CAPITULO 6. MODELIZACIÓN DE HORIZONTES FINITOS

6.1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este capítulo consiste en elaborar un modelo que permita determinar la rentabilidad exigida por la financiación ajena en un horizonte finito. Introducimos las siguientes hipótesis:

1) Los accionistas pueden rescatar la deuda antes de su vencimiento, pero sólo la pueden comprar a precio de mercado. Por lo tanto, el rescate no afecta al valor y permanecerá neutral en nuestro análisis.

2) Suponemos que en el mercado existe suficiente flexibilidad para que los accionistas puedan sustituir a los acreedores actuales por otros nuevos, si deciden no renovar las deudas a su vencimiento.

Además, mantenemos en este capítulo la hipótesis de pago continuo de intereses. En un contexto caracterizado por pagos mensuales de intereses, esta hipótesis no supone una simplificación excesiva y, por otra parte, facilita la comparación del horizonte finito con el horizonte perpetuo[1].

Este capítulo se inicia con el análisis de la relación entre la quiebra y el vencimiento de la deuda, retomando, pues, un tema ya considerado en el capítulo 2, que ahora se amplía para dar cabida en este trabajo a modelos de horizontes finitos.

[1] En el apartado 2.1.1 hemos comparado la quiebra desde el punto de vista del modelo de Black y Scholes con la quiebra desde el punto de vista de la opción de responsabilidad limitada perpetua situándonos en un horizonte monoperiódico al final del cual se pagaban los intereses. Sin embargo, para horizontes más lejanos se aproxima más a la realidad la hipótesis del pago continuo de intereses que la hipótesis de cupón cero.

A continuación, estudiamos qué contratos resultan necesarios para transformar el horizonte perpetuo de la financiación ajena en un conjunto de horizontes finitos. Una vez se ha calculado el valor de estos contratos, algunos de los cuales se formalizan mediante opciones de barrera, es inmediato determinar la prima por el riesgo que los accionistas deben satisfacer a los acreedores y calcular el coste de la financiación ajena. Se complementa este capítulo con el cálculo del valor de las acciones y la rentabilidad exigida por los accionistas.

6.2 QUIEBRA Y VENCIMIENTO DE LA DEUDA

El propósito de este apartado es relacionar la quiebra con el vencimiento finito de la deuda. Como paso previo, analizamos las consecuencias del ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada.

6.2.1 EL EJERCICIO ANTICIPADO DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA

Hemos visto en la ecuación (2.9), en el momento óptimo para declarar la quiebra, la diferencia entre el valor de la deuda y el valor del activo resulta igual al valor que toma la opción de responsabilidad limitada en el momento de la quiebra. Llegábamos a esta igualdad aplicando los resultados de Merton (1973) sobre el valor del activo que justifica el ejercicio de una opción de venta americana perpetua. A continuación, vemos las consecuencias que se derivan de ejercitar la opción de responsabilidad limitada perpetua para un valor superior del activo. De la ecuación (2.9) se desprende que, en el momento de la quiebra, la suma del valor del activo, A^*, con el valor de la opción de responsabilidad limitada, ORL^*, resulta igual al valor de la deuda nominal:

$$A^{*} + ORL^{*} = DN \tag{6.1}$$

Supongamos que los accionistas deciden declarar la quiebra para un valor del activo superior a A^{*}, que denominaremos $\vec{A}$. Tenemos entonces:

$$\vec{A} + O\vec{R}L > DN \tag{6.2}$$

donde $O\vec{R}L$ indica el valor de la opción de responsabilidad limitada concordante con $\vec{A}$. La consecuencia del ejercicio de la opción de responsabilidad limitada es que los acreedores reciben el activo de la empresa y deben condonar la deuda a los accionistas. En este caso, los acreedores pueden desarrollar la siguiente estrategia:

a. Venden el activo recibido y obtienen $\vec{A}$ unidades monetarias.

b. Invierten DN unidades monetarias en deuda perpetua.

c. Emiten una opción de responsabilidad limitada perpetua idéntica a la que poseían los accionistas que acaban de ejercitarla.

Los pasos b) y c) pueden resumirse en prestar en las mismas condiciones en que lo habían hecho en su momento a la empresa que acaba de declarar la quiebra. La consecuencia de esta operación es que los acreedores han obtenido un resultado positivo, sin variar su posición de riesgo. Sus ingresos $\left(\vec{A} + OR\vec{L}\right)$ son, en efecto, superiores al pago realizado, *DN*. Los accionistas, por su parte, han obtenido una pérdida equivalente a la ganancia de los acreedores, pues han entregado el activo y han renunciado a continuar disponiendo de la opción de responsabilidad limitada a cambio de anular una deuda cuyo valor en este momento es inferior a la suma de los valores del activo y la opción de responsabilidad limitada. Por tanto, sólo el cumplimiento de la ecuación (6.1) justifica la declaración de quiebra.

6.2.2 VENCIMIENTO FINITO DE LA DEUDA Y QUIEBRA

Como hemos visto en la ecuación (2.7), el valor del activo que da lugar a la declaración de quiebra cuando la opción de responsabilidad limitada es de horizonte perpetuo, es:

$$\frac{\gamma \quad DN}{1+\gamma}$$

Recordemos también que, según la ecuación (2.8), el valor de la opción de responsabilidad limitada perpetua cuando se declara la quiebra es:

$$\frac{DN}{1+\gamma}$$

Sea una empresa que se ha endeudado a un horizonte finito de modo que la totalidad de su deuda vence a final del período en curso, *T*. El valor de la opción de responsabilidad limitada en el momento del vencimiento es:

$$Máx\left[0, DN - A_T\right] \qquad (6.3)$$

Supongamos que al llegar el vencimiento de la deuda tenemos:

$$\frac{\gamma \quad DN}{1+\gamma} < A_T < DN \qquad (6.4)$$

En estas circunstancias, similares a las de quiebra en el vencimiento de la opción monoperiódica de Black y Scholes, el valor de las acciones es igual a cero y los acreedores experimentan una pérdida igual a la diferencia entre el valor de la deuda y el valor del activo.

Resulta entonces que la quiebra está justificada desde el punto de vista de la opción de responsabilidad limitada de vencimiento finito. Sin embargo, no lo está desde el punto de vista de la opción de responsabilidad limitada perpetua. Los accionistas pueden, ciertamente, optar por la declaración de quiebra, pero el hecho de que esta empresa es financieramente viable desde el punto de vista de la opción de responsabilidad limitada perpetua abre otra posibilidad que consiste en la siguiente estrategia como alternativa a la quiebra:

a. Los accionistas adquieren la opción de responsabilidad limitada perpetua a los acreedores.

b. En pago de la opción perpetua[2] que acaban de adquirir les entregan la opción de horizonte finito que vence en este momento, cuyo valor es la diferencia entre las deudas y el activo, pagando en efectivo la diferencia, dado que por (6.4):

$$ORL_{\infty T} > DN - A \tag{6.5}$$

c. Continúan como accionistas

Como resultado de esta estrategia los accionistas obtienen:

$$A_T + ORL_{\infty T} - DN$$

tras haber pagado a los acreedores:

$$ORL_{\infty T} - \left(DN - A_T\right)$$

[2] Aquí, el subíndice de $ORL_{\infty T}$ especifica que se trata del valor de la opción perpetua al final de *T*. A lo largo del trabajo *ORL* significa, como se ha visto, el valor de la opción de responsabilidad limitada perpetua en el momento al que nos estamos refiriendo. En este apartado, se ha estimado conveniente introducir esta especificación adicional y referirnos a la limitación de responsabilidad en diversos horizontes.

Se trata de una transacción equitativa cuyo valor neto es cero. Los accionistas han recuperado las acciones que perdían con la quiebra, pero han debido pagar la opción de responsabilidad limitada perpetua que han adquirido. Los acreedores han emitido esta opción, aceptando como parte del pago de la misma el asumir la pérdida que les ha producido la opción de responsabilidad limitada de horizonte finito que acaba de vencer.

6.3 LA TRANSFORMACIÓN DEL HORIZONTE INFINITO EN UN HORIZONTE FINITO

6.3.1 POSICIONES DE ACREEDORES Y ACCIONISTAS

Supongamos que acreedores y accionistas están de acuerdo en la amortización de la proporción α_T de la deuda al final del período T, es decir, en que $\alpha_T DN$ unidades monetarias de la deuda venzan al final de T. En tal caso, los accionistas pagarán a los acreedores $\alpha_T DN$ unidades monetarias al final de T, salvo que la empresa haya quebrado previamente. La transformación de una parte del contrato de deuda perpetua en un contrato de horizonte finito requiere un examen previo de las posiciones financieras que accionistas y acreedores tienen como consecuencia del contrato de deuda perpetua con opción de responsabilidad limitada.

Las posiciones de ambas partes en la deuda perpetua son: la deuda constituye un activo financiero para los acreedores y un pasivo para los accionistas. La opción de responsabilidad limitada por su parte constituye un activo financiero para los accionistas y un pasivo –en el sentido de que se hallan en posición de vendedores de esta opción- para los acreedores.

Teniendo en cuenta estas posiciones, puede decirse que la transformación de la proporción α_T de la deuda perpetua con opción de responsabilidad limitada en deuda de horizonte finito, igualmente con opción de responsabilidad limitada, requiere:

1. Eliminar la proporción α_T de la deuda perpetua concebida como título libre de riesgo.

2. Eliminar la parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada en el momento del vencimiento de la proporción α_T de la deuda.

A final del período, tras la amortización de la deuda, los accionistas son propietarios del activo y de la proporción $(1-\alpha_T)$ de la opción de responsabilidad limitada. En consecuencia, declaran la quiebra o bien proceden a la reorganización la deuda descrita en el apartado 6.2.2, si:

$$A_T + (1-\alpha_T)\ ORL_{\infty T} \leq DN \qquad (6.6)$$

Esta circunstancia, que supone una opción adicional para los accionistas, debe recogerse adecuadamente en el modelo.

6.3.2 LA ELIMINACIÓN DE LA PARTE PROPORCIONAL DE LA DEUDA PERPETUA COMO TÍTULO LIBRE DE RIESGO

El acuerdo entre accionistas y acreedores para pagar y cobrar la cantidad $\alpha_T DN$ al final del período T puede formalizarse por medio de un contrato *forward* sobre $\alpha_T DN$ unidades monetarias de deuda perpetua sin limitación de responsabilidad. El vencimiento del contrato se sitúa, lógicamente, al final de T. Los acreedores entran en el contrato en posición de vendedores y los accionistas en posición de compradores. La deuda perpetua tiene un rendimiento explícito igual a la tasa de interés libre de riesgo, por lo que el precio *forward* es igual al precio inicial[3]. Este contrato da lugar a que, al final de *T*, los accionistas paguen a los acreedores $\alpha_T DN$ unidades monetarias, a cambio de la amortización de la deuda entendida como activo libre de riesgo, ya que la opción de responsabilidad limitada se ha tratado por separado.

En caso de quiebra de la empresa con anterioridad al final de *T*, este contrato *forward* resulta neutral. Los accionistas continúan ciertamente obligados a pagar $\alpha_T DN$ unidades monetarias a los acreedores, pero éstos, a su vez, están obligados a entregarles deuda perpetua por el mismo importe. No pudiendo entregar la propia deuda de la empresa, que ha desaparecido como consecuencia del ejercicio de la opción de responsabilidad limitada asociada a la quiebra, vienen obligados a entregar cualquier otro tipo de deuda perpetua sin limitación de responsabilidad y, por tanto sin riesgo, por ejemplo deuda del Estado. La inviabilidad práctica de este intercambio se soluciona previendo que en caso de quiebra el contrato *forward* sea neutralizado mediante un nuevo contrato *forward* de sentido contrario. En este nuevo contrato, accionistas y acreedores adoptan posiciones de signo opuesto a las que tenían, es decir, los accionistas toman posición de venta y los acreedores adoptan posición de compra, y cancelan así sus posiciones anteriores. Siendo cero el valor neto de ambos contratos en todo momento, estas operaciones resultan neutrales.

6.3.3 LA ELIMINACIÓN DE LA PARTE PROPORCIONAL DE LA OPCIÓN DE RESPONSABILIDAD LIMITADA EN EL VENCIMIENTO DE UNA AMORTIZACIÓN FINANCIERA

---

[3] El precio *forward* (F_0) para un horizonte *T* de un activo financiero que proporciona un rendimiento explícito igual a la tasa *q*, es $F_0 = S_0 \; e^{(r-q)T}$, donde S_0 es el precio actual del activo en el mercado al contado (Hull, 2000, p.59). En el caso que nos ocupa, tenemos $q = r$.

Se trata de eliminar en el horizonte *T*, donde situamos la amortización financiera $\alpha_T DN$, la parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada $\alpha_T ORL$, pues, al haber vencido esta cifra de endeudamiento, carece de sentido mantener la limitación de responsabilidad asociada. Debe, pues, garantizarse que en *T* los acreedores vean cancelada la proporción α_T de la opción de responsabilidad limitada que emitieron en el inicio del crédito y que fue adquirida por los accionistas. Además, si se pretende que el coste de la financiación ajena quede definido en condiciones de certeza, esta renuncia de los accionistas debe efectuarse a cambio de un precio cierto que los accionistas pagan a los acreedores en el momento inicial del crédito.

Existe un contrato que garantiza la entrega de un activo en un fecha determinada a cambio de un precio cierto en el momento inicial: una opción de compra europea con precio de ejercicio igual a cero y que, por tanto, se ejercerá con seguridad a su vencimiento. Establecemos como subyacente de esta opción un activo que es igual a la proporción α_T de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar:

$$J_T = \alpha_T \frac{DN}{1+\gamma} \left[\frac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ \ DN} \right]^{-\gamma} \tag{6.7}$$

Debe subrayarse que J_T, el activo subyacente de esta opción[4], presenta un valor igual en todo momento a la proporción α_T de la opción de responsabilidad limitada sin

[4] El subíndice *T* especifica que este subyacente es función de α_T (la proporción de la deuda que vence en *T*), pero no indica que se trate de un valor referido al momento *T*. De ahí que en la ecuación (6.7) no se presente como función de A_T, que sí indica el valor del activo de la empresa en *T*, sino como función de *A*, el valor del activo de la empresa en cualquier momento del tiempo.

ejercitar. Por tanto, no es la propia opción de responsabilidad limitada. Caso de haber elegido la opción de responsabilidad limitada como activo subyacente, al tratarse de una opción americana se ejercitaría antes que entregarse sin recibir nada a cambio en el vencimiento de la opción de compra europea con precio de ejercicio cero.

Con objeto de anular la entrega de J_T en caso de quiebra de la empresa, añadimos a esta opción de compra europea una barrera superior de salida que garantiza que, en caso de que la opción de responsabilidad limitada alcance el valor que determina la declaración de quiebra, la opción de compra europea queda anulada. Recordando el valor de la opción de responsabilidad limitada en el momento de la quiebra [ecuación (2.8)], la barrera a incorporar, H_T, es:

$$H_T = \alpha_T \ \frac{DN}{1+\gamma} \tag{6.8}$$

Se trata de una barrera superior, puesto que la opción de responsabilidad limitada alcanza su nivel máximo en el momento de la quiebra. La finalidad de esta barrera consiste en eliminar la opción europea en el caso de que la empresa quiebre antes de su vencimiento. Combinando el activo subyacente J_T con la barrera H_T, se consigue crear una opción que asegura que, llegado un vencimiento parcial de la deuda, la opción de responsabilidad limitada se reducirá en la misma proporción que la deuda. La barrera, por su parte, asegura que esta opción será eliminada en caso de quiebra de la empresa. En lo sucesivo denominamos a esta opción **opción de compra de barrera**.

CUADRO nº 1:

CARACTERÍSTICAS DE LA OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA

Tipo de opción		COMPRA
Ejercicio anticipado		NO (opción europea)
Vencimiento		*T*
Activo subyacente (J_T)		$\alpha_T \dfrac{DN}{1+\gamma}\left[\dfrac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ \ DN}\right]^{-\gamma}$ (valor de ORL sin ejercitar)
Precio de ejercicio		*Cero*
Barrera	Tipo	Superior de salida
	Valor H_T	$\alpha_T \dfrac{DN}{1+\gamma}$
Emisores		Accionistas
Propietarios		Acreedores
Resumen		Opción de compra europea de barrera superior de salida y precio de ejercicio igual a cero.

6.3.4 LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN *T*

La desigualdad (6.6) muestra como el endeudamiento a vencimiento finito induce a declarar la quiebra para un valor del activo más elevado que el correspondiente a la opción perpetua. Recordemos esta desigualdad:

$$A_T + \left(1-\alpha_T\right)\, ORL_T \leq DN$$

Para incorporar esta propiedad al modelo, añadimos a las opciones anteriores una nueva opción, que denominamos **opción de quiebra en *T***. Se trata de una opción europea de venta, emitida por los acreedores y adquirida por los accionistas, cuyo activo subyacente consta de la suma del activo de la empresa más la proporción (1-α) de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar. La expresión del subyacente, que designamos por *Q*, es, pues:

$$Q = A + \frac{DN\,\left(1-\alpha_T\right)}{1+\gamma}\left(\frac{A\,\left(1+\gamma\right)}{DN\,\gamma}\right)^{-\gamma} \tag{6.9}$$

El precio de ejercicio de la opción de quiebra en *T* es el valor nominal de la deuda. Para garantizar su anulación en caso de quiebra previa de la empresa, se le añade una barrera inferior de salida que se activa cuando el valor del activo y, consecuentemente, el valor de la opción de responsabilidad limitada alcanzan el límite de la quiebra. Por tanto, el valor de la barrera, H'_T, es:

$$H'_T = \frac{\gamma\,\,DN}{1+\gamma} + \left(1-\alpha_T\right)\,\frac{DN}{1+\gamma} \tag{6.10}$$

Realizando operaciones resulta:

$$H'_T = DN - \frac{\alpha_T \; DN}{1+\gamma} \tag{6.11}$$

La introducción de esta barrera es posible dado que el activo subyacente de esta opción, $A+(1-\alpha)\ ORL$, resulta ser, como se demuestra en el apéndice 6D, una función monótona creciente de A para cualquier valor del activo superior al que justifica la declaración de quiebra desde el punto de vista de la opción de responsabilidad limitada perpetua. En el cuadro nº 2 sintetizamos las características de esta opción.

CUADRO nº 2:

CARACTERÍSTICAS DE LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN *T*

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de opción</td><td>VENTA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio anticipado</td><td>NO (opción europea)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vencimiento</td><td>T</td></tr>
<tr><td colspan="2">Activo subyacente</td><td>$A + (1-\alpha_T)\,\frac{DN}{1+\gamma}\left[\frac{(1+\gamma)\;A}{\gamma\;\;DN}\right]^{-\gamma}$
(activo de la empresa más la proporción (1-α_T) de la opción de responsabilidad limitada)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Precio de ejercicio</td><td>DN</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Barrera</td><td>Tipo</td><td>inferior de salida</td></tr>
<tr><td>Valor H'_T</td><td>$DN - \frac{\alpha_T \; DN}{1+\gamma}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Emisores</td><td>Acreedores</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propietarios</td><td>Accionistas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resumen</td><td>Opción de venta europea con barrera inferior de salida y precio de ejercicio igual al valor nominal de la deuda.</td></tr>
</table>

6.3.5 LA INTERACCIÓN DE CONTRATOS EN EL VENCIMIENTO DE LA DEUDA FINITA

Describimos en este apartado la interacción de los contratos que determinan, en este modelo, el vencimiento finito de la deuda, desde el punto de vista de los acreedores, en primer lugar, y ,a continuación, desde el punto de vista de los accionistas.

El cuadro número 2 describe cómo la proporción α_T de la posición inicial de los acreedores se transforma en la cantidad de efectivo $\alpha_T DN$ a final del período T. Al final de T, la posición de los acreedores se compone de un préstamo perpetuo como activo financiero y, como pasivo, de la opción de responsabilidad limitada que han emitido. El contrato *forward* con los accionistas transforma el préstamo perpetuo en liquidez. Por otra parte, el ejercicio de la opción de compra de barrera elimina la parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada. En consecuencia, los acreedores perciben la amortización financiera prevista y ninguna obligación adicional queda vigente.

CUADRO nº 3: PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE LA DEUDA PERPETUA CON RESPONSABILIDAD LIMITADA EN UNA AMORTIZACIÓN FINANCIERA (PROPORCIÓN α_T) DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ACREEDORES

Posiciones de los acreedores	
Préstamo perpetuo	$\alpha_T DN$
ORL	- $\alpha_T ORL$
Contrato *forward*	$\alpha_T DN$ (efectivo) - $\alpha_T DN$ (préstamo perpetuo)
OCB	$\alpha_T ORL$
Σ	$\alpha_T DN$ (efectivo)

Como consecuencia de las operaciones financieras descritas en el cuadro nº 3, los acreedores han visto transformado su activo financiero $\alpha_T DN$ en un cobro y los accionistas han visto transformado su pasivo $\alpha_T DN$ en un pago, salvo que se haya producido previamente una situación de quiebra. En tal caso, el contrato *forward*, cuyo valor neto es cero, se ha eliminado mediante un nuevo contrato *forward*, en el que ambas partes han tomado posiciones contrarias a las que tenían en el contrato anterior. En cuanto a la parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada queda eliminada por el ejercicio cierto de la opción de compra de barrera, que, no obstante, se elimina también en caso de quiebra.

Cuadro nº 4: INTERACCIÓN DE CONTRATOS EN EL VENCIMIENTO DE LAS DEUDAS DE HORIZONTE FINITO				
		A + ORL≤ DN	***A + ORL > DN***	
Bloque 1 **ORL**	**Activo**	***A***	***A***	
	Deudas	***- DN***	***-DN***	
	ORL	***DN - A***	***ORL***	
	Σ	***0***	***A+ORL-DN***	
Bloque 2 **OCB**	**OCB**	eliminada por la barrera	-α ***ORL***	
	Σ	***0***	***A + (1-α) ORL -DN***	
		0	***A + (1-α) ORL ≤ DN***	***A + (1-α) ORL >DN***
Bloque 3 **OQ**	**Activo**		***A***	***A***
	Deudas		***-DN***	***-DN***
	ORL		***(1-α) ORL***	***(1-α) ORL***
	OQ		***DN – [A + (1-α) ORL]***	***0***
	Σ	***0***	***0***	***A+(1-α) ORL-DN***
Bloque 4 ***Forward***	***Forward***	neutralizado	neutralizado	**+ α *DN*** **(reducción de la deuda por amortización)**
				-α *DN* **(reducción de efectivo por amortización deuda)**
VALOR ACCIONES		***0***	***0***	***A + (1-α) ORL- (1-α) DN*** **-α *DN* (efectivo)**

El cuadro número 4 describe, desde el punto de vista de los accionistas, la interacción de contratos en el vencimiento de la deuda de horizonte finito. Para facilitar su lectura, se presenta dividido en cuatro bloques que recogen, respectivamente, la función de la opción de responsabilidad limitada de horizonte perpetuo, la función de la opción de compra de barrera, la función de la opción de quiebra en *T* y, finalmente, la función del contrato *forward*. El bloque número 1 describe como, en caso de ser la suma del valor del activo de la empresa y la opción de responsabilidad limitada inferior a la deuda nominal, los accionistas proceden a ejercitar esta opción declarando la quiebra. Las acciones pasan a tener valor cero, y las barreras introducidas en el modelo eliminan tanto la opción de compra de barrera como la opción de quiebra en *T*. Si la suma del valor del activo y la opción de responsabilidad limitada es superior a la deuda nominal, la opción de responsabilidad limitada no se ejerce y los accionistas continúan poseyéndola. Entremos en el bloque número 2. Si no se ha declarado la quiebra de la empresa, la opción de compra de barrera es ejercida y la proporción α_T de la opción de responsabilidad limitada queda eliminada. En consecuencia, los accionistas poseen en este momento el activo y la proporción $(1\text{-}\alpha)$ de la opción de responsabilidad limitada, cifra que deben comparar con la deuda nominal, lo cual nos conduce al bloque número 3. Si resulta que, al final del período *T*, la suma del valor del activo y la proporción $(1\text{-}\alpha)$ de la opción de responsabilidad limitada es inferior a la deuda nominal, los accionistas proceden a ejercer la opción de quiebra en *T*, declarando la quiebra. En caso contrario, como refleja el bloque número 4, proceden a realizar la amortización financiera convenida, que hemos introducido en el modelo por medio de un contrato *forward* sobre la proporción α_T de la deuda. El valor cero del contrato *forward* permite neutralizarlo en caso de quiebra de la empresa como se ha señalado en el apartado 6.3.2.

6.4 EL VALOR DE LA OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA

La opción de compra de barrera tiene como activo subyacente la opción de responsabilidad limitada. Antes de proceder a valorar la opción de compra de barrera debe procederse a estudiar el proceso estocástico que sigue su activo subyacente. Si asumimos la hipótesis habitual de que el activo de la empresa sigue un proceso estocástico de Ito, el proceso estocástico de la opción de responsabilidad limitada, al ser ésta función del activo de la empresa, puede determinarse aplicando el lema de Ito, lo cual se realiza en el apéndice 6A. Se demuestra en este apéndice que la desviación típica de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar es:

$$\sigma_J = \frac{2\ r}{\sigma_A} \tag{6.12}$$

que, lógicamente, es la desviación típica que se incorpora a la fórmula de la opción de compra de barrera. Este resultado se confirma por otra vía en el apéndice 6B. Como se desprende de la ecuación (6.12), la desviación típica de J_T es función de la tasa de interés libre de riesgo y de la desviación típica del activo de la empresa, pero resulta independiente del horizonte temporal. En los apéndices 6A y 6B se deduce además, por diferentes vías, la expresión de la rentabilidad esperada de J_T.

En el apéndice 6C se determina el valor de la opción de compra europea de barrera con precio de ejercicio igual a cero y vencimiento en T, obteniéndose la expresión siguiente:

$$OCB_T = J - J\ N(x_1) - \left(\frac{H}{J}\right)^{\gamma} H\ N(-z_1) \tag{6.13}$$

donde:

$$\breve{\gamma} = \frac{2\ r}{\sigma_J^2} \tag{6.14}$$

$$x_1 = \frac{\ln\left[\frac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ \ DN}\right]^{-\gamma} + \left(r + \frac{\sigma_J{}^2}{2}\right)T}{\sigma_J\ \sqrt{T}} \tag{6.15}$$

$$z_1 = \frac{\ln\left[\frac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ \ DN}\right]^{\gamma} + \left(r + \frac{\sigma_J{}^2}{2}\right)T}{\sigma_J\ \sqrt{T}} \tag{6.16}$$

6.5 EL VALOR DE LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN *T*

En el apéndice 6E valoramos esta opción, obteniendo el siguiente resultado:

$$OQ = PB_{T1} - PB_{T2} + PB_{T3} - PB_{T4} \tag{6.17}$$

donde:

$$PB_{T1} = -Q\ \ N(-x') + DN\ \ e^{-r\ T}\ \ N(\sigma_Q\ \ \sqrt{T} - x') \tag{6.18}$$

$$PB_{T2} = -Q\ \ N(-x_1') + DN\ \ e^{-r\ T}\ \ N(\sigma_Q\ \ \sqrt{T} - x_1') \tag{6.19}$$

$$PB_{T3} = -\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^{\breve{\gamma}-1}\left[Q\ \left(\frac{H_T'}{Q}\right)^2\ N(z') - DN\ \ e^{-r\ T}\ \ N\left(z' - \sigma_Q\ \ \sqrt{T}\right)\right] \tag{6.20}$$

$$PB_{T4} = -\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^{\gamma-1} \left[Q \left(\frac{H_T'}{Q}\right)^{2} N(z_1') - DN\, e^{-rT} N\left(z_1' - \sigma_Q \sqrt{T}\right) \right] \tag{6.21}$$

donde:

$$x' = \frac{\ln\left(\frac{Q}{DN}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^{\,2}}{2}\right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \tag{6.22}$$

$$x_1' = \frac{\ln\left(\frac{Q}{H_T'}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^{\,2}}{2}\right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \tag{6.23}$$

$$z' = \frac{\ln\left(\frac{H_T'^{\,2}}{Q\; DN}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^{\,2}}{2}\right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \tag{6.24}$$

$$z_1' = \frac{\ln\left(\frac{H_T'}{Q}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^{\,2}}{2}\right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \tag{6.25}$$

y, según (6D.14):

$$\sigma_Q = \sigma_A \left[\left(q - \left(1 - q\right)\gamma\right)\right] \tag{6.26}$$

siendo según (6D.12):

$$q = \frac{A}{Q} \tag{6.27}$$

6.6 EL COSTE DE LA FINANCIACIÓN EN EL CASO DEL VENCIMIENTO FINITO DE LAS DEUDAS

Nos proponemos calcular el coste de la financiación correspondiente a la parte de las deudas de la empresa que vence a final del período T. Recordemos que la expresión que proporciona el coste de un proyecto de financiación a un horizonte T , k_T, es la siguiente:

$$b_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{b_t}{(1 + k_T)^t} \qquad (6.28)$$

donde b_t designa el flujo del proyecto correspondiente al período t.

Definamos, desde el punto de vista de los accionistas, los flujos de este proyecto de financiación. El flujo inicial consta de los siguientes elementos:

1) Parte proporcional de la deuda nominal: $\alpha_T\, DN$

2) Parte proporcional de la opción de responsabilidad limitada: J_T.

3) La opción de compra de barrera

4) La opción de quiebra en T

Por tanto:

$$b_0 = \alpha_T DN - \left(\alpha_T \quad ORL - OCB_T + OQ_T\right) \qquad (6.29)$$

Se observa en esta igualdad como los acreedores perciben de los accionistas la prima por el riesgo del crédito en el momento inicial: al nominal de la deuda le descuentan el importe de la opción de responsabilidad limitada, viéndose este descuento reducido por la opción de compra de barrera, como consecuencia de la limitación del horizonte, de modo que la prima neta por el riesgo es:

$$\left(\alpha_T \;\; ORL - OCB_T + OQ_T\right).$$

Los flujos intermedios ($0<t<T$) consisten simplemente en el producto del tipo de interés por la parte proporcional de la deuda nominal. El flujo final, a su vez, se obtiene añadiendo la devolución del capital a los intereses. Por tanto:

$$b_t = r.\ \alpha_T.\ DN \qquad \forall\ 0< t<T \tag{6.30}$$

$$b_T = (1+r)\alpha_T\, DN \tag{6.31}$$

Sustituyendo en (6.28), obtenemos:

$$\alpha_T DN - \alpha_T \;\; ORL + OCB_T - OQ_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{r \;\; \alpha_T \; DN}{\left(1+k_T\right)^t} + \frac{\alpha_T \; DN}{\left(1+k_T\right)^T} \tag{6.32}$$

y desarrollando la progresión geométrica del sumatorio resulta:

$$\alpha_T DN - \alpha_T \;\; ORL + OCB_T - OQ_t = r \;\; \alpha_T \; DN \left[\frac{1}{k_T} - \frac{1}{k_T\left(1+k_T\right)^T}\right] + \frac{\alpha_T \; DN}{\left(1+k_T\right)^T} \tag{6.33}$$

El coste conjunto de la financiación ajena, *k*, se obtiene aplicando (6.28) al conjunto de proyectos de financiación ajena, con lo que resulta la siguiente expresión:

$$DN - \sum_{T=1}^{n} \alpha_T \; ORL + \sum_{T=1}^{n} OCB_T - \sum_{T=1}^{n} Oq_T = \sum_{T=1}^{n} r \; \alpha_T \; DN \left[\frac{1}{k_T} - \frac{1}{k_T \left(1+k_T\right)^T} \right] + \sum_{T=1}^{n} \frac{\alpha_T \; DN}{\left(1+k_T\right)^T} \tag{6.34}$$

donde *n* indica el número de períodos a lo largo de los cuales se distribuyen los vencimientos de la financiación ajena.

6.7 VALOR DE LA EMPRESA Y RENTABILIDAD EXIGIDA POR LOS ACCIONISTAS

La introducción de diversos horizontes para la financiación ajena continua justificando la indiferencia de la política de endeudamiento desde el punto de vista de la creación de valor. Los valores de la deuda y las acciones son ahora:

$$D = DN - ORL + \sum_{T=1}^{n} OCB_T - \sum_{T=1}^{n} OQ_T \tag{6.35}$$

$$S = A - DN + ORL - \sum_{T=1}^{n} OCB_T + \sum_{T=1}^{n} OQ_T \tag{6.36}$$

Resultando evidente, al igual que en el apartado 2.8, que la suma de los valores de la deuda y las acciones proporciona el valor del activo de la empresa. Se cumple, por tanto, la primera proposición de Modigliani y Miller (1958). El intercambio equitativo de primas por el riesgo entre accionistas y acreedores sin alteración del valor de la empresa puede interpretarse como un caso de cumplimiento de la ley de conservación del valor, una generalización de la primera propuesta de Modigliani y Miller enunciada por Brealey y Myers (2000, p.477): "el valor de un activo es independiente de la naturaleza de los derechos que existen sobre el mismo".

La rentabilidad esperada por los accionistas en condiciones de equilibrio se forma a partir del beneficio esperado visto en la ecuación (2.24):

$$\overline{B}_S = \overline{R}_A \quad A - r \quad DN$$

y el valor de las acciones, por lo que esta rentabilidad es:

$$\overline{R}_S = \frac{\overline{R}_A - r \quad DN}{A - DN + ORL - \sum_{T=1}^{n} OCB_T + \sum_{T=1}^{n} OQ_T} \qquad (6.37)$$

Siguiendo los mismos pasos que han conducido a demostrar la ecuación (2.28), se demuestra que:

$$\overline{R}_S = \overline{R}_A + \frac{DN - ORL + \sum_{T=1}^{n} OCB_T - \sum_{T=1}^{n} OQ_T}{A - DN + ORL - \sum_{T=1}^{n} OCB_T + \sum_{T=1}^{n} OQ_T} \left(\overline{R}_A - k\right) \qquad (6.38)$$

es decir, la segunda proposición de Modigliani y Miller aplicada a este caso.

6.8 SIMULACIÓN

Se presenta, a continuación, una simulación sobre el comportamiento del valor de la opción de compra de barrera[5] y del coste de la financiación ajena en un horizonte finito. Los datos de partida son los siguientes:

A = 1000 um.

D = 500 um.

α_T = 50%

r = 3% anual

σ_A = 25% anual

T: desde 1 hasta 50 años.

El valor del 50% de α_T significa que el 50% de la deuda (250 u.m.) vence en los plazos indicados por *T*. El cuadro nº 5 presenta la evolución de los valores de la opción de compra de barrera y de la opción de quiebra en *T*. Podemos observar también en este cuadro la prima inicial por el riesgo formada por la suma de la opción de responsabilidad limitada y la opción de quiebra en *T* menos la opción de compra de barrera. El cuadro nº 6 presenta la evolución del coste de la financiación ajena para diversos horizontes finitos. Los gráficos números 1 y 2 traducen en figuras los cuadros 5 y 6.

[5] Los valores de la opción de compra de barrera obtenidos por medio de la hoja de cálculo elaborada para la simulación han sido comprobados con la hoja de cálculo *DerivGem* que acompaña el texto de Hull (2000).

CUADRO nº 5: OPCIONES Y PRIMA POR EL RIESGO EN *t=0* PARA LA FINANCIACIÓN AJENA

OPCIONES Y PRIMA POR EL RIESGO EN t=0 PARA LA FINANCIACIÓN AJENA

(sensibilidad para T)

A	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00
DN	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
T	1,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00
r	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300	0,0300
σ activo	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
σ J	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400	0,2400
ORL	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09	66,09
α	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
αORL	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453	33,0453
H(ocb)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
H	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510	127,5510
OCB	33,0453	31,6687	25,0710	18,6511	13,8223	10,3316	7,8044	5,9552	4,5854	3,5588	2,7814
H'	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490	372,4490
Q	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453	1033,0453
σQ	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343	0,2343
OQ	0,0263	1,4083	1,0824	0,6950	0,4554	0,3086	0,2154	0,1540	0,1122	0,0831	0,0624
α ORL-OCB+OQ	0,0263	2,7049	9,0567	15,0893	19,6784	23,0223	25,4563	27,2441	28,5722	29,5596	30,3264

CUADRO nº 6: COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA

COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA.					
HORIZONTE	NOMINAL	ORL	OCB	OQ	k
1 año	250	33,05	33,05	0,0263	3,01%
5 años	250	33,05	31,67	1,4083	3,24%
10 años	250	33,05	25,07	1,0824	3,43%
15 años	250	33,05	18,65	0,6950	3,52%
20 años	250	33,05	13,82	0,4554	3,57%
25 años	250	33,05	10,33	0,3086	3,56%
30 años	250	33,05	7,80	0,2154	3,56%
40 años	250	33,05	4,59	0,1122	3,54%
50 años	250	21,34	2,78	0,0624	3,52%
Infinito	250	21,34	0	0	3,36%

GRÁFICO nº 1

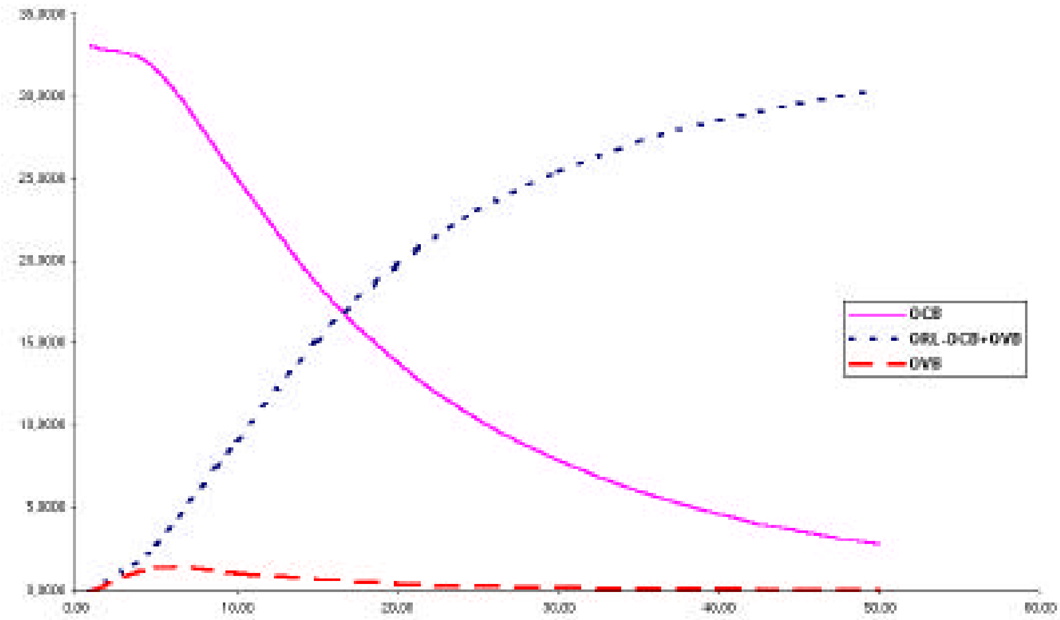
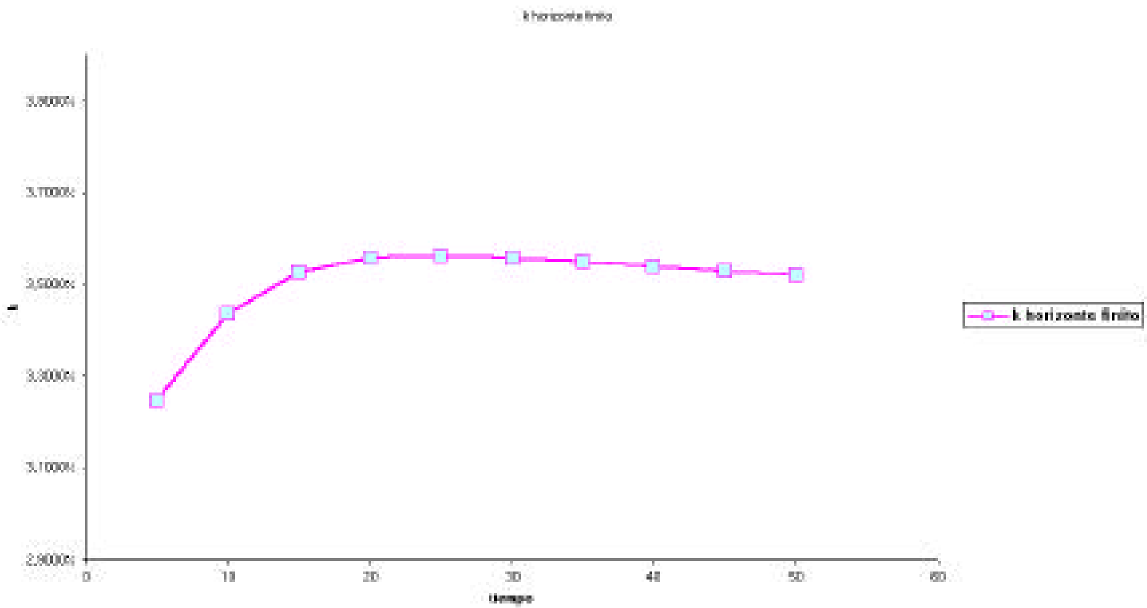


GRÁFICO Nº 2:

COSTE DE LA FINANCIACIÓN AJENA EN HORIZONTE FINITO



Se observa como la opción compra de barrera presenta un valor decreciente con el tiempo: en un horizonte de un año alcanza un valor prácticamente igual a la opción de responsabilidad limitada, mientras que llega a anularse para horizontes muy elevados. El gráfico nº 1 muestra como la función de la opción de compra de barrera presenta una forma cóncava con un decrecimiento muy moderado al principio y más pronunciado a continuación para horizontes que se acercan a los 10 años. Seguidamente, la función de *OCB* pasa de cóncava a convexa y su valor experimenta importantes reducciones con el paso de tiempo, siendo la reducción ya muy moderada para horizontes muy elevados. La opción de quiebra en T presenta la forma habitual de las opciones de venta de vencimiento finito con barrera de salida, con un valor máximo para un vencimiento entre 5 y 10 años. Dado su reducido valor en relación a las opciones de responsabilidad limitada y de compra de barrera, su incidencia tanto en la prima por el riesgo como en el coste de la financiación es poco significativa.

El coste de la financiación ajena, k, refleja la evolución del valor de la opción de compra de barrera: en el corto plazo prácticamente coincide con la tasa de interés libre de riesgo. El transcurso del tiempo supone un rápido incremento en k , llegando a superar moderadamente el coste de la deuda perpetua, con el que, obviamente, llega a coincidir con el tiempo. Así, por ejemplo, para un horizonte de 30 años, el coste de la financiación ajena a este plazo supera en un 0,10% al coste de la deuda perpetua. Este comportamiento tiene su raíz en la evolución del valor de la opción de compra de barrera[6].

[6] El valor de las opciones de compra de barrera con precio de ejercicio positivo presenta un comportamiento creciente con el transcurso del tiempo hasta llegar a un valor máximo, tras el cual comienza a decrecer. Un comportamiento similar siguen las opciones de venta de barrera.

6.9 CONCLUSIONES

El propósito de este capítulo ha consistido en elaborar un modelo que permita determinar la rentabilidad exigida por la financiación ajena en un horizonte finito a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 2. Hemos comenzado analizando la relación entre vencimiento finito de las deudas y la quiebra. A continuación, hemos introducido una serie de contratos entre accionistas y acreedores que transforman el horizonte perpetuo en un horizonte finito. Estos contratos consisten, principalmente, en opciones de barrera que hemos procedido a valorar. A partir de aquí, hemos adaptado la fórmula del coste de la financiación ajena a estas circunstancias y, finalmente, hemos analizado en este nuevo horizonte la relación entre coste de capital de la financiación ajena y coste de capital de la financiación propia, como ya habíamos hecho en el capítulo 2. Las conclusiones alcanzadas son las siguientes:

1. La quiebra es una decisión racional e inevitable cuando la suma del valor del activo y la opción de responsabilidad limitada de horizonte perpetuo se situa por debajo del valor de las deudas. Caso de ser la opción de responsabilidad limitada total o parcialmente de horizonte finito porque así lo determine el vencimiento de las deudas, el hecho de que la suma del valor del activo y la opción de responsabilidad limitada resulte inferior al valor de las deudas no conduce necesariamente a la declaración de quiebra. Accionistas y acreedores pueden, de mutuo acuerdo, decidir una ampliación del horizonte de la opción de responsabilidad limitada. Con ello se consigue una reestructuración de la deuda situándola a un plazo más largo y se evitan los costes de quiebra. Los resultados para ambas partes, antes de los costes de quiebra, son idénticos a los que produce la declaración de quiebra.

2. El paso del horizonte perpetuo de la deuda a un horizonte finito lo hemos realizado introduciendo tres contratos entre accionistas y acreedores:

2.1 Eliminando la parte de la opción de responsabilidad limitada que vence a horizonte finito por medio de una opción de compra de barrera sobre un activo subyacente que equivale al valor de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar. En caso de quiebra, la barrera elimina la opción de compra.

2.2 La eliminación de una parte de la opción de responsabilidad limitada supone una reducción del valor total, activo más opción de responsabilidad limitada, que los accionistas comparan con las deudas. Surge, por tanto, una nueva posibilidad de quiebra, que hemos recogido por medio de una opción de venta de barrera que se elimina en caso de ejercicio previo de la opción de responsabilidad limitada.

2.3 Finalmente el pago de la amortización financiera se recoge por medio de un contrato *forward*, que al ser de valor cero se elimina con un contrato de signo contrario en caso de quiebra.

3. Hemos procedido a valorar las opciones de barrera que delimitan el paso del horizonte perpetuo al horizonte finito.

4. Finalmente, hemos adaptado la fórmula del coste de la financiación ajena a este caso y hemos relacionado el coste de capital con el valor de la empresa constatando que en este marco se cumplen las dos propuestas de Modigliani y Miller sobre la estructura financiera y el coste de capital.

APÉNDICE 6A : EL ACTIVO SUBYACENTE DE LA OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA EN EL MODELO DE HORIZONTE FINITO

Se trata de determinar el proceso estocástico del activo cuya función es (ecuación 6.7):

$$J_T = \alpha_T \frac{DN}{1+\gamma}\left(\frac{(1+\gamma)A}{\gamma DN}\right)^{-\gamma}$$

donde A sigue un proceso estocástico de Ito, por lo que procedemos a aplicar el lema de Ito:

$$dJ_T = \left(\frac{\partial J_T}{\partial A}\mu_A A + \frac{\partial J_T}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_T}{\partial A^2}\sigma_A^2 A^2\right)dt + \frac{\partial J_T}{\partial A}\sigma_A A\, dz \tag{6A.1}$$

Ante todo, es preciso calcular la primera y segunda derivadas de J_T respecto de A:

$$\frac{\partial J_T}{\partial A} = -2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}}\alpha\left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\, r}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma_A^2}} \tag{6A.2}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial A^2} = \frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}}\, DN\, r\, \alpha\left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\, r}\right)^{-\frac{2r}{\sigma_A^2}}}{A^2\sigma_A^2} \tag{6A.3}$$

Por tanto, el proceso estocástico de J resulta ser:

(6A.4)

$$dJ_T = \left(\left(-2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} \alpha_T \left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\ r} \right)^{-1-\frac{2r}{\sigma_A^2}} \right) \mu A + \frac{1}{2} \left(\frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} DNr\alpha_T \left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\ r} \right)^{-\frac{2r}{\sigma_A^2}}}{A^2\ \sigma_A^2} \right) \sigma_A^2 A^2 \right) dt - 2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} \alpha \left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\ r} \right)^{-1-\frac{2r}{\sigma_A^2}} \sigma_A A dz$$

El proceso estocástico de la rentabilidad instantánea de J_T es:

(6A.5)

$$\frac{dJ_T}{J_T} = \left(\frac{\left(-2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} \alpha \left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\ r} \right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \right) \mu_A A + \frac{1}{2} \left(\frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} DNr\alpha_T \left(\frac{A\left(2r+\sigma_A^2\right)}{DN\ r} \right)^{-\frac{2r}{\sigma_A^2}}}{A^2\ \sigma_A^2} \right) \sigma_A^2 A^2}{\alpha_T \frac{DN}{1+\gamma} \left(\frac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ DN} \right)^{-\gamma}} \right) dt - \frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma_A^2}} \alpha_T \left(\frac{A\left(2r+\sigma^2\right)}{DN\ r} \right)^{-1-\frac{2r}{\sigma_A^2}}}{\alpha_T \frac{DN}{1+\gamma} \left(\frac{(1+\gamma)\ A}{\gamma\ DN} \right)^{-\gamma}} \sigma_A A dz$$

Realizando operaciones, se obtiene:

$$\frac{dJ_T}{J_T} = \frac{r\left(2r - 2\mu_A + \sigma_A^2\right)}{\sigma_A^2}dt + \frac{2r}{\sigma_A}dz \qquad (6A.6)$$

Por tanto, el valor esperado de la rentabilidad instantánea de J_T es:

$$\mu_J = \frac{r\left(2r - 2\mu_A + \sigma_A^2\right)}{\sigma_A^2} \qquad (6A.7)$$

y la desviación típica de la rentabilidad instantánea de J es:

$$\sigma_J = \frac{2r}{\sigma_A} \qquad (6A.8)$$

APÉNDICE 6B: RENTABILIDAD CONTINUA COMPUESTA DEL ACTIVO SUBYACENTE DE LA OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA EN EL MODELO DE HORIZONTE FINITO

Seguidamente, para completar el análisis del apéndice anterior, estudiamos la rentabilidad continua compuesta del activo subyacente de la opción de compra de barrera en el modelo de horizonte finito, R_J, relacionándola con los resultados que acabamos de obtener en el apéndice anterior. Conseguimos, así, confirmar estos resultados por una segunda vía.

Sea J_0 el valor del activo J al principio del período y J_1 su valor al final del período. Por tanto:

$$J_1 = J_0 \;\; e^{R_J} \tag{6B.1}$$

Tomando logaritmos neperianos resulta**:**

$$R_J = \ln J_1 - \ln J_0 \tag{6B.2}$$

Tomando logaritmos neperianos en (6.7), tenemos:

$$\ln J_T = \ln \alpha_T \;\; \frac{DN}{1+\gamma} - \gamma \;\; \ln \frac{1+\gamma}{\gamma \;\; DN} - \gamma \;\; \ln A \tag{6B.3}$$

Para hallar los valores de $\ln J_1$ y $\ln J_0$, sustituimos A por A_1 y A_0 en (6B.3) . A continuación, sustituimos los valores así obtenidos de $\ln J_1$ y $\ln J_0$ en (6B.2) y obtenemos:

$$R_J = \gamma \ \ln \frac{A_0}{A_1} \tag{6B.4}$$

Centremos ahora nuestra atención en el activo de la empresa y su rentabilidad continua compuesta, R_A. Podemos escribir:

$$A_1 = A_0 \ e^{R_A} \tag{6B.5}$$

y, por tanto:

$$e^{-R_A} = \frac{A_0}{A_1} \tag{6B.6}$$

esto es,

$$\ln \frac{A_0}{A_1} = -R_A \tag{6B.7}$$

Sustituyendo (6B.7) en (6B.4), obtenemos:

$$R_J = -\gamma \ R_A \tag{6B.8}$$

Este resultado muestra que el activo *J* presenta una rentabilidad de signo contrario a la del activo *A*. La explicación del mismo la encontramos en que *A* es el activo de la empresa y *J* una opción de venta sobre este activo. Como es conocido, todo aumento en el valor de un activo subyacente supone una reducción en el valor de toda opción de venta sobre el mismo y viceversa.

Seguidamente, relacionamos este resultado con los valores de la tasa de rentabilidad instantánea de *J*, μ_J, y su desviación típica, σ_J, obtenidos en 6A.1. Como señala Hull (2000, pp. 230-231 y 237-241), cuando un activo sigue una distribución logarítmico-normal, su rentabilidad continua compuesta (η en la notación de Hull y *R* en la notación aquí utilizada) se distribuye normalmente con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$:

$$R \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right) \tag{6B.9}$$

En el planteamiento aquí efectuado, *T* se considera igual a la unidad.

La equivalencia de resultados para la desviación típica es casi inmediato. La igualdad (6B.5), nos permite escribir[7]:

$$\sigma_J = \gamma \;\; \sigma_A \tag{6B.10}$$

[7] A partir de (6B.5) se calcula la varianza pasando seguidamente a la desviación típica, evitándose así el efecto del signo negativo.

Recordando la ecuación (2.2):

$$\gamma = \frac{2\ \ r}{\sigma^2}$$

y sustituyendo este valor para $\sigma = \sigma_A$ en (6B.10) resulta:

$$\sigma_J = \frac{2\ \ r}{\sigma_A} \tag{6B.11}$$

con lo que el resultado obtenido en (6A.8) queda también justificado por esta segunda vía.

Ocupémonos ahora de los valores esperados de la tasa de rentabilidad. Teniendo en cuenta (6B.9), podemos escribir:

$$\bar{R}_J = \mu_J - \frac{{\sigma_J}^2}{2} \tag{6B.12}$$

es decir,

$$\mu_J = \bar{R}_J + \frac{\sigma_J^2}{2} \tag{6B.13}$$

Sustituimos $\bar{R}_J$ en (6B.13) por su valor según (6B.8), donde tomamos valores esperados. En la misma ecuación (6B.13), sustituimos también σ_J por su valor según (6B.10) y, tras ambas sustituciones, resulta:

$$\mu_J = -\gamma\ \ \bar{R}_A + \gamma^2\ \ \frac{\sigma_A^2}{2} \tag{6B.14}$$

En (6B.14) sustituimos $\overline{R}_A$ por su valor según (6B.9):

$$\mu_J = -\gamma \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) + \gamma^2 \frac{\sigma_A^2}{2} \tag{6B.15}$$

Finalmente, sustituyendo γ por su valor según (2.2), esto es $2 r/\sigma^2$, tras unas sencillas operaciones algebraicas se llega a la siguiente expresión:

$$\mu_J = \frac{r\left(2r - 2\mu_A + \sigma_A^2\right)}{\sigma_A^2} \tag{6B.16}$$

con lo que el valor de μ_J que habíamos obtenido en (6A.7) queda justificado también por esta segunda vía.

APÉNDICE 6C. VALOR DE LA OPCIÓN DE COMPRA Y DE BARRERA

6C.1 Resultados preliminares

Basamos esta valoración en el trabajo de Rich (1994). La opción a valorar es una opción de compra europea con barrera superior de salida, cuyo precio de ejercicio *K* es inferior al valor de la barrera (*up-and-out-cal, K*<*H*). En la tabla 6C.1 adaptamos la notación de Rich a la utilizada en este trabajo y presentamos las simplificaciones más directas que resultan posibles en este caso. Dado que el precio de ejercicio es igual a cero, es preciso tener en cuenta los siguientes resultados:

$$\lim_{K->0} \ln\left(\frac{J}{K}\right) = \infty \tag{6C.1}$$

$$\lim_{K->0} \ln\left(\frac{H^2}{J\quad K}\right) = \infty \tag{6C.2}$$

Tabla 6C.1: EQUIVALENCIAS ENTRE RICH (1994) Y LA VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE COMPRA DE BARRERA EN EL PRESENTE TRABAJO				
Rich (1994)			**Trabajo actual (capítulo 6)**	
Variable/ expresión	**página**	**Desarrollo/ explicación**	**variable**	**Desarrollo/ explicación**
R	269	1+ tasa libre de riesgo	e^{r}	
D	269	1+ tasa de dividendo	1	No se ha incorporado la distribución de dividendos.
μ	269	$\ln(r/d) - 0.5\,\sigma^2$		$r - (\sigma_J^2/2)$
$\mu + \sigma^2$	270			$r + (\sigma_J^2/2)$
λ	269	$1 + (\mu/\sigma^2)$		$0{,}5 + (r/\sigma_J^2)$
			γ	$2\,r/\sigma_A^2$
			$\breve{\gamma}$	$2\,r/\sigma_J^2$
$2\,\lambda - 2$				$\breve{\gamma} - 1$
T-t_0	270		T	$t_0 = 0$
ϕ	285	+1 (opción de compra)		+1 (opción de compra)
η	285	-1 (barrera superior)		-1 (barrera superior)
S		Activo subyacente	J_T	$\alpha_T\,\frac{DN}{1+\gamma}\left(\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right)^{-\gamma}$
K		Precio de ejercicio	K_T	**cero**
H		Barrera	H_T	$\alpha_T\,\frac{DN}{1+\gamma}$
$\frac{S}{K}$				$e^{-r\,T}$
$\frac{S}{H}$			$\frac{J_T}{H_T}$	$\left(\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right)^{-\gamma}$
X	270	$\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+(\mu+\sigma^2)(T-t_0)}{\sigma\,\sqrt{T-t_0}}$	X	∞
x_1	270	$\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)+(\mu+\sigma^2)(T-t_0)}{\sigma\,\sqrt{T-t_0}}$	x_1	$\frac{\ln\left[\left(\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right)^{-\gamma}\right]+\left(r+\frac{\sigma_J^2}{2}\right)T}{\sigma_T\,\sqrt{T}}$
Y	270	$\frac{\ln\left(\frac{H^2}{S\,K}\right)+(\mu+\sigma^2)\,(T-t_o)}{\sigma\,\sqrt{T-t_0}}$	Z	∞
y_1	270	$\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)+(\mu+\sigma^2)\,(T-t_o)}{\sigma\,\sqrt{T-t_0}}$	z_1	$\frac{\ln\left[\left(\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right)^{\gamma}\right]+\left(r+\frac{\sigma_J^2}{2}\right)T}{\sigma_J\,\sqrt{T}}$

En esta tabla, la variable γ incorpora la desviación típica del activo de la empresa, mientras que $\tilde{\gamma}$ incorpora la desviación típica del activo subyacente de las opciones de vencimiento finito, esto es, la desviación típica de la opción de responsabilidad limitada. La variable $\tilde{\gamma}$ aparece en la valoración de la opción de compra de barrera como exponente del cociente entre los valores de la barrera y el activo subyacente (*H/J*).

6C.2 Valoración de la opción de compra de barrera

Rich (1994 p. 285) valora las opciones europeas con barrera superior de salida, sin compensación y con precio de ejercicio inferior a la barrera a partir de las siguientes expresiones, que, en este trabajo, designamos como *B₁, B₂, B₃ y B₄* [8]:

$$B_{T1} = \left[\phi\, S\, d^{-(T-t_0)}\, N(\phi\, x) - \phi\, K\, r^{-(T-t_0)}\, N\left(\phi\left(x - \sigma\sqrt{T-t_0}\right)\right)\right] \tag{6C.3}$$

$$B_{T2} = \left[\phi\, S\, d^{-(T-t_0)}\, N(\phi\, x_1) - \phi\, K\, r^{-(T-t_0)}\, N\left(\phi\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t_0}\right)\right)\right] \tag{6C.4}$$

$$B_{T3} = \phi \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} \left[S\, d^{(T-t_o)} \left(\frac{H}{S}\right)^{2} N(\eta\, y) - K\, r^{-(T-t_0)}\, N\left(\eta\left(y - \sigma\sqrt{T-t_0}\right)\right)\right] \tag{6C.5}$$

$$B_{T4} = \left[\phi \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} \left[S\, d^{(T-t_o)} \left(\frac{H}{S}\right)^{2} N(\eta\, y_1) - K\, r^{-(T-t_0)}\, N\left(\eta\left(y_1 - \sigma\sqrt{T-t_0}\right)\right)\right]\right] \tag{6C.6}$$

---

[8] B_1, B_2, B_3 y B_4 son, respectivamente, las expresiones (43), (44), (45) y (46) de Rich. Excluímos la expresión (48) de Rich, porque hace referencia a la compensación que aquí se considera igual a cero. El valor de la opción *up-and-out-call (K<H)* es: (43)-(44)+(45)-(46).

Estas expresiones pueden adaptarse tanto a la opción de compra como a la opción de venta. Cuando las apliquemos, como en este apéndice, a una opción de compra, las designaremos como CB_1, CB_2, CB_3 y CB_4 . En este caso φ = 1. Cuando las apliquemos, como en el apéndice siguiente, a una opción de venta, las designaremos como PB_1, PB_2, PB_3 y PB_4. Entonces, φ = -1.

El valor de la opción de compra *up-and-out call (K<H)* es:

$$OCB_T = CB_{T1} - CB_{T2} + CB_{T3} - CB_{T4} \tag{6C.7}$$

Adaptemos CB_{T1}, CB_{T2} , CB_{T3}, y CB_{T4} al caso de opción de compra con precio de ejercicio igual a cero. En esta adaptación, tenemos en cuenta las siguientes igualdades que se derivan de que, como se ha indicado en la tabla C6.1, tanto *x* como *z* tienden a infinito:

$$N(x) = 1 \tag{6C.8}$$

$$N\left(x - \sigma\sqrt{T}\right) = 1 \tag{6C.9}$$

$$N(z) = 1 \tag{6C.10}$$

$$N(-z) = 0 \tag{6C.11}$$

$$N\left(\sigma\sqrt{T} - z\right) = 0 \tag{6C.12}$$

Realizamos, además, la siguiente operación que se aplica a la igualdad B_{T3} y que incluye la transformación de la notación de Rich (término de la izquierda) en la notación del presente trabajo (término de la derecha), según lo indicado en la tabla 6C.1:

$$\left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} S \left(\frac{H}{S}\right)^{2} = \left(\frac{H}{J}\right)^{\breve{\gamma}} \frac{J^2}{H} \tag{6C.13}$$

Como consecuencia, llegamos a los siguientes valores de CB_{T1}, CB_{T2}, CB_{T3}, y CB_{T4}, para el caso en que el precio de ejercicio es igual a cero:

$$CB_{1T} = J \tag{6C.14}$$

$$CB_{2T} = J \quad N(x_1) \tag{6C.15}$$

$$CB_{3T} = 0 \tag{6C.16}$$

$$CB_{4T} = \left(\frac{H}{J}\right)^{\breve{\gamma}} H \quad N(z_1) \tag{6C.17}$$

con lo que el valor de la opción de compra europea de barrera superior de salida con precio de ejercicio cero y vencimiento en T, resulta ser:

$$OCB_T = J - J \quad N(x_1) - \left(\frac{H}{J}\right)^{\breve{\gamma}} H \quad N(-z_1) \tag{6C.18}$$

donde[9]:

$$\breve{\gamma} = 2\,\frac{r}{\sigma_J^2} \qquad (6C.19)$$

$$x_1 = \frac{\ln\left[\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right]^{-\gamma} + \left(r + \frac{\sigma_J^{\,2}}{2}\right)T}{\sigma_J\,\sqrt{T}} \qquad (6C.20)$$

$$z_1 = \frac{\ln\left[\frac{(1+\gamma)\,A}{\gamma\,DN}\right]^{\gamma} + \left(r + \frac{\sigma_J^{\,2}}{2}\right)T}{\sigma_J\,\sqrt{T}} \qquad (6C.21)$$

[9] Debe observarse que en estas expresiones intervienen dos diferentes valores de la desviación típica: σ_J, desviación típica de la rentabilidad del activo subyacente de OCB_T, aparece explícitamente como consecuencia directa de la valoración de OCB_T en x_1, z_1, e implícitamente en el exponente $\breve{\gamma}$ del cociente (H_T/J_T). Por otra parte, σ_A, desviación típica de la rentabilidad del activo de la empresa, se halla implícita en el término γ que aparece en la fórmula de valoración, como consecuencia de haber desarrollado y simplificado los valores del activo subyacente J_T y su barrera H, según se indica en la tabla 6C.1.

APÉNDICE 6D: EL ACTIVO SUBYACENTE DE LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN *T*

6D.1 Función monótona creciente en *A*

El activo subyacente *Q* de la opción de quiebra en *T* según (6.9) es:

$$Q = A + \frac{DN * (1-\alpha)}{1+\gamma} * \left(\frac{A * (1+\gamma)}{DN * \gamma}\right)^{-\gamma}$$

Para poder aplicar a *Q* una barrera referida a *A*, *Q* debe ser una función monótona de *A*. Derivando *Q* respecto de *A*, resulta:

$$\frac{\delta Q}{\delta A} = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{A\,(1+\gamma)}{DN\,\gamma}\right)^{-1-\gamma} \qquad (6D.1)$$

Teniendo en cuenta que nos interesan los valores de *A* superiores al valor de quiebra:

$$A \geq \frac{\gamma\ DN}{1+\gamma}$$

podemos decir que:

$$0 \leq \left(\frac{A\ (1+\gamma)}{DN\ \ \gamma}\right)^{-1-\gamma} \leq 1 \qquad (6D.2)$$

y que:

$$0 \leq (1-\alpha)\left(\frac{A\ (1+\gamma)}{DN\ \ \gamma}\right)^{-1-\gamma} \leq 1 \qquad (6D.3),$$

por lo que:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} > 0 \tag{6D.4}$$

6D.2 El proceso estocástico de *Q*

Dado que Q es función de una única variable aleatoria A, que sigue un proceso de Ito, Q sigue también un proceso estocástico de Ito. La aplicación del lema de Ito, aplicando el mismo procedimiento que en 6.A hemos utilizado para calcular el proceso estocástico de J_T, nos permite conocer la desviación típica y la tasa instantánea de rentabilidad esperada de Q. Puesto que por 6D.1 ya conocemos la primera derivada de Q respecto de A, pasamos al cálculo de la segunda derivada, obteniendo:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta A^2} = -\frac{2^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\, DN\, r\, (-1+\alpha) \left(\frac{A\,(2r+\sigma^2)}{DN\, r}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}}{A^2\, \sigma^2} \tag{6D.5}$$

Obtenemos entonces el siguiente valor para la tasa de rentabilidad esperada de Q:

$$\mu Q = \left(-(2r+\sigma^2)\left(\frac{A\,(2r+\sigma^2)}{DN\, r}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} + DN\, r\,(-1+\alpha)\left(2^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}(r-\mu) + 4^{\frac{r}{\sigma^2}}\sigma^2\right)\right) \Big/ \left(4^{\frac{r}{\sigma^2}}\, DN\,(-1+\alpha)\,\sigma^2 - DN\, r \left(\frac{A\,(2r+\sigma^2)}{DN\, r}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\right) \tag{6D.6}$$

y el siguiente valor para la desviación típica de Q:

$$\sigma Q = \frac{A\,\sigma\left(1 + 2^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\,(-1+\alpha)\,\left(\frac{A\,(2r+\sigma^2)}{DN\,r}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}}\right)}{\left(A + \frac{2^{\frac{2r}{\sigma^2}}\,DN\,(1-\alpha)\,\left(\frac{A\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)\sigma^2}{DN\,r}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}}{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\right)} \tag{6D.7}$$

La desviación típica de Q puede expresarse de un modo más compacto realizando algunas operaciones en (6D.7). Teniendo en cuenta que:

$$\gamma = \frac{2\ r}{\sigma^2}$$

y que el denominador de (6D.7) es la expresión de Q.

Unas sencillas operaciones algebraicas permiten escribir:

$$\sigma_Q = \left(1 + 2^{1+\gamma}\,(1-\alpha)\left[2\,\frac{A\,(1+\gamma)}{DN\,\gamma}\right]^{-1-\gamma}\right)\sigma_A\,\frac{A}{Q} \tag{6D.8}$$

Hacemos:

$$G = (1-\alpha)\,\frac{DN}{1+\gamma}\left[\frac{A\,(1+\gamma)}{DN\,\gamma}\right]^{-\gamma} \tag{6D.9}$$

es decir, G representa la proporción *(1-*α*)* de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar.

Haciendo operaciones en (6D.9) tenemos:

$$\sigma_Q = \left(1-\gamma\frac{1}{A}G\right)\sigma_A\frac{A}{Q} \tag{6D.10}$$

(6.9) y (6D.9) nos permiten escribir:

$$Q = A + G \tag{6D.11}$$

Hacemos:

$$q = \frac{A}{Q} \tag{6D.12}$$

y

$$1 - q = \frac{G}{Q} \tag{6D.13}$$

Con lo que:

$$\sigma_Q = \sigma_A\left[\left(q-(1-q)\gamma\right)\right] \tag{6D.14}$$

6D.3 Cálculo directo de la desviación típica de *Q* a partir de la función de *Q*

Sabemos por (6D.11):

$$Q = A + G$$

Tomemos incrementos:

$$\Delta Q = A + \Delta G \tag{6D.15}$$

Dividiendo por Q obtenemos:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta A}{Q} + \frac{\Delta G}{Q} \tag{6D.16}$$

es decir,

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta A}{A}\ \frac{A}{Q} + \frac{\Delta G}{G}\ \frac{G}{Q} \tag{6D.17}$$

Considerando Q y G como activos sin rendimiento explícito podemos escribir:

$$R_Q = q\ \ R_A + (1 - q)\ R_G \tag{6D.18}$$

Dado que G, al igual que J, es una proporción de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar, teniendo en cuenta (6B.8), podemos escribir:

$$R_G = -\gamma\ \ R_A \tag{6D.19}$$

Sustituyendo este valor es (6D.17), obtenemos:

$$R_Q = R_A \left[q - (1 - q)\ \gamma \right] \tag{6D.20}$$

Por lo que:

$$\sigma_Q = \sigma_A \left[q - (1 - q)\ \gamma \right]$$

con lo que confirmamos por una segunda vía el resultado obtenido en (6D.14).

APÉNDICE 6E: VALOR DE LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN *T*

Se trata de calcular el valor de una opción cuyo activo subyacente, como recoge la ecuación (6.9), es:

$$Q = A + \frac{DN * (1 - \alpha)}{1 + \gamma} * \left(\frac{A * (1 + \gamma)}{DN * \gamma} \right)^{-\gamma}$$

Como hemos visto en el apartado 6D.2, este activo sigue un proceso estocástico de Ito. De acuerdo con la ecuación (6D.14), su desviación típica es:

$$\sigma_Q = \sigma_A \left[q - (1 - q)\, \gamma \right]$$

Según el apartado 6.3.4, el precio de ejercicio es *DN*. A continuación, según indica la ecuación (6.10), añadimos a esta opcióne la siguiente barrera:

$$H_T' = D - \frac{\alpha_T \; DN}{1 + \gamma}$$

En la tabla 6E.1 señalamos las adaptaciones a realizar para aplicar las fórmulas de Rich al presente caso:

Tabla 6E.1: EQUIVALENCIAS ENTRE RICH (1994) Y LA VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE QUIEBRA EN T EN EL PRESENTE TRABAJO

			Trabajo actual (capítulo 6)	
Variable/ expresión	**página**	**Desarrollo/ explicación**	**variable**	**Desarrollo/ explicación**
r	269	1+ tasa libre de riesgo	e^r	
d	269	1+ tasa de dividendo	1	No se ha incorporado la distribución de dividendos.
μ	269	$\ln(r/d) - 0.5\ \sigma^2$		$r - \left(\sigma_Q^2/2\right)$
$\mu + \sigma^2$	270			$r + \left(\sigma_Q^2/2\right)$
λ	269	$1 + \left(\mu/\sigma^2\right)$		$0{,}5 + (r/\sigma_Q^2)$
			γ	$2\ r/\sigma_A^2$
			$\hat{\gamma}$	$2\ r/\sigma_Q^2$
$2\ \lambda - 2$				$\hat{\gamma} - 1$
T-t_0	270		T	$t_0 = 0$
ϕ	285	-1 (opción de venta)		-1 (opción de venta)
η	285	+1 (barrera inferior)		+1 (barrera inferior)
S		Activo subyacente	Q	$A + \frac{(1-\alpha_T)\ DN}{1+\gamma}\left[\frac{A\ (1+\gamma)}{DN\ \gamma}\right]^{-\gamma}$
K		Precio de ejercicio	K'	***DN***
H		Barrera	H_T'	$DN - \frac{\alpha_T\ DN}{1+\gamma}$
x	270	$\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\mu + \sigma^2\right)(T - t_0)}{\sigma\ \sqrt{T - t_0}}$	x'	$\frac{\ln\left(\frac{Q}{DN}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right) T}{\sigma_A\ \sqrt{T}}$
x_1	270	$\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + \left(\mu + \sigma^2\right)(T - t_0)}{\sigma\ \sqrt{T - t_0}}$	x'_1	$\frac{\ln\left(\frac{Q}{H_T'}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right) T}{\sigma_A\ \sqrt{T}}$
y	270	$\frac{\ln\left(\frac{H^2}{S\ K}\right) + (\mu + \sigma^2)\ (T - t_o)}{\sigma\ \sqrt{T - t_0}}$	z'	$\frac{\ln\left(\frac{H_T'^2}{Q\ DN}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right) T}{\sigma_A\ \sqrt{T}}$
y_1	270	$\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + (\mu + \sigma^2)\ (T - t_o)}{\sigma\ \sqrt{T - t_0}}$	z'_1	$\frac{\ln\left(\frac{H_T'}{Q}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right) T}{\sigma_A\ \sqrt{T}}$

Siguiendo la formulación de Rich (1994) y la notación fijada en el apéndice 6C, el valor de esta opción es:

$$OQ = PB_{T1} - PB_{T2} + PB_{T3} - PB_{T4} \tag{6E.1}$$

Donde:

$$PB_{T1} = -Q\ N(-x') + DN\ e^{-rT}\ N(\sigma_Q\sqrt{T} - x') \tag{6E.2}$$

$$PB_{T2} = -Q\ N(-x_1') + DN\ e^{-rT}\ N(\sigma_Q\sqrt{T} - x_1') \tag{6E.3}$$

$$PB_{T3} = -\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^{\gamma-1}\left[Q\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^2 N(z') - DN\ e^{-rT}\ N\left(z' - \sigma_Q\sqrt{T}\right)\right] \tag{6E.4}$$

$$PB_{T4} = -\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^{\gamma-1}\left[Q\left(\frac{H_T'}{Q}\right)^2 N(z_1') - DN\ e^{-rT}\ N\left(z_1' - \sigma_Q\sqrt{T}\right)\right] \tag{6E.5}$$

Donde según (6D.14):

$$\sigma_Q = \sigma_A\ \left[\left(q - (1-q)\gamma\right)\right]$$

Siendo según (6D.11):

$$q = \frac{A}{Q}$$

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

7.1 INTRODUCCIÓN

El modelo de horizonte perpetuo que se propone en esta tesis es la idea básica de todo el trabajo. A través de este modelo de horizonte perpetuo podemos calcular el valor de la opción de responsabilidad limitada, el valor de las acciones de una empresa endeudada y la rentabilidad exigida en un horizonte perpetuo.

Basándonos en este modelo, hemos propuesto tres líneas de trabajo. En la primera de ellas, se han introducido la opción de abandonar y los costes fijos. En la segunda extensión se ha adaptado el modelo de horizonte perpetuo a un coste de capital variable y, finalmente, en la tercera línea de trabajo se han incorporado los horizontes finitos.

7.2 CONCLUSIONES POR CAPITULO

A continuación, recopilamos las conclusiones alcanzadas a lo largo de los capítulos 2 a 6 de esta tesis doctoral. La numeración utilizada en esta recopilación permite remitir el resultado obtenido al capítulo en el que se alcanzó.

2.1 El modelo monoperiódico de Black y Scholes que interpreta las acciones de una empresa endeudada como una opción de compra europea sobre su activo con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores y que, además, permite calcular el valor de la opción de responsabilidad limitada y su efecto sobre el coste del endeudamiento igualmente en un horizonte monoperiódico puede ampliarse para superar las limitaciones propias de este horizonte monoperiódico.

2.2 La ampliación que hemos propuesto del modelo de Black y Scholes a un horizonte perpetuo nos permite afirmar:

a) La opción de responsabilidad limitada de los accionistas se puede considerar una opción de venta americana de horizonte perpetuo sobre el activo de la empresa con un precio de ejercicio igual al pago prometido a los acreedores.

b) Las acciones de una empresa endeudada se pueden concebir como la suma algebraica de una opción de compra americana perpetua sobre el activo con una barrera inferior de salida, igual al valor máximo del activo en el que se declara la quiebra, y una compensación igual al valor de la deuda, más el endeudamiento personal de los accionistas en condiciones de responsabilidad ilimitada, dado que la compensación de la barrera es el elemento que introduce la limitación de responsabilidad.

2.3 A partir de las opciones anteriores hemos deducido una expresión que permite calcular el coste de la financiación ajena con incorporación explícita del coste de la limitación de responsabilidad.

2.4 Tras introducir la valoración de las acciones y la rentabilidad exigida por los accionistas en este modelo, se constata el cumplimiento de las proposiciones primera y segunda de Modigliani y Miller.

2.5 El modelo monoperiodico sitúa la quiebra de la empresa en un valor del activo superior al del modelo perpetuo. La diferencia entre ambos valores es exactamente el valor de la opción de responsabilidad limitada perpetua en caso de quiebra, teniendo en cuenta la hipótesis de aplazamiento del pago de los intereses. Esta diferencia resulta creciente con el valor de la desviación típica de la rentabilidad del activo, alcanzando valores importantes para desviaciones típicas elevadas.

3.1 El activo tiene un valor de liquidación que consiste en la cifra que puede obtenerse vendiendo en el mercado los elementos que integran el activo. La incidencia del valor de liquidación del activo en la opción de responsabilidad limitada y, por ende, en el coste del endeudamiento se introduce por medio de la opción de abandonar.

3.2 Entendemos por opción de abandonar la capacidad que tienen los accionistas para decidir el cese de las actividades de la empresa, vender los elementos de su activo en el mercado y proceder con su importe a liquidar la deuda y distribuir, a continuación, el remanente.

3.3 Suponiendo que el valor de liquidación se mantiene constante a lo largo del tiempo, la opción de abandonar puede concebirse como una opción de venta americana perpetua, cuyo activo subyacente es el activo de la empresa y cuyo precio de ejercicio es el valor de liquidación.

3.4 En el caso en que la empresa se financia con fondos propios y endeudamiento, la opción de abandonar forma parte de la opción de responsabilidad limitada. Entonces, el activo subyacente de la opción de responsabilidad limitada está formado por la suma del activo de la empresa y la opción de abandonar, pues ambos pasan a ser propiedad de los acreedores si los accionistas ejercitan su derecho de responsabilidad limitada. El precio de ejercicio continúa siendo igual al pago prometido a los acreedores. Podemos hallarnos ante dos casos:

a) $VL > DN$: los accionistas ejercitan la opción de abandonar antes de que se llegue a la situación de quiebra. En este caso, el endeudamiento no presenta riesgo.

b) $VL < DN$: Se trata de un endeudamiento con riesgo. Se llega antes a la quiebra que al ejercicio de la opción de abandonar. Se declara la quiebra y los acreedores reciben la opción de abandonar junto con el activo.

3.5 Cuando existe opción de responsabilidad limitada y opción de abandonar, el coste del endeudamiento queda afectado de la siguiente forma:

a) $VL>DN$: Se trata de un endeudamiento sin riesgo y, como consecuencia, el coste es igual al tipo de interés libre de riesgo.

b) $VL < DN$: Obtenemos la expresión del coste del endeudamiento, teniendo en cuenta que la opción de responsabilidad limitada engloba la opción de abandonar.

4.1 Los pagos constantes a que dan lugar los costes fijos se asimilan a una deuda perpetua, cuyo interés anual es precisamente el importe de los costes fijos y sobre la que los accionistas gozan de la opción de responsabilidad limitada. Denominamos a esta deuda, ***deuda estructural***. El ejercicio de esta opción tiene lugar cuando la empresa decide cesar en sus actividades por imposibilidad de asumir los costes fijos. Esta modelización de los costes fijos conduce a estudiar las diferentes causas del cese de las actividades de la empresa, por una parte, y de la quiebra, por otra.

4.2 El derecho de responsabilidad limitada de los accionistas sobre la deuda estructural puede asimilarse a una opción de venta americana de horizonte perpetuo sobre el activo de coste variable (valor actual de la diferencia entre ingresos y costes variables), y con un precio de ejercicio igual al valor nominal de la deuda estructural.

4.3 En el caso de una empresa sin deuda financiera y valor de liquidación cero, los accionistas deciden el cese de la actividad de la empresa si el valor del activo es igual al valor del activo que implica el ejercicio anticipado de la opción de responsabilidad limitada de la deuda estructural.

4.4 En el caso de una empresa sin deuda financiera y opción de abandonar, es decir, con valor de liquidación positivo, el derecho de responsabilidad limitada sobre la deuda estructural puede integrarse en la opción de abandonar. La opción de abandonar se define ahora como una opción de venta perpetua sobre el activo de coste variable, cuyo precio de ejercicio consiste en la suma del valor de liquidación y la deuda estructural. Los accionistas deciden el cese de la actividad de la empresa y ejercitan la opción de abandonar. Venden los activos, perciben el valor de liquidación y, además, quedan liberados de continuar pagando los coste fijos.

4.5 La no inclusión específica de los costes fijos en la opción de abandonar sitúa el valor del activo que induce al cese de las actividades de la empresa en un valor superior al que se obtiene cuando se incluyen los costes fijos. Puede decirse, por tanto, que la no consideración especifica de los costes fijos da lugar a un cese prematuro de las actividades de la empresa.

4.6 La modelización mediante opciones de los efectos sobre el valor de la empresa de la deuda financiera, los costes fijos y el valor de liquidación permite analizar las causas y las consecuencias, para accionistas y acreedores, del cese de actividades y la quiebra de la empresa, presentándose tres posibles casos:

a) Quiebra sin cese. Tiene lugar cuando el valor del activo que induce la declaración de quiebra es superior al valor del activo que induce a la liquidación de la empresa.

b) Cese sin quiebra. Tiene lugar cuando el valor del activo que induce la liquidación de la empresa, incluyendo tanto el valor de liquidación como la deuda estructural, es superior al valor del activo que induce la declaración de quiebra y, además, el valor de liquidación resulta superior a la deuda financiera.

c) Cese y quiebra simultáneos. Tiene lugar cuando la deuda financiera resulta superior al valor de liquidación, manteniéndose la relación expresada en el apartado anterior entre valor de liquidación y la quiebra.

Para todos estos casos se han estudiado el valor de la opción de responsabilidad limitada y el coste de la financiación ajena.

5.1 Para superar la limitación de los parámetros constantes hemos construido una variante del modelo de horizonte perpetuo en la que los parámetros que determinan el coste del endeudamiento pasan a ser variables, de modo que el coste de capital varía en cada período en función de los valores de estos parámetros.

5.2 Proponemos un modelo de coste variable del endeudamiento que incorpora tanto las variaciones del interés libre de riesgo como las variaciones del valor de la opción de responsabilidad limitada. El coste de la financiación ajena se adapta anualmente a los valores de estos parámetros. Construimos así dos versiones de un modelo de coste de la financiación ajena variable.

5.3 En primer lugar, hemos presentado este modelo en su versión de coste variable puro donde se trata la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés y la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada como la diferencia de la opción de responsabilidad limitada del período y la opción de responsabilidad limitada del período anterior. Esta versión del modelo presenta grandes variaciones en el coste de la financiación, que pueden, no obstante, suavizarse mediante la segunda versión del modelo.

5.4 La segunda versión del modelo de coste variable atenuado sigue tratando la variabilidad del tipo de interés como *swaps* sobre tipos de interés, pero la variabilidad de la opción de responsabilidad limitada, principal causa de las fuertes oscilaciones que experimenta el coste de la financiación ajena en la primera versión del modelo, se modera mediante contrato *forward* sobre el valor de esta opción.

6.1 El propósito del capítulo 6 ha consistido en elaborar un modelo que permite determinar la rentabilidad exigida por la financiación ajena en un horizonte finito a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 2.

6.2 La quiebra es una decisión racional e inevitable cuando la suma del valor del activo y la opción de responsabilidad limitada de horizonte perpetuo se situa por debajo del valor de las deudas. Caso de ser la opción de responsabilidad limitada total o parcialmente de horizonte finito, porque así lo determine el vencimiento de las deudas, el hecho de que la suma del valor del activo y la opción de responsabilidad limitada resulte inferior al valor de las deudas no conduce necesariamente a la declaración de quiebra. Accionistas y acreedores pueden, de mutuo acuerdo, decidir una ampliación del horizonte de la opción de responsabilidad limitada. Con ello se consigue una reestructuración de la deuda, situándola a un plazo más largo, y se evitan los costes de quiebra. Los resultados para ambas partes, antes de los costes de quiebra, son idénticos a los que produce la declaración de quiebra.

6.3 El paso del horizonte perpetuo de la deuda a un horizonte finito lo hemos realizado introduciendo tres contratos entre accionistas y acreedores:

6.3.1 Eliminando la parte de la opción de responsabilidad limitada que vence a horizonte finito por medio de una opción de compra de barrera sobre un activo subyacente que equivale al valor de la opción de responsabilidad limitada sin ejercitar. En caso de quiebra, la barrera elimina la opción de compra.

6.3.2 La eliminación de una parte de la opción de responsabilidad limitada supone una reducción del valor total, activo más opción de responsabilidad limitada, que los accionistas comparan con las deudas. Surge, por tanto, una nueva posibilidad de quiebra, que hemos recogido por medio de una opción de venta de barrera que se elimina en caso de ejercicio previo de la opción de responsabilidad limitada.

6.3.3 Finalmente el pago de la amortización financiera se recoge por medio de un contrato *forward* que, al ser de valor cero, se elimina con un contrato de signo contrario en caso de quiebra.

6.4 Hemos procedido a valorar las opciones de barrera que delimitan el paso del horizonte perpetuo al horizonte finito.

6.5 Finalmente, hemos adaptado la fórmula del coste de la financiación ajena a este caso y hemos relacionado el coste de capital con el valor de la empresa, constatando que en este marco se cumplen las dos propuestas de Modigliani y Miller sobre la estructura financiera y el coste de capital.

7.3 RESULTADOS OBTENIDOS

Para alcanzar las conclusiones que acabamos de recopilar, ha sido preciso obtener los siguientes resultados cuantitativos, que son todos ellos, aportaciones de esta tesis doctoral:

1. Valoración de la opción de responsabilidad limitada en un horizonte perpetuo;

2. Valoración de la opción de abandonar en un horizonte perpetuo;

3. Valoración de la opción de abandonar con costes fijos;

4. Valoración del coste de endeudamiento en un horizonte perpetuo;

5. Valoración del coste de endeudamiento en un modelo de coste variable;

6. Valoración del coste de endeudamiento finito con opciones de barrera previamente valoradas; y

7. Valoración de las acciones con opción de responsabilidad limitada y horizonte perpetuo, acciones que han sido modelizadas como opciones de barrera.

En resumen, en esta tesis hemos extendido el modelo monoperiódico de valoración de acciones de Black y Scholes a un horizonte perpetuo, pudiendo así valorar la opción de responsabilidad limitada para el caso habitual en que la vida de la empresa no tiene un horizonte finito. Hemos incorporado a la opción de responsabilidad limitada la opción de abandonar y los costes fijos, lo cual nos ha permitido no sólo analizar simultáneamente la quiebra y el cese de actividades de la empresa, sino también valorar los efectos sobre el coste de la financiación de la opción de abandonar y los costes fijos. Hasta este punto el modelo que hemos construido presenta tres elementos de rigidez: la tasa de interés y la desviación típica constantes y el propio horizonte perpetuo. Para superar esta limitación hemos transformado, por una parte, este modelo de coste fijo en un modelo de coste variable, en el que el coste de la financiación se adapta en cada período a las variaciones del tipo de interés y del valor de la opción de responsabilidad limitada. Por otra parte, hemos introducido diversos horizontes en el modelo con objeto de compaginar la deuda a horizonte finito con la deuda perpetua.

Así pues, éste es un trabajo de investigación que ha estudiado diversos aspectos de la relación entre valor de las acciones y valor de la deuda por medio de la teoría de opciones, utilizando como concepto fundamental para la modelización la opción de responsabilidad limitada de los accionistas e incorporando opciones de barrera a fin de poder formalizar diversos matices que afectan al tratamiento de la deuda empresarial y a situaciones de dificultades financieras y de gestión, tales como el cese de la actividad empresarial, la suspensión de pagos y la quiebra. Los modelos construidos nos han permitido formalizar las características de la rentabilidad exigida a la financiación ajena tanto por los accionistas como por los acreedores.

BIBLIOGRAFÍA

Bjork, Tomas (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford.

Black, Fisher y John C. Cox (1976): “Valuing corporate securities: some effects on bond indenture provisions”, *The Journal of Finance*, vol. 31, nº 2, 351-67.

Black, Fisher y Myron Scholes (1973): “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

Benson, R. y N. Daniel (1991):”Up, over and out”, *Risk*, junio.

Boyle, P. P. y S. H. Lau (1994): “Bumping up against the barrier with the binomial method”, *Journal of Derivatives*, vol. 1, nº 4, 6-14.

Brennan, Michael y Eduardo S. Schwartz (1978): “Corporate income taxes, valuation, and the problem of optimal capital structure”, *Journal of Business*, vol. 51, nº 1, 103-14.

Brealey, Richard A. y Steward C. Myers, S. (2000): *Principles of Corporate Finance*, 6ª edición, Mc-Graw Hill, Nueva York.

Cox, John C. y Mark Rubinstein (1985): *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Duffee, Gregory R. (1999): “Estimating the price of default risk”, *The Review of Financial Studies*, vol. 12, nº 1, 197-226.

Gemmill, Gordon (1993): *Options Pricing. An International Perspective*, McGraw-Hill, Londres.

Hudson, M. (1991): “The value of going out”, *Risk*, marzo, 29-33.

Hull, John C. (2000): *Options, Futures, and Other Derivatives*, 4ª edición, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Hull, John C. y Alan White (1995): "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities", *Journal of Banking and Finance*, vol. 19, nº 2, mayo, 299-322.

Jones, Philip E., Scott P. Mason y Eric Rosenfeld (1984): "Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation", *The Journal of Finance*, vol. 39, nº 3, 611-27.

Leland, Hayne E. (1994): "Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure", *The Journal of Finance*, vol. 49, nº 4, 1.213-52.

Lintner, John (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, nº 1, febrero, 13-37.

Longstaff, Francis A. y Eduardo S. Schwartz (1995): "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt", *The Journal of Finance*, vol. 50, nº 3, 789-819.

Mella-Barral, Pierre (1999): "The dynamics of default and debt reorganization", *Review of Financial Studies*, vol. 12, nº 3, 535-78.

Mella-Barral, Pierre y William Perraudin (1997): "Strategic debt service", *The Journal of Finance*, vol. 52, nº 2, 531-556.

Merton, Robert C. (1973): "Theory of rational option princing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, primavera, 141-183.

Merton, Robert C. (1974): "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates", *Journal of Finance*, vol. 29, mayo, 449-70.

Merton, Robert C. (1977): “On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem”, *Journal of Financial Economics*, vol. 5, noviembre, 241-249.

Merton, Robert C. (1990): *Continuous-Time Finance*, 1ª edición revisada, Basil Blackwell, Oxford.

Modigliani, Franco y Merton H. Miller (1958): “The cost of capital, corporation finance and the theory of investment”, *American Economic Review*, vol. 48, junio, 261-297.

Mossin, Jan (1966): “Equilibrium in a capital asset market”, *Econometrica*, vol. 34, nº4, octubre, 768-783.

Neftci, S. (1996): *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, Nueva York.

Nelken, I. (1996): *The Handbook of Exotic Options*, Irwin, Chicago, Illinois.

Rich, Don C. (1994): “The mathematical foundations of barrier options-pricing theory”, *Advances in Futures and Options Research*, vol. 7, 267-311.

Richken, P. (1995): “On pricing barrier options”, *Journal of Derivatives*, vol. 3, nº 2, invierno, 19-28.

Ross, Stephen A.(1976): “The arbitrage theory of capital asset pricing”, *Journal of Economic Theory*, 13, diciembre, 341-360.

Rubinstein, Mark y E. Reiner (1991): “Breaking down the barriers”, *Risk*, septiembre, 28-35.

Sharpe, William F. (1964): “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *Journal of Finance*, vol. 19, nº 3, septiembre, 425-442.

Sharpe, William F., Gordon Alexander y Jeffrey V. Bailey (1999): *Investments*, 6ª edición, Prentice Hall, Upper Saddle River, Nueva Jersey.

Snyder, G. L. (1969): "Alternative forms of options", *Financial Analysts Journal*, septiembre-octubre.

The Options Institute (ed.) (1999): *Options*, 3ª edición, McGraw-Hill, Nueva York.

Treynor, Jack (1961): "Toward a theory of the market value of risky assets", mimeografía.

Zhang, P.G.(1997): *Exotic Options*, World Scientific Publishing Co, Londres.