UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials

Departament d'Economia de l'Empresa

TESIS DOCTORAL

ECONOMIAS DE ESCALA, EFICIENCIA FRONTERA Y CAMBIO TECNICO A PARTIR DE FUNCIONES DE PRODUCCION: UNA APLICACION A LAS EMPRESAS DEL MERCADO UNICO EUROPEO.

Realizada por: José Luis González Núñez
Dirigida por: Dr. Diego Prior Jiménez
Bellaterra, abril 1997

UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials

Departament d'Economia de l'Empresa

TESIS DOCTORAL

ECONOMIAS DE ESCALA, EFICIENCIA FRONTERA Y CAMBIO TECNICO A PARTIR DE FUNCIONES DE PRODUCCION: UNA APLICACION A LAS EMPRESAS DEL MERCADO UNICO EUROPEO.

Realizada por: José Luis González Núñez

Dirigida por: Dr. Diego Prior Jiménez

Bellaterra, abril 1997

D. Prior

Presentación.

Esta tesis doctoral consta de seis capítulos, la bibliografía y un documento adicional en el que se presentan los anexos correspondientes.

El núcleo de la tesis lo componen los capítulos 2, 3, 4 y 5; mientras que los capítulos 1 y 2 se corresponden con los objetivos y las conclusiones finales de la misma. En el capítulo 2 se describe el marco conceptual de la investigación y en el capítulo 3 la metodología y la base de datos utilizada. Al final de dichos capítulos son presentados los correspondientes apéndices matemáticos.

En los capítulos 4 y 5 se recogen los principales resultados de la investigación. En el capítulo 4 los correspondientes a la estimación de las economías de escala y a otros importantes parámetros tecnológicos y en el capítulo 5 los correspondientes a la eficiencia frontera y al comportamiento dinámico de la empresas europeas, con especial referencia al cambio técnico y a las tasas de variación del output. Al final del capítulo 4 se recoge un apéndice correspondiente a las estimaciones realizadas sector a sector.

La bibliografía hace referencia a los libros, revistas y documentos que han sido consultados en la realización de esta tesis. También se hace referencia a los medios informáticos utilizados en la realización de la misma.

En el anexo se presentan los principales resultados obtenidos en la estimación de las funciones de producción "promedio" y en la estimación de los distintos índices de eficiencia.

Agradecimientos.

Mi especial agradecimiento al director de la tesis Dr. Diego Prior Jiménez por el soporte y estimulo intelectual que en todo momento me ha prestado. También por el derroche continuado de horas y paciencia que le ha supuesto la actividad de dirección.

También agradezco al señor Hubertus Kal (responsable de la base de datos DABLE) la gentileza por haberme enviado en soporte magnético la base de datos correspondiente al año 1994, lo que sin duda ha facilitado y agilizado la operativa de cálculo de esta investigación.

Para finalizar, quisiera agradecer al Departamento de Economía de la Empresa de la Universidad Autónoma de Barcelona el soporte prestado en medios humanos e informáticos, sin los cuales la realización de esta tesis no podría haberse llevado a cabo.

INDICE | Pág.

1. PLANTEAMIENTO, JUSTIFICACION Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION.

1.1. Introducción.

La existencia de economías de escala es una de las cuestiones que ha suscitado mayor interés y controversia entre teóricos, empresarios y responsables de política económica.

En el caso de los teóricos, el interés sobre la existencia de las economías de escala radica en que su conocimiento despejaría una de las mayores controversias que tradicionalmente ha tenido la teoría económica en relación a la forma de la curva de costes medios a largo plazo. Por parte de los empresarios, el interés radica en que su conocimiento permitiría definir la senda de expansión de la empresa, de tal manera que ésta pudiera situarse en el tamaño óptimo o eficiente[1]. Para los responsables de la política económica e industrial, el interés sobre la existencia de economías de escala radica en que el conocimiento de las mismas les permitiría definir el tamaño de empresa con el que debe estructurarse el sistema productivo de un sector o país con la finalidad de conseguir una asignación eficiente de los recursos. De esta forma, dichos responsables podrán implementar las políticas instrumentales correspondientes con el fin de alcanzar los objetivos propuestos.

Además, la controversia en relación a las economías de escala radica no solo en su conocimiento, sino también en el grado de las mismas, lo que parece inevitable si tenemos en cuenta, por una parte, lo propugnado por la teoría económica y la evidencia empírica disponible y, por otra, las distintas metodologías que han sido empleadas en cada caso.

---

[1] Definido como aquél que nos permite obtener el mayor nivel de output por unidad de inputs, lo que equivaldría, bajo el supuesto de mercados competitivos y comportamiento minimizador de costes, al tamaño que minimiza costes medios y maximiza beneficios. De esta forma, identificaríamos el tamaño empresarial que comporta eficiencia económica y eficiencia social.

La teoría económica, preocupada desde siempre por explicar las condiciones de equilibrio general de los mercados, ha mantenido la hipótesis de los rendimientos a escala variables que, como es sabido, se concretan en primer lugar en la existencia rendimientos crecientes a escala (economías de escala) y posteriormente en la existencia de rendimientos decrecientes a escala (deseconomías de escala), admitiéndose en esta manera la existencia de un tamaño óptimo empresarial.

La anterior hipótesis parece argumentalmente válida siempre que nos situemos en una óptica a corto plazo, es decir, cuando al menos uno de los inputs sea fijo, o bien cuando el mismo se encuentre en cantidades escasas. Según esta tesis, a medida que vaya desarrollándose el proceso productivo en la empresa, el output aumentará en mayor proporción que los inputs debido a una serie de factores tales como la división y especialización del input trabajo, las leyes físicas, la indivisibilidad de los inputs, etc., aunque más tarde o más temprano hará su aparición la ley de los rendimientos decrecientes, la cual motivará un aumento del output en menor proporción al aumento proporcional de los inputs. En este sentido, la teoría económica ha venido dando dos tipos de explicaciones para justificar la entrada de la ley de los rendimientos decrecientes a partir de la existencia de un input fijo:

a) La primera, referente a la naturaleza heterogénea del input fijo. En el proceso expansivo de la producción, nos vemos obligados a demandar un input fijo que cada vez es de peor calidad. Aparece la ley de los rendimientos decrecientes y esto implica que cada vez obtenemos un menor nivel de output por unidad de input[2].

---

[2] Este es un caso típico en la agricultura en la que, normalmente, el trabajo es el input variable y la tierra es el input fijo. En primera instancia, el agricultor trabaja la tierra más fértil, posteriormente, y mientras el proceso productivo se expansiona, se ve obligado a utilizar terreno menos fértil, con lo que la cantidad de producto por unidad de factor variable irá disminuyendo.

b) La segunda, referente a la idea de una proporción óptima de los inputs. Si el nivel de input variable es menor a lo que entendemos como combinación óptima, el output por unidad de input variable crecerá hasta llegar a dicha combinación óptima, decreciendo posteriormente. También en este caso habrá hecho su aparición la ley de los rendimientos decrecientes[3].

En ambos casos, y bajo el supuesto de precios constantes para cada uno de los inputs de producción, obtenemos una curva de costes medios en forma de U.

A largo plazo, en el que por definición todos los inputs son variables, la teoría económica siempre ha tenido dificultades en reproducir el esquema anterior, ya que si todos los inputs son variables no tiene porqué, en principio, hacer su aparición la ley de los rendimientos decrecientes. Esta situación no nos aseguraría ni una curva de costes medios a largo plazo en forma de U ni un tamaño óptimo de empresa, por lo que los teóricos han argumentado la existencia a largo plazo de un input cuya naturaleza es un tanto misteriosa, y del cual no puede disponerse en cantidades abundantes. La naturaleza de dicho input es de tipo directivo, factor que es el responsable de que a largo plazo también haga su aparición la ley de los rendimientos decrecientes, lo que unido a la existencia de precios de los inputs constantes motiva la existencia de una curva de costes medios en forma de U. Kaldor (1934), después de desglosar y analizar cada uno de los factores de tipo directivo, argumentó que es el factor coordinación el que, en la función directiva, puede considerarse como limitado o escaso a largo plazo.

---

[3] La proporción óptima de los inputs dependerá de cada proceso productivo. Sin embargo, un sencillo ejemplo nos ayudará a comprender la cuestión. Supongamos que una empresa posee dos inputs para llevar a cabo un determinado proceso de producción; dichos inputs son capital y trabajo. El primero es un input fijo con un total de 5 máquinas disponibles, mientras que el segundo es variable. Si la producción por trabajador se hace máxima para 5 trabajadores (uno en cada máquina), la producción por trabajador será menor cuando asignamos, por ejemplo, 2 trabajadores a 5 máquinas ó 10 trabajadores a 5 máquinas.

De todas formas, en este último caso no existe total acuerdo sobre la verdadera forma de la curva de costes medios a largo plazo, abogando la mayoría de autores por la existencia de una suave y prolongada inclinación de la parte decreciente de la misma, mientras que la parte creciente aparece para niveles de output "muy elevados"[4]. Otros autores abogan por la existencia de una curva de costes medios en forma de U pero con una amplia meseta central, de tal manera que en la práctica no es de extrañar que lo relevante sea el coste medio constante. En ambos casos, se admite la existencia de una curva de costes medios en forma de U pero totalmente distinta a la que estamos acostumbrados a ver en los manuales.

Esta curva de costes medios a largo plazo, en forma de U pero un tanto asimétrica, ha sido defendida por diferentes autores a partir de las argumentaciones más diversas. En este sentido, destacamos la aportación realizada por Marshall (1954) en la célebre analogía de los árboles del bosque en la que mantenía que la pérdida de eficiencia de la gran empresa era consecuencia de la pérdida de vitalidad del empresario, según su propio ciclo vital. Robinson (1957), incide en los distintos factores que promueven economías y deseconomías de escala, siendo los primeros los más importantes y los causantes de una disminución prolongada del coste medio. Williamson (1967) y Calvo y Welliz (1978) mantienen que la pérdida de eficiencia que tiene lugar en las grandes organizaciones es debido a la pérdida de calidad de la información al pasar por los distintos niveles jerárquicos, y a la manipulación y uso partidista que se hace de esta información por parte de los distintos estamentos de la empresa. Para finalizar, destacamos la postura mentenida por Leibenstein (1966), según la cual en la gran empresa tarde o temprano aparece la ineficiencia X. Ello es debido a la relajación y laxitud con la que se trabaja en la empresa de gran tamaño, dado el poder de

---

[4] Por otra parte, hemos de señalar que dichos teóricos son todos ellos defensores de la existencia de economías de escala, dada la gran prolongación que atribuyen a la parte descendiente de la curva de costes medios.

mercado que tienen y dadas las garantías de supervivencia que la sociedad en general confiere a este tipo de empresas, lo que implica que normalmente no se minimicen costes para ningún nivel de producción.

A esta serie de argumentos teóricos hay que añadir la evidencia empírica disponible. Han sido numerosos los estudios realizados en el ámbito de la economía industrial que estiman las economías de escala[5]. Dichos estudios han servido como justificación a la implementación de las diversas políticas instrumentales por parte de los responsables económicos de un país, pero no han ayudado a despejar la controversia existente sobre la clase y grado de las economías de escala existentes al haberse encontrado resultados de todo tipo[6].

Cuando se han estimado las economías de escala a partir de funciones de producción se han obtenido rendimientos de todo tipo, prevaleciendo los rendimientos a escala crecientes o constantes[7]. Cuando las economías de escala se han identificado a partir de la estimación de una curva de costes medios, han sido numerosos los casos que se han obtenido curvas de costes medios en forma de L, decrecientes o planas y más raramente crecientes o en forma de U.

Sin ir más lejos, en el caso español y utilizando una función de producción Cobb-Douglas, Villamil (1979) encuentra rendimientos crecientes a escala en los sectores textil y eléctrico, aunque

---

[5] Cabe hacer mención a los estudios pioneros realizados por Bain (1959) en los que ya se empezó a observar que las curvas de costos medios distaban bastante de tener forma de U.

[6] De todas formas, hay que señalar que como estudios "ad hoc" sí han ayudado a determinar el tamaño de planta o empresa más eficiente en un momento dado, pues no hemos de olvidar que el concepto de economías de escala es eminentemente un concepto dinámico.

[7] Una descripción más exhaustiva de la evidencia empírica disponible a partir de la estimación de funciones de producción será realizada en el próximo capítulo.

no puede descartarse la hipótesis de rendimientos constantes a escala. Por su parte, Vergés (1987), después de analizar diversos estudios del sector de transportes urbanos por carretera en el caso norteamericano, mantiene que lo relevante es la existencia de rendimientos constantes a escala, ya que en casi todos los estudios examinados se han encontrado costes medios "aproximadamente constantes". Velázquez (1991), en el caso español, ha obtenido en un 40% de los sectores analizados curvas de costes medios en forma de U y, en el 60% restante, curvas de costes medios en forma de L o decrecientes, obteniéndose un tamaño mínimo eficiente con una cuota de mercado inferior al 1%, lo que ya de por si nos muestra el tipo de curvas de costes medios en forma de U que han sido encontradas. En este sentido, señalamos que la existencia de curvas de costes medios en forma de L es la explicación del porqué en numerosas ocasiones la política económica de un país ha ido encaminada no hacia la consecución de un tamaño óptimo empresarial, sino hacia la consecución de un tamaño mínimo eficiente, ya que una vez que éste ha sido alcanzado las economías de escala están prácticamente agotadas.

A este panorama hay que añadir la opinión de los empresarios, los cuales son más proclives a aumentar o disminuir el tamaño de la empresa según sean sus propias valoraciones, más fundamentadas en el ámbito práctico que en el ámbito teórico. Desde un punto de vista más pragmático, lo evidente parece ser que si incrementamos en un 1% los inputs de producción, el output debe aumentar también en un 1%. Por lo tanto, desde este ámbito se admite como hipótesis más verosimil la existencia de rendimientos constantes a escala. También algunos teóricos defienden esta hipótesis, ya que posiblemente se trata de la situación más común que puede darse. En este caso, Varian (1988, pág. 368) argumenta lo siguiente: " ... normalmente, una empresa puede hacer una réplica exacta de lo que hacía antes. Si tiene el doble de cada uno de los factores, puede construir dos plantas contiguas y duplicar así la producción. Si tiene el triple de cada uno de los factores, puede construir tres plantas, y así sucesivamente".

Además existen dos cuestiones adicionales que reavivan la controversia sobre la existencia o no de economías de escala. La primera es en relación al método empleado y la segunda en relación al ámbito de aplicación de las mismas. En relación al método empleado hemos de tener en cuenta que las economías de escala suelen definirse como "aumentos más que proporcionales en el output al incrementar proporcionalmente todos los inputs"; por lo que la utilización de funciones de producción es ideal para identificar y estimar las economías de escala. Sin embargo, no siempre ha sido posible disponer de información sobre output e inputs por lo que en numerosas ocasiones se han utilizado métodos alternativos cuya validez está sujeta al cumplimiento de varios supuestos, los cuales en algunos casos son verificados y en otros casos se suponen.

Este sería el caso de las funciones duales de costes, según las cuales se identifican y estiman las economías de escala a partir de la correspondencia unívoca entre la elasticidad del coste en relación al output de la función de costes y la elasticidad del output en relación a los inputs de la función de producción[*]. Ahora bien, la correspondencia unívoca entre ambos tipos de elasticidad sólo se cumple en determinadas funciones de producción tales como la Cobb-Douglas o la CES, pero además requiere un comportamiento minimizador de costes por parte de las empresas y unos precios de los inputs constantes para todas ellas.

En numerosos trabajos, dichos supuestos son asumidos por principio, deduciéndose la existencia de economías de escala a partir del valor de la elasticidad del coste en relación al output de una determinada función de costes. Este sería el caso utilizado cuando se estiman las economías de escala a partir de funciones de costes correspondientes a funciones de producción

---

[*] Como veremos en el próximo capítulo, la elasticidad del output en relación a los inputs es lo que denominaremos elasticidad de escala, la cual nos identificará y estimará el grado de las economías de escala.

homotéticas con elasticidad de escala variable, tal como lo hacen Fuss y Gupta (1981), o bien a partir de las funciones Translog de costes, como lo hacen Berndt y Christensen (1973) y Gual, Ximénez y Vives (1990).

En otras ocasiones, la controversia viene causada por el propio método de estimación. Este es el caso concreto de la estimación de una función de costes a partir de datos transversales. Es lo que Friedman (1962) denominó como "falacia de la regresión". Dicho autor mantenía la tesis de que el coste medio estimado tendería a ser decreciente debido a la utilización del output efectivo en vez del output planificado, ya que las empresas mayores suelen obtener desviaciones positivas entre el output efectivo y el output planificado, mientras que las empresas pequeñas suelen obtenerlas negativas; con lo que el coste por unidad será decreciente con el output efectivo dado que la contratación de inputs por parte de la empresa se hace normalmente en función del output planificado[9].

Por otra parte, en ciertas ocasiones ni siquiera se ha podido disponer de información relativa a las funciones de producción o de costes, deduciéndose la existencia de economías de escala a partir de métodos, tales como las tasas de crecimiento, el método del superviviente o el método de la mediana. Dichos métodos nos relacionan las características del tamaño de cada industria, en especial la distribución de tamaños o la variación de los mismos a lo largo de un periodo de tiempo, con el tamaño en el que se minimizan costes medios. La validez de todos estos métodos, los cuales podríamos denominar como indirectos, requieren las condiciones inherentes a los mercados competitivos y al comportamiento de maximización de beneficios por parte de todas las empresas. Por ejemplo, en el caso del método de las

---

[9] Posteriormente dicha tesis fue rebatida parcialmente por Johnston (1966) aduciendo que los factores aleatorios que conforman el output efectivo deben afectar de forma igual tanto a las empresas grandes como a las pequeñas, por lo que dudaba de que todas las curvas de costes medios obtenidas hasta el momento en forma de L o decrecientes pudieran obedecer a esta causa.

tasas de crecimiento, diversos autores han argumentado que una relación negativa entre tasas de crecimiento y tamaño empresarial correspondiente a las empresas integrantes de un sector nos lleva a admitir la existencia de una curva de costes medios sectorial en forma de U. Esto es debido a que tanto las empresas pequeñas como las grandes tenderán a ajustarse al tamaño óptimo, por lo que las primeras deberán presentar unas tasas de crecimiento positivas mientras que las segundas deberán presentar unas tasas negativas[10]. En el caso del método del superviviente, podemos razonar de forma análoga en relación a la clase de tamaño empresarial que sobrevive y acrecienta su importancia a lo largo de un determinado periodo de tiempo. Mientras que en el método de la mediana podemos deducir la forma de la curva de costes medios a partir de la forma que adopta la distribución acumulada de la producción y la identificación del tamaño mínimo eficiente, el cual viene siendo definido como la mediana de dicha distribución.

En cualquier caso, estos métodos han contribuido de forma especial a acrecentar la controversia existente sobre la existencia y grado de las economías de escala. En este sentido, destacamos la reflexión realizada por Buesa (1990, pág. 72) en relación a inferir la forma de la curva de costes medios a partir de la aplicación del método de la mediana: "la reflexión precedente es también aplicable al procedimiento que se sigue en este trabajo, cuyo fundamento básico es de carácter intuitivo y de muy difícil especificación téorica".

En relación al ámbito de aplicación de las economías de escala, hemos de tener en cuenta si las mismas se estiman a nivel de unidad microeconómica (planta o empresa), a nivel sectorial o a

[10] Singh y Whittington (1975, págs. 15-16) defienden esta tesis según se desprende de la siguiente afirmación: "...if all firms within an industry are assumed to face U-shaped long run average cost curve as postuled in traditional theory, it can be argued that one would expect to observe a negative relationship between firm size and growth among a cross-section of firms in the industry".

nivel del conjunto total de la economía, tal como en estos dos últimos casos realizaremos nosotros. Este hecho debe tenerse en cuenta ya que las economías de escala pueden darse a nivel de planta pero no a nivel de empresa y pueden darse a nivel de planta o empresa pero no sectorialmente o para el conjunto de la economía. Por ejemplo, es posible que obtengamos economías de escala a nivel de la planta pero deseconomías a nivel de las tareas directivas o en el ámbito comercial de la empresa, con lo que el resultado global a nivel de empresa dependerá de la importancia de unas y otras. Por otra parte, una empresa, en su tamaño, puede situarse en economías de escala y, sin embargo, el conjunto del sector mostrar rendimientos decrecientes. El hecho es importante ya que las posibles políticas económicas a implementar en cada caso deberán ser distintas[11].

Para finalizar, destacamos las valoraciones y opiniones que sin estar sustentadas en ninguna base teórica ni empírica son realizadas por personas con el ánimo de influir en una determinada política industrial. A menudo, estas valoraciones sirven como base para justificar tal o cual fusión entre empresas o para justificar una determinada reestructuración en un sector muy concreto. Este tipo de valoraciones también han contribuido a la gran polémica existente sobre la cuestión[12].

Como hemos podido comprobar, las argumentaciones teóricas, la evidencia empírica y los métodos empleados han generado una gran

---

[11] Incluso a nivel de planta de producción es muy común estimar las economías de escala a nivel de las distintas partes del equipo capital. Este es el enfoque adoptado por los denominados métodos ingenieriles los cuales utilizan normalmente las "leyes físicas" para identificar el tipo de rendimientos, relacionando incrementos de volumen (los cuales tienen consideración de outputs) con incrementos de superficie (que tienen consideración de inputs). Este es el caso típico de los oleoductos que transportan un fluido, hornos industriales que tratan un determinado volumen de producto, etc.

[12] Pongamos por caso algunas de las fusiones realizadas entre empresas en las que han prevalecido intereses particulares de tipo fiscal por encima de otros intereses de política económica.

controversia sobre la existencia y el grado de las economías de escala. En este sentido, justificamos la presente investigación como una aportación más en la línea de clarificar dicha controversia. De todas formas, además de contribuir a esclarecer esta cuestión, la investigación se justifica desde un punto de vista más pragmático. Desde esta última perspectiva, dicha investigación pretende dar respuesta a una serie de interrogantes que regularmente se vienen dando entre los responsables de la política económica e industrial del país. Dichos interrogantes consisten en conocer la clase de tamaño empresarial que nos asegura una eficiente asignación de los recursos del sistema.

Este hecho no es nuevo ya que desde los albores del capitalismo industrial han ido sucediéndose periodos de tiempo en los que los responsables de la política económica e industrial de cada país han recomendado un aumento en el tamaño empresarial con el fin de alcanzar el tamaño eficiente, bajo la argumentación que de esta manera podrían beneficiarse de las correspondientes economías de escala[13]. Por el contrario, en otras ocasiones, dichos responsables han tenido que desmotivar todo aumento en el tamaño de la empresa, ya que lejos de traducirse en una disminución de precios al consumidor como consecuencia de las economías de escala alcanzadas (lo que implicaría un aumento de la eficiencia económica y social), dicho aumento ha sido utilizado para acrecentar el poder de mercado, con el peligro que ello representaría para la competencia y el libre comercio[14].

Más recientemente, el interés ha vuelto a suscitarse con los nuevos espacios de libre comercio que han venido siendo implantados en estos últimos años. En este sentido, destacamos el espacio de libre comercio norteamericano y el espacio de libre

---

[13] Es de destacar, en este sentido, la oleada de fusiones y absorciones de empresas que tuvieron lugar en Estados Unidos en la década de los años 20 y 60 y más recientemente en la década de los 80.

[14] Son de destacar aquí las leyes antimonopolio y "antitrust" que han sido dictadas en los Estados Unidos a lo largo de los últimos cien años.

comercio europeo, siendo este último de gran interés en nuestro caso, lo que justifica además nuestra investigación como una investigación "ad hoc".

1.2. El espacio económico europeo.

Se viene argumentando que las condiciones de los mercados competitivos a los que se llega con el mercado único europeo supone un aumento de la competencia entre empresas que hace flexionar los precios a la baja, con lo que se incrementa la demanda y el tamaño del mercado, posibilitando de esta forma la obtención de determinadas economías de escala[15].

Desde una pespectiva global europea, dicha argumentación sería válida para aquellas empresas que no habrían agotado las posibles economías de escala; desde una perpectiva más doméstica, la argumentación parece generalmente más válida si tenemos en cuenta el tamaño relativamente menor de nuestras empresas en relación al de las empresas europeas. Este es el argumento teórico de aquellos autores que propugnan un incremento del tamaño de nuestras empresas como punto de arranque para la obtención de las economías de escala. En este sentido, lo que pretendemos con esta investigación es conocer la existencia de economías de escala, de tal manera que un posible aumento en el tamaño de las empresas europeas en general y en el de nuestras empresas en particular pueda generar un aumento de la eficiencia económica del sistema productivo europeo.

La cuestión es ciertamente controvertida, ya que desde hace algún tiempo se han venido vertiendo opiniones contradictorias en relación al aumento de eficiencia que supondría un aumento del tamaño por parte de nuestras empresas en el contexto del mercado único europeo. Al igual que en el caso anterior, dichas

---

[15] En este sentido, ponemos de manifiesto las distintas directrices emitidas desde la Unión Europea con el fin de conseguir un mayor grado de competencia empresarial; así como la lucha librada contra los monopolios y demás formas de mercado que vayan contra la libre competencia en el mercado interior europeo.

valoraciones han sido realizadas a partir de la evidencia empírica o a partir de argumentaciones más o menos teóricas, y desde una óptica global o desde una óptica de eficiencia comparativa entre la empresa europea y la empresa española. Sin embargo, la definición dada al concepto de eficiencia, así como las distintas metodologías empleadas, han proporcionado resultados muy dispares.

En este sentido, Berges y Pérez (1985) realizan un estudio comparativo entre las grandes empresas industriales españolas y europeas según distintos índices de rentabilidad, recomendando un aumento del tamaño de la empresa española. Por su parte, Berges, Maravall y Pérez (1986), a partir de la construcción de un índice de eficiencia técnica para cada empresa utilizando la metodología propuesta por Farrell (1957), obtienen que la eficiencia técnica de la empresa española es menor que la de la empresa europea. Sin embargo, cuando se compara la eficiencia de la empresa española con la de algunos países concretos como Francia o Reino Unido, dicha eficiencia es superior en el caso español.

Por su parte, Segura (1992) pone de manifiesto la importancia que el tamaño de la empresa tiene como factor de competitividad, por lo que aboga por un incremento en el tamaño de la empresa española que le permita materializar determinadas economías de escala, máxime si tenemos en cuenta el menor tamaño que muestran las empresas españolas con respecto a sus homólogas europeas. Así, dicho autor manifiesta que una mayor implicación de la Administración en el fomento de medidas que estimulen el aumento en el tamaño empresarial no es en estos momentos deseable, sino necesaria. En este sentido, Segura (1992, pág. 71) afirma: "la concentración de capital industrial español es muy inferior al de los países centrales de la CEE. Por ello, la Administración debería adoptar posiciones lo más favorables posible a dicha concentración, siempre que no persiga tan sólo beneficiarse fiscalmente del afloramiento de plusvalías, y facilitar los procesos de integración que permitan materializar economías de escala, alcance o distribución".

Por el contrario, determinados autores han dudado de las supuestas ventajas de un mayor tamaño empresarial. Por ejemplo, Fariñas y Rodríguez (1986) mantienen que el menor crecimento y rentabilidad de la empresa española en relación a la empresa europea no parece estar causado por una insuficiente explotación de las ventajas del tamaño, por lo que una politica de fusiones o absorciones con el fin de aumentar el tamaño de nuestras empresas no ofrece garantías para afrontar el reto de la integración española en Europa. De la misma opinión es Vives (1988), según se desprende de la siguiente afirmación: "el gran tamaño no es una condición ni necesaria ni suficiente para asegurar la competitividad. No es suficiente puesto que una gran empresa puede estar mal gestionada y carecer de capacidad innovadora. Ejemplos no faltan. No es necesario puesto que existen muchas empresas pequeñas que por su capacidad de innovación y flexibilidad son plenamente competitivas. En otras palabras, no hay que obsesionarse por los rankings de tamaños" (Vives 1988, ob. cit. pág. 50).

Como puede observarse, son numerosas las argumentaciones a favor o en contra de aumentar el tamaño de la empresa. En este sentido, se refuerza la justificación de nuestra investigación, máxime si tenemos en cuenta que la mayoría de estudios se realizaron antes de la entrada de nuestro país en el mercado único europeo. En estos momentos, cuando se llevan algunos años de nuestra incorporación en la Unión Europea, parece lógico plantear una nueva investigación que responda a una serie de interrogantes relacionadas con la existencia de economías de escala, la importancia de éstas y la posición en términos de eficiencia comparativa de nuestras empresas en relación a las empresas europeas.

Por otra parte, pretendemos aportar en esta investigación una ventaja adicional en relación a otras efectuadas anteriormente dado que partimos del hecho de que las condiciones que impone el mercado único europeo son exactamente iguales para todas las empresas integradas en el mismo, lo que permite una correcta comparación entre las empresas europeas y españolas; de esta forma, las posibles diferencias existentes entre ambas clases de empresas no pueden obedecer a factores particulares de una u otra clase, tal como podía ocurrir en los estudios realizados antes de la entrada de nuestro país en la Unión Europea. Esta es, en nuestra opinión, una de las principales aportaciones de esta investigación.

El controvertido marco conceptual que ha sido descrito en los párrafos anteriores justifica por si solo esta investigación; por lo que a continuación vamos a plantear cada uno de los objetivos de la misma, haciendo una breve referencia metodológica en cada caso[16].

1.3. Planteamiento de objetivos con breve referencia metodológica en cada caso.

La necesidad de obtener una nueva evidencia empírica que ayude a despejar una de las controversias más importantes que tiene planteada la teoría económica, y la necesidad de identificar la importancia de las economías de escala como componente de la eficiencia empresarial, justifican que el primer objetivo de esta investigación sea la estimación de las economías de escala en el ámbito del mercado único europeo.

Dicha estimación será realizada a nivel global para el conjunto de empresas y a nivel sectorial, estimando cinco modelos de producción distintos y a partir de la información suministrada por una amplia muestra de empresas correspondientes a los países que integran la Unión Europea. Los cinco modelos de producción son las formas estimativas correspondientes a cinco funciones de producción distintas, Translog, CES, CES con rendimientos constantes a escala, Cobb-Douglas y Cobb-Douglas con rendimientos

[16] En el capítulo 3 se expone de forma exhaustiva la metodología utilizada en esta investigación.

constantes a escala, identificándose los distintos tipos de rendimientos a partir del valor obtenido por la elasticidad de escala en la estimación de cada uno de los modelos anteriores[17].

La estimación de las anteriores funciones de producción nos permitirá obtener, además de la elasticidad de escala, otros importantes parámetros de producción, tales como las elasticidades del output en relación a cada input, las productividades medias y marginales de cada input o la elasticidad de sustitución entre inputs. En aquellos casos en que los parámetros de producción sean susceptibles de ser calculados individualmente para cada empresa, ya sea según la estimación global o ya sea según la estimación sectorial, obtendremos el correspondiente parámetro de producción medio por clase de tamaño empresarial o por clase de empresa (europea o española).

Ahora bien, aunque es evidente que las funciones así estimadas nos identifican la clase de economías de escala, el grado o importancia de las mismas solo se podrá "cuantificar" bien a partir del propio valor de la elasticidad de escala, bien a partir de la comparación de dicho valor con el obtenido en estudios análogos, lo que siempre es relativo. Por esta razón, introducimos un nuevo concepto capaz de cuantificar con mayor objetividad la importancia de las economías de escala. En este sentido, vamos a reformular el método de estimación de los anteriores modelos de producción, introduciendo el concepto de función de producción frontera y el concepto de tamaño óptimo.

El concepto de función de producción frontera puede definirse como: "máximo nivel de output tecnológicamente obtenible dado un nivel de inputs". Identificando también el nivel de output o tamaño óptimo en cada función de producción frontera, calcularemos para cada empresa la parte de la eficiencia total que viene explicada por la eficiencia dada la escala

[17] Dicha estimación, se realizará estadísticamente según el método de los mínimos cuadrados ordinarios (mco), lo que implicará la estimación de una función de producción "promedio".

(independiente de la escala) y la parte que viene explicada por la eficiencia de escala. Esta es también otra de las principales aportaciones de esta investigación ya que, salvo algunas excepciones, en la mayoría de trabajos de este tipo realizados sólo ha sido cuantificada la eficiencia dada la escala.

Para cada uno de los modelos de producción anteriores que hayan cumplido las condiciones estadísticas y de regularidad, estimaremos las funciones de producción frontera correspondientes. Dichas funciones de producción frontera serán estimadas según el método determinista estadístico por mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc), previa asunción de tres distribuciones estadísticas distintas para el error de estimación frontera. Las distribuciones estadísticas asumidas son la distribución gamma, exponencial y seminormal. También se estimará una función de producción frontera a partir del ajuste del máximo error positivo minimocuadrático ordinario, según el método propuesto por Greene (1980).

El método determinista estadístico por (mcoc) ha sido utilizado por Richmond (1974) y por Greene (1980), mientras que por máxima verosimilitud ha sido utilizado por Afriat (1972) y Schmidt (1976). En nuestro caso hemos optado por el método de (mcoc) dada su mayor facilidad de cálculo y su aceptable nivel de eficacia. Una vez estimadas las funciones de producción frontera, calcularemos un índice de eficiencia dada la escala (ESE) y un índice de eficiencia de escala (EES), para cada empresa[14]. El índice de eficiencia dada la escala, nos mide la distancia relativa del output real en relación al output frontera y el índice de eficiencia de escala la distancia relativa del output frontera en relación al output frontera óptimo. Con el producto de ambos índices obtenemos el índice de eficiencia total (ET) para cada empresa. De esta forma, podemos comparar el valor de ambos índices y conocer la importancia que la eficiencia de

---

[14] Los dos índices propuestos son construidos siguiendo la metodología propuesta por Farrell (1957) y Seitz (1970), respectivamente.

escala tiene en la composición de la eficiencia total. Una vez estimados los distintos índices de eficiencia para cada empresa, calcularemos el índice medio para el conjunto total de empresas y para cada sector a partir de las correspondientes funciones de producción frontera estimadas.

Por otra parte, hemos de tener en cuenta que, para poder satisfacer más fácilmante la condición "ceteris paribus" en relación a la tecnología y precios de los inputs constantes, hemos preferido trabajar con datos transversales antes que con datos en series de tiempo. Sin embargo, teniendo en cuenta que la naturaleza de la función de producción tiene un componente dinámico, las estimaciones han sido realizadas en dos momentos del tiempo, en concreto para los años 1991 y 1994. De esta manera, no sólo podemos constatar la consistencia de los resultados obtenidos, sino que también podremos conocer el comportamiento dinámico de los principales parámetros y el cambio técnico que se registra, lo que nos pemitirá extraer conclusiones a nivel global y a nivel sectorial.

La información contenida en las funciones de producción estimadas va a ser aprovechada para plantear otros objetivos adicionales igualmente importantes. El primero objetivo será analizar el comportamiento de los principales parámetros de producción e índices de eficiencia en relación al tamaño de la empresa. El segundo objetivo consistirá en realizar un análisis comparativo entre la empresa española y la empresa europea a partir de dichos parámetros e índices de eficiencia.

En el primer caso intentaremos despejar otras controversias teóricas importantes. Por ejemplo, la hipótesis, ya mencionada anteriormente, según la cual la teoría económica mantiene la existencia de rendimientos a escala variables con el tamaño de la empresa (en primer lugar rendimientos crecientes a escala y posteriormente rendimientos decrecientes). Esta hipótesis puede verificarse más fácilmente calculando el valor medio de la elasticidad de escala según clase de tamaño en una función de producción flexible como la Translog. También, la hipótesis planteada por algunos autores desde el ámbito de la economía industrial en relación a que la elasticidad de sustitución entre inputs decrece con el tamaño de la empresa, hipótesis que de la misma manera puede ser verificada más fácilmente a partir del cálculo del valor medio de la elasticidad de sustitución entre inputs por clase de tamaño en una función de producción Translog. También comprobaremos la consistencia de los resultados obtenidos en algunos de los estudios realizados en el marco de la economía industrial, en relación a que la eficiencia dada la escala aumenta con el tamaño de la empresa. En este último caso cabe mencionar los estudios realizados por Meeusen y Broeck (1977) y Caves y Barton (1990).

Por otra parte, con la comparación que realizaremos entre las empresas europeas y las empresas españolas contribuiremos a despejar alguna de las controversias que se han venido produciendo en estos últimos años. Por ejemplo, utilizando los resultados obtenidos en la estimación de la función de producción Translog podemos verificar si la elasticidad de sustitución entre inputs es menor en la empresa española que en la empresa europea, ya que en ocasiones se ha venido argumentando la excesiva rigidez del mercado de trabajo en nuestro país. Además podremos analizar la tendencia de la elasticidad de sustitución entre inputs a lo largo del período estudiado en ambas clases de empresas. También podremos comprobar si la elasticidad de escala es mayor en la empresa europea que en la española, lo que nos indicaría la necesidad de aumentar o disminuir el tamaño (según sea el tipo de rendimientos a escala obtenidos), por parte del conjunto de empresas y por parte de nuestras empresas con el fin de alcanzar el tamaño óptimo.

Asimismo, también podemos comprobar si, tal como ha sido constatado en otros trabajos anteriores, el índice de eficiencia dada la escala o las productividades medias y marginales de los inputs son mayores en las empresas europeas que en las empresas españolas. Por otra parte, dado que la estimación de las funciones de producción se realiza en dos momentos del tiempo, podremos analizar la tendencia de aquellas variables y parámetros de producción que creamos puedan ser más relevantes para un análisis dinámico comparativo entre ambas clases de empresas.

Para finalizar, señalemos que la estimación de las funciones de producción frontera en los dos momentos distintos del tiempo nos permite, en la última fase de la investigación, introducir un modelo explicativo de las tasas de variación del output y su correspondiente desglose, para cada una de las empresas sobre las que se disponga de información en ambos momentos del tiempo[14]. El modelo está inspirado en el propuesto por Aly y Grabowsky (1988), aplicado por Prior (1990) y por Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1992) en el caso de la eficiencia frontera no paramétrica, y que en nuestro caso adaptamos a las funciones de producción frontera.

El modelo descompone la tasa de variación del output en tasa de variación de la eficiencia dada la escala, tasa de variación del cambio técnico y tasa de variación en el consumo de inputs. Al igual que en los casos anteriores, el análisis será realizado a nivel del conjunto de las empresas europeas y a nivel de cada sector a partir de aquellos modelos de producción que cumplan las condiciones estadísticas y de regularidad en ambos momentos del tiempo. Asumiremos tres distribuciones distintas en el cálculo de la eficiencia (gamma, exponencial y seminormal) cuando la estimación se realice a nivel global para el conjunto total de empresas y la distribución gamma cuando la estimación se realice a nivel sectorial. En la estimación a nivel global se efectuará el correspondiente análisis comparativo entre las empresas europeas y españolas.

---

[14] Como parte de este análisis dinámico al que hacemos referencia, previamente se estudiarán las principales características del cambio técnico obtenido según las estimaciones realizadas a nivel global y a nivel sectorial. En el primer caso también se realizará un análisis comparativo entre las empresas europeas y españolas en relación a dichas características.

Con la introducción de este modelo explicativo de las tasas de variación del output en el análisis dinámico podremos conocer la importancia de cada componente en el crecimiento de las empresas así como obtener una visión más global del comportamiento a nivel tecnológico de las empresas europeas y de las empresas españolas en estos primeros años de funcionamiento del mercado único europeo.

2. FUNCION DE PRODUCCION, ECONOMIAS DE ESCALA Y EFICIENCIA FRONTERA.

En este capítulo se describe el marco conceptual en el que se desarrolla esta investigación. Se analizan las funciones de producción más relevantes y su relación con el concepto de economías de escala y con el concepto de eficiencia frontera, finalizando con una breve referencia al marco conceptual dinámico en el que también se desarrolla parte de la investigación.

La estimación de las economías de escala y de la eficiencia frontera a partir de las funciones de producción neoclásicas ha sido uno de los métodos más utilizado en este tipo de trabajos, teniendo en cuenta, además, aquéllos que estiman los parámetros de la función de producción de forma indirecta a partir de los teoremas de la dualidad, Shephard (1953). Según uno de estos teoremas, y para determinadas funciones de producción, los parámetros correspondientes a las economías de escala pueden obtenerse a partir de la propia función de producción o bien a partir de la correspondiente función de costes[1]. Por otra parte, hemos de señalar que la estimación de las economías de escala ha sido abordada con los métodos más diversos, lo que ha contribuido a una cierta dispersión de resultados sobre el tema[2].

---

[1] Son numerosos los estudios que han aplicado este método. En algunos casos a partir de una función de costes Cobb-Douglas (Nerlove, 1963; Madoo, 1976 y Pellicer, 1984); en otros, a partir de una función de costes correspondiente a una función homotética con elasticidad de escala variable (Fuss y Gupta, 1981; Velázquez, 1991; Robidoux y Lester, 1992; y González 1996).

[2] La validez de estos métodos está sujeta al cumplimiento de ciertos supuestos como la existencia de mercados competitivos y un comportamiento de minimización de costes por parte de la empresa. Los principales métodos son la estimación directa de funciones de costes en relación al output (Johnston, 1966), los métodos ingenieriles como el de la regla exponencial (Moore, 1959), el método de los cuestionarios, (Bain, 1956; Pratten, 1971; Méndez, 1975), el método de las tasas de crecimiento (Hymer y Pashigian, 1962), el método del superviviente (Shepherd, 1967) y el método de la mediana (Weiss, 1963).

2.1. Funciones de producción neoclásicas.

Tal como afirma Quirk (1981, págs. 155-156), se observan economías de escala en la producción, si: "la multiplicación de todos los factores por una misma constante positiva tiene como resultado la multiplicación del producto por una constante positiva mayor".

Esta situación, denominada como de rendimientos crecientes a escala, se corresponde por el lado de los costes con una curva de costes medios decreciente. Esta dualidad entre las funciones de producción y de costes se cumple siempre que: a) la función de producción tenga la misma relación marginal de sustitución entre inputs, independientemente del nivel de utilización de los mismos; b) si el precio de los inputs se mantiene siempre constante; c) si la empresa tiene un comportamiento de minimización de costes. En este sentido, señalamos que la relación marginal de sustitución entre inputs es constante para una determinada clase de funciones de producción[3].

Análogamente, existen rendimientos decrecientes a escala cuando al multiplicar todos los factores de producción por la misma constante positiva, el producto queda multiplicado por una constante positiva menor, y existen rendimientos constantes a escala si al multiplicar todos los factores de producción por la misma constante positiva, el producto queda multiplicado por la misma constante. Por el lado de los costes, dichas situaciones se corresponden, respectivamente, con unos costes medios continuamente crecientes o constantes, siempre y cuando se cumplan las condiciones expuestas en el párrafo anterior.

Las funciones de producción más utilizadas en la identificación y estimación de las economías de escala han sido las funciones de producción Cobb-Douglas, CES y Translog. Estas funciones, que

[3] En concreto para las funciones de producción homotéticas como la Cobb-Douglas o la CES, pero no para las no homotéticas como la transcendental logarítmica o Translog.

a continuación serán expuestas en orden creciente a su complejidad, se corresponden con tres tecnologías de producción distintas. Al estudio de cada una de estas funciones de producción, no sólo en relación a los parámetros identificadores de las economías de escala sino también en relación a otros importantes parámetros de producción, vamos a dedicar los siguientes apartados.

2.2. Función de producción Cobb-Douglas.

Para determinar la existencia y grado de los rendimientos a escala, definimos previamente el concepto de elasticidad de escala $E_{Q/V}$, que es la elasticidad del output Q en relación al input V. Es decir:

$$E_{Q/V} = (dQ/dV) \cdot (V/Q) \qquad [2.1]$$

En el caso de una función de producción de dos inputs, V_1 y V_2, capital y trabajo respectivamente, la elasticidad de escala viene dada por:

$$E_{Q/V} = (\partial Q/\partial V_1) \cdot (V_1/Q) + (\partial Q/\partial V_2) \cdot (V_2/Q) \qquad [2.2]$$

Donde ∂ indica derivada parcial.

De la expresión anterior deducimos los siguientes casos:

a) $E_{Q/V} = 1$: rendimientos constantes a escala. Un aumento del 1% en los inputs nos lleva a un aumento del 1% en la producción.

b) $E_{Q/V} > 1$: rendimientos crecientes a escala. Un aumento del 1% en los inputs nos lleva a un aumento mayor del 1% en la producción.

c) $E_{Q/V} < 1$: rendimientos decrecientes a escala. Un aumento del 1% en los inputs nos lleva a un aumento menor del 1% en la producción.

Una función de producción Cobb-Douglas de dos inputs viene representada por la siguiente expresión:

$$Q = A \cdot V_1^{a} \cdot V_2^{b} \qquad [2.3]$$

Cumpliéndose que A, a y b > 0 para todo Q, V_1 y V_2 > 0; y siendo Q producción, V_1 capital, V_2 trabajo; y A, a y b parámetros a estimar. Mientras que A es el denominado parámetro de "eficiencia"*, a y b son las elasticidades del output con respecto al capital y trabajo, respectivamente. En el caso de la función de producción Cobb-Douglas anterior tenemos:

$$(dQ/dV_1) = a \cdot A \cdot V_1^{a-1} \cdot V_2^{b} = a \cdot (Q/V_1)$$
$$(dQ/dV_2) = b \cdot A \cdot V_1^{a} \cdot V_2^{b-1} = b \cdot (Q/V_2)$$

Y sustituyendo en [2.2]:

$$E_{Q/V} = a \cdot (Q/V_1) \cdot (V_1/Q) + b \cdot (Q/V_2) \cdot (V_2/Q) = a + b \qquad [2.4]$$

Así, la elasticidad de escala en la función de producción Cobb-Douglas depende de los parámetros a y b, observándose rendimientos constantes, rendimientos crecientes o rendimientos decrecientes a escala según que (a + b) = 1, (a + b) > 1 ó (a + b) < 1, respectivamente.

La función de producción Cobb-Douglas tiene una serie de características propias, que se corresponden con el tipo de tecnología de producción a la que representa:

<u>a) Función de producción homotética:</u> la isocuanta de la función de producción Cobb-Douglas es siempre negativa y proporcional a la relación de los factores de producción e independiente del nivel de producción en el que se opera. Esto significa que la pendiente de las distintas isocuantas es idéntica a lo largo de cualquier recta que parte del origen; es decir, la relación

---

* Es denominado de esta forma ya que para cada combinación de inputs, cuanto mayor es A, mayor es el nivel de producción.

marginal de sustitución entre los factores de producción siempre es la misma. Esta propiedad puede comprobarse a partir de la definición de isocuanta en [2.3] $Q_{(cte)} = A \cdot V_1^a \cdot V_2^b$, despejando V_1 y realizando la diferencial total. Es decir:

$$V_1 = (Q_{(cte)} \cdot A^{-1} \cdot V_2^{-b})^{1/a} = Q_{(cte)}^{1/a} \cdot A^{-1/a} \cdot V_2^{-b/a}$$
$$dV_1 = Q_{(cte)}^{1/a} \cdot A^{-1/a} \cdot (-b/a) \cdot V_2^{(-b/a)-1}\ dV_2$$
$$dV_1/dV_2 = Q_{(cte)}^{1/a} \cdot A^{-1/a} \cdot (-b/a) \cdot V_2^{(-b/a)-1} = -(b/a) \cdot (V_1/V_2) \qquad [2.5]$$

Como se observa, la pendiente de la isocuanta depende de la relación de los factores de producción y es independiente del nivel de producción en el que opera. Por otra parte, señalamos que, aunque la pendiente varía a lo largo de la isocuanta, la elasticidad entre inputs es siempre constante, tal como observamos seguidamente:

$$E_{V1/V2} = (dV_1/dV_2) \cdot (V_2/V_1) = -\ (b/a) \cdot (V_1/V_2) \cdot (V_2/V_1) = -\ (b/a)$$

b) Función de producción homogénea: la función de producción Cobb-Douglas es una función de producción homogénea de grado (a + b), ya que al multiplicar los factores de producción por una constante K, la función queda multiplicada por K^{a+b}. Esta propiedad puede observarse a continuación:

$$Q = A \cdot V_1^a \cdot V_2^b$$
$$Q_1 = A \cdot (KV_1)^a \cdot (KV_2)^b = A \cdot K^{a+b} \cdot (V_1^a V_2^b) = K^{a+b} \cdot Q \qquad [2.6]$$

De esta forma, queda demostrado que la producción ha quedado multiplicada por K^{a+b}.

c) Elasticidad de sustitución constante y unitaria: la elasticidad de sustitución E_s se define como la relación entre la variación relativa en la relación de los factores $d(V_1/V_2)/(V_1/V_2)$ y la variación relativa en la pendiente de la isocuanta $d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2)$.

$$E_s = (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))/(d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2)) \qquad [2.7]$$

En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, la elasticidad de sustitución, E_s, es unitaria, ya que a lo largo de la isocuanta de la función Cobb-Douglas se cumple, según [2.5], que $(dV_1/dV_2) = (-b/a)\cdot(V_1/V_2)$ y por lo tanto $d(dV_1/dV_2)/d(V_1/V_2) = -b/a$. Manipulando convenientemente la expresión tenemos:

$$E_s = (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))/(d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2))$$
$$= (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))\cdot(dV_1/dV_2)/(d(dV_1/dV_2))$$
$$= ((-b/a)\cdot(V_1/V_2)/(V_1/V_2))\cdot(-b/a)^{-1} = 1$$

Por otra parte, en un contexto de minimización de costes, la pendiente de la isocuanta (dV_1/dV_2), es igual a la relación de precios de los factores (p_2/p_1), por lo que podemos redefinir la elasticidad de sustitución como el cociente entre la variación relativa en la relación de los factores y la variación relativa en la relación de sus precios. Por lo tanto, una variación de un 10% en la relación en el precio de los factores nos lleva a una variación del 10% en la relación de los mismos. Es decir, si se incrementa un 10% el precio del trabajo (p_2) en relación al precio del capital (p_1), esto nos lleva a una reducción del 10% de la cantidad del trabajo en relación a la del capital.

2.2.1. Estimación de la función de producción Cobb-Douglas.

La función de producción Cobb-Douglas pueda estimarse estadísticamente mediante métodos no lineales o lineles. Los primeros han sido utilizados más raramente, mientras que la estimación lineal ha sido más usual. Introduciendo en la función de producción Cobb-Douglas [2.3] un error de estimación $(\exp)(e_i)$ en forma multiplicativa, la función puede ser estimada linealmente a partir del método de los mínimos cuadrados ordinarios (mco):

$$LnQ_i = lnA + a\cdot lnV_{1i} + b\cdot lnV_{2i} + e_i \qquad [2.8]$$

A partir del resultado obtenido en la estimación de [2.8], podemos deducir el tipo de rendimientos a escala, según el valor de (a + b). Si planteamos la hipótesis de existencia de rendimientos constantes a escala (a + b = 1), la función de producción [2.3] se reduce a $Q_i = A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{(1-a)} \cdot (\exp)(e_i)$ y tomando logarítmos:

$$\mathrm{Ln}Q_i = \ln A + a \cdot \ln V_{1i} + (1-a) \cdot \ln V_{2i} + e_i$$

$$\mathrm{Ln}(Q_i/V_{2i}) = \ln A + a \cdot \ln(V_{1i}/V_{2i}) + e_i \qquad [2.9]$$

2.2.2. Síntesis sobre aplicaciones que han utilizado la función de producción Cobb-Douglas.

Han sido numerosos los estudios realizados a partir de la función de producción Cobb-Douglas. Estos estudios, que podríamos calificar como "pioneros", han estimado funciones de producción "promedio" al utilizar directamente el método de (mco). La evidencia empírica disponible ha mostrado, en numerosos casos, rendimientos constantes a escala con unos valores para las elasticidades del capital y trabajo de 0,35 y 0,65 respectivamente[6]. De estos primeros estudios destacamos, también, la revisión realizada por Walters (1963), en la que además de hacer referencia a una serie de trabajos pioneros realizados en la década de los años 50, añade los suyos propios. Dichos estudios vienen referidos a diferentes industrias manufactureras y extractivas así como al caso agrícola de diferentes países, obteniéndose en la mayoría de casos rendimientos constantes a escala.

En otros casos, ha sido introducido el cambio tecnológico en la función de producción Cobb-Douglas a partir de la incorporación del factor tiempo. Walters (1963), incorpora el cambio tecnológico añadiendo el factor tiempo a una función de producción Cobb-Douglas asumiendo que el progreso tecnólogico es neutral sobre ambos inputs. Los resultados para distintos sectores y países muestran en su mayoría la existencia de rendimientos crecientes o constantes a escala.

[6] Se trata de una serie de trabajos realizados en los años 40 y 50, y que han sido recogidos por Heatfhield (1974, pág. 33).

Por su parte, Nadiri (1970), después de analizar una serie de estudios en los que se estiman funciones de producción sobre distintos sectores de la economía norteamericana durante el periodo 1925-1965, concluye que en la mayoría de ellos se observan rendimientos crecientes a escala.

En el caso español, cabe destacar uno de los primeros trabajos realizados aplicando la función de producción Cobb-Douglas. Este trabajo fue el realizado por Donges (1972) sobre 20 sectores de la economía española a partir de los datos obtenidos mediante el procedimiento de encuesta. En dicha encuesta se obtuvieron datos sobre el valor añadido, los activos y el número de personas empleadas. Los resultados muestran un cierto equilibrio entre los distintos tipos de rendimientos; en 8 sectores se encuentran economías de escala, en 7 sectores deseconomías y en los 5 restantes rendimientos constantes. En la segunda parte de la investigación se utiliza una función de producción CES para estimar la elasticidad de sustitución entre los inputs capital y trabajo.

Villamil (1979), en un estudio realizado en nuestro país sobre los sectores textil y eléctrico, encuentra rendimientos crecientes a escala en ambos casos. Ahora bien, mientras que en el caso del sector textil obtiene unas elasticidades de 0,17 para el capital y de 1,17 para el trabajo, en el sector eléctrico obtiene unas elasticidades de 0,5 para el capital y de 0,6 para el trabajo. Como puede observarse, en el sector textil aparecen mayores rendimientos crecientes a escala 1,34 (0,17 + 1,17) que en el caso del sector eléctrico 1,1 (0,5 + 0,6). Sin embargo, el contraste del estadístico F nos muestra que no es descartable el modelo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala.

En cualquier caso podemos concluir que los estudios realizados hasta la fecha muestran bien la existencia de rendimientos crecientes a escala bien la existencia de rendimientos constantes a escala. Una situación de rendimientos decrecientes a escala aparece más raramente.

2.3. Función de producción CES. (Elasticidad de sustitución constante).

La función de producción CES aparece como respuesta lógica a la evidencia empírica, ya que en algunas ocasiones se había comprobado que la elasticidad de sustitución unitaria de la función de producción Cobb-Douglas no se cumplía exactamente. Esta elasticidad de sustitución entre inputs era constante, pero no unitaria. Arrow, Chenery, Minhas y Solow (1961), definieron una nueva función de producción denominada CES con las mismas propiedades que la función de producción Cobb-Douglas a excepción de la elasticidad de sustitución entre inputs, que aunque también es constante, puede tomar valores diferentes a la unidad. Arrow, Chenery, Minhas y Solow (1961), trabajaron primeramente con una función de producción CES con rendimientos constantes a escala, la cual, en el caso de dos inputs, viene dada por:

$$Q = Y \cdot (a \cdot V_1^{-\theta} + (1-a) \cdot V_2^{-\theta})^{-1/\theta} \qquad [2.10]$$

Una expresión más general, que nos permite identificar el tipo de rendimientos de escala, es:

$$Q = Y \cdot (a \cdot V_1^{-\theta} + (1-a) \cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta} \qquad [2.11]$$

Donde, θ, Y, u y a son parámetros a estimar y cumpliéndose que $Y > 0$, $0 < a < 1$, $u > 0$ y $-1 < \theta <> 0$ para todo Q, V_1 y $V_2 > 0$. El parámetro de "eficiencia" es Y y tiene el mismo significado que en el caso Cobb-Douglas. El parámetro de distribución del capital (también denominado como parámetro de intensidad) es a y nos da una idea de la participación del capital en el producto final, siendo $(1 - a)$ la participación del trabajo. El parámetro de sustitución θ (que no tiene recíproco en la función Cobb-Douglas) está relacionado con la elasticidad de sustitución E_s y el parámetro u es el indicador del tipo de rendimientos a escala. Este último parámetro requiere una especial atención en nuestro caso, por lo que será tratado de forma más detallada en el apartado siguiente.

2.3.1. Rendimientos a escala en la función de producción CES.

Para identificar el tipo de rendimientos de escala en la función de producción CES partimos de las derivadas parciales del output en relación a cada uno de los inputs:

$$dQ/dV_1 = -(u/\theta)\cdot Y\cdot(aV_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}(-\theta)\cdot a\cdot V_1^{-\theta-1}$$
$$dQ/dV_2 = -(u/\theta)\cdot Y\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}(-\theta)\cdot(1-a)\cdot V_2^{-\theta-1}$$

Si ahora tenemos en cuenta que el tipo de rendimientos de escala de cualquier función de producción viene dado por el concepto de elasticidad de escala definido en [2.2], se puede demostrar que $E_{Q/V} = u$[6]. A partir de aqui podemos concluir que existen rendimientos crecientes, rendimientos decrecientes o rendimientos constantes a escala según que $u > 1$, $u < 1$ ó $u = 1$, respectivamente.

Además de tener la elasticidad de escala $E_{Q/V}$ constante, la función de producción CES tiene otras interesantes propiedades:

<u>a) Función de producción homotética:</u> la relación marginal de sustitución entre inputs es la misma, independientemente del nivel de output. A partir de [2.11] y despejando $V_1^{-\theta}$ queda:

$$Q^{(-\theta/u)} = Y^{(-\theta/u)}\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})$$
$$V_1^{-\theta} = (Q^{(-\theta/u)}/a\cdot Y^{(-\theta/u)}) - ((1-a)\cdot V_2^{-\theta}\cdot Y^{(-\theta/u)}/a\cdot Y^{(-\theta/u)})$$

A lo largo de la isocuanta la cantidad de producto es la misma, es decir $Q_{(cte)}$ y realizando la diferencial total, obtenemos el valor de la pendiente de las isocuantas:

$$-\theta V_1^{-\theta-1}dV_1 = 0 - (-\theta)(1-a)V_2^{-\theta-1}dV_2 Y^{(-\theta/u)} aY^{(-\theta/u)}(aY^{(-\theta/u)})^{-2}$$
$$-dV_1/dV_2 = \theta(1-a)V_2^{-\theta-1}Y^{(-\theta/u)}aY^{(-\theta/u)}(aY^{(-\theta/u)})^{-2}\cdot\theta^{-1}V_1^{\theta+1}$$
$$dV_1/dV_2 = -((1-a)/a)\cdot(V_1/V_2)^{\theta+1} \qquad [2.12]$$

---

[6] Dicha demostración puede verse en el apéndice 2.1. correspondiente al apéndice matemático del final del capítulo.

Por lo tanto, a lo largo de una recta lanzada desde el origen de coordenadas, es decir dada una proporción entre capital y trabajo, la pendiente de las isocuantas es la misma. Dicha pendiente es negativa para $0 < a < 1$, existiendo varias clases de isocuantas según el valor del parámetro de sustitución θ. En este sentido podemos distinguir los siguientes casos:

i) $\theta = -1 \Rightarrow dV_1/dV_2 = -(1-a)/a$. La isocuanta es una línea recta representativa de dos inputs perfectamente sustituibles y cuya pendiente es $-(1-a)/a$. En este caso la E_s se hace infinita.

ii) $-1 < \theta < 0$. La isocuanta corta a los ejes de coordenadas y la $E_s > 1$.

iii) $\theta = 0 \Rightarrow dV_1/dV_2 = (-(1-a)/a)(V_1/V_2)$. La isocuanta es la correspondiente a la función de producción Cobb-Douglas y es asintótica en relación a los ejes de coordenadas[7].

iv) $\theta > 0$. La isocuanta es asintótica a los ejes de coordenadas y la $0 < E_s < 1$. Se trata de la isocuanta a la que normalmente estamos acostumbrados. Dicha isocuanta es denominada también como cerrada.

v) $\theta = \infty$. Esto implica que: 1) Si $V_1 > V_2 \Rightarrow dV_1/dV_2 =$ Infinito. 2) Si $V_1 < V_2 \Rightarrow dV_1/dV_2 = 0$.

La isocuanta es rectangular con pendiente $-(1-a)/a$, cuando $V_1 = V_2$, situándose el vértice de su ángulo en la línea de 45° lanzada desde el origen. En cualquier caso la E_s es cero.

<u>b) Función de producción homogénea:</u> al igual que en el caso Cobb-Douglas, la función de producción CES es homogénea de grado u, ya que si multiplicamos los factores de producción por una constante K, la función queda multiplicada por K^u. Es decir:

---

[7] La demostración requiere la utilización de la regla de l'Hôpital. Dicha demostración puede observarse, por ejemplo, en Chiang (1994, págs. 437-438).

$$Q = Y\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta}$$

$$Q_1 = Y\cdot(a\cdot(K\cdot V_1)^{-\theta} + (1-a)\cdot(K\cdot V_2)^{-\theta})^{-u/\theta}$$

$$Q_1 = Y\cdot(a\cdot K^{-\theta}\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot K^{-\theta}\cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta}$$

$$Q_1 = Y\cdot(K^{-\theta}\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta}))^{-u/\theta}$$

$$Q_1 = (K^{-\theta})^{-u/\theta}\cdot Y\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta}$$

$$Q_1 = K^{u}\cdot Y\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta} = Q_1 = K^{u}\cdot Q \qquad [2.13]$$

De esta forma hemos demostrado que la producción ha quedado multiplicada por K^u.

c) <u>La elasticidad de sustitución (E_s), es constante:</u> la elasticidad de sustitución viene dada por [2.7]. Después de realizar algunas manipulaciones y sustituyendo nos queda el siguiente valor para E_s:

$$E_s = (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))/(d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2))$$

$$E_s = (dV_1/dV_2)/(V_1/V_2)\cdot(d(dV_1/dV_2)/(d(V_1/V_2))^{-1}$$

$$E_s = (((-(1-a)/a)(V_1/V_2)^{\theta+1})/(V_1/V_2))((-(1-a)/a)(\theta+1)(V_1/V_2)^{\theta})^{-1}$$

$$E_s = 1/(1 + \theta) \qquad [2.14]$$

Así, la elasticidad de sustitución de la función de producción CES es constante y depende solamente del parámetro θ.

2.3.2. Estimación de la función de producción CES.

Han sido varios los métodos utilizados para estimar la función de producción CES, aunque ha predominado el método estadístico. Algunos autores han utilizado métodos no lineales para estimar los parámetros de dicha función (Tsurumi, 1970), otros han utilizado la regresión lineal ordinaria (mco), previa definición de las productividades marginales de la función CES y bajo el supuesto de minimización de costes (Bodkin y Klein (1967), Wallis (1980, págs. 75-78)). Esta última metodología también ha sido aplicada por Castillo (1972) y Donges (1972) en el caso español. De todas formas, esta metodología requiere información sobre los precios del capital y trabajo, lo que no siempre es posible.

Una forma alternativa, que será la utilizada en nuestro caso, es la estimación de la función de producción CES a partir de la aproximación lineal introducida por Kmenta (1967). Partiendo de la expresión [2.11] y tomando logarítmos:

$$LnQ = \ln Y - (u/\theta)\ln\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta}) \qquad [2.15]$$

Hagamos ahora $f(\theta) = \ln\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})$. Desarrollando en serie por Taylor hasta la segunda derivada y despreciando derivadas de orden superior, queda:

$$f(\theta) = f(0) + (f_1(0)\theta) + (f_{11}(0)\theta^2)/2$$

Siendo $f(0)$ el valor de la función $f(\theta)$ cuando $\theta = 0$, $f_1(0)$ el valor de la primera derivada de la función $f(\theta)$ con respecto a θ cuando $\theta = 0$, y $f_{11}(0)$ el valor de la segunda derivada de la función $f(\theta)$ con respecto a θ cuando $\theta = 0$. Desarrollando los términos anteriores y sustituyendo en [2.15] queda[4]:

$$LnQ = \ln Y-(u/\theta)(0-(a\ln V_1+ (1-a)\ln V_2)\theta + (1/2)a(1-a)(\ln(V_1/V_2))^2\theta^2)$$

Conociéndose la expresión anterior como la aproximación de Kmenta. Dicha expresión, que puede ser estimada mediante regresión lineal a partir del método de (mco) previa introducción de un error de estimación en forma multiplicativa, $(\exp)(e_i)$, presenta la siguiente forma final:

$$LnQ_i=\ln Y + ua\ln V_{1i}+ u(1-a)\ln V_{2i}-(1/2)ua\theta(1-a)(\ln(V_{1i}/V_{2i}))^2+e_i \qquad [2.16]$$

Asumiendo rendimientos constantes a escala $u = 1$, la anterior expresión queda reducida a[5]:

$$Ln(Q_i/V_{2i})= \ln Y + a\ln(V_{1i}/V_{2i}) + (1/2)a(a-1)\theta(\ln(V_{1i}/V_{2i}))^2+ e_i \qquad [2.17]$$

---

[4] Ver apéndice 2.2. del apéndice matemático al final del capítulo.

[5] Ver apéndice 2.3. del apéndice matemático al final del capítulo.

2.3.3. Evidencia empírica a partir de la función de producción CES.

También en este caso podemos definir la mayoría de estudios realizados como "pioneros" ya que estiman una función de producción "promedio" mediante regresión lineal a partir del método de (mco).

Katz (1968) estima sectorialmente la función de producción CES en el caso argentino, encontrando rendimientos crecientes a escala en 7 de los 9 sectores analizados.

En la clásica investigación realizada por Griliches y Ringstad (1971), además de estimar la función de producción Cobb-Douglas, también estimaron una función CES sobre un total de 27 sectores de la economía noruega. Los resultados muestran la existencia de rendimientos crecientes a escala.

En el caso español podemos hacer mención al trabajo realizado por Castillo (1972), en el cual, utilizando datos transversales sobre las estadísticas de producción industrial, encuentra en casi la totalidad de los sectores estudiados la existencia de rendimientos crecientes a escala.

Por otra parte, y tal como hemos ido señalando en los apartados anteriores, las funciones de producción homogéneas como la Cobb-Douglas y la CES tienen elasticidad de escala constante, lo que no ha permitido comprobar la hipótesis clásica sobre la existencia en primer lugar de rendimientos crecientes a escala y posteriormente de rendimientes decrecientes a escala. En este sentido, algunos autores han introducido alguna modificación sobre la función de producción CES, de tal manera que pudiera comprobarse dicha hipótesis[10]. Este es el caso del trabajo realizado por Zellner y Revankar (1969) sobre la industria de

[10] En realidad se estaban introduciendo las denominadas funciones de producción homotéticas, de las cuales las homogéneas son un caso especial.

equipos de transporte norteamericana, en el que introducen una función de producción CES pero con elasticidad de escala variable. En dicha investigación se encuentran rendimientos crecientes a escala aunque cada vez en menor proporción. Dichos rendimientos se hicieron posteriormente decrecientes al llegar a una determinada escala. Este es uno de los pocos casos en los que podemos admitir la existencia de una curva de costes medios en forma de U.

Un enfoque parecido fue el utilizado por Ringstad (1967) en un estudio sobre las empresas agrícolas noruegas con datos transversales. Los resultados no fueron concluyentes, ya que si por una parte se encontraron rendimientos variables (en primer lugar rendimientos crecientes y posteriormente rendimientos decrecientes), por otra, al ajustar una función de producción Cobb-Douglas sobre los mismos datos, se encontraron rendimientos crecientes a escala.

En esta línea de obtener una mayor flexibilidad en la función de producción, debe encuadrarse la aproximación lineal de Kmenta sobre la función de producción CES, que si bien proporciona elasticidad de escala constante, la elasticidad del output en relación a cada uno de los factores de producción es variable. En este último enfoque debe encuadrarse también el ya mancionado trabajo de Griliches y Ringstad (1971) sobre la industria noruega. Además, en dicho estudio se estimó una función de producción Translog que posteriormente fue popularizada por Christensen, Jorgenson y Lau (1971), introduciendo una versión concreta de la misma.

Los resultados del estudio de Griliches y Ringstad (1971) muestran rendimientos crecientes a escala en las empresas de menor tamaño, aunque éstos son cada vez menos importantes, dándose rendimientos constantes a escala a partir de un cierto tamaño. De todas formas, a nivel de industria dicha función no tiene mejor grado de significación que la Cobb-Douglas, por lo que no puede rechazarse esta última hipótesis[11].

Con el mismo objetivo de identificar rendimientos de escala variables, Griliches (1967) utiliza una función de producción Cobb-Douglas por segmentos a los datos por tamaño del Censo de Empresas U.S.A., obteniéndose resultados sorprendentes para la teoría tradicional, ya que encuentra rendimientos constantes a escala para los tamaños pequeños y rendimientos crecientes a escala para los grandes.

Para finalizar este apartado, mencionamos el ya clásico "survey" de estudios realizado por Nerlove (1967). Dichos estudios estiman funciones de producción CES o Cobb-Douglas sobre los distintos sectores de la Economía Norteamericana, abarcando diferentes periodos de tiempo desde la Segunda Guerra Mundial hasta 1965. Nerlove clasifica este conjunto de estudios en dos clases distintas: a) los que utilizan datos transversales, b) los que utilizan series de tiempo. En los estudios de la primera clase se han obtenido generalmente rendimientos constantes a escala, mientras que en los estudios de la segunda clase han predominado los rendimientos crecientes a escala[12].

2.4. Función transcendental logarítmica o Translog[13].

Más recientemente han sido planteadas una serie de funciones de producción que tienen como principal característica su flexibilidad, lo que permite comprobar la existencia de una elasticidad de escala variable y la posibilidad de verificar la hipótesis clásica de rendimientos crecientes a escala en primer lugar y rendimientos decrecientes a escala posteriormente, lo que nos llevaría a la existencia de curvas de costes medios en forma de U.

---

[11] Griliches y Ringstad (1971, págs: 62-107).

[12] Nerlove (1967, págs: 55-136).

[13] Tal como señalamos anteriormente, dicha función fue popularizada por Christensen, Jorgenson y Lau (1971).

2.4.1. Características de la función de producción Translog.

La función de producción Translog es básicamente una aproximación de segundo orden de una función de producción que adopta, en el caso de dos inputs V_1 y V_2, la forma $\ln Q = f(\ln V_1, \ln V_2)$ (Denny y Fuss, 1977).

Mientras que la elasticidad de sustitución entre inputs en las funciones de producción Cobb-Douglas y CES es constante, en el caso de la función de producción Translog varía con el output y/o con la proporción de los inputs. Además, mientras que en el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas y CES la elasticidad de escala es constante (lo que implica la posibilidad de obtener curvas de costes medios continuamente crecientes, decrecientes o constantes con el output, pero no el poder comprobar la hipótesis clásica sobre la existencia de una curva de costes medios en forma de U), en el caso de la función de producción Translog la elasticidad de escala es variable, lo que permite verificar dicha hipótesis.

Son varias las especificaciones de la función de producción Translog que han sido realizadas. En nuestro caso desarrollamos la propuesta por Heatfhield y Wibe (1987, pág. 105), la cual en el caso de dos inputs V_1 y V_2, adopta la forma siguiente:

$$Q = \exp(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3 (\ln V_1)^2 + b_4 (\ln V_2)^2 + b_5 \ln V_1 \ln V_2) \quad [2.18]$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior nos queda:

$$\ln Q = \ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3 (\ln V_1)^2 + b_4 (\ln V_2)^2 + b_5 \ln V_1 \ln V_2 \quad [2.19]$$

Teniendo en cuenta que la elasticidad de escala, $E_{Q/V}$, viene dada por [2.2], tenemos:

$$\begin{aligned} E_{Q/V} &= Q(1/V_1)(b_1 + 2b_3 \ln V_1 + b_5 \ln V_2)(V_1/Q) \\ &+ Q(1/V_2)(b_2 + 2b_4 \ln V_2 + b_5 \ln V_1)(V_2/Q) \\ &= b_1 + b_2 + (2b_3 + b_5)\ln V_1 + (2b_4 + b_5)\ln V_2 \end{aligned} \quad [2.20]$$

De aquí se deduce que la elasticidad de escala varía no sólo con el nivel de output sino también con la proporción de los inputs. Por otra parte, señalamos que la función de producción Translog tiene las siguientes propiedades:

<u>a) Función de producción no homotética:</u> la función de producción Translog es una función de producción no homotética ya que su isocuanta puede ser cóncava o convexa, con una pendiente positiva o negativa que varía a lo largo del nivel de producción. Tomando logaritmos en [2.18] y realizando la diferencial total, queda:

$$
\begin{aligned}
(1/Q)dQ &= b_1(1/V_1)dV_1 + b_2(1/V_2)dV_2 + 2b_3\ln V_1(1/V_1)dV_1 \\
&+ 2b_4\ln V_2(1/V_2)dV_2 + b_5\ln V_2(1/V_1)dV_1 + b_5\ln V_1(1/V_2)dV_2
\end{aligned}
$$

Dado que la isocuanta es la curva de igual producto, la variación de la cantidad a lo largo de la misma es cero y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&- b_1(1/V_1)dV_1 - 2b_3\ln V_1(1/V_1)dV_1 - b_5\ln V_2(1/V_1)dV_1 = \\
&+ b_2(1/V_2)dV_2 + 2b_4\ln V_2(1/V_2)dV_2 + b_5\ln V_1(1/V_2)dV_2; \\
&- (dV_1/V_1)\cdot(b_1 + 2b_3\ln V_1 + b_5\ln V_2) = (dV_2/V_2)\cdot(b_2 + 2b_4\ln V_2 + b_5\ln V_1)
\end{aligned}
$$

Como la pendiente de la isocuanta es (dV_1/dV_2), nos queda definitivamente:

$$
(dV_1/dV_2) = -(V_1/V_2)\cdot(b_2 + 2b_4\ln V_2 + b_5\ln V_1)/(b_1 + 2b_3\ln V_1 + b_5\ln V_2)
$$

Por lo que en función del signo de los parámetros, la pendiente de la isocuanta puede ser positiva o negativa, dependiendo además del nivel de output.

<u>b) Elasticidad de sustitución:</u> la función de producción Translog tiene una elasticidad de sustitución variable, ya que depende del nivel de output y del nivel de utilización de los inputs respectivos. La E_s viene dada en [2.7], según:

$$
E_s = (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))/(d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2))
$$

La elasticidad de sustitución también puede ser expresada en términos de los inputs V_1 y V_2 y de las derivadas parciales de la producción en relación a cada uno de ellos[14]. En este caso, la elasticidad de sustitución adopta la siguiente expresión[15]:

$$E_s = -(f_1 f_2/V_1 V_2)\cdot((f_1 V_1 + f_2 V_2)/(f_{22} f_1^2 - 2 f_{12} f_2 f_1 + f_2^2 f_{11})) \quad [2.21]$$

Siendo, f_1 la derivada parcial de la producción con respecto al capital, (dQ/dV_1); f_2 la derivada parcial de la producción con respecto al trabajo, (dQ/dV_2); f_{11} la segunda derivada parcial de la producción con respecto al capital, (d^2Q/dV_1^2); f_{22} la segunda derivada parcial de la producción con respecto al trabajo, (d^2Q/dV_2^2) y $f_{12} = f_{21}$ la derivada cruzada de la producción con respecto al capital y al trabajo $(d^2Q/dV_1dV_2 = d^2Q/dV_2dV_1)$.

2.4.2. Evidencia empírica a partir de la función de producción Translog.

La aplicación de las funciones de producción transcendental logarítmicas ha sido más reciente que la aplicación de las funciones de producción Cobb-Douglas o CES, lo que ha motivado que las mismas hayan sido estimadas desde una óptica más acorde con el propio concepto de función de producción. Nos referimos a la estimación de la función de producción frontera y no "promedio" como la que hasta se ha venido realizando. De todas formas seguiremos en esta línea, ya que los estudios que han estimado una función de producción frontera Translog serán tratados posteriormente, al exponer el concepto de eficiencia frontera.

Otra cuestión a destacar sobre las funciones de producción Translog es que dichas funciones de producción no tienen la

---

[14] La equivalencia entre las dos fórmulas se demuestra en el apéndice 2.4 del apéndice matemático al final del capítulo.

[15] Ha sido elegida esta segunda expresión ya que eso nos simplificará el cómputo de cálculos a realizar.

correspondiente función dual de costes[16]. Es decir, no existe una correspondencia directa entre las funciones de producción y costes, hecho que si ocurre en el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas y CES. De todas formas, no son raros los trabajos que, bajo el supuesto de precios constantes y comportamiento minimizador de costes, han estimado las economías de escala a partir de una función de costes utilizando el inverso de la elasticidad del coste respecto de la producción o bien restando a la unidad el valor de dicha elasticidad[17]. De todas formas, hay que remarcar que no existe dualidad estricta entre las funciones transcendentales logarítmicas, ya que el valor de los parámetros de la elasticidad de escala no se pueden derivar de los parámetros de la elasticidad del coste respecto del output y viceversa.

En la mayoría de ocasiones, la función de producción Translog ha sido estimada estadísticamente a partir de (mco). Para ello es necesario aplicar logaritmos a la expresión [2.18] previa introducción de un error de estimación (exp)(e_t) en forma multiplicativa. En definitiva, la función a estimar presenta la siguiente forma:

$$LnQ_t= lnb_0+b_1 lnV_{1t}+b_2 lnV_{2t}+b_3(lnV_{1t})^2+b_4(lnV_{2t})^2+b_5 lnV_{1t}lnV_{2t}+e_t \quad [2.22]$$

Aparte del trabajo ya mencionado de Griliches y Ringstad (1971), destacamos el trabajo pionero de Christensen, Jorgenson y Lau (1971) que es posiblemente el más completo de los realizados de este tipo. En dicho trabajo se identifican las características del proceso productivo americano durante el periodo 1929-1960 a

[16] Lo que no significa que detrás de una función de producción Translog no exista una función de costes, sino que el parámetro de escala en la función de producción Translog se relaciona sólo de forma aproximada con la elasticidad del coste respecto de la producción en la función de costes Translog.

[17] Christensen y Greene (1976) y en el caso español los realizados por Raymond y Repilado (1989); Gual, Ximénez y Vives (1990) y Doménech (1991) sobre bancos y cajas de ahorro. En dichos trabajos, además de aplicar una especificación Translog también aplican otras especificaciones como la Cobb-Douglas.

partir de una función de producción Translog sobre la que se contrastan las más diversas hipótesis.

En esta misma línea, destacamos el trabajo realizado por Corbo y Meller (1979) sobre la industria chilena. De la misma forma que en el caso anterior, se parte de una función de producción Translog la cual es sometida a un contraste de hipótesis de tal manera que mediante el estadístico F podemos discriminar entre los distintos modelos obtenidos. El resultado obtenido es que no se puede rechazar el modelo Cobb-Douglas en 39 de los 44 sectores analizados. Para finalizar, los autores manifiestan que los resultados son muy parecidos a los de otras investigaciones, tales como la de Zarembka (1970).

En el caso español, Millán (1987) ha aplicado esta misma metodología en el sector de extracción de aceite de oliva en 1977 a partir de los datos suministrados por una encuesta. Se parte de la especificación Translog la cual es rechazada a partir del contraste F en favor de una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos crecientes a escala. Esta última especificación también se impone a una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala.

2.5. Concepto de eficiencia empresarial.

Como consecuencia de la información disponible a nivel de empresa, el concepto de eficiencia ha sido definido de formas muy distintas. Por ejemplo, en ocasiones, se ha otorgado a la rentabilidad de la empresa la categoría de indicador de eficiencia económica y social, ya que en condiciones aproximadamente competitivas nos medirá el grado de eficiencia en la utilización de recursos por parte de la empresa (Prior, Vergés y Vilardell, 1993. Pág. 10). En otras ocasiones, el concepto de eficiencia viene asociado con la minimización de costes medios de producción o la maximización de beneficios, hechos que, bajo ciertos supuestos derivados de los mercados competitivos, comportan una misma cosa.

En nuestro caso adoptamos la definición que tradicionalmente se ha venido dando a la eficiencia en el ámbito técnico o de producción. En este sentido, la definición dada en su día por Edgeworth (1881, pág. 2) nos parece perfectamente válida : "una máquina es más eficiente que otra si, cuando la cantidad total de combustible consumido por la primera es igual a la consumida por la segunda, la cantidad total de energía producida por la primera es mayor que la producida por la segunda". Con lo que podemos calcular el grado de eficiencia de la segunda máquina tomando a la primera como referencia. Este sería el concepto de eficiencia técnica, a la cual suele denominarse "pura" porque no interviene el efecto de la escala o tamaño.

Nuestro trabajo va más allá, al introducir el concepto de eficiencia de escala. Siguiendo el ejemplo anterior, diremos que la primera máquina es menos eficiente que una tercera máquina, si en ésta última, un consumo de combustible equivalente al doble del consumido por la primera máquina, nos lleva a una producción más del doble de la obtenida por la primera máquina. En este caso, diremos que la menor eficiencia de la segunda máquina viene motivada por una ineficiencia de escala o de tamaño.

Estos son los dos conceptos de eficiencia utilizados en esta investigación y que nosotros vamos a adaptar a los modelos de producción frontera.

2.6. Eficiencia frontera a partir de la función de producción.

En numerosas ocasiones se ha comprobado que las diferencias de eficiencia productiva entre las empresas de un mismo tamaño son mayores que las diferencias de eficiencia productiva entre las empresas de distinto tamaño. Por esta razón, desde hace algún tiempo, los estudios que han estimado las economías de escala lo han hecho no a partir de una función de producción o de costes "promedio" sino a partir de una función frontera. Esta estimación nos permite determinar el grado de eficiencia de cada empresa en su tamaño, cuantificando la distancias de cada observación con respecto a la frontera. La evaluación de la eficiencia frontera puede realizarse a nivel del ámbito productivo (eficiencia técnica) o a nivel del ámbito económico en el que se desarrolla aquél, introduciendo la función de costes correspondiente (eficiencia asignativa o en precios). El primer enfoque metodológico que relacionó ambos conceptos fue el propuesto por Farrell (1957).

2.6.1. Evaluación frontera de la eficiencia: el enfoque pionero de Farrell.

En dicho trabajo, Farrell introduce el concepto de eficiencia productiva (EP), la cual puede definirse como la habilidad que tiene una empresa para producir un determinado output al coste mínimo de producción. Farrell plantea un modelo de eficiencia frontera, construyendo una isocuanta a partir de las mejores observaciones de outputs e inputs. El método es independiente del tipo de función de producción, aunque son necesarios los supuestos de convexidad de la isocuanta y de rendimientos constantes a escala. De esta forma, la eficiencia productiva (EP) para cada medición se desglosa en eficiencia técnica (ETE) y en eficiencia asignativa o de precios (EA). Es decir:

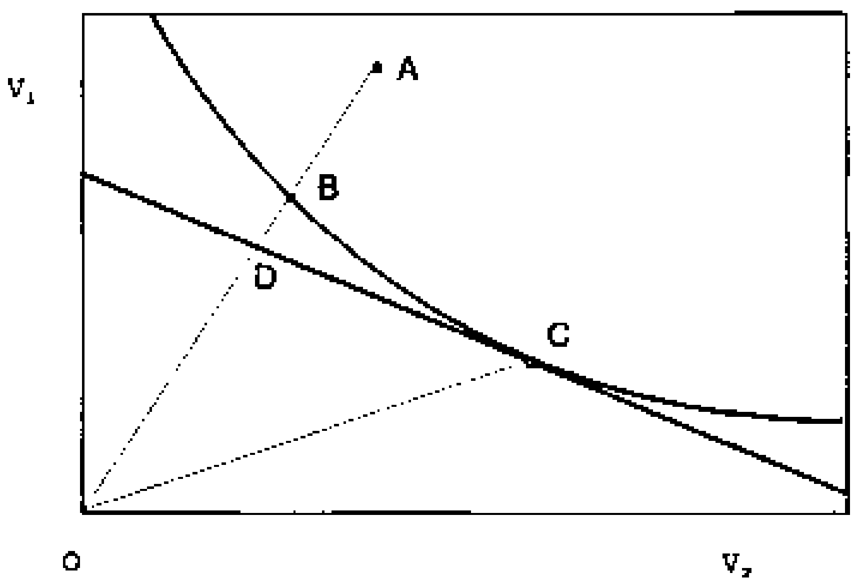
$$EP_i = ETE_i \cdot EA_i \qquad [2.23]$$

Mientras que la eficiencia técnica corresponde al proceso físico de transformación de inputs en outputs, la eficiencia asignativa corresponde al proceso de asignación de los factores de producción dados sus precios respectivos; es decir, en el primer caso tratamos de maximizar el output dado un nivel de inputs (o bien tratamos de minimizar el consumo de inputs dado un nivel de output) y en el segundo caso tratamos de minimizar el coste de producción para unos precios dados de cada input.

Vamos a ilustrar este método con el ejemplo propuesto en el gráfico 2.1. Por una parte tenemos todas aquellas combinaciones de inputs que producen el máximo output posible, las cuales se corresponden con la isocuanta unitaria representada en dicho gráfico, por la otra, aquellos niveles de inputs que multiplicados por sus precios respectivos nos proporcionan la recta isocoste. Para finalizar, disponemos de una serie de mediciones A, B y C que representan los consumos de capital V_1 y trabajo V_2, necesarios para producir una unidad de output. Todo ello queda representado en el gráfico 2.1.

<u>Gráfico 2.1</u>

<u>Evaluación frontera de la eficiencia de Farrell</u>



Según la metodología propuesta por Farrell, la eficiencia productiva (EP) de las empresas A, B y C,, deglosada en eficiencia técnica (ETE) y en eficiencia asignativa (EA), viene dada, según [2.23], por:

EP_A = (OB/OA)·(OD/OB) < 1
EP_B = (OB/OB)·(OD/OB) < 1
EP_C = (OC/OC)·(OC/OC) = 1

Obsérvese que la medición C tiene una eficiencia productiva igual a la unidad, ya que tanto la eficiencia técnica como la eficiencia asignativa tienen valor unitario; ésta es la medición eficiente. Sin embargo, tanto la medición A como la medición B tienen una eficiencia productiva menor que la unidad, ya que se trata de dos mediciones ineficientes, cuyo grado de eficiencia se situa entre 0 y 1. Ahora bien, el desglose de la eficiencia productiva es muy diferente, así mientras la medición A tiene ineficiencia técnica e ineficiencia asignativa, la medición B tiene ineficiencia asignativa o de precios pero no ineficiencia técnica.

Como dijimos anteriormente, la principal limitación del modelo de Farrell es la asunción de rendimientos constantes a escala, lo que imposibilita, por lo menos en principio, cuantificar la parte de eficiencia productiva, técnica o asignativa que podría venir dada por la eficiencia de escala. De todas formas, en una segunda versión del primer trabajo, Farrell y Fieldhouse (1957) estiman la eficiencia productiva en situación de rendimientos crecientes a escala.

El concepto de eficiencia de Farrell ha sido utilizado en numerosos estudios, independientemente del método empleado en la construcción de la frontera eficiente[14]. Ahora bien, el método utilizado en la construcción de la frontera de producción es de crucial importancia ya que la estimación de la eficiencia tanto a nivel global como a nivel de cada observación no es independiente del método elegido. Este hecho explica el que estimaciones sobre eficiencia frontera realizadas sobre los mismos datos pero con métodos diferentes, proporcionen resultados distintos. Ver, por ejemplo, los trabajos realizados por Cowing, Reifschneider y Stevenson (1983) y Wagstaff (1989) en el caso de una frontera de costes y los de Corbo y Melo (1986) y Forsund (1992) en el caso de una frontera de producción.

Básicamente existen dos clases de métodos que han venido siendo utilizados en la construcción de la frontera eficiente de producción, los métodos no paramétricos y los métodos paramétricos.

---

[14] Un buen survey de los distintos métodos utilizados puede observarse en Fried, Lovell y Schmidt (1993) o en Thiry y Tulkens (1989).

En el caso de los métodos no paramétricos, se prescinde de la forma que tenga la función de producción, construyéndose la frontera de producción a partir de las mejores observaciones disponibles. En la construcción de la frontera y en la evaluación de la eficiencia para cada medición se han utilizado diversas técnicas, entre las que destacan las técnicas de programación lineal. Las metodologías DEA y FDH son dos buenos exponentes de este tipo de técnicas, siendo esta última la de más reciente aplicación[19].

En el caso de los métodos paramétricos se parte de una determinada función de producción frontera, por ejemplo una función de producción Cobb-Douglas o Translog, la cual es estimada a partir de técnicas de programación lineal o estadísticas. En este sentido, podemos distinguir la frontera de producción determinista matemática propuesta por Aigner y Chu (1968), la cual es estimada utilizando las técnicas de programación lineal; la frontera de producción determinista estadística propuesta por Afriat (1972), Richmond (1974) y Greene (1980), que es estimada utilizando técnicas estadísticas tales como mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc) o máxima verosimilitud; la frontera de producción probabilística de Timmer (1971) y la estocástica de Aigner, Lovell y Schmidt (1977).

En las siguientes líneas vamos a realizar una descripción de los principales métodos que han sido empleados en la estimación de una función de producción frontera y en la cuantificación de la eficiencia frontera. Como quiera que uno de los objetivos de nuestra investigación es la cuantificación de la eficiencia técnica o de producción, la descripción será realizada a partir de las funciones de producción frontera, aunque fácilmente puede ser adaptada a la función de costes frontera[20].

---

[19] DEA (*Data Envelopment Analysis*) y FDH (*Free Disposal Hull*). La primera metodología propuesta por Charnes, Cooper y Rhodes (1979) y desarrollada posteriormente por Banker, Charnes y Cooper (1984) y la segunda propuesta por Tulkens (1993).

[20] Ver por ejemplo Wagstaff (1989).

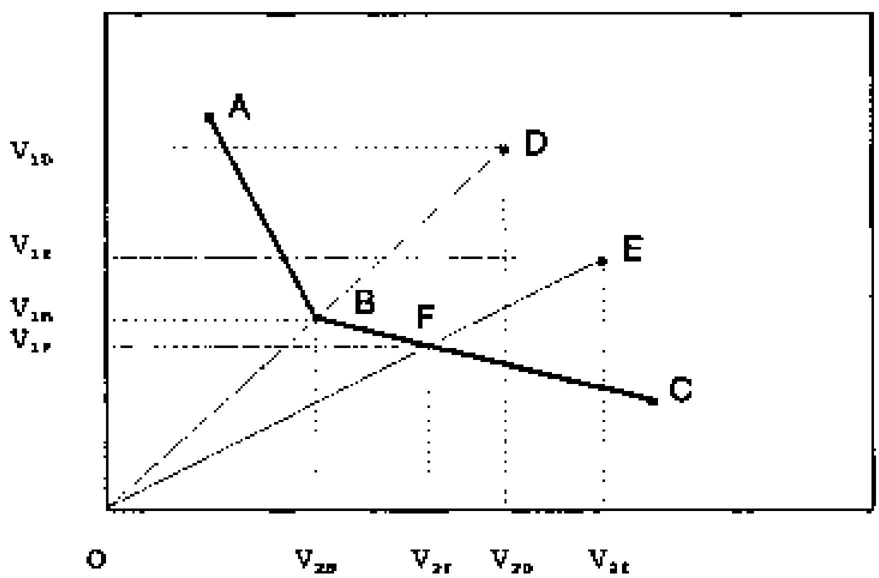
2.6.2. Frontera de producción no paramétrica.

Los métodos utilizados para estimar la frontera de producción no paramétrica no asumen ninguna relación funcional entre output e inputs, construyéndose la frontera de producción a partir de las mejores observaciones. Dichas observaciones son denominadas como técnicamente eficientes y son aquéllas que, dado el estado actual de la técnica, alcanzan un output máximo para una combinación dada de inputs o bien un determinado nivel de output con cantidades mínimas de inputs. Una vez identificadas cada una de las observaciones eficientes y asumiendo el supuesto de convexidad de la isocuanta, dichas observaciones se unen entre sí, construyéndose de esta forma la frontera de producción eficiente.

En el gráfico 2.2. se construye la frontera de producción a partir de las observaciones eficientes A, B y C, (cuyo grado de eficiencia técnica es igual a 1) y se ilustra el cálculo de la eficiencia técnica de las observaciones ineficientes D y E.

Gráfico 2.2

Frontera de producción no paramétrica y eficiencia técnica.



La eficiencia técnica de la medición D se calcula en relación a la eficiencia técnica de B que es igual a 1, ya que se encuentra en el mismo rayo lanzado desde el origen. El cálculo de la eficiencia técnica de D es:

$$ETE_D = OB/OD = (V_{1B}^2 + V_{2B}^2)^{1/2}/(V_{1D}^2 + V_{2D}^2)^{1/2}$$

Sin embargo, la eficiencia técnica de la observación E debe calcularse en relación a una medición virtual o teórica F, cuya utilización de inputs V_{1F} y V_{2F} serán los correspondientes a la medición E, si ésta fuese eficiente. El consumo de inputs V_{1F} y V_{2F} correspondientes a la medición virtual F se obtendrá como resultado de efectuar una combinación lineal de los inputs y outputs observables, en este caso los correspondientes a las mediciones B y C. La combinación lineal es realizada a partir de la obtención de unas ponderaciones o factores de intensidad Z_B y Z_C, que determinan combinaciones convexas de los valores observables B, C y E. El valor de dichas ponderaciones o factores de intensidad puede ser calculado a partir de la solución del siguiente problema de programación lineal[21]:

$$[\mathrm{Min}] \quad Z_B + Z_C$$

s.a:

$$Q_B Z_B + Q_C Z_C \geq Q_E$$

$$V_{1B} Z_B + V_{1C} Z_C \leq V_{1E}$$

$$V_{2B} Z_B + V_{2C} Z_C \leq V_{2E}$$

$$(V_{1B} Z_B + V_{1C} Z_C)/(V_{2B} Z_B + V_{2C} Z_C) = V_{1E}/V_{2E}$$

Las tres primeras restricciones se refieren a las combinaciones convexas de los inputs y outputs observados de las mediciones B, C y E. La cuarta restricción indica que la relación entre inputs de la medición virtual debe ser la misma que la relación de los inputs de la observación sometida a evaluación, que es en este caso la medición E. La resolución del anterior problema de

[21] En ocasiones se han planteado otras técnicas alternativas a las aquí descritas para evaluar la eficiencia. Ver por ejemplo, el trabajo de Berges, Maravall y Pérez (1986).

programación lineal nos proporcionará aquella combinación de factores de intensidad Z_B y Z_C, con los que calcularemos el consumo de inputs por unidad de output de la medición virtual F.

$$V_{1F} = V_{1B}Z_B + V_{1C}Z_C$$
$$V_{2F} = V_{2B}Z_B + V_{2C}Z_C$$

Calculándose la eficiencia técnica de la medición virtual E, ETE_E de la siguiente forma:

$$ETE_E = OF/OE = (V_{1F}^2 + V_{2F}^2)^{1/2}/(V_{1E}^2 + V_{2E}^2)^{1/2}$$

El cálculo de la eficiencia técnica mediante este procedimiento puede hacerse muy laborioso si el número de mediciones a evaluar es alto. Una modificación del anterior programa nos permite calcular la eficiencia técnica de cada medición sometida a evaluación y la combinación de los factores de intensidad. Dicho problema de programación lineal se plantea de la forma siguiente:

$$[\mathrm{Min}] \quad 0Z_B + 0Z_C + ETE_E$$
s.a:
$$Q_B Z_B + Q_C Z_C \geq Q_E$$
$$V_{1B}Z_B + V_{1C}Z_C \leq V_{1E}ETE_E$$
$$V_{2B}Z_B + V_{2C}Z_C \leq V_{2E}ETE_E$$

Obsérvese que en ambos casos el cálculo de la eficiencia técnica de la medición E ha sido realizado a partir de la identificación de la medición virtual F, la cual es una combinación lineal de las mediciones B y C. En este caso, se dice que el conjunto de referencia está formado por las mediciones B y C. La identificación de este conjunto de referencia ha sido posible gracias a la simplicidad del ejemplo seleccionado. Ahora bien, cuando el número de observaciones es elevado, la identificación de este conjunto de referencia se hace difícil, por lo que es necesario plantear el problema en términos más generales, de tal manera que el conjunto de referencia no quede preestablecido de antemano. El problema planteado en términos generales es:

$$ETE = [Min]\ \Gamma$$

s.a:

$$Z \cdot M \geq Q$$

$$\Gamma \cdot V \geq Z \cdot N$$

Donde, ETE es el grado de eficiencia técnica de la medición sometida a evaluación, Z es el vector de parámetros de intensidad, Γ es el coeficente de eficiencia técnica que indica el porcentaje necesario en el consumo de inputs que nos permitiría mantener en su nivel actual el output de la medición sometida a evaluación, Q y V son el output e inputs de la medición que se pretende evaluar y, M y N los vectores de outputs e inputs correspondientes a las mediciones observadas.

En el planteamiento anterior no se tienen en cuenta el efecto que en la eficiencia técnica puede tener la escala de producción. Recientemente han sido formulados problemas de programación lineal que evalúan para cada medición la eficiencia técnica pura o eficiencia independiente de la escala y la eficiencia técnica de escala. En este caso, la eficiencia técnica se descompone en eficiencia técnica pura y en eficiencia técnica de escala[22]. Así, por ejemplo, en el caso de asumir rendimientos variables, el anterior problema de programación lineal queda planteado de la siguiente forma:

$$ETE = [Min]\ \Gamma$$

s.a:

$$Z \cdot M \geq Q$$

$$\Gamma \cdot V \geq Z \cdot N$$

$$\Sigma\ Z_i = 1$$

La resolución de este problema de programa lineal permite descomponer la eficiencia técnica en eficiencia técnica pura y eficiencia técnica de escala.

[22] Ver por ejemplo el desarrollo del método y una aplicación en Prior (1991).

Trabajos recientes que han empleado esta metodología son los correspondientes a Drake y Weyman-Jones (1992), Fukuyuma (1993), Favero y Papi (1995), y Piesse y Towsend (1995) o los trabajos de Grifell, Prior y Salas (1992) y Doménech (1992) en el caso español. Fukuyuma (1993), encuentra que la eficiencia de escala es mayor que la eficiencia pura y ambas crecen con el tamaño en el caso de los bancos japoneses. Drake y Weyman-Jones (1992) y Piesse y Towsend (1995), en el caso de las empresas de construcción inmobiliaria británicas, encuentran valores semejantes entre ambos tipos de eficiencia, aunque es ligeramente superior la eficiencia de escala. En el trabajo de Favero y Papi (1995), la eficiencia viene explicada por el tamaño y otras variables relevantes. En el trabajo de Grifell, Prior y Salas (1992) sobre las cajas de ahorro españolas, se descompone la eficiencia técnica global en eficiencia técnica pura y en eficiencia de escala. En términos generales, la eficiencia de escala tiene gran importancia, recomendando los autores un incremento en el tamaño de las oficinas y en el saldo medio de las cuentas. En este sentido, los autores consideran correcta la política de fusión de cajas que se ha venido realizando hasta el momento, abogando por una continuación en la misma. Por su parte, Doménech (1992), en el caso del sector bancario español, encuentra que en promedio la eficiencia técnica pura es menor que la eficiencia de escala.

Para finalizar este apartado, señalamos que estas técnicas de programación lineal no solamente han sido formuladas para evaluar la eficiencia técnica, sino también, para evaluar la eficiencia asignativa o en precios y la eficiencia global (Bruning, 1981, Prior, 1991).

2.7. Frontera de producción paramétrica.

En este caso se parte de una determinada forma funcional de la función de producción, como por ejemplo la Cobb-Douglas, la CES o la Translog, procediéndose a su estimación mediante técnicas de programación lineal o bien mediante técnicas estadísticas. En el primer caso será denominada como frontera de producción determinista matemática y en el segundo como frontera de producción determinista estadística. En este último caso también incluiremos algunos casos particulares como la frontera de producción probabilística o la estocástica.

2.7.1. Frontera de producción determinista matemática.

La función de producción frontera puede ser estimada mediante técnicas de programación matemática, si los residuos entre la producción observada o real y la producción frontera estimada son obligados a ser de un determinado signo.

El método fue propuesto inicialmente por Aigner and Chu (1968), partiendo de la idea siguiente: mientras que la estimación de una función de producción "promedio" requiere minimizar la suma de los errores al cuadrado (tanto positivos como negativos), la estimación de una función de producción frontera requiere la minimización de los residuos sujeta a que éstos tengan un valor cero o negativo, de esta forma, se fuerza a que todas las observaciones estén en o por debajo de la frontera de producción.

Siguiendo a Timmer (1970), los parámetros de la función de producción pueden estimarse mediante la resolución de un problema de programación lineal minimizando la suma de errores con la condición de que éstos sean menores o iguales a cero. Al tratarse de un método paramétrico, se parte de una determinada función de producción. Sea, por ejemplo, la siguiente función de producción frontera Cobb-Douglas de dos inputs:

$$Q_i = A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{b} \cdot \exp(e_i) \qquad e_i \leq 0 \qquad [2.24]$$

Es decir, $Q_i = Q_{Fi} \cdot \exp(e_i)$, $e_i \leq 0$ donde Q_{Fi} es el output frontera correspondiente a la medición i. Dicha función, que puede linealizarse tomando logaritmos, adopta la forma siguiente:

$$\mathrm{Ln}Q_i = \ln A + a \cdot \ln V_{1i} + b \cdot \ln V_{2i} + e_i \qquad e_i \leq 0 \qquad [2.25]$$

Con lo que $\ln Q_i - (\ln A + a\cdot\ln V_{1i} + b\cdot\ln V_{2i}) = \ln Q_i - \ln Q_{Fi} = e_i \leq 0$. La estimación de esta función de producción frontera puede realizarse a partir de la resolución de un problema de programación lineal en el que se minimizan los errores de la estimación frontera sujeto a que éstos sean negativos. Es decir:

$$[\mathrm{Min}]\ -\sum e_i = \sum (\ln Q_i - \ln Q_{Fi}) \qquad [2.26]$$

s.a.:

$$\ln Q_i - \ln Q_{Fi} \leq 0$$
$$\ln A,\ a \text{ y } b \geq 0$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que $-\sum e_i = \sum \ln Q_i - \sum \ln A - \sum a\cdot\ln V_{1i} - \sum b\cdot\ln V_{2i}$ y que para un conjunto de datos, $\sum \ln Q_i$ es constante, (por lo que puede ser suprimido sin que ello afecte al valor de los coeficientes a estimar lnA, a y b), la expresión anterior puede ser dividida por el número de observaciones, quedando en este caso el siguiente problema de programación lineal:

$$[\mathrm{Min}]\ \ln A + a\cdot\overline{\ln V_1} + b\cdot\overline{\ln V_2} \qquad [2.27]$$

s.a.:

$$\ln A + a\cdot\ln V_1 + b\cdot\ln V_1 \geq \ln Q_1$$
$$\ln A + a\cdot\ln V_2 + b\cdot\ln V_2 \geq \ln Q_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\ln A + a\cdot\ln V_n + b\cdot\ln V_n \geq \ln Q_n$$
$$\ln A,\ a \text{ y } b \geq 0.$$

Una vez que ha sido estimada la función de producción frontera, calculamos el índice de eficiencia técnica para cada observación a partir de la siguiente expresión:

$$ETE_i = \exp(e_i) = Q_i/Q_{Fi} \qquad [2.28]$$

O bien en términos logarítmicos, $e_i = \ln Q_i - \ln Q_{Fi}$.

Además del trabajo de Aigner y Chu (1968), cabe destacar los realizados por Tyler (1979), Page (1980), Kopp y Smith (1980), Prior, Vergés y Vilardell (1993), y Colom (1994). En algunos de ellos, además de estimarse una función de producción frontera por el método de programación lineal, también se estima por el método estadístico, comparándose posteriormente los resultados. En la mayoría de estos trabajos, ha sido estimada una frontera de producción Cobb-Douglas, a excepción, por ejemplo, del trabajo de Prior, Vergés y Vilardell (1993) en el que se estima una función de producción Translog para comparar la eficiencia de las empresas públicas y privadas en el caso español.

2.7.2. Frontera de producción determinista estadística.

Así como en el caso anterior la función frontera de producción se estima a partir de las técnicas de programación matemática, en este caso se estima mediante técnicas estadísticas[23]. Sea la función de producción frontera Cobb-Douglas propuesta anteriormente, $Q_i = A \cdot V_{1i}^a \cdot V_{2i}^b \cdot \exp(e_i)$, $e_i \leq 0$. Si $e_i \leq 0$, entonces, $0 \leq \exp(e_i) \leq 1$, lo que fuerza a que todas las observaciones estén en o por debajo de la frontera de producción.

Esta función de producción frontera ha sido estimada por máxima verosimilitud en varias ocasiones, asumiendo alguna de las distribuciones más comunes de una sola cara para e_i, tales como la exponencial, la normal truncada, la beta, la gamma, etc. Por ejemplo, Afriat (1972) parte de una distribución beta y Schmidt (1976) parte en primer lugar de una distribución exponencial y posteriormente de una distribución normal truncada, demostrando en el último caso que los resultados coinciden con los calculados mediante el método determinista matemático.

La limitación más importante de la estimación por máxima verosimilitud es que es necesario asumir una determinada distribución para los residuos e_i, lo que condiciona el cálculo

[23] Un buen *survey* sobre métodos y trabajos referidos al caso agrícola puede observarse en Battese (1992).

de la eficiencia técnica al tipo de distribución elegida. Además, hemos de añadir la laboriosidad de los cálculos a realizar cuando estimamos una función de producción por máxima verosimilitud, circunstancia que hace prácticamente imprescindible la utilización de paquetes informáticos para la estimación de dichas funciones. Por todo ello, la función de producción [2.25] ha sido estimada en numerosas ocasiones por el procedimiento de los mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc). Dicho procedimiento es expuesto a continuación.

La estimación de la función de producción frontera Cobb-Douglas [2.25], $\ln Q_i = \ln A + a \cdot \ln V_{1i} + b \cdot \ln V_{2i} + e_i$, $e_i \leq 0$, por el procedimiento de los mínimos cuadrados ordinarios, proporciona estimaciones eficientes de todos los parámetros a excepción del término constante ya que una de las asunciones de la regresión clásica no se cumple. Dicha asunción, establece que el valor esperado del error de estimación es nulo. En este caso es fácil comprobar que el valor esperado de e_i correspondiente a la expresión [2.25] no es nulo, $E(e_i<>0)$. Por esta razón Richmond (1974) propone la utilización de mínimos cuadrados ordinarios sobre un modelo corregido por la media (e_*) del error e_i. Para ello es necesario asumir una determinada distribución de una sola cara para los errores e_i y calcular su media. Ahora, sumando y restando e_*, en el segundo miembro de la ecuación [2.25], ésta puede ser estimada mediante mínimos cuadrados ordinarios. Dicha espresión quedaría planteada de la forma siguiente:

$$\ln Q_i = (\ln A + e_*) + a \cdot \ln V_{1i} + b \cdot \ln V_{2i} + (e_i - e_*) \qquad [2.29]$$

El término de error $e_i - e_*$, así obtenido tiene media cero y cumple todas las propiedades de la regresión clásica salvo normalidad. Por lo tanto, la estimación minimocuadrática ordinaria proporciona estimaciones insesgadas para todos los coeficientes de regresión y para $\ln A + e_*$. Para pasar de esta función de producción "promedio" a la función de producción frontera es necesario ajustar con e_* el término constante obtenido mediante (mco). Es decir, al término constante de una estimación obtenida mediante (mco), sea por ejemplo lnA de la función de producción "promedio" Cobb-Douglas anterior, le sumamos e_* y así obtenemos la función de producción frontera correspondiente.

$$LnQ_i = lnA + e_* + a \cdot lnV_{1i} + b \cdot lnV_{2i} + e_i \qquad e_i \leq 0 \qquad [2.30]$$

El output frontera estimado para cada observación vendrá dado por $lnQ_{Fi} = lnA + e_* + a \cdot lnV_{1i} + b \cdot lnV_{2i}$ y ahora la expresión [2.30], puede plantearse como $lnQ_i = lnQ_{Fi} + e_i$, $e_i \leq 0$; calculándose la eficiencia técnica para cada observación a partir de $e_i = lnQ_i - lnQ_{Fi}$, o bien presentando dicha eficiencia entre 0 y 1 a partir de $ETE_i = (exp)(e_i) = Q_i/Q_{Fi}$.

Al igual que en la estimación por máxima verosimilitud, el cálculo de la eficiencia para cada observación no es independiente de la distribución de una sola cara elegida para la distribución del error, por lo que la elección de esta distribución condiciona el grado de eficiencia de las observaciones sometidas a evaluación[24].

Otra limitación del método es que el valor obtenido para e_*, no nos asegura que todas las observaciones se sitúen en la frontera o por debajo de ella. En este sentido, nos podemos encontrar con observaciones que presentan un output mayor que el correspondiente a la propia frontera de producción, lo que implicaría que el grado de eficiencia es mayor que la unidad. Para evitar esta incongruencia Greene (1980) propuso un modelo en el que se corrige la frontera de producción hasta que ningún residuo sea positivo y al menos uno sea nulo. En este caso, para obtener el término constante de la frontera, sumamos al término constante obtenido por mínimos cuadrados ordinarios, el valor

[24] En el próximo capítulo se insistirá sobre el método de (mcoc), proponiendo distribuciones concretas para $e_i \leq 0$ y derivando el cálculo de e_*, a partir de los momentos centrales de los residuos minimocuadráticos ordinarios. También se analizará el efecto que sobre el grado de eficiencia tiene la asunción de una determinada distribución para $e_i \leq 0$.

residual positivo más alto de la estimación minimocuadrática ordinaria (e_{max}). Al igual que en el caso anterior, la función de producción frontera puede estimarse mediante mínimos cuadrados ordinarios a partir del siguiente modelo corregido:

$$LnQ_i = (lnA + e_{max}) + a \cdot lnV_{1i} + b \cdot ln\ V_{2i} + (e_i - e_{max}) \qquad [2.31]$$

También en este caso, el término de error $e_i - e_{max}$ tiene media cero y obtenemos parámetros insesgados para todos los coeficientes de regresión y para $lnA + e_{max}$. De esta forma, corregiremos el término constante de la estimación mediante (mco), sea por ejemplo lnA, con el valor e_{max}, obteniéndose la función de producción frontera correspondiente. Es decir:

$$LnQ_i = lnA + e_{max} + a \cdot lnV_{1i} + b \cdot lnV_{2i} + e_i \qquad e_i \leq 0 \qquad [2.32]$$

Con lo que el output frontera para cada observación vendrá dado por $lnQ_{Fi} = lnA + e_{max} + a \cdot lnV_{1i} + b \cdot lnV_{2i}$. Ahora la expresión [2.32], puede plantearse como $lnQ_i = lnQ_{Fi} + e_i$, $e_i \leq 0$; calculándose la eficiencia técnica a partir $e_i = lnQ_i - lnQ_{Fi}$, o a partir de $ETE_i = (exp)(e_i) = Q_i/Q_{Fi}$.

Aunque este método supera la limitación impuesta por la asunción de una determinada distribución de los errores, lo que permite calcular la eficiencia de cada observación prescindiendo de toda distribución, el método es muy sensible a las observaciones extremas, por lo que suelen darse niveles de eficiencia muy bajos. Tanto este método como el de Aigner y Chu (1968), el cual también viene muy condicionado por las observaciones extremas, proporcionan niveles de eficiencia bastante bajos en comparación a la estimación de la frontera de producción por máxima verosimilitud o por mínimos cuadrados ordinarios corregidos asumiendo alguna de las distribuciones de una sola cara para los errores de la estimación frontera, e_i. De hecho, dichos modelos han venido siendo encuadrados dentro de los denominados modelos de frontera completa, ya que no existe ninguna posibilidad de obtener observaciones por encima de la frontera.

Han sido numerosos los trabajos que han estimado una función de producción frontera por el procedimiento determinista estadístico. Estos han sido, tanto por el método de máxima verosimilitud asumiendo una determinada distribución de los errores, Afriat (1972), Aigner, Amemiya y Poirier (1976), Greene (1980), y Al-Obaidan y Scully (1991), como por el método de los mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc), bien asumiendo una determinada distribución como Richmond (1974), Ishaq (1984) y, Corbo y Melo (1986), bien corrigiendo la estimación minimocuadrática ordinaria por el máximo error positivo según el método propuesto por Greene (1980). Por su sencillez, éste útimo método ha sido empleado en numerosas ocasiones, Roller (1984), Banker, Charnes, Cooper y Maindiratta (1988), Alvarez, Belknap y Saupe (1988), Feijoo y Pérez (1994) y Colom (1994).

2.7.3. Frontera de producción probabilística y frontera de producción estocástica.

La idea que subyace en la construcción de estas dos clases de fronteras de producción es que las denominadas fronteras de producción "completas" son muy sensibles a un error de medición. En este caso, tanto la eficiencia de cada una de las mediciones restantes como la eficiencia media adoptarán un valor más bajo. Para corregir este problema, Timmer (1971) introdujo el concepto de frontera de producción probabilística.

La idea consiste en eliminar un 1%, 2%, 5%, etc. de las observaciones o empresas que en primer lugar hemos identificado como más eficientes aplicando alguno de los métodos estimativos de frontera "completa" como el de Aigner y Chu, (1968) o el de Greene (1980). Posteriormente, se estima una nueva frontera de producción sin los datos anteriores, computándose un nuevo índice de eficiencia con todas las observaciones en las que algún caso presentará un índice de eficiencia mayor que la unidad. Algunos de los trabajos que han empleado este método son los de Page (1980) y Colom (1994).

Esta misma idea se corresponde con el concepto de frontera de producción estocástica. La posibilidad de un error en los datos o la existencia de *outliers* (empresas jóvenes y agresivas, empresas con un output excepcional, etc.) implicaría unos niveles de eficiencia muy bajos para el resto de observaciones. Fueron Aigner, Lovell y Schmidt (1977), los que propusieron y desarrollaron el concepto frontera de producción estocástica. En el caso de la frontera de producción determinista propuesto anteriormente, $Q_i = A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{b} \cdot \exp(e_i)$, $e_i \leq 0$, el error de estimación con respecto a la frontera e_i, recoge no solo la eficiencia técnica pura sino también el efecto de los errores de medición y otros posibles efectos que están fuera del control de la empresa. La función frontera de producción estocástica cuantifica cada uno de estos dos efectos, estimando la eficiencia técnica para cada observación.

Estos dos efectos serán denominados como u_i y v_i. Mientras que el primer efecto u_i, recoge la eficiencia técnica propiamente dicha, el segundo v_i, recoge las variaciones con respecto a la frontera debidas a errores de medida, omisión de variables, etc. En el caso de u_i, asumimos una distribución de una sola cara (normalmente una distribución seminormal o exponencial), mientras que en el caso de v_i, se asume una distribución normal. En nuestro caso, la frontera de producción estocástica presenta la forma siguiente:

$$Q_i = A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{b} \cdot \exp(u_i + v_i) \qquad u_i \leq 0 \qquad [2.33]$$
$$Q_i = A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{b} \cdot \exp(u_i) \cdot \exp(v_i) \qquad u_i \leq 0$$

Calculándose el índice de eficiencia técnica para cada observación a partir de:

$$ETE_i = \exp(u_i) = Q_i / A \cdot V_{1i}^{a} \cdot V_{2i}^{b} \cdot \exp(v_i) \qquad [2.34]$$

La estimación de [2.33] puede realizarse por máxima verosimilitud o por mínimos cuadrados ordinarios corregidos, pero en ambos casos es necesario asumir una determinada distribución de u_i, lo que condiciona el grado de eficiencia obtenida a la distribución elegida. Por lo tanto, a partir de una determinada distribución para u_i puede estimarse la eficiencia media esperada para un conjunto de observaciones. Además, si la estimación es realizada por mínimos cuadrados ordinarios corregidos, un estimador de la eficiencia media esperada puede obtenerse a partir de los residuos de la estimación minimocuadrática ordinaria. Para estimar la eficiencia de cada observación es necesario descomponer el error de estimación en sus dos componentes, u_i y v_i. Una descomposición del error de estimación puede obtenerse aplicando la fórmula expuesta por Jondrow, Lovell, Materov y Schmidt (1982). De todas formas, ello requiere intrincados y tediosos cálculos, por lo que es prácticamente imprescindible la utilización de alguno de los programas informáticos que han sido desarrollados recientemente al respecto[25].

Por esta razón, la mayoría de trabajos que estiman la eficiencia a partir de la frontera de producción estocástica lo hace a nivel de eficiencia media esperada para el conjunto de observaciones, estimándose la eficiencia a nivel de grupo de empresas, sector, país, etc. Ejemplos en este sentido son los trabajos realizados por Caves y Barton (1990), Green y Mayes (1991), Caves (1992) y Neogi y Ghosh (1994) utilizándose en este último trabajo un panel de datos. Calculando la eficiencia técnica para cada observación, destacamos los trabajos de Ishaq (1984), Huang y Bagi (1984), Broeck (1988) y Schidler y Bravo-Ureta (1994), utilizándose en este último caso una frontera estocástica de costes.

Dos comentarios finales vamos a realizar sobre la estimación de la eficiencia a partir de la función de producción frontera. En primer lugar, en relación a la idoneidad del método elegido en la estimación de la frontera producción y en segundo lugar en relación a la eficiencia de escala. Con respecto a la idoneidad del método elegido, señalamos que la principal ventaja de los métodos paramétricos es que la especificación de una determinada

[25] LIMDEP (Greene, 1991) o FRONTIER (Coelli, 1989).

forma funcional de la función de producción permite no sólo conocer los principales parámetros de la tecnología productiva, sino que también permite una mayor facilidad de cómputo en el cálculo de la eficiencia. Sin embargo, su principal limitación es que hemos de asumir una determinada distribución del error, lo que condiciona el grado de eficiencia a la distribución propuesta. Además, en el caso de las fronteras de producción "completas" hemos de tener en cuenta las reservas con las que debemos contemplar los resultados obtenidos dada la posibilidad de existencia de errores de medición, situaciones coyunturales extraordinarias, etc.[26]. Por esta razón, el cómputo de la eficiencia tiende a realizarse según los distintos métodos, extrayéndose conclusiones más o menos consistentes según los resultados obtenidos.

La segunda cuestión viene relacionada con la eficiencia de escala. En la mayoría de los estudios mencionados en los apartados anteriores se computa la eficiencia de cada observación dada su correspondiente combinación inputs, en otras palabras, se calcula la eficiencia de cada observación en su respectiva escala, pero no se calcula la eficiencia de esa misma observación que vendría dada por la escala, es decir en relación a la observación que presenta la escala o tamaño óptimo. El hecho es importante dado que no todas las tecnologías de producción exhiben rendimientos constantes a escala, con lo que al introducir el efecto de la escala, la eficiencia técnica total ETE se descompone en eficiencia técnica dada la escala, que es lo que normalmente se entiende como eficiencia pura propiamente dicha, y en eficiencia técnica dada por la escala[27].

---

[26] Aunque los métodos no paramétricos también construyen una frontera de producción "completa", una *outline* afecta en mayor medida al nivel de eficiencia de cada observación, si la frontera se construye por el método de Greene (1980).

[27] En adelante nos referiremos a estos dos conceptos como eficiencia dada la escala ESE y eficiencia dada por la escala EES y cuyo producto nos dará la eficiencia total ET. Por lo tanto, ET = ESE·EES.

Trabajos que han introducido estos dos efectos han sido mas bien escasos. Una excepción son los trabajos pioneros de Seitz, (1970, 1971) o los ya señalados anteriormente de Drake y Weyman-Jones (1992), Fukuyuma (1993), Favero y Papi (1995), Piesse y Towsend (1995), Grifell, Prior y Salas (1992) y Doménech (1992). Sin embargo, todos estos trabajos han utilizado el método no paramétrico. Más escasos aún son los trabajos que cuantifican el efecto de la escala en la eficiencia total a partir del método paramétrico. En este último caso cabe destacar el trabajo de Forsund (1992) en el que se cuantifica la eficiencia de escala partiendo de una función de producción homotética Cobb-Douglas con rendimientos a escala variables, la cual es estimada a partir del programa lineal propuesto por Forsund y Hjalmarsson (1979) y previa definición de la escala óptima. Este es el enfoque más parecido, al que adoptaremos en esta investigación, aunque en nuestro caso utilizaremos el método determinista estadístico, el cual será descrito más detalladamente en el capítulo 3.

2.8. Evaluación del comportamiento dinámico de las empresas europeas.

El hecho de que conceptos como función de producción, economías de escala y eficiencia sean conceptos esencialmente dinámicos nos obliga a realizar un análisis del comportamiento de los mismos a lo largo de un determinado periodo de tiempo. Dicho análisis, que será posible dado que dispondremos de información para dos años distintos, constará de dos fases totalmente diferenciadas. La primera fase constará de un análisis descriptivo de las variaciones producidas en los parámetros tecnológicos e índices de eficiencia estimados en los dos años. De esta forma verificaremos la consistencia de los resultados obtenidos cada año y conoceremos la evolución de los principales parámetros tecnológicos de las empresas europeas en estos primeros años de funcionamiento del mercado único europeo.

La segunda fase constará a su vez de dos apartados. El primero cuantificará el cambio técnico; de esta manera dispondremos de una primera aproximación de la importancia del cambio técnico como factor explicativo de la variación de la eficiencia dada la escala a lo largo del periodo estudiado. El segundo consitirá en la cuantificación de las tasas de variación del output. En este caso introduciremos un modelo en el que las tasas de variación del output se desglosan en tres factores explicativos.

El marco conceptual de referencia en el caso de la cuantificación del cambio técnico es el iniciado por Nishimizu y Page (1982), en el que se desglosa la variación de la productividad total en progreso técnico y en variación de eficiencia productiva. En este sentido, dado que se dispondrá de información relativa a dos periodos de tiempo, cuantificaremos el cambio técnico (o progreso tecnológico) que contienen las funciones de producción frontera ajustadas. En esta línea, partimos de la propuesta planteada por Humphrey (1993), aunque dicha propuesta no es directamente aplicable por realizarse a partir de funciones de coste Translog. Así pues, para cubrir el objetivo descrito deberá adaptarse previamente la propuesta de Humphrey al entorno de las funciones de producción. Determinado el nivel de cambio técnico, nos planteamos analizar las características que presenta, es decir si es neutral o presenta algún tipo de sesgo que modifica las características tecnológicas de los procesos de producción de las empresas europeas (mayor intensividad del capital, por ejemplo). De todo ello se podrá obtener una visión muy concreta sobre la situación de la empresa española en relación al continuo proceso de renovación tecnológica que experimenta la empresa europea. El cambio técnico experimentado se determinará a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{C}_{0i} = -(ESE_{0i/1} - ESE_{0i})/ESE_{0i} = 1 - (ESE_{0i/1}/ESE_{0i}) \qquad [2.35]$$

Donde, $ESE_{0i/1}$ es el nivel de eficiencia dada la escala de la empresa i a partir de la producción frontera del momento 1 y datos del momento 0 y ESE_{0i} es el nivel de eficiencia dada la escala de la empresa i a partir de la producción frontera del momento 0 y datos del momento 0.

El cambio técnico también puede cuantificarse con datos del momento 1. En este caso:

$$\dot{C}_{i1} = - (ESE_{i1} - ESE_{i1/o})/ESE_{i1/o} = 1 - (ESE_{i1}/ESE_{i1/o}) \qquad [2.36]$$

Donde, $ESE_{i1/o}$ es el nivel de eficiencia dada la escala de la empresa i a partir de la producción frontera del momento 0 y datos del momento 1 y ESE_{i1} es el nivel de eficiencia dada la escala de la empresa i a partir de la producción frontera del momento 1 y datos del momento 1.

En relación al segundo apartado, correspondiente a las tasas de variación del output, se determinan cuáles son las fuentes del crecimiento del tamaño de la empresa española y europea; es decir, cuantificar en qué medida el crecimiento del output de las empresas analizadas se debe a los siguientes factores: a) crecimiento por mejora del nivel de eficiencia (acercamiento a la frontera de referencia), b) crecimiento por cambio tecnológico (facilitado por el desplazamiento de la frontera), c) crecimiento por un mayor consumo de inputs (movimiento a lo largo de la función de producción).

Este último análisis se relaciona con los trabajos de Aly y Grabowsky (1988), Prior (1990) y Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1992), aunque requerirá la formulación de una metodología específica que logre dar respuesta a los objetivos planteados en esta investigación.

Apéndice matemático del capitulo 2.

Apéndice 2.1. Identificación de los rendimientos de escala en la función de producción CES.

$$E_{Q/V} = -(u/\theta)Y(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}(-\theta)\cdot a\cdot V_1^{-\theta-1}(V_1/Q) +$$
$$(-u/\theta)\cdot Y(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}(-\theta)\cdot(1-a)\cdot V_2^{-\theta-1}\cdot(V_2/Q).$$
$$E_{Q/V} = -(u/\theta)Y(aV_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}(-\theta)\cdot a\cdot V_1^{-\theta-1}\cdot V_1\cdot Y^{-1}\cdot(aV_1^{-\theta} + (1-a)$$
$$V_2^{-\theta})^{(u/\theta)} + (-u/\theta)Y(aV_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}\ (-\theta)\cdot(1-a)\cdot V_2^{-\theta-1})\cdot V_2\cdot Y^{-1}$$
$$(aV_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{(u/\theta)}.$$
$$E_{Q/V} = -(u/\theta)\cdot(-\theta\cdot a\cdot V_1^{-\theta})\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-1} -(u/\theta)\cdot(-\theta\cdot(1-a)\cdot V_2^{-\theta})$$
$$(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-1}.$$
$$E_{Q/V} = u\cdot a\cdot V_1^{-\theta}\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-1} + u\cdot(1-a)\cdot V_2^{-\theta}\cdot(a\cdot V_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-1}.$$
$$E_{Q/V}= u\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)V_2^{-\theta})^{-1}.$$
$$E_{Q/V} = u.$$

Apéndice 2.2. Desarrollo de la funcion de producción CES a partir de la aproximación de Kmenta.

$$f(\theta) = \ln\cdot(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta}).$$
$$f(0) = \ln\cdot(a\cdot V_1^{-0} + (1-a)\cdot V_2^{-0}) = \ln\cdot(a + (1-a)) = \ln 1 = 0.$$

$$f_1(\theta) = (a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-1}(-a\cdot V_1^{-\theta}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-\theta}\ln V_2).$$
$$f_1(0) = (a\cdot V_1^{-0} + (1-a)\cdot V_2^{-0})^{-1}(-a\cdot V_1^{-0}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-0}\ln V_2).$$
$$f_1(0) = (a + (1-a)^{-1}(-a\cdot\ln V_1 - (1-a)\ln V_2).$$
$$f_1(0) = -(a\cdot\ln V_1 + (1-a)\ln V_2).$$

$$f_{11}(\theta) = -(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-2}(-a\cdot V_1^{-\theta}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-\theta}\ln V_2)$$
$$(-a\cdot V_1^{-\theta}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-\theta}\ln V_2) + (a\cdot V_1^{-\theta}\ln V_1\ln V_1 + (1-a)\cdot V_2^{-\theta}\ln V_2\ln V_2)$$
$$(a\cdot V_1^{-\theta} + (1-a)\cdot V_2^{-\theta})^{-1}.$$
$$f_{11}(0) = -(a\cdot V_1^{-0} + (1-a)\cdot V_2^{-0})^{-2}(-a\cdot V_1^{-0}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-0}\ln V_2)$$
$$(-a\cdot V_1^{-0}\ln V_1 - (1-a)\cdot V_2^{-0}\ln V_2) + (a\cdot V_1^{-0}\ln V_1\ln V_1 + (1-a)\cdot V_2^{-0}\ln V_2\ln V_2)$$
$$(a\cdot V_1^{-0} + (1-a)\cdot V_2^{-0})^{-1}.$$
$$f_{11}(0) = -(a + (1-a))^{-2}(-a\cdot\ln V_1 - (1-a)\ln V_2)(-a\ln V_1 - (1-a)\ln V_2)$$
$$+ (a\cdot\ln V_1 \mathrm{Ln} V_1 + (1-a)\cdot\ln V_2\ln V_2)(a + (1-a))^{-1}.$$
$$f_{11}(0) = -(-a\cdot\mathrm{Ln}V_1 - (1-a)\ln V_2)(-a\ln V_1 - (1-a)\ln V_2)$$
$$+ a\cdot(\ln V_1)^2 + (1-a)\cdot(\ln V_2)^2.$$

$f_{11}(0) = -(-a\cdot\ln V_1 - (1-a)\ln V_2)^2 + a\cdot(\ln V_1)^2 + (1-a)\cdot(\ln V_2)^2.$

$f_{11}(0) = -(a^2\cdot(\ln V_1)^2 + 2a(1-a)\ln V_1\ln V_2) + (1-a)^2\cdot(\ln V_2)^2) +$
$+ a(\ln V_1)^2 + (1-a)\cdot(\ln V_2)^2.$

$f_{11}(0) = -a^2\cdot(\ln V_1)^2 - 2a(1-a)\ln V_1\ln V_2 - (1-a)^2\cdot(\ln V_2)^2) +$
$+ a(\ln V_1)^2 + (1-a)\cdot(\ln V_2)^2.$

$f_{11}(0) = -a^2\cdot(\ln V_1)^2 + a(\ln V_1)^2 - 2a(1-a)\ln V_1\ln V_2 + (\ln V_2)^2((1-a)$
$-(1-a)^2).$

$f_{11}(0) = -a^2\cdot(\ln V_1)^2 + a(\ln V_1)^2 - 2a(1-a)\ln V_1\ln V_2 + (\ln V_2)^2(a-a^2).$

$f_{11}(0) = a(1-a)((\ln V_1)^2 - 2\ln V_1\ln V_2 + (\ln V_2)^2).$

$f_{11}(0) = a(1-a)(\ln V_1 - \ln V_2)^2.$

$f_{11}(0) = a(1-a)(\ln(V_1/V_2))^2.$

Apéndice 2.3. Aproximación de Kmenta en caso de rendimientos constantes a escala.

Partiendo de la expresión [2.16] que es la aproximación de Kmenta con rendimientos a escala u:

$$LnQ_i = \ln Y + ua\ln V_{1i} + u(1-a)\ln V_{2i} - (1/2)ua\theta(1-a)(\ln V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i.$$

Y suponiendo ahora que u = 1, queda:

$$LnQ_i = \ln Y + a\ln V_{1i} + (1-a)\ln V_{2i} - (1/2)a\theta(1-a)(\ln(V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i.$$
$$LnQ_i = \ln Y + a\ln V_{1i} + \ln V_{2i} - a\ln V_{2i} - (1/2)a\theta(1-a)(\ln(V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i.$$
$$Ln(Q_i/V_{2i}) = \ln Y + a\ln(V_{1i}/V_{2i}) + ((-1/2)\theta a + (1/2)\theta a^2)(\ln(V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i.$$
$$Ln(Q_i/V_{2i}) = \ln Y + a\ln(V_{1i}/V_{2i}) + (1/2)a(a-1)\theta(\ln V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i.$$

Apéndice 2.4. Derivación de la elasticidad de sustitución en términos de inputs y de las derivadas parciales del output en relación a los mismos.

La elasticidad de sustitución E_s viene dada por [2.7] según:

$$E_s = (d(V_1/V_2)/(V_1/V_2))/(d(dV_1/dV_2)/(dV_1/dV_2)).$$

Partiendo de una función de producción $Q = f(V_1,V_2)$ y del concepto de isocuanta (Q_{cte}), realizamos la diferencial total:

$$dQ_{(cte)} = (\partial Q/\partial V_1)dV_1 + (\partial Q/\partial V_2)dV_2.$$
$$0 = (\partial Q/\partial V_1)dV_1 + (\partial Q/\partial V_2)dV_2.$$
$$-(\partial Q/\partial V_1)dV_1 = (\partial Q/\partial V_2)dV_2.$$
$$(dV_1/dV_2) = -(\partial Q/\partial V_2)/(\partial Q/\partial V_1).$$
$$d(dV_1/dV_2) = -d(\partial Q/\partial V_2)/(\partial Q/\partial V_1).$$
$$d(dV_1/dV_2) = -d(f_2/f_1).$$
$$(dV_1/dV_2) = -(f_2/f_1). \qquad [a.2.4.1]$$

Por otra parte, a partir de [a.2.4.1] tenemos:

$$d(dV_1/dV_2) = -((f_{22}f_1-f_{12}f_2)/f_1^2)dV_2 + f_{21}f_1-f_{11}f_2)/f_1^2)dV_1$$
$$= -[(f_{22}/f_1)-(f_{12}f_2/f_1^2)]dV_2 + [(f_{21}/f_1)-(f_2f_{11}/f_1^2))dV_1$$
$$= -dV_2((f_{22}/f_1)-(f_{12}f_2/f_1^2) + ((f_{21}/f_1)-(f_2f_{11}/f_1^2))(dV_1/dV_2)).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta [a.2.4.1] queda:

$$d(dV_1/dV_2) = -dV_2((f_{22}/f_1)-(f_{12}f_2/f_1^2) - (f_{21}f_2/f_1^2) + (f_2^2f_{11}/f_1^3)).$$
$$d(dV_1/dV_2) = -dV_2((f_{22}/f_1) - (2f_{12}f_2/f_1^2) + (f_{11}f_2^2/f_1^3)).$$
$$d(dV_1/dV_2) = -(dV_2/f_1^3)(f_{22}f_1^2 - 2f_{12}f_2f_1 + f_{11}f_2^2). \qquad [a.2.4.2]$$

Para finalizar:

$$d(V_1/V_2) = ((V_2 - 0)/V_2^2)dV_1 + ((0 - V_1)/V_2^2)dV_2.$$
$$d(V_1/V_2) = (dV_1/V_2) - (V_1dV_2/V_2^2).$$
$$d(V_1/V_2) = (dV_2/V_2)((dV_1/dV_2) - (V_1/V_2)).$$
$$d(V_1/V_2) = (dV_2/V_2)((-f_2/f_1) - (V_1/V_2)).$$
$$d(V_1/V_2) = (dV_2/V_2^2f_1)(-f_2V_2 - V_1f_1).$$
$$d(V_1/V_2) = -(dV_2/V_2^2f_1)(f_1V_1 + V_2f_2). \qquad [a.2.4.3]$$

Sustituyendo [a.2.4.1] [a.2.4.2] y [a.2.4.3] en [2.7] queda finalmente:

$$E_s = -((dV_2/V_2^2f_1)(f_1V_1+f_2V_2))/(V_1/V_2))\cdot((-f_2/f_1)/(-(dV_2/f_1^3)(f_{22}f_1^2-2f_{12}f_2f_1+f_{11}f_2^2))).$$
$$E_s = -(f_2f_1^{-1}V_2^{-2}f_1^{-1}(f_1V_1+f_2V_2))/(V_1V_2^{-1}f_1^{-3}(f_{22}f_1^2-2f_{12}f_2f_1+f_{11}f_2^2)).$$
$$E_s = -f_2f_1^{-1}f_1^{-1}f_1^3(f_1V_1+f_2V_2)/V_1V_2^{-1}V_2^2(f_{22}f_1^2-2f_{12}f_2f_1+f_{11}f_2^2).$$
$$E_s = -(f_1f_2/V_1V_2)((f_1V_1 + f_2V_2)/(f_{22}f_1^2 - 2f_{12}f_2f_1 + f_2^2f_{11})).$$

3. DESCRIPCION DE LA METODOLOGIA DE EVALUACION Y DE LA BASE DE DATOS UTILIZADA.

En este capítulo describimos la metodología utilizada en la estimación del tipo y grado de las economías de escala a nivel global y sectorial, así como la metodología utilizada en la estimación del grado de eficiencia, cambio técnico y tasa de variación del output y sus componentes para cada empresa[1]. También se realizará una descripción de la muestra de empresas y de las variables que son utilizadas en esta investigación.

3.1. Observaciones metodológicas preliminares.

La estimación de las economías de escala a nivel global y sectorial y el cálculo de la eficiencia frontera para cada empresa va a realizarse a partir de una función de producción del tipo $Q = f(V_1,V_2)$, donde Q es output o producción y V_1 y V_2 inputs o factores productivos. Esto implica que el resto de factores, que en la práctica pudieran intervenir en el proceso productivo, deben permanecer constantes con el nivel de producción. Es decir, asumimos la existencia de la condición "ceteris paribus". Dicha condición viene refiriéndose generalmente a la existencia de unos precios de los inputs y una tecnología constantes.

3.1.1. La condición "ceteris paribus".

Hemos preferido trabajar con una función de producción antes que con una de costes, no sólo porque la información disponible sobre los costes de las empresas en la base de datos es muy exigua, sino porque, además, esta investigación debe encuadrarse dentro del concepto estricto de economías de escala y por lo tanto en el ámbito de la eficiencia de producción o eficiencia técnica.

---

[1] Como ya anticipamos en el capítulo anterior, por eficiencia entendemos el derivado de la eficiencia frontera técnica o de producción ET, la cual será desglosada en eficiencia dada la escala ESE y en eficiencia dada por la escala EES.

Es decir, no admitimos la existencia de economías de escala que puedan ser debidas a factores de tipo pecuniario, como por ejemplo, un menor salario a medida que aumentamos la escala de producción de la empresa. En resumen, la hipótesis que manejamos es la existencia de precios constantes en los factores de producción para cualquier nivel de producción.

3.1.2. Tecnología idéntica para todas las empresas.

En relación a un tipo de tecnología idéntica para todas las empresas, hay dos hechos que respaldan esta hipótesis. Por una una parte, el hecho de trabajar con lo que podemos denominar como empresas grandes o medianas, las cuales lógicamente deben tener unos procesos tecnológicos similares, máxime si tenemos en cuenta el nivel creciente de competitividad al que van a estar sometidas en un mercado cada vez más globalizado, una vez que se hayan liberalizado todos los mercados interiores de la Unión Europea[3]. Cuestión que podría ser puesta en duda si en la muestra de empresas apareciesen también las empresas pequeñas, para las cuales cabe esperar otro proceso tecnológico distinto.

La segunda cuestión viene relacionada con el método de estimación que ha sido adoptado en esta investigación. En este caso hemos optado por una estimación de tipo estadístico sobre datos de corte transversal y no sobre datos de serie temporal. Una estimación a partir de datos de corte transversal nos permite asumir con mayor facilidad la existencia de una tecnología de producción constante para todas las empresas; sin embargo, si la estimación se realizase sobre datos de serie temporal, la relación entre producción y factores productivos puede incluir un cierto sesgo a causa de una tecnología que no se ha mantenido neutral a lo largo del tiempo entre las empresas de distinto tamaño.

[3] En este sentido, pensamos que la pequeña empresa pequeña, con un menor grado de internacionalización en sus operaciones y con una mayor vocación hacia los mercados locales, no va a estar tan sometida a las presiones de eficiencia y competitividad como las empresas de mayor tamaño.

3.1.3. Otras observaciones metodológicas.

En esta investigación no se va a partir de una tecnología de producción determinada, hecho que en numerosos trabajos no ha sido respetado al estimarse las economías de escala o la eficiencia frontera a partir de una función de producción establecida a priori, como por ejemplo en el caso de una función de producción Cobb-Douglas. En nuestro caso, estimaremos las economías de escala y la eficiencia frontera de forma más amplia, ensayando distintos modelos que se corresponden en cada caso con una tecnología productiva distinta. Estos modelos de producción serán estimados a nivel global y a nivel de sector. En este sentido, hemos de señalar que aunque la idea originaria era la de realizar las estimaciones a nivel sectorial, consideramos que una estimación a nivel global es muy oportuna, teniendo en cuenta el carácter de empresa multiproducto y multiplanta que en su mayoría cabe catalogar a las empresas de la muestra y también dado que en algunos sectores el número de empresas es muy bajo[3].

Otra cuestión importante a tener en cuenta es la naturaleza de las variables que son utilizadas en la estimación de una función de producción, las cuales van a depender del ámbito de la investigación. Por tratarse de la estimación de las economías de escala a nivel global y a nivel de cada uno de los sectores que integran el mercado único europeo, es evidente que la información no va a poder suministrada con datos de planta sino con datos de empresa. Por esta razón trabajaremos con lo que ha venido denominándose como una función de producción híbrida, es decir una función de producción, mezcla de unidades físicas y monetarias[4]. En este sentido, esperamos que las empresas europeas se comporten como verdaderas tomadoras de precios.

---

[3] Por esa razón entendemos que en la mayoría de ocasiones el concepto de industria o sector es en numerosas ocasiones, más que que una realidad tangible, un ejercicio simbólico de clasificación empresarial.

[4] Incluso a nivel de planta tendríamos bastantes dificultades para identificar una producción homogénea en términos físicos.

3.1.4. Reflexiones en torno a la identificación y selección de variables.

Como anteriormente hemos puesto de manifiesto, la estimación de las economías de escala puede realizarse tanto a partir de la función de producción como a partir de la función de costes, pero el concepto en sí de economías de escala siempre viene ligado al ámbito técnico de la producción. Es decir, el término economías de escala se relaciona directamente con la posibilidad de ahorro relativo en el consumo de factores cuando aumentamos la escala de producción. Por lo tanto, el concepto de economías de escala requiere trabajar en términos de unidades físicas, tanto a nivel de la producción obtenida como a nivel de los factores productivos utilizados. Este hecho, tal como habíamos señalado anteriormente, requiere una información muy concreta que es prácticamente imposible de obtener en nuestro caso, dados los objetivos y el ámbito de esta investigación. La conversión de las anteriores variables en términos monetarios subsana el problema anterior, aunque el hecho comporta una serie de riesgos y limitaciones que van a depender directamente de la clase de variable elegida. En este sentido, vamos a analizar los aspectos positivos y negativos de cada una de las variables, que vienen siendo denominadas como variables "proxys" de las variables correspondientes al proceso de producción[9].

3.1.5. Variables "proxys" del output de la empresa.

Las principales variables que han sido identificadas como variables "proxys" del output de la empresa se exponen a continuación:

a) La cifra de negocios: es una de las magnitudes empresariales de más amplia difusión y, por lo tanto, es una información que

[9] El término "proxy" es muy utilizado en el ámbito de la economía industrial para referirse a aquellas variables que, por los distintos motivos sustituyen a las variables típicas de la función microeconómica de producción.

se obtiene con relativa facilidad. Tiene sin embargo dos problemas importantes. En primer lugar, ignora el grado de integración vertical, ya que en un mismo sector una empresa puede realizar todos los procesos productivos y otra, solamente, el proceso final. Es evidente que este criterio sobreestima la escala de producción de la segunda empresa en relación a la primera. En segundo lugar, un cierto poder de mercado en alguna de las empresas tendería a aumentar, vía precios de venta, la cifra de negocios, sobreestimando la escala de producción de la misma.

b) Valor añadido: se trata de una magnitud monetaria calculada a partir de los consumos monetarios de los factores de producción internos de la empresa, capital y trabajo principalmente. En este sentido presenta una ventaja importante en relación a la cifra de negocios, ya que esta magnitud si tiene en cuenta el grado de integración vertical de la empresa, por lo que se trata de una de las variables que mejor identifican el output de la empresa, siendo muy utilizada en este tipo de trabajos. Sin embargo, unos pagos excesivos de dichos factores (precios no competitivos), implica una sobreestimación de la escala de producción de la empresa. Esto último puede darse en el caso, de que las empresas grandes paguen salarios más elevados que las empresas pequeñas (Kamerschen, 1968). Si asumimos que los precios de los factores capital y trabajo son competitivos, entonces se trata de una magnitud bastante más representativa que la cifra de negocios para medir el output de la empresa. Dicha magnitud no es siempre disponible, aunque si lo es en nuestro caso.

c) Valor de la producción: se trata de una magnitud calculada a partir de los consumos monetarios de los factores productivos de la empresa, sin embargo unos precios no competitivos en dichos factores supondría una sobreestimación de la escala de producción. Con respecto al valor añadido se diferencia en que también incluye el pago de los consumos externos (materias primas y auxiliares, consumos externos, etc.). Identifica mejor la escala de producción que en el caso de la cifra de negocios ya que tiene en cuenta los ajustes por existencias, así como los descuentos e impuestos indirectos. En nuestro caso, la base de datos aporta información sobre la variable producción, pero al no realizar el ajuste por existencias, pensamos que más bien se trata del valor de la cifra de ingresos netos antes que el de la producción. Por esta razón hemos preferido trabajar con el valor añadido como magnitud representativa del output de la empresa.

3.1.6. Variables "proxys" de los inputs de la empresa.

Las principales variables que han sido identificadas como variables "proxys" de los inputs de la empresa, son las siguientes:

a) Número de empleados: al igual que la cifra de negocios, se trata de una magnitud de amplia difusión, por lo que fácilmente se encuentra información sobre la misma. Tiene la ventaja de que, a diferencia de las anteriores magnitudes, es de carácter físico, por lo que no puede estar condicionada por los distintos niveles de inflación o por los diferentes criterios de valoración contable que puedan existir entre las empresas de distintos sectores y/o países. Ahora bien, el número de empleados puede presentar alguna deficiencia como criterio de medición del input trabajo. Por ejemplo, si las empresas están sujetas a prolongaciones distintas de su jornada laboral, el número de empleados no refleja la verdadera utilización del input trabajo, por lo que sería más conveniente utilizar el número de horas trabajadas. Sin embargo, tal como ocurre en nuestro caso, esta última información no es siempre disponible.

b) Consumo físico de materias primas: podría ser un buen indicador del nivel de inputs si el producto o productos fabricados se elaborasen a partir de una sola materia prima. La utilización de esta magnitud presenta dos dificultades. En primer lugar esta situación casi nunca se da en las empresas industriales manufactureras, no solo porque se trata normalmente de empresas multiproducto sino porque cada uno de los productos se fabrican a partir de varias materias primas, las cuales suelen tener entre ellas un alto grado de heterogeneidad. De todas formas, en algunos casos concretos, el consumo físico de materia prima puede ser una buena medida "proxy" del nivel de input, como en el caso del consumo de carbón o hulla en determinadas centrales térmicas. Normalmente la obtención de información sobre el consumo físico de las materias primas utilizadas en el proceso productivo es muy difícil. En nuestro caso esto es totalmente imposible dadas las características de la muestra de empresas.

c) Otros inputs de tipo monetario: se englobarían magnitudes relativas a los inputs capital y trabajo así como a sus consumos respectivos, es decir, recursos propios, activos totales, salarios, etc. La información sobre los mismos suelen obtenerse con facilidad, pero su idoneidad como medidas "proxy" suele tener algunas limitaciones, ya que se trata de valores monetarios que pueden estar sometidos a sesgos importantes debido a que las empresas pueden tener criterios distintos de valoración contable, estar sometidas a diferentes grados de inflación, seguir diferentes políticas de distribución de dividendos, etc. En nuestro caso, como magnitud representativa del input capital, utilizaremos el total de activos al tratarse de una de las variables de las que si disponemos de información en nuestra base de datos.

3.2. Formalización del modelo utilizado en la estimación y cuantificación de las economías de escala.

En este apartado describimos el modelo utilizado en la estimación y cuantificación de las economías de escala. Dicho modelo se estimará a nivel global y a nivel sectorial mediante procedimiento estadístico a partir del método de mínimos cuadrados ordinarios (mco)[4]. Además de las expresiones de

[4] La denominamos "promedio" porque el método de estimación no nos permite hablar de función de producción en sentido estricto. De todas formas, esta cuestión no importa demasiado en estos momentos, dado que el objetivo ahora es estimar las economías de escala a nivel global y sectorial.

cálculo relativas a la estimación de las economías de escala, también serán expuestas las correspondientes a la elasticidad del output en relación a cada input, a la elasticidad de sustitución entre inputs y a las productividades marginales y medias de cada input.

3.2.1. Relación entre las diferentes funciones de producción descritas anteriormente.

Las funciones de producción descritas en el capítulo anterior se relacionan entre sí a partir de la aceptación o rechazo de determinadas hipótesis. A continuación estudiamos dicha relación tomando como base la función de producción Translog, dado que ésta es la función de producción más amplia de las ya expuestas. La función de producción Translog se transforma en una función de producción CES o Cobb-Douglas si se cumplen ciertas hipótesis. Como señalamos en el capítulo anterior, la función de producción Translog de dos inputs, V_1 y V_2, viene dada por [2.19], según:

$$LnQ = lnb_0 + b_1 lnV_1 + b_2 lnV_2 + b_3(lnV_1)^2 + b_4(lnV_2)^2 + b_5 lnV_1 lnV_2$$

Sobre dicha función establecemos las siguientes hipótesis:

<u>a) Hipótesis de rendimientos constantes.</u> Esta hipótesis es aceptada si se cumplen las siguientes restricciones:

$$b_5 + 2b_3 = 0 \quad y \quad b_5 + 2b_4 = 0$$

Es decir $b_6 = -2b_3 = -2b_4$ y $b_3 = b_4$, con lo que sustituyendo en la función Translog queda:

$$LnQ = lnb_0 + b_1 lnV_1 + b_2 lnV_2 + b_3(lnV_1)^2 + b_3(lnV_2)^2 - 2b_3 lnV_1 lnV_2$$
$$Ln\ Q = lnb_0 + b_1 lnV_1 + b_2 lnV_2 + b_3(ln(V_1/V_2))^2$$

Cuya última expresión se corresponde con la función de producción CES en la aproximación realizada por Kmenta [2.16], la cual ya ha sido expuesta en el capítulo anterior.

b) Hipótesis de rendimientos constantes e iguales a la unidad (b_1 $+ b_2 = 1$). Si además imponemos la hipótesis de rendimientos constantes, ($b_1 + b_2 = 1$), con lo que $b_2 = 1 - b_1$, la expresión anterior nos queda de la forma siguiente:

$$Ln(Q/V_2) = lnb_0 + b_1 ln(V_1/V_2) + b_3(ln(V_1/V_2))^2$$

Cuya expresión se corresponde con la función CES con rendimientos constantes a escala [2.17], expuesta en el capítulo anterior.

c) Hipótesis ($b_3 = 0$). El cumplimiento de esta hipótesis implica separabilidad entre factores de producción[7]. Si dicha hipótesis se cumple ($b_3 = 0$), tenemos dos casos distintos:

c_1) La hipótesis se cumple en el modelo CES. En este caso, la expresión queda como:

$$LnQ = lnb_0 + b_1 lnV_1 + b_2 lnV_2$$

La cual se corresponde con la función de producción Cobb-Douglas [2.8], expuesta en el capítulo anterior.

c_2) La hipótesis se cumple en el modelo CES ($b_1 + b_2 = 1$). En este caso la expresión se reduce a:

$$Ln(Q/V_2) = lnb_0 + b_1 ln(V_1/V_2)$$

La cual se corresponde con la función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala [2.9], expuesta también en el capítulo anterior.

En el cuadro 3.1 se presentan los distintos modelos a estimar en función de la aceptación o rechazo de las distintas hipótesis nulas formuladas (*H_0*).

---

[7] Si la función de producción es separable en algún grupo de factores, las decisiones de producción pueden ser optimizadas por separado dentro de cada grupo (Berndt y Christensen, 1973).

Cuadro 3.1

Relación entre las distintas funciones de producción.

Translog
$$LnQ = lnb_0+b_1lnV_1+b_2lnV_2+b_3(lnV_1)^2+b_4(lnV_2)^2+b_5lnV_1lnV_2$$

↓

(H_0): $b_5 + 2b_3 = 0$, $b_5 + 2b_4 = 0$

↓

CES
$$LnQ = lnb_0+b_1lnV_1+b_2lnV_2+b_3(ln(V_1/V_2))^2$$

↓	↓
(H_0): $b_1 + b_2 = 1$	(H_0): $b_3 = 0$
↓	↓
CES $(b_1+b_2 = 1)$ $Ln(Q/V_2)=lnb_0+b_1ln(V_1/V_2)+b_3(ln(V_1/V_2))^2$	Cobb-Douglas $LnQ=Lnb_0+b_1lnV_1+b_2lnV_2$
↓	↓
(H_0): $b_3 = 0$	(H_0): $b_1 + b_2 = 1$
↓	↓

↓

Cobb-Douglas $(b_1 + b_2 = 1)$
$$Ln(Q/V_2)=lnb_0+b_1ln(V_1/V_2)$$

En dicho cuadro pueden observarse los distintos modelos de producción que surgen en cada caso como consecuencia de aceptar o rechazar la hipótesis nula correspondiente. En el único caso en el cual no existe ningún tipo de relación a partir de la aceptación o rechazo de alguna de las hipótesis nulas es entre los modelos CES $(b_1 + b_2 = 1)$ y Cobb-Douglas. Cada uno de los anteriores modelos serán sometidos a estimación tanto a nivel global (conjunto de empresas de la muestra) como a nivel sectorial (conjunto de empresas de cada sector), así como para cada año de la investigación, en concreto para los años 1991 y

1994, de esta forma conoceremos el tipo de tecnología existente en cada caso[8]. En adelante, estos modelos serán denominadas como los modelos de producción 1, 2, 3, 4 y 5, los cuales, una vez haya sido introducido el correspondiente error de estimación, adoptarán finalmente las siguientes formas estimativas[9]:

MODELO 1: Translog.

$$LnQ_i = lnb_0+b_1lnV_{1i}+b_2lnV_{2i}+b_3(lnV_{1i})^2+b_4(lnV_{2i})^2+b_5lnV_{1i}lnV_{2i}+e_i \quad [3.1]$$

MODELO 2: CES.

$$LnQ_i = lnb_0 + b_1lnV_{1i} + b_2lnV_{2i} + b_3(ln(V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i \quad [3.2]$$

MODELO 3: CES $(b_1 + b_2 = 1)$.

$$Ln(Q_i/V_{2i}) = lnb_0 + b_1ln(V_{1i}/V_{2i}) + b_3(ln(V_{1i}/V_{2i}))^2 + e_i \quad [3.3]$$

MODELO 4: Cobb-Douglas.

$$LnQ_i = lnb_0 + b_1lnV_{1i} + b_2lnV_{2i} + e_i \quad [3.4]$$

MODELO 5: Cobb-Douglas $(b_1 + b_2 = 1)$.

$$Ln(Q_i/V_{2i}) = lnb_0 + b_1ln(V_{1i}/V_{2i}) + e_i \quad [3.5]$$

3.2.2. Estimación de las economías de escala y demás variables relacionadas con la tecnología de producción correspondiente.

En este apartado exponemos las variables que serán calculados a partir de las estimaciones realizadas de los modelos anteriores. Se calculará la elasticidad de escala $E_{Q/V}$, las elasticidades del output en relación a los inputs capital y trabajo ($E_{Q/V1}$ y $E_{Q/V2}$

---

[8] La estimación a nivel global puede ser criticable dadas las diferentes características entre empresas de distintos sectores, pero las dificultades inherentes a la clasificación de empresas por sectores y el carácter multiproducto de muchas de ellas, hace interesante este tipo de estimación global, como mínimo para contrastar resultados con el caso sectorial.

[9] Sobre cada una de las formas originales hemos supuesto que el término de error (exp)e, tiene efecto multiplicativo sobre la función correspondiente, es decir, $Q_i = f(V_{1i},V_{2i})(exp)(e_i)$.

respectivamente), las productividades marginales y medias de los inputs capital y trabajo (PMA_{V1}, PMA_{V2}, PME_{V1} y PME_{V2} respectivamente), la elasticidad de sustitución entre inputs E_s y en los modelos CES los parámetros de intensidad del capital y del trabajo (a y (1 - a), respectivamente) y el parámetro de sustitución θ. Exponemos a continuación las expresiones de cálculo correspondientes a cada uno de los modelos propuestos.

<u>MODELO 1:</u> Translog.

$E_{Q/V} = b_1 + b_2 + (2b_3 + b_5)\ln V_1 + (2b_4 + b_5)\ln V_2$

$E_{Q/V1} = b_1 + 2b_3\ln V_1 + b_5\ln V_2$

$E_{Q/V2} = b_2 + 2b_4\ln V_2 + b_5\ln V_1$

$PMA_{V1} = (b_1 + 2b_3\ln V_1 + b_5\ln V_2)/(Q/V_1)$

$PMA_{V2} = (b_2 + 2b_4\ln V_2 + b_5\ln V_1)/(Q/V_2)$

$PME_{V1} = (Q/V_1)$

$PME_{V2} = (Q/V_2)$

$E_s = -(f_1f_2)/(V_1V_2)((f_1V_1+f_2V_2)/(f_{22}f_1^2-2f_{12}f_2f_1+f_2^2f_{11}))$

Siendo:

$f_1 = (dQ/dV_1) = PMA_{V1}$

$f_2 = (dQ/dV_2) = PMA_{V2}$

$f_{11}=(d^2Q/dV_1^2) = ((Q(b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)-1)(b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)+2b_3Q)/V_1^2$

$f_{22}=(d^2Q/dV_2^2) = ((Q(b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)-1)(b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)+2b_4Q)/V_2^2$

$f_{12}=(d^2Q/(dV_2dV_1)=((Q/V_2)(b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)V_1(b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)/V_1^2)$
$+ (b_5\cdot Q)/(V_2V_1)$

$Q = (\exp)(\ln b_0+b_1\ln V_1+b_2\ln V_2+b_3(\ln V_1)^2+b_4(\ln V_2)^2+b_5\ln V_1\ln V_2)$

<u>MODELO 2:</u> CES.

$E_{Q/V} = b_1 + b_2 + 2b_3(\ln V_1 + \ln V_2) - 2b_3(\ln V_1 + \ln V_2) = b_1 + b_2$

$E_{Q/V1} = b_1 + 2b_3\ln V_1 - 2b_3\ln V_2$

$E_{Q/V2} = b_2 + 2b_3\ln V_2 - 2b_3\ln V_1$

$PMA_{V1} = (b_1 + 2b_3\ln V_1 - 2b_3\ln V_2)/(Q/V_1)$

$PMA_{V2} = (b_2 + 2b_3\ln V_2 - 2b_3\ln V_1)/(Q/V_2)$

$PME_{V1} = (Q/V_1)$

$PME_{V2} = (Q/V_2)$

$E_s = 1/(1 + θ)$

a = parámetro de intensidad del capital = $b_1/(b_1 + b_2)$

$1 - a$ = parámetro de intensidad del trabajo = $1 - (b_1/(b_1 + b_2))$

θ = parámetro de sustitución = $- 2b_3(b_1 + b_2)/(b_1 \cdot b_2)$[10]

Siendo $Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3(\ln(V_1/V_2))^2$

<u>MODELO 3:</u> CES ($b_1 + b_2 = 1$).

$E_{Q/V} = b_1 + (1 - b_1) + 2b_3(\ln V_1 + \ln V_2) - 2b_3(\ln V_1 + \ln V_2) = 1$

$E_{Q/V1} = b_1 + 2b_3 \ln V_1 - 2b_3 \ln V_2$

$E_{Q/V2} = 1 - b_1 + 2b_3 \ln V_2 - 2b_3 \ln V_1$

$PMA_{V1} = (b_1 + 2b_3 \ln V_1 - 2b_3 \ln V_2)/(Q/V_1)$

$PMA_{V2} = (1 - b_1 + 2b_3 \ln V_2 - 2b_3 \ln V_1)/(Q/V_2)$

$PME_{V1} = (Q/V_1)$

$PME_{V2} = (Q/V_2)$

$E_s = 1/(1 + \theta)$

a = parámetro de intensidad del capital = b_1

$1 - a$ = parámetro de intensidad del trabajo = $1 - b_1$

θ = parámetro de sustitución = $- 2b_3/(b_1 - 1)$[11]

Siendo $Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + (1 - b_1) \ln V_2 + b_3(\ln(V_1/V_2))^2$

<u>MODELO 4:</u> Cobb-Douglas.

$E_{Q/V} = b_1 + b_2$

$E_{Q/V1} = b_1$

$E_{Q/V2} = b_2$

$PMA_{V1} = b_1(Q/V_1)$

$PMA_{V2} = b_2(Q/V_2)$

$PME_{V1} = (Q/V_1)$

$PME_{V2} = (Q/V_2)$

---

[10] El valor de estos últimos parámetros se calcula a partir de la relación entre la función CES en la aproximación lineal de Kmenta dada en [2.16], $LnQ = \ln Y + ua \ln V_1 + u(1-a) \ln V_2 - (1/2)ua\theta(1-a)(\ln(V_1/V_2))^2$ y el modelo CES dado en [3.2], $LnQ = \ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3(\ln(V_1/V_2))^2$.

[11] El valor de estos últimos parámetros se calcula a partir de la relación entre la función CES con $u = 1$ en la aproximación lineal de Kmenta dada en [2.17], $Ln(Q/V_2) = \ln Y + a \ln(V_1/V_2) + (1/2)a(a-1)\theta(\ln(V_1/V_2))^2$ y el modelo CES ($b_1+b_2=1$), dado en [3.3], $Ln(Q/V_2) = \ln b_0 + b_1 \ln(V_1/V_2) + b_3(\ln(V_{11}/V_{21}))^2$.

$E_e = 1$

Siendo $Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2)$

<u>*MODELO 5:*</u> Cobb-Douglas ($b_1 + b_2 = 1$).

$E_{Q/V} = b_1 + 1 - b_1 = 1$

$E_{Q/V1} = b_1$

$E_{Q/V2} = 1 - b_1$

$PMA_{V1} = b_1(Q/V_1)$

$PMA_{V2} = (1 - b_1)(Q/V_2)$

$PME_{V1} = (Q/V_1)$

$PME_{V2} = (Q/V_2)$

$E_e = 1$

Siendo $Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + (1 - b_1)\ln V_2)$

La identificación del tipo de economías de escala en cada uno de los modelos dependerá del valor obtenido por la elasticidad de escala $E_{Q/V}$ según la siguiente regla: a) Si $E_{Q/V} > 1$ ==> rendimientos crecientes a escala. b) Si $E_{Q/V} = 1$ ==> rendimientos constantes a escala. c) Si $E_{Q/V} < 1$ ==> rendimientos decrecientes a escala.

Cuando el análisis se realice a nivel global, las variables anteriores serán calculadas para cada uno de los modelos anteriores, siempre y cuando los mismos cumplan las condiciones de regularidad[12]. En este caso, también calcularemos el valor medio de las variables anteriores por clase de tamaño y por clase de empresa (europea y española).

Cuando el análisis se realice a nivel sectorial nos centraremos preferentemente en las variables relacionados con la economías de escala, siempre y cuando los modelos estimados cumplan las condiciones de regularidad mencionadas anteriormente.

---

[12] Nos referimos a las condiciones de regularidad de las funciones de producción. Esta cuestión será tratada a continuación.

Con el fin de sintetizar resultados, realizaremos un proceso de discriminación de los distintos modelos estimados con el fin de identificar un único modelo de producción a nivel global y a nivel de cada uno de los sectores. De esta forma, no sólo identificaremos la tecnología de producción más representativa en cada caso, sino que también, acotaremos el número de procesamientos y cálculos que deberán ser realizados cuando procedamos a la estimación de la eficiencia frontera.

3.2.3. Proceso de identificación y selección del modelo de producción.

El proceso de identificación y selección del modelo de producción a nivel global y sectorial consta de las siguientes fases.

a) Fase estadística preliminar:

1) Mediante regresión lineal y a partir de (mco), se estimarán cada uno de los 5 modelos de producción descritos anteriormente.

2) Se desestimarán aquellos modelos que no cumplan las dos condiciones siguientes:

a) Que el estadístico F no sea significativo al nivel de riesgo del 5%. Es decir, eliminaremos aquellos modelos que no cumplan la hipótesis de que los coeficientes de regresión estimados b_i sean en su conjunto significativamente distintos de cero.

b) Que el estadístico t no sea significativo al nivel de riesgo del 5%. Es decir, se eliminarán aquellos modelos en los que alguno de los coeficientes de regresión b_i no sea significativamente distinto de cero.

b) Condiciones de regularidad de la función de producción:

En una segunda fase se desestimarán aquellos modelos que siendo significativos según los criterios estadísticos anteriores, no cumplan las condiciones de regularidad de la función de producción correspondiente. Según Corbo y Meller (1979), las condiciones necesarias para que una función de producción pueda catalogarse como de regular son:

<u>a) Monotonicidad positiva para cada input.</u> Es decir ($dQ/dV_i > 0$), lo que implica que el producto marginal para cada factor de producción sea positivo.

<u>b) Cuasiconcavidad.</u> Requiere alternancia de signos de los menores principales del hessiano orlado. Esta condición, que es la expresión de tasas marginales de sustitución decrecientes, se plantea de la forma siguiente:

$B_1 < 0$, $B_2 > 0$, ...B_n (< 0 si n es impar y > 0 si n es par).

En el caso de dos inputs de producción, tenemos:

$$B_1 = 0f_{11} - f_1 \cdot f_1 \qquad [3.6]$$

$$B_2 = (0f_{11}f_{22} + f_1f_2f_{21} + f_2f_1f_{12}) - (f_2f_2f_{11} + f_1f_1f_{22} + 0f_{21}f_{12}) \qquad [3.7]$$

Siendo: $f_1 = dQ/dV_1$; $f_2 = dQ/dV_2$; $f_{11} = d^2Q/dV_1^2$; $f_{22} = d^2Q/dV_2^2$; $f_{12} = f_{21} = d^2Q/(dV_2dV_1)$.

En nuestro caso señalamos, que si bien las funciones de producción Cobb-Douglas y CES cumplen las dos condiciones de forma global, (siempre que el valor de los parámetros se sitúe dentro de los valores prestablecidos en ambas funciones de producción[13]), en el caso de los modelos CES (aproximación lineal de Kmenta) y Translog, estas condiciones no se cumplen de forma global, debiendo ser examinadas punto por punto y calculando el número de casos que las satisfacen[14].

---

[13] Ver apéndice 3.1. del apéndice matemático al final del capítulo.

[14] No hay unanimidad sobre el porcentaje de observaciones mínimo que deben cumplir monotonicidad y cuasiconcavidad para que una función de producción pueda tener el adjetivo de regular.

En los modelo CES (aproximación lineal de Kmenta) y Translog, es fácil comprobar que las condiciones de regularidad pueden o no cumplirse, ya que las mismas no solo dependen de los coeficientes obtenidos sino también del nivel de inputs en el que se opera. Sin embargo, señalamos que si los coeficientes obtenidos en la función de producción CES se encuentran en los límites preestablecidos por dicha función, es muy probable que el modelo cumpla monotonicidad y cuasiconcavidad. Por esta razón en el caso de los modelos CES, no solo verificaremos la condiciones de regularidad en la función de producción correspondiente a partir del valor obtenido por los coeficientes estimados, sino también comprobaremos dicha condición observación a observación en los propios modelos. En el caso del modelo Translog la verificación de la regularidad es efectuada directamente sobre el mismo modelo para cada observación. En este sentido, señalamos que en el caso de monotonicidad debe verificarse lo siguiente:

<u>Translog:</u>

$$dQ/dV_1 = f_1 = (b_1 + 2b_3 \ln V_1 + b_5 \ln V_2)/(Q/V_1) > 0$$
$$dQ/dV_2 = f_2 = (b_2 + 2b_4 \ln V_2 + b_5 \ln V_1)/(Q/V_2) > 0$$
$$Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3(\ln V_1)^2 + b_4(\ln V_2)^2 + b_5 \ln V_1 \ln V_2)$$

<u>CES:</u>

$$dQ/dV_1 = f_1 = (b_1 + 2b_3 \ln V_1 - 2b_3 \ln V_2)/(Q/V_1) > 0$$
$$dQ/dV_2 = f_2 = (b_2 + 2b_3 \ln V_2 - 2b_3 \ln V_1)/(Q/V_2) > 0$$
$$Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + b_2 \ln V_2 + b_3(\ln(V_1/V_2))^2$$

<u>CES ($b_1 + b_2 = 1$):</u>

$$dQ/dV_1 = f_1 = (b_1 + 2b_3 \ln V_1 - 2b_3 \ln V_2)/(Q/V_1) > 0$$
$$dQ/dV_2 = f_2 = (1 - b_1 + 2b_3 \ln V_2 - 2b_3 \ln V_1)/(Q/V_2) > 0$$
$$Q = (\exp)(\ln b_0 + b_1 \ln V_1 + (1 - b_1)\ln V_2 + b_3(\ln(V_1/V_2))^2$$

Corbo y Meller (1979) hablan de "regiones suficientemente extensas", nosotros vamos a fijar un porcentaje mínimo en torno al 80% de las observaciones.

Con lo que podemos observar que el valor de la productividad marginal no solo depende del valor de cada coeficiente obtenido sino también de los niveles de inputs y output. Ese mismo problema nos encontramos al comprobar la condición de cuasiconcavidad según las expresiones [3.6] y [3.7][15].

c) Discriminación de modelos mediante el contraste F:

En una tercera fase realizaremos un proceso de discriminación entre los modelos que cumplen las dos condiciones anteriores con el fín de seleccionar aquél que mejor identifique la tecnología de producción. Dicho proceso será realizado a nivel global y a nivel de cada sector y el criterio utilizado será el contraste del estadístico F al nivel de riesgo del 5%.

Como señalamos en el cuadro 3.1. los cinco modelos se relacionan entre sí a partir del cumplimiento de una serie de hipótesis que son presentadas como un conjunto de relaciones lineales. En este sentido, rechazamos la hipótesis nula (relación o conjunto de relaciones lineales que son sometidas a contrastación), si F_e (estimado) es mayor que F_c (crítico) al nivel de riesgo del 5%, con r grados de libertad en el numerador y n-k-1 grados de libertad en el denominador[16]. El estadístico F_e viene dado por:

$$F_e = ((SCR - SCN)/r)/(SCN/(n-k-1))$$

Donde SCR y SCN es la suma de cuadrados residuales de los modelos restringido y no restringido respectivamente, r el número de restricciones linealmente independientes, n el número de

---

[15] Como es sabido, el cálculo de B_1 y B_2 no solo se realiza a partir de f_1 y f_2, sino también a partir de f_{11}, f_{22} y $f_{12} = f_{21}$. Dichas expresiones, en el caso de los modelos Translog, CES y CES ($b_1 + b_2 = 1$), son expuestas en el apéndice 3.2 del apéndice matemático al final del capítulo.

[16] Si tuviesemos que discriminar entre los modelos CES ($b_1 + b_2 = 1$) y Cobb-Douglas, sobre los que no ha podido establecerse nigún tipo de relación, lo haríamos en función del estadístico F, seleccionando aquel modelo que tuviera el estadístico F mayor.

observaciones y k el número de variables independientes del modelo no restringido.

En el caso de que no exista un modelo cuyos coeficientes de regresión no sean significativamente distintos de cero según el estadístico t al nivel de riesgo del 5%, realizaremos el contraste de hipótesis entre aquellos modelos cuyo estadístico F muestre significatividad conjunta de los coeficientes de regresión al nivel de riesgo del 5%, siempre que además cumplan las condiciones de regularidad. Si se da el caso en que sólo existe un modelo significativo según el estadístico F, éste sería el elegido, siempre y cuando cumpla las mencionadas condiciones de regularidad[17]. Si en algún caso no se obtiene un modelo significativo según el estadístico F, no identificaremos tecnología alguna.

3.3. Formalización del método utilizado en la evaluación de la eficiencia frontera.

En el apartado anterior han sido presentados cinco modelos de producción mediante el procedimiento econométrico usual, en este caso, cualquier desviación entre los valores observados y la función econométrica estimada, el error del modelo de regresión, es atribuible a la suerte, errores de medición, etc.; es lo podríamos denominar una función de producción "promedio", pero no una función de producción en el sentido estricto del término. Bajo este esquema, sólo podemos obtener información relevante a partir de los parámetros obtenidos por la propia función de producción estimada, tales como por ejemplo, la existencia y grado de las economías de escala.

Utilizando una definición más estricta del concepto de producción como "el máximo nivel de output tecnológicamente obtenible dado un nivel de inputs", podemos conocer no sólo las características

[17] En estos casos se señalará convenientemente el hecho de que el modelo elegido sólo es significativo según el estadístico F pero no según el estadístico t.

relevantes dadas por la propia función de producción frontera, sino también la distancia entre la propia función de producción y las distintas observaciones. En este caso, los errores de estimación tienen un significado muy concreto, indican el grado de eficiencia de cada observación. En general, se trata de estimar la siguiente función:

$$Q_i = f(V_{1i}, V_{2i}) \cdot (\exp)(e_i) \qquad e_i \leq 0 \qquad [3.8]$$

Donde, Q_i es el output observado, V_{1i} y V_{2i} los niveles correspondientes de inputs, $(\exp)(e_i)$ un error en forma multiplicativa que representa el grado de eficiencia técnica y f(.) la forma funcional finalmente elegida, en nuestro caso, la correspondiente a cada uno de los modelos de producción propuestos.

Como señalamos en el capítulo anterior, existen varios métodos para estimar una función de producción frontera. Dichos métodos no son indiferentes al cómputo de la eficiencia para cada observación, por lo que el valor de la misma depende del procedimiento utilizado en la estimación de la frontera de producción. Estas diferencias según el método empleado se hacen patentes en los estudios de Cowing, Reifschneider y Stevenson (1983) y en el de Corbo y Melo (1986). En este último trabajo puede observarse que mientras la eficiencia media en el caso de la frontera determinista es de un 43%, en el caso de la frontera estocástica es del 83%. Esta diferencia en la eficiencia siempre se produce entre las distintas clases de frontera y de forma más acusada entre las denominadas fronteras "completas" (determinista estadística con desplazamiento máximo, Greene (1980) y la determinista matemática de Aigner y Chu (1968)) y las denominadas fronteras "incompletas" como la determinista estadística con desplazamiento medio, la probabilística y la estocástica. En el ejemplo propuesto en los gráficos 3.1 y 3.2 pueden apreciarse estas diferencias entre las dos clases de eficiencia frontera.

Gráfico 3.1

Frontera de producción "completa".

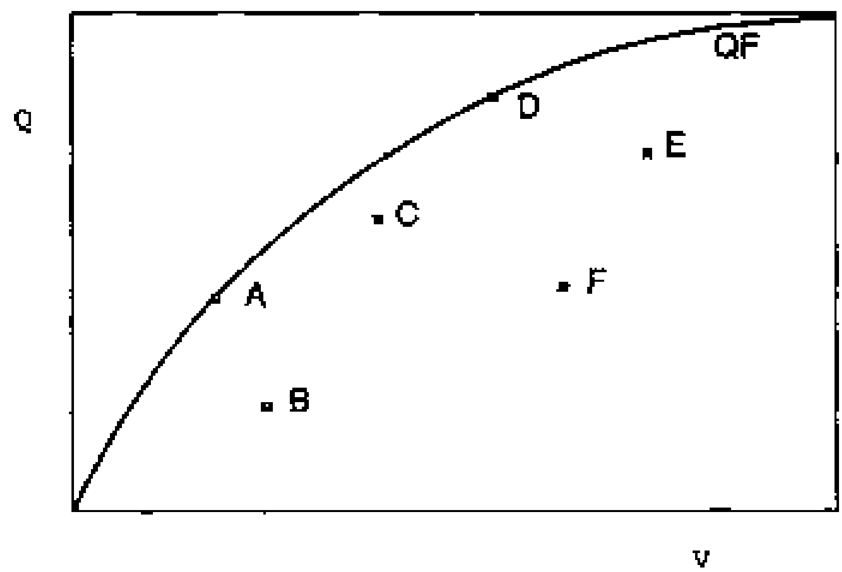
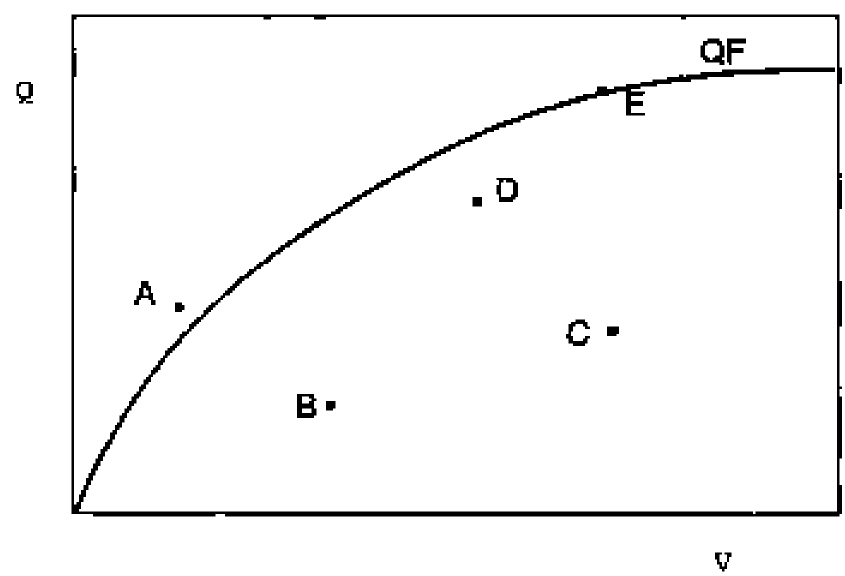


Gráfico 3.2

Frontera de producción "incompleta".



Ambos gráficos representan la estimación paramétrica de una frontera de producción tipo Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala compuesta de un solo output y un solo input. Obsérvese que en el caso representado en el gráfico 3.1, (frontera "completa") tanto la eficiencia correspondiente a cada observación como la eficencia media es menor que en el caso representado en el gráfico 3.2. (frontera "incompleta").

En nuestro caso, el método elegido es el método determinista estadístico en su versión de los mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc) propuesto por Richmond (1974) y Greene (1980). Justificamos el método por su sencillez, ya que tanto la estimación de la producción frontera como el cómputo de la eficiencia es bastante simple. Además, como veremos a continuación, su estimación se realiza a partir de los resultados obtenidos según la estimación minimocuadrática ordinaria aplicada sobre los modelos de producción propuestos anteriormente. Por otra parte, y con el fín de obtener resultados lo más consistentes posible, vamos a realizar una estimación de la frontera de producción determinista estadística por (mcoc), según cuatro versiones distintas. Las tres primeras ajustando con el valor medio de e_i según [3.8], asumiendo para dicho error tres distribuciones distintas, gamma, exponencial y semi-normal. La cuarta versión, ajustando con el máximo error residual positivo obtenido mediante la estimación por (mco).

<u>3.3.1. Estimación de la función de producción frontera a partir del método de los mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc) y evaluación de la eficiencia frontera dada la escala (ESE).</u>

Para explicar el método, partimos de la expresión [3.8] y de una determinada forma funcional. Supongamos que se trata de una función de producción Cobb-Douglas como la propuesta en el modelo [3.4], pero añadiendo ahora la restricción $e_i \leq 0$. Es decir:

$$LnQ_i = lnb_0 + b_1 lnV_{1i} + b_2 lnV_{2i} + e_i \qquad e_i \leq 0 \qquad [3.9]$$

La estimación de la expresión anterior mediante (mco) cumple todos los requisitos de la regresión clásica a excepción de la media de $e_i = 0$ y proporciona estimadores eficientes para todos los parámetros a excepción de la constante. Una corrección del método de (mco) propuesto por Richmond (1974), satisface los requisitos de la regresión clásica. El método, denominado de los mínimos cuadrados ordinarios corregidos (mcoc), consiste en sumar y restar el valor medio de e_i (e_m) en la segunda parte de la expresión [3.9], de tal forma que la expresión no varíe. Es decir:

$$LnQ_i = lnb_0 + e_m + b_1 lnV_{1i} + b_2 lnV_{2i} + e_i - e_m \qquad [3.10]$$

La expresión [3.10] puede ser estimada mediante (mco) ya que el término de error $e_i - e_m$ tiene media cero y todas las propiedades de la regresión clásica, salvo normalidad. La estimación a partir de (mco) proporciona parámetros insesgados para todos los coeficientes de regresión en la frontera a excepción del término constante que está sesgado por el valor de e_m. Por lo tanto, dicha estimación proporciona parámetros insesgados para todos los coeficientes de regresión y para $lnb_0 + e_m$. Para pasar de la función de producción "promedio" así obtenida a la función de producción frontera es necesario ajustar con e_m el término constante obtenido mediante (mco). Es decir, si al término constante de la estimación según (mco), le sumamos el valor de e_m, obtenemos la función de producción frontera, en este caso la correspondiente al modelo Cobb-Douglas. Es decir:

$$LnQ_i = lnb_0 + e_m + b_1 lnV_{1i} + b_2 lnV_{2i} + e_i \qquad e_i \le 0 \qquad [3.11]$$

$$LnQ_i = lnQ_{Fi} + e_i \qquad e_i \le 0 \qquad [3.12]$$

La eficiencia técnica dada la escala para cada observación o empresa (ESE_i) viene dada por $e_i = LnQ_i - LnQ_{Fi}$; o bien, calculando su valor entre 0 y 1, según:

$$ESE_i = (exp)(e_i) = Q_i/Q_{Fi} \qquad [3.13]$$

De la misma manera que hemos realizado en el caso del modelo Cobb-Douglas, procederemos para el resto de modelos de producción.

La estimación del valor de e_m correspondiente a una determinada distribución puede estimarse de forma eficiente a partir de los momentos centrales de la estimación mediante (mco). Para ello es necesario tener en cuenta que la varianza de e_i, $\sigma^2(e_i)$, correspondiente a [3.9] es la misma que la varianza de $\sigma^2(e_i - e_m)$. De esta manera, la varianza obtenida mediante (mco) $\sigma^2(e_i - e_m)$, proporciona un estimador eficiente de la $\sigma^2(e_i)$, y sobre la relación existente entre e_m y $\sigma^2(e_i)$ en cada una de las distribuciones propuestas, obtenemos un estimador de e_m a partir $\sigma^2(e_i - e_m)$, que no es mas que la varianza de la regresión minimocuadrática ordinaria.

Conociendo la relación entre los dos primeros momentos centrales de las distribuciones gamma, exponencial y semi-normal[18].

Distribución gamma: $e_{mg} = \sigma^2(e_{gi})$.
Distribución exponencial: $e_{me} = (\sigma^2(e_{ei}))^{1/2}$.
Distribución semi-normal: $e_{mn} = (2/(\pi-2))^{1/2} \cdot (\sigma^2(e_{ni}))^{1/2}$.

Y sabiendo que $\sigma^2(e_i) = \sigma^2(e_i - e_m)$ (varianza de la estimación minimocuadrática ordinaria o σ^2(mco)), podemos sustituir este último estimador en las fórmulas correspondientes, calculando el valor de e_m en cada caso. Es decir:

Distribución gamma: $e_{mg} = \sigma^2(e_{gi} - e_{mg}) = \sigma^2(\text{mco})$
Distribución exponencial: $e_{me} = (\sigma^2(e_{ei} - e_{me}))^{1/2} = (\sigma^2(\text{mco}))^{1/2}$.
Distribución semi-normal: $e_{mn} = (2(\pi-2))^{1/2}(\sigma^2(e_{ni} - e_{mn}))^{1/2} =$
$2(\pi-2))^{1/2} \cdot (\sigma^2(\text{mco}))^{1/2}$.

Los valores e_{mg}, e_{me} y e_{mn}, así calculados, serán las correcciones respectivas que realizaremos sobre el término constante de la estimación mediante (mco) para cada uno de los modelos de producción formulados anteriormente y según la distribución asumida para el error de la estimación frontera de producción correspondiente.

[18] Ver Forsund, Lovell y Schmidt (1980) y Thiry (1985).

Una limitación del método es que dicho ajuste no asegura automáticamente el que todas las observaciones estén en la frontera de producción o por debajo de ella, por lo que dicho método no es del todo apropiado para presentar la eficiencia de cada observación, ya que alguna de ellas podría tener una eficiencia mayor que la unidad. En este sentido, Greene (1980) propuso corregir el valor de la constante obtenida mediante (mco) con el error positivo mayor. Denominando a este valor como e_{max}, el ajuste nos asegura que al menos una empresa tenga una eficiencia igual a 1. El método tiene la ventaja de que no es necesario formular ningún tipo de distribución para los errores de la estimación frontera de producción. Sin embargo, su limitación es que normalmente restringe el número de empresas eficientes a una, presenta una gran sensibilidad a los valores extremos y se obtienen índices de eficiencia bastante bajos. La corrección a efectuar, en el caso del modelo Cobb-Douglas anterior, es:

$$LnQ_i = Lnb_0 + e_{max} + b_1 lnV_{1i} + b_2 lnV_{2i} + e_i \qquad e_i \leq 0 \qquad [3.14]$$

Quedando, $LnQ_i = LnQ_{Fi} + e_i$, $e_i \leq 0$ y calculándose la eficiencia para cada observación a partir $e_i = LnQ_i - LnQ_{Fi}$, o entre 0 y 1, según, $ESE_i = (exp)(e_i) = Q_i/Q_{Fi}$.

De la misma manera que hemos realizado en el modelo de producción Cobb-Douglas, procederíamos para el resto de modelos.

3.3.2. Evaluación de la eficiencia frontera dada por la escala (EES).

LLegados a este punto observamos que uno de los objetivos básicos de nuestra investigación queda por cubrir, ya que, si bien podemos conocer el grado de eficiencia de cada observación dada su escala, (dada una combinación de inputs la diferencia relativa entre el nivel de producción observado y el potencial o frontera); en cambio, no conocemos la diferencia relativa entre el nivel de producción frontera dada la escala y el nivel de producción frontera óptimo Q_{ro}. Por lo tanto, desconocemos la parte de eficiencia total que viene dada por la eficiencia de escala EES, cuestión ésta importante, ya que que uno de los objetivos de esta investigación es cuantificar el efecto que el tamaño de la empresa tiene sobre la eficiencia técnica total ET. Para cuantificar dicha eficiencia de escala es necesario previamente definir el concepto de nivel de producción frontera óptimo o tamaño óptimo Q_{ro}.

<u>a) Funciones de producción Cobb-Douglas y CES:</u> para determinar el nivel de producción frontera óptimo Q_{ro}, partimos del concepto de rendimientos a escala (variación relativa en el output ante variaciones proporcionales de todos los inputs a lo largo de un rayo que parte del origen) y de la propiedad de homogeneidad de dichas funciones.

<u>a.1) Cobb-Douglas:</u> tal como hemos visto en el capítulo anterior, la función de producción Cobb-Douglas dada por $Q = A \cdot V_1^a \cdot V_2^b$, es homogénea de grado (a + b), ya que si incrementamos el capital y el trabajo, V_1 y V_2 en una misma proporción (multiplicando por la constante $K > 1$), el nuevo nivel de producción Q_1, puede expresarse como $Q_1 = K^{a+b} \cdot Q$[19]. En este caso, es fácil demostrar como el nivel de producción óptimo depende del tipo de rendimientos a escala que presenta la función.

<u>Rendimientos crecientes a escala:</u> en este caso (a + b) > 1, lo que implica que $Q_1 > K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^{a+b} \cdot Q > K \cdot Q$. Por lo tanto, Q_1 es nivel de producción óptimo en relación a Q. Esto mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción. Efectivamente:

$$Q_1/K \cdot V_1 > Q/V_1 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_1 > Q/V_1 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_1 > Q/V_1$$
$$Q_1/K \cdot V_2 > Q/V_2 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_2 > Q/V_2 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_2 > Q/V_2$$

Cumpliéndose siempre la desigualdad, ya que (a + b) > 1 y K > 1.

[19] Ver la expresión [2.6] del capítulo anterior.

Rendimientos constantes a escala: en este caso a + b = 1, lo que implica que $Q_1 = K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^{a+b} \cdot Q = K \cdot Q$ y por lo tanto, no existe en este caso un nivel de producción óptimo. Esto mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción. Al igual que en el caso anterior tenemos:

$$Q_1/K \cdot V_1 = Q/V_1 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_1 = Q/V_1 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_1 = Q/V_1$$
$$Q_1/K \cdot V_2 = Q/V_2 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_2 = Q/V_2 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_2 = Q/V_2$$

Cumpliéndose siempre la igualdad, ya que (a + b) = 1 y K > 1.

Rendimientos decrecientes a escala: en este caso (a + b) < 1, lo que implica que $Q_1 < K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^{a+b} \cdot Q < K \cdot Q$. Por lo tanto, Q es nivel de producción óptimo en relación a Q_1. Lo mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción. Efectivamente:

$$Q_1/K \cdot V_1 < Q/V_1 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_1 < Q/V_1 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_1 < Q/V_1$$
$$Q_1/K \cdot V_2 < Q/V_2 \implies K^{a+b} \cdot Q/K \cdot V_2 < Q/V_2 \implies K^{(a+b)-1} \cdot Q/V_2 < Q/V_2$$

Cumpliéndose siempre la desigualdad, ya que (a + b) < 1 y K > 1.

a.2) CES: en el capítulo 2 hemos demostrado que la función de producción CES dada por $Q = Y \cdot (a \cdot V_1^{-e} + (1-a) \cdot V_2^{-e})^{-u/e}$ es una función homogénea de grado u, ya que si incrementamos el capital y el trabajo, V_1 y V_2 respectivamente, en una misma proporción (multiplicando por la constante K > 1), el nuevo nivel de producción Q_1 puede expresarse como $Q_1 = K^u \cdot Q$[30]. También en este caso, es fácil demostrar como el nivel de producción óptimo depende del tipo de rendimientos a escala que presenta la función.

Rendimientos crecientes a escala: en este caso u > 1, lo que implica que $Q_1 > K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^u \cdot Q > K \cdot Q$. Por lo tanto, Q_1

[30] Ver la expresión [2.13] del capítulo anterior.

es nivel de producción óptimo en relación a Q. Lo mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción.

$Q_1/K \cdot V_1 > Q/V_1$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_1 > Q/V_1$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_1 > Q/V_1$
$Q_1/K \cdot V_2 > Q/V_2$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_2 > Q/V_2$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_2 > Q/V_2$

Teniendo en cuenta que $u > 1$ y $K > 1$, fácilmente podemos comprobar el cumplimiento de ambas desigualdades.

Rendimientos constantes a escala: en este caso $u = 1$, lo que implica que $Q_1 = K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^u \cdot Q = K \cdot Q$. En este caso no existe un nivel de producción óptimo. Esto mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción.

$Q_1/K \cdot V_1 = Q/V_1$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_1 = Q/V_1$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_1 = Q/V_1$
$Q_1/K \cdot V_2 = Q/V_2$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_2 = Q/V_2$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_2 = Q/V_2$

Y teniendo en cuenta que $u = 1$ y $K > 1$, fácilmente podemos comprobar el cumplimiento de ambas igualdades.

Rendimientos decrecientes a escala: en este caso $u < 1$, lo que implica que $Q_1 < K \cdot Q$, dado que $Q_1 = K^u \cdot Q < K \cdot Q$. Por lo tanto, Q_1 es nivel de producción óptimo en relación a Q. Lo mismo puede demostrarse a partir de la producción por unidad de capital o trabajo para ambos niveles de producción.

$Q_1/K \cdot V_1 < Q/V_1$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_1 < Q/V_1$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_1 < Q/V_1$
$Q_1/K \cdot V_2 < Q/V_2$ ==> $K^u \cdot Q/K \cdot V_2 < Q/V_2$ ==>$K^{u-1} \cdot Q/V_2 < Q/V_2$

Teniendo en cuenta que $u < 1$ y $K > 1$, fácilmente comprobamos el cumplimiento de ambas desigualdades.

En resumen, podemos concluir que si existen rendimientos crecientes a escala, tanto en el caso Cobb-Douglas como en el caso CES, será escogido el nivel mayor de producción como el nivel de producción óptimo Q_{ro}. En nuestro caso dicho valor vendrá dado por el valor máximo de la estimación frontera en cada uno de los dos modelos de producción. Si nos encontramos en situación de rendimientos decrecientes a escala, será escogido como Q_{ro} el valor mínimo de la estimación frontera del modelo de producción correspondiente, Cobb-Douglas o CES. Además, dado el carácter de homogeneidad de dichas funciones de producción, dicho valor será escogido independientemente de la relación entre capital y trabajo. En el caso de rendimientos constantes a escala no existe nivel de producción óptimo, por lo que la eficiencia de escala es unitaria para cada observación.

<u>b) Función de producción Translog:</u> por una parte, esta función de producción no es homogénea, por otra, la relación entre capital y trabajo no es independiente del nivel de output como en los casos anteriores, sino que varía con aquél. Por esta razón, definimos el nivel de producción óptimo, Q_{ro} como aquel nivel de producción para el cual se hace máxima la producción por unidad de input, dada una determinada relación entre inputs. El valor de Q_{ro} para cada relación entre capital y trabajo, se obtiene a partir de las condiciones de primer y segundo grado en el caso de máximo. En el caso de la productividad media del trabajo, el valor de Q_{ro} para cada relación capital/trabajo se obtiene a partir de $d(Q_r/V_2)/dV_2 = 0$ y $d^2(Q_r/V_2)/d^2V_2 < 0$, donde previamente hemos introducido en Q_r cada una de las relaciones capital trabajo relevantes.

Una vez que ha sido identificado el nivel de producción óptimo Q_{ro}, ya podemos estimar el índice de eficiencia de escala para cada observación, EES_i. Para ello, calculamos el consumo de trabajo (o de capital, según el caso) por unidad de output frontera correspondiente a cada observación en su escala. En el caso del trabajo nos quedaría (V_{2i}/Q_{ri}). Posteriormente, calculamos el consumo de trabajo necesario V_{2Ei} para obtener el nivel de producción frontera eficiente Q_{ro} (nivel de producción óptimo), manteniendo constante la relación de inputs observados $(V_{1i}/V_{2i}) = (V_{1Ei}/V_{2Ei}) = (K_i)$ y teniendo en cuenta que en el caso

Translog dicho valor se obtendrá a partir de las condiciones de primer y segundo grado descritas anteriormente que han sido obtenidas para cada relación capital trabajo. A continuación, calculamos la relación entre el consumo de trabajo necesario para la obtención del nivel de producción óptimo y dicho nivel de producción V_{2Ei}/Q_{Fo}. Finalmente, el cociente entre (V_{2Ei}/Q_{Fo}) y (V_{2i}/Q_{Fi}) nos indica el grado de eficiencia de escala para cada observación[21]. Por lo tanto:

$$EES_i = (V_{2Ei}/Q_{Fo})/(V_{2i}/Q_{Fi}) \qquad [3.15]$$

También en este caso calcularemos la eficiencia de escala media por clase de tamaño y clase de empresa (europea y española) a partir de $\Sigma EES_i/n$, siendo n el número de empresas de la muestra.

En los modelos Cobb-Douglas y CES, el trabajo necesario V_{2Ei} correspondiente al nivel de producción frontera eficiente (tamaño óptimo) Q_{Fo} dada una relación de inputs observados (V_{1i}/V_{2i}) = (V_{1Ei}/V_{2Ei}) = (K_i), se obtiene a partir de la resolución del siguiente juego de ecuaciones para cada observación:

$$Q_{Fo} = f(V_{1Ei}, V_{2Ei})$$
$$V_{1i}/V_{2i} = V_{1Ei}/V_{2Ei} = K_i$$

Donde f(.) es la forma funcional correspondiente a cada uno de los modelos de producción frontera previamente estimados.

En el caso Translog, el valor de V_{2Ei} se obtiene directamente de las condiciones de primer y segundo grado en la maximización de la productividad media del trabajo. A partir de aquí se calcula el valor máximo de la productividad media del trabajo y el valor correspondiente a la producción total. Este último valor es el denominado tamaño óptimo Q_{Fo}.

---

[21] Como que en el caso Translog el número de observaciones para cada relación capital trabajo puede ser muy bajo, el cómputo de la eficiencia se efectuará para las observaciones comprendidas en el intervalo k ± ß, donde ß representa un error de aproximadamente el 10% sobre k.

El cómputo de ambos tipos de eficiencia, dados por [3.13] y por [3.15], nos permitirá calcular la eficiencia total ET_i para cada observación o empresa, según la expresión siguiente:

$$ET_i = ESE_i \cdot EES_i \qquad [3.16]$$

La adaptación de todo lo anterior a los modelos de producción propuestos en las expresiones [3.1] [3.2], [3.3], [3.4] y [3.5], se expone a continuación.

Partiendo, por ejemplo, del modelo Cobb-Douglas frontera propuesto en [3.11], $\ln Q_i = \ln b_0 + e_a + b_1 \ln V_{1i} + b_2 \ln V_{2i} + e_i$, $e_i \leq 0$, tenemos que $\ln Q_i - e_i = \ln b_0 + e_a + b_1 \ln V_{1i} + b_2 \ln V_{2i}$ y que $\ln Q_i - e_i = \ln Q_{Fi}$.

En primer lugar calculamos el consumo de trabajo por unidad de output frontera correspondiente a cada una de las observaciones en su escala, es decir $\ln V_{2i} - \ln Q_{Fi}$. A continuación obtenemos el valor máximo o mínimo de $\ln Q_{Fi}$, dependiendo del tipo de rendimientos a escala, al cual denominamos $\ln Q_{FO}$[22]. Seguidamente, calculamos el valor del $\ln V_{2i}$ o del $\ln V_{1i}$, según sea el caso, necesario para la obtención del nivel de producción frontera óptimo $\ln Q_{FO}$, ($\ln V_{2Ei}$ ó $\ln V_{1Ei}$, respectivamente) manteniendo la relación de inputs de la medición que se pretende evaluar $\ln V_{1i} - \ln V_{2i} = \ln V_{1Ei} - \ln V_{2Ei} = \ln K_i$. Es decir, se trata de calcular el valor correspondiente de $\ln V_{2Ei}$ o de $\ln V_{1Ei}$ en el siguiente sistema de ecuaciones para cada observación[23].

$$\ln Q_{FO} = \ln b_0 + e_a + b_1 \ln V_{1Ei} + b_2 \ln V_{2Ei}$$
$$\ln V_{1i} - \ln V_{2i} = \ln V_{1Ei} - \ln V_{2Ei} = \ln K_i$$

---

[22] De la misma forma procederemos en el caso CES y a partir del nivel de producción que maximiza la productividad media del trabajo en el caso Translog.

[23] En el caso Translog, dicho cálculo queda reducido a las relaciones capital trabajo que han sido escogidas como relevantes.

Posteriormente calculamos $\ln V_{2ri} - \ln Q_{F0}$ y obtenemos el $\ln EES_i$ a partir de $(\ln V_{2ri} - \ln Q_{F0}) - (\ln V_{2i} - \ln Q_{F1})$. Para finalizar calculamos $EES_i = (\exp)(\ln EES_i)$ y el cómputo de la eficiencia total para cada empresa según $ET_i = ESE_i \cdot EES_i$.

El proceso seguido en el caso del modelo Cobb-Douglas es exactamente igual al que deberíamos realizar en el resto de modelos, por lo que obviamos repetir el proceso. En el caso de los modelos CES y Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala dados en [3.3] y [3.5] este proceso no se realizaría ya que no existe un nivel de producción frontera óptimo $\ln Q_{F0}$. En estos dos casos, la estimación del grado de eficiencia se limita solamente al cálculo de la eficiencia dada la escala ESE_i.

A nivel global y a nivel sectorial así como para ambos años de la investigación, 1991 y 1994, se calcularán los distintos índices de eficiencia para cada empresa, incluyéndose en el primer caso la eficiencia media por clase de tamaño y por clase de empresa (europea o española) según los cuatro tipos de correcciones descritas anteriormente. Dicha eficiencia media será calculada según $\Sigma ESE_i/n$, donde n el número de empresas de la muestra. También será presentado un anexo en el que aparecerán los índices de eficiencia para cada empresa en 1994. Dichos índices serán calculados a partir de los modelos de producción estimados que a nivel global hayan sido relevantes.

3.4. Evaluación del comportamiento dinámico.

En este apartado realizaremos un análisis del comportamiento dinámico de la empresa europea entre los dos años estudiados, 1991 y 1994. Dicho análisis comprenderá dos apartados. El primero estudiará la variación existente entre los parámetros tecnológicos e índices de eficiencia calculados en los dos años. El segundo estimará el cambio técnico y las tasas de variación del output y de sus componentes de cada una de las empresas existentes en ambos años, por lo que será necesario la utilización de una nueva muestra de empresas.

3.4.1. Evaluación dinámica de los principales parámetros tecnológicos e índices de eficiencia.

Se analizará la variación existente en los principales parámetros tecnológicos y en los distintos índices de eficiencia a lo largo del periodo analizado. Dicha variación será estimada a partir de los valores medios obtenidos en 1991 y 1994 por clase de tamaño y por clase de empresa (europea o española). Los parámetros analizados serán la elasticidad de escala $E_{Q/V}$, la elasticidad del output en relación a los inputs capital y trabajo ($E_{Q/V1}$ y $E_{Q/V2}$, respectivamente), las productividades marginales y medias del capital y del trabajo (PMA_{V1}, PMA_{V2}, PME_{V1} y PME_{V2} respectivamente), los parámetros de intensidad del capital y del trabajo de los modelos CES (a y (1 - a), respectivamente), la elasticidad de sustitución entre inputs E_{σ} y los distintos índices de eficiencia ESE, EES y ET.

La variación será analizada tanto a nivel global como a nivel sectorial a partir de los modelos de producción representativos cada año. Este análisis será realizado conjuntamente con el correspondiente a los resultados obtenidos en la estimación de los modelos de producción propuestos e índices de eficiencia en 1991 y 1994. Por esta razón las conclusiones referentes a dicha variación aparecerán en el capítulo 4 y en la primera parte del capítulo 5, respectivamente.

3.4.2. Cuantificación del cambio técnico no neutral.

La variación de la eficiencia dada la escala ESE cuantificada en el caso anterior puede deberse, además de a otros factores, a un incremento del cambio técnico. En este sentido, el objetivo de este apartado será cuantificar el cambio técnico, determinando posteriormente el grado de neutralidad del mismo. Partimos de la metodología propuesta por Humphrey (1993) aplicada a funciones Translog de costes. En nuestro caso adaptamos dicha metodología a las funciones frontera de producción estimadas en ambos momentos del tiempo.

Utilizando la simbología descrita en [3.11], [3.12] y [3.13] tenemos:

$$\ln Q_i - \ln Q_{Fi} = \ln ESE_i = e_i \qquad e_i \leq 0$$
$$ESE_i = (Q_i/Q_{Fi}) = \exp(e_i) \qquad e_i \leq 0$$

Efectuando el cálculo para dos momentos del tiempo, momentos 0 y 1 respectivamente, queda.

$$\ln Q_{0i} - \ln Q_{F0i} = \ln ESE_{0i} = e_{0i} \qquad e_{0i} \leq 0$$
$$ESE_{0i} = (Q_{0i}/Q_{F0i}) = \exp(e_{0i}) \qquad e_{0i} \leq 0$$
$$\ln Q_{1i} - \ln Q_{F1i} = \ln ESE_{1i} = e_{1i} \qquad e_{1i} \leq 0$$
$$ESE_{1i} = (Q_{1i}/Q_{F1i}) = \exp(e_{1i}) \qquad e_{1i} \leq 0$$

Para medir el cambio técnico, es necesario calcular la eficiencia dada la escala de la medición o empresa i del momento 0 con la tecnología del momento 1, $ESE_{0i/1}$, y la eficiencia dada la escala de la empresa i del momento 0 con la tecnología del momento 0, ESE_{0i}. El valor de $ESE_{0i/1}$ se calcula a partir:

$$\ln ESE_{0i/1} = \ln Q_{0i} - \ln Q_{F0i/1} = e_{0i/1} \qquad e_{0i/1} \leq 0$$
$$ESE_{0i/1} = (Q_{0i}/Q_{F0i/1}) = (\exp) e_{0i/1} \qquad e_{0i/1} \leq 0 \qquad [3.17]$$

Siendo Q_{0i} el output observado de la empresa i en el momento 0 y $Q_{F0i/1}$ el output estimado frontera de dicha empresa con la tecnología del momento 1. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos cuantificar el cambio técnico a partir de:

$$\dot{C}_{0i} = -(ESE_{0i/1} - ESE_{0i})/ESE_{0i} = 1 - (ESE_{0i/1}/ESE_{0i}) \qquad [3.18]$$

El cambio técnico también puede cuantificarse con datos del momento 1. En este caso:

$$\ln ESE_{1i/0} = \ln Q_{1i} - \ln Q_{F1i/0} = e_{1i/0} \qquad e_{1i/0} \leq 0$$
$$ESE_{1i/0} = (Q_{1i}/Q_{F1i/0}) = (\exp) e_{1i/0} \qquad e_{1i/0} \leq 0 \qquad [3.19]$$

$$\dot{C}_{1i} = -(ESE_{1i} - ESE_{1i/0})/ESE_{1i/0} = 1 - (ESE_{1i}/ESE_{1i/0}) \qquad [3.20]$$

Siendo $ESE_{i1/0}$ la eficiencia dada la escala de la empresa i del momento 1 con la tecnología del momento 0, ESE_{i1} la eficiencia dada la escala de la empresa i del momento 1 con la tecnología del momento 1, Q_{i1} el output observado de la empresa i en el momento 1 y $Q_{Fi1/0}$ el output estimado frontera de dicha empresa con la tecnología del momento 0.

De esta forma disponemos para cada empresa de dos tasas de cambio técnico, a partir de las cuales puede calcularse el grado de neutralidad del mismo previa estimación del siguiente modelo de regresión, donde f puede representar una función lineal, semilogarítmica o logarítmica, entre otras.

$$\dot{C}_i = f(V_{1i}/V_{2i})$$

Si el coeficiente de regresión fuese positivo y significativo nos indicaría que se obtiene mayor progreso técnico en empresas con mayor dotación de capital. Si dicho coeficiente fuese negativo y significativo nos indicaría que se obtiene un mayor progreso técnico en empresas con mayor dotación de trabajo.

El análisis será realizado a partir de las empresas de las que se disponga información para cada uno de los dos momentos del tiempo, es decir para los años 1991 y 1994 y a partir de las tecnologías representativas obtenidas a nivel global y a nivel sectorial, lo que nos permitirá observar el comportamiento del progreso técnico por clase de tamaño y por clase de empresa, europea y española.

3.4.3. Tasas de variación: output, eficiencia, cambio técnico y consumo de inputs.

En este apartado aplicaremos un modelo explicativo de la tasa de variación del output en función de tres componentes: a) crecimiento por una mejora de la eficiencia dada la escala ESE (lo que implica un acercamiento a la frontera de producción), b) crecimiento por cambio técnico (desplazamiento de la frontera de producción) y c) crecimiento por un mayor consumo de inputs (movimiento a lo largo de la misma función de producción). El modelo está inspirado en el propuesto por Aly y Grabowsky (1988), aplicado también por Prior (1990) y Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos (1992) en el caso de la eficiencia frontera no paramétrica y que nosotros adaptamos a las funciones de producción frontera. Dicho modelo nos permitirá obtener para cada empresa y para cada una de las tecnologías representativas a nivel global y a nivel sectorial, la tasa de variación del output y su correspondiente descomposición, estudiándose posteriormente su evolución entre clases de tamaño empresarial y entre clases de empresas, europeas y españolas. Posteriormente, las tasas de variación del output y las de sus componentes de las empresas europeas y españolas serán comparadas a partir de sus valores medios.

Esquemáticamente, la tasa de variación del output con su correspondiente descomposición se presenta en el cuadro 3.2.

<u>Cuadro 3.2</u>

<u>Descomposición de la tasa de variación del output.</u>

Tasa de variación del output, $\dot{Q}$

↓

↓	↓	↓
Crecimiento por mejora de eficiencia, $\dot{ESE}$ (acercamiento a la frontera)	Crecimiento por cambio técnico, $\dot{C}$ (desplazamiento de la frontera)	Crecimiento por consumo de inputs, $\dot{V}$ (movimiento a lo largo de la función de producción)

Por lo tanto:

$$\dot{Q} = \dot{ESE} + \dot{C} + \dot{V} \qquad [3.21]$$

$$\dot{ESE} = \dot{Q} - \dot{C} - \dot{V} \qquad [3.22]$$

Con lo que con esta última fórmula podemos interpretar más fácilmente la fuentes de variación de la eficiencia.

Teniendo en cuenta que el cambio técnico puede cuantificarse con datos del momento 1 ó con datos del momento 0, tenemos el siguiente desarrollo para cada uno de los componentes de las expresiones [3.21] y [3.22].

<u>a) Cuantificación del cambio técnico a partir de datos del momento 0:</u>

$$\dot{Q} = (Q_{11} - Q_{01})/Q_{01}$$

$$\dot{ESE} = ((Q_{01}/ESE_{01} - Q_{01}) - (Q_{11}/ESE_{11} - Q_{11}))/Q_{01}$$

$$\dot{C} = (Q_{01}/ESE_{01/1} - Q_{01}/ESE_{01})/Q_{01}$$

$$\dot{V} = (Q_{11}/ESE_{11} - Q_{01}/ESE_{01/1})/Q_{01}$$

<u>b) Cuantificación del cambio técnico a partir de datos del momento 1:</u>

$$\dot{Q} = (Q_{11} - Q_{01})/Q_{01}$$

$$\dot{ESE} = ((Q_{01}/ESE_{01} - Q_{01}) - (Q_{11}/ESE_{11} - Q_{11}))/Q_{01}$$

$$\dot{C} = (Q_{11}/ESE_{11} - Q_{11}/ESE_{11/0})/Q_{01}$$

$$\dot{V} = (Q_{11}/ESE_{11/0} - Q_{01}/ESE_{01})/Q_{01}$$

Al igual que en el caso anterior, es necesario disponer de información sobre las mismas empresas en dos momentos distintos del tiempo, en nuestro caso esta información será la correspondiente a los años 1991 y 1994, lo que con toda probabilidad requerirá la utilización de una nueva muestra de empresas.

A continuación pasamos a describir las características de las distintas muestras de empresas utilizadas en esta investigación.

3.5. Descripción de la muestra de empresas.

La muestra de empresas utilizada es obtenida de la información suministrada por DABLE (Database on Large Enterprises) en los documentos Synopsis of European Enterprises. Dicha información es suministrada anualmente por la unidad "Competitiveness and General Questions of Industrial Policy" de la Dirección General de Industria de la Comisión Europea. Dicha base de datos cubre una información mucho más amplia, ya que además de las empresas europeas incluye las principales empresas industriales y comerciales de América del Norte, Asia y Oceanía.

La base de datos DABLE asegura homogeneización de la información entre las distintas empresas, ya que la misma ha sido elaborada con criterios idénticos a partir de la información desagregada existente en las memorias y otros documentos contables de cada empresa. En este sentido, señalamos que la definición dada, por ejemplo, al valor añadido puede diferir entre diferentes países; DABLE, al utilizar un mismo criterio, construye las variables de forma homogénea de tal manera que permiten una correcta comparación entre las distintas empresas de la muestra. Este es uno de los aspectos positivos de dicha base de datos.

La información suministrada por DABLE es anual, aunque en nuestro caso la forma de obtener la muestra de empresas para los años 1991 y 1994 fue distinta. Así para 1991 utilizamos la información disponible que aparece en Synopsis of European Enterprises 93, (1993) la cual aporta información sobre 1991, ya que tal como en su día nos fue comunicado por los responsables de DABLE, la información no era disponible en soporte magnético por problemas de derechos de autor, por lo que la manipulación y el tratamiento informático de la base de datos sólo era posible en la sede de la Comisión Europea en Bruselas, y en cualquier caso, sólo serían exportables las salidas de los procesamientos estadísticos, nunca la base de datos en sí. Por todo ello nos vimos obligados a trabajar directamente sobre el documento Synopsis of European Enterprises 93.

En dicho documento aparecen varios tipos de información: 200 empresas mayores en ventas, en beneficios, etc.; aunque la salida más completa es la que aparece en el capítulo 15 referente a las empresas de la CEE y de la EFTA jerarquizadas por valor de la producción y clasificadas por sectores[24].

La información se presenta a un nivel de desagregación sectorial de cuatro dígitos, aunque la clasificación por sectores es realizada en dos dígitos, alcanzando a un total de 1.932 empresas de la CEE y de la EFTA, distribuidas en 57 sectores, que van desde la extracción de minerales metálicos hasta las de servicios o conglomerados, pasando por las empresas extractivas de carbón, alimentación, refino de petróleo, autopistas, mayoristas, etc.

Aunque la información proporcionada por DABLE es la correspondiente a 1.932 empresas repartidas en 57 sectores, hemos utilizado una muestra menor ya que en algunos casos la base de datos suministrada no proporcionaba información sobre alguna de las variables básicas[25]. También han sido eliminadas cuatro empresas en las que el valor añadido era negativo y en las que por lo tanto no podíamos calcular su logaritmo. En definitiva, el número total de empresas que integran esta investigación en 1991 es de 1.549.

Por otra parte, hemos establecido una nueva clasificación sectorial al tener que unir algunos sectores en los que no se cumplía la condición de que el número de parámetros a estimar fuese menor que el número de observaciones menos uno. De todas formas, esta unión de sectores homogéneos no ha dado siempre los

---

[24] Por lo tanto, el ámbito de esta investigación supera los límites del mercado único europeo aunque por muy poco, ya que el número de empresas perteneciente a los países de la EFTA incluidas en esta investigación es mínimo.

[25] Las variables básicas son las necesarias para estimar los cinco modelos descritos, Valor Añadido, Activo Total y Número de Empleados. También consideramos la Nacionalidad y el Código del Sector como variables básicas. Por otra parte, señalamos que ha sido la ausencia de información sobre el Valor Añadido, lo que ha provocado una criba mayor en el número de empresas.

resultados esperados, ya que en cuatro sectores y en un sector, en los que no se cumplía la condición anterior, no han podido ser estimados los modelos Translog y CES, respectivamente[26]; quedándonos definitivamente 48 sectores.

En el caso de los datos correspondientes a 1994 tuvimos mejor suerte, ya que la información solicitada fue suministrada en soporte magnético por el nuevo responsable de la base de datos[27]. En este caso nos fue suministrada la información correspondiente a las variables básicas de 2.645 empresas, lo que ha supuesto un salto cuantitativo importante en relación a la muestra de 1991. Después de eliminar las empresas en las que el valor añadido era negativo, obtuvimos un total de 2.533 empresas clasificadas en 47 sectores según la clasificación establecida por la propia DABLE en 1991 a excepción del sector de conglomerados, cuyas empresas fueron reclasificadas en distintos sectores según hemos comprobado en la base de datos de 1994.

En relación al cálculo del cambio técnico y de las tasas de variación del output y de sus componentes, la muestra de empresas ha sido menor, ya que es condición necesaria la información para cada empresa en ambos momentos del tiempo. En este caso, el número de empresas finalmente conseguido ha sido de 942.

En la tabla 3.1 aparece la clasificación sectorial, el número de empresas europeas y españolas, y el porcentaje que representan las segundas sobre las primeras, correspondiente a las distintas muestras de empresas que integran esta investigación[28].

---

[26] Además, en un caso el modelo Translog no ha sido estimado dada la existencia de una matriz de correlación singular.

[27] El señor Hubertus Kal al que reiteramos nuestro agradecimiento. Por otra parte hemos de señalar que dicha información era la última disponible por DABLE en el mes de abril de 1996, la cual debería ser editada a finales de ese mismo año en el documento Synopsis of European Enterprises 96.

[28] La denominación social de cada empresa puede observarse en el anexo 2, en el que se presenta los distintos índices de eficiencia para cada empresa en 1994.

Tabla 3.1

Denominación sectorial, número de empresas europeas (EUR), número de empresas españolas (ESP) y porcentaje de ESP/EUR (POR).

Núm.	SECTOR	1991			1994			1991-1994		
		EUR	ESP	POR	EUR	ESP	POR	EUR	ESP	POR
1	Minerales metálicos y carbón	8	2	25	19	2	10,5	7	2	25,5
2	Gas y petróleo	20	0	0	38	1	2,6	15	0	0
3	Minerales no metálicos	6	0	0	11	0	0	5	0	0
4	Construcción inmobiliaria	54	3	5,5	68	0	0	25	0	0
5	Construcción pesada	30	4	13,3	42	6	14,2	21	5	23,8
6	Construcción comercial	11	1	9	15	0	0	1	0	0
7	Alimentación y tabaco	123	13	10,5	181	8	4,4	78	6	7,7
8	Textil	41	0	0	65	0	0	24	0	0
9	Otros productos textiles	15	0	0	47	1	0	10	0	0
10	Productos de la madera	9	1	11,1	17	1	5,6	6	1	16,6
11	Muebles	13	0	0	39	1	2,5	11	0	0
12	Papel	47	3	6,3	78	2	2,5	26	1	3,8
13	Editorial e imprenta	43	0	0	67	1	1,5	23	1	4,3
14	Química	91	8	8,5	129	3	2,3	64	3	4,7
15	Refinerías	13	3	23	24	3	12,5	9	1	11,1
16	Plástico y caucho	26	1	3,8	64	2	3,1	27	2	7,4
17	Cuero	6	0	0	14	0	0	5	0	0
18	Canteras, arcilla y vidrio	73	11	15	102	9	8,8	44	4	9
19	Transformación miner. metálicos	75	3	4	80	4	5	30	3	10
20	Fabricación productos metálicos	35	0	0	92	0	0	14	0	0
21	Equipo industrial informático	105	3	2,8	165	3	1,8	64	2	3,1
22	Equipo eléctrico y electrónico	65	4	6,1	125	1	0,8	34	0	0
23	Equipo de transporte	58	6	10,3	89	3	3,3	36	2	5,5
24	Instrumental diverso	47	1	2,1	69	1	1,4	32	1	3,1

Tabla 1.1 (continuación)

Denominación sectorial, número de empresas europeas (EUR), número de empresas españolas (ESP) y porcentaje de ESP/EUR (POR).

Núm.	SECTOR	1991			1994			1991-1994		
		EUR	ESP	POR	EUR	ESP	POR	EUR	ESP	POR
25	Industrias manufactur. varias	10	0	0	27	0	0	2	0	0
26	Transporte terrestre	10	1	10	24	0	0	9	0	0
27	Transporte marítimo	22	0	0	49	0	0	11	0	0
28	Transporte aéreo	12	0	0	18	0	0	7	0	0
29	Autopistas	12	3	25	16	2	12,5	6	1	16,6
30	Comunicaciones	19	1	5,2	27	2	7,4	10	2	0,2
31	Agua, gas y electricidad	82	14	17	109	12	11	54	8	14,6
32	Mayoristas bienes duraderos	66	2	3	122	2	1,6	32	2	6,2
33	Mayoristas bienes no duraderos	53	2	3,7	78	3	3,8	25	1	4
34	Material de construcción	5	0	0	13	0	0	6	0	0
35	Grandes almacenes	21	0	0	29	1	3,4	12	0	0
36	Supermercados	31	1	3,2	40	0	0	15	0	0
37	Estaciones de servicio	25	1	4	31	0	0	12	0	0
38	Almacenes textiles	16	0	0	19	0	0	10	0	0
39	Almacenes de muebles	7	0	0	15	0	0	3	0	0
40	Restaurantes	9	0	0	14	0	0	5	0	0
41	Minoristas	18	0	0	37	0	0	12	0	0
42	Hoteles	15	0	0	15	0	0	7	0	0
43	Servicios personales	4	0	0	6	0	0	3	0	0
44	Servicios empresariales	54	1	1,8	111	1	0,9	39	1	2,5
45	Talleres automoción y parkings	6	2	33,3	7	1	14,2	3	1	33,3
46	Sanidad, educación y ocio	16	0	0	44	0	0	12	0	0
47	Servicios de Ingeniería	12	0	0	52	0	0	13	0	0
48	Conglomerados	8	0	0	-	-	-	-	-	-
0	Total	1.549	95	6,1	2.533	76	3	942	50	5,37

Por lo tanto, la base de datos de esta investigación está constituida por tres muestras de empresas distintas. La muestra correspondiente a 1991 está compuesta por 1.549 empresas de las cuales 95 corresponden a empresas españolas, lo que representa un 6,1% sobre el total. La muestra correspondiente a 1994 está compuesta por 2.533 empresas de las cuales 76 corresponden a empresas españolas, lo que representa un 3% sobre el total y la muestra correspondiente al periodo 1991-1994 que está compuesta por 942 empresas de las cuales 50 empresas son españolas, lo que representa un 5,37% sobre el total.

El porcentaje de las empresas españolas es desigual según el sector; así, tenemos que en sectores tales como Minerales Metálicos, Construcción Pesada, Refinerías, Autopistas, Agua, Gas y Electricidad y Talleres, Automoción y Parkings la representación es aceptable, mientras que en sectores, como Almacenes, Restaurantes, Sevicios de Ingeniería, etc. y en general los correspondientes a los sectores comerciales y de servicios, dicha participación es nula.

3.6. Descripción de las variables utilizadas.

La información dada para cada empresa en la base de datos DABLE es bastante exhaustiva, ya que consta de la denominación social y de la información sobre 15 variables. Atendiendo a las definiciones dadas por DABLE, estas 15 variables han sido identificadas como: a) Nacionalidad, b) Valor de la Producción, c) Variación del Ingreso Neto en Relación al Año Anterior, d) Valor Añadido, e) Margen Bruto de Explotación, f) Resultados Antes de Impuestos, g) Resultado Neto del Grupo, h) Resultado Neto/Ingresos Netos, i) Activo Total, j) Recursos Propios, k) Resultado Neto/Recursos Propios, l) Número de Empleados, ll) Cash-Flow, m) Sector, n) Mes en el que Finaliza el Año Fiscal.

En esta investigación han sido utilizadas 5 de las 15 variables anteriores. Tres variables han sido utilizadas de forma directa en todas las estimaciones realizadas, el Valor Añadido como medida del output empresarial y los Activos Totales y el Número de Empleados como medidas de los inputs capital y trabajo respectivamente. Las variables Sector y Nacionalidad han sido utilizadas de forma indirecta para realizar la clasificación sectorial y por clase de empresa (europea y española).

La información de las anteriores variables es suministrada en miles de Ecus a excepción del Número de Empleados, siendo utilizado en cada uno de los dos años el cambio medio de las diferentes divisas en relación al Ecu, ya que, por ejemplo, en el caso español y después de cotejar la información suministrada por algunas empresas en la base de datos DABLE con la correspondiente a la que presentaba en sus memorias editadas en España, hemos llegado a la conclusión que se ha utilizado un cambio medio de 128,8 pts/Ecu en el caso de 1991, lo que coincide con la información presentada en el anexo III "Exchange Rates. 12 Month Moving Average for 1991" de la publicación Synopsis of European Enterprises 93. Este hecho no ha podido ser comprobado para los datos de 1994, aunque esperamos que se haya seguido el mismo criterio.

Apéndice matemático del capítulo 3.

Apéndice 3.1. Condiciones de regularidad de las funciones de producción Cobb-Douglas y CES.

a) Función de producción Cobb-Douglas. Dicha función viene dada en [2.3], según $Q = A \cdot V_1^a \cdot V_2^b$ (A, a y $b > 0$ y Q, V_1 y $V_2 > 0$). Realizando las primeras y segundas derivadas parciales con respecto a cada input y la derivada cruzada tenemos:

$f_1 = (dQ/dV_1) = a \cdot A \cdot V_1^{a-1} \cdot V_2^b$.

$f_2 = (dQ/dV_2) = b \cdot A \cdot V_1^a \cdot V_2^{b-1}$.

$f_{11} = (d^2Q/dV_1^2) = a \cdot A \cdot (a-1) \cdot V_1^{a-2} \cdot V_2^b$.

$f_{22} = (d^2Q/dV_2^2) = b \cdot A \cdot (b-1) \cdot V_1^a \cdot V_2^{b-2}$.

$f_{12} = f_{21} = (d^2Q/dV_1 dV_2) = A \cdot a \cdot V_1^{a-1} \cdot b \cdot V_2^{b-1}$.

La monotonicidad positiva para cada input se cumple, pues $f_1 = (dQ/dV_1) = a \cdot A \cdot V_1^{a-1} \cdot V_2^b > 0$ y $f_2 = (dQ/dV_2) = b \cdot A \cdot V_1^a \cdot V_2^{b-1} > 0$.

En el caso de cuasiconcavidad:

$B_1 = -(a \cdot A \cdot V_1^{a-1} \cdot V_2^b)^2 < 0$.

$B_2 = (AaV_1^{a-1}V_2^bAbV_1^aV_2^{b-1}AaV_1^{a-1}bV_2^{b-1} + AbV_1^aV_2^{b-1}AaV_1^{a-1}V_2^bAaV_1^{a-1}bV_2^{b-1})$
$-(AbV_1^aV_2^{b-1}AbV_1^aV_2^{b-1}Aa(a-1)V_1^{a-2}V_2^b + AaV_1^{a-1}V_2^bAaV_1^{a-1}V_2^bAb(b-1)V_1^aV_2^{b-2})$.

$B_2 = (A^3a^2b^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2} + A^3a^2b^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2}) - (A^3a(a-1)b^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2} + A^3b(b-1)a^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2})$.

$B_2 = 2A^3a^2b^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2} - A^3a(a-1)b^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2} - A^3b(b-1)a^2V_1^{3a-2}V_2^{3b-2}$.

$B_2 = (2A^3a^2b^2 - A^3b^2a(a-1) - A^3a^2b(b-1))(V_1^{3a-2}V_2^{3b-2})$.

$B_2 = (2A^3a^2b^2 - A^3b^2a^2 + A^3b^2a - A^3a^2b^2 + A^3a^2b)(V_1^{3a-2}V_2^{3b-2})$.

$B_2 = (A^3ab^2 + A^3a^2b)(V_1^{3a-2}V_2^{3b-2}) > 0$.

Como que $B_1 = < 0$ y $B_2 > 0$, también se cumple la condición de cuasiconcavidad

b) Función de producción CES. Dicha función viene dada según [2.11], por $Q = Y \cdot (a \cdot V_1^{-\theta} + (1-a) \cdot V_2^{-\theta})^{-u/\theta}$ ($Y > 0$, $0 < a < 1$, $u > 0$ y $-1 < \theta <> 0$ para todo Q, V_1 y $V_2 > 0$).

En este caso tenemos para el input capital:

$$f_1 = (dQ/dV_1) = Y(-u/p)(aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}a(-\theta)\cdot V_1^{-\theta-1}.$$
$$f_1 = (dQ/dV_1) = auY(aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-((u+\theta)/\theta)}\cdot V_1^{-(\theta+1)}.$$
$$f_1 = (dQ/dV_1) = auY((aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}\cdot V_1^{-(\theta+1)}.$$
$$f_1 = (dQ/dV_1) = (auY/Y^{(u+\theta)/u})Y^{(u+\theta)/u}((aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}\cdot V_1^{-(\theta+1)}.$$
$$f_1 = (dQ/dV_1) = (auY/Y^{(u+\theta)/u})(Y((aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}\cdot V_1^{-(\theta+1)}.$$
$$f_1 = (dQ/dV_1) = (au/Y^{\theta/u})(Q^{(u+\theta)/u}/V_1^{(\theta+1)}).$$

Y para el input trabajo:

$$f_2 = (dQ/dV_2) = Y(-u/\theta)(aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-(u/\theta)-1}\ (1-a)(-\theta)\cdot V_2^{-\theta-1}.$$
$$f_2 = (dQ/dV_2) = (1-a)uY(aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-((u+\theta)/\theta)}\cdot V_2^{-(\theta+1)}.$$
$$f_2 = (dQ/dV_2) = (1-a)uY((aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}\cdot V_2^{-(\theta+1)}.$$
$$f_2= (dQ/dV_2)=((1-a)uY/Y^{(u+\theta)/u})Y^{(u+\theta)/u}((aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}V_2^{-(\theta+1)}.$$
$$f_2 = (dQ/dV_2) = ((1-a)uY/Y^{(u+\theta)/u})(Y(aV_1^{-\theta}+(1-a)V_2^{-\theta})^{-u/\theta})^{(u+\theta)/u}\cdot V_2^{-(\theta+1)}.$$
$$f_2 = (dQ/dV_2) = ((1-a)uY/Y^{\theta/u})(Q^{(u+\theta)/u}/V_2^{-(\theta+1)}).$$

Es evidente que la monotonicidad positiva para cada input se cumple, pues f_1 y $f_2 > 0$, dado que ($Y > 0$, $0 < a < 1$, $u > 0$ y $-1 < \theta <> 0$ para todo Q, V_1 y $V_2 > 0$).

Para demostrar la existencia de cuasiconcavidad partimos de la existencia de rendimientos constantes a escala como caso particular, es decir $u = 1$. En este caso, la productividad marginal de cada input que viene dada en las dos expresiones anteriores, queda reducida a $f_1 = (dQ/dV_1) = (a/Y^{\theta})(Q/V_1)^{1+\theta} > 0$ y $f_2 = (dQ/dV_1) = (1-a)/Y^{\theta})(Q/V_2)^{1+\theta} > 0$, cumpliéndose monotonicidad positiva en ambos casos dado el valor preestablecido para sus parámetros en la propia función de producción. Tomando estas dos últimas expresiones, queda:

$$f_{11} = (d^2Q/dV_1^2) = (a/Y^{\theta})(1+\theta)(Q/V_1)^{\theta}((dQ/dV_1)V_1-Q)/V_1^2).$$
$$f_{22} = (d^2Q/dV_1^2) = ((1-a)/Y^{\theta})(1+\theta)(Q/V_2)^{\theta}((dQ/dV_2)V_2-Q)/V_2^2).$$
$$f_{12} = f_{21} = (d^2Q/dV_1dV_2) = ((1-a)/Y^{\theta})(1+\theta)(Q/V_2)^{\theta}((dQ/dV_1)V_2/V_2^2).$$
$$f_{12} = f_{21} = (d^2Q/dV_1dV_2) = ((1-a)/Y^{\theta})(1+\theta)(Q/V_2)^{\theta}((dQ/dV_1)/V_2).$$

Tenemos que $f_{11} < 0$ y $f_{22} < 0$ según el teorema de Euler[29] y $f_{12} > 0$, ya que $Y > 0$, $0 < a < 1$, $u > 0$ y $-1 < \theta <> 0$ para todo Q, V_1 y $V_2 > 0$. Por lo tanto, $B_1 = -f_1^2 < 0$ y $B_2 > 0$ cumpliéndose la condición de cuasiconcavidad[30].

Apéndice 3.2. Expresiones de cálculo de f_{11}, f_{22} y f_{12} correspondientes a los modelos Translog, CES y CES $(b_1+b_2=1)$.

a) Translog.

$f_{11} = (Q((b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)-1)(b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)+2b_3Q)/V_1^2.$

$f_{22} = (Q((b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)-1)(b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)+2b_4Q)/V_2^2.$

$f_{12}=((Q/V_2)(b_1+2b_3\ln V_1+b_5\ln V_2)V_1(b_2+2b_4\ln V_2+b_5\ln V_1)/V_1^2)+(b_5\cdot Q)/(V_2V_1).$

b) CES.

$f_{11} = (Q((b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)-1)(b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)+2b_3Q)/V_1^2.$

$f_{22} = (Q((b_2+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)-1)(b_2+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)+2b_3Q)/V_2^2.$

$f_{12} = (Q/V_2)(b_2+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)V_1(b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)/V_1^2 - 2b_3Q/V_1V_2.$

c) CES $(b_1 + b_2 = 1)$.

$f_{11} = (Q((b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)-1)(b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)+2b_3Q)/V_1^2.$

$f_{22} = (Q((1-b_1+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)-1)(1-b_1+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)+2b_3Q)/V_2^2.$

$f_{12}=(Q/V_2)(1-b_1+2b_3\ln V_2-2b_3\ln V_1)V_1(b_1+2b_3\ln V_1-2b_3\ln V_2)/V_1^2-2b_3Q/V_1V_2.$

---

[29] El teorema de Euler aplicado a las funciones de producción homogéneas de grado 1 se enuncia a partir de $(dQ/dV_1)V_1 + (dQ/dV_2)V_2 = Q$, lo que significa que si a cada factor se le retribuye por el valor de su producto marginal, el producto total se distribuye exactamente entre todos los factores en función de su participación.

[30] El signo de B_2 es positivo si tenemos en cuenta su expresión de cálculo, $(f_1f_2f_{21} + f_2f_1f_{12}) - (f_2f_2f_{11} + f_1f_1f_{22})$ y el signo definido para cada uno de sus componentes.

4. ECONOMIAS DE ESCALA Y DEMAS CARACTERISTICAS TECNOLOGICAS DE LAS EMPRESAS EUROPEAS.

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en la estimación de los 5 modelos de producción propuestos. Dicha estimación ha sido realizada mediante el método de (mco) a nivel global y a nivel sectorial para 1991 y 1994, y sus resultados pueden observarse en los anexos 1.a y 1.b[1].

En dichos anexos aparece el valor de los coeficientes de regresión, el valor del parámetro de "eficiencia" (ln b_0), el valor del coeficiente de determinación R^2 y el valor del estadístico F. Asimismo, se indica si los estadísticos F y t son significativos al nivel de riesgo del 5%. También se señala el hecho de que en algún caso no se haya estimado el modelo correspondiente, bien porque el número de variables independientes no era menor que el número de casos observados menos uno, bien por la existencia de una matriz de correlación singular[2]. El análisis de resultados se realiza a nivel global, incluyendo todas las empresas de la muestra, y a nivel de cada sector, incluyendo solamente las empresas del mismo; de esta forma, identificaremos la tecnología de producción a nivel global y a nivel sectorial.

Utilizaremos los criterios expuestos en el capítulo anterior para discriminar entre los distintos modelos estimados. Es decir, los modelos deben cumplir las condiciones estadísticas y de regularidad. En este sentido, remarcamos que los modelos CES serán sometidos a una nueva prueba de regularidad, ya que, tal como indicamos anteriormente, el hecho de que el valor de los coeficientes se sitúe dentro de los límites preestablecidos en la propia función de producción es suficiente para cumplir las

---

[1] Todos los cálculos y procesamientos estadísticos han sido realizados mediante los programas informáticos Excel 4.0, Presta 2.2. y SPSS 6.0.

[2] Indicado por n.e.

condiciones de regularidad de ésta, pero no para cumplir las condiciones de regularidad de los modelos CES en la aproximación lineal de Kmenta que son los estimados aquí. Por lo tanto, en el caso de los modelos CES al igual que en el modelo Translog las condiciones de regularidad deben ser verificadas observación a observación. Por el contrario, en el caso de los modelos Cobb-Douglas, el hecho de que los coeficientes estimados se sitúen en los límites preestablecidos por las propias funciones de producción es condición suficiente para que los modelos Cobb-Douglas cumplan las condiciones de regularidad.

A nivel global se estimarán las características relativas al tipo y grado de economías de escala, es decir, la elasticidad de escala $E_{Q/V}$, la elasticidad del output con respecto a cada input $E_{Q/V1}$ y $E_{Q/V2}$, y la elasticidad de sustitución entre inputs E_s. También se calcularán las productividades marginales y medias de cada input PMA_{V1}, PMA_{V2}, PME_{V1} y PME_{V2} respectivamente, así como los parámetros de intensidad del capital y del trabajo, a y (1-a) respectivamente, y el parámetro de substitución θ, correspondientes a los modelos CES y CES ($b_1+b_2=1$). Posteriormente se calculará el valor medio de las variables anteriores por clase de tamaño y por clase de empresa (europea y española), completando el análisis con un test de diferencias de medias por clase de tamaño y clase de empresa. El test aplicado será el de Neuman-Keuls al nivel de riesgo del 5%[3]. Finalizaremos con un contraste de hipótesis entre los modelos que han superado las fases estadísticas y de regularidad, con el fin de identificar el modelo que mejor se ajuste a la tecnología de producción en cada caso.

A nivel sectorial nos centraremos preferentemente en el estudio de las economías de escala. En aquellos modelos que cumplan las condiciones de la fase estadística y las condiciones de

[3] La prueba de Neuman-Keuls se basa en una estimación de la varianza global a la que pertenecerían todas las muestras en la hipótesis de igualdad de medias y en el cálculo, a partir de ella, de la máxima diferencia permisible entre medias en esa hipótesis y asumiendo normalidad (Snedecor y Cochran, 1982).

regularidad, se estimarán las características relativas al tipo y grado de economías de escala, a la elasticidad del output con respecto a cada input y a la elasticidad de sustitución entre inputs, siempre que en este último caso no se trate de un modelo Cobb-Douglas[*]. Posteriormente, se realizará un contraste de hipótesis entre los modelos que han superado las dos fases anteriores con el fín de identificar el que mejor se ajuste a la tecnología productiva de cada sector.

En aquellos modelos que sólo cumplan significatividad según el estadístico F, se estimarán las características relativas al tipo y grado de economías de escala, a la elasticidad del output con respecto a cada input y a la elasticidad de sustitución entre inputs, siempre y cuando cumplan las condiciones de regularidad. Posteriormente, se efectuará un contraste de hipótesis entre los modelos que hayan superado dichas fases con el fín de identificar el modelo que mejor represente la tecnología productiva. De todas formas, cuando este hecho se produzca, el mismo será señalado explícitamente.

4.1. Economías de escala y otras características tecnológicas a nivel global.

Mientras que el estadístico F es significativo en cada uno de los modelos estimados cada año, el estadístico t lo es en cada uno de los coeficientes de regresión de dichos modelos, a excepción del modelo Translog en 1991, en el que sólo 4 de los 5 coeficientes de regresión son significativos.

En 1991 y 1994, los modelos CES, CES ($b_1+b_2=1$), Cobb-Douglas y Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$), cumplen las condiciones de regularidad, ya que el valor de los coeficientes estimados se sitúa dentro de los límites preestablecidos en las propias funciones de producción. Sin embargo, tal como indicamos anteriormente, es

[*] En un modelo Cobb-Douglas, la elasticidad de sustitución entre inputs es unitaria.

necesario verificar las condiciones de regularidad para cada observación en el caso de los modelos CES y CES (b_1+b_2=1).

Las condiciones de monotonicidad del modelo Translog en 1991 no pueden ser rechazadas, ya que en todos los casos observados la productividad marginal del capital es positiva (a excepción de 2 casos sobre un total de 1.549 y con un valor muy próximo a 0), mientras que la productividad marginal del trabajo es positiva en todos los casos. También cumple cuasiconcavidad ya que en sólo 2 de las 1.549 observaciones deja de cumplir dicha condición. Tampoco pueden ser rechazadas las condiciones de monotonicidad y cuasiconcavidad de dicho modelo en 1994, ya que en ninguno de los 2.533 casos observados incumple alguna de las dos condiciones.

Los modelos CES y CES (b_1+b_2=1) (aproximación lineal de Kmenta), cumplen las condiciones de monotonicidad en ambos años, ya que en todos los casos observados la productividad marginal del capital y la productividad marginal del trabajo es positiva. Estos modelos también cumplen cuasiconcavidad en todos los casos. Por su parte, los modelos Cobb-Douglas y Cobb-Douglas (b_1+b_2=1) cumplen globalmente las dos condiciones de regularidad dado el valor de sus coeficientes. Las principales características de cada uno de estos modelos son presentadas a continuación.

4.1.1. Modelo Translog.

En la tabla 4.1 se recogen los principales resultados correspondientes al modelo Translog para cada año.

Tabla 4.1

Modelo Translog (valores medios).

año	$E_{Q/V}$	$E_{Q/V1}$	$E_{Q/V2}$	PMA_{V1}	PMA_{V2}	PME_{V1}	PME_{V21}	E_s
1991	0,975	0,481	0,494	0,193	23,3	0,383	46,4	0,769
1994	1,044	0,527	0,482	0,189	25,5	0,368	57,3	1,009

De la observación de la tabla anterior podemos extraer las siguientes conclusiones:

a) El valor de la elasticidad de escala muestra la existencia de rendimientos decrecientes en 1991 y de rendimientos crecientes en 1994. En promedio, un incremento del 1% en los factores de producción nos lleva a un incremento del 0,975% en la producción en 1991 y a un incremento del 1,044% en 1994.

b) Las elasticidades del capital y del trabajo varían a lo largo del periodo analizado. Así, mientras en 1991 es superior la elasticidad del trabajo, en 1994 lo es la del capital, lo que nos muestra una variación en la participación de cada input en el valor de la producción. Dicha participación es favorable al trabajo en 1991 y favorable al capital en 1994.

c) Por cada mil ecus de incremento en el activo de la empresa, el valor añadido aumenta en 0,193 mil ecus en 1991 y 0,189 mil ecus en 1994. Por cada empleado contratado el valor añadido aumenta en 23,3 mil ecus en 1991 y en 25,5 mil ecus en 1994.

d) El valor añadido es de 0,383 ecus y 0,368 ecus por ecu de activo y de 46,4 mil ecus y 57,3 mil ecus por empleado en 1991 y 1994, respectivamente.

e) Mientras que en 1991 el valor de la elasticidad de sustitución nos muestra que una variación del 1% en la pendiente de la isocuanta (precio relativo de los factores de producción) comporta una variación del 0,769% en la proporción de los factores, en 1994 dicha variación pasa a ser del 1,009%.

Como es sabido, el valor de las variables anteriores en el caso del modelo Translog, varía con el nivel de output y con el nivel de los inputs, por lo que hemos calculado el valor medio de las mismas por clase de tamaño. En las tablas 4.2.a y 4.2.b se recogen los principales resultados para cada año.

Tabla 4.2.a

Modelo Translog (valor medio por clase de tamaño) (1991).

Clase Tamaño	1 (n=363)	2 (n=623)	3 (n=398)	4 (n=141)	5 (n=24)
Valor Añadido	0,07-40	40-200	200-1000	1000-5000	5000-18681
$E_{Q/V}$	0,939	0,971	0,996	1,02	1,032
$E_{Q/V1}$	0,528	0,498	0,447	0,404	0,331
$E_{Q/V2}$	0,41	0,473	0,549	0,616	0,702
PMA_{V1}	0,214	0,202	0,175	0,165	0,107
PMA_{V2}	24,4	20,8	23,9	27,1	36,4
PME_{V1}	0,388	0,39	0,373	0,381	0,304
PME_{V2}	57,3	43,1	42,7	43,3	51,6
E_s	0,835	0,819	0,759	0,627	0,341

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

Tabla 4.2.b

Modelo Translog (valor medio por clase de tamaño) (1994).

Clase Tamaño	1 (n=665)	2 (n=457)	3 (n=671)	4 (n=514)	5 (n=226)
Valor Añadido	0,02-20	20-50	50-200	200-1000	1000-24668
$E_{Q/V}$	1,029	1,017	1,007	0,994	0,977
$E_{Q/V1}$	0,519	0,523	0,527	0,535	0,541
$E_{Q/V2}$	0,511	0,494	0,48	0,459	0,437
PMA_{V1}	0,201	0,198	0,190	0,176	0,163
PMA_{V2}	31,815	23,865	22,959	23,936	21,557
PME_{V1}	0,398	0,388	0,368	0,336	0,309
PME_{V2}	75,167	50,487	49,439	53,896	50,337
E_s	1,107	1,102	1,087	1,009	0,693

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

De la observación de las dos tablas anteriores podemos extraer las siguientes conclusiones:

a) Aunque en 1991 se observa un aumento de la elasticidad de escala al aumentar el tamaño de la empresa, pasando de rendimientos decrecientes $E_{o/v} < 1$ a rendimientos crecientes $E_{o/v} > 1$; en 1994 se observa una disminución de la elasticidad de escala con el tamaño, pasando de rendimientos crecientes $E_{o/v} > 1$ a rendimientos decrecientes $E_{o/v} < 1$, lo que es consecuente con la teoria neoclásica de la producción[5].

b) Mientras que la elasticidad del output con respecto al capital disminuye con el tamaño en 1991 y aumenta en 1994, la elasticidad del output con respecto al trabajo aumenta en 1991 y disminuye en 1994. Por su parte, la productividad marginal del capital y del trabajo disminuyen siempre con el tamaño, a excepción de esta última en 1991, la cual aumenta. En relación a las productividades medias del capital y del trabajo, podemos observar en cada año una disminución de las mismas en relación al tamaño de la empresa.

d) Tanto en 1991 como en 1994 puede constatarse una disminución de la elasticidad de sustitución al aumentar el tamaño de la empresa. Esto nos indica que a medida que aumentamos el tamaño de la empresa, se produce una cierta resistencia a intercambiar los factores de producción como respuesta a una variación de sus precios relativos.

En justificación a lo expuesto en los párrafos anteriores, el test de Neuman-Keuls al nivel del riesgo del 5% nos muestra numerosas diferencias significativas entre las distintas clases de tamaño para cada una de las variables estudiadas. Todo ello puede observarse en las tabla siguiente.

---

[5] Algún estudio también ha proporcionado resultados parecidos a los obtenidos en 1991. Un ejemplo es el trabajo ya mencionado de Griliches (1967).

Tabla 4.3

Significación de diferencias por clases de tamaño: test de Neuman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

Variable	TRANSLOG (1991)	TRANSLOG (1994)
$E_{Q/V}$	5>1 5>2 5>3 4>1 4>2 4>3 3>1 3>2 2>1	1>5 1>4 1>3 1>2 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4 4>5
$E_{Q/V1}$	1>5 1>4 1>3 1>2 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4 4>5	5>1 5>2 5>3 5>4 4>1 4>2 4>3 3>1 3>2 2>1
$E_{Q/V2}$	5>1 5>2 5>3 5>4 4>1 4>2 4>3 3>1 3>2 2>1	1>5 1>4 1>3 1>2 2>5 2>4 3>5 3>4 4>5
PMA_{V1}	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 4>5	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4 4>5
PMA_{V2}	5>2 5>3 5>1 4>2 1>2 3>2	No hay diferencias
PME_{V1}	1>5	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4
PME_{V2}	1>3 1>2 1>4	No hay diferencias
E_e	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4 4>5	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4 4>5

Los resultados obtenidos en la tabla anterior justifican las afirmaciones realizadas anteriormente.

Para finalizar este apartado, realizamos un análisis comparativo entre las empresas europeas y españolas a partir del valor medio de cada una de las variables anteriores. Estos valores se muestran en la tabla 4.4, pudiéndose observar una mayor elasticidad de escala en la empresa europea que en la empresa española en 1991. Sin embargo, dicha elasticidad es idéntica entre ambas clases de empresas en 1994.

La elasticidad del output con respecto al capital es favorable a la empresa europea en 1991 y favorable a la empresa española en 1994. Sin embargo, la elasticidad del output con respecto al trabajo es favorable a la empresa española en 1991 y favorable a la empresa europea en 1994.

Tabla 4.4

Valores medios por clase de empresa.

Variable	TRANSLOG (1991)		TRANSLOG (1994)	
	EUROPEAS (n=1549)	ESPAÑOLAS (n=95)	EUROPEAS (n=2533)	ESPAÑOLAS (n=76)
$E_{Q/V}$	0,975*	0,947	1,009	1,009
$E_{Q/V1}$	0,481*	0,43	0,527	0,548*
$E_{Q/V2}$	0,494	0,516*	0,482*	0,461
PMA_{V1}	0,193*	0,124	0,189*	0,146
PMA_{V2}	23,3	34,3*	25,5	32,4
PME_{V1}	0,383*	0,266	0,368*	0,274
PME_{V2}	46,4	65,2*	57,3	73,3
E_s	0,782*	0,76	1,044	1,051

* Diferencia significativa según el test de Newman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

En las dos clases de empresas observamos un aumento de la productividad media del trabajo a lo largo del periodo analizado. Sin embargo, mientras que la productividad media del capital desciende para el conjunto de empresas europeas, aumenta para las españolas.

En relación a la elasticidad de sustitución observamos un importante aumento de la misma y un ligero cambio de tendencia entre ambas clases de empresas, ya que mientras en 1991 la elasticidad de sustitución era mayor en la empresa europea, en 1994 lo es en la empresa española.

4.1.2. Modelos CES y CES ($b_1+b_2=1$) (CES con rendimientos constantes a escala).

En la tabla siguiente se presentan los resultados correspondientes a las variables descritas anteriormente y al resto de parámetros tecnológicos.

Tabla 4.5

Modelos CES (valores medios).

Variable	CES (1991)	CES(b_1+b_2=1) (1991)	CES (1994)	CES(b_1+b_2=1) (1994)
$E_{Q/V}$	0,973	1	0,999	1
$E_{Q/V1}$	0,499	0,509	0,515	0,513
$E_{Q/V2}$	0,474	0,491	0,484	0,487
PMA_{V1}	0,198	0,202	0,186	0,185
PMA_{V2}	23,1	23,8	25,3	25,4
PME_{V1}	0,382	0,382	0,368	0,368
PME_{V2}	45,7	41,1	57,2	57,2
a	0,817	0,805	0,409	0,407
1-a	0,183	0,195	0,591	0,593
θ	0,426	0,395	-0,091	-0,132
E_s	0,701	0,716	1,1	1,153

Aunque los resultados obtenidos cada año son muy parecidos en ambos modelos, podemos constatar alguna variación importante a lo largo del periodo analizado. Por ejemplo, a pesar de que en el modelo CES observamos la existencia de rendimientos decrecientes a escala cada año, no podemos rechazar la existencia de rendimientos constantes a escala en 1994 dado el valor alcanzado por $E_{Q/V}$ (0,999).

En ambos modelos, y para los dos años analizados, se observa una elasticidad del output en relación al capital ligeramente superior a la elasticidad del output en relación al trabajo. También se observa una disminución de la productividad marginal y media del capital y un aumento de la productividad marginal y media del trabajo. Por otra parte, podemos constatar un cambio substancial en el valor de los parámetros de distribución, ya que el valor correspondiente a la intensidad del capital disminuye en favor del valor correspondiente a la intensidad del trabajo, lo que nos indica que la participación relativa del capital en el output disminuye a lo largo del periodo en favor de la participación del trabajo. También destacamos el incremento que ha tenido lugar en la elasticidad de sustitución, lo que nos muestra un aumento en la flexibilidad de los factores de producción como respuesta a la variación relativa de sus precios.

Al igual que hemos hecho anteriormente en el caso del modelo Translog, vamos a analizar la evolución de la variables anteriores en relación a la clase de tamaño. En la tablas 4.6 y 4.7 siguientes se recogen los principales resultados.

Tabla 4.6

Modelos CES (valores medios por clase de tamaño).

Clase Tamaño	1 (n=364)	2 (n=622)	3 (n=398)	4 (n=141)	5 (n=24)
Valor Añadido	0,07-40	40-200	200-1000	1000-5000	5000-18681
CES (1991)					
$E_{Q/V1}$	0,494	0,504	0,499	0,497	0,471
$E_{Q/V2}$	0,479	0,469	0,474	0,476	0,502
PMA_{V1}	0,203	0,208	0,19	0,181	0,13
PMA_{V2}	26,8	21,8	22,1	21,1	25,5
PME_{V1}	0,391	0,398	0,368	0,349	0,268
PME_{V2}	51,5	44	43,9	42,6	49,4
CES ($b_1+b_2=1$) (1991)					
$E_{Q/V1}$	0,504	0,514	0,509	0,507	0,481
$E_{Q/V2}$	0,496	0,486	0,491	0,493	0,519
PMA_{V1}	0,197	0,209	0,2	0,197	0,149
PMA_{V2}	26,3	22,4	23,6	23,4	29,4
PME_{V1}	0,373	0,393	0,379	0,373	0,299
PME_{V2}	48,8	43,6	45,3	45,6	55

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

Tabla 4.7

Modelos CES (valores medios por clase de tamaño).

Clase Tamaño	1 (n=365)	2 (n=457)	3 (n=671)	4 (n=514)	5 (n=226)
Valor Añadido	0,02-20	20-50	50-200	200-1000	1000-24668
CES (1994)					
$E_{q/v1}$	0,512	0,514	0,515	0,519	0,521
$E_{q/v2}$	0,487	0,485	0,484	0,48	0,478
PMA_{v1}	0,202	0,193	0,184	0,172	0,165
PMA_{v2}	30,2	23,2	22,7	24,7	24,3
PME_{v1}	0,401	0,383	0,363	0,336	0,322
PME_{v2}	75,9	50,1	48,2	53,1	51,7
CES ($b_1+b_2=1$) (1994)					
$E_{q/v1}$	0,510	0,512	0,513	0,517	0,519
$E_{q/v2}$	0,490	0,488	0,487	0,483	0,481
PMA_{v1}	0,2	0,193	0,184	0,171	0,165
PMA_{v2}	30,3	23,3	22,8	24,9	24,6
PME_{v1}	0,4	0,383	0,364	0,337	0,324
PME_{v2}	75,8	49,9	48,7	53,2	52,1

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

De la observación de las dos tablas anteriores destacamos:

a) En 1991 se aprecia una ligera disminución en la elasticidad del output en relación al capital y un ligero aumento en la elasticidad del output en relación al trabajo con el tamaño de la empresa. De todas formas, los resultados son un tanto ambiguos al apreciarse en ambos modelos una cierta relación curvilínea en cada input; así, en el caso de la elasticidad del capital se observa un máximo para la segunda clase de tamaño, mientras que en el caso de la elasticidad del trabajo se observa un mínimo en la segunda clase de tamaño. Los resultados son más claros en 1994, apreciándose con el tamaño de la empresa, un aumento de la elasticidad del output en relación al capital y una disminución de la elasticidad del output en relación al trabajo.

b) En relación a las productividades marginales y medias del capital y del trabajo, podemos constatar para cada año y para cada uno de los modelos un descenso de las mismas con el tamaño de la empresa. Más concretamente, podemos observar estas diferencias en la tabla siguiente.

Tabla 4.8

Significación de diferencias por clases de tamaño: test de Neuman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

Variable	CES (1991)	CES ($b_1+b_2=1$) (1991)
$E_{Q/V1}$	2>1	2>5 2>1
$E_{Q/V2}$	1>2	5>2 1>2
PMA_{V1}	2>5 2>4 2>3 1>5 1>4 3>5 4>5	2>5 3>5 1>5 4>5
PMA_{V2}	1>4 1>2 1>3	1>2
PME_{V1}	2>5 2>4 2>3 1>5 1>4 1>3 4>5	2>5 3>5 1>5
PME_{V2}	1>4 1>3 1>2	1>2
Variable	CES (1994)	CES ($b_1+b_2=1$) (1994)
$E_{Q/V1}$	5>1 5>2 5>3 4>1 4>2 4>3 3>1	5>1 5>2 5>3 4>1 4>2 4>3 3>1
$E_{Q/V2}$	1>5 1>4 2>5 2>4 3>5 3>4	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4
PMA_{V1}	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4
PMA_{V2}	No hay diferencias	No hay diferencias
PME_{V1}	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 3>5 3>4
PME_{V2}	No hay diferencias	No hay diferencias

Para finalizar este apartado, realizamos un análisis comparativo entre la empresa europea y la empresa española, para cada una de las variables anteriores. Los resultados se presentan en la tabla siguiente.

Tabla 4.9

Valores medios por clase de empresa.

Variable	CES (1991)		CES ($b_1+b_2=1$) (1991)	
	EUROPEAS	ESPAÑOLAS	EUROPEAS	ESPAÑOLAS
$E_{Q/V1}$	0,499*	0,453	0,509*	0,463
$E_{Q/V2}$	0,474	0,52*	0,491	0,537*
PMA_{V1}	0,198*	0,13	0,202*	0,133
PMA_{V2}	23,1	36,2*	23,8	37,2*
PME_{V1}	0,382*	0,271	0,382*	0,27
PME_{V2}	45,7	65,6*	45,6	65,5*
Variable	**CES (1994)**		**CES ($b_1+b_2=1$) (1994)**	
	EUROPEAS	ESPAÑOLAS	EUROPEAS	ESPAÑOLAS
$E_{Q/V1}$	0,515	0,530*	0,513	0,528*
$E_{Q/V2}$	0,484*	0,469	0,487*	0,472
PMA_{V1}	0,186*	0,141	0,185*	0,14
PMA_{V2}	25,3	32,4	25,5	32,7
PME_{V1}	0,368*	0,271	0,368*	0,271
PME_{V2}	57,2	71,7	57,3	71,7

* Diferencia significativa según el test de Newman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

De la tabla anterior podemos deducir que en 1991 la elasticidad del output en relación al capital es mayor en la empresa europea, mientras que la elasticidad del output en relación al trabajo lo es en la española. En 1994 la elasticidad del output en relación al capital es mayor en la empresa española y la elasticidad del output en relación al trabajo lo es en la europea. Por otra parte, en ambos modelos y para cada año, la productividad marginal y media del capital es mayor en la empresa europea mientras que la productividad marginal y media del trabajo lo es en la empresa española, aunque en este último caso no siempre de forma significativa.

4.1.3. Modelos Cobb-Douglas y Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala).

En la tabla siguiente se presentan los principales resultados.

Tabla 4.10

Modelos Cobb-Douglas (valores medios por clase de tamaño).

Variable	CD (1991)	CD ($b_1+b_2=1$) (1991)	CD (1994)	CD ($b_1+b_2=1$) (1994)
$E_{q/v}$	0,974	1	0,995	1
$E_{q/v1}$	0,448	0,46	0,527	0,529
$E_{q/v2}$	0,526	0,54	0,468	0,471
PMA_{v1}	0,173	0,178	0,193	0,193
PMA_{v2}	24,7	25,4	24,8	24,9
PME_{v1}	0,386	0,386	0,366	0,366
PME_{v2}	47,1	47,1	53,1	52,9

De la tabla anterior destacamos:

a) La similitud de resultados obtenidos en los dos modelos. En algunos casos se obtienen valores prácticamente iguales.

b) Al igual que el modelo CES, el modelo Cobb-Douglas nos muestra la existencia de rendimientos decrecientes a escala cada año, aunque en 1994 el valor de la elasticidad de escala se aproxima a 1.

c) En 1991 se obtiene en los dos modelos una mayor elasticidad del output en relación al trabajo que en relación al capital. Sin embargo, en 1994 la elasticidad del ouptut en relación al capital es mayor que la elasticidad del output en relación al trabajo, lo que coincide con los resultados obtenidos en los modelos CES.

d) Mientras que puede observarse un aumento de la productividad marginal del capital, la productividad marginal del trabajo permanece prácticamente constante a lo largo del periodo analizado. Al igual que en el caso CES, también observamos una disminución en la productividad media del capital y un aumento en la productividad media del trabajo.

Al igual que hemos realizado en los casos anteriores, analizamos la evolución de las distintas variables en relación a la clase de tamaño. Los resultados se recogen en las tablas 4.11.a y 4.11.b siguientes.

Tabla 4.11.a

Modelos Cobb-Douglas (valores medios por clase de tamaño).

Clase Tamaño	1 (n=364)	2 (n=622)	3 (n=398)	4 (n=141)	5 (n=24)
Valor Añadido	0,07-40	40-200	200-1000	1000-5000	5000-18681
Cobb-Douglas (1991)					
PMA_{v1}	0,177	0,181	0,166	0,160	0,118
PMA_{v2}	27,7	23,8	24,2	22,1	25,3
PME_{v1}	0,395	0,403	0,37	0,356	0,263
PME_{v2}	52,8	45,4	46,1	42	48,1
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (1991)					
PMA_{v1}	0,174	0,183	0,175	0,175	0,135
PMA_{v2}	27	24,4	25,7	24,2	28,8
PME_{v1}	0,377	0,399	0,381	0,38	0,293
PME_{v2}	50,1	45,2	47,7	44,9	53,4

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

Tabla 4.11.b

Modelos Cobb-Douglas (valores medios por clase de tamaño).

Clase Tamaño	1 (n=665)	2 (n=457)	3 (n=671)	4 (n=514)	5 (n=226)
Valor Añadido	0,02-20	20-50	50-200	200-1000	1000-24668
Cobb-Douglas (1994)					
PMA_{v1}	0,211	0,201	0,190	0,176	0,167
PMA_{v2}	28,6	23,1	22,5	24,7	24,2
PME_{v1}	0,4	0,381	0,361	0,334	0,318
PME_{v2}	61,1	49,4	48,1	52,7	51,7
Cobb-Douglas (b_1+b_2=1) (1994)					
PMA_{v1}	0,21	0,201	0,191	0,178	0,171
PMA_{v2}	28,4	23,1	22,6	25,1	24,7
PME_{v1}	0,396	0,38	0,362	0,337	0,322
PME_{v2}	60,3	49,1	48,1	53,1	52,5

Nota: clases de tamaño según valor añadido y en millones de ecus.

De la observación de las tablas 4.11.a y 4.11.b podemos concluir lo siguiente:

a) La similitud de los resultados obtenidos en los dos modelos Cobb-Douglas cada año, lo que nos muestra la poca diferencia existente entre el modelo Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala y el modelo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala.

b) Una disminución de la productividades marginales y medias del capital y del trabajo al aumentar el tamaño de la empresa, aunque en el segundo caso dicha tendencia no se observa de forma clara.

Prueba de lo dicho en el párrafo anterior, son los resultados que presentamos en la tabla 4.12.

Tabla 4.12

Significación de diferencias por clases de tamaño: test de Neuman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

Variable	Cobb-Douglas (1991)	Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (1991)
PMA_{v1}	2>5 2>4 2>3 1>5 1>3 3>5 4>5	2>5 1>5
PME_{v1}	2>5 2>4 2>3 1>5 1>3 3>5 4>5	2>5 1>5
Variable	**Cobb-Douglas (1994)**	**Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (1994)**
PMA_{v1}	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4
PME_{v1}	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4	1>5 1>4 1>3 2>5 2>4 2>3 3>5 3>4

Nota: no existen diferencias significativas en la productividad marginal y media del trabajo.

Al igual que hemos ido realizando en los modelos anteriores, efectuamos un análisis comparativo entre las empresas europeas y las empresas españolas, cuyos resultados pueden observarse en las tablas 4.13.a y 4.13.b.

Tabla 4.13.a

Valores medios por clase de empresa.

Variable	Cobb-Douglas (1991)		Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (1991)	
	EUROPEAS	ESPAÑOLAS	EUROPEAS	ESPAÑOLAS
PMA_{v1}	0,173*	0,119	0,178*	0,122
PMA_{v2}	24,7	34,6*	25,4	35,5*
PME_{v1}	0,386*	0,267	0,386*	0,266
PME_{v2}	47,1	65,8*	47,1	65,8*

* Diferencia significativa según el test de Neuman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

Tabla 4.13.b

Valores medios por clase de empresa.

Variable	Cobb-Douglas (1994)		Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$) (1994)	
	EUROPEAS	ESPAÑOLAS	EUROPEAS	ESPAÑOLAS
PMA_{v1}	0,193*	0,143	0,193*	0,144
PMA_{v2}	24,8	33,4	24,9	33,6
PME_{v1}	0,366*	0,271	0,366*	0,272
PME_{v2}	53,1	71,3	52,9	71,4

* Diferencia significativa según el test de Newman-Keuls al nivel de riesgo del 5%.

Al igual que en los casos anteriores podemos observar que la productividad marginal y media del capital es siempre mayor en la empresa europea que en la española, siendo esta diferencia siempre significativa. Por el contrario, en el caso de la productividad marginal y media del trabajo, la empresa española presenta un valor mayor; aunque en este caso, dicha diferencia, no siempre es significativa. Por otra parte, hay un hecho importante a tener en cuenta y es que mientras la empresa europea ha disminuido la productividad media del capital y ha aumentado la productividad media del trabajo, la empresa española ha aumentado ambos tipos de productividades medias a lo largo del periodo analizado.

Para finalizar este apartado, y con el objetivo de seleccionar un modelo que nos identifique la tecnología de producción a nivel global para cada año, realizamos un contraste de hipótesis entre aquellos modelos que cumplen las condiciones de la fase estadística (F y t significativos al nivel de riesgo del 5%) y las condiciones de regularidad. Estas condiciones son cumplidas por todos los modelos en ambos años a excepción del modelo Translog en 1991. En la tabla 4.14.a se presentan los resultados para 1991.

Tabla 4.14.a

Contraste de hipótesis entre modelos (1991).

MODELO CES				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
CES ($b_1+b_2=1$)	5%	1;1545	14,8	3,84
Cobb-Douglas	5%	1;1545	48,4	3,84
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	2;1545	31,7	3
MODELO CES ($b_1+b_2=1$)				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	1;1546	30,8	3,84
MODELO COBB-DOUGLAS				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	1;1546	13,5	3,84

Como se desprende de los resultados obtenidos en la tabla anterior podemos establecer las preferencias entre los distintos pares de modelos. Teniendo en cuenta que A preferible a B se indica por A -> B, queda:

CES -> CES ($b_1+b_2=1$); CES -> CD; CES -> CD ($b_1+b_2=1$); CES ($b_1+b_2=1$) -> CD; CD -> CD ($b_1+b_2=1$).

Por lo tanto, teniendo en cuenta los resultados anteriores seleccionamos el modelo CES con rendimientos decrecientes a escala. Este será el modelo identificador de la tecnología productiva a nivel global en 1991.

En la tabla 4.14.b se presentan los resultados para 1994.

Tabla 4.14.b

Contraste de hipótesis entre modelos (1994).

MODELO TRANSLOG				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
CES	5%	2;2527	2,28	3
CES ($b_1+b_2=1$)	5%	3;2527	1,57	2,6
Cobb-Douglas	5%	3;2527	4,8	2,6
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	4;2527	3,76	2,37
MODELO CES				
Contraste de hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
CES ($b_1+b_2=1$)	5%	1;2529	0,04	3,84
Cobb-Douglas	5%	1;2529	9,8	3,84
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	2;2529	5,2	3
MODELO CES ($b_1+b_2=1$)				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	1;2530	10,3	3,84
MODELO COBB-DOUGLAS				
Contraste hipótesis	Nivel de riesgo	Grados de libertad	F_e estimado	F_c crítico
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	5%	1;2530	0,6	3,84

Dadas las preferencias entre los distintos pares de modelos: CES -> TRANSLOG; CES ($b_1+b_2=1$) -> TRANSLOG; TRANSLOG -> CD; TRANSLOG -> CD ($b_1+b_2=1$); CES ($b_1+b_2=1$) -> CES; CES -> CD; CES -> CD ($b_1+b_2=1$); CES ($b_1+b_2=1$) -> CD ($b_1+b_2=1$); CD ($b_1+b_2=1$) -> CD; seleccionamos para 1994 el modelo CES con rendimientos constantes a escala.

4.2. Economias de escala y otras características tecnológicas a nivel sectorial.

El procedimiento seguido anteriormente a nivel global va a ser seguido ahora en el caso sectorial.

Por lo tanto, a partir de las estimaciones minimocuadráticas ordinarias de cada uno de los cinco modelos a nivel sectorial, y cuyos resultados pueden observarse en los anexos 1.a y 1.b, realizamos el proceso de validación estadística y de regularidad de dichos modelos, efectuándose posteriormente la validación de hipótesis a partir del contraste F sobre aquellos modelos que han cumplido las condiciones estadísticas y de regularidad.

Sobre aquellos modelos que han cumplido dichas condiciones estadísticas y de regularidad, se describirán sus principales características relacionadas con la elasticidad de escala $E_{Q/V}$ y las elasticidades del output en relación a los inputs capital y trabajo (E_{Q/V_1} y E_{Q/V_2}, respectivamente).

En la tabla 4.15 y continuación se presenta un resumen de los principales resultados obtenidos a nivel de cada uno de los sectores. En dicha tabla puede observarse la denominación sectorial y los modelos que cumplen las condiciones estadísticas (F y t significativos) y de regularidad, así como el modelo seleccionado en cada sector, bien a partir de la contrastación de hipótesis, bien porque es el único modelo que cumple las condiciones señaladas anteriormente. Si el modelo seleccionado sólo cumple significatividad según el estadístico F y regularidad, el hecho queda expresamente señalado[6].

---

[6] En el apéndice al final del capítulo puede observarse una descripción detallada del proceso de validación estadística y de regularidad que ha sido realizado para cada uno de los sectores. También pueden observarse los resultados obtenidos en los correspondientes contrastes de hipótesis, así como el grado de economías de escala, el valor de la elasticidad del output en relación a cada input y otros importantes parámetros asociados con los modelos Translog y CES.

Tabla 4.15

Síntesis de resultados a nivel de cada sector.

Núm.	SECTOR	MODELOS QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES ESTADÍSTICAS (F y t) Y DE REGULARIDAD		MODELO SELECCIONADO	
		1991	1994	1991	1994
1	Minerales metálicos y carbón	Ninguno	CDRCCE y CDRCE	CDRCE+	CDRCE
2	Gas y petróleo	CDRCCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
3	Minerales no metálicos	CDRCCE	Ninguno	CDRCCE	CDRCE+
4	Construcción inmobiliaria	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
5	Construcción pesada	CDRCCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
6	Construcción comercial	CDRCCE y CDRDE	Ninguno	CDRCCE	CDRCE+
7	Alimentación y tabaco	CDRCCE y CDRDE	Translog, CDRCCE y CDRDE	CDRDE	Translog
8	Textil	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE	CDRCCE
9	Otros productos textiles	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE	CDRCCE
10	Productos de la madera	Ninguno	CDRCCE y CDRCE	CDRCE+	CDRCCE
11	Muebles	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCE
12	Papel	CESRCCE	CDRCCE y CDRCE	CESRCCE	CDRCCE
13	Editorial e imprenta	CDRCCE y CDRDE	CESRCCE, CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CESRCCE
14	Química	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCE	CDRCCE
15	Refinerías	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE	CDRCCE
16	Plástico y caucho	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE	CDRCCE
17	Cuero	CDRCCE	CDRCCE y CDRDE	CDRCCE	CDRCCE
18	Canteras, arcilla y vidrio	CESRCCE, CDRCCE y CDRDE	CDRCCE y CDRCE	CDRDE	CDRCCE
19	Transformación miner. metálicos	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
20	Fabricación productos metálicos	CDRCCE y CDRCE	Translog, CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	Translog
21	Equipo industrial informático	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
22	Equipo eléctrico y electrónico	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
23	Equipo de transporte	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE
24	Instrumental diverso	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE y CDRCE	CDRCCE	CDRCCE

Notas: CESRCCE = CES con rendimientos constantes a escala. CDRCE = Cobb-Douglas con rendimientos crecientes a escala. CDRCCE = Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala. CDRDE = Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala. (+) = cumple significatividad estadística según F pero no según t, aunque cumple regularidad.

Tabla 4.15 (continuación)

Síntesis de resultados a nivel de cada sector.

Núm.	SECTOR	MODELOS QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES ESTADÍSTICAS (F y t) Y DE REGULARIDAD		MODELO SELECCIONADO	
		1991	1994	1991	1994
25	Industrias manufactur. varias	CDRCOE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
26	Transporte terrestre	CDRCOE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
27	Transporte marítimo	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
28	Transporte aéreo	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
29	Autopistas	CDRCOE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
30	Comunicaciones	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE	CDRCOE
31	Agua, gas y electricidad	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
32	Mayoristas bienes duraderos	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
33	Mayoristas bienes no duraderos	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
34	Material de construcción	Ninguno	CDRCOE	CDRCE*	CDRCOE
35	Grandes almacenes	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
36	Supermercados	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
37	Estaciones de servicio	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
38	Almacenes textiles	Ninguno	CDRCOE y CDRDE	CDRDE*	CDRCOE
39	Almacenes de muebles	Ninguno	Ninguno	CDRCE*	CDRDE*
40	Restaurantes	Ninguno	CDRCOE y CDRCE	CDRCE*	CDRCOE
41	Minoristas	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE y CDRDE	CDRDE	CDRCOE
42	Hoteles	Ninguno	Ninguno	CDRDE*	CESRCE*
43	Servicios personales	CDRCOE	CDRCOE	CDRCOE	CDRCOE
44	Servicios empresariales	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
45	Talleres automoción y parkings	CDRCOE	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE	CDRCOE
46	Sanidad, educación y ocio	Ninguno	CDRCOE y CDRDE	CDRDE*	CDRCOE
47	Servicios de ingeniería	CDRCOE y CDRCE	CDRCOE y CDRDE	CDRCOE	CDRCOE
48	Conglomerados	CDRCOE	-	CDRCOE	-

Notas: CESRCE = CES con rendimientos crecientes a escala. CDRCE = Cobb-Douglas con rendimientos crecientes a escala. CDRCOE = Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala. CDRDE = Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala. (*) = cumple significatividad estadística según F pero no según t, aunque cumple regularidad.

4.3. Síntesis de resultados en relación a las economías de escala y demás características tecnológicas.

En este apartado vamos a realizar una síntesis de los principales resultados obtenidos a nivel global y a nivel sectorial.

4.3.1. Síntesis de resultados a nivel global.

A continuación presentamos las siguientes principales conclusiones:

a) Los resultados obtenidos se ajustan de forma excelente, tanto a nivel de las condiciones estadísticas como de regularidad de las funciones de producción correspondientes, en los cinco modelos que han sido estimados para cada año.

b) La existencia de rendimientos decrecientes a escala en 1991, según se desprende de los resultados obtenidos en los modelos CES y Cobb-Douglas, los cuales presentan valores de F muy elevados, así como un coeficiente de determinación ajustado del 92,78% y 92,59% respectivamente[7]. De todas formas, la contrastación de hipótesis nos lleva a seleccionar el modelo CES con rendimientos decrecientes a escala, cuyo valor de la elasticidad de escala nos indica que un aumento del 1% en el capital y en el trabajo nos lleva a un incremento en el valor añadido del 0,973%.

c) También los modelos CES y Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala estimados en 1994 proporcionan buenos resultados, ya que presentan el estadístico F más elevado y unos coeficientes de determinación ajustados del 93,78% en cada caso. Sin embargo, en ambos modelos la elasticidad de escala se aproxima a 1 por lo que en la contrastación de hipótesis son rechazados en favor del modelo CES con rendimientos constantes

[7] Dicho coeficiente de determinación ajustado $\bar{R}^2$, viene dado por $\bar{R}^2 = R^2-(k/n-k-1)(1-R^2)$, siendo R^2 el coeficiente de determinación, n el número de observaciones y k el número de variables independientes.

a escala: por lo tanto, un aumento del 1% en el capital y en el trabajo nos lleva a un incremento en el valor añadido del 1%.

d) En 1994 el modelo Translog presenta resultados interesantes dentro del marco de la teoría neoclásica de la producción. Dicho modelo nos muestra la existencia en primer lugar de rendimientos crecientes a escala y posteriormente de rendimientos decrecientes, justo lo contrario de los resultados obtenidos por el modelo Translog en 1991 que presenta en primer lugar rendimientos decrecientes a escala y posteriormente rendimientos crecientes. De todas formas, hemos de recordar que en este último caso dicho modelo no es significativo según el estadístico **t**, lo que le resta fiabilidad.

e) Podemos observar un aumento de la elasticidad de sustitución entre inputs E_s a lo largo del periodo analizado. Así, en el caso del modelo CES pasa de 0,701 a 1,1 y en el modelo CES (b_1+b_2=1) de 0,716 a 1,153. También el valor medio de la elasticidad de sustitución en el caso Translog pasa de 0,769 a 1,009. Por lo tanto, destacamos un aumento de la variación proporcional entre los factores de producción como consecuencia de una variación relativa de sus precios. Por otra parte, según se desprende del modelo Translog, observamos que la elasticidad de sustitución disminuye con el tamaño, lo que nos muestra una mayor rigidez en la sustitución entre inputs por parte de las empresas mayores.

f) La elasticidad del output en relación al capital siempre es mayor que la correspondiente al trabajo en los modelos CES y CES (b_1+b_2=1). También es mayor en los modelos Translog, Cobb-Douglas y Cobb-Douglas (b_1+b_2=1) en 1994. En 1991 tanto el modelo Translog como los modelos Cobb-Douglas presentan una elasticidad del output con respecto al trabajo mayor[*].

[*] En los modelos CES, el parámetro de distribución del capital es mayor que el parámetro de distribución del trabajo en 1991, pero es menor en 1994.

g) La elasticidad del output en relación al capital disminuye con el tamaño en 1991 pero aumenta en 1994. Por su parte, la elasticidad del output en relación al trabajo aumenta con el tamaño en 1991 pero disminuye en 1994. Esta tendencia puede apreciarse en aquellos modelos cuyas elasticidades de los inputs son variables, tales como el modelo Translog y los modelos CES.

h) En relación a las productividades marginales y medias de los factores de producción hemos de señalar que en general las mismas disminuyen con el tamaño de la empresa. Este descenso se produce para cada año y en todos los modelos, aunque esta tendencia decreciente se agudiza en el caso del factor capital. En algunos casos, la tendencia de las productividades marginales y medias del trabajo no son claras, al no existir diferencias significativas entre clases de tamaño, tal como en los modelos CES y Cobb-Douglas en 1994 y al poder observarse un repunte en la última clase de tamaño.

i) El modelo Translog muestra que en 1991 las empresas españolas presentan una elasticidad de escala y una elasticidad de sustitución inferiores a las de sus homólogas europeas. Sin embargo, en 1994 la elasticidad de escala es la misma en ambas clases de empresas y la elasticidad de sustitución es ligeramente superior en las empresas españolas, lo que nos muestra una mayor flexibilización por parte de la empresa española en relación a la sustitución entre factores de producción.

j) Mientras que en 1991 puede apreciarse una mayor elasticidad del output en relación al capital en la empresa europea y una mayor elasticidad del output en relación al trabajo en la empresa española, en 1994 esta relación se invierte[*].

k) Más contundentes son los resultados obtenidos a nivel de productividades marginales y medias. Puede apreciarse que tanto

[*] Nos referimos a los modelos con elasticidad del output en relación a cada input, variable; es decir los modelos Translog, CES y CES ($b_1+b_2=1$).

en 1991 como en 1994 y para todos los modelos estimados, la productividad marginal y media del capital es superior en la empresa europea, mientras que la productividad marginal y media del trabajo lo es en la española, aunque en este último caso dicha diferencia no siempre es significativa.

4.3.2. Síntesis de resultados a nivel sectorial.

Como se desprende de la tabla 4.15 y continuación, los modelos Cobb-Douglas son en su mayoría los modelos representativos de la tecnología productiva de cada sector en cada año. De todas formas, cuando realizamos el contraste de hipótesis con el fin de seleccionar un único modelo, es el modelo Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$), el que nos aparece un mayor número de veces. Este hecho, que se cumple en los dos años, aparece con mayor virulencia en 1994 en detrimento del modelo Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala. Un resumen de estos resultados es presentado en la tabla 4.16.

Tabla 4.16

Modelo y tipo de rendimiento según el número de sectores.

Modelo	Sectores (1991)	Sectores (1994)
Translog	0	2
CES ($b_1+b_2>1$)	0	1
CES ($b_1+b_2<1$)	0	0
CES ($b_1+b_2=1$)	1	1
Cobb-Douglas ($b_1+b_2>1$)	5	4
Cobb-Douglas ($b_1+b_2<1$)	7	1
Cobb-Douglas ($b_1+b_2=1$)	35	38
Tipo de rendimiento	**Sectores (1991)**	**Sectores (1994)**
Rendimientos variables a escala	0	2
Rendimientos constantes a escala	36	39
Rendimientos decrecientes a escala	7	1
Rendimientos crecientes a escala	5	5

Como conclusión final, y aunque podamos admitir la hipótesis de rendimientos decrecientes a escala (sobre todo a nivel global en en 1991), es la existencia de rendimientos constantes a escala la hipótesis más verosimil. De todas formas, el buen comportamiento que a nivel global tienen alguno de los modelos representativos de los rendimientos decrecientes a escala e incluso el modelo Translog en 1994, hace necesario que se cuantifiquen la importancia de estas deseconomías de escala introduciendo el concepto de eficiencia frontera, lo cual será objetivo del próximo capítulo.