\frac{6}{8}$ per veure que és més gran que $\frac{5}{8}$. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 153. Nova York, NY: Taylor & Francis.

Model de longitud

El concepte d'equivalència es pot comprendre utilitzant la recta numèrica, "perquè totes les fraccions equivalents tenen el mateix valor, es col·loquen al mateix punt de la recta numèrica" (Petit et al., 2010; p. 134). La fracció que es col·loca a la recta numèrica mesura la distància que hi ha de 0 fins on hi ha col·locada la fracció. Aquesta distància es mesura en funció de la mida de les subunitats en què s'ha dividit el segment [0,1]. Com més petita és la mida de la subunitat, més subunitats s'hauran d'agafar. "Quan s'utilitzen dues subunitats diferents per cobrir la mateixa distància, en resulten fraccions amb noms diferents. Hi ha només un nombre racional associat a una distància específica de zero, i les dues fraccions són noms equivalents per aquesta distància" (Lamon, 2012; p. 214). Per exemple, les fraccions $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{8}$ i $\frac{1}{2}$ són equivalents, representen la mateixa distància de 0 al mateix punt de la recta numèrica (vegeu figura 3.26).

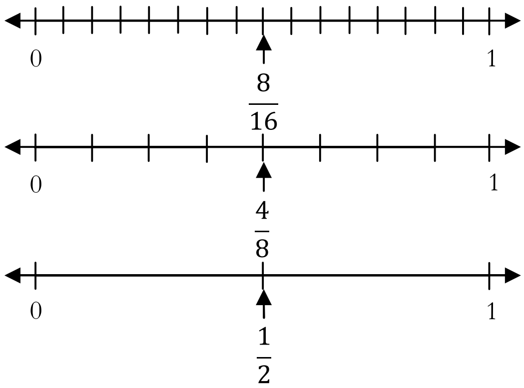


Figura 3.26. Exemples de fraccions equivalents mitjançant la recta numèrica. Extret de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 214. Nova York, NY: Taylor & Francis.

La recta numèrica també és una representació que permet comparar i ordenar fraccions (Lamon, 2012). Donades dues fraccions o més, es poden col·locar a la recta numèrica per veure quina és més gran o més petita. En cas que les fraccions tinguin els denominadors diferents, per col·locar-les a la recta numèrica, es poden utilitzar els conceptes d'equivalència de fraccions. Per exemple, per comparar les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{7}$, es pot utilitzar $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ i $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ (vegeu figura 3.27).

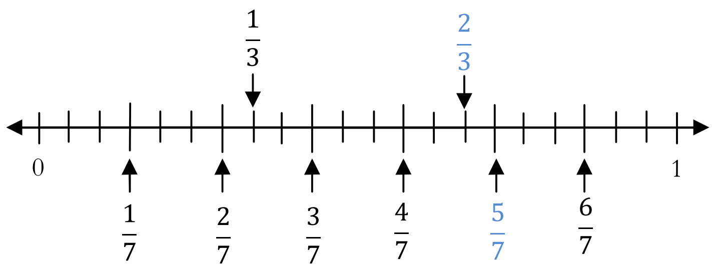


Figura 3.27. Comparació de les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{7}$ mitjançant la recta numèrica. Adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 215. Nova York, NY: Taylor & Francis.

3.3.7 Operacions amb fraccions

El currículum de matemàtiques de l'educació primària fa referència al contingut de cicle mitjà següent: "Realització de sumes i restes amb fraccions senzilles acompanyades de diferents formes de representació gràfica" (Generalitat de Catalunya, 2007; p. 45). En el mateix currículum per a cicle superior s'esmenta la comprensió i ús de la suma i la resta de fraccions mitjançant representacions aritmètiques, a més de les representacions gràfiques. Així mateix, per a aquest cicle, s'hi considera el "desenvolupament d'estratègies de càlcul mental amb nombres naturals, fraccionaris i decimals. Estimació raonable dels resultats de les operacions amb nombres naturals, decimals i fraccionaris. Descripció coherent del procés d'estimació" (Generalitat de Catalunya, 2007; p. 47).

En els continguts referents al càlcul de fraccions presents al currículum, s'aprecia la importància de l'estimació dels resultats de les operacions amb fraccions, a banda de realitzar les operacions mateixes. Per realitzar operacions amb fraccions, és bàsic desenvolupar el sentit numèric i, en concret, el concepte d'estimació dels càlculs de fraccions (Van de Walle et al., 2010).

3.3.7.1 Suma i resta de fraccions

Les sumes i les restes de fraccions es poden portar a terme tant amb estratègies inventades com amb algoritmes (Van de Walle et al., 2010). En el cas de les estratègies inventades, cal tenir cert domini de la comparació i l'equivalència de fraccions i de la relació entre fraccions. Per utilitzar l'algoritme per sumar i restar fraccions, també cal comprendre l'equivalència de fraccions: "La capacitat de rebatejar fraccions utilitzant termes equivalents és, naturalment, l'habilitat fonamental que necessitem per tal de sumar i restar fraccions amb denominadors diferents" (Schwartz, 2008; p. 95).

Quan es fa referència a l'algoritme per sumar i restar fraccions normalment es diferencia entre les fraccions amb denominadors iguals i denominadors diferents (Beckmann, 2011; Musser et al., 2011; Tipps et al., 2011; Van de Walle et al., 2010):

- Fraccions amb denominadors iguals: es manté el denominador i se sumen o resten els nombres dels numeradors, depenent de si es fa una resta o una suma.
- Fraccions amb denominadors diferents: cal buscar fraccions equivalents a les fraccions donades però que tinguin el mateix denominador.

Per exemple, Musser et al. (2011), després d'haver treballat amb models per entendre la suma, proposen l'algoritme següent:

- "Suma de fraccions amb denominadors iguals: siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{b}$ fraccions qualssevol. Aleshores, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$" (p. 233).
- "Suma de fraccions amb denominadors diferents: siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ fraccions qualssevol. Aleshores $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$" (p. 234).

Haylock (2010) proposa els passos següents per sumar o restar fraccions sense diferenciar si les fraccions tenen igual o diferent denominador:

> *(a)* Canvia una o dues de les fraccions a fraccions equivalents, de manera que acabin tenint el mateix denominador; el millor és utilitzar el mínim comú múltiple d'aquests.
> *(b)* Suma o resta els numeradors.
> *(c)* Si és possible, simplifica fins a una fracció equivalent. (p. 215)

Tot i que els algoritmes presentats condueixen a la solució correcta de la suma o la resta, per als alumnes no és el mateix resoldre la suma o la resta amb un dels algoritmes que els ensenya el mestre que inventant ells mateixos els procediments per trobar la solució. Utilitzar un algoritme estàndard ja d'entrada no assegura que els alumnes aprenguin a sumar o restar fraccions amb comprensió.

En l'ensenyament dels continguts de suma i resta de fraccions, s'ha de considerar l'estimació de càlculs amb fraccions com a procés important. Tal com s'ha dit més amunt, en el currículum de primària hi ha inclòs el contingut de l'estimació raonable de resultats de les operacions amb fraccions i la descripció del procés d'estimació. Musser et al. (2011) defineix l'estimació d'un càlcul com "el procés de trobar una resposta aproximada (una estimació) per a un càlcul, sovint utilitzant el càlcul mental" (p. 138) i apunta que l'estimació és una habilitat essencial quan es fan càlculs amb la calculadora.

3.3.7.2 Representació de la suma i la resta de fraccions

Els conceptes d'equivalència de fraccions, d'estimació i l'ús de representacions són útils per resoldre sumes i restes de fraccions. Les representacions ajuden els estudiants a pensar com es pot dividir la unitat per poder fer la suma o la resta (Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010).

Model d'àrea

El model d'àrea permet representar les dues fraccions que es volen sumar o restar i, visualment, trobar amb més facilitat el resultat de la suma o la resta. En alguns casos, es pot arribar al resultat sense fer cap càlcul, només veient la representació; si es representa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ utilitzant els cercles de fraccions, es pot veure que el resultat és $\frac{3}{4}$. A vegades, però, a simple vista no es visualitza el resultat i, mitjançant el que s'ha explicat a l'apartat de les representacions per a l'equivalència de fraccions, es busquen fraccions equivalents a les donades que tinguin els mateixos denominadors per poder resoldre la suma o la resta. Els models que es podran utilitzar, per tant, són els mateixos que s'han explicat per representar l'equivalència de fraccions. A la figura 3.28 es pot veure un exemple de com sumar $\frac{3}{5}$ i $\frac{1}{2}$ representant la unitat amb un rectangle i buscant fraccions equivalents per obtenir els mateixos denominadors.

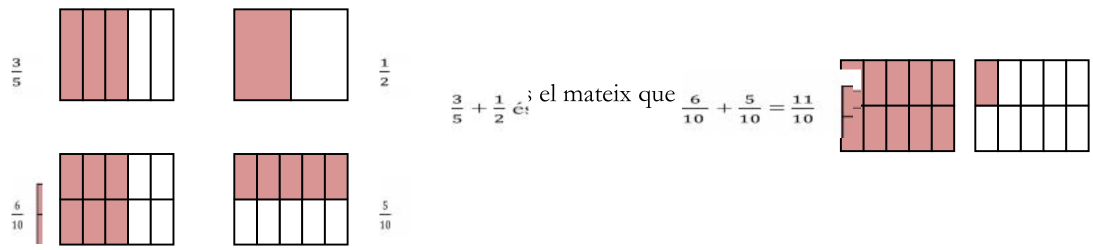


Figura 3.28. Suma de les fraccions $\frac{3}{5}$ i $\frac{1}{2}$ mitjançant el model d'àrea. Adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de J. A. Van de Walle et al., 2012, p. 316. Boston, MA: Pearson Education.

Model de grup

El mateix plantejament que s'ha fet en el cas del model d'àrea es pot fer per al model de grup. Poden haver-hi fraccions que, quan s'utilitza un model de grup, ja es visualitza el resultat directament i, en canvi, n'hi pot haver d'altres en què cal buscar fraccions equivalents amb els mateixos denominadors per poder fer la suma o la resta. A la figura 3.29 es pot veure un exemple de com sumar $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ representant la unitat amb el model de grup i buscant fraccions equivalents per obtenir els mateixos denominadors.

$\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ és el mateix que $\frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$

Figura 3.29. Suma de les fraccions $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ mitjançant el model de grup. Adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de J. A. Van de Walle et al., 2012, p. 316. Boston, MA: Pearson Education.

Model de longitud

La recta numèrica també és una representació que permet sumar i restar fraccions. Es pot utilitzar el procés de partició successiva per trobar denominadors comuns de les fraccions que se sumen o es resten i trobar així el resultat (Lamon, 2012). A la figura 3.30 es pot veure un exemple de com sumar $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{4}$ mitjançant la representació de les fraccions a la recta numèrica.

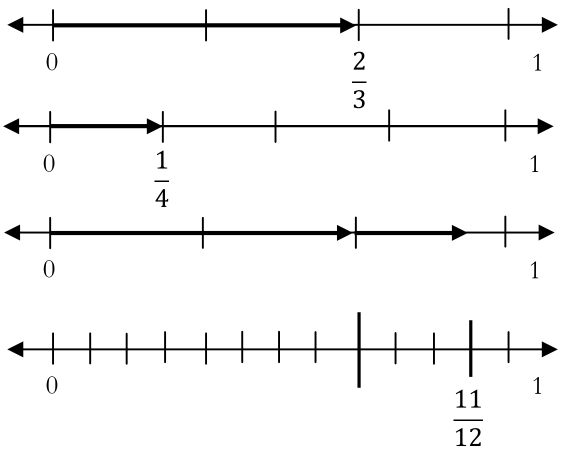


Figura 3.30. Suma de les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{4}$ mitjançant la recta numèrica. Extret i adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 217. Nova York, NY: Taylor & Francis.

3.3.7.3 Multiplicació i divisió de fraccions

Segons Petit et al. (2010), la multiplicació i la divisió de fraccions és un dels conceptes més complicats d'entendre per als alumnes d'educació primària. Aquests mateixos autors argumenten que algunes propietats de les operacions amb nombres enters es mantenen per a les operacions amb fraccions:

- "Propietat d'identitat de la multiplicació": quan es multiplica per 1, s'obté el mateix nombre. Per exemple, $\frac{1}{2}$ x 1 = $\frac{1}{2}$.
- "Propietat d'identitat de la divisió": quan es divideix un nombre entre 1, s'obté el mateix nombre. Per exemple, $\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$.
- "Propietat zero de la multiplicació": quan es multiplica per 0, el resultat és 0. Per exemple, $\frac{1}{2}$ x 0 = 0.
- La multiplicació i la divisió són operacions inverses. Per exemple, $2 \div \frac{1}{2} = 4$ i 4 x $\frac{1}{2}$ = 2

En canvi, altres propietats de les operacions amb nombres enters no es mantenen en les operacions amb fraccions. És el cas de la propietat que "quan es multipliquen nombres enters, el producte és més gran que els factors, llevat que un dels factors sigui 0 o 1", que és certa per als nombres enters però no sempre es compleix quan es multipliquen fraccions. Per tal que aquesta propietat sigui certa per a la multiplicació de fraccions, cal modificar-la de la manera següent: "Quan es multipliquen dos nombres, el producte és més gran que els factors, llevat que un dels factors sigui 0 o 1 o que una fracció sigui més petita que 1" (Burns, 2003; p. xi).

Quan es pensa en el procés per calcular la multiplicació de fraccions, normalment es pensa en l'algoritme de multiplicar el numerador pel numerador i el denominador pel denominador. Musser et al. (2011) defineixen la multiplicació de fraccions amb aquest algoritme: "Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ qualssevol fraccions. Aleshores, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$" (p. 245). Els mateixos autors, per deduir i entendre l'algoritme presentat, proposen estudiar tres casos diferents segons els nombres que intervenen en la multiplicació:

- Un nombre enter multiplicat per una fracció. Aquesta multiplicació es pot entendre com una suma iterada. Per exemple, 3x$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- Una fracció per un nombre enter. En aquest cas, per exemple, si es multiplica $\frac{1}{2}$ x 6, no es pot interpretar que es fa una suma repetida $\frac{1}{2}$ del 6. Per tant, una possibilitat és que, per la propietat commutativa, $\frac{1}{2}$ x 6 = 6 x $\frac{1}{2}$ i es pot aplicar el que s'ha dit en el cas 1. Una altra interpretació, però, podria ser entendre que es vol agafar la meitat de 6 i, per tant, el resultat és 3.
- Una fracció d'una fracció. En aquest cas, per exemple, $\frac{1}{3}$ x $\frac{5}{7}$ representa $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{7}$. Es pot interpretar com el fet d'agafar una part de tres parts iguals de la fracció $\frac{5}{7}$.

La interpretació d'aquest últim cas de Musser et al. (2011), en què es multiplica una fracció per una altra fracció, coincideix amb la interpretació que fan Siebert i Gaskin (2006) per explicar la multiplicació de fraccions a partir de la partició i iteració. Per explicar la multiplicació $\frac{3}{4}$ x $\frac{2}{5}$, proposen primer utilitzar la interpretació de $\frac{3}{4}$ com 3 un quart. Per tant, primer cal calcular $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$. Per això cal fer quatre parts de $\frac{2}{5}$, ja que es vol una quarta part de $\frac{2}{5}$. S'obté que $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$ és $\frac{1}{10}$. Ara només cal agafar 3 vegades $\frac{1}{4}$. Per tant, el resultat de $\frac{3}{4}$ x $\frac{2}{5}$ és $\frac{3}{10}$.

Lamon (2012) també proposa aquest enfocament quan les fraccions s'interpreten com a comparació part–tot, però, a mé,s explica que la multiplicació es pot interpretar com una composició d'operadors: "Per exemple, $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$ significa «prendre $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d'una unitat» i és equivalent a prendre «$\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ de la unitat»" (p. 198).

Per explicar la divisió de fraccions, cal fer referència als dos significats de la divisió: partitiva i quotativa (*quotative*). En els problemes de divisió partitiva es té una quantitat que es vol repartir entre un nombre de grups i cal trobar quants elements hi ha en cada grup (Lamon, 2012; Van de Walle et al., 2010). Un exemple amb nombres enters podria ser: "Es reparteixen 30 caramels entre 5 nens. Quants caramels tocaran a cada nen?". Es pot connectar aquesta interpretació amb les fraccions demanant quina part dels caramels tocarà a cada nen. La resposta és $\frac{5}{30}$ o $\frac{1}{6}$. "La divisió partitiva és la divisió que es basa en la partició o el repartiment just" (Lamon, 2010; p. 156). En els problemes de divisió quotativa es té una quantitat d'objectes i se'n dóna una quantitat a cada persona, i cal trobar a quanta gent se li pot haver donat objectes (Lamon, 2012; Van de Walle et al., 2010). Un exemple pot ser: "Es reparteixen 30 caramels a uns nens i a cada nen se li donen 5 caramels. A quants nens se li podran donar caramels?". Quan el divisor és un nombre enter, el problema es pot connectar amb les taxes. En el problema de l'exemple, toquen 5 caramels per persona. Quan el divisor és una fracció, cal veure quantes vegades es pot restar el divisor del dividend. La divisió quotativa també s'anomena divisió de mesura o divisió substractiva, perquè es dóna una mesura que es va traient del dividend (Lamon, 2012; Van de Walle et al., 2010). Per exemple, la divisió $2 \div \frac{1}{3}$ es pot interpretar en termes de divisió quotativa i, per tant, trobar quantes vegades es pot treure $\frac{1}{3}$ de 2. El resultat és 6.

Una altra interpretació que proposa Lamon (2012) és la divisió entesa com una composició d'operadors. Cal remarcar, tal com diu la mateixa autora, que la divisió és una operació en què el resultat no es diu en funció de la unitat escollida per representar les fraccions, sinó en termes del divisor.

En relació amb els algoritmes per resoldre la divisió de fraccions, Musser et al. (2011) proposen tres maneres equivalents d'entendre aquesta divisió i deduir els algoritmes:

- L'enfocament del denominador comú. Quan les fraccions tenen els denominadors iguals, la divisió de fraccions es pot interpretar com una extensió de la divisió de nombres enters. Per exemple, $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$ es pot resoldre pensant quants grups de mida $\frac{2}{7}$ hi ha en $\frac{6}{7}$. Aquest enfocament porta a la definició següent: "Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{b}$ qualssevol fraccions amb $c \neq 0$, aleshores, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$" (p. 249). Aquest enfocament es pot generalitzar a fraccions que no tinguin els denominadors iguals; per utilitzar-lo, només caldrà buscar fraccions equivalents a les que es divideixen amb els denominadors iguals.
- L'enfocament de dividir els numeradors i els denominadors. Quan es divideixen dues fraccions en què el numerador i el denominador del dividend són múltiples del numerador i el denominador del divisor respectivament, es pot resoldre la divisió dividint els numeradors i els denominadors. Per exemple, $\frac{21}{40} \div \frac{7}{8} = \frac{21 \div 7}{40 \div 8} = \frac{3}{5}$.
- L'enfocament d'invertir el divisor i multiplicar. Els dos enfocaments anteriors es poden generalitzar a qualsevol fracció, i s'obté així que es pot calcular la divisió de dues fraccions multiplicant el dividend per l'invers del divisor. Si es generalitza l'enfocament del denominador comú per a qualsevol parell de fraccions, es té l'enfocament d'invertir el divisor i multiplicar: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$. Generalitzant l'enfocament de dividir numeradors i denominadors, s'obté també aquest enfocament de multiplicar per l'invers del divisor per resoldre la divisió; per exemple, $\frac{21}{40} \div \frac{6}{11} = \frac{21x6x11}{40x6x11} \div \frac{6}{11} = \frac{(21x6x11) \div 6}{(40x6x11) \div 11} = \frac{21x11}{40x6}$. Aquest mateix enfocament d'invertir i multiplicar es pot deduir des d'una altra perspectiva: la divisió $3 \div \frac{1}{2}$ es pot pensar com la solució de quants grups de mida $\frac{1}{2}$ hi ha en el 3. Cada unitat té dues meitats; com que es tenen 3 unitats, obtenim que $3 \div \frac{1}{2} = 3 \text{ x } 2 = 6$. Aquest exemple també es pot generalitzar a la divisió de qualsevol parell de fraccions.

Van de Walle et al. (2010) expliquen només dos d'aquests algoritmes per dividir fraccions, l'algoritme del denominador comú i l'algoritme d'invertir i multiplicar; a més, proposen deduir-los de manera semblant a com ho plantegen Musser et al. (2011). Tant Van de Walle et al. com Musser et al. proposen utilitzar la interpretació de la divisió quotativa per deduir l'algoritme d'invertir i multiplicar.

Dels algoritmes presentats, el d'invertir i multiplicar per dividir fraccions és un dels que més s'utilitza a l'escola, si bé no tots els mestres entenen per què es fa d'aquesta manera (Van de Walle et al., 2010). Però entendre que dividir per $\frac{1}{2}$ és el mateix que multiplicar per 2 i que multiplicar per $\frac{1}{2}$ és el mateix que dividir per 2 és un aspecte important de la multiplicació i la divisió de fraccions (Petit et al., 2010).

3.3.7.4 Representació de la multiplicació i la divisió de fraccions

A l'hora de resoldre multiplicacions i divisions de fraccions, es poden utilitzar representacions diferents que poden ajudar a comprendre aquestes operacions i també a deduir els algoritmes presentats al subapartat anterior.

Representació de la multiplicació de fraccions

En aquest subapartat es veurà que, depenent de la interpretació de fracció que es tingui en compte, es poden fer servir representacions diferents per ensenyar a multiplicar fraccions.

Model d'àrea

Hi ha diversos autors (Lamon, 2012; Musser et al., 2011; Petit et al., 2010; Flores i Torralbo, 2011; Siebert i Gaskin, 2006; Van de Walle et al., 2010) que proposen el model d'àrea com un dels models per representar la multiplicació de fraccions.

> Van de Walle et al. (2010) argumenten que aquest model és adequat perquè és menys avorrit que fer particions d'una longitud, permet observar visualment que el resultat de multiplicar dues fraccions pot ser més petit que les dues fraccions i és un bon model per representar l'algoritme estàndard de la multiplicació de fraccions. Lamon (2012) diu fins i tot que "els models d'àrea, tal com una àrea rectangular, són els millors per introduir la multiplicació de fraccions" (p. 155).

No tots els autors aposten per aquest model per ensenyar la multiplicació de fraccions. Segons Wu (2009), quan els alumnes operen amb nombres enters, tenen com a referència l'ús dels dits; amb les fraccions, en canvi, es fa servir com a model la pizza o el pastís. Però, per aquest autor, per a les fraccions més grans que 1 o per a les operacions amb fraccions, aquest model és poc adequat.

A la figura 3.31 es presenta un exemple d'aquesta representació per calcular la multiplicació $\frac{2}{3}$ x $\frac{9}{10}$. Primer, es representa la fracció $\frac{9}{10}$ en un rectangle i, després, de les nou desenes parts se'n marquen les dues terceres parts.

$\frac{9}{10}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{6}{10}$

Figura 3.31. Multiplicació de les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{9}{10}$ mitjançant el model d'àrea. Adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de J. A. Van de Walle et al., 2012, p. 319. Boston, MA: Pearson Education.

A vegades cal utilitzar els processos de partició i iteració per poder resoldre la multiplicació de fraccions (Siebert i Gaskin, 2006), ja que directament no es poden agafar les parts de la primera fracció. Un exemple d'aquest cas es mostra a la figura 3.32. Primer es representa la fracció $\frac{2}{5}$ en un rectangle. Cal agafar $\frac{3}{4}$ parts de $\frac{2}{5}$, però, segons la interpretació de Siebert i Gaskin, $\frac{3}{4}$ és 3 vegades $\frac{1}{4}$. Per tant, cal prendre una quarta part de $\frac{2}{5}$. Per això, cal dividir les dues cinquenes parts en quatre parts iguals. D'aquestes quatre parts, se n'agafen tres i s'obté el resultat de la multiplicació: $\frac{3}{10}$.

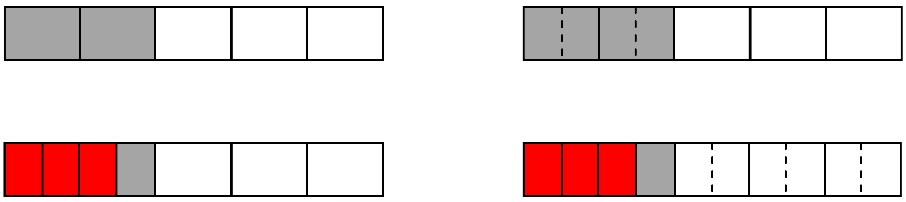


Figura 3.32. Multiplicació de les fraccions $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{5}$ mitjançant el model d'àrea i utilitzant el procés de partició. Adaptat de "Creating, Naming, and Justifying Fractions", de D. Siebert i N. Gaskin, 2006, *Teaching Children Mathematics*, April, p. 399.

En la interpretació de la multiplicació de fraccions com una composició d'operadors també es pot utilitzar el model d'àrea presentat en els exemples anteriors (Lamon, 2012).

Model de grup

El model de grup també es pot utilitzar per representar la multiplicació de fraccions, tot i que cal tenir en compte com ha de ser la unitat, quants objectes s'han de considerar (Van de Walle et al., 2010). Es pot seguir el mateix procés que quan s'utilitza el model d'àrea,

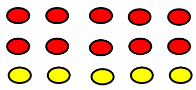
:rò :

es.

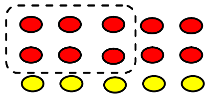
$\frac{3}{5}$

$\frac{2}{3}$, P

$\frac{2}{3}$ er



$\frac{2}{3}$ parts de les fitxes són vermelles



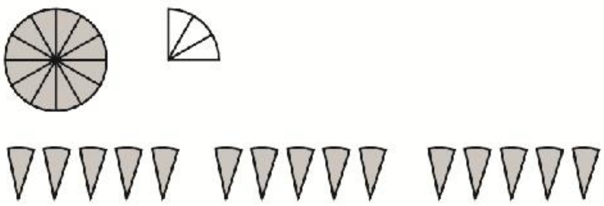
Prenem les $\frac{3}{5}$ parts de les fitxes vermelles, s'obtenen les $\frac{6}{15}$ parts del total de fitxes

$\frac{3}{5}$ i $\frac{2}{3}$ m

$\frac{1}{4}$ ÷

ta c

$\frac{1}{4}$ p

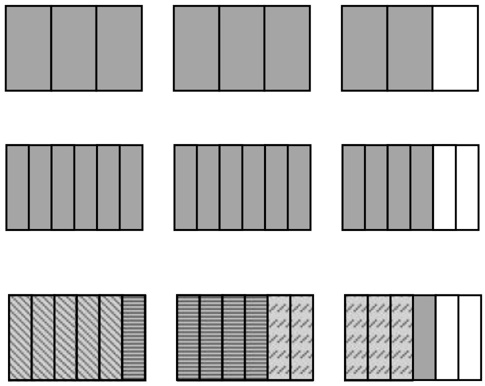


Es pot dividir cada quart en tres parts i s'obté així 15 dotzenes parts.

Les 15 dotzenes parts s'han de repartir en 3 grups. Podrà dedicar $\frac{5}{12}$ parts d'una hora a fer cada treball.

$\frac{1}{4}$ ÷

A la figura 3.35 es mostra un exemple de la representació de la divisió $2\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ mitjançant el model d'àrea i la interpretació quotativa de la divisió.



Es comença representant $2\frac{2}{3}$.

Se subdivideix cada unitat per obtenir sisens i poder veure quants $\frac{5}{6}$ hi ha en $2\frac{2}{3}$.

Es pot veure que en $2\frac{2}{3}$ hi ha 3 vegades $\frac{5}{6}$ i que queda $\frac{1}{6}$. Però cal expressar $\frac{1}{6}$ respecte al divisor $\frac{5}{6}$, és a dir, $\frac{1}{6}$ és una cinquena part de $\frac{5}{6}$. El resultat de la divisió és $3\frac{1}{5}$.

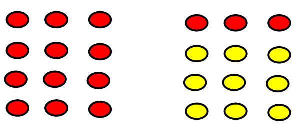
Figura 3.35. Representació de la divisió $2\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ mitjançant el model d'àrea. Extret i adaptat de "Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers", de S. J. Lamon, 2012, p. 158. Nova York, NY: Taylor & Francis.

En la interpretació de la divisió de fraccions com una composició d'operadors també es pot utilitzar el model d'àrea presentat en els exemples anteriors (Lamon, 2012).

Model de grup

El model de grup també es pot utilitzar per representar la divisió de fraccions (Van de Walle et al., 2010). Es pot seguir el mateix procés que quan s'utilitza el model d'àrea però amb un conjunt discret d'objectes.

A la figura 3.36 es mostra un exemple de la representació de la divisió $1\frac{1}{4} \div 3$ mitjançant el model de grup i la interpretació partitiva de la divisió. El problema proposat és el mateix que s'ha presentat en l'exemple del model d'àrea: un alumne disposa de $1\frac{1}{4}$ hores per realitzar tres treballs. Vol dedicar el mateix temps a fer cada treball. De quant temps disposarà per fer cada un dels treballs?.



Es representa la fracció $1\frac{1}{4}$. En $1\frac{1}{4}$ hi ha 15 fitxes, es poden posar 5 fitxes a cada un dels tres grups. Cada fitxa és $\frac{1}{12}$ d'1 hora o 5 minuts. Per tant, la divisió $1\frac{1}{4} \div 3 = \frac{5}{12}$ d' 1 hora.

Figura 3.36. Representació de la divisió $1\frac{1}{4} \div 3$ mitjançant el model de grup. Adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de J. A. Van de Walle et al., 2012, p. 322. Boston, MA: Pearson Education.

Model de longitud

La recta numèrica també es pot utilitzar per representar la interpretació partitiva de la divisió. El mateix exemple de la divisió $1\frac{1}{4} \div 3$ representat amb els models d'àrea i de grup es pot observar a la figura 3.37 mitjançant la recta numèrica.

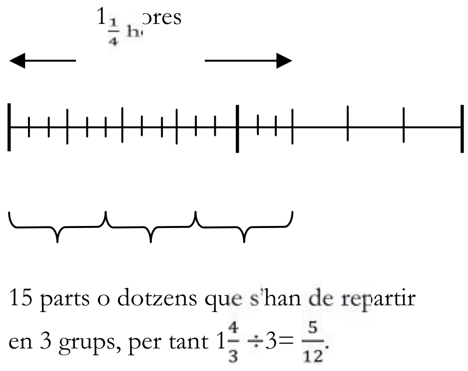


Figura 3.37. Representació de la divisió $1\frac{1}{4} \div 3$ mitjançant el model de longitud. Adaptat de "Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally", de J. A. Van de Walle et al., 2012, p. 322. Boston, MA: Pearson Education.

La recta numèrica també és una representació per la interpretació quotativa de la divisió. Es pot veure l'exemple de com representar la divisió $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4}$ a la figura 3.38. $\frac{1}{4}$ cap 6 vegades en $\frac{3}{2}$.

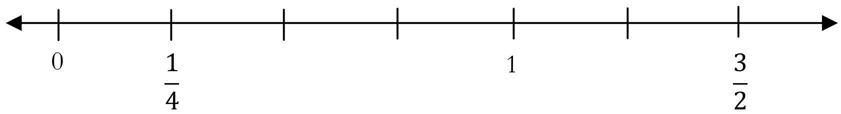


Figura 3.38. Representació de la divisió $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4}$.

D'ara endavant, quan en aquest treball es parli de model, s'entendrà que es fa referència a una representació amb objectes, imatges o contextos reals simulats.

3.3.8 Infinitud i densitat de les fraccions

La propietat de la densitat de les fraccions és molt diferent de les propietats que puguin tenir els nombres enters. Aquesta propietat es refereix al fet que "entre dues fraccions hi ha un nombre infinit de fraccions" (Petit et al., 2010; p. 119). És un concepte que planteja dificultats als alumnes a l'hora de comprendre'l i aplicar-lo (Orton et al., citat a Petit et al., 2010).

Petit et al. (2010) demostren aquesta propietat a partir de calcular la mitjana de les dues fraccions entre les quals volem provar que n'hi ha una altra, ja que, donats dos nombres, la mitjana d'aquests sempre serà un nombre que hi haurà entremig.

La propietat de la densitat dels nombres racionals està directament relacionada amb la interpretació de fracció com a mesura. Quan es mesura una magnitud, el mesurament es pot fer més precís si es van fent subdivisions cada vegada més petites de la unitat. Aquesta aproximació cada cop més precisa és possible gràcies a la densitat dels nombres racionals (Lamon, 2012).

Segons Lamon (2012), els alumnes entenen la interpretació com a mesura quan "(*a*) estan còmodes amb particions successives; (*b*) són capaços de trobar qualsevol quantitat de fraccions entre dues fraccions donades, i (*c*) són capaços de comparar qualsevol parell de fraccions" (p. 214). S'evidencia, per tant, la relació entre la interpretació de la fracció com a mesura i la propietat de la densitat dels nombres racionals.

En el cas de la infinitud, quan els nens són petits ja hi tenen interès i mostren intuïcions en relació amb aquest concepte (Wheeler, citat a Pehkonen, Hannula, Maijala i Soro, 2006), tot i que no sempre es tracta a l'etapa d'educació primària.

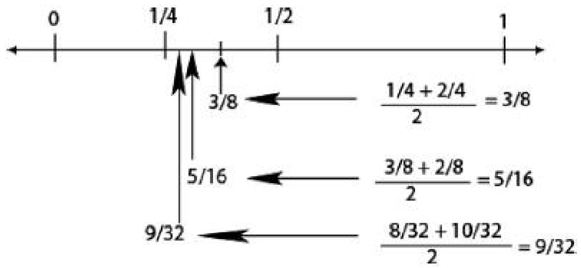
Pehkonen et al. (2006) diferencien entre l'infinit actual i l'infinit potencial. L'infinit potencial fa referència als processos que no tenen final: per exemple, el procés de comptar, que no s'acaba mai. Aquests processos s'anomenen potencialment infinits i són els primers exemples d'infinitud amb què es troben els nens. En canvi, l'infinit actual fa referència a l'infinit com a una "cosa" acabada, com ara quan diem que el conjunt de tots els nombres naturals és infinit. En aquesta situació, es conceptualitza el procés potencialment infinit de comptar més i més nombres com si estigués d'alguna manera acabat (Pehkonen et al., 2006).

3.3.9 Representacions per a l'ensenyament de la infinitud i la densitat de les fraccions

Les representacions utilitzades per ensenyar la densitat han de permetre entendre que la mitjana entre dos nombres està entre aquests dos nombres. I que es poden anar trobant "mitjanes successives", amb la qual cosa es comprèn que entre dos nombres hi haurà infinits nombres. Petit et al. (2010) proposen mostrar aquest procés, primerament, amb nombres enters i, a continuació, amb fraccions.

Model de longitud

Dins del model de longitud, la recta numèrica permet mostrar el procés de trobar un nombre entre dos nombres mitjançant el càlcul de la mitjana dels dos nombres (vegeu figura 3.39). "Els investigadors indiquen que fer servir rectes numèriques té potencial per


0
1/4
1/2
1
3/8
5/16
9/32
$\frac{1/4 + 2/4}{2} = 3/8$
$\frac{3/8 + 2/8}{2} = 5/16$
$\frac{8/32 + 10/32}{2} = 9/32$

Segons la literatura revisada, s'observa que en la majoria de les recerques els participants són estudiants de mestre dels Estats Units (Ball, 1990a, 1990b; Caglayan i Olive, 2011; Li i Smith, 2007; Lin, 2010; Luo, 2009; McAllister i Beaver, 2012; Meel, 2002; Newton, 2008; Noh i Sabey, 2014; Rosli et al., 2011; Tobias, 2013; Utley i Reeder, 2011; Whitacre i Nickerson, 2011), tot i que en algunes s'analitzen els coneixements de futurs mestres de Nova Zelanda (Harvey, 2012), Gran Bretanya (Domoney, 2002), Turquia (Isik i Kar, 2012; Isiksal i Cakiroglu, 2011), Israel (Tirosh, 2000), Canadà (Kajander i Holm, 2011), Austràlia (Ho i Lai, 2012; Rizvi i Lawson, 2007) o Espanya (Montes et al., 2015). Alguns dels estudis són recerques comparatives entre estudiants o mestres de dos països, com els Estats Units i la Xina (Lin et al., 2013; Luo, Lo i Leu, 2011; Ma, 1999), i en l'estudi TEDS-M s'analitzen els coneixements en matemàtiques i en didàctica de la matemàtica d'estudiants de disset països (MECD, 2012).

Així com hi ha diversitat en l'origen dels participants, no totes les recerques se centren a analitzar els coneixements dels futurs mestres sobre els mateixos continguts de fraccions. N'hi ha que analitzen els coneixements dels estudiants de mestre sobre el concepte d'unitat, les interpretacions de fracció, el significat de fracció, el procés mental de separar una quantitat en parts (*unitizing*), la representació de fraccions, l'equivalència, comparació i ordenació de fraccions, les operacions amb fraccions, la densitat dels nombres racionals o la capacitat de proposar problemes a partir d'una expressió numèrica amb fraccions. El contingut més analitzat és el de les operacions amb fraccions i, concretament, el de divisió de fraccions. Més endavant s'explicaran aquestes recerques amb més detall.

Hi ha estudis que analitzen els coneixements sobre fraccions, mentre que d'altres analitzen els coneixements per a l'ensenyament. En el treball d'Olanoff et al. (2014), es fa una revisió de les investigacions en relació amb el coneixement matemàtic dels estudiants de mestre en el contingut de fraccions. En aquest treball, presenten els resultats d'una quarantena d'estudis organitzats en tres períodes de temps: abans del 1998, entre el 1998 i el 2011 i entre el 2011 i el 2013. D'aquestes recerques examinen els resultats sobre els coneixements de fraccions dels estudiants de mestre respecte al coneixement comú del contingut, al coneixement especialitzat del contingut i al coneixement del contingut i dels alumnes. A partir dels estudis revisats, els autors conclouen que, en general, els estudiants mostren molt més domini en l'aplicació dels procediments que no pas en el sentit numèric en el contingut de fraccions, tot i que no comprenen prou el significat d'aquests procediments ni per a què s'utilitzen.

Olanoff et al. (2014), en vista dels estudis revisats, també determinen que els estudiants es basen sobretot en la interpretació de fracció com a comparació part–tot, mentre que mostren problemes amb altres interpretacions, com la d'operador o de mesura.

Les dificultats que presenten els estudiants de mestre en el contingut de fraccions en la literatura revisada per Olanoff et al. (2014) són diverses, des de no saber triar el model adequat per representar multiplicacions i divisions, confondre el nombre d'objectes amb les parts fraccionàries quan la unitat correspon a un grup d'objectes o tenir dificultats per interpretar els algoritmes no estàndards.

A continuació es mostren amb detall les recerques revisades sobre els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb les fraccions i el seu ensenyament, organitzades segons el contingut a què fan referència: significat de fracció, equivalència, comparació i sentit numèric, operacions amb fraccions i densitat dels nombres racionals.

Significat de fracció

Segons la literatura revisada a l'apartat 3.3, el significat de fracció és complex pel fet que la fracció és un nombre que pot tenir diferents interpretacions. Per exemple, Lamon (2012) en proposa cinc: comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó. En l'ensenyament de les matemàtiques a l'etapa d'educació primària, la més present és la de comparació part–tot en detriment de les altres. Aquest fet no ajuda a comprendre el significat de fracció.

D'altra banda, tal com s'ha presentat també a l'apartat 3.3, hi ha tres aspectes que són essencials per poder connectar les diferents interpretacions de fracció: el concepte d'unitat, el procés de partició i la noció de quantitat (Carpenter et al., 1993).

Un aspecte essencial en l'aprenentatge de les matemàtiques són les representacions, ja que comprendre les idees matemàtiques depèn de com es presenten (NCTM, 2000). En el cas de l'ensenyament de les fraccions, les representacions també són fonamentals, tot i que no sempre s'utilitzen de la manera adequada (Feikes et al., 2009).

Interessa, per tant, estudiar quins són els coneixements dels mestres sobre les interpretacions i representacions de les fraccions i quins els coneixements sobre el concepte d'unitat. En la literatura revisada que parla d'estudiants de mestre i fraccions, hi ha alguns estudis que analitzen els coneixements dels futurs mestres sobre el concepte d'unitat (Domoney, 2002; Montes et al., 2015; Rosli et al., 2011; Tobias, 2013), a la vegada que alguns també examinen els coneixements dels mestres en relació amb com els estudiants interpreten les fraccions (Domoney, 2002), com utilitzen el llenguatge en la definició del concepte d'unitat (Tobias, 2013) o com entenen el concepte de separar una quantitat en parts (*unitizing*) (Rosli et al., 2011). A continuació s'expliquen amb més detall aquests estudis.

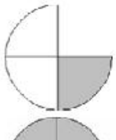
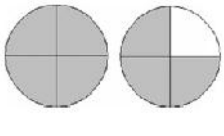
L'estudi de Domoney (2002) mostra com la interpretació de nombre racional com a comparació part–tot entre els estudiants de mestre domina sobre el significat de fracció com a nombre per si mateix. Domoney entrevista quatre estudiants de mestre que comencen un curs sobre fraccions en què es tracta com ensenyar fraccions a l'etapa d'educació primària i també els aspectes numèrics de les fraccions. Els estudiants han de respondre a cinc preguntes: dir com explicarien què són les fraccions a algú que no ho sap, explicar què s'imaginen quan senten "un quart", justificar com han ordenat fraccions, situar els nombres tres cinquens i un i un cinquè a la recta numèrica de 0 a 5, amb els enters de 0 a 3 marcats, i identificar parells de nombres que sumen 5.

Els estudiants d'aquesta recerca, quan expliquen què és una fracció, si bé en algun moment poden fer referència a les fraccions com a nombre, acaben referint-se tots a les fraccions des de la interpretació comparació part–tot. Per exemple, un dels estudiants defineix fracció així: "És un nombre: es pot representar de diferents maneres i es considera una part d'un tot" (Domoney, 2002; p. 60). Aquest estudiant, encara que primer diu que la fracció és un nombre, després fa referència a la interpretació comparació part–tot. Els altres tres estudiants només se centren en la interpretació part–tot. El més interessant d'aquestes respostes és que els estudiants havien parlat de les fraccions com a nombres en el curs de fraccions i, tot i això, defineixen fracció segons la interpretació de fracció part–tot; ells mateixos deien que havien explicat què són les fraccions partint dels seus "coneixements anteriors" al curs.

A l'hora d'explicar com s'imaginen "un quart", dos estudiants diuen que pensen en el numeral, mentre que els altres dos parlen de quarts de pastissos o galetes. En la qüestió en què han d'ordenar fraccions, hi ha més diversitat en les respostes, malgrat que sembla que també preval la interpretació de fracció com a comparació part–tot. Un estudiant escriu les fraccions en decimals, i un altre diu que s'imagina la recta numèrica, però, segons l'autor, podria ser que entengués les parts d'un total representat per la recta numèrica. El tercer estudiant ordena les fraccions representant-les en rectangles i, l'últim, representant-les en percentatges.

La pregunta en què han de situar la fracció tres cinquens a la recta numèrica que té una longitud de 5 unitats i on hi ha marcat del 0 al 3, també comporta dificultats. Un estudiant marca correctament la fracció tres cinquens, però els altres tres situen aquesta fracció a la posició del nombre 3, si bé després són conscients que s'han equivocat. Amb aquest error, Domoney (2002) argumenta que els estudiants interpreten la recta numèrica com una unitat dividida en parts i segurament l'error també està condicionat per demanar de situar una fracció amb denominador cinc en una recta on hi ha marcades les unitats fins a cinc.

Amb els resultats de l'estudi de Domoney (2002), queda constància de "la força" de la interpretació de la fracció com a comparació part–tot i la persistència d'aquest model. I tot i que "la preferència pels mètodes part–tot no implica per si mateixa la manca de comprensió en els constructes numèrics" (Domoney, 2002; p. 63), sí que mostra una manca de flexibilitat entre els diferents significats de fracció.

	1/3 or 1/4	It depends on how you looked at it
	7/8 or 1 3/4	It's just a question of how you group your problem You're just looking at it one at a time instead of looking at them both together

Level of defining the whole	Defined whole	Solution	Number of students who gave that solution
Only numerical	No whole defined	4/5	3
Using incorrect language for defining a whole of one	Pieces or slices	Four pieces	10
		1/5 *of a* piece of pizza	1
		1/5 slices per person	1
	All the pizzas	4/20 *of four* pizzas	4
		4/5 *of the* pizza	1
	Each pizza	1/5 *of each* pizza	4
		4/5 *of each* pizza	1
Using correct language for defining a whole of one	A pizza	1/5 *of a* whole pizza	4
		4/5 *of a* pizza	2
	One pizza	4/5 *of one* pizza	2

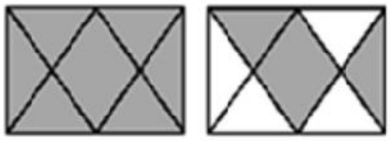
hem menjat si ens mengem dos vuitens d'una pizza petita i tres vuitens d'una pizza mitjana. Dos futurs mestres detecten que no es poden sumar aquestes fraccions perquè les unitats són diferents. El tercer dóna com a resultat la fracció 5/16. Pel que fa a diferenciar quants (*how many*) i quant (*how much*), els tres mestres tenen clara la diferència entre un terme i l'altre.

Referent a l'habilitat per analitzar les respostes dels alumnes (KCS), els tres estudiants identifiquen els errors que fan els nens en funció dels que ells també havien comès. Pel que fa a les estratègies per ensenyar les fraccions (KCT), s'observa que els estudiants de mestre són capaços de proposar activitats amb materials, amb aplicacions a la vida real i representacions vàries com una pizza o un pastís. Diuen, però, que cal ensenyar correctament el concepte d'unitat.

Són interessants les conclusions de Rosli et al. (2011) a partir dels resultats anteriors. Per una banda, afirmen que "el coneixement dels participants (SCK, KCS i KCT) sobre l'ensenyament de les unitats i de *unitizing* ["procés mental de separar en parts una quantitat"] de fraccions és limitat" (p. 1688) i, per l'altra, que "els resultats demostren que el coneixement dels estudiants de mestre sobre les unitats i *unitizing* (SCK) podrien tenir efecte sobre com entenien el KCS i el KCT" (p. 1688).

L'estudi del significat de la unitat en el contingut de fraccions també és present en la recerca espanyola per determinar les debilitats i fortaleses dels coneixements dels futurs mestres en aritmètica (Montes et al., 2015). En aquesta investigació, hi participen 737 estudiants de mestre de Huelva i Sevilla que encara no han cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica. Se'ls passa un qüestionari amb disset preguntes tancades amb quatre opcions possibles i només una de correcta. Les preguntes fan referència a significat de fracció (part–tot), definició de fracció i paper de la unitat, fracció impròpia, nombre racional, nombre decimal, sentit del valor posicional, densitat dels nombres racionals, jerarquia de les operacions amb fraccions i decimals i ordenació de nombres racionals. En totes les preguntes cal comprendre expressions en diferents registres dels nombres racionals o irracionals.

En el qüestionari hi ha dues preguntes en què els estudiants han de decidir quina fracció hi ha representada gràficament; en una, la representació està contextualitzada i, en l'altra, no (figures 3.42 i 3.43). Per resoldre-les, els estudiants han de decidir quina és la unitat i comprendre la interpretació de fracció com a comparació part–tot. En totes dues preguntes els resultats són molt negatius: un 91,99 % s'equivoca en contestar la pregunta 1 i gairebé un 70 % respon una opció equivocada en la pregunta 13.



Equivalència, comparació i ordenació de fraccions

La literatura revisada (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011) mostra un interès profund a detectar i desenvolupar el sentit numèric dels estudiants de mestre en relació amb les fraccions i, concretament, amb el contingut de comparació i equivalència de fraccions. En aquests estudis, s'evidencia un predomini de l'ús dels algoritmes per part dels estudiants de mestre per comparar fraccions i trobar fraccions equivalents. Després d'una proposta didàctica dissenyada pels investigadors, es conclou que els estudiants milloren l'ús i la comprensió d'altres estratègies per comparar fraccions que requereixen sentit numèric, com ara utilitzar nombres de referència.

Harvey (2012) investiga el coneixement dels estudiants de mestre sobre el contingut de fraccions i també l'habilitat per aplicar aquest coneixement en una situació nova. Es van seleccionar per a l'estudi tretze estudiants de Nova Zelanda que consideraven que tenien poc coneixement del contingut de fraccions. Dels tretze participants de l'estudi, cinc estaven a l'últim mes del curs de formació docent i havien acabat el curs d'educació matemàtica cinc mesos abans. Els altres vuit estaven al primer mes del curs de formació docent sense haver començat el curs d'educació matemàtica, tot i que participaven en un curs opcional de contingut matemàtic per a l'ensenyament a primària impartit pels investigadors. Es va passar un qüestionari als estudiants, els quals van participar en un experiment que consistia en un seguit d'activitats sobre ordenació i equivalència de fraccions utilitzant una goma elàstica. En aquesta recerca, els autors conclouen que l'ús d'una goma elàstica va ajudar a millorar els coneixements dels estudiants sobre equivalència i ordenació de fraccions.

En la investigació de Harvey (2012) es presenten alguns dels errors que els estudiants van cometre en el qüestionari pel que fa als continguts d'equivalència i ordenació de fraccions. Un estudiant va utilitzar el criteri de comparar el numerador i el denominador de cada fracció per decidir com ordenar-les. Va considerar que la fracció més petita era aquella en què hi havia més diferència entre el numerador i el denominador. Entrevistant l'estudiant, van adonar-se que aquest error es devia a una generalització incorrecta d'un exemple per comparar fraccions unitàries que havia donat un company de classe, sumada a no relacionar les fraccions a una representació visual.

Un altre estudiant també va tenir dificultats per ordenar fraccions amb numeradors iguals i fraccions amb numeradors i denominadors diferents mitjançant dibuixos, tot i que ho va entendre en representar les fraccions amb la goma elàstica. Els estudiants amb més coneixements de matemàtiques per ordenar fraccions convertien les fraccions a nombres decimals, a percentatges o a fraccions amb els denominadors iguals, però no utilitzaven nombres de referència per portar a terme l'ordenació. Fent servir la goma elàstica, van ser capaços d'utilitzar nombres de referència en l'ordenació de fraccions.

En el contingut d'equivalència de fraccions, diversos estudiants aplicaven el mètode de trobar fraccions equivalents buscant el doble del numerador i del denominador de la fracció prèvia. Aquesta manera de fer-ho pot comportar dificultats quan es busca una fracció equivalent que es trobaria multiplicant per 3 el numerador i el denominador.

Whitacre i Nickerson (2011), en la línia també de veure una millora en els coneixements de comparació de fraccions dels estudiants de mestre, duen a terme una recerca en una universitat del sud-oest dels Estats Units. Efectuen entrevistes pre/post a set estudiants que fan el primer curs de contingut matemàtic d'una sèrie de quatre cursos. Els plantegen que comparin nou parells de fraccions abans i després de les sessions d'ensenyament i classifiquen les estratègies que utilitzen seguint les categories que Smith (1995)[4] proposa i que anomena perspectives: conversió (*transform*), parts (*parts*), punt de referència (*reference point*) i components (*components*). Les estratègies de comparar fraccions convertint les fraccions a fraccions amb el mateix denominador o bé a decimals pertanyen a la perspectiva conversió. La perspectiva parts inclou les estratègies en què les fraccions s'interpreten com a comparació part–tot i funciona en casos simples, com quan es comparen fraccions amb els mateixos denominadors o els mateixos numeradors. En la perspectiva punt de referència, s'hi consideren les estratègies que involucren raonaments en relació amb nombres de referència. L'última perspectiva, la de components, integra les estratègies en què es fan comparacions multiplicatives de numeradors i denominadors.

En la recerca de Whitacre i Nickerson (2011), s'evidencia que, d'entrada, els estudiants utilitzen bàsicament estratègies de les perspectives conversió i parts; majoritàriament redueixen les fraccions a denominador comú, per comparar-les. Després de les sessions de formació, els estudiants ja en fan servir més, amb un augment de les estratègies de les perspectives punt de referència i components, i augmenta el sentit numèric en els nombres racionals.

En un altre estudi pre/post (Utley i Reeder, 2011), amb quaranta-dos estudiants de mestre dels Estats Units, s'examina com aquests estudiants desenvolupen el sentit numèric en les fraccions durant un curs de mètodes matemàtics (graus 5-8). En les sessions del curs porten a terme activitats amb materials manipulatius, com ara cercles o barres de fraccions, i la lectura de textos sobre l'ensenyament i l'aprenentatge de fraccions. En aquesta recerca, evidencien que els estudiants milloren mínimament en la comparació de fraccions utilitzant nombres de referència. A més, els autors conclouen que la majoria d'estudiants acaben els cursos amb la idea que quan a dues fraccions els falta un tros, són la mateixa fracció; és a dir, quan el numerador és un nombre menys que el denominador, les fraccions són iguals.

Per incrementar aquest sentit numèric dels estudiants de mestre en els continguts d'ordenació, comparació i també en les operacions amb fraccions, els investigadors

[4] Vegeu-ne més informació a Whitacre i Nickerson, 2011.

potencien l'ús de materials com gomes elàstiques (Harvey, 2012) o altres materials manipulatius, com ara cercles o barres de fraccions (Utley i Reeder, 2011).

En les recerques esmentades, es veu com els estudiants de mestre cometen alguns errors iguals, com ara el fet de mirar la diferència entre el numerador i el denominador de cada fracció per comparar-les (Harvey, 2012; Utley i Reeder, 2011), i mostren poc sentit numèric a l'hora de comparar fraccions utilitzant nombres de referència i altres estratègies no procedimentals (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011).

Coincidim amb Utley i Reeder (2011) quan proposen dissenyar cursos de formació en què es potenciï el sentit numèric en les fraccions. Amb els seus resultats, revelen que en un semestre és difícil obtenir grans millores, ja que "el desenvolupament del sentit numèric és gradual i cal temps per desenvolupar-lo" (Utley i Reeder, 2011; p. 1153).

Operacions amb fraccions

Revisant la literatura en relació amb els coneixements dels futurs mestres sobre les operacions amb fraccions, s'observa que algunes recerques se centren en les quatre operacions (Caglayan i Olive, 2011; Lin, 2010; Lin et al., 2013; McAllister i Beaver, 2012; Newton, 2008), d'altres en dues (Montes et al., 2015) i d'altres només en una. Són nombrosos els estudis que es fixen en els coneixements dels estudiants de mestre sobre la multiplicació de fraccions (Ho i Lai, 2012; Isiksal i Cakiroglu, 2011; Luo, 2009; Noh i Sabey, 2014) i encara són més presents a la literatura les recerques sobre els estudiants de mestre i la divisió de fraccions (Ball, 1990a, 1990b; Isik i Kar, 2012; Kajander i Holm, 2011; Li i Smith, 2007; Li i Kulm, 2008; Meel, 2002; Rizvi i Lawson, 2007; Simon, 1993; Tirosh, 2000).

Consultant la literatura sobre els coneixements dels mestres de les operacions amb fraccions, es nota que hi ha menys estudis que investiguen els coneixements dels estudiants sobre la suma i la resta que sobre la multiplicació i la divisió. Aquest interès en els coneixements sobre la multiplicació i la divisió es pot deure al fet que aprendre el significat d'aquestes dues operacions comporta més dificultats per als estudiants de mestre que no aprendre el significat de suma i resta.

A continuació s'expliquen recerques que versen sobre els coneixements dels estudiants de mestre sobre les quatre operacions, després es mostren treballs sobre la multiplicació de fraccions i, finalment, sobre la divisió de fraccions.

Suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions

Molts estudis, a l'hora d'examinar els coneixements dels futurs mestres respecte a les fraccions, s'han centrat en una sola operació, majoritàriament la divisió; tanmateix, investigar sobre les quatre operacions ajuda a comprendre millor el coneixement dels futurs mestres (Newton, 2008). En aquest sentit, Newton (2008), en una recerca amb vuitanta-cinc futurs mestres dels Estats Units, analitza els coneixements d'aquests estudiants a l'inici i al final d'un curs dissenyat per millorar la comprensió en matemàtiques. En el test es proposa resoldre sumes, restes, multiplicacions i divisions sense contextualitzar i problemes verbals rutinaris i no rutinaris.

Els resultats de la recerca de Newton (2008) evidencien que, en començar el curs, els estudiants tenen un coneixement de les fraccions limitat i fragmentat, mentre que, en acabar la formació, milloren els coneixements relacionant els conceptes i els procediments corresponents a les fraccions i fins i tot els errors són d'una altra naturalesa. Tant en el pre-test com en el post-test, hi ha més estudiants que resolen correctament les sumes i les restes de fraccions que no estudiants que resolen bé les multiplicacions i les divisions. És destacable que els estudiants milloren molt amb el curs en totes les operacions excepte en la multiplicació. Tot i que sorprèn que millorin menys en l'operació de la multiplicació que en la de la divisió, aquesta diferència té una explicació: segons Newton, els estudiants, quan multipliquen fraccions amb denominadors iguals, es basen en els algoritmes de la suma i la resta de fraccions i multipliquen els numeradors, mentre que deixen el denominador comú com a denominador de la fracció que es dóna com a resultat.

A l'hora de sumar fraccions, els estudiants de la recerca de Newton (2008) cometen errors com ara sumar els numeradors i els denominadors de les fraccions per obtenir el resultat de la suma, sobretot quan els denominadors són diferents. Alguns també fan aquest error quan resten fraccions, ja que obtenen el resultat restant numeradors i denominadors. En canvi, l'error que fan alguns en creure que la resta és commutativa és un error propi de l'operació de resta. En el cas de la multiplicació de fraccions, alguns estudiants multipliquen en creu; la confusió, segons l'autora, es dóna perquè quan es comprova que dues fraccions són equivalents també es multiplica en creu. En aquesta mateixa operació, condicionats per com se sumen i resten fraccions amb denominadors diferents, alguns estudiants busquen el denominador comú i després multipliquen els numeradors. En la divisió de fraccions, n'hi ha que també deixen el mateix denominador i divideixen els numeradors. Alguns estudiants, en comptes d'invertir el divisor, inverteixen el dividend i després multipliquen les fraccions a l'hora d'aplicar l'algoritme d'"invertir i multiplicar". També n'hi ha que, en comptes de multiplicar en creu, divideixen en creu.

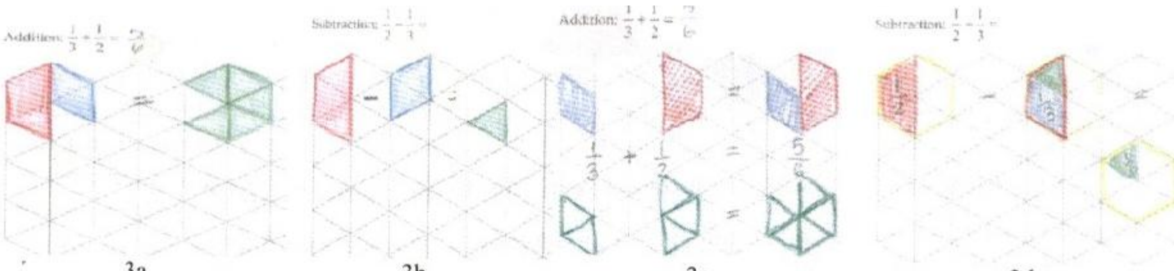
Cal destacar que alguns estudiants s'equivoquen a l'hora de multiplicar fraccions i, en canvi, resolen correctament les divisions de fraccions. Segons Newton (2008), això es deu al fet que els algoritmes de la multiplicació i la divisió de fraccions són diferents; a més, alguns estudiants fan errors quan multipliquen nombres enters, com ara 15x15, i això fa que el resultat de la multiplicació sigui incorrecte.

Una altra recerca centrada en els coneixements dels mestres sobre les quatre operacions amb fraccions és la de McAllister i Beaver (2012). En aquest estudi, s'analitzen els tipus d'errors que cometen els estudiants de mestre en resoldre operacions amb fraccions i proposar problemes verbals donada una operació. En la primera part de la recerca, hi participen més de cent estudiants inscrits en cursos de contingut matemàtic de dues universitats dels Estats Units. Se'ls demana que resolguin vuit operacions amb fraccions (dues sumes, dues restes, dues multiplicacions i dues divisions) i que proposin un problema verbal que es resolgui amb aquestes operacions. En la segona part de la recerca, hi participen setanta-dos estudiants de mestre classificats en quatre grups. Els estudiants de tres dels quatre grups estan matriculats en un curs en què es tracten continguts de fraccions. El quart grup fa un curs de geometria i alguns estudiants d'aquest curs ja havien realitzat el curs que inclou fraccions.

Els estudiants de la recerca de McAllister i Beaver (2012) se'n surten millor a l'hora de fer els càlculs que no pas a l'hora de proposar problemes i, com en la recerca de Newton (2008), el percentatge d'estudiants que resolen correctament sumes i restes de fraccions (79,2 %–91,7 %) és més alt que els que resolen bé multiplicacions i divisions (51,4 %–63,9 %). Quan es tracta de proposar problemes, aquesta diferència entre les sumes i les restes i les multiplicacions i les divisions encara és més notòria. El percentatge d'encerts en escriure problemes verbals de suma i de resta amb fraccions mixtes està entre el 55,6 % i el 66,7 %; en canvi, el percentatge d'encerts en proposar problemes de multiplicació i divisió va del 0,0 % al 15,3 %.

McAllister i Beaver (2012) també detecten errors generals, com ara la manca de comprensió del concepte d'unitat o bé del significat de la multiplicació i la divisió de fraccions a causa de l'èmfasi que es posa a interpretar la fracció com una comparació part–tot i la multiplicació de fraccions com a suma repetida. Aquests resultats coincideixen amb els dels estudis que fan referència al coneixement dels mestres sobre el significat de fracció i que s'han explicat anteriorment (Domoney, 2002; Montes et al., 2015; Rosli et al., 2011; Tobias, 2013). Com a conclusió, els autors de la recerca afirmen que "aquest estudi revela alguns malentesos específics i una manca general de comprensió de les fraccions" (McAllister i Beaver, 2012; p. 97). De fet, només un estudiant no va fer cap error en escriure els problemes verbals.

La recerca de Caglayan i Olive (2011), en què els participants són deu estudiants de mestre dels Estats Units inscrits en un curs d'àlgebra per a mestres, se centra en el paper de les representacions visuals de les operacions utilitzant els quatre blocs principals de patrons (*four main pattern blocks*). No tots els estudiants d'aquest treball, quan cal representar gràficament sumes i restes de fraccions, fan esment de la unitat de referència. A més, no tots representen la idea de denominador comú en les representacions de les sumes de fraccions (vegeu figura 3.44).



Addition: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$
Subtraction: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$
Addition: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$
Subtraction: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

3a 3b 3c 3d

Els resultats indiquen que els estudiants de Taiwan se'n surten millor que els dels Estats Units, tant en els coneixements procedimentals com en els conceptuals. En els coneixements procedimentals, els estudiants de la Xina obtenen millors resultats en les quatre operacions; l'operació en què hi ha més diferència és la divisió de fraccions. En l'anàlisi dels coneixements conceptuals, els resultats dels estudiants de Taiwan també són millors, però sobretot en les operacions de suma, resta i multiplicació, no tant en la divisió. En la comprensió de la divisió de fraccions, els estudiants dels dos països obtenen uns resultats molt baixos.

El mateix test que utilitzen Lin et al. (2013) l'havia fet servir Lin (2010) tres anys abans per analitzar la millora en els coneixements conceptuals i procedimentals d'estudiants de mestre dels Estats Units matriculats en un curs de contingut matemàtic i de mètodes (*The Mathematics Content and Methods for the Elementary School*). A l'estudi es comparen els resultats de vint-i-quatre mestres que segueixen el curs de formació basat en activitats en un web (*web-based instruction*, WBI) i els de vint-i-quatre mestres que segueixen el curs en un format tradicional, sense utilitzar cap ordinador. En el pre-test s'observa que, en els dos grups, els resultats inicials són molt semblants i que, en tots dos, els coneixements procedimentals són més alts que els conceptuals. No s'observen diferències significatives entre els dos grups en la millora dels coneixements procedimentals, però sí que es detecta una millora més important en els coneixements conceptuals en el grup que segueix el mètode WBI.

En l'estudi de Montes et al. (2015), explicat anteriorment, s'analitzen els coneixements dels futurs mestres sobre les quatre operacions amb una pregunta tancada amb què es vol analitzar la capacitat de sumar i restar fraccions, la jerarquia de les operacions i l'equivalència de fraccions (vegeu figura 3.45).

17. Selecciona el resultat de l'operació següent:

2/10 – [1/4+3/2+(-8-1/5)]=

a) 133/20
b) 1197/180
c) 117/20
d) *a* i *b* són correctes

Figura 3.45. Pregunta 17 del qüestionari. Extret i adaptat de "Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas", de M. A. Montes et al., 2015, *Revista de educación, 367*, p. 54.

Gairebé un 75 % dels futurs mestres s'equivoca en contestar aquesta pregunta, cosa que demostra que "l'obtenció de fraccions equivalents i la jerarquia de les operacions són debilitats destacables" (Montes et al., 2015; p. 57).

En les recerques esmentades, s'observa com els estudiants de mestre tenen més dificultats en les operacions de multiplicació i divisió que en les de suma i resta, pel que fa tant a la representació d'aquestes operacions i les seves propietats (Caglayan i Olive, 2011) com als càlculs de les operacions o a l'elaboració de problemes a partir d'una operació (Lin et al., 2013; McAllister i Beaver, 2012; Newton, 2008). En alguns d'aquests estudis, es fa palesa la importància del concepte d'unitat, sobretot quan cal representar les operacions i proposar problemes verbals a partir d'una operació amb fraccions (McAllister i Beaver, 2012; Newton, 2008).

Multiplicació de fraccions

En el contingut de multiplicació de fraccions, els estudiants de mestre mostren una manca de coneixement especialitzat i un coneixement d'aquesta operació molt centrat en l'algoritme (Isiksal i Cakiroglu, 2011; Ho i Lai, 2012). En recerques en què s'analitza l'habilitat dels estudiants de mestre per proposar problemes verbals donada una multiplicació de fraccions, es detecta que cometen diferents errors en definir els problemes, i demostren, per tant, una habilitat insuficient per plantejar problemes d'aquest contingut i un coneixement limitat de les interpretacions i unitats de mesura de la multiplicació de fraccions (Luo, 2009; Noh i Sabey, 2014).

Isiksal i Cakiroglu (2011) investiguen els coneixements que tenen disset estudiants de mestre de Turquia, en l'últim any del seu programa, en relació amb les concepcions i idees errònies d'alumnes de sisè i setè grau sobre la multiplicació de fraccions. En aquesta recerca és interessant el fet que no només s'investiguen els coneixements dels futurs mestres, sinó que s'identifica el coneixement didàctic respecte a la multiplicació de fraccions. Els autors de l'estudi classifiquen en cinc categories les idees errònies que els estudiants de mestre proposen: errors basats en algoritmes, errors basats en la intuïció, errors basats en coneixements formals de les operacions de fraccions, confusions en els símbols de les fraccions i confusions en el problema. A més, en la primera categoria dels errors basats en algoritmes, els estudiants de mestre manifesten que la memorització podria ser la causa d'aquests errors. El coneixement memorístic dels estudiants de mestre sobre el procés de multiplicar fraccions per davant del conceptual condiciona les respostes que han donat sobre els errors dels alumnes.

Quan es demana als estudiants de l'estudi de Isiksal i Cakiroglu (2011) que diguin com ajudarien els alumnes de sisè i setè a solucionar les idees errònies, proposen estratègies basades en mètodes d'ensenyament, estratègies basades en coneixement formal de les fraccions i estratègies basades en constructes psicològics.

En les estratègies basades en mètodes d'ensenyament, els estudiants plantegen utilitzar múltiples representacions a partir de materials, exemples o contextos de la vida diària per millorar la comprensió del contingut de multiplicació de fraccions. És interessant el fet que consideren important que els mestres ensenyin estratègies perquè els alumnes entenguin el significat de les operacions abans de resoldre-les de manera procedimental. En les estratègies basades en el coneixement formal de les fraccions, els estudiants proposen que el mestre expliqui el concepte de fracció i després la relació lògica entre les operacions. En el tercer grup d'estratègies, hi ha les que fan referència a millorar la relació amb les matemàtiques. Els estudiants que han suggerit estratègies en aquest grup volen desenvolupar actituds positives envers les matemàtiques, ja que creuen que els alumnes poden resoldre operacions incorrectament a causa d'un elevat grau d'ansietat.

En la línia d'identificar el coneixement necessari per a l'ensenyament, Ho i Lai (2012) examinen el coneixement especialitzat del contingut (SCK) en la multiplicació de fraccions de noranta-dos estudiants de primer curs de mestre d'Austràlia. Arriben a la conclusió que els estudiants de mestre tenen més domini procedimental de les operacions que comprensió conceptual. Ho i Lai (2012) proposen un problema als estudiants que es resol amb la multiplicació 1/3 x ¾. Un 82,6 % el resol bé i, d'aquests estudiants, només un 46,1 % justifica completament la resposta. Un 67,1 % dels que responen correctament explica només el procediment de la multiplicació de fraccions. Tan sols trenta-cinc estudiants dóna explicacions en un context quotidià i proposa representacions amb imatges.

Tant en la recerca de Isiksal i Cakiroglu (2011) com en la de Ho i Lai (2012), es detecta en els estudiants de mestre una manca de coneixement especialitzat del contingut en la multiplicació de fraccions i un predomini dels coneixements del procés de multiplicar fraccions a partir d'un algoritme en detriment dels coneixements conceptuals.

A l'hora d'analitzar els coneixements dels estudiants de mestre sobre la multiplicació de fraccions, hi ha estudis que examinen els problemes proposats pels estudiants (Noh i Sabey, 2014; Luo, 2009). Això té sentit si tenim en compte que la qualitat del coneixement dels estudiants de mestre respecte a la multiplicació de fraccions es pot explorar identificant l'habilitat que tenen per proposar problemes que es resolguin amb una multiplicació de fraccions (Luo, 2009).

Noh i Sabey (2014), en una recerca duta a terme amb cent seixanta-quatre estudiants de mestre d'educació primària dels Estats Units, examinen la comprensió de la multiplicació de fraccions quan aquests estudiants han d'escriure problemes i interpretar models pictòrics per il·lustrar expressions simbòliques de la multiplicació de fraccions. Es van escollir seixanta-cinc estudiants de mestre que feien un curs inicial dels estudis i els altres noranta-nou estaven inscrits en un curs del final de la formació. Els resultats d'aquesta investigació mostren una sèrie d'errors que els estudiants van cometre en proposar els problemes i interpretar les representacions gràfiques. Alguns van incloure nombres enters en l'enunciat dels problemes proposats, amb la qual cosa obtenien un problema amb una solució diferent de la que se'ls demanava. Segons els autors de l'estudi, això es podria deure al fet que els estudiants se senten més còmodes utilitzant nombres enters que fraccions o que tenen més bon sentit numèric amb els nombres enters que amb els nombres racionals. D'altres van proposar un problema en què no quedava definida la unitat a què les fraccions feien referència. És destacable que no tots els estudiants que van saber proposar un problema segons la interpretació de la multiplicació de fraccions com a part d'una part, van relacionar la representació pictòrica amb l'expressió de la multiplicació de fraccions amb aquesta mateixa interpretació.

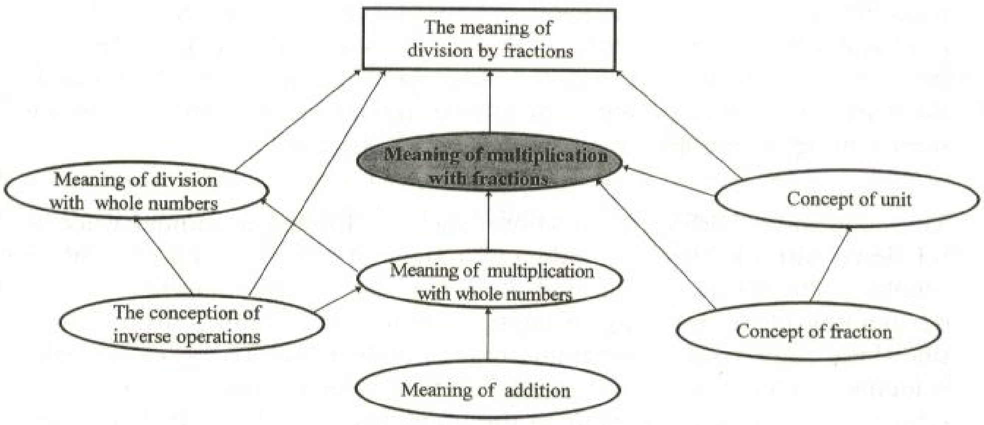
En la recerca de Luo (2009), duta a terme amb cent vint-i-set estudiants de mestre dels Estats Units, s'investiga l'habilitat d'aquests estudiants per traduir expressions simbòliques de multiplicació de fraccions en paraules. Concretament, se'ls demana que representin en paraules les expressions següents: $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3} = ?$ i $1\frac{2}{3} \text{ x } 4 = ?$. Els resultats del rendiment general a l'hora d'escriure els problemes verbals mostra que un 58,3 % dels estudiants ha plantejat "bons" problemes verbals per representar l'expressió $1\frac{2}{3} \text{ x } 4 = ?$, mentre que només un 27,6 % ha proposat "bons" problemes verbals per representar $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3} = ?$. S'evidencia que els resultats són millors quan es multiplica una fracció per un nombre enter que quan es multipliquen dues fraccions.

És remarcable que un 56,7 % dels estudiants s'equivoca quan planteja problemes verbals que representin l'expressió $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3} = ?$, ja que proposa un enunciat que no es pot resoldre amb l'operació $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3}$. El problema següent és un exemple d'enunciat que no és adequat, ja que es resol amb la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$: "Bobby té la meitat d'un pastís de pasta de full. Marla té una tercera part del pastís de pasta de full. Quant en tenen en total entre tots dos?" (Luo, 2009; p. 89).

Luo (2009) analitza també les estructures semàntiques dels problemes proposats pels estudiants. En el cas de l'expressió $1\frac{2}{3} \text{ x } 4 = ?$, la majoria, un 86,6 %, construeix un problema de "suma repetida", i només un 3,9 % planteja un problema de "comparació multiplicativa". Per a l'expressió $\frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3} = ?$, també hi ha pocs estudiants que proposin problemes de "comparació multiplicativa", un 1,6 %. Un 15 % enuncia problemes de "repartiment d'una fracció" i un 28,3 % de "part d'una fracció". Cap estudiant proposa problemes amb l'estructura de "producte de mesures" o problemes aplicats als conceptes de probabilitat.

Quant a les unitats de mesura, els estudiants de la recerca de Luo (2009) suggereixen principalment "pizza", "pastissos", "galetes", "altres menjars" i "recipients" (llaunes, tasses,...). Algun estudiant també proposa "terra", "cinta" o "temps de lectura". Totes les unitats són unitats de mesura unidimensionals.

Luo (2009) conclou amb aquests resultats que els estudiants de mestre no tenen una habilitat adequada per proposar problemes verbals donada una expressió simbòlica en què


The meaning of
division by fractions
Meaning of multiplication
with fractions
Meaning of division
with whole numbers
Concept of unit
Meaning of multiplication
with whole numbers
The conception of
inverse operations
Concept of fraction
Meaning of addition

confusions en el cas de la divisió de fraccions: s'entén quan es diu quantes vegades podem restar el 4 del 48, però per als alumnes es fa més estrany resoldre la divisió 1/3 ÷ 1/2 amb aquesta interpretació, ja que ½ és més gran que 1/3.

Tenint tot això present, no pot estranyar que també sigui un contingut difícil per als estudiants de mestre (Ball, 1990b; Simon, 1993; Tirosh, 2000) quan s'ha detectat que és complicat tant per als mestres novells com per als experimentats (Ma, 1999). En diferents recerques, s'observa aquesta manca de coneixement dels estudiants de mestre sobre el significat de la divisió de fraccions, així com un coneixement d'aquest contingut molt centrat en l'algoritme, com en el cas de la multiplicació de fraccions (Ball, 1990a, 1990b; Kajander i Holm, 2011; Li i Smith, 2007; Li i Kulm, 2008). En alguns estudis, a més, es detecten dificultats per part dels estudiants de mestre a l'hora de proposar problemes verbals de divisió de fraccions i/o de resoldre problemes d'aquest contingut (Ball, 1990a, 1990b; Isik i Kar, 2012; Li i Smith, 2007; Rizvi i Lawson, 2007). De la literatura revisada, només en la recerca de Meel (2002) es conclou que gairebé tres quartes parts dels estudiants saben trobar una situació raonable donada una divisió de fraccions.

En la recerca de Ball (1990b), de fa 25 anys, s'entrevista deu estudiants de mestre de primària a punt de matricular-se al primer curs d'educació i també nou futurs mestres de secundària. Per valorar el coneixement dels futurs mestres sobre la divisió, utilitza tres propostes: divisió amb fraccions, divisió per zero i divisió amb equacions algebraiques. La majoria de preguntes s'analitzen des de diverses dimensions: comprensió de la disciplina, idees sobre l'ensenyament, aprenentatge i rol del mestre i idees o actituds sobre les matemàtiques, els alumnes o ells mateixos.

Pel que fa a la divisió amb fraccions, en la recerca esmentada, Ball (1990b) demana als futurs mestres com solucionarien la divisió 1 ¾ ÷ ½ i també que trobin una representació d'aquesta divisió. Els estudiants de mestre van mostrar dificultats per trobar situacions de la vida real que representessin la divisió 1 ¾ ÷ ½. De fet, tot i que disset dels dinou estudiants resolen la divisió correctament, només cinc en fan una representació adequada. D'aquests cinc, cap era estudiant de mestre; tots ells eren futurs mestres de secundària. L'autora de l'estudi conclou que els estudiants de mestre i els futurs professors de secundària revelen una dificultat remarcable en el significat de la divisió amb fraccions. Ball (1990b) argumenta que, a l'escola, la divisió amb fraccions no se sol ensenyar conceptualment: els estudiants poden resoldre bé la divisió mitjançant un procediment, però no saben trobar representacions de la situació.

La mateixa autora presenta un altre estudi durant el mateix any centrat també en el tema de la divisió de fraccions, però amb molts més participants: 252 futurs mestres de primària o futurs professors de secundària. Concretament, en l'estudi de Ball (1990a), hi participen 217 estudiants de mestre d'educació primària i 35 futurs professors de secundària, que inicien els estudis en cinc centres diferents dels Estats Units.

Ball (1990a) passa un qüestionari als futurs mestres i els fa una entrevista. En el qüestionari hi ha preguntes en què els estudiants han de triar quin problema dels proposats representa la divisió 1 ¾ ÷ ½. Només un 30 % tria el problema correcte que representa la divisió donada, i encara alguns d'aquests estudiants trien també altres opcions incorrectes. En l'entrevista, feta a vint-i-cinc estudiants de mestre de primària i deu futurs mestres de secundària, se'ls demana que trobin representacions adients per a la divisió 1 ¾ ÷ ½. En aquesta part, els futurs estudiants de mestre de primària mostren més dificultats. Malgrat que tots els estudiants saben calcular la divisió, cap futur mestre d'educació primària genera un problema adequat per representar la divisió 1 ¾ ÷ ½. Dels vint-i-cinc estudiants, deu donen representacions inapropiades i quinze no en proposen cap. Dels deu estudiants de professor, quatre proposen problemes adequats, dos d'inadequats i quatre més no en saben suggerir cap.

A partir de les dues recerques de Ball (1990a, 1990b), es pot concloure que els estudiants tenen més domini de les regles per dividir fraccions que no pas coneixement del significat de la divisió de fraccions i mostren una dificultat significativa per trobar representacions adequades de la divisió de fraccions.

En un altre estudi més actual, s'examinen els coneixements dels mestres de Canadà a l'hora de resoldre la divisió 1 ¾ ÷ ½, operació proposada també a les recerques de Ball (1990a, 1990b). Kajander i Holm (2011) demanen durant cinc anys a més de sis-cents futurs mestres dels graus 4 a 10, a l'inici i al final d'un curs de mètodes matemàtics, que resolguin la divisió 1 ¾ ÷ ½ i que justifiquin la solució. En el pre-test, la comprensió conceptual dels estudiants és molt pobra o gairebé inexistent: resolen la divisió utilitzant algoritmes estàndards i molts d'ells no saben donar cap explicació, justificació o model per explicar el procés de resolució. Aquests resultats coincideixen amb els de Ball (1990a, 1990b), que indiquen la dificultat dels estudiants per trobar representacions per a la divisió 1 ¾ ÷ ½. Al final del curs, el coneixement conceptual augmenta considerablement.

En un estudi que també examina les representacions en relació amb la divisió de fraccions dut a terme a Austràlia, amb disset estudiants de mestre d'educació primària i de professors de secundària (Rizvi i Lawson, 2007), s'observa que aquests futurs professors també tenen dificultats per representar la divisió de fraccions. En aquesta recerca, s'arriba a la conclusió que els estudiants tenen aquestes dificultats a causa de la dependència dels models de "repartir" i "resta iterada" de la divisió. Quan s'introdueix el model "raó/taxa" per millorar el coneixement multiplicatiu dels futurs professors, el seu coneixement en relació amb la representació de la divisió de fraccions augmenta. En iniciar la recerca, cap dels participants és capaç de proposar un problema verbal per a les expressions 4 ÷ 1/3, 1/3 ÷ 1/5 i ¼ ÷ ½.

Després de la intervenció, tots els estudiants proposen un enunciat com a mínim en un cas: onze en proposen per a les tres divisions, cinc per a dues i només un estudiant només planteja un problema per a una de les divisions.

Li i Smith (2007) investiguen, a més dels coneixements matemàtics i pedagògics per a l'ensenyament de la divisió de fraccions, les percepcions dels futurs mestres respecte als propis coneixements en matemàtiques i pedagogia per a l'ensenyament. Després de revisar la literatura sobre el coneixement i les dificultats dels mestres en la divisió i també en la divisió de fraccions, resumeixen aquestes dificultats en cinc tipus per perfilar un marc general i poder examinar les dificultats dels futurs mestres:

> (*a*)Com explicar el procediment de càlcul per a la "divisió de fraccions" amb diferents representacions (p. e., Contreras, 1997; Ma, 1999).
>
> (*b*)Com explicar per què "invertir i multiplicar" (p.e., Borko et al., 1992; Tzur i Timmerman, 1997).
>
> (*c*)Relacions matemàtiques entre la divisió de fracció i altres coneixements matemàtics (p. e., concepte de fracció, suma, resta i multiplicació de fraccions) (p.e., Ma, 1999; Tirosh, 2000).
>
> (*d*)Conceptes erronis relacionats (p. e., no es pot dividir un nombre petit per un nombre gran, la divisió sempre dóna un nombre més petit) (p.e., Greer, 1992).
>
> (*e*)La resolució de problemes que involucren la divisió de fraccions (p.e., Greer, 1992). (p. 186)

L'estudi de Li i Smith (2007) es porta a terme amb quaranta-sis estudiants de mestre inscrits en un programa de formació docent interdisciplinari de matemàtiques i ciències dels Estats Units i durant l'última etapa del programa. Els resultats del treball de Li i Smith sobre els coneixements matemàtics d'aquests estudiants no coincideixen amb la percepció que tenen ells dels propis coneixements en matemàtiques. Per una banda, estan satisfets amb la preparació que han rebut en matemàtiques i pedagogia de cara al seu futur com a mestres, però per l'altra, es detecta que el coneixement que tenen per a l'ensenyament de fraccions és procedimental i que el coneixement conceptual és pobre. Més concretament, un 93 % dels estudiants de mestre resolen correctament la divisió $7/9 \div 2/3$, mentre que només un 52 % respon de manera encertada a la pregunta "Quants ½ hi ha en 1/3?". De fet, molts estudiants responen que cap o 0.

En l'estudi esmentat, els futurs mestres també mostren dificultats per resoldre problemes de diversos passos, així com per explicar càlculs de divisió de fraccions. Per exemple, només un 26 % utilitza representacions amb imatges per justificar per què $2/3 \div 2 = 1/3$ o $2/3 \div 1/6 = 4$. Un 22 % explica el càlcul amb "gira i multiplica" i un 46 % s'equivoca en l'explicació de les dues divisions. És destacable que cap estudiant prova d'explicar la regla d'"invertir i multiplicar".

En presentar la divisió d'una altra manera, com $a/b \div c/d = (a \div c)/(b \div d)$, només dos dels quaranta-sis estudiants diuen que aquest procediment és correcte. En vista dels resultats, tal com diuen els autors, “aquests mestres tenen una comprensió procedimental molt limitada de la divisió de fraccions, especialment quan es relaciona amb altres coneixements matemàtics” (p. 190). De fet, Li i Smith (2007) conclouen que els estudiants de mestre mostren tenir dificultats dels cinc tipus que abans s’han especificat i que són el seu marc d’estudi.

Aquest estudi de Li i Smith (2007) té dos aspectes que convé comentar. En primer lloc, el fet que els participants en la recerca han cursat totes les assignatures matemàtiques dels seus estudis i, així i tot, mostren un coneixement conceptual molt pobre sobre el significat de la divisió de fraccions. En segon lloc, la poca relació que hi ha entre la confiança que tenen els estudiants en la seva capacitat per ensenyar la divisió de fraccions i el poc coneixement que revelen d’aquest contingut. Tal com diuen els mateixos autors, segurament aquesta confiança té a veure amb el poc coneixement que tenen de les matemàtiques i la pedagogia.

En la recerca de Isik i Kar (2012), també s’examinen els errors dels estudiants de mestre en la divisió de fraccions, però, en aquest cas, quan se’ls demana que proposin un problema a partir d’una expressió simbòlica en què hi ha una divisió de fraccions. A l’estudi, hi participen seixanta-quatre mestres que estan en l’últim any de formació en una universitat de Turquia. Se’ls proposa quatre ítems (? ÷ 1/4 = 16/5, 7/8 ÷ ? = 3 ½, ¾ ÷ 2/5 = ? i 1/8 ÷ ½ = ?) i per a cada ítem han de plantejar un problema. A partir de l’anàlisi de les respostes, es determinen set categories d’errors: confondre les unitats, assignar el significat de nombre natural a les fraccions, plantejar problemes utilitzant raó–proporció, no saber establir relacions part–tot, dividir amb el denominador del divisor, fer servir l’operació de la multiplicació en lloc de la divisió i proposar problemes mitjançant invertir i multiplicar la fracció divisor. Els investigadors conclouen “que les habilitats per plantejar problemes que tenen els estudiants de mestre són baixes pel que fa a la divisió de fraccions” (p. 2307). A més, en els problemes proposats de divisió de fraccions es percep que els estudiants de mestre ignoren la dimensió conceptual de l’operació de la divisió en general.

Una altra recerca interessant que cal comentar pel fet que dóna resultats més positius que la resta és la de Meel (2002), que porta a terme amb vint-i-tres estudiants de mestre examinant els efectes de la lectura d’articles de recerca. Concretament, l’autor valora les reaccions d’aquests estudiants després de llegir un article de Borko et al. (citat a Meel, 2002). També els demana que expliquin per què funciona l’algoritme d’“invertir i multiplicar” i que exposin una situació de la vida real que correspongui a la situació de càlcul $\frac{15}{2} \Big/ \frac{1}{4}$. En algunes reaccions dels estudiants després de llegir l’article de Borko, es detecten respostes emocionals que en alguns casos es relacionen amb la identificació personal amb el contingut de l'article. A l'hora d'explicar per què funciona l'algoritme d'"invertir i multiplicar", l'autor classifica les respostes dels estudiants en tres categories: basada en conceptes (*conceptually-based*) (deu estudiants), basada en procediments (*procedurally-based*) (dotze estudiants) i idealista (*idealic*) (un estudiant). Les explicacions de la categoria basada en conceptes justifiquen per què la regla d'"invertir i multiplicar" funciona, mentre que les de la categoria basada en procediments no comenten el perquè de la regla i només se centren a explicar el procediment d'"invertir i multiplicar". L'estudiant que va donar arguments de la categoria idealista va explicar les tècniques pedagògiques que faria servir sense fer referència a la base conceptual del procediment concret d'"invertir i multiplicar".

Quan es tracta de proposar una situació de context real per al càlcul $\frac{15}{2} \Big/ \frac{1}{4}$, setze estudiants suggereixen una situació raonable, sis en plantegen una que no és raonable i només un no és capaç de donar-ne cap.

Els resultats de la recerca de Meel (2002), tal com observa el mateix autor, no coincideixen amb els de les recerques de Ball (1990b) i Ma (1999), esmentades en aquest mateix capítol. En l'estudi de Ball (1990b), només cinc dels dinou estudiants (26,32 %) proposen situacions adequades per representar una divisió de fraccions; en canvi, en la recerca de Meel (2002), setze dels vint-i-tres estudiants (69,57 %) plantegen una situació raonable. A l'hora d'analitzar aquests resultats, cal tenir en compte que en la recerca de Ball (1990b) els estudiants estaven en l'etapa inicial dels estudis, mentre que en la de Meel estaven completant el curs d'especialització de contingut matemàtic per a la certificació K-8 o per a la certificació Pre-kindergarten.

Infinitud i densitat dels nombres racionals

Segons la literatura revisada al subapartat 3.3.8, els significats d'infinitud i densitat dels nombres racionals plantegen dificultats als alumnes a l'hora de comprendre'ls i aplicar-los. A més, són continguts poc tractats en l'etapa d'educació primària.

Aquestes dificultats dels alumnes de primària i secundària per entendre la densitat i la infinitud es posen de rellevància en l'estudi de Pehkonen et al. (2006). En aquesta recerca hi participen 1.154 alumnes que han acabat el grau 5 (d'11 a 12 anys) i 1.902 alumnes que han acabat el grau 7 (de 13 a 14 anys). En el qüestionari que es passa als alumnes hi ha tres preguntes que fan referència a la densitat i la infinitud dels nombres racionals.

En relació amb la densitat, se'ls pregunta quants nombres decimals hi ha entre 0,8 i 1,1. Al voltant d'un 65 % dels alumnes, tant de grau 5 com de grau 7, responen una quantitat finita de nombres. Menys del 5 % dels alumnes dels dos cursos dóna una resposta que es pot considerar de l'infinit potencial, per exemple, 9999.... Només un 2 % dels alumnes de grau

5 dóna respostes relacionades amb l'infinit actual: diu que hi ha infinits nombres entre el 0,8 i l'1,1. En canvi, de grau 7 hi ha un 10 % dels alumnes que consideren que hi ha infinits nombres entre aquests dos nombres decimals. Tot i que hi ha més alumnes de grau 7 que de grau 5 que fan referència a l'infinit actual, el percentatge d'alumnes que es refereix a aquest infinit és relativament baix.

Per examinar els coneixements dels alumnes sobre la infinitud dels nombres, els investigadors de l'estudi de Pehkonen et al. (2006) els demanen el nombre més gran que coneixen. Aproximadament un 7 % dels alumnes de grau 5 i un 12 % dels de grau 7 diuen que aquest nombre no existeix, fent referència d'aquesta manera a l'infinit actual. Dins de la categoria de l'infinit actual i que donen infinit o ∞, hi ha les respostes d'un 15 % dels alumnes de grau 5 i d'un 22 % dels alumnes de grau 7. Menys estudiants responen en referència a l'infinit potencial: un 9 % dels alumnes de grau 5 i un 14 % dels alumnes de grau 7. Per contra, els percentatges augmenten si es consideren les respostes dels alumnes que han contestat un nombre finit. Gairebé un 60 % dels alumnes de grau 5 i un 40 % dels alumnes de grau 7 donen com a resposta un nombre finit. Com en el contingut de la densitat, entre els alumnes de grau 7 hi ha més respostes que fan referència a l'infinit que entre els alumnes de grau 5.

Els resultats d'estudis en els quals s'examinen els coneixements dels mestres en relació amb la densitat (MECD, 2012; Tirosh, Fischbein, Graeber i Wilson, 1998) no són gaire millors que els de la recerca de Pehkonen et al. (2006). En l'estudi de Tirosh et al. (1998) es volen determinar els coneixements dels futurs mestres sobre els nombres racionals. Dels cent quaranta-set estudiants de mestre que participen en la recerca i que fan el primer curs de formació, vint-i-sis s'especialitzaran en matemàtiques, mentre que els altres han escollit altres àrees de coneixement (biologia, música, anglès, etc.).

Es passa un qüestionari als estudiants per examinar la comprensió formal, algorítmica i intuïtiva dels nombres racionals. La comprensió algorítmica fa referència als procediments i a les normes i inclou, també, la capacitat per explicar els passos dels algoritmes estàndards. La dimensió intuïtiva comprèn les pròpies idees i creences sobre els continguts matemàtics, així com els models mentals que intervenen a l'hora de representar els conceptes matemàtics. Aquest coneixement s'utilitza amb tota confiança, sense necessitat de demostrar-lo. La dimensió formal considera les definicions dels conceptes, operacions, estructures i teoremes. La manca de relació entre els coneixements formal, intuïtiu i procedimental podria ser una causa de les dificultats dels estudiants per comprendre continguts matemàtics (Tirosh et al., 1998).

En la dimensió formal s'han examinat els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb la densitat. L'estudi d'aquests continguts s'ha dut a terme durant el segon any de la investigació. Només un 24 % dels estudiants de mestre ha considerat que entre 1/5 i ¼ hi ha infinits nombres. Un 43 % ha afirmat que no hi ha nombres entre aquestes dues fraccions i un 30 % ha contestat que ¼ és el nombre següent de 1/5.

Aquestes mancances dels estudiants de mestre respecte al contingut de la densitat dels nombres racionals també es posen de manifest en l'estudi TEDS-M (MECD, 2012), presentat en el segon apartat d'aquest mateix capítol. En aquest treball s'evidencia que els futurs mestres, en l'últim curs de formació, presenten dificultats per entendre que entre dos nombres donats hi ha un nombre infinit de nombres decimals.

4 Metodologia de la recerca

Per explicar el disseny i la descripció metodològica d'aquesta recerca, s'ha organitzat aquest capítol en cinc apartats. En el primer, es definirà el tipus de metodologia. En el segon, es descriurà la població i el context de l'estudi. En el tercer apartat explicarem el procés que s'ha seguit per elaborar els instruments utilitzats per obtenir les dades de la investigació. A continuació, dediquem un apartat a explicar l'administració dels instruments per obtenir les dades. Finalment, explicarem com s'ha dut a terme el procés d'anàlisi de les dades obtingudes amb els diferents instruments.

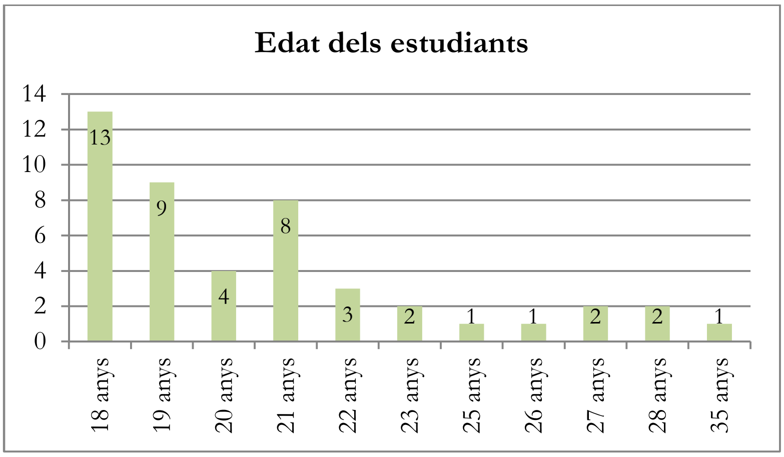
4.1 Perspectiva metodològica

La metodologia de la recerca fa referència a la manera d'enfocar la realitat que es vol investigar, "constitueix un marc conceptual de referència i coherència lògica per descriure, explicar i justificar el camí que es vol recórrer amb els principis i mètodes més adequats per a un projecte d'investigació particular" (Sabariego, 2004; p. 80). En aquesta recerca, l'enfocament metodològic és qualitatiu i ens basem, doncs, en un paradigma interpretatiu amb l'objectiu de comprendre i interpretar la situació estudiada.

A banda de la metodologia, cal determinar el mètode d'investigació, que ha de permetre fer efectiu el desenvolupament de la recerca. L'estudi de cas és el mètode en què ens recolzem en aquesta investigació. Segons Sabariego, Massot i Dorio (2004), els casos són "aquelles *situacions o entitats socials úniques* que mereixen interès en investigació" (p. 311). El cas d'aquesta recerca són els coneixements dels estudiants de mestre de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària.

Hi ha tres tipologies diferents d'estudis de casos: descriptiu, interpretatiu i valoratiu (Merrian, citat a Sabariego et al., 2004). L'estudi de cas descriptiu presenta un informe detallat bàsicament descriptiu, sense fonamentació teòrica ni hipòtesis prèvies. Fa referència habitualment a pràctiques innovadores (Merrian, citat a Sabariego et al., 2004). En l'estudi de cas interpretatiu, les descripcions són més profundes per tal d'interpretar i teoritzar sobre el cas i el "model d'anàlisi és inductiu per desenvolupar categories conceptuals que il·lustrin, ratifiquin o desafiïn supòsits teòrics difusos abans d'obtenir la informació" (Merrian, citat a Sabariego et al., 2004; p. 315). El tercer tipus d'estudi de cas, el valoratiu, també descriu i explica, però, a més, es fan judicis de valor com a base per prendre decisions (Merrian, citat a Sabariego et al., 2004).

En aquesta recerca, l'estudi de cas és interpretatiu, ja que s'elaboraran descripcions detallades amb l'objectiu de trobar categories a partir de l'anàlisi inductiva, les quals permetran fer interpretacions del cas estudiat (els coneixements dels estudiants de mestre), i es podran comparar amb els referents teòrics presentats en el treball.


Edat dels estudiants
14
12
10
8
6
4
2
0
13
9
4
8
3
2
1
1
2
2
1
18 anys
19 anys
20 anys
21 anys
22 anys
23 anys
25 anys
26 anys
27 anys
28 anys
35 anys

- Objectiu 1: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions.

- Objectiu 2: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre l'ensenyament de les fraccions.

- Objectiu 3: Descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre fraccions i sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre.

Per aconseguir aquests objectius, s'han obtingut dades a partir de dos instruments diferents: un qüestionari sobre fraccions i l'elaboració d'una seqüència d'activitats, també sobre fraccions. Per obtenir les dades per assolir l'objectiu 1, s'ha utilitzat específicament el qüestionari de fraccions. De la seqüència d'activitats s'han extret les dades per assolir l'objectiu 2. Per a l'objectiu 3, s'han fet servir les dades tant del qüestionari com de la seqüència d'activitats.

4.3.1 Disseny del qüestionari de fraccions

Per tal d'identificar els coneixements sobre les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària (objectiu 1) i estudiar la relació d'aquests coneixements amb els de l'ensenyament de les fraccions (objectiu 3), s'ha elaborat un qüestionari amb trenta preguntes relacionades amb el contingut de les fraccions (vegeu annex 1).

Per dissenyar aquest qüestionari, s'han decidit, en primer lloc, els continguts de fraccions que es volien estudiar. D'entrada, s'ha consultat el currículum d'educació primària per determinar quins continguts s'esmenten en relació amb les fraccions (vegeu taula 4.1).

Taula 4.1. Continguts de fraccions en el currículum d'educació primària organitzats per cicles (Generalitat de Catalunya, 2007).

Cicles	Continguts
Cicle inicial	Ús de les fraccions un mig i un quart en contextos significatius (p. 44)
Cicle mitjà	Reconeixement de la fracció com a part d'una unitat i d'una col·lecció (p. 45)
	Ús de diferents models de representació de les fraccions. Situació dels nombres naturals i fraccionaris més comuns (1/2, 1/3, ¼) sobre la recta numèrica. Arrodoniment de nombres en context (p. 45)
	Ús i relació dels decimals i fraccions com a nombres que aproximen més la mesura (p. 45)
	Realització de sumes i restes amb fraccions senzilles acompanyades de diferents formes de representació gràfica (p. 45)
Cicle superior	Ús i comprensió de les fraccions i dels decimals per mesurar quantitats contínues en contextos significatius. Descripció oral, gràfica i escrita dels processos de comprensió dels diferents conjunts numèrics i del càlcul (p. 47)

	Reconeixement i ús de les relacions entre fraccions, decimals i percentatges en casos senzills (0,5, ½, 50%; 0,25, ¼, 25%; 0,1, 1/10, 10%). Analogia entre el sistema de numeració decimal i el sistema internacional de mesura (p. 47)
	Ús i contrast de diferents models per representar les relacions entre decimals, fraccions i percentatges (p. 47)
	Reconeixement i cerca de fraccions equivalents seguint camins diversos (p. 47)
	Relació dels nombres fraccionaris amb el càlcul de probabilitats (p. 47)
	Ús de diferents models per comparar i ordenar fraccions i decimals (p. 47)
	Situació dels nombres decimals, fraccionaris i percentatges sobre la recta numèrica (p. 47)
	Aproximació dels nombres decimals. Comprensió i ús dels nombres decimals i fraccionaris en l'aproximació de la mesura (p. 47)
	Interpretació dels nombres naturals, decimals i fraccionaris en taules i gràfics. Elaboració de gràfics i taules a partir del comptatge i la mesura. Creació de codis numèrics (p. 47)
	Comprensió i ús de la suma i la resta de fraccions mitjançant representacions gràfiques i aritmètiques (p. 47)
	Desenvolupament d'estratègies de càlcul mental amb nombres naturals, fraccionaris i decimals (p. 22)
	Estimació raonable dels resultats de les operacions amb nombres naturals, decimals i fraccionaris. Descripció coherent del procés d'estimació (p. 22)
	Ús dels nombres decimals i fraccionaris en l'aproximació de la mesura (p. 24)
	Relació dels nombres fraccionaris amb el càlcul de probabilitats (p. 26)

Dels continguts sobre fraccions que s'esmenten en el currículum d'educació primària, s'han escollit els que s'han considerat prioritaris en l'aprenentatge de les fraccions: significat de fracció, fraccions equivalents, comparació i ordenació de fraccions, operacions amb fraccions i densitat i infinitud dels nombres racionals.

El llibre *Connecting Mathematics for Elementary Teachers* (Feikes et al., 2009) ha estat una referència per justificar la importància de cada tema escollit, ja que assenyala quins són els conceptes centrals relacionats amb les fraccions que cal aprendre a l'etapa d'educació primària exposant estudis sobre com els nens d'aquesta etapa els aprenen, a la vegada que mostra els errors principals que cometen els alumnes quan aprenen aquests continguts.

S'ha elaborat la taula 4.2 per mostrar a quins continguts fa referència cada pregunta. Es pot comprovar que algunes preguntes s'orienten directament a un contingut però que també tenen a veure amb altres continguts de fraccions, si bé indirectament.

Taula 4.2. Continguts de fraccions als quals fa referència cada pregunta.

	Concepte de fracció	**Fraccions equivalents**	**Comparació i ordenació de fraccions**	**Operacions amb fraccions**	**Infinitud i densitat dels nombres racionals**
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					

Nota: Les caselles amb un color més fort indiquen que la pregunta fa referència directament al contingut en qüestió i, les caselles amb un color més clar, que hi fa referència indirectament.

Algunes de les preguntes del qüestionari de fraccions s'han extret o modificat de preguntes del llibre de Feikes et al. (2009). D'altres són de creació pròpia per acabar de completar el qüestionari.

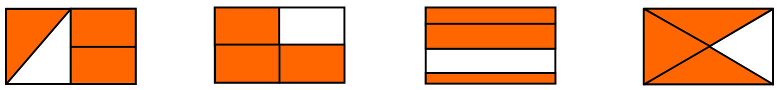
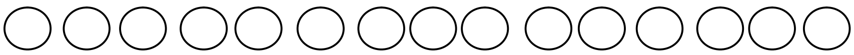
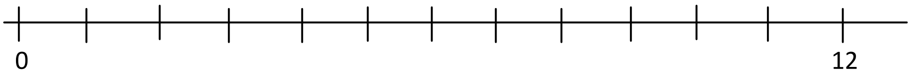
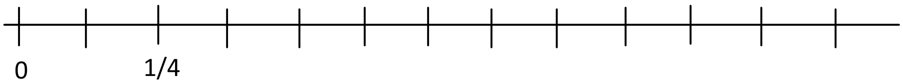
El qüestionari està constituït per preguntes obertes i d'opció múltiple (en algunes es demana explicar l'opció o opcions escollides). A les preguntes obertes, en algun cas, es demana una explicació o justificació i, en d'altres, resoldre una situació o fer una representació gràfica.

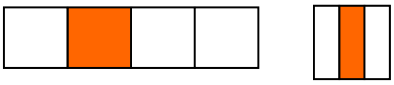
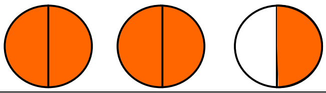
A continuació, es presenten les preguntes del qüestionari organitzades per contingut. De cada una, se'n justifica la tria, les característiques, la valoració i les fonts d'on s'ha extret en cas que no sigui inventada.

Significat de fracció

El significat de fracció és un aspecte central en aquest estudi. Es vol conèixer què saben els estudiants de primer curs del Grau d'Educació Primària sobre els continguts relacionats amb el significat de fracció. Aquest coneixement és bàsic perquè el significat de fracció està relacionat amb tots els altres continguts sobre fraccions: fraccions equivalents, comparació i ordenació de fraccions, operacions amb fraccions i infinitud i densitat dels nombres racionals. A la taula 4.3 es mostren les preguntes que fan referència a diferents continguts relacionats amb el significat de fracció i la font de cada pregunta.

Taula 4.3. Preguntes del qüestionari sobre el significat de fracció i font de cada pregunta.

Preguntes del qüestionari sobre els significats del concepte de fracció	**Font**
1.Què és una fracció?	Creació pròpia
2.Marca l'opció o opcions que consideres correctes: ☐ Una fracció és un nombre. ☐ Una fracció són dos nombres. ☐ Una fracció és una relació entre dos nombres.	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 109)
4.Digues quines de les imatges següents representen ¾. Explica per què ho representen o per què no: (a)  (b) (c) (d)	Modificació d'una activitat proposada a les proves NAEP del 2003 i extreta de Feikes et al. (2009, p. 114)
5.Repartim 3 pizzes entre 4 persones, cada persona tindrà: (Marca l'opció o opcions que consideres correctes) ☐ ¼ d'una pizza ☐ ¼ de cada pizza ☐ ¾ de tres pizzes ☐ ¼ de totes les pizzes ☐ Cap de les anteriors	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 109)
7.Com explicaries a un nen que no es pot sumar ½ de pizza gran amb ½ de pizza petita?	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 120)
8.Assenyala les 2/5 parts d'aquest conjunt. 	Creació pròpia
9.Col·loca la fracció 12/5 a la recta numèrica següent: 	Creació pròpia
10.Col·loca 9/24 a la recta numèrica següent i digues quina fracció és la que hi ha a la ratlla de la dreta de la fracció 9/24. 	Creació pròpia
11.Digues quines de les següents situacions es poden representar amb una fracció i, en aquest cas, quina fracció correspon a la situació: a. La Maria i en Martí fan l'operació següent: 8 ÷ 3.	Creació pròpia

b. Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més. c. La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té. d. D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar. e. M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%. f. A la meva classe hi ha 13 nens i 12 nenes. g. He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.	
15.Quina fracció representa una quantitat més gran? Explica-ho. 	Creació pròpia
18.Fes un dibuix per representar 12/5.	Acivitat de Feikes et al. (2009, p. 114)
19.Digues quina fracció hi ha representada a la imatge següent. Digues què representa el numerador i el denominador: 	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 107)

A continuació es caracteritza, es justifica i es valora cada una de les preguntes del qüestionari referents al significat de fracció.

- ✓ *Pregunta 1*

La pregunta 1, *Què és una fracció?*, està col·locada en primer lloc perquè els estudiants de mestre la contestin sense estar condicionats per les altres preguntes del qüestionari. Això explica també que sigui una pregunta oberta, perquè puguin expressar la idea que tenen de què és una fracció.

- ✓ *Pregunta 2*

La pregunta 2 té relació amb la pregunta 1; de fet, l'objectiu s'aproxima al de la pregunta 1, saber quina idea tenen de què és una fracció. El que canvia entre la pregunta 1 i la 2 és el format: la pregunta 2 és d'opció múltiple i, en conseqüència, els estudiants han d'escollir entre una de les tres opcions.

Amb aquesta pregunta es pretén determinar si els estudiants tenen les mateixes dificultats que habitualment mostren els nens quan aprenen el significat de fracció per entendre que, per exemple, l'1 i el 2 de la fracció 1/2 representen les parts que agafem de les parts iguals que es tenen i a la vegada representen un altre nombre, 1/2 (Bezuk, citat a Feikes et al., 2009). Així doncs, una fracció es pot entendre "com un nombre, o com una relació entre dos nombres, o de les dues maneres. Una idea clau és que una fracció és un nombre, no dos nombres, i aquest nombre pot ser sumat, restat, multiplicat, dividit, etc." (Feikes et al., 2009; p. 109).

Així, la primera opció (Una fracció és un nombre) i la tercera (Una fracció és una relació entre dos nombres) es consideren respostes correctes, mentre que la segona opció (Una fracció són dos nombres) es considera incorrecta. Els estudiants que responguin la segona opció demostraran, basant-nos en el que s'ha comentat, que no tenen clar el concepte de fracció. Smith (citat a Feikes et al., 2009; p. 103) argumenta que "per entendre el concepte de fracció, és bàsica la idea que les fraccions indiquen la relació entre les parts i el tot i no la mida de la totalitat o la mida de les peces", la qual cosa corrobora la tercera resposta com a opció correcta.

✓ *Pregunta 4*

Amb aquesta pregunta es pretén identificar els coneixements dels estudiants sobre el significat de la fracció com a comparació part–tot i també sobre les particions de la unitat, és a dir, sobre què vol dir que una unitat estigui dividida en parts iguals. S'ha partit de la interpretació de la fracció com a comparació part–tot i s'ha representat gràficament la fracció 3/4 a partir del model d'àrea, amb rectangles. Els estudiants han d'escollir les opcions que considerin correctes i justificar aquesta tria. L'explicació ha de permetre tenir més informació del coneixement que tenen els estudiants de què és una fracció interpretada com a part–tot. Les opcions correctes són la (*a*), la (*b*) i la (*d*). A l'hora de decidir les imatges s'ha tingut en compte que hi hagués una representació de la fracció 3/4 on les quatre parts en què s'ha dividit la regió fossin de la mateixa àrea i la mateixa forma (opció *b*) i on les quatre parts fossin de la mateixa àrea però de diferent forma (opcions *a* i *d*). Aquestes tres opcions permetran veure si els alumnes tenen clar que, tot i que les parts en què s'ha dividit la regió tenen forma diferent, si les parts tenen la mateixa àrea s'obté la representació de la fracció ¾. Per acabar de refinar la identificació dels coneixements dels estudiants, s'ha inclòs l'opció (*c*), que mostra la divisió de la regió en quatre parts de la mateixa forma però d'àrees diferents. Així es podrà veure clarament qui té clar que l'essencial, a l'hora de representar una fracció, és que les parts en què es divideix una regió tinguin la mateixa àrea sigui quina sigui la forma.

Aquesta pregunta és semblant a una qüestió proposada a les proves NAEP del 2003, en què els alumnes de quart de primària havien d'escollir la regió que representava la fracció ¾. El 83 % dels alumnes va identificar la resposta correctament (Feikes et al., 2009; p. 118). Malgrat que la pregunta és diferent de la que s'ha proposat al qüestionari, cal veure si el percentatge d'estudiants de mestre que encerten la pregunta és el mateix.

✓ *Pregunta 5*

La pregunta 5, d'opció múltiple, es basa en la interpretació de fracció com a quocient (repartiment) en el sentit que Lamon (2012) explica aquesta interpretació. Aquesta pregunta està formulada a partir de les respostes que solen donar els alumnes quan se'ls proposa que resolguin el problema de repartir tres pizzes entre quatre persones: 1/4 d'una pizza, 1/4 de cada pizza, 3/4 de tres pizzes i 1/4 de totes les pizzes. Les respostes incorrectes poden ser degudes a la dificultat dels nens per entendre la unitat a què fa referència la fracció (Feikes et al., 2009). A les respostes anteriors hi hem afegit l'opció de Cap de les anteriors. Les respostes correctes són: 1/4 de cada pizza i 1/4 de totes les pizzes. Segons la resposta que els estudiants triïn, s'apreciarà si entenen a quina unitat es refereix cada fracció.

- ✓ *Pregunta 7*

La pregunta oberta número 7 també està relacionada amb la unitat que es pren com a referència per definir la fracció, alhora que té a veure amb la idea que no es poden sumar fraccions si aquestes no estan representades en unitats de la mateixa àrea. En aquesta pregunta la fracció s'interpreta com a comparació part–tot. L'explicació dels estudiants hauria de fer esment del fet que no es poden sumar aquestes dues fraccions perquè les regions no són de la mateixa mida: en un cas tenim una pizza gran i, en l'altre, una pizza petita.

- ✓ *Pregunta 8*

La pregunta 8 ha de servir per identificar la comprensió dels alumnes del significat de fracció d'una col·lecció d'objectes. Aquest contingut no és més difícil que el de la fracció d'una regió, però els alumnes tenen poques experiències amb fraccions de grups (Feikes et al., 2009). Les respostes dels estudiants de mestre permetran detectar si tenen més dificultats amb el concepte de fracció d'un grup o amb el de fracció d'una regió. La resposta correcta és assenyalar 6 cercles. Aquesta pregunta només admet una resposta correcta. Els estudiants poden interpretar la fracció com a comparació part–tot, com a operador i també com a raó.

- ✓ *Pregunta 9*

Un altre aspecte rellevant de la comprensió de fraccions és la capacitat per situar una fracció a la recta numèrica. A la pregunta 9 els estudiants han de col·locar la fracció 12/5 a la recta numèrica, en què la longitud de cada segment representa una unitat. Hi ha la dificultat afegida que 12/5 és una fracció més gran que 1. Els estudiants disposen de diferents opcions per saber com col·locar la fracció 12/5 a la recta: poden fer la divisió de 12 entre 5 i col·locar el nombre 2,4 a la recta utilitzant el que saben de nombres decimals, o bé escriure 12/5 com a nombre mixt, 2 i 2/5. L'opció correcta és situar el 12/5 a la recta numèrica tal com es mostra a la figura 4.2.

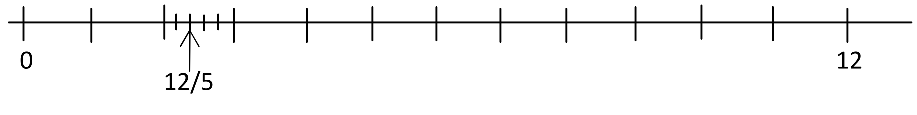


Figura 4.2. Exemple de com situar la fracció 12/5 a la recta numèrica.

- ✓ *Pregunta 10*

A la pregunta 10 apareix el contingut de situar una fracció a la recta numèrica i el contingut d'equivalència de fraccions. Per poder situar la fracció 9/24, poden servir-se del fet que 1/4 és equivalent a la fracció 6/24 o bé que 9/24 és equivalent a la fracció 3/8 i ¼ és equivalent a la fracció 2/8. Per poder resoldre correctament l'activitat, cal que entenguin que la longitud de cada segment representa tres vint-i-quatrens. Per identificar millor si ho entenen, es demana que diguin quina fracció hi ha a la ratlla de la dreta de la fracció 9/24. Per resoldre correctament la pregunta, han de situar el 9/24 a la ratlla de la dreta de la fracció 1/4 i dir que, a la ratlla de la dreta de 9/24, hi hauria la fracció 12/24 o qualsevol fracció equivalent a aquesta (vegeu figura 4.3).

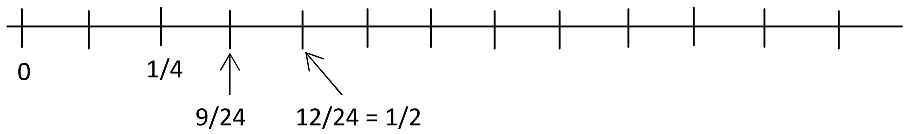


Figura 4.3. Exemple de com situar la fracció 9/24 a la recta numèrica.

✓ *Pregunta 11*

La pregunta 11 és important per aprofundir en la comprensió dels estudiants sobre el significat de fracció. Han d'identificar quines situacions es poden representar amb una fracció i, si escau, escriure la fracció. A continuació hi ha el comentari de cada opció:

a. La Maria i en Martí fan l'operació següent: 8 ÷ 3.

   La divisió 8÷3 es pot representar amb la fracció 8/3.

b. Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més.

   Aquesta opció no es representa amb una fracció directament, ja que la situació es pot representar com a 3 + 2.

c. La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té.

   La situació es pot representar com a 5/6 de 36, que dóna 30. En el resultat final no cal escriure una fracció, però sí quan es calcula les 5/6 parts de 36.

d. D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar.

   Aquesta situació sí que es pot representar amb una fracció: ¾.

e. M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%.

   En aquest cas, també el 25% es pot representar com a 25/100.

f. A la meva classe hi ha 13 nens i 12 nenes.

Es pot entendre la fracció com a raó i dir les fraccions 13/25 i 12/25 com a relació entre nens i nenes i el total de nens de la classe respectivament, o bé la fracció 13/12 o 12/13 com a fracció que representa la relació entre nens i nenes.

g. He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.

La nota 6,7 pot expressar la fracció 67/100.

✓ *Pregunta 15*

La pregunta 15 és una pregunta oberta amb la qual es vol identificar si els estudiants saben que no es poden comparar dues fraccions si la unitat de referència no és la mateixa. Si només es tinguessin les fraccions 1/4 i 1/3 numèricament, sense tenir les representacions gràfiques de cada fracció, sí que es podria dir que 1/3 és més gran que 1/4, però no en aquesta pregunta tal com està formulada. Tot i que apareix el contingut de comparació de fraccions, el contingut prioritari és el de significat de fracció i, en concret, el significat de la unitat.

✓ *Pregunta 18*

L'objectiu de la pregunta 18 és identificar els coneixements sobre la representació gràfica del concepte de fracció més gran que un 1 i, per tant, també sobre el significat de la unitat. "Per a molts, la paraula fracció significa menys que 1" (Feikes et al., 2009; p. 106), i, en conseqüència, el significat de fracció més gran que una unitat pot ser un concepte confús i que pot suposar certes dificultats. La resposta correcta és qualsevol representació gràfica en què es vegi representada la fracció 12/5. Si s'interpreta la fracció 12/5 com a mesura, els estudiants poden representar aquesta fracció a la recta numèrica. En el cas de la interpretació de fracció com a comparació part–tot, es poden dibuixar dues regions ombrejades i una altra amb les 2/5 parts ombrejades. Per exemple:

Figura 4.4. Exemple de com representar gràficament la fracció 12/5.

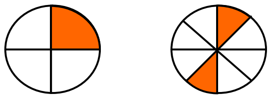
✓ *Pregunta 19*

La pregunta 19 incideix, com la 18, en el significat de fracció més gran que 1 i en el significat de la unitat, aquesta vegada, però, de manera inversa: es demana quina fracció hi ha representada a la imatge. La resposta correcta d'aquesta pregunta pot ser 5/2 (2 i 1/2) o bé 5/6, depenent de què es consideri com a unitat. Si es considera que un cercle és una unitat, la resposta correcta és 5/2, mentre que si es consideren els tres cercles com a unitat, aleshores la resposta correcta és 5/6. Amb les respostes dels estudiants es veurà com interpreten la unitat i si presenten dificultats per identificar la fracció representada.

Equivalència de fraccions

El significat d'equivalència de fraccions és un contingut important per poder comprendre bé les fraccions; també resulta bàsic per entendre la comparació de fraccions. A la taula 4.4 es mostren les preguntes que fan referència al contingut d'equivalència de fraccions i la font de cada pregunta.

Taula 4.4. Preguntes del qüestionari sobre l'equivalència de fraccions i font de cada pregunta.

Preguntes del qüestionari sobre equivalència de fraccions	**Font**
6.Les imatges següents representen la mateixa fracció? Sí ☐ No ☐ Explica per què sí o per què no. 	Modificació d'una activitat de Feikes et al. (2009, p. 116)
16.Què vol dir que dues fraccions són equivalents? Posa'n un exemple.	Creació pròpia
17.Com pots explicar amb un dibuix que 4/8 i 6/12 són equivalents?	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 106)

A continuació es caracteritza, es justifica i es valora cada una de les preguntes del qüestionari referents a l'equivalència de fraccions.

✓ *Pregunta 6*

L'objectiu de la pregunta 6 és detectar la comprensió de l'equivalència de fraccions dels estudiants observant si identifiquen que les dues imatges representen la mateixa fracció, encara que les parts de la segona imatge estiguin "separades". És una pregunta amb dues opcions de resposta en què cal que els estudiants justifiquin la resposta. Tals justificacions ajudaran a entendre quina comprensió tenen de l'equivalència de fraccions.

✓ *Pregunta 16*

A la pregunta 16 es demana directament què vol dir que dues fraccions són equivalents; d'aquesta manera, mitjançant una pregunta oberta, es podrà veure quina idea tenen els estudiants de què vol dir l'equivalència de fraccions. L'exemple que es demana complementa l'explicació, i pot ser tant un exemple numèric com gràfic.

✓ *Pregunta 17*

La idea que "una manera d'examinar si els nens comprenen l'equivalència de fraccions és demanar-los que facin un diagrama" (Smith, citat a Feikes et al., 2009; p. 106) pot ser traslladada als estudiants del Grau de Mestre d'Educació Primària. Per això, a la pregunta

17 se'ls demana que expliquin amb un dibuix que dues fraccions són equivalents. Aquesta pregunta complementa les dues anteriors a l'hora d'identificar els coneixements dels estudiants del grau de mestre sobre l'equivalència de fraccions, ja que es podran analitzar les representacions gràfiques que utilitzen per explicar que les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents.

Comparació i ordenació de fraccions

El contingut de comparació i ordenació de fraccions és un contingut del qual també s'han volgut identificar els coneixements dels estudiants del grau de mestre, ja que és un concepte prou important dins l'àmbit de les fraccions i, en general, de les matemàtiques.

A la taula 4.5 es mostren les preguntes que fan referència al concepte de comparació i ordenació de fraccions i la font de cada pregunta.

Taula 4.5. Preguntes del qüestionari sobre la comparació i ordenació de fraccions i font de cada pregunta.

Preguntes del qüestionari sobre la comparació i ordenació de fraccions	**Font**
12.Digues quina opció és correcta: ☐ 1/3 > 1/2 perquè.... ☐ 1/3 < 1/2 perquè....	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 108)
13.Sense utilitzar el mcm (mínim comú múltiple), explica com saber quina fracció és més gran: 5/7 o 7/9?	Activitat de Feikes et al. (2009, p. 114)
14.Els estudiants de la classe de la srta. Johnson havien d'explicar per què 4/5 és més gran que 2/3. Quina et sembla que és la millor raó? ☐ Kelly va dir: " Perquè 4 és més gran que 2". ☐ Keri va dir: "Perquè 5 és més gran que 3". ☐ Kim va dir: "Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3". ☐ Kevin va dir: "Perquè 4+5 és més que 2+3".	Activitat proposada a les proves NAEP del 1990 i extreta de Feikes et al. (2009, p. 130)

A continuació es caracteritza, es justifica i es valora cada una de les preguntes del qüestionari referents a la comparació i ordenació de fraccions.

✓ *Preguntes 12 i 14*

Algunes de les dificultats en relació amb la comparació i ordenació de fraccions es donen perquè s'apliquen les regles dels nombres enters a les fraccions. "Per exemple, els nens poden creure que 1/3 > 1/2 perquè 3 > 2 " (Feikes et al., 2009; p. 108). Les preguntes 12 i 14 s'han inclòs al qüestionari per identificar si els estudiants del grau de mestre es basen en aquestes idees errònies o si, per contra, tenen coneixements clars sobre la comparació de fraccions. A la pregunta 12 han d'escollir una de les dues opcions que es proposen i justificar-ne la tria. La resposta correcta és la segona opció: 1/3 és més petit que 1/2.

La resposta 14 és d'opció múltiple, cal escollir una de les quatre opcions possibles. En aquest cas, no es demana justificació, ja que està inclosa en la resposta que triïn. La dificultat de la pregunta 14 respecte a la 12 és que en la pregunta 14 es comparen dues fraccions en què els denominadors i els numeradors són diferents. En canvi, a la pregunta 12 els numeradors són iguals. Com a exemple de la dificultat que podria suposar resoldre aquesta pregunta, cal dir que només un 35 % dels nens de quart d'educació primària va identificar correctament la resposta del problema 14, la tercera opció (Feikes et al., 2009; p. 130). S'espera que els resultats dels estudiants d'aquesta recerca siguin millors que els dels nens de quart.

✓ *Preguntes 13*

A vegades els estudiants, per resoldre algunes situacions, fan servir procediments mecànics sense entendre'ls prou, com és el cas d'utilitzar el mínim comú múltiple per comparar fraccions. La pregunta oberta número 13 està formulada amb l'objectiu d'identificar els coneixements de què se serveixen els estudiants per comparar fraccions sense utilitzar el mínim comú múltiple i observar quina comprensió en tenen més enllà d'utilitzar procediments mecànics.

Operacions amb fraccions

Les operacions amb fraccions són un contingut central en el tema de les fraccions, del qual es vol determinar quin grau de comprensió en tenen els estudiants de mestre.

A la taula 4.6 es mostren les preguntes que fan referència a les operacions amb fraccions i la font de cada pregunta.

Taula 4.6. Preguntes del qüestionari sobre operacions amb fraccions i font de cada pregunta.

Preguntes del qüestionari sobre operacions amb fraccions	**Font**
20.Fes una estimació de 12/13 + 7/8, marca l'opció que consideres correcta i explica com ho has fet: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 19 ☐ 21	Activitat proposada a les proves NAEP i extreta de Feikes et al. (2009, p. 107)
21.Calcula 1/3 + 2/5 i representa-ho gràficament.	Creació pròpia
22.Calcula 2/5 x ¾ i representa-ho gràficament.	Creació pròpia

23.Calcula 4/5 ÷ 2/3.	Creació a partir de Feikes et al. (2009, p. 124)
24.Un alumne diu que 1/3 + 2/5 és 3/8. És correcta aquesta resposta? Explica per què sí o per què no.	Modificació d'una activitat extreta de Feikes et al. (2009, p. 121)
25.Quin és el valor de 4/5 -1/3 -1/15? ☐ 1/5 ☐ 2/5 ☐ ¾ ☐ 4/5	Activitat proposada a les proves TIMSS del 1999 i extreta de Feikes et al. (2009, p. 122)
26.Calcula 3/5 + 3/10 x 4/15 = ☐ 3/51 ☐ 1/6 ☐ 6/25 ☐ 11/25 ☐ 17/25	Activitat proposada a les proves TIMSS del 2003 i extreta de Feikes et al.(2009, p. 127)
27.La divisió de dues fraccions és una fracció amb numerador 4. Quines poden ser aquestes fraccions?	Creació pròpia
28.Quin és el nombre que falta perquè es compleixi la igualtat següent: 2/? X 6 = 4.	Creació pròpia

A continuació es caracteritza, es justifica i es valora cada una de les preguntes del qüestionari referents a les operacions amb fraccions.

✓ *Pregunta 20*

Per assegurar la comprensió sobre les operacions de fraccions no n'hi ha prou de veure que els estudiants saben calcular operacions seguint un procediment mecànic, és necessari que tinguin sentit numèric per poder fer estimacions del resultat. Per aquest motiu, s'ha inclòs al qüestionari la pregunta 20, per identificar quins coneixements tenen els estudiants sobre l'estimació de la suma de fraccions i, indirectament, sobre el significat de fracció. És una pregunta d'opció múltiple, hi ha quatre opcions possibles i la resposta correcta és la segona. El 2 és l'estimació de la suma de 12/13 i 7/8, ja que tant 12/13 com 7/8 es poden aproximar a 1 i, per tant, la suma s'aproxima a 2. És remarcable que, a les proves NAEP, un 55 % dels estudiants de 13 anys va escollir l'opció del 19 o del 21 (Feikes et al., 2009; p. 107). En aquest cas, tornaria a donar-se el que s'ha esmentat anteriorment, que els estudiants apliquen propietats dels nombres naturals a les fraccions i sumen els numeradors o els denominadors per obtenir el resultat.

✓ *Preguntes 21 i 22*

A les preguntes 21 i 22 es demana que calculin una suma i una multiplicació de dues fraccions respectivament. Es volen determinar els coneixements dels estudiants de mestre a l'hora d'operar amb fraccions. Les operacions amb fraccions se solen aprendre mecànicament i sense entendre-les, quan s'oblida la regla costa trobar el resultat (Feikes et al., 2009; p. 118). Per aquest motiu, en aquestes preguntes també es demana que representin gràficament la suma i la multiplicació respectivament, per veure el nivell de comprensió dels estudiants d'aquestes operacions. El resultat de l'operació 1/3 + 2/ 5 és 11/15, i el de la multiplicació 2/5 x ¾ és 3/10.

✓ *Pregunta 23*

En aquesta pregunta es demana calcular la divisió 4/5 ÷ 2/3, amb la qual es volen determinar els coneixements dels estudiants a l'hora de dividir fraccions. El resultat de l'operació és 6/5. Analitzant els procediments emprats pels estudiants, es podrà determinar quins algoritmes fan servir i també els possibles errors que fan en dur a terme aquests procediments.

✓ *Pregunta 24*

A la pregunta 24 es vol veure si els estudiants apliquen, tal com s'ha comentat abans, propietats dels nombres enters per resoldre la suma de fraccions i per explicar la resposta. Si responen la pregunta correctament, haurien de dir que la resposta és incorrecta, ja que 1/3 + 2/5 no dóna 3/8, sinó 11/15. També es demana que justifiquin la resposta per veure quins raonaments utilitzen, tant si han respost correctament com si no. En aquest sentit, podrien explicar que no és correcta perquè, en un cas, sumem terços i, en l'altre, cinquens i no té sentit sumar els denominadors i els numeradors. Té sentit sumar els numeradors quan tenim els mateixos denominadors, ja que aleshores sumem parts amb mateixa àrea. Es podrà determinar, per tant, com els estudiants justifiquen la resposta, si només diuen que la suma és incorrecta i quin és el resultat o si, per contra, expliquen correctament per què no es pot fer la suma, tal com es proposa a l'enunciat de la pregunta.

✓ *Preguntes 25 i 26*

A les preguntes 25 i 26 hi intervenen tres fraccions en comptes de dues com a les anteriors i també es proposen per determinar els coneixements dels estudiants a l'hora de calcular amb fraccions. Totes dues són d'opció múltiple. A la número 26, per resoldre-la correctament, s'ha de tenir en compte la prioritat de les operacions. Les dues preguntes formen part de les proves TIMSS i, per tant, se'n tenen els resultats. La pregunta 25, als Estats Units, la van respondre correctament un 55 % dels estudiants de grau 8, i la pregunta 26, també als Estats Units, la van encertar un 36,2 %. La resposta correcta de la pregunta 25 és la segona opció, 2/5, i la resposta correcta de la pregunta 26 és l'última opció, 17/25 (Feikes et al., 2009).

✓ *Pregunta 27*

En aquesta pregunta els estudiants han de trobar dues fraccions de manera que la seva divisió doni una fracció amb numerador 4. Hi ha tres opcions: 1/B ÷ C/4, 2/B ÷ C/2, 4/B ÷ C/1 (amb B i C nombres qualssevol diferents de 0). Aquí s'analitzaran els coneixements dels estudiants a l'hora de resoldre una situació amb diverses opcions i sense un resultat determinat, ja que pot tenir moltes solucions. Cal veure si els estudiants donen fraccions concretes o, per contra, saben generalitzar i donar la solució tenint en compte totes les solucions possibles.

✓ *Pregunta 28*

A diferència de l'anterior, en aquesta pregunta, perquè es compleixi l'equació, només hi ha una solució, el número 3. Quan s'analitzin les respostes, es podrà veure si els estudiants resolen la pregunta mitjançant la multiplicació de fraccions o bé a partir de la interpretació de la fracció com a operador d'un nombre.

Infinitud i densitat dels nombres racionals

La propietat que assenyala que entre dues fraccions sempre n'hi ha una altra és un concepte important en matemàtiques i del qual normalment a primària no es parla (Feikes et al., 2009). El significat de la infinitud també és un concepte poc tractat a l'educació primària. S'han inclòs tres preguntes al qüestionari sobre aquests dos continguts per tal de veure quines idees en tenen els estudiants de mestre. A la taula 4.7 es mostren les preguntes que fan referència a infinitud i densitat dels nombres racionals i la font de cada pregunta.

Taula 4.7. Preguntes del qüestionari sobre la infinitud i la densitat dels nombres racionals i font de cada pregunta.

Preguntes del qüestionari sobre la infinitud i la densitat	**Font**
3.(*a*) Quina és la fracció més gran que coneixes? (*b*) Quina és la més petita?	Activitat de Feikes, Schwingendorf i Gregg (2009, p. 110)
29.Quantes fraccions hi ha entre 2/5 i 4/5? Explica-ho.	Creació a partir de Feikes, Schwingendorf i Gregg (2009, p. 129)
30.Pots trobar una fracció entre 1/7 i 1/8? Explica-ho.	Creació a partir de Feikes, Schwingendorf i Gregg (2009, p. 129)

A continuació es caracteritza, es justifica i es valora cada una de les preguntes del qüestionari referents a la infinitud i la densitat dels nombres racionals.

✓ *Pregunta 3*

Les dues opcions de la pregunta 3 haurien de donar informació de com comprenen els estudiants de mestre la infinitud dels nombres racionals, a la vegada que també es comprovarà el coneixement que tenen sobre l'equivalència de fraccions i la comparació de fraccions. Alguns estudiants de quart d'educació primària van respondre que la fracció més gran que coneixien era 1/2, 1/1, 12/12, 99/100, 100/100, 999.999.999/999.999.999 i, la fracció més petita, 1/2, 1/1, 0/0, 3/4. Altres estudiants van dir que la més petita era 1/1 i, la més gran, 100/100. Un estudiant va dir que 1/2 era la més gran i 3/4 la més petita (Feikes et al., 2009; p. 117). En alguns casos, diuen fraccions equivalents a 1 però amb numeradors i denominadors més grans que 1 (12/12, 100/100 i 999.999.999/999.999.999), cosa que manifesta poca comprensió de les fraccions equivalents. La fracció 99/100 és més petita que 1; que diguin que és la més gran demostra mancances de comparació de fraccions. La conclusió és la mateixa per a l'alumne que diu que la fracció més gran és ½ i la més petita és ¾. En totes les situacions, però, s'evidencia una manca de comprensió de les propietats dels nombres racionals. Cal comprovar si, en el cas dels estudiants del grau de mestre, apareixen les mateixes dificultats. La resposta correcta de l'opció *a*) és que no existeix una fracció que sigui més gran que totes les altres. En el cas de l'opció *b*), la resposta depèn de si consideren els racionals, els racionals positius o els racionals positius més el zero. En el cas dels racionals positius, no hi ha una fracció més petita que les altres. En canvi, en el cas dels racionals positius més el zero, la resposta seria $0/a$ amb a diferent de 0.

✓ *Preguntes 29 i 30*

Tant la pregunta 29 com la 30 fan referència a la densitat dels nombres racionals, és a dir, al fet que entre dues fraccions hi ha infinites fraccions. A la pregunta 29 es demana la quantitat de fraccions que hi ha entre 2/5 i 4/5. S'ha escollit el mateix denominador perquè pot ser que els estudiants tinguin clar que n'hi ha una, que és 3/5, però que no s'adonin que n'hi ha més. En canvi, a la pregunta 30, s'ha triat un numerador igual i denominadors consecutius. En totes dues es demana que justifiquin la resposta per tenir més informació dels coneixements que tenen en relació amb aquest tema.

4.3.2 Elaboració d'una seqüència d'activitats

Per tal d'identificar els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària (objectiu 2) i estudiar la relació d'aquests coneixements amb els de les fraccions (objectiu 3), s'ha dissenyat una pauta per elaborar una seqüència d'activitats[5] (vegeu figura 4.5).

A partir d'aquesta pauta, els estudiants han de dissenyar una seqüència d'activitats d'un contingut concret de fraccions dirigida a un curs d'educació primària. Per elaborar-la, no hi ha ni mínim ni màxim d'extensió.

[5] A partir d'ara, ens referirem a aquest instrument com a seqüència d'activitats.

ELABORACIÓ D'UNA SEQÜÈNCIA D'ACTIVITATS

Es tracta d'elaborar una seqüència d'activitats sobre fraccions dirigida a un determinat curs de primària. La seqüència ha de contenir:

1. Títol de la seqüència.
2. El curs al qual es dirigirà la seqüència d'activitats.
3. Objectius i competències.
4. Continguts (Conceptes, Procediments i Actituds).
5. Idees matemàtiques que es pretenen treballar (formulades en forma de frases que expressin idees i no com a simple llista de conceptes).
6. Criteris metodològics (principis didàctics que es tindran en compte per elaborar la seqüència d'activitats, tant els de caràcter més general com els més vinculats a la didàctica de les matemàtiques: paper de l'alumnat, del professorat, dels recursos, dels espais, del temps,...).
7. Activitats
   a. Número d'ordre
   b. Objectiu de l'activitat: Amb aquesta activitat es pretén que....
   c. Descripció de l'activitat concretant al màxim: explicar què es farà i com es farà (rol dels nens i nenes, rol del mestre, materials, espais, fitxes d'observació, preguntes que es faran, explicacions teòriques, material que es donarà als alumnes, etc.).
8. Avaluació de la seqüència (què s'avaluarà, com s'avaluarà, quant s'avaluarà i amb quins instruments).
9. Fonts d'informació consultades.

Figura 4.5. Pauta per elaborar la seqüència d'activitats de fraccions.

La pauta presentada conté apartats dels quals, en aquest treball, no s'han analitzat les dades obtingudes, però es van demanar perquè era una de les tasques que es van tenir en compte per avaluar l'aprenentatge dels estudiants de l'assignatura de Didàctica de la Matemàtica I. En el marc d'aquesta assignatura, els estudiants van presentar una primera versió de la seqüència d'activitats i, durant el semestre, van anar fent canvis en aquesta primera versió en funció del que s'anava treballant a l'assignatura. El procés de millora i la versió final que van lliurar són els dos aspectes que es van considerar per avaluar els aprenentatges dels estudiants.

En aquest estudi, tal com s'explicarà en el subapartat 4.5.2, ens hem basat principalment a analitzar les explicacions teòriques i els exemples proposats en les activitats de la seqüència (vegeu apartat 7 de la figura 4.5).

4.4 Obtenció de dades

Tal com s'ha comentat en l'apartat 4.2, els participants en l'estudi eren estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària que encara no havien cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica.

Durant la primera sessió de classe de l'assignatura de Didàctica de la Matemàtica I, després de la presentació, es va explicar la pauta per elaborar la seqüència d'activitats que s'ha presentat a l'apartat anterior i es va especificar quins eren els objectius d'aquest treball. Els estudiants van tenir quinze dies per elaborar la seqüència d'activitats en hores de treball personal. Tal com s'ha comentat, aquest treball era una tasca avaluable dins l'assignatura de Didàctica de la Matemàtica I.

Pel que fa al qüestionari, es va passar també en començar l'assignatura de Didàctica de la Matemàtica I, el segon dia de classe. Es van explicar quins eren els objectius del qüestionari i es va deixar tota una sessió de classe (una hora i mitja) per contestar-lo amb tranquil·litat. Es va informar els estudiants que respondre el qüestionari era un acte totalment lliure i voluntari; aquesta tasca no s'avaluava dins l'assignatura de Didàctica de la Matemàtica I. Durant tot el procés d'elaboració de la recerca s'ha mantingut la confidencialitat de cada estudiant.

Tant la seqüència d'activitats com el qüestionari es van presentar en iniciar l'assignatura, de manera que encara no haguéssim impartit continguts de didàctica de les matemàtiques i, per tant, poguéssim descriure, analitzar i interpretar els coneixements sobre les fraccions i el seu ensenyament que tenen quan comencen els estudis del grau de mestre sense interferències de cap assignatura de didàctica de la matemàtica.

4.5 El procés d'anàlisi de dades

En aquest apartat s'explicarà amb detall quin ha estat el procés que s'ha dut a terme per analitzar les dades obtingudes a partir del qüestionari i de la seqüència d'activitats. També s'explicarà com s'han relacionat les dades que s'han obtingut del qüestionari amb les de la seqüència d'activitats. Primerament, s'exposarà com s'han analitzat les dades obtingudes amb el qüestionari; a continuació, el procés d'anàlisi de les dades obtingudes amb la seqüència d'activitats, i, finalment, el procés d'anàlisi per comparar les dades obtingudes amb el qüestionari i amb la seqüència d'activitats.

4.5.1 El procés d'anàlisi del qüestionari

Per dur a terme el procés d'anàlisi de les respostes del qüestionari, primerament s'han escanejat les que contenen alguna representació gràfica o esquema, per tal de facilitar-ne l'accessibilitat. A continuació s'han organitzat les respostes amb el suport del programa Microsoft Access. S'ha elaborat una base de dades mitjançant una taula de doble entrada on cada columna conté totes les respostes d'una pregunta del qüestionari i, cada fila, les respostes d'un estudiant. Per introduir les respostes a la taula, s'ha assignat un codi a cada estudiant per tal de mantenir-ne la confidencialitat.

Amb el mateix programa Microsoft Access, s'ha dissenyat un informe individual per a cada pregunta que en conté totes les respostes. A l'annex 2 es mostren els informes de totes les preguntes i, per tant, totes les respostes dels qüestionaris per facilitar la transparència d'aquesta recerca.

S'ha realitzat un buidat de les dades dels informes a un arxiu creat amb el programa Microsoft Excel per tal de facilitar el tractament de la informació. Per a cada pregunta s'ha creat una taula en què s'inclouen les respostes.

A partir de la lectura dels informes fets amb l'Access i de les respostes organitzades a l'Excel, s'han anat buscant aspectes en comú en les respostes per poder crear les categories. En aquest procés s'han tingut en compte referents del marc teòric, així com procediments de caràcter inductiu a partir de les dades. En el full de càlcul creat s'han reorganitzat les dades sistemàticament fins a trobar les categories definitives (vegeu annex 3). La validació de les categories s'ha realitzat per mitjà d'una triangulació de les dades amb dos experts.

A banda de la descripció concreta de les categories de cada pregunta, s'han elaborat taules de contingència amb el recompte i percentatge d'estudiants que fan referència a cada categoria (vegeu capítol 5). En el capítol 5 s'explicarà com s'ha pres la decisió de col·locar cada estudiant en una categoria o una altra i també la discussió d'aquests resultats.

Finalment, s'elaboren les conclusions a partir d'interpretar les idees fonamentals obtingudes en tot aquest procés d'anàlisi de dades i comparar-les amb el marc teòric.

4.5.2 El procés d'anàlisi de la seqüència d'activitats

Per dur a terme el procés d'anàlisi de la seqüència d'activitats, primerament s'han escanejat totes les seqüències elaborades pels estudiants per tal de facilitar-ne l'accessibilitat (vegeu annex 4). A continuació s'han organitzat amb el suport del programa informàtic d'anàlisi de dades qualitativa Atlas.ti. A cada seqüència se li ha assignat un codi, el mateix que s'ha assignat a cada estudiant en analitzar-ne el qüestionari. Les seqüències s'han considerat documents primaris en el programa Atlas.ti.

Tal com s'ha explicat en el subapartat 4.3.2, de tots els apartats que s'ha demanat als estudiants en la pauta d'elaboració de la seqüència, l'anàlisi només s'ha centrat en l'apartat 7 (vegeu figura 4.5), en què els estudiants expliquen les activitats. Per coherència amb els objectius d'aquesta recerca, s'ha decidit analitzar en les activitats de la seqüència els mateixos continguts que s'analitzen en el qüestionari: significat de fracció, equivalència de fraccions, comparació i ordenació de fraccions, operacions amb fraccions i infinitud i densitat dels nombres racionals.

Per obtenir una visió global de les activitats proposades pels estudiants, se n'han fet diverses lectures a fi de familiaritzar-nos-hi. En aquesta primera aproximació a les dades, s'ha detectat que els estudiants, en les seves activitats, donen explicacions teòriques i/o exemples relacionats amb les explicacions, així com també propostes d'exercicis i problemes dels continguts que han escollit tractar. S'ha decidit analitzar en les activitats de la seqüència, per a cada un dels continguts de fraccions esmentats, les explicacions i els exemples que els estudiants han donat. Creiem que les explicacions i els exemples de les activitats de la seqüència permetran observar més a fons els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de fraccions, així com relacionar aquests coneixements amb els del qüestionari. En efecte, els estudiants, en les explicacions teòriques de la seqüència, donen definicions de continguts matemàtics, expliquen procediments de càlcul, suggereixen exemples, etc.; és a dir, proposen una sèrie d'informacions de tipologia semblant a les que s'han demanat en les preguntes del qüestionari, la qual cosa hauria de facilitar la relació entre les dades obtingudes amb el qüestionari i les que s'han obtingut amb la seqüència.

En les explicacions i els exemples que els estudiants han donat en relació amb els continguts de fraccions, s'han analitzat les mateixes explicacions sobre aquests continguts, la tipologia dels exemples donats i la interpretació de fracció en què s'han basat els estudiants. En algun contingut en concret, quan s'han analitzat les explicacions, aquestes s'han relacionat amb els exemples proposats. Aquestes particularitats en l'anàlisi de les explicacions i els exemples es concretaran molt més en el capítol 6, quan s'exposi l'anàlisi de dades de la seqüència.

A banda de considerar les explicacions i els exemples dels continguts de fraccions tractats en aquesta recerca, s'ha decidit també analitzar totes les representacions gràfiques que s'han proposat en la seqüència, tant en les explicacions i els exemples com en els exercicis i els problemes que els estudiants han plantejat en les activitats de la seqüència.

El següent pas del procés d'anàlisi de la seqüència ha estat marcar els fragments de les activitats en què els estudiants han fet explicacions i/o han suggerit exemples per ensenyar els diferents continguts de fraccions tractats en aquest estudi, i s'han considerat citacions dins de l'Atlas.ti. A continuació s'han codificat aquestes citacions per facilitar-ne la cerca i l'organització segons diferents criteris. Per exemple, per codificar les citacions referents al contingut de l'equivalència de fraccions, s'han utilitzat els codis següents:

- Codis aplicats a les citacions que inclouen explicacions teòriques sobre l'equivalència de fraccions:
    - Definició: fracció equivalent
- Codis aplicats a les citacions que inclouen elements que donen informació sobre la interpretació de fracció:
    - Interpretació fracció equivalent: comparació part–tot
    - Interpretació fracció equivalent: quocient
    - Interpretació fracció equivalent: raó
    - Interpretació fracció equivalent: mesura
    - Interpretació fracció equivalent: operador
- Codis aplicats a les citacions que inclouen exemples per explicar l'equivalència de fraccions:
    - Exemple fracció equivalent: context real simulat

- Exemple fracció equivalent: imatge
- Exemple fracció equivalent: símbol matemàtic
- Exemple fracció equivalent: expressió verbal
- Exemple fracció equivalent: objecte

Per codificar les citacions dels altres continguts de fraccions, s'han emprat els mateixos codis que els que s'han presentat per al contingut de l'equivalència de fraccions, però canviant fracció equivalent pel contingut que es codifica. Per exemple, per codificar els fragments on apareixen exemples amb imatges de la comparació de fraccions, s'ha fet servir el codi Exemple comparació de fraccions: imatge. En codificar les citacions referents al significat de fracció, a més del codi Definició: fracció, també s'ha utilitzat el codi Definició: numerador i Definició: denominador.

En el cas de la codificació de les representacions gràfiques, en totes les activitats de la seqüència s'han utilitzat codis diferents que els de la codificació de les explicacions i els exemples. Concretament, s'han emprat els codis següents:

- Codis aplicats a les citacions amb representacions gràfiques, diferenciant si la unitat està dividida en parts iguals i forma igual o en parts iguals i forma diferent:
  - -Representació: àrea igual i forma igual
  - -Representació: àrea igual i forma diferent
  - -Representació: àrea diferent
- Codis aplicats a les citacions amb representacions gràfiques segons el model utilitzat:
  - -Representació: model d'àrea
  - -Representació: model de grup
  - -Representació: model de longitud
- Codis aplicats a les citacions amb representacions gràfiques segons la imatge utilitzada:
  - -Representació: quadrat
  - -Representació: rectangle
  - -Representació: cercle
  - -Representació: hexàgon
  - -Representació: imatges reals
  - -Representació: altres

A l'hora de codificar les explicacions, els exemples i les representacions gràfiques de totes les activitats, s'ha considerat un codi anomenat Error per marcar els errors que s'han comès a la seqüència.

En finalitzar la codificació de les citacions que contenen explicacions, exemples o representacions gràfiques amb el suport de l'Atlas.ti, aquestes citacions s'han introduït en un full de càlcul elaborat amb el programa Microsoft Excel per tal de començar el procés de categorització (vegeu annex 5).

Tant les explicacions teòriques i els exemples com les representacions gràfiques s'han organitzat en categories tenint en compte els elements comuns que hi apareixen. Aquestes categories s'explicaran amb més detall al capítol 6. La validació de les categories s'ha realitzat per mitjà d'una triangulació de les dades amb dos experts.

S'han elaborat taules de contingència amb el recompte i percentatge d'estudiants que han fet referència a cada categoria (vegeu capítol 6). En el capítol 6 s'explicarà com es va prendre la decisió de col·locar cada estudiant en una categoria o en una altra, així com la discussió d'aquests resultats.

Finalment, s'elaboren les conclusions a partir d'interpretar les idees fonamentals obtingudes en tot aquest procés d'anàlisi de dades i comparar-les amb el marc teòric.

4.5.3 El procés d'anàlisi de la relació entre el qüestionari i la seqüència

Per dur a terme el procés d'anàlisi de la relació entre els coneixements sobre fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de fraccions, s'ha partit de les categories obtingudes en analitzar el qüestionari i la seqüència d'activitats. Només s'han relacionat les dades del qüestionari amb les de la seqüència que fan referència als continguts de significat de fracció, comparació i ordenació de fraccions i equivalència de fraccions. S'han seleccionat aquests continguts perquè, tal com s'ha vist en el marc teòric, són essencials per entendre els altres continguts de les fraccions, com ara les operacions amb fraccions.

Per a cada contingut de fraccions, s'ha observat quins estudiants han donat explicacions i/o exemples a la seqüència i s'han tingut en compte les respostes del qüestionari d'aquests mateixos estudiants. Aleshores, s'han organitzat les dades que s'han extret de la seqüència i del qüestionari en un mateix full de càlcul per poder relacionar-les (vegeu annex 6).

En l'anàlisi de la relació entre el qüestionari i la seqüència, s'ha intentat detectar quins elements de les respostes del qüestionari es mantenen en les explicacions de la seqüència i quins canvien i, en aquest cas, de quina manera canvien. Com que cada contingut de fraccions analitzat té característiques diferents, també hi ha diferències en l'anàlisi de la relació entre qüestionari i seqüència. Per això, l'anàlisi d'aquesta relació s'explicarà amb més detall en el moment de fer-la, en el capítol 7.

5 Anàlisi de dades del qüestionari

En aquest capítol es presenta l'anàlisi de dades en relació amb el primer objectiu d'aquesta recerca: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions. Aquest objectiu es concreta en cinc d'específics:

Objectiu 1.1: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre el significat de fracció.

Objectiu 1.2: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'equivalència de fraccions.

Objectiu 1.3: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre la comparació i ordenació de fraccions.

Objectiu 1.4: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre les operacions amb fraccions.

Objectiu 1.5: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre la infinitud i densitat dels nombres racionals.

Aquest capítol s'organitza en cinc apartats, i en cada un s'expliquen els resultats dels objectius específics que s'han esmentat. Aquests resultats s'obtenen de l'anàlisi de les preguntes del qüestionari que s'han agrupat segons el contingut al que fan referència: significat de fracció, fraccions equivalents, comparació i ordenació de fraccions, operacions amb fraccions i infinitud i densitat dels nombres racionals. De cada pregunta s'expliquen quines categories s'han obtingut a partir de l'anàlisi de dades a la vegada que es presenten els resultats i la discussió d'aquests.

5.1 Anàlisi de dades del qüestionari en relació amb el significat de fracció

En aquest apartat es presenta l'anàlisi de dades de les preguntes del qüestionari que fan referència al significat de fracció.

5.1.1 Anàlisi de dades de la pregunta 1

A la figura 5.1 es mostra la pregunta 1 on els estudiants de mestre han hagut d'explicar el què és una fracció.

1.Què és una fracció?

Figura 5.1. Pregunta 1 del qüestionari de fraccions

Un únic estudiant no ha contestat aquesta pregunta. Les respostes dels estudiants que han contestat la pregunta 1 estan distribuïdes en set categories segons l'explicació de fracció que han elaborat: Part o parts d'una unitat (SI1), Proporció (SI2), Nombre (SI3), Repartiment (SI4), Divisió de dues quantitats (SI5), Operació (SI6) i Relació entre dos nombres (SI7).

Hi ha estudiants que han donat explicacions en una única categoria, mentre d'altres n'han donat en dues o tres. A la taula 5.1 es mostra la quantitat d'estudiants que han elaborat respostes en cada una o més d'una de les categories.

Taula 5.1. Classificació de les respostes segons la categorització de les definicions de fracció.

Codi	**Categoria**	**Quantitat d'estudiants**
SI1	Part o parts d'una unitat	21
SI2	Proporció	2
SI3	Nombre	4
SI4	Repartiment	2
SI5	Divisió de dues quantitats	3
SI6	Operació	1
SI7	Relació entre dos nombres	4
SI1 i SI3	Part o parts d'una unitat i Nombre	6
SI2 i SI3	Proporció i Nombre	1
SI3, SI4 i SI6	Nombre, Repartiment i Operació	1

A continuació s'expliquen les característiques que defineixen cada categoria a la vegada que es presenten exemples determinats de les respostes d'estudiants que formen part d'una categoria o de més d'una.

Part o parts d'una unitat (SI1)

Aquesta categoria és la més nombrosa, conté les respostes dels vint estudiants que han definit el què és una fracció fent referència a una part o més d'una part d'una unitat. Amb aquesta definició interpreten la fracció com a comparació part-tot. Les respostes s'han classificat en dues subcategories: part d'una unitat i parts d'una unitat. A continuació s'expliquen les respostes de cada subcategoria.

Part d'una unitat (SI1.1)

En aquest grup hi ha els nou estudiants que han expressat que una fracció és una part d'una unitat, d'unitats, d'un tot o d'un total. Quatre estudiants han dit que la fracció és una part d'una unitat, un estudiant que és la part d'un total o unitat, un altre estudiant que és una part d'una unitat o unitats, un únic estudiant que és una part d'un tot o unitat i per últim un estudiant que és una part d'un total. Un estudiant explica erròniament que "*són dos nombres que marquen la porció de la part de baix que determina el total*". Entenem que volia explicar que s'agafa una part de les parts en que s'ha dividit la unitat segons el denominador.

Tres d'aquests vuit estudiants expliquen que una fracció està composada pel numerador i el denominador i un d'aquests tres s'equivoca en referir-se al terme denominador, anomenant-lo "*nominador*".

Un altre estudiant d'aquest grup comet un error quan pretén explicar que la unitat es pot dividir de diverses maneres dient que es pot dividir en diverses fraccions, concretament explica que "*És la part d'una unitat. La unitat pot dividir-se en diverses fraccions i expressar-se per escrit diferent*".

Parts d'una unitat (SI1.2)

Dotze estudiants han explicat el què és una fracció fent referència a les parts que s'agafen de les parts amb què s'ha dividit una unitat. Cinc estudiants han dit que una fracció és una relació entre dos nombres que indica les parts que s'agafen de les parts amb què s'ha dividit la unitat, dos estudiants en comptes de dir que és una relació entre dos nombres, han dit que és una divisió de dos nombres, un únic estudiant, que és una unitat matemàtica i els quatre estudiants restants només han parlat del nombre de parts que s'agafen de les que es tenen. Un únic estudiant ha posat un exemple, ha dibuixat un rectangle dividit en cinc parts i n'ha marcat quatre per representar la fracció 4/5.

Un estudiant d'aquest grup ha confós el numerador i el denominador afirmant que "*És una relació entre nombres. Ens indica quantes parts del numerador estan seleccionades per el denominador*".

Proporció (SI2)

Els dos estudiants que formen part d'aquesta categoria han explicat que una fracció és una proporció. Un dels estudiants diu directament que "*És una proporció entre dos nombres*" mentre que l'altre afegeix que és una relació de dos nombres, concretament diu que "*És una relació de dos nombres que representen una proporció*". Ambdós però, deixen clar que es tracta d'una proporció.

Nombre (SI3)

Les respostes dels estudiants d'aquesta categoria són diverses, tot i que coincideixen en explicar que una fracció és un nombre. Per exemple, un estudiant afirma que una fracció és "*Un nombre que podem representar de moltes maneres (decimal, gràfic, percentatge...)*", mentre que un altre explica que "*Una fracció és una operació matemàtica que consta de dos nombres però determinen un sol resultat, un sol nombre*". Totes les definicions d'aquesta categoria deixen clar que una fracció és una manera d'expressar o representar un nombre i dues de les definicions fan referència concretament als nombres decimals.

Un estudiant explica que la fracció és "*La relació entre dos nombres reals per definir un nombre en concret*", i per tant, comet un error en considerar que el numerador i el denominador són nombres reals en comptes de nombres naturals.

Repartiment (SI4)

Dos estudiants expliquen que una fracció és un repartiment. Un dels dos explica directament que una fracció és una forma de representar un repartiment mentre que l'altre ho fa a través d'un exemple: "*És dividir un nombre en parts iguals, per exemple dividir una pizza en 4 parts entre 4 persones de manera que a cada persona li toca 1/4*". En els dos exemples s'interpreta la fracció com a quocient.

Divisió de dues quantitats (SI5)

Tres estudiants expliquen que una fracció consisteix en dividir una quantitat en una altra quantitat sense afegir res més. Aquests estudiants fan referència al fet que en el numerador hi ha un nombre que es pot dividir pel denominador. Un dels dos comet l'error de confondre el numerador amb el denominador: "*Una fracció consisteix en dividir una quantitat (el denominador) en una altra quantitat (numerador)*".

Operació (SI6)

En aquesta categoria només s'ha considerat un sol estudiant. És l'únic que concreta que fonamentalment la fracció és una operació, dient que "*Una fracció és una operació, +, -, X, ÷. La paraula ja ho diu, fracció, fraccionar. L'objectiu de la fracció és intentar fraccionar-la al màxim, simplificar i donar un nombre. Ex: 20/10 =10/5=2*". Aquesta definició no és prou correcta ja que no s'entén què vol dir amb que "*una fracció és una operació +, -, X, ÷.*", no s'entén com és que parla de les quatre operacions, suma, resta, multiplicació i divisió.

La relació entre dos nombres (SI7)

Quatre estudiants expliquen que una fracció és una relació entre dos nombres. Dos estudiants únicament diuen que és una relació entre dos nombres. Un d'aquests dos estudiants diu que és "*una relació entre dos nombres enters*" en comptes d'una relació entre dos nombres naturals. Els altres dos estudiants fan referència al numerador i al denominador: "*Una fracció és la relació entre dos nombres formats per un numerador i un denominador que es complementen*", "*Una expressió matemàtica que relaciona un numerador amb un denominador i pot ser calculada sumant, restant, dividint i multiplicant*". En la primera definició no queda prou clar què vol dir que el numerador i el denominador es complementen. En la segona definició tampoc queda prou clar el que es vol dir quan s'explica que es pot calculat sumant, restant, dividint i multiplicant.

Part o parts d'una unitat (SI1) i Nombre (SI3)

En aquest grup hi ha els sis estudiants que han utilitzat explicacions de la categoria SI1 i també de la categoria SI3. Tots diuen que una fracció és un nombre però també fan referència a la part o parts que s'agafen de la unitat.

Proporció (SI2) i Nombre (SI3)

L'estudiant d'aquesta categoria combina també explicacions de la categoria SI2 i de la categoria SI3, diu que la fracció és un nombre i que és una proporció: "*És un nombre que ens indica una proporció. Tots els nombres es poden transformar en fraccions sempre i tota fracció es pot transformar en qualsevol nombre*".

Nombre (SI3), Repartiment (SI4) i Operació (SI6)

Un sol estudiant forma part d'aquesta categoria i diu que la fracció es pot interpretar de vàries maneres: "*Una fracció es pot interpretar de vàries maneres: com una divisió, com un percentatge, com un repartiment*". S'ha considerat que ha interpretat que la fracció és una operació perquè diu que és "*com una divisió*", és un nombre quan diu que pot ser un "*percentatge*" i un repartiment, perquè diu directament que és un "*repartiment*".

5.1.2 Anàlisi de dades de la pregunta 2

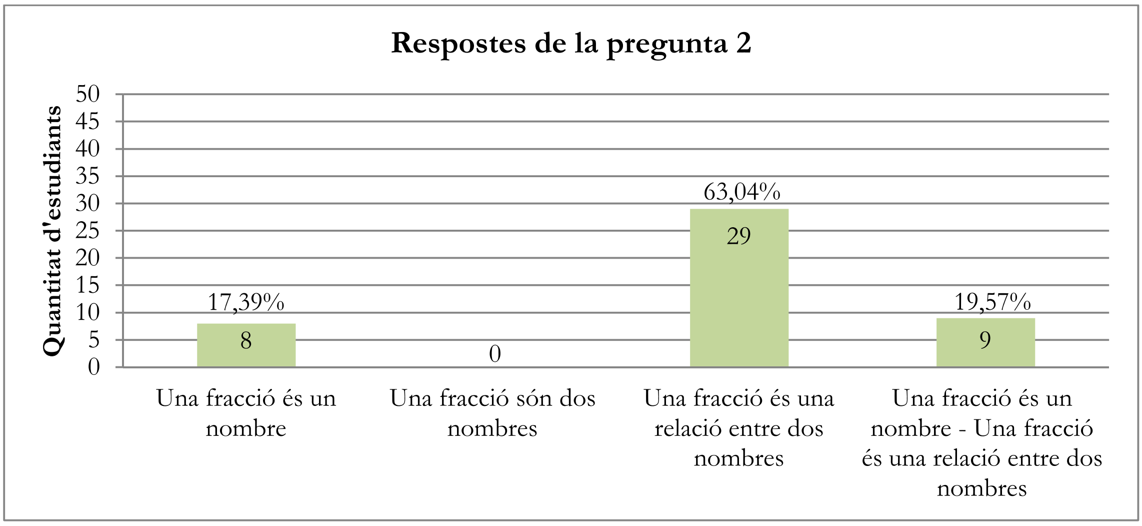
A la figura 5.2 es mostra la pregunta 2 on els estudiants de mestre han hagut de marcar quines opcions consideren correctes en relació a si una fracció és un nombre, dos nombres o una relació entre dos nombres.

2.Marca l'opció o opcions que consideres correctes:

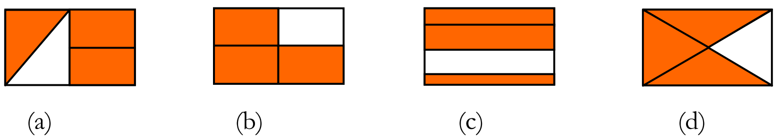
- ☐ Una fracció és un nombre.
- ☐ Una fracció són dos nombres.
- ☐ Una fracció és una relació entre dos nombres.

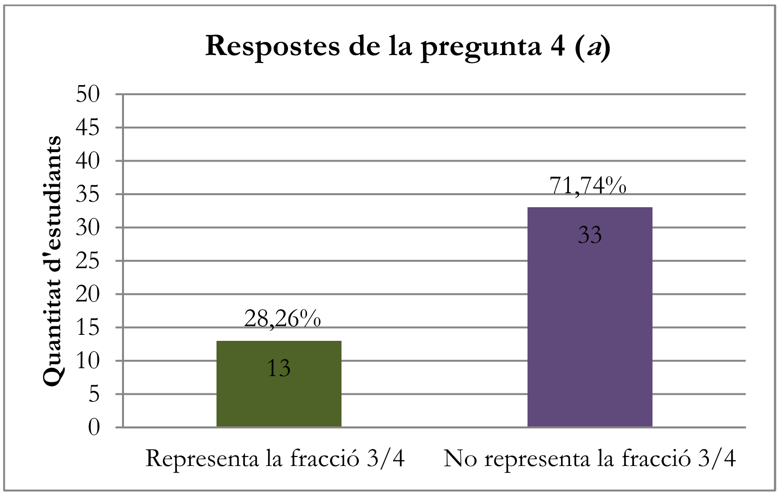
Figura 5.2. Pregunta 2 del qüestionari de fraccions.

La quantitat i percentatge d'estudiants que ha escollit cada opció o opcions de la pregunta 2 es mostren al gràfic de la figura 5.3. Dels quaranta-sis estudiants no n'hi ha cap que hagi escollit l'opció que una fracció són dos nombres. Aquesta opció és l'única que és incorrecte, per tant, tots els estudiants han marcat opcions correctes. Vuit estudiants (17,39%) han dit que una fracció és un nombre i vint-i-nou (63,04%) que una fracció és una relació entre dos nombres. Hi ha hagut nou estudiants (19,57%) que han escollit les dues opcions, que una fracció és un nombre i que és una relació entre dos nombres. L'opció més triada de totes les possibles respostes d'aquesta pregunta ha estat que una fracció és una relació entre dos nombres.

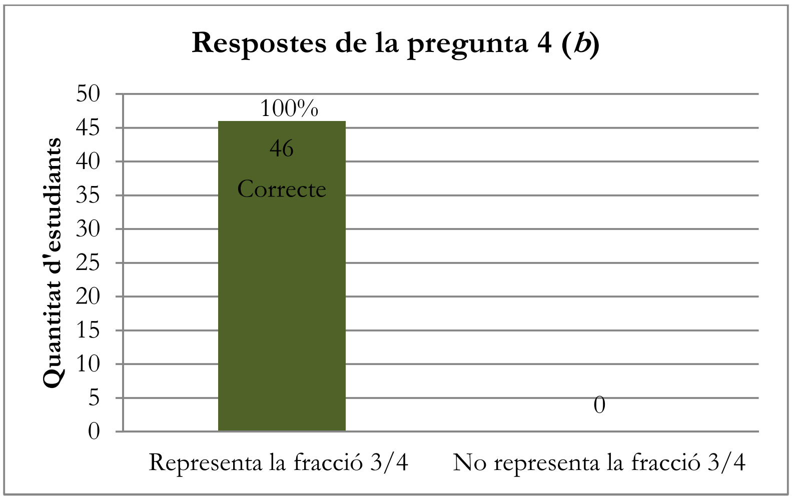


4.Digues quines de les imatges següents representen ¾. Explica perquè ho representen o perquè no:

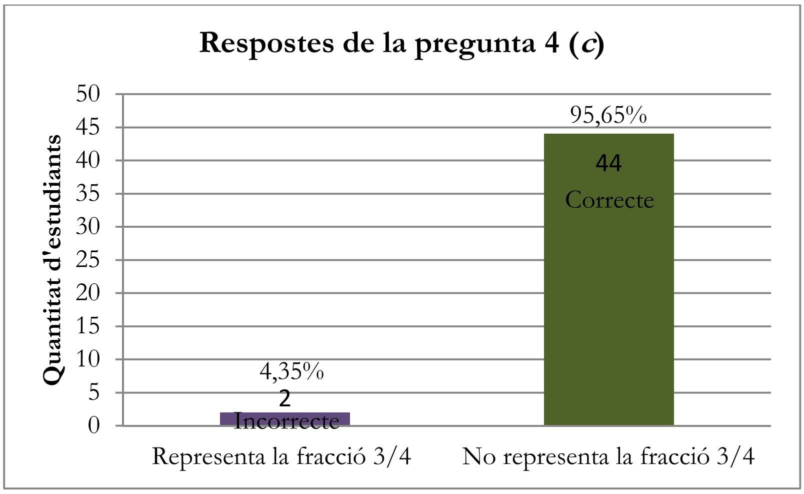




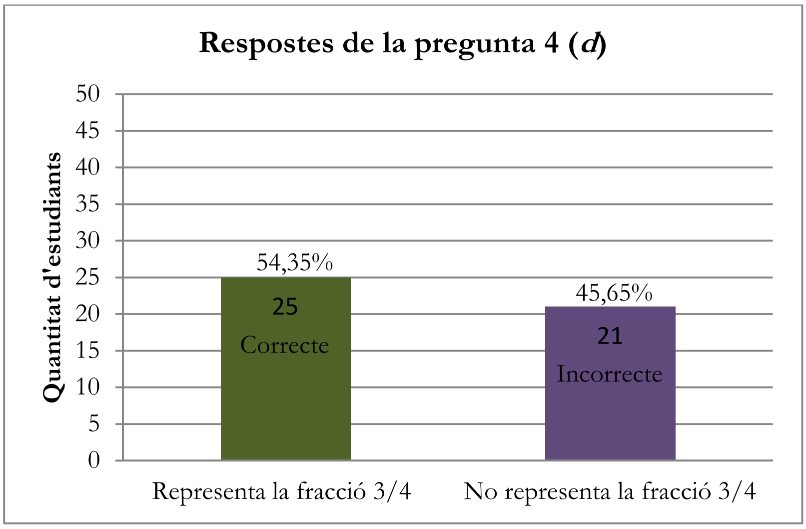
Respostes de la pregunta 4 (*a*)	**Justificació de la resposta**		**Quantitat d'estudiants**
Representa la fracció 3/4 (Correcta)	La unitat està dividida en 4 parts iguals		1
		i se n'agafen 3	4
	La unitat està dividida en 4 parts que tenen la mateixa "mida"		5
		i se n'agafen 3	1
	L'àrea ombrejada correspon a 3/4 del total		2
No representa la fracció 3/4 (Incorrecta)	La unitat no està dividida en 4 parts iguals		24
	Dues parts són d'una mida i forma diferent de les altres dues/Les parts no tenen la mateixa "mida"		3
	No ho justifiquen		6


Respostes de la pregunta 4 (b)
Quantitat d'estudiants
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
100%
46
Correcte
0
Representa la fracció 3/4
No representa la fracció 3/4

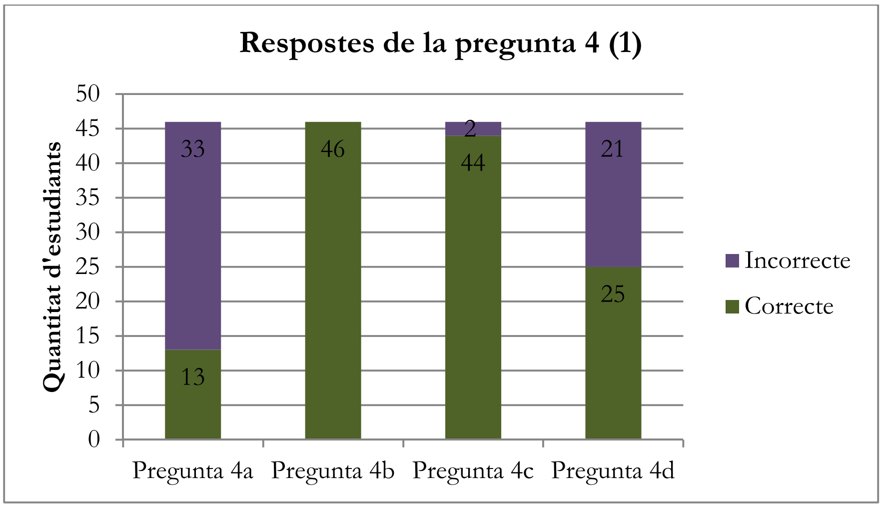
Respostes de la pregunta 4 (*b*)	Justificació de la resposta		Quantitat d'estudiants
Representa la fracció 3/4 (Correcta)	La unitat està dividida en 4 parts iguals		17
		i se n'agafen 3	23
	La unitat està dividida en 4 parts que tenen la mateixa "mida"		1
		i se n'agafen 3	2
	L'àrea ombrejada correspon a 3/4 del total		3



Respostes de la pregunta 4 (c)	Justificació de la resposta	Quantitat d'estudiants
Representa la fracció 3/4 (Incorrecta)	La unitat està dividida en 4 parts de la mateixa "mida" i se n'agafen 3	1
	L'àrea ombrejada correspon a 3/4 del total	1
No representa la fracció 3/4 (Correcta)	La unitat no està dividida en 4 parts iguals	26
	Les parts no tenen la mateixa "mida"	9
	No ho justifiquen	9



Respostes de la pregunta 4 (*d*)	Justificació de la resposta	Quantitat d'estudiants
Representa la fracció 3/4 (Correcta)	La unitat està dividida en 4 parts iguals	6
	La unitat està dividida en 4 parts iguals i se n'agafen 3	13
	La unitat està dividida en 4 parts que tenen la mateixa "mida"	3
	La unitat està dividida en 4 parts que tenen la mateixa "mida" i se n'agafen 3	1
	L'àrea ombrejada correspon a 3/4 del total	2
No representa la fracció 3/4 (Incorrecta)	La unitat no està dividida en 4 parts iguals	13
	Les parts no tenen la mateixa "mida"	3
	No ho justifiquen	5



Taula 5.6. Quantitat de respostes correctes de cada apartat.

Apartat	Forma de les parts del rectangle	Àrea de les parts del rectangle	Quantitat de respostes correctes	Percentatge de respostes correctes
Apartat (*a*)	Diferent	Igual	13	28,26%
Apartat (*b*)	Igual	Igual	46	100%
Apartat (*c*)	Diferent	Diferent	44	95,65%
Apartat (*d*)	Diferent	Igual	25	54,35%

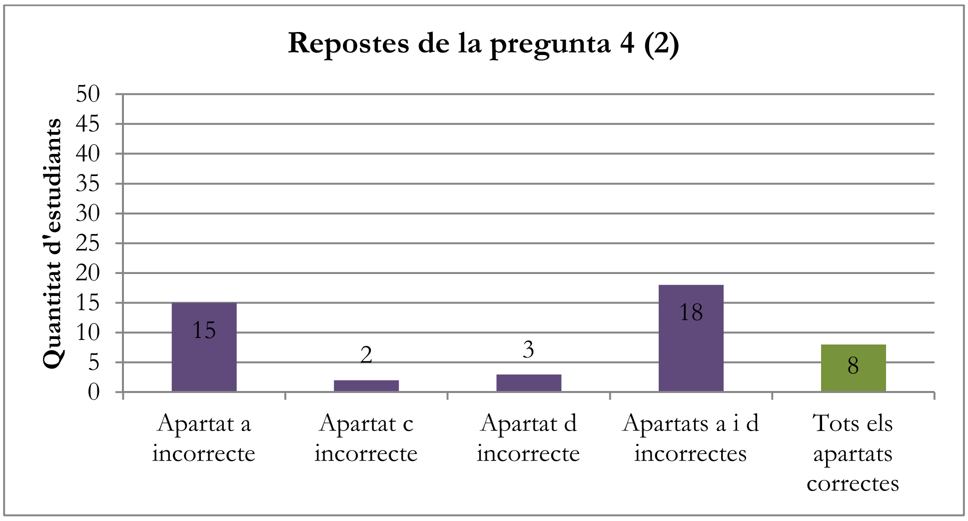
Els apartats que més estudiants han resolt correctament són els apartats (*b*) i (*c*) i precisament són els apartats en que forma i àrea de les parts és igual o forma i àrea de les parts és diferent. En l'apartat (*b*) hi ha quatre rectangles congruents (mateixa àrea i mateixa forma) i tots els estudiants l'han contestat correctament. En l'apartat (*c*) hi ha quatre rectangles que no tenen la mateixa àrea ni la mateixa forma i només dos estudiants s'han equivocat en contestar aquest apartat.

En els apartats (*a*) i (*d*) és on els estudiants han comès més errors. En aquests apartats és on les parts del rectangle no tenen la mateixa forma tot i tenir la mateixa àrea. L'apartat (*a*) és en el que més s'han equivocat i és el que la forma de les parts varia més ja que hi ha rectangles i triangles mentre que en el (*d*) totes les parts són triangles.

Observant només si la forma de les parts és igual o diferent, l'únic apartat que tots els estudiants han resolt correctament és quan la forma de les parts és igual: l'apartat (*b*).

Els estudiants han comès més errors quan el rectangle s'ha dividit en quatre parts amb la mateixa àrea però amb forma diferent i menys errors quan el rectangle s'ha dividit en parts congruents o parts amb àrea i forma diferent. És a dir, els estudiants han fet menys errors quan l'àrea i la forma de les parts són iguals o totes dues són diferents.

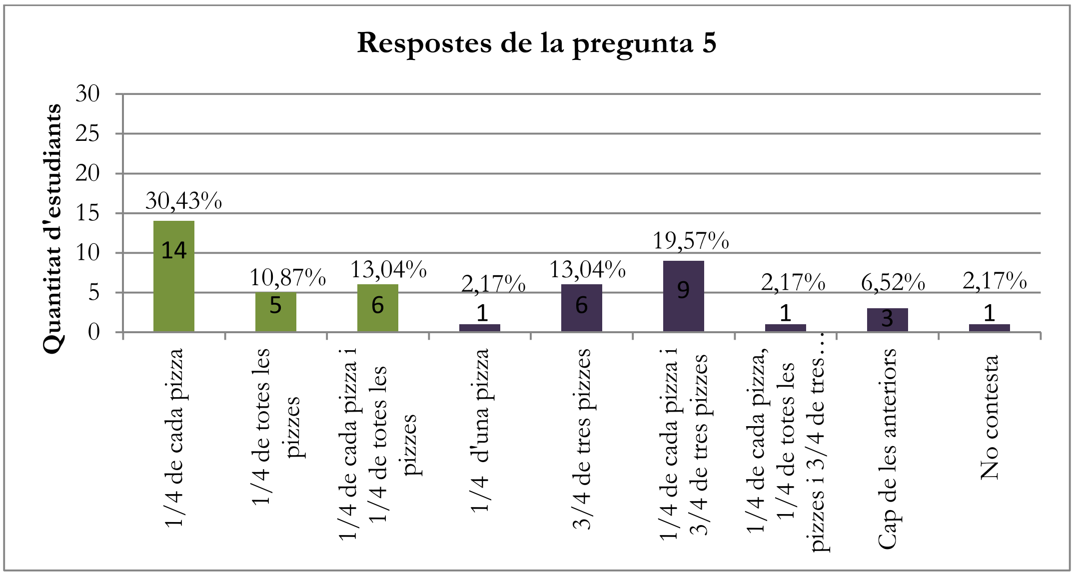
A més d'observar els resultats correctes i incorrectes per apartat s'han realitzat grups segons el nombre d'apartats que han respost erròniament (vegeu figura 5.10). Com es pot observar en el gràfic de la figura 5.10 hi ha vint estudiants que només s'han equivocat en un sol apartat (*a*, *c* i *d*), divuit que s'han equivocat en dos apartats (*a* i *d*) i vuit que no s'han equivocat en cap apartat. Es pot veure que no hi ha cap estudiant que s'hagi equivocat en tres o quatre apartats.



	Justificació	(a)	(b)	(c)	(d)
Justificacions de que la imatge representa 3/4	La unitat està dividida en parts iguals	10,87%	86,96%	0,00%	41,30%
	La unitat està dividida en parts que tenen la mateixa "mida"	13,04%	6,52%	2,17%	8,70%
	L'àrea ombrejada correspon a 3/4 del total	4,35%	6,52%	2,17%	4,35%
Justificacions de que la imatge no representa 3/4	La unitat no està dividida en parts iguals	52,17%	0,00%	56,52%	28,26%
	La unitat no està dividida en parts que tenen la mateixa "mida"	6,52%	0,00%	19,57%	6,52%
	No ho justifiquen	13,04%	0,00%	19,57%	10,87%

5.Repartim 3 pizzes entre 4 persones, cada persona tindrà: (Marca l'opció o opcions que consideres correctes)

- ☐ ¼ d'una pizza
- ☐ ¼ de cada pizza
- ☐ ¾ de tres pizzes
- ☐ ¼ de totes les pizzes
- ☐ Cap de les anteriors


Respostes de la pregunta 5
Quantitat d'estudiants
30
25
20
15
10
5
0
30,43%
14
10,87%
5
13,04%
6
2,17%
1
13,04%
6
19,57%
9
2,17%
1
6,52%
3
2,17%
1
1/4 de cada pizza
1/4 de totes les pizzes
1/4 de cada pizza i 1/4 de totes les pizzes
1/4 d'una pizza
3/4 de tres pizzes
1/4 de cada pizza i 3/4 de tres pizzes
1/4 de cada pizza, 1/4 de totes les pizzes i 3/4 de tres…
Cap de les anteriors
No contesta

5.1.5 Anàlisi de dades de la pregunta 7

A la figura 5.13 es mostra la pregunta 7 on els estudiants de mestre han hagut de dir com explicarien a un nen que no es pot sumar 1/2 pizza gran amb 1/2 pizza petita.

7. Com explicaries a un nen que no es pot sumar ½ de pizza gran amb ½ de pizza petita?

Figura 5.13. Pregunta 7 del qüestionari de fraccions

Les respostes d'aquesta pregunta s'han analitzat des de dues perspectives. En primer lloc, s'han analitzat segons el raonament que utilitzen els estudiants per explicar que no es pot sumar mitja pizza gran amb mitja pizza petita, i després, s'analitzen segons les representacions que els estudiants han dit que utilitzarien a fi de que els alumnes entenguessin que no es pot realitzar aquesta suma.

Anàlisi de les respostes segons el raonament que utilitzen els estudiants per explicar que no es pot sumar mitja pizza gran amb mitja pizza petita

Les respostes dels estudiants segons el raonament que utilitzen per explicar que no es pot realitzar la suma de les mitges pizzes s'han agrupat en tres categories: Unitats de "mida" diferent (A), Parts de "mida" diferent (B) i Altres (C) (vegeu taula 5.8). Hi ha estudiants que han donat explicacions en una única categoria, mentre d'altres n'han donat en dues. A la taula 5.8 es mostra la quantitat d'estudiants que han elaborat respostes en cada una o més d'una de les categories.

Taula 5.8. Classificació en categories de les respostes de la pregunta 7 segons els raonaments dels estudiants.

Codi	**Categories**	**Quantitat d'estudiants**
A	Unitats de "mida" diferent	19
B	Parts de "mida" diferent	16
C	Altres	3
A i B	Unitats de "mida" diferent i Parts de "mida" diferent	8

A continuació s'exposen les característiques que defineixen cada categoria a la vegada que es presenten exemples determinats de les respostes d'estudiants que formen part d'una categoria o de més d'una.

Unitats de "mida" diferent (A)

En aquesta categoria s'han considerat les respostes de dinou estudiants que han fet referència al "tamany", a la "mida" o a la "superfície" de les dues pizzes. Tots els estudiants d'aquesta categoria han dit que les mitges pizzes no es poden sumar perquè les pizzes tenen mides diferents. Només dos estudiants han parlat d'unitats per referir-se a les pizzes, els demés parlen directament de les pizzes. Hi ha dos d'aquests dinou estudiants que afegeixen que les fraccions no són equivalents. Aquesta explicació no és correcta ja que si s'agafen unitats de la mateixa mida aleshores es poden sumar fraccions representades en aquestes unitats encara que no siguin equivalents.

Parts de "mida" diferent (B)

En aquesta categoria es contemplen les respostes dels setze estudiants que han explicat que no es pot realitzar la suma perquè les parts que se sumen no tenen el mateix "tamany" o no tenen la mateixa "mida". Tres d'aquests setze estudiants han explicat, a més, que si ajuntes la meitat de la pizza petita amb la meitat de la pizza gran no obtens una pizza sencera "ben feta". Hi ha tres estudiants que també han explicat que no es pot realitzar la suma perquè no es poden sumar diferents proporcions i un estudiant que diu que les parts no són equivalents.

Altres (C)

Les respostes de tres estudiants s'han inclòs en aquesta categoria pel fet que no compleixen els criteris per estar a les altres tres categories. Un estudiant ha contestat que sí que es poden sumar les dues mitges pizzes. El segon estudiant ha comentat que no es pot sumar la meitat d'una pizza gran amb una meitat de pizza petita però no dóna cap justificació respecte a la mida de la unitat ni a la mida de les parts, sinó que diu que tenen diferents denominadors. Aquesta resposta no és correcta ja que precisament les dues meitats tenen iguals denominadors. El tercer estudiant diu que no podem sumar la meitat de pizza gran amb la meitat de pizza petita perquè no podríem dir que hem menjat una pizza.

Unitats de "mida" diferent (A) i Parts de "mida" diferent (B)

Vuit estudiants formen part d'aquesta categoria, en les seves respostes han explicat que no es pot sumar mitja pizza gran amb mitja pizza petita perquè les pizzes no són de la mateixa "mida" o "tamany" i les parts tampoc. Un d'aquests estudiants ha fet referència a que les unitats no són iguals. Un altre estudiant com en la categoria anterior parla de proporcions, en aquest cas diu que en proporció, a la pizza gran sempre hi hauria més pizza que a la petita. En aquesta categoria hi ha un estudiant que realitza una explicació incorrecta dient que "*la possibilitat és fer el mcm*" després de comentar que no es poden sumar perquè les pizzes i les parts tenen "mida" diferent.

Anàlisi de les respostes segons les representacions emprades pels estudiants per explicar que no es pot sumar mitja pizza gran amb mitja pizza petita

En les respostes dels estudiants es donen diferents representacions perquè l'alumne entengui perquè no es pot sumar mitja pizza gran amb mitja pizza petita. En totes les respostes es proposen explicacions teòriques, en algunes respostes es parla de fer alguna representació gràfica, d'utilitzar exemples en contextos reals (diferents de les pizzes) o bé d'utilitzar objectes. Les respostes de la pregunta 7 s'han classificat en diverses categories segons la manera que els estudiants han proposat per explicar que no es pot fer la suma de l'enunciat de la pregunta 7. S'han enumerat les categories en funció de la quantitat de representacions que els estudiants han dit que utilitzarien i segons si proposen o no explicacions verbals (vegeu taula 5.9).

Taula 5.9. Categories de les respostes de la pregunta 7 segons les representacions que proposen els estudiants per explicar a un nen que no es pot sumar $\frac{1}{2}$ de pizza gran amb $\frac{1}{2}$ de pizza petita.

	Explicacions verbals	**Representacions gràfiques**	**Contextos reals**	**Objectes**	**Quantitat d'estudiants**
Categoria 1					22
Categoria 2					16
Categoria 3					3
Categoria 4					1
Categoria 5					2
Categoria 6					1

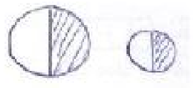
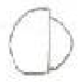
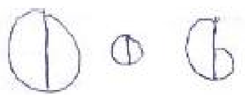
Nota: En aquesta taula no s'ha inclòs l'estudiant que ha dit que es poden sumar les meitats de les pizzes

Explicacions verbals (Categoria 1)

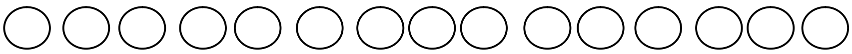
Aquesta categoria contempla les vint-i-dues respostes dels estudiants que només expliquen o diuen que explicarien que no es pot fer la suma de 1/2 pizza gran amb 1/2 pizza petita. És la categoria que inclou més respostes i l'única on en les respostes no es fa menció de cap representació gràfica, ni context real ni tampoc l'ús d'objectes. Els estudiants només ho explicarien a partir d'explicacions teòriques. Dos dels vint-i-dos estudiants d'aquesta categoria a més de fer explicacions proposen fer preguntes per fer adonar als alumnes que no es menja la mateixa quantitat de pizza amb mitja pizza gran que amb mitja pizza petita. Un dels dos estudiants, concretament preguntaria "*si creuen que menjaran la mateixa quantitat de pizza si mengessin 1/2 pizza gran i 1/2 de la petita*". I el segon estudiant proposa que ens repartim 1/2 pizza gran i 1/2 pizza petita cadascú i "*quan la mare ens pregunta arribant a casa quanta pizza hem menjat, què li diríem? 1/2 pizza gran i 1/2 pizza petita, perquè no podríem dir que hem menjat 1 pizza. Si diguéssim de quina mida li diríem, de la gran o de la petita si no seria cap de les mides que hem menjat?*"

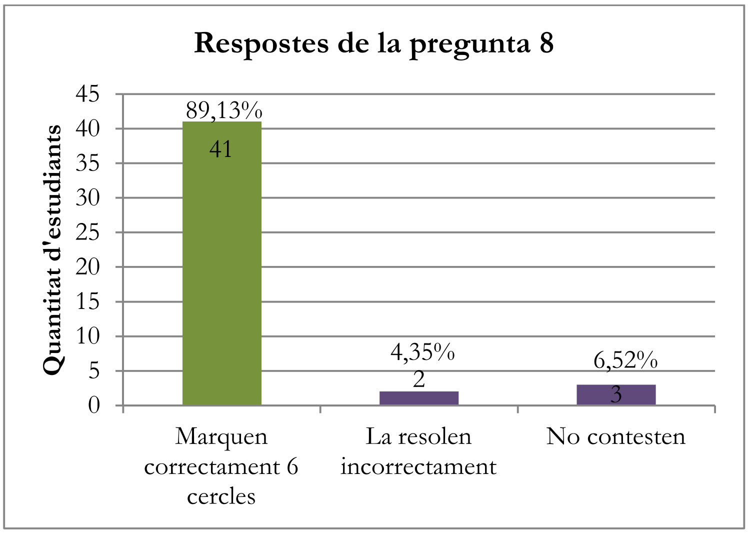
Explicacions i representacions gràfiques (Categoria 2)

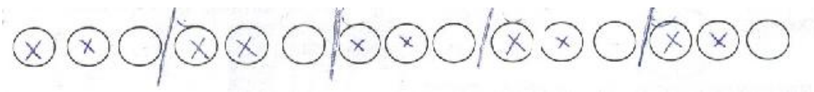
En aquesta categoria s'han inclòs les setze respostes que a més d'explicar perquè no es pot fer la suma de 1/2 pizza gran amb 1/2 pizza petita han fet alguna representació gràfica o han dit que ho explicarien fent una representació gràfica. És la segona categoria amb més respostes. Dels setze estudiants d'aquesta categoria, onze han fet representacions que s'han agrupat en tres grups (vegeu taula 5.10).

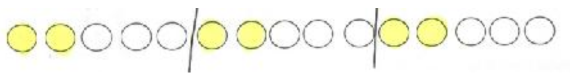
Representació	**Explicació de la representació**	**Quantitat d'estudiants**
	Es representa la pizza gran i la pizza petita dividida en meitats.	9
	Es representa la meitat de la pizza gran i la meitat de la pizza petita i es col·loquen de costat per veure que no s'obté una pizza sencera.	1
	Hi ha les dues representacions anteriors, la pizza gran i la pizza petita dividida en meitats i la meitat de pizza gran i de pizza petita posades de costat.	1

8.Assenyala les 2/5 parts d'aquest conjunt?







Resolució de l'estudiant	**Categoria**	**Quantitat d'estudiants**
	Marca el resultat directament (PRO1)	26
	Interpretació de la fracció com a comparació part-tot (PRO2)	10
		1
$\frac{2}{5}$ de 15 (interpretació de la fracció com a operador)	Interpretació de la fracció com a operador (PRO3)	2
$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$	Interpretació de la fracció com a raó (PRO4)	1
		1

Interpretació de la fracció com a comparació part-tot (PRO2)

Per assenyalar les 2/5 parts dels quinze cercles els onze estudiants d'aquesta categoria es basen en la interpretació de fracció com a comparació part-tot amb un grup d'objectes, en aquest cas cercles. Hi ha dos processos diferents que els estudiants han seguit (vegeu taula 5.11), deu estudiants fan cinc grups amb els quinze cercles i obtenen grups de tres cercles. Com que cal assenyalar les 2/5 parts, pinten dos grups de tres cercles. L'altre estudiant fa tres grups de cinc cercles i pinta les 2/5 parts de cada grup de cinc cercles, és a dir dos cercles de cada grup. En el primer cas es divideix el 15 entre 5 des del significat de la divisió partitiva i en el segon des del significat de la divisió quotativa.

Interpretació de la fracció com a operador (PRO3)

Dos estudiants han interpretat la fracció 2/5 com a operador, multipliquen el 15 per 2 obtenint 30 i després el divideixen per 5 o bé divideixen el 15 entre 5, i el 3 que s'obté el multipliquen per 2. Aquest dos estudiants primer han realitzat el càlcul i un cop han obtingut el 6 ho han representat.

Interpretació de la fracció com a raó (PRO4)

Només dos estudiants han interpretat la fracció 2/5 com a raó per calcular les 2/5 parts dels quinze cercles. Un dels dos estudiants ha buscat la fracció equivalent a 2/5 amb denominador 15. L'altre estudiant ha anat buscant relacions amb la mateixa raó 2:5 però en comptes de 5 amb el 15 obtenint 6:15 (vegeu taula 5.11).

5.1.7 Anàlisi de dades de la pregunta 9

A la figura 5.17 es mostra la pregunta 9 on els estudiants de mestre han hagut de situar la fracció 12/5 a la recta numèrica on hi ha situats el 0 i el 12.

9.Col·loca la fracció 12/5 a la següent recta numèrica:

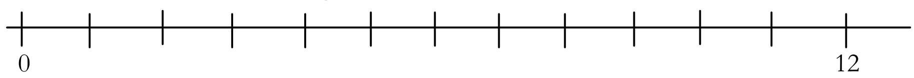
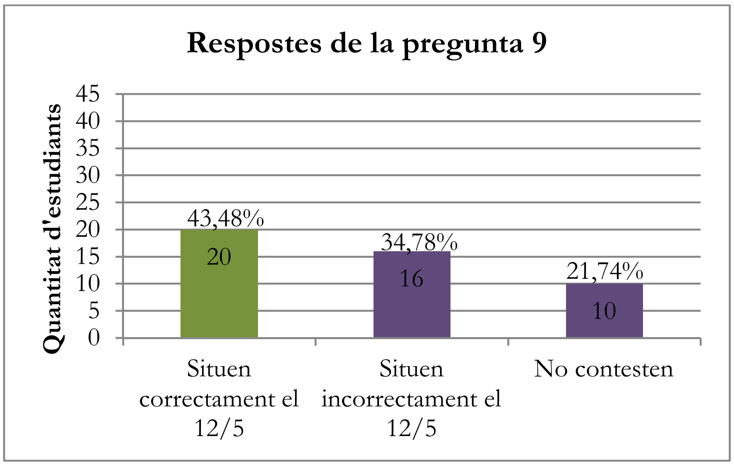
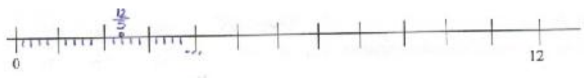
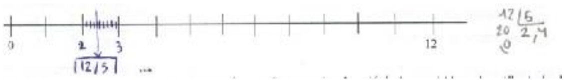
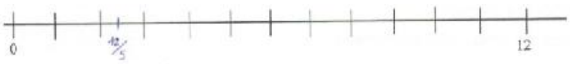
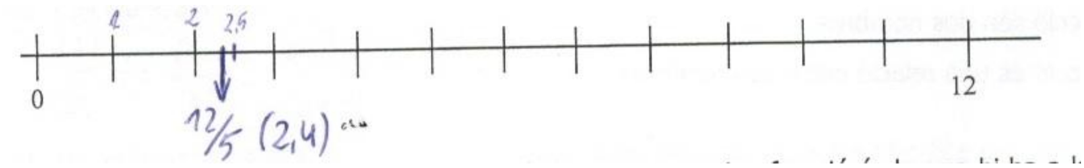


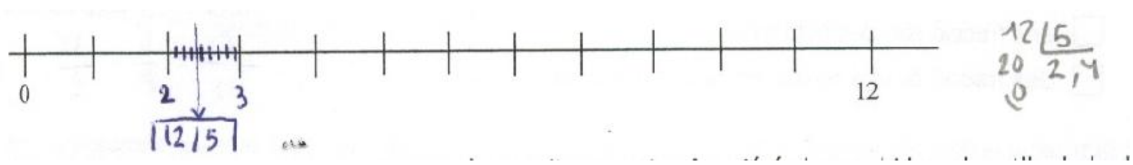
Figura 5.17. Pregunta 9 del qüestionari de fraccions.

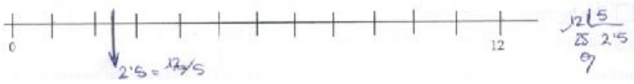
La quantitat de respostes correctes, incorrectes i no contestades de la pregunta 9 es mostren al gràfic de la figura 5.18. Es pot apreciar com vint estudiants (43,48%), una mica menys de la meitat del grup, han col·locat correctament la fracció 12/5 a la recta numèrica, setze estudiants (34,78%) han col·locat incorrectament la fracció 12/5 i deu estudiants (21,74%) no han contestat la pregunta.



Procés seguit	Explicació del procés	Quantitat d'estudiants
	Ha dividit cada segment en cinc parts, cada marca representa 1/5. Marca 12/5.	1
	Han fet la divisió 12:5 = 2,4 i han situat el 2,4 a la recta numèrica.	10
	Han col·locat correctament la fracció 12/5 però no es veu com ho han realitzat.	9





Resposta incorrecta	Explicació de la resposta incorrecta	Quantitat d'estudiants
	Situar la fracció 12/5 en el 2,5 (Resposta 1)	2
	Situar la fracció 12/5 en el 3 (Resposta 2)	5
	Situar la fracció 12/5 en el 4 (Resposta 3)	2

Situar la fracció 12/5 prop del 5 (Resposta 4) — 1

Situar la fracció 12/5 en el 5 (Resposta 5) — 5

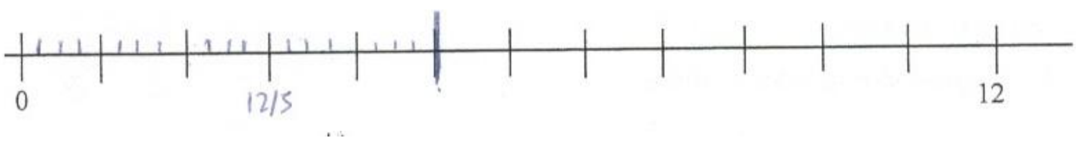
Situar la fracció 12/5 en el 12 (Resposta 6) — 1

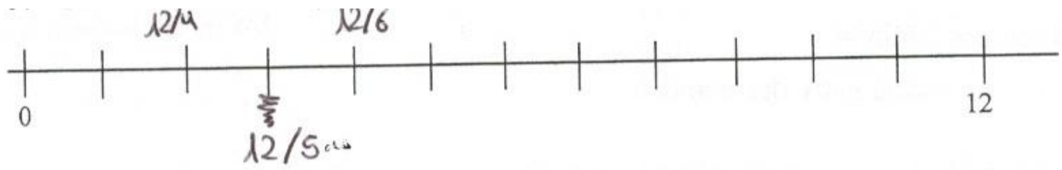
ealitzat

$\frac{12}{5}$ en e

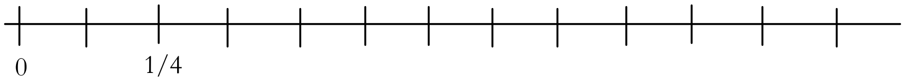
ica.

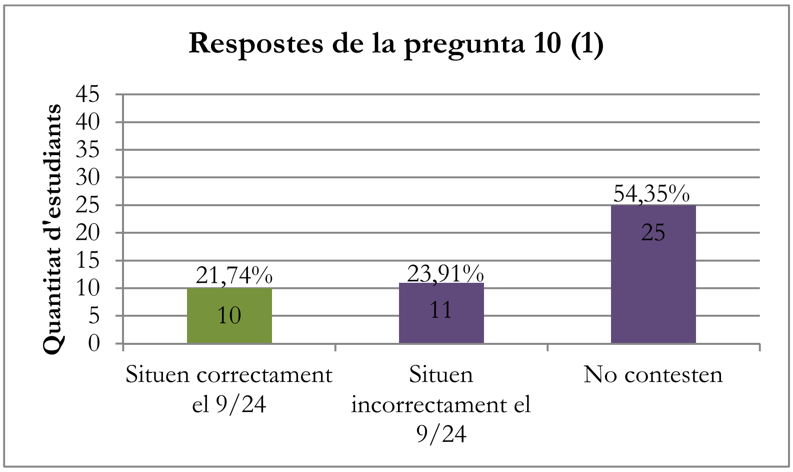
$\frac{12}{5}$ en e

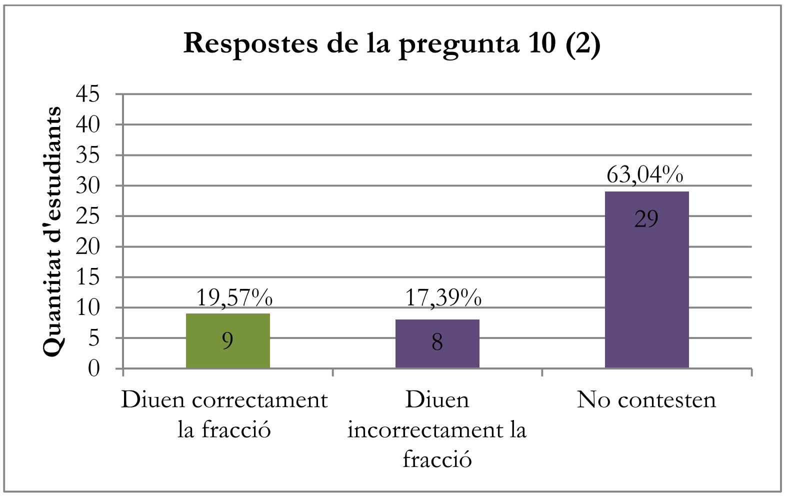


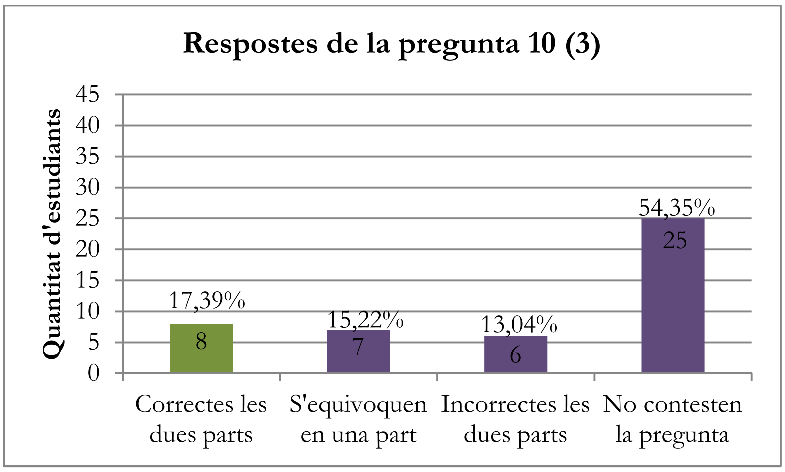

12/4
12/6
0
12
12/5

10.Col·loca 9/24 a la recta numèrica següent i digues quina fracció és la que hi ha a la ratlla de la dreta de la fracció 9/24.

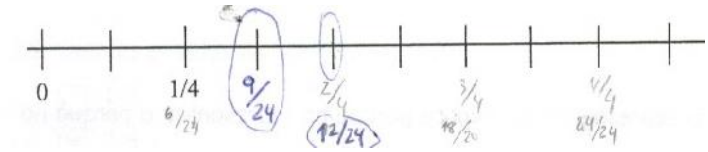
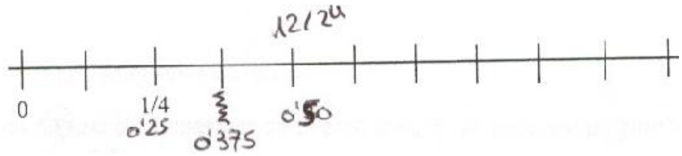
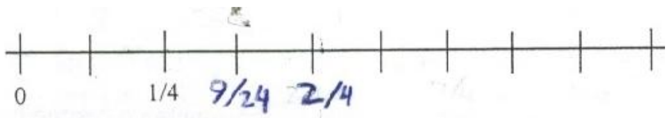




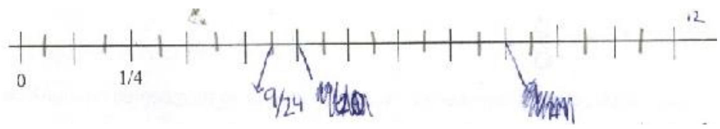
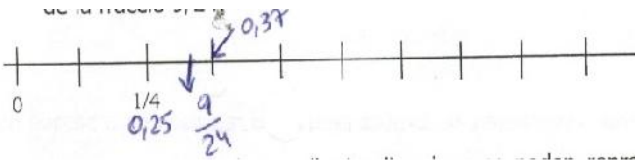
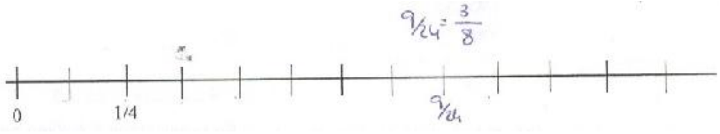
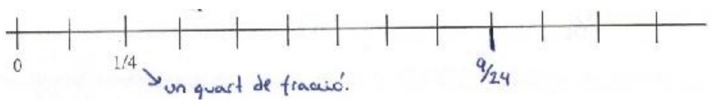

Respostes de la pregunta 10 (2)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
19,57%
9
17,39%
8
63,04%
29
Diuen correctament la fracció
Diuen incorrectament la fracció
No contesten


Respostes de la pregunta 10 (3)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
17,39%
8
15,22%
7
13,04%
6
54,35%
25
Correctes les dues parts
S'equivoquen en una part
Incorrectes les dues parts
No contesten la pregunta

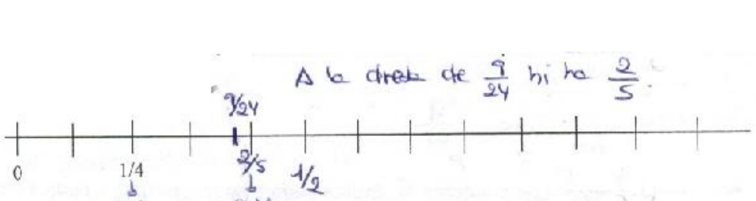
$\frac{9}{24}$.

Resolució de la pregunta 10	Categoria	Quantitat d’estudiants
	Mitjançant fraccions equivalents (R1)	5
	Mitjançant nombres decimals (R2)	2
	Marca el resultat directament (R3)	3

Cin
frac
$\frac{1}{4}$ a

Resposta incorrecta	Explicació de la resposta incorrecta	Quantitat d'estudiants
	Situar la fracció 9/24 en el 9/16 (Resposta 1)	4
	Situar la fracció 9/24 entre 1/4 i 3/8 (Resposta 2)	2
	Situar la fracció 9/24 entre 3/8 i 1/2 (Resposta 3)	3
	Situar la fracció 9/24 a l'1 (Resposta 4)	1
	Situen la fracció 9/24 en el 9/8 (Resposta 5)	1

A la dreta de $\frac{9}{24}$ hi ha $\frac{2}{5}$.



$$\begin{array}{l|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0,4 \\ 0 & \end{array}$$

Situar la fracció 9/24 a l'1 (Resposta 4)

Només hi ha un estudiant que ha col·locat la fracció 9/24 a l'1. L'ha col·locat directament i per tant no es pot saber quin procés ha seguit. Tampoc diu quina és la fracció de la ratlla de la dreta de la fracció 9/24.

Situar la fracció 9/24 en el 9/8 (Resposta 5)

En aquest cas també només hi ha un estudiant. Tot i que marca la fracció directament sembla que ha considerat cada marca de la recta, és a dir cada vuitè com 1/24. Aquest estudiant tampoc diu quina és la fracció de la ratlla de la dreta de la fracció 9/24.

Errors comesos en situar la fracció 9/24 a la recta numèrica

Els estudiants que s'han equivocat en situar la fracció 9/24 a la recta numèrica han realitzat errors de diferent naturalesa:

- Interpretar incorrectament les unitats de la recta numèrica (Resposta 1, Resposta 3 i Resposta 5): Hi ha estudiants que han interpretat la meitat del segment marcat com a 1/24 en comptes de 1/16 i el segment de mida 1/8 com 1/24. Hi ha un estudiant que ha considerat que cada segment marcat té un valor de 0,1 en comptes de 0,125.

- Ordenar incorrectament fraccions (Resposta 2): Hi ha hagut un estudiant que ha situat la fracció 1/8 després de la fracció 1/4 tot i ser més petita que aquesta fracció. Amb aquest fet, aquest estudiant demostra manca de sentit numèric i dificultats per ordenar fraccions i per situar nombres a la recta numèrica.

- No trobar el nombre decimal correcte (Resposta 3): Hi ha un estudiant que diu que 1/4 = 0,2 en comptes de 0,25 i que 3/8 = 0, 37 en comptes de 0,375. Aquest error pot ser degut a realitzar errors en dividir nombres enters amb resultats decimals i realitzar els càlculs sense calculadora.

5.1.9 Anàlisi de dades de la relació entre la pregunta 9 i la pregunta 10

En demanar a la pregunta 9 i 10 que se situïn fraccions a la recta numèrica es poden analitzar les relacions entre les dades d'aquestes dues preguntes.

Hi ha alguns errors que es repeteixen tant en les respostes de la pregunta 9 com de la pregunta 10: no dividir correctament nombres enters amb resultat decimal, interpretar incorrectament la unitat en la recta numèrica i ordenar incorrectament fraccions a la recta numèrica. Aquest fet té sentit ja que en les dues preguntes s'havien de situar fraccions a la recta numèrica.

Hi ha estratègies que s'han utilitzat en les dues preguntes com ara utilitzar la correspondència de les fraccions amb els nombres decimals. En canvi, el fet d'utilitzar fraccions equivalents només s'ha utilitzat en la pregunta 10, aquest fet és degut a com s'ha donat cada recta numèrica, en la pregunta 9 la longitud de cada segment representa una unitat i a la pregunta 10 s'ha situat la fracció 1/4 al segon segment.

Hi ha més estudiants que no han contestat la pregunta 10, un 54,35% d'estudiants, respecte el 21,74% que no han contestat la pregunta 9. Gairebé hi ha el doble d'estudiants que han situat la fracció $\frac{12}{5}$ a la recta correctament (un 43,48%) que els que han situat correctament la fracció 9/24 (21,74%). En canvi hi ha més estudiants que s'han equivocat en col·locar la fracció 12/5 que en col·locar la fracció 9/24. Això pot ser degut al fet que hi ha més estudiants de la pregunta 10 que no han situat la fracció 9/24, en no col·locar-la no s'han pogut equivocar.

5.1.10 Anàlisi de dades i resultats de la pregunta 11

A la figura 5.29 es mostra la pregunta 11 on es presenten un seguit de situacions que els estudiants han de decidir si es poden representar amb una fracció i si és que sí, dir amb quina fracció.

11.Digues quines de les següents situacions es poden representar amb una fracció i en aquest cas, quina fracció correspon a la situació:

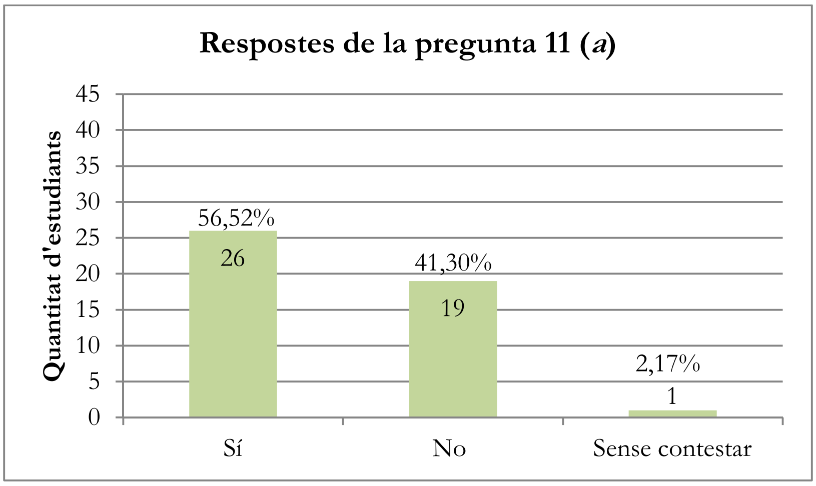
h. La Maria i en Martí fan l'operació següent: 8 ÷ 3.
i. Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més.
j. La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té.
k. D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar.
l. M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%.
m. A la meva classe hi ha 13 nens i 12 nenes.
n. He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.

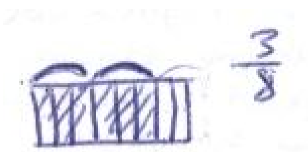
Figura 5.29. Pregunta 11 del qüestionari de fraccions

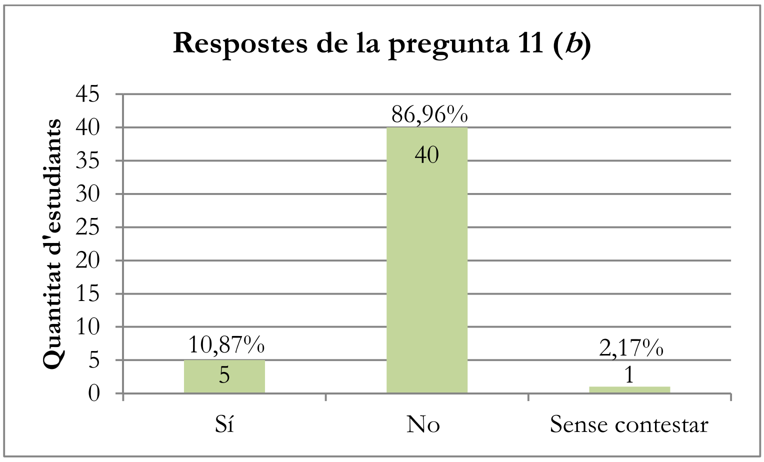
Les respostes d'aquesta pregunta es mostraran per apartats analitzant en cada situació les fraccions proposades.

Anàlisi de dades de l'apartat (*a*)

La situació proposada en aquest apartat és "La Maria i en Martí fan l'operació següent: 8 ÷ 3". La quantitat d'estudiants que han contestat sí, no, o que no han respost aquest apartat es mostra al gràfic de la figura 5.30. Poc més d'un 50% dels estudiants (vint-i-sis estudiants) han contestat que sí, que la situació es pot representar amb una fracció, dinou estudiants (41,30%) han dit que no, mentre que només un estudiant ha deixat aquest apartat sense contestar.


Respostes de la pregunta 11 (*a*)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
56,52%
26
41,30%
19
2,17%
1
Sí
No
Sense contestar


3
8



ıció es ot eseı

$\frac{3}{1}+\frac{2}{1}=\frac{5}{1}$ i $\frac{2}{3}$. C

ıed s qı e te

$\frac{3}{1}+\frac{2}{1}=\frac{5}{1}$ és

ccic

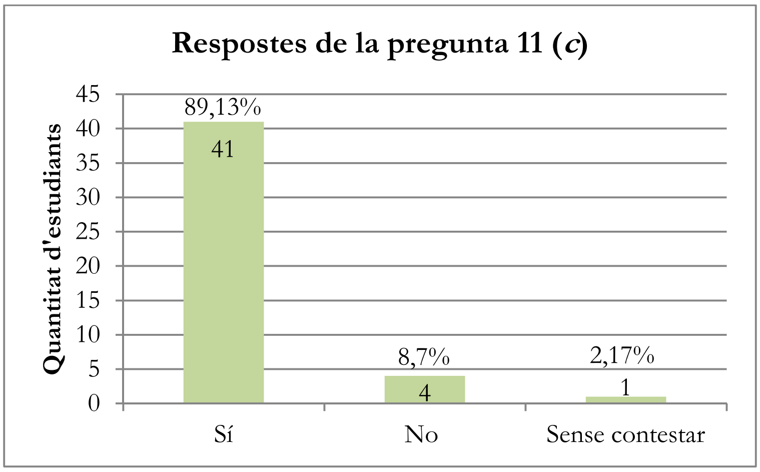
$\frac{2}{3}$ nc

De s

$\frac{3}{1}+\frac{2}{1}$

atre

$\frac{5}{1}$, tc

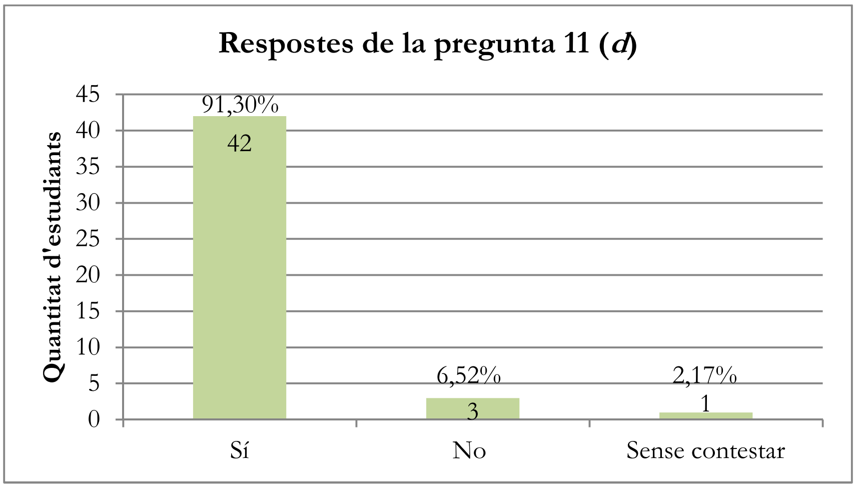


Codi	Grups	Quantitat d'estudiants
Grup c1	5/6 de 36	31
Grup c2	36 de 5/6	3
Grup c3	36 de $\frac{5}{36}$	1
Grup c4	$\frac{5}{36}$ $\frac{5}{6}$	4

etat

n e

$\frac{5}{6}$ 3


Respostes de la pregunta 11 (*d*)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
91,30%
42
6,52%
3
2,17%
1
Sí
No
Sense contestar

proposat els altres 41 estudiants s'han classificat en grups (vegeu taula 5.17). A continuació s'expliquen els exemples de cada grup amb més detall.

Taula 5.17. Classificació de les respostes dels quaranta-un estudiants que han dit que sí i que han proposat un exemple.

Codi	**Grups**	**Quantitat d'estudiants**
Grup d1	1/4	1
Grup d2	Fraccions equivalents a 3/4	40

1/4(Grup d1)

Un sol estudiant ha proposat com a exemple la fracció 1/4. Potser l'estudiant ha proposat la fracció 1/4 perquè un quart d'hora més tres quarts d'hora fan una hora, però això no ho sabem del cert. Com que aquesta fracció no representa directament l'enunciat de l'apartat (*d*), no es considera correcta.

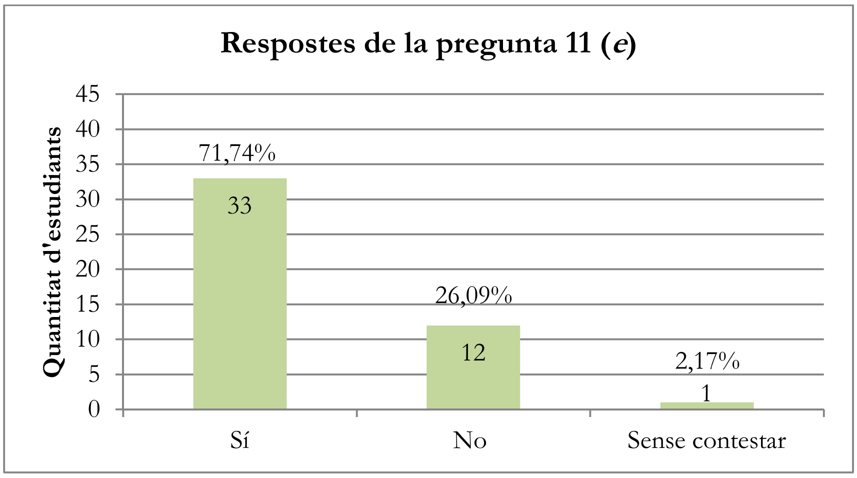
Fraccions equivalents a $\frac{3}{4}$ (Grup d2)

La majoria d'estudiants d'aquest grup, trenta-dos de quaranta, han proposat únicament la fracció 3/4. La resposta és correcta ja que aquesta fracció representa els tres quarts que es proposen a l'enunciat. D'aquests trenta-dos n'hi ha un que dibuixa un cercle dividit en quarts i on n'hi ha tres de pintats. Hi ha cinc estudiants que realitzen una resposta més completa i proposen 3/4 d'una hora o 3/4 de 60 minuts. Els tres estudiants restants proposen la fracció 45/60 i un d'ells proposa les dues fraccions, 45/60 = 3/4. Totes les opcions que s'han proposat es consideren correctes perquè representen la situació proposada a l'apartat 11 (*d*).

Anàlisi de dades de l'apartat (*e*)

La situació proposada en aquest apartat és "M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%". La quantitat d'estudiants que han contestat sí, no, o que no han respost aquest apartat es mostra al gràfic de la figura 5.35. Trenta-tres estudiants (71,74%) han dit que la situació proposada a l'enunciat es pot representar amb una fracció, dotze estudiants (26,09%) han dit que no i només un estudiants ha deixat la pregunta sense contestar.

Els dotze estudiants que han respost que no, no han fet cap explicació. Les respostes dels trenta-tres estudiants s'han classificat en grups segons la fracció que han proposat (vegeu taula 5.18). A continuació s'expliquen els exemples de cada grup amb més detall.



Codi	Grups	Quantitat d'estudiants
Grup e1	Fraccions equivalents a la fracció 25/100	30
Grup e2	3/4	1
Grup e3	25/10	1
Grup e4	$\frac{25/10}{\frac{25}{100}\cdot 10}$	1

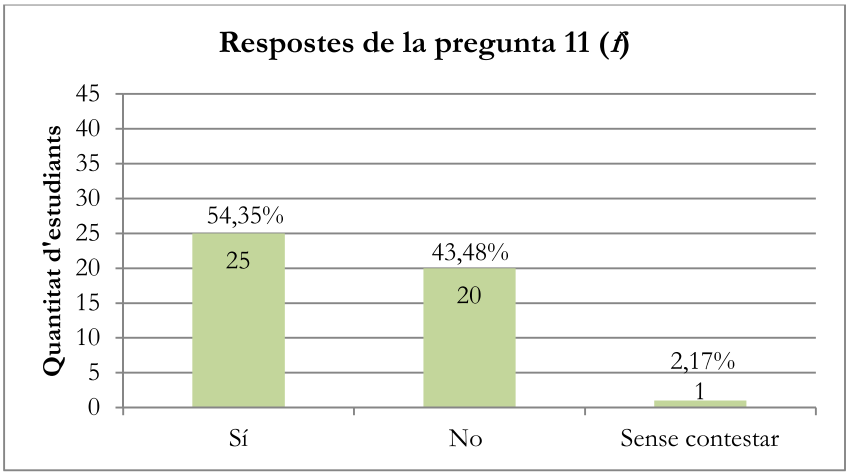
25/10
el 25 és
$\frac{25}{100}$ %.

$\frac{25}{100}$,

ni ha pc

$\frac{25}{100}$. 10 (

$\frac{25}{100}$. 10.



han fet cap explicació E

fraccions que representen

$\frac{13}{25}$ i $\frac{12}{25}$, $\frac{13}{25}+\frac{12}{25}$ i $\frac{13}{12}$. La

$\frac{13}{25}$ i $\frac{12}{25}$ aml

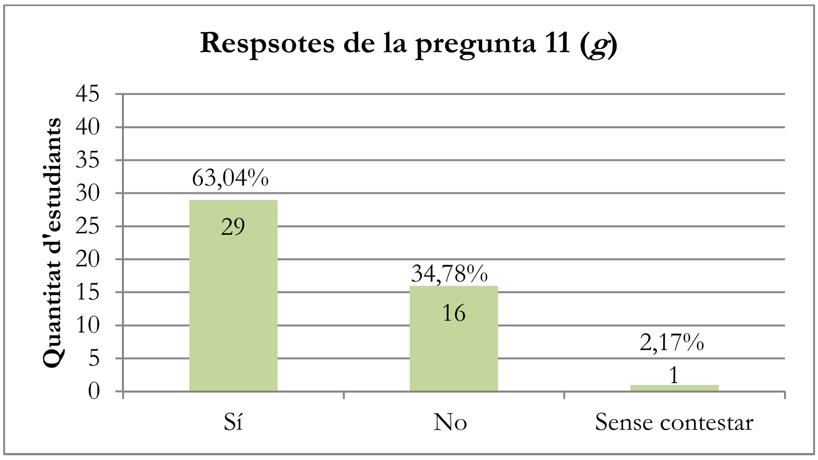
l'han prop

$\frac{13}{25}$ i $\frac{12}{25}$ sense ‹ › altra e

$\frac{13}{25}$ nen: $\frac{12}{25}$ nen‹

l.

$\frac{13}{25} + \frac{12}{25}$. Aq



Taula 5.19. Classificació de les respostes dels vint-i-nou estudiants que han dit que sí.

Codi	Grups	Quantitat d'estudiants
Grup g1	67/10	4
Grup g2	Fraccions amb valor 0,67	21
Grup g3	Fraccions amb valor 0,067	1
Grup g4	$\frac{13,4}{2}$	1

67/10 (Grup g1)

Només quatre estudiants han proposat la fracció 67/10. Aquesta fracció és correcta i correspon a la situació que s'ha proposat a l'enunciat de l'apartat.

Fraccions amb valor 0,67 (Grup g2)

Vint-i-un estudiants han proposat nombres amb resultat igual a 0,67. Quatre d'aquests vint-i-un estudiants han proposat la fracció 67/100 que en comptes de ser igual a 6,7 és igual a 0,67. Quinze estudiants han proposat el nombre $\frac{6,7}{10}$ que també és igual a 0,67. I els dos estudiants restants han proposat les dues fraccions $\frac{67}{100} = \frac{6,7}{10}$. Totes aquestes respostes són incorrectes perquè no són iguals a 6,7. A més, els nombres $\frac{6,7}{10}$ segons la definició de fracció de Lamon (2012) no seria una fracció perquè el numerador no és un nombre natural.

Fraccions amb valor 0,067 (Grup g3)

Un estudiant ha proposat $\frac{6,7}{100}$ com a fracció que representa la situació de l'apartat (*g*). Aquest nombre és igual a 0,067 i per tant no és igual a 6,7. A més, com en algunes respostes del grup 2, $\frac{6,7}{100}$ no és una fracció perquè no hi ha un nombre natural en el numerador.

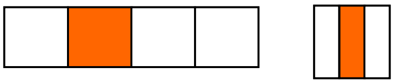
$\frac{13,4}{2}$ (Grup g4)

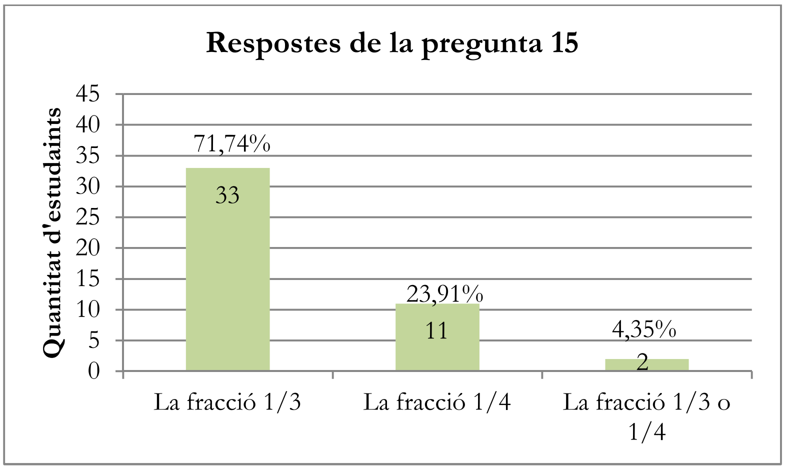
L'únic estudiant d'aquest grup ha buscat dos nombres que dividits donen 6,7, el 13,4 i el 2. La resposta que proposa és $\frac{13,4}{2}$ que és igual a 6,7 però que no està expressada com una fracció ja que el numerador no és un nombre natural.

5.1.11 Anàlisi de dades de la pregunta 15

A la figura 5.38 es mostra la pregunta 15 on es demana quina fracció de les que s'han dibuixat representa una quantitat més gran.

15.Quina fracció representa una quantitat més gran? Explica-ho.





Taula 5.20. Classificació en categories de les justificacions dels estudiants que han escollit la fracció 1/3.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
UNI1	Nombres decimals	5
UNI2	Aproximació a la unitat	6
UNI3	Aproximació a 1	2
UNI4	Parts de la unitat	9
UNI5	Denominadors	4
UNI6	Quantitat més gran	2
UNI7	Comparació de regions	3
UNI8	No ho justifica	2

Nombres decimals (UNI1)

En aquesta categoria s'han considerat els cinc estudiants que han dividit el numerador entre el denominador de les fraccions 1/3 i 1/4 per trobar la representació en nombres decimals. Tots cinc han calculat que 1/4 = 0,25 i quatre d'ells que 1/3 = $0,\widehat{33}$, el cinquè ha calculat 2/3 =0,6. Quatre dels estudiants per tant, han comparat els nombres decimals 0,25 i $0,\widehat{33}$ per decidir quina fracció és més gran sense tenir en compte la representació gràfica de les fraccions de l'enunciat. El cinquè estudiant ha comparat 0,25 i 0,6, no sabem perquè.

Aproximació a la unitat (UNI2)

Sis estudiants han dit que la fracció 1/3 representa una quantitat més gran perquè la fracció 1/3 s'acosta més a la unitat sencera o bé al total de la unitat. Han justificat de diferents maneres que la fracció 1/3 s'acosta més a la unitat sencera: l'àrea pintada s'acosta més a tota la unitat (dos estudiants), la regió que representa la fracció 1/3 està dividida en menys parts (dos estudiants), el denominador de 1/3 és més petit que el de la fracció 1/4 (un estudiant) i la regió on s'ha representat la fracció 1/3 és més petita que la regió on s'ha representat la fracció 1/4 (un estudiant).

Aproximació a 1 (UNI3)

Dos estudiants formen part d'aquesta categoria. Els dos estudiants diuen que "*1/3 és més proper a 1 que 1/4*". Un dels dos estudiants a més diu que "*la segona perquè si dividíssim el mateix quadrat en 4 parts i agaféssim només 1 veuríem que és més petita*". Aquest estudiant està comparant les fraccions 1/3 i 1/4 sense tenir en compte la representació gràfica de les fraccions 1/3 i 1/4 que es proposa a l'enunciat.

Parts de la unitat (UNI4)

Aquesta categoria és la més nombrosa, conté els nou estudiants que han justificat que la fracció 1/3 és més gran que la fracció 1/4 fent referència a les parts amb què s'ha dividit la unitat. Tots nou estudiants han dit que com que la regió que representa la fracció 1/3 s'ha dividit en menys parts que la regió que representa la fracció 1/4, les parts són més grans.

Denominadors (UNI5)

En aquesta categoria hi ha quatre estudiants, són els que han justificat que la fracció 1/3 és més gran que 1/4 fent referència als denominadors. Dos estudiants han dit que si el denominador és més gran la fracció és més petita i els altres dos han dit que si el denominador és més petit la fracció és més gran. Dos estudiants d'aquesta categoria han esmentat que es poden comparar els denominadors perquè els numeradors són iguals. Els estudiants d'aquesta categoria no han tingut en compte com s'han representat gràficament les fraccions 1/3 i 1/4 a l'enunciat.

Quantitat més gran (UNI6)

Els dos estudiants d'aquesta categoria han justificat que la fracció 1/3 és més gran perquè amb 1/3 s'agafa una quantitat major. En aquest cas tampoc han tingut en compte les representacions que es proposen a l'enunciat.

Comparació de regions (UNI7)

En aquesta categoria hi ha tres estudiants, són els que han fet referència a les representacions gràfiques de 1/3 i 1/4 per decidir que la fracció 1/3 és més gran que 1/4. Dos estudiants fan referència a les representacions de l'enunciat i argumenten que en la representació de 1/3 hi ha més tros pintat. El tercer estudiant no se centra en les representacions de l'enunciat, dibuixa dos rectangles de la mateixa mida i hi representa les fraccions 1/3 i 1/4, en aquest cas quan s'agafa la mateixa regió diu que la fracció més gran és la fracció 1/3.

No ho justifica (UNI8)

Dos estudiants no han justificat l'elecció de la fracció 1/3. Un estudiant només ha proposat la fracció 1/3 sense explicar res més. L'altre estudiant ha proposat la fracció 1/3 però l'explicació que realitza no justifica perquè ha escollit aquesta fracció, diu: "*és més gran aquesta figura perquè és 1/3, en canvi l'altra, tot i ser la figura més gran, és 1/4, que el fa ser més petit*".

Anàlisi de les justificacions dels estudiants que han escollit la fracció 1/4

Les onze respostes dels estudiants que han dit que la fracció més gran és 1/4 s'han classificat en tres de les vuit categories utilitzades per classificar les respostes dels estudiants que han dit que la fracció més gran és 1/3 (vegeu taula 5.21). A continuació s'expliquen amb detall les respostes de cada categoria.

Taula 5.21. Classificació en categories de les justificacions dels estudiants que han escollit la fracció 1/4.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
UNI3	Aproximació a 1	1
UNI4	Parts de la unitat	5
UNI7	Comparació de regions	5

Aproximació a 1 (UNI3)

Un únic estudiant forma part d'aquesta categoria. Aquest estudiant argumenta que la fracció 1/4 és més propera a 1 dient que "*la primera fracció representa una quantitat més gran perquè si calculem el seu resultat quedarà més proper al número 1*". Aquest estudiant no té en compte la representació gràfica de l'enunciat perquè parla de calcular el resultat, però en aquest cas, si es mira "el resultat", la fracció 1/4 és més petita que la fracció 1/3 i no més gran com diu l'estudiant.

Parts de la unitat (UNI4)

Cinc estudiants han utilitzat la justificació del nombre de parts amb què s'ha dividit la unitat per decidir que la fracció més gran és 1/4. A diferència dels estudiants que han escollit la fracció 1/3 els estudiants d'aquesta categoria han explicat que la fracció 1/4 és més gran perquè ha estat dividida en més parts. Aquesta justificació és incorrecta perquè si una unitat es divideix en més parts cada part és més petita.

Comparació de regions (UNI7)

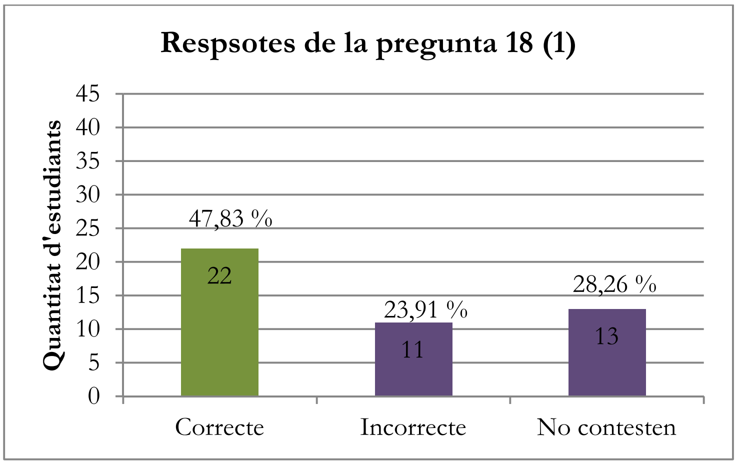
Cinc estudiants formen part d'aquesta categoria, justifiquen que la fracció 1/4 és més gran que la fracció 1/3 fent referència a la comparació d'àrees. Quatre estudiants expliquen que la part pintada que representa 1/4 és més gran que la part pintada que representa 1/3. Aquests quatre estudiants utilitzen una justificació correcta.

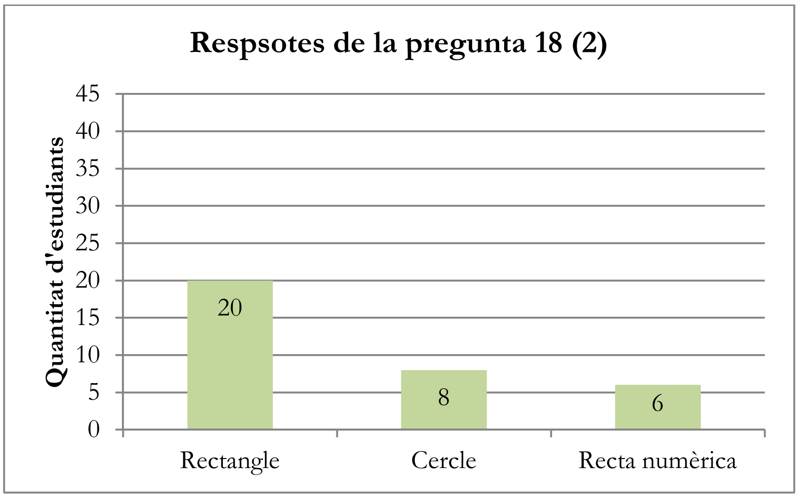
El cinquè estudiant d'aquesta categoria també compara àrees però en comptes de comparar la part pintada de cada regió compara l'àrea de les unitats i explica que "*aquesta és més gran ja que la dimensió del total, o la unitat, és més gran*". L'estudiant que ha realitzat aquesta explicació va ben encaminat perquè la representació de 1/4 és més gran que la representació de 1/3 perquè la unitat on s'ha representat la fracció 1/4 és més gran.

Anàlisi de les justificacions dels estudiants que han dit que pot ser 1/3 o 1/4

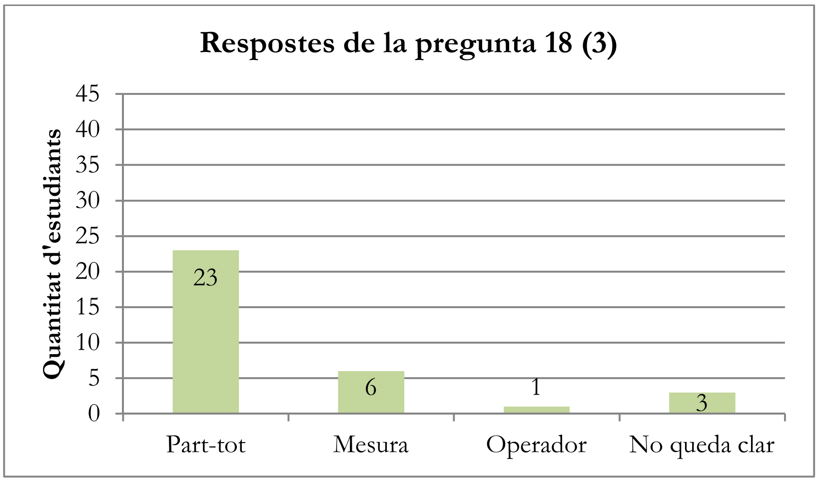
Només dos estudiants han explicat que depenent de la justificació la fracció més gran pot ser 1/3 o 1/4. Els dos estudiants han explicat que si es consideren les fraccions sense tenir en compte les representacions, la fracció més gran és 1/3, mentre que si es consideren les

18.Fes un dibuix per representar 12/5.



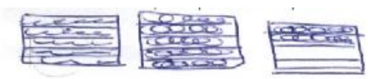


42. Qu
$\frac{12}{5}$.



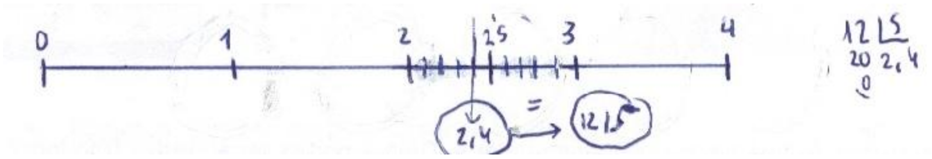
Representació	Categoria	Quantitat d'estudiants
	Unitats dividides en cinquens (Representació 1)	14
	Nombre decimal situat a la recta numèrica (Representació 2)	6

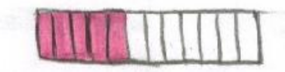
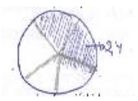
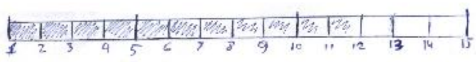
Ex1: Rectangles dividits en cinquens

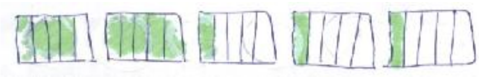


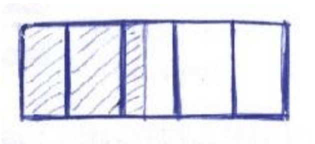
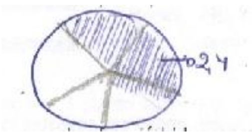
Ex2: Rectangles dividits en cinquens

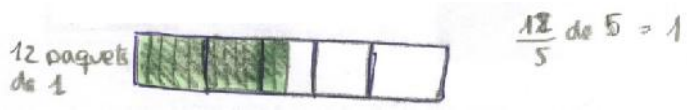
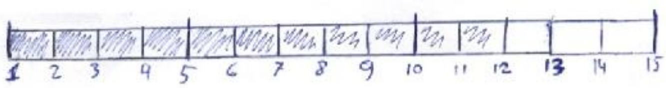
Ex3: Cercles dividits en cinquens



Representació	**Categoria**	**Quantitat d'estudiants**
	Cinc unitats dividies en parts (Representació 3)	8
	Representació de 5/12 (Representació 4)	1
	Nombre decimal i regió (Representació 5)	2
	Altres (Representació 6)	2

Representacions	Explicació de la representació	Quantitat d'estudiants
 Dibuix 1	5 cercles o 5 quadrats dividits en quarts i 12 quarts pintats.	4
 Dibuix 2		1
 Dibuix 3	5 cercles dividits en terços i 12 terços pintats	1
 (No el sé fer) Dibuix 4	5 rectangles dividits en cinquens i 12 cinquens pintats.	2

	Representacions	**Explicació de la representació**	**Quantitat d'estudiants**
Dibuix 1		"Representa el 2,4" en un rectangle dividit en cinc parts	1
Dibuix 2		"Representa el 2,4" en un cercle dividit en cinc parts	1

Representacions	Explicació de la representació	Quantitat d'estudiants
 Dibuix 1	Dibuixa un rectangle dividit en 5 parts. Cada part la divideix en 5 parts i en marca 12	1
 Dibuix 2	Dibuixa un rectangle en 15 parts, posa els números de l'1 al 15 i marca fins el nombre 12, marcant 11 parts.	1

rectangles a més de no quedar clar quina unitat considera. És difícil saber en què s'ha basat per fer aquest dibuix.

Errors comesos en representar gràficament la fracció 12/5

Poc més d'una quarta part dels estudiants (28,26%) han representat de forma incorrecte la fracció 12/5 . Els errors que s'han detectat són:

- Interpretació errònia del denominador en una fracció més gran que la unitat (Representació 3): vuit estudiants han interpretat el 5 de la fracció 12/5 com a cinc unitats en comptes d'entendre que es refereix a cinquens i que per tant, és la unitat escollida que s'ha de dividir en cinquens.

- Partició de la unitat en un nombre de parts sense un criteri clar (Representació 3): sis estudiants de la categoria Representació 3 que han realitzat l'error anterior han realitzat també aquest error, han dividit la unitat en 3 parts o bé en 4 parts quant aquests dos nombres no sembla que tinguin cap relació amb la fracció 12/5. No sabem com és que han realitzat aquesta partició.

- Representació de la fracció 5/12 en comptes de la fracció 12/5 (Representació 4): Un únic estudiant ha representat una altra fracció de la demanada, canviant l'ordre del numerador i el denominador ha obtingut una fracció més petita que la unitat i que ha sabut dibuixar.

- Error en representar un nombre decimal en un model d'àrea (Representació 5): Dos estudiants han representat el nombre decimal 2,4 en un model d'àrea de forma errònia doncs han interpretat cada part de la unitat com una unitat sencera. Aquesta representació mostra una confusió entre la representació de nombres decimals a la recta numèrica (interpretació de fracció com a mesura) i la representació de fraccions en models d'àrea (interpretació de fracció com a comparació part-tot).

- Comprensió i representació de la fracció com a operador de forma incorrecta (Representació 6): Un estudiant per representar la fracció 12/5 ha partit de la interpretació de la fracció 12/5 com a operador, concretament ha volgut representar 12/5 de 5. En comptes de representar cinc unitats ha representat una unitat dividida en cinc parts, això fa pensar que potser no té prou comprensió del que vol dir 12/5 de 5.

- Errors en les expressions matemàtiques (Representació 6): L'estudiant que ha interpretat la fracció com a operador ha escrit "*12/5 de 5 = 1*", després ja ha agafat 12 vegades l'1, però la igualtat que ha escrit no és correcta, ja que 12/5 de 5 és igual a 12.

- Parts de la unitat de diferent àrea (Representacions 1, 3 i 5) Els estudiants que han utilitzat models d'àrea, concretament cercles, no han dibuixat les parts de la mateixa mida quan s'han dividit els cercles en 3 o 5 parts.

- En les representacions de la fracció 12/5 a partir de rectangles dins dels models d'àrea, s'han dividit les unitats en parts que són més iguals entre elles que en les representacions a partir de cercles. I quan els cercles s'han dividit en quarts s'ha fet d'una forma més adequada que quan s'ha dividit en cinquens o terços.

- Tots els estudiants que han dibuixat de forma errònia la fracció 12/5 evidencien una manca de sentit numèric i de la noció de la magnitud. Cinc estudiants han representat la fracció 12/5 com a 3 unitats pintades i un estudiant com a 4 unitats senceres però no han fet cap comentari pel fet que aquest resultat no és possible. Dos estudiants han dibuixat més unitats de les que eren necessàries per representar la fracció 12/5. Els altres cinc estudiants de les categories amb respostes errònies han representat la fracció 12/5 com una part més petita que una unitat. Aquest dibuix no és possible perquè la fracció 12/5 és més gran que la unitat.

5.1.13 Anàlisi de dades de la pregunta 19

A la figura 5.46 es mostra la pregunta 19 on els estudiants han hagut de dir quina fracció hi ha representada a la imatge de l'enunciat i també dir què representa el numerador i el denominador.

19.Digues quina fracció hi ha representada a la imatge següent. Digues què representa el numerador i el denominador:

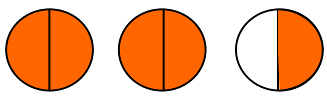
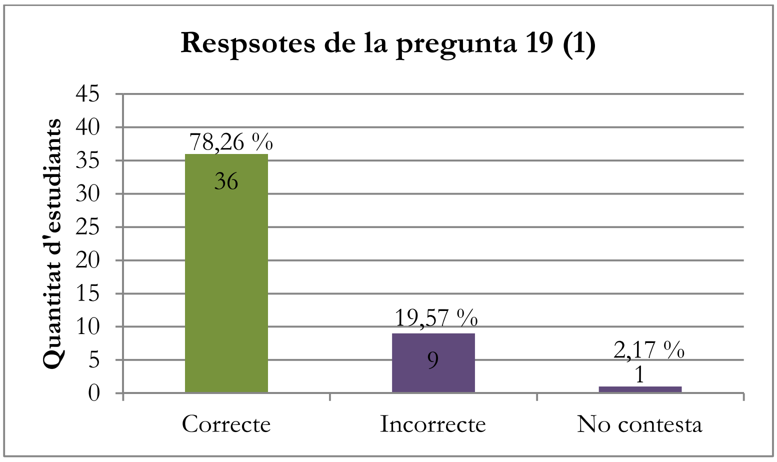


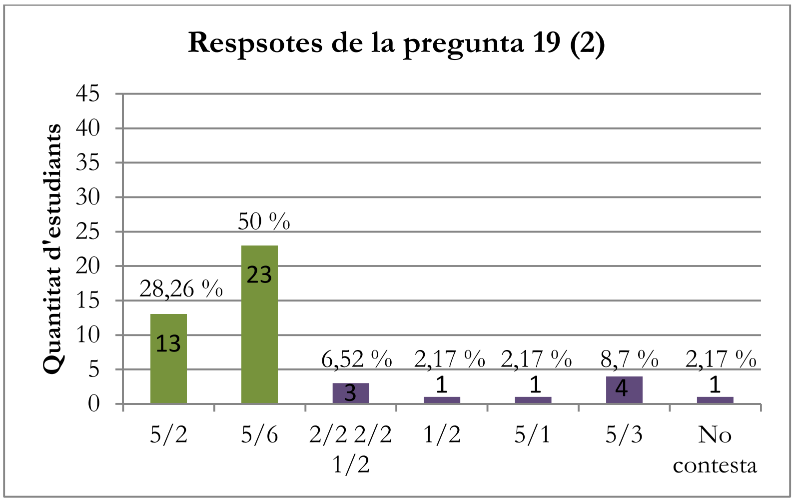
Figura 5.46. Pregunta 19 del qüestionari de fraccions.

La quantitat d'estudiants que han dit respostes correctes, incorrectes i no contestades es mostra al gràfic de la figura 5.47. Tots els estudiants menys un han contestat la pregunta. Més de tres quartes parts dels estudiants (78,26%) ha dit una fracció correcta i prop d'una cinquena part dels estudiants (19,57%) s'ha equivocat en expressar la fracció que hi ha representada a la imatge.

Els estudiants que han contestat la pregunta 19 han realitzat sis tipus de respostes diferents: 5/2, 5/6, 2/2 2/2 1/2, 1/2, 5/1 i 5/3. D'aquestes respostes només dues són correctes, 5/2 i 5/6, les altres són incorrectes o no contesten el que es demana a l'enunciat. Una mica més d'una quarta part dels estudiants (28,26%) ha contestat que la imatge representa la fracció 5/2 i exactament la meitat dels estudiants ha escrit la fracció 5/6 com a resposta a la pregunta. Les respostes incorrectes les han dit pocs estudiants: tres estudiants han dit les



Respsotes de la pregunta 19 (1)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
78,26 %
36
19,57 %
9
2,17 %
1
Correcte
Incorrecte
No contesta



Respsotes de la pregunta 19 (2)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
28,26 %
13
50 %
23
6,52 %
3
2,17 %
1
2,17 %
1
8,7 %
4
2,17 %
1
5/2
5/6
2/2 2/2 1/2
1/2
5/1
5/3
No contesta

Amb aquestes explicacions s'entén que la unitat que es considera és un cercle. I quan es diu que la fracció que es representa és 5/2 es consideren dues unitats senceres i mitja unitat. La resposta de 5/2 i l'explicació del què representa el numerador i denominador són correctes.

La imatge representa la fracció 5/6 (Resposta 2)

Hi ha vint-i-tres estudiants que han dit que la fracció que representa la imatge és 5/6. D'aquests vint-i-tres, quatre estudiants no expliquen què representa el numerador i el denominador. Els altres dinou han explicat sobre el numerador i el denominador que:

-El numerador: representa les 5 meitats pintades.

-El denominador: representa les 6 meitats en total.

Amb aquestes explicacions, la unitat que es considera és el conjunt dels tres cercles. Per això, la fracció que s'obté són les 5/6 parts dels 3 cercles. La resposta de 5/6 i l'explicació del què representa el numerador i denominador són correctes.

La imatge representa la fracció 2/2 2/2 1/2 (Resposta 3)

Dels tres estudiants que han realitzat aquesta resposta, un estudiant no explica què representa el numerador i el denominador mentre que els altres dos en relació al numerador i denominador expliquen que:

-El numerador: representa les meitats pintades.

-El denominador: representa les meitats en què està dividit el cercle

Aquestes explicacions són similars a les que han fet els estudiants que han dit la fracció 5/2. La diferència és que els estudiants d'aquest grup es refereixen a cada cercle per separat i els que han dit la fracció 5/2 quan expliquen el numerador es refereixen a les parts dels tres cercles.

De fet, els estudiants que han fet la resposta 2/2 2/2 1/2 no han dit la fracció representada en la imatge, han dit quina fracció hi ha representada a cada cercle.

La imatge representa la fracció 1/2 (Resposta 4)

L'únic estudiant que ha dit aquesta fracció no explica com ha deduït el numerador ni el denominador per tant, no podem saber exactament com ho ha resolt, però sí que podem suposar que s'ha fixat en el tercer cercle, el que té una meitat pintada i l'altra no. Segurament, per això ha escrit la fracció 1/2. Aquesta resposta no és correcta.

La imatge representa la fracció 5/1 (Resposta 5)

Com en la fracció 1/2, l'estudiant que ha dit 5/1 no explica què representa el numerador ni el denominador. Podria ser que l'estudiant hagués considerat el 5 del numerador perquè hi ha cinc parts pintades i l'1 del denominador perquè hi ha una part per pintar. Però, això són suposicions que no es poden comprovar. De totes maneres, aquesta resposta no és correcta.

La imatge representa la fracció 5/3 (Resposta 6)

Els quatre estudiants que han dit que la imatge representa la fracció 5/3 han realitzat tots la mateixa explicació sobre el denominador i el numerador:

-El numerador: representa les 5 meitats pintades.

-El denominador: representa els 3 cercles

En aquesta explicació, si el denominador consideren que són 3 cercles, aleshores la unitat són els 3 cercles i voldria dir que els hem dividit en tres parts, i cada terç seria un cercle sencer. Quan diuen que és la fracció 5/3 voldria dir que es tenen 5 terços i per tant, 5 cercles sencers pintats, i aquesta no és la representació que hi ha a l'enunciat.

Si partim del numerador i considerem que s'agafen 5 meitats pintades, perquè el denominador sigui 3 i sigui correcta, cal que la unitat sigui un cercle i la meitat d'un altre. Probablement els estudiants quan han decidit que els 3 cercles indicaven el nombre del denominador no han reflexionat sobre quina era la unitat. Per tant, com que no sabem quina unitat han tingut en compte, considerem les respostes incorrectes.

5.2 Anàlisi de dades del qüestionari en relació amb l'equivalència de fraccions

En aquest apartat es presenta l'anàlisi de dades de les preguntes del qüestionari que fan referència a l'equivalència de fraccions.

5.2.1 Anàlisi de dades de la pregunta 6

A la figura 5.49 es mostra la pregunta 6 on es demana si les dues imatges representen la mateixa fracció i la justificació de perquè sí o perquè no.

6.Les següents imatges representen la mateixa fracció? Sí ☐ No ☐
Explica perquè sí o perquè no.

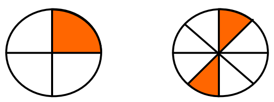
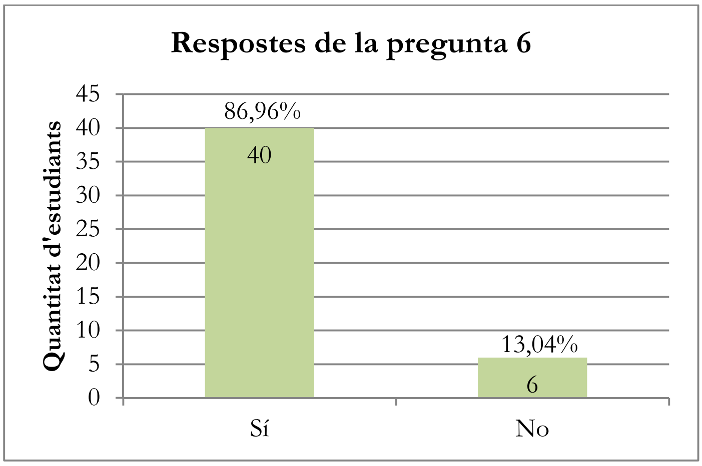


Figura 5.49. Pregunta 6 del qüestionari de fraccions



Codi	Categories	Quantitat d'estudiants
JUST1	Explicació conceptual	12
JUST2	Procediment de càlcul	10
JUST3	Comparació de regions	8
JUST1 i JUST2	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	7
JUST 2 i JUST3	Procediment de càlcul i Comparació de regions	3

A continuació s'expliquen les característiques que defineixen cada categoria a la vegada que es presenten exemples determinats de les respostes d'estudiants que formen part d'una categoria o de més d'una.

Explicació conceptual (JUST1)

En aquesta categoria hi ha dotze respostes corresponents a les dels estudiants que per explicar que les representacions són les mateixes, han dit directament que les fraccions són equivalents i/o que 1/4 = 2/8. Hi ha dos estudiants que a més de dir que les fraccions són equivalents han dit que les fraccions tenen el mateix resultat. Un d'aquests dos estudiants a més diu que si es divideix 1÷4 i 2÷8 s'obté 0,25, és a dir, el mateix resultat.

Procediment de càlcul (JUST2)

En aquesta categoria hi ha les deu respostes dels estudiants que han justificat que les representacions representen la mateixa fracció a partir de comprovar que la fracció 1/4 i 2/8 són fraccions equivalents simplificant la fracció 2/8 i/o bé multiplicant per 2 el numerador i el denominador de la fracció 1/4. (vegeu taula 5.28).

Taula 5.28. Respostes de la categoria Procediment de càlcul (JUST2).

Justificacions	Quantitat d'estudiants
2/8 simplificada és 1/4	6
Multiplicant per 2 numerador i denominador de 1/4 s'obté la fracció 2/8	3
Multiplicant per 2 numerador i denominador de 1/4 s'obté la fracció 2/8 i a la inversa s'obté 1/4 de 2/8	1

Hi ha sis estudiants que han dit que 2/8 simplificada és la fracció 1/4 i només tres que han explicat que la fracció 2/8 es pot obtenir a partir de la fracció 1/4. Només hi ha un sol estudiant que ha fet referència al procés de simplificar i al procés invers.

Comparació de regions (JUST3)

En aquesta categoria hi ha les respostes dels estudiants que han utilitzat criteris gràfics fent referència a la imatge presentada a l'enunciat de la pregunta 6. Els vuit estudiants d'aquesta categoria han dit de diverses maneres que les regions marcades ocupen el mateix espai de la figura encara que les regions estiguin dividides en parts diferents. D'aquests vuit estudiants només dos han expressat que les fraccions són equivalents o proporcionals.

Explicació conceptual (JUST1) i Procediment de càlcul (JUST2)

Hi ha set estudiants que combinen explicacions de la categoria Explicació conceptual (JUST1) i Procediment de càlcul (JUST2). Tots set diuen que les dues fraccions són fraccions equivalents i ho justifiquen a partir de comprovar que la fracció 1/4 i 2/8 són fraccions equivalents simplificant la fracció 2/8 i/o bé multiplicant per 2 el numerador i el denominador de la fracció 1/4 (vegeu taula 5.29).

Taula 5.29. Respostes que combinen arguments de les categories Explicació conceptual (JUST1) i Procediment de càlcul (JUST2).

Justificacions		Quantitat d'estudiants
Les fraccions són equivalents	2/8 simplificada és 1/4	6
	Multiplicant per 2 numerador i denominador de 1/4 s'obté la fracció 2/8	1

Hi ha sis estudiants que han dit que 2/8 simplificada és la fracció 1/4 i només un que ha explicat que la fracció 2/8 es pot obtenir a partir de la fracció 1/4. No hi ha cap estudiant que hagi fet referència al procés de simplificar i al procés invers.

Procediment de càlcul (JUST2) i Comparació de regions (JUST3)

Hi ha tres respostes que es podrien col·locar per una banda a la categoria JUST3 i per l'altra a la categoria JUST2, és a dir, fan referència a l'espai que ocupa la regió ombrejada i també al procés que simplificant 2/8 s'obté 1/4 o que multiplicant per 2 el numerador i el denominador de la fracció 1/4 s'obté la fracció 2/8 (vegeu taula 5.30).

Taula 5.30. Respostes que combinen arguments de les categories Procediment de càlcul (JUST2) I Comparació de regions (JUST3).

Justificacions		Quantitat d'estudiants
Les regions marcades ocupen el mateix espai	2/8 simplificat és 1/4	2
	Multiplicat per 2 el numerador i denominador de la fracció 1/4 s'obté la fracció 2/8	1

Errors comesos en la pregunta 6

Uns quants estudiants han comès errors a l'hora de justificar que les fraccions 2/8 i 1/4 són equivalents. Vuit estudiants de la categoria Procediment de càlcul (JUST2) han comès errors a l'hora d'explicar el procediment seguit per simplificar la fracció 2/8 o bé per explicar que les fraccions 2/8 i 1/4 són equivalents (vegeu taula 5.31).

Els errors que hem classificat com error 1 són el que han fet cinc estudiants per explicar la relació que hi ha entre les fraccions 2/8 i 1/4. Han explicat que la fracció 2/8 és el doble o múltiple de 1/4 o que la fracció 1/4 es troba dividint per 2 la fracció 2/8.

Taula 5.31. Errors d'alguns estudiants a l'hora de justificar que les fraccions 2/8 i 1/4 són equivalents.

Codi	Errors dels estudiants en justificar la pregunta 6	Quantitat d'estudiants
Error 1	"2/8 : 2 = 1/4"	2
	"*simplifiquem la fracció 2/8, la dividim per 2, s'obté la fracció 1/4*".	1
	"*la fracció 2/8 és el doble de 1/4*".	2
	"*la fracció 2/8 és múltiple de 1/4*".	1
	"*multiplicar per la 2 la primera fracció (1/4) i dóna 2/8*"	1
Error 2	"*Perquè si multipliquem la primera fracció (1/4) pel mateix numerador i denominador (2) ens dóna la segona fracció (2/8)*".	1

L'error 2 es deu a l'explicació incorrecta del procés de veure que 2/8 és equivalent a 1/4 multiplicant per el mateix nombre, el 2, el numerador i denominador de la fracció 1/4. En comptes de multiplicar pel mateix nombre l'estudiant ha dit "*multiplicar pel mateix numerador i denominador*" tot i que entre parèntesis posa un 2. Per tant, l'estudiant ha sabut comprovar si les fraccions 1/4 i 2/8 són equivalents però no ho ha sabut explicar.

Anàlisi de les respostes dels estudiants que han argumentat que les imatges no representen la mateixa fracció

Les respostes dels estudiants que han explicat que les imatges no representen la mateixa fracció, s'han classificat en dues categories segons les justificacions donades: fraccions diferents i una fracció és més petita que l'altra (vegeu taula 5.32).

Taula 5.32. Classificació en categories de les justificacions dels estudiants que han argumentat que les imatges no representen la mateixa fracció.

Codi	Categories	Quantitat d'estudiants
JUST4	Fraccions diferents	5
JUST5	Una fracció és més petita que l'altra	1

Fraccions diferents (JUST 4)

En aquesta categoria s'han considerat les cinc respostes d'estudiants que han explicat que les imatges no representen la mateixa fracció tot i que no ho justifiquen d'una única manera. Hi ha tres grups diferents de resposta segons l'explicació que han fet (vegeu taula 5.33). Un estudiant ha explicat que el resultat és el mateix tot i que els numeradors i denominadors de les fraccions 1/4 i 2/8 són diferents. Dos estudiants han justificat la resposta dient que les regions estan dividides en un nombre diferent de parts, una regió en 4 parts i l'altra en 8, i per tant, en un cas la fracció és 1/4 i en l'altra és 2/8. Els altres dos estudiants només han dit que una imatge representa la fracció 1/4 i l'altra la fracció 2/8, en aquesta cas, no han explicat res més. Aquestes justificacions, matemàticament, es poden considerar errònies.

Taula 5.33. Respostes de la categoria fraccions diferents (JUST4).

Explicacions dels estudiants de la categoria Fraccions diferents (JUST4)	**Quantitat d'estudiants**
El resultat és el mateix però el numerador i denominador són diferents	1
Les regions estan dividides en diferent nombre de parts	2
Una imatge representa 1/4 i l'altra 2/8	2

Una fracció és més petita que l'altra (JUST5)

En aquesta categoria només hi ha un estudiant que diu que les fraccions "*no són iguals, la primera fracció és més petita que l'altra*". Aquesta explicació és errònia ja que no és cert que una fracció sigui més petita que l'altra.

5.2.2 Anàlisi de dades de la pregunta 16

A la figura 5.51 es mostra la pregunta 16 on es demana als estudiants què vol dir que dues fraccions siguin equivalents i també que posin un exemple.

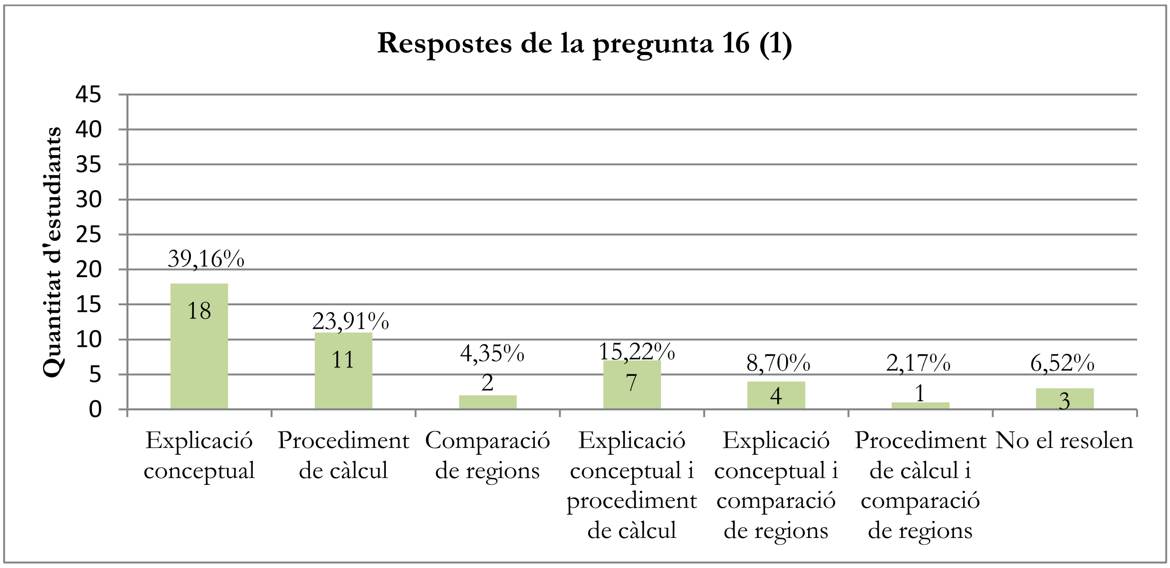
16.Què vol dir que dues fraccions són equivalents? Posa un exemple.

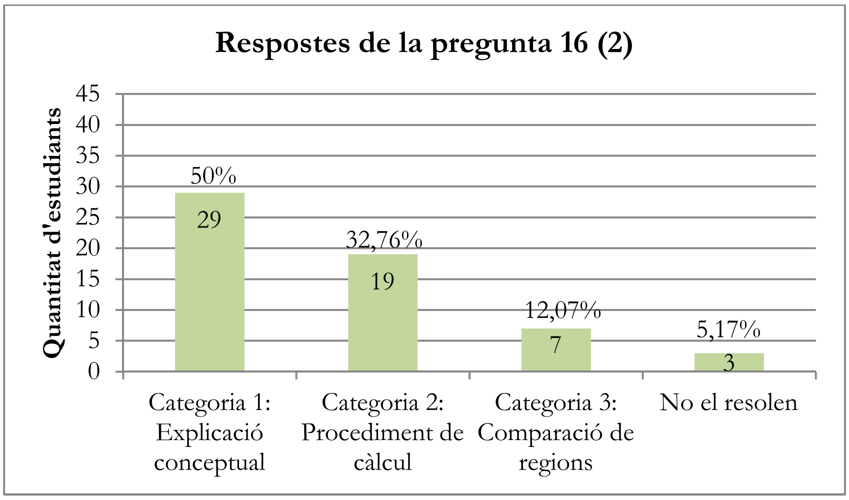
Figura 5.51. Pregunta 16 del qüestionari de fraccions.

Primerament s'analitzaran les explicacions que els estudiants han realitzat per explicar què vol dir que dues fraccions siguin equivalents i a continuació s'analitzaran els exemples proposats.

Anàlisi de les explicacions de la pregunta 16

Per explicar què vol dir que dues fraccions són equivalents els estudiants han utilitzat explicacions conceptuals, procediments de càlcul o comparació de regions. Algunes respostes combinen els diferents tipus d'explicacions esmentades. En el gràfic de la figura 5.52 es mostra la quantitat d'estudiants que han realitzat cada tipus d'explicació. El grup més nombrós és el dels estudiants que han realitzat explicacions conceptuals (39,16%) seguit del grup que ha explicat procediments de càlcul (23,91%). Només dos estudiants (4,35%) comparen regions. La resta d'estudiants combinen diferents explicacions, set estudiants (15,22%) combinen explicacions conceptuals i procediments de càlcul, quatre estudiants (8,70%) fan explicacions conceptuals i comparació de regions i només un estudiant realitza una explicació a partir d'un procediment de càlcul i de la comparació de fraccions. Tres estudiants (6,52%) no han respost la qüestió.


Respostes de la pregunta 16 (1)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
39,16%
18
23,91%
11
4,35%
2
15,22%
7
8,70%
4
2,17%
1
6,52%
3
Explicació conceptual
Procediment de càlcul
Comparació de regions
Explicació conceptual i procediment de càlcul
Explicació conceptual i comparació de regions
Procediment de càlcul i comparació de regions
No el resolen


Respostes de la pregunta 16 (2)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
50%
29
32,76%
19
12,07%
7
5,17%
3
Categoria 1: Explicació conceptual
Categoria 2: Procediment de càlcul
Categoria 3: Comparació de regions
No el resolen

Explicació conceptual (EQ1)

Les vint-i-nou respostes d'aquesta categoria per explicar què vol dir que dues fraccions són equivalents fan referència a que les fraccions representen el mateix resultat i/o la mateixa proporció. Les respostes d'aquests estudiants es poden agrupar en tres grups segons l'explicació: representen el mateix resultat, representen la mateixa proporció i representen el mateix resultat i la mateixa proporció.

Vint-i-un estudiants, la majoria d'estudiants d'aquesta categoria, afirmen que el resultat de les dues fraccions és el mateix. Aquests estudiants han dit que les fraccions representen el mateix de diverses maneres: representen el mateix resultat, la mateixa quantitat, el mateix nombre, el mateix i són iguals, el mateix valor i són la mateixa fracció. En aquest grup de vint-i-un estudiants, s'ha detectat un error a l'hora d'explicar què vol dir que dues fraccions siguin equivalents. Un estudiant ha dit que "*dues fraccions són equivalents quan representen la mateixa unitat, és a dir, quan el resultat és el mateix*". La utilització del terme unitat no és correcta, l'estudiant sembla que utilitza la paraula "unitat" per referir-se a la quantitat que representa cada fracció i no a la unitat que s'agafa de referència per representar les fraccions.

Hi ha cinc estudiants que han elaborat explicacions que fan referència a la proporció o bé a la relació entre el numerador i denominador de cada fracció. En una de les respostes dels cinc estudiants s'ha detectat un error a l'hora d'explicar què vol dir que les fraccions siguin equivalents: "*dues fraccions són equivalents quan aquestes dues indiquen la mateixa proporció, però en diferent nombre*". La primera part on l'estudiant diu que *les dues indiquen la mateixa proporció* és correcta però no és correcta dir *en diferent nombre*. Entenem que volia dir que indiquen la mateixa proporció però estan representades de diferent manera.

Hi ha tres estudiants que han explicat que les fraccions representen el mateix resultat i la mateixa proporció. En aquest grup de tres estudiants hi ha un estudiant que ha dit que el resultat de dividir el numerador i el denominador serà el mateix.

Procediment de càlcul (EQ2)

Les dinou respostes d'aquesta categoria per explicar què vol dir que dues fraccions són equivalents fan referència a procediments de càlcul per trobar una de les fraccions a partir de l'altra o per trobar la relació entre els numeradors i els denominadors de les dues fraccions. Aquestes respostes s'han agrupat en tres subcategories: Multiplicant en creu (EQ2.1), multiplicar i/o dividir numerador i denominador (EQ2.2), i Comprovant si els numeradors i denominadors són proporcionals (EQ2.3) (vegeu taula 5.34). A continuació s'expliquen les respostes de cada subcategoria en detall.

Procediment de càlcul (EQ2)

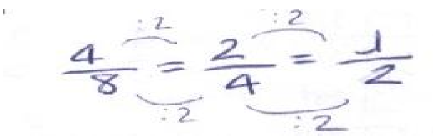
Subcategories de la Categoria 2	Explicació de la resposta	Quantitat d'estudiants	
Multiplicar en creu (EQ2.1)	"Multiplicant en creu" s'obté una fracció amb el numerador i denominador iguals.	3	3
Multiplicar i/o dividir numerador i denominador (EQ2.2)	Una fracció es troba dividint pel mateix nombre el numerador i denominador de l'altra fracció .	2	13
	Una fracció es troba multiplicant dividint pel mateix nombre el numerador i denominador de l'altra fracció.	3	
	Una fracció es troba dividint o multiplicant dividint pel mateix nombre el numerador i denominador de l'altra fracció.	3	
	Simplificant una fracció s'obté l'altra fracció.	4	
	Les dues fraccions estan simplificades o "amplificades".	1	
Comprovar si els numeradors i denominadors són proporcionals (EQ2.3)	Els numeradors i denominadors de les dues fraccions són múltiples entre sí o bé són proporcionals.	3	3

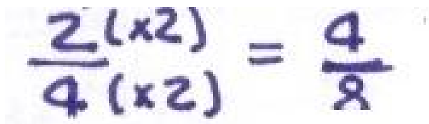
$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12} \rightarrow \frac{48}{48}$$

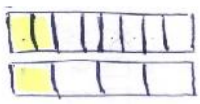
$$\frac{4}{12} \quad \frac{2}{6} \xrightarrow{\text{multipliquem}} \frac{4}{12} \times \frac{2}{6} = \boxed{\frac{24}{24}}$$

$$\frac{8}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{24} = 1$$

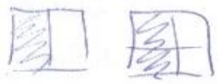
Codi	Errors dels estudiants de la subcategoria EQ2.2	Quantitat d’estudiants
Error 1	“*Podem dir que dues fraccions són equivalents quan al simplificar-les es pot fer o dividir amb el mateix nombre*”	1
	“*Dues fraccions són equivalents quan multiplicant-les per un mateix nombre obtenim el mateix resultat*”	1
	“*Per tant si una la multipliquem o dividim per un número aconseguim l'altra*”	2
Error 2	“*Estan amplificades o simplificades*”	1



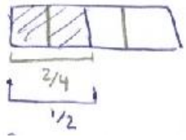




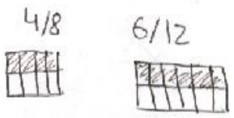
Representació 1



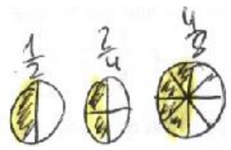
Representació 2



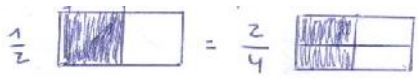
Representació 3



Representació 4



Representació 5



Representació 6

fraccions equivalents al nombre 1 i un estudiant ha proposat un exemple de fraccions equivalents a 2. Un sol estudiant ha proposat fraccions equivalents a 1/3 i un altre a 2/3.

Dels trenta-vuit estudiants, trenta-cinc han proposat fraccions amb els denominadors parells. Els dos estudiants del grup 3 que han proposat fraccions equivalents a 1 han dit totes les fraccions amb denominadors parells excepte la fracció 1/1 que té per denominador el nombre 1. El tercer estudiant que no ha proposat totes les fraccions amb denominadors parells ha estat el del grup 6 que ha proposat dues fraccions equivalents a 2/3, ha proposat 2/3 i 4/6.

Trenta dels trenta-vuit estudiants que han proposat fraccions amb denominadors que són potències de 2, han proposat els denominadors 1, 2, 4, 8 i 16. Els altres vuit han proposat els denominadors 3, 6, 10, 12, 18 i 24 que no són potències de 2.

Tots trenta-vuit estudiants excepte tres han donat fraccions equivalents on el numerador d'una de les fraccions és múltiple del numerador de l'altra o altres fraccions donades i el denominador d'una de les fraccions és múltiple del denominador de l'altra o altres fraccions donades. Tres estudiants han dit les fraccions 4/8 i 6/12 on el 6 no és múltiple de 4 ni el 12 de 8.

Hi ha només tres estudiants del grup 2 que han proposat fraccions equivalents a la fracció 1/2 que diuen que les fraccions proposades són iguals a 0,5.

Taula 5.36. Classificació dels exemples correctes de fraccions equivalents.

Grup	Exemples	Denominadors parells o senars	Denominadors potències de 2 o no	Numerador i denominador d'una fracció múltiples del numerador i denominador de la fracció equivalent	Quantitat d'estudiants	
Grup 1: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$				4	5
	$\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$				1	
Grup 2: $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$				13	28
	$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$				5	
	$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$				4	
	$\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$				3	
	$\frac{6}{12}=\frac{12}{24}$				1	
	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$				1	
	$\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$				1	

Grup 3: 1	$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$				1	2
	$\frac{16}{16}=\frac{8}{8}=\frac{4}{4}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$				1	
Grup 4: 2	$\frac{16}{8}$ $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$				1	1
Grup 5: $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{4}=\frac{2}{2}$ $\frac{4}{12}=\frac{2}{6}$				1	1
Grup 6: $\frac{2}{3}$	$\frac{12}{}$ $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$				1	1

Nota: Les cel·les acolorides assenyalen que les fraccions tenen els denominadors parells, que els denominadors són potències de 2 o bé que el numerador i el denominador d'una fracció són múltiples del numerador i denominador de la fracció equivalent.

Anàlisi dels exemples incorrectes de fraccions equivalents

Només dos estudiants, els del grup 7 (Exemples incorrectes), han escrit exemples incorrectes de fraccions equivalents. Un dels estudiants ha dit tres fraccions, 1/2, 2/4 i 4/6, les dues primeres són equivalents, però 4/6 no és equivalent a 1/2. En comptes de la fracció 4/6 havia d'escriure la fracció 4/8 o 3/6.

L'altre estudiant ha dit 8/6 i 3/4 com a fraccions equivalents. Aquestes fraccions no són equivalents, a més la fracció 8/6 és més gran que una unitat mentre que la fracció 3/4 és més petita. Aquest estudiant ha volgut aplicar el procediment de multiplicar en creu per comprovar que dues fraccions són equivalents però s'ha confós i ha multiplicat els numeradors entre ells i els denominadors entre ells obtenint la fracció 24/24.

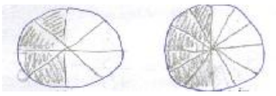
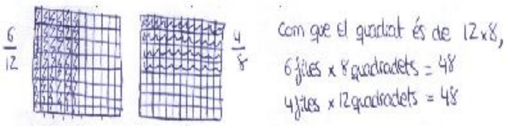
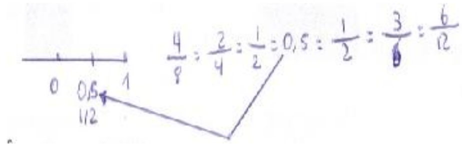
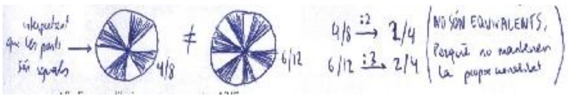
5.2.3 Anàlisi de dades de la pregunta 17

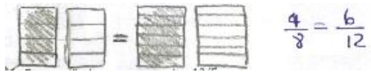
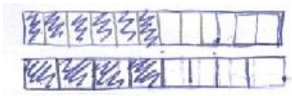
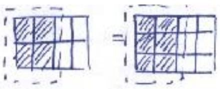
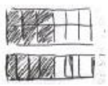
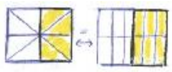
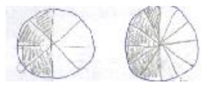
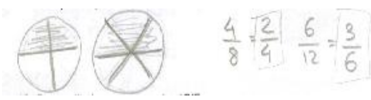
A la figura 5.61 es mostra la pregunta 17 on es demana que els estudiants expliquin amb un dibuix que 4/8 i 6/12 són equivalents.

17.Com pots explicar amb un dibuix que 4/8 i 6/12 són equivalents?

Figura 5.61. Pregunta 17 del qüestionari de fraccions.

Hi ha sis estudiants que no han contestat aquesta pregunta. Les respostes dels quaranta estudiants que han contestat la pregunta s'han distribuït en quatre categories: Comparant la l'àrea pintada de cada unitat (CO1), Comparant el nombre de parts iguals de cada unitat (CO2), Situant les fraccions a la recta numèrica (CO3), No són equivalents (CO4) (vegeu taula 5.37). A continuació s'explica cada categoria amb detall.

Representació	**Categoria**	**Quantitat d'estudiants**
	Comparant l'àrea pintada de cada unitat (CO1)	35
	Comparant el nombre de parts iguals de cada unitat (CO2)	1
	Situant les fraccions a la recta numèrica (CO3)	1
	No són equivalents (CO4)	3

Partició de la unitat	Interpretació	Regió	Quantitat de regions per unitat	Representació		Quantitat d'estudiants
Grup 1	Interpretació de fracció com a comparació part - tot	Rectangles	Cada unitat són dues regions		Dibuix 1	2
			Cada unitat és una regió		Dibuix 2	10
					Dibuix 3	6
					Dibuix 4	3
					Dibuix 5	1
					Dibuix 6	2
					Dibuix 7	1
		Cercle i rectangle			Dibuix 8	1
		Cercles			Dibuix 9	8
Grup 2					Dibuix 10	1

Anàlisi segons la interpretació de fracció

En els dibuixos de totes les respostes d'aquesta categoria s'ha interpretat les fraccions 4/8 i 6/12 com a comparació part-tot.

Anàlisi segons la regió (model d'àrea) utilitzada

Tots els estudiants d'aquesta categoria han utilitzat el model d'àrea per representar les fraccions amb dibuixos. Han dibuixat les unitats mitjançant rectangles i/o cercles. Vint-i-cinc dels trenta-cinc estudiants (vegeu els dibuixos 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 de la taula 5.38) han dibuixat rectangles per representar cada fracció, nou estudiants (vegeu els dibuixos 9 i 10 de la taula 5.38) han utilitzat els cercles com a representació de les dues fraccions i només un estudiant (vegeu el dibuix 8 de la taula 5.38) ha representat la fracció 4/8 en un cercle i la fracció 6/12 en un rectangle.

Anàlisi segons la quantitat de regions utilitzades per representar cada unitat

Trenta-tres dels trenta-cinc estudiants han representat cada fracció en una unitat (cercle o rectangle) (vegeu dibuixos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 de la taula 5.38). En canvi, dos estudiants han representat cada unitat mitjançant dos rectangles (vegeu dibuix 1 de la taula 5.38). En aquest cas, quan han representat les fraccions 4/8 i 6/12 en aquestes unitats, ha quedat un rectangle pintat i l'altre sense pintar ja que les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents a la fracció 1/2.

Comparant el nombre de parts iguals de cada unitat (CO2)

Un únic estudiant forma part d'aquesta categoria i ha dibuixat dos rectangles. De la mateixa manera com ho han fet els estudiants de la categoria CO1, ha interpretat les fraccions com a comparació part-tot (vegeu taula 5.37). Cada unitat està representada per una sola regió, un sol rectangle. A diferència dels estudiants de la categoria CO1 aquest estudiant divideix els dos rectangles en el mateix nombre de parts, en 96 quadradets. Dibuixa dos rectangles de 8 files i 12 columnes. En un dels rectangles pinta les sis dotzenes parts pintant 6 de les 12 columnes i en l'altra rectangle pinta les quatre vuitenes parts pintant 4 de les 8 files. A continuació, compara els quadradets (48) que han quedat pintats en cada rectangle. D'aquesta manera es veu que les dues fraccions són equivalents.

Situant les fraccions a la recta numèrica (CO3)

Un únic estudiant dels quaranta-sis ha dibuixat una recta numèrica i hi ha situat la fracció 1/2 i el 0,5 (vegeu taula 5.37). Al costat del dibuix ha escrit que les fraccions 4/8 i 6/12 són igual a 0,5. Aquest estudiant ha partit de la interpretació de fracció com a mesura.

Les fraccions no són equivalents (CO4)

Hi ha tres estudiants que tot i que l'enunciat demana com explicar amb un dibuix que les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents, expliquen que les fraccions anteriors no són equivalents. Un dels tres estudiants ha representat les fraccions 4/8 i 6/12 en un cercle cada una correctament (vegeu taula 5.37), però dividint el numerador i denominador de les fraccions 4/8 i 6/12 per 2 i per 3 respectivament, s'obté la fracció $\frac{2}{3}$. A continuació diu que "*No són equivalents perquè no mantenen la proporcionalitat*". Aquest estudiant demostra que no té prou coneixement del concepte de fracció equivalent.

Els altres dos estudiants d'aquesta categoria han volgut comprovar si les fraccions 4/8 i 6/12 eren equivalents amb el procediment de multiplicar en creu (4 x 12 = 48 i 8 x 6 = 48), però en comptes d'això han multiplicat el numerador d'una fracció pel numerador de l'altra i el denominador d'una fracció pel denominador de l'altra obtenint la fracció 24/96. Com que han aplicat el procediment incorrectament han obtingut que les fraccions 4/8 i 6/12 no són equivalents.

5.3 Anàlisi de dades del qüestionari en relació amb la comparació i l'ordenació de fraccions

En aquest apartat es presenta l'anàlisi de dades de les preguntes del qüestionari que fan referència a la comparació i ordenació de fraccions.

5.3.1 Anàlisi de dades de la pregunta 12

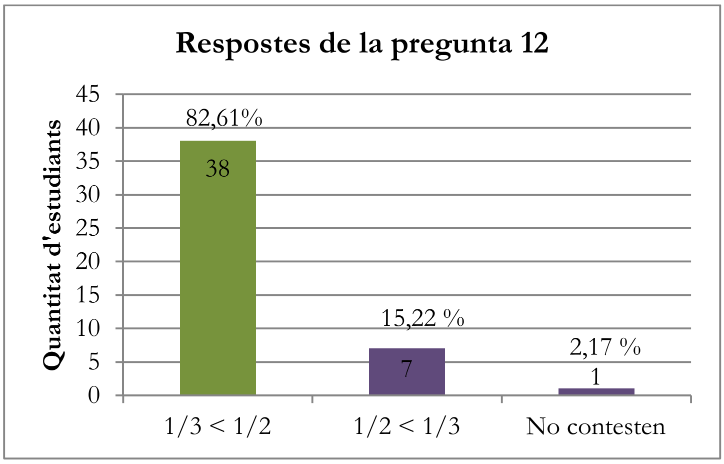
A la figura 5.62 es mostra la pregunta 12 on es demana si la fracció 1/3 és més gran o més petita que la fracció 1/2 i justificar l'elecció.

12.Digues quina opció és correcta:

- ☐ 1/3 > 1/2 perquè....
- ☐ 1/3 < 1/2 perquè....

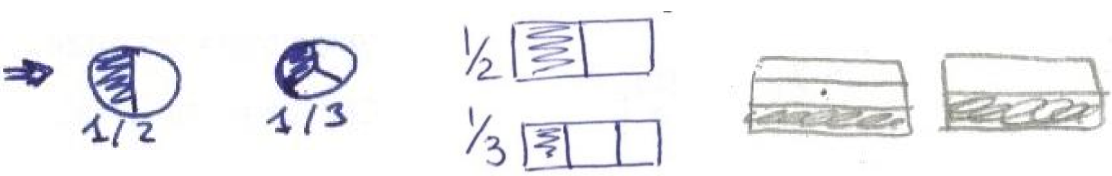
Figura 5.62. Pregunta 12 del qüestionari de fraccions.

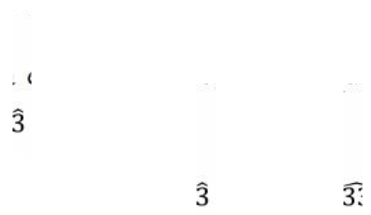
El nombre de respostes correctes, incorrectes i no contestades a l'hora de dir si la fracció 1/3 és més gran o més petita que la fracció 1/2 es mostren al gràfic de la figura 5.63. Més de les tres quartes parts dels estudiants han resolt correctament aquesta pregunta, concretament trenta-vuit estudiants (un 82,61%) han marcat l'opció "1/3 < 1/2". Set estudiants han escollit equivocadament l'altra opció, que "1/2 < 1/3" i només un estudiant ha deixat per contestar aquesta pregunta.



Respostes de la pregunta 12
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
82,61%
38
15,22 %
7
2,17 %
1
1/3 < 1/2
1/2 < 1/3
No contesten

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
NU1	Representacions gràfiques	8
NU2	Nombres decimals	7
NU3	Fraccions equivalents	2
NU4	Denominadors	12
NU5	Fet conegut	2
NU6	Parts de la partició	13
NU7	Sense justificar	1





tanbé es pot fer calulant el mcm, on busquem denominadors iguals:

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

mcm = $3 \cdot 2 = 6$

$$\frac{1}{3} \underset{6}{\overset{=}{\text{I}}} \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1(6/3)}{6} = \frac{1(6/2)}{6} \longrightarrow \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1 \cdot 3}{6} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{6} \neq \frac{3}{6} \quad 7}$$

Parts de la partició (NU6)

Les tretze respostes d'aquesta categoria són les que fan referència a les parts amb què s'ha dividit la unitat. Hi ha cinc estudiants que per explicar que la fracció 1/3 és més petita que la fracció 1/2 han fet referència a les parts amb què s'ha dividit la unitat. Per exemple, han dit que "*dividim la unitat més vegades*" o bé que "*la unitat està dividida en menys parts*" referint-se a 1/3 i a 1/2 respectivament. Cap d'aquests estudiants ha fet referència a l'àrea de les parts.

Els altres vuit estudiants d'aquesta categoria, a més de referir-se a les parts amb què està dividida la unitat han explicat que si es divideix en més parts, aquestes són més petites. Les explicacions d'aquest vuit estudiants són similars a les que ha fet un estudiant quan diu que "*el total (la unitat) està dividida en tres, llavors les porcions que et surten són més petites que si ho dividim en 2*". Hi ha un estudiant que per explicar que les parts són més petites si es divideix la unitat en 3 parts que si es fa en 2 parts, ha posat l'exemple de repartir alguna cosa entre 3 persones o entre 2 persones. Aquestes justificacions estan més ben elaborades que les que no fan referència a l'àrea de la parts.

No ho justifica (NU7)

Hi ha només un estudiant dels quaranta-sis del grup que no ha fet cap explicació, només ha dit "*perquè sí*". No es pot saber en aquest cas perquè ha escollit aquesta opció.

Anàlisi de les justificacions de les respostes incorrectes: "1/3 > 1/2"

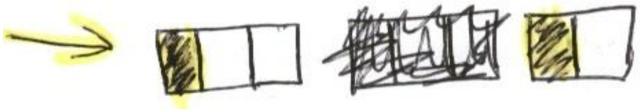
Les respostes per justificar que la fracció $\frac{1}{3}$ és més gran que la fracció $\frac{1}{2}$ estan agrupades en cinc de les vuit categories proposades (vegeu taula 5.40). A diferència d'alguns estudiants que han escollit l'opció 1/3 < 1/2, els que han escollit l'opció 1/3 > 1/2 només fan un "tipus" de justificació i per tant cada estudiant està en una sola categoria.

Taula 5.40. Classificació en categories de les justificacions dels estudiants que han escollit l'opció 1/3 > 1/2.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
NU1	Representacions gràfiques	1
NU3	Fraccions equivalents	1
NU5	Fet conegut	1
NU6	Parts de la partició	3
NU8	Comparació	1

Representacions gràfiques (NU1)

Com s'ha explicat anteriorment, en aquesta categoria hi ha les respostes dels estudiants que han utilitzat alguna representació gràfica per justificar l'elecció de la resposta. L'estudiant



$\frac{1 \xrightarrow{\times 4}}{3 \xrightarrow{\times 4}} = \frac{4}{12}$ $\qquad$ $\frac{1 \xrightarrow{\times 4}}{2 \xrightarrow{\times 4}} = \frac{4}{8}$

que la fracció 1/3: "*partir quelcom per la meitat és repartir-ho en major quantitat*". Aquest fet fa pensar que s'ha equivocat en la interpretació del signe ">" entenent-lo com que el que hi ha la seva esquerra és més petit que el que hi ha a la dreta.

Els altres dos estudiants d'aquesta categoria han justificat que 1/3 és més gran que 1/2 perquè la unitat està dividida en més parts: "*tres parts d'un pastís és més que la meitat d'un pastís*" i " *2 parts són menys que 3 parts*". Aquests estudiants comparen la quantitat de parts de la unitat en lloc de fer-ho comparant l'àrea de les parts.

Comparació (UN8)

L'estudiant d'aquesta categoria utilitza la justificació de quina fracció s'acosta més a la unitat, però s'equivoca en dir que és la fracció 1/3. La justificació que utilitza podria ser correcta per decidir quina fracció és més gran, però no l'utilitza correctament.

5.3.2 Anàlisi de dades de la pregunta 13

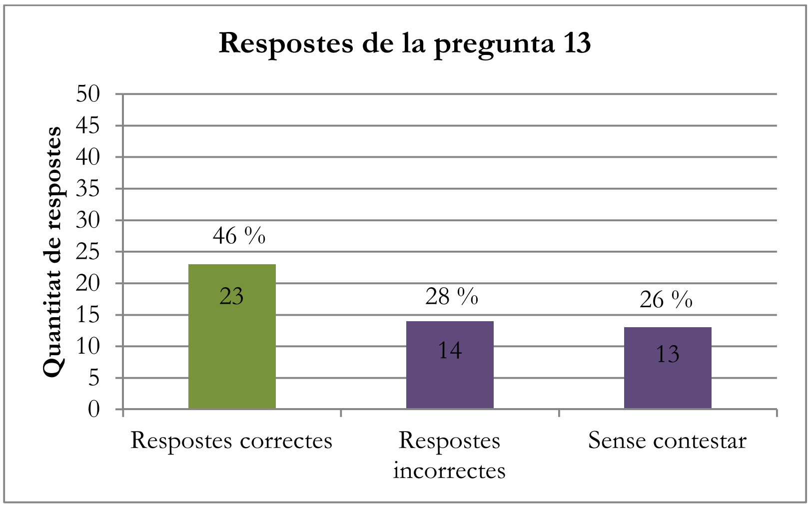
A la figura 5.68 es mostra la pregunta 13 on els estudiants han d'explicar com comparar les fraccions 5/7 i 7/9 sense utilitzar el mínim comú múltiple.

13.Sense utilitzar el mcm (mínim comú múltiple), explica com saber quina fracció és més gran: 5/7 o 7/9.

Figura 5.68. Pregunta 13 del qüestionari de fraccions.

Entre tots quaranta-sis estudiants s'han comptabilitzat cinquanta respostes perquè hi ha quatre estudiants que han dit dues maneres diferents d'explicar com comparar les fraccions de l'enunciat. Les respostes sense contestar també s'han inclòs dins d' aquestes cinquanta. El nombre de respostes correctes, incorrectes i no contestades d'aquesta pregunta es mostren al gràfic de la figura 5.69. Els percentatges de respostes correctes, incorrectes i sense contestar s'han calculat sobre les cinquanta respostes i no sobre els quaranta-sis estudiants. Del total de cinquanta respostes, vint-i-tres han estat elaborades de forma correcta (46%), catorze de forma incorrecte (28%) i tretze sense contestar (26%).

Les respostes contestades s'han distribuït en vuit categories diferents segons l'explicació que els estudiants han realitzat: Multiplicar en creu (DE1), Representar les fraccions a la recta numèrica (DE2), Buscar la fracció que s'acosta més a 1 (DE3), Dividir per trobar els nombres decimals (DE4), Representar gràficament les fraccions (DE5), Comparar numeradors i denominadors (DE6), Fer càlculs amb els numeradors i denominadors (DE7), i finalment, Les dues fraccions són iguals (DE8). Primer s'explicaran les categories que inclouen les respostes correctes (vegeu taula 5.41) i a continuació les que inclouen les respostes incorrectes (vegeu taula 5.42).



Codi	**Categories**	**Quantitat de respostes**
DE1	Multiplicar en creu	1
DE2	Representar les fraccions a la recta numèrica	1
DE3	Buscar la fracció que s'acosta més a 1	1
DE4	Dividir per trobar els nombres decimals	12
DE5	Representar gràficament les fraccions (correcte)	8

Buscar la fracció que s'acosta més a 1 (DE3)

De la mateixa manera que les DE1 i DE2, aquesta categoria només conté una resposta, la de l'estudiant que ha dit que la fracció "*7/9 és més gran perquè s'acosta més a 1*". Aquesta estratègia també és correcte, tot i que s'hauria de veure quin raonament s'utilitza per veure que una fracció s'acosta més a 1.

Dividir per trobar els nombres decimals (DE4)

És la categoria que conté més respostes, dotze en total. Hi ha respostes que només expliquen que cal dividir numerador i denominador per saber els nombres decimals i després comparar-los i d'altres que a més han fet la divisió i han observat que 7/9 és més gran que 5/7. Aquest procediment també és correcte.

Representar gràficament les fraccions (DE5)

Vuit respostes contenen representacions gràfiques per tal de comparar les dues fraccions i veure que 7/9 és més gran que 5/7. De les vuit respostes, en set s'han representat les fraccions 7/9 i 5/7 en rectangles i en l'altra s'han representat les fraccions en cercles (vegeu figura 5.70). Tot i que en algunes respostes les unitats no s'han dibuixat exactament amb les mateixes dimensions, el procediment és correcte.

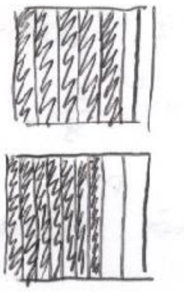
Figura 5.70. Exemples de representació gràfiques de les fraccions 7/9 i 5/7 en rectangles i en cercles a fi de comparar-les.

Anàlisi de les respostes incorrectes a l'hora de comparar les fraccions 5/7 i 7/9

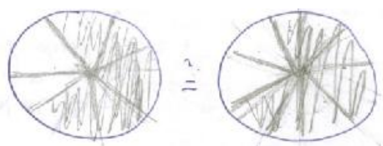
Les respostes per justificar que la fracció 7/9 és més petita que la fracció 5/7 estan agrupades en quatre de les vuit categories proposades (vegeu taula 5.42).

Taula 5.42. Classificació en categories de les respostes incorrectes de la pregunta 13.

Codi	Categories	Quantitat de respostes
DE5	Representar gràficament les fraccions	2
DE6	Comparar numeradors i denominadors	9
DE7	Fer càlculs amb els numeradors i denominadors	1
DE8	Les dues fraccions són iguals	2



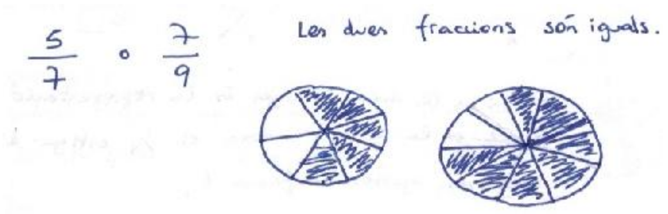
$\frac{5}{7}$ é mué grau pe $\frac{7}{9}$



multipliquem el numerador i el denominador de cada fracció pel mateix número i el resultat més gran serà la fracció més gran.

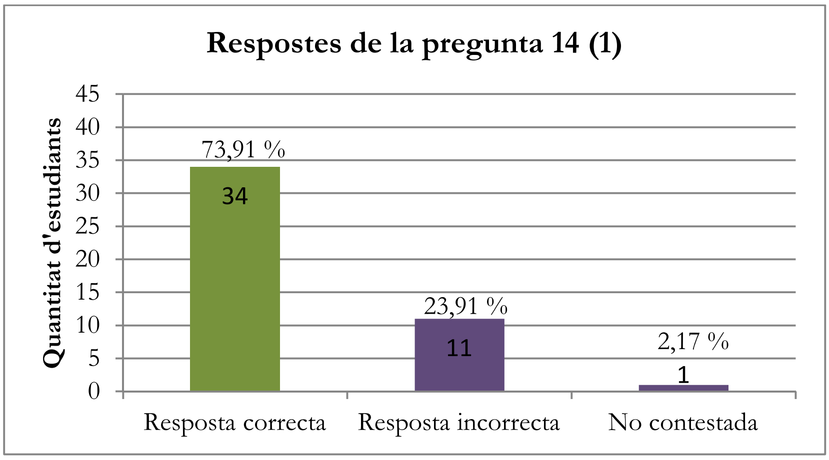
$$\frac{7}{9}\xrightarrow{\times 4} = \frac{28}{36}$$

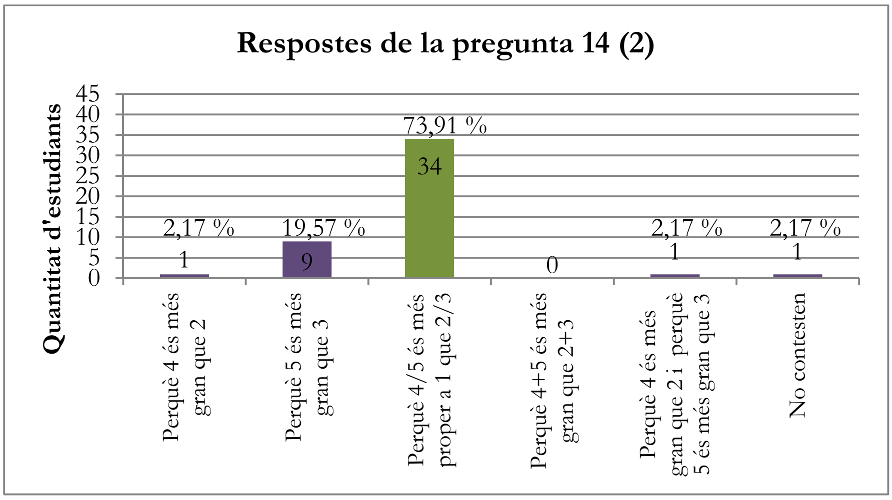
$$\frac{5}{7}\xrightarrow{\times 4} = \frac{20}{28}$$



14.Els estudiants de la classe de la Srta. Johnson havien d'explicar perquè 4/5 és més gran que 2/3. Quina et sembla que és la millor raó?

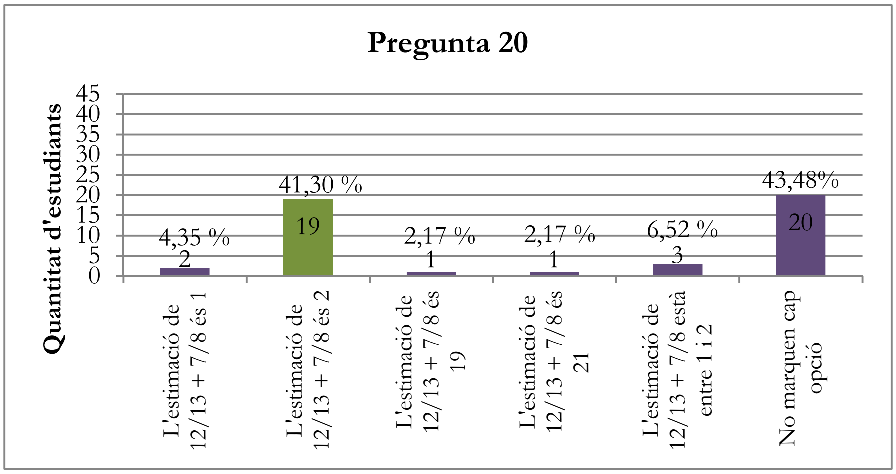
- ☐ Kelly va dir: " Perquè 4 és més gran que 2"
- ☐ Keri va dir: "Perquè 5 és més gran que 3"
- ☐ Kim va dir: "Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3"
- ☐ Kevin va dir: "Perquè 4+5 és més que 2+3"

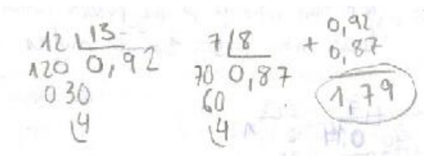

Respostes de la pregunta 14 (1)
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
73,91 %
34
23,91 %
11
2,17 %
1
Resposta correcta
Resposta incorrecta
No contestada

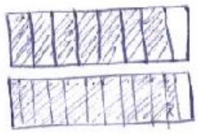


20.Fes una estimació de 12/13 + 7/8, marca l'opció que consideres correcte i explica com ho has fet:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 19
- ☐ 21


Pregunta 20
Quantitat d'estudiants
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
4,35 %
2
41,30 %
19
2,17 %
1
2,17 %
1
6,52 %
3
43,48%
20
L'estimació de 12/13 + 7/8 és 1
L'estimació de 12/13 + 7/8 és 2
L'estimació de 12/13 + 7/8 és 19
L'estimació de 12/13 + 7/8 és 21
L'estimació de 12/13 + 7/8 està entre 1 i 2
No marquen cap opció


12 | 13
120 0,92
030
4
7 | 8
70 0,87
60
4
+ 0,92
0,87
1,79



$$\frac{12}{13} + \frac{7}{8} = \quad 19$$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ 2 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

mcm

$13 = 6 \cdot 1$

Hem de reduir el denominador

entenem que l'estudiant volia escriure "*1,5 < x < 2*" i s'ha confós amb el signe ">". Segons el tipus de justificació es poden classificar en dos grups:

La suma de les fraccions 12/13 i 7/8 està entre 1 i 2 (Grup 10)

En aquest grup hi ha dos dels tres estudiants que donen com a resposta "*entre 1 i 2*", fan la suma de les fraccions obtenint el 187/104. Segons aquest resultat diuen que el resultat està entre 1 i 2. L'estudiant que s'ha equivocat amb l'escriptura del signe ">" està en aquest grup.

Les fraccions 12/13 i 7/8 no són unitats senceres i la suma està entre 1 i 2 (Grup 11)

Només 1 estudiant està en aquest grup, diu que cap de les dues fraccions és una unitat sencera i per això la suma estaria entre 1 i 2.

Anàlisi de les respostes que no marquen cap opció

Hi ha vint estudiants que no han marcat cap de les opcions. Es poden classificar en dos grups.

La suma 12/13 + 7/8 sense interpretar (Grup 12)

Els dos estudiants d'aquest grup han calculat la suma 12/13 + 7/8 però de forma equivocada, un obté 200/104 i l'altre 177/104. Tots dos han sabut calcular el mínim comú múltiple per trobar el denominador comú, però s'han equivocat fent les multiplicacions per trobar la fracció equivalent a 7/8. Aquests dos estudiants una vegada obtingut el resultat de la suma no l'han sabut interpretar.

Sense contestar (Grup 13)

En aquest grup hi ha divuit dels vint estudiants que no han escollit cap opció i que han deixat la pregunta en blanc i no han explicat res. D'aquests divuit hi ha un estudiant que especifica que no el sap fer.

Anàlisi de les respostes segons la justificació realitzada

Les respostes dels tretze grups obtinguts a partir de l'opció triada es poden agrupar en quatre categories segons el tipus de justificació amb la que s'han recolzat: Raonament conceptual (ESTI1), Procediment de càlcul (ESTI2), Representació gràfica (ESTI3) i Sense justificació (ESTI4) (vegeu taula 5.43).

El percentatge d'estudiants de la categoria Raonament conceptual (ESTI1) que ha encertat l'opció correcte (81,25%) és el doble que el d'estudiants de la categoria Procediment de càlcul (ESTI2) que ha triat l'opció correcte. A continuació s'explica amb més detall cada categoria.

Taula 5.43. Classificació de les respostes de la pregunta 20 segons la justificació realitzada. En verd les respostes correctes i en lila les incorrectes o sense contestar.

Categoria	Grup	Opció de l'enunciat	Quantitat d'estudiants per grup	Quantitat d'estudiants per categoria
Raonament conceptual (ESTI1)	Grup 1: 12/13 i 7/8 s'aproximen a 1 i la suma a 2	2	13	16
	Grup 6: 12/13 i 7/8 s'aproximen a 1 i la suma a 1	1	1	
	Grup 9: 12/13 s'aproxima a 13 i 7/8 a 8 i la suma a 21	21	1	
	Grup 11: Les fraccions 12/13 i 7/8 no són unitats senceres i la suma està entre 1 i 2	Entre 1 i 2	1	
Procediment de càlcul (ESTI2)	Grup 2: La suma de les fraccions12/13 i 7/8 s'aproxima a 2	2	2	10
	Grup 3: Suma dels nombres decimals	2	2	
	Grup 7: La suma de les fraccions 12/13 i 7/8 s'aproxima a 1	1	1	
	Grup 8: La suma de les fraccions 12/13 i 7/8 s'aproxima a 19	19	1	
	Grup 10: La suma de les fraccions 12/13 i 7/8 està entre 1 i 2	Entre 1 i 2	2	
	Grup 12: La suma 12/13 + 7/8 sense interpretar	Cap	2	
Representació gràfica (ESTI3)	Grup 4: Representació gràfica de 12/13 i 7/8	2	1	1
Sense justificació (ESTI4)	Grup 5: No explica l'elecció	2	1	19
	Grup 13: Sense contestar	Cap	18	

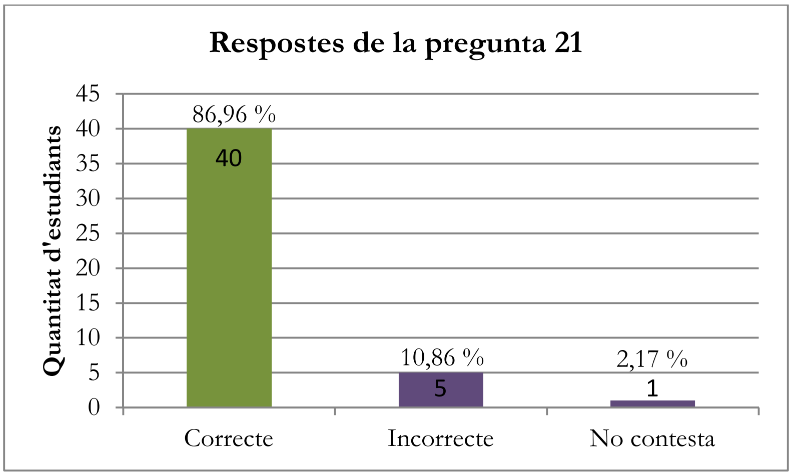
Raonament conceptual (ESTI1)

En aquesta categoria s'han inclòs grups on les seves respostes justifiquen l'elecció de l'opció sigui quina sigui a partir de raonaments conceptuals. En total hi ha setze estudiants que han respost tres opcions diferents de l'enunciat i la que s'ha afegit, "entre 1 i 2". De les setze respostes d'aquesta categoria n'hi ha tretze de correctes.

Procediment de càlcul (ESTI2)

Deu estudiants formen part d'aquesta categoria, són els que han calculat la suma de les fraccions 12/13 i 7/8 per decidir l'estimació d'aquesta suma. Només quatre respostes de les deu d'aquesta categoria són correctes.

21.Calcula 1/3 + 2/5 i representa-ho gràficament.



Anàlisi de les respostes segons la part del procés de la suma que s'ha representat

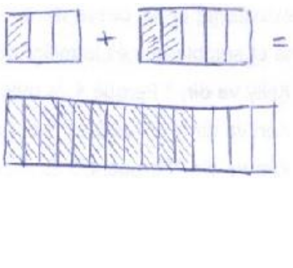
Els estudiants s'han classificat en diferents categories en funció de si han calculat correctament la suma 1/3 + 2/5 i de la representació del procés de la suma que han realitzat. Les respostes correctes s'han agrupat en quatre categories tenint en compte si l'estudiant no ha realitzat cap representació, només ha realitzat la representació del resultat, la representació d'una part del procés o bé la representació de tots els passos de la suma. Per classificar les respostes incorrectes s'ha seguit el mateix procés, però en aquest cas només s'han obtingut dues categories. En el grup de respostes incorrectes no hi ha cap resposta sense representació ni cap que representi tot el procés de la suma, per això no hi ha aquestes categories (vegeu taula 5.44). A continuació s'exposen amb detall les diferents categories.

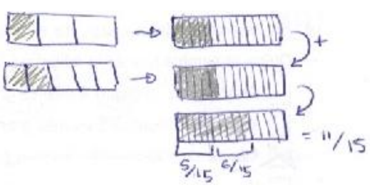
Taula 5.44. Classificació en categories de les respostes correctes i incorrectes de la pregunta 21.

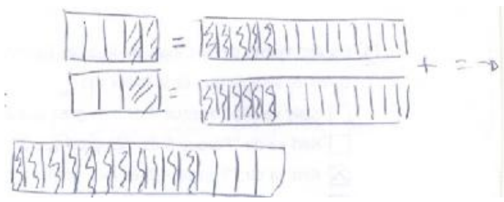
Càlcul de 1/3 + 2/5	Categoria	Interpretació de les fraccions	Representació	Quantitat d'estudiants
Correcte	Sense cap representació (SUMA1)	---	---	5
	Representació del resultat (11/15) (SUMA2)	Comparació part-tot	Grup d'objectes	1
			Hexàgon	1
			Rectangle	18
			Cercle	1
		Mesura	Recta numèrica	7
	Representació d'una part del procés de la suma (1/3, 2/5 i 11/15; 5/15, 6/15 i 11/15) (SUMA3)	Comparació part-tot	Rectangle	5
	Representació de tot el procés de la suma (1/3, 2/5, 5/15, 6/15 i 11/15) (SUMA4)	Comparació part-tot	Rectangle	2
Incorrecte	Representació del resultat (3/8; 10/15) (SUMA 5)	Comparació part-tot	Rectangle	2
			Cercle	1
	Representació d'una part del procés de la suma (1/3, 2/5 i 3/8; 1/3, 2/5 i 1/3 + 2/5) (SUMA6)	Comparació part-tot	Rectangle	1
		Mesura	Recta numèrica	1

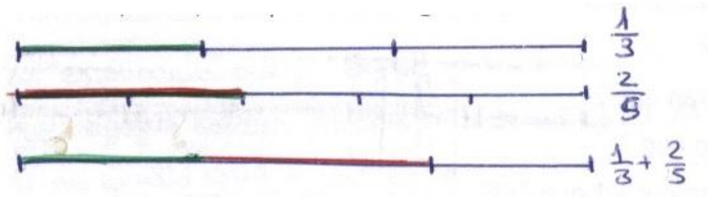
Sense cap representació (SUMA1)

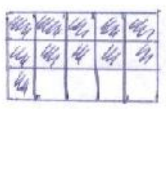
Hi ha cinc estudiants que han realitzat el procediment correcte de la suma 1/3 + 2/5 però que no han realitzat cap representació. Per a resoldre la suma quatre estudiants han realitzat

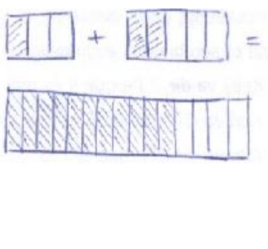


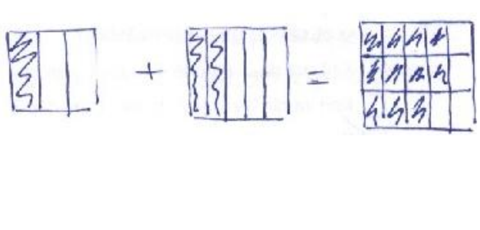

+
= 11/15
5/15
6/15

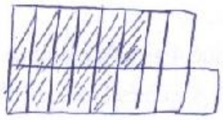

=
=
+

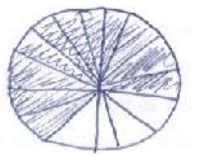

$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

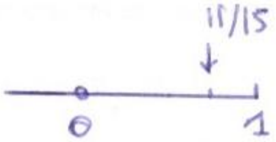




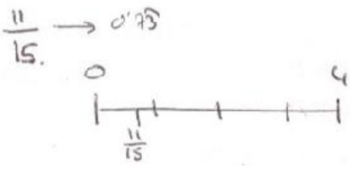




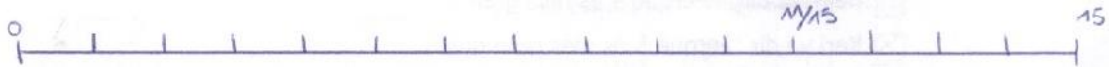


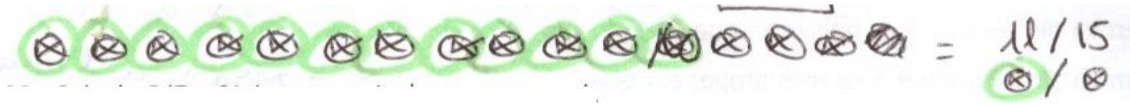


Imatge 1

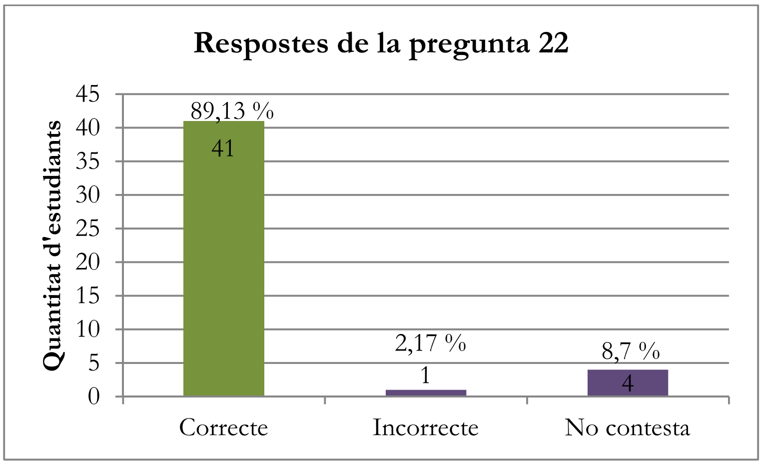


Imatge 2





22.Calcula 2/5 x 3/4 i representa-ho gràficament.



Càlcul de $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	Categoria	Resposta	Interpretació de les fraccions	Representació	Quantitat d'estudiants	
Correcte	Sense cap representació (MULTI1)	6/20	---	---	6	11
		3/10	---	---	5	
	Representació del resultat ($\frac{6}{20}$, $\frac{3}{10}$ o 0,3) (MULTI2)	6/20	Comparació part-tot	Rectangle	9	28
		3/10			12	
		6/20	Mesura	Recta numèrica	3	
		3/10			1	
		0,3			3	

	Representació d'una part del procés de la multiplicació ($\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{20}$) (MULTI3)	6/20	Comparació part-tot	Rectangle	2	2
Incorrecte	Representació del resultat ($\frac{8}{15}$) (MULTI4)	8/15	Comparació part-tot	Hexàgon	1	1

Sense cap representació (MULTI1)

Hi ha onze estudiants (23,91% dels quaranta-sis estudiants) que han realitzat el procediment correcte de la multiplicació 2/5 x 3/4 però no han realitzat cap representació. Sis estudiants han calculat la multiplicació 2/5 x 3/4 = 6/20 i no han simplificat el resultat de la multiplicació, els altres cinc estudiants han simplificat la fracció 6/20 obtenint la fracció 3/10.

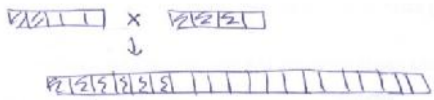
Representació del resultat (6/20 o 3/10) (MULTI2)

Vint-i-vuit estudiants formen part d'aquesta categoria (60,87% dels quaranta-sis estudiants), és la categoria amb més estudiants. Dotze estudiants han resolt la multiplicació dient com a resultat la fracció 6/20, tretze han simplificat la fracció 6/20 i han donat com a resultat la fracció 3/10 i tres han donat com a resultat el 0,3. Tots els estudiants d'aquesta categoria han representat només el resultat de la multiplicació, sigui 6/20, 3/10 o 0,3 i no han representat cap altra fracció que intervé en la multiplicació.

Vint-i-un estudiants d'aquesta categoria han interpretat la fracció com a comparació part-tot i la resta com a mesura. Tots els vint-i-un estudiants que han interpretat la fracció com a comparació part-tot han utilitzat un model d'àrea per representar el resultat de la multiplicació i han dibuixat rectangles. Els set estudiants que han interpretat la fracció com a mesura han representat el resultat a la recta numèrica.

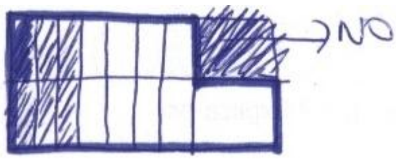
Representació d'una part del procés de la multiplicació (2/5, 3/4 i 6/20) (MULTI3)

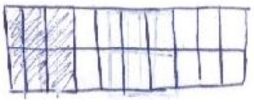
Només dos estudiants han representat a més de la fracció 6/20 les fraccions que es proposen per a realitzar la multiplicació, 2/5 i 3/4. Tots dos estudiants han representat les fraccions 2/5, 3/4 en unitats de diferent superfície que la unitat que han utilitzat per representar la fracció 6/20 (vegeu figura 5.95).

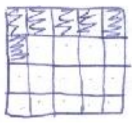


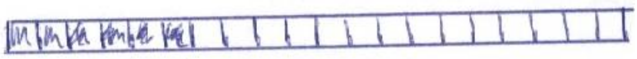
t el

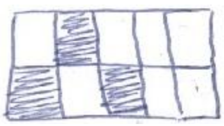
$\frac{8}{15}$ (MU

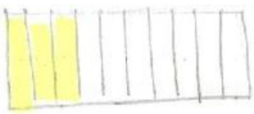






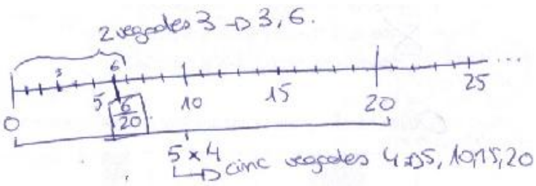




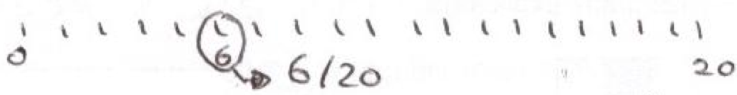



NO

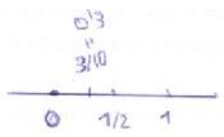
Representació 1

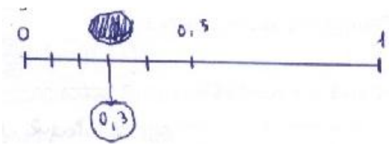


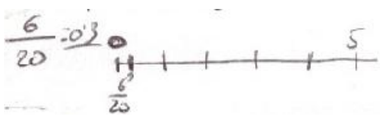
Representació 2



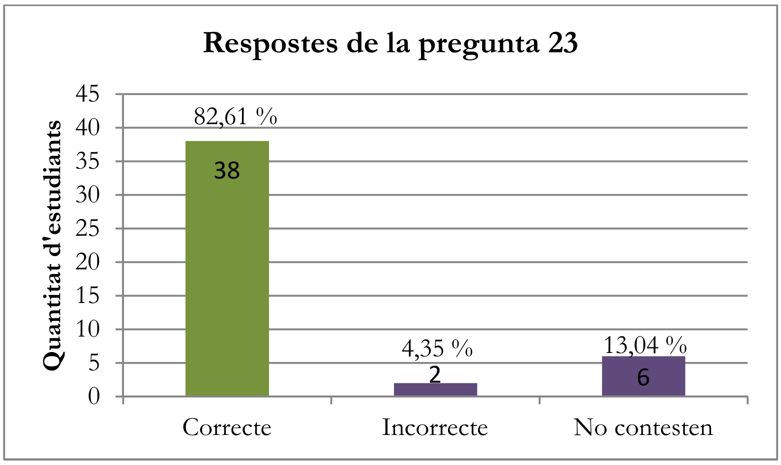
Representació 3







23.Calcula 4/5 ÷ 2/3.



$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$$

Resolució 1

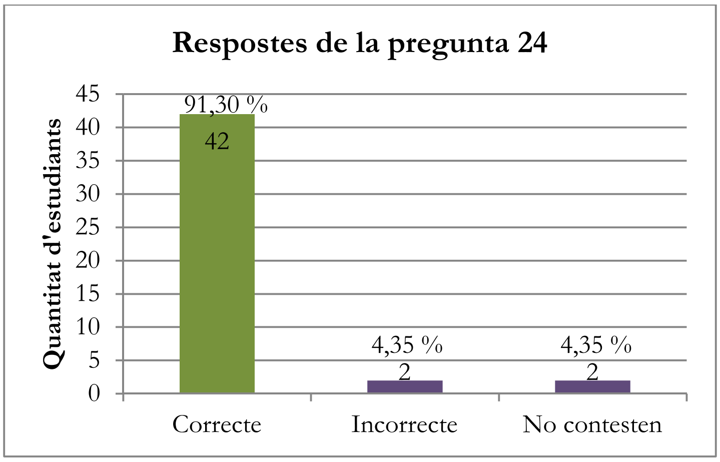
$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$$

Resolució 2

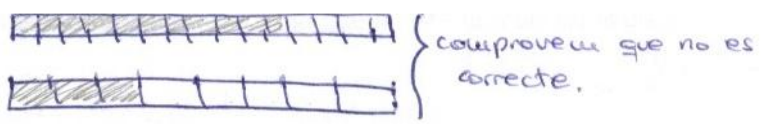
$$\frac{4}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{5/3}$$

24. Un alumne diu que 1/3 + 2/5 és 3/8. És correcte aquesta resposta? Explica per què sí o per què no.



Resposta correcta o incorrecta	**Justificació centrada en el resultat o en el procediment**	**Categoria**	**Quantitat d'estudiants**	
Respostes correctes	Se centren en el resultat	El resultat és 11/15 i no és equivalent a 3/8 (EXPLI1)	7	**42**
	Se centren en el procediment	No se sumen numeradors i denominadors directament (EXPLI2)	5	
		Cal fer un altre procediment (EXPLI3)	30	
Respostes incorrectes		Se sumen numeradors i denominadors directament (EXPLI4)	2	**2**



equivalents. Per exemple, les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents i el 12 no és múltiple de 8.

No se sumen numeradors i denominadors directament (EXPLI2)

Els cinc estudiants d'aquesta categoria s'han centrat en el procediment seguit a l'hora de resoldre la suma 1/3 + 2/5 = 3/8, però només han dit el que no és correcte sense explicar perquè no ho és i sense proposar cap alternativa explicant el que s'havia de fer per resoldre la suma correctament. Tots cinc estudiants han dit que la suma de fraccions no es resol sumant els numeradors i els denominadors.

Cal fer un altre procediment (EXPLI3)

La categoria EXPLI3 és la més nombrosa de les respostes correctes i consta de trenta estudiants. Tots els estudiants d'aquesta categoria han fet referència al procediment seguit a l'hora de resoldre la suma 1/3 + 2/5 = 3/8, han manifestat que no és correcta i han proposat alternatives de com s'hauria de resoldre.

Hi ha tres tipus de resposta diferent a l'hora de justificar perquè no és correcta la suma de l'enunciat. Vint dels trenta estudiants d'aquesta categoria diuen que no es poden sumar directament els numeradors i els denominadors ja que cal calcular el mínim comú múltiple. El grau de detall de les respostes ha estat diferent entre aquests estudiants: alguns només han dit que cal fer el mínim comú múltiple, mentre que altres han explicat com s'hauria de portar a terme el procés. Dels vint estudiants només sis expliquen el procés per sumar fraccions utilitzant el mínim comú múltiple, d'aquests sis estudiants tres no expliquen de forma prou correcta el procediment mentre que els altres tres l'expliquen de forma correcta.

Nou estudiants formen el segon grup dins d'aquesta categoria i són els que han dit que per poder sumar aquestes fraccions cal tenir denominadors comuns o bé que la "mida" de les parts ha de ser la mateixa.

El tercer grup de respostes està format per una sola resposta i és un estudiant que explica que per aconseguir els denominadors iguals cal multiplicar-los.

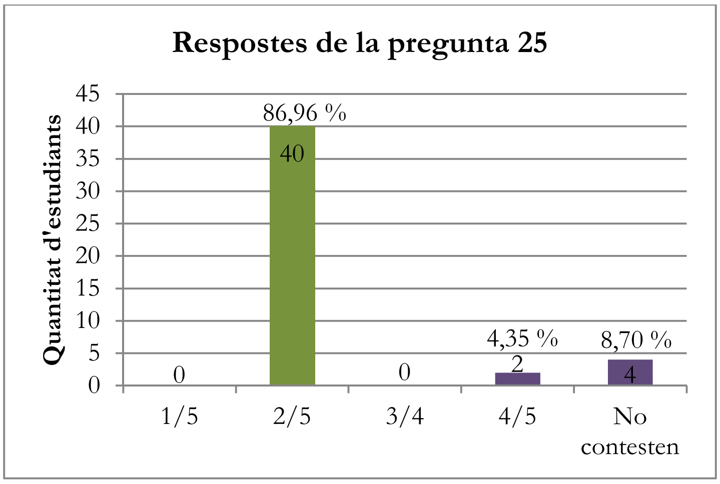
En tots tres grups de respostes d'aquesta categoria hi ha hagut respostes amb alguna explicació que no ha estat elaborada de forma prou correcta. Concretament cinc estudiants s'han equivocat en l'explicació, no han explicat correctament el procés de sumar les fraccions amb denominadors diferents o bé utilitzen termes de forma incorrecta (vegeu taula 5.47).

Explicació de l'error	**Resposta dels estudiants**	**Quantitat d'estudiants**
No expliquen correctament el procés de sumar fraccions amb denominadors diferents	"*No, perquè quan el denominador és diferent s'ha de buscar el mínim comú múltiple i després sumar els numeradors*". "*El que s'ha de fer és buscar el m.c.m. dels denominadors i llavors multiplicar pel mateix valor els numeradors i finalment sumar-los*". "*Perquè has de fer el mcm de 3 i 5. Després el 15 has de multiplicar per el numerador i sumar-ho*". "*No, es sumen els numeradors però els denominadors es multipliquen*".	4
Utilitza un terme de forma incorrecta	"*No és correcte perquè l'alumne ha sumat els denominadors en comptes de buscar el seu denominador comú múltiple*".	1

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10}{15}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{30}{15}=\frac{2}{1}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}$

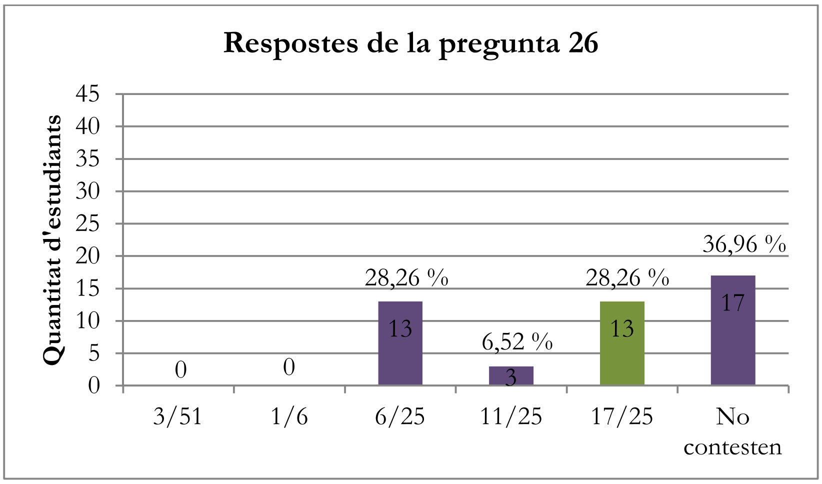
25.Quin és el valor de 4/5 -1/3 -1/15?

- ☐ 1/5
- ☐ 2/5
- ☐ 3/4
- ☐ 4/5



26.Calcula 3/5 + 3/10 x 4/15 =

- ☐ 3/51
- ☐ 1/6
- ☐ 6/25
- ☐ 11/25
- ☐ 17/25



Anàlisi de les respostes que han escollit l'opció incorrecta 6/25

Els tretze estudiants d'aquesta categoria deduïm que s'han equivocat per no tenir en compte la prioritat de les operacions. Primer han realitzat la suma 3/5 + 3/10 = 9/10 i després pot ser que hagin portat a terme la multiplicació 9/10 x 4/15 = 36/150. Si es simplifica la fracció 36/150 s'obté la fracció 6/25. Aquests estudiants han hagut de buscar fraccions amb denominadors comuns, sumar i multiplicar i simplificar fraccions. Per tant, l'únic error que segurament han comès ha estat no tenir en compte l'ordre de les operacions.

Anàlisi de les respostes que han escollit l'opció incorrecta 11/25

Només tres estudiants han escollit aquesta opció i en aquest cas, és més difícil deduir què poden haver realitzat aquests tres estudiants per escollir aquesta opció incorrecta. No hem estat capaços d'interpretar aquest resultat.

5.4.8 Anàlisi de dades de la pregunta 27

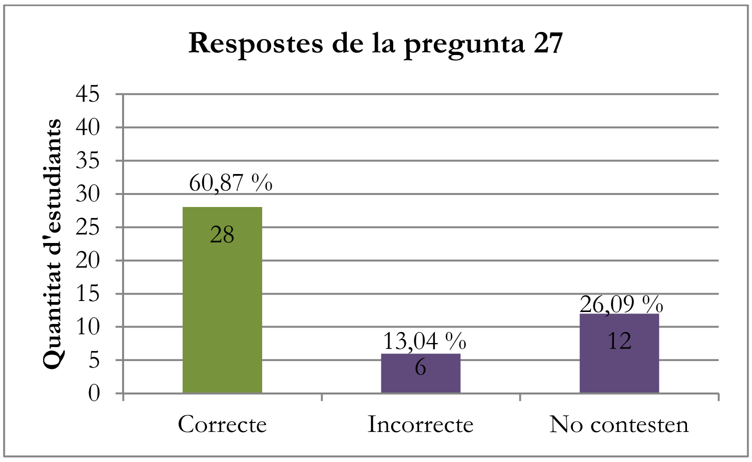
A la figura 5.116 es mostra la pregunta 27 on cal trobar dues fraccions que quan es divideixen s'obté una fracció amb denominador 4.

27.La divisió de dues fraccions és una fracció amb numerador 4. Quines poden ser aquestes fraccions?

Figura 5.116. Pregunta 27 del qüestionari de fraccions.

La quantitat de respostes correctes, incorrectes i no contestades es mostra al gràfic de la figura 5.117. Vint-i-vuit estudiants (60,87%) han proposat una divisió o més d'una que compleixen el que es demana a l'enunciat. Sis estudiants (13,04%) han proposat fraccions que quan es divideixen no s'obté una fracció amb el numerador 4. Més d'una quarta part dels estudiants, dotze concretament (26,09%) no ha contestat la pregunta i per tant no han proposat cap fracció.

En funció de les fraccions que han proposat els estudiants s'han classificat les respostes en sis categories (vegeu taula 5.48). Cinc categories contenen les respostes correctes i només s'ha proposat una categoria per les respostes incorrectes. A continuació s'analitzen les respostes de cada categoria amb més detall.



Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants	
Respostes correctes	Proposen $\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$ (GENE1)	7	28
	Proposen $\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ (GENE2)	3	
	Proposen $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$ (GENE3)	3	
	Proposen $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ (GENE4)	11	
	Proposen altres fraccions (GENE5)	4	
Respostes incorrectes	Proposen fraccions incorrectes (GENE6)	6	6

cate go ies le ene t

les ategor es GE IE1

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$ o

le frac ion c ere ts

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$ ((

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$.

$\frac{2}{x} : \frac{x}{2} = \frac{4}{x} \,/\, \frac{1}{x} : \frac{x}{4} = \frac{4}{x} \,/\, \frac{4}{x} : \frac{x}{1} = \frac{4}{x}$

$\frac{2}{\ } \div \frac{\ }{2} = \frac{4}{\ } \;|\; \frac{1}{\ } \div \frac{\ }{4} = \frac{4}{\ } \;|\; \frac{4}{\ } \div \frac{\ }{1} = \frac{4}{\ }$

: exp li cio s

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ ((

ia c nté la esp

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ se

$\frac{2}{\ } : \frac{\ }{2} = \frac{4}{\ } \qquad \frac{1}{\ } : \frac{\ }{4} = \frac{4}{\ }$

gur $\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B}$

$\frac{C}{2}$.

: do estudi nts

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ (v

$\frac{2}{4} : \frac{1}{\cancel{4}2} = \frac{4}{4} \;//\; \frac{1}{1} : \frac{4}{4} = \frac{4}{4} \;// \qquad \frac{2}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{4} \qquad \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2}$

ple de resp osta

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$ i $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$.

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$ ((

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$. U

ts p

ıdia

$\frac{4}{4}$. U

$\frac{2}{4} : \frac{1}{2} = \frac{4}{4}$ // $\frac{4}{2} : \frac{2}{1} = \frac{4}{4}$ $\frac{2}{2} : \frac{2}{2} = \boxed{\frac{4}{4}}$ $\frac{4}{4} : \frac{1}{1} = \boxed{\frac{4}{4}}$

ı **5. 21.** Ex mp

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$.

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ ((

; nc nbr

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$. (

:ció ha

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ (v

$\frac{2}{} \div \frac{}{2} = \frac{4}{}$

$\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$.

s altre ; sis :studia nts d'a questa cai egoria pro ›osen d

$\frac{3}{2} \div \frac{2}{2}$

$\frac{4}{6}, \frac{2}{7} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{7}, \frac{2}{4} \div \frac{4}{2}, \frac{2}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{9}, \frac{2}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1}$ i $\frac{2}{2} \div \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$. I

divis'ó o bé

$\frac{2}{2} \div \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ ec

ateg ›ria ha ı prop‹ sat

; di isio ıs

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$. E

$\frac{8}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{4}{1}$,

$\frac{20}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{4}{7}$, $\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} =$ $\frac{16}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{16}{4} =$

$\left[4 = \frac{8}{2} \cdot 2 = \frac{16}{2} = 8\right]$ $8 : \frac{1}{2} = \frac{16}{2} : \frac{2}{1} = \frac{16}{4} = 4$ trobem la fracció de 8 i com que volem trobar 4 ho dividim per la fracció de 2.

Explicació de l'error	Resposta dels estudiants		Quantitat d'estudiants	
Procés de dividir erroni (Error 1)	Error 1a	$\frac{8}{1} : \frac{1}{2} = \frac{4}{1}$	1	2
	Error 1b	$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$	1	
L'enunciat no s'ha comprès (Error 2)	Error 2a	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	1	2
	Error 2b	$\frac{8}{2}$ / $\frac{16}{4}$	1	
Confusió entre els termes numerador i denominador (Error 3)	Error 3a	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$	2	2

sioı s de

$\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}, \frac{2}{B}$

.cciı ns ı ɔncı

$\frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$.]

GENE1 que han proposat totes les possibles divisions no han dit fraccions en concret, tots han proposat les divisions $\frac{1}{B} \div \frac{C}{4}$, $\frac{2}{B} \div \frac{C}{2}$ i $\frac{4}{B} \div \frac{C}{1}$.

El procediment de multiplicar en creu és el que més ha permès de generalitzar. Els estudiants que han utilitzat altres procediments han proposat fraccions concretes.

Deu estudiants dels vint-i-vuit que han donat respostes correctes proposen divisions de fraccions on el resultat de la divisió de fraccions o les mateixes fraccions que proposen són nombres enters. La meitat d'aquests deu estudiants han proposat divisions que de fet són divisions de nombres enters: $\frac{1}{1} \div \frac{4}{4} = \frac{4}{4}$, $\frac{4}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{4}{4}$, $\frac{2}{2} \div \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$, $\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} = 4$ i $\frac{16}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{16}{4} = 4$.

En les respostes dels estudiants s'han detectat alguns errors de diferent tipologia:

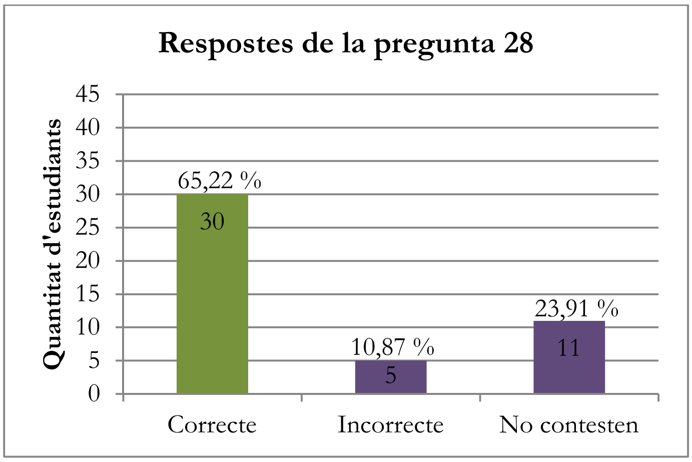
- Error en l'escriptura d'igualtats: un estudiant que ha escrit una divisió de forma correcta s'ha equivocat en escriure les igualtats. No ha tingut en compte el significat del signe igual i no té el mateix valor el que ha escrit a cada costat del signe igual.
- Error en el procés de dividir: dos estudiants no han sabut dividir correctament, han utilitzat procediments incorrectes per a realitzar el càlcul de la divisió. Això ha fet que la divisió que proposessin fos incorrecte. Els dos estudiants sembla que volien utilitzar el procediment de multiplicar en creu.
- Error en la comprensió de l'enunciat: dos estudiants no han entès l'enunciat de forma correcta i això ha fet que hagin donat una resposta incorrecta.
- Error en confondre el numerador i el denominador: un estudiant ha confós el terme numerador i denominador i això ha fet que busqués divisions de fraccions que el resultat fos una fracció amb denominador 4 en comptes de numerador 4.
- Error en confondre el numerador i el denominador i en el procés de dividir: un estudiant ha realitzat dos errors a la vegada, confondre el numerador i denominador i no dividir d'una forma correcta.

5.4.9 Anàlisi de dades de la pregunta 28

A la figura 5.124 es mostra la pregunta 28 en la que els estudiants han de trobar el nombre que falta perquè es compleixi la igualtat: $\frac{2}{?}$ x 6 = 4.

28.Quin és el nombre que falta perquè es compleixi la següent igualtat: $\frac{2}{?}$ x 6 = 4

Figura 5.124. Pregunta 28 del qüestionari de fraccions



Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants	
Respostes correctes	Resolució d'una equació (IGU1)	9	30
	Fracció com a operador (IGU2)	4	
	Multiplicació de fraccions (IGU3)	7	
	Directament el resultat (IGU4)	10	
Respostes incorrectes	Resultat o procés incorrecte (IGU5)	5	5

$\frac{2}{x} \cdot 6 = 4 \Rightarrow \frac{12}{x} = 4 \Rightarrow 12 = 4x \Rightarrow \frac{12}{4} = x \Rightarrow x = \boxed{3}$

$\frac{2}{?}$ x

$\boxed{\frac{2}{x} \times 6 = 4} = \frac{2}{x} \times 6 = 4 \rightarrow \frac{12}{x} = 4 = \frac{12}{4} = \boxed{x = 3}$

gor

$\frac{2}{?}$ c

$\frac{2}{?} \cdot 6 = 4$ Falta el nº 3.

Resolució 1

$\frac{2}{3} \times 6 = 4$

Resolució 2

$\frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = 4$

Resolució 3

$\frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = \boxed{4}$

Resolució 4

$\frac{2}{?}$ c

ıa c

nul

$\frac{2}{?}$ p

$$\frac{2}{?} \times \frac{6}{1} = 4 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$$

$\frac{2}{1} : ? \times 6 = 4$

→ El nombre que falta es el $\boxed{3}$

$6 : 2 = 3 \cdot 4 = 12 \quad = 6 \cdot 2 = 12 : 4 = \boxed{3}$

5.5.1 Anàlisi de dades de la pregunta 3

A la figura 5.131 es mostra la pregunta 3 on els estudiants han de dir quina és la fracció més gran i la fracció més petita que coneixen.

3.(a) Quina és la fracció més gran que coneixes?
(b) Quina és la més petita?

Figura 5.131. Pregunta 3 del qüestionari de fraccions.

Les respostes d'aquesta pregunta es mostraran primerament per apartats i després es relacionaran les dades dels dos apartats.

Anàlisi de dades de l'apartat (*a*)

Vuit estudiants han deixat aquest apartat sense contestar. Les respostes dels trenta-vuit estudiants que han contestat la pregunta s'han classificat en cinc categories segons la fracció que han proposat i l'explicació que han realitzat (vegeu taula 5.51). De les cinc categories només una contempla respostes correctes, concretament conté sis respostes. A continuació s'expliquen les respostes de cada categoria amb més detall.

Taula 5.51. Classificació en categories de les respostes correctes i incorrectes de la pregunta 3 (*a*).

Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants
Correctes	No hi ha aquesta fracció (INFI1)	6
Incorrectes	Infinit al numerador i/o al denominador (INFI2)	21
	Fraccions concretes (INFI3)	8
	Depèn de la unitat (INFI4)	1
	Depèn del numerador i del denominador (INFI5)	2

No hi ha aquesta fracció (INFI1)

Només sis estudiants formen part d'aquesta categoria i són els únics que han realitzat una resposta que es pot considerar correcta dient que no és possible trobar la fracció més gran. Els estudiants d'aquesta categoria donen una de les tres explicacions següents: les fraccions són infinites, sempre es pot trobar un nombre més gran i una resposta que no justifiquen. Concretament, dos estudiants han justificat que no es pot trobar una fracció que sigui la més gran perquè hi ha infinites fraccions. També, dos expliquen que sempre es pot trobar un nombre més gran. Un d'ells dius que "*No n'hi ha. Pot arribar a* ∞ ", entenem que si diu que pot arribar a infinit, sempre es pot trobar una fracció més gran que la que es tingui. Els altres dos estudiants d'aquesta categoria no justifiquen que no hi ha fracció més gran, només diuen que no n'hi ha sense afegir res més.

Infinit al numerador i/o al denominador (INFI2)

Aquesta categoria és la més nombrosa, vint-i-un estudiants han realitzat respostes que s'hi han inclòs. Les respostes d'aquesta categoria són incorrectes, en totes es proposa una fracció amb ∞ al numerador i/o al denominador, s'han classificat en quatre subcategroies: $\frac{\infty}{1}$ (INFI2.1A), $\frac{1}{\infty}$ (INFI2.2A), $\frac{\infty}{\infty}$ (INFI2.3A) i $+\infty$ (IINFI2.4A). A continuació s'explica cada subcategoria més detalladament.

$\frac{\infty}{1}$ *(INFI2.1A)*

Onze estudiants han proposat la resposta $\frac{\infty}{1}$ com a fracció més gran i un ha proposat la mateixa fracció amb un signe més davant de l'infinit, $\frac{+\infty}{1}$. Deu estudiants d'aquesta subcategoria només proposen aquesta fracció i no justifiquen la resposta. Els altres dos a més de proposar la fracció $\frac{\infty}{1}$ realitzen les explicacions següents: "*és infinitament gran, sempre n'hi haurà de més grans*", "*no la podem calcular numèricament perquè és infinita*". Sembla que tenen clar que donada una fracció sempre se'n pot trobar una de més gran, però la resposta d'aquests estudiants s'ha considerat en aquesta categoria i aquesta subcategoria perquè tot i l'explicació proposen la fracció $\frac{\infty}{1}$.

$\frac{1}{\infty}$ *(INFI2.2A)*

Dos estudiants han proposat la fracció $\frac{1}{\infty}$ com a fracció més gran. No han realitzat cap altra explicació justificant la resposta.

$\frac{\infty}{\infty}$ *(INFI2.3A)*

Cinc estudiants han proposat la fracció $\frac{\infty}{\infty}$ i un ha proposat la mateixa fracció amb el signe més davant de cada infinit: $\frac{+\infty}{+\infty}$. Aquest mateix estudiant ha posat que aquesta fracció és igual a $+\infty$. Cap d'aquests sis estudiants ha realitzat explicacions.

$+\infty$ *(INFI2.4A)*

Un sol estudiant ha proposat com a resultat $+\infty$, i ha respost que "*una fracció pot ser* $+\infty$". És l'únic estudiant dels que proposen resultats amb infinits que no ha proposat una expressió en forma de fracció, amb el numerador i el denominador.

Fraccions concretes (INFI3)

En aquesta categoria hi ha els vuit estudiants que han proposat fraccions concretes com a fracció més gran i han proposat les fraccions 1/0, 1/1, 1/2 i 3/4. Dos estudiants han proposat la fracció 1/2, un sol estudiant la fracció 3/4, un altre estudiant la fracció 1/0 i quatre estudiants han dit la fracció 1/1. Un estudiant dels quatre que han proposat 1/1 com a fracció més gran a més ha realitzat la següent explicació: "*quan el denominador i el numerador són iguals*". En aquesta categoria cap estudiant ha justificat la resposta.

Depèn de la unitat (INFI4)

Un únic estudiant dels quaranta-sis ha respost a la fracció més gran "*un total*". Com que a l'apartat (*b*) on es demana la fracció més petita ha dit "res", se suposa que amb un total es refereix a tota la unitat.

Depèn del numerador i del denominador (INFI5)

Aquesta categoria consta de dos estudiants. Per explicar quina és la fracció més gran fan, els dos fan referència a com ha de ser el numerador i denominador d'aquesta fracció. Un d'ells explica que "*la que té el numerador més gran i el denominador més petit*" i l'altre que "*poden ser moltes, depèn de com combinem numerador i denominador*". L'explicació del primer estudiant dóna més informació de com obtenir una fracció més gran, com més gran és el numerador i més petit el denominador més gran serà la fracció. Però cap dels dos diu que no és possible trobar aquesta fracció, per tant, les respostes són incorrectes.

Anàlisi de dades de l'apartat (*b*)

Vuit estudiants han deixat aquest apartat sense contestar. Les respostes dels trenta-vuit estudiants que han contestat la pregunta 3 (*b*) s'han classificat en les mateixes cinc categories que a l'apartat (*a*) (vegeu taula 5.52) i per tant també de les cinc categories només una contempla respostes correctes. A continuació s'expliquen les respostes de cada categoria amb més detall.

Taula 5.52. Classificació en categories de les respostes correctes i incorrectes de la pregunta 3 (*b*).

Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants
Correctes	No hi ha aquesta fracció (INFI1)	3
Incorrectes	Infinit al numerador i/o al denominador (INFI2)	17
	Fraccions concretes (INFI3)	14
	Depèn de la unitat (INFI4)	1
	Depèn del numerador i del denominador (INFI5)	3

No hi ha aquesta fracció (INFI1)

Únicament tres estudiants s'han considerat en aquesta categoria i són els que han realitzat una resposta dient que no és possible trobar la fracció més petita. Els tres estudiants fan referència al fet que sempre es pot trobar una fracció més petita que la que haguem trobat. Un dels estudiants explica que la més petita és la que té el resultat més petit en dividir numerador i denominador però després afegeix que sempre es pot trobar un nombre més petit: "*la que tingui el nombre més petit en dividir numerador i denominador. Sempre hi haurà un nombre més petit*". Per aquest motiu s'ha col·locat en aquesta categoria, entenem que vol dir que no hi haurà la una fracció que sigui la més petita.

L'altre estudiant diu que "*la fracció més petita no es pot calcular perquè podem utilitzar infinits nombres de numerador i denominador per aproximar-nos al màxim a 0. No té sentit 0/0*". També s'entén que sempre es podrà trobar una fracció que s'aproximi més a 0 i que sigui més petita que la que tinguem. Aquest estudiant diu que no té sentit 0/0, però per aproximar-se a 0 no cal que el numerador i el denominador s'aproximin a zero, de fet, com més gran és el denominador i més petit el numerador més petita serà la fracció. Dient que no té sentit 0/0 s'entén que interpreta que la fracció serà més petita si el numerador i denominador són més petits.

El tercer estudiant d'aquesta categoria diu que "*No n'hi ha, perquè pot ser negativa fins a ∞*". És correcte quan diu que no n'hi ha, per això s'ha considerat dins aquesta categoria, però no és correcte el fet que diu que pot ser negativa fins a ∞. En aquest cas es consideren fraccions negatives, però com s'ha explicat en el marc teòric, Lamon (2012) considera que el numerador i denominador d'una fracció són enteres positius.

Infinit al numerador i/o al denominador (INFI2)

Aquesta categoria és la que conté més respostes incorrectes, disset estudiants han proposat fraccions amb ∞ al numerador i/o al denominador, s'han classificat en cinc subcategories: $\frac{\infty}{1}$ (INFI2.1B), $\frac{1}{\infty}$ (INFI2.2B), $-\frac{\infty}{\infty}$ (INFI2.3B), $-\infty$ (INFI2.4B) i $-\frac{1}{\infty}$ (INFI2.5B).

$\frac{\infty}{1}$ *(INFI2.1B)*

Un sol estudiant ha proposat la fracció $\frac{\infty}{1}$ com a fracció més petita que coneix. Aquest estudiant no fa cap altra explicació.

$\frac{1}{\infty}$ *(INFI2.2B)*

Deu estudiants han proposat la fracció $\frac{1}{\infty}$ com a fracció més petita. Vuit d'aquests deu estudiants no han realitzat cap justificació de perquè han proposat aquesta fracció. Un d'aquests estudiants ha posat un signe més davant de l'infinit. Un altre estudiant d'aquests vuit a més de proposar $\frac{1}{\infty}$ ha proposat una altra fracció i punts suspensius: "$\frac{1}{100}$, *etc...* $\frac{1}{\infty}$". S'entén que com més gran sigui el denominador més petita serà la fracció.

Els altres dos estudiants d'aquest grup a més de proposar la fracció $\frac{1}{\infty}$ proposen explicacions complementàries: "$\frac{1}{\infty}$. *És infinitament petita, sempre n'hi haurà de més petites*" i "*no la podem calcular numèricament perquè és infinita.* $\frac{1}{\infty}$". Tot i dir que sempre n'hi haurà de més petites hem col·locat aquests estudiants en aquest grup i aquesta categoria perquè proposen la fracció $\frac{1}{\infty}$.

$-\frac{\infty}{\infty}$ *(INFI2.3B)*

Només dos estudiants han proposat la fracció amb un infinit al numerador i un al denominador. Concretament, un ha proposat $-\frac{\infty}{\infty}$ i l'altre $\frac{+\infty}{-\infty}$. En les dues fraccions hi ha un signe menys, en una davant de la fracció i en l'altra en el denominador, en aquest cas potser per considerar que el denominador ha de ser com més petit possible i el numerador el més gran que es pugui. Aquests dos estudiants no han realitzat cap altra explicació.

$-\infty$ *(INFI2.4)*

En aquest grup s'ha considerat únicament una resposta que fa referència al menys infinit a l'hora d'explicar quina fracció és la més petita. L'estudiant d'aquesta categoria diu que "*Igualment pot ser - ∞*", diu igualment perquè a l'apartat (a) diu que la fracció més gran és $+\infty$.

$-\frac{1}{\infty}$ *(INFI2.5B)*

Tres estudiants formen part d'aquesta categoria, són els estudiants que han dit una fracció negativa amb un número 1 al numerador i un infinit al denominador. Dos estudiants han proposat la fracció $-\frac{1}{\infty}$ i l'altre ha proposat $\frac{1}{-\infty}$. Tots tres estudiants no han fet cap altra explicació.

Fraccions concretes (INFI3)

Catorze estudiants han proposat fraccions concretes com a fracció més petita, han proposat les fraccions $1/1$, a/a, $0/0$, $0/1$, 1, $1/4$, $1/2$ i $-1/0$. Les fraccions que més estudiants han proposat han estat $1/1$ i $1/4$, tres estudiants han proposat cada una d'aquestes fraccions. Les següents més proposades han estat $0/0$ i $0/1$, cadascuna ha estat proposada per dos estudiants. La resta de fraccions, a/a, 1, $1/2$ i $-1/0$ només les ha proposat un sol estudiant cada una. Cal destacar que l'1 no està escrit en forma de fracció. La fracció a/a l'ha proposat un estudiant que ha dit "*qualsevol fracció amb el mateix nominador* [sic] *i denominador*". En aquesta categoria cap estudiant ha justificat la resposta.

Depèn de la unitat (INFI4)

Un únic estudiant dels quaranta-sis ha respost a la fracció més petita "*res*". Amb aquesta resposta s'ha suposat que volia dir que no s'agafava cap part de la unitat, ja que a l'apartat (*a*) diu que la fracció més gran és "*un total*". S'ha interpretat que parla de la unitat quan diu "*un total*".

Depèn del numerador i del denominador (INIFI5)

Tres estudiants s'han inclòs dins aquesta categoria. Per explicar quina és la fracció més petita els tres fan referència a com ha de ser el numerador i denominador d'aquesta fracció. Un d'ells explica que "*la que té el numerador més petit i el denominador més gran".* Aquesta explicació fa referència a com obtenir una fracció més petita segons el numerador i denominador que es tingui, com més petit és el numerador i més gran és el denominador més petita serà la fracció. L'altre estudiant diu que "*també depèn del numerador i denominador que relacionis, seria la que s'apropés + a 0*" i el tercer estudiant afirma que "*depèn del denominador que es posi, i com a numerador 1*". Però cap dels tres diu que no és possible trobar aquesta fracció, per tant, les respostes són incorrectes.

Resultats globals de la pregunta 3

Resultats de l'apartat (*a*)

Vuit estudiants han proposat fraccions concretes com a fracció més gran: 1/0, 1/1, 1/2 i 3/4. Els estudiants que han proposat les fraccions 1/1, 1/2 i 3/4 mostren poc coneixement del significat de les fraccions i de la densitat dels nombres racionals. La fracció 1/1 és igual a 1 i les fraccions 1/2 i 3/4 són fraccions més petita que 1, per tant, les fraccions que proposen són nombres molt petits i molt allunyats de ser "la fracció més gran". L'estudiant que proposa la fracció 1/0 no té clar que el denominador d'una fracció ha de ser diferent de zero, probablement recorda que quan es resolen límits el resultat del límit $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$. Totes aquestes respostes són incorrectes.

Un sol estudiant ha respost com a fracció més gran "*un total*", possiblement es referia a tota la unitat. Aquesta resposta és incorrecta i també mostra com aquest estudiant no té clar que no es pot trobar la fracció més gran.

Dos estudiants no concreten cap fracció ni diuen que no es pot trobar i expliquen que depèn del numerador i del denominador. Aquests expliquen com trobar fraccions més grans a una fracció donada però no responen la pregunta contestant quina és la fracció més gran.

Tot i que les respostes $\frac{\infty}{1}, \frac{\infty}{\infty}$ i $+\infty$ no són correctes, en algun cas s'apropen més a la solució que les respostes que altres estudiants han realitzat com ara 1/1, 1/2 i 3/4.

Resultats de l'apartat (*b*)

Només tres estudiants han dit correctament que no es pot trobar la fracció més petita. És un nombre molt reduït d'estudiants i demostra les mancances que presenten els estudiants en relació a la densitat dels nombres racionals i a la comprensió del significat de fracció.

Catorze estudiants han proposat fraccions concretes com a fracció més petita i han proposat les fraccions 1/1, *a*/*a*, 0/0, 0/1, 1, 1/4, 1/2 i −1/0. Com els estudiants que han proposat fraccions concretes de l'apartat (*a*), aquests estudiants mostren poc coneixement del significat de les fraccions i de la densitat dels nombres racionals.

Un sol estudiant ha respost "*res*" com a fracció més petita. Hem suposat que volia dir que no s'agafa cap part de la unitat ja que en l'apartat (*a*) ha proposat "*un total*" com a fracció més gran. Aquesta resposta és incorrecta i també mostra com aquest estudiant no té clar que no es pot trobar la fracció més petita.

Tres estudiants no concreten cap fracció ni diuen que no es pot trobar la fracció més petita, expliquen que depèn del numerador i del denominador. Aquests estudiants expliquen com trobar fraccions més petites a una fracció donada però no responen la pregunta contestant quina és la fracció més petita.

Tot i que la resposta $\frac{1}{\infty}$ no és correcta "s'aproxima" més a la resposta correcta que les respostes on s'han proposat fraccions concretes com 1/1, *a*/*a*, 0/0, 0/1, 1, 1/4, ½.

Resultats globals

Analitzant les respostes dels dos apartats de la pregunta 3 es pot deduir que aquesta és una de les preguntes que més estudiants han resolt incorrectament, fet que demostra les dificultats dels estudiants en relació a la densitat dels nombres racionals i a la comprensió del significat de fracció. Només dos estudiants han resolt correctament els dos apartats de la pregunta 3. És una proporció molt petita d'estudiants.

La "tipologia" de resposta i justificació ha estat molt semblant en els dos apartats. En tots dos apartats s'han proposat fraccions amb infinit al numerador i/o al denominador, fraccions concretes i explicacions dient que la fracció més gran o més petita depèn del numerador i del denominador.

En l'apartat (*a*) s'han proposat menys fraccions concretes (1/0, 1/1, 1/2 i 3/4) que en l'apartat (*b*) (1/1, *a*/*a*, 0/0, 0/1, 1, 1/4, 1/2 i −1/0) tot i que en tots dos apartats s'han proposat les fraccions 1/1 i 1/2. La fracció 1/0 també s'ha proposat en els dos apartats, però quan es demana la fracció més petita s'ha proposat amb un signe menys al davant: −1/0.

5.5.2 Anàlisi de dades de la pregunta 29

A la figura 5.132 es mostra la pregunta 29 on els estudiants han d'explicar quantes fraccions creuen que hi ha entre les fraccions 2/5 i 4/5.

29.Quantes fraccions hi ha entre 2/5 i 4/5? Explica-ho.

Figura 5.132. Pregunta 29 del qüestionari de fraccions

Les respostes diferents que han realitzat els estudiants i la quantitat de respostes es mostra a la taula 5.53. Dotze estudiants (26,09%) no han contestat la pregunta i l'han deixat en blanc. Els estudiants que han contestat la pregunta han realitzat cinc respostes diferents: Infinites fraccions (DENSI1), 36 fraccions (DENSI2), 4 fraccions (DENSI3), La fracció 3/5 (DENSI4) i No concreta la quantitat de fraccions (DENSI5). Les respostes més proposades han estat Infinites fraccions (28,26%) i La fracció 3/5 (30,43%). Només cinc estudiants (10,87 %) han dit moltes o tantes fraccions però sense concretar quantes (DENSI5). Les respostes de 36 fraccions i 4 fraccions l'ha realitzat un estudiant en cada cas. Únicament han contestat de forma correcta els estudiants que han dit que hi ha infinites fraccions entre les fraccions 2/5 i 4/5. A continuació s'analitzen les explicacions dels estudiants segons la resposta que han realitzat.

Taula 5.53. Classificació en categories de les respostes correctes i incorrectes de la pregunta 29.

Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants
Correctes	Infinites fraccions (DENSI1)	13
Incorrectes	36 fraccions (DENSI 2)	1
	4 fraccions (DENSI3)	1
	La fracció 3/5 (DENSI4)	14
	No concreta la quantitat de fraccions (DENSI5)	5

Infinites fraccions (DENSI1)

Hi ha tretze estudiants que han dit que entre les fraccions 2/5 i 4/5 hi ha infinites fraccions. Les respostes dels estudiants s'han classificat en tres subcategories segons les explicacions que han realitzat: Infinits nombres entre 2/5 i 4/5 (DENSI1.1), Infinits nombres al numerador i/o denominador (DENSI1.2) i Hi ha altres fraccions (DENSI1.3).

Infinits nombres entre 2/5 i 4/5 (DENSI1.1)

Set estudiants han dit que hi ha infinites fraccions entre 2/5 i 4/5. Quatre estudiants dels set estudiants del Grup 1 han explicat que hi haurà infinites fraccions perquè hi ha infinits nombres decimals entre les fraccions 2/5 i 4/5 o bé perquè hi ha tantes fraccions com nombres decimals hi hagi entre 0,4 i 0,8, és a dir, infinites. Els altres tres estudiants han dit que entre 2/5 i 4/5 hi ha infinites fraccions perquè hi ha moltes combinacions que el resultat dóna entre 2/5 i 4/5 o perquè cada punt que hi ha entre dues fraccions es pot expressar amb una altra.

Infinits nombres al numerador i/o denominador (DENSI1.2)

En aquest grup hi ha les respostes de quatre estudiants que han fet referència al fet que els nombres del numerador i/o denominador poden ser infinits. Tres estudiants han fet referència als numeradors de les fraccions per justificar que entre les fraccions 2/5 i 4/5 hi ha infinites fraccions. Han dit que "*infinits perquè hi ha infinits números. Els números naturals són infinits (numerador)*", que "*infinits, perquè entre el 2 i el 4 hi ha infinits nombres*" i que "*al numerador poden haver-hi tots els números reals (enters, decimals, ...) i aquests són infinits*". Tots tres estudiants han tingut en compte només el numerador sense fer esment del denominador. Tot i que és cert que hi ha infinits nombres naturals i infinits nombres reals la justificació no és prou completa ja que s'hauria de tenir en compte el denominador o bé fer referència als decimals que hi ha entre les fraccions 2/5 i 4/5.

L'altre estudiant d'aquest grup no parla del numerador ni del denominador però s'entén que fa referència a un dels dos o a tots dos, diu que "*infinites, perquè a les fraccions hi poden haver tots els nombres naturals*".

Hi ha altres fraccions (DENSI1.3)

En aquest grup només hi ha dos estudiants i són els que justifiquen que hi ha infinites fraccions entre 2/5 i 4/5 perquè es poden considerar les fraccions amb decimals al numerador. Un dels estudiants fa referència a les fraccions equivalents i és l'únic estudiants de tots quaranta-sis que en parla. Els dos estudiants d'aquest grup diuen: "*infinites, perquè no només podem usar* $\frac{3}{5}$ *sinó fraccions amb decimals, centenes...*" i "*N'hi ha infinites ja que podem trobar les equivalents, els decimals (ex* $\frac{2,5}{5}$*), per tant n'hi poden haver moltes*". Tots dos estudiants consideren fraccions on al numerador hi ha un nombre decimal, ja que entre el 2 i el 4 només hi pot haver un nombre natural, el 3. El que proposen aquests estudiants són nombres expressats en forma de fracció, però no fraccions.

36 fraccions (DENSI2)

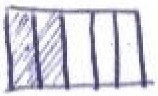
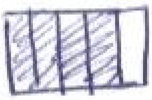
Un sol estudiant ha dit que entre les fraccions 2/5 i 4/5 hi ha 36 fraccions. Veient la resolució d'aquest estudiant (vegeu figura 5.134) es pot deduir que ha comptat 36 nombres decimals entre el 2 i el 4,5. Tot i que no queda prou clar quins són exactament els nombres decimals que ha considerat, és important tenir en compte que dóna un nombre finit de decimals, mostrant no tenir clar la propietat de la densitat dels nombres racionals.

2/5 i 4/5 = hi ha 36 fraccions o 2'o1 també.
2'1, 2'2, ..., 4'1, 4'2 Així són entre 2/5 i 4/5 tantes

$\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$ (I

$\frac{3}{5}$ (I

$\frac{2}{5}$  $\frac{4}{5}$  Hi ha $\frac{3}{5}$

30.Pots trobar una fracció entre 1/7 i 1/8? Explica-ho.

Figura 5.136. Pregunta 30 del qüestionari de fraccions.

Aquesta pregunta és la que més estudiants han deixat en blanc, vint-i-dos estudiants (47,82%) no l'han contestat. Les vint-i-quatre respostes d'aquesta pregunta s'han classificat en nou categories segons el què ha respost cada estudiant (vegeu taula 5.54). Només hi ha deu estudiants (categories ENTRE1, ENTRE2 i ENTRE3) que han realitzat respostes que es poden considerar correctes, tot i que d'aquests deu només un estudiant ha trobat una fracció entre 1/8 i 1/7, la fracció 15/112. Els catorze estudiants que han realitzat respostes incorrectes s'han classificat en cinc categories (categories ENTRE4, ENTRE5, ENTRE6, ENTRE7 i ENTRE8). A continuació s'expliquen les respostes de cada categoria amb detall.

Taula 5.54. Classificació en categories de les respostes correctes i incorrectes de la pregunta 30.

Resposta correcta o incorrecta	Categoria	Quantitat d'estudiants
Correctes	Infinites fraccions (ENTRE1)	4
	La fracció 15/112 (ENTRE2)	1
	Sense concretar les fraccions (ENTRE3)	5
Incorrectes	Fraccions amb nombres decimals al numerador o al denominador (ENTRE4)	5
	La fracció 1/9 (ENTRE5)	1
	Les fraccions 2/7, 3/7, ... , 9/7 (ENTRE6)	2
	18 fraccions (ENTRE7)	1
	No hi ha fraccions entre 1/8 i 1/7 (ENTRE8)	5

Infinites fraccions (ENTRE1)

Hi ha quatre estudiants que han dit que entre les fraccions 1/8 i 1/7 hi ha infinites fraccions. Les respostes dels estudiants s'han classificat en dues subcategroies segons les explicacions que han realitzat: Infinits nombres entre 1/8 i 1/7 (ENTRE1.1)i Infinits nombres al numerador i/o denominador (ENTRE1.2). Aquestes subcategories són similars a les que s'havien definit a la pregunta 29 dins de la mateixa categoria d'infinites fraccions.

Infinits nombres entre 1/8 i 1/7 (ENTRE1.1)

Dos estudiants han dit que hi ha infinites fraccions entre 1/8 i 1/7. Un estudiant ha explicat que hi ha infinites fraccions "*perquè hi ha infinits nombres decimals*" i l'altre "*infinits, perquè podem trobar tants nombres com vulguem*".

$\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{8}$ Sí, busco denominador comú.

$\frac{1}{7} = \frac{8}{56}$

$\frac{1}{8} = \frac{7}{56}$

entre $\frac{7}{56}$ i $\frac{8}{56}$ podem trobar

$$\frac{7}{56} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{14}{112} \qquad \frac{15}{112} \qquad \frac{16}{112} \xleftarrow{\cdot 2} \frac{8}{56}$$

volia explicar que calia buscar fraccions equivalents amb els numeradors i denominadors més grans que els que hi ha a les fraccions 1/8 i 1/7.

Fraccions amb nombres decimals al numerador o al denominador (ENTRE4)

En aquesta categoria s'han considerat les respostes de cinc estudiants que han proposat fraccions en les que al numerador o al denominador hi ha nombres decimals. S'han classificat en dues subcategories segons si proposen els decimals al numerador o al denominador: Fraccions amb decimals al denominador (ENTRE4.1) i Fraccions amb decimals al numerador (ENTRE4.2).

Fraccions amb decimals al denominador (ENTRE4.1)

Quatre estudiants han proposat fraccions que consideren que estan entre les fraccions 1/8 i 1/7 amb nombres decimals al denominador. Tres d'aquests quatre estudiants han proposat com a exemple la fracció $\frac{1}{7,5}$ i el quart estudiant ha proposat dues fraccions, $\frac{1}{7,1}$ i $\frac{1}{7,000001}$. Un dels estudiants que ha proposat la fracció $\frac{1}{7,5}$ explica a més que al denominador hi podria haver infinits nombres reals.

Els quatre estudiants d'aquest grup han proposat fraccions que en dividir el numerador i el denominador s'obté un nombre entre les fraccions 1/8 i 1/7. Aquest fet és correcte, però no ho és com han expressat les fraccions. Segons la definició de Lamon (2012) presentada al subapartat 3.3.1 el numerador i denominador d'una fracció són nombres enters positius. Podrien haver expressat $\frac{1}{7,5}$ com $\frac{2}{15}$.

Fraccions amb decimals al numerador (ENTRE4.2)

En aquest grup hi ha un sol estudiant que realitza una explicació correcta però que l'exemple que proposa no ho és: "*Tantes com nombres hi hagin entre el valor numèric de 1/8 i 1/7. Per exemple,* $\frac{1,1}{7}$". L'exemple que proposa aquest estudiant no és correcte, de fet proposant una fracció amb numerador més gran que 1 i el mateix denominador 7 està proposant fraccions més grans que 1/7. Com els estudiants del grup 1 proposa un nombre escrit en forma de fracció però no una fracció ja que com s'ha esmentat anteriorment en la definició de Lamon (2012) es diu que el numerador i denominador han de ser nombres enters positius.

La fracció 1/9 (ENTRE5)

Un sol estudiant ha dit que la fracció 1/9 està entre les fraccions 1/8 i 1/7. Ha calculat el valor en decimals de cada fracció, però de les fraccions 1/8 i 1/7 l'ha calculat de forma equivocada (vegeu figura 5.138). La fracció que proposa aquest estudiant és incorrecte ja que no està entre les fraccions 1/8 i 1/7, de fet, és més petita que la fracció 1/8. Potser l'ha

$\frac{1}{7} \rightarrow \frac{1}{8} \rightarrow 0{,}225$

$0{,}22$

$\frac{1}{9}$ → està entre $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{8}$, ja que la fracció és més petita i les dues anteriors varien de molt poques dècimes.

$0{,}11$

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$

↳ en puc trobar moltes, perquè el denominador no és el mateix : $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \ldots$ fins a $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7}, \frac{2}{7} \ldots\ldots \frac{1}{8}$

Sí, se'n pot trobar més d'una perquè el numerador pot anar canviant, un cop arribi al $\frac{9}{7}$, passarà a ser 8, llavors arribo la fracció $\frac{1}{8}$.

Si entre 1/7 i 1/8 = hi ha 18 fraccions , 7'01 , Això són
7'1 , 7'2 ... , 7'9 entre 1/7 i 1'8
tantes

No es pot, ja que tots dos tenen el mateix numerador.

6 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats

En aquest capítol es presenta l'anàlisi de dades en relació amb el segon objectiu d'aquesta recerca: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de fraccions. Aquest objectiu es concreta en nou d'específics:

Objectiu 2.1: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament del significat de fracció.

Objectiu 2.2: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions.

Objectiu 2.3: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la comparació i ordenació de fraccions.

Objectiu 2.4: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la suma de fraccions.

Objectiu 2.5: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la resta de fraccions.

Objectiu 2.6: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la multiplicació de fraccions.

Objectiu 2.7: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la divisió de fraccions.

Objectiu 2.8: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la infinitud i densitat dels nombres racionals.

Objectiu 2.9: Descriure, analitzar i interpretar les representacions gràfiques que els estudiants de mestre elaboren en una seqüència d'activitats per ensenyar continguts de fraccions.

Aquest capítol s'organitza en nou apartats, i en cada un s'expliquen els resultats dels objectius específics que s'han esmentat. Els vuit primers segueixen la mateixa estructura; l'últim, en què s'analitzen resultats de característiques diferents que en els altres, segueix una altra línia.

6.1 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb el significat de fracció

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament del significat de fracció. Uns quants estudiants de mestre han proposat activitats en la

OBJECTIU 2.1: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament del significat de fracció		
Anàlisi de les explicacions per ensenyar el significat de fracció	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de fracció	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de fracció

Definició de fracció

De les explicacions dels estudiants per ensenyar el significat de fracció s'han seleccionat les que fan referència a la definició del terme. Aquestes definicions s'han classificat en les mateixes categories utilitzades per analitzar les respostes de la pregunta 1 del qüestionari de fraccions (vegeu taula 6.1).

Taula 6.1. Categorització de les explicacions dels estudiants per definir fracció.

Codi	**Categoria**	**Exemples**
SI1	Part o parts d'una unitat	
SI1.1	Part d'una unitat	"*Una fracció és una part d'una unitat*". E16
SI1.2	Parts d'una unitat	"*Una fracció indica que la unitat està dividida en parts iguals i que s'ha pres una o diverses d'aquestes parts*". E17
SI2	Proporció	"*Són expressions que ens permeten representar una proporció*". E1
SI3	Nombre	"*És un nombre format pel numerador i el denominador*". E31
SI4	Repartiment	"*Quan repartim una cosa diem que estem fent una fracció*". E19
SI5	Divisió de dues quantitats	"*És una divisió de dos números*". E46
SI6	Operació	---
SI7	Relació entre dos nombres	"*És la relació de dos nombres separats per una petita ratlla,* [...] *per exemple 2/4. El número de sobre es diu numerador i el de sota denominador*". E39

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

Definició de numerador i denominador

De les explicacions dels estudiants per ensenyar el significat de fracció s'han seleccionat les que fan referència a la definició de numerador i denominador i s'han classificat en categories (vegeu taula 6.2).

Taula 6.2. Categorització de les explicacions dels estudiants per definir numerador i denominador.

Codi	**Categoria**	**Exemples**
ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*El numerador serà el que indica el* ***nombre de parts que agafem*** *de la pizza, és a dir els talls que ja us heu menjat, en aquest cas 2. I el denominador indica* ***el nombre de parts iguals en què dividim la unitat****, és a dir, la nostra pizza, que està tallada en 4 trossos*". E6
ND2	Repartiment	"*Els repartiré una poma i un ganivet per cada dos* [...]*1/2 vol dir una meitat. El nombre de baix és la quantitat de talls en que hem dividit la poma i es diu DIVIDEND. En Aquest cas és 2 perquè hem fraccionat la poma en dues parts. El nombre de dalt són els talls que es queda cadascú. La poma està partida en dos talls però cada membre de la parella en té només 1. El nombre de dalt es diu DIVISOR*". E3

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

Relació entre les definicions de fracció i les de numerador i denominador

A la taula 6.3 es mostra la relació entre les categories de les definicions de fracció i les categories de les definicions de numerador i denominador.

Taula 6.3. Relació entre les categories de les definicions de fracció i les de les definicions de numerador i denominador.

Codi	Categoria "definició de fracció"	Codi	Categoria "definició de numerador i de denominador"	Exemples: Definició de fracció	Exemples: Definició de numerador i denominador
SI1	Part o parts d'una unitat		No ha definit numerador i denominador	"*Una fracció és una part d'una unitat*". E16	
		ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*És una part de la unitat*". E22	"*Numerador: parts seleccionades de la unitat. Denominador: parts iguals amb què hem dividit la unitat*". E22
SI2	Una proporció	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*El mestre o la mestra explicarà què són les fraccions (Expressions que permeten representar una proporció)*". E9	"*Què és el numerador (indica el nombre de parts que s'han agafat de la unitat) i què és el denominador (indica el nombre de parts iguals que dividim una unitat)*". E9
SI4	Un repartiment	ND2	Repartiment	"*Els alumnes es posaran en parelles i els repartiré una poma i un ganivet per cada dos* [...]. *Com que només teniu una poma per 2 persones cal que la repartiu de manera justa. Quantes parts o fraccions de poma teniu?...Aquesta relació de nombres es diu fracció*" E3	"*El nombre de baix és la quantitat de talls en que hem dividit la poma i es diu DIVIDEND. En Aquest cas és 2 perquè hem fraccionat la poma en dues parts. El nombre de dalt són els talls que es queda cadascú. La poma està partida en dos talls però cada membre de la parella en té només 1. El nombre de dalt es diu DIVISOR*". E3
SI5	La divisió de dues quantitats	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*És una divisió de dos números*". E46	"*El denominador indica el número de parts iguals en què es divideix la unitat. El numerador indica el número de parts que s'agafen d'aquella unitat*". E46
SI7	La relació entre dos nombres	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*És la relació de dos nombres separats per una petita ratlla. Aquests dos nombres, un està a sobre i l'altre a sota amb la ratlla al mig, per exemple 2/4. El número de sobre es diu numerador i el de sota denominador*". E39	"*El denominador...vol dir les parts iguals que hem de fer o que hem de dividir alguna cosa. I el numerador..vol indicar quantes d'aquestes parts hem d'agafar*". E39
SI1 i SI3	Part o parts d'una unitat i un nombre	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	"*És un nombre format pel numerador i el denominador*". E31	"*Numerador: indica el nombre de parts iguals seleccionades de la unitat. Denominador: indica el nombre de parts iguals en què hem dividit la unitat*". E31
	No han definit fracció	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat		"*El numerador indica el nombre de parts que considerem i el denominador el nombre de parts iguals en què dividim la unitat*". E38

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

6.1.1.2 Resultats i discussió

Vint-i-sis estudiants han definit fracció i/o numerador i denominador en les activitats de la seqüència. Setze estudiants han proposat una definició per a fracció i, d'aquests, quinze també han definit el numerador i el denominador. Deu estudiants han definit numerador i denominador i, en canvi, no han definit explícitament què és una fracció (vegeu taula 6.4).

Taula 6.4. Classificació dels estudiants segons la definició que proposen: fracció i/o numerador i denominador.

Quantitat d'estudiants	Definició de fracció	Definició de numerador	Definició de denominador
1			
15			
10			

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les explicacions d'aquests vint-i-sis estudiants segons les categories descrites a l'apartat 6.1.1.1. Primerament, s'analitzen les definicions de fracció, després les de numerador i denominador i, finalment, la relació entre els dos grups de definicions.

Definició de fracció

Tot seguit es mostren els resultats i la discussió de les explicacions dels setze estudiants que han proposat una definició de fracció. Tot i que hi ha setze estudiants, s'han classificat vint definicions, perquè hi ha quatre estudiants que han donat explicacions en més d'una categoria. Aquestes definicions estan distribuïdes en sis categories: Part o parts d'una unitat (SI1), Proporció (SI2), Nombre (SI3), Repartiment (SI4), Divisió de dues quantitats (SI5) i Relació entre dos nombres (SI7) (vegeu taula 6.5).

Taula 6.5. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les definicions de fracció.

Codi	Categoria	Quantitat d'explicacions
SI1	Part o parts d'una unitat	**9**
SI1.1	Part d'una unitat	4
SI1.2	Parts d'una unitat	5
SI2	Proporció	**3**
SI3	Nombre	**4**
SI4	Repartiment	**2**
SI5	Divisió de dues quantitats	**1**
SI7	Relació entre dos nombres	**1**

Nota: La suma d'explicacions és de 20 perquè hi ha quatre dels setze estudiants que han donat explicacions en dues categories.

Les explicacions més nombroses són les que defineixen la fracció com a part o parts d'una unitat (nou explicacions), seguides de les que fan referència a la fracció com un nombre (quatre explicacions). En tres explicacions es diu que les fraccions permeten representar una proporció. Només hi ha dues explicacions en què es mostra la fracció com a repartiment. En les dues categories restants hi ha una sola explicació en cada una: Divisió de dues quantitats (SI5) i Relació entre dos nombres (SI7).

Les definicions de la categoria Part o parts d'una unitat (SI1) estan repartides en dues subcategories: Part d'una unitat (SI1.1) i Parts d'una unitat (SI1.2). En la subcategoria SI1.1 els estudiants han definit la fracció com a part d'una unitat, d'una cosa o d'un grup i hi comptem quatre estudiants, mentre que les definicions de la subcategoria SI1.2 fan referència a les parts que es consideren d'una unitat, un objecte o una totalitat que estan dividits en parts iguals.

Els tres estudiants de la categoria Proporció (SI2) han definit tots tres la fracció exactament de la mateixa manera: "Són expressions que ens permeten representar una proporció". Dos d'aquests tres estudiants citen a la bibliografia una pàgina web on hi ha un document que conté exactament aquesta definició de fracció. El tercer estudiant cita alguns llibres de text d'on segurament ha extret la definició. Per aquest motiu les definicions són exactament iguals.

Els quatre estudiants que fan explicacions incloses a la categoria Nombre (SI3) diuen que la fracció és un nombre o un valor numèric.

Alguns estudiants només han donat explicacions en una de les sis categories, mentre que d'altres combinen explicacions de més d'una categoria (vegeu taula 6.6). No hi ha cap estudiant que hagi definit únicament la fracció com un nombre. Els quatre estudiants que diuen que la fracció és un nombre combinen aquesta definició amb explicacions de la categoria Part o parts d'una unitat (SI1). La categoria amb més estudiants és la de Part o parts d'una unitat (SI1), seguida de la combinació d'aquesta categoria amb la de Nombre (SI1 i SI3).

Tenint en compte tots aquests resultats, constatem que la definició de fracció com a part o parts d'una unitat és la idea més present entre els estudiants: una mica més de la meitat han optat per aquest tipus d'explicació.

Taula 6.6. Classificació dels estudiants segons la categorització de les definicions de fracció.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
SI1		Part o parts d'una unitat	**5**	
	SI1.1	Part d'una unitat		3
	SI1.2	Parts d'una unitat		2
SI2		Proporció	**3**	
SI3		Nombre	**0**	
SI4		Repartiment	**2**	
SI5		Divisió de dues quantitats	**1**	
SI7		Relació entre dos nombres	**1**	
SI1 i SI3		Part o parts d'una unitat i Nombre	**4**	
	SI1.1 i SI3	Part d'una unitat i Nombre		1
	SI1.2 i SI3	Parts d'una unitat i Nombre		3

Definició de numerador i denominador

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les explicacions dels vint-i-cinc estudiants que han definit el numerador i el denominador d'una fracció. Aquestes definicions estan distribuïdes en dues categories: Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat (ND1) i Repartiment (ND2) (vegeu taula 6.7).

Taula 6.7. Classificació dels estudiants segons la categorització de les definicions de numerador i denominador.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**23**
ND2	Repartiment	**2**

La majoria d'estudiants formen part de la categoria Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat (ND1): vint-i-tres dels vint-i-cinc estudiants que han definit numerador i denominador. Només dos estudiants han definit el numerador i el denominador des del punt de vista de repartiment.

Els vint-i-tres estudiants de la categoria ND1 han definit el denominador com les parts en què s'ha dividit la unitat, i el numerador, com les parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat. Tot i que s'evidencia que tots vint-i-tres al·ludeixen a la mateixa idea, les explicacions han estat diverses. Per definir el denominador, han fet referència a les parts en què s'ha dividit la figura, la cosa, la unitat o la col·lecció; el que canvia en aquestes definicions és com es refereixen a la unitat. Per definir el numerador, ho expliquen com les parts pintades, parts que s'agafen, parts seleccionades, parts que es volen indicar, comptar o representar o parts que tenim. En tots els casos es fa referència a les parts que es

Quant estàveu de dos en dos, teníeu una barra de plastilina i la vàrem trencar en dues parts.

Del la cosa o objecte que tenim inicialment en direm DENOMINADOR, i l'escriurem a sota una barra:

$$\frac{}{1}$$

Del nombre de parts que fem d'aquesta cosa que tenim en direm NUMERADOR, i l'escriurem a sobre la barra:

$$\frac{2}{}$$

Així:

$\frac{2}{1}$

2 → Nombre de parts en què hem dividit la barra de plastilina

1 → Objecte o part que hem repartit: una (1) barra de plastilina

ıme

nici

$\frac{1}{2}$, ‘

de maneres diferents, però tots han definit el numerador i el denominador de la mateixa manera.

Taula 6.8. Classificació dels estudiants segons la categoria de la definició de fracció i de la definició de numerador i denominador a què pertanyen.

Codi	Categoria "definició de *fracció*"	Codi	Categoria "definició de *numerador* i de *denominador*"	Quantitat d'estudiants
SI1	Part o parts d'una unitat		No ha definit numerador i denominador	**1**
		ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**4**
SI2	Proporció	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**3**
SI4	Repartiment	ND2	Repartiment	**2**
SI5	Divisió de dues quantitats	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**1**
SI7	Relació entre dos nombres	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**1**
SI1 i SI3	Part o parts d'una unitat i Nombre	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**4**
	No han definit fracció	ND1	Parts seleccionades de les parts en què s'ha dividit la unitat	**10**

Els dos estudiants que han definit la fracció basant-se en un repartiment també han definit el numerador i el denominador a partir de la mateixa idea. Aquests dos estudiants han definit fracció, numerador i denominador des de la mateixa interpretació, com a repartiment.

Amb aquestes dades es detecta que la majoria d'estudiants, independentment de com han definit la fracció, han definit el denominador com les parts iguals en les quals es divideix una unitat, i el numerador, com les parts que es consideren de les parts en què s'ha dividit la unitat. Amb aquesta definició del numerador i del denominador es veu clarament que els estudiants han interpretat la fracció com una comparació part–tot, i que la definició de fracció no condiciona directament la definició de numerador i denominador que han proposat.

El fet que alguns estudiants només hagin definit numerador i denominador indica que consideren que es pot explicar què és una fracció a partir de l'explicació de què és el numerador i el denominador, o bé que és més simple definir fracció a partir de la definició de numerador i de denominador.

6.1.2 Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de fracció

A més de les explicacions teòriques, interessa determinar les representacions que els estudiants realitzen en les seves propostes. Les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

Tal com s'ha explicat en el marc teòric, en l'ensenyament de les fraccions generalment s'utilitzen representacions, però no sempre són prou variades per comprendre bé els conceptes que s'hi relacionen. El model de traducció de Lesh (The Lesh Translation Model) proposa cinc maneres diferents per representar les idees matemàtiques elementals: materials manipulatius, imatges, contextos reals, símbols verbals i símbols escrits (Cramer, 2003). Aquest model emfasitza que representar les idees matemàtiques de diferents maneres i connectar i traduir aquestes representacions potencia que les idees siguin significatives per als alumnes (Cramer, 2003).

Prenent com a referència el model de Lesh, per analitzar les representacions de les seqüències d'activitats sobre els continguts de fraccions, es consideren cinc maneres de representar els exemples: símbol matemàtic, imatge, expressió verbal, context real simulat i objecte. Així, els estudiants poden exemplificar una explicació a partir d'un exemple fent servir una de les representacions esmentades: símbol matemàtic (1/2), imatge (vegeu figura 6.3), expressió verbal (una meitat), context real simulat (la meitat d'un pastís) i objecte (la meitat d'una poma).

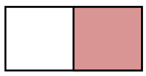


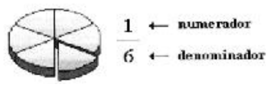
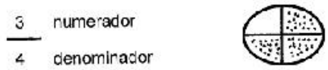
Figura 6.3. Representació amb una imatge de la fracció ½.

En l'anàlisi de les representacions de fracció per a cada un dels objectius específics d'aquest capítol s'utilitzarà com a base el model presentat en aquest apartat.

A l'apartat 3.3.3 s'han presentat diferents representacions per ensenyar el significat de fracció depenent de la interpretació de fracció que es tingui en compte. Prenent com a base aquestes recerques i les representacions del model de Lesh explicat a l'inici del capítol, en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants plantegen en les propostes per ensenyar el significat de fracció.

6.1.2.1 Les categories definides

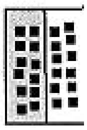
Alguns estudiants que han donat explicacions i exemples per ensenyar el significat de fracció han proposat una o més representacions; en canvi, d'altres no n'han suggerit cap. Les representacions s'analitzen segons l'adaptació de les cinc maneres diferents de representar idees matemàtiques del model de Lesh (Cramer, 2003) i s'han analitzat conjuntament les representacions proposades en les definicions de fracció, numerador i denominador. A la taula 6.9 es mostren les categories de les representacions dels estudiants que fan referència al significat de fracció.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
SIRE0	Cap representació						"*El mestre o la mestra explicarà què són les fraccions (Expressions que permeten representar una proporció)* [...]. *Què és el numerador (indica el nombre de parts que s'han agafat de la unitat) i què és el denominador (indica el nombre de parts iguals que dividim una unitat)*". E9
SIRE1	1 representació						
SIRE1.1		■					"*1/2 és una fracció. El 2 és el denominador i assenyala que la unitat s'ha dividit en 2 parts. L'1 és el numerador i ens indica que d'aquestes 4 parts n'agafem una*". E21
SIRE1.2					■		"*El professor explicarà que el numerador són les parts que agafem del denominador i el denominador són les parts iguals que agafem de tota la unitat.* [...]. *Un cop dibuixada la pizza, la dividirem en quatre trossos i un el separarem de la resta, simulant que ens el mengem".* E32
SIRE2	2 representacions diferents	■	■				"*Una fracció és una divisió de dos números. El denominador indica el número de parts iguals en què es divideix la unitat. El numerador indica el número de parts que s'agafen d'aquella unitat*". E46 
SIRE3	3 representacions diferents						
SIRE3.1		■		■	■		"*Una fracció és una part d'una unitat. En aquest moment podem dibuixar a la pissarra pastissos i quadrats amb subdivisions i marcar alguna part per introduir les fraccions més fàcils i principals:1/2 un mig, 1/3 un terç, ¼ un quart.*". E16
SIRE3.2		■	■		■		"*La fracció és la relació de números que representa part d'una cosa (un pastís, una figura…). Té dos componenets: el numerador, a la part superior, i que indica la part que agafem de la cosa, i el denominador, a la part inferior, que indica les parts en què està dividida la cosa. Per exemple: tenim un pastís i el tallem en 4 parts i guals i me'n menjo 3*". E28 

SIRE4 4 representacions diferents

SIRE4.1

"El numerador són les parts que agafem, o pintem, i el denominador le sparts iguals en que dividim alguna cosa, per exemple un pastís. Per exemple, què vol dir la meitat de la classe? Si som 24 nens en total la meitat seran ...12, que és 24 entre 2". E10



SIRE4.2

"Els repartiré una poma i un ganivet per cada dos [...]. *1/2 vol dir una meitat. El nombre de baix és la quantitat de talls en que hem dividit la poma i es diu DIVIDEND. En Aquest cas és 2 perquè hem fraccionat la poma en dues parts. El nombre de dalt són els talls que es queda cadascú. La poma està partida en dos talls però cada membre de la parella en té només 1. El nombre de dalt es diu DIVISOR.".* E3

Taula 6.10. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar el significat de fracció.

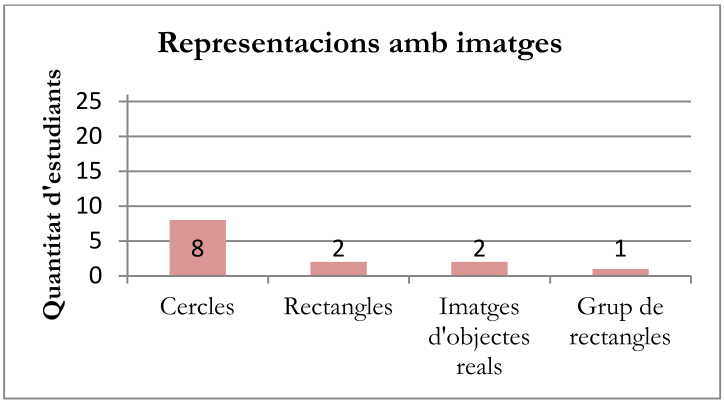
Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants
SIRE0	Cap representació						**8**
SIRE1	1 representació						**3**
SIRE1.1							1
SIRE1.2							2
SIRE2	2 representacions diferents						**4**
SIRE3	3 representacions diferents						**6**
SIRE3.1							1
SIRE3.2							5
SIRE4	4 representacions diferents						**5**
SIRE4.1							4
SIRE4.2							1

Segons aquests resultats, les representacions més utilitzades han estat els símbols matemàtics, les imatges i els contextos reals simulats. Molt pocs estudiants han escrit el nom de les fraccions en paraules i només un ha proposat utilitzar objectes en la definició. A continuació s'expliquen els exemples de manera més detallada.

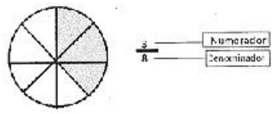
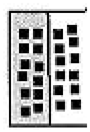
Representacions amb símbols matemàtics

Setze estudiants han proposat com a mínim una fracció escrita amb símbols com a exemple de fracció. Les fraccions utilitzades han estat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}$ i $\frac{2}{1}$. Alguns estudiants n'han donat més d'una i d'altres només una; un sol estudiant ha proposat catorze dels divuit exemples diferents. Tots els exemples correctes de fracció escrita de forma simbòlica són fraccions més petites que la unitat.

La fracció $\frac{2}{1}$ correspon a un exemple incorrecte: és el que ha proposat l'estudiant de la categoria ND2 a l'hora de definir numerador i denominador a partir d'un repartiment. En realitat, segons l'explicació que en fa, volia proposar l'exemple $\frac{1}{2}$.


Representacions amb imatges
Quantitat d'estudiants
25
20
15
10
5
0
8
2
2
1
Cercles
Rectangles
Imatges d'objectes reals
Grup de rectangles

1/2 un mig 1/3 un terç 1/4 un quart 1/5 un cinquè 1/6 un sisè 1/7 un setè 1/8 un vuitè 1/9 un novè 1/10 un desè 1/11 un onzè	3/4 tres quarts 4/5 quatre cinquens 5/8 cinc vuitens 6/9 sis novens

Codi	Categoria	Exemples
SII1	Interpretació comparació part–tot	"*Una fracció indica que la unitat està dividida en parts iguals i que s'ha pres una o diverses d'aquestes parts* [...]. *En aquest cas tenim vuit trossets de pastís però només hem agafat tres, els trossets que estan pintats* ". E17 
SII2	Interpretació quocient (repartiment)	"*Els repartiré una poma i un ganivet per cada dos* [...]. *1/2 vol dir una meitat. El nombre de baix és la quantitat de talls en que hem dividit la poma i es diu DIVIDEND. En Aquest cas és 2 perquè hem fraccionat la poma en dues parts. El nombre de dalt són els talls que es queda cadascú. La poma està partida en dos talls però cada membre de la parella en té només 1. El nombre de dalt es diu DIVISOR."* . E3
SII3	Interpretació operador	"*Per exemple, què vol dir la meitat de la classe? Si som 24 nens en total la meitat seran ...12, que és 24 entre 2".* E10 

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
SII1	Interpretació comparació part–tot	24
SII2	Interpretació quocient (repartiment)	2
SII3	Interpretació operador	1

Els vint-i-sis estudiants que fan explicacions per ensenyar el significat de fracció en les activitats de la seqüència s'han basat en tres de les cinc interpretacions que proposa Lamon (2012): comparació part–tot, repartiment i operador.

Vint-i-quatre dels vint-i-sis estudiants han interpretat la fracció com una comparació part–tot. Aquests estudiants han considerat en l'explicació de fracció i/o en la de numerador i de denominador que la fracció és una unitat que es pot dividir en parts iguals i que, d'aquestes parts, se n'agafen una o diverses. Alguns d'aquests estudiants, a més, han proposat exemples en què es divideixen pastissos, pizzes o altres objectes en parts i es consideren una o més d'una d'aquestes parts. Només un d'aquests vint-i-quatre estudiants ha proposat un exemple segons la interpretació d'operador.

Només dos estudiants interpreten la fracció com un quocient, és a dir, com un repartiment. Un dels dos estudiants proposa dividir una poma entre dos alumnes i, a partir d'aquest exemple, vol que els alumnes entenguin el que és una fracció. La interpretació de l'altre estudiant també és molt clara, ja que defineix la fracció com a repartiment: "Quan repartim una cosa diem que estem fent una fracció", i proposa exemples en què cal repartir un objecte, un entrepà i una barra de plastilina. Encara que aquest estudiant s'equivoca en definir el numerador i el denominador, en la definició d'aquests conceptes es veu clarament que pensa a repartir alguna cosa (vegeu figura 6.2).

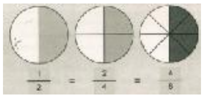
Amb aquests resultats, s'aprecia que la majoria d'estudiants ha interpretat la fracció com el fet d'agafar una unitat, dividir-la en parts iguals i considerar una o més d'una d'aquestes parts. Molt pocs estudiants han partit de la interpretació de fracció com a quocient (repartiment) i hi ha tres interpretacions en què no s'ha basat cap estudiant: mesura, raó i operador.

6.2 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb l'equivalència de fraccions

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions. Uns quants estudiants de mestre han proposat activitats en la seqüència a fi d'ensenyar l'equivalència de fraccions. S'ha analitzat com aquests estudiants plantegen ensenyar aquest concepte a partir de les explicacions i els exemples de les activitats de la seqüència. Concretament, s'analitzen les explicacions sobre l'equivalència de fraccions, les representacions utilitzades en els exemples i la interpretació de fracció en les explicacions en què s'ha pogut detectar. La informació s'ha organitzat en tres subapartats (vegeu figura 6.6).

OBJECTIU 2.2: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions		
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions

Codi	**Categoria**	**Exemples**
EQ1	Explicació conceptual	"*Dues fraccions són equivalents quan tenen el numerador i denominador diferents i representen la mateixa quantitat*". E27
EQ2	Procediment de càlcul	
EQ2.1	Multiplicar en creu	"*Multiplicant en creu, si dóna el mateix resultat vol dir que són equivalents*". E41
EQ2.2	Multiplicar i/o dividir numerador i denominador	"*Si multipliquem el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, la fracció que resulta és equivalent a la que tenim*". E21

EQ3	Comparació de regions	"*Entre tots compararan els diferents dibuixos i se n'adonaran de que tot i ser de diferents colors i estar partides de tres maneres diferents, tot és el mateix arribant així a la fracció equivalent*". E14	

Codi	Categoria	Quantitat d'explicacions
EQ1	Explicació conceptual	**2**
EQ2	Procediment de càlcul	**7**
EQ2.1	Multiplicar en creu	2
EQ2.2	Multiplicar i/o dividir numerador i denominador	5
EQ3	Comparació de regions	**1**

Només una explicació i, per tant, un sol estudiant fa referència a la comparació de regions dient que les fraccions equivalents ocupen la mateixa àrea quan es representen gràficament.

Alguns estudiants només han donat explicacions en una de les tres categories, mentre que d'altres combinen explicacions de més d'una categoria (vegeu taula 6.15). No hi ha cap estudiant que hagi donat únicament explicacions conceptuals ni tampoc de comparació de regions. En canvi, n'hi ha tres que només s'han referit a procediments de càlcul. Els altres tres combinen explicacions de més d'una categoria: dos estudiants ho expliquen a partir de procediments de càlcul i explicacions conceptuals, i el tercer, a partir de procediments de càlcul i comparació de regions.

Taula 6.15. Classificació en categories de les definicions d'equivalència de fraccions en les seqüències d'activitats.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
EQ1		Explicació conceptual	**0**	
EQ2		Procediment de càlcul	**3**	
	EQ2.1	Multiplicar en creu		1
	EQ2.2	Multiplicar i/o dividir numerador i denominador		2
EQ3		Comparació de regions	**0**	
EQ1 i EQ2		Explicació conceptual i Procediment de càlcul	**2**	
	EQ1 i EQ2.2	Explicació conceptual i Procediment de càlcul (Multiplicar i/o dividir numerador i denominador)		1
	EQ1, EQ2.1 i EQ2.2	Explicació conceptual i Procediment de càlcul (Multiplicar i/o dividir numerador i denominador i Multiplicar en creu)		1
EQ2 i EQ3		Procediment de càlcul i Comparació de regions	**1**	

És significatiu que tots els estudiants han proposat explicacions a partir de procediments de càlcul. A més, la meitat d'aquests estudiants únicament ha plantejat aquests procediments, sense fer cap explicació de tipus conceptual per ensenyar que si dues fraccions són equivalents, vol dir que representen la mateixa quantitat.

És destacable que un estudiant que ha combinat explicacions de les categories EQ1 i EQ2 comenta dos procediments diferents per comprovar que dues fraccions siguin equivalents: multiplicar en creu i multiplicar o dividir pel mateix nombre el numerador i el denominador.

L'únic estudiant que ha proposat explicacions a partir de la comparació de regions i que també dóna explicacions procedimentals, no explica de manera prou clara com comprovar que dues fraccions són equivalents a partir del procediment de càlcul, només diu "fer la multiplicació per demostrar que són equivalents". És l'únic que no ha explicat correctament aquest procediment; els altres estudiants, en canvi, el tenen molt clar.

Tenint en compte tots els resultats, constatem que aquests estudiants prioritzen els procediments de càlcul davant dels conceptuals a l'hora d'explicar l'equivalència de fraccions en les activitats de les seqüències.

6.2.2 Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions

Tal com s'ha comentat al subapartat 6.1.2, les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

Al subapartat 3.3.6 s'han presentat diferents representacions per ensenyar l'equivalència de fraccions depenent de la interpretació de fracció que es tingui en compte. Prenent com a base aquestes representacions i les exposades a l'apartat 6.1.2 a partir de l'adaptació de les representacions del model de Lesh (Cramer, 2003), en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants proposen en les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions.

6.2.2.1 Les categories definides

Alguns estudiants que han donat explicacions i exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions han proposat una o més representacions; en canvi, d'altres no n'han suggerit cap. A la taula 6.16 es mostren les categories de les representacions dels estudiants que fan referència a l'equivalència de fraccions segons les cinc maneres diferents de representar idees matemàtiques obtingudes de l'adaptació del model de Lesh (Cramer, 2003): símbol matemàtic, imatge, expressió verbal, context real simulat i objecte.

Taula 6.16. Categorització de les representacions en les explicacions i els exemples dels estudiants per ensenyar l'equivalència de fraccions.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
EQRE0	Cap representació						"*Si multipliquem el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, la fracció que resulta és equivalent a la que tenim*". E21
EQRE1	1 representació	■					"*Podem dir que dues fraccions són equivalents quan representen el mateix nombre. 2/3 = 0,6 i 4/6 = 0,6 (s'obté de la divisió del numerador pel denominador). Si es compleix que el producte encreuat de denominadors és igual. a/b és equivalent a c/d si i només si a.d=b.c. Per obtenir*

fraccions equivalents a una donada podem simplificar fraccions o amplificar-la. Simplificar vol dir dividir el numerador i el denominador pel mateix nombre. Amplificar vol dir multiplicar el numerador i el denominador pel mateix nombre". E31

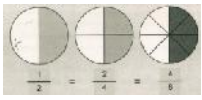
EQRE2 2 representacions diferents

EQRE2.1

"*La mestra pot introduir el concepte de parts iguals, a més de les equivalències comparant dues pizzes que poden estar partides de manera diferent. Quan els pares diuen que volen 3/6 o 4/8 i ens diuen que són iguals , nosaltres dubtem, oi? Com pot ser?* [...] *Us diré una tècnica que no falla mai i és molt ràpid. A la pissarra posteriorment la mestra anuncia que multiplicant en creu i si els dóna el mateix resultat, són equivalents*". E41

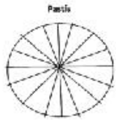
EQRE2.2

"*Entre tots compararan els diferents dibuixos i se n'adonaran de que tot i ser de diferents colors i estar partides de tres maneres diferents, tot és el mateix arribant així a la fracció equivalent*". E14



EQRE3 3 representacions diferents

"*El primer nen vol ¼ de pastís, el segon nen vol 2/8. ¼ i 2/8 són equivalents? Per què?Amb quines operacions es comprova? Amb aquesta activitat es preten que els alumnes siguin capaços d'identificar i fer fraccions equivalents multiplicant o dividint el numerador i el denominador per un mateix número*". E4



representacions diferents. Tampoc hi ha cap estudiant que representi les fraccions amb una expressió verbal o dient que utilitzaria objectes.

Taula 6.17. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar l'equivalència de fraccions.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants	
EQRE0	Cap representació						**1**	
EQRE1	1 representació						**1**	
EQRE2	2 representacions diferents						**3**	
REIRE2.1								1
REIRE2.2								2
EQRE3	3 representacions diferents						**1**	

Observant la taula 6.17, es veu com la representació més utilitzada són els símbols matemàtics: tots els estudiants que han fet alguna representació han considerat els símbols matemàtics. Tres dels cinc estudiants han fet dibuixos i dos han donat explicacions a partir de contextos reals. A continuació s'analitzen les representacions de manera més detallada.

Representacions amb símbols matemàtics

Els exemples de fraccions equivalents utilitzant símbols matemàtics s'han organitzat segons la fracció irreductible a la qual les fraccions proposades són equivalents (vegeu taula 6.18). Els estudiants han plantejat fraccions equivalents a les fraccions irreductibles $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ i $\frac{16}{7}$.

La fracció irreductible de la qual més estudiants han proposat fraccions equivalents és la fracció $\frac{1}{2}$, concretament l'han utilitzat quatre dels cinc estudiants que han donat exemples de fraccions equivalents amb símbols matemàtics. Els altres exemples només han estat proposats per un sol estudiant. Hi ha tres estudiants que només han donat un exemple, un que n'ha proposat dos i també un únic estudiant ha plantejat tres exemples diferents.

Dels cinc estudiants, quatre han donat només fraccions amb els denominadors parells. Tres estudiants han proposat fraccions amb denominadors que són potències de 2: han utilitzat els denominadors 2, 4, 8 i 16; els altres dos han proposat els denominadors 3, 6, 7, 15, 21, 30 i 42, que no són potències de 2.

Quatre estudiants han dit fraccions equivalents en què el numerador d'una és múltiple del numerador de l'altra o de les altres fraccions proposades i el denominador d'una és múltiple del denominador de l'altra o de les altres fraccions donades. Un estudiant ha dit les fraccions $\frac{3}{6}$ i $\frac{4}{8}$, en què el 8 no és múltiple de 6 ni el 4 de 3.

Tres de les cinc fraccions irreductibles equivalents dels exemples proposats són més petites que la unitat i dues són més grans. Quatre estudiants proposen fraccions més petites que la unitat i un de sol en planteja de més petites que la unitat i de més grans.

Taula 6.18. Classificació dels exemples de fraccions equivalents representats amb símbols matemàtics.

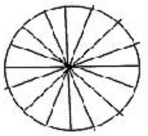
Grup	Exemples	Denominadors parells	Denominadors potències de dos	Numerador i denominador d'una fracció múltiples del numerador i denominador de la fracció equivalent	Quantitat d'estudiants
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$				1
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$				
	$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$				1
	$\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$				1
	$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$				1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=0{,}6$				1
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}=\frac{20}{15}=\frac{40}{30}$				
$\frac{16}{7}$	$\frac{96}{42}=\frac{48}{21}=\frac{16}{7}$				

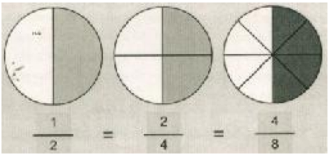
Nota: Les cel·les acolorides assenyalen que les fraccions tenen els denominadors parells, que els denominadors són potències de 2 o bé que el numerador i el denominador d'una fracció són múltiples del numerador i denominador de la fracció equivalent.

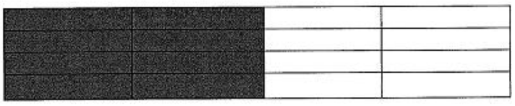
Representacions amb imatges

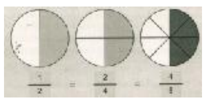
Només tres estudiants han realitzat algun dibuix per tal d'exemplificar amb una imatge què vol dir que dues fraccions o més són equivalents. Un estudiant ha dibuixat cercles dividits de diferents maneres (vegeu imatge 2 de la figura 6.7), un altre ha dibuixat un cercle dividit en setze parts (vegeu imatge 1 de la figura 6.7) i el tercer ha dibuixat un rectangle dividit en 16 parts. Tots tres, per tant, han proposat exemples de model d'àrea (cercles i rectangle). Només en un dels tres exemples, però, es representa l'equivalència de fraccions (vegeu imatge 2).

Totes les regions de les representacions s'han dividit en parts congruents (igual forma i igual àrea) i totes s'han elaborat per representar fraccions més petites que la unitat. En la imatge 1 de la figura 6.7 no s'ha representat cap fracció, però l'estudiant explica que es podria comprovar que les fraccions ¼ i 2/8 són equivalents.


Imatge 1


Imatge 2


Imatge 3

Codi	**Categoria**	**Exemples**
EQI1	Sense interpretació	"*Si multipliquem el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, la fracció que resulta és equivalent a la que tenim*". E21
EQI2	Interpretació comparació part–tot	"*Entre tots compararan els diferents dibuixos i se n'adonaran de que tot i ser de diferents colors i estar partides de tres maneres diferents, tot és el mateix arribant així a la fracció equivalent*". E14 

6.2.3.2 Resultats i discussió

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar l'equivalència de fraccions segons les categories descrites a l'apartat 6.2.3.1.

Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar l'equivalència de fraccions estan distribuïts en dues categories segons si es basen en alguna interpretació i, en cas que sigui així, segons la interpretació de la qual parteixen: Sense interpretació (EQI1) i Interpretació comparació part–tot (EQI2) (vegeu taula 6.20).

Taula 6.20. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar l'equivalència de fraccions.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
EQI1	Sense interpretació	**2**
EQI2	Interpretació comparació part–tot	**4**

En les explicacions de dos dels sis estudiants que han proposat ensenyar l'equivalència de fraccions no s'utilitza cap interpretació. Tenint en compte, però, els exemples donats a partir de representacions gràfiques o de context real, s'ha pogut observar que quatre estudiants han interpretat la fracció com a comparació part–tot.

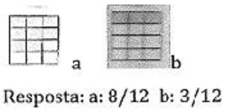
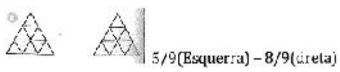
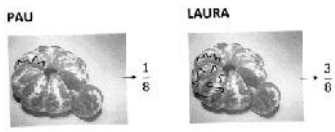
El fet d'interpretar la fracció d'una determinada manera depèn de com els estudiants han plantejat representacions amb dibuixos o de context real. En les explicacions en què no han proposat exemples o només n'han proposat amb símbols matemàtics s'ha constatat que no s'han basat en cap interpretació.

6.3 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb la comparació i ordenació de fraccions

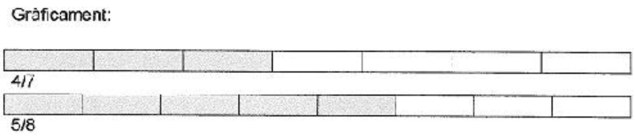
En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la comparació i ordenació de fraccions. Uns quants estudiants de mestre han proposat activitats en la seqüència sobre comparació i ordenació de fraccions. S'ha analitzat com plantegen ensenyar aquests conceptes a partir de les explicacions i els exemples donats. Cap estudiant, però, ha donat explicacions per ensenyar l'ordenació de fraccions; per això només s'analitzen les explicacions sobre comparació de fraccions, les representacions utilitzades i la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples en què s'ha pogut detectar. La informació s'ha organitzat en tres subapartats (vegeu figura 6.8).

OBJECTIU 2.3: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la comparació i ordenació de fraccions

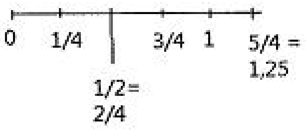
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions

Codi	Categoria	Exemples
COID1	Explicació (comparar els numeradors)	"*Si dues fraccions tenen el mateix denominador, la fracció que té el numerador més gran és la fracció més gran*". E23
COID2	Explicació (comparar els numeradors) seguida d'exemples	
COID2.1	Explicació (comparar els numeradors) + Exemple (símbols matemàtics)	"*Quan volem comparar les fraccions per saber quina és més gran o més petita ens hem de fixar que tinguin el mateix denominador. Hem de mirar quins tenen el mateix denominador. Una vegada els tenim només ens fixarem en el numerador. Quan el denominador sigui més petit que el numerador la fracció és més gran. Ex: 4/3. Quan el numerador és més petit que el denominador la fracció és més petita. Ex: 1/3". E17*
COID2.2	Explicació (comparar els numeradors) + Exemples (símbols matemàtics i context real simulat)	"*Quan comparem fraccions amb el mateix denominador, la fracció més gran és la que té el numerador més gran. Per exemple: Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 3=3/8. Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 2: 2/8. 3/8>2/8*". E6
COID3	Explicació (comparar els numeradors o comparar els decimals amb la unitat) + Exemples (símbols matemàtics i imatges)	"*És més gran la fracció de l'esquerre perquè la divisió de vuit entre dotze dóna 0,6 en canvi la divisió tres entre dotze dóna 0,25. El número més proper a u, és a dir a la unitat , és el 0,6.*  *La fracció més gran és la de la dreta perquè té el numerador més gran*". E24 
COID4	Exemples (context real, imatge, símbols matemàtics i expressions verbals)	"*Si partim una mandarina sencera que té 8 grills i en Pau se'n menja la primera porció i la Laura la segona porció, qui ha menjat més mandarina?* *La Laura ha menjat més grills de mandarina que en Pau. 1/8 <3/8. Un vuitè és més gran* [sic] *que tres vuitens*". E43 

Codi	Categoria	Exemples
COIN1	Explicació (comparar els denominadors)	"*Si dues fraccions tenen el mateix numerador, la fracció que té el denominador més petit és la fracció més gran*". E23

Codi	Categoria	Exemples
CODND1	Explicació seguida d'exemples	
CODND1.1	Explicació (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemple (Símbols matemàtics)	"*Comparar els resultats que s'obtenen quan calculem cada fracció de la quantitat que ens dóna la multiplicació dels dos denominadors. Numèricament:* *4/7 i 5/8 de 7x8 =56* *4/7 de 56 =(56:7) x 4 =8x4=32* *5/8 de 56 = (56:8) x 5 = 7x5 = 35* *35>32, per tant, 5/8 > 4/7*". E31
CODND1.2	Explicació (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemples (símbols matemàtics i expressions verbals)	"*Comencem multiplicant els dos denominadors: 7x 8 = 56. Tot seguim agafem una de les fraccions, en aquest cas quatre setens, seran de 56. 4/7 de 56=? Per saber-ho el que caldrà fer és dividir el 56 que hem obtingut al principi entre el denominador. Seguidament, multiplicarem el resultat obtingut pel nominador* [sic]. *(57:7)x4=32. Tot seguit, farem el mateix amb la segona fracció: 5/8 de 56=(56:8)x5=7x5=35. 5/8>4/7*". E6
CODND1.3	Explicació (Comparar les representacions gràfiques) + Exemples (símbols matemàtics i imatge)	"*Comparar la seva representació gràfica, amb la mateixa unitat*". E31 

Codi	Categoria	Exemples
COU1	Explicació (Comparar el numerador amb el denominador) seguida d'exemples (Símbols matemàtics)	"*Ens hem de fixar amb el numerador i el denominador. Fracció més petita que la unitat, el numerador és més petit que el denominador. 2/6 < 1. Fracció més gran que la unitat, el numerador és més gran que el denominador. 8/6 > 1. Fracció igual que la unitat, el numerador i denominador són el mateix nombre. 6/6 = 1*". E31
COU2	Exemple (imatge) seguit d'una explicació	"*Buscar la representació de la*

(Comparar el numerador amb el denominador)	*fracció 5/4 perquè comprovin que està per sobre de l'u. Així arribarem a descobrir que si el numerador és més gran que el denominador el resultat serà més gran que 1*". E10 

Quantitat d'estudiants	Comparació de fraccions amb igual denominador	Comparació de fraccions amb igual numerador	Comparació de fraccions amb denominador diferent i numerador diferent	Comparació de fraccions amb la unitat
4				
1				
1				
2				

amb numeradors i denominadors diferents i, finalment, les de comparació de fraccions amb la unitat.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals

Set estudiants han plantejat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb denominadors iguals. Les explicacions d'aquests estudiants estan distribuïdes en quatre categories: Explicació (comparar els numeradors) (COID1), Explicació (comparar els numeradors) seguida d'exemples (COID2), Explicació (comparar els numeradors o comparar els decimals amb la unitat) seguida d'exemples (COID3) i Exemples (COID4) (vegeu taula 6.26).

Taula 6.26. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors iguals.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
COID1		Explicació (comparar els numeradors)	**2**	
COID2		Explicació (comparar els numeradors) seguida d'exemples	**3**	
	COID2.1	Explicació (comparar els numeradors) + Exemple (símbols matemàtics)		2
	COID2.2	Explicació (comparar els numeradors) + Exemple (símbols matemàtics i context real)		1
COID3		Explicació (comparar els numeradors o comparar els decimals amb la unitat) + Exemple (símbols matemàtics i imatge)	**1**	
COID4		Exemples (context real, imatge, símbols matemàtics i expressions verbals)	**1**	

Únicament dos estudiants expliquen directament com comparar fraccions amb denominadors iguals a partir de la consigna que la fracció més gran és la que té el numerador més gran. Aquests estudiants no proposen exemples en cap moment de l'explicació.

Els tres estudiants de la categoria Explicació (comparar els numeradors) seguida d'exemples (COID2) també expliquen que la fracció més gran és la que té el numerador més gran, però a diferència dels estudiants de la categoria COID1, aquests proposen un o dos exemples per exemplificar l'explicació.

Un sol estudiant proposa dues explicacions diferents per mostrar com es comparen fraccions: la comparació dels numeradors i la comparació dels nombres decimals amb la unitat. Aquest estudiant, de la categoria COID3, també dóna exemples en l'explicació.

L'estudiant de la categoria COID4 és l'únic que explica la comparació de fraccions a partir d'exemples: una situació de context real simulat, una imatge, símbols matemàtics i expressions verbals (un vuitè, tres vuitens). Aquest estudiant s'equivoca a l'hora de dir quina és la fracció més gran, però segurament ha estat un error d'escriptura i no conceptual, ja que, a partir de l'exemple amb imatges pictòric, mostra de manera molt clara quina és la fracció més gran (vegeu taula 6.21).

Sis estudiants fan referència al numerador per saber quina fracció és més gran; és l'explicació més repetida en les propostes per ensenyar la comparació de fraccions. Un d'aquests sis estudiants fa una explicació per comparar fraccions a partir dels numeradors que no és prou clara, sembla que vulgui comparar fraccions amb igual denominador, però a continuació compara fraccions amb la unitat perquè compara el numerador amb el denominador per a cada fracció (vegeu resposta de l'estudiant E17 de la taula 6.21).

És destacable que el procediment proposat en les explicacions sigui quasi exclusivament la comparació de numeradors, cap utilitza altres explicacions més conceptuals. Només un estudiant proposa comparar els nombres decimals que s'obtenen quan es divideix el numerador entre el denominador de cada fracció.

S'evidencia també l'ensenyament de la comparació de fraccions mitjançant explicacions teòriques amb exemples o sense. De fet, només un sol estudiant intenta explicar la comparació de fraccions mitjançant un exemple.

Comparació de fraccions amb numeradors iguals

Un únic estudiant explica com comparar fraccions que tenen el mateix numerador: forma part de la categoria Explicació (comparar els denominadors) (COIN1).

L'estudiant d'aquesta categoria explica directament que, quan dues fraccions tenen el mateix numerador, la més gran és la que té el denominador més petit. No proposa cap exemple, ni tampoc cap justificació de l'explicació que fa. Per explicar la comparació de fraccions amb el mateix denominador, tampoc ha proposat cap exemple i també ha formulat l'explicació com una regla que cal seguir sense explicar per què s'utilitza.

Comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents

Només dos estudiants han explicat com comparar fraccions amb denominador diferent. Les explicacions d'aquests estudiants formen part de la mateixa categoria: Explicació seguida d'exemples (CONDD1) (vegeu taula 6.27).

Els dos estudiants parteixen d'una explicació que després exemplifiquen mitjançant una o dues representacions. Un dels estudiants ha fet una sola proposta per comparar fraccions, mentre que l'altre ho explica de dues maneres diferents. Tots dos fan servir el mateix procediment de càlcul i un dels dos afegeix com comparar les fraccions gràficament.

Taula 6.27. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents.

Codi	Categoria	Quantitat d'explicacions
CODND1	Explicació seguida d'exemples	
CODND1.1	Explicació (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemple (Símbols matemàtics)	1
CODND1.2	Explicació (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemple (Símbols matemàtics i expressions verbals)	1
CODND1.3	Explicació (Comparar les representacions gràfiques) seguida d'exemple (Símbols matemàtics i imatge)	1

L'explicació del procediment de càlcul proposada és multiplicar els dos denominadors de les fraccions i calcular cada fracció d'aquest resultat. Aleshores s'han de comparar els resultats obtinguts i el que sigui més gran indica quina és la fracció més gran (vegeu estudiant E31 de la taula 6.23). Tots dos ho expliquen com una regla que s'aplica i prou. En realitat, parteixen de la interpretació de fracció com a operador: la fracció més gran és la que, quan s'aplica al mateix nombre, dóna el resultat més gran. El fet de multiplicar els dos denominadors serveix perquè es pugui calcular la fracció d'un nombre i s'obtingui un resultat enter. Tots aquests aspectes, però, no els expliquen. Els dos estudiants proposen el mateix exemple i el mateix mètode i tots dos posen el mateix llibre de text a la bibliografia consultada; possiblement és d'on han extret l'exemple.

L'estudiant que planteja comparar les fraccions gràficament explica que cal representar les fraccions en un dibuix i comparar-ne la representació (vegeu estudiant E31 de la taula 6.23). És interessant el fet que diu que cal "comparar la seva representació gràfica, amb la mateixa unitat" i, per tant, té en compte que les fraccions s'han de representar en la mateixa unitat. Aquest procediment pot ser més fàcil d'entendre per als alumnes, ja que visualment es veu que una de les regions representades té menys àrea que l'altra. De totes maneres, depenent de quines fraccions es comparen de forma gràfica, tampoc es veurà tan clarament.

Comparació de fraccions amb la unitat

Tres estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb la unitat. Les explicacions d'aquests estudiants estan distribuïdes en dues categories: Explicació seguida d'exemples (COU1) i Exemple seguit d'una explicació (COU2) (vegeu taula 6.28).

Taula 6.28. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions amb la unitat.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
COU1	Explicació (Comparar el numerador amb el denominador) seguida d'exemples (Símbols matemàtics)	**2**
COU2	Exemple (imatge) seguit d'una explicació (Comparar el numerador amb el denominador)	**1**

Tres estudiants expliquen com comparar fraccions amb la unitat. Els dos estudiants de la categoria Explicació seguida d'exemples (COU1) ho fan mitjançant una explicació seguida d'un exemple, mentre que l'únic estudiant de la categoria Exemple seguit d'una explicació (COU2) parteix de l'exemple per deduir que la fracció és més gran que la unitat.

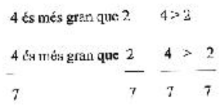
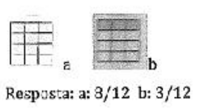
Els dos estudiants de la categoria COU1 són els dos estudiants que han comparat fraccions amb diferents denominadors. Com en l'explicació dels denominadors diferents, en aquest cas, també han donat la mateixa explicació i fins i tot proposen els mateixos exemples, possiblement perquè ho han tret del mateix llibre de text. Diuen que cal comparar el numerador i el denominador i, si el numerador és més gran que el denominador, la fracció és més gran que la unitat; si és més petit, la fracció és més petita que la unitat, i si el numerador i el denominador són iguals, aleshores la fracció és igual a la unitat.

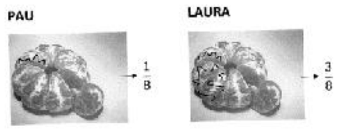
L'estudiant de la categoria COU2 proposa representar la fracció $\frac{5}{4}$ a la recta numèrica i que els alumnes vegin que és més gran que 1. D'aquesta manera, vol que descobreixin que "si el numerador és més gran que el denominador, el resultat serà més gran que 1". És interessant el fet que parteixi de l'exemple i intenti que els alumnes dedueixin la regla per decidir si una fracció és més gran, igual o més petita que la unitat.

6.3.2 Anàlisi de les respostes en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions

Tal com s'ha comentat al subapartat 6.1.2, les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

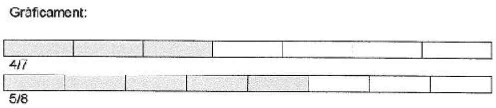
Al subapartat 3.3.6 s'han mostrat diferents representacions per ensenyar la comparació de fraccions depenent de la interpretació de fracció que es tingui en compte. Prenent com a base aquestes representacions i les exposades a l'apartat 6.1.2 a partir de l'adaptació de les representacions del model de Lesh (Cramer, 2003), en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants proposen en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions.

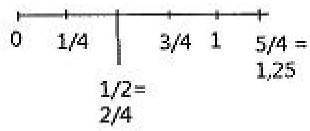
Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
COIDRE0	Cap representació						"*Si dues fraccions tenen el mateix denominador, la fracció que té el numerador més gran és la fracció més gran*". E23
COIDRE1	1 representació						"*Sabem que una fracció és més gran que una altra si ens fixem en el numerador, el denominador tindrà el mateix número*". E20 
COIDRE2	2 representacions diferents						
COIDRE2.1							"*Quan comparem fraccions amb el mateix denominador, la fracció més gran és la que té el numerador més gran. Per exemple: Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 3=3/8. Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 2: 2/8. 3/8>2/8*". E6
COIDRE2.2							"*És més gran la fracció de l'esquerre perquè la divisió de vuit entre dotze dóna 0,6 en canvi la divisió tres entre dotze dóna 0,25. El número més proper a u, és a dir a la unitat , és el 0,6. La fracció més gran és la de la dreta perquè té el numerador més gran*". E24 

COIDRE4	4 representacions diferents	■	■	■	■		"*Si partim una mandarina sencera que té 8 grills i en Pau se'n menja la primera porció i la Laura la segona porció, qui ha menjat més mandarina?* *La Laura ha menjat més grills de mandarina que en Pau. 1/8 <3/8.*  *Un vuitè és més gran que tres vuitens* [sic]". E43

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
COINRE0	Cap representació						"*Si dues fraccions tenen el mateix numerador, la fracció que té el denominador més petit és la fracció més gran*". E23

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
CODNDRE2	2 representacions diferents						
CODNDRE2.1		■		■			"*Comencem multiplicant els dos denominadors: 7x 8 = 56. Tot seguim agafem una de les fraccions, en aquest cas quatre*

CODNDRE2.2		■	■				*setens, seran de 56. 4/7 de 56=? Per saber-ho el que caldrà fer és dividir el 56 que hem obtingut al principi entre el denominador. Seguidament, multiplicarem el resultat obtingut pel nominador* [sic]. *(57:7)x4=32. Tot seguit, farem el mateix amb la segona fracció: 5/8 de 56=(56:8)x5=7x5=35. 5/8>4/7*". E6 "*Comparar la seva representació gràfica, amb la mateixa unitat*". E31 

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
COURE1	1 representació	■					"*Ens hem de fixar amb el numerador i el denominador. Fracció més petita que la unitat, el numerador és més petit que el denominador. 2/6 < 1. Fracció més gran que la unitat, el numerador és més gran que el denominador. 8/6 > 1. Fracció igual que la unitat, el numerador i denominador són el mateix nombre. 6/6 = 1*". E31
COURE2	2 representacions diferents	■	■				"*Buscar la representació de la fracció 5/4 perquè comprovin que està per sobre de l'u. Així arribarem a descobrir que si el numerador és més gran que el denominador el resultat serà més gran que 1*". E10 

exemples per ensenyar a comparar fraccions segons les categories descrites a l'apartat 6.3.2.1. Primerament, s'analitzen les explicacions de comparació de fraccions amb denominadors iguals, després, amb numeradors iguals, a continuació, les de comparació amb numeradors i denominadors diferents i, finalment, les de comparació de fraccions respecte a la unitat.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals

Set estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb igual denominador. D'aquests set, n'hi ha que han fet representacions per ensenyar aquest concepte i d'altres que no han utilitzat cap representació.

Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors iguals estan distribuïts en quatre categories segons la quantitat de representacions diferents que proposen: Cap representació (COIDRE0), 1 representació (COIDRE1), 2 representacions diferents (COIDRE2) i 4 representacions diferents (COIDRE4) (vegeu taula 6.33).

Taula 6.33. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants
COIDRE0	Cap representació						**2**
COID RE1	1 representació						**2**
COIDRE2	2 representacions diferents						**2**
COIDRE2.1							1
COIDRE2.2							1
COIDRE4	4 representacions diferents						**1**

Dos estudiants no han proposat cap representació. Els altres cinc han donat una, dues o quatre representacions diferents: dos han plantejat una representació i també dos n'han suggerit dues de diferents, mentre que un únic estudiant ha fet quatre representacions de tipus diferents. No hi ha cap estudiant que hagi proposat tres o cinc representacions diferents. Tampoc hi ha cap estudiant que representi les fraccions dient que utilitzaria objectes.

Observant la taula 6.33, es detecta que la representació més utilitzada són els símbols matemàtics: tots els que han proposat representacions n'han fet d'aquest tipus. Dos estudiants han fet dibuixos en les seves explicacions i també dos han proposat exemples amb contextos reals simulats. En canvi, un sol estudiant ha anomenat les fraccions amb paraules, amb expressions verbals. A continuació s'analitzen amb més detall les representacions dels estudiants.

Representacions amb símbols matemàtics

Cinc dels set estudiants que han explicat la comparació de fraccions amb igual denominador han proposat exemples amb símbols matemàtics, concretament han donat fraccions amb denominadors iguals: $\frac{4}{3}$ i $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ i $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{12}$ i $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{8}$ i també $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{8}$. Totes aquestes fraccions són més petites que la unitat.

Representacions amb imatges

Només dos dels set estudiants han proposat alguna imatge per tal d'exemplificar com comparar fraccions. Tots dos han utilitzat exemples de model d'àrea (triangles, rectangles i imatges d'objectes reals) (vegeu taula 6.29).

Les regions proposades en les representacions dels models d'àrea s'han dividit totes en parts congruents (igual forma i igual àrea) i totes representen fraccions més petites que la unitat. A més, per comparar les fraccions, els dos estudiants han representat cada fracció en la mateixa unitat.

Representacions amb contextos reals simulats

Dos estudiants han proposat situacions reals per exemplificar les explicacions de comparació de fraccions. Un planteja comparar qui menja més mandarina si una persona en menja un vuitè i, l'altra, tres vuitens, i el segon estudiant proposa comparar els trossos de truita que ens mengem: $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{8}$.

Representacions amb expressions verbals

Només un estudiant ha escrit el nom de les fraccions en les explicacions i els exemples proposats sobre la comparació de fraccions amb denominadors iguals. Ha escrit "un vuitè i tres vuitens".

Comparació de fraccions amb numeradors iguals

Només un estudiant ha donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb numeradors iguals. Les explicacions i els exemples d'aquest estudiant formen part d'una sola categoria: Cap representació (COINRE0).

L'estudiant d'aquesta categoria no ha utilitzat cap exemple per il·lustrar l'explicació. Només ha fet una explicació de la regla per comparar fraccions (vegeu taula 6.22). Aquest estudiant també ha explicat la comparació de fraccions amb denominadors iguals i, en aquest cas, tampoc ha proposat cap exemple (vegeu taula 6.21).

Comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents

Dos estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb els numeradors i els denominadors diferents. Tots dos han fet representacions per ensenyar aquest concepte i tots dos formen part de la categoria 2 representacions diferents (CODNDRE2) (vegeu taula 6.34).

Taula 6.34. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
CODNDRE2	2 representacions diferents						
CODNDRE2.1		■		■			**1**
CODNDRE2.2		■	■				**1**

Tots dos estudiants han proposat símbols matemàtics en els seus exemples, però un, a més, ha fet un dibuix, mentre que l'altre també ha escrit les fraccions amb expressions verbals. A continuació s'analitzen amb més detall les representacions dels estudiants.

Representacions amb símbols matemàtics

Els dos estudiants que han explicat com comparar fraccions amb diferent denominador han proposat els mateixos exemples amb símbols: $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{8}$. Aquestes dues fraccions també són més petites que la unitat.

Representacions amb expressions verbals

Només un estudiant ha escrit el nom de les fraccions en les explicacions i els exemples proposats sobre la comparació de fraccions amb denominadors diferents. Ha escrit "quatre setens".

Comparació de fraccions amb la unitat

Tres estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb la unitat. Tots tres han fet representacions per ensenyar aquest concepte i estan distribuïts en dues categories segons la quantitat de representacions diferents que proposen: 1 representació (COURE1) i 2 representacions diferents (COURE2) (vegeu taula 6.35).

Taula 6.35. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la comparació de fraccions amb la unitat.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants
COURE1	1 representació						**2**
COURE2	2 representacions diferents						**1**

Dos estudiants només han fet una representació amb símbols matemàtics i el tercer n'ha fet dues: símbols matemàtics i una imatge. Tots tres han plantejat símbols matemàtics. A continuació s'analitzen amb més detall les representacions dels estudiants.

Representació amb símbols matemàtics

Els tres estudiants que han explicat com comparar fraccions amb la unitat han proposat exemples amb símbols matemàtics. Un ha proposat la fracció $\frac{5}{4}$ com a exemple de fracció més gran que la unitat i els altres dos han suggerit les fraccions següents com a exemples de fracció més petita, més gran i igual que la unitat: $\frac{2}{6} < 1, \frac{8}{6} > 1$ i $\frac{6}{6} = 1$.

Representacions amb imatges

Només un estudiant ha fet servir una representació amb una imatge. Ha utilitzat la recta numèrica com a model de longitud (vegeu resposta de l'estudiant E10 de la taula 6.32).

6.3.3 Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions

Tal com s'ha explicat a l'apartat 6.1.3 i d'acord amb les diferents interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012) (comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó), en aquest subapartat s'analitzen les interpretacions de fracció utilitzades en les explicacions i els exemples per ensenyar la comparació de fraccions.

6.3.3.1 Les categories definides

Segons les explicacions i els exemples dels estudiants per explicar la comparació de fraccions, es pot deduir o no la interpretació de fracció en què s'han basat. Aquestes interpretacions s'analitzen segons les interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012): comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó. S'han analitzat per separat les interpretacions en les explicacions i els exemples de comparació de fraccions amb denominadors iguals, de fraccions amb numeradors iguals, de fraccions amb numeradors i denominadors diferents i de fraccions respecte a la unitat.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals

A la taula 6.36 es mostren les categories de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar a comparar fraccions amb denominadors iguals.

Taula 6.36. Categorització de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples dels estudiants per ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Exemples
COIDI1	Sense interpretació	"*Si dues fraccions tenen el mateix denominador, la fracció que té el numerador més gran és la fracció més gran*". E23
COIDI2	Interpretació comparació part–tot	"*Quan comparem fraccions amb el mateix denominador, la fracció més gran és la que té el numerador més gran. Per exemple: Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 3=3/8. Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 2: 2/8. 3/8>2/8*". E6

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

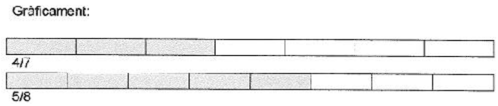
Comparació de fraccions amb numeradors iguals

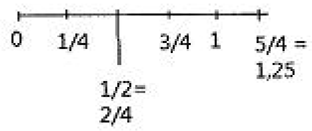
A la taula 6.37 es mostren les categories de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar a comparar fraccions amb numeradors iguals.

Taula 6.37. Categorització de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples dels estudiants per ensenyar la comparació de fraccions amb numeradors iguals.

Codi	Categoria	Exemples
COINI1	Sense interpretació	"*Si dues fraccions tenen el mateix numerador, la fracció que té el denominador més petit és la fracció més gran*". E23

Nota: L'exemple de la taula és una reproducció textual de la resposta de l'estudiant.

Codi	Categoria	Exemples
CODNDI1	Interpretació comparació part–tot	"*Comparar la seva representació gràfica, amb la mateixa unitat*". E31 
CODNDI2	Interpretació operador	"*Comencem multiplicant els dos denominadors: 7x 8 = 56. Tot seguim agafem una de les fraccions, en aquest cas quatre setens, seran de 56. 4/7 de 56=? Per saber-ho el que caldrà fer és dividir el 56 que hem obtingut al principi entre el denominador. Seguidament, multiplicarem el resultat obtingut pel nominador* [sic]. *(57:7)x4=32. Tot seguit, farem el mateix amb la segona fracció: 5/8 de 56=(56:8)x5=7x5=35. 5/8>4/7*". E6

Codi	Categoria	Exemples
COUI1	Sense interpretació	"*Ens hem de fixar amb el numerador i el denominador. Fracció més petita que la unitat, el numerador és més petit que el denominador. 2/6 < 1. Fracció més gran que la unitat, el numerador és més gran que el denominador. 8/6 > 1. Fracció igual que la unitat, el numerador i denominador són el mateix nombre. 6/6 = 1*". E31
COUI2	Interpretació mesura	"*Buscar la representació de la fracció 5/4 perquè comprovin que està per sobre de l'u. Així arribarem a descobrir que si el numerador és més gran que el denominador el resultat serà més gran que 1*". E10 

6.3.3.2 Resultats i discussió

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar a comparar fraccions segons les categories descrites a l'apartat 6.3.3.1. S'han analitzat per separat les interpretacions en les explicacions i els exemples de comparació de fraccions amb denominadors iguals, de fraccions amb numeradors iguals, de fraccions amb numeradors i denominadors diferents i de fraccions respecte a la unitat.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals

Set estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb denominadors iguals. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar aquest contingut estan distribuïts en dues categories: Sense interpretació (COIDI1) i Interpretació comparació part–tot (COIDI2) (vegeu taula 6.40).

Taula 6.40. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
COIDI1	Sense interpretació	**4**
COIDI2	Interpretació comparació part–tot	**3**

Quatre estudiants no es basen en cap interpretació de fracció per explicar la comparació de fraccions amb denominadors iguals. A partir de les representacions que han utilitzat els altres tres estudiants, es dedueix que han interpretat les fraccions com a comparació part–tot.

Comparació de fraccions amb numeradors iguals

L'únic estudiant que ha donat explicacions sobre com comparar els numeradors iguals forma part de la categoria COINI1. Aquest estudiant no s'ha basat en cap interpretació de fracció per explicar la comparació de fraccions. No ha proposat cap representació, només comenta una regla en funció del denominador.

Comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents

Dos estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar aquest contingut estan distribuïts en dues categories: Interpretació comparació part–tot (CODNDI1) i Interpretació operador (COIDI2) (vegeu taula 6.41).

Taula 6.41. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents.

Codi	Categoria	Quantitat d'explicacions
CODNDI1	Interpretació comparació part–tot	**1**
CODNDI2	Interpretació operador	**2**

Un dels estudiants ha interpretat la fracció en les seves explicacions només com a operador. L'altre ha explicat dues maneres diferents de comparar fraccions amb diferents denominadors: en cada una d'aquestes explicacions s'ha basat en una interpretació diferent, en un cas com a operador i, en l'altre, com a comparació part–tot. Els dos estudiants s'han basat en la interpretació com a operador. Les explicacions de tots dos són molt semblants i, tal com s'ha dit abans, sembla que han consultat el mateix llibre per fer les activitats.

Comparació de fraccions amb la unitat

Tres estudiants han donat explicacions en relació amb la comparació de fraccions amb la unitat. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar aquest contingut estan distribuïts en dues categories: Sense interpretació (COUI1) i Interpretació mesura (COUI2) (vegeu taula 6.42).

Taula 6.42. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar la comparació de fraccions amb la unitat.

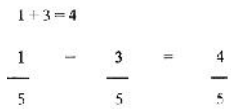
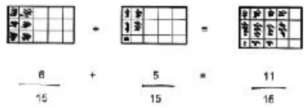
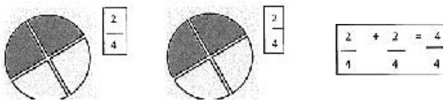
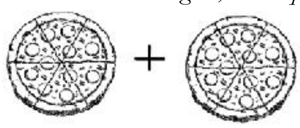
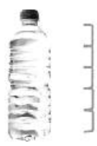
Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
COUI1	Sense interpretació	**2**
COUI2	Interpretació mesura	**1**

Dos estudiants no han fet cap interpretació a l'hora d'explicar la comparació de fraccions amb la unitat, mentre que el tercer ha explicat aquest contingut a partir de la interpretació de fracció com a mesura.

6.4 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb la suma de fraccions

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la suma de fraccions. Uns quants estudiants de mestre han proposat activitats en la seqüència amb l'objectiu d'ensenyar la suma de fraccions. S'ha analitzat com plantegen ensenyar aquest concepte a partir de les explicacions i els exemples en les activitats de la seqüència. Concretament, s'analitzen les explicacions sobre la suma de fraccions, les representacions utilitzades en els exemples i la interpretació de fracció en les explicacions en què s'ha pogut detectar. La informació s'ha organitzat en tres subapartats (vegeu figura 6.9).

OBJECTIU 2.4: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la suma de fraccions		
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions

Codi	Categoria	Exemples
SUI1	Explicació d'un algoritme per sumar fraccions	"*El mestre fa una breu explicació de la suma i la resta amb mateixos denominadors, explicant que el denominador es deixa igual i se sumen els numeradors*". E4
SUI2	Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'exemples	
SUI2.1	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics	"*Hem de tenir en compte només el numerador perquè el denominador serà igual. Només hem de sumar o restar, segons calgui, els dos numeradors per obtenir la tercera fracció*". E20 
SUI2.2	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb una imatge	"*Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador*". E28 
SUI2.3	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics, amb una imatge i amb un context real simulat	"*S'han de sumar els numeradors de les fraccions i deixar el mateix denominador. Per exemple, tenim dos pastissos dividits en quatre parts i agafem dues parts de cada pastís, per sumar aquestes dues fraccions només s'han de sumar els numeradors (2) i deixar el denominador (4)*". E40 
SUI3	Exemples seguits d'una explicació per sumar fraccions	
SUI3.1	Exemple amb un context real i amb símbols matemàtics + Explicació	"*Explicar a partir de la representació d'un pastís del qual agafem primer ¼ i després 2/4, quants quarts tindrem?. Així arribarem a saber que per sumar fraccions amb denominador comú l'únic que hem de fer és sumar els numeradors, sense variar el denominador: ¼+2/4 = ¾*". E10
SUI3.2	Exemple amb un context real simulat i amb una imatge + Explicació	"*El professor intentarà que entenguin com sumar i perquè es sumen aquestes fraccions, per tant, en comptes de començar directament pels nombres , el que farà serà sumar diferents porcions d'objectes reals* [...] *Utilitzaré l'exemple de la pizza dibuixada en un paper* [...] *Per explicar-ho el professor pot fer una explicació teòrica: Quan tenim fraccions on el denominador és igual, l'únic que hem de fer és sumar els numeradors de cada una d'elles, com si d'una senzilla suma es tractés*". E32 
SUI3.3	Exemple amb un context real simulat, amb símbols matemàtics i amb una imatge + Explicació	"*Per tant, podem dir que si 1 litre = 5/5 i, aquest és igual a : 1/5+1/5+1/5+1/5+1/5. I també que 1/5+1/5=2/5. Per tant, si l'ampolla d'aigua té 5/5l li restem 2/5l* [...] *En conclusió, les sumes i les restes afectarien només el nominador* [sic]". E6 

Codi	Categoria	Exemples
SUD1	Explicació d'un algoritme per sumar fraccions: trobar fraccions equivalents amb igual denominador (mcm) i sumar les fraccions	"*Quan s'han de sumar fraccions es fa servir el mínim comú múltiple (mcm). S'ha de trobar el mcm del denominador. Primerament s'escriu la suma. Es busca un denominador comú. Un cop tenim el denominador es multipliquen els numeradors pel mateix nombre que s'ha multiplicat els denominadors. Seguidament es sumen els numeradors i es deixa el mateix denominador*". E42
SUD2	Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'un exemple amb símbols matemàtics	
SUD2.1	Explicació (trobar fraccions equivalents –mcm– i sumar les fraccions) + Exemple amb símbols matemàtics	"*Les reduïm primer a comú denominador i després sumem o restem els numeradors*". E28 A) Busquem el m.c.m dels denominadors per reduir les fraccions a comú denominador. m.c.m. 2= 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14... m.c.m.5= 0, 5, 10, 15, 20... m.c.m= 10 B) El 10:2= 5 i el 5x3= 15 El 10:5= 2 i el 2x4= 8
SUD2.2	Explicació (trobar fraccions equivalents –multiplicant denominadors–, sumar les fraccions i simplificar, si es pot) + Exemple amb símbols matemàtics	"*Per sumar i restar fraccions de diferent denominador s'ha de reduir a comú denominador, o multiplicar tots els denominadors no repetits, el número resultant serà el denominador de cada fracció. Una vegada ja s'ha sumat la fracció, s'ha de reduir a fracció irreductible. Exemple: 2/4 +3/9 = 18/36 + 12/36 = 30/36 =15/18=5/6*". E27

Primerament, s'analitzen les explicacions de la suma de fraccions amb denominadors iguals i, a continuació, les de la suma amb denominadors diferents.

Suma de fraccions amb denominadors iguals

Catorze estudiants han donat explicacions en relació amb la suma de fraccions amb denominadors iguals. Dos estudiants d'aquests catorze també han explicat com sumar fraccions amb denominadors diferents.

Les explicacions dels catorze estudiants que volen ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals estan distribuïdes en tres categories: Explicació d'un algoritme per sumar fraccions (SUI1), Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'exemples (SUI2) i Exemples seguits d'una explicació per sumar fraccions (SUI3) (vegeu taula 6.45).

Taula 6.45. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
SUI1		Explicació d'un algoritme per sumar fraccions	**7**	
SUI2		Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'exemples	**4**	
	SUI2.1	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics		1
	SUI2.2	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb una imatge		2
	SUI2.3	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics, amb una imatge i amb un context real simulat		1
SUI3		Exemples seguits d'una explicació per sumar fraccions	**3**	
	SUI3.1	Exemple amb un context real simulat i amb símbols matemàtics + Explicació		1
	SUI3.2	Exemple amb un context real i amb una imatge + Explicació		1
	SUI3.3	Exemple amb un context real, amb símbols matemàtics i amb una imatge + Explicació		1

La meitat dels catorze estudiants expliquen directament com sumar fraccions amb denominadors iguals a partir de l'algoritme següent: es deixa el denominador igual i se sumen els numeradors. Aquests estudiants no proposen cap exemple abans de l'explicació de l'algoritme ni tampoc després, només plantegen l'explicació de com sumar com si fos una regla que els alumnes s'han d'aprendre i seguir.

En aquesta categoria, un estudiant fa un esquema en què proposa sumar els denominadors entre si i sumar els numeradors per obtenir el denominador i el numerador, respectivament, de la fracció resultant. Aquest estudiant s'equivoca en explicar l'algoritme de "deixar el mateix denominador i sumar els numeradors".

Un altre estudiant d'aquesta categoria comet un error diferent: diu que "deixem el mateix numerador" i "sumem els numeradors". En aquest cas, sembla més un error de distracció, ja que es nota que està copiat d'un llibre.

Quatre estudiants expliquen també d'entrada l'algoritme de sumar fraccions amb denominadors iguals dient que cal deixar el denominador igual i sumar els numeradors, però, a diferència dels estudiants de la categoria SUI1, proposen un, dos o tres exemples amb representacions diferents després de l'explicació per exemplificar el procés. Un estudiant planteja una suma amb símbols com a exemple, dos estudiants donen, a més d'un exemple amb símbols, un exemple de suma de fraccions a partir d'imatges i, per últim, un únic estudiant proposa, després de l'explicació de com sumar fraccions amb denominadors iguals, un exemple de context real, un amb imatges i també un amb símbols matemàtics. Aquest estudiant és el que exemplifica de manera més completa la suma de fraccions dels estudiants de la categoria SUI2.

Només tres estudiants expliquen que, per sumar fraccions, cal sumar els numeradors i deixar igual el denominador després de proposar un exemple de context real. Aquests estudiants diuen que començarien amb un exemple abans d'arribar a veure com se sumen les fraccions amb denominadors iguals. En un cas, parteixen de sumar ¼ de pastís amb 2/4 de pastís, en l'altre, de la suma de parts de pizzes i, en el tercer, de la suma de cinquens de litre. Les representacions que es mostren en aquests exemples són diferents en cada cas: un estudiant només proposa símbols matemàtics, l'altre dóna una imatge i, el tercer, símbols matemàtics i també imatges. Però tots tres tenen la intenció que els alumnes indueixin el procés de sumar fraccions i tots tres ho proposen a partir d'un exemple de context real.

Observant la quantitat d'estudiants de cada categoria, es detecta que la majoria han tendit a donar propostes per ensenyar la suma de fraccions directament a partir d'un algoritme i sense necessitat de fer entendre per què aquest algoritme és el que és, ja que, de catorze estudiants, onze fan aquesta proposta. Els quatre estudiants que, després de presentar el procés de sumar, mostren algun exemple ho fan amb la intenció d'exemplificar el procés, però no amb la intenció de deduir l'algoritme. De fet, aquests onze estudiants presenten el procés de sumar fraccions com una regla que cal transmetre directament per saber sumar fraccions. Possiblement a ells també els el van ensenyar així, fins i tot hi ha un estudiant que comenta "farem les sumes i restes de la manera que ens han ensenyat sempre".

Encara que són pocs, és interessant que tres estudiants hagin intentat ensenyar la suma induint-la a partir d'exemples. Aquests estudiants, però, han proposat l'exemple i, a continuació, ja han explicat el procediment per sumar suposant que, de l'exemple, se'n dedueix l'algoritme directament.

La meitat dels estudiants que han plantejat exemples ho han fet per mostrar l'algoritme acabat d'explicar o bé per poder induir el procés de la suma. Cal dir, però, que la representació més utilitzada en els exemples ha estat a partir de símbols matemàtics.

Suma de fraccions amb denominadors diferents

Tres estudiants han explicat com se sumen fraccions amb denominadors diferents. Dos d'aquests estudiants també han explicat la suma de fraccions amb denominadors iguals.

Les explicacions dels tres estudiants que volen ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents estan distribuïdes en dues categories: Explicació d'un algoritme per sumar fraccions (SUD1) i Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'un exemple amb símbols matemàtics (SUD2) (vegeu taula 6.46).

Taula 6.46. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
SUD1		Explicació d'un algoritme per sumar fraccions: trobar fraccions equivalents amb igual denominador (mcm) i sumar les fraccions	**1**	
SUD2		Explicació d'un algoritme per sumar fraccions seguida d'un exemple amb símbols matemàtics	**2**	
	SUD2.1	Explicació (trobar fraccions equivalents –mcm– i sumar les fraccions) + Exemple amb símbols matemàtics		1
	SUD2.2	Explicació (trobar fraccions equivalents (multiplicant denominadors), sumar les fraccions i simplificar, si es pot) + Exemple amb símbols matemàtics		1

Tots tres estudiants comencen explicant un algoritme sobre com se sumen fraccions amb denominadors diferents. D'aquests tres estudiants, dos proposen un exemple amb símbols matemàtics després de l'explicació i un es limita a presentar l'algoritme. En aquest cas, no hi ha cap estudiant que parteixi d'un exemple amb la intenció de deduir l'algoritme per calcular la suma de fraccions amb denominadors diferents.

L'estudiant que explica únicament el procés per sumar fraccions i no proposa cap exemple, només té en compte dos dels passos que Haylock (2010) estableix per a la suma de fraccions: trobar fraccions equivalents amb igual denominador i sumar les fraccions (vegeu taula 6.44). Aquest estudiant no preveu que el resultat de la suma es pot simplificar; en canvi, detalla força el procés per trobar les fraccions equivalents amb el mateix denominador. Proposa utilitzar el mínim comú múltiple per trobar un denominador comú i, a continuació, "multiplicar els numeradors pel mateix nombre que s'ha multiplicat els denominadors". En l'últim pas planteja sumar els numeradors deixant el mateix denominador.

Els dos estudiants que pertanyen a la categoria SUD2 no especifiquen igual el procés de sumar fraccions amb denominadors diferents. L'estudiant de la subcategoria SUD2.1 també proposa els dos primers passos de Haylock (2010), trobar fraccions equivalents i sumar les fraccions. Suggereix reduir a comú denominador fent el mínim comú múltiple dels denominadors, però per trobar les fraccions equivalents, parteix d'un exemple amb símbols sense explicar res més. Afegeix que només cal sumar els numeradors. L'altre estudiant de la categoria SUD2, que està inclòs a la categoria SUD2.2, té en compte les tres fases, tot i que en la primera, quan cal trobar les fraccions equivalents a les fraccions que se sumen, només explica com reduir a comú denominador, i no com trobar els numeradors de les fraccions equivalents. Aquest estudiant, per trobar el denominador comú, proposa multiplicar tots els denominadors no repetits i, per tant, no utilitza el mínim comú múltiple.

No tots tres estudiants fan servir el mateix mètode per reduir a denominador comú i trobar les fraccions equivalents a les que se sumen: dos proposen fer-ho trobant el mínim comú múltiple i, el tercer, multiplicant els denominadors no repetits.

Dels tres estudiants, només un, el de la categoria SUD1, explica com trobar els numeradors de les fraccions equivalents a les inicials una vegada s'obté el denominador comú. Els altres dos no expliquen aquest procés.

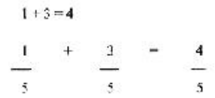
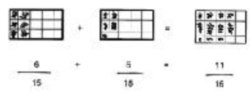
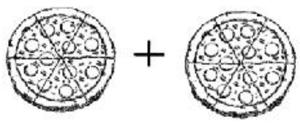
6.4.2 Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions

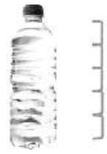
Tal com s'ha comentat al subapartat 6.1.2, les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

Les representacions ajuden els estudiants a pensar com es pot dividir la unitat per poder realitzar la suma o la resta (Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010). Prenent com a base aquestes recerques i les exposades a l'apartat 6.1.2 a partir de l'adaptació de les representacions del model de Lesh (Cramer, 2003), en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants proposen en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions.

6.4.2.1 Les categories definides

Alguns estudiants que han donat explicacions i exemples per ensenyar la suma de fraccions han proposat una o més representacions; en canvi, d'altres no n'han proposat cap. S'han considerat per separat les representacions en les explicacions i els exemples de sumes amb denominadors iguals i les de sumes amb denominadors diferents.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
SUIRE0	Cap representació						*"Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador cal posar per numerador la suma o resta dels numeradors i per denominador cal posar-hi el mateix"*. E26
SUIRE1	1 representació						*"Hem de tenir en compte només el numerador ja que el denominador serà igual. Només hem de sumar o restar, segons calgui, els dos numeradors per obtenir la tercera fracció"*. E20 
SUIRE2	2 representacions diferents						
SUIRE2.1							*"Explicar a partir de la representació d'un pastís del qual agafem primer ¼ i després2/4, quants tindrem? Així arribarem a saber que per sumar fraccions amb denominador comú, l'únic que hem de fer és sumar els numeradors, sense variar el denominador: ¼ + 2/4 = ¾"*. E10
SUIRE2.2							*"Per sumar o restar amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador. Per exemple:". E28* 
SUIRE2.3							*"El professor intentarà que entenguin com sumar i perquè es sumen aquestes fraccions, per tant, en comptes de començar directament pels nombres , el que farà serà sumar diferents porcions d'objectes reals* [...] *utilitzaré l'exemple de la pizza dibuixada en un paper* [...] *per explicar-ho el professor pot fer una explicació teòrica: Quan tenim fraccions on el denominador és igual, l'únic que hem de fer és sumar els numeradors de cada una d'elles, com si d'una senzilla suma es tractés"*. E32 

SUIRE3	3 representacions diferents	■	■		■		“ *Per tant, podem dir que si 1 litre = 5/5 i, aquest és igual a : 1/5+1/5+1/5+1/5+1/5. I també que 1/5+1/5=2/5. Per tant, si l’ampolla d’aigua té 5/5l li restem 2/5l* [...] *En conclusió, les sumes i les restes afectarien només el nominador* [sic]”. E6 

Codi	**Categoria**	**Símbol matemàtic**	**Imatge**	**Expressió verbal**	**Context real simulat**	**Objecte**	**Exemples**
SUDRE0	Cap representació						“*Quan s’han de sumar fraccions es fa servir el mínim comú múltiple (mcm). S’ha de trobar el mcm del denominador. Primerament s’escriu la suma. Es busca un denominador comú. Un cop tenim el denominador es multipliquen els numeradors pel mateix nombre que s’ha multiplicat els denominadors. Seguidament es sumen els numeradors i es deixa el mateix denominador*”. E42
SUDRE1	1 representació	■					“*S’ha de reduir a comú denominador, o multiplicar tots els denominadors no repetits, el número resultant serà el denominador de cada fracció. Una vegada ja s’ha sumat la fracció, s’ha de reduir a fracció irreductible. Exemple: 2/4 +3/9 = 18/36 + 12/36 = 30/36 =15/18=5/6*”. E27

Suma de fraccions amb denominadors iguals

Catorze estudiants han donat explicacions en relació amb la suma de fraccions amb igual denominador. D'aquests catorze, n'hi ha que han fet representacions per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals i d'altres que no n'han realitzat cap.

Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals estan distribuïts en quatre categories segons la quantitat de representacions diferents que proposen: Cap representació (SUIRE0), 1 representació (SUIRE1), 2 representacions diferents (SUIRE2) i 3 representacions diferents (SUIRE3) (vegeu taula 6.49).

Taula 6.49. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	**Categoria**	**Símbol matemàtic**	**Imatge**	**Expressió verbal**	**Context real simulat**	**Objecte**	**Quantitat d'estudiants**	
SUIRE0	Cap representació						**7**	
SUIRE1	1 representació						**1**	
SUIRE2	2 representacions diferents						**4**	
SUIRE2.1								1
SUIRE2.2								2
SUIRE2.3								1
SUIRE3	3 representacions diferents						**2**	

La meitat dels catorze estudiants no ha proposat cap representació. Els altres set n'han plantejat una, dues o tres de diferents. La categoria més nombrosa és la de 2 representacions diferents, amb quatre estudiants. Dos n'han utilitzat tres i un únic estudiant ha fet un sol tipus de representació. No hi ha cap estudiant que hagi proposat quatre o cinc representacions diferents. Tampoc n'hi ha cap que representi les fraccions de forma verbal (meitat, un terç,...) o dient que s'utilitzaria objectes.

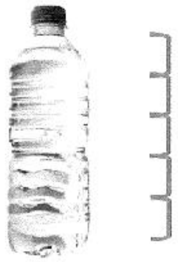
Observant la taula 6.49, es detecta que la representació més utilitzada són els símbols matemàtics (1/2, ¼,...) amb sis estudiants dels set que han proposat representacions. Cinc s'han servit d'imatges en les explicacions i quatre donen explicacions partint de contextos reals. A continuació s'analitzen amb més detall les representacions dels estudiants.

s que h n p posat s nbo s m tem tics,

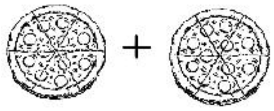
($\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}$ i $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$),

$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}$, $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ i $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$) i

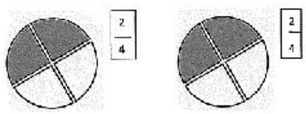
$\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$). El



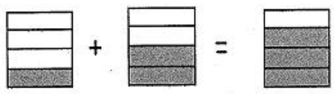
Imatge 1. E6



Imatge 2. E32



Imatge 3. E40



Imatge 4. E17

Imatge 5. E28

En les preguntes relacionades amb l'exemple contextualitzat en una situació real, un dels estudiants exposa preguntes en què no cal utilitzar fraccions per resoldre-les: "Si sumem les porcions que hi ha a cada pizza, quants talls de pizza tenim?", tot i que també en planteja d'altres en què sí que cal utilitzar fraccions: "Quina fracció de pizza ens hem menjat? Quina fracció de pizza queda?".

Suma de fraccions amb denominadors diferents

Tres estudiants han donat explicacions en relació amb la suma de fraccions amb denominadors diferents. D'aquests tres, n'hi ha que han fet representacions per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents i d'altres que no n'han realitzat cap.

Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents estan distribuïts en dues categories segons la quantitat de representacions diferents que proposen: Cap representació (SUDRE0) i 1 representació (SUDRE1) (vegeu taula 6.50).

Taula 6.50. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents.

Codi	**Categoria**	**Símbol matemàtic**	**Imatge**	**Expressió verbal**	**Context real simulat**	**Objecte**	**Quantitat d'estudiants**
SUDRE0	Cap representació						**1**
SUDRE1	1 representació						**2**

Dos estudiants fan representacions a partir de símbols per complementar les explicacions de com sumar fraccions amb denominadors diferents. En canvi, el tercer no en dóna cap. Cap dels estudiants proposa representar la suma de fraccions a partir d'imatges, expressions verbals, objectes ni situacions de contextos reals. Com en el cas de la suma de fraccions amb denominadors iguals, la representació amb símbols matemàtics és la que més predomina en les explicacions.

Un dels estudiants de la categoria 1 representació (SUDRE1) també ha explicat com sumar fraccions amb denominadors iguals, però en aquest cas, està a la categoria 2 representacions diferents (SUIRE2): utilitza símbols matemàtics i imatges per exemplificar el procés de la suma amb denominadors iguals. Aquest estudiant fa servir imatges i símbols matemàtics en la suma de fraccions amb denominadors iguals i, en canvi, només símbols matemàtics quan els denominadors són diferents.

Tot i que hi ha molt pocs estudiants que han donat explicacions per ensenyar a sumar fraccions amb denominadors diferents, molts menys que els que han proposat sumar fraccions amb denominadors iguals, és destacable que no hi ha cap estudiant que hagi proposat representacions a partir d'imatges. Una possible explicació pot ser el fet que és més difícil representar la suma de fraccions amb denominadors diferents que representar la suma amb denominadors iguals i, una altra, que es consideri que les imatges no són una ajuda rellevant per fer la suma.

A continuació s'analitzen amb més detall les representacions amb símbols de la categoria SUDRE1.

Representacions amb símbols matemàtics

Els dos estudiants que han proposat exemples a partir de símbols matemàtics han escrit les sumes següents amb denominadors diferents: $\frac{2}{4}+\frac{3}{9}$ i $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}$. En el primer exemple, se sumen fraccions més petites que la unitat i el resultat també és més petit que la unitat; en el segon cas, una de les fraccions és més gran que la unitat i el resultat també és més gran.

6.4.3 Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions

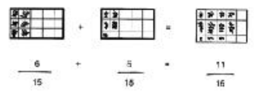
Tal com s'ha explicat a l'apartat 6.1.3 i d'acord amb les diferents interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012) (comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó), en aquest subapartat s'analitzen les interpretacions de fracció utilitzades en les explicacions i els exemples per ensenyar la suma de fraccions.

6.4.3.1 Les categories definides

Segons les explicacions i els exemples dels estudiants per explicar la suma de fraccions, es pot deduir o no la interpretació de fracció en què s'han basat. Aquestes interpretacions s'analitzen segons les interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012): comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó. S'han considerat per separat les interpretacions en les explicacions i els exemples de sumes amb denominadors iguals i les de sumes amb denominadors diferents.

Suma de fraccions amb denominadors iguals

A la taula 6.51 es mostren les categories de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar a sumar fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Exemples
SUII1	Sense interpretació	"*Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador cal posar per numerador la suma o resta dels numeradors i per denominador cal posar-hi el mateix*". E26
SUII2	Interpretació comparació part–tot	"*Per sumar o restar amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador. Per exemple:* ". *E28* 

Codi	Categoria	Exemples
SUDI1	Sense interpretació	"*Quan s'han de sumar fraccions es fa servir el mínim comú múltiple (mcm). S'ha de trobar el mcm del denominador. Primerament s'escriu la suma. Es busca un denominador comú. Un cop tenim el denominador es multipliquen els numeradors pel mateix nombre que s'ha multiplicat els denominadors. Seguidament es sumen els numeradors i es deixa el mateix denominador*". E42

Taula 6.53. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar la suma de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
SUII1	Sense interpretació	**8**
SUII2	Interpretació comparació part–tot	**6**

En més de la meitat de les catorze explicacions, vuit concretament, no s'utilitza cap interpretació. En canvi, en sis explicacions sí que s'utilitza. Aquests sis estudiants s'han basat tots en la mateixa interpretació: comparació part–tot. No n'hi ha cap que s'hagi plantejat alguna altra interpretació de fracció, com ara mesura, quocient, raó o operador.

El fet de poder deduir la interpretació depèn de si els estudiants han proposat alguna representació amb imatges o de context real. En les explicacions en què no han donat exemples o només n'han suggerit amb símbols matemàtics, s'ha constatat que no s'han basat en cap interpretació.

Suma de fraccions amb denominadors diferents

Tres estudiants han donat explicacions en relació amb la suma de fraccions amb denominadors diferents. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la suma de fraccions amb denominadors diferents formen part d'una sola categoria: Sense Interpretació (SUDI1).

Cap estudiant ha proposat representacions amb imatges ni a partir de contextos reals simulats, per la qual cosa es constata que no s'han basat en cap interpretació.

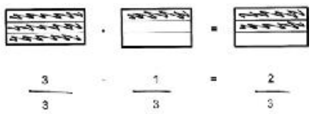
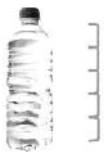
Un dels estudiants d'aquesta categoria també ha proposat explicacions per ensenyar la suma amb fraccions amb denominadors iguals; en aquest cas, s'ha basat en la interpretació de fracció com a comparació part–tot.

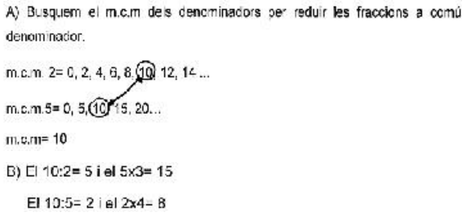
6.5 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb la resta de fraccions

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la resta de fraccions. Tot i que algunes explicacions d'aquest apartat són molt semblants a les que s'han presentat a l'apartat 6.4 per a la suma de fraccions, s'ha optat per separar els dos continguts, suma i resta de fraccions, perquè hi ha menys estudiants que han explicat la resta de fraccions que no que han explicat la suma de fraccions.

Alguns estudiants de mestre han proposat activitats en la seqüència amb l'objectiu d'ensenyar la resta de fraccions. S'ha analitzat com aquests estudiants plantegen ensenyar

OBJECTIU 2.5: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la resta de fraccions		
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions

Codi	Categoria	Exemples
REI1	Explicació d'un algoritme per restar fraccions	"*Si sabeu sumar fraccions, restar-les us semblarà d'allò més fàcil. Només s'ha de deixar el denominador i restar els numeradors*". E21
REI2	Explicació d'un algoritme per restar fraccions seguida d'exemples	
REI2.1	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics	"*Hem de tenir en compte només el numerador perquè el denominador serà igual. Només hem de sumar o restar, segons calgui, els dos numeradors per obtenir la tercera fracció*". E20 $3 - 1 = 2$ $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$
REI2.2	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb una imatge	"*Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador*". E28 
REI2.3	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb un context real simulat	"*Com serà la resta? Si a la suma sumem els numeradors, que farem a la resta? Restarem numeradors i deixarem el mateix denominador. Tornem a l'exemple del pastís per veure que si de quatre parts en traiem una i després dues ens quedarà ¼*". E10
REI3	Exemples (de context real, amb símbols matemàtics i amb una imatge) seguits d'una explicació	"*Per tant, podem dir que si 1 litre = 5/5 i, aquest és igual a :1/5+1/5+1/5+1/5+1/5. I també que 1/5+1/5=2/5. Per tant, si l'ampolla d'aigua té 5/5l li restem 2/5l* [...] *En conclusió, les sumes i les restes afectarien només el nominador* [sic]". E6 

Codi	Categoria	Exemples
RED1	Explicació d'un algoritme per restar fraccions	
RED1.1	Explicació (trobar fraccions equivalents –mcm– i restar les fraccions)	"*Les reduïm primer a comú denominador i després sumem o restem els numeradors*". E28  A) Busquem el m.c.m dels denominadors per reduir les fraccions a comú denominador. m.c.m. 2= 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ... m.c.m.5= 0, 5, 10, 15, 20... m.c.m= 10 B) El 10:2= 5 i el 5x3= 15 El 10:5= 2 i el 2x4= 8
RED1.2	Explicació (trobar fraccions equivalents –multiplicant denominadors–, restar les fraccions i simplificar, si es pot)	"*Per sumar i restar fraccions de diferent denominador s'ha de reduir a comú denominador, o multiplicar tots els denominadors no repetits, el número resultant serà el denominador de cada fracció. Una vegada ja s'ha sumat la fracció, s'ha de reduir a fracció irreductible* ". E27

Taula 6.56. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants	
REI1	Explicació d'un algoritme per restar fraccions	**7**	
REI2	Explicació d'un algoritme per restar fraccions seguida d'exemples	**4**	
REI2.1	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics		2
REI2.2	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb una imatge		1
REI2.3	Explicació + Exemple amb símbols matemàtics i amb un context real simulat		1
REI3	Exemples (context real, símbols matemàtics i imatge) seguits d'una explicació per restar fraccions	**1**	

La meitat dels catorze estudiants expliquen directament com restar fraccions amb denominadors iguals a partir de l'algoritme següent: es deixa el denominador igual i es resten els numeradors. Aquests estudiants no proposen cap exemple abans de l'explicació de l'algoritme ni tampoc després, només exposen l'explicació de com restar com si fos una regla que els alumnes s'han d'aprendre i seguir. Dels set estudiants, n'hi ha un que, en l'explicació de la resta, fa referència al fet de saber sumar dient que "si sabeu sumar fraccions, restar-les us semblarà d'allò més fàcil". Després, explica l'algoritme de deixar el mateix denominador i restar els numeradors. Amb aquesta explicació sembla que s'intenti que els alumnes aprenguin o memoritzin la regla pensant en la de la suma però canviant la suma de numeradors per la resta. Sembla una explicació per facilitar la memorització de l'algoritme per sumar fraccions.

En aquesta categoria, el mateix estudiant que en la suma fa un esquema en què proposa sumar els denominadors entre si i sumar els numeradors per obtenir la fracció resultant, en la resta també s'equivoca quan suggereix restar els numeradors i també els denominadors. Aquest estudiant s'equivoca en explicar l'algoritme de "deixar el mateix denominador i restar els numeradors".

Quatre estudiants expliquen també d'entrada l'algoritme de restar fraccions amb denominadors iguals dient que cal deixar el denominador igual i restar els numeradors, però, a diferència dels estudiants de la categoria REI1, proposen un o dos exemples amb representacions diferents després de l'explicació per exemplificar el procés. Dos estudiants donen d'exemple una resta amb símbols, un proposa, a més d'un exemple amb símbols, un de resta de fraccions a partir d'imatges i, per últim, un únic estudiant exposa, després de l'explicació de com restar fraccions amb denominadors iguals, un exemple de context real i també un amb símbols.

De la mateixa manera que un estudiant de la categoria REI1, un estudiant de la categoria Explicació d'un algoritme per restar fraccions seguida d'exemples (REI2) també ha partit del fet d'haver explicat la suma de fraccions. Argumenta que, si quan se sumen fraccions se sumen els numeradors, en la resta s'hauran de restar. Aquest estudiant, quan ha explicat la suma ha partit d'un exemple de context real per deduir l'algoritme; en canvi, en explicar la resta, exposa directament l'algoritme. Sembla com si, pel fet d'haver après a sumar, ja es pot dir d'entrada l'algoritme de la resta.

Només un estudiant explica que, per restar fraccions, cal restar els numeradors i deixar igual el denominador després de proposar un exemple de context real, amb símbols i fent una imatge. Aquest estudiant proposa una situació en què cal restar cinquens de litre, i després de l'exemple conclou que les restes només afecten el numerador. Sembla que vulgui que els estudiants entenguin l'algoritme en comptes d'explicar-lo directament.

Observant la quantitat d'estudiants de cada categoria, es detecta que gairebé tots han tendit a donar propostes per ensenyar la resta de fraccions directament a partir d'un algoritme, sense necessitat de fer entendre per què aquest algoritme és el que és, ja que, de dotze estudiants, onze fan aquesta proposta. Els quatre estudiants que, després de presentar el procés de restar, mostren algun exemple ho fan amb la intenció d'exemplificar el procés, però no amb la intenció de deduir l'algoritme. De fet, aquests onze estudiants, com en la suma de fraccions, presenten el procés de restar fraccions com una regla que cal transmetre directament per saber restar fraccions. És destacable que dels dotze estudiants només un intenta que els alumnes dedueixin l'algoritme. I, tot i que és interessant que no hagi començat amb l'explicació teòrica, sembla que a partir de l'exemple ja s'hagi de deduir l'algoritme.

És positiu que alguns estudiants hagin mostrat diferents representacions, encara que només sigui per exemplificar l'algoritme. Tots els estudiants que han proposat exemples han utilitzat la representació a partir de símbols matemàtics.

Resta de fraccions amb denominadors diferents

Dos estudiants han explicat com es resten fraccions amb denominadors diferents. Aquests dos estudiants també han explicat la resta de fraccions amb denominadors iguals.

Les explicacions dels dos estudiants que volen ensenyar la resta de fraccions amb denominadors diferents formen part d'una sola categoria: Explicació d'un algoritme per restar fraccions (RED1) (vegeu taula 6.57).

Els dos estudiants que consideren ensenyar la resta de fraccions amb denominadors diferents en les activitats de la seqüència ho fan només mitjançant l'explicació d'un algoritme i sense proposar cap exemple.

Taula 6.57. Classificació de les explicacions dels estudiants segons la categorització de les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions amb denominadors diferents.

Codi		Categoria	Quantitat d'estudiants	
RED1		Explicació d'un algoritme per restar fraccions	**2**	
	RED1.1	Explicació (trobar fraccions equivalents –mcm– i restar les fraccions)		1
	RED1.2	Explicació (trobar fraccions equivalents –multiplicant denominadors–, restar les fraccions i simplificar, si es pot)		1

Un dels dos estudiants, el de la subcategoria RED1.1, només té en compte dos dels passos que Haylock (2010) estableix per restar fraccions: trobar fraccions equivalents amb igual denominador i restar les fraccions (vegeu taula 6.57). Aquest estudiant no considera el tercer pas, el de simplificar el resultat de la resta. Proposa reduir a comú denominador fent el mínim comú múltiple per poder restar les fraccions, però no explica ni exemplifica com trobar els numeradors per trobar les fraccions equivalents a les que es resten. En el cas de la suma, aquest estudiant havia proposat un exemple amb símbols matemàtics.

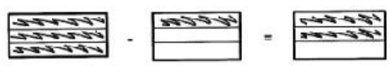
L'altre estudiant, el de la categoria RED1.2, sí que té en compte els tres passos de Haylock (2010), però tampoc detalla com trobar els numeradors de les fraccions equivalents amb el mateix denominador (vegeu taula 6.57). En el cas de la suma, aquest estudiant tampoc ho havia detallat.

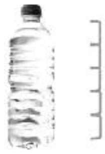
Els dos estudiants proposen procediments diferents per reduir a un denominador comú i trobar fraccions equivalents a les que resten. L'estudiant de la subcategoria RED1.1 suggereix calcular el mínim comú múltiple dels denominadors, mentre que l'estudiant de la subcategoria RED1.2 planteja multiplicar els denominadors no repetits. Cap dels dos explica com trobar els numeradors per trobar les fraccions equivalents amb el mateix denominador.

6.5.2 Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions

Tal com s'ha comentat al subapartat 6.1.2, les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

Les representacions ajuden els estudiants a pensar com es pot dividir la unitat per poder realitzar la suma o la resta (Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010). Prenent com a base aquestes recerques i les exposades a l'apartat 6.1.2 a partir de l'adaptació de les representacions del model de Lesh (Cramer, 2003), en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants proposen en les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
REIRE0	Cap representació						"*Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador cal posar per numerador la suma o resta dels numeradors i per denominador cal posar-hi el mateix*". E26
REIRE1	1 representació						"*Hem de tenir en compte només el numerador ja que el denominador serà igual. Només hem de sumar o restar, segons calgui, els dos numeradors per obtenir la tercera fracció*". E20 $3 - 1 = 2$ $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$
REIRE2	2 representacions diferents						
REIRE2.1							"*Com serà la resta? Si a la suma sumem els numeradors, que farem a la resta?* Restarem *numeradors i deixarem el mateix denominador. Tornem a l'exemple del pastís per veure que si de quatre parts en traiem una i després dues ens quedarà ¼*" . E10
REIRE2.2							"*Per sumar o restar amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador. Per exemple:*". *E28*  $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

REIRE3	3 representacions diferents	■	■		■		“*Per tant, podem dir que si 1 litre = 5/5 i, aquest és igual a : 1/5+1/5+1/5+1/5+1/5. I també que 1/5+1/5=2/5. Per tant, si l’ampolla d’aigua té 5/5l li restem 2/5l (5/5-2/5 = 3/5l). En conclusió, les sumes i les restes afectarien només el nominador* [sic]”. E6 

Codi	**Categoria**	**Símbol matemàtic**	**Imatge**	**Expressió verbal**	**Context real simulat**	**Objecte**	**Exemples**
REDRE0	Cap representació						“*Per sumar i restar fraccions de diferent denominador s’ha de reduir a comú denominador, o multiplicar tots els denominadors no repetits, el número resultant serà el denominador de cada fracció. Una vegada ja s’ha sumat la fracció, s’ha de reduir a fracció irreductible*”. E27

representacions diferents que utilitzen: Cap representació (REIRE0), 1 representació (REIRE1), 2 representacions diferents (REIRE2) i 3 representacions diferents (REIRE3) (vegeu taula 6.60).

Taula 6.60. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la resta de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants	
REIRE0	Cap representació						**7**	
REIRE1	1 representació						**2**	
REIRE2	2 representacions diferents						**2**	
REIRE2.1								1
REIRE2.2								1
REIRE3	3 representacions diferents						**1**	

Set dels dotze estudiants no han proposat cap representació. Els altres cinc n'han proposat una, dues o tres. A les categories 1 representació (REIRE1) i 2 representacions diferents (REIRE2) hi ha dos estudiants en cadascuna. El cinquè estudiant ha fet tres representacions diferents. Com en el cas de la suma, no hi ha cap estudiant que hagi proposat quatre o cinc representacions diferents. Tampoc n'hi ha cap que representi les fraccions de forma verbal o dient que utilitzaria objectes.

Observant la taula 6.60, es veu com la representació més utilitzada són els símbols matemàtics. Tots els estudiants que han fet alguna representació han considerat els símbols matemàtics. Dos dels cinc estudiants han fet imatges i també dos han donat explicacions a partir de contextos reals. A continuació s'analitzen amb més detall les representacions dels estudiants.

Representacions amb símbols matemàtics

Els cinc estudiants que han proposat exemples en les explicacions sobre la resta de fraccions han utilitzat símbols matemàtics. Tres han plantejat fraccions amb denominador 5 ($\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$), un ha donat fraccions amb denominador 3 ($\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$). Un estudiant no ha escrit en símbols tota la resta, només el resultat de la situació, que de quatre parts se'n treu una i després dues i s'obté $\frac{1}{4}$. En tots els exemples s'han restat fraccions més petites que la unitat o iguals. El denominador més present en els exemples de restes amb símbols matemàtics és el 5.

Representacions amb imatges

Només dos estudiants s'han servit d'alguna imatge per tal d'exemplificar com restar fraccions gràficament. Tots dos han utilitzat un model d'àrea (rectangle i imatge d'objecte real) (vegeu taula 6.58). Un estudiant ha representat la resta $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ mitjançant la representació gràfica de cada fracció en un rectangle (vegeu estudiant E28 de la taula 6.58) i l'altre ha representat cinquens mitjançant una ampolla d'aigua (vegeu estudiant E6 de la taula 6.58). Les regions proposades en les representacions s'han dividit totes en parts congruents (igual forma i igual àrea) i totes representen fraccions més petites que la unitat o iguals. Només en una de les dues representacions es representa les fraccions que es resten i també el resultat; és el cas de la resta $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Representacions amb contextos reals simulats

Dos estudiants han proposat situacions reals per exemplificar les explicacions de la resta de fraccions. Un estudiant ha suggerit restar dues cinquenes parts de cinc cinquenes parts d'un litre i l'altre explica que, de quatre parts d'un pastís, en traiem una i després dues i s'obté la fracció $\frac{1}{4}$.

Resta de fraccions amb denominadors diferents

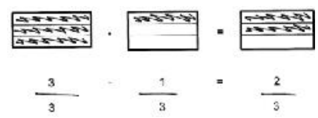
Dos estudiants han donat explicacions en relació amb la resta de fraccions amb denominadors diferents però sense fer cap representació. Per això, les explicacions d'aquests dos estudiants formen part només de la categoria Cap representació (REDRE0).

Aquests dos mateixos estudiants també han explicat la suma de fraccions amb denominadors diferents; en aquest cas, tots dos han donat exemples de sumes amb símbols. En canvi, en el cas de la resta no n'han proposat de cap tipus. Podria ser que no ho haguessin considerat necessari perquè ja han posat exemples en la suma i han pensat que la resta ja s'entendria sense exemples.

Tots dos també han utilitzat representacions en la resta de fraccions amb denominadors iguals, l'un amb símbols i l'altre amb símbols matemàtics i imatges. Com s'ha dit en el cas de la suma, podria ser que els estudiants trobin més difícil posar exemples en les restes amb denominadors diferents que en les restes amb denominadors iguals.

6.5.3 Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la resta de fraccions

Tal com s'ha explicat a l'apartat 6.1.3 i d'acord amb les diferents interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012) (comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó), en

Codi	Categoria	Exemples
REII1	Sense interpretació	"*Per sumar o restar fraccions amb el mateix denominador cal posar per numerador la suma o resta dels numeradors i per denominador cal posar-hi el mateix*". E26
REII2	Interpretació comparació part-tot	"*Per sumar o restar amb el mateix denominador, sumem o restem els numeradors i deixem el mateix denominador. Per exemple:*". E28 

Codi	Categoria	Exemples
REDI1	Sense interpretació	"*Per sumar i restar fraccions de diferent denominador s'ha de reduir a comú denominador, o multiplicar tots els denominadors no repetits, el número resultant serà el denominador de cada fracció. Una vegada ja s'ha sumat la fracció, s'ha de reduir a fracció irreductible*". E27

6.5.3.2 Resultats i discussió

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar a restar fraccions segons les categories descrites a l'apartat 6.5.3.1. Primerament, s'analitzen les interpretacions en la resta de fraccions amb denominadors iguals i, a continuació, en la resta amb denominadors diferents.

Resta de fraccions amb denominadors iguals

Dotze estudiants han donat explicacions en relació amb la resta de fraccions amb denominadors iguals. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la resta de fraccions amb denominadors iguals estan distribuïts en dues categories segons si es basen en alguna interpretació i, en cas que sigui així, segons la interpretació de la qual parteixen: Sense interpretació (REII1) i Interpretació comparació part–tot (REII2) (vegeu taula 6.63).

Taula 6.63. Classificació de les explicacions i els exemples dels estudiants segons la categorització de les interpretacions per ensenyar la resta de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
REII1	Sense interpretació	**9**
REII2	Interpretació comparació part–tot	**3**

En nou dels dotze casos en què s'ha proposat ensenyar a restar fraccions amb denominadors iguals, els estudiants no es basen en cap interpretació de fracció. En tres explicacions, però, sí que es pot deduir la interpretació. Aquests tres estudiants s'han basat tots en la mateixa interpretació: comparació part–tot. No hi ha cap estudiant que s'hagi basat en una altra interpretació de fracció, com ara mesura, quocient, raó o operador.

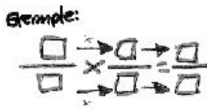
El fet d'interpretar la fracció d'una determinada manera depèn de si els estudiants han utilitzat alguna representació amb imatges o de context real. En les explicacions en què no han donat exemples o només han fet servir símbols matemàtics s'ha constatat que no s'han basat en cap interpretació.

Resta de fraccions amb denominadors diferents

Dos estudiants han donat explicacions en relació amb la resta de fraccions amb denominadors diferents. Les explicacions i els exemples dels estudiants que proposen ensenyar la resta de fraccions amb denominadors diferents formen part d'una sola categoria: Sense interpretació (REDI1).

En les explicacions dels estudiants que han proposat ensenyar la resta amb denominadors diferents no s'utilitza cap interpretació. Cap ha plantejat representacions amb imatges ni a partir de contextos reals simulats, per la qual cosa no s'han basat en cap interpretació.

OBJECTIU 2.6: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la multiplicació de fraccions		
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions

Codi	Categoria	Exemples
MU1	Explicació d'un algoritme per multiplicar fraccions	"*Per fer-ho els alumnes hauran de dibuixar un petit esquema on es representi el procés que s'ha de seguir per multiplicar fraccions i un altre petit esquema per les divisions després d'haver escoltat l'explicació de la mestra. Aquest exercici té com a objectiu que els alumnes no facin les operacions automàticament, sinó que pensin el procés que han de fer per solucionar-les*". E15 
MU2	Explicació d'un algoritme per multiplicar fraccions seguida d'exemples (símbols matemàtics)	"*El producte de dues o més fraccions és una altra fracció que té per numerador el producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. Exemple: 1/3 ·4/5 = (1·4)/(3·5)*". E27

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
MU1	Explicació d'un algoritme per multiplicar fraccions	**1**
MU2	Explicació d'un algoritme per multiplicar fraccions seguida d'exemples (símbols matemàtics)	**1**

la categoria MU2 ho explica amb tot detall; en canvi, l'estudiant de la categoria MU1 ho mostra a partir d'un esquema (vegeu taula 6.64). Cap dels dos planteja que es pugui deduir el procediment de multiplicar a partir d'exemples, tal com ha proposat algun estudiant en la suma i la resta de fraccions.

L'estudiant de la categoria MU1, a més, explica l'objectiu de l'activitat: "Que els alumnes no facin operacions automàticament, sinó que pensin en el procés que han de fer per solucionar-les". Amb aquesta explicació sembla que es refereixi a aprendre correctament el procés de multiplicar fraccions i no tant a descobrir per què es pot multiplicar d'aquesta manera.

Només un dels dos estudiants exposa un exemple després de l'explicació de com multiplicar fraccions. Tot i així, en les explicacions de tots dos estudiants es nota que proposen el procés de multiplicar fraccions com una regla que cal seguir, sense necessitat de fer entendre per què se segueix aquest procés.

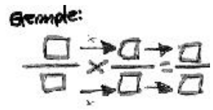
6.6.2 Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions

Tal com s'ha comentat al subapartat 6.1.2, les representacions tenen un paper fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, ja que el fet d'entendre les idees matemàtiques depèn de com es representen (NCTM, 2000).

Al subapartat 3.3.7.4 s'han mostrat diferents representacions per ensenyar la multiplicació de fraccions. Prenent com a base aquestes representacions i les exposades a l'apartat 6.1.2 a partir de l'adaptació de les representacions del model de Lesh (Cramer, 2003), en aquest subapartat s'analitzen les representacions que els estudiants proposen en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions.

6.6.2.1 Les categories definides

Dels dos estudiants que han explicat la multiplicació de fraccions, només un ha donat un exemple utilitzant una representació. A la taula 6.66 es mostren les categories de les representacions dels estudiants que fan referència a com multiplicar fraccions.

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
MURE0	Cap representació						"*Per fer-ho els alumnes hauran de dibuixar un petit esquema on es representi el procés que s'ha de seguir per multiplicar fraccions i un altre petit esquema per les divisions després d'haver escoltat l'explicació de la mestra. Aquest exercici té com a objectiu que els alumnes no facin les operacions automàticament, sinó que pensin el procés que han de fer per solucionar-les*". E15 
MURE1	1 representació						"*El producte de dues o més fraccions és una altra fracció que té per numerador el producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. Exemple: 1/3 ·4/5 = (1·4)/(3·5)*". E27

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Quantitat d'estudiants
MURE0	Cap representació						**1**
MURE1	1 representació						**1**

proposat un exemple a partir de símbols matemàtics. A continuació s'analitza amb més detall aquesta representació.

Representacions amb símbols matemàtics

Un únic estudiant ha donat com a exemple una representació amb símbols matemàtics. Ha utilitzat $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(1\cdot 4)}{(3\cdot 5)} = \frac{4}{15}$. Aquest estudiant ha proposat la multiplicació de dues fraccions més petites que la unitat i ha calculat la multiplicació a partir de l'algoritme que ha explicat, multiplicar el numerador pel numerador i el denominador pel denominador.

6.6.3 Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions

Tal com s'ha explicat a l'apartat 6.1.3 i d'acord amb les diferents interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012) (comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó), en aquest subapartat s'analitzen les interpretacions de fracció utilitzades en les explicacions i els exemples per ensenyar la multiplicació de fraccions.

6.6.3.1 Les categories definides, resultats i discussió

Segons les explicacions i els exemples dels estudiants per explicar la multiplicació de fraccions, es pot deduir o no la interpretació de fracció en què s'han basat. Cap dels dos estudiants ha proposat cap exemple a partir d'una imatge o d'una situació en un context real simulat. Això fa que no s'hagin basat en cap interpretació de fracció. Per això, tots dos formen part de la mateixa categoria: Sense interpretació (vegeu taula 6.68).

Taula 6.68. Categorització de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples dels estudiants per ensenyar la multiplicació de fraccions amb denominadors iguals.

Codi	Categoria	Exemples	Quantitat d'estudiants
MUI1	Sense interpretació	"*El producte de dues o més fraccions és una altra fracció que té per numerador el producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. Exemple: 1/3 ·4/5 = (1·4)/(3·5)*". E27	2

Nota: L'exemple de la taula és una reproducció textual de la resposta d'un estudiant.

6.7 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb la divisió de fraccions

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la divisió de fraccions. Uns quants estudiants de mestre han proposat activitats en la seqüència amb l'objectiu d'ensenyar la divisió de fraccions. S'ha analitzat com aquests estudiants plantegen ensenyar aquest concepte a partir de les explicacions i els exemples en

OBJECTIU 2.7: Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la divisió de fraccions		
Anàlisi de les explicacions i els exemples per ensenyar la divisió de fraccions	Anàlisi de les representacions en les explicacions i els exemples per ensenyar la divisió de fraccions	Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la divisió de fraccions

Codi	Categoria	Exemples
DI1	Explicació d'un algoritme per dividir fraccions	"*Per fer-ho els alumnes hauran de dibuixar un petit esquema on es representi el procés que s'ha de seguir per multiplicar fraccions i un altre petit esquema per les divisions després d'haver escoltat l'explicació de la mestra. Aquest exercici té com a objectiu que els alumnes no facin les operacions automàticament, sinó que pensin el procés que han de fer per solucionar-les*". E15

DI2	Explicació d'un algoritme per dividir fraccions seguida d'exemples (símbols matemàtics)	 "*Dividir per una fracció és el mateix que multiplicar per la fracció inversa. Per obtenir la fracció inversa intercanviem el numerador i el denominador Exemple: 3/5:2/3=3/5 · 3/2 = 9/10*". E27

Codi	Categoria	Quantitat d'estudiants
DI1	Explicació d'un algoritme per dividir fraccions	**1**
DI2	Explicació d'un algoritme per dividir fraccions seguida d'exemples (símbols matemàtics)	**1**

Codi	Categoria	Símbol matemàtic	Imatge	Expressió verbal	Context real simulat	Objecte	Exemples
DIRE0	Cap representació						"*Per fer-ho els alumnes hauran de dibuixar un petit esquema on es representi el procés que s'ha de seguir per multiplicar fraccions i un altre petit esquema per les divisions després d'haver escoltat l'explicació de la mestra. Aquest exercici té com a objectiu que els alumnes no facin les operacions automàticament, sinó que*  *pensin el procés que han de fer per solucionar-les*". E15
DIRE1	1						"*Dividir per una fracció és el mateix que multiplicar per la*

	representació						*fracció inversa. Per obtenir la fracció inversa intercanviem el numerador i el denominador Exemple: 3/5:2/3=3/5 · 3/2 = 9/10*" . E27

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

6.7.2.2 Resultats i discussió

Dels dos estudiants que han explicat com dividir fraccions, només un ha proposat un exemple amb símbols matemàtics. A la taula 6.72 es mostra que només hi ha un estudiant en cadascuna de les categories descrites a l'apartat 6.7.2.1.

Taula 6.72. Classificació dels estudiants segons la categorització de les representacions per ensenyar la divisió de fraccions.

Codi	**Categoria**	**Símbol matemàtic**	**Imatge**	**Expressió verbal**	**Context real simulat**	**Objecte**	**Quantitat d'estudiants**
DIRE0	Cap representació						**1**
DIRE1	1 representació						**1**

Dels dos estudiants que han explicat la divisió de fraccions, cap ha utilitzat imatges, expressions verbals, situacions en contextos reals ni objectes. Només un dels dos ha donat un exemple a partir de símbols matemàtics. A continuació s'analitza amb més detall aquesta representació.

Representacions amb símbols matemàtics

Un únic estudiant ha posat com a exemple una representació amb símbols matemàtics. Ha fet servir $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \text{ x } \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$. Aquest estudiant ha proposat la divisió de dues fraccions més petites que la unitat i ha calculat la divisió a partir de l'algoritme que ha explicat, multiplicar per la fracció inversa.

6.7.3 Anàlisi de la interpretació de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar la divisió de fraccions

Tal com s'ha explicat a l'apartat 6.1.3 i d'acord amb les diferents interpretacions de fracció que proposa Lamon (2012) (comparació part–tot, mesura, operador, quocient i raó), en aquest subapartat s'analitzen les interpretacions de fracció utilitzades en les explicacions i els exemples per ensenyar la divisió de fraccions.

6.7.3.1 Les categories definides, resultats i discussió

Segons les explicacions i els exemples dels estudiants per explicar la divisió de fraccions, es pot deduir o no la interpretació de fracció en què s'han basat. Cap dels dos estudiants ha proposat cap exemple a partir d'una imatge o d'una situació en un context real simulat. Això fa que no s'hagin basat en cap interpretació de fracció. Per això, tots dos formen part de la mateixa categoria: Sense interpretació (vegeu taula 6.73).

Taula 6.73. Categorització de les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples dels estudiants per ensenyar la divisió.

Codi	Categoria	Exemples	Quantitat d'estudiants
DII1	Sense interpretació	"*Dividir per una fracció és el mateix que multiplicar per la fracció inversa. Per obtenir la fracció inversa intercanviem el numerador i el denominador Exemple: 3/5:2/3=3/5 · 3/2 = 9/10*". E27	2

Nota: L'exemple de la taula és una reproducció textual de la resposta d'un estudiant.

6.8 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb la infinitud i la densitat dels nombres racionals

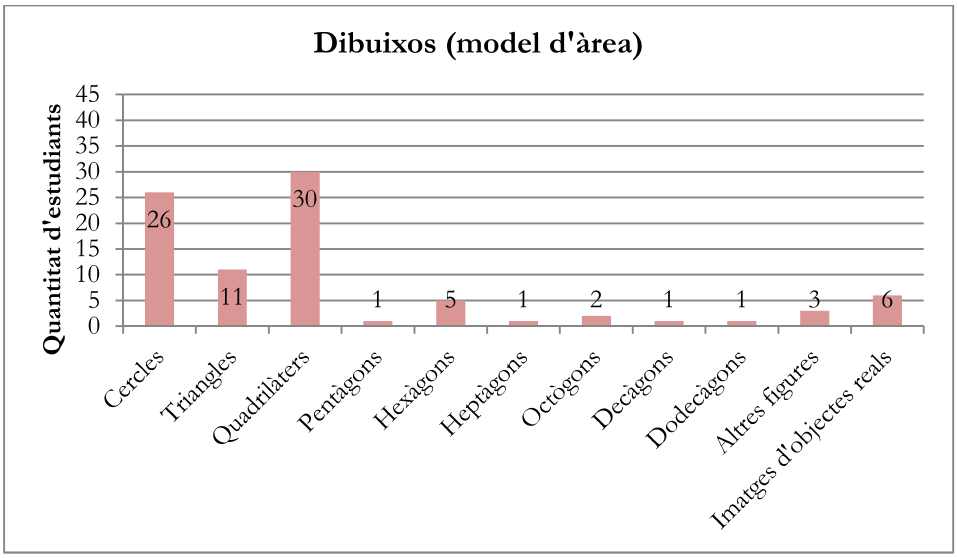
En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de la infinitud i densitat dels nombres racionals. Cap estudiant ha plantejat explicacions per ensenyar les propietats de la infinitud i la densitat dels nombres racionals i per aquest motiu no s'ha pogut analitzar cap explicació relacionada amb aquestes propietats.

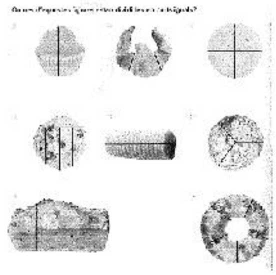
6.9 Anàlisi de dades de la seqüència d'activitats en relació amb les representacions gràfiques de fraccions

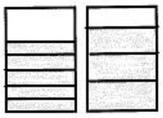
En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts en relació amb l'objectiu 2.9: descriure, analitzar i interpretar les representacions gràfiques que els estudiants de mestre elaboren en una seqüència d'activitats per ensenyar continguts de fraccions. Trenta-set dels quaranta-sis estudiants han donat imatges en les activitats de la seqüència, tant per il·lustrar explicacions com per proposar exercicis o problemes per ensenyar determinats continguts. Els estudiants han utilitzat diferents models a l'hora de representar les fraccions: model d'àrea, model de grup i model de longitud (figura 6.14). A continuació s'expliquen les representacions gràfiques de cada model amb més detall.

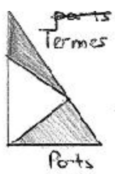
Objectiu 2.9: Descriure, analitzar i interpretar les representacions gràfiques que els estudiants de mestre elaboren en una seqüència d'activitats per ensenyar continguts de fraccions

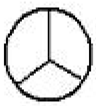
Anàlisi de les representacions gràfiques a partir del model d'àrea	Anàlisi de les representacions gràfiques a partir del model de grup	Anàlisi de les representacions gràfiques a partir del model de longitud

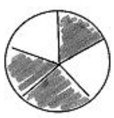


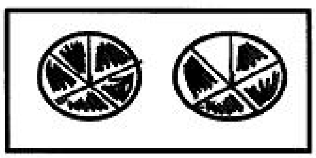


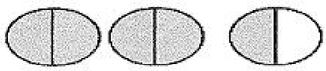



~~parts~~
Termes
Parts

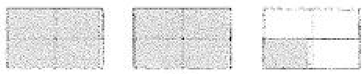








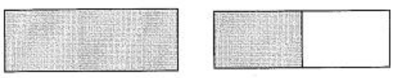
$\frac{5}{2}$



$\frac{9}{4}$

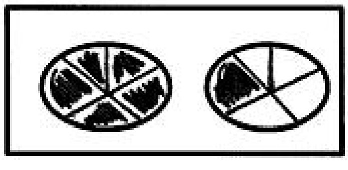
Si representem la fracció impròpia 3/2, tenim:

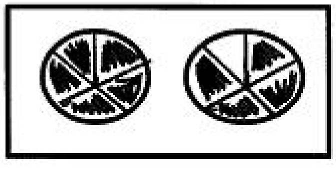
Que seria el mateix que dir 1 ½.



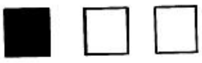
a) Fracció impròpia: Fracció mixta:

b) Fracció impròpia: Fracció mixta:





IDENTIFICAR LES FRACCIONS:

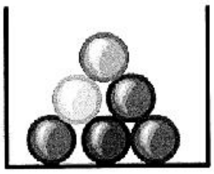

Fracció =


Fracció =

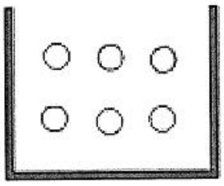
2. Escriu les fraccions que corresponen als objectes indicats:

a) ___ de les fletxes són liles b) ___ de les boles son grogues c) ___ de les cares són roses

- Quantes boles hi ha en aquest quadre? Quantes boles vermelles hi ha?

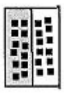


Pinta 2/6



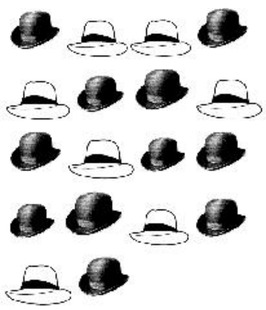
Per exemple: que vol dir la meitat de la classe? Demanar als alumnes. Si som 24 nen/es en total la meitat seran...12, que és 24 dividit entre dos, perquè:

Dividim la classe entre dues parts i agafem una, obtenim una part de dues, és a dir la meitat, ½.

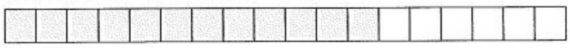


Fracció d'una quantitat:

2/3 dels barrets són blaus. Quants barrets hi ha? 2/3 de 18 barrets que hi ha en total.



- 2/3 de 18= 2 × 18= 36 ; 36 ÷ 3= **12**



- 3/4 de 24=
- 2/7 de 21=
- 4/9 de 18=
- 3/5 de 10=
- 5/8 de 8=

$\frac{2}{3}$ (

Tot i que aquest estudiant ha representat un rectangle, l'hem considerat com a model de grup i no model d'àrea perquè el que té en compte és la quantitat de quadradets i no la part que es té en compte respecte la unitat.

Aquest estudiant ha realitzat un error en escriure la primera igualtat, ha escrit que $\frac{2}{3}$ de 18 = 2 x 18 = 36, aquesta igualtat no és correcta.

6.9.2.3 Anàlisi de les representacions gràfiques segons els objectes que es consideren a cada part de les que s'ha dividit la unitat

Dels quatre estudiants que han interpretat la fracció com a comparació part-tot, excepte l'estudiant que ha mostrat la imatge de les maduixes i no concreta quina seria la fracció representada, tots han proposat un grup d'objectes i uns quants de marcats. No han realitzat cap tipus d'agrupament dels objectes, és a dir, en tots els casos, les parts de la unitat estan formades per un sol objecte.

Dels tres estudiants que han interpretat la fracció com a operador, un estudiant mostra 18 barrets però sense cap agrupació, l'altre mostra un rectangle dividit en 18 quadradets i 12 quadradets pintats però no mostra el procés de calcular 2/3 de 18 doncs representa el resultat directament. El tercer estudiant és l'únic que representa com dividir els objectes en grups amb el mateix nombre d'objectes. Aquest estudiant proposa 24 objectes agrupats en dos grups de 12 objectes (vegeu figura 6.27).

6.9.2.3 Anàlisi de les representacions gràfiques segons si les fraccions representades són més grans, més petites o iguals que 1

Tres dels quatre estudiants que han interpretat la fracció com a comparació part-tot han representat fraccions més petites que 1. No queda clara la fracció que vol representar l'estudiant que ha proposat la imatge de les maduixes.

Els tres estudiants que han interpretat la fracció com a operador i que proposen calcular fraccions de nombres, en tots els casos han proposat una fracció més petita que 1.

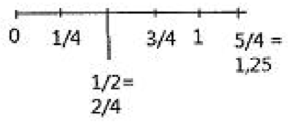
6.9.3 Anàlisi de les representacions gràfiques a partir del model de longitud

Només cinc estudiants dels trenta-set que han proposat representacions gràfiques, n'han realitzat alguna a partir d'una recta numèrica. Aquestes representacions s'analitzaran des de diferents perspectives: segons l'activitat en la que s'han proposat, segons la interpretació de fracció, i segons si les fraccions representades són més grans, més petites o iguals que 1. Les representacions a partir de les rectes numèriques s'han analitzat des de perspectives diferents de les que s'han analitzat les del model d'àrea i de grup, donat que per les característiques del model de longitud, calia saber el context de l'activitat.

na
dea
$\frac{5}{4}$ p

4. *Representació a la recta.*

Objectiu: representació a la recta per poder comparar després números, saber quin és més gran, etc.

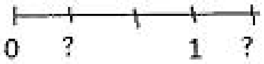


Buscar la representació de la fracció 5/4 perquè comprovin que està per sobre de l'u. Així arribarem a descobrir que si el numerador és més gran que el denominador el resultat serà més gran que 1.

$\frac{5}{4}$ c

dentifi
rien d
$\frac{1}{3}$ i $\frac{4}{3}$.

Un altre exercici pot ser escriure a la recta les fraccions que falten:



·e tar

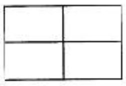
egeu figu

$\frac{7}{10}$ i $\frac{1}{4}$ i

represe

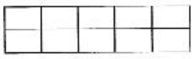
$\frac{3}{5}$ i $\frac{2}{2}$. E

2. a) Relaciona cada segment o figura amb una fracció i pinta-les .



3/5

7/10



1/4

2/2

es

$\frac{2}{5}$ a

con

ivid

$\frac{2}{5}$ h

3. Dibuixa la fracció 2/5 a la línia:

$\frac{2}{5}$ a

3) Marca la línia amb 10 parts.
Després assenyala a la línia les següents fraccions escrites, cada una d'un color diferent:

0 10

a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{8}{10}$ e) $\frac{4}{10}$ f) $\frac{1}{10}$

Exercici 5:

- Quina de les següents fraccions correspon amb el punt assenyalat?

O 4/10 O 2/3 O 3/4

- Quina de les següents fraccions correspon amb el punt assenyalat?

O 8/10 O 1/2 O 3/10

- Quina de les següents fraccions correspon amb el punt assenyalat?

O 1/4 O 2/5 O 2/3

6.9.3.2 Anàlisi de les representacions gràfiques segons la interpretació de fracció

Pel fet d'haver utilitzat la recta numèrica com a representació de les fraccions, sembla que els estudiants s'haurien de recolzar en la interpretació de fracció com a mesura, tal com la defineix Lamon (2012). Però, donat alguns errors que els estudiants han comès i que s'han explicat més amunt, no es pot assegurar que tots aquests estudiants s'hagin basat en la interpretació de fracció com a mesura. Els estudiants del Grup 3 possiblement han interpretat la fracció com a comparació part-tot donat que divideixen un segment en un nombre de parts en funció del número del denominador de la fracció que es vol representar, en comptes de representar correctament la unitat.

6.9.3.3 Anàlisi de les representacions gràfiques segons si les fraccions representades són més grans, més petites o iguals que 1

Dels cinc estudiants només un representa o proposa representar fraccions més grans que la unitat (5/4 i 4/3), la resta d'estudiants només proposen fraccions més petites o iguals que una unitat (1/10, 2/10, 4/10, 2/5, 5/10, 6/10, 3/5, 2/3, 8/10, 4/5, 2/2).

7 Anàlisi de dades de la relació entre el qüestionari i la seqüència d'activitats

En aquest capítol es presenten els resultats obtinguts en relació al tercer objectiu d'aquesta recerca: descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre les fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de mestre. Aquest objectiu es concreta en tres objectius específics:

Objectiu 3.1: Descriure, analitzar i interpretar les relacions entre els coneixements sobre el significat de fracció i els coneixements sobre l'ensenyament del significat de fracció dels estudiants de mestre.

Objectiu 3.2: Descriure, analitzar i interpretar les relacions entre els coneixements sobre l'equivalència de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions dels estudiants de mestre.

Objectiu 3.3: Descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre la comparació de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de la comparació de fraccions dels estudiants de mestre.

7.1 Anàlisi de dades de la relació entre el qüestionari i la seqüència d'activitats pel que fa al significat de fracció

En aquest subapartat es presenten els resultats obtinguts en relació a l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar les relacions entre els coneixements sobre el significat de fracció i els coneixements sobre l'ensenyament del significat de fracció dels estudiants de mestre. En aquest cas s'estudia la relació entre les explicacions que realitzen els estudiants en la pregunta 1 del qüestionari sobre què és una fracció i les explicacions que els estudiants realitzen a les seqüències també en relació al significat de fracció (vegeu figura 7.1).

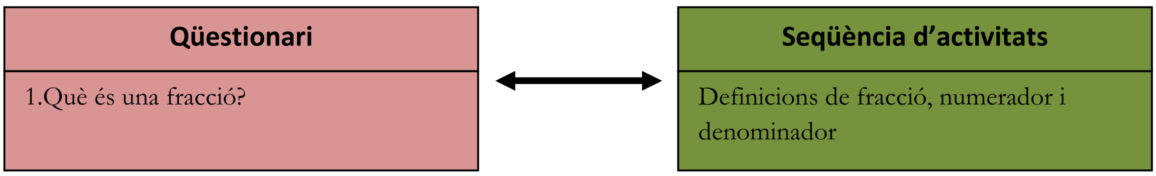


Figura 7.1. Esquema de les explicacions que s'analitzen sobre el significat de fracció

7.1.1 Les relacions definides

Per a l'anàlisi de les relacions entre les explicacions sobre el significat de fracció en el qüestionari i en la seqüència es parteix de les categories segons les quals s'han classificat les definicions de fracció en la pregunta 1 i les definicions de fracció en la seqüència així com de les categories amb les que s'han classificat les definicions de numerador i denominador també a la seqüència.

D'entrada s'analitzen les relacions de les categories de la pregunta 1 amb les categories de les definicions de fracció i després s'analitzen les categories de la pregunta 1 amb les de les definicions de numerador i denominador.

Relació entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de fracció en la seqüència

Per a l'anàlisi de les relacions entre les definicions de fracció en el qüestionari i en la seqüència s'han estudiat els canvis entre les categories a les que pertanyen les respostes dels estudiants en la pregunta 1 del qüestionari i les categories de les explicacions en la seqüència. S'ha tingut en compte si els estudiants han realitzat explicacions dins la mateixa categoria en el qüestionari i en la seqüència o bé si han fet explicacions en d'altres categories. Les relacions que s'han obtingut es mostren a la taula 7.1.

Relació entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de numerador i denominador en la seqüència

Per a l'anàlisi de les relacions entre les definicions de fracció en el qüestionari i la definició de numerador i denominador en la seqüència s'han estudiat les categories a les que pertanyen les respostes dels estudiants en la pregunta 1 del qüestionari i les categories de les explicacions en la seqüència.

Taula 7.1. Relacions definides entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de fracció en la seqüència.

<table>
<tr><th rowspan="2">Codi</th><th rowspan="2">Relacions definides</th><th rowspan="2">Categoria al qüestionari</th><th rowspan="2">Categoria a la seqüència</th><th colspan="2">Exemples</th></tr>
<tr><th>Qüestionari</th><th>Seqüència</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Es mantenen les categories</td><td>Part o parts d'una unitat (SI1)</td><td>Part o parts d'una unitat (SI1)</td><td>"És una manera d'indicar quantes parts agafes del total". E16</td><td>"Una fracció és una part d'una unitat". E16</td></tr>
<tr><td>A2</td><td colspan="5">Es canvia de categoria</td></tr>
<tr><td colspan="2">A2.1</td><td>Part o parts d'una unitat (SI1)</td><td>Proporció (SI2)</td><td>"La fracció és una part d'un total o unitat, que a partir d'aquí, escrivint una fracció comentes la part "agafada" o "pintada" d'una unitat. Està composta per numerador i denominador. (n/d)". E1</td><td>"Són expressions que ens permeten representar una proporció". E1</td></tr>
<tr><td colspan="2">A2.2</td><td>Part o parts d'una unitat (SI1)</td><td>Relació entre dos nombres (SI7)</td><td>"Una fracció és una relació entre dos nombres i ens indica les parts en que es divideix un objecte i les parts que en volem. Ens serveix per designar un cas que no és l'unitat de l'objecte, de manera detallada i precisa". E39</td><td>"És la relació de dos nombres separats per una petita ratlla. Aquests dos nombres un està a sobre i l'altre a sota amb la ratlla al mig, per exemple 2/4. El número de sobre es diu numerador i el de sota denominador". E39</td></tr>
</table>

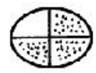
A2.3		Proporció (SI2)	Repartiment (SI4)	*"És una proporció entre dos nombres".* E19	"*Quan repartim una cosa diem que estem fent una fracció*". E19
A2.4		Nombre (SI3)	Divisió de dues quantitats (SI5)	*"Una fracció és una operació matemàtica que consta de dos nombres però determinen un sol resultat, un sol nombre".* E46	"*És una divisió de dos números*". E46
A2.5		Divisió de dues quantitats (SI5)	Part o parts d'una unitat (SI1)	*"La divisió d'un número per una totalitat".* E17	"*Una fracció indica que la unitat està dividida en parts iguals i que s'ha pres una o diverses d'aquestes parts*". E17
A2.6		Relació entre dos nombres (SI7)	Part o parts d'una unitat (SI1)	*"És la relació entre dos nombres, sinó no pots fraccionar".* E28	*"La relació de números que representen part d'una cosa".* E28
A3	**Es perd una categoria**	Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3)	Part o parts d'una unitat (SI1)	*"Una fracció és un nombre que s'obté de dividir una totalitat en parts iguals".* E22	"*És una part de la unitat*". E22
A4	**S'afegeix una categoria**	Part o parts d'una unitat (SI1)	Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3)	*"Una fracció és la relació entre un tot i les parts iguals en què està dividit aquest tot".* E40	*"La fracció és un nombre que obtenim quan dividim un objecte en parts iguals".* E40

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

S'ha tingut en compte en quines categories fan explicacions en el qüestionari i en quines categories fan explicacions en la seqüència. Les relacions que s'han obtingut es mostren a la taula 7.2.

Taula 7.2. Relacions definides entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de numerador i denominador en la seqüència.

Codi	Categoria de les relacions	Categoria al qüestionari	Categoria a la seqüència	Exemples	
				Qüestionari	**Seqüència**
B1	**Canvien a la categoria Repartiment**	Proporció (SI2)	Repartiment (ND2)	*"És una relació de dos nombres que representen una proporció".* E3	"*Els repartiré una poma i un ganivet per cada dos* [...] *1/2 vol dir una meitat. El nombre de baix és la quantitat de talls en que hem dividit la poma i es diu DIVIDEND. En Aquest cas és 2 perquè hem fraccionat la poma en dues parts. El nombre de dalt són els talls que es queda cadascú. La poma està partida en dos talls però cada membre de la parella en té només 1. El nombre de dalt es diu DIVISOR.".* E3
B2	**Canvien a la categoria *Parts seleccionades de les parts amb que s'ha dividit la unitat***				
B2.1		Part o parts d'una unitat (SI1)	Parts seleccionades de les parts amb que s'ha dividit la unitat (ND1)	*"És una part d'una unitat".* E42	*"Per escriure-les utilitzem dos nombres naturals separats per una línia horitzontal. El que s'escriu sota de la línia s'anomena denominador, i ens diu les parts en què s'ha dividit la unitat. El de dalt s'anomena numerador, i ens assenyala les parts de la unitat que es volen indicar, comptar o representar" (BALAUX, Artur, 2003, p.42).* E42

B2.2	Nombre (SI3)		*"Una fracció és una operació matemàtica que consta de dos nombres però determinen un sol resultat, un sol nombre".* E46	"*El denominador indica el número de parts iguals en què es divideix la unitat. El numerador indica el número de parts que s'agafen d'aquella unitat*". E46
B2.3	Divisió de dues quantitats (SI5)		*"Una fracció consisteix en dividir una quantitat (el denominador) en una altra quantitat (numerador)".* E21	*"1/2 és una fracció. El 2 és el denominador i assenyala que la unitat s'ha dividit en 2 parts. L'1 és el numerador i ens indica que d'aquestes 4 parts n'agafem una".* E21
B2.4	Relació entre dos nombres (SI7)		*"És la relació entre dos nombres, sinó no pots fraccionar."* E21	*"Té dos componenets: el numerador, a la part superior, i que indica la part que* $\frac{3}{4}$ numerador / denominador  *agafem de la cosa, i el denominador, a la part inferior, que indica les parts en què està dividida la cosa. Per exemple: tenim un pastís i el tallem en 4 parts i guals i me'n menjo 3*". E28
B2.5	Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3)		*És un nombre racional format per un denominador i numerador que representen una unitat. El denominador és el nombre de parts en que dividim la unitat i el numerador les parts que tenim en compte.* E38	"*El numerador indica el nombre de parts que considerem i el denominador el nombre de parts iguals en què dividim la unitat*". E38
B2.6	Nombre, repartiment i operació (SI3, SI4 i SI6)		*"Una fracció es pot interpretar de vàries maneres: com una divisió, com un percentatge, com un repartiment.".* E27	*"Recordem que el denominador ens indica el nombre de parts iguals en què hem partit la unitat o la col·lecció. El numerador ens indica el nombre de parts que n'agafem".* E27

Taula 7.3. Classificació dels estudiants segons les definicions realitzades en el qüestionari i la seqüència.

Quantitat d'estudiants	Definició de fracció en la pregunta 1 del qüestionari	Definició de fracció en la seqüència	Definició de numerador i denominador en la seqüència
1			
15			
9			
1			

A continuació s'exposen els resultats i la discussió de les relacions entre les categories de les respostes de la pregunta 1 i les categories de les explicacions sobre el significat de fracció en la seqüència segons les categories descrites a l'apartat 7.1.1.En primer lloc s'exposen els resultats i la discussió de les relacions de les categories de la pregunta 1 amb les categories de les definicions de fracció, i a continuació es presenten els resultats i discussió de les relacions de les categories de la pregunta 1 amb les categories de les definicions de numerador i denominador.

Relació entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de fracció en la seqüència

Setze estudiants han proposat definicions de fracció en alguna activitat de la seqüència i també han respost la pregunta 1 del qüestionari. S'han analitzat els canvis en les explicacions d'aquests setze estudiants en el qüestionari i en les seqüències segons les relacions descrites a l'apartat anterior (vegeu taula 7.4).

Taula 7.4. Classificació dels estudiants segons les relacions definides entre les definicions de fracció en el qüestionari i les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de fracció en la seqüència.

Codi	Relacions definides	Categoria al qüestionari	Categoria a la seqüència	Quantitat d'estudiants
A1	**Es mantenen les categories**	Part o parts d'una unitat (SI1)	Part o parts d'una unitat (SI1)	**2**
A2	**Es canvia de categoria**			**9**
A2.1		Part o parts d'una unitat (SI1)	Proporció (SI2)	3
A2.2		Part o parts d'una unitat (SI1)	Relació entre dos nombres (SI7)	1
A2.3		Proporció (SI2)	Repartiment (SI4)	2
A2.4		Nombre (SI3)	Divisió de dues quantitats (SI5)	1
A2.5		Divisió de dues quantitats (SI5)	Part o parts d'una unitat (SI1)	1
A2.6		Relació entre dos nombres (SI7)	Part o parts d'una unitat (SI1)	1
A3	**Es perd una categoria**	Part o parts d'una unitat i nombre (SI1 i SI3)	Part o parts d'una unitat (SI1)	**1**
A4	**S'afegeix una categoria**	Part o parts d'una unitat (SI1)	Part o parts d'una unitat i nombre (SI1 i SI3)	**4**

Només hi ha dos estudiants que realitzen respostes en el qüestionari en les mateixes categories que en la seqüència, formen part, per tant, de la relació Es mantenen les categories (A1). Tots dos han definit fracció en la categoria Part o parts d'una unitat (SI1) tant en la pregunta 1 del qüestionari com en les activitats de la seqüència.

Els altres estudiants no es mantenen en la mateixa categoria, és a dir, o canvien de categoria, o afegeixen comentaris en una altra categoria o bé deixen de fer comentaris en una de les dues categories on n'han fet.

Concretament, nou estudiants fan explicacions en la pregunta 1 en una categoria i defineixen fracció a la seqüència en una altra categoria. No hi ha una relació clara entre els canvis que han introduït entre les respostes de la pregunta 1 i les explicacions a la seqüència per definir fracció.

L'estudiant que pertany a la relació A3 (Es perd una categoria) per respondre a la pregunta 1 realitza explicacions de les categories Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3) mentre que en la seqüència per definir fracció només fa referència a explicacions de la categoria Part o parts d'una unitat (SI1). Per tant, en la seqüència no esmenta que la fracció és un nombre.

En canvi, els quatre estudiants de la relació A4 (S'afegeix una categoria), en la pregunta 1 només fan referència a explicacions en la categoria Part o parts d'una unitat (SI1) mentre que en la seqüència fan explicacions en les categories Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3).

Els estudiants que han fet explicacions en les categories A3 i A4 fan sempre referència a la fracció com a part o parts d'una unitat però no sempre a que la fracció és un nombre. Uns consideren que és un nombre en la pregunta 1 i en la seqüència no i els altres en la pregunta 1 no diuen que és un nombre però sí a la seqüència.

És destacable el fet que hi ha set dels setze estudiants que tant en el qüestionari com en les seqüències mantenen explicacions de fracció en la categoria Part o parts d'una unitat (SI1).

Els estudiants no tenen una idea prou clara de com definir una fracció: nou estudiants fan explicacions de categories diferents en el qüestionari i en les seqüències. Els altres cinc estudiants no es mantenen en la mateixa categoria, afegeixen o deixen de fer explicacions d'altres categories i només dos estudiants mantenen la mateixa definició de fracció. Això es pot explicar d'una banda per la fragilitat de les definicions donades al qüestionari, i de l'altra, pel fet que en el qüestionari els estudiants van contestar sense buscar cap altra informació mentre que en la seqüència van poder consultar bibliografia. Alguns han suggerit definicions de fracció molt diferents de les que van proposar inicialment al qüestionari.

Relació entre les definicions de fracció en el qüestionari i les definicions de numerador i denominador en la seqüència

Vint-i-quatre estudiants han realitzat definicions de numerador i denominador en alguna activitat de la seqüència i també han respost la pregunta 1 del qüestionari. S'han analitzat els canvis en les explicacions d'aquests vint-i-quatre estudiants en el qüestionari i en les seqüències segons les relacions descrites a l'apartat anterior (vegeu taula 7.5).

Taula 7.5. Classificació dels estudiants segons les relacions definides entre les definicions de fracció en el qüestionari i les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de numerador i denominador en la seqüència.

<table>
<tr><th>Codi</th><th>Relacions definides</th><th>Categoria al qüestionari</th><th>Categoria a la seqüència</th><th>Quantitat d'estudiants</th></tr>
<tr><td>B1</td><td>Canvien a la categoria Repartiment</td><td>Proporció (SI2)</td><td>Repartiment (ND2)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B2</td><td colspan="3">Canvien a la categoria Parts seleccionades de les parts amb que s'ha dividit la unitat</td><td>22</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.1</td><td>Part o parts d'una unitat (SI1)</td><td rowspan="6">Parts seleccionades de les parts amb que s'ha dividit la unitat (ND1)</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.2</td><td>Nombre (SI3)</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.3</td><td>Divisió de dues quantitats (SI5)</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.4</td><td>Relació entre dos nombres (SI7)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.5</td><td>Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3)</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">B2.6</td><td>Nombre, repartiment i operació (SI3, SI4 i SI6)</td><td>1</td></tr>
</table>

Només dos estudiants han realitzat explicacions en la categoria Repartiment (ND2) a l'hora de definir el numerador i el denominador d'una fracció. Ambdós fan aquestes explicacions en la categoria Proporció (SI2) a l'hora de definir fracció en la pregunta 1 del qüestionari. Són els estudiants que formen part de la relació B1 (Canvien a la categoria Repartiment). La interpretació de fracció en les dues categories és ben diferent, doncs en el qüestionari han interpretat la fracció com a raó mentre que en la seqüència l'interpreten com a quocient (repartiment).

Els altres vint-i-dos estudiants que han realitzat definicions de numerador i denominador en alguna activitat de la seqüència i també han respost la pregunta 1 del qüestionari, han definit numerador i denominador en la seqüència amb explicacions que corresponen a la categoria Parts seleccionades de les parts amb que s'ha dividit la unitat (ND1). Aquests estudiants, en la pregunta 1 han realitzat explicacions que es consideren a les categories: Part o parts d'una unitat (SI1) (dotze estudiants), Nombre (SI3) (dos estudiants), Divisió de dues quantitats (SI5) (dos estudiants), Relació entre dos nombres (SI7) (un estudiant), Part o parts d'una unitat i Nombre (SI1 i SI3) (quatre estudiants) i Nombre, repartiment i operació (SI3, SI4 i SI6) (un estudiant). Tot i que en la seqüència realitzen explicacions en la mateixa categoria, en el qüestionari no tots defineixen fracció dins la mateixa categoria.

Setze dels vint-i-dos estudiants es basen en la interpretació de fracció com a comparació part-tot en la definició de fracció en el qüestionari i també en la definició de numerador i denominador en la seqüència. Els altres 6 no s'han recolzat en aquesta interpretació en la definició de fracció de la pregunta 1 però sí que ho han fet en la seqüència.

És interessant constatar el fet que la majoria d'estudiants (vint-i-dos dels vint-i-quatre estudiants) han definit el numerador i denominador des de la mateixa perspectiva i han interpretat la fracció com a comparació part-tot en la seqüència, independentment de com han definit fracció en el qüestionari. Es constata, per tant, que la majoria d'estudiants consideren la interpretació de fracció com a comparació part-tot quan proposen activitats per ensenyar què és el numerador i el denominador d'una fracció. Aquestes definicions de numerador i denominador en les activitats que proposen, no depenen directament de com els estudiants defineixen fracció en el qüestionari. De totes maneres, força estudiants (setze dels vint-i-dos) prenen com a base la interpretació de fracció com a comparació part-tot, tant en la seva definició en el qüestionari com en l'explicació que fan quan proposen ensenyar el concepte de numerador i denominador.

El mateix succeeix amb els dos estudiants que han definit en la seqüència numerador i denominador com a repartiment, basant-se en la interpretació de fracció com a quocient. En aquest cas, la definició no depèn de com han definit fracció al qüestionari, ja que ambdós han definit la fracció com una proporció.

A la vista de tot això es constata que els estudiants que han definit fracció en el qüestionari basant-se en la interpretació de fracció com a comparació part-tot han mantingut aquesta interpretació en les definicions de numerador i denominador en les seqüències. A més, la majoria d'estudiants que no han considerat aquesta interpretació en el qüestionari l'han considerat a la seqüència.

7.2 Anàlisi de dades de la relació entre el qüestionari i la seqüència d'activitats pel que fa a l'equivalència de fraccions

En aquest subapartat es mostren els resultats obtinguts en relació a l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre l'equivalència de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions dels estudiants de mestre. En aquest cas, s'estudia la relació entre les explicacions que realitzen els estudiants en la pregunta 16 del qüestionari sobre què vol dir que dues fraccions són equivalents i les explicacions que els estudiants realitzen a les seqüències en relació també a l'equivalència de fraccions (vegeu figura 7.2).

Qüestionari		Seqüència d'activitats
16.Què vol dir que dues fraccions són equivalents? Posa un exemple.	⟷	Definicions d'equivalència de fraccions

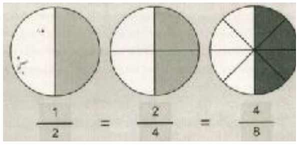
Figura 7.2. Esquema de les explicacions que s'analitzen sobre l'equivalència de fraccions.

7.2.1 Relacions definides

Per a l'anàlisi de les relacions entre les explicacions sobre fraccions equivalents en el qüestionari i en la seqüència es parteix de les categories definides a la pregunta 16 i utilitzades també a la seqüència. S'han estudiat els canvis entre les categories a les que pertanyen les respostes dels estudiants en la pregunta 16 del qüestionari i les categories de les explicacions en la seqüència. Les relacions que s'han obtingut es mostren a la taula 7.6.

Taula 7.6. Relacions definides entre les definicions d'equivalència de fraccions en el qüestionari i les definicions d'equivalència de fraccions en la seqüència.

Codi	**Relacions entre les categories del qüestionari i de la seqüència**	**Subcodi**	**Categoria al qüestionari**	**Categoria a la seqüència**	**Exemples**	
					Qüestionari	**Seqüència**
RE1	**Es mantenen les categories**	RE1.1	Procediment de càlcul	Procediment de càlcul	*"Quan es divideix el numerador i el denominador pel mateix nombre".* E21	*"Si multipliquem el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, la fracció que resulta és equivalent a la que tenim".* E21
		RE1.2	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	*"Dues fraccions són equivalents quan el resultat és el mateix. Per exemple: 2/4 és el mateix que 4/8, perquè hem multiplicat a dalt i a baix pel mateix nombre (2 en aquest cas) i és el mateix dir 2/4 i 4/8".* E27	*"Dues fraccions són equivalents quan tenen el numerador i denominador diferents i representen la mateixa quantitat [...] Si multipliquem o dividim el numerador i el denominador d'una fracció per un mateix nombre, la fracció resultant és equivalent a la primera.* E27
RE2	**Es canvia de categoria**		Explicació conceptual	Procediment de càlcul	*"Dues fraccions són equivalents perquè tenen el mateix valor encara que visualment semblen diferent".* E4	*"Identificar i fer fraccions equivalents multiplicant o dividint el numerador i el denominador per un mateix nombre".* E4
RE3	**Es perd una**		Explicació conceptual i	Procediment de càlcul	*"Dues fraccions són equivalents*	*"Multiplicant en creu, si dóna el mateix resultat vol dir que*

	categoria		Procediment de càlcul		*quan aquestes dues indiquen la mateixa proporció, però en diferent nombre. Per exemple: 4/8 = 6/12 --> 48/48 = dóna el mateix nominador* [sic] *i denominador."* E41	*són equivalents".* E41
RE4	**S'afegeix una categoria**	RE4.1	Procediment de càlcul	Procediment de càlcul i Comparació de regions	*"Dues fraccions són equivalents quan multiplicant-les per un mateix nombre obtenim el mateix resultat".* E14	 *"... entre tots compararan els diferents dibuixos realitzats i se n'adonaran de que tot i ser de diferents colors i estar partides de tres maneres diferents, tot és el mateix arribant a la fracció equivalent. Cada un farà la multiplicació corresponent per tal de demostrar que són equivalents".* E14
		RE4.2	Explicació conceptual	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	*"Que representen la mateixa quantitat".* E31	*"Podem dir que dues fraccions són equivalents quan representen el mateix* nombre [...] Si *es compleix que el producte encreuat de denominadors és igual".* E31

Codi	Relacions entre les categories del qüestionari i de la seqüència	Subcodi	Categoria al qüestionari	Categoria a la seqüència	Quantitat d'estudiants
RE1	**Es mantenen les categories**	RE1.1	Procediment de càlcul	Procediment de càlcul	1
		RE1.2	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	1
RE2	**Es canvia de categoria**		Explicació conceptual	Procediment de càlcul	1
RE3	**Es perd una**		Explicació conceptual i	Procediment de càlcul	1

	categoria		Procediment de càlcul		
RE4	**S'afegeix una categoria**	RE4.1	Procediment de càlcul	Procediment de càlcul i Comparació de regions	1
		RE4.2	Explicació conceptual	Explicació conceptual i Procediment de càlcul	1

Hi ha dos estudiants que donen respostes dins el qüestionari en les mateixes categories que en la seqüència, formen part per tant de la relació RE1 (Es mantenen les categories). Un d'aquests estudiants manté les respostes en la categoria Procediment de càlcul i l'altre en el qüestionari i en la seqüència desenvolupa explicacions en la categoria Explicació conceptual i també en Procediment de càlcul.

L'estudiant de la relació RE2 (Es canvia de categoria) passa de realitzar explicacions conceptuals en el qüestionari a proposar explicacions a partir de procediments de càlcul en una activitat de la seqüència.

També un sol estudiant està inclòs en la relació RE3 (Es perd una categoria). En el qüestionari realitza respostes en les categories Explicació conceptual i Procediment de càlcul i en la seqüència només realitza explicacions en la categoria Procediment de càlcul.

Els dos estudiants considerats en la relació RE4 (S'afegeix una categoria), mantenen la categoria inicial del qüestionari i afegeixen explicacions d'una altra categoria. En un cas, parteixen d'una resposta en la categoria Procediment de càlcul en el qüestionari i afegeixen explicacions de la categoria Comparació de regions en la seqüència. L'altre estudiant realitza una explicació en la categoria Explicació conceptual i afegeix explicacions a partir de procediments de càlcul en la seqüència.

En aquestes relacions s'observa que no tots sis estudiants en la pregunta 16 del qüestionari realitzen respostes en la categoria Procediment de càlcul mentre que en la seqüència tots realitzen alguna explicació en aquesta categoria. A més, tots els estudiants que inicialment, en el qüestionari han proposat respostes mitjançant procediments de càlcul, continuen realitzant explicacions a partir de procediments de càlcul en les seqüència. Aquest fet no ha passat amb les respostes de la categoria Explicació conceptual que algun estudiant les ha proposat al qüestionari i les ha deixat de proposar en la seqüència.

No hi ha cap estudiant que no hagi realitzat respostes de la categoria Explicació conceptual en el qüestionari i n'hagi proposat a la seqüència. Els dos estudiants que han afegit explicacions de categories noves, les han afegit de les categories Procediment de càlcul o Comparació de regions.

Amb això, s'observa que en les seqüències hi ha un predomini important de les explicacions procedimentals enfront de les conceptuals. Els estudiants, quan han proposat activitats a les seqüències ho han fet tots amb alguna explicació basada en procediments per comprovar si dues fraccions són equivalents, ja sigui multiplicant el numerador i el denominador pel mateix nombre o bé multiplicant en creu. A més, en les activitats de les seqüències només un dels estudiants ha proposat una explicació que fa referència al concepte de fraccions equivalents, mentre que en el qüestionari n'hi ha quatre que ho han explicat. S'aprecia doncs com els estudiants, encara que tinguin una idea del significat de fraccions equivalents, no prioritzen explicar-la quan es tracta de planificar les activitats en la seqüència. A l'hora d'explicar a alumnes de primària aspectes sobre les fraccions equivalents prioritzen els procediments per comprovar quan dues fraccions ho són enfront del significat d'aquest concepte. En canvi, quan se'ls demana què significa que dues fraccions siguin equivalents en el qüestionari, llavors sí que tenen en compte les explicacions conceptuals, malgrat que també tinguin en compte les procedimentals.

Es pot comprovar doncs com el tipus d'explicació que aquests sis estudiants han realitzat sobre què vol dir que dues fraccions són equivalents és diferent quan contesten la pregunta 16 del qüestionari o quan realitzen una explicació contextualitzada en una seqüència d'activitats per alumnes de primària. La diferència fonamental en les explicacions dels estudiants rau en l'augment i la presència d'explicacions de caràcter procedimental en la seqüència per tal de comprovar que dues fraccions són equivalents, en detriment de les explicacions conceptuals per intentar explicar què són les fraccions equivalents.

7.3 Anàlisi de dades de la relació entre el qüestionari i la seqüència d'activitats pel que fa a la comparació de fraccions

En aquest darrer subapartat es presenten els resultats obtinguts en relació a l'objectiu: descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre la comparació de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de la comparació de fraccions dels estudiants de mestre. Concretament, s'estudia la relació entre les respostes dels estudiants de les preguntes 12, 13 i 14 del qüestionari i les explicacions que els estudiants realitzen a les seqüències respecte a la comparació de fraccions (vegeu figura 7.3).

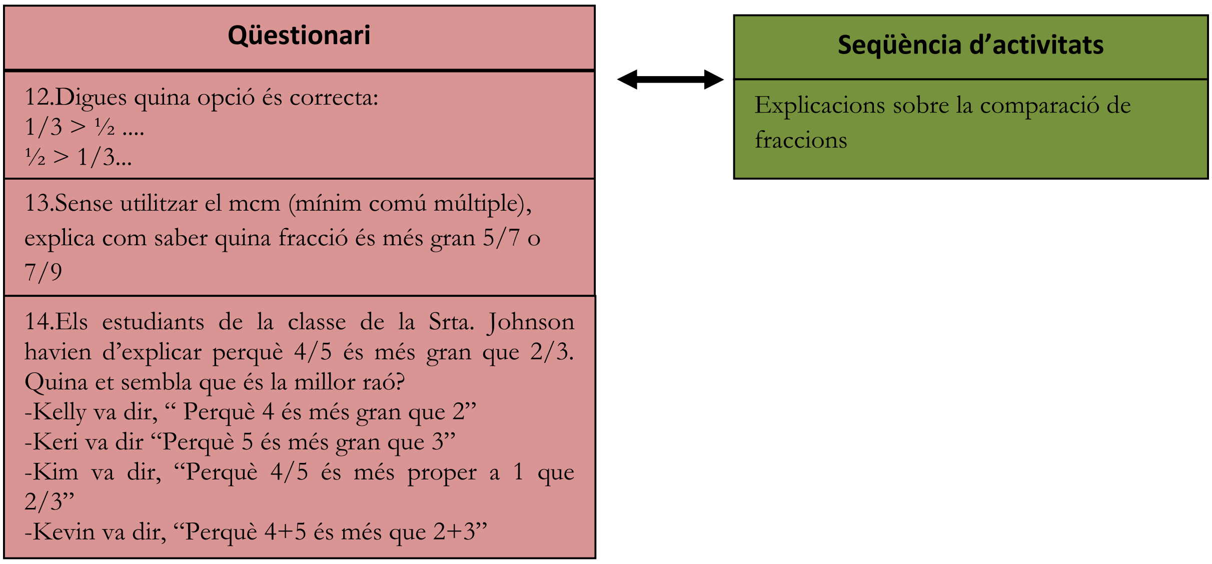


Figura 7.3. Esquema de les explicacions que s'analitzen sobre la comparació de fraccions.

7.3.1 Relacions definides, resultats i discussió

Per a l'anàlisi i discussió de les relacions entre les explicacions sobre comparació de fraccions en el qüestionari i en la seqüència es relacionen les categories definides a les preguntes 12, 13 i 14 i les categories definides a la seqüència de les explicacions sobre comparació de fraccions.

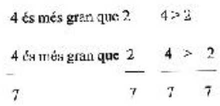
S'han analitzat separadament les explicacions dels estudiants segons les fraccions que proposen comparar en les seqüències. Primerament s'analitzen les relacions de les respostes i explicacions dels estudiants que només han proposat la comparació de fraccions amb denominadors iguals, després les dels que proposen la comparació de fraccions amb denominadors iguals i també la comparació de fraccions numeradors iguals; a continuació les dels estudiants que proposen comparar fraccions amb la unitat i finalment les explicacions dels estudiants que han explicat la comparació de fraccions amb denominadors iguals, amb denominadors diferents i la comparació de fraccions amb la unitat.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals

Hi ha quatre estudiants que han donat explicacions a la seqüència per explicar la comparació de fraccions. A partir de la taula 7.8 s'analitzen les relacions entre les respostes de les preguntes del qüestionari i les explicacions de la seqüència.

Taula 7.8. Respostes de les preguntes del qüestionari i explicacions a la seqüència sobre la comparació de fraccions amb denominadors iguals.

	Categories en el qüestionari			**Categories en la seqüència**
	Categoria pregunta 12	**Categoria pregunta 13**	**Categoria pregunta 14 (4/5 és més gran que 2/3)**	**Comparació de fraccions amb denominador igual**
E24	*"1/3 < 1/2 perquè comparant en situació amb un pastís, hi menjo més 1/2, ja que tan sols en sobra 1 tros que en 1/3 que en sobren 2 trossos*". Parts de la partició (NU6)	*"7/9 > 5/7 perquè el denominador tan com el numerador és més gran".* Comparar numeradors i denominadors (DE6)	*"Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3".*	*"És més gran la fracció de l'esquerre perquè la divisió de vuit entre dotze dóna 0,6 en canvi la divisió tres entre dotze dóna 0,25. El número més proper a u, és a dir a la unitat , és el 0,6.* *La fracció més gran és la de la dreta perquè té el numerador més gran*". COID3:Explicació (comparar els numeradors o comparar els decimals amb la unitat) + Exemples
E17	*"1/3 < 1/2 perquè en aquest cas tenint el numerador amb el número 1 contra més gran sigui el denominador més petit és el resultat".* Denominadors (NU4)	*"És més gran 7/9 perquè tan el numerador com el denominador són més grans. Per tant el resultat serà més alt".* Comparar numeradors i denominadors (DE6)	*" Perquè 4 és més gran que 2".*	*"Quan volem comparar les fraccions per saber quina és més gran o més petita ens hem de fixar que tinguin el mateix denominador.* [...] *Quan el denominador sigui més petit que el numerador la fracció és més gran. Ex: 4/3. Quan el numerador és més petit que el denominador la fracció és més petita. Ex: 1/3* [sic]*"* COID2.1: Explicació (comparar els numeradors) + Exemple ERROR

E20	*"1/3 < 1/2 perquè un terç és més petit que una meitat. Perquè sigués més gran 1/3 hauria de ser 2/3 per exemple"*. Fet conegut (NU5)	"*Fixant-nos amb el denominador, 7/9, 5/7. La fracció de denominador 9 és més gran perquè el 9 és més gran que el 7"*. Comparar numeradors i denominadors (DE6) Representar gràficament les fraccions (DE5)	"*Perquè 5 és més gran que 3*".	"*Sabem que una fracció és més gran que una altra si ens fixem en el numerador, el denominador tindrà el mateix número*".  COID2.1:Explicació (comparar els numeradors) + Exemple
E43	*"1/3 > 1/2 perquè el denominador 3 és més gran que el denominador 2 i la quantitat de parts és més gran"*. Parts de la partició (NU6)	"*És més gran 7/9, perquè hi ha més parts, és a dir que (l'objecte) està dividit en més parts que 5/7"*. Comparar numeradors i denominadors (DE6)	"*Perquè 5 és més gran que 3*".	"*Si partim una mandarina sencera que té 8 grills i en Pau se'n menja la primera porció i la Laura la segona porció, qui ha menjat més mandarina? La Laura ha menjat més grills de mandarina que en Pau. 1/8 <3/8. Un vuitè és més gran* [sic] *que tres vuitens*". COID4: Exemples

denominadors iguals i sembla que finalitzi l'explicació comparant fraccions amb la unitat. Aquest estudiant també compara els denominadors per decidir que la fracció 1/2 > 1/3 per respondre la pregunta 12.

Es detecta doncs, que encara que els estudiants hagin comès errors en les preguntes de comparació de fraccions en el qüestionari, han proposat activitats on cal comparar fraccions amb denominadors iguals a la seqüència. De fet, tal com és d'esperar s'han equivocat molt més en les preguntes de comparació de fraccions amb denominadors diferents que no en la pregunta 12 on es demana comparar fraccions amb el numerador igual.

És destacable com en la majoria d'explicacions per comparar fraccions tant en la seqüència com en el qüestionari fan referència a la comparació dels numeradors, dels denominadors o dels numeradors i denominadors. En el cas de fraccions amb denominadors i numeradors diferents, aquests criteris, però, no són correctes.

Comparació de fraccions amb denominadors iguals i comparació de fraccions amb numeradors iguals

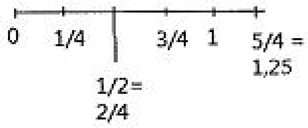
Només un estudiant ha donat explicacions a la seqüència per comparar fraccions amb denominadors iguals i comparar fraccions amb numeradors iguals. A partir de la taula 7.9 s'analitzen les relacions entre les respostes de les preguntes del qüestionari i les explicacions de la seqüència.

Taula 7.9. Respostes de les preguntes del qüestionari i explicacions a la seqüència sobre la comparació de fraccions amb denominadors iguals i la comparació de fraccions amb numeradors iguals.

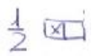
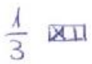
	Categories al qüestionari			**Categories a la seqüència**	
	Categoria pregunta 12	**Categoria pregunta 13**	**Categoria pregunta 14 (4/5 és més gran que 2/3)**	**Comparació de fraccions amb denominadors iguals**	**Comparació de fraccions amb numeradors iguals**
E23	*"1/3 > 1/2 perquè quan el denominador no coincideix amb el mateix nombre, la fracció més gran serà la que tingui el denominador més petit".* Denominadors (NU4)	No contesta	*"Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3"*	"*Si dues fraccions tenen el mateix denominador, la fracció que té el numerador més gran és la fracció més gran*". COID1: Explicació (comparar els numeradors)	"*Si dues fraccions tenen el mateix numerador, la fracció que té el denominador més petit és la fracció més gran*". COIN1: Explicació (comparar els denominadors)

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

Aquest estudiant realitza correctament les preguntes 12 i 14, i en canvi deixa sense contestar la pregunta 13. Per resoldre la pregunta 12 compara els denominadors correctament, procediment que segueix també a la seqüència per comparar fraccions amb numeradors iguals.

	Categories qüestionari			Seqüència
	Categoria pregunta 12	**Categoria pregunta 13**	**Categoria pregunta 14 (4/5 és més gran que 2/3)**	**Comparació de fraccions amb la unitat**
E10	*"1/3 > 1/2 perquè 1/3 = 2/6 1/2 = 3/6".* Fraccions equivalents (NU3)	*"7/9 perquè 5·9 és més petit que 7·7".* Multiplicar en creu (DE1)	"*Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3*"	*Buscar la representació de la fracció*  *5/4 perquè comprovin que està per sobre de l'u. Així arribarem a descobrir que si el numerador és més gran que el denominador el resultat serà més gran que 1*". COU2: Exemple (dibuix) seguit d'una explicació (Comparar el numerador amb el denominador)

Categories al qüestionari

Estudiant	**Categoria pregunta 12**	**Categoria pregunta 13**	**Categoria pregunta 14 (4/5 és més gran que 2/3)**	**Comparació de fraccions amb denominador igual**	**Comparació de fraccions amb numerador i denominador diferents**	**Comparació de fraccions amb la unitat**
E31	*"1/3 > 1/2 perquè la proporció és més gran amb ½.*   Representacions gràfiques (NU1)	*"5/7 perquè és la que té el numerador menys dividit".* Comparar numeradors i denominadors (DE6)	*"Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3"*	*"Quan comparem fraccions amb el mateix denominador, la fracció més gran és la que té el numerador més gran".* COID1: Explicació (comparar els numeradors)	*"Comparar els resultats que s'obtenen quan calculem cada fracció de la quantitat que ens dóna la multiplicació dels dos denominadors.* CODND1.1:Explicació (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemple CODND1.3:Explicació (Comparar les representacions gràfiques) + Exemples	*"Ens hem de fixar amb el numerador i el denominador. Fracció més petita que la unitat, el numerador és més petit que el denominador. 2/6 < 1. Fracció més gran que la unitat, el numerador és més gran que el denominador. 8/6 > 1. Fracció igual que la unitat, el numerador i denominador són el mateix nombre. 6/6 = 1".* COU1:Explicació (Comparar el numerador amb el denominador) seguida d'exemples
E6	*"1/3 > ½ perquè 1/3 = 4/12 1/2 = 4/8".* Fraccions equivalents (NU3)	*"multiplicar el numerador i el denominador de cada fracció pel mateix número i el resultat més gran serà la fracció*	*"Perquè 4/5 és més proper a 1 que 2/3"*	*"Quan comparem fraccions amb el mateix denominador, la fracció més gran és la que té el numerador més gran. Per exemple: Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 3=3/8. Una truita tallada en vuit trossos i ens en mengem 2: 2/8. 3/8>2/8".* COID2.2:Explicaci	*"Comencem multiplicant els dos denominadors: 7x 8 = 56. Tot seguim agafem una de les fraccions, en aquest cas quatre setens, seran de 56. 4/7 de 56=? Per saber-ho el que caldrà fer és dividir el 56 que hem obtingut al principi entre el denominador. Seguidament, multiplicarem el resultat obtingut pel nominador*	*"2/6 és una fracció més petita que la unitat perquè el numerador és < que el denominador, per tant, 2/6 < 1. 6/8 és una fracció més gran que la unitat, perquè el numerador és > que el denominador, per tant, 8/6 > 1. 6/6 és una fracció igual que la unitat perquè el numerador és = que el denominador,*

		més gran". Fer càlculs amb els numera dors i denomi nadors (DE7)		ó (comparar els numeradors) + Exemples	[sic]. *(57:7)x4=32. Tot seguit, farem el mateix amb la segona fracció: 5/8 de 56=(56:8)x5=7x5=35. 5/8>4/7*". CODND1.2:Explicaci ó (Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors) + Exemples	*per tant, 6/6 = 1*". COU1:Explicació (Comparar el numerador amb el denominador) seguida d'exemples

Nota: Els exemples de la taula són reproduccions textuals de les respostes dels estudiants.

Els dos estudiants que han proposat explicacions per explicar la comparació amb denominadors iguals, amb numeradors iguals i comparació amb la unitat també s'han equivocat en les respostes de les preguntes de comparació del qüestionari. Un dels dos estudiants s'ha equivocat en la pregunta 13 i l'altre a més de la 13 ha contesta erròniament la 12.

Tots dos realitzen procediments incorrectes per respondre la pregunta 14. Un dels dos compara els numeradors per afirmar que la fracció més gran és 5/7 mentre que l'altre estudiant, que multiplica el numerador i denominador de cada fracció pel mateix número, diu que el resultat més gran és la fracció més gran.

Aquests estudiants responen correctament a la pregunta 14. És remarcable el fet que en el qüestionari no han sabut comparar fraccions amb denominadors diferents però en canvi en la seqüència han proposat explicacions i activitats per comparar-ne. L'explicació que donen a la seqüència és correcta tot i que l'expressen com una regla sense explicar el perquè funciona. Podria ser que aquests estudiants haguessin obtingut les explicacions d'algun llibre que han consultat.

Per comparar fraccions amb igual denominador fan referència a la comparació dels numeradors. Per comparar les fraccions amb la unitat proposen la comparació del numerador amb el denominador, també ho expliquen com una regla que cal seguir però sense saber el perquè.

En totes les respostes tant del qüestionari com de la seqüència es pot observar un predomini de l'ús de la regla de comparar els numeradors i/o denominadors per decidir quina fracció és més gran.

8 Conclusions, implicacions educatives i limitacions de la recerca

En aquest capítol s'exposen les conclusions que s'han extret dels resultats presentats en els tres capítols anteriors. El capítol s'ha estructurat en tres apartats. En el primer, es presenten les conclusions relacionades amb els tres objectius específics d'aquesta recerca i les conclusions generals relacionades amb l'objectiu general. El segon centra l'atenció en les implicacions educatives que resulten de la realització d'aquesta tesi. En el tercer i darrer apartat s'expliquen les limitacions d'aquest treball i es proposen futures recerques.

8.1 Conclusions

Aquesta recerca té per objectiu general *descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions i sobre l'ensenyament de les fraccions.* Aquest objectiu s'ha concretat en tres objectius específics. En aquest apartat s'expliquen les conclusions relacionades amb cadascun d'ells i les conclusions relacionades amb l'objectiu general; a aquest efecte, l'apartat s'ha organitzat en quatre subapartats: els tres primers, dedicats a les conclusions de cada objectiu específic i, el darrer, a les conclusions generals.

8.1.1 Conclusions respecte als coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions

El primer objectiu específic d'aquesta tesi és:

Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions

Aquesta recerca ens ha permès de determinar un conjunt de conclusions que fan referència a diferents aspectes del coneixement sobre les fraccions dels estudiants de mestre. Cada conclusió abasta un contingut o més dels continguts sobre fraccions que es tracten en aquesta recerca. Concretament, s'han extret conclusions sobre:

<u>El significat de fracció</u>

- La interpretació de la fracció (conclusió 1)
- El significat de partició (conclusió 2)
- El significat d'unitat (conclusions 3, 4, 7 i 9)
- La representació gràfica de fraccions (conclusions 5 i 8)
- La relació de les fraccions amb les situacions quotidianes (conclusió 6)

<u>L'equivalència de fraccions</u>

- Les definicions d'equivalència de fraccions (conclusió 10)

- La interpretació de la fracció en l'equivalència de fraccions (conclusió 14)
- Els procediments de càlcul per comprovar que dues fraccions són equivalents i els errors comesos en l'explicació d'aquests procediments (conclusions 11 i 12)
- Els exemples de fraccions equivalents (conclusió 13)

La comparació de fraccions

- Les estratègies per comparar fraccions (conclusió 16)
- Les dificultats i els errors comesos en la comparació de fraccions (conclusions 15 i 17)

Les operacions amb fraccions

- L'estimació de la suma de fraccions (conclusions 18 i 19)
- Els procediments de càlcul per resoldre operacions amb fraccions (conclusió 20)
- La representació gràfica de la suma i la multiplicació de fraccions (conclusió 21)
- La prioritat de les operacions en els càlculs amb fraccions (conclusió 22)
- Els errors en les operacions de càlcul de fraccions (conclusió 23)

La densitat i la infinitud dels nombres racionals

- La infinitud dels nombres racionals (conclusió 24)
- La densitat dels nombres racionals (conclusió 25)

A continuació s'exposa cadascuna de les conclusions explicada amb detall.

1) Gairebé la meitat dels estudiants de mestre interpreta la fracció com a comparació part–tot sense tenir en compte que la fracció és un nombre.

En explicar què és una fracció, vint estudiants d'un total de quaranta-sis s'han basat únicament en la interpretació de fracció com a comparació part–tot entesa tal com la presenta Lamon (2012), com el fet d'agafar un nombre de parts iguals del total de parts en què s'ha dividit la unitat, i no com l'expliquen Siebert i Gaskin (2006), a partir de la partició i la iteració. Molt pocs estudiants han contestat que la fracció és un nombre i només uns quants han comentat que la fracció és un nombre però també una part d'un total. Amb això, s'observa que més de la meitat del grup ha considerat que la fracció és una part o parts d'un tot.

Així mateix, quan els estudiants han hagut d'escollir entre tres opcions per definir què és una fracció, si un nombre, una relació entre dos nombres o dos nombres, més de la meitat s'han decantat per "una relació entre dos nombres", mentre que un grup reduït d'estudiants, vuit en concret, han triat l'opció que la fracció és un nombre. Tot i que valorem positivament que cap estudiant hagi escollit l'opció que la fracció són dos nombres, els resultats mostren que pocs estudiants identifiquen la fracció com un nombre.

Aquesta persistència de la interpretació part–tot també s'ha observat quan s'ha demanat als estudiants de marcar les 2/5 parts de 15 cercles. La majoria d'estudiants que han mostrat el procés de resolució s'han basat en aquesta interpretació, mentre que molt pocs han partit de la interpretació d'operador o de raó.

Aquests resultats coincideixen amb els que presenten Olanoff et al. (2014) arran de la revisió que fan d'una quarantena d'estudis sobre els coneixements dels estudiants de mestre en el contingut de fraccions. Segons aquesta revisió, els estudiants de mestre es basen sobretot en la interpretació de fracció com a comparació part–tot i revelen problemes amb altres interpretacions, com ara la d'operador o la de mesura. En la recerca de Domoney (2002) es detecta també que la interpretació de fracció com a comparació part–tot en què es basen els estudiants de mestre domina sobre el significat de fracció com a nombre per si mateix. Aquesta interpretació és tan persistent que, després de fer un curs en què es va parlar de la fracció com a nombre, els estudiants continuaven fent referència a la fracció com a part o parts d'un tot, encara que també diguessin que és un nombre. De fet, en el nostre estudi, com en el de Domoney, hi ha cinc estudiants que diuen que la fracció és un nombre i també una part d'un tot.

D'acord amb el que s'ha exposat, es referma la idea de Lamon (2012) quan afirma que "malauradament, l'ensenyament de les fraccions s'ha centrat tradicionalment en una sola interpretació dels nombres racionals, la de comparació part–tot" (p. 32). El fet que més de la meitat dels estudiants s'hagin basat en aquesta interpretació significa que és la que tenen més present i, si bé, tal com argumenta Domoney (2002), no vol dir que no entenguin els constructes numèrics, sí que mostra una manca de flexibilitat entre els diferents significats de fracció. Fins i tot quan se'ls ha presentat una situació amb un grup d'objectes del qual calia trobar una fracció, els estudiants s'han basat, majoritàriament, en la interpretació com a comparació part–tot, deixant de banda altres interpretacions, com la d'operador, que també pot ser útil per resoldre la qüestió.

2) Tots els estudiants consideren que una unitat està dividida en parts iguals quan les parts són congruents (mateixa àrea i mateixa forma), però només la meitat dels estudiants considera que una unitat també pot estar dividida en parts iguals quan les parts tenen la mateixa àrea però no la mateixa forma.

Tots els estudiants han identificat la fracció 3/4 en una representació gràfica on la unitat és una regió dividida en parts congruents. La majoria d'estudiants també han vist correctament que un rectangle dividit en quatre parts d'àrees diferents no representa la fracció 3/4, ja que les parts no tenen la mateixa àrea. Per contra, gairebé la meitat d'estudiants han respost que un rectangle dividit en quatre parts amb tres d'ombrejades no representa la fracció 3/4 perquè les parts no tenen la mateixa forma, tot i tenir la mateixa àrea. Amb això, es detecta que, per a la meitat dels estudiants de mestre, una regió està dividida en parts iguals quan les parts tenen la mateixa forma i la mateixa àrea. En aquest sentit, considerem que la meitat dels estudiants de mestre tenen un coneixement limitat de què vol dir dividir en parts iguals una unitat, és a dir, del procés de realitzar una partició.

El procés de partició, precisament, és un concepte fonamental per entendre conceptes relacionats amb les fraccions (Lamon, 2012; Petit et al., 2010) i, tal com s'ha comentat en el marc teòric, són nombrosos els autors que expliquen aquest concepte i el seu paper en l'aprenentatge de continguts sobre fraccions (Carpenter et al., 1993; Feikes et al., 2009; Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Pothier i Sawada, 1983; Schwartz, 2008; Tipps, Johnson i Kennedy, 2011; Van de Walle et al., 2010). De fet, segons Carpenter et al. (1993), el procés de partició és un dels tres aspectes unificadors que permeten establir connexions entre les diferents interpretacions de fracció. En resum, la meitat dels estudiants tenen mancances a l'hora de comprendre què vol dir dividir una unitat en parts iguals i, considerant la importància d'aquest procés, tal com s'explica en les recerques esmentades, aquestes mancances poden contribuir a altres limitacions en els coneixements sobre els continguts de fraccions.

3) Els estudiants de mestre mostren dificultats per interpretar la unitat quan aquesta es pot referir a una regió o a més d'una.

En la situació en què els estudiants han d'interpretar el problema de repartir tres pizzes entre quatre persones, molts més dels que l'han interpretat correctament, han donat la solució considerant que la unitat és una sola pizza. En aquest cas, han dit que la solució és 1/4 de cada pizza. Els estudiants que han considerat la unitat com el grup de tres pizzes i han respost de manera correcta a la pregunta, han donat la solució de 1/4 de totes les pizzes. Tanmateix, un grup destacable d'estudiants (45,65 %) no ha sabut interpretar correctament la situació; la majoria dels estudiants que s'han equivocat han interpretat incorrectament les unitats. Així doncs, han donat com a solució 3/4 de tres pizzes, considerant que les tres pizzes eren la unitat. Si es calculen les 3/4 parts de les tres pizzes, s'obtenen dues pizzes i un quart, i aquest resultat no és la quarta part de les tres pizzes.

Els estudiants que s'han equivocat revelen no tenir prou coneixement sobre la unitat i com expressar el resultat d'un repartiment en funció de la unitat escollida. En aquest sentit, aquests estudiants tenen dificultats per entendre les diferències entre els termes "de cada", "d'una", "de totes" i "de les tres". Aquestes dificultats en relació amb el llenguatge per expressar les fraccions també es van detectar en un grup d'estudiants de mestre que participaven en una recerca de Tobias (2013). En l'estudi de Tobias, per millorar la comprensió del llenguatge utilitzat per definir la unitat, els estudiants van compartir tres idees que calia comprendre: les fraccions depenen d'un grup o d'un tot, la definició de "de què" i el desenvolupament del llenguatge en termes del que representa el denominador.

Els resultats de l'estudi de Montes et al. (2015), en què els estudiants de mestre han de dir quina part de rajola de xocolata ens hem menjat en una representació gràfica on hi ha dues rajoles representades i una part de les rajoles ombrejades (figura 3.42), són molt més negatius que els de la nostra recerca. Un 92 % dels estudiants s'equivoquen en contestar la pregunta, perquè no saben identificar la rajola com a unitat. Per resoldre aquesta pregunta, a més de comprendre el significat d'unitat, els estudiants també havien d'utilitzar continguts d'equivalència de fraccions.

El concepte d'unitat és un dels tres aspectes unificadors que Carpenter et al. (1993) presenten per entendre el significat de fracció, i és un concepte realment important, ja que el significat de fracció està relacionat amb el concepte d'unitat. Una fracció s'interpreta segons la unitat especificada (Petit et al., 2010). En aquesta recerca, però, gairebé la meitat dels estudiants ha presentat dificultats per expressar el resultat d'un repartiment de tres pizzes entre quatre persones i, en la majoria dels casos, s'ha degut a no comprendre bé els tres aspectes esmentats de la recerca de Tobias (2013).

4) Gairebé tots els estudiants de mestre saben que no es poden sumar fraccions si estan representades en unitats de diferent àrea.

Tots els estudiants, excepte un, han explicat per què no es pot sumar mitja pizza petita amb mitja pizza gran, tot i que alguns d'ells han comès errors a l'hora d'explicar per què no es pot fer aquesta suma. La majoria ha justificat que no es pot fer perquè la "mida" de les pizzes o la "mida" de les parts no són iguals. Amb això, mostren que tenen clar que no es poden sumar aquestes fraccions perquè les unitats són diferents. Aquests resultats concorden amb els de la recerca de Rosli et al. (2011), en què es va demanar a tres estudiants de mestre el resultat de sumar la quantitat de pizza que hem menjat si ens mengem dos vuitens d'una pizza petita i tres vuitens d'una pizza mitjana. Dos dels tres estudiants de mestre detectaven correctament que no es poden sumar aquestes fraccions i el tercer donava com a resultat la fracció 5/16. Poc després de donar el resultat es va adonar de l'error.

5) Bona part dels estudiants de mestre presenten dificultats per situar fraccions a la recta numèrica.

Un 43,48 % dels estudiants de mestre situen correctament la fracció 12/5 en una recta numèrica que té una longitud de 12 unitats i on només hi ha el 0, el 12 i una ratlleta que marca cada unitat. Els resultats encara són més negatius quan es demana de situar la fracció 9/24 en una recta on només hi ha senyalats els números 0 i 1/4 i cada ratlla marcada a la recta representa un vuitè de la unitat. En aquesta pregunta, només un 21,74 % ha sabut situar la fracció 9/24 a la recta; és a dir, la meitat dels estudiants que han col·locat correctament la fracció 12/5 a la recta numèrica de longitud 12 unitats.

En les respostes dels estudiants de les preguntes anteriors, s'ha detectat un error comú: interpretar la unitat incorrectament. En la recta de longitud 12, uns quants estudiants han pensat, per exemple, que on hi ha la primera marca de la recta numèrica és on es col·locaria 1/5 o fins i tot 1/12, considerant, en aquest cas, que on hi ha el 12 és la unitat. En la recta numèrica on es demanava de situar la fracció 9/24, també hi ha estudiants que han interpretat incorrectament la unitat.

Aquests resultats coincideixen amb els de la recerca de Domoney (2002), en què els estudiants també tenen dificultats per identificar què representa cada segment. De fet, segons Domoney, interpreten la recta numèrica com una unitat dividida en parts. Possiblement, el fet que la majoria d'estudiants de mestre no hagin considerat la fracció com un nombre fa que els costi més d'interpretar la unitat en la representació de la recta numèrica. Hi pot influenciar el fet que molts interpreten la fracció com a comparació part–tot, tal com s'ha vist a la conclusió 1. Si fos així, haurien interpretat un segment com una unitat i no com Wu (2009) defineix la unitat a la recta numèrica, com la longitud del segment [0,1]. A més de la dificultat per interpretar la unitat i situar una fracció a la recta numèrica, s'hi afegeix la dificultat que una de les fraccions que es demana situar és la fracció 12/5, que és més gran que una unitat.

6) La majoria d'estudiants ha sabut expressar amb una fracció una situació que feia referència a la fracció d'un nombre, però molts menys han interpretat amb una fracció una situació expressada com un percentatge, un nombre decimal o una raó.

En presentar diferents situacions als estudiants i demanar-los quines es podrien interpretar amb una fracció, s'ha observat que la majoria n'han sabut expressar algunes amb una fracció, per exemple, "tres quarts d'una hora" o "les 5/6 parts de 36 caramels". En canvi, altres situacions han suposat més dificultats per a alguns estudiants. És destacable que dotze estudiants hagin afirmat que el "25 %" no es pot representar amb una fracció, cosa que demostra una mancança en la relació entre percentatge i fracció.

Passa el mateix en la situació "he tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques": setze estudiants han respost que no es pot expressar com una fracció. La majoria d'estudiants que diuen que sí que es pot representar com una fracció donen fraccions com ara 6,7/10 i 67/100. Concretament, vint-i-un estudiants proposen una de les dues fraccions anteriors. Una possible explicació és que interpretin aquestes fraccions com la raó respecte al valor total de l'examen, és a dir, un 6,7 sobre 10 o un 67 sobre 100. En tot cas, és sorprenent que setze estudiants no sàpiguen relacionar el 6,7 amb la fracció 67/10.

Una altra situació en què una part considerable dels estudiants ha dit que no es pot representar amb una fracció, malgrat que sí que es pot, és "A la meva classe hi ha 13 nens i 12 nenes". Vint estudiants han contestat que aquesta situació no es pot representar amb una fracció. De tota manera, sí que una mica més de la meitat dels estudiants del grup ha sabut explicar la situació mitjançant la interpretació de fracció com a raó.

Algunes recerques sobre els coneixements dels estudiants de mestre en relació amb les fraccions revelen la dificultat dels estudiants per inventar una situació que representi una multiplicació o una divisió amb fraccions (Ball, 1990a, 1990b; Noh i Sabey, 2014; Luo, 2009), però a partir dels resultats anteriors, considerem que força estudiants també mostren dificultats per trobar la fracció que pot expressar una situació donada.

7) En la comparació de les fraccions 1/3 i 1/4 representades gràficament en unitats de diferent àrea, la majoria dels estudiants no ha tingut en compte aquestes representacions a l'hora de comparar-les.

Quan s'ha demanat de comparar la representació gràfica de la fracció 1/3 amb la representació gràfica de la fracció 1/4, representades en unitats de diferent àrea, bona part dels estudiants ha comparat les fraccions numèricament. En efecte, un 71,74 % dels estudiants afirma que la fracció més gran és 1/3, tot i que l'àrea que representa la fracció 1/4 en el rectangle és més gran que l'àrea de la fracció 1/3. Aquests estudiants no han tingut en compte que no es poden comparar fraccions numèricament si la unitat de referència no és la mateixa. Només set estudiants han contestat correctament a aquesta pregunta.

Aquests resultats no concorden amb els que s'han presentat a la conclusió 4, en què s'ha mostrat que la majoria dels estudiants ha justificat que no es pot sumar mitja pizza petita amb mitja pizza gran perquè les unitats són de diferent àrea. Possiblement, la formulació de la pregunta de la suma de les mitges pizzes ha ajudat a resoldre-la correctament, perquè en l'enunciat ja es diu que no es poden sumar.

8) Més de la meitat d'estudiants ha presentat dificultats per representar gràficament una fracció més gran que la unitat.

Més de la meitat dels estudiants ha revelat dificultats per representar gràficament una fracció més gran que la unitat. De fet, hi ha més estudiants que no contesten la pregunta (28,26 %) que no pas que s'equivoquen (23,91 %). Bona part dels que han plantejat una representació correcta s'han basat en la de comparació part–tot i, uns quants, en la interpretació com a mesura. El fet de tractar-se d'una fracció més gran que la unitat possiblement ha comportat més dificultats que si s'hagués demanat de representar una fracció més petita que la unitat, perquè han hagut de representar més d'una unitat i decidir en quantes parts dividir cada una. A més, s'hi suma la dificultat explicada per Lamon (2012): que la mateixa quantitat pot tenir un nom diferent en funció de la unitat escollida.

Aquestes dificultats s'han manifestat en els errors que han comès els estudiants que han elaborat una representació incorrecta de la fracció 12/5, és a dir, poc més de la quarta part dels estudiants del grup. Sis han representat cinc regions, amb la qual cosa confonien el 5 del denominador amb el nombre d'unitats. A més, alguns han dividit cadascuna d'aquestes unitats en tres parts, d'altres en cinc i també alguns en sis. A continuació han marcat 12 parts. Un altre estudiant ha representat la fracció 5/12 en lloc de la fracció 12/5, cosa que mostra no entendre les fraccions més grans que la unitat. Dos estudiants han utilitzat un model semblant a una recta numèrica però amb la interpretació de comparació part–tot: han ombrejat onze quadradets d'un rectangle on n'hi ha catorze, però hi han posat els nombres de l'1 al 15, com si es tractés d'una recta numèrica. Dos estudiants han comès un error greu en confondre el model d'àrea i el model de longitud: han representat en un cercle o un rectangle dividit en cinc parts iguals el número decimal 2,4, considerant que el 2 significa que s'agafen dues parts, mentre que el 0,4 l'han representat com un "trosset" d'una altra part.

Aquests resultats mostren que hi ha un grup considerable d'estudiants, concretament tretze, que no comprenen prou el significat d'unitat, el significat de les particions, el significat de les fraccions més grans que la unitat i, en general, el significat de les fraccions. Aquests resultats coincideixen amb els d'algunes recerques (Montes et al., 2015; Tobias, 2013) que revelen les dificultats dels estudiants en relació amb el significat d'unitat.

9) A l'hora d'identificar una fracció més gran que la unitat representada gràficament a partir d'un model d'àrea, hi ha molts més estudiants que consideren la unitat com un grup que els que consideren la unitat com una sola regió.

En presentar tres cercles dividits en meitats, amb dos cercles totalment ombrejats i la meitat del tercer també ombrejada, i demanar als estudiants quina fracció hi ha representada, s'obtenen respostes diferents. Aproximadament tres quartes parts dels estudiants han donat una fracció adequada que es pot representar amb la imatge presentada: 5/2 o 5/6. La fracció 5/6 és la que han donat més estudiants, la meitat del grup. En aquest cas, quan proposen aquesta fracció, la unitat són els tres cercles. Molts menys estudiants, per contra, han donat la fracció 5/2. En aquest cas, la unitat és un sol cercle. Aquests resultats no coincideixen amb els de la recerca de Tobias (2013) quan presenten als estudiants dos cercles dividits en quarts, on un cercle està totalment ombrejat i l'altre té les tres quartes parts pintades. Els estudiants de l'estudi de Tobias tenen més dificultats per identificar que la imatge pot representar la fracció 7/8, quan es consideren els dos cercles com a unitat, que no pas per identificar que la fracció pot ser 1 ¾ quan la unitat és un cercle.

El fet que els estudiants d'aquesta recerca hagin respost que la representació pot ser la fracció 5/6 no vol dir que tots tinguin clar que la unitat que es considera són els tres cercles. Possiblement, alguns han dit 5/6 perquè han vist que, de sis parts, n'hi ha cinc de pintades. De fet, alguns estudiants que han dit 5/6 no han sabut representar la fracció 12/5 considerant la unitat de forma adequada, tal com s'ha explicat a la conclusió anterior. Si haguéssim demanat que ens diguessin com s'interpretava la unitat en cada cas, els resultats segurament haurien sortit més semblants a la recerca de Tobias (2013).

10) Per explicar què són les fraccions equivalents i també per comprovar que dues fraccions són equivalents, els estudiants de mestre han utilitzat explicacions conceptuals, explicacions procedimentals i, en menor quantitat, representacions amb imatges.

Els estudiants de mestre d'aquesta recerca han emprat tres tipus diferents d'explicacions per expressar què significa que dues fraccions són equivalents i també per comprovar que dues fraccions són equivalents: explicacions conceptuals, explicacions procedimentals i representacions amb imatges. Les explicacions més habituals han estat les conceptuals i les procedimentals i, en menor mesura, la representació amb imatges. Alguns estudiants han combinat diferents tipus d'explicacions, mentre que d'altres només n'han donat d'un tipus.

Els percentatges entre els tipus d'explicacions varien segons si els estudiants expliquen què vol dir que dues fraccions són equivalents o bé si comproven que dues fraccions ho són. Quan expliquen què vol dir que dues fraccions són equivalents, ho fan de manera més conceptual (50 % del total) que procedimental (32,76 %). En canvi, quan comproven que dues fraccions són equivalents, hi ha més estudiants que ho fan a partir d'explicacions procedimentals (46,51 %) que de conceptuals (27,9 %).

Les explicacions conceptuals són més habituals en el cas d'explicar què vol dir que dues fraccions són equivalents perquè els estudiants, en aquesta categoria, comenten principalment que les dues fraccions representen el mateix nombre, cosa que coincideix amb la definició de fraccions equivalents que donen alguns autors (Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010), però quan han de comprovar que dues fraccions concretes (1/4 i 2/8) són equivalents, no utilitzen coneixements conceptuals, llevat d'un estudiant que divideix els numeradors entre els denominadors per comparar els nombres decimals. En canvi, sí que revelen més coneixements procedimentals per comprovar que dues fraccions concretes són equivalents. Aquests resultats coincideixen amb els d'altres recerques que analitzen els coneixements de comparació i equivalència de fraccions dels estudiants de mestre (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011) i que mostren un predomini de l'ús dels algoritmes procedimentals per trobar fraccions equivalents. No és estrany que els estudiants de les recerques esmentades i d'aquesta recerca mostrin un coneixement més procedimental per comprovar que dues fraccions són equivalents, ja que, tal com diuen Van de Walle et al. (2010), la comprensió de l'equivalència molt sovint es basa en un algoritme.

Pocs estudiants han donat explicacions basant-se en les representacions gràfiques de les fraccions per explicar-ne l'equivalència. Si no es demana de manera directa que representin les fraccions gràficament, els estudiants tenen més tendència a explicar l'equivalència de fraccions a partir d'explicacions conceptuals o procedimentals.

11) Els estudiants proposen dos algoritmes dins dels procediments de càlcul per comprovar que dues fraccions són equivalents i per definir l'equivalència de fraccions. La majoria dels estudiants proposa l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" i pocs expliquen l'algoritme de "multiplicar en creu".

Els estudiants que expliquen un procediment de càlcul per definir què vol dir l'equivalència de fraccions ho fan únicament a partir de l'algoritme "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre", mentre que els estudiants que expliquen un procediment de càlcul per comprovar que dues fraccions concretes són equivalents ho fan majoritàriament a partir de l'algoritme "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" i, en menys quantitat, a partir de l'algoritme de "multiplicar en creu". Aquests resultats mostren que l'algoritme "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" s'utilitza molt més que el de "multiplicar en creu", contràriament al que diuen Musser et al. (2011) quan argumenten que el procediment de "multiplicar en creu" és el que se sol fer servir a la majoria d'escoles. De fet, Musser et al. expliquen que l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" es pot deduir del procediment de "multiplicar en creu".

Malgrat que sembla indiferent basar-se en un algoritme o en l'altre, utilitzar l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" pot no ser gaire útil per comprovar l'equivalència d'algunes fraccions equivalents quan el numerador i el denominador d'una de les fraccions no és múltiple del numerador i del denominador de l'altra, com podria ser el cas de 4/6 i 6/9. En aquest sentit, en la recerca de Harvey (2012) també s'exposen algunes dificultats que es poden derivar de fer servir l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre", concretament quan els estudiants de mestre empren l'algoritme de trobar fraccions equivalents buscant el doble del numerador i del denominador de la fracció prèvia. Les dificultats poden augmentar quan busquin una fracció equivalent que es trobaria multiplicant per 3, o un altre nombre, el numerador i el denominador.

12) Alguns estudiants han comès errors en explicar l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" tant per comprovar que dues fraccions són equivalents com per definir l'equivalència de fraccions. També s'han equivocat en explicar l'algoritme de "multiplicar en creu" per definir l'equivalència de fraccions.

Nou estudiants s'han equivocat quan han volgut explicar l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre", ja que l'han explicat malament. Els estudiants han dit que dues fraccions són equivalents quan "si es multiplica o es divideix per un nombre una de les dues fraccions, s'obté l'altra". En realitat, volien dir "si es multiplica o es divideix el numerador i el denominador d'una fracció per un mateix nombre, s'obté l'altra fracció".

Aquest error és rellevant, ja que, tot i que entenem que volien dir una altra cosa, el que han dit és matemàticament diferent del que volien dir. Multiplicar per 2 la fracció 1/4 és molt diferent de multiplicar per 2 el numerador i el denominador de la fracció 1/4. De fet, quan es multiplica per 2 la fracció 1/4, no s'obté una fracció equivalent a 1/4. Aquesta equivocació implica una manca de coneixement del significat de fracció, a banda de mostrar poca habilitat per comunicar idees matemàtiques.

Un estudiant ha comès un error en aplicar l'algoritme de "multiplicar en creu": ha multiplicat els numeradors entre si i també els denominadors entre si, en comptes de multiplicar els numeradors pels denominadors. Aquest estudiant no ha sabut explicar el procediment. Dos estudiants més tampoc han sabut explicar correctament aquests procediments.

Aquests resultats revelen que, encara que els estudiants de mestre utilitzin procediments per comprovar si dues fraccions són equivalents, alguns d'ells no són capaços d'explicar-los correctament, cosa que mostra poca habilitat per comunicar aquestes idees matemàtiques.

13) En demanar als estudiants un exemple de fraccions equivalents, gairebé tots han proposat fraccions equivalents en què el numerador i el denominador d'una de les fraccions són múltiples del numerador i del denominador de l'altra fracció. Així mateix, la majoria dels estudiants han donat fraccions equivalents a la fracció irreductible 1/2.

Dels trenta-vuit estudiants que han donat un exemple correcte de fraccions equivalents, trenta-cinc han proposat fraccions equivalents en què el numerador i el denominador d'una de les fraccions és múltiple del numerador i del denominador de l'altra. Aquests resultats estan relacionats amb el fet d'utilitzar l'algoritme "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre", l'algoritme emprat majoritàriament pels estudiants per comprovar que dues fraccions són equivalents, tal com s'ha explicat a la conclusió 11 d'aquest mateix subapartat. A més, la majoria dels estudiants han trobat les fraccions equivalents buscant el doble del numerador i del denominador de la fracció prèvia. Aquests resultats coincideixen amb els de la recerca de Harvey (2012), en què diversos estudiants van fer servir aquest procediment de doblar el numerador i el denominador per trobar fraccions equivalents a una de donada.

Hi ha una altra coincidència rellevant en els exemples donats: gairebé tres quartes parts dels estudiants han proposat dues fraccions equivalents a la fracció 1/2, potser perquè és una fracció amb què estan més familiaritzats i de la qual han vist més exemples a l'hora d'aprendre continguts sobre fraccions. De fet, no només els estudiants de mestre posen exemples de fraccions equivalents a la fracció 1/2, sinó que també diversos autors proposen, entre d'altres exemples, fraccions equivalents a la fracció 1/2 (Musser et al., 2011; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010).

14) Gairebé tots els estudiants de mestre, quan representen amb imatges que dues fraccions són equivalents, es basen en la interpretació de fracció com a comparació part–tot, dibuixant un model d'àrea i prenent com a unitat una sola regió.

Gairebé tots els estudiants, en representar gràficament que les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents, s'han basat en la interpretació de fracció com a comparació part–tot i, dins d'aquesta interpretació, s'han basat en el model d'àrea i en la representació de la unitat com una sola regió. De fet, només un estudiant ha representat que les fraccions 4/8 i 6/12 són equivalents mitjançant la recta numèrica.

En representar majoritàriament aquestes fraccions segons la interpretació de comparació part–tot, es constata que aquesta interpretació és la més present a les aules de primària i secundària. Així mateix, Lamon (2012) argumenta que s'utilitza la paraula fracció per referir-se només a la interpretació de la fracció com a comparació part–tot. En aquest sentit, en l'estudi de Domoney (2002) es mostra que aquesta interpretació de comparació part–tot és la que domina entre els estudiants de mestre.

Per representar la fracció quan s'interpreta com a comparació part–tot, se solen utilitzar dos models, el d'àrea i el de grup (Feikes et al., 2009; Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010), i aquests dos models són els que proposen també alguns autors per representar l'equivalència de fraccions (Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010). Els estudiants d'aquesta recerca que han interpretat les fraccions com a comparació part–tot, però, s'han basat tots en el model d'àrea per representar que dues fraccions són equivalents. Possiblement els ha estat més fàcil utilitzar aquesta representació que no pas la del model de grup per la dificultat d'entendre el concepte *unitizing* i el fet que una unitat es pot referir tant a un sol objecte com a un grup d'objectes (Lamon, 2012). Així mateix, que els estudiants, en el model d'àrea, hagin considerat una regió com a unitat per representar cada fracció, pot tenir a veure amb la dificultat per definir fraccions quan la unitat són dues regions o més. Aquestes dificultats es detecten a l'estudi de Tobias (2013).

15) Els estudiants presenten menys dificultats en comparar fraccions amb els numeradors iguals que en comparar fraccions amb numeradors i denominadors diferents.

Una mica més de les tres quartes parts dels estudiants han donat respostes correctes a l'hora de comparar fraccions amb numeradors iguals (1/2 i 1/3), mentre que menys de la meitat han respost correctament en comparar fraccions amb denominadors diferents (5/7 i 7/9). En canvi, gairebé les tres quartes parts dels estudiants han contestat correctament a la pregunta de per què 4/5 és més gran que 2/3 en una pregunta tancada en què es donen diverses respostes possibles. La diferència de la quantitat de respostes correctes entre comparar fraccions amb numeradors iguals i comparar fraccions amb numeradors i denominadors diferents és força gran quan les preguntes són obertes i no es donen opcions. Per contra, no n'hi ha tanta quan es demana comparar fraccions amb numeradors iguals i fraccions amb numeradors i denominadors diferents en una pregunta tancada amb diferents possibilitats.

Aproximadament la meitat dels estudiants que no han sabut comparar les fraccions 5/7 i 7/9 s'han equivocat en el raonament utilitzat, mentre que l'altra meitat no ha contestat la pregunta. Aquests resultats mostren les dificultats de bona part dels estudiants per respondre aquesta pregunta. El fet que la quantitat d'estudiants que han comparat correctament les fraccions 5/7 i 7/9 no arribi al 50 % pot tenir més d'una causa. Per una banda, en l'enunciat de la pregunta es demanava que comparessin les fraccions 5/7 i 7/9 sense fer servir el mínim comú múltiple. Això fa que els estudiants que només sabessin aquest procediment per comparar fraccions amb denominadors diferents no puguin contestar. Per l'altra, força estudiants s'han equivocat en comparar numeradors i/o denominadors, cosa que posa de manifest que no saben prou bé que aquesta estratègia, tal com expliquen Whitacre i Nickerson (2011), només funciona quan es comparen fraccions amb els mateixos denominadors o els mateixos numeradors.

Precisament en la recerca de Whitacre i Nickerson (2011) hi destaca que els participants, abans de fer cap curs de matemàtiques, per comparar fraccions utilitzen estratègies de reduir a denominador comú i de comparar els numeradors i/o els denominadors. Aquests resultats reforcen les explicacions sobre els resultats de la nostra recerca, ja que justament els estudiants de mestre de la nostra investigació no han pogut reduir a denominador comú i han emprat, equivocadament, l'estratègia de comparar els numeradors i/o els denominadors en fraccions amb numeradors i denominadors diferents.

16) Els estudiants s'han basat principalment en tres estratègies per comparar fraccions: representar gràficament les fraccions, representar en nombres decimals les fraccions i comparar els numeradors i/o els denominadors de les fraccions.

En les dues preguntes obertes en què els estudiants han hagut de comparar les fraccions 1/2 i 1/3, fraccions amb els numeradors iguals, i les fraccions 5/7 i 7/9, fraccions amb numeradors i denominadors diferents, s'han utilitzat principalment tres estratègies:

representar gràficament les fraccions, representar les fraccions en nombres decimals i comparar els numeradors i/o els denominadors de les fraccions.

L'estratègia de comparar les fraccions 5/7 i 7/9 comparant els numeradors i/o els denominadors ha provocat que nou estudiants comparessin de manera incorrecta aquestes dues fraccions. De fet, tal com s'ha dit anteriorment, aquesta estratègia és la que també utilitzen els estudiants de la recerca de Whitacre i Nickerson (2011), juntament amb la de reduir a denominador comú, que en la nostra recerca, a l'hora de comparar fraccions amb numeradors i denominadors diferents, no s'ha emprat perquè s'ha demanat explícitament a l'enunciat de la pregunta. Però tampoc s'ha utilitzat gaire per comparar les fraccions 1/2 i 1/3: només dos estudiants l'han fet servir.

És rellevant que, malgrat que gairebé una tercera part dels estudiants que han respost correctament a la pregunta de comparar les fraccions 1/2 i 1/3 ho han fet comparant els denominadors, molt pocs han justificat l'explicació dient que quan el denominador és més gran, la fracció és més petita. De fet, la majoria ha donat aquesta explicació com una regla, cosa que pot explicar per què força estudiants l'han utilitzat erròniament quan les fraccions tenen numeradors i denominadors diferents; possiblement l'han aplicat com una regla, sense comprendre per què en uns casos funciona i en d'altres no.

És destacable que dotze estudiants hagin representat en nombres decimals les fraccions 5/7 i 7/9 per poder-les comparar i que set ho hagin dut a terme amb les fraccions 1/2 i 1/3. El fet d'utilitzar aquesta estratègia pot indicar que l'estudiant s'acosta més a comprendre la fracció com a nombre. En la recerca de Harvey (2012) els estudiants amb més coneixements matemàtics per ordenar fraccions convertien les fraccions a nombres decimals, tot i que no utilitzaven nombres de referència per ordenar-les. En la nostra recerca gairebé cap estudiant ha fet servir aquesta estratègia d'emprar nombres de referència. Aquests resultats també coincideixen amb els de diverses recerques (Harvey, 2012; Utley i Reeder; 2011; Whitacre i Nickerson, 2011) en què es mostra que es comprèn poc la idea de comparar fraccions a partir d'estratègies que requereixen més sentit numèric, com ara la dels nombres de referència.

17) Uns quants estudiants han comès errors en comparar fraccions, tant en el cas de fraccions amb numeradors iguals com en el de fraccions amb denominadors diferents. Els dos errors més freqüents han estat comparar les fraccions tenint en compte el nombre de parts en què s'ha dividit la unitat en comptes de la mida de les parts i comparar els numeradors i els denominadors quan les fraccions tenen numeradors i denominadors diferents.

Una quarta part dels estudiants que han respost la pregunta en què es demanava comparar les fraccions 5/7 i 7/9 han comès errors, mentre que, en la comparació de les fraccions 1/2 i 1/3, han fet errors una cinquena part dels estudiants.

L'error més freqüent ha estat utilitzar l'estratègia de comparar els numeradors i els denominadors en la comparació de les fraccions 5/7 i 7/9; concretament, nou estudiants han fet aquest error. El següent error més repetit ha estat considerar el nombre de les parts en què s'ha dividit la unitat en comptes de l'àrea de les parts. Aquest error s'ha comès tant comparant les fraccions 1/2 i 1/3 com comparant les fraccions 5/7 i 7/9.

En el cas de comparar les fraccions amb igual numerador, dos estudiants han considerat que 1/3 és més gran perquè la unitat està dividida en més parts i un ha explicat que 1/3 és més gran perquè, en les fraccions 4/8 i 4/12 (equivalents a 1/2 i 1/3), la fracció 4/12 indica que la unitat s'ha dividit en més parts. En canvi, per comparar fraccions amb numeradors i denominadors diferents, s'ha utilitzat el criteri que les fraccions 5/7 i 7/9 són iguals perquè totes dues indiquen que falten dues parts per tenir la unitat sencera. Aquest error coincideix amb el que fan la majoria d'estudiants de la recerca de Utley i Reeder (2011): quan, en dues fraccions, el numerador és un nombre menys que el denominador, consideren que les dues fraccions són iguals. Així mateix, un estudiant de la recerca de Harvey (2012) també comet un error similar, ja que decideix que la fracció més petita és aquella en què hi ha més diferència entre el numerador i el denominador.

Dos estudiants s'equivoquen quan diuen que la fracció 1/3 és més gran que la fracció 1/2. Un estudiant ho exposa com a fet conegut, mentre que l'altre, per justificar-ho, diu que la fracció 1/3 s'acosta més a la unitat. En la comparació de fraccions amb numeradors iguals, un estudiant no arriba al resultat correcte perquè representa gràficament les fraccions 1/2 i 1/3 però en unitats de diferent àrea. Aquesta resolució revela entendre poc el concepte d'unitat i la comparació de fraccions utilitzant representacions gràfiques. En la mateixa recerca de Harvey (2012) es mostra que alguns estudiants van tenir dificultats per comparar fraccions a partir de dibuixos.

Un estudiant, quan compara les fraccions 5/7 i 7/9, duu a terme un procediment de càlcul incorrecte: multiplica el numerador i el denominador de cada fracció per un mateix nombre. Possiblement es confon amb el procediment de trobar fraccions equivalents multiplicant el numerador i el denominador pel mateix nombre.

Tres estudiants cometen errors matemàtics que no són del contingut de fraccions. Un confon el símbol " < " (més petit que), un altre obté com a resultat de la fracció 1/3 el número 0,3 en comptes del $0,\hat{3}$ i l'altre es refereix al denominador com a dividend.

Aquests estudiants mostren tenir poca comprensió d'alguns aspectes dels continguts de fracció, com ara el significat de fracció, les nocions d'unitat i de partició, la representació gràfica de fraccions, la relació entre el nombre de parts en què s'ha dividit una unitat i l'àrea d'aquestes parts i, per tant, també la comparació de fraccions.

18) Menys de la meitat dels estudiants ha sabut donar una estimació correcta d'una suma de fraccions.

Més de la meitat dels estudiants d'aquesta recerca ha mostrat tenir dificultats en el procés d'estimació d'una suma de fraccions. De fet, molts d'aquests estudiants no han donat cap resposta quan se'ls ha demanat quina és l'estimació de la suma 12/13 + 7/8, tot i haver-hi quatre opcions de resposta a l'enunciat: 1, 2, 19 i 21, mentre que uns pocs han donat un resultat equivocat, triant una de les tres opcions incorrectes.

Aquests resultats no estan tan allunyats dels que es van obtenir a les proves NAEP, en què un 55 % dels estudiants de 13 anys es van equivocar marcant l'opció de 19 o 21 (Feikes et al., 2009; p. 107). En la nostra recerca només un estudiant ha escollit el 19 com a solució de l'estimació de la suma i un altre ha optat pel 21, però, encara que en els resultats de les proves NAEP fossin més els estudiants que contestessin aquestes dues opcions, els resultats mostren igualment que un grup nombrós d'estudiants de mestre de la nostra recerca no ha contestat correctament la pregunta, cosa que revela que no tenen assolits els continguts relacionats amb l'estimació de fraccions. Amb això, es detecta que aquests estudiants no tenen assolit un contingut del currículum de primària (Generalitat de Catalunya, 2007) que és molt important en el bloc de continguts de càlcul (Musser et al., 2011).

19) Els estudiants mostren molt més coneixement a l'hora de sumar fraccions amb denominadors diferents que a l'hora de fer estimacions de sumes amb fraccions amb denominadors diferents.

A la conclusió anterior s'ha explicat que més de la meitat d'estudiants no han contestat correctament la pregunta en què es demanava fer una estimació de la suma de fraccions 12/13 + 7/8; concretament, un 43,48 % d'estudiants no ha contestat la pregunta i un 8,69 % ha triat una resposta equivocada; per tant, un 47,82 % ha escollit l'opció correcta. Per contra, un 86,96 % dels estudiants ha contestat correctament la pregunta en què havien de sumar les fraccions 1/3 + 2/5.

Aquests resultats mostren que els estudiants tenen més habilitat per sumar fraccions amb diferent denominador que no pas per donar una estimació d'una suma de fraccions també amb denominadors diferents, i concorden amb els resultats d'altres recerques en què s'evidencia que els estudiants de mestre tenen poc coneixement conceptual i més domini en els procediments (Lin, 2010; Lin et al., 2013; Newton, 2008). En efecte, per resoldre la suma de fraccions 1/3 + 2/5, la majoria dels estudiants ha utilitzat el mínim comú múltiple i, per tant, un procediment de càlcul. En canvi, fer l'estimació requereix altres continguts conceptuals, com ara raonar que 12/13 s'aproxima a 1, 7/8 també i, en conseqüència, la suma s'aproxima a 2.

20) La majoria dels estudiants domina els procediments de càlcul a l'hora de sumar, restar, multiplicar i dividir fraccions.

Els estudiants de mestre revelen tenir un bon domini dels algoritmes per calcular sumes, restes, multiplicacions i divisions de fraccions. Cada un dels càlculs amb fraccions següents, 1/3 + 2/5, 4/5 – 1/3 – 1/15, 2/5 x 3/4 i 4/5 ÷ 2/3, ha estat realitzat correctament per més d'un 82 % dels estudiants. La multiplicació és l'operació amb més èxit, amb un 89,13 % dels estudiants. A continuació, la suma i la resta, amb un 86,96 %, i finalment, la divisió, amb un 82,61 % de resultats correctes.

Aquests resultats coincideixen amb els de les recerques en què es mostra un domini procedimental de les operacions (Ball, 1990a, 1990b; Ho i Lai, 2012; Kajander i Holm, 2011; Li i Smith, 2007; Li i Kulm, 2008; McAllister i Beaver, 2012), però no coincideixen del tot amb els resultats de la recerca de Newton (2008). En el treball de Newton també es detecta que els estudiants tenen més domini procedimental que conceptual, però hi ha més estudiants que resolen correctament les sumes i les restes de fraccions que estudiants que resolen bé les multiplicacions i les divisions de fraccions. En la nostra recerca, en canvi, l'operació amb més respostes correctes és la multiplicació. De fet, en la recerca de Newton uns quants estudiants cometen l'error de deixar el mateix denominador quan multipliquen fraccions, confonent-se amb l'algoritme de la suma, però en la multiplicació que s'ha proposat en aquesta recerca les fraccions tenen els denominadors diferents, la qual cosa no condueix a cometre l'error esmentat.

Si es té en compte quants estudiants s'han equivocat en les operacions, la suma és l'operació en què més estudiants han fet errors; en concret, cinc estudiants han arribat a un resultat erroni, mentre que en les altres operacions només s'han equivocat un o dos estudiants. En canvi, en les operacions de resta, multiplicació i divisió hi ha entre quatre i sis estudiants que no les han contestat, i només un estudiant ha deixat per contestar la suma 1/3 + 2/5.

Encara que molt pocs estudiants s'han equivocat en resoldre aquestes operacions, ho considerem un fet preocupant, ja que aquests estudiants mostren molt poc coneixement de les operacions de fraccions.

21) Els estudiants de mestre presenten dificultats per representar gràficament el procés de les sumes i les multiplicacions de fraccions. Molt pocs estudiants han representat gràficament una suma de fraccions i cap ha representat gràficament una multiplicació de fraccions.

Els estudiants de mestre, tot i saber calcular una suma i una multiplicació de fraccions de manera procedimental, tal com s'ha explicat a la conclusió anterior, han mostrat dificultats per representar gràficament el procés que se segueix en aquestes operacions. Només dos estudiants han representat gràficament tots els passos de la suma 1/3 + 2/5, mentre que cap ha sabut representar gràficament la multiplicació 2/5 x 3/4. En l'operació de la suma, bona part dels estudiants han fet representacions gràfiques amb la intenció de representar la suma, però, excepte dos, només han representat les fraccions 1/3, 2/5 i el resultat final, 11/15. En el cas de la multiplicació, només dos estudiants han representat les fraccions inicials, 2/5 i 3/4 i també el resultat final, 3/10; la resta d'estudiants que han fet representacions gràfiques només han representat el resultat final.

En la recerca de Caglayan i Olive (2011), es mostra que els estudiants de mestre tenen dificultats per representar la idea de denominador comú quan representen sumes gràficament, de la mateixa manera que els estudiants d'aquesta recerca. A més, també coincidim amb la de Caglayan i Olive en el fet que els estudiants dominen els procediments estàndard de les operacions de suma i multiplicació, però mostren mancances en la interpretació del procés de la multiplicació i la suma de fraccions a partir de dibuixos.

Amb aquests resultats, constatem que els estudiants d'aquesta recerca no tenen coneixements de com representar la multiplicació de fraccions a partir de diferents interpretacions, com les que s'han presentat a l'apartat 3.3.7.4 d'aquest treball, ni de com representar sumes de fraccions a partir de les representacions explicades a l'apartat 3.3.7.2.

22) Força estudiants no tenen prou coneixement de la prioritat de les operacions. Aquest fet provoca que s'equivoquin en resoldre càlculs en què s'ha de tenir en compte la prioritat de les operacions.

A la conclusió 20 s'ha explicat que els estudiants de mestre dominen el procés de resoldre sumes, restes, multiplicacions i divisions amb fraccions, però, en canvi, no ho demostren quan fan càlculs amb fraccions i han de tenir en compte la jerarquia de les operacions. Aquest fet l'hem constatat en analitzar les respostes de la pregunta en què es demanava calcular 3/5 + 3/10 x 4/15. Contràriament als resultats presentats a la conclusió 20, només tretze estudiants (un 28,26 %) han calculat correctament aquestes operacions. Un nombre elevat d'estudiants, disset (36,96 %), no ha contestat la pregunta i la resta, setze estudiants (34,79 %), ha donat un resultat incorrecte, principalment per no tenir en compte la jerarquia de les operacions.

Altres recerques també conclouen que els estudiants de mestre tenen mancances en relació amb la jerarquia de les operacions, com la de Montes et al. (2015), en la qual un 75 % s'equivoca en contestar una pregunta que cal respondre tenint en compte la prioritat de les operacions. Aquest percentatge no s'allunya gaire del que s'ha obtingut en la nostra recerca, en què un 71,75 % dels estudiants no ha donat la solució correcta, sigui perquè s'han equivocat en el resultat o perquè no han contestat la pregunta. És rellevant el fet que aquesta pregunta, que forma part de les proves TIMSS, als Estats Units, la van respondre correctament un 36 % dels estudiants de grau 8; és a dir, hi ha més alumnes de secundària que la van saber respondre que estudiants de mestre. Estem d'acord, per tant, que la jerarquia de les operacions és una de les debilitats destacables dels estudiants de mestre, tal com afirmen Montes et al. (2015).

23) Els estudiants han comès un seguit d'errors que s'han anat repetint en algunes de les preguntes d'operacions amb fraccions, alguns relacionats amb les fraccions i d'altres no. En la pregunta d'estimació d'una suma i en la de suma de fraccions, és on s'ha detectat més diversitat d'errors.

En les preguntes sobre les operacions de fraccions s'han detectat tant errors relacionats amb els continguts de fraccions com altres errors matemàtics que no són pròpiament de fraccions, tot i que hi poden tenir relació, com ara interpretar el símbol “ < ” de manera errònia, errors en multiplicar 13 x 7, errors en calcular el mínim comú múltiple, no saber descompondre el 13 per després buscar el mínim comú múltiple, escriure igualtats incorrectament, no saber generalitzar en resoldre un problema amb infinites solucions i no comprendre l'enunciat d'un problema. Encara que hi ha molts errors diversos, cadascun d'aquests l'han comès tan sols un o dos estudiants.

Respecte als errors relacionats amb les fraccions, també n'hi ha de diferent tipologia. Uns quants estudiants han fet errors relacionats amb els algoritmes de les operacions. En el cas de la suma, tres estudiants han sumat 1/3 + 2/5 sumant els numeradors i sumant els denominadors. En el treball de Newton (2008) hi ha estudiants que també han comès aquest error. En la multiplicació, un estudiant ha multiplicat en creu en comptes de multiplicar els numeradors i els denominadors, un error que, tal com s'ha explicat de la suma, també es detecta a la recerca de Newton. En la divisió, un estudiant ha multiplicat els numeradors i els denominadors en comptes de multiplicar en creu o d'invertir i multiplicar. Aquest error en relació amb la divisió de fraccions també es detecta a la recerca de Isik i Kar (2012).

Un altre tipus d'error és el que han comès set estudiants en situar nombres a la recta numèrica. Aquests estudiants no han sabut especificar què representa la unitat en la recta, una dificultat que també s'evidencia en la recerca de Domoney (2002). Relacionat amb les representacions gràfiques, hi ha un estudiant que representa les fraccions 12/13 i 7/8 i argumenta que, com que només falta una part per tenir la unitat, les fraccions 12/13 i 7/8 són iguals. Aquest error, com hem dit anteriorment, també s'ha fet en les preguntes de comparar fraccions, i, tal com s'ha explicat a la conclusió 17, coincideix amb els errors que s'observen a les recerques de Harvey (2012) i Utley i Reeder (2011). En aquesta mateixa pregunta en què es demanava l'estimació de la suma 12/13 + 7/8, un estudiant ha confós la quantitat de les parts en què s'ha dividit la unitat amb la unitat. Considerem greu l'error de dir que 12/13 s'acosta a 13 i 7/8 s'acosta a 8, ja que mostra que no es comprèn prou el significat de fracció.

24) Gairebé tots els estudiants de mestre presenten mancances en relació amb la infinitud dels nombres racionals.

En preguntar als estudiants quina fracció és la més gran que coneixen, només sis diuen que aquesta fracció no existeix. Aquest resultat és el que considerem correcte. Això vol dir que hi ha quaranta estudiants (86,86 %) que no han sabut respondre correctament la pregunta. Així i tot, n'hi ha dotze que donen com a fracció més gran ∞/1, i un que dóna + ∞, respostes que s'acosten a la idea que no hi ha una fracció més gran que totes. Cal destacar, doncs, que hi ha més d'un 40 % d'estudiants que han donat respostes incorrectes. N'hi ha vuit que diuen que la fracció més gran és 1/2, 3/4, 1/0 i 1/1, vuit més donen el resultat 1/∞ o ∞/∞, i fins i tot dos estudiants fan referència als numeradors i denominadors per trobar la fracció més gran. També es considera greu la resposta de l'estudiant que, a més de donar la fracció 1/1, afegeix que "quan el denominador i el numerador són iguals". Amb aquesta resposta es detecta que, a més d'entendre poc el significat de l'infinit, es comprèn molt poc el significat de les fraccions.

Aquests resultats no s'allunyen gaire dels de la recerca de Pehkonen et al. (2006). El percentatge d'estudiants de mestre que afirmen que la fracció més gran no existeix és molt semblant al percentatge d'alumnes de grau 7 (de 13 a 14 anys) que contesten que no existeix el nombre més gran. La diferència principal entre els resultats del treball de Pehkonen i els de la nostra recerca és que hi ha més alumnes de grau 5 (d'11 a 12 anys) i grau 7 que donen la resposta de nombres finits que no estudiants de mestre, i que, contràriament, hi ha menys respostes relacionades amb ∞ entre els alumnes de grau 5 i grau 7 que entre els estudiants de mestre. En tot cas, els estudiants de mestre de la nostra recerca no demostren que comprenguin molt millor el significat de l'infinit que els alumnes de grau 5 i 7.

Els resultats de la pregunta sobre quina és la fracció més petita segons els estudiants de mestre no són millors que els resultats relacionats amb la fracció més gran. De fet, només hi ha tres estudiants que afirmen que aquesta fracció no existeix. Com en el cas de la fracció més gran, hi ha estudiants que anomenen fraccions amb l'infinit en el numerador i/o el denominador, però alguns d'ells afegeixen el signe negatiu al davant; també n'hi ha que donen respostes concretes, com ara 1/1, a/a, 0/0, 0/1, 1, ¼, ½, -1/0, o que afirmen que la fracció més petita depèn del numerador i del denominador. El que varia entre les respostes de la fracció més gran i la més petita és que, en la pregunta de la fracció més petita, hi ha més estudiants que donen resultats concrets i menys que proposen fraccions amb la presència de l'∞.

Aquests resultats no només presenten semblances amb els de Pehkonen et al. (2006), sinó que també coincideixen en part amb les respostes que donen alumnes de quart d'educació primària quan se'ls demana que diguin la fracció més gran i més petita que coneixen, tal com s'explica a Feikes et al. (2009). Alguns estudiants de quart d'educació primària van respondre que la fracció més gran era 1/2, 1/1, 12/12, 99/100, 100/100, 999.999.999/999.999.999 i, la fracció més petita, 1/2, 1/1, 0/0, 3/4. D'altres van dir que la més petita era 1/1 i, la més gran, 100/100. Un va contestar que 1/2 era la més gran i 3/4 la més petita. Com veiem, algunes d'aquestes fraccions que van donar alumnes de quart d'educació primària també les han donat els estudiants de mestre de la nostra recerca.

Tenint en compte aquests resultats, considerem que els estudiants de mestre d'aquest estudi presenten molt poca comprensió del significat d'infinit i, en concret, de la infinitud dels nombres racionals, ja que molt pocs han afirmat que no existeix la fracció més petita ni la fracció més gran, i fins i tot uns quants han dit fraccions com 1/2 i 3/4 .

25) Molts estudiants de mestre presenten mancances en relació amb la densitat dels nombres racionals.

Aproximadament un 70 % dels estudiants revelen dificultats per explicar quantes fraccions hi ha entre 2/5 i 4/5 i prop del 80 % en tenen per explicar com trobar una fracció entre 1/8 i 1/7. A més, molts estudiants han deixat sense contestar totes dues preguntes; gairebé la meitat no ha contestat la pregunta en què cal trobar una fracció entre 1/8 i 1/7 i una mica més d'una quarta part no ha respost la pregunta en què es demana quantes fraccions hi ha entre 2/5 i 4/5. Només tretze estudiants diuen que hi ha infinites fraccions entre 2/5 i 4/5 i tan sols un dóna una fracció correcta entre 1/8 i 1/7, la fracció 15/112.

Un grup considerable d'estudiants (34,78 %) ha afirmat que, entre les fraccions 2/5 i 4/5, hi ha un nombre finit de fraccions. D'aquest grup, la majoria diuen que només hi ha la fracció 3/5, un altre respon que hi ha 36 fraccions i encara un altre que n'hi ha 4 en considerar els decimals de 0,4 a 0,8. En intentar donar una fracció entre 1/8 i 1/7, també hi ha uns quants estudiants que diuen que hi ha un nombre finit de fraccions entre aquestes dues. Un diu que n'hi ha 18, un altre que hi ha les fraccions 2/7, 3/7, ... , 9/7, i fins i tot que hi ha la fracció 1'1/7. També hi ha un estudiant que afirma que entre 1/8 i 1/7 no hi ha cap fracció.

Amb aquests resultats, es detecta que molts estudiants de mestre d'aquesta recerca tenen molt poca comprensió de la densitat dels nombres racionals, ja no només perquè molts d'ells han deixat sense contestar aquestes preguntes, sinó pel tipus de respostes equivocades que donen. Tot i que el percentatge d'estudiants de mestre que afirmen que entre dues fraccions hi ha infinites fraccions és una mica més elevat que el percentatge dels alumnes de grau 5 i grau 7 de la recerca de Pehkonen et al. (2006) que diuen que entre els nombres 0,8 i 1,1 hi ha infinites fraccions, els resultats no són gaire millors.

En resum, amb aquests resultats constatem que el contingut de la densitat dels nombres decimals és un contingut no assolit pels estudiants de mestre i que la comprensió que en tenen no és gaire més gran que la que mostren alguns alumnes de primària o secundària.

8.1.2 Conclusions respecte als coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de les fraccions

El segon objectiu específic d'aquesta tesi és:

Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre l'ensenyament de les fraccions.

Aquesta recerca ens ha permès de determinar un conjunt de conclusions que fan referència a diferents aspectes del coneixement sobre l'ensenyament de fraccions que tenen els estudiants de mestre. Algunes conclusions són més generals i inclouen aspectes de l'ensenyament de tots els continguts de fraccions tractats en aquest treball, mentre que d'altres abasten un sol contingut. Concretament, s'han extret conclusions sobre:

<u>La tria dels continguts</u>

- La tria dels continguts de fraccions en les explicacions teòriques i els exemples de la seqüència d'activitats (conclusió 1).

<u>Les explicacions teòriques i els exemples</u>

- Les explicacions i els exemples en les propostes per ensenyar l'equivalència de fraccions (conclusió 2), la comparació de fraccions (conclusió 3), la suma i la resta de fraccions (conclusió 4) i la multiplicació i la divisió de fraccions (conclusió 5).
- Les explicacions i els exemples en les propostes per ensenyar els diferents continguts de fraccions (conclusions 6 i 7).
- Els errors en les explicacions i els exemples en les propostes per ensenyar els diferents continguts de fraccions (conclusió 8).

<u>La interpretació de fracció en les explicacions teòriques i els exemples</u>

- Les interpretacions de fracció en les explicacions i els exemples per ensenyar el significat de fracció (conclusió 9).
- Les interpretacions de fracció en les explicacions teòriques i els exemples en les propostes per ensenyar els diferents continguts de fraccions (conclusió 10).

<u>Les representacions dels exemples en les explicacions teòriques</u>

- La tipologia de les representacions dels exemples en les propostes per ensenyar els diferents continguts de fraccions (conclusió 11).
- La representació gràfica del procés d'operar amb fraccions en les explicacions teòriques i els exemples per ensenyar les operacions de fraccions (conclusió 12).

<u>Les representacions gràfiques i els models utilitzats en totes les activitats de la seqüència</u>

- La tipologia dels models utilitzats en les representacions gràfiques de tota la seqüència (conclusió 13).
- Les característiques dels models d'àrea donats en tota la seqüència (conclusió 14).
- La comparació amb la unitat de les fraccions representades gràficament a la seqüència (conclusió 15).
- Els errors relacionats amb les representacions gràfiques de la seqüència (conclusió 16).

A continuació s'exposa cadascuna de les conclusions explicada amb detall.

1) La dificultat dels continguts de fraccions és un aspecte que condiciona la tria dels continguts presentats a la seqüència. Les explicacions teòriques presents en les seqüències s'han centrat, principalment, en l'objectiu d'ensenyar el significat de fracció i també en la suma i la resta de fraccions. Molt poques explicacions, en canvi, s'han proposat per ensenyar l'equivalència, la comparació de fraccions i la multiplicació i la divisió de fraccions.

Els estudiants de mestre participants en aquesta recerca podien escollir el contingut, dins de l'àmbit de les fraccions, sobre el qual volien plantejar activitats per ensenyar-lo a alumnes de primària. Els continguts dels quals han donat més explicacions i exemples en les activitats han estat el significat de fracció, la suma de fraccions i la resta de fraccions. Els continguts que menys apareixen en les explicacions i els exemples són els de comparació, equivalència i multiplicació i divisió de fraccions. És destacable que cap estudiant hagi plantejat activitats per ensenyar la densitat dels nombres racionals i, en conseqüència, tampoc n'hi ha cap que hagi donat explicacions ni exemples per ensenyar aquestes propietats.

El fet que més de les tres quartes parts dels estudiants hagin donat explicacions i exemples per definir què és una fracció, que molts menys n'hagin donat per ensenyar la comparació, l'equivalència, la multiplicació o la divisió de fraccions i cap per ensenyar la densitat dels nombres racionals, té diverses explicacions. Per una banda, possiblement els estudiants estan condicionats pels records que tenen de com van aprendre fraccions en la seva etapa d'alumnes d'educació primària i d'educació secundària. I, per l'altra, també pot haver condicionat la tria el coneixement que tenen sobre els continguts de fraccions.

Grossman (1990) caracteritza les fonts a partir de les quals els mestres construeixen coneixement didàctic del contingut: aprenentatge de l'observació (experiència com a alumnes), antecedents sobre la disciplina, cursos professionals i aprenentatge de l'experiència com a mestres. D'acord amb Grossman, els estudiants de la nostra recerca només s'han pogut basar en dues de les fonts esmentades: l'aprenentatge de l'observació i els antecedents sobre la disciplina, ja que en el moment d'elaborar la seqüència no havien fet cursos de didàctica de les matemàtiques ni tenien experiència a l'aula com a mestres. A més, Grossman apunta que el coneixement de la disciplina és un aspecte que condiciona la decisió de quins són els continguts importants i com seqüenciar-los. Possiblement, els estudiants també han consultat el currículum d'educació primària o altres materials curriculars per triar els continguts.

Considerant el coneixement de la disciplina, la dificultat dels continguts pot haver-ne condicionat la tria per part dels estudiants de mestre. Per exemple, la multiplicació i la divisió de fraccions és un dels conceptes més complicats d'entendre pels alumnes d'educació primària (Ma, 1999; Petit et al., 2010; Tirosh, 2000), i en les activitats de la seqüència hi ha una diferència considerable entre la quantitat d'estudiants de la present recerca que plantegen la suma i la resta de fraccions i la quantitat d'estudiants que proposen la multiplicació i la divisió de fraccions. Aquest resultat concorda amb els dels articles revisats sobre els coneixements dels mestres de les operacions amb fraccions, que exposen que els estudiants de mestre revelen més dificultats en les operacions de multiplicació i divisió que en les de suma i resta (Caglayan i Olive, 2011; Lin et al., 2013; McAllister i Beaver, 2012; Newton, 2008).

Remarquem que, en el contingut de les sumes i les restes, també hi ha diferència en la quantitat d'estudiants que han plantejat explicacions i exemples per ensenyar la suma i la resta de fraccions amb denominadors iguals o sumes i restes de fraccions amb denominadors diferents. Tots els estudiants dels quinze que han donat explicacions per ensenyar la suma de fraccions, excepte un, ho han fet considerant la suma de fraccions amb igual denominador, mentre que només tres estudiants expliquen les sumes amb denominadors diferents. Passa el mateix amb les restes: tots els estudiants dels dotze que proposen ensenyar a restar expliquen la resta de fraccions amb denominadors iguals, mentre que només dos ho fan amb restes amb denominadors diferents. Aquests resultats indiquen que, possiblement, molts menys estudiants plantegen la suma i la resta de fraccions amb denominadors diferents que els que plantegen la suma i la resta amb denominadors iguals perquè sumar i restar fraccions amb denominadors diferents és un contingut més difícil, per al qual cal tenir coneixements d'equivalència de fraccions (Schwartz, 2008; Van de Walle et al., 2010).

Pel que fa a la densitat dels nombres racionals, els estudiants no han plantejat cap activitat per ensenyar aquest contingut i, com en la multiplicació i la divisió de fraccions, hi ha recerques que n'exposen la dificultat (Feikes et al., 2009; Pehkonen et al., 2006). La propietat que assenyala que entre dues fraccions sempre n'hi ha una altra és un concepte del qual normalment a primària no es parla (Feikes et al., 2009). Segurament els estudiants de la nostra recerca no han considerat aquests continguts en les seqüències perquè no recorden haver-los après a l'escola i perquè fer propostes d'ensenyament sobre la densitat de fraccions comporta certa dificultat, sobretot tenint en compte la manca de coneixement sobre aquest contingut que han mostrat els estudiants de mestre en les respostes del qüestionari.

El significat de fracció, tot i que és un contingut complex que comporta relacionar diferents interpretacions així com diverses representacions (Lamon, 2012; Petit et al, 2010), és un dels que més han proposat els estudiants de mestre en la seqüència. La majoria dels estudiants que han donat explicacions en la seqüència han comentat què és una fracció. Això es pot deure al fet que la majoria han partit d'una sola interpretació de fracció, la comparació part–tot, que segurament no consideren que tingui gaire dificultat i molt probablement és la que tenen més present de la seva escolarització. Independentment de la dificultat del concepte de fracció, sembla plausible que, si s'ensenyen continguts de fraccions, els estudiants intueixin que, primerament, cal ensenyar què és una fracció. Tant si han escollit explicar el significat de fracció per la seva experiència com a alumnes com si l'han triat per la poca dificultat que té (des del seu punt de vista), els estudiants de mestre van encaminats en la línia del que Wu (2009) proposa: "Per aprendre fraccions, els alumnes necessiten saber què és una fracció" (p. 8).

Pocs estudiants han plantejat activitats amb explicacions sobre la comparació i equivalència, tot i que aquests continguts són fonamentals i molt importants per entendre altres continguts de fraccions (Post et al., 1993). El fet que només un 25 % dels estudiants que han donat explicacions ho hagin fet per ensenyar la comparació i només un 18,75 % n'hagin donat per ensenyar l'equivalència també pot tenir a veure amb la dificultat d'aquests continguts. De fet, hi ha recerques que mostren el poc sentit numèric dels estudiants de mestre en la comparació de fraccions (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011) i els errors que fan alguns en relació amb aquest contingut (Harvey, 2012; Utley i Reeder, 2011). Com en la suma i la resta de fraccions, tots els estudiants que volen ensenyar la comparació de fraccions donen explicacions per comparar fraccions amb denominadors iguals, mentre que molt pocs proposen ensenyar la comparació de fraccions amb denominadors diferents.

2) Les explicacions dels estudiants de mestre per ensenyar l'equivalència de fraccions es recolzen de manera predominant en procediments de càlcul.

L'equivalència de fraccions és un concepte molt important (Feikes et al., 2009) i fonamental per entendre el concepte de fracció i les operacions de fraccions i decimals (Post et al., 1993) i es pot ensenyar de manera conceptual o procedimental, tot i que a l'escola la comprensió d'aquest concepte es basa en l'algoritme (Van de Walle et al., 2010).

Tots els estudiants del nostre estudi prioritzen els procediments de càlcul en detriment dels conceptuals quan expliquen aquest concepte, ja que tots sis estudiants que proposen aquest tema expliquen un procediment de càlcul. La meitat d'aquests estudiants, a més, no fa cap altre tipus d'explicació. Dos complementen el procediment de càlcul amb una explicació conceptual i un tercer ho fa a partir d'un dibuix.

Els estudiants de la recerca, tal com s'ha explicat anteriorment, no havien fet encara cap sessió de didàctica de la matemàtica en els estudis de magisteri. Això vol dir que les idees que mostren en relació amb l'ensenyament de l'equivalència de fraccions, les han adquirit a partir de les seves experiències a l'etapa d'educació primària, secundària i batxillerat els que l'han cursat. La manera com haurien après aquest contingut coincideix amb el que diu Van de Walle et al. (2010) de com se sol ensenyar l'equivalència a l'escola, a partir d'un algoritme.

Els procediments que els estudiants de mestre proposen en les explicacions per ensenyar l'equivalència de fraccions són "multiplicar en creu" i "multiplicar o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre". Fins i tot hi ha un estudiant que explica els dos procediments per comprovar que dues fraccions són equivalents. Aquests algoritmes s'ensenyen a l'escola quan s'explica l'equivalència de fraccions (Musser et al., 2011; Van de Walle et al., 2010). Sembla, doncs, que proposen ensenyar-ho tal com ho van aprendre ells durant la seva escolarització. L'experiència com a alumne és una de les fonts a partir de les quals Grossman (1990) estableix que els mestres construeixen el coneixement didàctic del contingut. Encara que els estudiants de la nostra recerca no són mestres, també utilitzen aquesta font, i també poden haver consultat materials curriculars per prendre idees de com fer propostes sobre l'equivalència de fraccions. Shulman (1987) també considera els materials curriculars com una font per a la construcció del coneixement didàctic del contingut.

3) Les explicacions dels estudiants de mestre per ensenyar la comparació de fraccions es basen en regles quan proposen comparar fraccions amb denominadors o numeradors iguals o comparar fraccions amb la unitat i en procediments de càlcul quan comparen fraccions amb denominadors diferents.

Els estudiants d'aquesta recerca, com els de l'estudi de Behr et al. (1984), diferencien la comparació de fraccions segons si els numeradors o els denominadors són iguals o diferents entre si. En les explicacions de les activitats esmenten si ensenyen a comparar fraccions amb denominadors iguals, amb numeradors iguals o amb numeradors i denominadors diferents i també proposen la comparació de fraccions amb la unitat. Sembla que aquests estudiants tenen clar que en cada cas s'explicarà una regla o un procediment diferent i que, per això, s'han de diferenciar.

Quan els estudiants han plantejat explicacions per ensenyar a comparar fraccions amb denominadors iguals, tots menys un han proposat la regla de comparar els numeradors: "la fracció amb el numerador més gran és la fracció més gran". L'estudiant que compara fraccions amb numeradors iguals també proposa comparar els denominadors; en aquest cas, esmenta la regla de "la fracció més gran és la que té el denominador més petit". Quan donen explicacions per comparar fraccions amb la unitat també introdueixen a les seqüències la regla de "si el numerador és més gran que el denominador, la fracció serà més gran que la unitat; si és més petit, la fracció serà més petita, i si el numerador i el denominador són iguals, la fracció serà igual a la unitat".

Per ensenyar la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents, proposen un procediment de càlcul per decidir quina fracció és més gran: "Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors".

Aquests estudiants no plantegen activitats per desenvolupar estratègies per comparar fraccions tal com l'NCTM (2000) recomana que haurien de fer els alumnes de l'etapa d'educació primària. Presentant directament les regles no ajudarien que els alumnes desenvolupessin diferents estratègies per comparar fraccions, ni tampoc que miressin d'entendre quin significat té comparar fraccions.

Les recerques en relació amb els coneixements dels estudiants de mestre sobre la comparació i ordenació de fraccions (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011) mostren que els estudiants de mestre tenen poc sentit numèric a l'hora de comparar fraccions utilitzant nombres de referència i altres estratègies no procedimentals. En la recerca de Utley i Reeder (2011), en què investiguen la millora en la comparació de fraccions a partir d'un curs de formació, fins i tot afirmen que cal temps per desenvolupar aquest sentit numèric i que, en un semestre de formació, els estudiants van millorar mínimament a l'hora de comparar fraccions utilitzant nombres de referència.

D'acord amb aquestes recerques, s'entenen els resultats que hem obtingut en les propostes dels estudiants de mestre sobre la comparació de fraccions. Atès que tenen poc coneixement de la comparació de fraccions a partir d'estratègies diferents de les regles o els procediments de càlcul, difícilment proposaran activitats en què s'ensenyin aquestes altres estratègies, com ara comparar fraccions a partir de nombres de referència.

4) Les propostes dels estudiants de mestre per ensenyar la suma o la resta de fraccions amb denominadors iguals s'han centrat a explicar el procediment de "deixar el mateix denominador i sumar o restar els numeradors", i les propostes per ensenyar la suma o la resta de fraccions amb denominadors diferents s'han centrat a explicar l'algoritme de "trobar fraccions equivalents a les inicials i sumar les fraccions".

Segons Van de Walle et al. (2010), les sumes i les restes de fraccions es poden fer a partir d'estratègies inventades i també a partir d'algoritmes, tot i que, per utilitzar estratègies inventades, cal dominar la comparació i l'equivalència de fraccions, així com la relació entre fraccions. Els quinze estudiants que han participat en la nostra recerca i que han proposat activitats per ensenyar a sumar fraccions ho han fet explicant algoritmes, tant per sumar fraccions amb denominadors iguals com per sumar fraccions amb denominadors diferents.

S'evidencia, per tant, que els estudiants es basen en la idea que, per ensenyar a sumar o restar fraccions, cal explicar els procediments que s'han de seguir, sense utilitzar relacions entre fraccions ni coneixements relacionats amb l'equivalència de fraccions, a diferència del que Van de Walle et al. (2010) diuen que és necessari. De fet, fins i tot quan expliquen la suma de fraccions amb denominadors diferents i diuen que cal trobar les fraccions equivalents a les fraccions donades, expliquen el procediment de càlcul per trobar aquestes fraccions equivalents a partir del mínim comú múltiple o multiplicant els denominadors. En cap cas proposen trobar les fraccions equivalents a partir de les relacions entre fraccions. Aquest fet no pot estranyar, ja que alguns d'aquests estudiants també han realitzat activitats per ensenyar l'equivalència de fraccions i sempre basant-se en procediments de càlcul.

A banda de presentar l'algoritme per sumar o restar fraccions sense fer propostes que potenciïn el sentit numèric, la majoria d'estudiants expliquen directament l'algoritme sense fomentar la inducció d'aquests algoritmes o la comprensió de per què s'apliquen. Només tres estudiants en les propostes per ensenyar a sumar fraccions amb denominadors iguals i un en les de la resta de fraccions també amb denominadors iguals, intenten fer que els alumnes indueixin l'algoritme. De totes maneres, proposen un exemple i, a continuació, expliquen directament l'algoritme de la suma. És destacable que, en les explicacions de la suma o la resta de fraccions amb denominadors diferents, cap estudiant hagi donat explicacions per induir l'algoritme.

Molt pocs estudiants han posat exemples després d'explicar l'algoritme per sumar o restar fraccions, i aquest exemple sembla proposat per exemplificar l'algoritme en un cas concret.

Amb les seves propostes, els estudiants revelen tenir present que, en la suma de fraccions amb denominadors iguals, l'algoritme que s'utilitza és diferent del que s'empra per ensenyar la suma o la resta de fraccions amb denominadors diferents. Aquesta diferenciació també és contemplada per diferents autors (Beckmann, 2011; Musser et al., 2011; Tipps et al., 2011; Van de Walle et al., 2010).

Sembla, doncs, que els estudiants de mestre del nostre estudi que han fet propostes per ensenyar la suma i la resta, tenen molt presents els coneixements dels aspectes procedimentals de la suma i la resta, els quals consideren que són els necessaris per aprendre aquestes operacions. Aquest fet fa pensar que els estudiants van aprendre a sumar i restar fraccions de manera totalment mecànica i basant-se en els procediments de càlcul; fins i tot un estudiant diu que "farem les sumes i les restes de la manera que ens han ensenyat sempre". Si algun estudiant ho va aprendre amb comprensió no ha considerat que sigui la manera com s'haurien d'ensenyar aquestes operacions; en efecte, els estudiants no han fet cap proposta en aquesta línia.

Aquests resultats coincideixen amb els de les recerques revisades sobre els coneixements dels mestres en relació amb la suma i la resta (Caglayan i Olive, 2011; McAllister i Beaver, 2012). En aquests estudis es detecta que els estudiants se'n surten millor fent els càlculs que proposant problemes que es resolguin amb sumes i representant el procés de sumar. El fet que dominin més els procediments de suma i resta de fraccions que no que comprenguin aquestes operacions no impedeix que facin errors en aplicar els algoritmes. En la recerca de Newton (2008) es detecta que hi ha estudiants que sumen o resten els numeradors i els denominadors quan sumen o resten fraccions amb denominadors diferents. En la nostra recerca també s'ha observat que un dels estudiants ha comès aquest error. Possiblement, el fet d'haver après aquests algoritmes de memòria sense haver-los entès prou provoca que apareguin aquests errors.

En tot cas, amb els resultats de les propostes dels estudiants per ensenyar a sumar i restar fraccions, sembla que podem concloure que els coneixements sobre l'ensenyament de la suma i la resta de fraccions estan molt fonamentats en els procediments algorítmics i molt poc en la comprensió d'aquests processos. A més, les explicacions van encaminades a transmetre els algoritmes directament, sense potenciar el descobriment per part dels alumnes dels passos necessaris per sumar i restar fraccions.

5) Les propostes dels estudiants de mestre per ensenyar la multiplicació s'han centrat a explicar l'algoritme de "multiplicar numeradors i multiplicar denominadors" i, per ensenyar la divisió de fraccions, s'han centrat a explicar els algoritmes de "multiplicar en creu" o d'"invertir i multiplicar".

Els dos estudiants que han fet propostes per ensenyar la multiplicació i la divisió de fraccions ho han fet presentant algoritmes. En el cas de la multiplicació de fraccions, han plantejat l'algoritme de multiplicar els numeradors i els denominadors i, en la divisió, un estudiant ha explicat la divisió multiplicant en creu (de manera errònia) i l'altre s'ha centrat en l'algoritme "d'invertir i multiplicar". S'evidencia que aquests estudiants s'han basat en la idea que, per ensenyar a multiplicar i dividir fraccions, només cal explicar aquests procediments.

Tant en l'ensenyament de la multiplicació de fraccions com en l'ensenyament de la divisió de fraccions, els resultats presentats coincideixen amb el d'algunes recerques que estudien els coneixements dels estudiants de mestre sobre la multiplicació de fraccions (Isiksal i Cakiroglu, 2011; Ho i Lai, 2012) i d'algunes que observen els coneixements dels estudiants de mestre sobre la divisió de fraccions (Ball, 1990a, 1990b; Kajander i Holm, 2011; Li i Smith, 2007; Li i Kulm, 2008), les quals mostren que el coneixement dels estudiants de mestre està molt centrat en l'algoritme. En aquest sentit, és difícil que els estudiants de mestre, sense tenir prou coneixement conceptual d'un contingut, puguin planificar com ensenyar-lo de manera conceptual.

És destacable que en la recerca de Li i Smith (2007), en què els participants han cursat totes les assignatures de didàctica de les matemàtiques de la seva formació, es detecti que tenen un coneixement conceptual molt pobre sobre el significat de la divisió de fraccions. A més, cap estudiant de la recerca de Li i Smith (2007) prova d'explicar la regla d'"invertir i multiplicar" quan se li demana per què $2/3 \div 2 = 1/3$ o $2/3 \div 1/6 = 4$. Els resultats de la recerca de Li i Smith (2007) fan comprensibles els resultats de la nostra, perquè si un grup d'estudiants de mestre, després d'haver cursat les assignatures de didàctica de les matemàtiques, mostren tenir un coneixement per a l'ensenyament de fraccions molt procedimental, s'entén que els estudiants de la recerca present revelin també un coneixement per ensenyar fraccions molt procedimental, ja que encara no han cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica.

Tot i que els dos estudiants tinguin uns coneixements de l'ensenyament de la divisió de fraccions molt procedimental, un dels dos s'equivoca en mostrar el procés de dividir a partir d'un algoritme. En comptes de multiplicar en creu, divideix en creu. Aquest mateix error el cometen estudiants de mestre de la recerca de Newton (2008).

Cap dels dos estudiants s'ha basat en cap interpretació de la multiplicació i la divisió de les que s'han explicat a l'apartat 3.3.6.2 del marc teòric, i el fet d'explicar directament els algoritmes d'aquestes operacions ens fa pensar que no consideren necessari o bé no saben que és important induir aquests algoritmes, tal com proposen alguns autors (Musser et al., 2011; Van de Walle et al., 2010). Això es pot deure al fet que ells també van aprendre els algoritmes directament, sense haver après com es dedueixen ni haver vist cap interpretació d'aquestes operacions amb fraccions. De fet, en algunes recerques que examinen els coneixements dels estudiants de mestre sobre la multiplicació de fraccions (Noh i Sabey, 2014; Luo, 2009) es detecta que mostren un coneixement molt limitat de les interpretacions de la multiplicació de fraccions.

Els resultats de la nostra recerca i els de les presentades en aquesta conclusió no concorden amb els de la recerca de Meel (2002), en què la majoria d'estudiants de mestre participants en l'estudi saben proposar una situació raonable que representi una divisió de fraccions, poc menys de la meitat expliquen de manera conceptual l'algoritme d'"invertir i multiplicar" i aproximadament la meitat ho plantegen de manera procedimental. A diferència dels estudiants de la nostra recerca, força estudiants de la recerca de Meel (2002) es basen en explicacions conceptuals. S'ha de tenir en compte que els participants de la recerca de Meel estaven completant el curs d'especialització de contingut matemàtic per a la certificació K-8 o per a la certificació Pre-kindergarten.

6) Els estudiants, en les activitats de la seqüència, plantegen ensenyar els continguts de comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions a partir de l'explicació de regles i procediments de càlcul sense potenciar la inducció d'aquestes regles o procediments de càlcul.

D'acord amb les quatre conclusions anteriors, els estudiants plantegen ensenyar els continguts de comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions mitjançant regles i procediments de càlcul. Cap d'ells dóna explicacions adequades per induir aquestes regles i procediments. La majoria les expliquen directament i molt pocs enceten l'explicació amb un exemple o una situació. En el cas de la multiplicació i la divisió de fraccions, els estudiants no s'han basat en cap de les interpretacions d'aquestes operacions que proposen diferents autors (Lamon, 2012; Musser et al., 2011; Siebert i Gaskin, 2006; Van de Walle et al., 2010) i que s'han presentat al subapartat 3.3.6.2, en les quals s'haurien d'haver basat per induir els algoritmes (Musser et al., 2011; Van de Walle et al., 2010).

Aquests resultats mostren que els estudiants de mestre, en iniciar els estudis, presenten un coneixement de les matemàtiques per a l'ensenyament molt limitat, ja que principalment planifiquen ensenyar continguts de fraccions a partir de regles i procediments, sense potenciar-ne la inducció ni tampoc la comprensió. Sembla que aquest coneixement procedimental els estudiants de mestre el tenen molt interioritzat, ja que, concretament sobre el contingut de la divisió de fraccions, la recerca de Li i Smith (2007) mostra que els estudiants de mestre participants a l'estudi revelen un coneixement per a l'ensenyament de fraccions molt procedimental, tot i haver cursat totes les assignatures de matemàtiques per ensenyar. A més, en la recerca de Li i Smith, (2007) de la mateixa manera que en aquesta, cap estudiant va provar d'explicar la regla d'invertir i multiplicar".

La persistència a planificar l'ensenyament de les operacions de fraccions mitjançant algoritmes continua present en els mestres, tal com es mostra a la recerca de Ma (1999), en què mestres dels Estats Units tenen dificultats per explicar la divisió de fraccions més enllà d'ensenyar-ne l'algoritme i presenten limitacions per trobar situacions que donin significat a aquesta operació.

D'acord amb Shulman (1987) i Grossman (1990), aquesta incidència en l'ensenyament de continguts de fraccions a partir de procediments de càlcul per part dels estudiants d'aquesta recerca pot tenir diverses causes: l'experiència com a alumnes de primària i secundària, els materials curriculars consultats i el coneixement de la disciplina. No considerem, en canvi, la formació inicial ni l'experiència a l'aula perquè aquests estudiants no havien cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica en el moment de plantejar les activitats ni tampoc havien fet pràctiques en una aula.

Tal com s'ha dit en conclusions anteriors, és probable que els estudiants de mestre hagin après aquests continguts a partir de procediments, tant a primària com a secundària, ja que en aquestes etapes se solen ensenyar d'aquesta manera (Van de Walle et al., 2010). Aquesta idea de planificar activitats per ensenyar fraccions molt centrada en les regles i els procediments es pot haver potenciat encara més en el cas dels estudiants que han consultat materials curriculars que expliquen aquests procediments sense mirar d'induir-los o ajudar a comprendre'ls. D'altra banda, el coneixement dels continguts de fraccions també pot haver influenciat a l'hora de donar explicacions basades principalment en regles i algoritmes en les seqüències; encara que els estudiants de mestre mostrin coneixements conceptuals d'algun contingut, tenen més domini dels procediments, un aspecte que coincideix amb els resultats d'algunes recerques (Ball, 1990a, 1990b; Ho i Lai, 2012; Isiksal i Cakiroglu, 2011; Kajander i Holm, 2011; Li i Kulm, 2008; Li i Smith, 2007; Lin et al., 2013; Ma, 1999; McAllister i Beaver, 2012; Utley i Reeder, 2011; Whitacre i Nickerson, 2011).

7) Alguns estudiants de mestre han proposat exemples per il·lustrar les explicacions teòriques sobre els continguts de fraccions.

En més de la meitat d'explicacions per ensenyar el significat de fracció, comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació o divisió de fraccions, els estudiants de mestre han proposat un exemple o més d'aquests continguts. És interessant que hagin posat aquests exemples, tot i que la majoria de vegades s'han incorporat a l'activitat després de l'explicació d'una regla o un procediment per il·lustrar-la i en molt pocs casos s'ha donat l'exemple amb l'objectiu de descobrir la regla o el procediment.

En aquest sentit, els estudiants de la recerca d'Isiksal i Cakiroglu (2011), per tal d'ajudar els alumnes de sisè i setè a superar idees errònies sobre la multiplicació de fraccions, proposen utilitzar múltiples representacions a partir de materials, exemples o contextos de la vida diària per millorar la comprensió del contingut. A diferència dels estudiants de la nostra recerca, els de la d'Isiksal i Cakiroglu (2011) estan cursant l'últim any del seu programa i, per tant, és comprensible que plantegin utilitzar múltiples representacions.

8) Els estudiants de mestre han comès pocs errors en les explicacions teòriques i els exemples de la seqüència.

Els estudiants de mestre han comès pocs errors en les explicacions i els exemples que han donat a la seqüència. Això es pot deure al fet que, bàsicament, expliquen regles i procediments de càlcul, posen exemples molt elementals, es basen en la interpretació de fracció com a part–tot i utilitzen el model d'àrea en les representacions. També hi pot influir que hagin consultat en materials curriculars els exemples i procediments que exposen, tenint en compte que, tal com s'ha explicat en les conclusions de l'apartat 8.1.1, els estudiants de mestre han fet força més errors en respondre les preguntes del qüestionari.

Tanmateix, en donar les explicacions i els exemples de la seqüència, encara en fan algun, com ara el que comet l'estudiant que explica com repartir una barra de plastilina entre dues persones. Al denominador hi posa un 1 i explica que el denominador és l'"objecte o part que hem repartit: una (1) barra de plastilina" i al numerador hi escriu un 2 i el defineix com el "nombre de parts en què hem dividit la barra de plastilina". Així doncs, obté que cada persona hauria de tenir 2/1 de plastilina en comptes d'obtenir la fracció 1/2 , que és la que s'obté quan es reparteix un objecte entre dues persones. Un altre estudiant explica incorrectament l'algoritme de la suma, de la resta i de la divisió.

En canvi, sí que s'equivoquen més en les representacions gràfiques proposades en diferents activitats de la seqüència. Aquests errors s'expliquen a la conclusió 16 amb més detall, en què es fa referència als errors de les representacions gràfiques de tota la seqüència i no només de les explicacions i els exemples.

9) A l'hora de definir fracció en les seqüències d'activitats, els estudiants de mestre es basen majoritàriament en la interpretació de fracció com a comparació part–tot, sense explicar que la fracció és un nombre.

En les seqüències d'activitats més de la meitat dels estudiants han definit la fracció com a part o parts d'una unitat, és a dir, s'han basat en la interpretació de fracció com a part–tot. I gairebé tots els estudiants (vint-i-tres de vint-i-cinc) que han definit numerador i denominador ho han fet també a partir de la interpretació de fracció com a comparació part–tot. Expliquen que el denominador són les parts en què s'ha dividit la unitat i, el numerador, les parts que es consideren de les parts en què s'ha dividit la unitat. Molt pocs estudiants han fet referència a altres interpretacions, com ara la fracció com a repartiment.

A més, la majoria d'estudiants, independentment de com hagin definit la fracció, han definit el numerador i el denominador a partir de la interpretació part–tot. Amb les dades recollides en aquest treball, podem concloure que la majoria d'estudiants de mestre d'aquesta recerca, quan inicien els estudis de magisteri i expliquen què és una fracció, fan referència a la interpretació de la fracció com a comparació part–tot, una limitació explicada també per Lamon (2007, 2012).

Pocs estudiants expliquen que la fracció és un nombre, i, com en la recerca de Domoney (2002), els que ho han comentat també han explicat que és una part o parts d'una unitat, la qual cosa mostra que interpreten la fracció com a comparació part–tot per sobre del significat de fracció com a nombre. És destacable que els resultats de la nostra recerca i la de Domoney (2002) siguin tan semblants, sobretot perquè els estudiants d'aquesta recerca no havien fet cap assignatura de didàctica de la matemàtica en el moment de recollir les dades, mentre que els de l'estudi de Domoney (2002) ja havien treballat la fracció com a nombre en un curs de fraccions.

Es percep, per tant, en les activitats que proposen, la dificultat dels estudiants per considerar la fracció com un nombre i per tenir en compte altres interpretacions de fracció diferents de la comparació part–tot, com alguna de les que proposa Lamon (2012): raó, quocient, operador i mesura. Aquest fet també es detecta quan alguns estudiants expliquen què és una fracció definint només el numerador i el denominador. Segurament això passa perquè no comprenen prou el significat de fracció més enllà de la interpretació com a comparació part–tot.

Una de les causes d'aquesta insistència a interpretar la fracció com una comparació part–tot, així com la poca consideració de la fracció com a nombre, pot ser que, tal com diu Wu (2009), s'utilitzen exemples concrets per explicar què és una fracció, com ara un tros de pizza o una part d'un tot, sense que aquests siguin suficients per entendre el significat, ja que es limiten a uns casos concrets no generalitzables.

10) En les explicacions i els exemples per ensenyar continguts de fraccions, els estudiants o bé s'han basat en la interpretació de fracció com a comparació part–tot o bé no s'han basat en cap interpretació. Gairebé no s'han tingut en compte les interpretacions de fracció com a repartiment, operador o mesura i no s'ha considerat gens la interpretació com a raó.

En les explicacions i els exemples que els estudiants de mestre han proposat amb l'objectiu d'ensenyar continguts de fracció, principalment han interpretat les fraccions com a comparació part–tot o bé no s'han basat en cap interpretació. És destacable que, aproximadament en la meitat de les explicacions i els exemples, es presenti la interpretació de fracció com a comparació part–tot i que, en gairebé un 42 % de les explicacions i els exemples, no es detecti cap interpretació de fracció. Les explicacions i els exemples en què es presenta la interpretació de fracció com a repartiment, com a operador i com a mesura s'acosten al 7,5 % del total d'explicacions i d'exemples conjuntament. En cap cas s'ha interpretat la fracció com a raó[6].

A més, la majoria d'explicacions i d'exemples que presenten la interpretació de fracció com a comparació part–tot són per ensenyar el significat de fracció, la comparació i l'equivalència de fraccions, mentre que, en les explicacions per ensenyar les operacions amb fraccions, disminueix la interpretació com a comparació part–tot i augmenten les explicacions sense cap interpretació de fracció. Tal com s'ha comentat a la conclusió 6, les explicacions dels estudiants s'han recolzat principalment en regles i procediments de càlcul, i més encara en les propostes per ensenyar les operacions de fraccions, en què en molts casos no han proposat cap exemple, la qual cosa propicia que no es presenti cap interpretació de fracció.

[6] Vegeu el càlcul dels percentatges a l'Annex 7.

El fet que les explicacions i els exemples mostrin principalment la interpretació de comparació part–tot, quan se'n detecta alguna, coincideix amb el fet que a l'escola sigui la principal interpretació de fracció que s'ensenya (Lamon, 2012). No és estrany, doncs, tenint en compte que aquesta interpretació és la que més se'ls ha presentat a l'escola i també a l'institut, que sigui la que els estudiants de mestre mostrin més en les propostes d'ensenyament, que segurament estan molt condicionades per la seva experiència com a alumnes, d'acord amb Grossman (1990), i també pels materials curriculars consultats, tal com apunta Shulman (1987).

Aquesta presència de la interpretació de fracció com a comparació part–tot s'identifica en diverses recerques (Domoney, 2002; McAllister i Beaver, 2012). En la recerca de Domoney (2002), tot i que els estudiants han començat un curs sobre fraccions i el seu ensenyament, es revela la persistència d'aquesta interpretació quan se'ls demana com ensenyarien què és una fracció. Els estudiants de la recerca de McAllister i Beaver (2012) presenten una manca de comprensió del significat de la multiplicació i la divisió de fraccions, i els autors apunten com una de les causes l'èmfasi en la interpretació de la fracció com a comparació part–tot.

11) La representació més utilitzada en els exemples proposats pels estudiants per ensenyar els continguts de fraccions és el símbol matemàtic, seguit de la imatge i del context real. Gairebé no hi ha exemples representats a partir d'un símbol verbal ni d'un objecte.

Els estudiants de mestre d'aquesta recerca, per ensenyar els continguts de fraccions (significat de fracció, comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions), principalment proposen exemples a partir de símbols matemàtics. Un 44,23 % dels exemples són símbols matemàtics; en canvi, només un 25,96 % són imatges i un 22,12 % són situacions de context real simulat. Molt pocs estudiants posen exemples a partir d'expressions verbals, com ara "una meitat", i només un diu que portaria objectes a classe per introduir què és una fracció.

Encara que alguns estudiants de mestre donen diferents representacions, el símbol matemàtic és la representació que té més presència en els exemples de les seqüències. Aquests resultats revelen que els estudiants de mestre no tenen prou coneixement de la importància d'utilitzar diverses representacions perquè els alumnes aprenguin els continguts de fraccions amb comprensió, tal com assenyalen alguns autors (Cramer, 2003; Feikes et al., 2009; Petit et al., 2010; Post et al., 1993; Van de Walle et al., 2010) i el mateix currículum de matemàtiques d'educació primària.

El coneixement per escollir i utilitzar representacions de manera adequada està inclòs en el coneixement especialitzat del contingut segons que l'han definit Ball et al. (2008). Basant-nos en el model del coneixement de les matemàtiques per a l'ensenyament, els estudiants de la nostra recerca no tenen un coneixement especialitzat del contingut prou desenvolupat.

De tota manera, aquests resultats en relació amb la utilització de les representacions són comprensibles, perquè els estudiants de la recerca no havien cursat assignatures de didàctica de la matemàtica i, tal com s'ha comentat anteriorment, les influències que poden determinar els coneixements de les matemàtiques per a l'ensenyament poden venir de la seva experiència d'alumnes, del coneixement de la disciplina i dels materials curriculars que han consultat (Grossman, 1990; Shulman, 1987). Possiblement, aquests estudiants han tingut poques experiències en què hagin vist diverses representacions, ja que, tal com alguns autors observen (Feikes et al., 2009; Lamon, 2012), en l'ensenyament dels continguts de fraccions, tot i que s'empren representacions, no sempre són prou variades per comprendre adequadament els conceptes que s'hi relacionen.

En aquest sentit, en algunes recerques amb estudiants de mestre (Harvey, 2012; Caglayan i Olive, 2011) es detecten dificultats en relació amb la representació gràfica en algun contingut de fraccions. En la recerca de Harvey (2012) es veu que alguns errors que fan els estudiants de mestre en ordenar fraccions es deu, entre altres motius, a no relacionar les fraccions amb una representació visual. En l'estudi de Caglayan i Olive (2011), es mostren algunes dificultats en la interpretació del procés de la multiplicació o la divisió a partir de dibuixos o materials, tot i que alguns estudiants saben com multiplicar fraccions multiplicant numeradors i denominadors i també com dividir fraccions utilitzant l'algoritme d'"invertir i multiplicar". Això fa pensar que, en alguns continguts, els estudiants de mestre se'n surten millor representant les fraccions i els procediments amb símbols matemàtics que no pas amb representacions gràfiques. Aquests resultats concorden amb els de la nostra recerca: els estudiants han proposat molts més exemples amb símbols matemàtics que amb imatges.

12) Molt pocs estudiants han representat gràficament (amb imatges) tot el procés de les operacions amb fraccions en les propostes per ensenyar a operar amb fraccions.

Molt pocs estudiants han representat gràficament tot el procés d'operar amb fraccions en les activitats de la seqüència. Les úniques operacions de les quals s'ha representat tot el procés han estat la suma i la resta de fraccions i només quan la suma o la resta s'ha plantejat amb denominadors iguals. Cap estudiant ha representat gràficament el procés de sumar o restar fraccions amb denominadors diferents ni el de multiplicar o dividir fraccions, tot i que alguns autors proposen diferents representacions gràfiques d'aquestes operacions per entendre'n el procés (Lamon, 2012; Musser et al., 2011; Petit et al., 2010; Segovia i Rico, 2011; Siebert i Gaskin, 2006; Van de Walle et al., 2010).

Aquests resultats en relació amb la manca de representacions del procés de les operacions concorden amb els d'algunes recerques que revelen les limitacions dels estudiants de mestre a l'hora de representar gràficament les operacions de fraccions (Caglayan i Olive, 2011; Ho i Lai, 2012; Li i Smith, 2007; Noh i Sabey, 2014).

Que en la nostra investigació cap estudiant hagi representat gràficament sumes o restes amb denominadors diferents però sí la suma i la resta de fraccions amb denominadors iguals, es pot deure a la dificultat que tenen per representar la idea del denominador comú, tal com evidencien els resultats de la recerca de Caglayan i Olive (2011). En la mateixa recerca, es mostra que els estudiants de mestre tenen més dificultats per representar la multiplicació i la divisió de fraccions que per representar la suma i la resta. Concretament, en la multiplicació de fraccions, alguns estudiants no tenen clares les relacions entre multiplicador, multiplicant i producte i la unitat de referència d'aquests components. Els estudis de Ho i Lai (2012) i Noh i Sabey (2014) també revelen les mancances dels estudiants de mestre a l'hora de representar gràficament la multiplicació de fraccions. En la recerca de Ho i Lai (2012), eren estudiants de primer curs i, a més, com en la nostra recerca, s'analitzava el coneixement per a l'ensenyament en la multiplicació de fraccions. Alguns dels estudiants de la recerca de Noh i Sabey (2014) també eren estudiants d'un curs inicial de la seva preparació.

Les limitacions dels estudiants de mestre per representar gràficament les operacions de fraccions també es presenten en la divisió, tal com s'observa en els resultats de la recerca de Li i Smith (2007), tot i que aquí els estudiants estan en l'última etapa del programa de formació. Però si, en acabar la formació, els estudiants presenten aquestes mancances, encara és més probable que les revelin en iniciar els estudis.

Els resultats de les recerques esmentades fan pensar que els estudiants de mestre d'aquesta recerca no han representat gràficament ni la multiplicació ni la divisió de fraccions perquè representar aquestes dues operacions els comporta més dificultats.

13) El model d'àrea és present en les seqüències de tots els estudiants que han fet representacions gràfiques, mentre que els models de grup i de longitud gairebé no s'han tingut en compte.

Els trenta-set estudiants que han fet representacions gràfiques en les activitats de la seqüència, tant si les han donat per complementar explicacions com en un enunciat d'un exercici o en un problema, han representat una fracció o més d'una a partir del model d'àrea. En canvi, només set han fet representacions a partir d'un model de grup, i únicament cinc han utilitzat un model de longitud.

La presència repetida del model d'àrea en les activitats dels estudiants de mestre pot tenir a veure amb la interpretació de fracció en què es basen quan proposen ensenyar continguts de fraccions. A la conclusió 11, s'ha vist com els estudiants s'han basat en la interpretació de fracció com a comparació part–tot en les explicacions i els exemples que han proposat.

Alguns autors (Feikes et al., 2009; Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010) fan referència al model d'àrea o al model de grup en l'ensenyament de la interpretació de la fracció com a comparació part–tot.

Malgrat que els dos models, el d'àrea i el de grup, serveixen per ensenyar la interpretació de fracció com a part–tot, els estudiants de la nostra recerca han representat les fraccions principalment a partir del model d'àrea. Això es pot deure a la dificultat d'entendre que una unitat es pot referir tant a un sol objecte com a un grup d'objectes (Lamon, 2012). S'arriba als mateixos resultats en la recerca de Tobias (2013), en què els estudiants de mestre d'entrada van mostrar dificultats per definir fraccions quan la unitat són dues regions, com ara dues pizzes. Passa el mateix en la recerca de Rosli et al. (2011), en què futurs estudiants de mestre tenen dificultats per comprendre que un grup d'ítems es pot considerar una unitat. Possiblement és per aquest motiu que els estudiants de la nostra recerca tenen més dificultats per presentar el model de grup que el d'àrea.

Si bé alguns autors (Clarke et al., 2008; Flores et al., 2006; Middleton et al., 1998; Usiskin, 2007; Watanabe, 2006, citats a Van de Walle et al., 2010) proposen potenciar l'ús del model de longitud i, en concret, de la recta numèrica en l'ensenyament de les fraccions, els estudiants de la nostra recerca gairebé no l'han plantejat en les activitats de la seqüència. Els models de longitud es proposen en la interpretació de la fracció com a mesura (Lamon, 2012; Petit et al., 2010; Van de Walle et al., 2010) i precisament els estudiants han interpretat poc les fraccions com a mesura en les seves propostes. Segons Wu (2009), les fraccions són punts a la recta numèrica, és a dir nombres, però els estudiants del nostre estudi, tal com s'ha vist a la primera conclusió, han considerat la fracció com a comparació part–tot i no tant com un nombre, en fer les propostes per ensenyar què és una fracció.

D'altra banda, situar fraccions a la recta numèrica pot comportar més dificultats que identificar fraccions a partir del model d'àrea amb la interpretació part–tot, ja que la recta numèrica té unes característiques diferents (Petit et al., 2010). Aquestes dificultats per situar fraccions a la recta numèrica s'han detectat en la nostra recerca (conclusions 5 i 23 de l'objectiu 1 i conclusió 16 de l'objectiu 2) i també en la de Domoney (2002).

14) Tots els estudiants que han utilitzat el model d'àrea per representar fraccions gràficament en activitats de la seqüència ho han fet a partir d'unitats representades per una sola regió i dividides en parts de la mateixa forma i la mateixa àrea.

A l'hora de dividir la unitat en parts iguals, en el model d'àrea, tots els estudiants han dividit una unitat o totes en parts que tenen la mateixa forma i la mateixa àrea. Només un estudiant ha presentat una unitat dividida en parts iguals en què les parts tenen diferent forma. Lamon (2012) argumenta que, en el procés de partició, l'acció de dividir un conjunt o unitat en parts que no se superposen ni són buides, concretament en el contingut de fraccions, cal que les parts tinguin la mateixa àrea. D'acord amb aquesta definició, les parts no han de tenir la mateixa forma. Els estudiants d'aquesta recerca, però, han considerat unitats dividides en parts de la mateixa forma i la mateixa àrea en les activitats de la seqüència.

Els estudiants, a més, sempre han representat cada unitat com una sola regió; en cap cas s'ha considerat la unitat com un grup de regions, com ara dos cercles o dos rectangles. Tot i que el concepte d'unitat és molt important en l'ensenyament de les fraccions perquè en condiciona tant la interpretació com el significat (Carpenter et al., 1993; Lamon, 2012; Petit et al., 2010), els estudiants de mestre d'aquesta recerca revelen un coneixement molt limitat de l'ensenyament del concepte d'unitat en mostrar que la unitat només es pot representar com una sola regió.

Aquests resultats indiquen una limitació en els coneixements dels estudiants de mestre per ensenyar continguts de fraccions, concretament sobre el significat de la unitat i del procés de partició quan utilitzen models d'àrea. Els estudiants tenen molt present que una unitat es representa amb una regió i està dividida en parts iguals quan les parts tenen la mateixa àrea i la mateixa forma i, tot i que això no vol dir que no sàpiguen que una unitat també pot estar dividida en parts iguals quan les parts no tenen la mateixa forma però sí la mateixa àrea, ni que una unitat no es pugui representar amb més d'una regió, segons les conclusions 2 i 8 de l'objectiu 1, en aquesta recerca també s'evidencia que mostren mancances a l'hora de comprendre el procés de partició i el significat de les unitats, i no només en l'ensenyament d'aquests continguts.

Aquesta relació entre els coneixements i el seu ensenyament té molt sentit, ja que si els estudiants de mestre no saben prou bé què vol dir que una unitat està dividida en parts iguals, difícilment podran ensenyar aquest contingut d'una manera adequada; el mateix serveix per al significat de la unitat i el seu ensenyament.

15) La majoria d'estudiants han representat gràficament fraccions més petites que la unitat, tant si han utilitzat el model d'àrea com el model de grup o el model de longitud.

Gairebé tots els estudiants d'aquesta recerca han representat gràficament fraccions més petites que la unitat. Aquest fet mostra que els estudiants de mestre gairebé no s'han plantejat ensenyar la representació de fraccions més grans que la unitat, possiblement perquè, com a alumnes de primària i secundària, han tingut poques experiències amb aquesta representació. Tant a fora de l'aula com matemàticament parlant, es té la idea que la fracció és la part petita d'alguna cosa, com pot ser un tros de pizza o una part d'un tot, interpretacions que no es poden aplicar a fraccions més grans que la unitat (Wu, 2009). A partir dels resultats del qüestionari i de la seqüència, s'ha evidenciat que els estudiants d'aquesta recerca han interpretat principalment la fracció com a comparació part–tot, una interpretació que possiblement els ha limitat a representar fraccions més petites que la unitat.

El concepte d'unitat també és important en la representació de fraccions: tindrem una fracció o una altra segons la unitat que triem (Lamon, 2012). Força estudiants de la nostra recerca han tingut dificultats en el qüestionari a l'hora de representar la fracció 12/5, amb la qual cosa han revelat que els costava escollir la unitat adequada. Aquestes dificultats per representar fraccions més grans que la unitat també poden haver condicionat que els estudiants no n'hagin representat a les activitats de la seqüència. En la recerca de Tobias (2013) també es mostren les dificultats dels estudiants de mestre en relació amb la comprensió de la unitat i de la identificació de fraccions segons com es consideri la unitat.

16) Els errors que han fet alguns estudiants relacionats amb les representacions gràfiques de la seqüència es poden classificar en tres grups: no dividir la unitat en parts iguals, demanar "quants" en comptes de la part que representa i no representar correctament fraccions a la recta numèrica. Així mateix, els estudiants han comès alguns errors que no formen part del contingut de fraccions.

Només s'han detectat errors en poc menys d'un 10 % de les representacions gràfiques que s'han plantejat en totes les activitats de la seqüència. Segons el model proposat (àrea, grup o longitud), s'ha fet una tipologia d'error o una altra.

En les representacions gràfiques a partir del model d'àrea, l'error ha consistit a no dividir la unitat en parts iguals, ja que s'ha dividit la unitat en parts de diferent àrea. Dels estudiants que han fet aquest error, hi ha un grup de tres estudiants que l'han comès en proposar cercles dividits en tres i cinc parts. Aquests estudiants no han tingut en compte una de les regles que Lamon (2012) suggereix que els mestres recomanin als alumnes a l'hora de fer particions: "Quan escollim una forma per utilitzar, per exemple, en la representació d'una coca, anticipem el nombre de trossos que necessitarem per triar la forma en conseqüència. A vegades és més fàcil utilitzar una coca rectangular en comptes d'una de circular" (p. 173).

Així doncs, alguns estudiants de mestre de la nostra recerca presenten un coneixement molt intuïtiu a l'hora de fer les particions que els mena a cometre l'error de dividir cercles en parts que no són iguals. En la recerca de Pothier i Sawada (1983), duta a terme amb nens de parvulari a tercer de primària, s'observa que l'aprenentatge del procés de partició segueix de manera successiva cinc nivells, quatre dels quals es dedueixen com a conseqüència lògica dels altres. Amb els resultats de la recerca de Pothier i Sawada (1983) a la mà, es dedueix que l'aprenentatge del procés de partició no és trivial i que potser alguns estudiants de mestre que s'han equivocat en dividir la unitat en parts iguals no tenen prou coneixement d'aquest contingut. Això pot haver condicionat que fessin representacions gràfiques incorrectes en la seqüència.

En les representacions gràfiques a partir del model de grup, l'error ha consistit a fer una pregunta equivocada: s'ha demanat "quants" en comptes de "quina part". Només dos estudiants han fet aquesta tipologia d'error, un d'ells interpretant la fracció com a comparació part–tot i, l'altre, com a operador. En el primer cas, donat un grup d'objectes de dos colors, l'estudiant de mestre demana quants objectes hi ha d'un dels colors en lloc de quina part del total representen els objectes d'un color determinat. L'estudiant que ha interpretat la fracció com a operador també fa aquest mateix error: mostra la imatge d'un grup de barrets i exposa que "2/3 dels barrets són blaus". A continuació pregunta: "Quants barrets hi ha?". No cal utilitzar fraccions per resoldre aquest problema; simplement n'hi ha prou comptant els barrets de la imatge.

Aquesta dificultat per diferenciar "quina part" de "quants" també s'observa entre els estudiants de l'estudi de Tobias (2013), tot i que no la tenen els tres estudiants de mestre de la recerca de Rosli et al. (2011). En tot cas, la diferenciació entre "quina part" i "quants" és un aspecte que Carpenter et al. (1993) consideren necessari per entendre el concepte de nombre racional. De la mateixa manera, Lamon (2012) argumenta que quan es fan preguntes en els problemes de fraccions es vol que la resposta sigui "quina part de la pizza" i no "2 trossos". Els dos estudiants que han comès aquest error demostren no tenir clara aquesta diferenciació.

En les representacions gràfiques a partir del model de longitud, dos estudiants no han sabut representar correctament la recta numèrica amb l'objectiu de situar-hi fraccions. Un dels dos estudiants planteja una activitat en què cal situar la fracció 2/5 i per això mostra la recta numèrica amb un 1 i un 5 i les marques entre 1 i 5, una per a cada nombre natural entre l'1 i el 5. L'altre estudiant proposa una activitat en què cal situar fraccions amb denominador 10 i per això dibuixa una recta numèrica marcant els números 1 i 10. Aquests estudiants revelen no tenir prou coneixement de la interpretació de la fracció com a mesura ni tampoc de les característiques de la recta numèrica: com es defineix la unitat, com es defineixen les "parts iguals" i què indica la fracció. Segons Petit et al. (2010), la unitat és una unitat de distància o longitud, les parts iguals tenen una distància igual i la fracció indica la localització d'un punt en relació amb la distància de zero respecte la unitat definida.

Aquest error en localitzar una fracció a la recta numèrica també el cometen tres dels quatre mestres de la recerca de Domoney (2002). Es mostra una recta que té una longitud de 5 unitats i en la qual hi ha marcats els nombres del 0 al 3. Es demana als quatre estudiants que situïn la fracció 3/5 a la recta i tres d'ells marquen la posició del nombre 3 interpretant que la recta numèrica està dividida en parts.

Domoney (2002) argumenta que aquest error pot estar condicionat per demanar de situar una fracció amb denominador 5 en una recta on hi ha marcades les unitats fins a cinc. Però la coincidència amb els resultats de la nostra recerca fa pensar que es deu a les mancances dels estudiants de mestre de la recerca de Domoney per entendre les característiques de la recta numèrica, ja que els dos estudiants de la nostra recerca han dibuixat la recta ells mateixos i precisament també l'han dibuixat de longitud 5 i 10. Possiblement els errors dels estudiants de mestre en situar fraccions a la recta numèrica vénen més condicionades per la dificultat d'entendre que les unitats es defineixen amb nombres, són contínues i estan connectades, a diferència de les unitats del model d'àrea, que estan físicament separades. Es tenen contínues iteracions de la unitat i cada unitat es divideix en contínues subdivisions (Petit et al., 2010).

Volem destacar que no tots els estudiants que han fet errors en les representacions de la seqüència s'han equivocat en el contingut de fraccions. Un estudiant que ha dibuixat un rectangle en una activitat l'ha identificat erròniament com un quadrat, i un altre estudiant que interpreta i representa la fracció d'un nombre escriu el procés de càlcul en una igualtat de manera incorrecta, ja que el que hi ha a cada costat de la igualtat no té el mateix valor. Si bé aquests errors no són de fraccions, cal tenir-los presents, perquè aquests estudiants, quan siguin mestres, hauran d'ensenyar tots els continguts de matemàtiques del currículum de primària, i no només els que fan referència al tema de les fraccions.

8.1.3 Conclusions respecte a les relacions entre els coneixements sobre fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de mestre

El tercer objectiu específic d'aquesta tesi és:

Descriure, analitzar i interpretar relacions entre els coneixements sobre les fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària.

Aquesta recerca ens ha permès de determinar un conjunt de conclusions que fan referència a diferents aspectes de la relació entre els coneixements sobre fraccions i sobre l'ensenyament de fraccions dels estudiants de mestre. Algunes conclusions fan referència a un sol contingut de fraccions, mentre que d'altres abasten més d'un contingut. Concretament, s'han extret conclusions sobre:

<u>La relació entre el significat de fracció en les respostes del qüestionari i la seqüència d'activitats</u>

- La relació entre la definició de fracció en les respostes del qüestionari i la definició de fracció en les explicacions teòriques de la seqüència (conclusió 1).
- La relació entre la definició de fracció en les respostes del qüestionari i la definició de numerador i denominador en les explicacions teòriques de la seqüència (conclusió 2).

La relació entre la definició d'equivalència de fraccions en les respostes del qüestionari i la seqüència d'activitats

- La relació entre la definició de fraccions equivalents en les respostes del qüestionari i les explicacions teòriques sobre l'equivalència de fraccions en la seqüència (conclusions 3 i 4).

La relació entre les respostes del qüestionari sobre comparació de fraccions i les explicacions teòriques sobre comparació de fraccions en la seqüència d'activitats

- La relació entre els errors comesos en les respostes de les preguntes sobre comparació de fraccions del qüestionari i les explicacions teòriques sobre comparació de fraccions en la seqüència (conclusió 5).
- La relació entre els procediments utilitzats per resoldre les preguntes sobre comparació de fraccions amb denominadors diferents del qüestionari i els procediments proposats en les explicacions teòriques sobre comparació de fraccions amb denominadors diferents en la seqüència (conclusió 6).

A continuació s'exposa cadascuna de les conclusions explicada amb detall.

1) No s'evidencien relacions de dependència entre com els estudiants defineixen fracció en respondre un qüestionari o com defineixen fracció en plantejar una seqüència d'activitat d'ensenyament.

La majoria dels estudiants que han donat explicacions teòriques a la seqüència per definir fracció, l'han definit de manera diferent que en el qüestionari. Només dos dels setze estudiants han mantingut la mateixa definició en el qüestionari i en la seqüència; han definit la fracció com a part d'una unitat. Els altres hi han afegit explicacions o n'han deixat de fer, com per exemple comentar o deixar de dir que la fracció és un nombre, o bé han modificat totalment la definició, com en el cas d'explicar en el qüestionari que la fracció és una proporció i, en la seqüència, que és un repartiment.

Aquests resultats ens permeten dir que la manera com els estudiants de mestre defineixen fracció en la seqüència, amb l'objectiu d'ensenyar-ne el significat, no ve determinada per la manera com defineixen fracció en respondre el qüestionari. En efecte, no mobilitzen els mateixos coneixements sobre el significat de fracció en una situació de planificació d'ensenyament del significat de fracció que quan se'ls demana aquest significat en un qüestionari de coneixements.

Des del nostre punt de vista, les causes d'aquestes diferències entre les definicions donades en respondre el qüestionari i les que donen en les explicacions de la seqüència, poden ser diverses. Per una banda, la poca comprensió del significat de fracció que tenen els estudiants no ajuda a mantenir la mateixa definició en el qüestionari i en la seqüència. Per l'altra, el fet d'haver pogut consultar documents complementaris, com el currículum o llibres de text, per proposar la seqüència però no per contestar el qüestionari, pot haver propiciat que definissin fracció de manera diferent en el qüestionari i en la seqüència.

En aquest sentit, s'evidenciaria la rellevància dels materials curriculars per als estudiants de mestre en la planificació d'activitats per ensenyar continguts de fraccions. De fet, Shulman (1987) apunta als materials curriculars com a font de construcció del coneixement didàctic dels mestres. En la nostra recerca, els materials curriculars encara poden tenir més protagonisme, perquè els estudiants encara no havien fet cap assignatura de didàctica de la matemàtica i presentaven uns coneixements poc aprofundits dels continguts de fraccions i del seu ensenyament.

No només la consulta dels materials curriculars pot ser un condicionant de la definició de fracció a la seqüència, sinó que el record dels estudiants de quan eren alumnes de primària o secundària també pot haver influït a l'hora de donar la definició en la seqüència. L'experiència de quan s'és alumne (aprenentatge de l'observació) també és una de les fonts de construcció del coneixement didàctic dels mestres, tal com observa Grossman (1990).

En resum, sigui quina en sigui la causa, els estudiants de mestre del nostre treball han plantejat definicions de fracció en les activitats d'ensenyament diferents de les que han donat en respondre el qüestionari. Així doncs, que defineixin fracció d'una determinada manera en un qüestionari de coneixements no vol dir que plantegin ensenyar-ho igual.

2) Els estudiants de mestre han plantejat ensenyar el significat de numerador i de denominador a la seqüència basant-se en les interpretacions de fracció com a comparació part–tot i com a repartiment, independentment de com han definit fracció en el qüestionari.

Tots els estudiants que han definit què és el numerador i què és el denominador a la seqüència ho han fet a partir de dues interpretacions de fracció, comparació part–tot i repartiment, independentment de com havien definit fracció en el qüestionari. De fet, gairebé la meitat d'estudiants que han definit el numerador i el denominador a partir de la interpretació de fracció part–tot en la seqüència, han definit fracció de manera diferent en el qüestionari i també en la seqüència.

Amb això, veiem que els estudiants presenten la idea d'ensenyar la definició del numerador i del denominador com a comparació part–tot, coincidint amb la interpretació de fracció que se sol ensenyar a l'escola (Lamon, 2012). Possiblement proposen ensenyar què és el numerador i el denominador amb aquesta interpretació condicionats pel record de com van veure-ho ensenyar en les etapes d'escolarització, ja que, a més, no coincideix en com els mateixos estudiants defineixen fracció en el qüestionari ni tampoc en la seqüència.

Aquesta idea de considerar l'experiència dels alumnes com a font del coneixement didàctic del contingut, com ja hem dit anteriorment, l'exposa Grossman (1990) en el col·lectiu dels mestres, però creiem que també és vàlida entre els estudiants de mestre. D'altra banda, tal com s'ha comentat a la conclusió 1 d'aquest mateix objectiu, els materials curriculars també poden haver influenciat en la proposta de la definició de numerador i de denominador en la seqüència.

Els resultats d'aquest estudi revelen que els estudiants de mestre tenen un coneixement molt limitat del significat de fracció i del seu ensenyament, i emfasitzen la interpretació de fracció com a comparació part–tot quan defineixen numerador i denominador en una proposta d'ensenyament, condicionats per l'experiència com a alumnes i els materials curriculars consultats, però independentment de com hagin definit fracció per mostrar els coneixements que tenen d'aquest contingut.

3) S'aprecien diferències en les explicacions d'equivalència de fraccions en funció de si els estudiants de mestre les plantegen en una activitat d'ensenyament o en un qüestionari per mostrar els seus coneixements.

Dels sis estudiants que han donat explicacions teòriques i exemples sobre l'equivalència de fraccions en les activitats de la seqüència, només dos mantenen en la seqüència el mateix tipus d'explicació que donen en definir l'equivalència de fraccions en respondre el qüestionari. Arran d'això, es detecta que, per planificar les activitats de la seqüència, dues terceres parts dels estudiants no han mobilitzat únicament els coneixements sobre equivalència de fraccions que revelen al qüestionari. De fet, alguns han canviat totalment el tipus d'explicació a l'hora d'elaborar les activitats de la seqüència, com és el cas dels estudiants que al qüestionari han definit l'equivalència de fraccions a partir d'explicacions conceptuals, mentre que a la seqüència l'han explicat a partir de procediments de càlcul.

Aquests resultats indiquen que, per una banda, els estudiants de mestre tenen uns coneixements determinats sobre l'equivalència de fraccions i, per l'altra, en tenen uns altres sobre com s'ensenya aquest contingut. És a dir, es diferencia el coneixement del contingut del coneixement per ensenyar aquest contingut. En el marc del coneixement matemàtic per a l'ensenyament (MKT) de Ball et al. (2008), això es tradueix en la diferenciació entre el coneixement comú del contingut i el coneixement especialitzat del contingut o, en termes més generals, segons Shulman (1987), a diferenciar el coneixement del contingut i el coneixement didàctic del contingut.

D'aquest treball es desprèn, d'acord amb Grossman (1990), tal com hem comentat anteriorment, la importància de l'experiència d'observar com els mestres ensenyen en les etapes de primària i secundària i, d'acord amb Shulman (1987), la rellevància dels materials curriculars consultats, per construir els coneixements per a l'ensenyament. Considerem que aquestes dues fonts per al disseny de les activitats d'ensenyament són presents en la nostra recerca pel fet que els estudiants no havien fet cap assignatura de didàctica de la matemàtica.

Tenint això en compte, no podem afirmar que els coneixements sobre equivalència de fraccions que tenen els estudiants no condicionin en cap sentit els coneixements sobre l'ensenyament d'aquest contingut, però sí que creiem que els coneixements dels estudiants sobre l'ensenyament de l'equivalència de fraccions són diferents del coneixement sobre equivalència de fraccions que es mostra en una situació que no es contextualitza en l'ensenyament i té altres condicionants, com ara l'experiència com a alumnes de primària i secundària i també els materials didàctics consultats.

4) En les activitats de la seqüència per ensenyar l'equivalència de fraccions, s'observa un augment de les explicacions procedimentals i una disminució de les conceptuals en relació amb les explicacions que es donen per definir l'equivalència de fraccions en el qüestionari. Així mateix, els estudiants han prioritzat les explicacions procedimentals per explicar l'equivalència de fraccions independentment de com han definit l'equivalència de fraccions en el qüestionari.

Tal com hem dit a la conclusió anterior, els estudiants han explicat de manera diferent l'equivalència de fraccions en planificar una activitat per ensenyar aquest contingut que en respondre una pregunta en un qüestionari per mostrar els coneixements que en tenen. D'altra banda, la diferència principal entre les explicacions en el qüestionari i en la seqüència és que, en aquesta, els estudiants han recolzat les explicacions per ensenyar l'equivalència de fraccions en procediments de càlcul. És a dir, en la seqüència hi ha un augment de les explicacions a partir de procediments de càlcul i una disminució de les explicacions conceptuals respecte a les que es donen en el qüestionari. De fet, tots els estudiants expliquen en la seqüència procediments de càlcul, si bé també alguns n'expliquen de conceptuals.

A la conclusió anterior s'ha explicat la diferència entre els coneixements sobre l'equivalència de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament d'aquest contingut d'uns quants estudiants de mestre d'aquest estudi. En aquesta conclusió, volem emfasitzar que una diferència principal entre aquests coneixements és el fet que els estudiants plantegen ensenyar l'equivalència de fraccions de manera procedimental, encara que tinguin alguns coneixements d'aquest contingut de tipus conceptual.

Els estudiants de mestre d'aquesta recerca, tot i que utilitzen algoritmes procedimentals per definir fraccions equivalents en el qüestionari, també donen algunes explicacions conceptuals. El més rellevant és que en el disseny de les activitats per ensenyar l'equivalència de fraccions no mantenen aquestes explicacions conceptuals. Les propostes procedimentals poden estar influenciades per la seva experiència com a alumnes (Grossman, 1990), a partir de l'observació de l'ensenyament d'aquest contingut de manera procedimental per part dels seus mestres i professors de primària i secundària. D'acord amb el que s'ha exposat al marc teòric, hem vist que s'evidencia un predomini de l'ús dels algoritmes procedimentals entre els estudiants de mestre per trobar fraccions equivalents (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011). Això fa pensar que els estudiants, per aprendre aquests continguts procedimentals, deuen haver vist en primera persona l'ensenyament de l'equivalència mitjançant l'ús de procediments de càlcul.

A més, el fet que presentin coneixements conceptuals en el qüestionari no vol dir que els expliquin a la seqüència, pel fet que potser no saben que són importants per ensenyar l'equivalència de fraccions, ja que a l'escola habitualment s'han transmès de manera procedimental, tal com apunten alguns autors (Van de Walle et al., 2010).

Els resultats de l'anàlisi de la relació entre els coneixements sobre l'equivalència de fraccions i el seu ensenyament ens han permès constatar que els estudiants de mestre no tenen prou coneixement de com ensenyar l'equivalència de fraccions de manera conceptual, tot i que en tenen alguns coneixements conceptuals.

5) Els estudiants que han plantejat explicacions per ensenyar la comparació de fraccions en la seqüència han comès errors en les respostes a les preguntes del qüestionari sobre comparació de fraccions.

Els set estudiants que han explicat la comparació de fraccions amb denominadors iguals i/o denominadors diferents en la seqüència han comès errors en les respostes a les preguntes del qüestionari sobre aquest contingut. Tots s'han equivocat en explicar com comparar dues fraccions sense utilitzar el mínim comú múltiple. Tal com s'ha explicat anteriorment a la conclusió 16 de l'apartat 8.1.1, aquests estudiants presenten poc sentit numèric en relació amb la comparació de fraccions, ja que, quan no han pogut utilitzar coneixements procedimentals, no han sabut com resoldre la pregunta.

És necessari subratllar que, malgrat que aquests estudiants han comès diversos errors en les respostes de les preguntes de comparació de fraccions del qüestionari, han plantejat activitats a la seqüència per explicar aquest contingut. Aquesta poca relació entre el fet de plantejar activitats sobre comparació de fraccions i el poc coneixement que tenen del contingut pot tenir dues explicacions: per una banda, aquest poc coneixement és el que permet tenir prou confiança per plantejar activitats d'ensenyament d'aquest contingut, en la línia del que mostra la recerca de Li i Smith (2007), en què els estudiants se senten més preparats per ensenyar del que realment estan. Per l'altra, els errors comesos en el qüestionari tenen a veure principalment amb l'ús de continguts no procedimentals, mentre que, a la seqüència, els estudiants es recolzen en procediments de càlcul. Això fa pensar que no tenir prou coneixements conceptuals sobre la comparació de fraccions no impedeix que els estudiants proposin ensenyar el contingut de manera procedimental i, per tant, no els és un fre per plantejar-se ensenyar-lo, encara que sigui d'una manera limitada i poc adequada.

6) Els estudiants expliquen de manera diferent la comparació de fraccions amb denominadors diferents a la seqüència i al qüestionari, tot i que es mantenen en el nivell procedimental.

Els dos estudiants que han proposat explicar la comparació de fraccions amb denominadors diferents a la seqüència ho fan a partir del procediment de "comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors". Un dels dos estudiants, a més, explica com comparar fraccions a partir de comparar-ne les representacions gràfiques. En canvi, en respondre la pregunta del qüestionari en què es demana comparar fraccions amb denominadors diferents sense utilitzar el mínim comú múltiple, tots dos cometen errors i utilitzen procediments diferents que el que proposen a la seqüència. Així doncs, aquests dos estudiants han explicat de manera diferent la comparació de fraccions amb denominadors diferents en planificar una activitat per ensenyar aquest contingut que en respondre una pregunta en un qüestionari per mostrar els coneixements que en tenen.

Tenint en compte que han resolt de manera errònia la pregunta de comparació de fraccions amb denominadors diferents del qüestionari, possiblement s'han basat en algun material curricular per proposar l'activitat de la seqüència. De nou, els resultats mostren la importància dels materials didàctics en la planificació d'activitats per ensenyar continguts de fraccions. Com ja hem dit anteriorment, Shulman (1987) els considera una font de construcció del coneixement didàctic dels mestres.

Malgrat que els estudiants no tenen prou coneixements sobre la comparació de fraccions, tal com es detecta en les respostes del qüestionari, són capaços d'explicar aquest contingut en una activitat de la seqüència perquè es limiten a reproduir un procediment de càlcul que potser, com s'ha dit, han extret d'un material curricular que han consultat. Si haguessin volgut explicar com comparar fraccions utilitzant altres estratègies que requereixen sentit numèric, com ara l'ús de nombres de referència, possiblement haurien tingut més dificultats. Aquestes mancances dels estudiants de mestre per comparar fraccions emprant estratègies diferents de les procedimentals es detecten en diferents recerques (Harvey, 2012; Whitacre i Nickerson, 2011; Utley i Reeder, 2011).

Com també s'ha comentat anteriorment en el cas d'altres continguts de fraccions, la proposta per ensenyar la comparació a partir de procediments de càlcul també pot estar condicionada per l'experiència com a alumnes. Aquesta experiència és una de les fonts que Grossman (1990) considera per a la construcció del coneixement didàctic del contingut.

8.1.4 Conclusions generals

Aquesta tesi té per objectiu general:

Descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels estudiants de primer curs del Grau de Mestre d'Educació Primària sobre les fraccions i sobre l'ensenyament de les fraccions.

A continuació s'explicaran les conclusions generals que s'han pogut extreure en relació amb els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i sobre l'ensenyament de les fraccions, així com les conclusions a què s'ha arribat de la relació entre els coneixements sobre les fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de mestre.

Coneixements dels estudiants de mestre sobre fraccions

Els resultats i les conclusions, exposats en els apartats i capítols anteriors, mostren algunes característiques dels coneixements sobre fraccions dels futurs mestres que han participat en aquesta recerca. Per una banda, la majoria d'estudiants presenten un conjunt d'idees estereotipades respecte a les fraccions, com ara la interpretació de fracció en què es basen, els exemples de fraccions equivalents que donen, les estratègies utilitzades per explicar l'equivalència o la comparació de fraccions o els algoritmes que empren per comprovar que dues fraccions són equivalents. En analitzar les idees que es repeteixen entre els estudiants, s'observa que aquests tenen un coneixement molt limitat en alguns continguts de fraccions, com en el cas de les interpretacions de fracció diferents de la de comparació part–tot.

Hi ha alguns continguts concrets en els quals la majoria d'estudiants han mostrat dificultats: partició en parts iguals de la unitat, concepte d'unitat, representació de nombres a la recta numèrica, comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents, estimació de suma de fraccions i també dificultats especialment importants en la densitat i infinitat dels nombres racionals.

A banda de les dificultats anteriors, uns quants estudiants han comès errors en relació amb les fraccions: explicar erròniament els algoritmes per comprovar l'equivalència de fraccions, utilitzar de manera incorrecta regles per comparar fraccions, comparar el nombre de parts en comptes de l'àrea de les parts a l'hora de comparar fraccions i equivocar-se en els algoritmes per sumar, restar, multiplicar i dividir fraccions.

És rellevant que són molts menys els continguts que la majoria d'estudiants dominen que aquells en què presenten dificultats. Per exemple, han sabut explicar per què no es poden sumar dues fraccions representades en unitats de diferent àrea i identificar una fracció més gran que la unitat representada gràficament a partir d'un model d'àrea. És destacable que els estudiants tenen un coneixement adequat dels procediments de càlcul, ja que la majoria dominen els algoritmes de càlcul.

Idees estereotipades

Els estudiants de mestre presenten un seguit d'estereotips en relació amb les fraccions. De les cinc interpretacions de fracció que Lamon (2012) defineix, la més present entre els estudiants és la de comparació part–tot. Fins i tot en explicar gràficament que dues fraccions són equivalents, es basen en aquesta interpretació. En definir què és una fracció, a més, fan poques referències a les fraccions com a nombres.

Quant a la definició de l'equivalència de fraccions i la comprovació que dues fraccions són equivalents, els estudiants han donat principalment explicacions conceptuals i procedimentals i gairebé no s'han basat en representacions gràfiques. Pel que fa a les explicacions conceptuals, han definit les fraccions equivalents dient de manera majoritària que les fraccions són el mateix nombre. Els estudiants que es recolzen en explicacions procedimentals han utilitzat bàsicament l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" i en pocs casos han fet referència a l'algoritme de "multiplicar en creu".

En donar exemples de fraccions equivalents, els estudiants s'han referit a fraccions equivalents a la fracció 1/2 i al fet que el numerador i el denominador d'una de les fraccions són múltiples del numerador i el denominador de l'altra, respectivament.

Per comparar fraccions, els estudiants de mestre, com en el contingut d'equivalència, també s'han basat en explicacions conceptuals i procedimentals i en la comparació de representacions gràfiques. En aquest contingut, però, en les explicacions conceptuals han comparat els nombres decimals que representen les fraccions que es comparen.

Dificultats

La majoria d'estudiants presenten dificultats en determinats continguts de fraccions. En relació amb la partició de la unitat, tots els estudiants consideren que una unitat està dividida en parts iguals quan les parts són congruents, però, en canvi, la meitat afirma que si les parts no tenen la mateixa forma encara que tinguin la mateixa àrea, la unitat no està dividida en parts iguals. És a dir, tenen la idea que dividir una unitat en parts iguals significa dividir-la en parts de la mateixa àrea i la mateixa forma.

Respecte a la unitat, els estudiants tenen dificultats per interpretar-la en situacions en què es pot referir a una regió o a més d'una. També presenten dificultats, derivades d'una poca comprensió del concepte d'unitat, en la comparació de fraccions representades en unitats de diferent àrea. En aquest contingut, els futurs mestres no han tingut en compte que les representacions de les fraccions s'han realitzat en unitats d'àrees diferents. No comprendre bé el concepte d'unitat també pot ser una causa per la qual més de la meitat dels estudiants han revelat dificultats per representar una fracció més gran que la unitat.

Tot i que la representació sobre la recta numèrica és el que pot mostrar millor als alumnes què és una fracció (Wu, 2009), bona part dels estudiants de mestre presenten dificultats per situar-hi fraccions.

En relació amb la comparació de fraccions, els estudiants presenten menys dificultats quan es tracta de fraccions amb els numeradors iguals que quan cal comparar fraccions amb els numeradors i els denominadors diferents.

Força estudiants no han sabut plasmar amb una fracció una situació expressada amb un percentatge, un nombre decimal o una raó. És rellevant aquesta dificultat que tenen alguns estudiants per expressar un percentatge o un nombre decimal en fraccions, ja que són continguts presents en situacions de la vida quotidiana. Entenem que el cas de la raó és més difícil i que probablement hi han tingut menys experiències.

Pel que fa a les dificultats respecte al càlcul amb fraccions, més de la meitat dels estudiants no han sabut donar una estimació correcta d'una suma de fraccions; de fet, mostren més coneixement a l'hora de sumar fraccions amb denominadors diferents que per fer estimacions de sumes també amb denominadors diferents. Els estudiants també han revelat pocs coneixements en representar gràficament el procés d'una suma de fraccions i cap ha sabut representar gràficament una multiplicació de fraccions. Relacionat amb el càlcul, força estudiants han mostrat no tenir prou coneixement de la prioritat de les operacions.

La densitat i la infinitud dels nombres racionals són dos dels continguts respecte als quals més estudiants han mostrat mancances. Molts no han contestat correctament quan se'ls ha preguntat quina és la fracció més gran i quina és la fracció més petita que coneixen. També han revelat dificultats considerables per dir quantes fraccions hi ha entre dues fraccions i, concretament, per trobar una fracció entre dues fraccions donades.

Errors

Uns quants estudiants han comès errors en l'equivalència, en la comparació i també en les operacions amb fraccions. En el contingut d'equivalència, uns quants s'han equivocat en explicar l'algoritme de "multiplicar i/o dividir el numerador i el denominador per un mateix nombre" i també en presentar l'algoritme de "multiplicar en creu".

En la comparació de fraccions, han tingut en compte el nombre de parts en què s'ha dividit la unitat en comptes de l'àrea. En comparar fraccions amb numeradors i denominadors diferents, alguns estudiants han utilitzat la regla de comparar els numeradors i els denominadors, fet que els ha portat a una comparació errònia.

Alguns dels errors relacionats amb les operacions amb fraccions han tingut a veure amb la realització errònia dels algoritmes de càlcul, com ara sumar numeradors i denominadors per calcular una suma de fraccions. En multiplicar fraccions, un estudiant ha multiplicat en creu. En la divisió, un altre ha multiplicat els numeradors i els denominadors.

Hi ha uns quants errors que no tenen res a veure amb les fraccions, però que cal tenir en compte perquè són errors, igualment, de contingut matemàtic. Alguns exemples d'aquests errors són interpretar el signe " < " de manera errònia, multiplicar 13 x 7 malament o no saber descompondre el nombre 13 en factors primers.

Punt forts

És important destacar els continguts que la majoria dels estudiants de mestre han mostrat que dominen, tot i que són molts menys que aquells en què han comès errors o han presentat dificultats.

Per exemple, han sabut explicar que no es poden sumar fraccions si estan representades en unitats de diferent àrea. Així com no han tingut en compte l'àrea de la unitat en comparar fraccions representades en unitats de diferent àrea, sí que ho han sabut interpretar correctament en la suma de fraccions representades en unitats d'àrees diferents.

A l'hora d'identificar una fracció més gran que la unitat representada gràficament a partir d'un model d'àrea, hi ha més estudiants que consideren la unitat com un grup que els que la consideren com una sola regió. Tot i que han sabut identificar la fracció correcta, no podem determinar si saben que la resposta que donen vol dir que han considerat la unitat com un grup.

La majoria dels estudiants ha sabut expressar amb una fracció una situació que feia referència a una fracció d'un nombre. I, sobretot, cal esmentar que la majoria domina els procediments de càlcul per sumar, restar, multiplicar i dividir fraccions.

Coneixements dels estudiants de mestre sobre l'ensenyament de les fraccions

Els resultats i les conclusions, exposats en els apartats i capítols anteriors, mostren algunes característiques dels coneixements dels futurs mestres que han participat en aquesta recerca en relació amb l'ensenyament de les fraccions. Els participants del nostre estudi no havien cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica en el moment de plantejar les activitats per ensenyar fraccions i, tot i així, tots els estudiants van proposar activitats, encara que no sempre prou adequades. Segurament, tal com diu Grossman (1990), van partir de la seva experiència com a estudiants a l'hora de triar els continguts de la seqüència i plantejar les activitats i es van basar també en els materials curriculars consultats.

De la mateixa manera que en el cas dels coneixements dels estudiants sobre fraccions que acabem de veure, en l'ensenyament de les fraccions, la majoria presenten un seguit d'estereotips sobre què ensenyar i com ensenyar-ho. Uns quants estudiants també han comès errors en la planificació de les activitats per ensenyar continguts de fraccions.

Idees estereotipades

Els estudiants de mestre d'aquesta recerca han escollit principalment tres continguts per plantejar les activitats de la seqüència: significat de fracció, suma i resta de fraccions. En canvi, pocs han donat explicacions per ensenyar equivalència, comparació o multiplicació i divisió de fraccions. Creiem que aquesta tendència a l'hora de triar els continguts té a veure amb la dificultat que comporten.

En definir fracció en la seqüència d'activitats, els estudiants es basen majoritàriament en la interpretació de la fracció com a comparació part–tot, sense explicar que la fracció és un nombre. En les explicacions dels altres continguts de fraccions, els estudiants o bé s'han basat també en la interpretació part–tot o bé no s'han basat en cap; per tant, gairebé no s'han tingut en compte les interpretacions de fracció com a repartiment, operador o mesura. En cap cas s'ha partit de la interpretació com a raó.

Els estudiants plantegen ensenyar els continguts de comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions a partir de regles i procediments de càlcul sense potenciar la inducció d'aquestes regles o procediments de càlcul.

En el contingut de l'equivalència, es recolzen de manera predominant en procediments de càlcul. En l'explicació de la comparació de fraccions, a l'hora de comparar fraccions amb denominadors iguals o numeradors iguals o quan comparen fraccions amb la unitat, es basen en regles com ara comparar els numeradors o els denominadors. En el cas de l'ensenyament de la comparació de fraccions amb numeradors i denominadors diferents, proposen un procediment de càlcul per decidir quina fracció és més gran: "Comparar els resultats obtinguts quan es calcula cada fracció de la quantitat que dóna la multiplicació dels dos denominadors".

Les propostes dels estudiants de mestre per ensenyar la suma o la resta de fraccions amb denominadors iguals s'han centrat a explicar el procediment de "deixar el mateix denominador i sumar o restar els numeradors", i les propostes per ensenyar a sumar o restar fraccions amb denominadors diferents s'han centrat a presentar l'algoritme de "trobar fraccions equivalents a les inicials i sumar les fraccions". En el contingut de la multiplicació, els estudiants també han basat les seves explicacions en un algoritme, "multiplicar numeradors i multiplicar denominadors". De manera anàloga, en la divisió s'han centrat a explicar els algoritmes de "multiplicar en creu" o d'"invertir i multiplicar".

Si bé no tots, força estudiants han proposat exemples per il·lustrar les explicacions teòriques sobre els continguts de fraccions. En aquests exemples també es detecten coincidències. La representació més utilitzada ha estat el símbol matemàtic, seguida de la imatge i del context real. Es pot dir que no hi ha representacions a partir d'una expressió verbal ni d'un objecte. Quant als exemples que s'han proposat per explicar les operacions amb fraccions, molt pocs estudiants han representat gràficament el procés de les operacions.

Fixant l'atenció en les representacions gràfiques que han fet els estudiants en totes les activitats de la seqüència, s'observa que el model d'àrea és present en totes les seqüències. En canvi, els models de grup i de longitud gairebé no s'han tingut en compte. Tots els estudiants que han utilitzat el model d'àrea per representar fraccions gràficament, han donat unitats representades per una sola regió i dividides en parts de la mateixa forma i la mateixa àrea. A més, les fraccions que s'han representat eren principalment fraccions més petites que la unitat.

Errors

Els estudiants de mestre han comès pocs errors en les explicacions i els exemples que han donat a la seqüència, possiblement perquè expliquen regles i procediments de càlcul, posen exemples molt elementals, es basen en la interpretació de fracció com a part–tot i utilitzen el model d'àrea en les representacions. També es pot deure al fet que poden haver consultat els exemples i procediments que exposen en materials curriculars.

Tampoc s'ha detectat un nombre gaire elevat d'errors relacionats amb les representacions gràfiques de la seqüència. Els errors que han fet uns quants estudiants es poden classificar en tres grups: no dividir la unitat en parts iguals, demanar "quants" en comptes de la part que representa i no representar correctament fraccions a la recta numèrica.

Malgrat que són pocs, uns quants estudiants han comès errors que no formen part del contingut de fraccions. Aquests errors també s'han de tenir en compte pel fet que tenen a veure amb altres continguts de matemàtiques que aquests estudiants hauran d'ensenyar quan siguin mestres.

Relacions entre els coneixements sobre fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de mestre

L'anàlisi de les relacions entre els coneixements sobre significat de fracció, comparació i equivalència de fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament d'aquests continguts que tenen els estudiants de mestre mostra que hi ha diferències entre aquests coneixements quan es contesta el qüestionari o quan es proposa una activitat d'ensenyament.

La majoria dels estudiants ha explicat de diferent manera el significat de fracció, l'equivalència i la comparació de fraccions en el qüestionari i en la seqüència. Sobre els continguts d'equivalència i comparació de fraccions, els estudiants de mestre d'aquesta recerca han fet explicacions en la seqüència recolzant-se en els procediments. En l'equivalència, augmenten les explicacions procedimentals en la seqüència respecte al qüestionari i, en la comparació, es mantenen les explicacions procedimentals en el qüestionari i en la seqüència, tot i que es proposen procediments diferents.

Pel que fa al significat de fracció, la majoria d'estudiants defineixen fracció de manera diferent en el qüestionari i en la seqüència, mentre que, en la seqüència, defineixen numerador i denominador basant-se en la interpretació part–tot, independentment de la manera com han definit fracció en el qüestionari. Aquests resultats ens permeten constatar la importància de considerar el coneixement del contingut de manera separada del coneixement didàctic del contingut, en termes de Shulman (1987), o el coneixement comú del contingut de manera separada del coneixement especialitzat del contingut, prenent el marc de referència de Ball et al. (2008). A més, que els estudiants tinguin un determinat coneixement sobre un contingut no vol dir que el mobilitzin quan proposen ensenyar-lo.

El fet que gairebé tots els estudiants hagin plantejat explicacions teòriques molt semblants en cada un dels continguts (significat de fracció, comparació i equivalència de fraccions), tot i que en el qüestionari hagin donat respostes diferents, pot tenir diverses causes entrellaçades. Per una banda, encara que defineixin alguns continguts de manera conceptual, com en el cas de l'equivalència de fraccions, possiblement no tenen un coneixement conceptual prou complet per explicar aquests conceptes des d'aquest punt de vista.

Per l'altra, de manera general, el coneixement conceptual que han mostrat en el qüestionari no el mobilitzen en les seqüències; a més, gairebé tots els estudiants han donat explicacions molt semblants en les activitats de la seqüència en relació amb aquests continguts. Així doncs, creiem que, a banda dels coneixements propis, hi ha altres aspectes que condicionen la manera com els estudiants han explicat aquests continguts: l'experiència com a alumnes de primària i secundària i la consulta dels materials curriculars. El plantejament dels continguts en la seqüència ens fa pensar que el record de com els van aprendre ha portat els estudiants a tenir uns determinats coneixements sobre com s'ensenyen: en el cas de l'equivalència i la comparació, de manera procedimental, i en el cas del significat de fracció, a partir de la interpretació de fracció com a comparació part–tot. Així mateix, els materials curriculars també poden haver condicionat la decisió de com plantejar aquests continguts en les seqüències.

Autors com Shulman (1987) han considerat els materials curriculars, entre altres aspectes, com a font de construcció del coneixement didàctic dels mestres. Així mateix, ens basem en Grossman (1990) per assenyalar l'experiència com a font de construcció d'aquest coneixement didàctic del contingut. Tant Shulman (1987) com Grossman(1990) o Hashweh (2013) fan referència a altres fonts importants per al coneixement didàctic del contingut, com ara el coneixement que els mestres adquireixen a partir de la pràctica o dels cursos de formació. En la nostra recerca, aquestes fonts no es poden tenir en compte perquè els estudiants no havien cursat cap assignatura de didàctica de la matemàtica ni tampoc tenien experiència ensenyant en una aula com a mestres.

8.2 Implicacions educatives

Al llarg d'aquesta tesi, s'han tractat diversos aspectes que poden convertir-se en recomanacions per als formadors dels futurs mestres. Si bé aquesta recerca és un estudi de cas, en veure la coincidència dels resultats del nostre treball amb els d'altres estudis, és possible que les conclusions i implicacions educatives d'aquesta recerca puguin ser considerades en altres grups d'estudiants amb característiques semblants al nostre. Dels resultats i les conclusions se'n deriven les implicacions següents:

En dissenyar els programes de les assignatures de didàctica de la matemàtica del Grau de Mestre d'Educació Primària, cal tenir en compte que els estudiants comencen els estudis a la Facultat d'Educació amb unes idees estereotipades sobre els conceptes relacionats amb les fraccions.

Els estudiants comencen el Grau de Mestre d'Educació Primària amb un seguit de coneixements sobre les fraccions. En alguns casos, aquests coneixements són molt limitats, s'orienten només cap a algun aspecte concret de les fraccions i es deixen de banda altres aspectes rellevants. Per exemple, principalment fan referència a la fracció com a comparació part–tot i no es tenen en compte les altres interpretacions presentades al llarg del treball. A més, no consideren la fracció com un nombre, un aspecte important, com s'ha vist, per entendre els nombres racionals a finals de primària i a l'etapa de secundària.

Altres idees estereotipades al·ludeixen als procediments que utilitzen per comprovar que dues fraccions són equivalents o bé per comparar fraccions. Es repeteix també la mateixa tipologia d'exemples o de representacions gràfiques.

Tal com s'ha explicat en les conclusions de l'objectiu 3 i en les conclusions generals, els estudiants no sempre mobilitzen en les activitats d'ensenyament de fraccions els coneixements que mostren en els qüestionaris, però és poc probable que puguin mobilitzar els que no tenen. I si parteixen dels que tenen i aquests són insuficients o erronis, són els que transmetran als alumnes quan siguin mestres. Per tant, cal que els mestres tinguin un bon domini dels continguts matemàtics i, en concret, dels relacionats amb les fraccions i, en aquest sentit, cal tenir en compte quines idees presenten en començar el grau.

En dissenyar els programes de les assignatures de didàctica de la matemàtica del Grau de Mestre d'Educació Primària, cal tenir en compte que els estudiants comencen els estudis a la Facultat d'Educació amb determinades dificultats en relació amb els continguts de fraccions.

Malgrat que els estudiants de mestre, com s'ha vist en les conclusions, dominen alguns continguts concrets de les fraccions, força estudiants presenten certes dificultats en d'altres, com poden ser el concepte d'unitat, representar nombres a la recta numèrica, fer estimacions, etc., i mostren dificultats greus en la densitat i la infinitat dels nombres. Com en la implicació anterior, cal dissenyar els programes docents de les assignatures amb l'objectiu que els estudiants superin aquestes dificultats.

En dissenyar els programes de les assignatures de didàctica de la matemàtica del Grau de Mestre d'Educació Primària, cal tenir en compte que els estudiants comencen els estudis a la Facultat d'Educació amb unes idees estereotipades sobre com s'ensenyen els continguts relacionats amb les fraccions.

En relació amb els coneixements de les fraccions, els estudiants presenten també un seguit d'idees estereotipades sobre com s'ensenyen. La majoria dels estudiants s'ha basat en la interpretació de comparació part–tot en les activitats de la seqüència i plantegen ensenyar els continguts de comparació, equivalència, suma, resta, multiplicació i divisió de fraccions a partir de regles i procediments de càlcul, sense potenciar la inducció d'aquestes regles o procediments de càlcul.

És necessari, per tant, en les assignatures de didàctica de la matemàtica del grau, tenir clar que, encara que els estudiants no hagin assistit a cap sessió d'aquesta matèria, tenen unes idees preconcebudes de com s'ensenyen els continguts de fraccions. De fet, han pogut dissenyar una seqüència d'activitats abans de començar l'assignatura en què haurien d'aprendre a elaborar-les. Això vol dir que no només han d'aprendre a ensenyar matemàtiques, sinó que han d'aprendre a ensenyar matemàtiques modificant els coneixements sobre l'ensenyament que presenten en iniciar els estudis de magisteri, ja que en alguns casos no són prou adequats.

En les assignatures de didàctica de la matemàtica, s'hauria de considerar la planificació de seqüències d'activitats de fraccions com una activitat indispensable, tant per avaluar els coneixements dels estudiants sobre l'ensenyament de les fraccions com per ajudar a millorar els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament.

En les seqüències d'activitats, s'ha vist quins continguts trien i quins coneixements de fraccions mobilitzen a l'hora de planificar-les. En aquesta recerca, la seqüència s'ha demanat als estudiants abans de cursar l'assignatura de didàctica de la matemàtica, però durant aquestes assignatures caldria realitzar tasques d'aquest tipus, tant per avaluar els coneixements dels estudiants sobre l'ensenyament de fraccions com perquè els estudiants aprenguessin a dissenyar activitats adequades.

La seqüència d'activitats és una tasca adient per millorar els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions i, per tant, per augmentar el coneixement especialitzat d'aquest contingut i perquè els estudiants millorin els seus coneixements de fraccions.

Seria desitjable que els estudiants, en començar els estudis del grau de mestre, presentessin menys dificultats en alguns continguts de les fraccions i no hi tinguessin tantes limitacions.

Tot i que s'ha vist que els estudiants d'aquesta recerca no sempre mobilitzen els coneixements que tenen sobre les fraccions en plantejar una activitat d'ensenyament d'aquest contingut, com més coneixements tinguin de les fraccions i menys dificultats presentin, millor, ja que si tenen moltes mancances en un contingut determinat, aquestes limitacions poden condicionar-los quan siguin mestres a l'hora d'escollir els continguts a ensenyar, de decidir d'on extreuen les activitats o d'ensenyar aquests continguts.

8.3 Limitacions i continuïtat de la recerca

El temps de realització d'una recerca és limitat i, per tant, sempre hi ha aspectes que es podrien millorar. Els objectius i la metodologia de la investigació han condicionat un seguit de decisions preses en aquesta tesi que, un cop duta a terme, suggereixen millores que caldria tenir presents en recerques futures.

Per una banda, considerar tots els continguts que s'han tingut en compte en el qüestionari per descriure, analitzar i interpretar els coneixements dels mestres sobre aquests continguts de fraccions, dóna informació més àmplia i diversa sobre els coneixements dels mestres en relació amb les fraccions. Però, per l'altra, estudiar tants continguts diferents fa que l'anàlisi de dades sigui més complexa, perquè cada contingut implica un estil d'anàlisi diferent d'acord amb les característiques del contingut.

Passa el mateix amb la seqüència d'activitats. Demanar als estudiants una seqüència d'activitats tan oberta facilita que es puguin examinar aspectes que, altrament, no s'haurien pogut analitzar, com ara la tria dels continguts per part dels estudiants o si plantegen explicacions teòriques o no. Però, sent tan oberta, també fa que no es puguin anticipar les dades que se n'obtindran i, per tant, que hi hagi continguts dels quals s'extreguin menys dades i, en conseqüència, menys informació.

De les activitats que els estudiants van proposar a la seqüència es van analitzar només les explicacions, els exemples per ensenyar continguts de fraccions i les representacions gràfiques. S'hauria de considerar la possibilitat d'analitzar més elements de la seqüència per relacionar-los amb els resultats que s'han obtingut. Per exemple, es podria analitzar la tipologia d'activitats, les preguntes, els principis didàctics, la quantitat de continguts diferents que es tracten, la tipologia d'activitats d'avaluació, etc.

Precisament pel que s'acaba de dir més amunt, en plantejar una seqüència oberta hi ha continguts dels quals molt pocs estudiants han donat explicacions. Això provoca que s'hagin tingut poques dades dels coneixements dels mestres sobre l'ensenyament de les fraccions en algun contingut concret i, per tant, que l'anàlisi de la relació entre els coneixements sobre les fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions només s'hagi pogut centrar en uns quants estudiants. Si es demanés com ensenyar un contingut determinat, es tindrien les respostes de tots els estudiants del grup en relació amb l'ensenyament d'aquest contingut i, per tant, es podria veure si els resultats serien més representatius del grup estudiat.

Hauria estat interessant fer entrevistes als estudiants per preguntar-los per què han donat un tipus de resposta o un altre. D'aquesta manera s'hauria obtingut més informació de les motivacions que els han condicionat a fer determinades explicacions en el qüestionari i en la seqüència.

La realització d'aquesta recerca obre interrogants per continuar investigant en relació amb els coneixements dels estudiants de mestre sobre les matemàtiques i el seu ensenyament.

Seria interessant investigar com els formadors ajuden els estudiants a superar algunes limitacions en determinats continguts de fraccions. Per exemple, com ajudar a millorar els coneixements dels futurs mestres respecte a les interpretacions de fracció, per tal de superar la idea tan persistent que les fraccions s'interpreten només com a comparació part–tot, sense tenir en compte que són nombres.

Una altra recerca relacionada amb aquesta tesi és la que es podria dur a terme amb estudiants que ja haguessin fet totes les assignatures de didàctica de la matemàtica. Es podrien analitzar els coneixements sobre fraccions i els coneixements sobre l'ensenyament de les fraccions dels estudiants de l'últim curs del grau.

Es planteja encara una altra possibilitat com a continuïtat de la nostra recerca. Aquesta tesi dóna informació dels coneixements dels estudiants sobre les fraccions i el seu ensenyament sense que hagin cursat cap assignatura de didàctica. Seria interessant analitzar els coneixements en finalitzar l'assignatura de didàctica i relacionar-los amb els coneixements inicials.

Referències bibliogràfiques

Askew, M. (2014). Mathematics teachers' content knowledge. Dins H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran, i M. Askew (ed.), *Exploring mathematics and science teachers' knowledge. Windows into teacher thinking* (p. 3–14). New York, NY: Routledge.

Ball, D. L. (1990a) The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, *16*(2), 14–18, 46–47.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. Dins T. P. Carpente, E. Fennema i T. A. Romberg (ed.), *Rational numbers. An integration of research* (p. 157–195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ball, D. L. i Forzani, F. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497-511. doi:10.1177/0022487109348479.

Ball, D. L. i Forzani, F. M. (2011). Building a common core for learning to teach and connecting professional learning to practice. *American Educator, 35*(2), 17-21, 38-39.

Ball, D. L., Hill, H. C. i Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, *Fall*, 14–46. Consultat des de http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65072

Ball, D. L., Thames, M. H. i Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi:10.1177/0022487108324554.

Beckmann, S. (2011). *Mathematics for elementary teachers with activity Manual* (3th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. i Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323–341.

Blanco, L. J. i Contreras, L. C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *30*, 101-123.

Burns, M. (2003). *Lessons for multiplying and dividing fractions. Grades 5-6*. Sausalito, CA: Math Solutions.

Caglayan, G. i Olive, J. (2011). Referential commutativity: preservice K-8 teachers' visualization of fraction operations using pattern block. Dins L. R. Wiest i T. Lamberg (ed.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 1664-1672). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Carpenter, T. P., Fennema, E. i Romberg, T. A. (1993). Toward a unified discipline of scientific inquiry. Dins T. P. Carpente, E. Fennema i T. A. Romberg (ed.), *Rational numbers. An integration of research* (p. 1-11). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Brown, C. A., Kouba, V. L., Silver, E. A. i Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Trends and conclusion. *The Arithmetic Teacher*, *36*(4), 38-41.

Clarke, D. M., Roche, A. i Mitchell, A. (2008). 10 Practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 373-380.

Climent, N. i Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: Los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA*, *7*(2), 171–205.

Contreras, L. C. i Blanco, L. J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *Revista de Educación*, *3*, 211–220.

Cramer, K. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. Dins R. Lesh i H. M. Doerr (ed.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (p. 449-463). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Domoney, B. (2002). Student teachers' understanding of rational number: part-whole and numerical constructs. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 53–67.

Feikes, D., Schwingendorf, K. i Gregg, J. (2009). *Connecting mathematics for elementary teachers*. Boston: Pearson Addison Wesley.

Fennema, E. i Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. Dins D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 147–164). New York, NY: Macmillan.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J. i Martinez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition. Dins M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (ed.), *Actas del CERME 7* (p. 2640-2649). Rzeszów, Polonia: ERME.

Flores, P. i Torralbo, M. (2011). Números racionales. Dins I. Segovia i L. Rico (ed.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (p. 189-218). Madrid: Ediciones Pirámide.

Generalitat de Catalunya (2007, juny). Decret 142/2007 pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, *4.915*, 21822-21870.

Goldin, G. i Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. Dins A. A. Cuoco i F. R. Curcio (ed.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (p. 1-23). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Graeber, A. i Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge. Useful concept or elusive notion. Dins P. Sullivan i T. Wood (ed.), *The international handbook of mathematics teacher education. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Vol. 1., p. 117–132). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher. Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teacher College.

Harvey, R. (2012). Stretching student teachers' understanding of fractions. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(4), 493-511.

Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: theory and practice*, *11*(3), 273–292. doi:10.1080/13450600500105502

Hashweh, M. (2013). Pedagogical content knowledge: Twenty-five years later. Dins C. J. Craig, P. C. Meijer i J. Broeckmans (ed.), *Advances in Research on Teaching*: *From teacher thinking to teachers and teaching: The evolution of a research community* (Vol. 19, p. 115-140). Bingley, UK: Emerald Group Publishing Limited. doi:10.1108/S1479-3687(2013)19.

Haylock, D. (2010). *Mathematics explained for primary teachers* (7th ed.). London: Sage Publications.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. i Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. What knowledge matters and what evidence counts?. Dins F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 111–155). Charlotte, NC: Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.

Ho, S. Y. i Lai, M. Y. (2012). Pre-service teachers' specialized content knowledge on multiplication of fractions. Dins T. Y. Tso (ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 291-298). Taipei, Taiwan: PME.

Isik, C. i Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(3), 2303–2309.

Isiksal, M. i Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 213–230.

Kajander, A. i Holm, J. (2011). Mathematics for teaching and learning: Developing teachers' conceptual understanding of elementary mathematics. Dins L. R. Wiest i T. Lamberg (ed.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 1664-1672). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. i Baumert, J. (2012). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education*, *64*(1), 90–106. doi:10.1177/0022487112460398.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. Dins F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York, NY: Taylor & Francis.

Li, Y. i Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education*, 40, 833-843. doi:10.1007/s11858-008-0148-2.

Li, Y. i Smith, D. (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching – The case of fraction division. Dins J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park i D. Y. Seo (ed.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3., p.185-192) Seoul: PME.

Lin, C. (2010). Web-based instruction on preservice teachers' knowledge of fraction operations. *School Science and Mathematics*, *110*(2), 59-70.

Lin, C.-Y., Becker, J., Byun, M.-R., Yang, D.-C. i Huang, T.-W. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *113*(1), 41–51. doi:10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x.

Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction. *Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 83-98.

Luo, F., Lo, J. J. i Leu, Y.-C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. School science and mathematics, *111*(4), 164-177.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, *41*(3), 3-11.

McAllister, C. J. i Beaver, C. (2012). Identification of error types in preservice teachers' attempts to create fraction story problems for specified operations. *School Science and Mathematics*, *112*(2), 88-98.

McEwan, H. i Bull, B. (1991). The Pedagogic Nature of Subject Matter Knowledge. *American Educational Research Journal*, *28*(2), 316–334.

Meel, D. E. (2002). Prospective teachers reading reseearch articles: Examining the potentially empowering and debilitating effects. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*. Consultat des de http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/2.pedagogy/meel02/article.pdf

Meredith, A. (1993). Knowledge for teaching mathematics: some student teachers' views. *Journal of Education for Teaching*, *19*(3), 325–338.

Meredith, A. (1995). Terry's learning: some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education*, *25*(2), 175–187.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2012). *TEDS-M Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español*. Consultat des de http://www.educacion.gob.es/dctm/inee/internacional/teds-mlinea.pdf?documentld=0901e72b8143866e.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. del M., Muñoz-Catalan, M. C., Climent, N. i Carillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, *367*, 36–62. doi:10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282.

Musser, G. L., Burger, W. F. i Peterson, B. E. (2011). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach* (9th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080–1110. doi:10.3102/0002831208320851.

Noh, J. i Sabey, K. (2014). Preservice elementary teachers' understanding of fraction multiplication. *NCTM 2014 Research Conference*. New Orleans, LA: NCTM.

Olanoff, D., Lo, J. J. i Tobias, J. M. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267-310.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H. i Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. Dins J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4., p. 345-352). Praga: PME.

Petit, M. M., Laird, R. E. i Marsden, E. L. (2010). *A focus on fractions. Bringing research to the classroom*. New York, NY: Taylor & Francis.

Petrou, M. i Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. Dins T. Rowland i K. Ruthven (ed.), *Mathematics Education Library. Vol. 50. Mathematical Knowledge in Teaching* (p. 9-25). London: Springer Science & Business Media.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning teaching, and assessing of rational number concepts. Dins T. P. Carpenter, E. Fennema i T. A. Romberg (ed.), *Rational numbers. An integration of research* (p. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pothier, Y. i Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(5), 307-317. doi: 10.2307/748675.

Rizvi, N. F. i Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, *8*(2), 377–392.

Rosli, R., Gonzalez, E. G. i Capraro, M. M. (2011). A case study of three preservice teachers on the units and unitizing of fractions. Dins L. R. Wiest i T. Lamberg (ed.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American Chapter of the International Group* *for the Psychology of Mathematics Education* (p. 1682-1689). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Rowland, T. (2008). Researching Teachers' Mathematics Disciplinary Knowledge. Dins P. Sullivan i T. Wood (ed.), *The international handbook of mathematics teacher education. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching developmen*t (Vol. 1., p. 273-298). Rotterdam, The Netherlands: Sense Pulishers.

Sabariego, M. (2004). La investigación educativa: Génesis, evolución y características. Dins R. Bisquerra (coord.), *Metodología de la investigación educativa* (p. 51-87). Madrid: Editorial la Muralla.

Sabariego, M., Massot, I. i Dorio, I. (2004). Métodos de investigación cualitativa. Dins R. Bisquerra (coord.), *Metodología de la investigación educativa* (p. 293-328). Madrid: Editorial la Muralla.

Schwartz, J. E. (2008). *Elementary mathematics pedagogical content knowledge: Powerful ideas for teachers*. Boston, MA: Pearson Education.

Segall, A. (2004). Revisiting pedagogical content knowledge: the pedagogy of content/the content of pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, *20*(5), 489–504. doi:10.1016/j.tate.2004.04.006.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Education Review*, *57*(1), 1–21.

Siebert, D. i Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifying fractions. *Teaching children mathematics*, *12*(8), 394-400.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233-254.

Sullivan, P. i Wood, T. (2008). The international handbook of mathematics teacher education. *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Vol. 1). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Tatto, M. T. i Senk, S. (2011). The Mathematics Education of Future Primary and Secondary Teachers: Methods and Findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. *Journal of Teacher Education*, *62*(2), 121–137. doi:10.1177/0022487110391807

Tipps, S. Johnson, A. i Kennedy, L. M. (2007). *Guiding children's learning of mathematics*. Boston, MA: Wadsworth, Cengage Learning.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5–25.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. i Wilson, J. W. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational number. Consultat des de http:// http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Tobias, J. M. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. Journal of Mathematics Teacher Education, *16*(2), 85-103.

Turner, F. i Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an Organising Framework for Developing and Deepening Teachers' Mathematics Knowledge. Dins T. Rowland i K. Ruthven (ed.), *Mathematics Education Library. Vol. 50. Mathematical Knowledge in Teaching* (p. 195-212). London: Springer Science & Business Media.

Utley, J. i Reeder, S. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction number sense. *Investigations in Mathematics Learning*, *5*(2), 1-13.

Van den Kieboom, L. A. (2013). Examining the mathematical knowledge for teaching involved in pre-service teachers' reflections. *Teaching and Teacher Education*, *35*, 146–156. doi:10.1016/j.tate.2013.06.009.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. i Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (7th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Van Driel, J. H. i Berry, A. (2012). Teacher professional development focusing on pedagogical content knowledge. *Educational Researcher*, *41*(1), 26–28. doi:10.3102/0013189X11431010.

Whitacre, I., i Nickerson, S. D. (2011). Prospective elementary teachers develop improved number sense in reasoning about fraction magnitude. Dins L. R. Wiest i T. Lamberg (ed.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 559-567). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Wu, H.-H. (2009). What sophisticated about elementary mathematics? Plenty - that's why elementary schools need math teachers. *American Educator*, *Fall*, 4–14.

Annex

En el CD adjunt a aquesta tesi es poden trobar els documents següents:

Annex 1. Qüestionari de fraccions.

Annex 2. Informes que contenen les respostes de tots els estudiants per cada pregunta del qüestionari de fraccions.

Annex 3. Dades del qüestionari organitzades en taules per poder trobar les categories de cada pregunta.

Annex 4. Exemples de seqüències d'activitats realitzades pels estudiants.

Annex 5. Dades de la seqüència organitzades en taules per poder trobar les categories de cada aspecte analitzat.

Annex 6. Dades del qüestionari i de la seqüència organitzades en taules per poder-les relacionar.

Annex 7. Càlcul dels percentatges de les diferents interpretacions de fracció i dels tipus de representacions en la seqüència.