

**Tesis doctoral**

**RESPONSABILIDAD LIMITADA, COSTE DE  
CAPITAL Y CRISIS EMPRESARIALES:  
ANÁLISIS POR MEDIO DE LA TEORÍA DE  
OPCIONES**

**Neus Orgaz Guerrero**

**Directores de la tesis:**

**Dr. Joan Montllor i Serrats  
Dra. M<sup>a</sup> Antonia Tarrazón Rodón**

**Departament d'Economia de l'Empresa  
Universitat Autònoma de Barcelona**

Bellaterra, septiembre de 2001

A Josep y Josep junior

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dar las gracias al Dr. Joan Montllor i Serrats por haber dirigido esta tesis doctoral y, sobre todo, por todo lo que he aprendido en estos años trabajando conjuntamente. A parte de haber acabado esta tesis doctoral, he adquirido experiencia y conocimientos muy importantes para mi formación investigadora.

A la Dra. M<sup>a</sup> Antonia Tarrazón Rodón por su codirección, por su dedicación y su inestimable colaboración en esta tesis doctoral, que gracias a su disciplina hemos podido llevar a buen término.

A Josep Antoni, por haber estado a mi lado en todo momento y por darme la seguridad necesaria para seguir luchando por alcanzar nuestros objetivos. A Josep junior, por ser la alegría de mi vida, por darme su apoyo tan dulcemente, y por haberme dejado trabajar tantas horas en vez de dedicarme a él.

A mis padres, hermanas y hermano por su apoyo incondicional y su colaboración indirecta, pero tan apreciada.

En general, a todos los compañeros y personal de secretaría del Departamento de Economía de la Empresa.

Gracias a todos he podido acabar esta tesis.

# ÍNDICE

	Página
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN</b>	6
1.1 Motivación de esta tesis doctoral	6
1.2 Marco teórico	8
1.2.1 Modelo de valoración de opciones de Black y Scholes	8
1.2.2 Los modelos de Merton para valorar opciones americanas perpetuas y deuda empresarial	10
1.2.3 Las opciones de barrera	11
1.3 Estructura de la tesis doctoral	12
1.4 Quiebra <i>versus</i> suspensión de pagos	14
1.5 Estado de la cuestión	15
1.6 Objetivos de esta tesis doctoral	19
1.7 Relación de opciones y activos subyacentes	20
<b>CAPÍTULO 2: OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA Y RENTABILIDAD EXIGIDA EN UN HORIZONTE PERPETUO</b>	25
2.1 Introducción	25
2.2 Las acciones como una opción de compra: la propuesta de Black y Scholes	26
2.3 La opción de responsabilidad limitada en un horizonte monoperiódico	28
2.4 La opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo	24
2.5 El ejercicio de la opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo: la declaración de quiebra	31
2.6 El valor de las acciones y las deudas a partir de la opción de responsabilidad limitada de horizonte perpetuo	34
2.7 Análisis de la función de la opción de responsabilidad limitada de horizonte perpetuo	36
2.8 Las acciones como una opción de compra perpetua y de barrera	39
2.9 El coste del endeudamiento en un horizonte perpetuo	42
2.9.1 El coste de la financiación ajena	44
2.9.2 La rentabilidad exigida por los accionistas	44
2.10 Análisis de las propiedades del coste del endeudamiento	46
2.10.1 Análisis de la función del coste de la financiación ajena	47
2.10.2 El coste del endeudamiento en caso de quiebra de la empresa	47

2.11 Comparación del modelo monoperiódico con el modelo perpetuo: la declaración de quiebra	51
2.12 Simulaciones	54
2.12.1 Valor de las acciones de una empresa endeudada: Black y Scholes <i>versus</i> el modelo de horizonte perpetuo	54
2.12.2 Valor de la opción de responsabilidad limitada: Black y Scholes <i>versus</i> el modelo de horizonte perpetuo	58
2.12.3 Coste de la financiación: Black y Scholes <i>versus</i> el modelo de horizonte perpetuo	61
2.12.4 Rentabilidad exigida por los accionistas	66
2.12.5 Comparación del modelo de Black y Scholes y el modelo de horizonte perpetuo: la declaración de quiebra	68
2.13 Conclusiones	70
APÉNDICE 2A: Estudio del signo de la primera derivada de la opción de responsabilidad limitada respecto a la relación de endeudamiento	72
APÉNDICE 2B: Valoración de la opción de barrera: <i>Down and out call</i>	74
APÉNDICE 2C: La rentabilidad esperada por los accionistas en función de la rentabilidad del activo, el coste de la financiación ajena y la relación entre el valor de mercado de la deuda y el valor de mercado de las acciones	76
<b>CAPITULO 3: OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA, OPCIÓN DE ABANDONAR Y RENTABILIDAD EXIGIDA EN UN HORIZONTE PERPETUO</b>	78
3.1 Introducción	78
3.2 La opción de abandonar: concepto y valoración	79
3.3 La opción de abandonar en la empresa financiada exclusivamente con fondos propios	80
3.4 Opción de responsabilidad limitada y opción de abandonar	83
3.4.1 Valor de liquidación superior al valor de la deuda nominal ( $VL \geq DN$ )	83
3.4.2 Valor de liquidación inferior al valor de la deuda nominal ( $VL < DN$ )	86
3.5 Valor de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar	89
3.6 Comportamiento de la función de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar	91
3.7 El coste del endeudamiento cuando existe responsabilidad limitada y opción de abandonar	93
3.8 Comportamiento de la función del coste de la financiación ajena	95
3.9 Simulaciones	98
3.9.1 Opción de responsabilidad limitada, opción de abandonar y coste del endeudamiento ante variaciones de la desviación típica del activo ( $\sigma$ )	98

3.9.2 Opción de responsabilidad limitada, opción de abandonar y coste del endeudamiento en función del coeficiente de endeudamiento ( $d$ )	102
3.9.3 Opción de responsabilidad limitada, opción de abandonar y coste del endeudamiento en función del valor de liquidación ( $v$ )	106
3.9.4 Desviación típica del activo subyacente de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar	110
3.10 Conclusiones	113
APÉNDICE 3A: Valoración de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar	115
3A.1 Proceso estocástico del activo subyacente	115
3A.2 Valor de la gestión de responsabilidad limitada con opción de abandonar	118
<b>CAPITULO 4: COSTES FIJOS Y VALOR DE LA EMPRESA</b>	120
4.1 Introducción	120
4.2 Valor del activo y deuda estructural	120
4.3 Costes fijos y cese de la actividad empresarial	123
4.4 El cese de la actividad de la empresa: costes fijos y opción de abandonar	125
4.4.1 La relevancia de introducir los costes fijos en la opción de abandonar	128
4.5 Deuda financiera, costes fijos y opción de abandonar	129
4.5.1 Quiebra sin cese	130
4.5.1.1 Valor de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar cuando se consideran los costes fijos	130
4.5.1.2 Escenarios para accionistas y acreedores	134
4.5.2 Cese sin quiebra	136
4.5.3 Cese y quiebra simultáneos	139
4.5.3.1 Condiciones y escenarios	139
4.5.3.2 Valor de la opción de responsabilidad limitada en caso de cese y quiebra simultáneos	141
4.6 El coste de la financiación ajena en caso de opción de abandonar y costes fijos	143
4.7 Conclusiones	144
APÉNDICE 4A: Valoración de la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar en el caso de consideración explícita de los costes fijos	147

<b>CAPITULO 5: ENDEUDAMIENTO PERPETUO CON COSTE VARIABLE</b>	151
5.1 Introducción	151
5.2 Componentes del coste de la financiación en el modelo de coste fijo	153
5.3 Condición para la transformación del modelo de coste fijo en un modelo de coste variable	154
5.4 Equivalencia entre el valor actual de una inversión en renta fija y el valor actual de una inversión en renta variable: el caso de la opción de responsabilidad limitada	155
5.5 Modelo de coste variable puro	160
5.6 Modelo de coste variable atenuado	162
5.7 Comparación del modelo de coste variable puro con el modelo de coste variable atenuado	164
5.8 Simulaciones	166
5.9 Conclusiones	169
<b>CAPITULO 6: MODELIZACIÓN DE HORIZONTES FINITOS</b>	171
6.1 Introducción	171
6.2 Quiebra y vencimiento de la deuda	172
6.2.1 El ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada	172
6.2.2 Vencimiento finito de la deuda y quiebra	174
6.3 La transformación del horizonte infinito en un horizonte finito	176
6.3.1 Posiciones de acreedores y accionistas	176
6.3.2 La eliminación de la parte proporcional de la deuda perpetua como título libre de riesgo	177
6.3.3 La eliminación de la parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada en el vencimiento de una amortización financiera	179
6.3.4 La opción de quiebra en $T$	182
6.3.5 La interacción de contratos en el vencimiento de la deuda finita	184
6.4 El valor de la opción de compra de barrera	188
6.5 El valor de la opción de quiebra en $T$	189
6.6 El coste de la financiación en el caso del vencimiento finito de las deudas	191
6.7 Valor de la empresa y rentabilidad exigida por los accionistas	193
6.8 Simulación	195
6.9 Conclusiones	199

APÉNDICE 6A: El activo subyacente de la opción de compra de barrera en el modelo de horizonte finito	202
APÉNDICE 6B: Rentabilidad continua compuesta del activo subyacente de la opción de compra de barrera en el modelo de horizonte finito	205
APÉNDICE 6C: Valor de la opción de compra y de barrera	210
6C.1 Resultados preliminares	210
6C.2 Valoración de la opción de compra de barrera	212
APÉNDICE 6D: El activo subyacente de la opción de quiebra en $T$	216
6D.1 Función monótona creciente en $A$	216
6D.2 El proceso estocástico de $Q$	217
6D.3 Cálculo directo de la desviación típica de $Q$ a partir de la función de $Q$	219
APÉNDICE 6E: Valor de la opción de quiebra en $T$	222
<b>CAPITULO 7: CONCLUSIONES</b>	225
7.1 Introducción	225
7.2 Conclusiones por capítulo	225
7.3 Resultados obtenidos en esta tesis doctoral	233
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	236



## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 MOTIVACIÓN DE ESTA TESIS DOCTORAL

El objetivo fundamental de esta tesis es formalizar el valor de las acciones de una empresa endeudada, la responsabilidad limitada de los accionistas de una sociedad anónima y la rentabilidad exigida en un horizonte perpetuo, aplicando la teoría de opciones.

La determinación de la rentabilidad exigida a una empresa, tanto por sus acreedores como por sus accionistas, es uno de los problemas centrales de las finanzas de la empresa. Como es conocido, para el caso de la rentabilidad exigida de los accionistas se suele aplicar el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) o bien el modelo APT (*Arbitrage Pricing Theory*). La utilización de estos modelos para determinar la rentabilidad exigida por los acreedores es insatisfactoria, dado que, por lo general, miden el riesgo a partir de coeficientes beta, es decir, del nivel de riesgo sistemático. Los coeficientes beta pueden aceptarse para distribuciones normales de la rentabilidad, pero éste no es evidentemente el caso de la financiación ajena.

Black y Scholes (1973) abren un camino muy prometedor mediante su propuesta de valorar las acciones de una empresa endeudada como una opción de compra europea sobre su activo con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores, en un horizonte monoperiódico.

A partir del resultado obtenido por Black y Scholes (1973) y teniendo, además, en cuenta la ecuación fundamental de las opciones europeas, es posible valorar la responsabilidad limitada de las sociedades anónimas como una opción de venta y, asimismo, calcular la rentabilidad exigida tanto para la financiación ajena como por la financiación propia, siempre en un horizonte monoperiódico.

La principal ventaja del planteamiento de Black y Scholes radica en la aplicación de la teoría de opciones a la valoración de las acciones de las empresas endeudadas, a la valoración de la limitación de responsabilidad y a la determinación de la rentabilidad exigida. Merece destacarse que la limitación de responsabilidad no ha podido valorarse por métodos alternativos a la teoría de opciones. Sin embargo, el modelo de Black y Scholes presenta algunas limitaciones significativas, a saber:

1. Horizonte monoperiódico
2. Tipo de interés constante
3. Volatilidad constante.

La limitación del horizonte monoperiódico se debe a que el modelo de Black y Scholes sobre las acciones de las empresas endeudadas se basa en la ecuación fundamental de las opciones europeas que, aplicada al caso que nos ocupa, relaciona los valores de:

1. la opción de compra (valor de mercado de la acción de la empresa endeudada);
2. la opción de venta (valor de la responsabilidad limitada);
3. el activo subyacente de ambas opciones (valor de mercado del activo de la empresa); y
4. el valor actual del precio de ejercicio, que en este caso resulta ser el valor nominal de las deudas (valor actual del pago prometido a los acreedores).

Tanto la opción de compra como la opción de venta presentan un vencimiento definido, que es el horizonte del modelo.

El tipo de interés y la volatilidad constantes se derivan de la aplicación de la fórmula de valoración de opciones de Black y Scholes (1973).

Sin embargo, el horizonte de la empresa es, en principio, ilimitado, concepto que está ampliamente reconocido en los modelos de valoración de acciones. Esta tesis doctoral incorpora este matiz en el horizonte temporal de las opciones que analiza.

Como propuesta básica, partimos de la valoración de la opción de responsabilidad limitada perpetua, aplicando la fórmula deducida por Merton (1973). Sin embargo, los diversos casos que se estudian a lo largo de la tesis incorporan matices que sólo pueden abordarse dando un siguiente paso, a saber, introduciendo en el análisis las opciones de barrera.

## **1.2 MARCO TEÓRICO**

Como ha quedado de manifiesto al exponer la motivación de esta tesis doctoral, este trabajo de investigación se enmarca dentro de la teoría de opciones y basa su análisis para la construcción de los modelos que en él se desarrollan en tres pilares de este campo:

- el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes (1973);
- los modelos de Merton para valorar opciones de venta americanas en un horizonte perpetuo (1973) y la deuda empresarial (1974, 1977); y
- las opciones de barrera.

### **1.2.1 MODELO DE VALORACIÓN DE OPCIONES DE BLACK Y SCHOLES**

La teoría de valoración de opciones tiene su comienzo en 1900, cuando el matemático francés Louis Bachelier dedujo una fórmula para valorar opciones sobre acciones basada en el supuesto de que el valor de una acción sigue un movimiento browniano. Desde esta fecha, numerosos investigadores han contribuido a esta teoría.

Black y Scholes (1973), juntamente con Merton (1973), fueron los pioneros de la moderna teoría de valoración de opciones.

El modelo de valoración de opciones que Black y Scholes dieron a conocer en su artículo seminal “*The pricing of options and corporate liabilities*”, publicado en *Journal of Political Economy*, en marzo 1973, ha facilitado y ayudado al crecimiento de los mercados financieros de derivados, ya que muchos modelos de valoración de opciones se basan directa o indirectamente en él. Curiosamente, este artículo apareció el mismo año en que nacía el *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE). Sin embargo, como señalan Brealey y Myers (2000, capítulo 21), el concepto de opción no sólo da lugar a los correspondientes títulos negociados en los mercados financieros de derivados sino que constituye, además, un instrumento extremadamente útil para analizar y valorar los proyectos de inversión y la política financiera de la empresa. Así, por ejemplo, la teoría de opciones permite, por una parte, identificar y valorar las opciones de abandonar y de expandirse en nuevos mercados que frecuentemente incorporan los proyectos de inversión y, por otra parte, hace posible valorar la opción de responsabilidad limitada y las opciones incorporadas a las obligaciones convertibles.

Desde que Black y Scholes publicaron su artículo pionero en 1973, han surgido numerosos trabajos que han relajado las hipótesis y han extendiendo la fórmula de Black y Scholes. Recordemos las principales hipótesis en que se basa el modelo de Black y Scholes (Hull, 2000, págs. 244-245):

1. El comportamiento del precio de las acciones corresponde al modelo lognormal con una tasa de tendencia y una tasa de varianza constantes.
2. No hay costes de transacción ni impuestos.
3. Todos los activos financieros son perfectamente divisibles.

4. No hay dividendos sobre las acciones durante la vida de la opción.
5. No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
6. La negociación de valores es continua.
7. Los inversores pueden pedir o dejar prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
8. El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo es constante.

Es decir, el modelo de Black y Scholes ofrece una valoración para un contexto de valoración de opciones europeas sobre acciones que no distribuyen dividendos.

### **1.2.2 LOS MODELOS DE MERTON PARA VALORAR OPCIONES AMERICANAS PERPETUAS Y DEUDA EMPRESARIAL**

Merton, en su conocido artículo “*The theory of rational option pricing*” publicado en *Bell Journal of Economics and Management Science*, en 1973, desarrolla, entre otros, un modelo que permite valorar opciones de venta americanas en un horizonte perpetuo. En esta tesis doctoral, este modelo se adapta para valorar la opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo, la opción de abandonar y la incidencia de los costes fijos en la opción de abandonar.

Merton formaliza la valoración de la deuda por teoría de opciones en sus artículos: “*On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*”, aparecido en 1974 en *The Journal of Finance*, y “*On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem*”, publicado en 1977 en *The Journal of Financial Economics*.

### 1.2.3 LAS OPCIONES DE BARRERA

Una opción de barrera es un contrato que, si el valor del activo subyacente alcanza un determinado valor (barrera) antes del vencimiento de la opción, da lugar a una de las siguientes situaciones, según la modalidad de la opción de barrera:

- a) el poseedor de la opción de barrera recibe una opción ordinaria (modalidad *knock-in*);
- b) la opción de barrera queda anulada (modalidad *knock-out*).

Las opciones de barrera forman parte de las opciones conocidas como “exóticas”. Se empezaron a negociar esporádicamente en el mercado de EEUU en 1967.

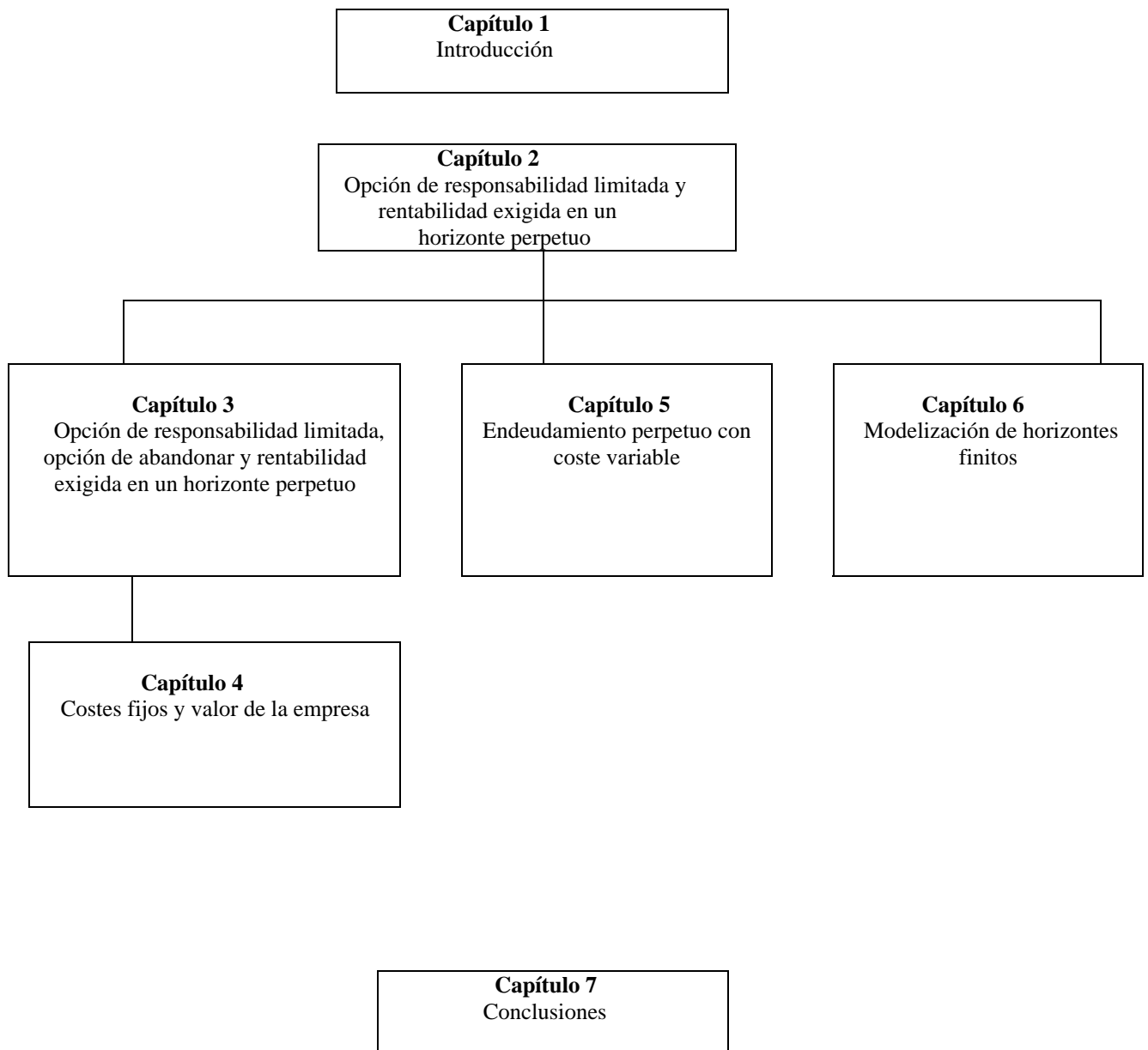
Como trabajos sobre opciones de barrera merecen destacarse:

- Snyder (1969) estudia las opciones *down-and-out*, aunque él las llama “opciones especiales con riesgo limitado”
- Hudson (1991) discute cómo usar las opciones de barrera, especialmente las *up-and-out calls* y *puts*.
- Benson y Daniel (1991) analizan las principales aplicaciones de las opciones de barrera.
- Rubinstein y Reiner (1991) y Rich (1994) abordan la valoración de las opciones de barrera.

### 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

Esta tesis doctoral se elabora dentro del marco teórico que acabamos de reseñar siguiendo la estructura que a continuación sintetizamos en el siguiente esquema, que recoge las diversas líneas de trabajo que se desarrollan a lo largo de la tesis:

#### ESQUEMA nº 1: ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL



El modelo básico que proponemos se desarrolla en el capítulo 2 y se basa en que el horizonte de la empresa es, en principio, ilimitado, y es frecuente que se mantenga un determinado grado de endeudamiento a lo largo de toda la vida de la empresa. Es decir, se considera que el endeudamiento de la empresa es de horizonte perpetuo. Como consecuencia, los accionistas pueden declarar la quiebra en cualquier momento, independientemente del vencimiento de la deuda, y dejar la empresa en manos de los acreedores.

Basándonos en el modelo básico de horizonte perpetuo surgen tres líneas de trabajo:

1. En la primera línea de trabajo, se introducen dos conceptos significativos: la opción de abandonar y los costes fijos. La opción de abandonar se introduce en el capítulo 3 de la siguiente manera: se toma el valor de venta que tiene el activo de la empresa en el mercado, los accionistas lo comparan con el valor de las deudas y deciden si es más rentable seguir con la empresa o vender los elementos del activo en el mercado. Los costes fijos se introducen en el capítulo 4 y pueden asimilarse a una deuda perpetua, cuyo interés anual es precisamente el importe de los costes fijos y sobre la que los accionistas gozan de la opción de responsabilidad limitada. Denominamos a esta deuda, ***deuda estructural***. La consideración de los costes fijos nos permite analizar las causas del cese de las actividades de la empresa, por una parte, y de la quiebra, por otra.

Para la valoración, se utiliza la fórmula deducida por Merton (1973) de la opción de venta americana perpetua. También se utilizan opciones de barrera. Una vez



valorada la responsabilidad limitada de los accionistas en un horizonte perpetuo, se puede calcular el interés efectivo en condiciones de riesgo.

2. La segunda línea de trabajo parte la idea que este modelo básico de horizonte perpetuo es de parámetros constantes, por lo que en el capítulo 5 se adaptan estos parámetros a una realidad cambiante. Por tanto, manteniéndose el horizonte perpetuo proponemos un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada.
3. En el capítulo 6 se desarrolla la tercera línea de trabajo, donde se propone un modelo que permite determinar la rentabilidad exigida por la financiación ajena en un horizonte finito. El modelo de horizonte finito parte del modelo de horizonte perpetuo e introduce las limitaciones del horizonte mediante la aplicación de opciones de barrera.

Finalmente, en el capítulo 7 se recogen las conclusiones de cada capítulo de la tesis y se hace una valoración global de los resultados obtenidos en esta tesis doctoral.

#### **1.4 QUIEBRA *VERSUS* SUSPENSIÓN DE PAGOS**

Las crisis empresariales se enfocan en este trabajo desde el punto de vista del valor y se concretan en la quiebra, por una parte, y en el cese de actividades, por otra. Los modelos desarrollados en este trabajo tratan de profundizar en el derecho de responsabilidad limitada de los accionistas, que se analiza a partir de los conocimientos que proporciona la teoría de opciones. La responsabilidad limitada de los accionistas

aparece asociada a la declaración de quiebra. La suspensión de pagos debe verse como un intento de evitar la quiebra y pertenece, por tanto, en el enfoque de esta tesis doctoral al mismo tipo de crisis de valor que la quiebra. En el capítulo 6, al comparar la deuda de vencimiento finito con la deuda perpetua, estudiamos una reestructuración de la deuda causada por una crisis de valor que puede considerarse simultánea a una crisis de liquidez.

Las crisis empresariales se concretan, pues, en la quiebra y el cese de actividades. Como se pone de manifiesto en el capítulo 4, ambas situaciones no deben asimilarse. Puede darse una situación de quiebra sin cese de actividades, porque los acreedores, como consecuencia de la quiebra, reciben de los accionistas una empresa que, aún no habiendo sido capaz de satisfacerles las deudas, es todavía viable ya que ni el valor de venta en el mercado de los elementos del activo ni el volumen de los costes fijos justifican el cese. El cese de actividades puede, por su parte, no ir asociado a la quiebra, como ocurre en el caso en que el valor de liquidación del activo es superior al valor de las deudas. La quiebra no debe entenderse aquí como una acción judicial sino ante todo como un cambio de propiedad que ha implicado o no trámites judiciales.

## **1.5 ESTADO DE LA CUESTIÓN**

El centro conceptual de esta tesis es la opción de responsabilidad limitada de los accionistas. Esta opción establece un nexo entre la rentabilidad exigida por la financiación ajena, el valor de las acciones y el riesgo de crédito.

Varios son los autores que, desde enfoques distintos a los abordados en esta tesis, ha estudiado diversos aspectos que atañen tanto al valor de las acciones y como al análisis la deuda en sus múltiples facetas.

Obviamente, los pioneros en el análisis moderno de la relación entre el valor de las acciones y el valor de la deuda son Modigliani and Miller (1958). De hecho, en esta tesis se obtienen algunos resultados que podemos relacionar con las principales proposiciones de Modigliani y Miller.

Una de las cuestiones importantes en los modelos que se elaboran en esta tesis es, como ya se ha mencionado, el horizonte temporal de la vida de la empresa. Generalmente, los títulos de la deuda tienen un vencimiento especificado, pero la renovación constante que las empresas realizan de la deuda permite asumir la hipótesis de deuda perpetua. Así, Modigliani y Miller (1958) en sus argumentos asumen una deuda con vencimiento infinito. A su vez, Merton (1974) y Black y Cox (1976) suponen también una deuda con vencimiento infinito en un modelo dinámico.

Existen, sin embargo, otras aportaciones relevantes al estudio del valor de las acciones y de la deuda de las que es menester dejar constancia en esta introducción, por más que el enfoque seguido en el presente trabajo parta de las premisas expuestas en el apartado 1.2. y diverja, en mayor o menor grado según los casos, de los planteamientos seguidos por los autores cuyos trabajos se mencionan a continuación.

Leland (1994), en su artículo “*Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure*”, publicado en *The Journal of Finance*, examina el valor de la deuda y la estructura de capital. Obtiene resultados para valorar la deuda a largo plazo, la rentabilidad y su estructura óptima de capital, cuando la rentabilidad de la empresa sigue un proceso con volatilidad constante.

Brennan y Schwartz (1978) realizan un examen cuantitativo del nivel óptimo del endeudamiento. Utilizan técnicas numéricas para determinar el nivel óptimo de la

estructura de capital con volatilidad constante. Aunque su estudio es muy importante dentro de la literatura, el trabajo de Brennan y Schwartz, presenta tres limitaciones:

1. sus resultados sólo sirven para comparar resultados estáticos del valor del riesgo de la deuda y su nivel óptimo;
2. la quiebra se desencadena cuando el valor de los activos es inferior al valor de la deuda principal; y
3. consideran cambios en la estructura financiera hasta el vencimiento de la deuda.

Mella-Barral y Perraudin (1997), en su artículo “*Strategic debt service*”, publicado en *The Journal of Finance*, construyen un modelo de valoración de activos e incorporan estrategias de deuda. Trabajan en tiempo continuo y obtienen expresiones para valorar la deuda y las acciones, cuando la deuda es perpetua. En su análisis, incorporan los costes directos de quiebra y los costes de agencia.

Longstaff y Schwartz (1995), en su artículo “*A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt*”, publicado en *The Journal of Finance*, desarrollan una investigación para valorar el riesgo de crédito de una empresa, que incorpora la quiebra y el tipo de interés con riesgo. El valor residual de la empresa se incorpora en la situación de quiebra.

Duffee (1999), en su artículo “*Estimating the price of default risk*”, publicado en *The Review of Financial Studies*, elabora un modelo para estimar la probabilidad de quiebra de una empresa. Los parámetros del proceso están estimados para 161 empresas. En cada instante, hay alguna probabilidad de que la empresa quiebre por no poder hacer frente a sus obligaciones. El proceso estocástico determina el precio del riesgo del crédito.

Uno de los inconvenientes de estas investigaciones surge por el hecho de considerar que la empresa declara la quiebra cuando ha agotado todo su activo. Esto no se corresponde exactamente con la realidad, en la medida en que muchas empresas quiebran antes de haber agotado la totalidad de los activos. Atendiendo precisamente a este aspecto, Black y Cox (1976) relajan este supuesto y consideran que la quiebra ocurre cuando el valor de los activos alcanza un umbral bajo.

Jones, Mason y Rosenfeld (1984), en su artículo “*Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation*”, publicado en *The Journal of Finance*, tienen como objetivo verificar el poder de predicción de la teoría clásica de Black y Scholes (1973) y Merton (1974,1977). Por tanto, su punto de partida y el de esta tesis comparten modelos comunes; en cambio, tanto la metodología empleada como los objetivos de ambos trabajos son distintos.

Existen, por supuesto, otros autores que han analizado y formalizado las relaciones entre valor de las acciones, valor de la deuda y riesgo de crédito. La relación de artículos que acabamos de realizar no tiene el ánimo de ser extensa, sino de recoger únicamente aquellos trabajos que comparten algún punto en común con esta tesis doctoral, pero que, a pesar de ello, no hemos inscrito dentro del marco teórico en el que se ha ubicado esta tesis por haber seguido en ella discursos analíticos distintos a los empleados por los autores de los trabajos que acabamos de mencionar.

## 1.6 OBJETIVOS DE ESTA TESIS DOCTORAL

Com ya se ha expuesto a lo largo de esta introducción, la aportación u objetivo principal de esta tesis doctoral es desarrollar un método para calcular la rentabilidad exigida a una empresa endeudada y el valor de sus acciones en un horizonte perpetuo mediante la aplicación de la teoría de opciones. Este objetivo se concreta en las siguientes aportaciones específicas:

1. Valorar la opción de responsabilidad limitada (*ORL*) en un horizonte perpetuo con volatilidad y tipo de interés constante.
2. Interpretar las acciones de las empresas endeudadas como opciones de compra en un horizonte perpetuo.
3. Calcular la rentabilidad exigida a la empresa, tanto por los accionistas como por los acreedores, en un horizonte perpetuo.
4. Incorporar al modelo de horizonte perpetuo la opción de abandonar para valorar tanto la opción de responsabilidad limitada con opción de abandonar como el coste del endeudamiento cuando existen responsabilidad limitada y opción de abandonar.
5. Valorar los costes fijos de una empresa como deuda perpetua.
6. Adaptar el modelo de horizonte perpetuo a variaciones del tipo de interés. Construir un modelo de coste variable.
7. Valorar la acción, la opción de responsabilidad limitada y el coste de endeudamiento con horizontes finitos.
8. Realizar diversas simulaciones para contrastar los resultados obtenidos en la parte teórica.

## 1.7 RELACIÓN DE OPCIONES Y ACTIVOS SUBYACENTES

A continuación, realizamos una relación de las opciones y de los activos subyacentes que se aparecen a lo largo de esta tesis.

### CAPÍTULO 2. OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA Y RENTABILIDAD EXIGIDA EN UN HORIZONTE PERPETUO.

#### **Activo subyacente:**

$A_t$  = valor del activo en el momento  $t$

#### **Opciones:**

*OC*: OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA, sobre el activo de la empresa,  $A_t$ , con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores,  $EX=DN(I+r)$ . Equivale al valor de mercado de las acciones de una empresa endeudada según el modelo de Black y Scholes (1973). Horizonte monoperiódico.

*OV*: OPCIÓN DE VENTA EUROPEA, sobre el activo de la empresa,  $A_t$ , con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores,  $EX=DN(I+r)$ . Equivale al valor de la opción de responsabilidad limitada. Modelo Black y Scholes (1973). Horizonte monoperiódico.

*ORL* (OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA): OPCIÓN DE VENTA AMERICANA DE HORIZONTE PERPETUO sobre el activo  $A_t$  de la empresa con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores,  $EX=DN$ . Punto de partida de la valoración : Merton. Aportación de esta tesis: ecuación (2.1).

*OPB* (OPCIÓN PERPETUA DE BARRERA): OPCIÓN DE COMPRA AMERICANA PERPETUA sobre el activo  $A_t$ , con una barrera inferior de salida igual al valor máximo del activo en el que se declara la quiebra y una compensación igual al

valor de la deuda. Punto de partida de la valoración : Rich (1994). Aportación de esta tesis: ecuación (2.16).

El valor de mercado en un horizonte perpetuo se pueden concebir como la suma algebraica de esta opción de compra perpetua y de barrera con el endeudamiento personal de los accionistas en condiciones de responsabilidad ilimitada, puesto que la compensación de la barrera es el elemento que introduce la limitación de responsabilidad.

### CAPITULO 3. OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA, OPCIÓN DE ABANDONAR Y RENTABILIDAD EXIGIDA EN UN HORIZONTE PERPETUO.

#### **Activos subyacentes:**

$A_t$  = valor del activo de la empresa en el momento  $t$

$\hat{A}_t$  = suma del activo de la empresa y la opción de abandonar;  $\hat{A}_t = A_t + OA$

#### **Opciones:**

$OA$  (OPCIÓN DE ABANDONAR): OPCIÓN DE VENTA AMERICANA PERPETUA cuyo activo subyacente es el activo de la empresa,  $A_t$ , y cuyo precio de ejercicio es el valor de liquidación. Punto de partida de la valoración: Merton (1973). Aportación de esta tesis: ecuación (3.1).

$ORL_{OA}$  (OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA CON OPCIÓN DE ABANDONAR): OPCIÓN DE VENTA AMERICANA DE HORIZONTE PERPETUO con un activo subyacente formado por la suma del activo de la empresa y la opción de abandonar,  $\hat{A}_t = A_t + OA$ . El precio de ejercicio es el pago prometido a los acreedores. Punto de partida de la valoración: Merton (1973). Aportación de esta tesis: ecuación (3.8).



## CAPÍTULO 4. COSTES FIJOS Y VALOR DE LA EMPRESA

### Activos subyacentes:

$A'$  = activo de coste variable (activo antes de la incidencia de los costes fijos)

$A$  = valor del activo después de la incidencia de los costes fijos

$AS = A + OA'$  suma del activo con la opción de abandonar que incorpora el efecto de los costes fijos ( $OA'$ )

### Opciones:

$ORL_{DE}$  (OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA DE LA DEUDA ESTRUCTURAL): OPCIÓN DE VENTA AMERICANA DE HORIZONTE PERPETUO sobre el activo  $A'$  y con un precio de ejercicio igual al valor nominal de la deuda estructural. Punto de partida de la valoración: Merton (1973). Aportación de esta tesis: ecuación (4.4). Calculamos el valor de esta opción antes de considerar los efectos del valor de liquidación e igualmente antes de introducir el endeudamiento ordinario.

$OA'$  (OPCIÓN DE ABANDONAR CON COSTES FIJOS): OPCIÓN DE VENTA AMERICANA PERPETUA sobre el activo de coste variable  $A'$ , cuyo precio de ejercicio consiste en la suma del valor de liquidación y la deuda estructural. Punto de partida de la valoración: Merton (1973). Aportación de esta tesis: ecuación (4.9).

$ORL_{OA'}$  ( OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA CON OPCIÓN DE ABANDONAR CUANDO SE CONSIDERAN LOS COSTES FIJOS) OPCIÓN DE VENTA cuyo activo subyacente,  $AS=A+OA'$ . Precio de ejercicio igual a la suma del valor de liquidación y la deuda estructural. Punto de partida de la valoración: Merton (1973). Aportación de esta tesis: ecuación (4.19).

$ORL_{OA}$ , (OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN CASO DE QUIEBRA Y CESE SIMULTÁNEOS): OPCIÓN EUROPEA PERPETUA DE BARRERA inferior de salida con compensación igual a  $DN-VL$  y una barrera igual al valor  $\frac{\gamma}{1+\gamma} (VL + DE)$ . El activo subyacente de esta opción es el activo de coste variable de la empresa,  $A'$ . Punto de partida de la valoración: Rich (1994). Aportación de esta tesis: ecuación (4.33).

## CAPÍTULO 6. MODELIZACIÓN DE HORIZONTES FINITOS

### Activos subyacentes:

$J_T$  = proporción  $\alpha_T$  del valor de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar.

$Q_T$  = activo de la empresa más la proporción  $(1-\alpha)$  de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar.

donde  $\alpha_T$  es la proporción de la deuda que vence al final del período  $T$ .

### Opciones:

$OCB_T$  (OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA): OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA DE BARRERA superior de salida y precio de ejercicio igual a cero, cuyo activo subyacente es  $J_T$ . El vencimiento se sitúa al final del período  $T$ . Punto de partida de la valoración: Rich (1994). Aportación de esta tesis: ecuación (6.13).

$OQ_T$  (OPCIÓN DE QUIEBRA EN  $T$ ): OPCIÓN DE VENTA EUROPEA CON BARRERA sobre el activo  $Q_T$  y precio de ejercicio igual al valor de la deuda nominal. El vencimiento se sitúa al final del período  $T$ . Punto de partida de la valoración: Rich (1994). Aportación de esta tesis: ecuación (6.17).

A continuación, resumimos en un cuadro la relación de opciones, con sus correspondientes activos subyacentes y precios de ejercicio, que se analizan en esta tesis doctoral.

**CUADRO n°1: RESUMEN DE LA RELACIÓN DE OPCIONES, ACTIVOS SUBYACENTES Y PRECIOS DE EJERCICIO**

CAPÍTULO	ACTIVO SUBYACENTE	OPCIONES	PRECIO DE EJERCICIO
2	$A_t$ =valor del activo en el momento $t$	OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA, $OC$ .	$DN(1+r)$
		OPCIÓN DE VENTA EUROPEA, $OV$ .	$DN(1+r)$
		OPCIÓN DE VENTA AMERICANA, $ORL$ .	$DN$
		OPCIÓN DE COMPRA AMERICANA DE BARRERA, $OPB$	
3	$A_t$ =valor del activo en el momento $t$	OPCIÓN DE ABANDONAR, $OA$ .	$VL$
	$\hat{A}_t = A_t + OA$	OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA CON OPCIÓN DE ABANDONAR, $ORL_{OA}$	$DN$
4	$A'$	OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA DE LA DEUDA ESTRUCTURAL, $ORL_{DE}$	$DE$
		ORL en caso de COSTES FIJOS Y OPCIÓN DE ABANDONAR, $OA'$	$VL+DE$
		ORL en caso de QUIEBRA Y CESE SIMULTÁNEOS	Precio de ejercicio dominado por la barrera
	$AS=A+OA'$	ORL en caso de QUIEBRA SIN CESE, $ORL_{OA'}$	$VL+DE$
6	$J_T$	OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA, $OCB_T$	0
	$Q_T$	OPCIÓN DE QUIEBRA EN $T$ , $OQ_T$	$DN$

## **CAPÍTULO 2. OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA Y RENTABILIDAD EXIGIDA EN UN HORIZONTE PERPETUO**

### **2.1 INTRODUCCIÓN**

El objetivo de este capítulo es formalizar el valor de las acciones de una empresa endeudada, la responsabilidad limitada de los accionistas de una sociedad anónima y la rentabilidad exigida en un horizonte perpetuo, aplicando la teoría de opciones.

El modelo que se elabora parte del establecido por Fisher Black y Myron Scholes en 1973 sobre el valor de las acciones de una empresa endeudada en un horizonte monoperiódico. Este modelo presenta, no obstante, una restricción significativa: la limitación del horizonte a un solo período.

El modelo que se desarrolla en este capítulo se basa en que el horizonte de la empresa es, en principio, ilimitado, y es frecuente que se mantenga un determinado grado de endeudamiento a lo largo de su vida. Es decir, se considera el endeudamiento de la empresa de horizonte perpetuo. Como consecuencia, los accionistas pueden declarar la quiebra en cualquier momento independientemente del vencimiento de la deuda, dejando la empresa en manos de los acreedores. Para la valoración, se utiliza la fórmula deducida por Merton (1973)<sup>1</sup> de la opción de venta americana perpetua. También se utilizan las opciones de barrera.

Una vez valorada la responsabilidad limitada de los accionistas en un horizonte perpetuo, se puede calcular el coste efectivo de la financiación ajena en condiciones de riesgo.

---

<sup>1</sup> “Theory of rational option pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183, 1973.

## 2.2 LAS ACCIONES COMO UNA OPCIÓN DE COMPRA: LA PROPUESTA DE BLACK Y SCHOLES

Como es bien conocido, Black y Scholes (1973) interpretan las acciones de una empresa endeudada a un horizonte monopériódico como una *opción de compra europea* sobre su activo con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores. Según esta propuesta, que se fundamenta en la limitación de responsabilidad de los accionistas, el endeudamiento de la empresa equivale a una situación en la que los acreedores adquieren su activo y los accionistas tienen la opción de readquirirlo pagando la deuda y los intereses devengados.

Al final del período podemos hallarnos ante uno de los dos siguientes escenarios:

(I) El activo de la empresa es **igual o superior** al valor de la deuda.

Si al final del período el valor del activo es superior al valor de la deuda, los accionistas ejercitan la opción de compra, es decir, los accionistas pagan su deuda a los acreedores y readquieren el activo.

(II) El activo de la empresa es **inferior** al valor de la deuda.

Si al final del período el valor del activo es inferior al valor de la deuda, los accionistas no ejercitan su opción de compra. Los accionistas declaran la quiebra y, por tanto, pierden sus derechos. Los acreedores quedan como propietarios del activo y asumen el control de la empresa.

El cuadro nº1 expresa la riqueza final que obtienen los accionistas de la empresa endeudada. En el escenario (I) los accionistas obtienen la diferencia entre el activo y la deuda como valor final. En el escenario (II), que corresponde a la quiebra, los accionistas deben conformarse con un valor final igual a cero.

El significado de los símbolos utilizados es el siguiente:

$A_t$  = valor del activo en el momento  $t$

$DN_t$  = valor de la deuda nominal en el momento  $t$

$r$  = tipo de interés libre de riesgo

$DN_0(1+r)$  = precio de ejercicio de la opción igual al pago prometido a los acreedores. Utilizamos la siguiente simplificación en la notación de la deuda:

$$DN = DN_0$$

$OC$  = opción de compra

$OV$  = opción de venta

**CUADRO n°1: VALOR FINAL DE LAS ACCIONES DE UNA EMPRESA ENDEUDADA**

	(I)	(II)
	$A_t > DN(1+r)$	$A_t < DN(1+r)$
ACCIONES ( $OC_t$ )	$A_t - DN(1+r)$	0
VALOR FINAL	$A_t - DN(1+r)$	0

En el cuadro n°2 se expresa la posición de los acreedores de una empresa endeudada, es decir, el valor final de sus deudas. En el escenario (I) los acreedores reciben el valor de la deuda. En el escenario (II) reciben el activo, es decir, los acreedores deben quedarse con el valor del activo por haber quebrado la empresa y no consiguen, por tanto, cobrar el total de su capital e intereses.

**CUADRO nº2: VALOR FINAL DE LA DEUDA**

	(I)	(II)
	$A_I > DN(I+r)$	$A_I < DN(I+r)$
ACTIVO	$A_I$	$A_I$
$-OC_I$	$-(A_I - DN(I+r))$	0
VALOR FINAL	$DN(I+r)$	$A_I$

**2.3 LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN UN HORIZONTE MONOPERIÓDICO**

El modelo básico de Black y Scholes puede completarse a partir de la ecuación fundamental de las opciones europeas o relación de paridad entre opción de compra y opción de venta.

La relación que establece esta ecuación es la siguiente:

Valor del activo sobre el que se establece la opción + Opción de venta = Opción de compra + Valor actual del precio de ejercicio

A través de esta ecuación podemos comprobar, siguiendo a Merton, (1974)<sup>2</sup> que la opción de venta refleja la responsabilidad limitada de las sociedades anónimas, es decir

Activo de la empresa + Opción de responsabilidad limitada = Acciones (valor de mercado) + Valor actual de la deuda

<sup>2</sup> “On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, 29, Mayo, 449-70, 1974.

La opción de responsabilidad limitada ,*ORL*, es equivalente a una *opción de venta europea* sobre el activo con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores. Puede, por tanto, decirse que los accionistas de la empresa poseen el activo, están obligados al pago de la deuda y, además, son propietarios de la opción de responsabilidad limitada.

$$\text{Acciones} = \text{Activo} - \text{Deuda} + \text{Opción de responsabilidad limitada}$$

Analicemos los escenarios de continuidad de la empresa (I) y quiebra (II) a partir de la opción de responsabilidad limitada.

(I) El activo de la empresa es **igual o superior** al valor de la deuda.

Si al final del período el valor del activo es superior al de la deuda, la opción de responsabilidad limitada no se ejercita, de modo que los accionistas pagan su deuda.

(II) El activo de la empresa es **inferior** al valor de la deuda.

Si el valor del activo es inferior al valor de la deuda, los accionistas ejercitan la opción de responsabilidad limitada. Los acreedores tienen derecho a cobrar la deuda, pero este derecho está limitado por la opción de responsabilidad limitada que han vendido a los accionistas. Esta opción les obliga a comprar el activo a cambio de la deuda, es decir, reciben el activo, cuyo valor es inferior a la deuda.

Los cuadros nº3 y nº4 expresan el valor final de las acciones y la deuda de una empresa con responsabilidad limitada a partir de la opción de responsabilidad limitada.



**CUADRO n°3: VALOR FINAL DE LAS ACCIONES DE UNA EMPRESA ENDEUDADA**

	(I)	(II)
	$A_I \geq DN(I+r)$	$A_I < DN(I+r)$
ACTIVO	$A_I$	$A_I$
-DEUDAS sin limitación de responsabilidad	$-DN(I+r)$	$-DN(I+r)$
+ $ORL_I$	0	$DN(I+r)-A_I$
VALOR FINAL	$A_I - DN(I+r)$	0

**CUADRO n°4: VALOR FINAL DE LA DEUDA**

	(I)	(II)
	$A_I \geq DN(I+r)$	$A_I < DN(I+r)$
DEUDAS sin limitación de responsabilidad	$DN(I+r)$	$DN(I+r)$
- $ORL_I$	0	$-(DN(I+r)-A_I)$
VALOR FINAL	$DN(I+r)$	$A_I$

Este modelo presenta, sin embargo, dos restricciones importantes: la limitación del horizonte a un solo período y la concepción de la responsabilidad limitada como una opción europea. En consecuencia, la quiebra sólo puede declararse al final del período, lo que implica, por una parte, ignorar la posibilidad de declarar la quiebra antes del final del período y, por otra, ignorar el efecto del vencimiento total o parcial de las deudas a un horizonte superior.

## 2.4 LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN UN HORIZONTE PERPETUO

Iniciaremos la ampliación del modelo de Black y Scholes a partir de la opción de responsabilidad limitada. El horizonte de la vida de una empresa es, en principio, indefinido, y los accionistas pueden declarar la quiebra, es decir, ejercer la opción de responsabilidad limitada, en cualquier momento, dejando la empresa en manos de los acreedores. En esta primera aproximación, consideramos que el endeudamiento de la empresa es de horizonte perpetuo y, posteriormente, ampliaremos el modelo para incorporar vencimientos a diversos plazos. Nuestro propósito es construir un modelo en el que *la quiebra se produce como consecuencia de una crisis en la capacidad de la empresa para generar valor y no como consecuencia de una crisis de liquidez.*

Para comenzar la ampliación del modelo de Black y Scholes, proponemos asimilar el derecho de responsabilidad limitada de los accionistas a una *opción de venta americana* de horizonte perpetuo sobre el activo de la empresa con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores.

En este modelo se mantiene la propuesta de Black y Scholes sobre la posición de los accionistas, la cual se concreta en:

1. ser propietarios del activo;
2. deuda personal con responsabilidad ilimitada; y
3. ser propietarios de una opción de venta que recoge la limitación de responsabilidad (opción de responsabilidad limitada).

Suponemos, además, que el tipo de interés es continuo, la deuda nominal se mantiene constante y los accionistas pagan los intereses correspondientes.

Se sustituye, en consecuencia, el endeudamiento empresarial por el endeudamiento personal con opción de responsabilidad limitada incorporada. Salvo en caso de quiebra, los accionistas pagan los intereses obteniendo la misma cantidad en forma de beneficios. Esta situación puede formalizarse mediante los siguientes contratos:

1. los accionistas adquieren acciones de la empresa por un importe igual a la deuda nominal. Esta operación es la consecuencia lógica de la sustitución de la deuda empresarial por la deuda personal;
2. los accionistas se endeudan personalmente por este importe; y
3. los accionistas adquieren la opción de responsabilidad limitada que es emitida por los acreedores.

Si los accionistas deciden no continuar pagando los intereses, deben proceder a declarar la quiebra. Por tanto, en este nuevo modelo, la deuda de los accionistas consta del compromiso de pagar los intereses y del derecho de declarar la quiebra.

La opción de responsabilidad limitada, *ORL*, puede valorarse aplicando la fórmula de la opción de venta americana perpetua deducida por Merton (1990, pág.298-300), cuya expresión <sup>3</sup>es:

---

<sup>3</sup> La notación original de Merton para la opción de venta americana perpetua es:  $G = \frac{E}{(1+\gamma)} \frac{(1+\gamma)S}{\gamma E}^{-\gamma}$

siendo  $S$  el valor del activo subyacente y  $E$  el precio de ejercicio.

$$ORL = \frac{DN}{1+\gamma} \frac{(1+\gamma) A^{-\gamma}}{\gamma DN} \quad (2.1)$$

Donde:

$DN$  = precio de ejercicio, es decir, valor de la deuda nominal

$A$  = valor del activo subyacente, es decir, valor del activo de la empresa

$r$  = tipo de interés libre de riesgo

$\sigma$  = desviación típica de la rentabilidad del activo

$$\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}, \text{ siguiendo la notación introducida por Merton} \quad (2.2)$$

Multiplicando y dividiendo por el valor del activo y denominando  $d$  al coeficiente de endeudamiento, que se define como la relación entre el valor nominal del endeudamiento y el valor del activo,

$$d = \frac{DN}{A} \quad (2.3)$$

la ecuación (2.1) toma la siguiente expresión:

$$ORL = A \frac{d}{1+\gamma} \frac{1+\gamma}{\gamma d}^{-\gamma} \quad (2.4)$$

Y, normalizando para  $A=1$ , tenemos:

$$orl = \frac{d}{1+\gamma} \frac{1+\gamma}{\gamma d}^{-\gamma} \quad (2.5)$$

## 2.5 EL EJERCICIO DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN UN HORIZONTE PERPETUO: LA DECLARACIÓN DE QUIEBRA

Merton (1990, pág.299) determina el valor máximo del activo subyacente que justifica un ejercicio anticipado de la opción,  $C^*$ , como:

$$C^* = \frac{\gamma E}{1 + \gamma} \quad (2.6)$$

Aplicando este resultado (2.6) a nuestro caso, podemos decir que el valor máximo del activo de la empresa que justifica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada es:

$$A^* = \frac{\gamma DN}{1 + \gamma} \quad (2.7)$$

$A^*$  es, pues, el valor máximo del activo para que la empresa se declare en quiebra.

Veamos cuál es el valor de la opción de responsabilidad limitada en el caso de ejercicio anticipado.

Sustituyendo (2.7) en (2.1) obtenemos tras unas sencillas operaciones<sup>4</sup>

$$ORL^* = \frac{DN}{1 + \gamma} \quad (2.8)$$

---

<sup>4</sup>  $\frac{DN}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma) A^*}{\gamma DN} = \frac{DN}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma) \frac{\gamma DN}{1 + \gamma}}{\gamma DN} = \frac{DN}{1 + \gamma}$

El resultado que acabamos de hallar es coherente con el hecho de que el valor de las acciones en el caso de quiebra es cero. Supongamos que el valor del activo se sitúa en aquella cantidad que induce a declarar la quiebra expresada en (2.7). Entonces, el valor de la opción de responsabilidad limitada se sitúa en el valor indicado en (2.8), siendo la suma de los valores del activo y la opción de responsabilidad limitada igual a la deuda nominal:

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{DN}{1+\gamma} + \frac{DN}{1+\gamma} = DN \quad (2.9)$$

por lo que el valor de las acciones,  $S^*$ , formado por la suma de los valores del activo y la opción de responsabilidad limitada menos el valor de la deuda, resulta igual a cero:

$$S^* = 0 \quad (2.10)$$

Observemos cuál es la posición de los acreedores en caso de quiebra. Cuando se produce una situación de quiebra, donde los accionistas han ejercitado su opción de responsabilidad limitada, los acreedores, por su posición de vendedores de la opción de responsabilidad limitada, están obligados a adquirir el activo a cambio de la deuda. Reciben, pues, un activo cuyo valor máximo es  $A^*$  y, por tanto, teniendo en cuenta (2.7), puede decirse que experimentan la siguiente pérdida mínima:

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{DN}{1+\gamma} - DN = -DN \frac{1}{1+\gamma} \quad (2.11)$$

cuyo valor coincide con el valor de la opción de responsabilidad limitada según (2.8), es decir, la pérdida que experimentan los acreedores en caso de quiebra es igual al valor de la opción de responsabilidad limitada cuando se ejercita anticipadamente, lo cual refleja el hecho de que la pérdida que experimenta el vendedor de una opción que se ejercita en su vencimiento es precisamente igual al valor de la opción en el vencimiento.

## 2.6 EL VALOR DE LAS ACCIONES Y LAS DEUDAS A PARTIR DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA DE HORIZONTE PERPETUO

En los cuadros nº5 y nº6 se reflejan los valores de las acciones y la deuda en este modelo de opción de responsabilidad limitada perpetua.

Podemos hallarnos ante uno de los tres siguientes escenarios:

(I) El valor del activo es **superior** al valor máximo del activo para que la empresa se declare en quiebra, es decir,  $A^* = \frac{\gamma DN}{1 + \gamma}$ , según recoge la ecuación (2.7).

(II) El valor del activo es **igual** al valor máximo del activo para que la empresa se declare en quiebra.

(III) El valor del activo es **inferior** al valor máximo del activo para que la empresa se declare en quiebra.

**CUADRO n°5: VALOR DE LAS ACCIONES DE UNA EMPRESA ENDEUDADA**

	(I)	(II)	(III)
	$A_t > \frac{\gamma \cdot DN}{1 + \gamma}$	$A_t = \frac{\gamma \cdot DN}{1 + \gamma}$	$A_t < \frac{\gamma \cdot DN}{1 + \gamma}$
ACTIVO	$A_t$	$\frac{\gamma \cdot DN}{1 + \gamma}$	$A_t$
-DEUDA	$-DN$	$-DN$	$-DN$
+ <i>ORL</i>	$ORL$ <sup>5</sup>	$\frac{DN}{1 + \gamma}$ <sup>6</sup>	$DN - A_t$
VALOR ACCIONES	$A_t - DN + ORL$	0	0

En el cuadro n°5 podemos comprobar que en el escenario (I), en la que la empresa mantiene su evolución normal, los accionistas mantienen su posición, es decir, son propietarios del activo, mantienen la deuda, (con lo cual continuarán pagando los intereses), y tienen el derecho de responsabilidad limitada.

Cuando el valor del activo es igual al valor máximo que justifica la declaración de quiebra (escenario II), los accionistas ejercitan su opción de responsabilidad limitada, declaran la quiebra y el valor de sus acciones resulta igual a cero.

El escenario (III) nunca se dará en un contexto eficiente, ya que se habrá declarado la quiebra cuando el valor del activo sea máximo (escenario II), sin esperar a que disminuya todavía más.

<sup>5</sup> Ecuación (2.1): valor de la *ORL* sin ejercitar

<sup>6</sup> Ecuación (2.8): valor de la *ORL* cuando se ejercita anticipadamente.



**CUADRO n°6: VALOR DE LA DEUDA**

	(I)	(II)	(III)
	$A_t > \frac{\gamma DN}{1+\gamma}$	$A_t = \frac{\gamma DN}{1+\gamma}$	$A_t < \frac{\gamma DN}{1+\gamma}$
DEUDA	$DN$	$DN$	$DN$
- <i>ORL</i>	<i>-ORL</i>	$\frac{\gamma DN}{1+\gamma} - DN$	$A_t - DN$
VALOR	$DN - ORL$	$\frac{\gamma DN}{1+\gamma}$	$A_t$

En el cuadro n°6 se expresa el valor que obtienen los acreedores cuando se declara la quiebra (escenario II) en el valor exacto del activo (valor máximo del activo) que la justifica, observándose que los acreedores obtienen un valor del activo que es inferior a la deuda. Lo mismo ocurre en el escenario III donde también reciben el valor del activo en el momento  $t$ , siendo este inferior al del caso anterior. En este caso los accionistas experimentan la pérdida adicional de pagar los intereses de la deuda durante más tiempo del necesario. En el escenario I se mantiene el valor de la deuda, puesto que la deuda nominal menos el valor de la opción de responsabilidad limitada es el valor de la financiación ajena efectiva.

## 2.7 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA DE HORIZONTE PERPETUO

Como hemos visto, el valor de la opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo, una vez normalizada para un valor del activo igual a la unidad, es función de la relación de endeudamiento, la desviación típica de la rentabilidad del activo y la tasa de interés de los activos libres de riesgo que, dado el carácter perpetuo del modelo debe asimilarse a la tasa de interés de la deuda perpetua del Estado. A continuación, realizamos un breve análisis del comportamiento de la función en relación a estas variables, acompañado de una representación gráfica.

La derivada de la función de la opción de responsabilidad limitada respecto a la relación de endeudamiento presenta el siguiente valor:

$$\frac{\delta \text{orl}}{\delta d} = 4 \frac{z}{\sigma^2} \left( \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right)^{-\frac{2z}{\sigma^2}} \quad (2.12)$$

que, como puede observarse, es positivo en todo caso.

Veamos el resultado del cálculo de la segunda derivada respecto a la relación de endeudamiento:

$$\frac{\delta^2 \text{orl}}{\delta d^2} = \frac{2^{1+\frac{2z}{\sigma^2}} r \left( \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right)^{-\frac{2z}{\sigma^2}}}{d \sigma^2} \quad (2.13)$$

cuyo valor es igualmente positivo, por lo que se trata de una función convexa, es decir, una función cuya pendiente es creciente.

La derivada de la opción de responsabilidad limitada respecto a la desviación típica de la rentabilidad del activo<sup>7</sup> proporciona el siguiente resultado:

$$\frac{\delta \text{orl}}{\delta \sigma} = -\frac{1}{2r\sigma + \sigma^3} \left( 4^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} d r \left( \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left( \text{Log}|2| - \text{Log} \left[ \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right] \right) \right) \quad (2.14)$$

cuyo valor resulta positivo para todo valor de la relación de endeudamiento inferior al máximo que aparece cuando se produce la situación de quiebra, según se justifica en el apéndice (2A) de este capítulo.

Finalmente, la derivada de la opción de responsabilidad limitada respecto a la tasa de interés libre de riesgo<sup>8</sup> proporciona el siguiente resultado:

$$\frac{\delta \text{orl}}{\delta r} = \frac{1}{r} \left( 2^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \left( \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right)^{-1 - \frac{2r}{\sigma^2}} \left( \text{Log}|2| - \text{Log} \left[ \frac{2r + \sigma^2}{dr} \right] \right) \right) \quad (2.15)$$

cuyo valor es negativo, conclusión a la que se llega siguiendo un camino similar al utilizado en el apéndice (2A) para justificar el signo positivo de la derivada anterior.

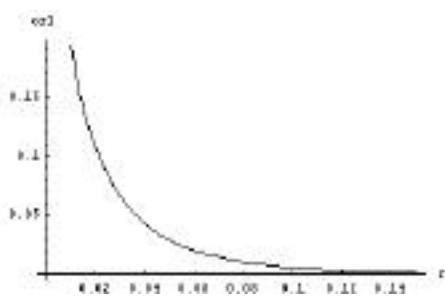
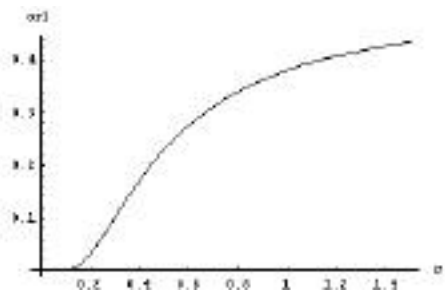
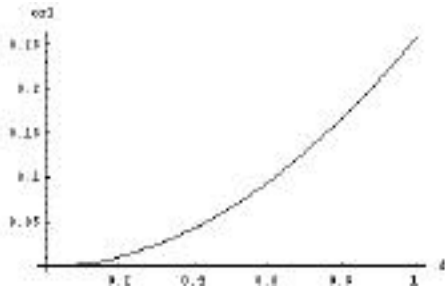
A parte de los signos de las derivadas, merece destacarse que la función de la opción de responsabilidad limitada presenta dos asíntotas: cuando la desviación típica tiende a infinito, el valor de la opción de responsabilidad limitada tiende al valor de la relación de endeudamiento  $d$ ; y cuando el valor de la tasa de interés libre de riesgo tiende a infinito, el valor de la opción de responsabilidad limitada tiende a cero.

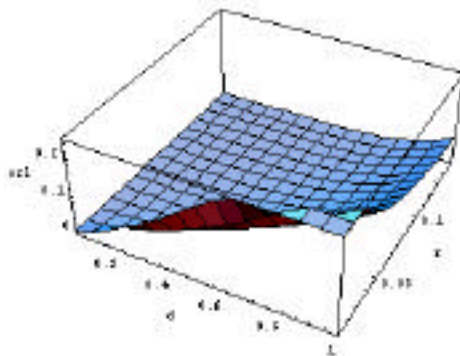
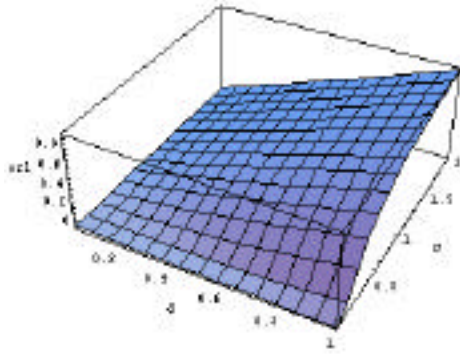
<sup>7</sup> La derivada de una opción con respecto a la volatilidad del activo subyacente es frecuentemente conocida como *vega* en la literatura sobre la materia.

<sup>8</sup> La derivada de una opción con respecto a la tasa de interés libre de riesgo es frecuentemente conocida como *rho* en la literatura sobre la materia.

A continuación, puede verse una representación gráfica de la función de la opción de responsabilidad limitada en la que las variables, cuando se parametrizan, toman los valores siguientes:

$$d=0,5 \quad \sigma = 0,25 \quad r = 0,03$$





## 2.8 LAS ACCIONES COMO UNA OPCIÓN DE COMPRA PERPETUA Y DE BARRERA

Puede justificarse que la suma del valor del activo con la opción de responsabilidad limitada equivale a una *opción de compra americana perpetua* sobre el activo con una barrera inferior de salida igual al valor máximo del activo en el que se declara la quiebra y una compensación (*rebate*) igual al valor de la deuda. Por tanto, las acciones pueden concebirse como la diferencia entre el valor de la opción de compra perpetua y de barrera y el endeudamiento personal de los accionistas en condiciones de responsabilidad ilimitada.

Veamos el mecanismo que establece esta opción: cuando el activo alcanza el valor de la barrera y se produce la situación de quiebra, la opción desaparece. Por su parte, la

compensación permite a los accionistas eliminar su endeudamiento personal, es decir, los accionistas pierden sus derechos sobre el activo y reciben una cantidad que les permite saldar sus deudas con los acreedores. En consecuencia, el valor de las acciones resulta igual a cero.

La igualdad:

$$\text{Opción de barrera con compensación} = \text{Activo} + \text{ORL}$$

se demuestra fácilmente a partir del momento en que a su vez se ha demostrado (véase apéndice 2B) que la opción de barrera perpetua, *OPB*, que incluye una compensación igual al valor de la deuda resulta a su vez igual a la siguiente expresión:

$$OPB = A + \frac{DN}{1+\gamma} - \frac{A}{\gamma} \left( \frac{1}{1+\gamma} \right)^{-\gamma} \quad (2.16)$$

donde basta observar que el primer sumando es el valor del activo y el segundo sumando el valor de la opción de responsabilidad limitada.

Como resulta lógico, el valor de las acciones, *S*, también puede medirse como la suma algebraica del valor del activo con el valor de las deudas y el valor de la opción de responsabilidad limitada:

$$S = A - DN + \text{ORL} \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta que el valor efectivo de las deudas, *D*, consiste en la diferencia entre su valor nominal y el valor de la opción de responsabilidad limitada:

$$D = DN - \text{ORL} \quad (2.18)$$

es inmediato constatar que la suma del valor de mercado de las acciones, *S*, con el valor de mercado de la deuda, *D*, resulta igual al valor de mercado del activo. Por tanto, estamos ante

un caso en que, debido a la ausencia de imperfecciones del mercado y, más específicamente, a asimetrías en costes de transmisión de la renta (puesto que, en realidad, no se han introducido en este modelo costes de transmisión de renta), se cumple la primera proposición de Modigliani y Miller (1958): la relación de endeudamiento no altera el valor de la empresa, es decir, sea cual sea la relación entre financiación ajena y financiación propia, el valor total de los títulos emitidos por la empresa (deuda y acciones) es constante e igual al valor de mercado del activo<sup>9</sup>.

## 2.9 EL COSTE DEL ENDEUDAMIENTO EN UN HORIZONTE PERPETUO

### 2.9.1 EL COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA

El valor de la opción de responsabilidad limitada que los acreedores venden a los accionistas permite calcular el interés efectivo en condiciones de riesgo. Teniendo en cuenta que consideramos un horizonte perpetuo, podemos escribir:

$$k \cdot (DN - ORL) = r \cdot DN \quad (2.19)$$

siendo

$(DN - ORL)$  = cifra que la empresa recibe de los acreedores, financiación ajena (tal como ya se ha definido en la ecuación (2.18))

$DN \cdot r$  = interés a pagar a los acreedores

$k$  = tipo de interés efectivo que incluye la prima por el riesgo

$r$  = tipo de interés libre de riesgo

---

<sup>9</sup> Véase, también, Brealey y Myers (1996), cap. 17.

Por lo tanto, el coste del endeudamiento es:

$$k = r \frac{DN}{(DN - ORL)} \quad (2.20)$$

Es decir,

$$k = r \frac{1}{1 - \frac{ORL}{DN}} \quad (2.21)$$

A partir de esta expresión, sustituyendo la opción de responsabilidad limitada por su valor según (2.1) y teniendo en cuenta que según (2.2)

$$\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$$

llegamos a:

$$k = r \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} \frac{1 + \frac{2r}{\sigma^2}}{\frac{2r}{\sigma^2} d}} \quad (2.22)$$

Donde  $d$  es el coeficiente de endeudamiento, definido en la ecuación (2.3).

Por otra parte, la relación establecida por la ecuación (2.19), se completa con la siguiente:

$$D \cdot k = (D + ORL) \cdot r \quad (2.23)$$

que establece la igualdad entre el producto del coste efectivo de la financiación ajena por la deuda efectiva y la tasa de interés libre de riesgo por la deuda nominal.



### 2.9.2 LA RENTABILIDAD EXIGIDA POR LOS ACCIONISTAS

Supongamos que se conoce la rentabilidad exigida al activo,  $\bar{R}_A$ , y su valor de mercado,  $A$ . El beneficio esperado por los accionistas en caso de cumplirse las expectativas de rentabilidad es:

$$\bar{B}_S = \bar{R}_A A - r DN \quad (2.24)$$

El valor de mercado de las acciones, según se ha visto en el apartado 2.8, es el resultado de restar el valor de las deudas al valor del activo y sumarle el valor de la opción de responsabilidad limitada. Por tanto, la rentabilidad esperada por los accionistas en un mercado en equilibrio,  $\bar{R}_S$ , es decir, la rentabilidad exigida es:

$$\bar{R}_S = \frac{\bar{R}_A A - r DN}{A - DN + ORL} \quad (2.25)$$

Normalizando para un valor del activo igual a la unidad, resulta:

$$\bar{R}_S = \frac{\bar{R}_A - r d}{1 - d + orl} \quad (2.26)$$

Se demuestra, mediante unas sencillas operaciones algebraicas, que el promedio de los valores de mercado de deuda y acciones ponderado, respectivamente, por el coste de la financiación ajena y el coste de la financiación propia o rentabilidad exigida por los accionistas resulta igual a la rentabilidad del activo:

$$k \frac{DN - ORL}{A} + \bar{R}_S \frac{A - DN + ORL}{A} = \bar{R}_A \quad (2.27)$$

Igualmente, se demuestra (véase apéndice 2C) que la rentabilidad exigida por los accionistas resulta igual a la rentabilidad del activo, (esto es, la rentabilidad de una empresa no endeudada), más el cociente entre el valor de mercado de la deuda y el valor de mercado de las acciones multiplicado por la diferencia entre la rentabilidad del activo y el coste de la financiación ajena:

$$\bar{R}_S = \bar{R}_A + \frac{DN - ORL}{A - DN + ORL} (\bar{R}_A - k) \quad (2.28)$$

resultado que coincide con la segunda propuesta de Modigliani y Miller (1958) referida a la rentabilidad de las acciones de una empresa endeudada, siendo en este caso el endeudamiento en condiciones de riesgo.

## 2.10 ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DEL COSTE DEL ENDEUDAMIENTO

### 2.10.1 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DEL COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA

Para un activo normalizado igual a la unidad, el coste de la financiación ajena es función de la relación de endeudamiento y de la opción de responsabilidad limitada, resultando creciente con respecto a ambas variables. Si tenemos en cuenta las variables de las que a su vez depende del valor de la opción de responsabilidad limitada, el coste de la financiación ajena es función de la relación de endeudamiento,  $d$ , la desviación típica de la rentabilidad del activo,  $\sigma$ , y la tasa de interés de los activos libres de riesgo,  $r$ . Veamos su comportamiento en relación a cada una de estas variables.

La expresión de la derivada del coste de la financiación ajena respecto a la relación de endeudamiento,  $d$ , es:

$$\frac{\delta k}{\delta d} = \frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} r^2 \left(\frac{2r+\sigma^2}{dr}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}}{\left(4^{\frac{r}{\sigma^2}} \sigma^2 - dr \left(\frac{2r+\sigma^2}{dr}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\right)^2} \quad (2.29)$$

cuyo valor es, evidentemente, positivo.

Derivando  $k$  respecto a la desviación típica, se obtiene:

$$\frac{\delta k}{\delta \sigma} = - \frac{1}{\sigma \left(4^{\frac{r}{\sigma^2}} \sigma^2 - dr \left(\frac{2r+\sigma^2}{dr}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\right)^2} \left(2^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} dr^2 \left(\frac{2r+\sigma^2}{dr}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \left(\log[2] - \log\left[\frac{2r+\sigma^2}{dr}\right]\right)\right) \quad (2.30)$$

A partir del análisis del término  $\log 2 - \log \frac{2r+\sigma^2}{dr}$  que se realiza en el apéndice 2D, puede decirse que el valor de esta derivada es positivo para todo valor de la relación de endeudamiento inferior al máximo que se alcanza en la situación de quiebra. Dada esta situación, el valor de esta derivada resulta nulo.

A continuación, puede verse una representación gráfica de la función del coste de la financiación ajena en la que las variables, cuando se parametrizan, toman los valores siguientes:

$$d = 0,5 \quad \sigma = 0,25 \quad \text{y} \quad r = 0,03.$$

