

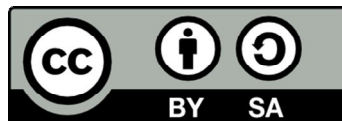


UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

## Formes d'ona de Maass i aplicacions

### Maass waveforms and applications

Dionís Remón Adell



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- Compartiqual 3.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - Compartiqual 3.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0. Spain License.**

UNIVERSITAT DE BARCELONA  
Facultat de Matemàtiques  
Departament d'Àlgebra i Geometria

MAASS WAVEFORMS AND APPLICATIONS

# Formes d'ona de Maass i aplicacions

Dionís Remón Adell







UNIVERSITAT DE BARCELONA  
Facultat de Matemàtiques  
Departament d'Àlgebra i Geometria

MAASS WAVEFORMS AND APPLICATIONS

# Formes d'ona de Maass i aplicacions

Memòria presentada per a optar al grau de doctor en Matemàtiques per

Dionís Remón Adell

Departament d'Àlgebra i Geometria

Doctorand: Dionís Remón Adell

Tutora i directora de la tesi: Dra. Pilar Bayer i Isant

Pilar Bayer Isant, catedràtica d'àlgebra

de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona,

FAIG CONSTAR

que el senyor Dionís Remón Adell ha realitzat aquesta memòria  
per a optar al grau de Doctor en Matemàtiques sota la meva direcció.

Barcelona, octubre del 2015

Signat: Pilar Bayer Isant

*«He vist coses que vosaltres els humans no us creuríeu mai de la vida.»*  
*Roy Batty*





# Introducció

Aquesta memòria està dedicada principalment al tractament computacional de les *formes d'ona de Maass* i a la consideració d'algunes aplicacions pràctiques derivades del seu estudi. Per abreujar, designarem aquestes funcions, simplement, amb el nom de *formes de Maass*.

Les formes de Maass són funcions infinitament diferenciables que presenten comportaments periòdics (és a dir, automorfs) respecte de grups fuchsians. Des d'un punt de vista numèric, podem dir que les formes de Maass són força més misterioses que les formes automorfes habituals, que són funcions meromorfes. D'aquestes, i especialment quan el grup d'automorfia és un subgrup de congruència del grup modular, se'n coneixen nombrosos exemples numèrics, alguns dels quals es remunten al segle XIX, mentre que ha estat únicament en els darrers anys que s'han obtingut alguns exemples explícits de formes de Maass, referits tots ells a subgrups de congruència del grup modular.

D'entrada, la tesi contempla una exposició i una implementació d'algoritmes existents per al càlcul de desenvolupaments a l'entorn de la punta de l'infinit de formes de Maass respecte de subgrups de congruència del grup modular. Tot seguit proposem un conjunt d'algoritmes que, d'acord amb la filosofia de [BT07a] i [BT07b], s'orienten cap a l'obtenció dels desenvolupaments de formes de Maass a l'entorn de punts no necessàriament cuspidals. Aquests algoritmes es tracten en el cas modular i, també, en el cas quaterniònic, en què el grup fuchsian prové de les unitats d'un ordre d'una àlgebra de quaternions racional indefinida.

El caràcter discontinu dels grups fuchsians ha estat emprat en el disseny dels anomenats algoritmes de reducció de punts, els quals han resultat bàsics per als objectius anteriors. Al mateix temps, hem fet ús d'aquests algoritmes de reducció de punts per al disseny de codis nous de transmissió de dades en xarxes sense fils i aptes, per tant, per als mòbils que fem diàriament. Per causa del seu origen, els hem anomenat *codis fuchsians*.

La memòria està dividida en tres parts i un apèndix. La primera part comprèn del capítol 1 al capítol 4. Conté una exposició teòrica dels grups fuchsians així com també el desenvolupament d'eines computacionals orientades a les aplicacions posteriors del treball. La segona part comprèn els capítols 5 al 8. En ella presentem les formes de Maass i els conceptes destinats al càlcul dels seus desenvolupaments. La tercera part, que comprèn els capítols 9 i 10, és la dedicada al disseny dels codis fuchsians per a la transmissió de dades. A l'apèndix s'hi troba un resum en anglès.

El capítol 1 serveix per a establir conceptes bàsics de geometria hiperbòlica i fixar-ne la notació; els seus resultats són coneguts. Hi distingim, essencialment, dos tipus de grups fuchsians: els grups fuchsians modulars, que posseeixen dominis fonamentals no compactes, i els grups fuchsians quaterniònics i no modulars, els dominis fonamentals dels quals són compactes. Cal remarcar-hi l'algoritme per al càlcul de classes laterals (algoritme 1), que ens serà d'utilitat al llarg de la memòria. Les referències per a aquest capítol són [Kat92] i el primer capítol de [Miy06], per a la part de grups modulars; i [AB04], per a la part de grups quaterniònics.

En el capítol 2 presentem una recopilació de dominis fonamentals per l'acció de grups fuchsians en el semiplà de Poincaré. Hi introduïm els grups fuchsians concrets que emprarem al llarg del treball i en mostrem dominis fonamentals. Per als dominis fonamentals de grups modulars hi ha moltes referències; les emprades aquí han estat [Iwa97], [Miy06] i [Kat92]. Per als dominis fonamentals dels grups quaterniònics, la referència fonamental ha estat [AB04] i, també, [NT12]. Per als grups de signatura  $(1; e)$  hem emprat part dels resultats obtinguts en [Sij13].

En el capítol 3 desenvolupem l'eina computacional més important que farem servir al llarg de la tesi: l'algoritme de reducció de punts. L'existència d'aquest algoritme ha estat considerat en [Voi09]; nosaltres en donem una implementació efectiva en el teorema 3.3.1. Primer desenvolupem un algoritme per al grup  $\Gamma(6, 1)$  i n'obtenim avantatges específiques (vegi's el teorema 3.2.16). Després traslladem aquest algoritme a altres dominis fonamentals provinents de grups quaterniònics. També portem a terme un estudi detallat del grup fuchsian de signatura  $(1; 2)$ , determinat per la terna  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$ . Finalment, en la secció 3.3, enunciem i demostrem el teorema general 3.3.1, que és el resultat principal d'aquest capítol. Com veurem, la implementació de l'algoritme repercutirà en la teoria de codis fuchsians. Aquest capítol ha donat lloc a l'article [BR14].

En el capítol 4 donem una aplicació aritmètica de l'algoritme de reducció de punts a l'estudi de les classes de formes quadràtiques binàries associades a ordres quadràtics, tant en el cas modular com en el cas quaterniònic. Hi definim el concepte de forma reduïda de manera que generalitzi el considerat

per Legendre i Gauss en el cas del grup modular  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Hi treballen els exemples concrets introduïts en [AB04]. Els zeros de les formes quadràtiques reduïdes que obtindrem seran emprats en el capítol 8. Cal dir que l'estudi d'aquests punts i els valors que en ells hi prenen les funcions automorfes és essencial en la teoria de la multiplicació complexa-quaterniònica, desenvolupada essencialment per Shimura (cf. [BG05]).

La segona part de la memòria s'inicia en el capítol 5. Aquest capítol conté els conceptes teòrics necessaris per a l'estudi de les formes d'ona de Maass, com ara l'operador de Laplace-Beltrami i el seu espectre (vegi's 5.3.2) i la definició de forma de Maass. Es tracta de vectors propis de l'operador de Laplace-Beltrami que són, a més, funcions automorfes respecte de grups fuchsians de primera espècie. Quan aquestes funcions són invariants respecte subgrups del grup modular parlem, simplement, de formes de Maass modulars i, quan ho són respecte de grups quaterniònics no modulars, ho fem de formes de Maass quaterniòniques.

En el capítol 6 estudiem les formes de Maass modulars i, en especial, les formes de Maass-Hecke. El capítol conté la llei de Weyl (vegi's la fórmula 6.1) dedicada a la distribució asimptòtica, en el cas modular, dels valors propis de l'operador de Laplace Beltrami. Denominem formes de Maass-Hecke les formes que es construeixen a partir de caràcters de Hecke (*Hecke Größencharakteren*) associats a cossos quadràtics reals i que resulten ser automorfes respecte de l'acció de certs subgrups de congruència. Per mitjà de propietats dels operadors de Hecke en operar sobre els espais de formes de Maass, i de resultats que hauran estat considerats en el capítol anterior sobre l'espai de les formes d'ona, podem dissenyar un algoritme per al càlcul dels coeficients de les formes de Maass-Hecke a l'entorn de la punta de l'infinit. En particular, aquest algoritme proporciona el càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier per a formes d'ona que foren introduïdes per Maass en el seu article original de l'any 1949 [Maa49]. Fem notar, a més, que Hecke fou el director de la tesi de Maass, defensada l'any 1937. La taula 6.2 presenta alguns dels resultats obtinguts. Com a resultat de la llei de Weyl, però, no totes les formes de Maass modulars són de Maass-Hecke i, per tant, cal anar més enllà.

En el capítol 7 procedim al càlcul de formes de Maass modulars en el cas general. La referència principal és ara [Bum97]. D'entrada hi recopilem resultats de treballs relatius a formes de Maass modulars de Hejhal, Strömbergsson i Strömberg, entre d'altres: [HR92], [Str01], [Str05], [BSV06], [Str12] i [Hej12]; i treballs relatius a formes de Maass modulars relacionades amb temes de física: [HS01], [The05], [The06], [AST12]. Tot i que no existeixen fórmules explícites per al càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier d'aquestes formes, els autors esmentats varen desenvolupar una manera sistemàtica per

a aïllar valors propis del laplacà i calcular els coeficients dels vectors propis a l'entorn de punts cuspidals. Aquest capítol conté també resultats que varen ser desenvolupats en el nostre treball de màster [Rem09]. Referències més generals per a aquest capítol són [Shi10] i [Miy06].

Els càlculs efectuats fins ara ho han estat a l'entorn de la punta de l'infinít. En aquest mateix capítol calculem els coeficients de desenvolupaments de formes de Maass però ara a l'entorn de punts no cuspidals. Per a això ens ha calgut introduir el concepte de desenvolupament de Bessel-Fourier generalitzat, no cuspidal. Primer hem recordat el concepte de paràmetre local invariant, que correspon a l'equivalent de la funció exponencial del desenvolupament Bessel-Fourier, i d'acord amb l'article [BT07a]. Després hem obtingut la part del paràmetre local que haurà de ser pròpia per l'acció del laplacà hiperbòlic. Per a aquest objectiu, hem utilitzat resultats de Hejhal [Hej76] i [Hej83]. Els tipus de desenvolupament local d'aquestes formes són mostrats en el teorema 7.2.8. Finalment, en l'última secció, presentem un algoritme que permet el càlcul dels coeficients locals per a les formes de Maass modulars obtingudes prèviament (vegi's la secció 7.3); els resultats han estat recollits en la taula 7.2.

En el capítol 8 emprem els desenvolupaments locals del capítol 7 per a dissenyar un algoritme nou que permeti l'avaluació de formes de Maass en el cas quaterniònic. Abans, necessitem recopilar alguns resultats en l'esperit del programa de Langlands. Es tracta en certa manera de traslladar al cas infinitament diferenciable la coneguda correspondència de Jacquet-Langlands del cas analític. Concretament, necessitem resultats de Hejhal, Bolte i Johansson dels articles [Hej85], [BJ99b] i [BJ99a] sobre la fórmula de les traces de Selberg i algunes de les seves aplicacions, que es tradueixen en el fet que hi ha una relació entre formes de Maass modulars i formes de Maass quaterniòniques. Aquesta relació, que hem anomenat correspondència de Hejhal-Bolte-Johansson (HBJ), es manifesta en les fórmules 8.2 i 8.3, i en el teorema 8.2.1. La correspondència ens proporciona una igualtat mitjançant la qual podem aproximar els valors de la funció de Maass quaterniònica en un graella de punts. Tot i així necessitem encara avaluar numèricament una integral 8.3, per la qual cosa recordem el concepte de punts equidistribuïts respecte d'una mesura. El teorema 8.3.2 ens diu que els zeros de les formes quadràtiques binàries reduïdes, que hem calculat en el capítol 4, constitueixen conjunts equidistribuïts sobre les superfícies modulars, respecte de la mesura hiperbòlica. Per tant, podem dissenyar un algoritme per a l'avaluació de formes de Maass quaterniòniques i per al càlcul dels seus desenvolupaments a partir dels algorismes anteriors i del nostre algoritme de reducció de formes (vegi's la secció 8.4).

La tercera part de la memòria proporciona una aplicació pràctica de l'al-

goritme de reducció de punts; comprèn els capítols 9 i 10. El capítol 9 explica com l'algoritme de reducció de punts pot ser aplicat, també, per a obtenir nous codis per a la tramesa d'informació. Aquesta aplicació neix dels contactes mantinguts els darrers anys amb l'equip de matemàtics i analistes de sistemes dirigit per Camilla Hollanti de la Universitat de Aalto, Finlàndia. La definició d'aquests codis és donada a 9.3.1. A fi de proporcionar aquesta aplicació, ens ha calgut fer un estudi del cost computacional del sistema de descodificació proposat. En el teorema 9.3.3 posem de manifest que la descodificació en aquest tipus de codis té un cost logarítmic en termes de la mida del codi, la qual cosa millora notablement els codis emprats fins ara. Més endavant, en el mateix capítol, desenvolupem un quants exemples concrets de codis fuchsians i en calculem els rendiments (vegi's les seccions 9.5.1, 9.5.2 i 9.5.3). Tot i que anteriorment ja hi havia precedents de codis en el semiplà de Poincaré (vegi's, per exemple, els articles [dSFCjP06], [CAPV11] i, fins i tot, [GV59]), es pot dir que no havien estat tingudes prou en compte propietats derivades del caràcter aritmètic dels grup fuchsians considerats. Les publicacions relacionades amb aquest capítol es troben en els treballs conjunts [BRH13], [BRHA14], així com també en la darrera secció de [BR14].

El capítol 10 conté un resum de l'article [BCHAR16] i una secció de problemes oberts i propostes per a futures millores dels codis. L'article conjunt [BCHAR16] es divideix en dues parts. La primera parla de com fer ús de l'estructura dels grups quaterniònics per a obtenir una millora de la taxa de transmissió de la informació del codi. La segona tracta de l'aplicació dels codis fuchsians associats a grups de signatura  $(1; e)$ . En la part de problemes oberts, exposem el problema de l'etiquetatge de les paraules i contemplem la possibilitat de l'ús d'altres grups fuchsians en la codificació de missatges, com ara els grups de Schottky. La reducció de punts per a aquest tipus de grups és mostrada en la figura 10.3. Aquestes figures es poden trobar, també, en l'exposició [Rem15], presentada en el Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona 2015.

Una part significativa del temps d'elaboració de la tesi ha estat dedicada al disseny, desenvolupament, implementació i optimització de programes per a dur a terme els càlculs, les taules i els dibuixos que apareixen en el decurs de la memòria. És per a això que acompanyem la memòria escrita d'un llapis electrònic que, a banda del text de la memòria en format digital, conté les figures i els nostres programes, escrits en Mathematica. Els fitxers que contenen les versions finals es troben en una carpeta que s'anomena Mathematica, organitzada en subcarpetes, una per a cada capítol que ha necessitat la programació de càlculs.

## Agraïments

Per a acabar aquesta introducció voldria manifestar el meu agraïment a totes les persones que, d'una manera o altra, hi han contribuït al llarg d'aquest temps.

Primer de tot voldria recordar tots els professors de matemàtiques que en l'etapa d'ensenyament obligatori i batxillerat em van despertar la passió per les matemàtiques i m'impulsaren amb tanta força que la inèrcia ha arribat fins a aquestes línies.

A continuació vull donar les gràcies als professors i professores del Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona amb qui, d'una manera o altra, he compartit tot aquest temps ja sigui compartint despatx, compartint docència o compartint simplement alguna xerrada en els passadissos. En especial voldria dedicar unes paraules a tots els estudiants de doctorat que han anat passant pel seminari durant tot aquest temps amb els quals he pogut compartir discussions inspiradores.

En l'àmbit de la recerca vull donar les gràcies al Dr. Ivan Blanco-Chacón i a la Dra. Camilla Hollanti per haver-me donat la possibilitat de passar un temps fent recerca en la Universitat de Aalto, Finlàndia, i de descobrir un país meravellós.

Sobretot vull remarcar la importància del meu entorn familiar i d'amics propers que m'han donat força en tot moment i han participat dels moments bons i dels dolents al llarg de tot aquest temps. En especial la dels dos últims en arribar, que tantes estones de distracció m'han proporcionat.

També voldria dedicar unes línies a tots els projectes d'investigació que han ajudat parcialment econòmicament per a la realització d'aquesta tesi, que són: BFM2003-01898, MTM2006-04895, MTM2009-07024 i MTM2012-33830; també 2005SGR01070 i 2009SGR1370. També voldria agrair a Caixa Terrassa per haver-me donat l'impuls econòmic inicial sense el qual no hauria arribat tan lluny en el camp de les matemàtiques.

Dedicar aquestes últimes línies de la introducció a la Dra. Pilar Bayer per haver-me transmès confiança des del principi i en tot moment. Agrair profundament els coneixements, consells i passió per les matemàtiques i la física transmesos al llarg de tot aquest temps.

# Índex

<b>I</b>	<b>Grups fuchsians</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Conceptes preliminars</b>	<b>3</b>
1.1	El pla hiperbòlic . . . . .	3
1.2	Grups fuchsians . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dominis fonamentals</b>	<b>11</b>
2.1	Definicions bàsiques . . . . .	11
2.2	Dominis fonamentals modulars . . . . .	13
2.3	Dominis fonamentals quaterniònics . . . . .	15
2.4	Dominis per a grups fuchsians de signatura $(1; e)$ . . . . .	24
2.5	Dominis en el disc unitat . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Reducció de punts</b>	<b>31</b>
3.1	Algoritmes per als grups modulars . . . . .	31
3.2	Algoritmes per als grups quaterniònics . . . . .	33
3.3	Algoritme general de reducció de punts . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Reducció de formes quadràtiques binàries</b>	<b>55</b>
4.1	Formes quadràtiques binàries i ordres quaterniònics . . . . .	55
4.2	Algoritmes de reducció de formes . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Formes d'ona de Maass</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>L'operador de Laplace-Beltrami</b>	<b>67</b>
5.1	Conceptes preliminars . . . . .	67
5.2	Funcions de Bessel . . . . .	68
5.3	L'espectre de l'operador $\Delta$ . . . . .	71
5.4	Equació de Schrödinger estacionària . . . . .	73



<b>6</b>	<b>Formes de Maass-Hecke</b>	<b>77</b>
6.1	Formes de Maass modulars . . . . .	77
6.2	Desenvolupaments de Bessel-Fourier . . . . .	78
6.3	Mètodes algebraics . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Formes de Maass modulars</b>	<b>87</b>
7.1	Mètodes numèrics . . . . .	87
7.2	Desenvolupaments locals . . . . .	91
7.3	Algoritme per al càlcul dels desenvolupaments locals . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Formes de Maass quaterniòniques</b>	<b>101</b>
8.1	Funcions theta de Siegel-Hejhal . . . . .	101
8.2	La correspondència HBJ . . . . .	105
8.3	Avaluació de formes de Maass quaterniòniques . . . . .	106
8.4	Algoritme per al càlcul dels desenvolupaments locals . . . . .	108
<b>III</b>	<b>Aplicacions tecnològiques</b>	<b>111</b>
<b>9</b>	<b>Codis fuchsians</b>	<b>113</b>
9.1	Conceptes preliminars . . . . .	113
9.2	Codis QAM . . . . .	114
9.3	Un paradigma nou . . . . .	115
9.4	L'algoritme PRA . . . . .	119
9.5	Codis fuchsians . . . . .	121
<b>10</b>	<b>Control de taxes i problemes oberts</b>	<b>127</b>
10.1	Codis fuchsians de taxes arbitràriament grans . . . . .	127
10.2	Grups aritmètics de signatura $(1; e)$ . . . . .	128
10.3	Problemes oberts . . . . .	129
	<b>English Summary</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Maass waveforms and applications</b>	<b>133</b>
A.1	Fuchsian groups . . . . .	134
A.2	Point reduction algorithm . . . . .	136
A.3	Binary quadratic form reduction algorithm . . . . .	137
A.4	Maass forms . . . . .	138
A.5	Modular Maass forms . . . . .	141
A.6	Quaternion Maass forms . . . . .	142
A.7	Fuchsians codes . . . . .	144

*ÍNDEX* xiii

**B Published articles** **147**

B.1 Articles in international journals . . . . . 147

B.2 Contributions to books . . . . . 147

B.3 Miscellaneous . . . . . 147

**Índex alfabètic** **149**

**Llista de figures** **151**

**Llista de taules** **153**

**Bibliografia** **155**



**Part I**  
**Grups fuchsians**



# Capítol 1

## Conceptes preliminars

En aquest capítol presentem conceptes bàsics de geometria hiperbòlica i treballarem amb el grup d'isometries del semiplà de Poincaré. En particular, s'hi introdueixen els aspectes concrets de la teoria de grups fuchsians necessaris per al desenvolupament del treball. En el cas dels grups modulars de congruència, dissenyem un algoritme per al càlcul d'un conjunt de representants de les  $\Gamma_0(q)$ -classes per la dreta del grup modular  $\Gamma_0(1)$ .

Les referències per a aquest capítol són [Kat92] i el primer capítol de [Miy06], per a la part de grups modulars; i [AB04], per a la part de grups quaterniònics.

### 1.1 El pla hiperbòlic

Sigui  $\mathcal{H}$  el semiplà de Poincaré; és a dir, el conjunt  $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  dotat de la mètrica hiperbòlica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Donats dos punts de  $z_0, z_1 \in \mathcal{H}$ , considerem un camí de  $[0, 1]$  en  $\mathcal{H}$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , continu i diferenciables a trossos i tal que  $z(0) = z_0$  i  $z(1) = z_1$ . La seva longitud hiperbòlica és donada per

$$\ell(z(t)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$

**1.1.1 Definició.** La distància hiperbòlica entre dos punts  $z_0$  i  $z_1 \in \mathcal{H}$  és

$$\rho(z_0, z_1) = \inf_{z(t)} \ell(z),$$

on les funcions  $z(t)$  descriuen tots els camins d'origen  $z_0$  i d'extrem  $z_1$ .

**1.1.2 Proposició.** *Tenim els resultats següents, propis de la geometria hiperbòlica.*

1. Donats  $z_0, z_1 \in \mathcal{H}$ , se satisfà que

$$\rho(z_0, z_1) = \ln \frac{|z_0 - \bar{z}_1| + |z_0 - z_1|}{|z_0 - \bar{z}_1| - |z_0 - z_1|}. \quad (1.1)$$

2. Les geodèsiques en  $\mathcal{H}$  són semicercles i rectes ortogonals a l'eix real.

Denotem per  $M(2, \mathbb{R})$  l'anell de les matrius  $2 \times 2$  de coeficients reals, per  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  el grup dels seus elements invertibles, format per les matrius de determinant no nul, i per  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  el subgrup de l'anterior grup format per les matrius de determinant 1. Sigui

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

El grup  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  opera en  $\mathcal{H}$  de la manera següent: donat un element  $\gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ , es té que

$$\begin{aligned} \gamma: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Atès que les matrius  $-\text{Id}$  i  $\text{Id}$  operen com la identitat, l'acció anterior factoritza a través del grup

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}.$$

Es té també la igualtat

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times,$$

on  $\mathbb{R}^\times$  denota el grup multiplicatiu dels elements invertibles de  $\mathbb{R}$ .

Denotem per  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  el conjunt d'isometries del pla hiperbòlic; és a dir, el conjunt de les aplicacions (bijectives) de  $\mathcal{H}$  que preserven la distància hiperbòlica.

**1.1.3 Proposició.** *El grup projectiu especial lineal  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  és un subgrup normal d'índex 2 de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ .*

**1.1.4 Observació.** Per a obtenir la igualtat, hauríem d'afegir-hi la transformació  $g(z) = -\bar{z}$ , on  $\bar{z}$  denota el conjugat complex de  $z$ .

Els automorfismes directes del pla hiperbòlic es classifiquen d'acord amb el valor de la traça de la matriu que els defineix. Sigui  $\gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . Si  $|\operatorname{tr}(\gamma)| < 2$ , es diu que l'element  $\gamma$  és *el·líptic*. Si  $|\operatorname{tr}(\gamma)| = 2$ , l'element s'anomena *parabòlic* i si  $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2$ , s'anomena *hiperbòlic*. Les transformacions hiperbòliques tenen dos punts fixos en la recta real. Les transformacions parabòliques tenen un únic punt fix, que és doble, i les el·líptiques, tenen dos punts fixos, complexos conjugats, l'un dels quals és de  $\mathcal{H}$ .

## 1.2 Grups fuchsians

Considerem en el grup  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  la norma induïda per la norma de  $\mathbb{R}^4$ ; és a dir, si  $\gamma$  és una transformació definida per una matriu  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $ad - bc = 1$ , definim la seva norma com

$$\|\gamma\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Notem que  $\|\cdot\|$  és una funció ben definida. El grup  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  esdevé així un grup topològic normat. El grup  $\operatorname{Isom}(\mathcal{H})$  de totes les isometries de  $\mathcal{H}$  es pot dotar d'una topologia de forma similar, en tenir en compte l'observació 1.1.4.

**1.2.1 Definició.** Un subgrup  $\Gamma$  de  $\operatorname{Isom}(\mathcal{H})$  s'anomena discret quan la topologia induïda en  $\Gamma$  per la topologia de  $\operatorname{Isom}(\mathcal{H})$  és la topologia discreta.

Donats un punt  $z \in \mathcal{H}$  i un grup  $\Gamma$ , el *grup d'isotropia*  $\Gamma_z$  del punt  $z$  és

$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) = z\}.$$

Donat un punt  $z \in \mathcal{H}$ , el seu *conjunt òrbita* és

$$\Gamma z = \{w \in \mathcal{H} \mid w = \gamma(z), \gamma \in \Gamma\}.$$

**1.2.2 Definició.** En general, un grup  $\Gamma$ , que actua en un espai topològic  $X$ , ho fa de manera pròpiament discontinua quan, per a tot  $z \in \mathcal{H}$ , l'òrbita  $\Gamma z$  és localment finita; és a dir, per a tot compacte  $K \subseteq X$ , el conjunt  $\Gamma z \cap K$  és finit.

Aquest conceptes ens condueixen a la definició següent.

**1.2.3 Definició.** Un grup fuchsian és un subgrup discret de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .

**1.2.4 Teorema.** Un subgrup  $\Gamma$  de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  és un grup fuchsian si, i només si,  $\Gamma$  opera de manera pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ .



**1.2.5 Lema.** *Siguin  $\Gamma \subseteq \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  un grup que opera de manera pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ , i  $P \in \mathcal{H}$  un punt fix per a algun element de  $\Gamma$ . Aleshores, existeix un entorn  $W$  de  $P$  tal que cap altre punt de  $W$  és fix per cap altre element de  $\Gamma$  diferent de la identitat.  $\square$*

Atès que  $\mathbb{Z}$  és un subgrup discret de  $\mathbb{R}$ , el primer exemple de grup fuchsian és proporcionat per grup modular,  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Fem notar que el grup modular està generat per una translació  $T$  i per una simetria  $S$  (cf. [Ser73]). Més concretament,

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \langle T, S \rangle,$$

on

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Observem que qualsevol subgrup del grup modular serà, també, un grup fuchsian.

### 1.2.1 Grups fuchsians modulars

En aquest apartat  $q \geq 1$  denota un nombre enter positiu.

**1.2.6 Definició.** El *subgrup de congruència principal* de nivell  $q$  és el subgrup del grup modular donat per les matrius següents:

$$\Gamma(q) = \{\gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \text{Id} \pmod{q}\}.$$

Un subgrup del grup modular es diu que és un *subgrup de congruència* quan conté un dels subgrups de congruència principal.

**1.2.7 Definició.** Es diu que un punt  $z \in \mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$  és parabòlic (respectivament, hiperbòlic o el·líptic) respecte de  $\Gamma$  si existeix una transformació  $\gamma$  tal que  $\gamma(z) = z$  que és parabòlica i diferent de la identitat (respectivament, hiperbòlica o el·líptica). Anomenarem puntes o punts cuspidals del grup  $\Gamma$  els punts parabòlics respecte de  $\Gamma$ .

**1.2.8 Proposició.** *El nombre de puntes no equivalents per l'acció d'un grup de congruència principal  $\Gamma(q)$  de nivell  $q > 2$  és*

$$h = \frac{1}{2}q^2 \prod_{p|q} (1 - p^{-2}),$$

on  $p$  descriu el conjunt dels divisors primers de  $q$ .

Com a subgrups de congruència de nivell  $q$  tenim el grups clàssics següents:

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \pmod{q} \right\}.$$

**1.2.9 Proposició.** *Un conjunt de representants per a  $\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1)$  és donat pel conjunt de matrius*

$$\left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ u & v \end{bmatrix} \in \Gamma_0(1) \mid v|q \text{ i } u \pmod{q/v} \right\}. \quad (1.3)$$

Per tant, l'índex és

$$[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(q)] = q \prod_{p|q} (1 + p^{-1}), \quad (1.4)$$

on  $p$  descriu el conjunt dels divisors primers de  $q$ .

Els subgrups de congruència  $\Gamma_0(q)$  no són subgrups normals de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Ens ocupem ara de donar un algoritme per tal d'obtenir d'una manera directa sistemes de representants de les classes laterals per la dreta  $\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1)$ .

Sigui  $\Gamma_0(q)$  un grup de congruència. Per a cada divisor propi  $d$  de  $q$ , sigui

$$A_d := \{m_{d,1}, \dots, m_{d,\varphi(\omega)}\}$$

un conjunt complet de representants de  $(\mathbb{Z}/\omega\mathbb{Z})^*$ , on  $\varphi$  denota la funció d'Euler i  $\omega = \text{mcd}(d, \frac{q}{d})$ .

Realitzem aquesta selecció de manera que  $0 < m_{d,j} < \frac{q}{d}$  i  $\text{mcd}(m_{d,j}, \frac{q}{d}) = 1$ , per a tot  $j \in \{1, 2, \dots, \varphi(\omega)\}$ . Aquesta tria és possible pel fet que la projecció natural de  $(\mathbb{Z}/\frac{q}{d}\mathbb{Z})^*$  en  $(\mathbb{Z}/\omega\mathbb{Z})^*$  és exhaustiva.

**1.2.10 Exemple.** Considerem  $q = 9000$  i  $d = 100$ . S'obté que  $\frac{q}{d} = 90$ ,  $\omega = \text{mcd}(100, 90) = 10$ , i  $\varphi(\omega) = 4$ . Podem triar aleshores

$$A_{100} = \{1, 13, 7, 19\}.$$

Una vegada fixats els conjunts  $A_d$ , definim els conjunts

$$M_d := \{dm_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\}$$

i

$$M := \bigcup_{\substack{d|q \\ 1 < d < q}} M_d.$$

Recordem el resultat següent, que es demostra a [Rem09].

**1.2.11 Proposició.** *L'algorithm 1 proporciona un conjunt de  $\Gamma_0(q)$ -classes per la dreta del grup modular  $\Gamma_0(1)$ . En ell,  $n(m)$  denota l'enter més petit que satisfà la congruència*

$$n(m)m^2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

□

**1.2.12 Observació.** Observem que si  $q$  és primer aleshores el conjunt  $\mathbf{M}$  és buit i, per tant, l'algorithm conclou en el primer *for*.

```

Data:  $q$ : que determina  $\Gamma_0(q)$ 
Result:  $C$ : conjunt de representants de  $\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1)$ 
 $C = \emptyset$ ;
for  $k = 0$  to  $k = q - 1$  do
  |  $C = C \cup \{ST^k\}$ 
end
for  $m \in \mathbf{M}$  do
  | for  $j = 0$  to  $j = n(m) - 1$  do
  | |  $C = C \cup \{ST^m ST^j\}$ 
  | end
end

```

**Algorithm 1:** Algorithm per al càlcul de classes laterals

## 1.2.2 Grups fuchsians quaterniònics

El nostre objectiu en aquesta secció és recordar la definició i els fets bàsics sobre els grups fuchsians quaterniònics  $\Gamma(D, N)$ . Considerem una àlgebra de quaternions racional  $H$ , és a dir, una àlgebra central simple sobre els cos dels racionals  $\mathbb{Q}$  i de dimensió 4. Denotem per  $H^*$  el grup dels elements invertibles de  $H$ .

Cada àlgebra de quaternions admet una  $\mathbb{Q}$ -base  $\{1, I, J, K\}$  satisfent les relacions  $I^2 = a$ ,  $J^2 = b$  i  $K = IJ = -JI$ , per a  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ , donats. En aquest cas, escriurem  $H = (a, b)_{\mathbb{Q}}$ .

Cada àlgebra  $H = (a, b)_{\mathbb{Q}}$  esta proveïda d'una conjugació, que es denota per

$$\omega = x + yI + zJ + tK \rightarrow \bar{\omega} = x - yI - zJ - tK,$$

per a  $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ . La traça i la norma d'un element  $\omega \in H$  es defineixen com

$$\text{tr}(\omega) = \omega + \bar{\omega} = 2x,$$

$$n(\omega) = \omega\bar{\omega} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2.$$

Si  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ , amb  $a > 0$ , podem definir una immersió d'àlgebres

$$\Psi : (a, b)_{\mathbb{Q}} \rightarrow M(2, \mathbb{R}) \quad (1.5)$$

donada per

$$x + yI + zJ + tIJ \rightarrow \begin{bmatrix} x + y\sqrt{a} & z + t\sqrt{a} \\ b(z - t\sqrt{a}) & x - y\sqrt{a} \end{bmatrix}.$$

L'aplicació  $\Psi$  proporciona una *representació matricial de l'àlgebra*.

Notem que  $a > 0$  implica que  $H$  és isomorfa a una subàlgebra d'una àlgebra de matrius reals; en aquest cas es diu que  $H$  és una àlgebra indefinida, o bé que és no ramificada a la plaça de l'infinit. El nombre de places  $p$  del cos  $\mathbb{Q}$  on la  $\mathbb{Q}$ -àlgebra  $H$  ramifica és sempre parell, i aquest fet és equivalent a la llei de reciprocitat quadràtica; en aquestes places l'àlgebra  $H \otimes \mathbb{Q}_p$  és isomorfa a un cos no commutatiu, extensió del cos  $\mathbb{Q}_p$  dels nombres  $p$ -àdics. A més, les places on  $H$  ramifica determinen l'àlgebra  $H$ , llevat d'isomorfismes. El producte d'aquestes places s'anomena el discriminant de  $H$  i es denota per  $D$ . Notem que quan  $D = 1$ , l'àlgebra  $H$  no és altra que l'àlgebra de matrius reals  $M(2, \mathbb{Q})$ .

Amb la mateixa filosofia amb què estudiem els elements enters dels cosos de nombres podem considerar elements enters en àlgebres de quaternions. Aquests elements proveeixen anells no commutatius i grups notables relacionats amb les seves unitats.

**1.2.13 Definició.** Un element  $\alpha \in H = (a, b)_{\mathbb{Q}}$  s'anomena enter sobre  $\mathbb{Z}$  si  $n(\alpha)$  i  $\text{tr}(\alpha)$  són de  $\mathbb{Z}$ .

**1.2.14 Definició.** Un subconjunt  $\mathcal{O}$  de  $H$  on tots els elements són enters sobre  $\mathbb{Z}$ , el qual és un anell, i tal que  $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O} = H$  s'anomena un *ordre* de  $H$ .

Cada ordre de  $H$  esta contingut en un ordre maximal.

**1.2.15 Definició.** Un ordre en una àlgebra de quaternions  $H$  que és intersecció de dos ordres maximals s'anomena un *ordre d'Eichler*.

Siguin  $\mathcal{O}(D, 1)$  un ordre maximal en una àlgebra de quaternions de discriminant  $D$  i  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(D, 1)$  un ordre d'Eichler. Sigui  $N = [\mathcal{O}(D, 1) : \mathcal{O}]$ .

Escriurem  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D, N)$  i direm que  $\mathcal{O}(D, N)$  és un ordre d'Eichler de nivell  $N$ . En considerar el grup de les unitats de quaternions de norma igual a 1:

$$\mathcal{O}(D, N)_+^* := \{\alpha \in \mathcal{O}(D, N)^* \mid n(\alpha) = 1\},$$

poden definir  $\Gamma(D, N) = \Psi(\mathcal{O}(D, N)_+^*)$ .

Amb aquestes definicions, tenim que els grup de congruència definits en la secció anterior resulten ser  $\Gamma_0(1) = \Gamma(1, 1)$  i  $\Gamma_0(q) = \Gamma(1, q)$ .

En general, anomenarem grups fuchsians modulars els subgrups  $\Gamma \subseteq \Gamma(1, N)$  i grups quaterniònics els subgrups  $\Gamma \subseteq \Gamma(D, N)$  amb  $D > 1$ . És a dir, a partir d'ara emprarem l'adjectiu quaterniònic per quaterniònic no modular.

# Capítol 2

## Dominis fonamentals

En aquest capítol tractem dominis fonamentals determinats per grups fuchsians. En donem les definicions bàsiques i en construïm alguns exemples.

Primerament, a la secció 2.2, revisem la construcció dels dominis en el cas dels subgrups de congruència del grup modular.

Per a la part de formes de Maass i, també, per a la de codis, necessitarem dominis fonamentals per als grups fuchsians quaterniònics que han estat introduïts en la secció 1.2.2. Els resultats de la secció 2.3 es basen en el text [AB04].

Considerem també dominis fonamentals associats a certs grups fuchsians aritmètics que foren caracteritzats per Takeuchi [Tak83]. Els resultats de la secció 2.4 es basen en el text [Sij13].

El capítol conclou amb la construcció de dominis fonamentals per als grups anteriorment considerats, però ara representats en el model del pla hiperbòlic proporcionat pel disc unitat.

### 2.1 Definicions bàsiques

Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian que opera en el semiplà de Poincaré  $\mathcal{H}$ . Donat un subconjunt  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ , denotem per  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$  el seu interior. Denotem per  $\partial\mathcal{F} := \mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$  la vora del conjunt  $\mathcal{F}$ . Recordem que  $ds^2$  i  $\rho$  denoten la mesura hiperbòlica i la distància hiperbòlica en  $\mathcal{H}$ , ambdues explicades en la secció 1.1.

**2.1.1 Definició.** Una regió  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$  és diu que és un domini fonamental per a un grup  $\Gamma$  si

1.  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$ .
2.  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \cap \gamma(\overset{\circ}{\mathcal{F}}) = \emptyset$ , per a tot  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ .

Denotem per  $v(\mathcal{F})$  el volum d'un domini fonamental.

**2.1.2 Definició.** La família  $\{\gamma(\mathcal{F}) \mid \gamma \in \Gamma\}$  s'anomena una *tessel·lació* de  $\mathcal{H}$ .

Siguin  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$  dos dominis fonamentals d'un grup, de volum finit i amb vora de longitud hiperbòlica igual a zero. Aleshores,  $v(\mathcal{F}_1) = v(\mathcal{F}_2)$ . Podem veure que si  $\mathcal{F}$  és un domini fonamental per a  $\Gamma$ , aleshores per a qualsevol  $\gamma \in \Gamma$ , el conjunt  $\gamma(\mathcal{F})$  n'és, també, un domini fonamental.

A continuació mostrem un resultat que serà necessari a l'hora de representar gràficament els dominis fonamentals.

**2.1.3 Teorema.** *Sigui  $\Gamma$  un grup discret d'isometries del semiplà superior  $\mathcal{H}$ , i sigui  $\Lambda$  un subgrup de  $\Gamma$  d'índex  $n$ . Si*

$$\Gamma = \Lambda\gamma_1 \cup \Lambda\gamma_2 \cup \cdots \cup \Lambda\gamma_n \quad (2.1)$$

*és una descomposició de  $\Gamma$  en  $\Lambda$ -classes per la dreta i si  $\mathcal{F}$  és un domini fonamental per a  $\Gamma$ , aleshores*

1. *Un domini fonamental per a  $\Lambda$  és donat per*

$$\mathcal{F}(\Lambda) = \gamma_1(\mathcal{F}) \cup \gamma_2(\mathcal{F}) \cup \cdots \cup \gamma_n(\mathcal{F}). \quad (2.2)$$

2. *Si el volum  $v(\mathcal{F})$  és finit i la longitud hiperbòlica de  $\partial\mathcal{F}$  és zero, aleshores  $v(\mathcal{F}(\Lambda)) = nv(\mathcal{F})$ .*

La descomposició donada en la proposició 1.2.11 serà emprada en seccions posteriors per a representar dominis fonamentals de grups fuchsians amb nivell. Un altre concepte que ens serà d'utilitat és el de cercle d'isometria.

**2.1.4 Definició.** Sigui

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}),$$

tal que  $c \neq 0$ . La circumferència  $I(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = 1\}$  s'anomena cercle d'isometria de  $\gamma$ . Denotem per  $r_\gamma$  i  $c_\gamma$  el seu radi i el seu centre, respectivament.

Suposarem ara que  $\Gamma$  és un grup fuchsian de primera espècie; és a dir, tal que el conjunt quocient  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  és de mesura finita, i que  $P \in \mathcal{H}$  és un element no fix per cap element de  $\Gamma \backslash \{\text{Id}\}$ . Aquests punts existeixen pel lema 1.2.5.

**2.1.5 Definició.** Donat  $\Gamma$ , un *domini de Dirichlet* centrat en  $P$  és donat pel conjunt

$$\mathcal{F}_P(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, P) \leq \rho(z, \gamma(P)), \text{ per a tot } \gamma \in \Gamma\}. \quad (2.3)$$

Per la invariància de la mètrica hiperbòlica per l'acció de  $\Gamma$ , aquesta regió es pot també definir com

$$\mathcal{F}_P(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, P) \leq \rho(\gamma(z), P), \text{ per a tot } \gamma \in \Gamma\}. \quad (2.4)$$

**2.1.6 Teorema.** Si  $P$  és un punt que no és fix per cap element de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ , aleshores  $\mathcal{F}_P(\Gamma)$  és un domini fonamental connex per a  $\Gamma$ .

## 2.2 Dominis fonamentals modulars

A continuació dibuixarem dominis fonamentals per al grup modular i per a alguns dels seus subgrups de congruència. Considerarem exemples de subgrups de congruència de nivell primer i de nivell no primer.

### 2.2.1 El domini $\mathcal{F}(\Gamma_0(1))$

Revisem la construcció, ben coneguda, d'un domini fonamental per al grup modular  $\Gamma_0(1) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Es pot verificar que cap punt complex  $ki$  ( $k > 1$ ) no és fix per cap element diferent de la identitat. Per tant, prenem un punt  $P = ki$ . Provem que el conjunt

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} \mid |z| > 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

és la regió de Dirichlet de  $\Gamma_0(1)$  centrada en  $P$ .

Primer, les isometries  $T(z) = z + 1$ ,  $S(z) = -1/z$  generen  $\Gamma_0(1)$ ; i, per tant, és fàcil comprovar que els tres costats del triangle estan formats per segments continguts en les rectes geodèsiques  $y = 1/2$ ,  $y = -1/2$  i  $|z| = 1$ ; per exemple, és clar que aquests segments són els bisectors del segment  $[P, \gamma(P)]$  amb  $\gamma \in \{S, T, T^{-1}\}$ .

Això mostra que  $\mathcal{F}_P(\Gamma_0(1)) \subseteq \mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}_P(\Gamma_0(1)) \neq \mathcal{F}$ , aleshores existirien  $z \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ ,  $h \in \Gamma_0(1)$ , tals que  $h(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ . Mostrem que això no pot ocórrer. Suposem que

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$



Aleshores,

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + \Re(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd|, \end{aligned}$$

atès que  $|z| > 1$  i  $\Re(z) > -\frac{1}{2}$ . Aquesta fita inferior és un enter positiu. A més, almenys pren el valor 1 i, per tant,  $|cz + d| > 1$ . Per tant,

$$\Im(h(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} < \Im(z).$$

Exactament el mateix argument preval amb  $z$ ,  $h$  reemplaçats per  $h(z)$ ,  $h^{-1}$  i arribem així a una contradicció. Per tant, tenim que  $\mathcal{F}_P(\Gamma_0(1)) = \mathcal{F}$ .

### 2.2.2 El domini $\mathcal{F}(\Gamma_0(q))$

Tal com hem vist en la proposició 1.2.11, podem descompondre el grup  $\Gamma_0(1)$  en classes laterals segons els subgrups de congruència  $\Gamma_0(q)$ , de manera que el teorema 2.1.3 sigui aplicable. Aleshores podem representar gràficament el domini fonamental per a  $\Gamma_0(q)$ , per a tot  $q \geq 1$ , a partir del domini del grup modular de l'exemple anterior.

Per a  $q = 5$ , calculem el conjunt de representants proposat en la proposició 1.2.11. En general, si el nivell  $q$  és primer, el conjunt  $M$  és buit, atès que s'ha definit a partir de divisors no trivials de  $q$ . Per tant, ens queda el conjunt següent de representants de classes laterals

$$\mathbf{W}(5) = \{ \text{Id}, S, ST, ST^2, ST^3, ST^4 \}.$$

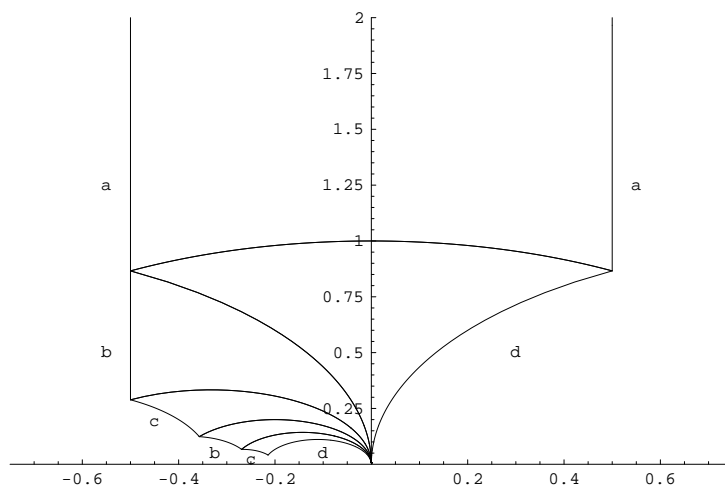
Per al cas  $q = 6$ , tenim que

$$A_2 = \{1\}; \quad M_2 = \{2\}; \quad 3 \cdot 4^2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow n(m) = 3,$$

$$A_3 = \{1\}; \quad M_3 = \{3\}; \quad 2 \cdot 3^2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow n(m) = 2.$$

Per tant, en aquest cas obtenim el conjunt següent de representants de classes laterals

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(6) &= \{ \text{Id}, S, ST, ST^2, ST^3, ST^4, ST^5, \\ &\quad ST^2S, ST^2ST, ST^2ST^2, \\ &\quad ST^3S, ST^3ST \}. \end{aligned}$$

Figura 2.1: Domini fonamental per  $\Gamma_0(5)$ 

La figura 2.1 proporciona un domini fonamental per al grup de congruència  $\Gamma_0(5)$ . Podem veure que també estan etiquetats l'aparellament de costats.

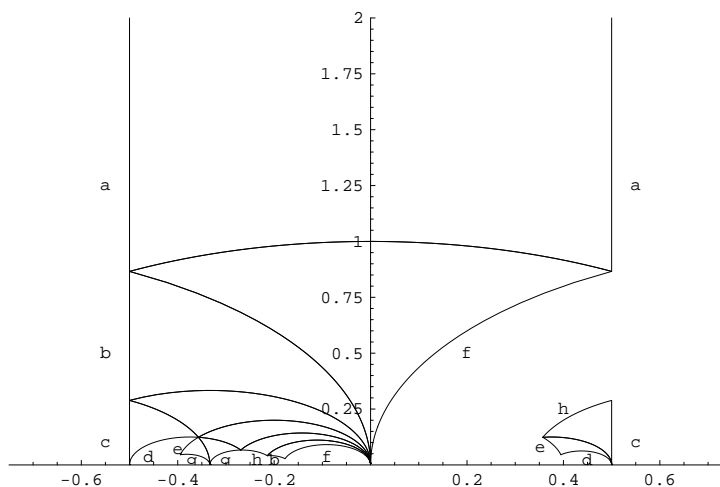
La figura 2.2 proporciona un domini fonamental per al grup de congruència  $\Gamma_0(6)$ . Els costats estan etiquetats com abans. Observem que aquest domini fonamental no és connex. L'hem dibuixat de manera que la representació queda inclosa en la franja  $[-1/2, 1/2]$ . Per a fer-lo connex, només cal aplicar la transformació  $T^{-1}$  al quadrilàter de costats  $ehdc$  situat més a la dreta.

## 2.3 Dominis fonamentals quaterniònics

Per dominis fonamentals quaterniònics ens referirem a dominis fonamentals associats a grups quaterniònics  $\Gamma(D, N)$  que actúen en el semiplà de Poincaré. Els resultats bàsics sobre aquests grups estan donats en la secció 1.2.2. Els resultats d'aquest apartat es poden trobar a [AB04]. Recordem el resultat ben conegut (cf. [Kat92]).

**2.3.1 Teorema.** *Els grups fuchsians cocompactes, és a dir, per als quals  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  és un espai topològic compacte, són finitament generats.*

**DEMOSTRACIÓ.** Un grup fuchsian  $\Gamma$  és cocompacte si, i només si,  $v(\mathcal{F}(\Gamma)) < \infty$  i no conté elements parabòlics. Si  $v(\mathcal{F}(\Gamma)) < \infty$ , aleshores  $\Gamma$  és geomètricament finit; això és, el seu domini fonamental és un polígon amb un nombre parell de costats dos a dos identificats. Atès que els elements

Figura 2.2: Domini fonamental per  $\Gamma_0(6)$ 

de  $\Gamma$  s'obtenen a partir dels elements que aparellen els costats, el grup és finitament generat.  $\square$

### 2.3.1 El domini $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$

El grup fuchsian  $\Gamma(6, 1)$  prové del grup de les unitats d'un ordre maximal de l'àlgebra de quaternions  $H = (3, 1)_{\mathbb{Q}}$ , de discriminant igual a 6. Per a representar el domini fonamental d'aquest grup ens cal una presentació del mateix. Enunciem el teorema següent:

**2.3.2 Teorema. (Alsina-Bayer)** *L'hexàgon hiperbòlic que té com a vèrtexs  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ ,*

$$v_1 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad v_2 = \frac{-1 + i}{1 + \sqrt{3}}, \quad v_3 = (2 - \sqrt{3})i,$$

$$v_4 = \frac{1 + i}{1 + \sqrt{3}}, \quad v_5 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad v_6 = i,$$

*és un domini fonamental per al grup  $\Gamma(6, 1)$  en el semiplà de Poincaré. A més es tenen les propietats següents:*

1. *Tots els vèrtexs són el·líptics i les transformacions el·líptiques que els*

fixen són:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \gamma_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, & \gamma_4 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \\ \gamma_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \gamma_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2. El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 és  $n_2(6, 1) = 4$ . Hi ha 2 cicles el·líptics d'ordre 2, que són  $\{v_6\}$  i  $\{v_1, v_3, v_5\}$ . Les relacions entre aquests vèrtexs són  $\gamma_2(v_3) = v_1$  i  $\gamma_4(v_3) = v_5$ .
3. El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 és  $n_3(6, 1) = 2$ . Hi ha 2 cicles el·líptics d'ordre 3, que són  $\{v_2\}$  i  $\{v_4\}$ .
4. L'homotècia principal de  $\Gamma(6, 1)$  és

$$h_6 = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

5. L'aparellament de vores és:

$$\begin{aligned}(v_2v_3, v_2v_1) &\text{ per la transformació } \gamma_2, \\ (v_3v_4, v_5v_4) &\text{ per la transformació } \gamma_4, \\ (v_5v_6, v_1v_6) &\text{ per la transformació } \gamma_6.\end{aligned}$$

6. Tenim la presentació següent del grup  $\Gamma(6, 1)/(\pm\text{Id})$ :

$$\langle \gamma_2, \gamma_4, \gamma_6 : \gamma_2^3 = \gamma_4^3 = \gamma_6^2 = (\gamma_2^{-1}\gamma_6\gamma_4)^2 = \text{Id} \rangle.$$

Aquest teorema descriu el grup  $\Gamma(6, 1)$  de forma que es pugui tractar de forma computacional. Exposem a continuació un lema que ens permetrà treballar més còmodament.

**2.3.3 Lema.** Podem descriure els elements  $\gamma_1, \gamma_3$  i  $\gamma_5$  de la forma següent:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_6\gamma_4\gamma_2^2, \\ \gamma_3 &= \gamma_2^2\gamma_6\gamma_4, \\ \gamma_5 &= \gamma_6\gamma_2\gamma_4^2,\end{aligned}$$

i, en conseqüència, podem descriure la homotècia principal com:

$$h_6 = \gamma_6\gamma_4^2\gamma_6\gamma_2.$$

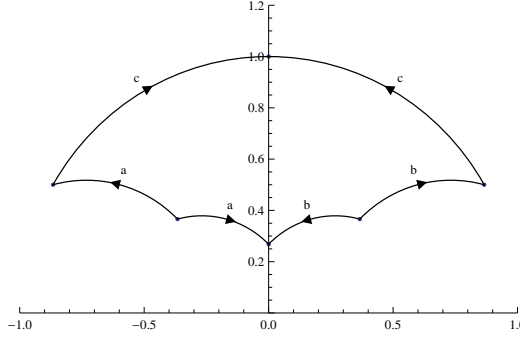


Figura 2.3: Domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$

El procediment per a dibuixar els dominis fonamentals és el següent: primer hem de determinar els vèrtex del polígon. Un cop determinats, tracem la recta hiperbòlica que els uneix, és a dir, llevat que estiguin en l'eix  $x = 0$ , la recta que els uneix és un cercle que té centre en l'eix  $y = 0$  i passa pels dos punts. Representem en la figura 2.3 l'aparellament de costats segons el teorema anterior.

### 2.3.2 El domini $\mathcal{F}(\Gamma(6, 5))$

Presentem ara un exemple de domini fonamental per a un grup fuchsian amb nivell. En aquest cas hem triat el grup  $\Gamma(6, 5)$ , que correspon al grup d'unitats d'un ordre d'Eichler de nivell 5 en l'àlgebra de quaternions de discriminant 6, considerada prèviament. Enunciem a continuació el teorema que descriu aquest grup.

**2.3.4 Teorema. (Nualart-Travesa)** *El decàgon hiperbòlic de vèrtexs  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10})$ ,*

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (2 + \sqrt{3})i, & v_2 &= \frac{-2\sqrt{3} + i}{4 + \sqrt{3}}, & v_3 &= \frac{-16\sqrt{3} + i}{38 + 15\sqrt{3}}, \\
 v_4 &= \frac{-15\sqrt{3} + i}{38 + 16\sqrt{3}}, & v_5 &= \frac{-\sqrt{3} + i}{4 + 2\sqrt{3}}, & v_6 &= (7 - 4\sqrt{3})i, \\
 v_7 &= \frac{2\sqrt{3} + i}{5 + 2\sqrt{3}}, & v_8 &= \frac{16\sqrt{3} + i}{31 + 8\sqrt{3}}, & v_9 &= \frac{15\sqrt{3} + i}{28 + 6\sqrt{3}}, \\
 v_{10} &= \frac{\sqrt{3} + i}{2},
 \end{aligned}$$

és un domini fonamental per al grup  $\Gamma(6, 5)$  en el semiplà de Poincaré. A més es tenen les propietats següents:

1. Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 2 i les corresponents transformacions el·líptiques que els fixen són:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, & g_2 &= \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & -4 + \sqrt{3} \\ 4 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
 g_3 &= \begin{bmatrix} 16\sqrt{3} & 38 - 15\sqrt{3} \\ -38 - 15\sqrt{3} & -16\sqrt{3} \end{bmatrix}, & g_4 &= \begin{bmatrix} -15\sqrt{3} & -38 + 16\sqrt{3} \\ 38 + 16\sqrt{3} & 15\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
 g_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} \\ -4 - 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, & g_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 7 - 4\sqrt{3} \\ -7 - 4\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \\
 g_7 &= \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 5 - 2\sqrt{3} \\ -5 - 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, & g_8 &= \begin{bmatrix} -16\sqrt{3} & 31 - 8\sqrt{3} \\ -31 - 8\sqrt{3} & 16\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
 g_9 &= \begin{bmatrix} -15\sqrt{3} & 28 - 6\sqrt{3} \\ -28 - 6\sqrt{3} & 15\sqrt{3} \end{bmatrix}, & g_{10} &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Considerem les aplicacions següents:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{bmatrix} \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} & \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \\
 \gamma_3 &= \begin{bmatrix} -5 - 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -5 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{bmatrix} 6 + \sqrt{3} & -4 + 4\sqrt{3} \\ 4 + 4\sqrt{3} & 6 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
 \gamma_5 &= \begin{bmatrix} 5 + 2\sqrt{3} & -6 + 4\sqrt{3} \\ 6 + 4\sqrt{3} & 5 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aleshores l'aparellament de bores és:

$$\begin{aligned}
 (v_1v_2, v_7v_6) &\text{ per la transformació } \gamma_1, \\
 (v_2v_3, v_8v_7) &\text{ per la transformació } \gamma_2, \\
 (v_3v_4, v_1v_{10}) &\text{ per la transformació } \gamma_3, \\
 (v_4v_5, v_{10}v_9) &\text{ per la transformació } \gamma_4, \\
 (v_5v_6, v_9v_8) &\text{ per la transformació } \gamma_5.
 \end{aligned}$$

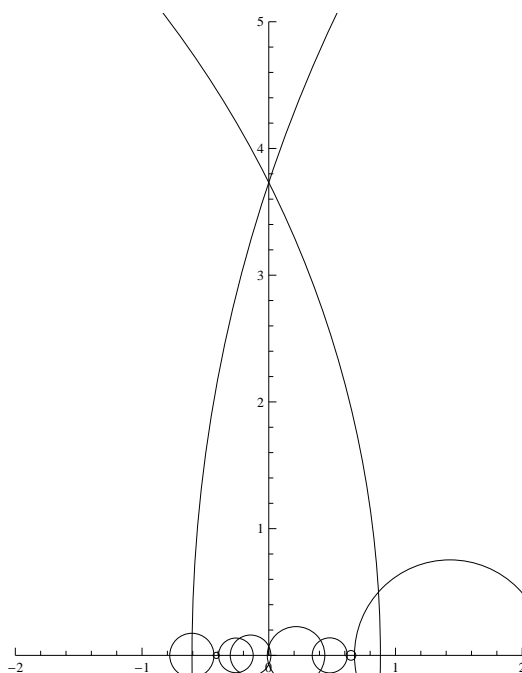


Figura 2.4: Domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 5))$

3. Tenim que les relacions donades pels cicles ordinaris són les següents

$$\begin{aligned} (\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1)^2 &= \text{Id}, & (\gamma_2^{-1}\gamma_5\gamma_1)^2 &= \text{Id}, \\ (\gamma_4^{-1}\gamma_3)^2 &= \text{Id}, & (\gamma_4^{-1}\gamma_5)^2 &= \text{Id}. \end{aligned}$$

4. Una presentació del grup  $\Gamma(6, 5)/(\pm\text{Id})$  és donada per

$$\Gamma(6, 5) = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 : (\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1)^2 = (\gamma_2^{-1}\gamma_5\gamma_1)^2 = (\gamma_4^{-1}\gamma_5)^2 = \text{Id}\}.$$

Podem observar en la figura 2.4 el detall del domini fonamental per a aquest grup juntament amb el dels cercles d'isometria que el conformen.

### 2.3.3 El domini $\mathcal{F}(\Gamma(10, 1))$

Aquesta secció es basa principalment en el text [AB04]. El grup d'unitats prové d'un ordre maximal de l'àlgebra de quaternions  $H = (2, 5)_{\mathbb{Q}}$ , de discriminant igual a 10. Escrivim el teorema que descriu aquest grup.

**2.3.5 Teorema. (Alsina-Bayer)** *L'hexàgon hiperbòlic que té com a vèrtexs  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ ,*

$$v_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(-1 + \sqrt{2})}, \quad v_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(1 + \sqrt{2})} \quad v_3 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(7 + 5\sqrt{2})}i$$

$$v_4 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(7 + 5\sqrt{2})}, \quad v_5 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(1 + \sqrt{2})} \quad v_6 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(-1 + \sqrt{2})},$$

*és un domini fonamental pel grup  $\Gamma(10, 1)$  en el semiplà de Poincaré. A més es tenen les propietats següents:*

1. *Tots els vèrtexs són el·líptics i les corresponents transformacions el·líptiques que els fixen són:*

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 5(1 - \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{2} \\ -5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 7 - 5\sqrt{2} \\ 5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \gamma_6 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 5(-1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2. *Hi ha sis vèrtexs el·líptics d'ordre 3. Hi ha quatre cicles el·líptics d'ordre 3 que son  $\{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_4\}$  i  $\{v_2\}$  i  $\{v_5\}$ . Les relacions entre els vèrtexs són  $\gamma_2(v_3) = v_1$  i  $\gamma_5(v_4) = v_6$ .*

3. *L'homotècia principal de  $\Gamma(10, 1)$  és*

$$h_{10} = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

4. *L'aparellament de bores és:*

$$(v_2v_3, v_2v_1) \text{ per la transformació } \gamma_2,$$

$$(v_3v_4, v_1v_6) \text{ per la transformació } h_{10},$$

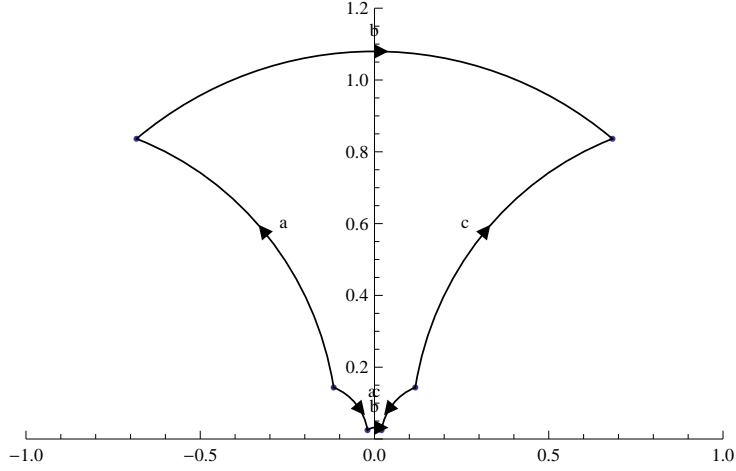
$$(v_4v_5, v_6v_5) \text{ per la transformació } \gamma_5.$$

5. *Tenim la presentació següent del grup  $\Gamma(10, 1)/(\pm \text{Id})$ :*

$$\langle \gamma_2, h_{10}, \gamma_5 : \gamma_2^3 = \gamma_5^3 = (h_{10}^{-1}\gamma_2)^3 = (h_{10}^{-1}\gamma_5)^3 = \text{Id} \rangle.$$

En la figura 2.5 podem veure la identificació de costats segons el teorema anterior.



Figura 2.5: Domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma(10, 1))$ 

### 2.3.4 El domini $\mathcal{F}(\Gamma(15, 1))$

Aquesta secció es basa principalment en el text [AB04] però modificat convenientment per a fer el domini fonamental simètric. També es pot consultar més informació sobre aquest domini fonamental simètric a [Bay11]. El grup d'unitats prové d'un ordre maximal de l'àlgebra de quaternions  $H = (3, 5)_{\mathbb{Q}}$ , de discriminant igual a 15. Enunciem el resultat següent:

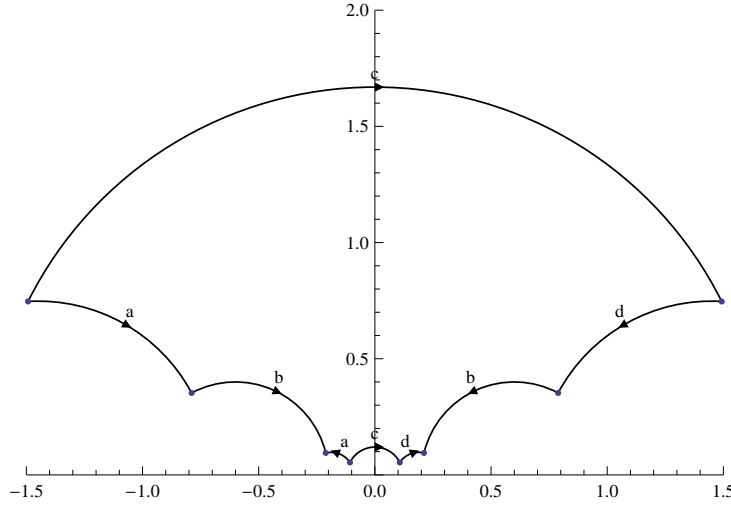
**2.3.6 Teorema.** *L'octàgon hiperbòlic de vèrtexs  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ ,*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(2 + \sqrt{3})(-2 + i)}{5}, & v_2 &= \frac{(3 + \sqrt{3})(-5 + i\sqrt{5})}{30}, \\ v_3 &= \frac{(3 - \sqrt{3})(-5 + i\sqrt{5})}{30}, & v_4 &= \frac{(2 - \sqrt{3})(-2 + i)}{5}, \\ v_5 &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + i)}{5}, & v_6 &= \frac{(3 - \sqrt{3})(5 + i\sqrt{5})}{30}, \\ v_7 &= \frac{(3 + \sqrt{3})(5 + i\sqrt{5})}{30}, & v_8 &= \frac{(2 + \sqrt{3})(2 + i)}{5}, \end{aligned}$$

*és un domini fonamental per al grup  $\Gamma(15, 1)$  en actuar en el semiplà superior. A més a més, té les propietats següents:*

1. *La homotècia principal és donada per la matriu*

$$h_{15} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Figura 2.6: Domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma(15, 1))$ 

2. Els costats de l'octàgon s'identifiquen en parells per les matrius

$$\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -4 - 3\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 + 3\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -4 - 3\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

i l'homotècia  $h_{15}$ .

3. L'aparellament de vèrtexs és donat per:

$(v_1v_2, v_4v_3)$  per la transformació  $\kappa$ ,  
 $(v_2v_3, v_7v_6)$  per la transformació  $\beta$ ,  
 $(v_7v_8, v_6v_5)$  per la transformació  $\gamma$ ,  
 $(v_4v_5, v_1v_8)$  per la transformació  $h_{15}$ .

4. Tenim la presentació següent del grup  $\Gamma(15, 1)/(\pm\text{Id})$

$$\langle \gamma, \beta, \kappa, h_{15} : (\gamma h_{15})^3 = (\gamma \kappa)^3 = \text{Id} \rangle.$$

En la figura 2.5 podem veure la identificació de costats segons el teorema anterior.

## 2.4 Dominis per a grups fuchsians de signatura $(1; e)$

Els grups fuchsians aritmètics de signatura  $(1; e)$  foren estudiats per Takeuchi a l'article [Tak83] i per Sijlsing a [Sij13].

**2.4.1 Definició.** Donat un grup fuchsian  $\Gamma$ , la seva signatura és la  $(r + 1)$ -tupla  $(g; e_1, \dots, e_r)$  en la qual  $g$  denota el gènere de la superfície de Riemann  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ ,  $r$  el nombre de cicles no accidentals, i, per a qualsevol cicle el·líptic  $\varepsilon_k$ ,  $e_k$  denota l'enter per al qual la suma dels angles dels vèrtexs de  $\varepsilon_k$  és igual a  $\frac{2\pi}{e_k}$ .

**2.4.2 Proposició.** *Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian aritmètic de signatura  $(1; e)$ , definit per unitats d'un ordre d'una àlgebra de quaternions  $H$ . Suposem que  $-\text{Id} \in \Gamma$ . Aleshores,*

1. *Existeixen  $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$  tals que  $\text{tr}(\alpha), \text{tr}(\beta) > 2$  i  $\text{tr}(\gamma) = 2 \cos(\frac{\pi}{e})$  de manera que el grup  $\Gamma$  admet una presentació de la forma*

$$\Gamma = \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma = -\text{Id}, \gamma^e = -\text{Id} \rangle.$$

2. *La terna fonamental de generadors de  $\Gamma$  està unívocament determinada per la terna d'elements algebraics  $(x, y, z) = (\text{tr}(\alpha), \text{tr}(\beta), \text{tr}(\gamma))$ , llevat de conjugacions.*

**2.4.3 Proposició. (Sijlsing)** *Els grups aritmètics de signatura  $(1; e)$  estan generats per matrius*

$$\alpha = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

per a algun  $\lambda, a, b \in F$ , on  $F$  denota un cos totalment real.

### 2.4.1 El domini $\mathcal{F}(\Gamma)$ , $\Gamma$ de signatura $(1; 2)$

En centrem en un cas concret. Considerem el grup fuchsian de signatura  $(1; 2)$  determinat per la terna  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$ .

**2.4.4 Teorema. (Sijlsing)** *El grup fuchsian de signatura  $(1; 2)$  determinat per la terna  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$  té com a domini fonamental el quadrilàter hiperbòlic*

de vèrtexs  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , on

$$v_1 = \frac{1}{2}i\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{3(2 + \sqrt{3})}, \quad v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$v_3 = \frac{1}{2}i\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{3(2 + \sqrt{3})}, \quad v_4 = \frac{1}{2}i\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \frac{-3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

A més se satisfan les propietats següents:

1. Siguin les aplicacions

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} + \sqrt{6} \\ \sqrt{2} - \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Aleshores, l'aparellament de costats és donat per

$$\begin{aligned} (v_3v_4, v_1v_2) &\text{ per la transformació } \beta, \\ (v_2v_4, v_1v_3) &\text{ per la transformació } \alpha \end{aligned}.$$

2. Tenim la presentació següent del grup de signatura (1; 2)

$$\langle \alpha, \beta : (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})^2 = \text{Id} \rangle.$$

3. El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 és 1. Hi ha un cicle d'ordre 2.

4. L'homotècia principal del grup  $\Gamma$  és

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Fixem-nos que la presentació del grup és donada per dos elements. Trobem la representació d'un domini fonamental per a aquest grup en la figura 2.7.

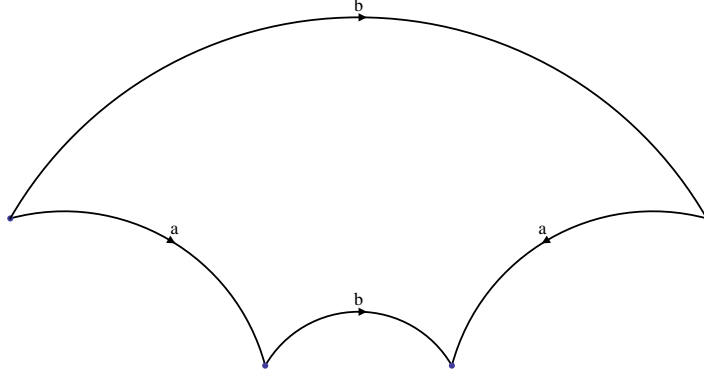


Figura 2.7: Domini fonamental per al grup  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$

### 2.4.2 El domini $\mathcal{F}(\Gamma^{(2)})$

Descriurem tot seguit un domini fonamental per al quadrat del grup anterior.

**2.4.5 Proposició.** *Sigui  $\Gamma$  en les mateixes condicions de la proposició 2.4.2, determinat pels generadors  $\alpha, \beta, \gamma$  i la terna  $(x, y, z)$  satisfent les condicions anteriors. Denotem  $\Gamma^{(2)}$  el subgrup de  $\Gamma$  generat pels elements al quadrat de  $\Gamma$ ; és a dir,*

$$\Gamma^{(2)} = \{\tau^2 \mid \tau \in \Gamma\}.$$

*Aleshores,*

1.  $\Gamma^{(2)}$  és un subgrup normal de  $\Gamma$ , i  $[\Gamma : \Gamma^{(2)}] = 4$ .
2. Una presentació de  $\Gamma^{(2)}$  és donada per

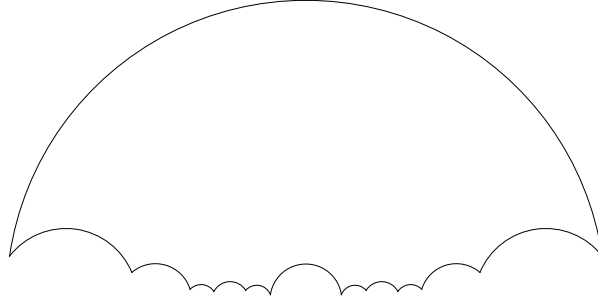
$$\Gamma^{(2)} = \langle \alpha^2, \beta^2, \gamma, \alpha\gamma\alpha^{-1}, \beta\gamma\beta^{-1}, \alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} \rangle.$$

3.  $\Gamma^{(2)}$  és un grup fuchsian que sorgeix de l'àlgebra de quaternions  $(a, b)_F$ , on  $F = \mathbb{Q}(x^2, y^2, xyz)$ ,  $a = x^2(x^2 - 4)$  i  $b = -(2 + 2\cos(\pi/e)x^2y^2)$ .

La prova d'aquest resultat es pot trobar a [Sij13].

El grup que considerem és el donat per la terna

$$\left( \sqrt{3 + \sqrt{5}}, \sqrt{9 + 3\sqrt{5}}, \sqrt{6 + \frac{9}{2}\sqrt{5}} \right).$$

Figura 2.8: Domini fonamental per a  $\Gamma^{(2)}$ 

En aquest cas el cos  $F$  és  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . Com a generadors del grup tenim els següents  $\alpha$  i  $\beta$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{-1 + \sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{-1 + \sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3(3 + \sqrt{5})} & -\sqrt{5 + 3\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5 + 3\sqrt{5}} & \sqrt{3(3 + \sqrt{5})} \end{bmatrix}.$$

Un domini fonamental per a  $\Gamma^{(2)}$  es mostra a la figura 2.8. Les vores estan donades pels cercles d'isometria associats a les transformacions següents:

$$\alpha^2, \alpha^{-2}, \beta^2, \beta^{-2}, \gamma, \gamma^{-1}, \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}, (\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1})^{-1}, \\ \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta, (\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta)^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta, (\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta)^{-1}.$$

## 2.5 Dominis en el disc unitat

Un altre model per al pla hiperbòlic és donat pel disc unitat. Podem identificar de manera bijectiva el semiplà de Poincaré amb un disc tancat de la forma següent. Sigui  $\mathcal{D}$  un disc unitat centrat en zero. Donat un punt  $P \in \mathcal{H}$ , les aplicacions

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{D}, & \phi^{-1}: \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{H} \\ z &\mapsto \frac{z - P}{z - \bar{P}}, & w &\mapsto \frac{\bar{P}w - P}{w - 1} \end{aligned}$$

són conformes; és a dir, conserven els angles entre les rectes hiperbòliques. Donat  $\Gamma \subseteq \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ , prenem  $\Gamma^\phi = \phi\Gamma\phi^{-1} \subseteq \mathbf{SU}(1, 1)$ . El grup  $\Gamma^\phi$  actua

sobre  $\mathcal{D}$  i si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$  és un domini fonamental per  $\Gamma$ , aleshores  $\phi(\mathcal{F})$  és un domini fonamental per a  $\Gamma^\phi$ .

Observem que podem escollir com a punt  $P$  qualsevol punt del semiplà, i aquest s'aplicarà en el centre del disc. En el dibuix 2.9, el punt que s'aplica en el centre és  $p = \frac{i}{2}$  i correspon al domini fonamental pel grup  $\Gamma(6, 1)$ . En

els dibuixos 2.10 i 2.11 el centre és el punt  $p = \frac{\sqrt{5}i}{5}$ ; corresponen als dominis fonamentals de  $\Gamma(10, 1)$  i  $\Gamma(15, 1)$ .

El teorema següent descriu el domini fonamental d'un grup fuchsianà cocompacte des d'un punt de vista del model del disc unitat. Aquest resultat serà emprat en l'algoritme de reducció del capítol 3.

**2.5.1 Teorema.** *Donat un grup fuchsianà cocompacte  $\Gamma$ , existeix un conjunt finit  $G$  de generadors de  $\Gamma$  tal que  $G^{-1} = G$  i el conjunt*

$$\bigcap_{g \in G^\phi} \overline{\text{ext}(I(g)) \cap \mathcal{D}}$$

*és un domini fonamental per a  $\Gamma^\phi$ . Aquest és la imatge d'un domini fonamental de Dirichlet  $\mathcal{F}_P$  per a  $\Gamma$ .*

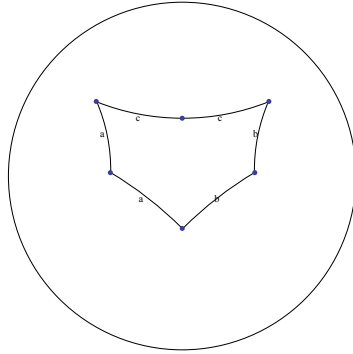


Figura 2.9:  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$  en  $\mathcal{D}$

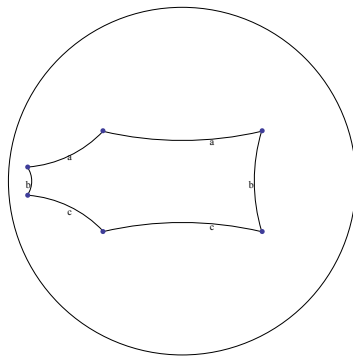


Figura 2.10:  $\mathcal{F}(\Gamma(10, 1))$  en  $\mathcal{D}$

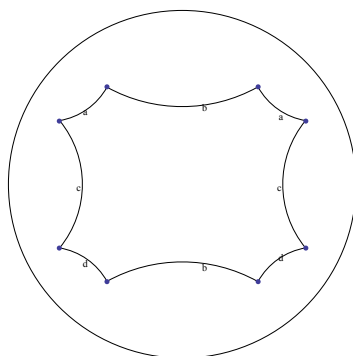


Figura 2.11:  $\mathcal{F}(\Gamma(15, 1))$  en  $\mathcal{D}$





# Capítol 3

## Reducció de punts

En aquest capítol ens centrarem en els algorismes de reducció de punts per a grups fuchsians. Atès que necessitarem fer-los servir en diverses ocasions i en contextos diferents en el decurs de la memòria, en realitzarem un estudi detallat. Algorismes similars seran emprats, també, per a la reducció de formes quadràtiques binàries associades a grups fuchsians.

El contingut del capítol forma part, de manera més compacta, de l'article [BR14].

**3.0.2 Definició.** Siguin  $\Gamma$  un grup fuchsian i  $\mathcal{F}(\Gamma)$  un domini fonamental, que considerarem fixat. Un algorisme de reducció de punts és un procediment tal que, per a cada punt  $z \in \mathcal{H}$ , proporciona una transformació  $\gamma \in \Gamma$  i un punt  $z_0 \in \mathcal{H}$  tals que  $z_0 = \gamma(z) \in \mathcal{F}(\Gamma)$ .

### 3.1 Algorismes per als grups modulars

En aquesta primera secció tractarem els algorismes de reducció de punts per a subgrups de congruència modulars. Explicarem l'algorisme *flip flop*, que és ben conegut, per al grup  $\Gamma_0(1)$ , i que modificarem a fi que sigui aplicable al cas dels subgrups de congruència.

#### 3.1.1 El grup $\Gamma_0(1)$

En el cas del grup modular  $\Gamma = \Gamma_0(1)$ , és fàcil dissenyar un algorisme de reducció. Aquest és conegut usualment com algorisme *flip flop*. Emprarem el domini fonamental,

$$\mathcal{F}(\Gamma_0(1)) = \{z = x + iy \in \mathcal{H} \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\},$$

i una seqüència alternada dels generadors  $S$  i  $T$ , descrits en l'equació (1.2). Vegi's l'algoritme 2.

**Data:**  $\langle S, T \rangle = \Gamma$ ,  $z_0 \in \mathcal{H}$   
**Result:**  $z_1 \in \mathcal{F}(\Gamma)$  amb  $\gamma(z_0) = z_1$  i  $\gamma \in \Gamma$   
 $z_0 = z$ ;  
**while**  $z_0 \notin \mathcal{F}$  **do**  
    **if**  $\Re(z_0) > \frac{1}{2}$  **then**  
         $z_0 = T^{-1}(z_0)$ ;  
    **end**  
    **if**  $\Re(z_0) < -\frac{1}{2}$  **then**  
         $z_0 = T(z_0)$ ;  
    **end**  
    **if**  $|z_0| < 1$  **then**  
         $z_0 = S(z_0)$ ;  
    **end**  
**end**

**Algorithm 2:** Algoritme *flip flop*

### 3.1.2 Els grups $\Gamma_0(q)$

L'algoritme de reducció per a subgrups de congruència de la forma  $\Gamma_0(q)$  sorgeix de manera natural de l'algoritme *flip flop* explicat en la secció anterior. El primer que fem aquí és aplicar l'algoritme que hi ha en la proposició 1.2.11 a fi de calcular un conjunt de representants de les classes laterals per la dreta definides pel grup de congruència. Si  $\{\gamma_i\}_{i=1}^k$  és un conjunt de representants de les classes  $\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1)$ , obtenim un domini fonamental a partir del teorema 2.1.3 en fer  $\Lambda = \Gamma_0(q)$  i  $\Gamma = \Gamma_0(1)$ .

Considerarem subdominis  $\gamma_i(\mathcal{F}(\Gamma_0(1)))$  per a cadascun dels representants  $\gamma_i$ . Per a saber a quin subdomini ubicar un punt donat  $\gamma(z) \in \mathcal{F}(\Gamma_0(1))$ , hem de calcular l'índex  $j$  per al qual és  $\gamma^{-1} \in \Gamma_0(q)\gamma_j$ ; aleshores  $\gamma_j\gamma \in \Gamma_0(q)$ . Per tant, l'algoritme de reducció per a  $\Gamma_0(q)$  és donat per

$$z_0 = \gamma_j\gamma(z) \in \mathcal{F}(\Gamma_0(q)).$$

En la figura 3.1, podem veure el funcionament de l'algoritme de reducció de punts per als subgrups de congruència  $\Gamma_0(5)$  i  $\Gamma_0(6)$ . La figura 3.1a mostra la reducció de punts respecte del grup  $\Gamma_0(5)$ , i la 3.1b, respecte del grup  $\Gamma_0(6)$ . El dibuix s'interpreta com segueix: es tracta de reduir els punts d'una línia

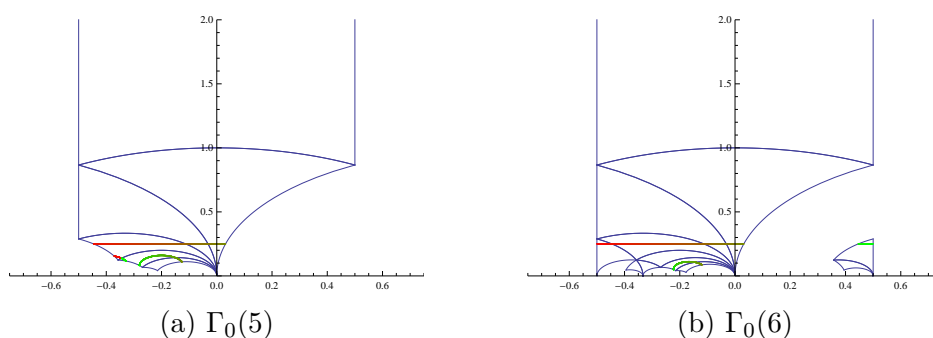


Figura 3.1: Reduccion de punts en subgrups de congruencia

que va de dreta a esquerra i que comença amb el color verd i canvia al color vermell. Els punts reduïts mantenen el color, de manera que la seva situació es pot resseguir dins del domini fonamental. Mantindrem aquesta manera de procedir en tots els dominis fonamentals on s'hi mostri la reduccion de punts.

## 3.2 Algoritmes per als grups quaterniònics

En el que segueix presentarem els algoritmes de reduccion que emprarem en la part de codis. Estem interessats en el disseny d'algoritmes que siguin senzills, per tal de poder-los aplicar en l'última part del treball.

### 3.2.1 El grup $\Gamma(6, 1)$

En aquesta seccion tractem un algoritme de reduccion de punts per al grup quaterniònic  $\Gamma(6, 1)$ . Es tracta d'un algoritme de reduccion que no és el que sorgirà de l'algoritme general tractat en la seccion 3.3. El motiu pel qual estudiem aquest cas en particular serà explicat en la seccion 9.4 del capítol relacionat amb els codis fuchsians.

Llevat que es digui el contrari i per tal d'evitar una notacion feixuga, denotem per  $\mathcal{F}$  el domini fonamental pel grup  $\Gamma(6, 1)$  que té els vèrtexs considerats en el teorema 2.3.2. Anomenem corona principal el conjunt

$$S(\lambda) = \{z \in \mathcal{H} \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\},$$

amb

$$r_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad r_2 = 1.$$

**3.2.1 Lema.** *Se satisfan les propietats següents en el domini fonamental pel grup  $\Gamma(6, 1)$ .*

1. Per a tot element  $z$  tal que  $|z| > r_2$ , l'element  $\gamma_6(z)$  satisfà que  $|\gamma_6(z)| < r_2$ .
2. Per a tot element  $z$  tal que  $|z| < r_1$ , existeix un  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $h_6^n(z) \in S(\lambda)$ . Com a conseqüència, per a tot element  $z \notin S(\lambda)$  existeix una aplicació  $g \in \Gamma(6, 1)$  tal que  $g(z) \in S(\lambda)$ .

DEMOSTRACIÓ. La primera afirmació és certa atès que  $|\gamma_6(z)| = |z|^{-1}$ .

La segona afirmació s'obté en tenir en compte que

$$\frac{|h_6(z)|}{|z|} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} > 1,$$

i

$$\frac{|h_6^{-1}(z)|}{|z|} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < 1.$$

Amb això deduïm que existeix un  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $h_6^n(z) \in S(\lambda)$ .  $\square$

Per a implementar un algoritme de reducció per a  $\Gamma(6, 1)$  dividim l'espai  $\mathcal{H}$  en regions i a cada una d'aquestes regions li assignem una transformació del grup  $\Gamma(6, 1)$ . Hem vist en el lema 3.2.1 que a cada element de mòdul  $|z| > 1$  li podem assignar un element de mòdul que té  $|z| < r_2 = 1$  mitjançant l'aplicació  $\gamma_6$ . A la regió formada pels punts  $z \in \mathcal{H}$  amb  $|z| > 1$  li assignem la transformació  $\gamma_6$ . Per tant, ens queda estudiar ara la resta de l'espai. Al domini  $\mathcal{F}$  no cal assignar-li cap transformació (o si, es prefereix, li assignem la identitat) atès que els seus punts constituiran la sortida de l'algoritme. Definim, doncs,

$$S_1 = \overline{\{z \in \mathcal{H} \mid |z| \leq 1\} \setminus \mathcal{F}},$$

on  $\overline{A}$  denota l'adherència en  $\mathcal{H}$  d'un conjunt  $A \subseteq \mathcal{H}$ . En  $S_1$  distingim dos subconjunts; anomenem

$$S^- = \{z \in S_1 \mid \Re(z) \leq 0\}$$

i, anàlogament,

$$S^+ = \{z \in S_1 \mid \Re(z) > 0\}.$$

Per les propietats dels dominis fonamentals, sabem que existeix una tessellació de  $\mathcal{H}$  respecte del grup que recobreix l'espai  $\mathcal{H}$ . En particular, existeix una tessellació de  $\mathcal{H}$  que recobreix els conjunts  $S^+$ ,  $S^-$ . A continuació cerquem la forma de recobrir aquests conjunts. Demostrarem que  $S^-$  es pot recobrir amb transformacions de  $\Gamma(6, 1)$  que acaben, en l'ordre en què s'apliquen, o bé que comencen, com a paraules, en  $\gamma_2$ . Per tant, assignem a aquesta regió,

al menys inicialment, la transformació  $\gamma_2^{-1} = \gamma_2^2$ . Un raonament similar, ajustant signes, serveix per a assignar la transformació  $\gamma_4^{-1} = \gamma_4^2$  a la regió  $S^+$ .

El primer que farem serà recobrir la vora de  $S^-$ . Aquesta vora es pot dividir en tres trossos. Per definició, la vora exterior de  $S^-$  serà el conjunt de punts

$$S_e^- := \{z \in S^- \mid |z| = 1\}.$$

La vora superior de  $S^-$  serà el conjunt

$$S_s^- := \mathcal{F} \cap S^-.$$

Finalment anomenem vora interior de  $S^-$  el segment

$$S_i^- := \{z \in \mathcal{H} \mid x = 0, |y| \leq r_1\}.$$

**3.2.2 Proposició. (Vora exterior)** *Sigui  $p$  el camí delimitat pels vèrtexs  $v_1v_6v_5$ . Aleshores se satisfà la igualtat*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\gamma_2\gamma_4^2)^n(p) = \{z \mid |z| = 1, \Im(z) > 0\}.$$

*És a dir, la tessellació anterior recobreix, en particular, la vora exterior  $S_e^-$  de  $S^-$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Sigui  $z$  tal que  $|z| = 1$  i  $\Re(z) < 0$ . Aleshores, per a tot  $n \neq 0$ , el punt  $z_n := (\gamma_2\gamma_4^2)^n(z)$  és tal que  $|z_n| = 1$  i  $\Im(z_n) < \Im(z_{n-1})$ . Notem que

$$\gamma_2\gamma_4^2(z) = \frac{2z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 2}.$$

Si expandim aquesta expressió obtenim

$$\begin{aligned} \frac{2z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 2} &= \frac{2(a + bi) - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}(a + bi) + 2} = \frac{(2a - \sqrt{3}) + 2bi}{(2 - \sqrt{3}a) - \sqrt{3}bi} \\ &= \frac{((2a - \sqrt{3}) + 2bi)((2 - \sqrt{3}a) + \sqrt{3}bi)}{(2 - \sqrt{3}a)^2 + 3b^2} \\ &= \frac{-2\sqrt{3} + 7a - 2\sqrt{3}a^2 - 2\sqrt{3}b^2 + ib}{4 + 3a^2 + 3b^2 - 4\sqrt{3}a}. \end{aligned}$$

Si  $z = a + bi$  i  $|z| = 1$ , aleshores  $a^2 + b^2 = 1$ . Amb aquesta igualtat podem simplificar l'expressió anterior i obtenim

$$\frac{2z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 2} = \frac{-4\sqrt{3} + 7a}{7 - 4\sqrt{3}a} + i \frac{b}{7 - 4\sqrt{3}a}.$$

Ara calculem el mòdul

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 2} \right| &= \left( \frac{-4\sqrt{3} + 7a}{7 - 4\sqrt{3}a} \right)^2 + \left( \frac{b}{7 - 4\sqrt{3}a} \right)^2 \\ &= \frac{48 - 56\sqrt{3}a + 49a^2}{49 - 56\sqrt{3}a + 48a^2} + \frac{b^2}{49 - 56\sqrt{3}a + 48a^2} \\ &= \frac{48 - 56\sqrt{3}a + 49a^2 + 1 - a^2}{49 - 56\sqrt{3}a + 48a^2} = \frac{49 - 56\sqrt{3}a + 48a^2}{49 - 56\sqrt{3}a + 48a^2} = 1. \end{aligned}$$

Vegem que  $\Im(z_1) < \Im(z)$ . Observem

$$\Im\left(\frac{2z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 2}\right) = \frac{b}{7 - 4\sqrt{3}a} < b,$$

ja que  $a < 0$ . La justificació de què obtenim tots els punts de la vora exterior sorgeix en veure que

$$\begin{aligned} \frac{b}{7 - 4\sqrt{3}a} \leq b &\Leftrightarrow \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}a} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 7 - 4\sqrt{3}a \\ -6 &\leq -4\sqrt{3}a \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} \leq a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a, \end{aligned}$$

on aquest valor correspon exactament a la part real del vèrtex de més a la dreta,  $v_5$ . Concloem, doncs, que el camí  $v_1v_6v_5$  va recobrint via la iteració de la transformació  $\gamma_2\gamma_4^2$  la vora exterior  $S_e^-$ .

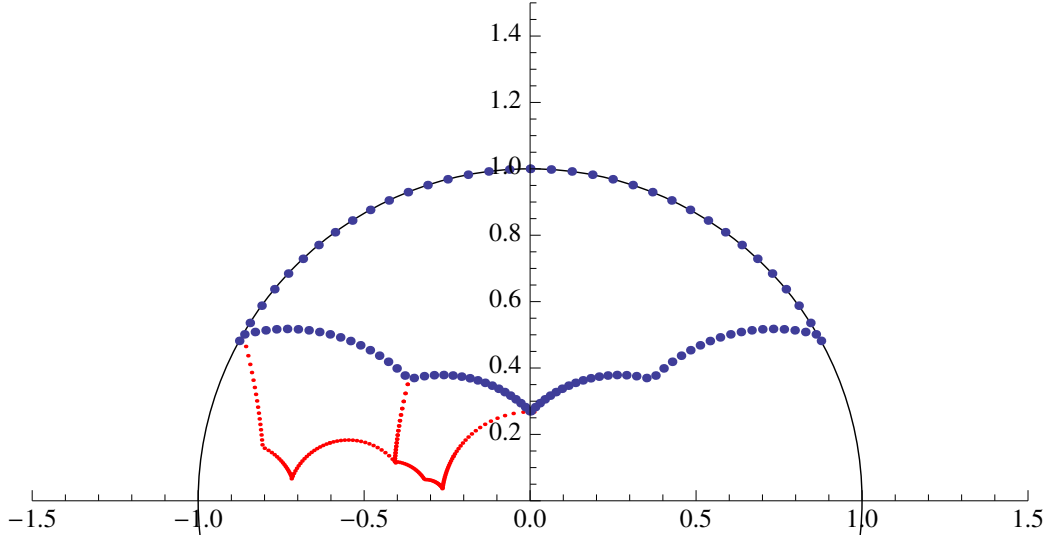
Càlculs similars s'apliquen al cas en què  $|z| = 1$  i  $\Re(z) > 0$ . L'aplicació que cal considerar és  $\gamma_4\gamma_2^2$  i els signes canvien adequadament.  $\square$

El segon tros de la vora de  $S^-$  correspon a la intersecció amb el domini fonamental  $\mathcal{F}$ , és a dir,  $S_s^-$ .

**3.2.3 Lema. (Vora superior)** *La vora superior  $S_s^-$  de  $S^-$  es recobreix amb les tessel·les*

$$\gamma_2(\mathcal{F}) \cup \gamma_2^2(\mathcal{F}).$$

DEMOSTRACIÓ. La demostració s'obté en tenir en compte que és un punt fix per  $\gamma_2$  i que  $\gamma_2^3 = \text{Id}$ . S'observa en la figura 3.2.  $\square$

Figura 3.2: Vora superior de  $S^-$  per a  $\Gamma(6, 1)$ 

Ara només ens queda la frontera interior. Fins ara podem observar que les tesselles de les dues parts de la vora  $S_e^-$  i  $S_s^-$  coincideix exactament amb la vora de  $S^-$ . En l'últim cas, això no ocorre. Però el que hem de provar és que es pot recobrir amb una aplicació que comenci per  $\gamma_2$ . Abans de continuar, definim el conjunt següent:

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n>0} \gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(\mathcal{F}) \bigcup_{n>0} h_6^{-n}(\mathcal{F}).$$

**3.2.4 Lema.** *Si  $z$  és un nombre imaginari pur, aleshores  $h_6^n(z)$  i  $\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(z)$  són nombres imaginaris purs, per a tot  $n$ .*

DEMOSTRACIÓ. El cas de les potències de l'homotècia és trivial.

Per al segon cas només cal observar que

$$\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 = \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 - \sqrt{3} \\ -2 - \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix};$$

per tant, com a aplicació és de la forma

$$\gamma_3(z) = \frac{2 - \sqrt{3}}{-2 - \sqrt{3}} \frac{1}{z}.$$

Es pot observar que si  $z$  té part real nul·la, aleshores  $\gamma_3(z)$  també tindrà part real nul·la i això prova el que volíem.  $\square$



**3.2.5 Lema. (Vora interior)** *La vora interior, és a dir el conjunt dels punts  $z = x + iy \in \mathcal{H}$  tals que  $x = 0$  i  $|y| \leq r_1$ , es recobreix amb les tesselles*

$$\bigcup_{n>0} \gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(\mathcal{F}) \bigcup_{n>0} h_6^{-n}(\mathcal{F}) := \mathcal{E}.$$

DEMOSTRACIÓ. Per a les transformacions de la forma  $h_6^{-n}$  observem en la demostració de 3.2.1 que per a  $m > n$  és

$$\Im(h_6^{-m})(z) < \Im(h_6^{-n})(z).$$

Per a les transformacions de la forma  $\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(\mathcal{F})$  observem que

$$h_6 = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow h_6^n = \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2 - \sqrt{3})^n \end{bmatrix};$$

per tant,

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n &= \begin{bmatrix} 0 & 2 - \sqrt{3} \\ -(2 + \sqrt{3}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2 - \sqrt{3})^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (2 - \sqrt{3})^{n+1} \\ -(2 + \sqrt{3})^{n+1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Amb la forma explícita d'aquesta transformació, observem que si  $z = ib$ , aleshores,

$$\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(ib) = \frac{(2 - \sqrt{3})^{n+1}}{(2 + \sqrt{3})^{n+1}} \frac{1}{b} i,$$

i, com a conseqüència, si  $m > n$  és

$$\Im(\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^m(ib)) < \Im(\gamma_2^2 \gamma_6 \gamma_4 h_6^n(ib)).$$

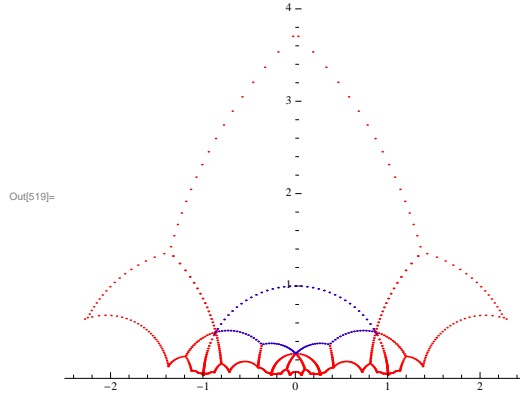
Això acaba la demostració.  $\square$

Amb aquest resultat hem recobert les vores de  $S^-$ . Cal veure ara que l'interior d'aquesta regió també es pot recobrir amb aplicacions que comencen, com a paraules, per  $\gamma_2$ . Definim a continuació un concepte clau per tal de demostrar que podem recobrir les regions interiors de forma adequada.

**3.2.6 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian qualsevol de domini fonamental  $\mathcal{F}$ . Sigui  $\mathcal{T} \subseteq \Gamma$  un conjunt de transformacions. Direm que  $\mathcal{T}$  *embotcalla* el domini fonamental  $\mathcal{F}$  si el conjunt

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{T}} \gamma(\mathcal{F}),$$

és connex i satisfà que per a tot  $z \in \mathcal{F}$  existeix un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ , on  $B_\varepsilon(z)$  denota la boal de centre  $z$  i radi  $\varepsilon$ .

Figura 3.3:  $\star(\mathcal{F}(\Gamma(6, 1)))$ 

Observem que  $\mathcal{T}$  no és únic. Considerarem un conjunt minimal que satisfaci la condició d'embolcallar  $\mathcal{F}$ .

**3.2.7 Definició.** Definim  $\Gamma^* \subseteq \Gamma$  com el conjunt de transformacions per a les quals

$$\bigcup_{g \in \Gamma^*} g(\mathcal{F}) = \mathcal{C}_{\Gamma^*} = \bigcap_{\mathcal{T}} \mathcal{C}_{\mathcal{T}}.$$

Notem que  $\Gamma^*$  depèn de  $\mathcal{F}$  i l'embolcalla.

Sigui  $\star(\mathcal{F})$  el conjunt definit per

$$\star(\mathcal{F}) := \bigcup_{g \in \Gamma^*} g(\mathcal{F}).$$

Anomenarem aquest conjunt el *conjunt estrella* de  $\mathcal{F}$ .

Definim  $\star(\gamma_1(\mathcal{F}) \cup \gamma_2(\mathcal{F})) := \star(\gamma_1(\mathcal{F})) \cup \star(\gamma_2(\mathcal{F}))$ .

**3.2.8 Proposició.** Sigui  $\mathcal{F}$  un domini fonamental pel grup  $\Gamma$ . Sigui  $g \in \Gamma$  un element del grup. Aleshores  $\star(g(\mathcal{F})) = g(\star(\mathcal{F}))$ .

A continuació donem explícitament el conjunt de transformacions  $\Gamma(6, 1)^*$  i  $\mathcal{F}$  el domini fonamental descrit en 2.3.2.

**3.2.9 Proposició.** El conjunt de transformacions  $\Gamma(6, 1)^*$  és

$$\begin{aligned} \Gamma(6, 1)^* = \{ & \text{Id}, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_2^2, \gamma_4^2, \gamma_6\gamma_2, \gamma_6\gamma_4, \gamma_2\gamma_4^2, \gamma_4\gamma_2^2, \gamma_2^2\gamma_6, \\ & \gamma_4^2\gamma_6, \gamma_6\gamma_4\gamma_2^2, \gamma_2^2\gamma_6\gamma_4, \gamma_6\gamma_2\gamma_4^2 \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

DEMOSTRACIÓ. Per als punts interiors és suficient considerar la transformació identitat. Per al punts de la vora que no són vèrtexs, sempre podem trobar un element del grup que deixi fix un camí. De fet aquests elements ja venen donats pel teorema 2.3.2, i són les transformacions  $\gamma_2, \gamma_4$  i  $\gamma_6$  i les seves inverses, tenint en compte que  $\gamma_2^{-1} = \gamma_2^2, \gamma_4^{-1} = \gamma_4^2$  i  $\gamma_6^{-1} = \gamma_6$ . Per a envoltar els vèrtexs, necessitem les altres 9 transformacions.  $\square$

Un cop controlada la vora de  $S^-$ , hem de veure que podem omplir  $S^-$  amb traslladats d'aplicacions que “comencen” per  $\gamma_2$ .

**3.2.10 Proposició.** *Sigui  $g \in \Gamma(6, 1)$  tal que  $g(\mathcal{F}) \subseteq S^- \setminus \partial S^-$ , és a dir la intersecció amb la vora és nul·la. Aleshores,*

$$\star(g(\mathcal{F})) \subseteq S^- \cup \mathcal{E}.$$

*De forma anàloga, sigui  $g \in \Gamma(6, 1)$  tal que  $g(\mathcal{F}) \subseteq S^+ \setminus \partial S^+$ . Aleshores,*

$$\star(g(\mathcal{F})) \subseteq S^+ \cup \mathcal{E}.$$

**3.2.11 Lema.** *Siguin  $\Gamma$  un grup fuchsà i  $\mathcal{F}$  un domini fonamental per a  $\Gamma$ . Tenim la propietat següent de l'operació estrella:*

$$\inf\{\Im(z) \mid z \in \gamma(\mathcal{F})\} > \inf\{\Im(z) \mid z \in \star(\gamma(\mathcal{F}))\},$$

*per a tot  $\gamma \in \Gamma$ .*

DEMOSTRACIÓ. Es pot comprovar que el primer ínfim s'assoleix sempre en un dels vèrtexs del domini fonamental  $\mathcal{F}$ . Però per definició de l'estrella, existeix un entorn d'aquest vèrtex inclòs en  $\star(\mathcal{F})$ . En considerar un punt d'aquest entorn que tingui part imaginària estrictament menor, ja haurem acabat.  $\square$

Hem observat en la demostració anterior que el valor de l'ínfim s'assoleix en el transformat d'un dels vèrtexs, és a dir, en un punt de la forma  $\gamma(v_i)$ , on  $v_i$  és un dels vèrtexs del teorema 2.3.2, i  $\gamma \in \Gamma(6, 1)$ . Anomenarem  $\mathcal{V}$  aquest conjunt de vèrtexs, explícitament,

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathcal{H} \mid \text{existeix un } \gamma \in \Gamma(6, 1) \text{ i existeix un } 1 \leq i \leq 6, z = \gamma(v_i)\}.$$

Com que el conjunt d'aquests vèrtexs és discret, donada una regió acotada de l'espai, el nombre d'aquests que contindrà serà finit.

Provarem que, donat un valor fixat, podem omplir  $S^-$  amb tessel·les. Per a això considerem el conjunt

$$S_1^- := \star(\mathcal{F}) \cap (S^- \cup \mathcal{E}),$$

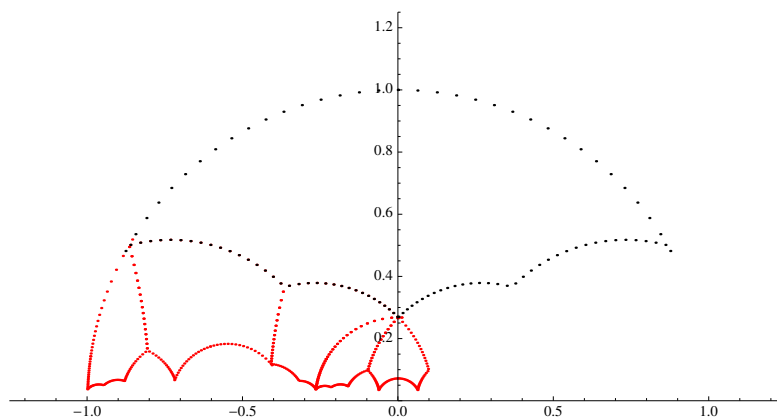


Figura 3.4:  $S_1^-$  per al grup  $\Gamma(6, 1)$

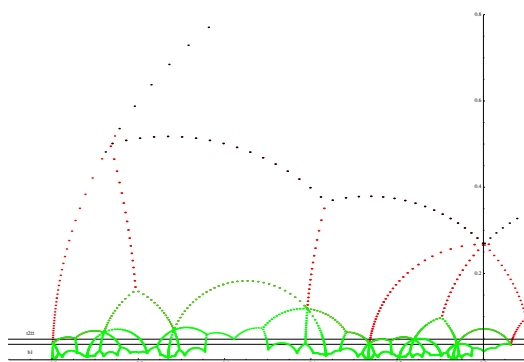


Figura 3.5:  $N_2^-$  per al grup  $\Gamma(6, 1)$

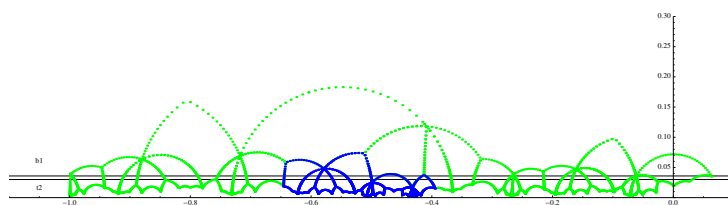


Figura 3.6:  $S_2^-$  per al grup  $\Gamma(6, 1)$

i sigui

$$b_1 := \inf\{\mathfrak{S}(z) \mid z \in S_1^-\}.$$

Per al cas  $\Gamma(6, 1)$  aquest conjunt correspon a

$$S_1^- = \gamma_2\gamma_4^2(\mathcal{F}) \cup \gamma_2(\mathcal{F}) \cup \gamma_2^2(\mathcal{F}) \cup \gamma_2^2\gamma_6(\mathcal{F}) \cup \gamma_2^2\gamma_6\gamma_4h_6(\mathcal{F}).$$

i representat en la figura 3.4. Observem que totes les transformacions que defineixen la tessellació anterior comencen, com a paraules, per  $\gamma_2$ . Definim també, el conjunt següent:

$$N_2^- := (\star(S_1^-) \setminus S_1^-) \cap (S^- \cup \mathcal{E}),$$

és a dir, només considerem les estrelles dels traslladats que no intersequen amb la vora, i considerem el valor següent:

$$t_2^\sharp := \sup\{\mathfrak{S}(z) \mid z \in N_2^-\}.$$

Considerem el conjunt  $V_1$  dels vèrtexs de  $\mathcal{V} \cap S^-$  tals que  $b_1 \leq \mathfrak{S}(v) \leq t_2^\sharp$ . Aquest conjunt és finit atès que és la intersecció d'un conjunt discret amb un compacte. Per a cada  $v \in V_1$ , considerem una transformació  $\gamma \in \Gamma(6, 1)$  tal que  $\gamma(v_i) = v$ , que existeix per definició d'aquests vèrtexs. D'aquesta manera obtenim un conjunt de transformacions  $t_{V_1} \subseteq \Gamma(6, 1)$ . Si tots els vèrtexs són interiors, és a dir que provenen de traslladats de dominis que no intersequen amb la vora, anomenem  $N_{22}^-$  el conjunt

$$N_{22}^- = N_2^- \cup \bigcup_{\gamma \in t_{V_1}} \star(\gamma(\mathcal{F})).$$

En cas contrari, per a cada transformació corresponent a un vèrtex de la frontera hem de procedir cas a cas. Si  $|v| = 1$ , en lloc de considerar  $\star(\gamma(\mathcal{F}))$  considerem  $(\gamma_2\gamma_4^2)^{n+1}(\mathcal{F})$ , on  $n$  és la potència que correspon, ja que hem vist en el lema de la vora exterior que totes són d'aquesta forma. Si els vèrtexs es troben en  $\mathcal{E}$ , tenim dos casos possibles: si  $\gamma = h_6^{-n}$  per a algun  $n > 0$ , aleshores considerem  $(\gamma_2^2\gamma_6\gamma_4)h_6^{n+1}(\mathcal{F})$ ; altrament, tenim que  $\gamma = (\gamma_2^2\gamma_6\gamma_4)h_6^n$ , i aleshores considerem  $h_6^{-(n+1)}(\mathcal{F})$ . Tenint en compte aquestes consideracions concloem el lema següent:

**3.2.12 Lema.** *Si el conjunt  $t_{V_1}$  és no buit, el valor  $t_{22}^\sharp = \sup\{\mathfrak{S}(z) \mid z \in N_{22}^-\}$  satisfà que  $t_{22}^\sharp < t_2^\sharp$ .*

Repetim el procés fet per a  $V_1$  tantes vegades com calgui fins que obtenim un conjunt  $V_m$  buit. Aquest procés ha d'acabar en algun moment, atès que sinó tindríem un punt d'acumulació en  $\mathcal{H}$  per l'acció del grup i sabem

que en el cas d'accions de grups fuchsians això no pot passar. Per tant, anomenem  $S_2^-$  el conjunt final del procés que acaba en  $V_m$ . Anomenem

$$t_2 := \sup\{\Im(z) \mid z \in S_2^-\}.$$

Per tal de fer el procés recurrent, anomenem

$$b_2 := \inf\{\Im(z) \mid z \in S_2^-\}.$$

Així, successivament, obtindrem conjunts  $S_n$ , per a  $n \geq 1$ .

**3.2.13 Lema.** *Se satisfà que  $t_2 < b_1$ . □*

La prova del lema és donada per la construcció del conjunt  $S_2^+$ .

**3.2.14 Proposició.** *Tenim la igualtat següent:*

$$S^- = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^-.$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió  $t_1 > t_2 > \dots$ , que és decreixent per construcció. Això vol dir que podem fer les parts imaginàries de  $z$  tant petites com vulguem. Que no sobresurt de la frontera és donat per l'enunciat del lema de la frontera, atès que ens indica la forma exacta que tenen les tesselles  $\gamma(\mathcal{F})$  que intersequen amb la frontera. Posant tot això de manifest, es pot concloure la igualtat. □

Tots els conjunts  $S_n^-$  provenen de la construcció d'estrelles a partir del conjunt original  $S_1^-$ . Aquest conjunt estava recobert per tesselles que provenien de traslladats de  $\mathcal{F}$  per paraules que començaven per  $\gamma_2$ . Per la proposició 3.2.8, totes les tesselles que recobreixen  $S^-$  també comencen per  $\gamma_2$ . Per tant d'aquí deduïm que tot  $S^-$  es pot recobrir per tesselles que comencen per  $\gamma_2$ . Així doncs, correspon assignar  $\gamma_2^{-1}$  a la regió  $S^-$ .

Així i tot, atès que  $\gamma_2^{-1} = \gamma_2^2$  i, a més,  $(\gamma_2^2)^2 = \gamma_2$ , des d'un punt de vista del nombre de passos, assignar a la regió  $S^-$  la transformació  $\gamma_2$  és equivalent a assignar-li  $\gamma_2^2$ , que és el que hem provat abans. Així doncs, per a facilitar la lectura de l'algoritme preferim assignar  $\gamma_2$ .

**3.2.15 Observació.** Anàlogament assignem  $\gamma_4$  a la regió  $S^+$ . La idea de totes les demostracions és la mateixa.

Amb tots aquest resultats previs obtenim el teorema següent:

**3.2.16 Teorema.** *L'algoritme 3 és un algoritme de reducció de punts per al grup  $\Gamma(6, 1)$ .*

La demostració és el compendi de tots els resultats previs. La figura 3.7 mostra el que seria portar a terme un “passeig en línia recta” per la superfície de Riemann.

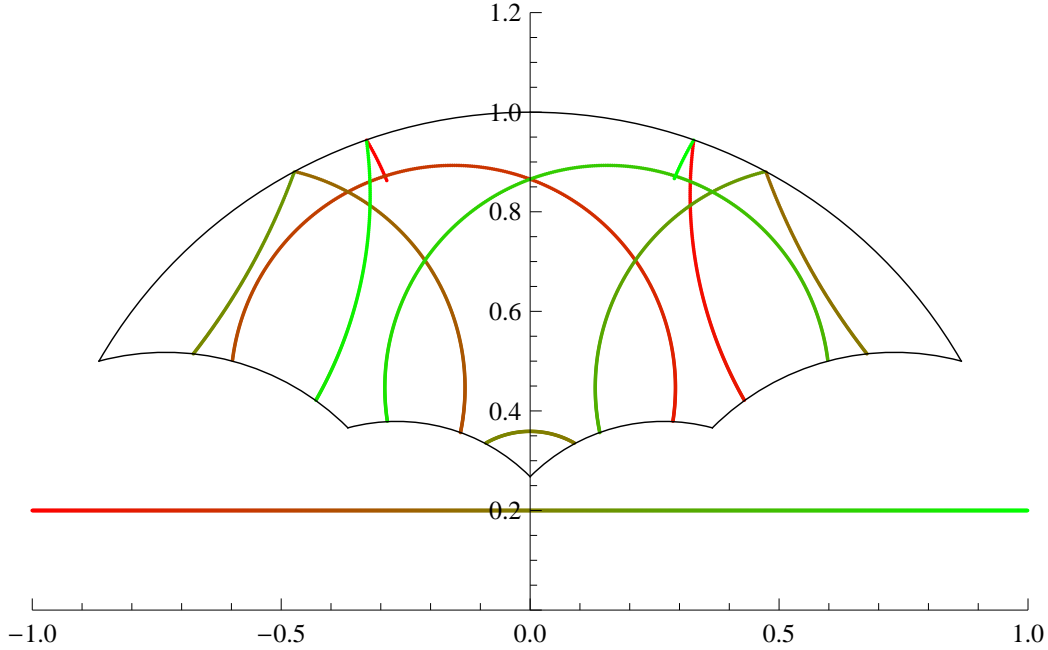
**Data:**  $\langle \gamma_2, \gamma_4, \gamma_6 \rangle = \Gamma(6, 1)$ ,  $z_0 \in \mathcal{H}$   
**Result:**  $z_1 \in \mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$  amb  $\gamma(z_0) = z_1$  i  $\gamma \in \Gamma(6, 1)$   
 $z_0 = z$ ;  
**while**  $z_0 \notin \mathcal{F}$  **do**  
    **if**  $|z_0| > 1$  **then**  
         $z_0 = \gamma_6(z_0)$   
    **else**  
        **if**  $\Re(z_0) \leq 0$  **then**  
             $z_0 = \gamma_2(z_0)$   
        **end**  
        **if**  $\Re(z_0) > 0$  **then**  
             $z_0 = \gamma_4(z_0)$   
        **end**  
    **end**  
**end**

**Algorithm 3:** Algoritme de reducció simplificat per a  $\Gamma(6, 1)$

Observem aquí que amb la informació de la presentació del grup hem obtingut quatre regions,  $S^-$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $S^+$  i  $S^\infty$  (tres a banda del propi domini), que tenen interior disjunts. De  $\gamma_2^2 = \gamma_2^{-1}$  (anàlogament per al cas  $\gamma_4$ ), deduïm que  $S^-$  és pot agrupar en una sola regió. De la relació  $(\gamma_2^{-1}\gamma_6\gamma_4)^2 = \text{Id}$ , deduïm el conjunt  $\mathcal{E}$ . Del fet que  $\gamma_6 = \gamma_6^{-1}$ , deduïm que hi ha una única regió que s’aplega sota aquesta aplicació. Aquestes regions es veuran detallades en la figura 9.3.

### 3.2.2 El grup $\Gamma(6, 5)$

Aquest grup presenta la particularitat que, tal i com s’han descrit els generadors en el teorema 2.3.4, el seu domini fonamental té una vora superior no simètrica respecte de l’eix  $x = 0$ . Per tal de tenir en compte casos com aquest, en farem un estudi. Com a resultat de l’aquest estudi hem arribat al lema següent:

Figura 3.7: Reduïció de punts en  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$ 

**3.2.17 Lema.** *El conjunt de transformacions  $\Gamma(6, 5)^*$  és*

$$\Gamma(6, 5)^* = \{\text{Id}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, \gamma_3^{-1}, \gamma_4^{-1}, \gamma_5^{-1}, g_1, g_2, g_3, \\ g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, \gamma_1\gamma_3, \gamma_1\gamma_2^{-1}, \gamma_2\gamma_1^{-1}, \gamma_2\gamma_3^{-1}, \gamma_3\gamma_2^{-1}, \gamma_3\gamma_4^{-1}\}.$$

Com a conseqüència d'aquest resultat i d'un estudi similar al que hem portat a terme pel grup  $\Gamma(6, 1)$ , arribem a l'algoritme 4. Veiem una aplicació d'aquest algoritme en la figura 3.8.

### 3.2.3 Els grups $\Gamma(10, 1)$ , $\Gamma(15, 1)$

Podem fer un procés similar al del grup  $\Gamma(6, 1)$  per a implementar un algoritme de reduïció de punts per als grups  $\Gamma(10, 1)$  i  $\Gamma(15, 1)$ . Per aquest motiu, no repetirem aquí els passos necessaris. Els algoritmes corresponents són els algoritmes 2 i 3 de l'article [BR14], que donen lloc a les figures 3.9 i 3.10.

### 3.2.4 Un grup $\Gamma$ de signatura $(1; 2)$

El teorema que descriu el domini fonamental que fem servir en aquesta secció es troba a l'article [Sij13]. Un domini fonamental pel grup associat a la terna



**Data:**  $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \rangle = \Gamma(6, 5)$ ,  $z_0 \in \mathcal{H}$   
**Result:**  $z_1 \in \mathcal{F}(\Gamma(6, 5))$  amb  $\gamma(z_0) = z_1$  i  $\gamma \in \Gamma(6, 1)$

$z_0 = z;$   
**while**  $z_0 \notin \mathcal{F}$  **do**  
  **if**  $z_0 \in \text{ext}(c_1)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_1(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{ext}(c_{10})$  **then**  
     $z_0 = \gamma_3^{-1}(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_2)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_2(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_3)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_3(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_4)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_4(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_5)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_5(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_6)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_1^{-1}(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_7)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_2^{-1}(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_8)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_5^{-1}(z_0)$   
  **end**  
  **if**  $z_0 \in \text{int}(c_9)$  **then**  
     $z_0 = \gamma_4^{-1}(z_0)$   
  **end**  
**end**

**Algorithm 4:** Algoritme de reducció per a  $\Gamma(6, 5)$

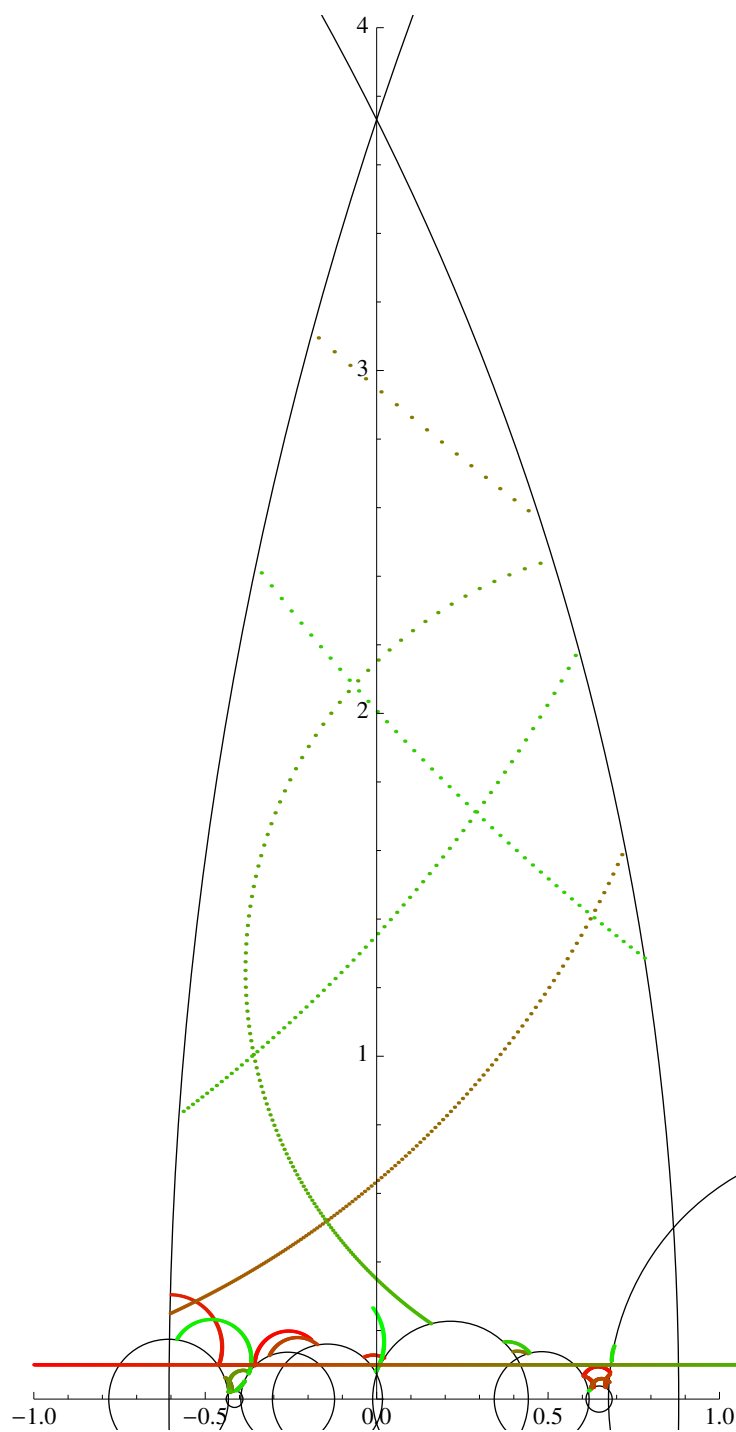


Figura 3.8: Reducció de punts en  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 5))$

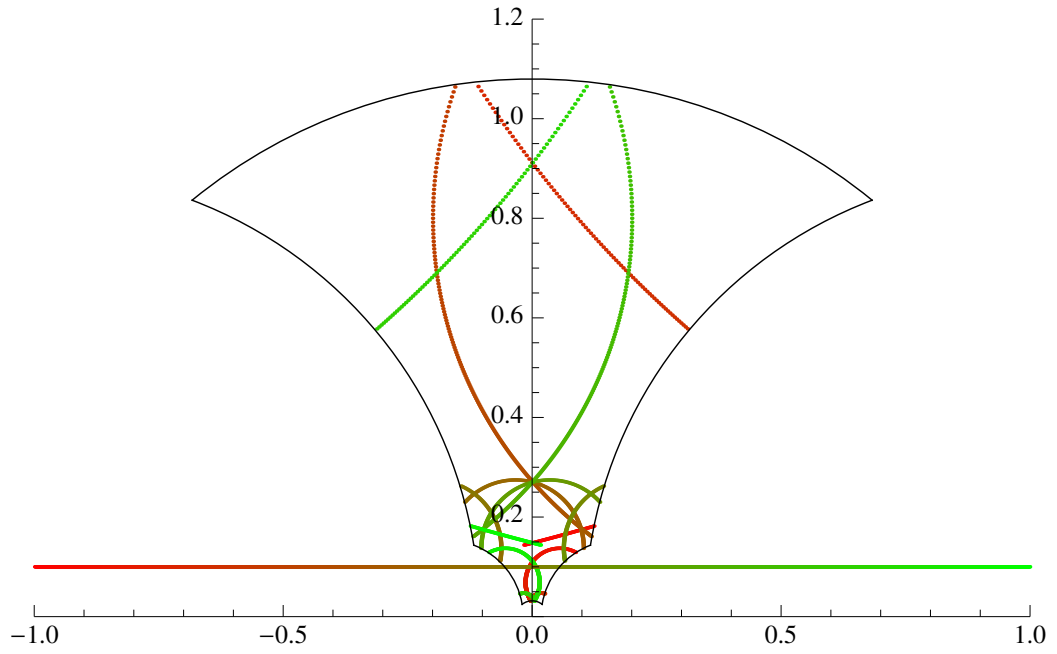


Figura 3.9: Reducció de punts en  $\Gamma(10, 1)$

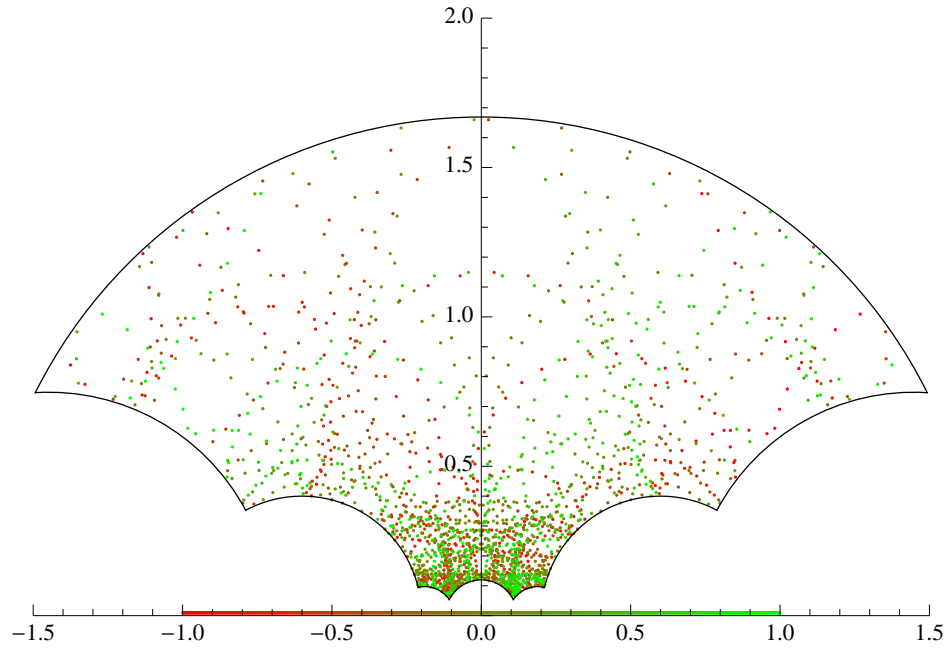


Figura 3.10: Reducció de punts en  $\Gamma(15, 1)$

$(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$  s'ha representat, amb les seves identifikacions, en la figura 2.7.

Recordem que la homotècia principal d'aquest grup és donada per l'acció

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Anomenem

$$\alpha_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**3.2.18 Lema. (Vora interior)** *Les tesselles que intersequen el cercle de radi  $\alpha_{22}$  són, definides de manera recursiva,*

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \beta^{-1}\alpha\beta; \\ \gamma_1 &= \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}; \\ \gamma_2 &= \gamma_1\gamma_0; \\ \gamma_k &= \begin{cases} \gamma_{k-1}\gamma_1 & \text{si } k \text{ és senar,} \\ \gamma_{k-1}\gamma_0 & \text{si } k \text{ és parell,} \end{cases} \end{aligned}$$

amb  $k \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓ. Podem veure els gràfics en la figura 3.11.  $\square$

**3.2.19 Lema. (Vora exterior)** *Les tesselles que intersequen el cercle de radi  $\alpha_{11}$  són, definides de manera recursiva,*

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta; \\ \gamma_1 &= \beta\alpha\beta^{-1}; \\ \gamma_2 &= \gamma_1\gamma_0; \\ \gamma_k &= \begin{cases} \gamma_{k-1}\gamma_1 & \text{si } k \text{ és senar,} \\ \gamma_{k-1}\gamma_0 & \text{si } k \text{ és parell,} \end{cases} \end{aligned}$$

amb  $k \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓ. Podem veure els gràfics en la figura 3.11.  $\square$

**3.2.20 Teorema.** *La correspondència aplicació/regió que intervé en l'algoritme de reducció és descrita de la manera següent:*

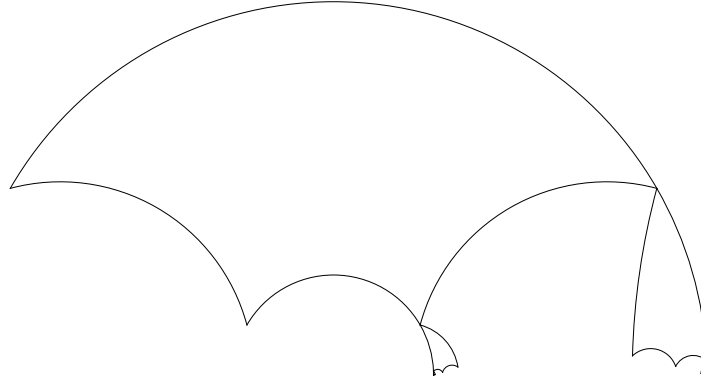


Figura 3.11: Vores interior i exterior per al grup  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$

**Data:**  $\langle \alpha, \beta \rangle = \Gamma^{(1,2)}$ ,  $z_0 \in \mathcal{H}$   
**Result:**  $z_1 \in \mathcal{F}(\Gamma^{(1,2)})$  amb  $\gamma(z_0) = z_1$  i  $\gamma \in \Gamma^{(1,2)}$

```

 $z_0 = z;$ 
while  $z_0 \notin \mathcal{F}$  do
  | if  $|z_0| > \alpha_{11}$  then
  | |  $z_0 = \alpha^{-1}(z_0);$ 
  | |  $\text{flag} = \text{False};$ 
  | end
  | if  $|z_0| < \alpha_{22}$  then
  | |  $z_0 = \alpha(z_0);$ 
  | |  $\text{flag} = \text{False};$ 
  | end
  | if  $\text{flag}$  then
  | | if  $\Re(z_0) > 0$  then
  | | |  $z_0 = \beta^{-1}(z_0)$ 
  | | | else
  | | | |  $z_0 = \beta(z_0)$ 
  | | | end
  | | end
  | end
  |  $\text{flag} = \text{True};$ 
end

```

**Algorithm 5:** Algoritme de reducció per al grup  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$

1. A la regió

$$S^> = \{z \mid |z| > \alpha_{11}\}$$

li correspon l'aplicació  $\alpha^{-1}$ .

2. A la regió

$$S^< = \{z \mid |z| < \alpha_{22}\}$$

li correspon l'aplicació  $\alpha$ .

3. A la regió dels punts  $z \in \mathcal{H}$  tals que no pertanyen a  $S^<$  ni  $S^>$  i  $\Re(z) > 0$  els correspon l'aplicació  $\beta^{-1}$ .

4. A la regió dels punts  $z \in \mathcal{H}$  tals que no pertanyen a  $S^<$  ni  $S^>$  i  $\Re(z) < 0$  els correspon l'aplicació  $\beta$ .

Per acabar la prova només cal demostrar l'existència del conjunt estrella.

**3.2.21 Teorema.** *El grup associat a la terna  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$  amb el domini fonamental donat en el teorema 2.4.4 té com a conjunt estrella de transformacions el conjunt següent:*

$$\begin{aligned} \Gamma^* := & \{\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta\alpha^{-1}, \alpha\beta^{-1}, \\ & \beta\alpha^{-1}, \beta\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, \\ & \alpha^{-1}, \alpha^{-1}\beta, \alpha^{-1}\beta\alpha, \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha, \\ & \beta^{-1}, \beta^{-1}\alpha, \beta^{-1}\alpha^{-1}, \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta, \beta^{-1}\alpha\beta, \beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}, \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Podem veure l'efecte de les diferents accions considerades en el teorema en la figura 3.12  $\square$

### 3.3 Algoritme general de reducció de punts

En el primer apartat hem estudiat el grup  $\Gamma(6, 1)$ . Hem pogut simplificar molt l'algoritme atès que les relacions que intervenen en la presentació del grup contribueixen a una simplificació de les regions i del seu aparellament. També hem vist l'algoritme de reducció per al grup  $\Gamma(6, 5)$ , que és molt feixuc, i per al qual cada regió tenia una regió aparellada. En aquesta secció, formularem la idea general dels algoritmes de reducció de punts i donarem una demostració del seu funcionament. Treballarem en el model del disc unitat, perquè ens permetrà simplificar les demostracions.

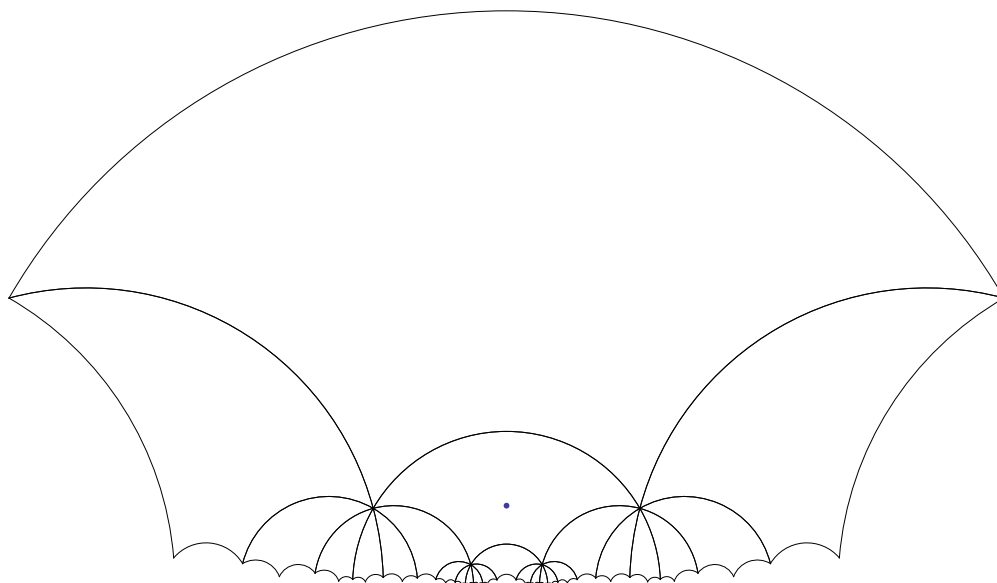


Figura 3.12: Conjunt estrella per al grup  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$

**3.3.1 Teorema. (Algoritme general de reducció de punts)** Prenem  $\Gamma$  un grup fuchsianà cocompacte i  $G$  un conjunt finit de generadors de  $\Gamma$  tal que  $G^{-1} = G$  i  $\mathcal{F}$  un domini fonamental contingut en el cercle unitat i construït a partir de  $G$ . Fixem un ordre en el conjunt  $G$ . El següent algoritme redueix un punt donat  $z \in \mathcal{H}$  a un punt  $z_0 \in \mathcal{F}$ , i retorna una transformació  $t \in \Gamma$  tal que  $t(z) = z_0$ .

1. Inicia  $z_0 = z$  i  $t = \text{Id}$ .
2. Si  $z_0 \in \mathcal{F}$  retorna  $z_0$  and  $t$ .
3. Troba el primer  $g \in G$  tal que  $z_0 \in \text{int}(I(g))$ .
4. Calcula  $z_0 = g(z_0)$  i  $t = g \cdot t$ . Ves al pas 2.

Per tal de provar que el resultat és correcte, recordem el resultat següent sobre la distància euclidiana i els cercles d'isometria.

**3.3.2 Lema.** Sigui  $\mathcal{D}$  el disc unitat. Prenem  $g \in \Gamma^\phi$ ,  $h = d(z, 0)$  i  $h' = d(g(z), 0)$ , o  $d$  denota la distància euclidiana en  $\mathcal{D}$ . Aleshores

1.  $h' = h$ , si  $z \in I(g) \cap \mathcal{D}$  o  $z \in \partial\mathcal{D}$ .
2.  $h' < h$ , si  $z \in \text{int}(I(g)) \cap \mathcal{D}$ .

3.  $h' > h$ , si  $z \in \text{ext}(\mathbf{I}(g)) \cap \mathcal{D}$ .

DEMOSTRACIÓ. Veure lema 3.3.6 de [Kat92]. Notem que si  $z \in \text{int}(\phi(\mathcal{F}))$ , aleshores  $g(z) \notin \text{int}(\phi(\mathcal{F}))$  i, més precisament,  $g(z) \in \text{int}(\mathbf{I}(g^{-1})) \cap \mathcal{D}$ .  $\square$

DEMOSTRACIÓ. (del teorema 3.3.1) Necessitem provar que l'algoritme retorna el punt reduït  $p \in \mathcal{F}$  i la matriu  $t \in \Gamma$  en un nombre finit de passos. Considerem  $z_1 = \phi(z)$ , la imatge  $\mathcal{D}$  del punt que volem reduir. Si  $z_1 \in \phi(\mathcal{F})$ , l'algoritme acaba amb  $t = \text{Id}$ . Si aquest no és el cas, aleshores, pel teorema 2.5.1, existeix un  $g_1 \in G^\phi$  tal que  $z_1 \in \text{int}(\mathbf{I}(g_1))$ . Si apliquem  $g_1$  a aquest punt i apliquem  $z_2 = g_1(z_1)$  aleshores, pel lema 3.3.2, tenim  $d(z_1, 0) > d(z_2, 0)$ . Si  $z_2 \in \phi(\mathcal{F})$ , l'algoritme acaba. En cas contrari, l'algoritme construeix una successió  $\{z_i\}_{i \geq 1}$ . Aquesta successió ha de ser finita, ja que altrament tindriem punts d'acumulació.

Però això és una contradicció perquè l'acció de  $\Gamma^\phi$  en  $\mathcal{D}$  és pròpiament discontinua.

D'aquesta manera, ha d'haver-hi un últim punt  $z_n \in \phi(\mathcal{F})$  i podem prendre  $z_0 = \phi^{-1}(z_n)$  i  $t = \phi^{-1}g_n \cdots g_1\phi$ . La matriu final  $t$  és de  $\Gamma$ , ja que és donada per un producte finit d'elements de  $G$ . Per tant l'algoritme redueix punts de manera correcta.

Notem que l'algoritme pot ser implementat directament en el semiplà superior, l'ús del disc unitat només és necessita per a justificar que la distància disminueix, en cada pas.  $\square$

**3.3.3 Observació.** Justifiquem aquí el nom d'algoritme simplificat per a l'algoritme que hem descrit abans per al grup  $\Gamma(6, 1)$ . Ens fixem que en aquell algoritme només hi havia tres regions, però del teorema podríem trobar-n'hi fins a 5. El fet és degut a les relacions del grup: un cercle d'isometria és donat per  $\gamma_2$  i l'altre, per  $\gamma_2^2$  (anàlogament  $\gamma_4$ ). En aquests casos, però, resulta que, casualment,  $\gamma_2^{-1} = \gamma_2$ ; per tant, és per aquest motiu que l'algoritme se simplifica considerablement.





# Capítol 4

## Reducció de formes quadràtiques binàries

En aquest capítol ens proposem donar una aplicació directa de l'algoritme de reducció de punts que hem desenvolupat en el capítol 3. Hi tractarem el tema de la reducció de formes quadràtiques binàries associades a un grup fuchsian aritmètic. Els conjunts de formes que reduïrem seran els considerats a [AB04].

### 4.1 Formes quadràtiques binàries i ordres quaternionics

Començarem per definir els conjunts de formes quadràtiques binàries, en el context que ens ocupa, i recordar algunes de les seves propietats.

**4.1.1 Definició.** Una forma quadràtica binària és un polinomi homogeni de grau dos,  $f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ , de coeficients complexos. Denotarem la forma segons  $f = (a, b, c)$ .

La matriu associada a  $f$  és

$$A(f) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}$$

i com a determinant de  $f$  considerarem el valor  $\det(f) = (4ac - b^2)/4$ .

**4.1.2 Definició.** Sigui  $H = (a, b)_{\mathbb{Q}}$  una àlgebra de quaternions racional i indefinida i  $\Psi$  la representació matricial de l'àlgebra donada a 1.5. Per a cada quaternió  $\omega = x + yI + zJ + tIJ \in H$ , denotem per  $f_{\Psi(\omega)}$  la forma quadràtica donada per

$$f_{\Psi(\omega)} = (b(z - t\sqrt{a}), -2y\sqrt{a}, -z - t\sqrt{a}).$$

El conjunt de formes associades a un ordre quaterniònic  $\mathcal{O}$  de  $H$  és, per definició,

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) := \{f_{\Psi(\omega)} \mid \omega \in \mathcal{O} \cap H_0\},$$

on  $H_0$  denota el conjunt dels quaternions purs de l'àlgebra.

Donat un cos quadràtic  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}, d > 0\}$ , on  $d$  és un enter lliure de quadrats, representarem per  $\mathcal{O}_F$  el seu anell d'enters i per  $D_F$  el seu discriminant:

$$\mathcal{O}_F = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & D_F = 4d, & d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}], & D_F = d, & d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Alhora, representarem per  $R = R(d, m)$  un ordre de  $F$  de conductor  $m$ , amb la qual cosa, el discriminant de  $R$  és  $D_R = D_F m^2$  i  $\mathcal{O}_F = R(D_F, 1)$ .

Donats un ordre quaterniònic  $\mathcal{O}$  de  $H$  i un ordre quadràtic  $R$ , es defineix

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}, R) := \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) \mid \det(f) = -D_R\},$$

on  $D_R$  denota el discriminant de l'ordre quadràtic. Sovint considerarem conjunts de la forma  $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, R)$ .

Una tasca important és sempre caracteritzar aquells ordres quadràtics per als quals els conjunts anteriors són no buits (cf. [AB04]) i determinar els seus elements. A continuació enunciem els teoremes que descriuen els conjunts de formes quadràtiques binàries, definides positives, associades a diferents ordres d'Eichler.

**4.1.3 Teorema.** *Considerem un ordre d'Eichler  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(1, N)$ , de nivell  $N$ , en l'àlgebra de matrius  $H = M(2, \mathbb{Q})$ . Sigui  $R = R(d, m)$  un ordre d'un cos quadràtic imaginari. Aleshores, el conjunt de les formes quadràtiques  $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), R)$  és donat per*

$$\{f = (Na, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, \det(f) = -D_R\}.$$

*Les formes s'anomenen primitives quan  $\gcd(a, b, c) = 1$ .*

**4.1.4 Teorema.** *Siguin  $H = (p, -1)_{\mathbb{Q}}$  una àlgebra de quaternions amb  $p \equiv 3 \pmod{4}$  primer,  $\mathcal{O}(D, N)$  un ordre d'Eichler de nivell  $N$  i  $R = R(d, m)$  un ordre d'un cos quadràtic imaginari.*

1. *El conjunt  $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m))$  de formes quadràtiques associades és*

$$\{f = (a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) \mid a, b, c \in \mathbb{Z},$$

$$a \equiv b \equiv c \pmod{2}, N \mid (a + b), \det(f) = -D_R\}.$$

2. El conjunt  $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m))$  de formes quadràtiques associades i primitives és

$$\left\{ (a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, R) \mid \gcd\left(\frac{c+b}{2}, \frac{a+b}{2N}, b\right) = 1 \right\}.$$

Les proves dels teoremes 4.1.3 i 4.1.4 es troben a [AB04].

Considerarem ara l'acció dels grups quaterniònics sobre els conjunts anteriors de formes i els corresponents conjunts de classes.

Si  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D, N)$ ,  $\Gamma = \Gamma(D, N)$  i  $R = R(d, m)$ , escriurem

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D, N, d, m) &:= \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m)), \\ \mathbb{H}(D, N, d, m) &:= \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m))/\Gamma(D, N), \\ h(D, N, d, m) &:= \#\mathbb{H}(D, N, d, m). \end{aligned}$$

**4.1.5 Definició.** Per a uns  $D, N, d, m$  i  $\mathcal{F}$  fixats, direm que una forma del conjunt  $\mathcal{H}^*(D, N, d, m)$  és reduïda si un dels seus zeros cau en el domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma(D, N))$ .

Anomenem  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$  el conjunt de zeros en  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  de les formes quadràtiques del conjunt  $\mathcal{H}^*(D, N, d, m)$ . Aquest conjunt és invariant pel fet de multiplicar una forma del conjunt  $\mathcal{H}^*(D, N, d, m)$  per una constant no nul·la. Ens interessem ara pel càlcul dels punts de  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$ . Notem que

$$h(D, N, d, m) := \#\mathcal{P}(D, N, d, m).$$

En els casos que estem tractant, el nombre de classes de formes reduïdes del conjunt  $\mathcal{H}^*(D, N, d, m)$  és finit. Per tal de donar una condició d'aturada de l'algoritme de reducció de formes, hem de saber quants elements té aquest conjunt. Segons el teorema 4.66 de [AB04] i resultats d'Eichler, aquest nombre de classes és donat per

$$h(D, N, d, m) = h(d, m) \prod_{p|DN} h_p(D, N, d, m),$$

on  $h_p$  s'anomena el nombre de classes locals i  $h(d, m)$  denota el nombre de classes de formes de l'ordre quadràtic. Necessitarem una funció multiplicativa,  $\psi_p$ , definida com segueix:

$$\psi_p(x) = \begin{cases} p^k \left(1 + \frac{1}{p}\right) & x = p^k \\ 1 & p \nmid x. \end{cases}$$

Aleshores, el nombre de classes locals,  $h_p(D, N, d, m)$ , per als primers  $p|DN$ , és donat per

1. Si  $p|D$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m) = 1 - \left(\frac{D_F}{p}\right)$ .
2. Si  $p||N$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m)$  és igual a  $1 + \left(\frac{D_F}{p}\right)$  si  $m$  no és divisible per  $p$ , igual a 2 en cas contrari.
3. Suposem que  $N = p^r u_1$ , amb  $p \nmid u_1$ ,  $r \geq 2$ . Posem  $m = p^k u_2$  amb  $p \nmid u_2$ .
  - a) Si  $r \geq 2k+2$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m)$  és igual a  $2\psi_p(m)$  si  $\left(\frac{D_F}{p}\right) = 1$ , i igual a 0 en cas contrari.
  - b) Si  $r = 2k+1$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m)$  és igual a  $2\psi_p(m)$  si  $\left(\frac{D_F}{p}\right) = 1$ , igual a  $p^k$  si  $\left(\frac{D_F}{p}\right) = 0$ , i igual a 0 si  $\left(\frac{D_F}{p}\right) = -1$ .
  - c) Si  $r = 2k$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m) = p^{k-1} \left(p + 1 + \left(\frac{D_F}{p}\right)\right)$ .
  - d) Si  $r \leq 2k - 1$ , aleshores  $h_p(D, N, d, m)$  és igual a  $p^{k/2} + p^{k/2-1}$  si  $k$  és parell, i igual a  $2p^{k-1/2}$  si  $k$  és senar.

## 4.2 Algoritmes de reducció de formes

En aquesta secció descrivim un algoritme que calcula els zeros de les formes reduïdes del conjunt  $\mathcal{H}(D, N, d, m)$ . En el pitjor dels casos, tots els punts podrien estar repetits en les vores del domini fonamental, però, en qualsevol cas, el nombre de passos de l'algoritme és finit i, per tant, queda justificat que l'algoritme finalitza.

La funció que genera la taula de l'algoritme 6 és la que empra més temps ja ha de comprovar que se satisfan les condicions dels teoremes 4.1.3, 4.1.4 i 4.2.1. Una vegada calculats el primer grup d'elles, n'obtenim els zeros i els reduïm. Un cop que aquests es troben dins del domini fonamental, n'hi ha d'haver, com a molt,  $h(D, N, d, m)$ , sempre que només comptem un cop els punts equivalents de les vores. Si tenim punts a les vores hem de veure si les seves classes es repeteixen i quantes vegades ho fan.

Una vegada tenim els zeros repetits controlats, podem recuperar les formes reduïdes, refent el polinomi de grau a partir dels seus zeros i racionalitzant-lo després. Per a obtenir la forma de la manera descrita en els teoremes 4.1.4, 4.2.1, cal multiplicar la forma per una constant, que no és difícil de calcular.

**Data:**  $(D, N, d, m)$

**Result:** zeros reduïts

$t = \text{GeneraTaula}((a, b, c))$  satisfent les condicions de 4.1.4 o bé 4.2.1;

**for** per als elements de  $t$  **do**

$z_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$
aplicar reducció a $z_0$ ;
reescriure la forma;

**end**

trobar punts a la vora;

**Algorithm 6:** Algoritme de reducció de formes

### 4.2.1 El cas $D = 6$

En aquesta secció farem un exemple concret. En aquest cas considerem les immersions optimals de l'ordre quadràtic  $R(-10, 5)$  en l'ordre  $\Gamma(6, 1)$  i les formes primitives associades. La fórmula del nombre de classes ens diu que

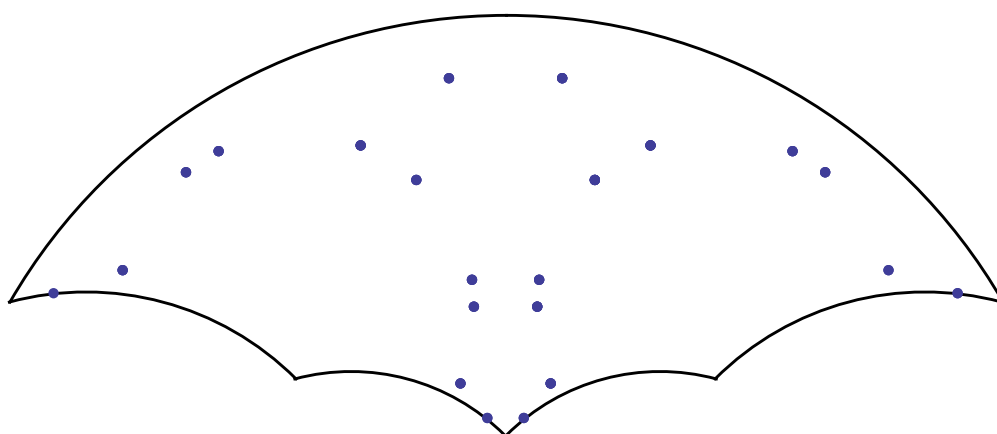
$$h(6, 1, -10, 5) = 20.$$

L'algoritme anterior ens dona 22 formes reduïdes. Estem en un dels casos en què tenim punts a les vores del domini, tal i com veiem en la figura 4.1. Per a veure-ho, però, hem de fer una comprovació punt a punt quan aquests pertanyen als cercles d'isometria que conformen les vores. En aquest cas comprovarem que hi ha quatre punts que estan a les vores.

Les formes de la taula 4.1, multiplicades per constants convenients, proporcionen les formes reduïdes del teorema 4.1.4. L'algoritme de la secció anterior ens mostra la forma que tenim llevat d'una constant  $k\sqrt{3}$  amb  $k \in \mathbb{Q}$ . Per exemple, en el cas de la primera forma de la taula, haurem de multiplicar per  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . La forma primitiva equivalent a la primera seria  $(32 + 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 32 - 2\sqrt{3})$ .

Els 20 punts donats per la fórmula del nombre de classes estan dibuixats en la figura 4.1. Els dos punts extra són els de la vora; a la taula els hi corresponen els nombres 9 i 10. El punt número 9 és equivalent al punt  $-0.789037 + 0.514492i$ , correspon a la forma  $(-3 + 29\sqrt{3}, 84, 3 + 29\sqrt{3})$ , que és equivalent a la donada. El punt número 10 és equivalent al punt  $0.789037 + 0.514492i$ , correspon a la forma  $(3 - 29\sqrt{3}, 84, -3 - 29\sqrt{3})$ , que és equivalent a la donada.

$n$	zero	forma reduïda
1	$-0.0976791 + 0.891684i$	$(-3 + 16\sqrt{3}, 6, 3 + 16\sqrt{3})$
2	$-0.253915 + 0.77264i$	$(-6 + 17\sqrt{3}, 18, 6 + 17\sqrt{3})$
3	$-0.501268 + 0.762654i$	$(-3 + 19\sqrt{3}, 36, 3 + 19\sqrt{3})$
4	$-0.0589287 + 0.537943i$	$(-18 + 19\sqrt{3}, 6, 18 + 19\sqrt{3})$
5	$-0.557902 + 0.727561i$	$(-3 + 20\sqrt{3}, 42, 3 + 20\sqrt{3})$
6	$-0.0539171 + 0.492193i$	$(-21 + 20\sqrt{3}, 6, 21 + 20\sqrt{3})$
7	$-0.669354 + 0.555485i$	$(-6 + 25\sqrt{3}, 66, 6 + 25\sqrt{3})$
8	$-0.0786357 + 0.358921i$	$(-33 + 25\sqrt{3}, 12, 33 + 25\sqrt{3})$
9	$-0.0325276 + 0.296935i$	$(-42 + 29\sqrt{3}, 6, 42 + 29\sqrt{3})$
10	$0.0325276 + 0.296935i$	$(42 - 29\sqrt{3}, 6, -42 - 29\sqrt{3})$
11	$0.0786357 + 0.358921i$	$(33 - 25\sqrt{3}, 12, -33 - 25\sqrt{3})$
12	$0.669354 + 0.555485i$	$(6 - 25\sqrt{3}, 66, -6 - 25\sqrt{3})$
13	$0.0539171 + 0.492193i$	$(21 - 20\sqrt{3}, 6, -21 - 20\sqrt{3})$
14	$0.557902 + 0.727561i$	$(3 - 20\sqrt{3}, 42, -3 - 20\sqrt{3})$
15	$0.0589287 + 0.537943i$	$(18 - 19\sqrt{3}, 6, -18 - 19\sqrt{3})$
16	$0.501268 + 0.762654i$	$(3 - 19\sqrt{3}, 36, -3 - 19\sqrt{3})$
17	$-0.156068 + 0.712348i$	$(-9 + 17\sqrt{3}, 12, 9 + 17\sqrt{3})$
18	$0.156068 + 0.712348i$	$(9 - 17\sqrt{3}, 12, -9 - 17\sqrt{3})$
19	$0.0976791 + 0.891684i$	$(3 - 16\sqrt{3}, 6, -3 - 16\sqrt{3})$
20	$0.253915 + 0.77264i$	$(6 - 17\sqrt{3}, 18, -6 - 17\sqrt{3})$

Taula 4.1: Formes reduïdes del conjunt  $H^*(6, 1, -10, 5)$ Figura 4.1: El conjunt de punts  $\mathcal{P}(6, 1, -10, 5)$

### 4.2.2 Els casos $D = 10$ , $D = 15$

En aquests apartats considerem la reducció de formes quadràtiques binàries associades a àlgebres de quaternions de discriminant  $D = 10$  i  $D = 15$ . Començarem per enunciar els teoremes que proporcionen els conjunts de formes associades.

**4.2.1 Teorema.** *Siguin  $H = (p, q)_{\mathbb{Q}}$  una àlgebra de quaternions amb  $p$  primer i  $q \equiv 1 \pmod{4}$  primer,  $\mathcal{O}(D, N)$  un ordre d'Eichler de nivell  $N$  i  $R = R(d, m)$  un ordre d'un cos quadràtic imaginari.*

1. *El conjunt  $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m))$  de formes quadràtiques associades és*

$$\{f = (q(a + b\sqrt{p}), 2c\sqrt{p}, -a + b\sqrt{p}) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, \\ 2N \mid (c - b), \det(f) = -D_R\}.$$

2. *El conjunt  $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), R(d, m))$  de formes quadràtiques primitives associades és*

$$\left\{ (q(a + b\sqrt{p}), 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, R) \mid \gcd\left(a, b, \frac{c - b}{2N}\right) = 1 \right\}.$$

La prova del teorema 4.2.1 es troba a [AB04].

Recordem que l'àlgebra que correspon a  $D = 10$  és  $(2, 5)_{\mathbb{Q}}$ . Per a aquesta àlgebra hem triat l'ordre  $R(-10, 3)$ . La fórmula del nombre de classes ens diu que

$$h(10, 1, -10, 3) = 8.$$

Les formes reduïdes del conjunt  $\mathcal{H}^*$  estan recollides en la taula 4.2. En la figura 4.2 es poden veure els seus zeros

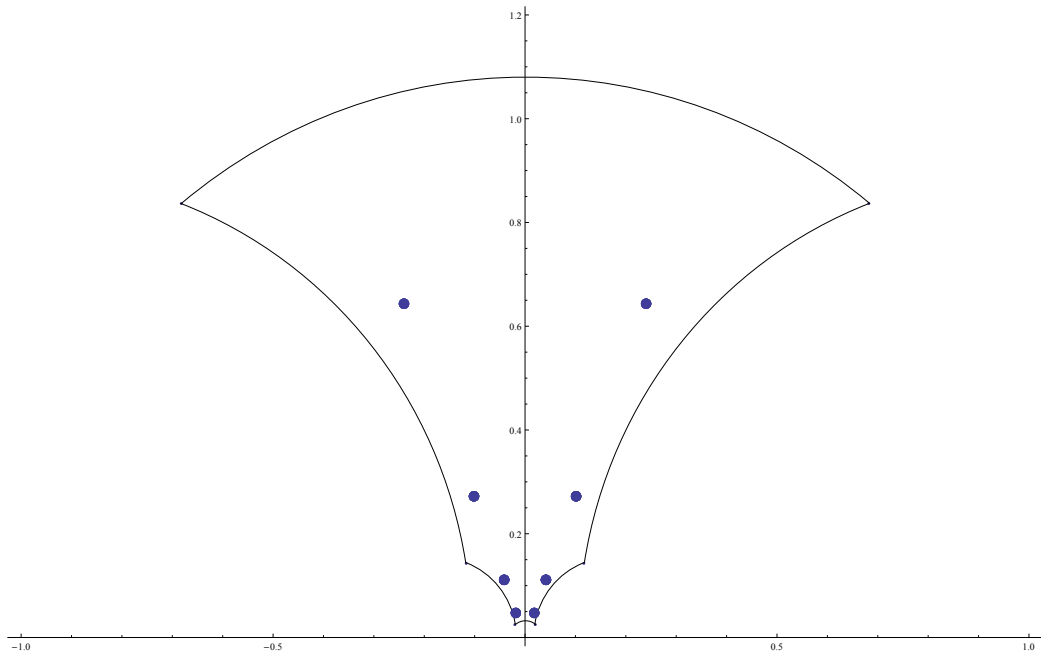
Recordem que l'àlgebra que correspon a  $D = 15$  és  $(3, 5)_{\mathbb{Q}}$ . Per a aquesta àlgebra hem triat l'ordre  $R(-10, 4)$ . La fórmula del nombre de classes ens diu que

$$h(15, 1, -10, 4) = 16.$$

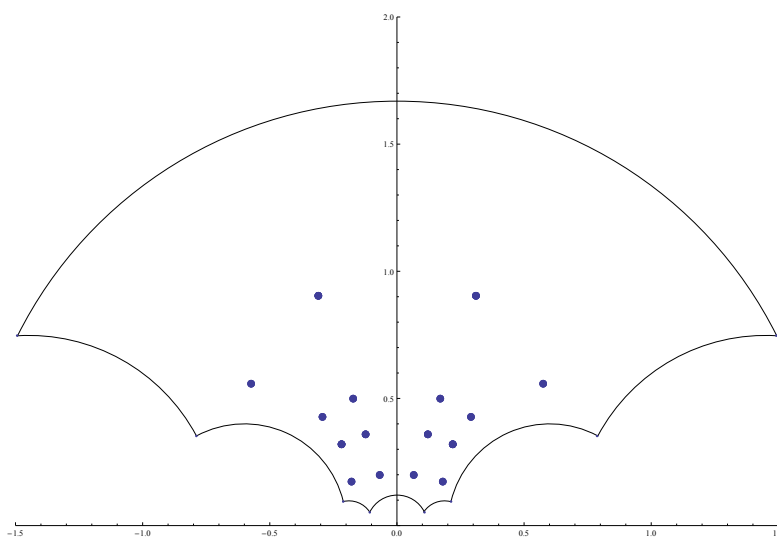
Les formes reduïdes del conjunt  $\mathcal{H}^*$  estan recollides en la taula 4.3. En la figura 4.3 es poden veure els seus zeros.



$n$	zero	forma reduïda
1	$0.101746 + 0.273012i$	$(-7 + 2\sqrt{2}, 10, -5(7 + 2\sqrt{2}))$
2	$-0.101746 + 0.273012i$	$(7 - 2\sqrt{2}, 10, 5(7 + 2\sqrt{2}))$
3	$0.0411291 + 0.110361i$	$(-13 + 8\sqrt{2}, 10, -5(13 + 8\sqrt{2}))$
4	$-0.0411291 + 0.110361i$	$(13 - 8\sqrt{2}, 10, 65 + 40\sqrt{2})$
5	$0.0174568 + 0.0468415i$	$(-29 + 20\sqrt{2}, 10, -5(29 + 20\sqrt{2}))$
6	$-0.0174568 + 0.0468415i$	$(29 - 20\sqrt{2}, 10, 5(29 + 20\sqrt{2}))$
7	$0.239718 + 0.64323i$	$(-7 - 2\sqrt{2}, 10, 5(-7 + 2\sqrt{2}))$
8	$-0.239718 + 0.64323i$	$(7 + 2\sqrt{2}, 10, 35 - 10\sqrt{2})$

Taula 4.2: Formes reduïdes del conjunt  $H^*(10, 1, -10, 3)$ Figura 4.2: El conjunt de punts  $\mathcal{P}(10, 1, -10, 3)$

$n$	zero	forma reduïda
1	$0.122629 + 0.358221i$	$(-21 + 2\sqrt{3}, 30, -5(21 + 2\sqrt{3}))$
2	$-0.122629 + 0.358221i$	$(21 - 2\sqrt{3}, 30, 5(21 + 2\sqrt{3}))$
3	$0.218467 + 0.319091i$	$(-12 + \sqrt{3}, 30, -5(12 + \sqrt{3}))$
4	$-0.218467 + 0.319091i$	$(12 - \sqrt{3}, 30, 5(12 + \sqrt{3}))$
5	$0.0676888 + 0.197732i$	$(-27 + 10\sqrt{3}, 30, -5(27 + 10\sqrt{3}))$
6	$-0.0676888 + 0.197732i$	$(27 - 10\sqrt{3}, 30, 135 + 50\sqrt{3})$
7	$0.178854 + 0.174155i$	$(-33 + 10\sqrt{3}, 90, -5(33 + 10\sqrt{3}))$
8	$-0.178854 + 0.174155i$	$(33 - 10\sqrt{3}, 90, 165 + 50\sqrt{3})$
9	$0.309934 + 0.905374i$	$(-27 - 10\sqrt{3}, 30, -135 + 50\sqrt{3})$
10	$-0.309934 + 0.905374i$	$(27 + 10\sqrt{3}, 30, 135 - 50\sqrt{3})$
11	$0.573998 + 0.558919i$	$(-33 - 10\sqrt{3}, 90, -165 + 50\sqrt{3})$
12	$-0.573998 + 0.558919i$	$(33 + 10\sqrt{3}, 90, 165 - 50\sqrt{3})$
13	$0.171078 + 0.49975i$	$(-21 - 2\sqrt{3}, 30, 5(-21 + 2\sqrt{3}))$
14	$-0.171078 + 0.49975i$	$(21 + 2\sqrt{3}, 30, 105 - 10\sqrt{3})$
15	$0.292171 + 0.426743i$	$(-12 - \sqrt{3}, 30, 5(-12 + \sqrt{3}))$
16	$-0.292171 + 0.426743i$	$(12 + \sqrt{3}, 30, 60 - 5\sqrt{3})$

Taula 4.3: Formes reduïdes del conjunt  $H^*(15, 1, -10, 4)$ Figura 4.3: El conjunt de punts  $\mathcal{P}(15, 1, -10, 4)$



## Part II

# Formes d'ona de Maass



# Capítol 5

## L'operador de Laplace-Beltrami

En aquest capítol presentem les funcions d'ona de Maass, que anomenem, simplement, formes de Maass, i que són l'objecte principal d'estudi de la tesi. Per a definir-les, necessitarem revisar alguns conceptes previs, com ara el de l'operador de Laplace-Beltrami en els espais hiperbòlics, i els de les seves funcions pròpies.

### 5.1 Conceptes preliminars

Comencem recordant la definició més coneguda de l'operador de Laplace.

**5.1.1 Definició.** En l'espai euclidià de dimensió  $n$ , l'operador de Laplace és un operador diferencial de segon ordre definit com la divergència del gradient.

D'aquesta manera, si  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ , aleshores el laplacià de  $f$  és donat per

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f,$$

on  $\nabla$  denota el gradient d'una funció; és a dir,

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Aquest operador pot ser definit en qualsevol varietat riemanniana o pseudo-riemanniana. En aquests casos, rep el nom d'operador de Laplace-Beltrami i té la forma següent:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right), \quad (5.1)$$

on  $g^{ij}$  denoten les entrades de la matriu  $g = (g^{ij})$  que defineix la mètrica. En aquest cas també se satisfà que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

En coordenades locals, l'operador de Laplace-Beltrami s'expressa en termes del tensor  $g$  i dels símbols de Christoffel  $\{\Gamma_{ij}^k\}$ :

$$\Delta f = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right).$$

Nosaltres l'emprarem en el pla hiperbòlic; és a dir, en el semiplà superior  $\mathcal{H}$  dotat de la mètrica hiperbòlica. En aquesta situació, l'operador de Laplace-Beltrami és donat per

$$\Delta f = -y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

## 5.2 Funcions de Bessel

Les anomenades funcions de Bessel foren considerades per primera vegada per Daniel Bernoulli, l'any 1738, però el seu estudi sistemàtic va ser iniciat per Bessel, l'any 1824, en el treball *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht* (Investigació de les pertorbacions planetàries degudes en part al moviment del sol) (*Berliner Abh.*, 1824).

### 5.2.1 Funcions de Bessel de primera espècie

**5.2.1 Definició.** L'equació diferencial de Bessel de primera espècie és l'equació diferencial ordinària de segon ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (5.2)$$

on  $n \in \mathbb{C}$  és fixat. Equivalentment,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0. \quad (5.3)$$

Les solucions d'aquesta equació diferencial (5.2) s'anomenen *funcions de Bessel de primera espècie*, de les quals ens interessarà disposar de representacions funcionals explícites.

**5.2.2 Teorema.** Donat  $n \in \mathbb{C}$ , la funció

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}x\right)^n \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt, \quad (5.4)$$

amb  $x \in \mathbb{R}$ , és una solució de l'equació diferencial (5.2).

El contorn de la integral descriu el camí que parteix de  $-\infty$  recorre la circumferència unitat en el sentit invers a les busques del rellotge i retorna a  $-\infty$ .

DEMOSTRACIÓ. La prova d'aquest resultat es pot trobar en [WW96] i, també, reproduïda en [Rem09].  $\square$

Podem estendre  $J_n$  a una funció de variable complexa. Per a  $z \in \mathbb{C}$ , definim  $J_n(z)$  per la igualtat

$$J_n(z) := \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} e^{t-\frac{z^2}{4t}} dt,$$

on  $\arg z$  pren el valor principal i  $|\arg t| \leq \pi$  en el contorn.

Si  $n$  és un enter es té la representació integral

$$J_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(u-u^{-1})} u^{-n-1} dt,$$

que s'assoleix fent el canvi  $u = 2t/z$ , i on el contorn de la integral encercla l'origen i el recorregut és en sentit horari a les busques del rellotge. Si, a més, l'enter  $n$  és positiu podem escriure la funció com

$$J_n(z) := \frac{1}{\pi i} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta.$$

Tot hi això, en el nostre treball ens interessarà treballar també amb funcions de Bessel amb  $n$  no necessàriament enter.

Per a expressar aquesta integral com una sèrie de potències, observem que és una funció analítica en  $z$  i que podem obtenir els coeficients de la seva sèrie de Taylor en potències de  $z$  per diferenciació sota el signe d'integral. Tenint en compte que  $t^{-n-1} e^{t-\frac{z^2}{4t}}$  assoleix el seu valor inicial després de descriure el camí que va de menys infinit descriu un cercle en sentit contrari a les busques del rellotge entorn del zero i torna a l'infinit, resulta que les derivades sota el signe d'integral tenen sentit. Per tant es pot derivar en un entorn del zero i desenvolupar la sèrie de Taylor. Després d'això, s'obté el desenvolupament següent:

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)},$$

on  $\Gamma$  denota la funció gamma d'Euler.



### 5.2.2 Funcions de Bessel de segona espècie

Ja que estem tractant amb una equació diferencial de segon ordre, podem disposar d'un parell de solucions linealment independents. Si considerem la funció  $J_n(z)$  com un element de la base ens agradaria conèixer un altre solució de l'equació diferencial, independent de l'anterior.

**5.2.3 Definició.** La funció de Bessel de segona espècie (dita, també, funció de Weber) es defineix segons la fórmula

$$Y_s(z) := \frac{J_s(z) \cos(s\pi) - J_{-s}(z)}{\sin(s\pi)}.$$

**5.2.4 Proposició.** Per a  $n$  no enter, el parell  $\{J_n(z), J_{-n}(z)\}$  és un sistema fonamental de solucions de (5.2). Per a  $n$  enter, ho és el parell  $\{J_n(z), Y_n(z)\}$ .

### 5.2.3 Funcions de Bessel modificades

Les funcions de Bessel definides en les seccions anteriors no són suficients per a desenvolupar les formes d'ona de Maass. Ens caldrà considerar les funcions de Bessel modificada.

**5.2.5 Definició.** Anomenem funcions de Bessel modificades les funcions que sorgeixen com a solució de l'equació diferencial ordinària de segon ordre

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0, \quad (5.5)$$

anomenada equació diferencial de Bessel modificada.

Anàlogament al cas anterior, en el teorema següent determinem solucions d'aquesta equació.

**5.2.6 Teorema.** Sigui  $s \in \mathbb{C}$ . Aleshores la funció

$$I_s(x) := J_s(ix), \quad (5.6)$$

amb  $x \in \mathbb{R}$ , és una solució de l'equació diferencial (5.5),

**DEMOSTRACIÓ.** Per a provar aquesta afirmació procedim de la forma següent. Considerem l'equació de Bessel modificada (5.5) i substituïm la variable  $y$  per

la funció  $I_s(z)$ .

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 I_s(x)}{dx^2} + x \frac{dI_s(x)}{dx} - (x^2 + s^2)I_s(x) &= \\ = x^2 \frac{d^2 J_s(ix)}{dx^2} + x \frac{dJ_s(ix)}{dx} - (x^2 + s^2)J_s(ix) &= \\ = i^2 x^2 \frac{d^2 J_s(ix)}{d^2(ix)} + ix \frac{dJ_s(ix)}{dix} + ((ix)^2 - s^2)J_s(ix). \end{aligned}$$

Ara, fent el canvi  $y = ix$  obtenim que  $J_s(ix)$  és solució de (5.5).  $\square$

En aquest cas, l'equació diferencial de segon ordre també té dues solucions independents. Com a primera solució podem prendre la funció  $I_s(x)$  descrita en el teorema anterior. Per a obtenir una segona solució de l'equació de Bessel modificada (5.5), definim la funció  $K_s(x)$ , per a tots els valors de  $s$  no enters, segons la igualtat

$$K_s(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{\{I_{-s}(x) - I_s(x)\}}{\sin(s\pi)}.$$

De moment, aquestes funcions només estan definides sobre l'eix real. Per tal de definir-les en el pla complex, es considera la variable com a variable complexa. Les funcions que així s'obtenen també són solució de l'equació diferencial modificada (5.5).

La funció  $K_s(z)$ , quan  $|\arg z| > \frac{3}{2}\pi$ , posseeix una expansió asimptòtica

$$K_s(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(4s^2 - 1^2)(4s^2 - 3^2) \cdots (4s^2 - (2r - 1)^2)}{r! 2^{3r} z^r} \right],$$

vàlida quan  $|z| \rightarrow \infty$ .

## 5.3 L'espectre de l'operador $\Delta$

D'ara endavant entendrem com a laplaciana hiperbòlica l'operador de Laplace-Beltrami definit en el pla hiperbòlic i considerem funcions pròpies d'aquest operador.

**5.3.1 Exemple.** Els primer exemples de funcions pròpies pel laplaciana hiperbòlica són donats per les funcions  $y^s$  i  $xy^{-s}$ , on  $s \in \mathbb{C}$ . Fàcilment es comprova que ambdues funcions són funcions pròpies de valor propi  $s(1-s)$ .

Les funcions anteriors no són suficients a l'hora de desenvolupar les formes d'ona de Maass, perquè, entre altres coses, no podem construir amb elles funcions que ens proporcionin bones condicions de periodicitat. Per tant, el que farem a continuació serà donar altres funcions “no trivials” que també siguin vectors propis de l'operador de Laplace hiperbòlic.

**5.3.2 Teorema.** *Considerem la funció de variable complexa*

$$f(z) := y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix},$$

on  $z = x + iy$ . Aleshores, la funció  $f$  és una funció pròpia de l'operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right),$$

de valor propi  $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ .

DEMOSTRACIÓ. És trivial comprovar que en derivar respecte de  $x$  obtenim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix},$$

i en derivar respecte de  $y$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -\frac{1}{4} y^{-3/2} K_{iR}(y) e^x + y^{-1/2} K'_{iR}(y) e^x + y^{1/2} K''_{iR}(y) e^{ix}.$$

Si ara substituïm, tenim que

$$\begin{aligned}
\Delta f(z) &= -y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right) \\
&= y^{5/2} K_{iR}(y) e^{ix} + \frac{1}{4} y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix} - y^{3/2} K'_{iR}(y) e^{ix} - \\
&\quad - y^{5/2} K''_{iR}(y) e^{ix} \\
&= \{ -y^2 K''_{iR}(y) - y K'_{iR}(y) - y^2 K_{iR}(y) - R^2 K_{iR}(y) + \\
&\quad + R^2 K_{iR}(y) + \frac{1}{4} K_{iR}(y) \} \cdot e^{ix} y^{1/2} \\
&= \{ -y^2 K''_{iR}(y) - y K'_{iR}(y) - (y^2 + R^2) K_{iR}(y) + \\
&\quad - R^2 K_{iR}(y) + \frac{1}{4} K_{iR}(y) \} \cdot e^{ix} y^{1/2} \\
&= \left( \frac{1}{4} - (iR)^2 \right) y^{1/2} \cdot K_{iR}(y) \cdot e^{ix}
\end{aligned}$$

tal i com volíem provar.  $\square$

Observem que els valors propis d'aquestes funcions són de la forma

$$\lambda = \frac{1}{4} + R^2.$$

Combinacions d'aquestes funcions són les que més endavant ens proporcionaran les funcions d'ona de Maass.

Hem escrit els valors propis d'aquesta forma tan particular atès que, tal com veurem més endavant i segons una conjectura de Selberg, el valor de  $R$  haurà de pertànyer a l'interval  $[0, \infty)$ .

## 5.4 Equació de Schrödinger estacionària

Les formes d'ona de Maass són funcions estretament lligades a l'operador de Laplace hiperbòlic. En aquesta secció definirem el concepte de forma Maass; es tracta de funcions pròpies del laplaciana que són, a més, funcions invariants respecte d'un grup fuchsiana. Els exemples principals són donats per les formes de Maass que són invariants o bé per subgrups de congruència modulars o

bé per grups quaterniònics. El nom de forma d'ona és degut a que aquestes funcions són solució de l'equació en derivades parcials

$$\Delta f = \lambda f,$$

coneguda (especialment en àmbits de la física) com a equació de Schrödinger estacionària o independent del temps (veure [HS01] i [Rem07]).

**5.4.1 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian. Donada una funció  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , considerem l'operador

$$f_{|[k,\gamma]}(z) := \left( \frac{cz + d}{|cz + d|} \right)^{-k} f(\gamma z), \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma, z \in \mathcal{H}.$$

En aquest treball només emprarem el valor  $k = 0$ . Per tal de abreviar, escriurem  $f_{|\gamma} = f_{|[0,\gamma]} = f(\gamma z)$ . Per tant, les formes que considerarem seran, de fet, funcions, o formes de pes zero; però en el cas de Maass no se sol parlar de funcions de Maass, sinó que s'ha preservat el nom de forma (per forma de pes zero).

**5.4.2 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian de primera espècie. Una aplicació

$$f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C},$$

infinítament diferenciable es diu que és una *funció d'ona de Maass* (o una *forma de Maass* de pes  $k = 0$ ), respecte del grup  $\Gamma$  si satisfà les tres condicions següents:

1. La funció  $f$  és una funció pròpia de l'operador de Laplace-Beltrami; és a dir, existeix una constant  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , tal que

$$\Delta f = \lambda f.$$

2. La funció  $f$  és invariant per l'acció de  $\Gamma$ , és a dir, se satisfà que

$$f(\gamma z) = f(z), \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma.$$

3. La funció  $f$  és de quadrat integrable; és a dir,

$$\int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty,$$

on la integral s'estén sobre un domini fonamental  $\mathcal{F}(\Gamma)$ .

En el cas en què vulguem considerar formes amb caràcter, haurem de canviar la condició 2 de la definició per la condició següent, on  $\chi$  denota un homomorfisme de  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}^*$ .

$$2'. f(\gamma z) = \chi(\gamma)f(z), \text{ per a tot } \gamma \in \Gamma.$$

**5.4.3 Definició.** Quan  $\Gamma$  sigui un grup de congruència modular  $\Gamma(1, N) = \Gamma_0(N)$ , parlarem de *formes de Maass modulars*; quan  $\Gamma = \Gamma(D, N)$  sigui un grup d'unitats quaterniòniques, amb  $D > 1$ , parlarem de *formes de Maass quaterniòniques*.



# Capítol 6

## Formes de Maass-Hecke

En aquest capítol ens proposem explicar les formes d'ona modulars. En especial, tractarem les construïdes en l'article original de Maass [Maa49] i dissenyarem i implementarem un algorisme per al càlcul dels seus coeficients de Bessel-Fourier; es tracta de formes d'ona invariants per subgrups de congruència  $\Gamma_0(D)$ , que es construeixen a partir de caràcters de Hecke de cossos quadràtics reals  $F$  de discriminant igual a  $D$ , i de nombre estricte de classes  $h_F^+ = 1$ . Tot i que es tracta de funcions infinitament diferenciables, els seus coeficients de Bessel-Fourier s'obtenen per mitjans algebraics, la qual cosa les diferencia considerablement de les formes de Maass generals. Designarem aquests formes amb el nom de Maass-Hecke.

### 6.1 Formes de Maass modulars

Les formes de Maass respecte del grup de congruència  $\Gamma_0(q)$ , de nivell  $q$ , i de valor propi  $\lambda$  constitueixen un espai vectorial complex, que denotem per  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)$ , si les formes satisfan la condició 2, o bé per  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , si satisfan la condició 2'. Cada forma de Maass  $f$  de  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , amb  $\lambda > 0$ , és una forma cuspidal; és a dir, tendeix a zero ràpidament en cada punta.

Aquests fets i els següents estan provats en [Hej83].

**6.1.1 Teorema.** *Els espais  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)$ ,  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , són de dimensió finita.*

A més, s'ha formulat la conjectura següent (vegi's [Str05]).

**6.1.2 Conjectura.** *L'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)^{new}$ , generat per les formes noves sense caràcter, és de dimensió 1.*



Aquest fet afavoreix, en principi, el càlcul d'aquestes formes, que tractarem en el capítol 7. En cas contrari, els algorismes que veurem més endavant, conduirien en cada cas a una combinació lineal de formes noves; en alguns casos, s'ha comprovat que això no ocorre.

**6.1.3 Teorema.** *Les formes de Maass generen la part discreta de l'espectre de l'operador  $\Delta$ . La part continua de l'espectre està generada per les sèries d'Eisenstein.*

DEMOSTRACIÓ. Una demostració del teorema es troba en el capítol 4 de [Iwa02].  $\square$

**6.1.4 Corol·lari.** *Els espais  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  es poden dotar d'un producte escalar de Petersson,*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{F}_q} f \bar{g} d\mu,$$

on la integral pot ser presa sobre qualsevol domini fonamental  $\mathcal{F}_q = \mathcal{F}(\Gamma_0(q))$ . Amb aquest producte escalar, l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  esdevé un espai de Hilbert, de dimensió finita.  $\square$

Si  $\Gamma$  és un grup de congruència i el caràcter és trivial, el valors propis

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$

comptats amb multiplicitats, formen una successió discreta. Per a aquests valors propis es coneix una llei de Weyl general. En particular, per als subgrups  $\Gamma_0(q)$  i el caràcter trivial, és donada per la relació asimptòtica

$$N_{\Gamma_0(q)}(t) = \frac{\mu(\mathcal{F}_q)}{4\pi} t - \frac{2\kappa}{\pi} \sqrt{t} \ln \sqrt{t} + a\sqrt{t} + O\left(\frac{\sqrt{t}}{\ln \sqrt{t}}\right), \quad (6.1)$$

on  $N_{\Gamma_0(q)}(t)$  denota el nombre de valors propis per sota de la cota  $t$ ,  $a$  és una certa constant que depèn del nivell  $q$  i  $\kappa$  és el nombre de puntes de  $\Gamma_0(q)$ .

## 6.2 Desenvolupaments de Bessel-Fourier

En aquesta secció emprarem les funcions de Bessel de segona espècie modificades per tal de considerar desenvolupaments de formes de Maass al voltant de la punta de l'infinit.

Tal com hem vist en el teorema 5.3.2, la funció

$$f(x + iy) := y^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}$$

satisfà les condicions 1 i 3 de la definició 5.4.2. Així i tot, aquest tipus de funcions, individualment, no són formes de Maass. Ara bé, si considerem desenvolupament en sèries en termes d'aquestes funcions, podem imposar que se satisfaci la condició 2 (o la condició 2') en escollir els coeficients adequadament. És a dir, donades les funcions

$$\kappa_n(y) := y^{1/2} K_{iR}(2\pi|n|y),$$

aleshores es poden cercar sèries de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\kappa_n(y)e^{2\pi inx} \quad (6.2)$$

amb  $z = x + iy$ , que satisfacin la propietat de ser invariants per subgrups de congruència fuchsians.

**6.2.1 Definició.** Anomenem *desenvolupament de Bessel-Fourier*, a l'entorn de la punta de l'infinit, els desenvolupaments de la forma (6.2).

Observem que el valor  $a_0$  és el valor de la funció en la punta de l'infinit. Si  $a_0 = 0$  la forma pren el valor zero en l'infinit; s'anomena aleshores *forma de Maass cuspidal*. Una altra consideració que hem de tenir present és que si  $f(-\bar{z}) = \varepsilon f$ , amb  $\varepsilon = \pm 1$ , aleshores és  $c(-n) = \varepsilon c(n)$ ; per tant,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \neq 0} c(n)\kappa_n(y)e^{2\pi inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n(y)(c(n)e^{2\pi inx} + c(-n)e^{-2\pi inx}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\kappa_n(y)(e^{2\pi inx} + \varepsilon e^{-2\pi inx}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\kappa_n(y) \begin{cases} 2 \cos(2\pi nx), & \text{si } \varepsilon = 1, \\ 2i \sin(2\pi nx), & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

## 6.3 Mètodes algebraics

En aquesta secció revisarem les propietats dels cossos quadràtics reals i dels seus caràcters de Hecke que necessitarem per al càlcul de les formes de Maass-Hecke.

Donat un cos quadràtic real,  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , on  $d > 0$  és un enter lliure de quadrats, representarem per  $\mathcal{O}_F$  el seu anell d'enters i per  $D = D_F$  el seu

discriminant. D'acord amb el teorema de les unitats de Dirichlet, l'estructura del grup  $\mathcal{O}_F^*$  de les unitats de  $F$  és donada per

$$\mathcal{O}_F^* \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}.$$

Sigui  $\eta = x + y\sqrt{d}$  una unitat de  $F$ , diferent de  $\pm 1$ . Aleshores els elements del conjunt

$$\{\eta, \eta^{-1}, -\eta, -\eta^{-1}\}$$

són tots diferents. Coincideixen, en algun ordre, amb els de

$$\{\eta, \eta^\tau, -\eta^\tau, -\eta\},$$

on  $\tau$  és el generador del grup de Galois  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ . Per tant, coincideixen, amb els elements del conjunt  $\{\pm x \pm y\sqrt{d}\}$ . Donat un element  $\alpha \in F$ , escriurem  $N(\alpha) = \alpha\alpha^\tau = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$  per denotar la seva norma i escrita en termes de les dues immersions galoisianes de  $F$  en  $\mathbb{R}$ . Representarem per  $\chi_D$  el caràcter de Kronecker del cos quadràtic  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ .

**6.3.1 Definició.** Una *unitat fonamental* de  $F$  és un element  $\eta \in F^*$  tal que

$$\mathcal{O}_F^* = \{\pm 1\} \times \eta^{\mathbb{Z}}.$$

Si  $\eta > 1$ , es diu que  $\eta$  és una *unitat fonamental normalitzada*.

Denotem per  $I_F$  el grup dels  $\mathcal{O}_F$ -ideals fraccionaris i per  $P_F$  el subgrup de  $I_F$  format pels ideals fraccionaris que són principals. El grup de classes d'ideals de  $F$  és donat pel grup quocient  $C_F = I_F/P_F$ . El cardinal  $h_F$  de  $C_F$  és el nombre de classes de  $F$ . No se sap quants cossos quadràtics reals hi ha amb nombre de classes igual a 1; es conjectura que n'hi ha infinits ([Neu07], p. 37). La llista següent proporciona els  $d < 100$  que satisfan aquesta propietat.

$$\begin{aligned} d = & 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 29, \\ & 31, 33, 37, 38, 41, 43, 46, 47, 53, 57, 59, 61, \\ & 62, 67, 69, 71, 73, 77, 83, 86, 89, 93, 94, 97. \end{aligned}$$

Com és sabut, la norma d'una unitat en un cos de nombres és  $+1$  o bé  $-1$ . Nosaltres estem ara interessats en els cossos quadràtics reals que tenen una unitat de norma  $-1$ .

Sigui  $F$  un cos de nombres algebraics, no necessàriament quadràtic. Un element  $a \in F$  s'anomena totalment positiu si  $a^\sigma$  és positiu per a totes les immersions  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{R}$ . Els elements totalment positius de  $F$  formen

un subgrup, que designem  $F_+^*$ , de  $F^*$ . Escrivim  $(\mathcal{O}_F^*)^+ := \mathcal{O}_F^* \cap F_+^*$  per a designar el grup de les unitats totalment positives de  $F$ .

Un  $\mathcal{O}_F$ -ideal principal s'anomena totalment positiu, si pot ser escrit  $\mathcal{O}_F a$  amb  $a \in F_+^*$ . Els ideals principals totalment positius formen un subgrup de  $P_F$ , que anomenem  $P_F^+$ . Definim el grup restringit de classes d'ideals de  $F$  com el grup  $C_F^+ = I_F/P_F^+$ .

**6.3.2 Definició.** Anomenem *nombre de classes* i *nombre estricta de classes*, respectivament, els cardinals  $h_F = \#C_F$  i  $h_F^+ = \#C_F^+$ .

La proposició següent aplega resultats clàssics.

**6.3.3 Proposició.** *Si  $F$  és un cos de quadràtic real de nombre estricta de classes igual a 1, el seu discriminant és un nombre primer. Si  $F$  és un cos quadràtic per al qual el discriminant  $D_F$  és un nombre primer, aleshores  $h_F$  és senar; si, a més,  $F$  és real, aleshores la norma de la unitat fonamental és  $-1$ .*

Així, per als cossos quadràtics de la forma  $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ , amb  $q \equiv 1 \pmod{4}$  primer, la norma de la unitat fonamental és  $-1$ . Per exemple, dels 100 primers cossos quadràtics reals, els següents satisfan aquesta propietat; el seu nombre estricta de classes és, també, igual a 1.

$$q \in \{5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97\}.$$

La taula 6.1 proporciona les unitats fonamentals d'alguns d'aquests cossos. El recíproc no és cert, atès que per a  $D = 26$ , el cos quadràtic real té una unitat de norma  $-1$ , però  $D$  no satisfà les propietats anteriors.

### 6.3.1 Formes de Maass-Hecke

Sigui  $F$  un cos totalment real de nombre estricta de classes igual a 1. Aleshores, qualsevol ideal de  $F$  es podrà generar per un element totalment positiu. Per tant, si  $\psi$  denota un caràcter de Hecke de  $F$ ,  $\mathfrak{a} = (\alpha)$  és un ideal amb  $\alpha \in (\mathcal{O}_F^*)^+$ , els valors  $\psi(\mathfrak{a}) = \psi(\alpha)$  determinaran el caràcter. Per a  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , escriurem

$$\psi(x) = \text{sign}(x_1)^{\epsilon_1} \text{sign}(x_2)^{\epsilon_2} \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^\nu,$$

amb  $\nu$  un nombre complex. Cal imposar, a més, que  $\psi(u) = 1$  per a tot  $u \in \mathcal{O}_F^*$ , a fi que la funció estigui ben definida sobre els ideals. Això implica

D	unitat fonam.	D	unitat fonam.
5	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$	41	$32 + 5\sqrt{41}$
13	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$	53	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{53}$
17	$4 + \sqrt{17}$	61	$\frac{39}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{61}$
29	$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{29}$	73	$1068 + 125\sqrt{73}$
37	$6 + \sqrt{37}$	89	$500 + 53\sqrt{89}$

Taula 6.1: Unitats fonamentals de norma  $-1$ 

que

$$\begin{aligned} 1 = \psi(\eta) &= \text{sign}(\eta)\text{sign}(\eta^\tau)|\eta|^\nu|\eta^\tau|^{-\nu} = \\ &= \text{sign}(\eta)\text{sign}(\eta^\tau)|\eta^{(1)}|^\nu|\eta^{(1)}|^{-\nu} = |\eta^{(1)}|^{2\nu}, \end{aligned}$$

per a qualsevol unitat  $\eta \in (\mathcal{O}_F^*)^+$ . Notem que aquesta fórmula val per a les unitats  $\eta$  totalment positives; altrament, pot ser o no certa, depenent del valor de la norma. Si la norma de la unitat és positiva, prendrem  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ . En cas contrari, prendrem  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ , per tal de compensar el signe corresponent. En qualsevol cas, denotem  $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ .

Si  $\eta_0$  és la unitat fonamental normalitzada de  $F$ , aleshores,  $\eta_0$  genera el grup multiplicatiu de les unitats d'ordre infinit. Atès que el nombre estricte de classes de  $F$  val 1 és  $N(\eta_0) = -1$ , i, per tant, el seu conjugat galoisià és negatiu. En aplicar-ho, obtindrem que

$$\nu = \frac{k i \pi}{2 \log(\eta_0^{(1)})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si  $k$  és parell, aleshores  $\epsilon = 0$ , mentre que si  $k$  és senar, aleshores  $\epsilon = 1$ .

**6.3.4 Teorema. (Maass, 1949)** *Sigui  $F$  un cos quadràtic real, de discriminant  $D$ , i de nombre estricte de classes igual a 1. Sigui  $\psi$  un caràcter de*

Hecke per al qual és  $\nu \neq 0$ . La funció  $f^\psi$  definida per

$$f^\psi(x + iy) = \begin{cases} \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a}) \sqrt{y} K_\nu(2\pi N(\mathfrak{a})y) \cos(2\pi N(\mathfrak{a})x), & \text{si } \epsilon = 0, \\ \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a}) \sqrt{y} K_\nu(2\pi N(\mathfrak{a})y) \sin(2\pi N(\mathfrak{a})x), & \text{si } \epsilon = 1, \end{cases} \quad (6.3)$$

és una forma de Maass cuspidal per al grup  $\Gamma_0(D)$ , i de caràcter  $\chi_D$ , que és vector propi per a tots els operadors de Hecke. En particular, se satisfà l'equació funcional

$$f^\psi\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \chi_D(d) f^\psi(z), \quad \text{per a } \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(D), \quad (6.4)$$

on la suma s'estén a tots els ideals  $\mathfrak{a}$  de  $\mathcal{O}_F$ .

DEMOSTRACIÓ. La demostració és pot trobar a l'article original de Maass [Maa49] i a [Bum97].  $\square$

### 6.3.2 Algoritme Maass-Hecke

En aquesta secció descriurem un algoritme per al càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier de les formes de Maass-Hecke donades en el teorema 6.3.4.

Considerem un cos quadràtic  $F$  de nombre estricta de classes igual a 1. Sigui  $D = q$ ,  $q \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $q$  primer, el seu discriminant. Considerem un caràcter de Hecke de  $F$  definit segons

$$\psi(x) = \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^\nu,$$

on el valor de  $\nu$  és donat per

$$\nu = \frac{\pi i k}{2 \log \eta}, \quad k \neq 0,$$

amb  $\eta$  una unitat fonamental normalitzada, de norma  $-1$ , del cos  $F$ . Observem que tenim un caràcter de Hecke per a cada valor enter de  $k$ , no nul.

El primer que realitzarem és el càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier,  $c(p)$ , de la forma de Maass-Hecke  $f^\psi$ , que provenen d'ideals  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_F$  amb  $N(\mathfrak{p}) = p$ , primer.

Es té que

$$c(p) = \begin{cases} \psi(\mathfrak{p}_1) + \psi(\mathfrak{p}_2) & \text{per a } \chi_D(p) = +1 \quad (\mathcal{O}p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2), \\ 0 & \text{per a } \chi_D(p) = -1 \quad (\mathcal{O}p = \mathfrak{p}), \\ 1 & \text{per a } p = D \quad (\mathcal{O}D = (\sqrt{D})^2). \end{cases}$$

El fet que  $c(p) = 0$  per als primers inerts és degut a la no existència en  $F$  d'ideals de norma  $p$ , en aquest cas. Ens cal una funció que calculi, en cada cas, un generador dels ideals primers que intervenen en la descomposició dels primers  $p$  que descomponen completament en el cos quadràtic. Aquests generadors s'obtidran en resoldre l'equació diofantina

$$p = X^2 - dY^2,$$

quan  $\chi_D(p) = 1$ , amb  $x$  i  $y$  enters positius. L'equació té solució, ateses les condicions satisfetes pel cos quadràtic. La resta de coeficients s'obté a partir de les relacions 6.5 satisfetes pels coeficients de  $f^\psi$  per ser, per construcció, vector propi dels operadors de Hecke.

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(m,n)} \chi_D(d)c\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad \text{si } \text{mcd}(n, D) = 1, m \in \mathbb{Z}, \quad (6.5)$$

$$c(m)c(n) = c(mn), \quad \text{si } n|D, m \in \mathbb{Z}.$$

**Data:**  $D$  discriminant,  $k$  potència del caràcter,  $n$  nombre de coeficients

**Result:** Coeficients forma de Maass

Calcular  $\nu = \frac{\pi ik}{2 \log \eta}$ ;

**for**  $p < n$  **do**

**if**  $p$  és primer **then**

**if**  $\chi_D(p) = 1$  **then**

            Solucionar  $p = a^2 - db^2$ ;

            Calcular  $c_p = \left| \frac{a + b\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \right|^\nu + \left| \frac{a - b\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} \right|^\nu$ ;

**else**

$c_p = 0$

**end**

**else**

        Aplicar la fórmula (6.5);

**end**

**end**

**Algorithm 7:** Algoritme per a formes de Maass-Hecke

Recordem que els cossos quadràtics de nombre estricte de classes igual a 1, a banda de tenir tots els ideals principals, aquests tenen un generador positiu.

$p$	(5, 1)	(5, 2)	(13, 1)	(89, 1)
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1.9848
3	0	0	1.4649	0
5	1.0000	1.0000	0	-0.56042
11	1.1132	-0.76082	0	-1.3875
13	0	0	1.0000	0
17	0	0	-0.87873	0.74539
19	0.17157	-1.9706	0	0
23	0	0	0.50569	0
29	-0.44610	-1.8010	1.9409	0
31	1.6669	0.77849	0	0
41	-0.84569	-1.2848	0	0
43	0	0	0.79037	0
47	0	0	0	-0.038657
53	0	0	-1.5986	1.8843
59	0.59840	-1.6419	0	0
61	1.8281	1.3419	0.25750	0
67	0	0	0	1.5652
71	-1.2992	-0.31201	0	0.51394
73	0	0	0	1.9578
79	1.4864	0.20932	1.8081	-0.94568
89	-1.4332	0.053978	0	1.0000
97	0	0	0	-1.1897

Taula 6.2: Coeficients  $c(p)$  d'índex primer

Un cop tenim el generador positiu de l'ideal, observem que en la fórmula del caràcter de Hecke, si  $x_1$  és el generador de l'ideal,  $x_2$  és el conjugat galoisià de  $x_1$ . Un cop tenim feta aquesta observació, i després de calcular la unitat fonamental del cos, en aplicar la fórmula del caràcter de Hecke obtindrem el valor del coeficient que desitgem.

Un cop tenim els coeficients primers calculats hem de calcular tots els altres. Per a això apliquem la fórmula (6.5).

La taula 6.2 mostra els coeficients  $c(p)$  de Bessel-Fourier, amb  $p \leq 100$  primer, per a formes de Maass-Hecke, definides per caràcters de Hecke. La notació  $(D, k)$  de la taula correspon a  $D = q$ , el discriminant del cos quadràtic, i  $k$ , la potència del caràcter de Hecke considerat.





# Capítol 7

## Formes de Maass modulars

En el capítol 6 hem construït exemples explícits de formes de Maass però, com a conseqüència de la llei de Weyl (6.1), aquests exemples no proporcionen totes les formes de Maass respecte de subgrups de congruència del grup modular.

En aquest capítol procedirem al càlcul de formes de Maass modulars en el cas general. La referència principal és [Bum97]. Hi recopilem resultats previs deguts bàsicament a Hejhal i Strömberg ([HR92], [Str05], [Str12] i [Hej12]), autors que han estat pioners en la descripció de mètodes numèrics per al càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier d'aquestes funcions.

La part més nova la constitueix el càlcul dels coeficients de formes de Maass modulars a l'entorn de qualsevol punt, no necessàriament cuspidal. Per a tal fi, ens cal fer primerament la determinació de possibles paràmetres locals. Com a l'entorn de les puntes, aquests constaran de dos tipus de funcions: unes que seran funcions pròpies de l'operador de Laplace-Beltrami i unes altres que seran funcions invariants respecte de la isotropia local proporcionada per l'acció del grup fuchsian. Les primeres juguen el paper de les funcions de Bessel i les segones, de la funció exponencial.

El capítol clou amb exemples explícits de desenvolupaments locals no cuspidals.

### 7.1 Mètodes numèrics

En aquesta secció explicarem de forma esquemàtica un procés de càlcul dels coeficients de Bessel-Fourier de formes de Maass modulars, a l'entorn de la punta de l'infinit. Obviarem molts detalls que són essencials per a un bon funcionament computacional de l'algoritme, com per exemple la diferenciació de les series de Bessel-Fourier per a cada una de les puntes del domini

fonamental. Per a una explicació detallada es pot consultar el capítol 1 de [Str05].

### 7.1.1 Càlcul de vectors propis

D'entrada, considerem que, d'alguna manera, hem calculat un valor propi  $\lambda$  de  $\Delta$ . En el que segueix explicarem com fer-ho.

Sigui  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)$  una forma de Maass que volem calcular. Sigui

$$f(z) = \sum_{-\infty \leq n \leq \infty} c(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}$$

el seu desenvolupament de Bessel-Fourier en la punta de l'infinit, del qual en desconexem els coeficients  $c(n)$ . Abans que res trunquem la sèrie, i ja farem de manera per controlar-ne l'error. (Habitualment, és suficient prendre un nombre de termes fins a  $M = 15$ .) Obtenim així un desenvolupament de Bessel-Fourier truncat

$$\widehat{f}(z) = \sum_{1 \leq |n| \leq M} c(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}. \quad (7.1)$$

Una manera d'interpretar (7.1) és veure'l com una transformada discreta de Fourier, de la qual en podem calcular la transformada inversa de Fourier. Per a això, considerem els punts d'una recta euclidiana

$$\left\{ z_m = x_m + iY \mid x_m = \frac{1}{2s} \left( m - \frac{1}{2} \right), 1 - s \leq m \leq s \right\},$$

per a algun  $Y$  escaient, que majoritàriament tingui els punts fora del domini fonamental bàsic; per exemple,

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2q}.$$

La transformada inversa s'expressa com

$$\begin{aligned} c(n) \kappa_n(Y) &= \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s \widehat{f}(z_m) e^{-2\pi i n x_m} \\ &= \frac{1}{2s} \sum_{M=1-s}^s f(z_m) e^{-2\pi i n x_m} + [[\varepsilon]]. \end{aligned}$$

Per a resoldre aquest sistema, substituïm els punts de la segona igualtat per la seva reducció dins del domini fonamental, obtenint així

$$c(n)\kappa_n(Y) = \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s f(z_m^*)e^{-2\pi i n x_m} + [[\varepsilon]].$$

En abreujar la notació i escriure

$$c(n)\kappa_n(Y) = \sum_{1 \leq |k| \leq M_0} c(k)V_{nk} + 2[[\varepsilon]], \quad (7.2)$$

on

$$V_{nk} := \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s \kappa_k(y_m^*)e^{2\pi i k x_m^*} e^{-2\pi i n x_m}, \quad (7.3)$$

obtenim així un sistema lineal que pot ser usat per al càlcul aproximat dels coeficients. Notem que els valors  $V_{nk}$  poden ser petits, atès que les funcions de Bessel decauen ràpidament a l'infinit. Es pot evitar una barreja no convenient dels coeficients per mitjà de la disminució del valor  $Y$ . El sistema (7.2) pot ser escrit ara com

$$0 = \sum_{|k| \leq M} c(k)\tilde{V}_{nk} + 2[[\varepsilon]], \quad (7.4)$$

on  $\tilde{V}_{nk} = V_{nk} - \delta_{nk}\kappa_n(Y)$  i  $M = M(Y)$ .

El terme  $-\kappa_n(Y)$  que apareix en totes les entrades de la diagonal ens dóna una bona raó per a esperar que aquest sistema resulti ben condicionat. Obtenim així un sistema lineal la solució del qual són els coeficients de Bessel-Fourier de les formes de Maass  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)$ . En prendre com a  $V$  la  $(\kappa M_0 \times \kappa M_0)$ -matriu  $\tilde{V}_{nk}$ , amb  $M(Y) < M_0$ , i com a  $C$  el  $\kappa M_0$ -vector de coeficients de Fourier  $c(k)$ , aleshores podem escriure el sistema lineal com

$$VC = 0. \quad (7.5)$$

A partir d'aquí, com que, conjecturalment, estem treballant en un espai unidimensional, podem prendre  $c(1) = 1$ , i obtenim així un terme independent no nul per al sistema. Això ens permet, sense pèrdua d'informació, eliminar una equació. En resoldre el sistema, obtenim una aproximació d'un conjunt de coeficients de la forma de Maass per al valor propi de partida.

### 7.1.2 Càlcul de valors propis

Sigui  $I = [R_1, R_2]$  un interval on volem trobar-hi algun valor propi de  $\Delta$ . La idea és resoldre el sistema lineal anterior per a dos valors de  $Y$  diferents, i

$n$	(3, 5.098741)	(3, 8.19303)	(5, 4.10322)	(5, 11.600538)	(7, 1.924644)
1	1.	1.	1.	1.	1.
2	1.342406	0.49359	1.52878	1.151009	-1.33727
3	-0.57735	-0.57735	-1.03939	1.32338	0.794004
4	0.802055	-0.756366	1.337169	0.324822	0.788298
5	-0.062485	-1.060977	0.447213	0.447213	-0.265532
6	-0.775038	-0.284975	-1.58901	1.52322	-1.06179
7	0.753838	0.451277	0.325465	1.54611	0.377958
8	-0.265721	-0.866929	0.515458	-0.77713	0.283112
9	0.333333	0.333333	0.080346	0.75133	-0.369559
10	0.083880	-0.523690	0.68369	0.51474	0.355132
11	-0.408331	0.865827	-0.50508	-0.81479	-0.384726
12	-0.463067	0.436688	-1.38985	0.429864	0.625827
13	0.527645	-1.61620	0.904185	0.94222	0.81132
14	1.011957	0.222747	0.49756	1.77958	-0.505826
15	0.036075	0.612556	-0.46483	0.591834	-0.210807
16	-1.15876	0.328456	-0.54914	-1.21931	-1.16712
17	-0.967583	0.040383	1.06224	1.12394	-0.421505
18	0.447469	0.164531	0.122832	0.864797	0.493438
19	1.56020	-1.40373	-0.36263	-0.332257	0.548787
20	-0.050117	0.802487	0.59800	1.45265	-0.209783

Taula 7.1: Coeficients de formes de Maass

calcular la diferència. Sigui  $C(R, Y_i)$  el conjunt de solucions per a cadascun dels valors de  $Y$ , calculats amb  $\lambda = R$ . A la pràctica, n'hi ha prou en comparar els tres primers coeficients, sense contar el primer, que el prenem sempre igual a 1. Introduïrem la funció

$$h(R) = \omega_1(c_2 - c'_2) + \omega_2(c_3 - c'_3) + \omega_3(c_4 - c'_4),$$

on els valors  $\omega_i \in \{\pm 1\}$  serveixen per a compensar els signes dels coeficients. Aleshores, cercar valors propis és equivalent a cercar zeros de la funció  $h(R)$ . Evidentment, aquesta funció està lluny de ser derivable o similar, pot ser que sigui únicament contínua a trossos; per tant, el mètode escaient de cerca de zeros serà el mètode de la secant, tot fixant-nos en els canvis de signe.

En la taula (7.1) podem observar alguns càlculs de coeficients. Les entrades  $(q, \lambda)$  de la taula denoten:  $q$  el nivell del grup de congruència  $\Gamma_0(q)$  pel qual la forma calculada és invariant i  $\lambda$  és un valor de l'espectre de  $\Delta$ .

## 7.2 Desenvolupaments locals

Fins ara hem vist com calcular funcions d'ona de Maass, a l'entorn de l'infinit, per mitjà del seu desenvolupament de Bessel-Fourier. La part de Fourier està lligada al paràmetre local, és a dir, depèn del punt al voltant del qual estem desenvolupant que, en aquest cas, és el punt de l'infinit. Aquest punt de vista es pot observar per a funcions modulars en, per exemple, [BT07a] o bé [BT07b]. La part de Bessel d'aquest desenvolupament és la que està lligada al comportament de les formes sota l'acció de l'operador de Laplace-Beltrami.

L'objectiu d'aquesta secció és trobar els seus equivalents locals per a cada una de les dues parts i calcular en alguns casos aquests coeficients.

### 7.2.1 Paràmetres locals invariants

Definirem ara els paràmetres locals a fi d'obtenir uniformitzacions locals adaptades a les funcions de Maass per a grups fuchsians, tant si aquests tenen puntes com si no en tenen.

Sigui  $P$  un punt en  $\mathcal{H}$  d'ordre  $e \geq 1$  per l'acció d'un grup fuchsian  $\Gamma$ . En aquesta situació el seu grup d'isotropia,  $\Gamma_P$ , és cíclic d'ordre  $e$ , i denotem per  $g$  un generador,  $\Gamma_P = \langle g \rangle$ ,  $g \in \Gamma$ . La matriu de l'acció de l'element que genera el grup ha de ser diagonalitzable; per tant, sigui  $h \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  tal que

$$d := hgh^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix},$$

on  $\zeta$  és una arrel  $2e$ -èsima de la unitat. Aleshores,

$$h(g(z)) = d(h(z)) = \zeta^2 h(z). \quad (7.6)$$

En avaluar (7.6) en el punt  $z = P$ , obtenim que  $h(P) = \zeta^2 h(P)$ . Si  $e > 1$ , tindrem que  $\zeta^2 \neq 1$  i deduïm que  $h(P) = 0$ . D'aquesta manera

$$h(z) = k \frac{z - P}{cz + d}.$$

En avaluar l'equació (7.6) en  $P$  i  $\bar{P}$ , obtenim que

$$h(P) = h(g(P)) = \zeta^2 h(P), \quad h(\bar{P}) = h(g(\bar{P})) = \zeta^2 h(\bar{P}).$$

Atès que  $h(P) = 0$  i  $h$  és una aplicació bijectiva de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , haurem de tenir que  $h(\bar{P}) = \infty$ . Per tant,

$$h(z) = k \frac{z - P}{z - \bar{P}},$$

on  $k \in \mathbb{C}^*$  denota una constant no nul·la.

Un cop tenim fetes aquestes consideracions, podem definir el nostre paràmetre local. Atès que, en general, la naturalesa dels coeficients de les formes de Maass és, probablement, analítica (encara que es tracti de vectors propis dels operadors de Hecke), prendrem  $k = 1$  perquè en aquest cas, a diferència del que succeeix en el cas analític, no cal afavorir cap tipus de normalització dels coeficients.

**7.2.1 Definició.** Donat un punt  $P \in \mathcal{H}$  i un grup fuchsà  $\Gamma$ , anomenarem paràmetre local en  $P$  la funció

$$q(z) := \left( \frac{z - P}{z - \bar{P}} \right)^e,$$

on  $e \geq 1$  és l'ordre del grup d'isotropia  $\Gamma_P$  per l'acció de  $\Gamma$ .

## 7.2.2 Paràmetres locals propis

L'objectiu d'aquesta secció és completar amb una “part de Bessel” el paràmetre d'uniformització local; és a dir, una part pròpia respecte de l'operador de Laplace-Beltrami que, juntament amb la part local proposada en la secció anterior, ens permeti calcular desenvolupaments locals de les formes de Maass.

Sigui  $f$  una forma de Maass respecte d'un grup fuchsian  $\Gamma$ . Aleshores volem escriure  $f$  mitjançant un desenvolupament al voltant d'un punt  $P$ , d'ordre  $e \geq 1$ , que sigui de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \mathbf{c}_n(z) q(z)^n,$$

on  $q(z)$  denota el paràmetre local 7.2.1 i les funcions  $\mathbf{c}_n(z)$  volem que siguin funcions pròpies de l'operador de Laplace-Beltrami. Per a obtenir funcions  $\mathbf{c}_n(z)$  escaients, el primer que farem és revisar les funcions hipergeomètriques.

**7.2.2 Definició.** S'anomena *equació diferencial hipergeomètrica* l'equació diferencial

$$z(1-z)D^2(f, z) + (c - (a+b+1)z)D(f, z) - abf(z) = 0.$$

Dues solucions linealment independents són donades per

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1),$$

que s'anomena la *funció hipergeomètrica* de paràmetres  $(a, b, c)$ , i l'altra definida segons

$$z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z).$$

Nosaltres emprarem només la primera solució. Per tal de calcular funcions  $\mathbf{c}_n(z)$  corresponents a la part de Bessel del desenvolupament, enunciem el lema següent:

**7.2.3 Lema.** *Suposem que  $s \in \mathbb{C}$  i que  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ . Definim les funcions*

$$f_n(z) := z^n (1-z^2)^s \frac{F(s+n, s, 1+n; z^2)}{\Gamma(1+n)}, \quad |z| < 1,$$

$$g_n(z) := z^n (1-z^2)^s \frac{F(s+n, s, 2s; 1-z^2)}{\Gamma(2s)}, \quad 0 < |z| < 1, |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}.$$

Aleshores,

1. Les funcions  $f_n(r)$  i  $g_n(r)$  satisfan l'equació diferencial

$$D^2(u, r) + \frac{1}{r} D(u, r) + \left( \frac{4s(1-s)}{(1-r^2)^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) u(r) = 0, \quad (7.7)$$

si  $0 < r < 1$ ;



2. Per a  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1/10$ , tenim que

$$f_n(z) = \frac{z^n}{\Gamma(1+n)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n+1}\right) \right),$$

on la constant només depèn de  $s$  i  $\varepsilon$ .  $\square$

Ens centrarem en les funcions  $f_n$ . Tot i així encara hem de refinar les funcions per a crear la mateixa estructura del desenvolupament de Bessel-Fourier.

D'ara endavant considerem el canvi de variable

$$w = \frac{z - P}{z - \overline{P}} = re^{i\theta}.$$

**7.2.4 Proposició.** *Suposem que  $P \in \mathcal{H}$ ,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq 1$ , i sigui  $s$  un nombre complex diferent d'un enter negatiu o zero. Suposem que  $f \in \mathcal{C}^2$  és una funció pròpia de l'operador de Laplace-Beltrami, de valor propi  $s(s-1)$ , i definida sobre la corona*

$$N(P; r_1, r_2) = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid r_1 < \left| \frac{z - P}{z - \overline{P}} \right| < r_2 \right\}.$$

*Aleshores existeixen funcions  $c_n(r)$  tals que*

1.  $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\theta}$ , per a  $r_1 < r < r_2$ .
2. Podem escriure  $c_n(r) = A_n f_{|n|}(r) + B_n g_{|n|}(r)$  per a constants escaients  $A_n$  i  $B_n$  tals que

$$A_n = O\left(\frac{\Gamma(1+|n|)}{(r_2 - \varepsilon)^{|n|}}\right) \quad B_n = O((r_1 + \varepsilon)^{|n|}).$$

La demostració d'aquesta proposició es pot trobar en [Hej83].

**7.2.5 Observació.** De l'estimació del lema 7.2.3 i de la proposició 7.2.4, es comprova que la sèrie

$$S_1(w) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f_{|n|}(r) e^{in\theta}$$

convergeix per a  $|w| < r_2$ ; i que la sèrie

$$S_2(w) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n g_{|n|}(r) e^{in\theta}$$

convergeix per a  $r_1 < |w| < 1$ . Aquestes sèries són diferenciables terme a terme i, per tant, podem afirmar que les sèries  $S_1$  i  $S_2$  proporcionen solucions reals analítiques de  $\Delta f + s(1-s)f = 0$ , en els dominis respectius.

**7.2.6 Proposició.** Considerem la situació de la proposició 7.2.4. Suposem que  $r_1 = 0$  i que  $f(z)$  és uniformement acotada en la corona  $N(P; r_1, r_2)$ . Aleshores,

1.  $B_n = 0$ , per a tot  $n \in \mathbb{Z}$ .
2.  $f(w)$  és una solució real analítica de  $\Delta f + s(1-s)f = 0$  en el conjunt estès  $\{P\} \cup N(P; r_1, r_2)$ .
3.  $f(w) = S_1(w)$  en la notació de l'observació 7.2.5.

**7.2.7 Proposició.** Considerem la situació de la proposició 7.2.4. Suposem que  $r_1 = 0$  i que

$$\int_{N(P; r_1, r_2)} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty.$$

Aleshores,

1.  $B_n = 0$ , per a tot  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .
2.  $f(w)$  és una solució de  $\Delta u + s(1-s)u = 0$ .
3.  $f(w) = S_1(w) + B_0 g_0(r)$ , en la notació de l'observació 7.2.5.

Un cop arribats aquí, podem descriure els desenvolupaments locals de les nostres funcions de Maass.

**7.2.8 Teorema. (Desenvolupaments locals)** Sigui  $f$  una funció de classe  $\mathcal{C}^2$ , vector propi de l'operador de Laplace-Beltrami, de valor propi  $s(s-1)$  amb  $s$  un nombre complex no enter negatiu, i  $P \in \mathcal{H}$ . Aleshores en l'entorn

$$N(P; r) = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid \left| \frac{z-P}{z-\bar{P}} \right| < r \right\},$$

la funció  $f$  admet un desenvolupament, com a suma de dues sèries de potències, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(-n) \mathbf{c}_n(z) \overline{q(z)}^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \mathbf{c}_n(z) q(z)^n,$$

on la funció  $q(z)$  és el paràmetre local i la funció  $\mathbf{c}_n(z)$  és donada per

$$\mathbf{c}_n(z) = \left( 1 - \left| \frac{z-P}{z-\bar{P}} \right|^2 \right)^s \frac{F\left(s+n, s, 1+n; \left| \frac{z-P}{z-\bar{P}} \right|^2\right)}{\Gamma(1+n)}.$$

DEMOSTRACIÓ. Volem veure que la funció  $f$ , descrita com

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(-n) \mathbf{c}_n(z) \overline{q(z)}^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \mathbf{c}_n(z) q(z)^n,$$

amb les hipòtesis de l'enunciat és, efectivament, una funció pròpia de  $\Delta$ . Pel resultat 7.2.4 tenim que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\theta},$$

i, segons això i la proposició 7.2.6, obtenim que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) f_{|n|}(r) e^{in\theta},$$

amb

$$r e^{i\theta} = \frac{z - P}{z - \bar{P}}. \quad (7.8)$$

En substituir  $f_n$ , primer en la part positiva, i tenir en compte que  $|n| = n$ , ens queda

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) r^n (1 - r^2)^s \frac{F(s + n, s, 1 + n; r^2)}{\Gamma(1 + n)} e^{in\theta},$$

en agrupar, tindrem

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) (1 - r^2)^s \frac{F(s + n, s, 1 + n; r^2)}{\Gamma(1 + n)} (r e^{i\theta})^n,$$

i, finalment, en desfer el canvi de variable,

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \left( 1 - \left| \frac{z - P}{z - \bar{P}} \right|^2 \right)^s \frac{F\left(s + n, s, 1 + n, \left| \frac{z - P}{z - \bar{P}} \right|^2\right)}{\Gamma(1 + n)} q(z)^n.$$

Anàlogament en la part negativa ( $|n| = -n$ ) ens quedarà,

$$\begin{aligned}
 f^-(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a(n)r^{|n|}(1-r^2)^s \frac{F(s+|n|, s, 1+|n|; r^2)}{\Gamma(1+|n|)} e^{in\theta} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a(n)r^{|n|}(1-r^2)^s \frac{F(s+|n|, s, 1+|n|; r^2)}{\Gamma(1+|n|)} e^{in\theta} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a(n)r^{-n}(1-r^2)^s \frac{F(s-n, s, 1-n; r^2)}{\Gamma(1-n)} e^{in\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a(-n)r^n(1-r^2)^s \frac{F(s+n, s, 1+n; r^2)}{\Gamma(1+n)} e^{-in\theta}.
 \end{aligned}$$

En considerar que estem en un punt amb  $r \neq 0$ , tenim que

$$f^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)(1-r^2)^s \frac{F(s+n, s, 1+n; r^2)}{\Gamma(1+n)} (re^{-i\theta})^n,$$

i, finalment, en desfer el canvi de variable i tenir en compte que

$$(re^{-i\theta})^n = (\overline{re^{i\theta}})^n,$$

obtenim

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \left(1 - \left| \frac{z-P}{z-\overline{P}} \right|^2\right)^s \frac{F\left(s+n, s, 1+n; \left| \frac{z-P}{z-\overline{P}} \right|^2\right)}{\Gamma(1+n)} \overline{q(z)^n}.$$

En sumar les expressions de  $f^+(z)$  i  $f^-(z)$  obtenim l'expressió escrita en l'enunciat.  $\square$

**7.2.9 Observació.** L'expressió del resultat anterior pot ser escrita, també, com

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n(z) (a(n)\overline{q(z)^n} + a(n)''q(z)^n), \quad (7.9)$$

en el benentès que ara no és una sèrie de potències i que no tindrem cap mena de pols ni problemes de convergència en un entorn escaient.

**7.2.10 Observació.** Notem que podem escriure tota la sèrie en funció del paràmetre local, per tal de aconseguir la invariància pel grup d'isotropia. Per si fos necessari, notem que

$$\mathbf{c}_n(z) = (1 - |q(z)|^2)^s \frac{F(s+n, s, 1+n; |q(z)|^2)}{\Gamma(1+n)}.$$

Per tant, podem reescriure  $f(z) = T(q(z))$  amb

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |x|^2)^s \frac{F(s + n, s, 1 + n; |x|^2)}{\Gamma(1 + n)} (a(n)' \overline{x^n} + a(n)'' x^n).$$

**7.2.11 Lema.** *Sigui  $P$  un punt el·líptic d'ordre  $e$ . Aleshores els coeficients  $a(n)'$  i  $a(n)''$  són zero si  $n \not\equiv 0 \pmod{e}$ .*

DEMOSTRACIÓ.

Sense pèrdua de generalitat, podem donar un valor concret a  $e$ , veure què succeeix, i observar que el que succeeixi es pot estendre a qualsevol valor.

Per exemple, prenem  $e = 3$ . S'ha de complir que  $f(z) = f(\gamma(z))$ , atès que és el que volem usant en aquest desenvolupament. Primer de tot observem que  $\mathbf{c}(z) = \tilde{\mathbf{c}}(q(z))$ , satisfà que  $\tilde{\mathbf{c}}(q(z)) = \tilde{\mathbf{c}}(\xi q(z))$ , amb  $\xi$  qualsevol nombre que satisfaci  $|\xi| = 1$ . Això és perquè la funció  $\tilde{\mathbf{c}}$  depèn només del mòdul de  $q(z)$ .

Ara continuem amb la resta del desenvolupament, aleshores

$$f(z) = T(q(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{c}}_n(q(z)) (a(n)' \overline{q(z)^n} + a(n)'' q(z)^n)$$

però, per un altre costat,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\gamma(z)) = T(q(\gamma(z))) = \\ T(\xi^2 q(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{c}}_n(\xi^2 q(z)) (a(n)' \overline{\xi^2 q(z)^n} + a(n)'' \xi^2 q(z)^n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{c}}_n(q(z)) (a(n)' \overline{\xi^2 q(z)^n} + a(n)'' \xi^2 q(z)^n). \end{aligned}$$

Atès que les sèries han de ser iguals només queda que  $a(n)' = 0$  i  $a(n)'' = 0$  si  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

### 7.3 Algoritme per al càlcul dels desenvolupaments locals

Ens preocupem ara de calcular els coeficients  $a(n)$ . Per a tal fi, abans que res hem de truncar la sèrie infinita. A la pràctica, amb vint coeficients ja en tenim prou. Considerem que coneixem el desenvolupament de Bessel-Fourier d'una forma de Maass de la qual volem calcular-ne el coeficients locals a l'entorn d'un punt. Els desenvolupaments locals són de la forma,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(-n) \mathbf{c}_n(z) \overline{q(z)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \mathbf{c}_n(z) q(z)^n. \quad (7.10)$$

$n$	$(3, 5.098, i)$	$(5, k = 1, 1.15i)$	$(5, 8.19303, -\frac{2}{5} + \frac{i}{5})$
0	1	-0.256432	0.578271 <i>i</i>
1	-4.24124	2.83707	0
2	45.3778	-26.6031	-1.95628 + 1.46721 <i>i</i>
3	-234.79	176.641	0
4	497.57	-530.47	179.12 + 52.2434 <i>i</i>
5	1330.28	-3098.1	0
6	56548.9	29287.9	-1077.19 - 2863.82 <i>i</i>
7	$-1.00472 * 10^6$	150922.	0
8	$1.3629 * 10^8$	$-1.73788 * 10^6$	123094. - 192115. <i>i</i>
9	-	$-1.87887 * 10^7$	0
10	-	-	$-1.20022 * 10^7 - 2.11566 * 10^6 i$

Taula 7.2: Coeficients de formes de Maass a l'entorn de  $P$ 

Per a trobar els coeficients locals, el primer que fem és avaluar la funció de la qual tenim els coeficients de Bessel-Fourier calculats. Atès que les funcions  $\mathbf{c}_n(z)$  han d'estar avaluades a prop del punt  $P$ , el que fem és construir una graella de punts de diàmetre hiperbòlic fixat. Per als valors que hem calculat la graella de punts és un quadrilàter de punts en la corona de radis  $[0.01, 0.04]$ . En aquesta corona agafem entre 20 i 30 punts, depenent del cas, per tal d'obtenir un sistema.

Tenim doncs un sistema

$$b = VA,$$

on  $b = (f(z_i))_i^n$ ,  $V_{ij} = \mathbf{c}_j(z_i)q(z_i)^j$ , i  $A$  és el vector dels coeficients  $a(n)$  que volem calcular. Podem calcular el vector columna  $b$ , atès que en capítols anteriors hem pogut calcular els coeficients de formes d'ona de Maass en l'entorn de l'infinit. Aquests coeficients ens permeten avaluar la forma de Maass de la qual volem calcular els coeficients locals. Aquest valor serà prou exacte sempre i quan estiguem a una distància moderada de la recta  $y = 0$ , com és el cas dels punts que hem considerat. Podem calcular la matriu  $V$  perquè al llarg d'aquesta secció hem desenvolupat la sèrie de "Bessel-Fourier local" de manera que les funcions que ens han quedat són conegudes.

Per tant, només ens resta resoldre el sistema. La matriu és invertible, perquè no hem de patir per tenir vectors linealment dependents, i tindrem els coeficients amb una certa aproximació.

En la taula (7.2) observem els primers coeficients del desenvolupament local d'algunes de les formes de Maass calculades en seccions anteriors. Les entrades són  $(q, \lambda, P)$ , on  $P$  és un punt del domini. En la tercera columna s'ha triat com a punt  $P$  un punt el·líptic d'ordre 2 per al grup  $\Gamma_0(5)$ , a fi de poder observar el caràcter nul dels coeficients afectats. Els càlculs han posat de manifest que els coeficients  $a(-n)$  de les columnes 1 i 2 satisfan que  $a(-n) = a(n)$ ; i, els de la columna 3, satisfan que  $a(-n) = -a(n)$ .

# Capítol 8

## Formes de Maass quaterniòniques

Fins ara hem donat algoritmes per al càlcul de formes de Maass invariants per subgrups de congruència modulars, que són no cocompactes; és a dir, es tracta de grups per als quals la superfície de Riemann  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  és no compacta i admet una compactificació per adjunció de les puntes del domini. En aquest capítol ens ocuparem de l'estudi de les formes de Maass invariants per grups quaterniònics cocompactes i, per tant, sense puntes.

En el programa de Langlands trobem exemples diversos que relacionen el món quaterniònic i el món modular, el més popular dels quals és la correspondència de Jacquet-Langlands (cf. [Are03]). En aquest mateix sentit, però en el context de les formes d'ona de Maass, existeixen resultats deguts principalment a Hejhal, Bolte i Johansson ([Hej85], [BJ99a], [BJ99b]) que afirmen que l'espectre de l'operador hiperbòlic de Laplace en espais de formes d'ona de Maass respecte de certs grups quaterniònics cocompactes coincideix amb l'espectre de l'operador hiperbòlic de Laplace en espais de formes de Maass modulars. Aquesta circumstància serà la que, al final d'aquest capítol, ens permetrà incidir en una possible avaluació numèrica de les formes de Maass quaterniòniques, per mitjà dels algoritmes i de les idees desenvolupades fins ara, i en el disseny d'un algoritme per al càlcul dels coeficients d'aquestes formes a l'entorn de qualsevol punt.

### 8.1 Funcions theta de Siegel-Hejhal

El primer que farem és definir una funció theta de Siegel generalitzada, que fou introduïda per Hejhal. Per a tal fi considerem donada una matriu simètrica  $S$  de  $\mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$ . Definim com a una *majorant* de  $S$  tota matriu



simètrica definida positiva,  $P$ , que satisfaci  $PS^{-1}P = S$ . La propietat de ser majorant implica que, si  $P$  és una majorant de  $S$ , aleshores se satisfà que  $B^\top PB$  és una majorant de  $B^\top SB$ , per a qualsevol  $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Per als nostres propòsits, definim  $S$  segons

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observem que la matriu identitat és una de les majorants ja que  $S^2 = \text{Id}$  i, per tant,  $S = S^{-1}$  i, en conseqüència,  $\text{Id}S^{-1}\text{Id} = S$ .

Siguin  $L_1$  i  $L_2$  dues matrius de  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ . Es defineix la matriu  $A(L_1, L_2) \in \mathbf{M}(4, \mathbb{R})$  com

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = A(L_1, L_2) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \text{on} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} L_2^{-1}.$$

Atès que  $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = \alpha\delta - \beta\gamma$ , amb  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  podem concloure que la matriu definida satisfà que  $A(L_1, L_2)^\top SA(L_1, L_2) = S$  i, per tant,  $A(L_1, L_2)^\top A(L_1, L_2)$  és una majorant de  $S$ . Sigui ara  $w, z = x + iy \in \mathcal{H}$ . Per a aquests nombres complexos es defineixen les matrius  $M_z$  i  $P_{zw}$  com

$$M_z := \begin{bmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad P_{zw} := A(M_z^{-1}, M_w^{-1})^\top A(M_z^{-1}, M_w^{-1}).$$

Ara apliquem aquestes definicions al context d'àlgebres de quaternions. Sigui  $\mathcal{O}$  un ordre en una  $\mathbb{Q}$ -àlgebra de quaternions indefinida. Considerem la matriu  $S'$  de forma nòrmica de l'ordre  $\mathcal{O}$  respecte d'una  $\mathbb{Z}$ -base fixada. Per a  $q \in \mathcal{O}$ , sigui  $k_q \in \mathbb{Z}^4$  el vector dels coeficients de  $q$  expressats en aquesta base. Fixem una representació de l'àlgebra  $\Psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ . Atès que la representació  $\Psi$  és lineal, tindrem una matriu  $B \in \mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$ , única, tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = Bk_q, \quad \text{on} \quad \Psi_q := \Psi(q) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Ja que

$$k_q^\top S' k_q = 2n(q) = 2 \det(\Psi_q) = 2(\alpha\delta - \beta\gamma) = (Bk_q)^\top S(Bk_q),$$

es dedueix que  $S' = B^\top SB$ . Per a una immersió fixada de  $\mathcal{O}$ , es defineix una majorant  $P'_{zw}$  de  $S'$  segons  $P'_{zw} := B^\top P_{zw} B$ .

Definim la funció  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  segons

$$\phi(q, z, w) := \frac{|\Psi_q \bar{w} - z|^2}{\Im(\Psi_q \bar{w}) \Im(z)},$$

on  $z, w \in \mathcal{H}$  i  $q \in \mathcal{O}$  amb  $n(q) \neq 0$ ; per tant  $\Psi_q \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ . Podem considerar aquesta funció com

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, z, w) &\mapsto \phi(q, z, w), \end{aligned}$$

on  $q$  són tots els elements de  $\mathcal{O}$  en la  $\mathbb{Z}$ -base,  $z$  és la variable que s'ha d'avaluar i  $w$  serà un punt fix de la superfície de Riemann. Recordem la igualtat següent:

$$\frac{|gz - gw|^2}{\Im(gz) \Im(gw)} = \frac{|z - w|^2}{\Im(z) \Im(w)},$$

per a  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  i  $g \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . D'aquesta identitat es dedueix que

$$\phi(q, \Psi_{q_1}(z), w) = \phi(q_1^{-1}q, z, w),$$

per a  $q_1 \in \mathcal{O}_+^* = \{q \in \mathcal{O}^* : n(q) = 1\}$ .

**8.1.1 Lema.** *Siguin  $k_q, P'_{zw}$  i  $\phi$  definits com abans. Aleshores,*

$$k_q^\top P'_{zw} k_q = -n(q)(\phi(q, z, w) + 2).$$

Ara fixem  $z_0 \in \mathcal{H}$  i prenem  $\tau = u + iv, z = x + iy \in \mathcal{H}$ . Amb  $R := uS' + ivP'_{zz_0}$ , la funció theta de Siegel-Hejhal  $\vartheta(z, z_0; \tau)$  és definida per

$$\vartheta(z, z_0; \tau) = \Im(\tau) \sum_{k \in \mathbb{Z}^4} e^{\pi i k^\top R k} = \Im(\tau) \sum_{q \in \mathcal{O}} e^{\pi i k_q^\top R k_q}. \quad (8.1)$$

Del lema anterior i de la definició, s'obté que

$$\vartheta(z, z_0; \tau) = \Im(\tau) \sum_{q \in \mathcal{O}} e^{\pi n(q)[2ui + v(\phi(q, z, z_0) + 2)]},$$

on  $\tau = u + iv$ .

**8.1.2 Proposició.** *Sigui  $\mathcal{O}$  un ordre de discriminant  $d = d(\mathcal{O})$  en una àlgebra de quaternions  $H$  sobre  $\mathbb{Q}$  indefinida i de discriminant  $D > 1$ . Aleshores,*

1.  $\vartheta(\gamma(z), z_0; \tau) = \vartheta(z, z_0; \tau)$ , per a tot  $\gamma \in \Gamma(\mathcal{O})$ .
2.  $\vartheta(z, z_0; \gamma(\tau)) = \vartheta(z, z_0; \tau)$ , per a tot  $\gamma \in \Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ .

Aquesta proposició ens diu que la funció  $\vartheta$  és invariant per l'acció de les unitats de norma 1 de l'ordre  $\mathcal{O}$  en la variable  $z$ , i que és invariant per l'acció d'elements del grup de congruència  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$  en la variable  $\tau$ . Aquesta funció ens permetrà passar de formes de Maass invariants pel grup modular a formes de Maass invariants per grups quaterniònics cocompactes.

**8.1.3 Exemple.** Ens proposem programar la funció theta de Siegel-Hejhal i comprovar-ne les propietats. Sigui l'àlgebra de quaternions  $\mathcal{H} = (3, -1)_{\mathbb{Q}}$ . Considerem l'ordre  $\mathcal{O} = \Gamma[1, i, j, \frac{1+i+j+k}{2}]$  en l'àlgebra  $\mathcal{H}$ . Aquest ordre, segons [AB04] és un ordre d'Eichler que, a més, és maximal. Per tant, el seu discriminant és igual a 6. La seva forma nòrmica és donada per

$$F_4[X, Y, Z, T] = X^2 - 3Y^2 + Z^2 - T^2 + XT - 3YT + ZT,$$

i, per tant, la matriu corresponent a aquesta forma quaternària és

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Per conveniència de la notació ens interessa considerar  $S' = S_2$ , on  $S_2 = 2S_1$ . La matriu  $B$  és donada per

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Un cop fixada la matriu de la forma nòrmica per a l'ordre que hem escollit, passarem a la definició de la funció  $\vartheta$  de Siegel-Hejhal i l'avaluarem en dos punts que siguin equivalents segons el grup  $\Gamma(6, 1)$ . Considerem els punts

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{6}}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{6}}{2}$$

que són dos punts de multiplicació complexa equivalents per al grup  $\Gamma(6, 1)$ ,

Sigui  $\vartheta(z, z_0; \tau)$  la funció que volem avaluar. Sigui  $z_0$  un punt fixat de la corba de Shimura  $X(6, 1)$  al voltant del qual, arribat el cas, desenvoluparíem

la forma d'ona de Maass. En aquest exemple prendrem  $z_0 = \frac{i}{2}$ . Sigui  $\tau_0$  un punt fixat de la superfície modular; prendrem els representants  $\tau_0 = i$  i  $\tau_1 = i + 1$ , que són equivalents sota l'acció de  $\Gamma_0(6)$ . Programem els càlculs necessaris i comprovem que, efectivament,

$$\vartheta(z_1, z_0; \tau_0) = \vartheta(z_2, z_0; \tau_0) = \vartheta(z_2, z_0; \tau_1) = 0.0043972950\dots$$

## 8.2 La correspondència HBJ

Com abans, siguin  $H$  una àlgebra de quaternions sobre  $\mathbb{Q}$ , indefinida i de discriminant  $D > 1$ ,  $\mathcal{O}$  un ordre en  $H$  de discriminant  $d(\mathcal{O})$ , i  $\Gamma(\mathcal{O}) \backslash \mathcal{H}$  la superfície de Riemann compacta associada. Sigui  $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} := \mathcal{F}(\Gamma(\mathcal{O}))$ . Donada una funció pròpia  $\phi \in L_0^2(\mathcal{F}_{\mathcal{O}})$  de l'operador de Laplace-Beltrami amb  $\Delta\phi = \lambda\phi$ , considerem la transformada integral següent:

$$\Theta(\phi)(\tau) := \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{O}}} \vartheta(z; \tau) \phi(z) d\mu(z). \quad (8.2)$$

Aquí  $z = x + iy, \tau = u + iv \in \mathcal{H}$  són variables complexes i  $\vartheta(z; \tau)$  és la funció theta de Siegel-Hejhal que hem considerat en (8.1). Atès que el domini fonamental  $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$  sobre el que s'integra és compacte, la integral convergeix absolutament.

Considerem el grup de congruència  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ , de nivell donat pel discriminant  $d = d(\mathcal{O})$  de l'ordre quaterniònic  $\mathcal{O}$  escollit en  $H$ . Per a una forma de Maass cuspidal  $g$  per  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ , amb  $\Delta g = \mu g$ , introduïm la transformada integral

$$\tilde{\Theta}(g)(z) := \int_{\mathcal{F}_d} \overline{\vartheta(z; \tau)} g(\tau) d\mu(\tau), \quad (8.3)$$

on  $\mathcal{F}_d := \mathcal{F}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})))$ . La integral és absolutament convergent atès el comportament de  $\vartheta(z; \tau)$  quan  $\tau$  s'apropa a les puntes de  $\mathcal{F}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})))$ .

El motiu per al qual ens ha interessat la funció de Siegel-Hejhal és perquè, en utilitzar-la com a nucli integral, ens permet passar d'una forma de Maass modular, invariant per  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ , a una forma de Maass quaterniònica, invariant per  $\Gamma(\mathcal{O})$ . Per a veure-ho, cal feu ús del teorema següent.

### 8.2.1 Teorema. (Hejhal-Bolte-Johansson) *Se satisfan els resultats*

1. Si  $\phi \in L_0^2(\mathcal{F}_{\mathcal{O}})$  és una funció pròpia del laplacà de valor propi  $\lambda$ , aleshores  $\Theta(\phi)$  és una funció pròpia del laplacà del mateix valor propi.

2. Si  $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})), \mu)$  és una forma cuspidal funció pròpia del laplacià de valor propi  $\mu$ , aleshores  $\tilde{\Theta}(g)$  és una funció pròpia del laplacià del mateix valor propi.

DEMOSTRACIÓ. La prova consisteix en substituir cada funció per la seva fórmula equivalent on hi apareix el laplacià. Es pot veure en [BJ99a].  $\square$

D'acord amb la proposició 8.1.2, la funció  $\vartheta(z, \tau) = \vartheta(z, z_0; \tau)$  és automorfa respecte  $\Gamma(\mathcal{O})$  en  $z$  i automorfa respecte de  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$  en  $\tau$ . Això implica que la funció  $\Theta(\phi)(\tau)$  és automorfa respecte de  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ , mentre que la funció  $\tilde{\Theta}(g)(z)$  és automorfa respecte de  $\Gamma(\mathcal{O})$ . A més,  $\Theta(\phi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}_d)$  i  $\tilde{\Theta}(g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{F}_{\mathcal{O}})$ , perquè ambdues són funcions pròpies d'operadors diferencials el·líptics. A més, atesa la compacitat de  $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$ , es té que  $\tilde{\Theta}(g) \in L^2_0(\mathcal{F}_{\mathcal{O}})$ .

## 8.3 Avaluació de formes de Maass quaterniòniques

En aquesta secció descriurem finalment un algorisme que permet calcular formes d'ona de Maass per a grups cocompactes.

En la secció 8.1 hem considerat una funció que, en particular, ens ha servit de nucli integral per a transformar formes de Maass modulars en formes de Maass quaterniòniques. Ens falta ara una manera d'avaluar aquestes integrals. Per a tal fi, necessitarem desenvolupar tècniques escaients, basades en l'ús de punts equidistribuïts.

### 8.3.1 Generació de punts equidistribuïts

**8.3.1 Definició.** Una successió de punts  $\{x_n\}$  d'un espai de probabilitat  $(X, \mu)$  es diu que és equidistribuïda respecte de la mesura  $\mu$  si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\left(\{x_n\}_{n \leq N} \cap \Omega\right)}{N} = \mu(\Omega),$$

per a tot subconjunt convex  $\Omega \subseteq X$ , de vora contínua a trossos.

En aquest cas, donada una funció  $f \in \mathcal{C}(X)$  de suport compacte, és d'esperar que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \asymp \int_{\Omega} f(x) d\mu \quad (N \rightarrow \infty) \quad (8.4)$$

i, per tant, podem en principi fer ús d'aquests punts per a l'avaluació numèrica de la integral.

En el capítol 4, dedicat a la teoria de la reducció de les formes quadràtiques binàries, hem vist com, a partir de l'algoritme de reducció de punts, érem capaços de calcular els zeros de les formes quadràtiques binàries reduïdes que, per definició, es troben dintre del domini fonamental. En la notació emprada en aquell capítol, podem enunciar el teorema següent.

**8.3.2 Teorema. (Duke, Michel, Venkatesh)** *Siguin  $H = (a, b)_{\mathbb{Q}}$  una àlgebra de quaternions indefinida de discriminant  $D$ ,  $\mathcal{O}$  un ordre d'Eichler de nivell  $N$  i  $\Gamma(D, N)$  el grup fuchsian determinat pel seu grup d'unitats de norma 1. Siguin  $R(d, m)$  un ordre d'un cos quadràtic imaginari. Siguin  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$  el conjunt de zeros de les formes quadràtiques binàries reduïdes associades a  $\mathcal{O}(D, N)$  i a  $R(d, m)$ . Aleshores, quan  $dm \rightarrow -\infty$ , el conjunt de punts  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$  estan equidistribuïts en la superfície de Riemann  $\Gamma(D, N) \backslash \mathcal{H}$ , respecte de la mesura hiperbòlica.*

La prova d'aquest resultat es pot trobar en [Duk88], en el cas modular, i en [MV06], en el cas quaterniònic.

En particular, els punts del conjunt  $\mathcal{P}(1, DN, d, m)$ , quan  $dm \rightarrow -\infty$  són aptes per a evaluar numèricament la integral donada per la fórmula 8.3.

Siguin  $\mathcal{O}(D, N)$  un ordre d'Eichler d'una àlgebra de quaternions de discriminant  $D > 1$ . Siguin  $\Gamma_0(DN)$  el grup fuchsian que defineix la superfície modular. Atès que no podem calcular infinits punts, n'haurèm de calcular una quantitat finita i aproximar així la integral. En aquest cas, hem de controlar el zeros d'un conjunt de formes quadràtiques binàries. Per a tal fi, fixem un discriminant quadràtic de valor absolut màxim i un conductor màxim, per a cada discriminant quadràtic. Siguin  $d_0$  i  $m_0$  els valors fixats, respectivament. Siguin

$$\mathcal{P} = \bigcup_{d=1}^{d_0} \bigcup_{m=1}^{m_0} \mathcal{P}(1, DN, d, m).$$

En emprar el teorema d'equidistribució de Duke, podem calcular el valor de la forma de Maass quaterniònica en un punt  $z$  qualsevol de la superfície de Shimura de la següent forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(g)(z) &= \int_{\mathcal{F}_{DN}} \overline{\vartheta(z; \tau)} g(\tau) d\mu(\tau) \approx \\ &= \frac{1}{\#\mathcal{P}} \sum_{x \in \mathcal{P}} \overline{\vartheta(z; x)} g(x). \end{aligned} \tag{8.5}$$

**8.3.3 Observació.** La igualtat 8.5 correspon a la definició d'equidistribució i els càlculs seran aproximats en la mesura que afegim una quantitat escaient

de punts en el conjunt  $\mathcal{P}$ . De totes maneres, en augmentar el nombre de punts es pot caure també en fenòmens d'instabilitat numèrica, tal com hem observat amb l'elecció d'unes 70000 formes quadràtiques binàries reduïdes. Sembla que la millor manera d'avaluar la integral seria traslladant al context hiperbòlic alguns dels mètodes d'acceleració d'integració numèrica que han estat treballats en espai euclidià (vegi's, per exemple, [JP07]), els quals es basen majoritàriament en l'assignació de pesos als diferents valors obtinguts de la forma de Maass modular.

## 8.4 Algoritme per al càlcul dels desenvolupaments locals

El càlcul de les formes de Maass conclou amb la descripció d'un algoritme per a l'avaluació i posterior càlcul dels coeficients locals de les formes de maass quaterniòniques.

### Pas 1: forma de Maass modular

En virtut del teorema 8.2.1, en la integral 8.3 haurem de partir d'una forma de Maass nova,  $g$ , invariant pel grup modular  $\Gamma_0(DN)$ . Calcularem els seus coeficients de Bessel-Fourier per mitjà de l'algoritme explicat en la secció 7.1; és a dir, primer calcularem els valors propis de l'operador de Laplace-Beltrami i, posteriorment, els vectors propis.

### Pas 2: punts equidistribuïts

Un cop tenim la forma de Maass modular hem de calcular punts aptes per a aproximar-hi la integral (8.3). Per a això, calculem formes quadràtiques binàries segons l'algoritme 6 aplicat als conjunts  $\mathcal{H}^*(1, DN, d, m)$ , fent tendir el seu discriminant  $dm^2 \rightarrow -\infty$ . En aquest cas obtindrem un conjunt de punts  $\{\tau_j\}$  equidistribuïts com es descriu en el resultat 8.3.2. Observem un exemple de punts calculats en la figura 8.1.

### Pas 3: avaluació de la forma de Maass quaterniònica

En la fórmula 8.3 observem que apareix la funció theta de Siegel-Hejhal estudiada en aquest capítol, però conjugada i multiplicada per la forma de Maass  $g$  invariant pel grup modular  $\Gamma_0(DN)$ , que haurem calculat en el primer pas.

Atès el comportament de la funció  $\overline{\vartheta(z; \tau)}g(\tau)$  a les puntes del domini modular, i fixat un  $\varepsilon > 0$ , podem multiplicar aquesta funció per la funció

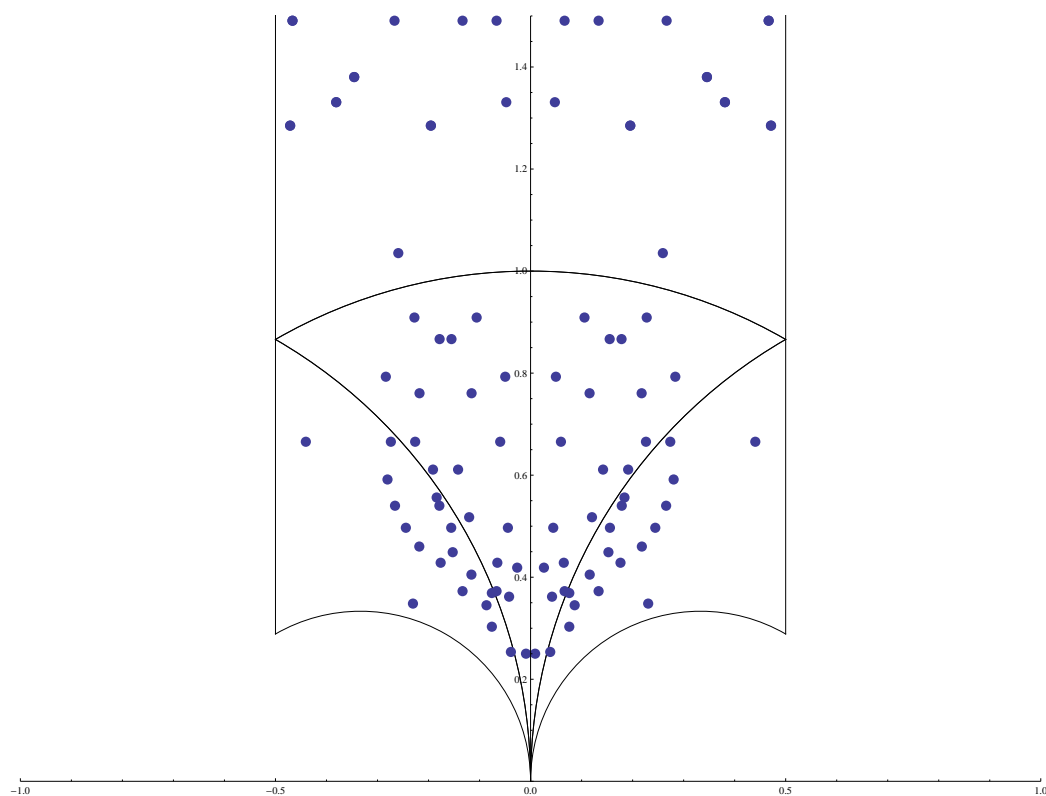


Figura 8.1: Exemple de punts equidistribuïts sobre una superfície modular



característica  $\chi_\varepsilon$  d'un subconjunt compacte  $\Omega_\varepsilon \subseteq \mathcal{F}_0(\Gamma(DN))$  i aplicar la fórmula 8.5 a la funció

$$\chi_\varepsilon \overline{\vartheta(z; \tau)} g(\tau),$$

sense alterar l'aproximació volguda per al càlcul de la integral.

Considerem una graella hiperbòlica de punts  $\{z_k\}$  al voltant d'un punt  $z_0 = P$  de la superfície de Shimura; és a dir, del domini  $\mathcal{F}(\Gamma(D, N))$ . Aleshores per a cada un d'ells calculem el valor de la forma d'ona de Maass  $f(z) := \tilde{\Theta}(g)(z)$  per mitjà de l'aproximació 8.5. Per a això haurem de fer servir els punts equidistribuïts calculats en el pas anterior.

#### **Pas 4: coeficients de la forma de Maass quaterniònica**

Tenint en compte que el desenvolupament de la forma de Maass  $f(z)$  quaterniònica ha de ser del tipus explicat en el teorema 7.2.8, podem plantejar i resoldre un sistema on, com a terme independent tindrem els valors de la funció en els punts calculats en la secció anterior:  $(f(z_k)) = (f(z_1), \dots, f(z_M))$ . Com a matriu de sistema tindrem cadascuna de les funcions  $\mathbf{c}_n(z_k)q(z_k)^n$ , convenientment avaluades. Finalment, les incògnites  $A = (a(n))$  corresponen als coeficients de la forma de Maass  $f$ , invariant per  $\Gamma(D, N)$ .

## Part III

# Aplicacions tecnològiques



# Capítol 9

## Codis fuchsians

En els dos capítols que segueixen explicarem l'aplicació de les tècniques anteriors al disseny de codis per a la transmissió de la informació. Part dels resultats obtinguts es troba en els articles [BRHA14] i [BCHAR16], conjunts amb Alsina, Blanco-Chacón i Hollanti.

### 9.1 Conceptes preliminars

En aquest capítol presentem en detall la construcció dels codis donada en l'article [BRHA14]. La nostra contribució principal és la introducció del concepte de codi fuchsian, que ens proporcionarà un codi de tipus SISO (*simple input single output*). Podem entendre la construcció d'aquests codis com una aplicació de l'algorisme de reducció de punts que hem explicat en el capítol 3 de la memòria (vegi's també la darrera secció de [BR14]).

Com es ben sabut, a través d'ones de radio podem enviar nombres complexos mitjançant l'ús del seu mòdul i del seu argument. Aquest procés s'anomena de *modulació*. El nostre univers de missatges serà el conjunt  $\mathbb{C}$  dels nombres complexos, que enviarem a través d'un canal. Sigui  $x \in \mathbb{C}$  el missatge que volem enviar. D'entrada, no podem esperar que el receptor rebi exactament el mateix missatge  $x$  ja que aquest pot patir processos de distorsió per causa de les interferències en el medi. Les mesures experimentals mostren que el procés de distorsió del missatge es pot parametritzar per la fórmula següent:

$$y = hx + n,$$

on  $y \in \mathbb{C}$  és el missatge rebut,  $h$  és una rotació d'angle aleatori donada per  $h \in \mathbb{C}$ ,  $|h| = 1$ , i  $n$  és un nombre complex aleatori. Tant  $h$  com  $n$  depenen de la bondat del canal. Entendrem que  $n$  és una variable aleatòria normal  $n \in \text{CN}(0, \sigma^2)$ .

De cara a simplificar les coses, suposarem conegut el paràmetre  $h$ . La suposició es basa en què en alguns tipus de canal l'enviament de senyals pilot permet conèixer  $h$  a priori. Per tant, podem escriure

$$y = x + n.$$

El que cal fer ara és aproximar la  $n$ . Hem suposat que  $n \in \text{CN}(0, \sigma^2)$  on  $\sigma^2$  és determinada per la fórmula

$$\sigma^2 = \frac{E}{SNR}; \quad SNR = \frac{E}{\sigma^2}.$$

La nomenclatura SNR correspon a “*signal to noise ratio*”; (proporció entre senyal i soroll) mesura la proporció de senyal respecte el soroll del canal. És una variable que no poden controlar. Com més gran sigui la SNR, la qualitat del senyal és més bona. Hi ha dues maneres d'augmentar la SNR. La primera, és augmentant l'energia de l'emissor que emet el senyal. És a dir, com més energia s'empri per a enviar un missatge, més fàcil serà que aquest arribi en condicions perfectes. L'altra manera és millorar el canal de forma que  $\sigma^2$  sigui més petita.

Es preveu que en un futur proper cada cop l'energia serà més cara, per causa de l'esgotament dels recursos energètics del planeta i per raons de canvi climàtic, entre d'altres. Per tant, sembla lògic fer un estudi sota el supòsit que l'única manera per a millorar la SNR és el control de  $\sigma^2$ , ja que això es pot aconseguir en gran mesura optimitzant la tecnologia.

## 9.2 Codis QAM

La *modulació d'amplitud en quadratura*, QAM, (*Quadrature Amplitude Modulation* en anglès) és una tècnica per a transportar dues senyals independents, mitjançant la modulació d'un senyal portador, tant en amplitud com en fase. No entrarem aquí en els aspectes més tècnics d'aquesta tecnologia, però considerarem els codis que d'ella se'n deriven. Ens centrarem en descriure alguns d'aquests codis per tal de poder-los comparar posteriorment amb els codis fuchsians dels quals ens ocuparem.

El mètode de codificació i descodificació segons la tecnologia QAM es força senzill. Considerem un codi  $C = \{q_1, \dots, q_n\}$  de  $n$  punts  $q_i \in \mathbb{C}$  que pertanyin a una xarxa quadrada. Sigui  $y$  una paraula rebuda. El codi descodifica per distància mínima. És a dir, escull  $x' \in C$  tal que

$$d(y, x') = \min d(y, q_i), 1 \leq i \leq n.$$

En cas d'haver-hi en  $C$  més d'una paraula que satisfaci la condició anterior, haurem d'escollir-ne una per mitjà d'algun mètode escaient. Observem que, a priori, en cada pas hem de comparar cada paraula rebuda amb totes les paraules del codi, la qual cosa comporta que el temps de descodificació sigui lineal en la mida del codi. En general, en casos específics, es tracta d'evitar les comparacions d'una paraula rebuda amb totes les del codi, però el temps de descodificació no arriba a ser logarítmic en la mida d'aquest.

Un exemple de codi 4-QAM és el següent:

$$C_{4-QAM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1 + i, 1 + i, -1 - i, 1 - i\};$$

cada paraula permet transmetre 2 bits per unitat de temps.

Un exemple de codi 8-QAM és el següent:

$$C_{8-QAM} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i, 1 + 3i, 1 - 3i, -1 + 3i, -1 - 3i\};$$

cada paraula permet transmetre 3 bits per unitat de temps.

Un exemple de codi 16-QAM és el següent:

$$C_{16-QAM} = \frac{1}{\sqrt{10}}\{-3 - 3i, -3 - i, -3 + i, -3 + 3i, -1 - 3i, -1 - i, -1 + i, -1 + 3i, 1 - 3i, 1 - i, 1 + i, 1 + 3i, 3 - 3i, 3 - i, 3 + i, 3 + 3i\};$$

cada paraula permet transmetre 4 bits per unitat de temps.

La gràfica 9.1 mostra una comparativa entre aquests codis, que hem realitzat amb una simulació que ha emprat més d'un milió de missatges enviats. En l'eix de les abscisses hi tenim la SNR: com més alta, més òptim és el canal; en l'eix de les ordenades tenim la probabilitat d'error del codi; és a dir, la probabilitat de descodificar una paraula en una errònia: com més baixa més petita serà la probabilitat d'error. Evidentment, el codi 4-QAM és el que ofereix un millor resultat perquè assoleix una taxa d'error 0 abans que els altres; és a dir, en un canal pitjor, però és el que pot transmetre menys informació per unitat de temps.

## 9.3 Un paradigma nou

Els mètode tradicional de codificació i de descodificació es pot resumir en l'esquema següent:

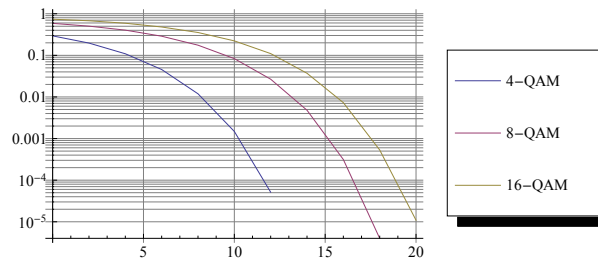
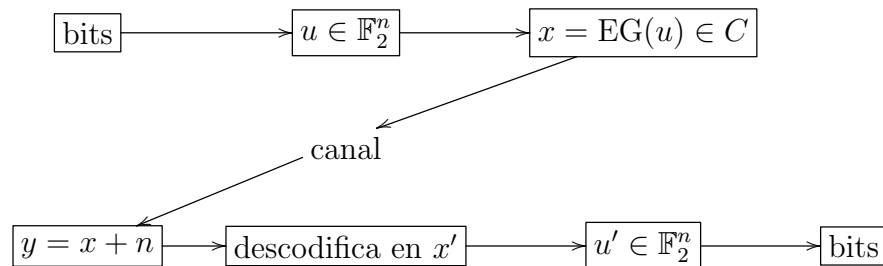


Figura 9.1: Comparació de codis QAM



Es parteix d'una seqüència de bits que, per via d'una assignació de bits a complexos permet obtenir un vector  $u \in \mathbb{Z}^n$ ; per exemple, per mitjà de l'anomenat etiquetatge de Gray, vegi's la figura ??, que podem pensar com una aplicació

$$EG : \mathbb{F}_2^n \longrightarrow C \subseteq \mathbb{C}.$$

Es té una xarxa de punts (el tipus de la qual depèn de l'optimització de certs paràmetres). D'aquesta manera, a cada parella de bits se li assigna un vector  $(a, b)$  i a aquest se li fa correspondre el nombre complex  $a + bi$ . Per a recuperar el missatge original es procedeix de la manera següent: sigui  $y$  el missatge rebut. Fixat el paradigma de comunicació, coneixerem l'aplicació  $EG$ . Tot seguit aplicarem un algoritme de cerca per proximitat esfèrica i, entre tots els  $q$  de la xarxa, selecciona un element que minimitzi la norma  $\|y - q\|$ .

El mètode fuchsità de codificació proposa un esquema diferent per a la codificació i la descodificació de missatges. Per tal d'estalviar notació, anomenarem *PRA* (*point reduction algorithm*) l'algoritme de reducció de punts. Escollirem un punt  $P \in \mathcal{H}$ , escaient, que serà el centre del codi. En la seva elecció es valorarà per un costat, l'energia mínima i, per l'altre, la distància màximes entre els punts que formaran el codi. En aquest cas, el paradigma és representat per la idea següent. Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsità escaient que, en el nostre cas, serà un grup quaterniònic  $\Gamma(D, N)$ , com els considerats en el capítol 1. Suposem que la nostra seqüència de bits està relacionada amb una

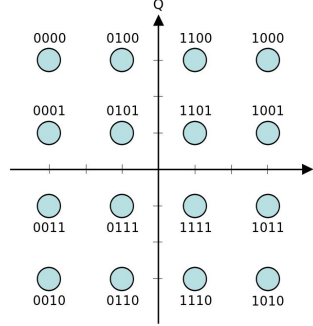
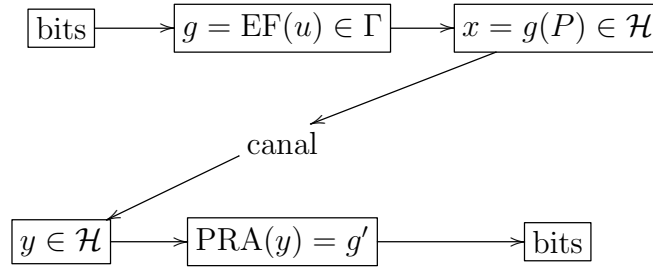


Figura 9.2: Etiquetatge de Gray per al codi 16-QAM

matriu  $g \in \Gamma$ , a través d'un etiquetatge donat per

$$EF : \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \Gamma(D, N) \subseteq H = (a, b)_{\mathbb{Q}}.$$

Aleshores, com a paraula codificada prenem  $g(\tau)$ . D'aquesta manera obtenim un punt de  $\mathcal{H}$ .



Per a la construcció de codis fuchsians proposem l'ús de matrius reals, via la representació de l'àlgebra donada en la fórmula 1.5 del capítol 1, que pertanyen a un grup fuchsian  $\Gamma$ . Fixem un domini fonamental  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$ , un subconjunt finit  $S = S_{\Gamma} \subseteq \Gamma$  i  $P \in \mathcal{F}$  un nombre complex, que anomenarem centre del codi. Definim un codi

$$C_{\Gamma,+} := \{z = \gamma(P), \gamma \in S\} \subseteq \mathcal{H}.$$

Sigui  $t(z)$  la paraula rebuda,  $z = \gamma(P)$ , i tal que  $\Im(t(z)) > 0$ . En aplicar l'algoritme de reducció a aquesta paraula, obtenim  $\gamma'(t(z)) \in \mathcal{F}$ . Considerem la matriu  $\gamma'$ ; si l'error ha estat petit, tindrem que  $\gamma' = \gamma^{-1}$  i, per tant, haurem recuperat la matriu  $\gamma$  original que és on havíem codificat la informació.



Des d'un punt de vista energètic, és més escaient definir un codi emprant tot  $\mathbb{C}$  que només emprant el semiplà superior. Per a això farem la següent modificació. Sigui

$$n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i definim

$$C_\Gamma := C_{\Gamma,+} \cup n(C_{\Gamma,+}). \quad (9.1)$$

D'aquesta manera el codi  $C_\Gamma$  dobla el nombre de paraules del codi original.

Per a descodificar una paraula rebuda tal que  $\Im(t(z)) < 0$ , reduïm el punt  $n(t(z))$  i obtenim un matriu tal que  $(\gamma'(n(t(z)))) \in \mathcal{F}$ . La paraula descodificada serà  $\gamma'' = \gamma' \circ n$ . Com abans, si l'error ha estat prou petit hem de tenir  $\gamma''^{-1} = n \circ \gamma$ , on  $-z = \gamma(P)$ .

Els punts tals que  $\Im(t(z)) = 0$  tenen probabilitat zero d'aparèixer i, menys encara, per l'ús de la coma flotant en els mecanismes electrònics actuals. Tot i així, si rebem un punt sobre l'eix real, podem considerar que està en el semiplà superior en sumar-li una petita pertorbació per a que quedi en  $\mathcal{H}$ , i poder així descodificar-lo.

Fàcilment la construcció anterior s'estén a tots els grups fuchsians  $\Gamma$  amb domini fonamental  $\mathcal{F}$  compacte.

**9.3.1 Definició.** Donat un grup fuchsian  $\Gamma$  cocompacte, el codi  $C_\Gamma(\Gamma, \mathcal{F}, S, P)$  construït anteriorment és un codi fuchsian definit per  $\Gamma$ . S'anomenarà codi  $n$ -NUF ( $n$ -codi fuchsian no uniforme), amb  $n = \#C_\Gamma$ .

Recordem aquí el teorema 3.3.1. Farem un esquema de com funciona l'algorisme de reducció.

### ALGORITME

**Pas 1** Inicia:  $z_0 = z$  i  $t = \text{Id}$ .

**Pas 2** Prova si  $z_0 \in \mathcal{F}$ .

Si  $z_0 \in \mathcal{F}$ , torna  $z_0$  i  $t$ . Finalitza.

Si  $z_0 \notin \mathcal{F}$ , torna  $g \in G$  tal que:

$z_0 \in \text{int}(I(g))$ , si  $g \in G^{\text{ext}}$ ,

$z_0 \in \text{ext}(I(g))$  si  $g \in G^{\text{int}}$ .

**Pas 3** Calcula  $z_0 = g(z_0)$  i  $t = g \cdot t$ . Ves al pas 2.

Ja hem comprovat que aquest algoritme és finit (ja que el comportament dels grups fuchsians és pròpiament discontinu). A partir d'aquest algoritme definim el concepte de profunditat.

**9.3.2 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian cocompacte,  $G = G^{-1}$  un conjunt finit de generadors de  $\Gamma$  i  $z \in \mathcal{H}$  un punt qualsevol. Definim la profunditat  $\ell(z)$  com el nombre d'iteracions de l'algoritme de reducció per a reduir  $z$  en el punt equivalent  $z_0 \in \mathcal{F}$ . Definim la profunditat  $\ell(\gamma)$  d'un element  $\gamma \in \Gamma$  com el nombre d'iteracions que necessitem per a reduir un punt  $\gamma(w)$  en un punt  $w \in \mathcal{F}$ .

El que distingeix aquest tipus de codis dels codis habituals és el fet que el PRA és logarímic en la mida del codi. Ho provem en el que segueix. Denotem per  $S_\Gamma^n$  el conjunt d'elements de  $\Gamma$  tals que  $\ell(\gamma) \leq n$ .

**9.3.3 Teorema.** ([BR14]) *El nombre de passos necessaris per a descodificar un paraula  $t(z)$  mitjançant un codi  $n$ -NUF actuant sobre un canal escaient és logarímic en la mida del codi. És a dir,*

$$\ell(t(z)) = O(\log(n)).$$

DEMOSTRACIÓ. Siguin  $\Gamma$  el grup fuchsian que defineix el codi,  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_\kappa\}$  un conjunt de generadors de  $\Gamma$ , i  $\mathcal{F}$  un domini fonamental associat. El conjunt  $S_\Gamma^1 \subset \Gamma$  es donat per

$$S_\Gamma^1 = \{\text{Id} = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\kappa\}.$$

Si  $\Gamma$  és un grup lliure, aleshores  $\#S_\Gamma^n = \sum_{t=0}^n \kappa^t$ . En el cas general, tenim que la presència de relacions entre els generadors de  $\Gamma$  disminueix aquest nombre però, en qualsevol cas,

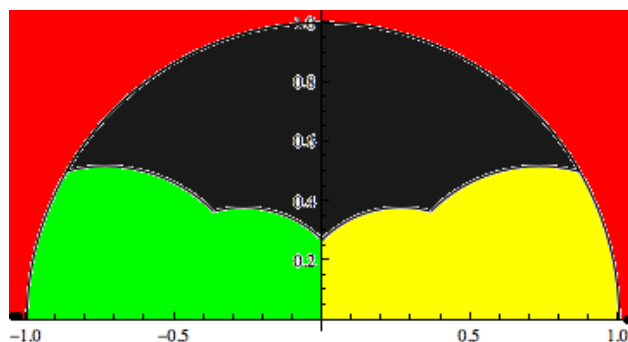
$$\#S_\Gamma^n = O(\kappa^n).$$

Això implica que existeix un  $r > 0$  tal que  $S_\Gamma^{r-1} \subset S_\Gamma \subseteq S_\Gamma^r$ . En particular si  $n$  es suficientment gran, tindrem que  $\kappa^{r-1} < n \leq \kappa^r$ , per tant  $r = O(\log(n))$ .

□

## 9.4 L'algorithm PRA

Abans hem dit que l'algoritme que fem per a descodificar és l'algoritme de reducció de punts. Ara bé, si el fem servir sense cap consideració prèvia es comprova experimentalment que els resultats no són òptims, ja que una petita variació podria fer variar molt la tessella on està el missatge  $y$  i per tant ja no recuperariem l'element original.

Figura 9.3: Regions per a  $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$ 

En la secció 3.2.1 hem estudiat un algoritme concret per al grup  $\Gamma(6, 1)$  que no correspon exactament amb l'algoritme general del teorema 3.3.1. Recordem que l'algoritme particular per a  $\Gamma(6, 1)$  era tal com es descriu en l'algoritme 3 del capítol 3 (és a dir, amb els conjunts estrella). En cada pas de l'algoritme aquest triava quin element del grup s'aplicava per tal de reduir el punt. Segons l'element que es triava en cada pas, es dividia el semiplà superior tal com es mostra en la figura 9.3.

Aquesta figura ens mostra que hem de fer per tal d'optimitzar el codi. No fem que l'algoritme redueixi el punt del tot sinó que només apliqui un nombre fixat de passos. Triarem el nombre de passos com el mínim  $\kappa$  tal que  $C_\Gamma(\Gamma, \mathcal{F}, S, P) \subseteq S_\Gamma^\kappa$ , és a dir, l'algoritme de reducció finalitzarà després de  $\kappa$  passos. En alguns casos aquest fet farà que hi hagi una correcció d'error bàsica.

En el cas del algoritme 3 un exemple de correcció bàsica és el següent: si tenim la paraula  $\gamma_2(P)$ , l'algoritme de reducció habitual descodificaria correctament sempre que el missatge  $y$  estés en  $\gamma_2(\mathcal{F})$ . En cas que fixem la descodificació a un sol pas de reducció (suposant un codi 4-NUF), l'algoritme de reducció descodificaria correctament sempre que el missatge  $y$  estés en la regió verda de la figura 9.3.

El fet que fixem el nombre de passos de l'algoritme de reducció ens aporta una dificultat afegida, les regions que no formen part d'una paraula del codi (que si formen part d'una paraula del grup). Aquest fet passa quan  $C_\Gamma(\Gamma, \mathcal{F}, S, P) \neq S_\Gamma^\kappa$ .

A fi de descodificar totes les paraules que poden sorgir de la descodificació cal un estudi dels elements que pertanyen a  $S_\Gamma^\kappa \setminus C_\Gamma(\Gamma, \mathcal{F}, S, P)$  i dur a terme un aparellament de manera que quan arribi una paraula que no correspongui a cap del codi inicial, se li pugui assignar automàticament una que pertanyi al codi. L'estudi d'aquesta assignació automàtica cal fer-lo inicialment i la forma optimal és procedir per distància mínima, de manera que els dibuixos

resultin el més semblants a la 9.3.

## 9.5 Codis fuchsians

A continuació compararem el funcionament d'alguns codis  $n$ -NUF amb el d'alguns codis de mínima distància  $n$ -QAM. Per a comparar codis cal tenir en compte que tots ells han de tenir la mateixa energia. La energia d'un codi es defineix com segueix.

**9.5.1 Definició.** Sigui  $C = \{c_i\} \subseteq \mathbb{C}$  un codi amb paraules en els nombres complexos. Aleshores l'*energia del codi* es defineix com:

$$E(C) = \sum_{i=1}^{\#C} |c_i|^2.$$

Donat un codi qualsevol sempre podem trobar un codi equivalent amb energia donada. Només cal multiplicar les paraules per la constant adequada. En el que segueix, tots els codis estaran normalitzats amb energia igual a 1.

### 9.5.1 El grup $\Gamma(6, 1)$

D'acord amb el teorema 2.3.2, emprem la notació següent:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \gamma_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}, \gamma_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir d'aquestes matrius definim els codis només amb les matrius que actuen sobre el semiplà superior; per exemple, per al codi 4-NUF(6,1) donarem dues matrius ja que les altres dues són donades per composició amb la matriu

$$n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Per al codi de quatre elements, fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(6,1)}^4 = \{\text{Id}, \gamma_2^{-1}\}.$$

Per al codi de vuit elements fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(6,1)}^8 = \{\text{Id}, \gamma_2^{-1}, \gamma_4^{-1}, \gamma_6\}.$$

Per al codi de setze elements fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(6,1)}^{16} = \{\text{Id}, \gamma_2^{-1}, \gamma_4^{-1}, \gamma_6, \gamma_1, \gamma_4\gamma_2^{-1}\gamma_6, \gamma_4\gamma_6\}.$$

Per a fixar les paraules del codi necessitem el centre del codi. En la gràfica 9.4 es poden veure els resultats d'executar el codi amb tres centres diferents. La gràfica està en escala logarítmica. És remarcable que l'error sigui zero amb SNR el més baix possible.

Per tal de comparar els codis anteriors amb el 4-QAM prenem el millor, en aquest cas

$$P = \frac{i}{2}.$$

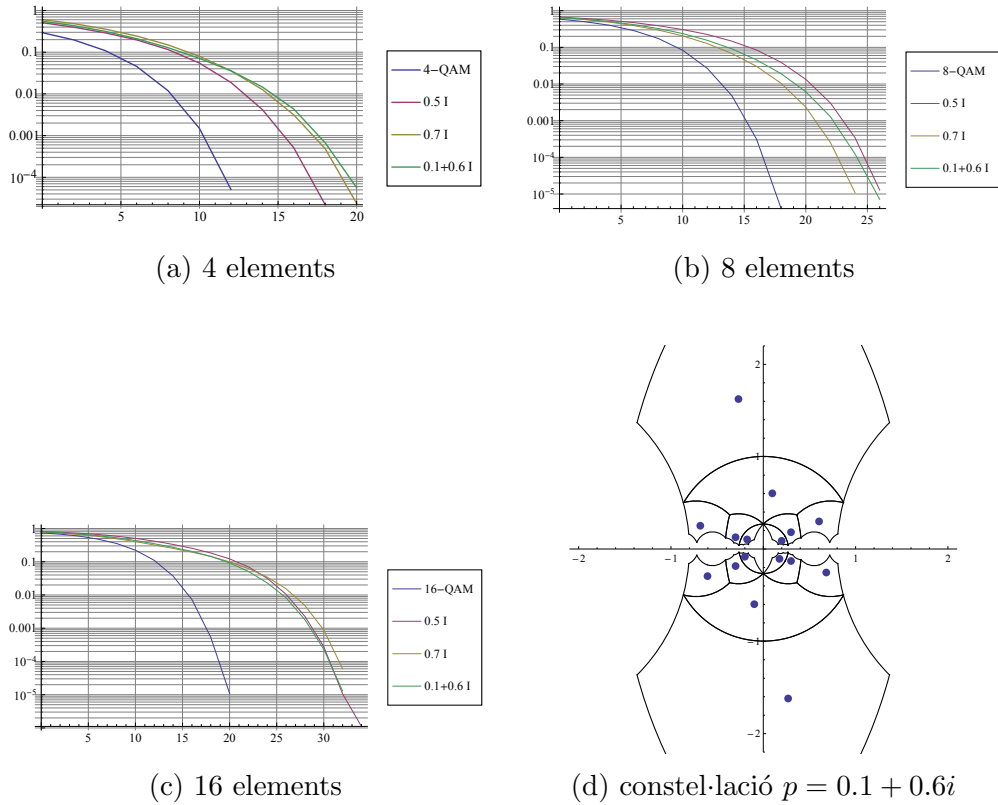


Figura 9.4: Comparació de codis NUF(6,1)

### 9.5.2 El grup $\Gamma(10, 1)$

D'acord amb el teorema 2.3.5, empren la notació següent:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$h_{10} = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Per al codi de quatre elements, fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(10,1)}^4 = \{\text{Id}, \gamma_5^2\}.$$

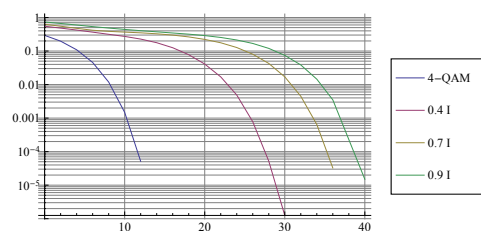
Per al codi de vuit elements, fem la següent tria:

$$S_{\Gamma(10,1)}^8 = \{\text{Id}, \gamma_5^2, \gamma_2^2, \gamma_5\}.$$

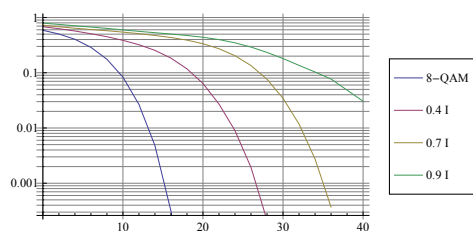
Per al codi de setze elements, fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(10,1)}^{16} = \{\text{Id}, \gamma_5^2, \gamma_2^2, \gamma_5, \gamma_2, \gamma_5\gamma_2^2, \gamma_2\gamma_5^2, h_{10}^{-1}\}.$$

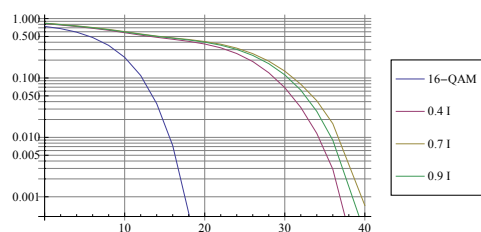
En la gràfica 9.5 es poden veure els resultats en emprar tres centres diferents.



(a) 4 elements



(b) 8 elements



(c) 16 elements

Figura 9.5: Comparació de codis NUF(10,1)

### 9.5.3 El grup $\Gamma(15, 1)$

Recordem les matrius que aparellaven els costats del domini fonamental  $\Gamma(15, 1)$  segons hem vist en el teorema 2.3.4.

$$\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -4 - 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$h_{15} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Per al codi de quatre elements, fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(15,1)}^4 = \{\text{Id}, \beta\}.$$

Per al codi de vuit elements, fem la tria següent:

$$S_{\Gamma(15,1)}^8 = \{\text{Id}, \beta, \gamma, \beta^{-1}\}.$$

Per al codi de setze elements fem la tria següent:

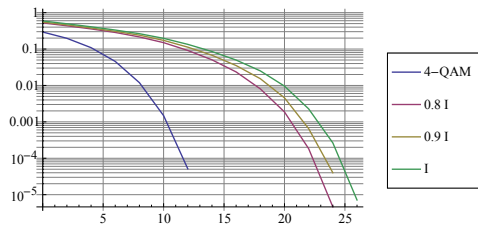
$$S_{\Gamma(15,1)}^{16} = \{\text{Id}, \beta, \gamma, \beta^{-1}, \gamma^{-1}, h_{15}^{-1}, \beta^{-1}\gamma\beta, \beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\}.$$

En la gràfica 9.6 es poden veure els resultats en emprar tres centres diferents.

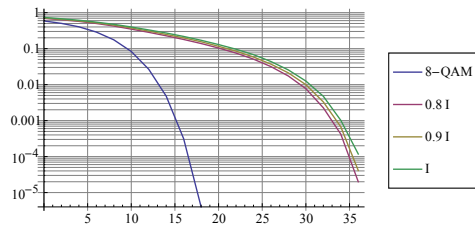
### 9.5.4 Conclusió

En la gràfica següent observarem els codis obtinguts amb els millors centres. La comparació s'ha fet amb un soroll gaussià que ha creat un error lineal en el sentit de la mesura euclidiana. Caldria, també, programar l'error gaussià de manera que els punts amb error es donessin per la distància hiperbòlica.

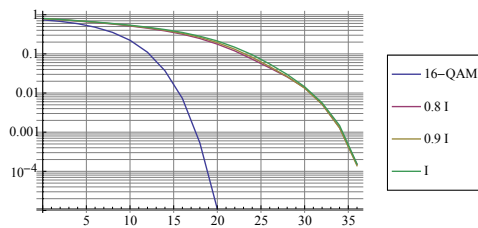
Un altre motiu pel qual és interessant l'estudi dels codis NUF que proposem, es troba en els requeriments de les noves tecnologies. Per qüestions tecnològiques, els sistemes uniformes com el QAM estan sent abandonats. Per exemple, la futura generació de l'estàndard de la televisió terrestre Global ("Digital video broadcasting", DVB-NGH) emprarà codis no uniformes. Per a més informació consultar [DVB]. Aquest és el motiu pel qual qualsevol novetat en codis no uniformes es pren amb molt d'interès en el món de les telecomunicacions.



(a) 4 elements



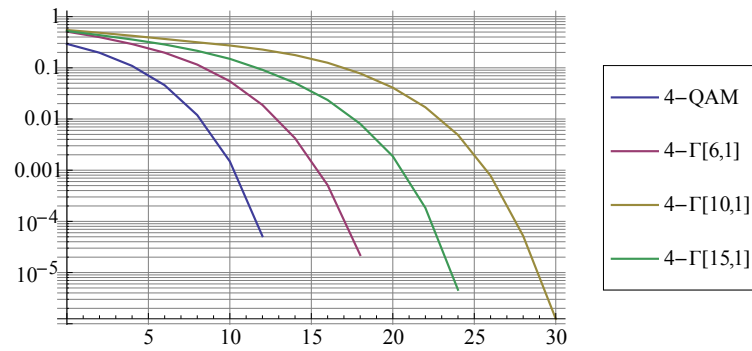
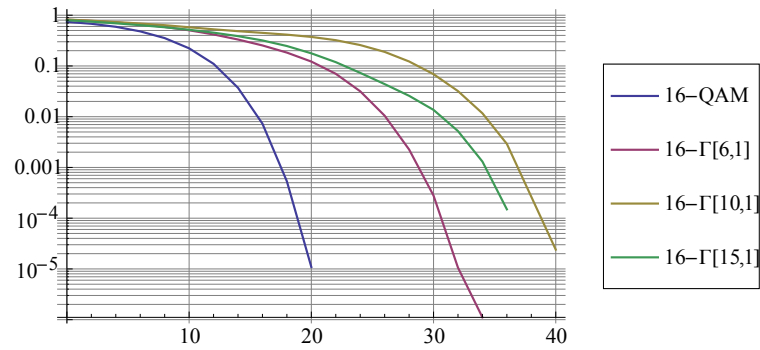
(b) 8 elements



(c) 16 elements  
y

Figura 9.6: Comparació de codis NUF(15,1)



Figura 9.7: 4-NUF per a  $\Gamma(D, 1)$  vs 4-QAMFigura 9.8: 16-NUF per a  $\Gamma(D, 1)$  vs 16-QAM

# Capítol 10

## Control de taxes i problemes oberts

En aquest capítol resumirem l'article [BCHAR16] i donarem una llista de problemes en relació amb els temes tractats en aquesta darrera part.

### 10.1 Codis fuchsians de taxes arbitràriament grans

Sigui  $F$  un cos de nombres totalment real, de grau  $[F : \mathbb{Q}] = n$ , i d'anell d'enters  $\mathcal{O}_F$ . Sigui  $H$  una àlgebra de quaternions, definida sobre  $F$  i ramificada exactament en  $(n - 1)$  de les  $n$  immersions de  $F$  en  $\mathbb{R}$ ; és a dir,

$$H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^{n-1}, \quad (10.1)$$

on  $\mathbb{H}$  denota el cos dels quaternions de Hamilton. Sigui  $\mathcal{O}$  un ordre maximal de  $H = (a, b)_F$  i  $\Gamma = \Psi(\mathcal{O}_+^*)$ , segons una immersió  $\Psi$  de  $H$  en l'àlgebra de les matrius reals com la donada en el capítol 1. Aleshores, els elements  $\gamma \in H$  es representen per matrius de la forma

$$\gamma = \begin{bmatrix} x + y\sqrt{a} & z + t\sqrt{a} \\ b(z - t\sqrt{a}) & x - y\sqrt{a} \end{bmatrix},$$

amb  $(x, y, z, t) \in F^4$ . Fixada una  $\mathbb{Z}$  base de l'ordre natural  $\mathcal{O}_F[1, I, J, K] \subseteq \mathcal{O}$  de  $F$ , poden identificar la 4-tupla  $(x, y, z, t)$  amb una  $4n$ -tupla

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^{4n}.$$

El fet que aquesta  $4n$ -tupla satisfaci l'equació nòrmica que defineix  $\Gamma$  és equivalent a que les entrades de la corresponent  $4n$ -tupla de nombres enters

satisfacin un sistema d'equacions polinòmiques de coeficients enters. Denotem aquest sistema d'equacions polinòmiques per  $A(\Gamma)$ . Notem que, atesa la condició 10.1, aquest conjunt diofantí consta d'un nombre infinit d'elements alhora que defineix una varietat algebraica de dimensió finita.

**10.1.1 Definició.** La *taxa algebraica* d'un codi fuchsian definit per un grup  $\Gamma = \Psi(\mathcal{O}_+^*)$ , mesurada en símbols per ús d'un canal (*spcu*), és la dimensió del conjunt algebraic  $A(\Gamma)$ .

El teorema següent és el resultat principal de l'article [BCHAR16].

**10.1.2 Teorema.** *Donat un cos de nombres  $F$  de grau  $n$  i totalment real, existeixen infinits codis fuchsians associats a  $F$  de taxa algebraica  $\geq 3n$ .*

La importància d'aquest teorema rau en el fet que podem codificar certa informació d'infinites maneres, no només en la matriu general sinó també en la de cadascun dels elements de les  $4n$ -tuples.

## 10.2 Grups aritmètics de signatura (1; e)

En aquesta secció construïm codis a partir de grups fuchsians de signatura  $(1; e)$ , que han estat considerats en el capítol 2.

Considerem el grup  $\Gamma$  determinat per la terna de constants algebraiques

$$\left( \sqrt{3 + \sqrt{5}}, \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}, \sqrt{9 + 5\sqrt{3}} \right).$$

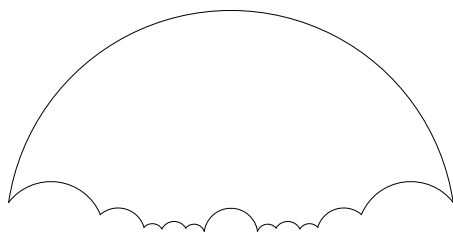
Aquest grup és de signatura  $(1; e = 2)$  i el seu cos base és  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ . Un sistema de generadors és, en virtut del teorema 2.4.2,

$$\alpha = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{-1 + \sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{-1 + \sqrt{5}} \end{bmatrix};$$

$$\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3(3 + \sqrt{5})} & -\sqrt{5 + 3\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5 + 3\sqrt{5}} & \sqrt{3(3 + \sqrt{5})} \end{bmatrix}.$$

Sigui  $\Gamma^{(2)}$  el grup generat pel quadrat dels elements de  $\Gamma$ . La figura 10.1 mostra un domini fonamental per  $\Gamma^{(2)}$ .

La figura 10.2 mostra una possible constel·lació per a un codi 4-NUF definit per  $\Gamma^{(2)}$ .

Figura 10.1: Domini fonamental per a  $\Gamma^{(2)}$ Figura 10.2: Constel·lació 4-NUF per a  $\Gamma^{(2)}$ 

## 10.3 Problemes oberts

### 10.3.1 El problema de l'etiquetatge

El problema de l'etiquetatge (*labeling*) consisteix en associar a cada seqüència de bits una paraula del codi que la identifiqui. Equivalentment, consisteix en definir una aplicació

$$EF : \mathbb{F}_2^n \rightarrow C_\Gamma.$$

En el cas dels codis QAM clàssics, aquest problema es troba resolt des de fa molt temps. Per exemple, en el cas 4-QAM el primer bit es relaciona amb el signe de la part real i el segon bit amb el signe de la part imaginària d'un nombre complex; la tira de bits 00 correspon a un nombre de part real i de part imaginària positives i a partir d'aquí es determinen els quatre quadrants.

Per al cas 16-QAM, la qüestió també està resolta. Ho podem comprovar en la figura ?? on s'hi mostra l'anomenat etiquetatge de Gray (*Gray labeling*).

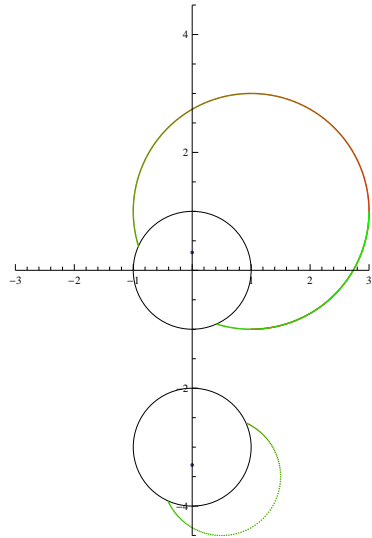
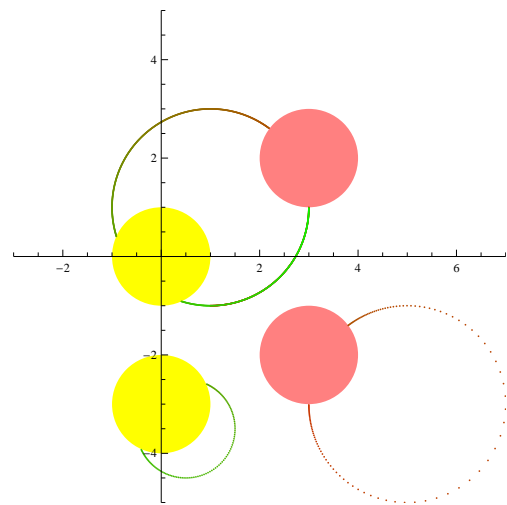
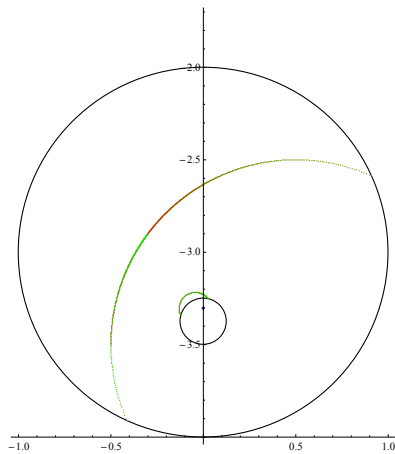
Per al cas dels codis fuchsians, aquest és un tema que es troba en fase d'experimentació.

### 10.3.2 Grups kleinians

Pel teorema 10.1.2 sabem que hi ha infinits codis fuchsians amb bones taxes algebraiques de transmissió de la informació. La recerca de propietats que permetin prioritzar els uns sobre els altres és un tema apassionant.

Però, a banda dels grups fuchsians esmentats, hi ha molts altres tipus de grups que es poden considerar. En aquest sentit, hem explorat alguns

grups kleinians amb la idea de poder ser usats per a la construcció de codis. En particular, hem estudiat grups de Schottky sobre els nombres complexos. Hi hem implementat l'algoritme de reducció i hi hem portat a terme alguns tests. Mostrem algunes figures que, essencialment, mostren la reducció de punts en el cas de grups de Schottky de gènere 1, 10.3a, de gènere 2, 10.3b, així com també la forma que tindrien les tesselles per a aquests grups 10.3b.

(a) Reducció per a  $g = 1$ (b) Reducció per a  $g = 2$ 

(c) Tessella d'un grup de Schottky

Figura 10.3: Codis de grups kleinians

# English Summary



# Apèndix A

## Maass waveforms and applications

### Introduction

The dissertation is mainly devoted to a computational treatment of Maass waveforms and to some practical applications derived from their study. For the sake of brevity, we shall refer to these functions simply as Maass forms.

Maass forms are infinitely differentiable functions which present a periodic behavior since they are automorphic with respect to Fuchsian groups. From a numerical point of view, we can say that Maass forms are much more mysterious than the usual automorphic forms, which are meromorphic functions. Of these, especially when the automorphy group is the modular group, many numerical examples are known, some of them since the 19th-century, whereas numerical examples of Maass forms have been computed only in recent years and referred always to congruence subgroups of the modular group.

The dissertation includes a survey and implementation of previously existing algorithms for computing developments of Maass forms around the cusp infinity in Riemann surfaces arising from congruence subgroups of the modular group. Then we propose other algorithms, according to the philosophy of [BT07a] and [BT07b], focused on the computation of developments of Maass forms around any point, not necessarily cuspidal. These algorithms are discussed in the modular case and also in the quaternion case, in which the Fuchsian group arises as the unit group of an order in an indefinite rational quaternion algebra of discriminant  $D > 1$ .

The discontinuous nature of the Fuchsian groups involved has been used to design point reduction algorithms and binary quadratic form reduction



algorithms, which have become a key point to reach the above goals. At the same time, we have used the reduction algorithms to design new codes oriented to transmission data in wireless channels, such as those that we use in our nowadays phones. Due to their origin, we have named these codes *fuchsian codes*.

## A.1 Fuchsian groups

Chapter 1 and chapter 2 deal with those specific aspects of the theory of Fuchsian groups which will be used during the dissertation. In particular, we introduce basic concepts of hyperbolic geometry and the group of isometries of the Poincaré half-plane  $\mathcal{H}$ .

We mainly distinguish two types of Fuchsian groups: modular Fuchsian groups and quaternion Fuchsian groups. Both types are presented as groups of units of orders in quaternion algebras. The first type will lead to non-compact fundamental domains and the second, to compact fundamental ones. In the case of congruence subgroups of the modular group, we need an algorithm for computing a set of right  $\Gamma_0(q)$ -classes in the modular group  $\Gamma_0(1)$  and which is based in proposition A.1.1.

Chapter 2 presents a summary of known fundamental domains for the action of Fuchsian groups over the complex upper half-plane  $\mathcal{H}$ . We consider those specific Fuchsian groups that will be used in the next chapters.

**A.1.1 Proposition.** *The algorithm 8 provides a set of representatives of right  $\Gamma_0(q)$ -classes in the modular group  $\Gamma_0(1)$ . In it,  $n(m)$  denotes the smallest integer that satisfies the congruence*

$$n(m)m^2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

□

References for this chapter are [Kat92] and the first chapter of [Miy06], for the modular groups, and [AB04], for the quaternion groups.

### A.1.1 Fundamental domains

**A.1.2 Definition.** A region  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$  is said to be a fundamental domain for the group  $\Gamma$  if

1.  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$ .
2.  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \cap \gamma(\overset{\circ}{\mathcal{F}}) = \emptyset$ , for all  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ .

**Data:**  $q$ : determine  $\Gamma_0(q)$   
**Result:**  $C$ : set of representatives of  $\Gamma_0(q)\backslash\Gamma_0(1)$   
 $C = \emptyset$ ;  
**for**  $k = 0$  *to*  $k = q - 1$  **do**  
    |  $C = C \cup \{ST^k\}$   
**end**  
**for**  $m \in \mathbf{M}$  **do**  
    | **for**  $j = 0$  *to*  $j = n(m) - 1$  **do**  
        |  $C = C \cup \{ST^m ST^j\}$   
        **end**  
    **end**  
**end**

**Algorithm 8:** Coset enumeration algorithm

Figures 2.1 and 2.2 show fundamental domains for the modular congruence subgroups  $\Gamma_0(5)$  and  $\Gamma_0(6)$ . Identification of sides are also indicated. The references used to design these figures have been [Iwa97], [Miy06] and [Kat92]. Figures 2.3, 2.4, 2.5 and 2.6 correspond to fundamental domains for quaternion groups. The references used to reproduce these figures have been [AB04], and also [NT12] in the case of the fundamental domain for the group  $\Gamma(6, 5)$ . We have also used results of the thesis [Sij13] for some genus 1 groups as those shown in figures 2.7 and 2.8. It should be noted that proposition 2.4.5 describes the generators of the square of a given group with given signature.

We also show figures of the above fundamental domains in the unit disk. In figure 2.9, the point that is applied to the center is  $p = \frac{i}{2}$ ; it corresponds to the fundamental domain of the group  $\Gamma(6, 1)$ . In figures 2.10 and 2.11, the center point is  $p = \frac{\sqrt{5}i}{5}$ ; these figures correspond to fundamental domains of  $\Gamma(10, 1)$  and  $\Gamma(15, 1)$ .

The following theorem describes the fundamental domain of a cocompact Fuchsian group acting on the unit disk  $\mathcal{D}$ . We have used the result in the reduction algorithm of chapter 3.

**A.1.3 Theorem.** *For every cocompact Fuchsian group  $\Gamma$ , there exists a finite set of generators  $G$  of  $\Gamma$  such that  $G^{-1} = G$  and the set*

$$\bigcap_{g \in G^\phi} \overline{\text{Ext}(E(g)) \cap \mathcal{D}}$$

*is a fundamental domain for the conjugate group  $\Gamma^\phi$ . This fundamental domain is the image of a Dirichlet fundamental domain  $\mathcal{F}_p$  of  $\Gamma$ .*

## A.2 Point reduction algorithm

In chapter 3 we develop the point reduction algorithm, which is the most important tool that we use throughout the dissertation. We begin by studying the reduction point algorithm in the case of the modular group and its congruence subgroups for which we use the coset enumeration algorithm developed in the first chapter.

In the case of quaternion groups, firstly we develop a specific algorithm for the group  $\Gamma(6, 1)$  by taking advantage of its discontinuous nature. The definitions of wrapping set and of star domain have been raised during the design of this algorithm.

**A.2.1 Definition.** Let  $\Gamma$  be a Fuchsian group with fundamental domain  $\mathcal{F}$ . Let  $\mathcal{T} \subseteq \Gamma$  be a set of transformations. We say that the set  $\mathcal{T}$  *wraps* the fundamental domain  $\mathcal{F}$  if the set

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{T}} \gamma(\mathcal{F})$$

is connected and satisfies that, for every  $z \in \mathcal{F}$ , there is an  $\varepsilon > 0$  such that  $B_{\varepsilon}(z) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ , where  $B_{\varepsilon}(z)$  is the ball of radius  $\varepsilon$  centered at  $z$ .

**A.2.2 Definition.** We define  $\Gamma^* \subseteq \Gamma$  as the set of transformations for which

$$\bigcup_{g \in \Gamma^*} g(\mathcal{F}) = \mathcal{C}_{\Gamma^*} = \bigcap_{\mathcal{T}} \mathcal{C}_{\mathcal{T}}.$$

Let  $\star(\mathcal{F})$  be the set defined as

$$\star(\mathcal{F}) := \bigcup_{g \in \Gamma^*} g(\mathcal{F}).$$

We call this set the *star set* of  $\mathcal{F}$ .

From the above definitions and a set of intermediate lemmas, we arrive at the following theorem, which describes a specific algorithm for reducing points from outside to inside of a fundamental domain for the group  $\Gamma(6, 1)$ .

**A.2.3 Theorem.** *The algorithm 9 is a point reduction algorithm for the group  $\Gamma(6, 1)$ .*

Once we have developed the preceding specific algorithm for the group  $\Gamma(6, 5)$ , we make a detailed study of the arithmetic group of signature  $(1; 2)$  determined by the triad  $(\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$ . We also collect other reduction algorithms that we have developed in [BR14] and which cover the groups  $\Gamma(10, 1)$  and  $\Gamma(15, 1)$ . We are now ready to prove a general point reduction algorithm which is stated in the following theorem.

**Data:**  $\langle \gamma_2, \gamma_4, \gamma_6 \rangle = \Gamma(6, 1)$ ,  $z_0 \in \mathcal{H}$   
**Result:**  $z_1 \in \mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$  with  $\gamma(z_0) = z_1$  and  $\gamma \in \Gamma(6, 1)$   
 $z_0 = z$ ;  
**while**  $z_0 \notin \mathcal{F}$  **do**  
    **if**  $|z_0| > 1$  **then**  
         $z_0 = \gamma_6(z_0)$   
    **else**  
        **if**  $\Re(z_0) \leq 0$  **then**  
             $z_0 = \gamma_2(z_0)$   
        **end**  
        **if**  $\Re(z_0) > 0$  **then**  
             $z_0 = \gamma_4(z_0)$   
        **end**  
    **end**  
**end**

**Algorithm 9:** Simplified point reduction algorithm for  $\Gamma(6, 1)$

**A.2.4 Theorem. (General point reduction algorithm)** *Let  $\Gamma$  be a co-compact Fuchsian group and  $G$  an ordered finite set of generators of  $\Gamma$  such that  $G^{-1} = G$ . Let  $\mathcal{F}$  be a fundamental domain contained in the unit circle and constructed from  $G$ . The following algorithm reduces a given point  $z \in \mathcal{H}$  to a point  $z_0 \in \mathcal{F}$ , and returns the transformation  $t \in \Gamma$  such that  $t(z) = z_0$ .*

1. Start  $z_0 = z$  and  $t = \text{Id}$ .
2. If  $z_0 \in \mathcal{F}$  return  $z_0$  and  $t$ .
3. Find the first  $g \in G$  such that  $z_0 \in \text{int}(I(g))$ .
4. Compute  $z_0 = g(z_0)$  and  $t = g \cdot t$ . Go to step 2.

In order to show the application of the algorithm in concrete instances, we display a set of figures with sets of reduced points for different groups. The figures are 3.1a and 3.1b for congruence subgroups; 3.7 for the group  $\Gamma(6, 1)$ ; 3.8 for the group  $\Gamma(6, 5)$ ; 3.9 for the group  $\Gamma(10, 1)$  and 3.10 for the group  $\Gamma(15, 1)$ .

## A.3 Binary quadratic form reduction algorithm

In chapter 4 we give an arithmetic application of the reduction point algorithm to the study of the classes of binary quadratic forms with algebraic

integer coefficients attached to quaternion orders. We define the concept of reduced quadratic form which, in practice, will depend on the fundamental domains that we have been constructing. Of course our definition generalizes the one given by Legendre and Gauss for the modular group  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

**A.3.1 Definition.** Given a 4-integer vector  $(D, N, d, m)$ , a Fuchsian group  $\Gamma(D, N)$ , and a fixed fundamental domain  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Gamma(D, N))$ , we say that a form of the set  $\mathcal{H}^*(D, N, d, m)$  is reduced if one of its zeros lies in  $\mathcal{F}$ .

With this result and the results of [AB04] (theorems 4.62 and 4.64), we obtain the algorithm 10 to reduce the forms. Once we have developed and implemented the algorithm, we give three specific examples of reduced families of quadratic forms; namely, the sets  $\mathcal{P}(6, 1, -10, 5)$ ,  $\mathcal{P}(10, 1, -10, 3)$  and  $\mathcal{P}(15, 1, -10, 4)$ . The reduced forms can be found in the tables 4.1, 4.2 and 4.3, respectively.

**Data:**  $(D, N, d, m)$

**Result:** reduced zeros

$t = \text{TableGenerator}((a, b, c))$  satisfying conditions of 4.1.4 or 4.2.1;

**for** *for the elements of t* **do**

$z_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$
reduce $z_0$ ;
rewrite the form;

**end**

find point at boundary;

**Algorithm 10:** Form reduction algorithm

## A.4 Maass forms

### A.4.1 The operator of Laplace-Beltrami

Chapter 5 contains basic concepts related to the study of Maass forms, such as the Laplace-Beltrami operator, details of local functions which are eigenvectors of the Laplace-Beltrami operator, and the proper definition of Maass form. A necessary relation between these concepts is given in the following theorem.

**A.4.1 Theorem.** *Consider the complex function*

$$f(z) := y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix}, \quad z = x + iy.$$

Then  $f$  is an eigenfunction for Laplace-Beltrami operator

$$\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

with eigenvalue  $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ .

The chapter also recalls the concept of stationary Schrödinger equation to justify why Maass forms are also called Maass waveforms (see [HS01]). Finally, we give the definition of Maass form.

**A.4.2 Definition.** Let  $\Gamma$  be a Fuchsian group of the first kind. An infinitely differentiable function

$$f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

is said to be a Maass waveform (or a Maass form of weight  $k = 0$ ) with respect to the group  $\Gamma$  if it satisfies the following conditions:

1. The function  $f$  is a eigenfunction of the Laplace-Beltrami operator; that is, there is a constant  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , such that

$$\Delta f = \lambda f.$$

2. The function  $f$  is invariant under the action of  $\Gamma$ , i.e., it satisfies

$$f(\gamma z) = f(z), \quad \text{for all } \gamma \in \Gamma.$$

3. The function  $f$  is square integrable; that is,

$$\int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty,$$

where the integral is extended over a fundamental domain  $\mathcal{F}$  of  $\Gamma$ .

If we want to consider forms attached to a character  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  we will change the second statement of the definition by the following:

- 2'.  $f(\gamma z) = \chi(\gamma)f(z)$ , for all  $\gamma \in \Gamma$ .

The space of new Maass forms without character, with a fixed eigenvalue, has been conjectured to be of dimension one. Furthermore, the eigenvalues

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

counted with multiplicities, form a discrete set of real numbers. For these values it is known a general Weyl law. In particular, for congruence subgroups  $\Gamma_0(q)$  and trivial character, it is given by the asymptotic relation

$$N_{\Gamma_0(q)}(t) = \frac{\mu(\mathcal{F}_q)}{4\pi}t - \frac{2h}{\pi}\sqrt{t}\ln\sqrt{t} + a\sqrt{t} + O\left(\frac{\sqrt{t}}{\ln\sqrt{t}}\right), \quad (\text{A.1})$$

where  $N_{\Gamma_0(q)}(t)$  denotes the number of eigenvalues smaller than  $t$ .

Observe that the function

$$f(x + iy) := y^{1/2}K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

satisfies conditions 1 and 3 of the definition of Maass waveform.

**A.4.3 Definition.** We name *Bessel-Fourier development*, around the cusp infinity, the developments of the form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\kappa_n(y)e^{2\pi inx}, \quad z = x + iy. \quad (\text{A.2})$$

## A.4.2 Maass-Hecke forms

First of all we try to develop a systematic way to compute Bessel-Fourier coefficients of Maass forms for the modular case. We begin by considering Maass forms that appear in Maass original paper of 1949.

**A.4.4 Theorem. (Maass, 1949)** *Suppose that  $\nu \neq 0$ . The function  $f^\psi$  defined by*

$$f^\psi(x + iy) = \begin{cases} \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a})\sqrt{y}K_\nu(2\pi|\mathfrak{a}|y) \cos(2\pi|\mathfrak{a}|x), & \text{if } \epsilon = 0, \\ \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a})\sqrt{y}K_\nu(2\pi|\mathfrak{a}|y) \sin(2\pi|\mathfrak{a}|x), & \text{if } \epsilon = 1, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

*is a Maass cusp form for the group  $\Gamma_0(q)$ . More precisely, it satisfies the functional equation*

$$f^\psi\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \chi_q(d)f^\psi(z), \quad \text{for } \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(q), \quad (\text{A.4})$$

*where  $\chi_q$  denotes the quadratic Kronecker character of  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$  and the sum extends to all ideals  $\mathfrak{a}$  of  $\mathcal{O}_F$ .*

This theorem has led to the algorithm 11 for computing what we have called *Maass-Hecke forms*. In fact, the algorithm consists in computing Hecke characters associated to real quadratic fields with strict class number equal to 1. With this algorithm, we obtained table 6.2.

**Data:**  $d$  discriminant,  $k$  power of a Hecke character,  $n$  number of coefficients

**Result:** Maass form coefficients

Compute  $\nu = \frac{\pi ik}{2 \log \eta}$ ;

```

for  $i < n$  do
  if  $i$  is prime then
    if  $\chi_d(i) = 1$  then
      Solve  $p = a^2 - db^2$ ;
      Compute  $c = \left| \frac{a + b\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \right|^\nu + \left| \frac{a - b\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} \right|^\nu$ ;
    else
       $c_i = 0$ 
    end
  else
    Apply formula (6.5);
  end
end

```

**Algorithm 11:** Algorithm for Maass-Hecke forms

## A.5 Modular Maass forms

Maass-Hecke forms are part of the small number of Maass forms whose coefficients can be directly computed by means of formulas. Maass-Hecke forms, however, do not cover all Maass forms, as the general Weyl law tells us. In this chapter we give an algorithm for computing other Maass forms for congruence subgroups of the modular group.

The algorithm that we are going to explain is based in a previous existing algorithm, that was implemented in [Str12] and studied in [Rem09]. Our presentation makes use of the point reduction algorithm in order to obtain a homogeneous linear system

$$VC = 0$$

that is overdetermined. The condition that the first coefficient of the Bessel-Fourier series is equal to 1 allows to obtain the other series coefficients. The results of these calculations can be found in table 7.1.

In what follows we first discuss a suitable shape for the local developments of our Maass forms.

**A.5.1 Theorem. (Local developments)** *Let  $f$  be a  $C^2$  function, eigenvector of the Laplace-Beltrami operator with eigenvalue  $s(s - 1)$ , being  $s$  a*



complex number different of a negative integer, and  $P \in \mathcal{H}$ . Then, in a neighbourhood,

$$N(P; r) = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid \left| \frac{z - P}{z - \overline{P}} \right| < r \right\}$$

the function  $f$  admits a development as a sum of two power series, of the form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(-n) \mathbf{c}_n(z) \overline{q(z)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \mathbf{c}_n(z) q(z)^n,$$

where the function  $q(z)$  is the local parameter invariant under the isotropy group and the function  $\mathbf{c}_n(z)$  is defined by

$$\mathbf{c}_n(z) = \left( 1 - \left| \frac{z - P}{z - \overline{P}} \right|^2 \right)^s \frac{F \left( s + n, s, 1 + n, \left| \frac{z - P}{z - \overline{P}} \right|^2 \right)}{\Gamma(1 + n)}.$$

Taking this into account, we shall obtain local series developments for the above calculated waveforms.

The main references for this chapter have been [Str12], [BT07a], and [Hej83].

## A.6 Quaternion Maass forms

There are several examples in the Langlands program that relate the modular world to the quaternion world; the most popular one being the correspondence of Jacquet-Langlands (cf. [Are03]). In the context of Maass forms, several results, mainly due to Hejhal, Bolte and Johansson ([Hej85], [BJ99a] and [BJ99b]), claim that the spectrum of the hyperbolic Laplace operator acting on spaces of Maass forms automorphic with respect to certain quaternion groups coincides with the spectrum of the hyperbolic Laplace operator acting on spaces of Maass forms automorphic for modular congruence subgroups. Since the Hejhal-Bolte-Johansson correspondence is, to some extent, effective, this circumstance will allow us to infer a possible numerical evaluation of quaternion Maass forms and to obtain their local developments.

According to [Hej85], we consider the following generalized theta-function:

$$\vartheta(z, z_0; \tau) = \mathfrak{S}(\tau) \sum_{q \in \mathcal{O}} e^{\pi n(q)[2ui + v(\phi(q, z, z_0) + 2)]},$$

where  $\tau = u + iv$ , and  $\mathcal{O}$  denotes an order in an indefinite rational quaternion algebra  $H$ . Consider the congruence subgroup  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$ , with level given by the discriminant  $d = d(\mathcal{O})$ .

Given an eigenfunction  $\phi \in L^2_0(\mathcal{F}_\mathcal{O})$  of the Laplace-Beltrami operator,  $\Delta\phi = \lambda\phi$ , we consider the integral transform

$$\Theta(\phi)(\tau) := \int_{\mathcal{F}_\mathcal{O}} \vartheta(z; \tau)\phi(z)d\mu(z). \tag{A.5}$$

For a Maass cusp form  $g$  for  $\Gamma_0(d(\mathcal{O}))$  with  $\Delta g = \mu g$  we consider the integral transform

$$\tilde{\Theta}(g)(z) := \int_{\mathcal{F}_d} \overline{\vartheta(z; \tau)}g(\tau)d\mu(\tau), \tag{A.6}$$

where  $\mathcal{F}_d := \mathcal{F}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})))$ . The integral is absolutely convergent due to the  $\vartheta(z; \tau)$  behavior when  $\tau$  approaches the cusps of  $\mathcal{F}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})))$ .

**A.6.1 Theorem. (Hejhal, Bolte, Johansson)** *The correspondence (HBJ) tells us.*

1. *If  $\phi \in \mathcal{M}(\Gamma(\mathcal{O}), \lambda)$  is an eigenfunction of the Laplacian with eigenvalue  $\lambda$ , then  $\Theta(\phi) \in \mathcal{M}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})), \lambda)$  is an eigenfunction of the Laplacian with the same eigenvalue.*
2. *If  $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(d(\mathcal{O})), \mu)$  is a cuspidal eigenfunction of the Laplacian with eigenvalue  $\mu$ , then  $\tilde{\Theta}(g) \in \mathcal{M}(\Gamma(\mathcal{O}), \mu)$  is a eigenfunction of the Laplacian with the same eigenvalue.*

The theorem will allow us to compute quaternion Maass forms from an explicit knowledge of modular Maass forms. Since the previous correspondence is given in terms of an integral transform, now we recall some results related to equidistribution of points, to prepare its numerical evaluation.

**A.6.2 Theorem. (Duke Michel, Venkatesh)** *Let  $H = (a, b)_\mathbb{Q}$  be an indefinite rational quaternion algebra with discriminant  $D$ ,  $\mathcal{O}$  an Eichler order of level  $N$  and  $\Gamma(D, N)$  the Fuchsian group determined by the group of units of norm 1 of  $\mathcal{O}$ . Let  $R(d, m)$  be an order of an imaginary quadratic field embedded in  $\mathcal{O}$ . Let  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$  be the set of zeros in  $\mathcal{H}$  of the reduced binary quadratic forms associated to  $\mathcal{O}(D, N)$  and  $R(d, m)$ . Then, when  $dm \rightarrow -\infty$ , the set of points  $\mathcal{P}(D, N, d, m)$  is equidistributed in the Riemann surface  $\Gamma(D, N)\backslash\mathcal{H}$ , with respect to the hyperbolic measure.*

These results allow the description of an algorithm for the evaluation of quaternion Maass forms. Putting all the results of the previous chapters together, an algorithm to obtain the local coefficients of quaternion Maass forms is designed in section 8.4.

## A.7 Fuchsians codes

In the two last chapters we explain an application of the above techniques to design transmitting information codes. Part of the results can be found in the papers [BRHA14] and [BCHAR16], which contain joint work with Alsina, Blanco-Chacón and Hollanti.

The point reduction algorithm can be applied to obtain a new generation of codes for sending information, the Fuchsian codes. Fuchsians codes are defined as follows.

Given a subset  $S \subseteq \Gamma$ , let

$$C_{\Gamma,+} = \{z = \gamma(P), \gamma \in S\} \subseteq \mathcal{H}.$$

Let

$$n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and consider

$$C_{\Gamma} = C_{\Gamma,+} \cup n(C_{\Gamma,+}). \quad (\text{A.7})$$

**A.7.1 Definició.** Let  $\Gamma$  be a cocompact Fuchsian group. The code

$$C_{\Gamma}(\Gamma, \mathcal{F}, S, P)$$

is called the Fuchsian code attached to  $\Gamma$ . We say that it is an  $n$ -NUF code (non uniform Fuchsian code) if  $n = \#C_{\Gamma}$ .

It was necessary to make a study of the computational cost of the proposed decoding system. In this sense, these codes have logarithmic cost in terms of the code size, as we prove in the following theorem.

**A.7.2 Theorem.** *The number of required steps to decode a word code  $t(z)$  by acting an  $n$ -NUF code on an appropriate channel is logarithmic in the size of the code. That is,*

$$\ell(t(z)) = O(\log(n)),$$

where  $\ell(t(z))$  denotes the depth of the word.

Later on, in the same chapter, we develop some specific examples of Fuchsian codes with their performance (see section 9.5.1, 9.5.2 and 9.5.3). Publications related to this chapter were initially [BRH13], and then [BRHA14], as well the last section of [BR14].

### A.7.1 Rate control and open problems

Chapter 10 contains a summary of the paper [BCHAR16] and a section of open problems and proposals for future improvements of Fuchsian codes. The section is divided in two parts. The first part is devoted to explain how the use of the structure of quaternion groups can improve the rate of transmission of information. The improvement uses the representation of the group of units into the matrix algebra given in (1.5). The second part of the paper deals with the construction of Fuchsian codes by using groups of signature  $(1; e)$ .

In the open problem section, the labeling problem is formulated and it is taken into account the use of other groups for encoding messages, such as Schottky groups. A point reduction algorithm for Schottky groups is shown in figures 10.3. These figures reproduce those presented in [Rem15].



# Apèndix B

## Published articles

### B.1 Articles in international journals

Alsina, M.; Blanco-Chacón, I.; Hollanti, C.; Remón, D.: Fuchsian codes with arbitrarily high code rates. *Journal of Pure and Applied Algebra* 220 (2016) 180-196.

Alsina, M.; Blanco-Chacón, I.; Hollanti, C.; Remón, D.: Nonuniform Fuchsian codes for noisy channels. *J. Franklin Inst.* 351 (issue 11), (2014) 5076-5098.

Bayer, P.; Remón, D.: A reduction point algorithm for cocompact Fuchsian groups and applications. *Adv. Math. Commun.* 8 (2014) 223-239.

### B.2 Contributions to books

Blanco-Chacón, I.; Hollanti, C.; Remón, D.: Fuchsian codes for AWGN channels. PREPROCEEDINGS. *The International Workshop on Coding and Cryptography*, WCC 2013. p. 496-507. Bergen (2013). ISBN: 978-82-308-2269-2

### B.3 Miscellaneous

Remón, D.: Maass waveforms and differential operators. Universitat de Barcelona, Master thesis, 2009.

Remón, D.: A mathematical point of view over particle physics. Universitat de Barcelona, DEA, 2007.



# Índex alfabètic

- àlgebra de quaternions, 8
- òrbita d'un punt, 5
- acció discontinua, 5
- algoritme *flip flop*, 31
- algoritme de reducció, 52
- algoritme de reducció de punts, 31
- centre del codi, 117
- cercle d'isometria, 12
- codi fuchsià, 118
- conjunt estrella, 39
- desenvolupament de Bessel-Fourier, 79
- domini de Dirichlet, 13
- domini fonamental, 11
- element el·líptic, 5
- element enter, 9
- element hiperbòlic, 5
- element parabòlic, 5
- energia codi, 121
- envoltador, 38
- equació diferencial hipergeomètrica, 93
- forma de Maass, 74
- forma de Maass cuspidal, 79
- forma quadràtica binària, 55
- forma reduïda, 57
- formes de Maass modulars, 75
- formes de Maass quaterniòniques, 75
- formes de Maass-Hecke, 77
- funció hipergeomètrica, 93
- funcions Bessel modificades, 70
- funcions Bessel primera espècie, 68
- funcions Bessel segona espècie, 70
- grup  $\Gamma(10, 1)$ , 20
- grup  $\Gamma(15, 1)$ , 22
- grup  $\Gamma(6, 1)$ , 16
- grup de congruència principal, 6
- grup fuchsià, 5
- grup isotropia, 5
- majorant, 101
- model disc unitat, 27
- modulació d'amplitud en quadratura, QAM, 114
- modulació del senyal, 113
- nombre de classes, 81
- nombre estricte de classes, 81
- operador de Laplace, 67
- operador de Laplace-Beltrami, 67
- ordre, 9
- ordre d'Eichler, 9
- paràmetre local, 92
- profunditat, 119
- punt el·líptic, 6
- punt hiperbòlic, 6
- punt parabòlic, 6
- representació de l'àlgebra, 9
- signal to noise ratio, SNR, 114
- signatura d'un grup, 24
- subgrup discret, 5
- taxa algebraica, 128



tessel·lació, 12

unitat fonamental, 80

unitat fonamental normalitzada, 80

# Índex de figures

2.1	Domini fonamental per $\Gamma_0(5)$ . . . . .	15
2.2	Domini fonamental per $\Gamma_0(6)$ . . . . .	16
2.8	Domini fonamental per a $\Gamma^{(2)}$ . . . . .	27
3.1	Reducció de punts en subgrups de congruència . . . . .	33
3.2	Vora superior de $S^-$ per a $\Gamma(6, 1)$ . . . . .	37
3.3	$\star(\mathcal{F}(\Gamma(6, 1)))$ . . . . .	39
3.4	$S_1^-$ per al grup $\Gamma(6, 1)$ . . . . .	41
3.5	$N_2^-$ per al grup $\Gamma(6, 1)$ . . . . .	41
3.6	$S_2^-$ per al grup $\Gamma(6, 1)$ . . . . .	41
3.7	Reducció de punts en $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$ . . . . .	45
3.8	Reducció de punts en $\mathcal{F}(\Gamma(6, 5))$ . . . . .	47
4.1	El conjunt de punts $\mathcal{P}(6, 1, -10, 5)$ . . . . .	60
4.2	El conjunt de punts $\mathcal{P}(10, 1, -10, 3)$ . . . . .	62
4.3	El conjunt de punts $\mathcal{P}(15, 1, -10, 4)$ . . . . .	63
9.1	Comparació de codis QAM . . . . .	116
9.2	Etiquetatge de Gray per al codi 16-QAM . . . . .	117
9.3	Regions per a $\mathcal{F}(\Gamma(6, 1))$ . . . . .	120
9.4	Comparació de codis NUF(6,1) . . . . .	122
9.5	Comparació de codis NUF(10,1) . . . . .	123
9.6	Comparació de codis NUF(15,1) . . . . .	125
10.3	Codis de grups kleinians . . . . .	130



# Índex de taules

4.1	Formes reduïdes del conjunt $H^*(6, 1, -10, 5)$ . . . . .	60
4.2	Formes reduïdes del conjunt $H^*(10, 1, -10, 3)$ . . . . .	62
4.3	Formes reduïdes del conjunt $H^*(15, 1, -10, 4)$ . . . . .	63
6.1	Unitats fonamentals de norma $-1$ . . . . .	82
6.2	Coefficients $c(p)$ d'índex primer . . . . .	85
7.1	Coefficients de formes de Maass . . . . .	90
7.2	Coefficients de formes de Maass a l'entorn de $P$ . . . . .	99



# Bibliografia

- [AB04] Montserrat Alsina and Pilar Bayer. *Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves*, volume 22 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Are03] A. Arenas. On the traces of Hecke operators. *J. Number Theory*, 100(2):307–312, 2003.
- [AST12] Ralf Aurich, Frank Steiner, and Holger Then. Numerical computation of Maass waveforms and an application to cosmology. In *Hyperbolic geometry and applications in quantum chaos and cosmology*, volume 397 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 229–269. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [Bay11] Pilar Bayer. Contributions to Shimura curves. In *WIN–women in numbers: Research directions in number theory. Papers evolved out of the WIN workshop, Banff, Canada, November 2–7, 2008*, pages 15–33. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Toronto: The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2011.
- [BCHAR16] I. Blanco-Chacón, C. Hollanti, M. Alsina, and D. Remón. Fuchsian codes with arbitrarily high code rates. *J. Pure Appl. Algebra*, 220(1):180–196, 2016.
- [BG05] Pilar Bayer and Jordi Guàrdia. On equations defining fake elliptic curves. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 17(1):57–67, 2005.
- [BJ99a] Jens Bolte and Stephan Johansson. *Emerging applications of number theory*, chapter Theta-lifts of Maass waveforms, pages 39–72. Springer-Verlag, 1999.
- [BJ99b] Jens Bolte and Stephan Johansson. A spectral correspondence for Maass waveforms. *GAFAG, Geom. funct. anal.*, 9:1128–1155, 1999.

- [BR14] Pilar Bayer and Dionís Remón. A reduction point algorithm for cocompact Fuchsian groups and applications. *Adv. Math. Commun.*, 8(2):223–239, 2014.
- [BRH13] Ivan Blanco-Chacón, Dionís Remón, and Camilla Hollanti. *PREPROCEEDINGS. The International Workshop on Coding and Cryptography, WCC 2013*, chapter Fuchsian codes for AWGN channels, pages 496–507. University of Bergen, Norway and INRIA, Rocquencourt, France, 2013.
- [BRHA14] Iván Blanco-Chacón, Dionís Remón, Camilla Hollanti, and Montserrat Alsina. Nonuniform Fuchsian codes for noisy channels. *J. Franklin Inst.*, 351(11):5076–5098, 2014.
- [BSV06] Andrew R. Booker, Andreas Strömbergsson, and Akshay Venkatesh. Effective computation of Maass cusp forms. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71281, 34, 2006.
- [BT07a] Pilar Bayer and Artur Travesa. Uniformization of triangle modular curves. *Publ. Mat.*, 2126:43–106, 2007.
- [BT07b] Pilar Bayer and Artur Travesa. Uniformizing functions for certain shimura curves, in the case  $D = 6$ . *Acta Arith.*, 126:315–339, 2007.
- [Bum97] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*. Cambridge: Cambridge University Press, paperback edition, 1997.
- [CAPV11] E.D. Carvalho, A.A. Andrade, R.jun. Palazzo, and J. Vieira Filho. Arithmetic Fuchsian groups and space time block codes. *Comput. Appl. Math.*, 30(3):485–498, 2011.
- [dSFCjP06] Eduardo Brandani da Silva, Marcelo Firer, Sueli R. Costa, and Reginaldo jun. Palazzo. Signal constellations in the hyperbolic plane: a proposal for new communication systems. *J. Franklin Inst.*, 343(1):69–82, 2006.
- [Duk88] W. Duke. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms. *Invent. Math.*, 92(1):73–90, 1988.
- [DVB] DVB. Digital video broadcasting project, the global standard for digital television. [dvb.org](http://dvb.org).

- [GV59] M.E. Gertsenshtein and V.B. Vasil'ev. Waveguides with random inhomogeneties and Brownian motion in the Lobachevsky plane. *Theory Probab. Appl.*, 4:391–398, 1959.
- [Hej76] Dennis A. Hejhal. The Selberg trace formula for  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Vol. I. Lecture Notes in Mathematics. 548. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. iv, 516 p., 1976.
- [Hej83] Dennis A. Hejhal. The Selberg trace formula for  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Vol. 2. Lecture Notes in Mathematics. 1001. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo; Springer-Verlag. VIII, 806 p., 1983.
- [Hej85] Dennis A. Hejhal. A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups. Number theory, Semin. New York 1983-84, Lect. Notes Math. 1135, 127-196., 1985.
- [Hej12] Dennis A. Hejhal. On the calculation of Maass cusp forms. In *Hyperbolic geometry and applications in quantum chaos and cosmology*, pages 175–185. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [HR92] Dennis A. Hejhal and Barry N. Rackner. On the topography of Maass waveforms for  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . *Exp. Math.*, 1(4):275–305, 1992.
- [HS01] Dennis A. Hejhal and Andreas Strömbergsson. On quantum chaos and Maass waveforms of CM-type. *Found. Phys.*, 31(3):519–533, 2001. Invited papers dedicated to Martin C. Gutzwiller, Part IV.
- [Iwa97] Henry Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. Springer, 1997.
- [Iwa02] Henry Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2002.
- [JP07] O. Jenkinson and M. Pollicott. A dynamical approach to accelerating numerical integration with equidistributed points. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 256(Din. Sist. i Optim.):290–304, 2007.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago: The University of Chicago Press, 1992.



- [Maa49] Hans Maaß. Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. (On a new type of nonanalytic automorphic functions and the determination of Dirichlet series by functional equations). *Math. Ann.*, 121:141–183, 1949.
- [Miy06] Toshitsune Miyake. *Modular forms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2006. Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda.
- [MV06] Philippe Michel and Akshay Venkatesh. Equidistribution,  $L$ -functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 421–457. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [Neu07] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Berlin: Springer, reprint of the 1992 original edition, 2007.
- [NT12] Joan Nualart and Artur Travesa. Uniformizing functions for Shimura curves:  $X(6, 5)$  and its quotients. *Preprint*, 2012.
- [Rem07] Dionís Remón. Un punt de vista matemàtic de la física de partícules. Master’s thesis, Universitat de Barcelona, 2007. Treball final de DEA.
- [Rem09] Dionís Remón. Formes d’ona de Maass i operadors diferencials. Master’s thesis, Universitat de Barcelona, 2009. Treball final de màster.
- [Rem15] Dionís Remon. *Uniformització  $p$ -àdica de corbes de gènere  $g \geq 1$* , chapter Grups de Schottky en  $\mathbb{C}$ . Notes del Seminari de Teoria de Nombre UB-UAB-UPC, 2015.
- [Ser73] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.
- [Shi10] Goro Shimura. *Arithmetic of quadratic forms*. Berlin: Springer, 2010.
- [Sij13] Jeroen Sijsling. Canonical models of arithmetic  $(1; e)$ -curves. *Math. Z.*, 273(1-2):173–210, 2013.

- [Str01] Andreas Strömbergsson. Some remarks on a spectral correspondence for Maass waveforms. *Internat. Math. Res. Notices*, (10):505–517, 2001.
- [Str05] Fredrik Strömberg. *Computational aspects of Maass waveforms*. PhD thesis, Uppsala Universitet, 2005.
- [Str12] Fredrik Strömberg. Maass waveforms on  $(\Gamma_0(N), \chi)$  (computational aspects). In *Hyperbolic geometry and applications in quantum chaos and cosmology*, pages 187–228. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [Tak83] Kisao Takeuchi. Arithmetic Fuchsian groups with signature  $(1; e)$ . *J. Math. Soc. Japan*, 35(3):381–407, 1983.
- [The05] Holger Then. Maass cusp forms for large eigenvalues. *Math. Comp.*, 74(249):363–381 (electronic), 2005.
- [The06] H. Then. Arithmetic quantum chaos of Maass waveforms. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 183–212. Springer, Berlin, 2006.
- [Voi09] John Voight. Computing fundamental domains for Fuchsian groups. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 21(2):469–491, 2009.
- [WW96] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*. Cambridge: Cambridge University Press, repr. of the 4th ed. 1927 edition, 1996.