



Universitat Autònoma de Barcelona

**ADVERTIMENT.** L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  [http://cat.creativecommons.org/?page\\_id=184](http://cat.creativecommons.org/?page_id=184)

**ADVERTENCIA.** El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

**WARNING.** The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>



**Universitat Autònoma  
de Barcelona**

Departamento de Ingeniería Electrónica

**CMOS-MEMS para aplicaciones de  
RF: Osciladores**

Una tesis doctoral por

Guillermo Sobreviela Falces

En cumplimiento de los requisitos para el grado de  
Doctor en Ingeniería Electrónica y de Telecomunicación

Supervisada por la Dra. Arantxa Uranga del Monte

Bellaterra, Septiembre de 2016





**Universitat Autònoma  
de Barcelona**

Departamento de Ingeniería Electrónica

# **CMOS-MEMS para aplicaciones de RF: Osciladores**

Una tesis doctoral por

Guillermo Sobreviela Falces

En cumplimiento de los requisitos para el grado de  
Doctor en Ingeniería Electrónica y de Telecomunicación  
Supervisada por la Dra. Arantxa Uranga del Monte

Guillermo Sobreviela Falces

Arantxa Uranga del Monte

Bellaterra, Septiembre de 2016



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad Autónoma de Barcelona su confianza al concederme la beca PIF que me ha permitido desarrollar durante los últimos tres años mi labor investigadora. Y por supuesto expresar mi más sincera gratitud al grupo de investigación ECAS de la UAB por su acogida y haberme ayudado a adquirir todo mi conocimiento actual del ámbito de los MEMS/NEMS y el diseño CMOS.

Debo dar un especial agradecimiento a mi directora y guía en el mundo de la microelectrónica y los MEMS, Arantxa Uranga. Gracias a su inestimable supervisión, atención, paciencia y comprensión he podido desarrollar mi conocimiento sobre la tecnología CMOS y los sistemas MEMS, así como lograr entender la teoría matemática que rodea a la estabilidad en frecuencia de los sistemas osciladores.

Doy a Nuria Barniol un gran reconocimiento por todas las discusiones y su orientación para entender el campo de los MEMS/NEMS desde el enfoque más local hasta el más amplio en su conjunto. Agradecer también a Francesc Torres por sus comentarios sobre la estabilidad en frecuencia y varianza Allan.

Gracias a todos los compañeros con los que he compartido grupo de investigación, Joan Giner, José Luís Muñoz Gamarra. A Martín Riverola por todas las horas de laboratorio y viajes a congresos y experiencias que hemos compartido. A Gabriel Vidal por compartir el interés en comprender los resonadores MEMS no lineales y todas las horas de trabajo conjuntas. Gracias a Pierre por las conversaciones sobre diseño de sistemas mixtos y a Jerome Juliard, su director de tesis, por sus lecciones sobre ecuaciones diferenciales no lineales aplicadas a sistemas osciladores.

Gracias a Eloi Marigó y Mohanraj Soundara Pandian y a todo el grupo de MEMS de la empresa SilTerra de Malasia. No sólo por su colaboración en el

proyecto común sino por el excelente trato que nos dieron durante la estancia de dos meses en Penang durante el verano de 2015.

He de incluir una mención a Ferrán Paredes, Paris Vélez, Úrsula Martínez, y Bahare Moradi, compañeros de despacho y compañeros de camino durante todos estos años. También incluir a Jordi Bonache, Gerard Sisó, Gerard Zamora, Simone Zuffanelli, Jordi Selga y Albert Crespo por sus ánimos continuados y la resolución de todas mis dudas teóricas en el ámbito de la electrónica y la electrodinámica.

Mil gracias a Pau Aguilà, no es necesario expresarte todo el afecto que te tengo, sabes de sobra todo lo que valoro nuestra amistad. Espero que en un futuro podamos retomar la actividad de los SpeedRuns nocturnos. A Antonio Díaz Cubero, tanto a ti como a Javier Ibarra Ramos, os deseo un éxito con vuestros respectivos discos que publicareis en el próximo mes, estoy seguro que serán otro nuevo éxito, como el resto de vuestra obra.

Finalmente, gracias a mis padres y a mi hermano por su apoyo incondicional durante todo este tiempo. Siempre me habéis acompañado y a vosotros os debo todos los éxitos que he podido conseguir hasta la fecha y los que aún están por llegar.

Gracias a todos.

# Resumen

En los últimos años el mercado asociado a los dispositivos MEMS/NEMS para comunicaciones está experimentando un constante aumento debido principalmente al auge en los dispositivos móviles inteligentes que incorporan un gran número de sensores inerciales y que van aumentando en función de las propias exigencias del mercado NEMS. Una de las múltiples aplicaciones de los MEMS es su uso como osciladores para substitución de referencias de reloj. Se espera que los resonadores RF MEMS sigan aumentando sus prestaciones siendo el reto más importante conseguir los requisitos de ruido de fase, de consumo de potencia y estabilidad en temperatura.

Se ha demostrado cómo la sensibilidad de los MEMS se incrementa a medida que aumenta su frecuencia de resonancia. La consecución de frecuencias elevadas implica directamente una drástica reducción de las dimensiones del MEMS. Como consecuencia directa el movimiento se ve reducido. Esta reducción del movimiento plantea inconvenientes. En particular, se dificulta la transducción del movimiento, forzando a implementar amplificadores con mayor ganancia. Además, el MEMS entra más fácilmente en zona de funcionamiento no lineal, puesto que se ve reducido su rango dinámico de movimiento. Este problema, aunque pueda parecer una desventaja para el MEMS-NEMS como sensor, explotado convenientemente el fenómeno de la no linealidad puede convertir el dispositivo NEMS no lineal en un sensor con más sensibilidad. Desde el punto de vista de referencia de reloj, el uso de MEMS trabajando en zona no lineal implica un ruido de fase en las cercanías de la frecuencia portadora.

El grupo de investigación ECAS ha sido pionero en el desarrollo de osciladores CMOS-MEMS. La presente tesis doctoral está encaminada al estudio de las opciones a la hora de implementar un oscilador CMOS-MEMS para lograr optimizar las prestaciones del sistema oscilador teniendo como único límite el propio resonador MEMS.

# Abstract

In recent years the market associated with MEMS / NEMS devices for communications, is experiencing a steady increase mainly due to the popularity of smart mobile devices that incorporate a large number of inertial sensors. One of the many applications of MEMS oscillators is focused on using them as a reference clock. In order for RF MEMS resonators to continue to improve their properties and increase their benefits the most important challenges to overcome remain: the phase noise requirements, power consumption and temperature stability.

It has been shown that the sensitivity of MEMS devices increases with an increase in resonant frequency. Attaining high frequencies directly implies a drastic reduction in the dimensions of the MEMS. As a direct consequence the movement is reduced. This reduction of movement implies some problems. In particular, the output signal of the transduced movement is reduced, forcing the implementation of higher gain amplifiers, which becomes a difficult task. In addition, the MEMS resonator enters more easily into a nonlinear domain, since the power handling is reduced with the dimensions. This nonlinear regime, although it may seem a disadvantage for the MEMS-NEMS as a sensor, can be conveniently exploited to convert the nonlinear NEMS device into a sensor with a bigger sensitivity. From the viewpoint of a clock reference, the use of MEMS in the nonlinear regime implies the deterioration of the phase noise near the carrier frequency, but an improvement far from the carrier frequency.

During the last decade, ECAS research group has pioneered the development of CMOS-MEMS oscillators. This thesis is focused in the study of the different implementation options for a CMOS-MEMS oscillator with the objective of optimizing its performance, until this performance is only limited by the MEMS resonator.

# Índice de contenidos

## Capítulo I: Introducción

1	Introducción general a los Resonadores MEMS.....	15
1.1	Métodos de actuación.....	15
1.2	Métodos de transducción.....	16
2	Perspectiva histórica de los resonadores MEMS.....	17
3	Estado actual del mercado de los MEMS.....	20
4	CMOS-MEMS.....	22
4.1	Estado del arte de los resonadores intra-CMOS MEMS.....	23
4.2	Estado del arte de los osciladores intra-CMOS MEMS.....	25
5	Contexto de la tesis.....	28
5.1	Motivación de la tesis: Presente de los osciladores MEMS.....	29
5.2	Objetivo de la tesis.....	32
6	Organización de la tesis.....	32
7	Referencias.....	33

## Capítulo II: Modelo dinámico

1	Introducción.....	41
2	Comportamiento dinámico.....	41
2.1	Modelo Masa-Muelle-Amortiguador.....	41
3	Actuación electrostática.....	44
3.1	Constante elástica de origen electrostático: <i>Spring softening</i> .....	49
3.2	Constante elástica total negativa: colapso de la estructura.....	50
4	Transducción capacitiva.....	51
4.1	Modelo RLC para el resonador MEMS.....	54

4.2	Modelo eléctrico para la corriente parasita .....	57
5	Modelo dinámico no lineal .....	59
5.1	Constante elástica no lineal.....	59
5.2	Efecto de la constante elástica no lineal .....	61
5.3	Procesos de mezcla de frecuencias derivados de la no linealidad ...	65
5.4	Efecto de un término de amortiguamiento no lineal .....	66
6	Referencias.....	68
<b>Capítulo III: Estabilidad del oscilador</b>		
1	Introducción.....	71
1.1	Parámetros de estabilidad para una señal sinusoidal .....	71
1.2	Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador	73
1.2.1	Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador en el dominio frecuencial: Densidad espectral de potencia .....	73
(a)	Ley de potencias del ruido de frecuencia y ruido de fase.....	74
(b)	Definición estándar del IEEE para el ruido de fase .....	76
1.2.2	Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador en el dominio temporal: Varianza Allan .....	77
2	Teoría del ruido de fase .....	81
3	Predicción del ruido de fase en amplificadores CMOS.....	84
3.1	Densidad espectral de ruido en un amplificador CMOS .....	85
4	Predicción del ruido de fase en resonadores MEMS.....	89
4.1	Ruido de fase generado intrínsecamente en el MEMS .....	89
4.2	Ruido de fase generado por las condiciones ambientales .....	95
4.3	Resonador MEMS no lineal .....	95
4.3.1	Fenómenos de mezclado de frecuencia: .....	96

4.3.2	Efecto A-f.....	98
5	Ruido de fase en un sistema oscilador.....	100
5.1	Modelo del oscilador para el MEMS lineal.....	101
5.2	Modelo no lineal del oscilador MEMS.....	104
6	Referencias.....	109

## Capítulo IV: Circuitería CMOS

1	Introducción.....	114
2	Sensado de corrientes.....	114
2.1	Sensado resistivo .....	115
2.2	Sensado capacitivo .....	118
2.3	Sensado mediante amplificadores de corriente .....	123
3	Amplificador diferencial: Ganancia regulable .....	124
3.1	Primera etapa: Par diferencial.....	126
3.2	Segunda etapa: Control de ganancia.....	129
3.3	Tercera etapa: .....	133
3.4	Amplificador completo .....	135
4	Amplificador diferencial simétrico.....	136
4.1	Implementación del sistema.....	138
4.2	Polarización del amplificador.....	139
4.3	Simulación.....	141
5	Amplificador Push-Pull.....	143
5.1	Implementación del sistema.....	145
6	Amplificador basado en un sistema seguidor.....	147
6.1	Implementación del sistema.....	149
7	Buffer inversor .....	152

7.1	Implementación del sistema.....	154
8	Conclusión.....	160
9	Referencias.....	161
<b>Capítulo V.I: Resonadores CMOS-MEMS: AMS 0.35<math>\mu</math>m</b>		
1	Introducción.....	163
2	Tecnología AMS 0.35 $\mu$ m.....	164
2.1	Estado del arte: CMOS-MEMS integrado en AMS 0.35 $\mu$ m.....	165
2.1.1	Resonadores de polisilicio.....	165
2.1.2	Resonadores de Metal.....	167
2.1.3	Dispositivos de tungsteno.....	168
2.1.4	Resonador de metal y tungsteno.....	169
2.2	Implementación del MEMS en la tecnología AMS 0.35 $\mu$ m.....	170
2.3	Post-proceso CMOS para liberar las estructuras MEMS.....	170
3	Dispositivos de tungsteno.....	171
3.1	Palanca de tungsteno.....	173
3.1.1	Diseño y layout.....	173
3.1.2	Fabricación.....	176
3.1.3	Caracterización.....	177
3.2	Puente de tungsteno.....	182
3.2.1	Diseño y layout.....	182
3.2.2	Fabricación.....	184
3.2.3	Caracterización.....	185
3.3	Palanca utilizando los niveles de MET y VIA.....	188
3.3.1	Diseño y layout.....	188
3.3.2	Fabricación.....	191



3.3.3	Caracterización.....	192
3.4	Palanca doble vía.....	196
3.4.1	Diseño y layout.....	196
3.4.2	Fabricación.....	199
3.4.3	Caracterización.....	199
3.5	Resonador Torsional.....	203
3.5.1	Diseño y layout.....	204
3.5.2	Fabricación.....	206
3.5.3	Caracterización.....	208
4	Conclusiones.....	213
5	Referencias.....	215

## **Capítulo V.II: Resonadores CMOS-MEMS: SilTerra 0.18 $\mu$ m**

1	Introducción.....	217
2	Dispositivos de aleación bimetálica de AlNi.....	217
3	Resonador en configuración puente.....	218
3.1	Caracterización del modo vertical.....	220
3.2	Caracterización del modo torsional.....	230
4	Resonador en configuración tuning fork.....	233
4.1	Dependencia térmica: Resonador lineal.....	235
4.2	Dependencia térmica: Resonador no lineal.....	236
4.3	Compensación de la dependencia en temperatura.....	237
5	Referencias.....	239

## **Capítulo VI: Osciladores CMOS-MEMS**

1	Introducción.....	241
2	Introducción al funcionamiento del sistema oscilador.....	241

3	Osciladores MEMS: Tecnología AMS 0.35 $\mu\text{m}$ .....	242
3.1	Palanca de tungsteno .....	243
3.2	Puente de tungsteno.....	246
3.3	Amplificador integrado con ganancia regulable.....	248
3.4	Oscilador con control de amplitud.....	252
3.5	Introducción de ruido en el oscilador a través de la polarización del MEMS	257
3.5.1	Perturbación del sistema mediante ruido blanco.....	258
3.5.2	Perturbación del sistema mediante un tono puro.....	260
4	Osciladores SilTerra 0.18 $\mu\text{m}$ .....	262
4.1	Análisis de la no linealidad del resonador .....	263
4.2	Análisis de la no linealidad del amplificador .....	264
4.3	Análisis del sistema oscilador .....	265
4.4	Funcionamiento del sistema oscilador.....	266
5	Conclusiones .....	270
6	Referencias.....	272
 <b>Capítulo VII: Conclusiones de la tesis</b>		
1	Contribuciones.....	273
2	Línea futura.....	274
2.1	Circuitería CMOS .....	274
2.2	Resonadores CMOS-MEMS: AMS 0.35 $\mu\text{m}$ .....	276
2.3	Resonadores CMOS-MEMS: SilTerra 0.18 $\mu\text{m}$ .....	279
2.4	Eliminación del efecto A-f en el oscilador no lineal.....	280
2.5	Damping no lineal.....	280
2.6	Compensación térmica.....	280

2.7	Osciladores CMOS-MEMS .....	281
3	Publicaciones durante la tesis doctoral.....	281
3.1	Congresos.....	281
3.2	Artículos en revistas.....	282

**Anexo I: Material de laboratorio**

**Anexo II: Listado de runes**

# Capítulo I: Introducción a la tesis

## 1 Introducción general a los Resonadores MEMS

Un resonador MEMS es un dispositivo electromecánico, de al menos una dimensión micrométrica en su geometría, diseñado para tener una frecuencia de resonancia propia adaptada a una aplicación concreta. Estas frecuencias pueden ir desde los kHz hasta los GHz y tratan de competir con los resonadores más utilizados hasta la fecha: los cristales de cuarzo piezoeléctricos, las cerámicas piezoeléctricas y los circuitos electrónicos resonantes.

Al igual que los cristales de cuarzo, los resonadores MEMS, necesitan ser excitados y transducidos. A continuación se enumeran algunas de las técnicas más frecuentes para realizar ambos procesos.

### 1.1 Métodos de actuación

Los resonadores MEMS se basan en la resonancia mecánica, ya sea una resonancia al generar una deformación torsional, flexural o *bulk* (movimiento de la red atómica). Sin embargo, esta resonancia mecánica ha de ser excitada mediante una fuerza de actuación externa. Esta fuerza puede ser generada de múltiples formas. A continuación se enumeran las dos más comunes y más relevantes para la presente tesis.

#### - Actuación electrostática:

Este método de actuación apareció por primera vez descrito en [1], y tiene la ventaja de ser adaptable a resonadores de distintas geometrías y modos de resonancia. Se basa en crear un efecto capacitivo entre la estructura resonante y un electrodo de actuación. Al aplicar una diferencia de potencial AC entre el electrodo y la estructura se genera una fuerza electrostática atractiva que, al estar fijado el electrodo de actuación, produce el desplazamiento de la estructura resonante. Esta actuación es válida tanto estática como dinámica, ya que puede producir el desplazamiento estático de la estructura a una nueva posición de equilibrio o producir el movimiento periódico de la estructura alrededor de un punto de equilibrio con una amplitud y frecuencia determinada.

- **Actuación piezoeléctrica**

El término piezoeléctrico implica la generación de un campo eléctrico a partir de la aplicación de presión sobre una estructura, y a la inversa. En este caso, generando un campo eléctrico entre los extremos de la estructura piezoeléctrica se produce un desplazamiento de la misma debido a las tensiones internas generadas. Esta actuación replica la utilizada en los cristales de cuarzo.

## 1.2 Métodos de transducción

Al igual que son necesarias las técnicas de actuación del resonador, también son importantes las técnicas para transducir su movimiento, generando una señal externa de su misma frecuencia y una amplitud proporcional a la amplitud de desplazamiento del resonador. A continuación se enumeran tres de estas técnicas.

- **Transducción capacitiva:**

Al igual que en el caso de la actuación electrostática, la transducción capacitiva se basa en incluir un electrodo que genere un efecto capacitivo respecto a la estructura resonante. Cuando se fija una diferencia de voltaje eléctrico entre la estructura y el electrodo (entre los extremos de la capacidad generada), el movimiento de la estructura produce una variación en el valor de esta capacidad. Dado que el producto de la capacidad y el voltaje a sus extremos es igual a la carga acumulada, una variación en la capacidad o el voltaje aplicado produce una carga o descarga de la capacidad, con el objetivo de reajustar la carga acumulada en la capacidad, en forma de corriente. Esta corriente se denomina corriente mocional y da información de la frecuencia y amplitud de movimiento de la estructura.

- **Transducción piezoeléctrica**

Como se ha descrito en la actuación piezoeléctrica, una variación en las tensiones internas de una estructura produce un campo eléctrico en su interior que da lugar a una diferencia de potencial entre sus extremos. Se ha de añadir que este campo eléctrico sólo existe hasta que se redistribuyen las cargas eléctricas dentro del material. Por lo tanto, el sensado piezoeléctrico sólo es válido para sensar desplazamientos dinámicos, y no tanto estáticos.

- **Transducción piezorresistiva:**

La piezorresistividad, descubierta en 1856 por Lord Kelvin, hizo aparición en los dispositivos semiconductores desde un primer momento [2]. Este fenómeno se basa en que la resistencia entre los extremos de una estructura varía en función de las tensiones internas de la misma. Es por esto que una deformación en un medio piezorresistivo puede ser observada a través de la variación de la resistencia eléctrica del mismo.

El concepto teórico de los resonadores MEMS no es complejo, pero sin embargo, el lograr resonadores MEMS de alta frecuencia y factor de calidad ha supuesto un desafío prolongado durante décadas. A continuación, se va a mostrar una breve perspectiva histórica de los resonadores MEMS. Se debe matizar que esta perspectiva se orienta hacia la frecuencia de operación de los resonadores y su factor de calidad, ya que son los parámetros de operación más determinantes de un resonador, siendo el producto frecuencia factor de calidad una de las principales figuras de mérito. No cabe duda de que la evolución de la tecnología MEMS mediante la que se implementan los resonadores es un factor histórico determinante y clave para la comercialización de los dispositivos, sin embargo, este tema se analizará más adelante en este mismo capítulo.

## 2 Perspectiva histórica de los resonadores MEMS

En el año 1967 se publicó el primer resonador MEMS, un transistor de puerta resonante [3]. Este primer dispositivo tenía una frecuencia de resonancia de 5kHz y un factor de calidad de 500. Desde este momento comenzaron a aparecer artículos con distintas versiones y aplicaciones de estructuras resonantes MEMS.

Uno de los primeros y más relevantes resonadores en aparecer fue la estructura *comb-drive* con forma de peines interdigitados entre sí. Esta estructura fue desarrollada en la universidad Berkeley, California [4] en el año 1989. La frecuencia de resonancia de la estructura es cercana a los 50kHz y factor de calidad de 100. La geometría de esta estructura sigue siendo utilizada en la actualidad, tanto en osciladores MEMS como en sensores inerciales MEMS entre otras aplicaciones.

Esta misma estructura fue presentada años después en 1998, también implementada en silicio policristalino [5], con una frecuencia de resonancia de 17kHz y un extraordinario factor de calidad de 50000 al ser operado en condiciones de vacío, que se veía reducido a 50 al operarse en condiciones ambientales.

La estructura *comb-drive* mostraba unas excelentes propiedades, sin embargo, al tratarse de resonadores de alta masa, la frecuencia de resonancia quedaba muy limitada. Como solución para lograr frecuencias de resonancia superiores se comenzó a trabajar con estructuras tipo viga. Estas vigas presentaban unas pérdidas debidas al anclado de la viga, lo que hacía difícil mantener factores de calidad superiores a 1000. El problema fue solucionado cuando se presentó en 1999 un resonador tipo viga *free-free* en el que se minimizaban las pérdidas por anclajes [6], logrando un factor de calidad de 8500 a una frecuencia de resonancia comprendida entre 30MHz y 90MHz.

En el año 2001 aparece una demostración de un oscilador MEMS utilizando un resonador tipo viga de polisilicio [7], y en este trabajo se empieza a plantear la importancia de un tercer factor de igual importancia que el factor de calidad o la frecuencia de resonancia, la impedancia mecánica del resonador MEMS. En este trabajo el resonador operaba a una frecuencia de 10MHz, con un factor de calidad de 3600 y una impedancia mecánica de 17.5k $\Omega$ .

Con la aparición de los primeros osciladores MEMS comenzaron a surgir estudios que estudiaban el efecto del factor de calidad y del *power-handling* (máxima potencia que se puede invertir en el movimiento del resonador antes de alcanzar el régimen no lineal del mismo) del resonador MEMS sobre el funcionamiento del sistema oscilador como el artículo [8] del año 2004. En este artículo se compara el funcionamiento de dos estructuras resonantes distintas, una tipo puente y una tipo disco. En el ruido de fase de ambos osciladores se encuentra el efecto de la no linealidad de los resonadores sobre el ruido de fase del sistema. Aunque no se logran alcanzar las especificaciones del protocolo GSM para el ruido de fase de un oscilador este artículo abría las puertas a la posibilidad de cumplirlas forzando al resonador MEMS a operar en el régimen lineal.

Mientras tanto en 2003 se publicaba el primer resonador MEMS cuya frecuencia de resonancia superaba el GHz [9], concretamente operando a 1.14 GHz con un factor de calidad superior a 1500. La peculiaridad de este resonador era no sólo su alto factor de calidad en vacío, sino su elevado factor de calidad en condiciones ambientales, ya que en este mismo artículo aparece un resonador tipo anillo de factores de calidad 7330 y 6100 en vacío y aire respectivamente con una frecuencia de resonancia de 733MHz. Siguiendo esta tendencia, en 2004 aparece un resonador de estructura tipo anillo con una frecuencia de oscilación de 1GHz y un factor de calidad de 10000 [10], sin embargo también destacaba por su alta impedancia mecánica, de 282 K $\Omega$ , 12 veces superior a la que mostraba el resonador del trabajo [9].

El problema de los resonadores de alta frecuencia eran sus reducidas dimensiones, que quedaban asociadas a un bajo *power-handling*. Es por esto que el trabajo [11] presentado en el año 2005 supuso un gran avance al desarrollar un resonador tipo disco de dimensiones mayores que las utilizadas en trabajos

anteriores, incrementando el *power-handling* y manteniendo una frecuencia de resonancia de 433MHz y un factor de calidad superior a 4000. En este caso se obtenía finalmente un resonador MEMS totalmente apto para entrar a competir en el mercado de frecuencias UHF.

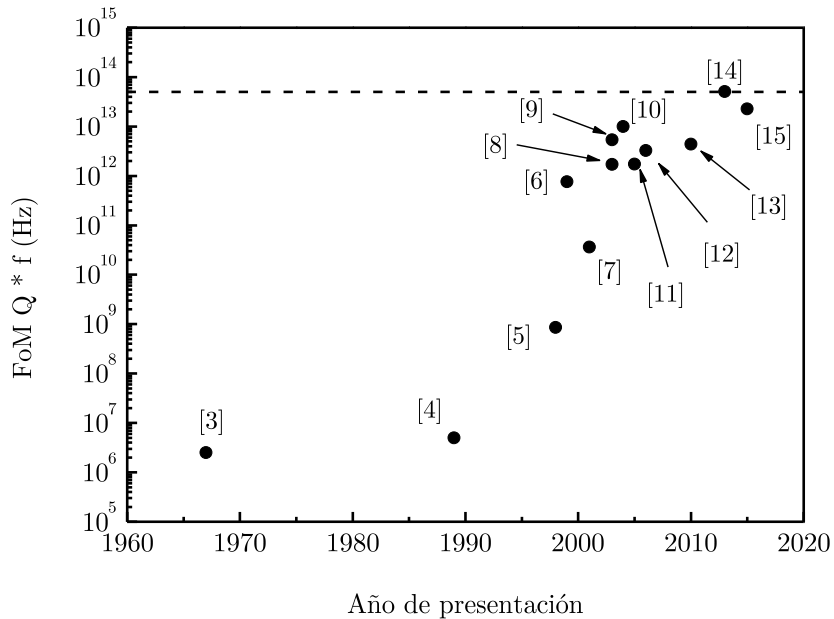
Regresando a las frecuencias de decenas de MHz, en el trabajo [12] del año 2006 se mostró un resonador implementado en metal (níquel) basado en una estructura disco cuyo factor de calidad era de 54500 a una frecuencia de resonancia de 60MHz. Así como se presentó el resonador también se mostró un detallado análisis que permitía diseñar resonadores de este tipo maximizando el factor de calidad.

Más tarde, en el año 2010 se presentó un resonador torsional basado en una estructura tipo puente triangular de silicio [13], con una frecuencia de resonancia de 20MHz y un factor de calidad de 220000 y una impedancia mecánica de 12k $\Omega$ . En el año 2013, un artículo que comparaba distintos productos  $Q \cdot f$  en resonadores tipo anillo mostraba un dispositivo cuya frecuencia de operación era de 9.82GHz, y operado en aire alcanzaba un factor de calidad de 5200 [14]. En el año 2015 se publica un resonador que trabajando a una frecuencia cercana a 7MHz mostraba un factor de calidad de 3.24 millones en condiciones de vacío [15] integrado en el nuevo proceso de integración MEMS de la empresa Teledyne DALSA Semiconductor Inc.

Mientras todo esto ocurría a nivel académico, en 2003 la empresa Discera sacaba al mercado el primer oscilador MEMS (MRO-100). Un oscilador de 19.2MHz para aplicaciones inalámbricas. Al mismo tiempo, en el año 2004 nació SiTime con el objetivo de fabricar osciladores MEMS, sacando al mercado el oscilador programable SiT8002 y los osciladores de referencia fija SiT1. Un ejemplo de empresas dedicadas a resonadores MEMS, y no únicamente a diseñar un oscilador como producto final es Panasonic, que en el año 2010 presentó un resonador de 20MHz y factor de calidad de 220000, el mayor ofrecido por la industria hasta el momento. En el año 2012, la compañía IDT presentó el primer par de osciladores MEMS piezoeléctricos (LVPECL y LVDS). Estos osciladores tienen una frecuencia de operación de 156.25MHz y 212.5MHz.

En la figura 1 se presenta a modo de resumen la figura de mérito (FoM) basada en el producto de la frecuencia de resonancia y el factor de calidad de cada resonador MEMS representada frente al año de publicación del resonador. Como se puede observar, el producto  $Q \cdot f$  en los resonadores MEMS tiende a un límite de  $5 \cdot 10^{13}$ . En el artículo [16] Van Beek analiza este límite, comparándolo con el límite que se da en los resonadores basados en cristales de cuarzo [17] y mostrando que ambos, cristales de cuarzo y resonadores MEMS utilizando como material estructural el silicio pueden llegar a operar en igualdad de condiciones en término de producto  $Q \cdot f$ .





**Figura 1.** Figura de mérito para los resonadores MEMS basada en el producto de la frecuencia de resonancia y el factor de calidad. Se representa frente al año en el que cada resonador fue presentado.

### 3 Estado actual del mercado de los MEMS

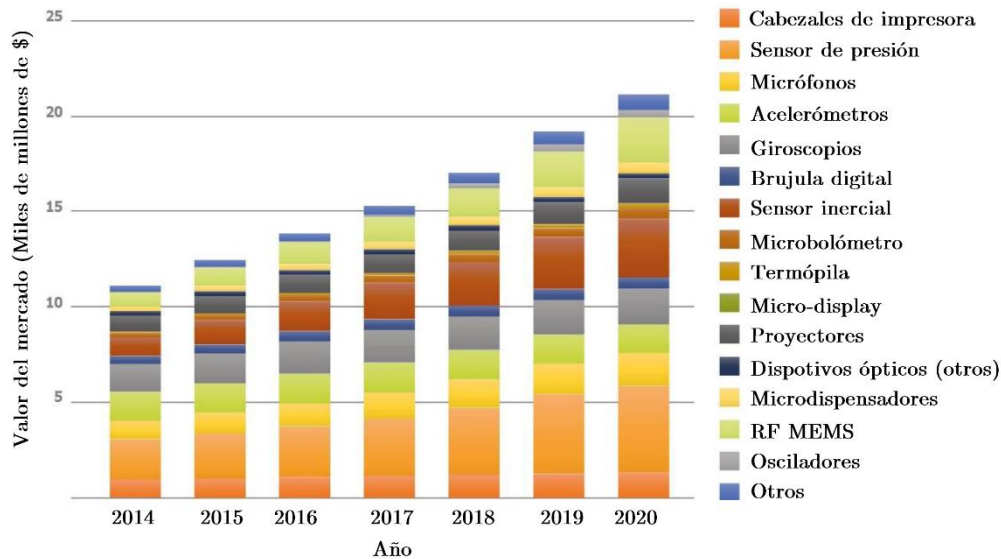
A comienzos del Siglo XXI se conocía las bondades de los sistemas MEMS para la industria de los osciladores, donde ya se predecía que los MEMS llegarían a desbancar a los osciladores basados en cristales de cuarzo y los osciladores eléctricos. Sin embargo, quedaban pendientes problemas a solucionar antes de que estos sistemas pudiesen ser competitivos en el mercado tales como:

Lograr topologías para los resonadores MEMS que permitan trabajar en el rango de frecuencias UHF con un factor de calidad suficientemente elevado. Crear estructuras que logren reducir las dimensiones de los resonadores MEMS manteniendo o incrementando el valor del *power-handling*. Diseñar resonadores MEMS de reducida impedancia mecánica. Obtener resonadores MEMS y sistemas integrados que incrementen la estabilidad térmica del dispositivo.

Conseguir reducir los costes de fabricación por dispositivo, mejorando la tecnología y abriéndose paso a un mercado basado en la venta de millones de copias de un mismo dispositivo.

A lo largo de los años se han publicado informes en los que se mostraba cómo los sistemas MEMS, y en concreto los osciladores cumplían simultáneamente todos los requisitos que la industria exigía, entre ellos [16] y [18]. En la actualidad, los

sistemas MEMS han conseguido dominar sobre un sector del mercado valorado en 22B\$ para el año 2016, y que se ha visto incrementada linealmente desde el año 2014, como se muestra en la figura 2.



**Figura 2.** Estimación del valor del sector del mercado dominado por los sistemas MEMS para cada año comprendido entre 2014 y 2020. La gráfica ha sido traducida de [www.yole.fr](http://www.yole.fr).

Los sistemas MEMS, en su mayoría, combinan el sistema electro-mecánico con una interfaz formada por circuitos integrados. Debido a esto, una gran parte del éxito de la competitividad de los sistemas MEMS en el mercado ha sido que, además de cumplir los requisitos técnicos exigidos, su coste de fabricación se ha visto reducido gracias a los esfuerzos de la industria por obtener sistemas integrados MEMS-ICs. Los métodos más recientes hasta la actualidad para la integración de MEMS e ICs quedan recopilados y analizados en los trabajos [19-20]. Cabe destacar que uno de los mayores éxitos ha sido el lograr compatibilizar los sistemas MEMS con la tecnología CMOS, consiguiendo integrar el sistema completo sobre un mismo sustrato de oblea. La evolución hasta la actualidad de la tecnología CMOS-MEMS puede consultarse en [21]. Una descripción más detallada de los sistemas relacionados con los resonadores y osciladores CMOS-MEMS se da en el artículo [22].

Dado que en la presente tesis se utilizará únicamente tecnología CMOS-MEMS, cuyo coste de fabricación es compatible con los requisitos del mercado, esta tesis está conducida hacia la utilización de esta tecnología para la implementación de resonadores y sistemas osciladores.

## 4 CMOS-MEMS

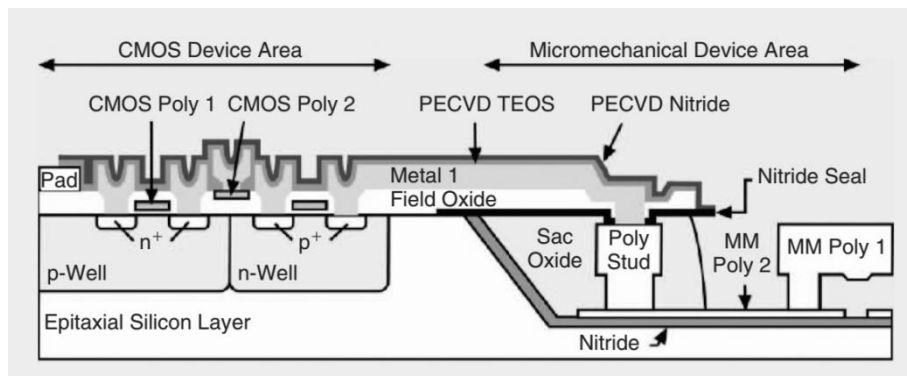
Como se ha mencionado anteriormente, el concepto de CMOS-MEMS surge ante la necesidad de implementar los dispositivos MEMS junto a ICs sobre un mismo sustrato de oblea. Sin embargo, la construcción del sistema puede darse de varias formas, como las que se enumeran a continuación.

- **Dispositivo MEMS pre-CMOS:** En esta construcción el dispositivo MEMS se fabrica sobre un hoyo situado en el sustrato de la oblea. Tras su fabricación, el resonador se entierra en óxido sacrificial y la oblea se planariza, construyendo sobre esta las distintas capas de la tecnología convencional CMOS conectando las capas CMOS y la estructura MEMS mediante polisilicio. Una vez construidos los niveles CMOS estos se protegen para realizar el proceso de liberado del resonador mediante un grabado húmedo con HF. Este proceso queda totalmente descrito en detalle en el artículo [23].

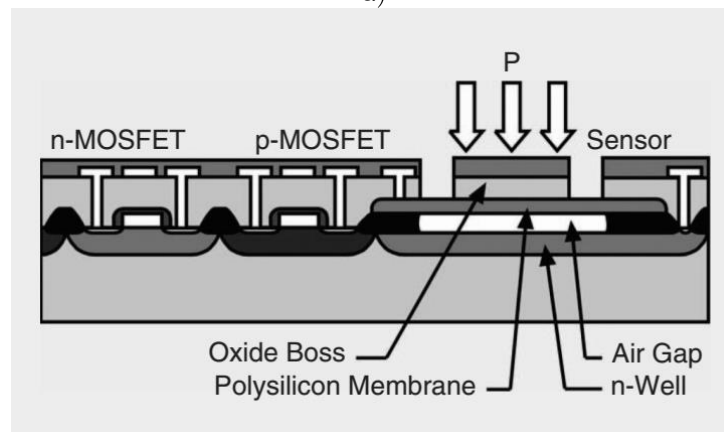
- **Dispositivo MEMS intra-CMOS:** En esta construcción el dispositivo MEMS se diseña sobre las capas correspondientes a la tecnología CMOS, compartiendo el MEMS y el IC las mismas capas y materiales. Este método de integración CMOS-MEMS se comenzó a utilizar comercialmente en el año 1990 por la compañía Analog Devices Inc. El objetivo era integrar sensores como acelerómetros y giroscopios junto a ICs. Más tarde, otra empresa que se unió a esta construcción intra-CMOS fue la empresa Infineon para la fabricación de sensores relacionados con la automoción.

- **Dispositivo MEMS post-CMOS:** Debido a las limitaciones en el tamaño del dispositivo MEMS (pre-CMOS) y los materiales disponibles (intra-CMOS) se desarrolló una última posibilidad tecnológica. Esta se basaba en construir el sistema CMOS completamente para posteriormente construir el sistema MEMS sobre la superficie de la oblea. Esta integración ya fue demostrada en el año 1979 [24], y en la actualidad hay empresas dedicadas a la integración de CMOS-MEMS bajo este esquema como las empresas Texas Instruments [25], SilTerra [26] o el Sandia National Laboratory [27] entre otros.

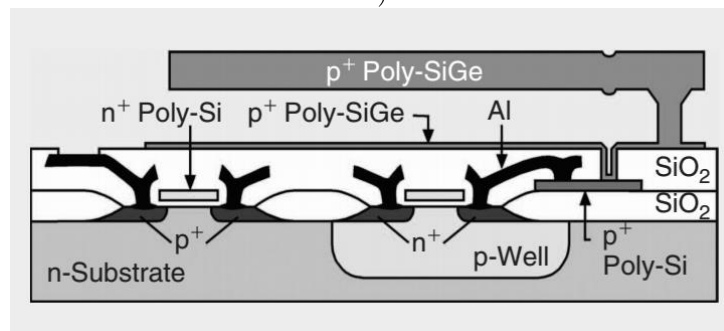
En la figura 3 se muestra las imágenes correspondientes a cada una de las cuatro tecnologías descritas.



a)



b)



c)

**Figura 3.** Sección vertical de: a) Sistema pre-CMOS MEMS (Sandia National Labs), b) Sistema intra-CMOS MEMS (Infineon), c) Sistema post-CMOS aditivo. Las imágenes han sido extraídas del trabajo de Raafat R. Mansour [65]

#### 4.1 Estado del arte de los resonadores intra-CMOS MEMS

El grupo de investigación ECAS de la UAB ha estado focalizado durante años en la tecnología intra-CMOS (post-grabado del resonador). Durante este tiempo se

han construido resonadores en prácticamente todos los niveles compatibles con la tecnología CMOS, desde el polisilicio [28-29], el aluminio de los niveles de metal [30-31] y el tungsteno de las vías [32], siendo el tungsteno el último material añadido a la lista. Por otra parte, en 2013 se comenzó a trabajar con la tecnología SilTerra, una tecnología post-CMOS aditiva (dispositivo MEMS sobre CMOS).

A continuación se muestran dos tablas (Tabla I y II) con los resonadores CMOS-MEMS más recientes desarrollados en el ámbito de la investigación académica por distintos grupos de investigación en las que se comparan los materiales, frecuencias, factores de calidad, métodos de actuación y detección de distintos sistemas resonadores post-CMOS MEMS.

Resonador (substracción)	Frecuencia (MHz)	Q	Producto f x Q	Actuación/ Detección	Material del resonador
NTHU 2013	1.17	2405	$2.81 \cdot 10^9$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
NTHU+CW 2013	5	15000	$7.50 \cdot 10^{10}$	Capacitiva / Piezorresistiva	SiO <sub>2</sub> + Al + Poli
NTHU 2012	5	2324	$1.16 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
Leti 2012	6	1300	$7.80 \cdot 10^{10}$	Electrostática	Si Cristalino
UAB 2007	6.25	1000	$6.25 \cdot 10^9$	Electrostática	Al
NTHU 2013	7.99	6100	$4.87 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
CMU 2007	8.04	3589	$2.89 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
NTHU 2013	8.064	4205	$3.39 \cdot 10^{10}$	Capacitiva / Piezorresistiva	SiO <sub>2</sub> + Al + Poli
NTHU 2013	9.4	1074	$1.01 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al + Poli
NTHU 2012	10.4	4805	$5.00 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
<b>UAB 2009</b>	<b>14</b>	<b>1000</b>	<b><math>1.40 \cdot 10^{10}</math></b>	<b>Electrostática</b>	<b>Al</b>
NTHU 2011	14.5	1590	$2.31 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
CMU 2005	17.63	1400	$2.47 \cdot 10^{10}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
<b>UAB 2009</b>	<b>22</b>	<b>4400</b>	<b><math>9.68 \cdot 10^{10}</math></b>	<b>Electrostática</b>	<b>P2 + Polisilicio</b>
<b>UAB 2009</b>	<b>24</b>	<b>812</b>	<b><math>1.95 \cdot 10^{10}</math></b>	<b>Electrostática</b>	<b>Al</b>
NCHU 2007	39.5	806	$3.18 \cdot 10^{10}$	Electrostática	Al
NTHU 2012	47.9	11271	$5.40 \cdot 10^{11}$	Electrostática	SiO <sub>2</sub> + Al
NRL + CU 2013	51	1020	$5.20 \cdot 10^{10}$	Electrostática	P2 + Polisilicio
<b>UAB 2007</b>	<b>193</b>	<b>1000</b>	<b><math>1.93 \cdot 10^{11}</math></b>	<b>Electrostática</b>	<b>P2 + Polisilicio</b>

**Tabla I.** Resonadores CMOS-MEMS basados en la substracción de material para liberar el resonador. Tabla extraída de [22].

Resonador (adición)	Frecuencia (MHz)	Q	Producto f x Q	Actuación/ Detección	Material del resonador
[33] Berkeley 2008	10.9	1000	$1.1 \cdot 10^{10}$	Electrostático	Niquel
[34] UAB 2015	11.5	1200	$1.38 \cdot 10^{10}$	Electrostática	Nitruro bimetálico

[35] UC-B y UM 2008	11.65	1.651	$1.92 \cdot 10^7$	Electrostática	Nickel
[33] Berkeley 2008	10.9	1000	$1.1 \cdot 10^{10}$	Electrostático	Niquel
[36] S. N. L. 2009	101.7	1257	$12.8 \cdot 10^{10}$	Piezoeléctrico	AlN
[37] SNL 2009	101.71	1257	$1.28 \cdot 10^{11}$	Electrostática	AlN
[38] C. U. 2010	$2.18 \cdot 10^3$	129	$2.81 \cdot 10^{11}$	Piezoeléctrico	ZnO - W

**Tabla II.** Resonadores CMOS MEMS basados en la adición de material para fabricar el resonador sobre la última capa CMOS.

## 4.2 Estado del arte de los osciladores intra-CMOS MEMS

A la par que se han desarrollado los resonadores CMOS-MEMS también se han utilizado estos mismos para obtener sistemas osciladores. El sistema oscilador MEMS más sencillo está compuesto por el resonador MEMS y un amplificador que compense las pérdidas del resonador y realimente al resonador con una fase total de  $0^\circ$ . De esta manera la resistencia mocional del resonador (corriente generada a la salida del resonador dividida por el voltaje de excitación a la entrada del resonador) será igual a la transimpedancia del amplificador. A la hora de comparar el funcionamiento de dos sistemas osciladores MEMS se suele utilizar una figura de mérito que valora la calidad del amplificador basado en la frecuencia de resonancia, la dificultad de trabajar con una resistencia mocional elevada y la minimización del ruido de fase. Esta figura de mérito se define en (1).

$$FoM = \frac{k_B T}{L(f)} R_m^2 f_0^2 \quad (1)$$

Donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura,  $R_m$  la resistencia mocional del resonador,  $f_0$  la frecuencia de operación del oscilador, y  $L(f)$  el valor de ruido de fase a una frecuencia relativa  $f$  respecto a  $f_0$ .

A continuación se muestran dos tablas (Tablas III y IV) con los osciladores CMOS-MEMS más recientes desarrollados en el ámbito de la investigación académica por distintos grupos de investigación en las que se comparan los materiales, frecuencias, factores de calidad, métodos de actuación y detección de distintos sistemas resonadores post-CMOS MEMS.

Resonador (substracción)	Frecuencia (MHz)	Resistencia mocional ( $M\Omega$ )	L(f) 1kHz /1MHz	FoM	Material del resonador
[39] NTHU 2013	1.2	0.42	-103/-110	$1.052 \cdot 10^{14} / 1.052 \cdot 10^{15}$	SiO <sub>2</sub> + Al
[40] NTHU 2015	1.23	1.7	-120/-122	$1.811 \cdot 10^{15} / 2.870 \cdot 10^{16}$	SiO <sub>2</sub> + Al
[41] NTHU 2015	4.28	$5.6 \cdot 10^{-3}$	-93/-117	$4.747 \cdot 10^9 / 1.192 \cdot 10^{12}$	SiO <sub>2</sub> + Al

[42] UAB 2013	11	8	-100/-100	$3.2 \cdot 10^{17}/3.2 \cdot 10^{17}$	Polisilicio
[43] UAB 2009	11.4	2	-100/-107	$1.079 \cdot 10^{17} / 3.412 \cdot 10^{18}$	Polisilicio
[44] UAB 2013	25.6	5	x / -110	x / $1.354 \cdot 10^{18}$	Polisilicio

**Tabla III.** Osciladores basados en resonadores intra-CMOS MEMS obtenidos mediante la substracción de material para liberar el resonador.

Resonador (adición)	Frecuencia (MHz)	Resistencia mocional ( $k\Omega$ )	L(f) 1kHz /1MHz	FoM	Material del resonador
[33] Berkeley 2008	10.9	5.8	-80/-95	$1.65 \cdot 10^9 / 5.23 \cdot 10^{10}$	Niquel
[34] UAB 2015	11.5	3.5	x / -120	x / $6.71 \cdot 10^{12}$	Nitruro bimetátilo
[35] UC-B y UM 2008	11.65	22	-80 / -95	$2.72 \cdot 10^{10}/8.60 \cdot 10^{11}$	Nickel
[45] IMEC 2011	48	x	-130 / -130	-	SiGe
[36] S. N. L. 2009	101.7	$1.138 \cdot 10^3$	-90/-110	-	AlN
[37] SNL 2009	101.71	1.14	-91 / x	-	AlN
[38] C. U. 2010	$2.18 \cdot 10^3$	-	-68/-105	-	ZnO - W

**Tabla IV.** Osciladores basados en resonadores post-CMOS MEMS.

Para obtener la calidad global del sistema oscilador MEMS se utilizan dos figuras de mérito [1] mostradas en (2).

$$\begin{aligned}
FoM_1 &= 10 \log[L(f = 1kHz)] - 20 \log \left[ \frac{f_0(MHz)}{10MHz} \right] \\
FoM_2 &= 10 \log[L(f = 1kHz)] - 20 \log \left[ \frac{f_0(MHz)}{10MHz} \right] + 10 \log \left[ \frac{P(mW)}{1mW} \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

Ambas figuras de mérito se valora el valor del ruido de fase a una frecuencia relativa f de 1kHz. Mediante el segundo término se normaliza el ruido de fase respecto a un oscilador que opera a una frecuencia  $f_0$  de 10MHz. En la segunda figura de mérito se tiene en cuenta este ruido de fase normalizado, y además se añade como factor positivo el consumo de potencia del sistema oscilador, valorando la minimización del consumo. En la figura 4 se muestran dos gráficas en las que se representan ambas figuras de mérito para osciladores basados tanto en resonadores LC, resonadores de cuarzo, MEMS capacitivos y MEMS piezoeléctricos. Ambas gráficas han sido extraídas del artículo [16].

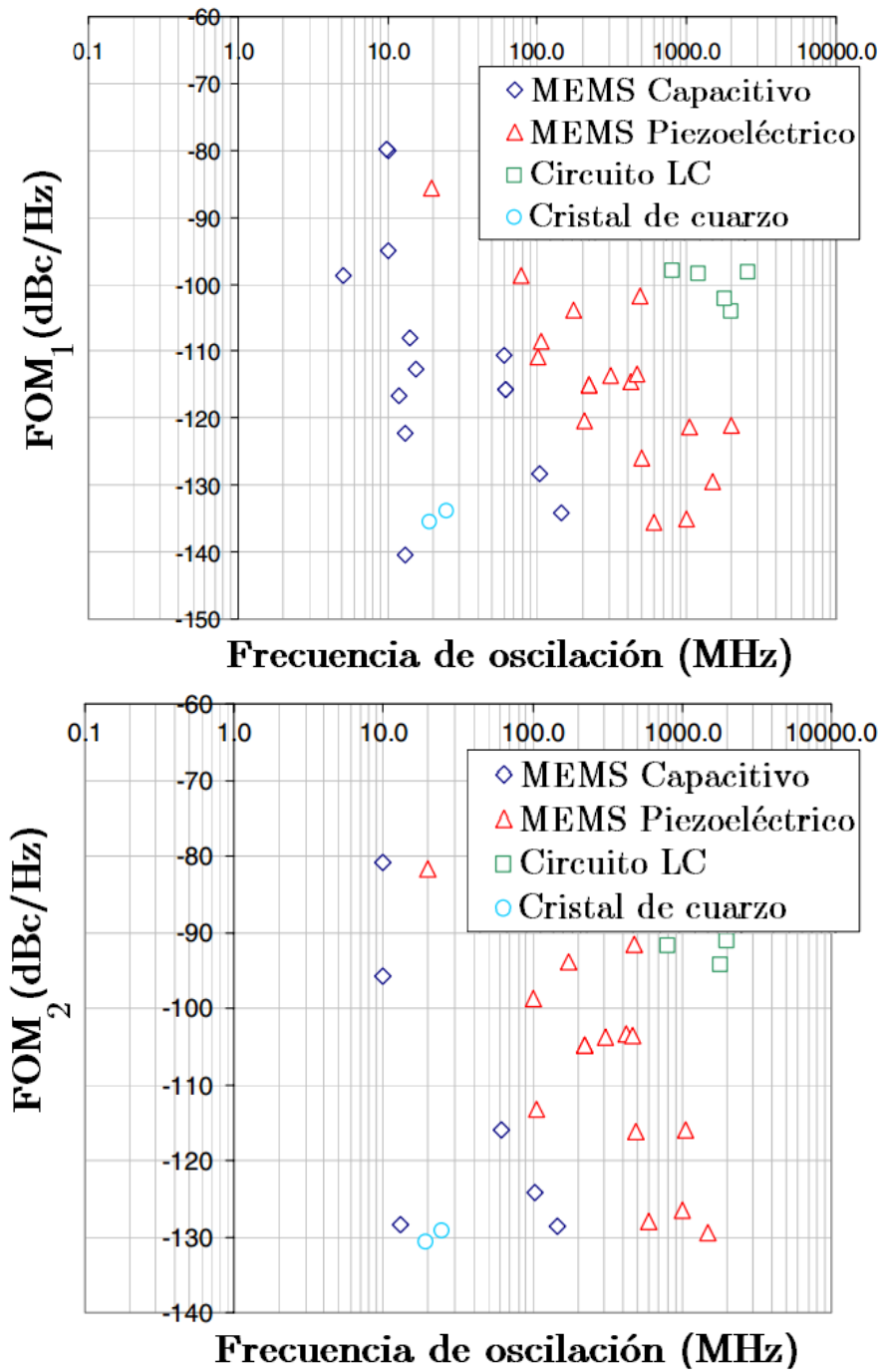
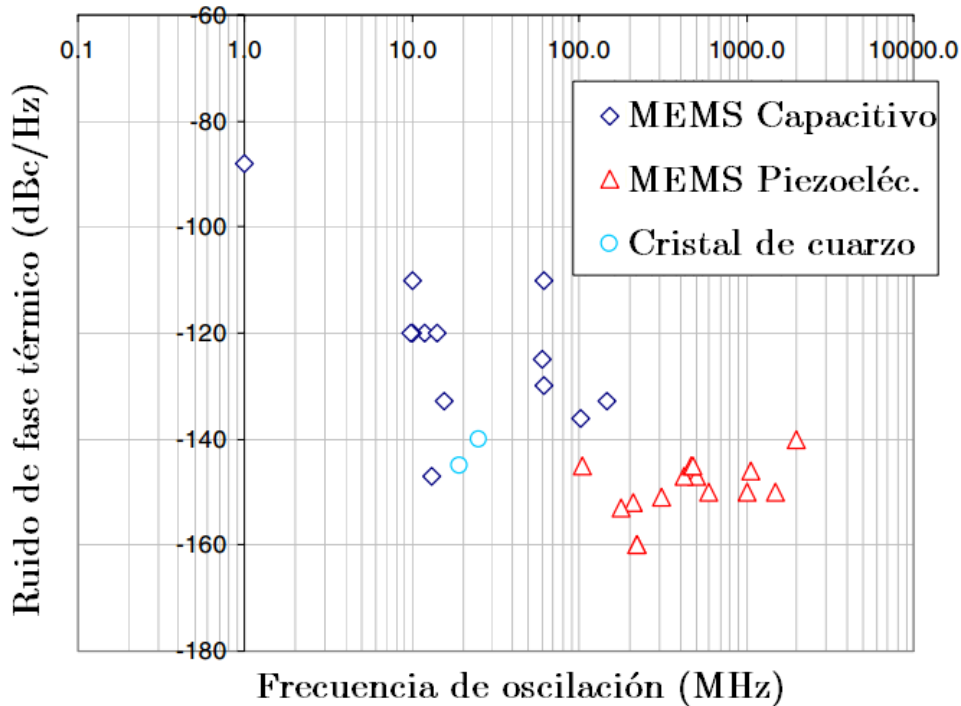


Figura 4. Representación de las figuras de mérito FoM<sub>1</sub> y FoM<sub>2</sub> para los principales sistemas osciladores actuales.

Por último, una variable generalmente invariante respecto a la normalización del ruido de fase es el ruido térmico que tiene lugar a frecuencias lejanas a la



frecuencia de oscilación,  $f > 1\text{MHz}$ . Esta componente de ruido se muestra en la figura 5, extraída nuevamente del artículo [16].



**Figura 5.** Valores de ruido térmico en osciladores de cuarzo, MEMS capacitivos y MEMS piezoeléctricos.

Como se puede apreciar en las figuras 4 y 5, el intervalo de aplicación en el que son competitivos los osciladores basados en resonadores capacitivos es el rango de frecuencias comprendido entre 1 y 100MHz, mientras que para frecuencias superiores los resonadores más válidos son los piezoeléctricos. Esto se debe a que los resonadores capacitivos muestran por una parte factores de calidad elevados ( $Q$  50000 hasta valores superiores a 1000000) en comparación con los resonadores piezoeléctricos ( $Q$  de 1000 a 10000), lo que compensa la diferencia de frecuencias en la  $FoM_2$  y  $FoM_2$ . Por otra parte, la resistencia mecánica en resonadores capacitivos ( $R_m$  de 10k a 10M $\Omega$ ) es más elevada que en los resonadores piezoeléctricos (50 a 500 $\Omega$ ), lo que justifica que el ruido de fase térmico sea menor en los osciladores piezoeléctricos que en los capacitivos.

## 5 Contexto de la tesis

La presente tesis se ha desarrollado a través de los proyectos de investigación centrados en los sistemas CMOS-MEMS:

- **NEMESYS: NEMS/MEMS in submicrometric CMOS technologies for RF systems and novel applications.** TEC2009-9008. Programa MINECO&FEDER.
- **MEMS oscillator with standard CMOS technology: SilTerra-Malaysia (2013-2014).**
- **NEMS-in-CMOS: Dispositivos nanoelectromecánicos (NEMS) integrados en CMOS: explotación de las propiedades no lineales de los resonadores NEMS en aplicaciones lógicas y sensoras.** TEC2012-32677. Programa MINECO&FEDER.

## 5.1 Motivación de la tesis: Presente de los osciladores MEMS

Los cristales de cuarzo, han sido uno de los elementos imprescindibles en el campo de la radiofrecuencia (RF) a lo largo del siglo XX. Sin embargo, en la actualidad la tecnología basada en los cristales de cuarzo no es capaz de seguir el ritmo de miniaturización impuesto por la industria de la microelectrónica. A lo largo de las últimas décadas los sistemas formados por resonadores micro-electromecánicos (MEMS) han demostrado estar a la altura para ser los dignos sucesores de la tecnología del cuarzo en aplicaciones tales como el filtrado, el procesado de señales y referencia de reloj. [16,46-48]. Estas y otras múltiples posibles aplicaciones han motivado que durante las últimas décadas se haya dedicado una gran cantidad de recursos al estudio y desarrollo de las, dando lugar a la aparición de compañías (SiTime, Discera, Maxim, IDT, Silicon Labs, Sand9, Avago, VTI, Vectron, Abracon, TXC o Ecliptek entre otras) enfocadas a los osciladores MEMS de altas prestaciones y bajo consumo de potencia.

Como resultado de estas investigaciones se ha conseguido integrar los sistemas MEMS junto a la tecnología CMOS [26, 42, 48-50], consiguiendo salvar uno de los primeros obstáculos a los que se enfrenta una nueva tecnología, el coste económico de adaptar la fabricación a dicha tecnología. La integración de los sistemas MEMS en la tecnología CMOS ofrece además la posibilidad de combinar la microelectrónica clásica basada en transistores con dispositivos electromecánicos, todo fabricado sobre un mismo sustrato de oblea. Inicialmente la calidad de los dispositivos MEMS no estaba a la altura de la tecnología del cuarzo, sin embargo, el hueco de mercado que iba a dejar esta tecnología en mano de tecnologías como la tecnología MEMS consiguió impulsar la investigación, dando lugar a resonadores MEMS cuyo factor de calidad eran competitivos respecto a los conseguidos con los resonadores de cuarzo. [51] Junto al incremento de la calidad de los resonadores también mejoró la calidad de los productos derivados de estos, como los osciladores, que pronto empezaron a cumplir los estándares marcados por

las telecomunicaciones, tales como el protocolo GSM (Global System for Mobile Communications) [52-55]. Uno de los mayores problemas que padecían los resonadores MEMS en su inicio era su alta dependencia térmica, dando lugar a una estabilidad en temperatura pésima en comparación con la alta estabilidad de los resonadores de cuarzo. Este problema, abordado mediante técnicas de compensación tanto pasivas [56] como activas [57] lograron un producto ahora ya si a la altura de los resonadores de cuarzo. En los primeros dispositivos integrados en la tecnología CMOS-MEMS eran necesarios altos voltajes de polarización, del orden de decenas de voltios. Pero finalmente, este voltaje consiguió reducirse por debajo de las tensiones de alimentación correspondientes a la propia tecnología CMOS [42].

Sin embargo, aunque pueda dar la sensación de que los dispositivos MEMS actuales han superado todos los obstáculos para establecerse, estos dispositivos MEMS tampoco se libran de las consecuencias de la miniaturización. Los MEMS tienden a evolucionar a hacia los NEMS, las reducidas dimensiones y masa de los nuevos dispositivos incrementan la sensibilidad de los mismos frente a cualquier tipo de estímulo. Esto que inicialmente puede verse con buenos ojos desde el punto de vista del sensado de diversos parámetros ha dado lugar a nuevos desafíos de gran complejidad. Uno de los puntos más acusados es la creciente influencia del ruido termomecánico sobre la estructura, dando lugar a fluctuaciones en su desplazamiento, [58]. No bastando con esto, la no linealidad en los dispositivos NEMS aparece de una forma mucho más temprana [59-60]. La combinación de los dos factores anteriores, aplicadas a la relación señal ruido del sistema, implica que la máxima amplitud la señal (operando en el régimen lineal) se ve reducida, mientras que al mismo tiempo el ruido se incrementa. Esto provoca el detrimento de la calidad de los osciladores NEMS operados en el régimen lineal del resonador.

El estudio de la no linealidad en resonadores NEMS es un tema candente en la actualidad ya que es necesario comprender la relación entre los fenómenos no lineales del resonador y el ruido de fase del sistema oscilador. Algunas de las consecuencias de la aparición de la no linealidad en los resonadores son:

- Aparición de puntos de bifurcación. Puntos donde la respuesta frecuencial del resonador no lineal está multivaluado, dando lugar a la aparición de ciclos de histéresis en frecuencia [61-62], pudiendo tener lugar transiciones entre las distintas soluciones [63-66].
- Dependencia de la frecuencia de resonancia con la amplitud de excitación. Lo que se conoce como efecto A-f [67-68]. Este efecto tiene como principal consecuencia la transformación del ruido de amplitud del sistema oscilador en ruido de frecuencia (Conversión A-f) [68-73].

- Productos de intermodulado derivados del comportamiento no lineal del resonador. Estos productos de intermodulado trasladan el ruido de baja frecuencia (correspondiente al ruido Flicker electrónico) a las frecuencias cercanas a la señal portadora [71].
- El comportamiento no lineal del resonador es altamente dependiente de la temperatura [74], y por lo tanto la estabilidad térmica del resonador.

El primer efecto (a) va a limitar el máximo *power handling* o potencia máxima suministrada antes de la aparición de estos puntos de bifurcación [75-76], siempre que se quiera evitar el régimen no lineal. Los dos puntos (b) y (c) van a afectar al ruido de fase en las frecuencias cercanas a la señal portadora, por lo que comprometerán la calidad del sistema oscilador cuando el resonador esté operando en el régimen no lineal. Es por esto que durante mucho tiempo se ha evitado trabajar en el régimen no lineal. El último punto (d) supone un golpe más duro, ya que anula los avances en la estabilidad térmica aplicables al régimen de operación lineal, y fuerza a partir de cero en el desarrollo de métodos de compensación. Dado que existen sistemas para controlar la amplitud con la que se excita al resonador del sistema oscilador, tales como el control automático de ganancia, resulta sencillo mantener a este operando en el régimen lineal [77]. En la bibliografía reciente se pueden encontrar dos estrategias para retardar la aparición del régimen no lineal en los resonadores NEMS y reducir el efecto A-f: La primera está basada en buscar una tensión DC de polarización del resonador óptima que compense entre si las no linealidades de origen mecánico y origen eléctrico [68-72], [76], [78]. La segunda se basa en modificar la concentración en el proceso de dopado del material usado en el resonador, así como modificar la orientación del resonador sobre el eje cristalográfico de la oblea [79]. Esto ha permitido mejorar el ruido de fase en osciladores NEMS en los que el resonador opera siempre bajo el régimen lineal, ya que al retardar la aparición de la no linealidad se permite trabajar con potencias de señal mayores, mejorando la relación entre la potencia de la señal y la potencia de ruido.

Sin embargo, las investigaciones teóricas dedicadas a estudiar la no linealidad en sistemas osciladores sembraron la esperanza de que era posible sobrepasar los “límites teóricos de calidad” de los osciladores convencionales mediante el uso de un resonador no lineal [80]. Recientemente se demostró que era posible operar un oscilador MEMS en el cual el resonador está operando en el régimen no lineal sin que tuviese lugar ningún salto entre los puntos de la curva de resonancia multivaluada [81]. A partir de estas dos evidencias comenzaron a aparecer modelos para el ruido de fase de un oscilador cuyo resonador opera en el régimen no lineal [80], [82-85], en los cuales se demostró empíricamente la capacidad de mejorar el

ruido de fase cerca de la portadora para distintos sistemas osciladores mediante la operación del resonador en el régimen no lineal.

## 5.2 Objetivo de la tesis

En este contexto el objetivo de la tesis ha sido el desarrollo de circuitería CMOS para la implementación de osciladores basados en elementos CMOS-MEMS.

Para la presente tesis los resonadores se obtienen a partir de dos tecnologías:

- Dado que el grupo ECAS de la UAB ha desarrollado la posibilidad de transformar la tecnología AMS  $0.35\mu\text{m}$  en una tecnología intra-CMOS-MEMS, se utilizará esta tecnología para diseñar distintos resonadores MEMS. Anteriormente el grupo ha trabajado con el polisilicio y el aluminio como material estructural para los resonadores. En la presente tesis, en paralelo al trabajo realizado por otros miembros del grupo ECAS, se explorará las capacidades del tungsteno como material estructural en el diseño de los resonadores MEMS.
- Gracias a un proyecto con la empresa SilTerra en la presente tesis se ha dispuesto de resonadores fabricados en esta misma tecnología SilTerra  $0.18\mu\text{m}$ .

La reducción en las dimensiones de los resonadores ha hecho que el MEMS presente un comportamiento no lineal a amplitudes reducidas. Como consecuencia de ello, parte del trabajo de la tesis se ha focalizado en:

- Estudio teórico de la no linealidad de los resonadores MEMS
- Estudio de la influencia de la no linealidad del resonador sobre el ruido de fase del oscilador.

## 6 Organización de la tesis

La presente tesis está dividida en seis capítulos. Tras este capítulo de introducción la distribución de capítulos es la siguiente.

La tesis comienza con dos capítulos, II y III, dedicados a introducir la teoría que será necesaria para comprender el trabajo realizado. Estos capítulos se centran en explicar el modelo electromecánico de los resonadores MEMS, y en explicar la teoría de la estabilidad en frecuencia de los sistemas osciladores.

A continuación, en el capítulo IV, se muestran todos los diseños CMOS empleados en la tesis, tanto para sensar la corriente de salida del resonador como para ser utilizados como parte de un sistema oscilador CMOS-MEMS.

El capítulo V está dedicado al diseño y caracterización de los resonadores CMOS-MEMS pensados para trabajar como elemento selector de frecuencia en un sistema oscilador CMOS-MEMS. Debido a su extensión, el capítulo está dividido en dos partes. Capítulo IV.I dedicado a los resonadores implementados en la tecnología AMS 0.35 $\mu\text{m}$  y Capítulo IV.II dedicado a los resonadores implementados en la tecnología SilTerra 0.18 $\mu\text{m}$ .

A continuación, en el capítulo IV, se muestran todos los diseños CMOS empleados en la tesis, tanto para sensar la corriente de salida del resonador como para ser utilizados como parte de un sistema oscilador CMOS-MEMS.

Finalmente, el capítulo VI muestra los sistemas osciladores CMOS-MEMS que se han obtenido mediante la combinación de los módulos presentados en los capítulos IV y V.

Adicionalmente, se presentan dos anexos. El anexo I contiene la información de todos los chips fabricados en la tecnología AMS 0.35 $\mu\text{m}$ , y el anexo II contiene la referencia de todos los materiales utilizados en el laboratorio para realizar la caracterización de los sistemas fabricados.

## 7 Referencias

- [1] Nathanson, H.C., Newell, W.E., Wickstrom, R.A., Davis Jr, J.R.: The resonant gate transistor. *IEEE Trans. Electron Devices* 4(3), 117–133 (1967)
- [2] Charles S. Smith “Piezoresistance Effect in Germanium and Silicon” *Phys. Rev.* 94, 42. 1 Apr 1954.
- [3] Nathanson, H.C.; Newell, W.E.; Wickstrom, R.A.; Davis, J.R., Jr., "The resonant gate Transistor," *5 Devices*, *IEEE Transactions on* , vol.14, no.3, pp.117,133, Mar 1967.
- [4] Tang, W. C., T. -C. H. Nguyen, and R. T. Howe, “Laterally Driven Polysilicon Resonant Microdevices,” *Sensors and Actuators*, Vol. 20, 1989, pp. 25–32.
- [5] Nguyen, C. T. -C., “Frequency-Selective MEMS for Miniaturized Communications Devices,” *Proceedings of 1998 IEEE Aerospace Conference*, Vol. 1, Snowmass, CO, March 1998, pp. 445–460.

- [6] Kun Wang, Yinglei Yu, Ark-chew Wong and Clark T.-C. Nguyen, "VHF free-free beam high Q micromechanical resonators", 12th International IEEE Micro Electro Mechanical System Conference, Jan 1999.
- [7] Seungbae Lee, Mustafa U. Demirci, and Clark T.-C. Nguyen, "A 10MHz Micromechanical Resonator Pierce Oscillator for Communications", Digest of Technical Papers, The 11th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, June 2001.
- [8] Yu-Wei Lin, Seungbae Lee, Sheng-Shian Li, Yuan Xie, Zeying Ren, Clark T.-C. Nguyen, "Series Resonant VHF Micromechanical Resonator Reference Oscillators", IEEE Journal Of Solid-State Circuits, Vol. 39, No. 12, December 2004
- [9] J. Wang, Z. Ren, and C. T.-C. Nguyen, "Self-aligned 1.14-GHz vibrating radial-mode disk resonators," Dig. of Tech. Papers, the 12th Int. Conf. on Solid-Stat Sensors & Actuators (Transducers'03), Boston, Massachussets, June 8-12, 2003, pp. 947-950.
- [10] S.-S. Li, Y.-W. Lin, Y. Xie, and C. T.-C. Nguyen, "1.51-GHz polydiamond micromechanical disk resonator with impedancemismatched isolating support," Proceedings, 17th Int. IEEE Micro Electro Mechanical Systems Conf., Maastricht, The Netherlands, Jan. 25-29, 2004, pp. 821-824.
- [11] Clark JR, Hsu WT, Abdelmoneum MA, Nguyen CTC, "High-Q UHF micromechanical radial-contour mode disk resonators", Journal of Microelectromech Syst 14 (6):1298–1310. 2005
- [12] W.-L. Huang, Z. Ren, and C. T.-C. Nguyen, "Nickel vibrating micromechanical disk resonator with solid dielectric capacitivetransducer gap," Proceedings, 2006 IEEE Int. Frequency Control Symp., Miami, Florida, June 5-7, 2006, pp. 839-847.
- [13] Naito Y, Helin P, Nakamura K, De Coster J, Guo B, Haspeslagh L, Onishi K, Tilmans HAC (2010) High-Q torsional mode Si triangular beam resonators encapsulated using SiGe thin film. In: Technical Digest of 2010 IEEE International Electron Devices Meeting, San Francisco, CA, Dec 2010, pp. 7.1.1–7.1.4
- [14] Siddharth Tallur and Sunil A. Bhave "Comparison of f-Q scaling in wineglass and radial modes in ring resonators" Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2013 IEEE 26th International Conference on. 7 March 2013.
- [15] George Xereas and Vamsy P. Chodavarapu "Wafer-Level Vacuum-Encapsulated Lamé Mode Resonator With f-Q Product of  $2.23 \times 10^{13}$  Hz" IEEE Electron Device Letters (Volume: 36, Issue: 10). Oct. 2015.
- [16] J. Van Beek and R. Puers, "A review of MEMS oscillators for frequency reference and timing applications," J. Micromech. Microeng. vol. 22, no. 1, p. 013001, Dec. 2011.

- [17] McClelland T, Stone C and Bloch M 1999 100 MHz crystal oscillator with extremely low phase noise Proc. Joint Meeting of the European Frequency and Time Forum and the IEEE International Frequency Control Symp.vol 1, pp 331–4. 1990.
- [18] INTERNATIONAL TECHNOLOGY ROADMAP FOR SEMICONDUCTORS, 2013 edition, Micro-Electro-Mechanical-Systems.
- [19] Andreas C. Fisher et al. “Integrating MEMS and ICs”, *Microsystems & Nanoengineering* (2015) 1.
- [20] Raafat R. Mansour “RF MEMS-CMOS Device Integration: An Overview of the Potential for RF Researchers” *IEEE Microwave Magazine* (Volume: 14, Issue: 1, Jan.-Feb. 2013).
- [21] Hongwei Qu, “CMOS MEMS Fabrication Technologies and Devices” *Micromachines* 2016, 7, 14. Jan 2016.
- [22] A. Uranga, J. Verd, N. Barniol, “CMOS-MEMS resonators: From devices to applications” *Microelectronic Engineering* 132 (2015) 58-73. Sep 2014.
- [23] Smith, J.H.; Montague, S. ; Sniegowski, J.J.; Murray, J.R.; McWhorter, P.J. Embedded micromechanical devices for the monolithic integration of MEMS with CMOS. In *Proceedings of the International Electron Devices Meeting*, Washington, DC, USA, 10–13 December 1995; pp. 609–612.
- [24] Borky, J.; Wise, K. Integrated signal conditioning for diaphragm pressure sensors. In *Proceedings of the IEEE International Solid-State Circuits Conference*, Philadelphia, PA, USA, 14–16 February 1979.
- [25] Hornbeck, L. Deformable-mirror spatial light modulators and applications. *SPIE Crit. Rev.* 1989, 1150, 86–102.
- [26] A. Uranga, G. Sobreviela, N. Barniol, E. Marigó, C. Tay-Wee-Song, M. Shunmugam, A. A. Zainuddin, A. Kumar-Kantimahanti, V. Madhavan, and M. Soundara-Pandian, “Dual-clock with single and monolithical 0-level vacuum packaged MEMS-on-CMOS resonator,” presented at the 2015 28th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), pp. 1004–1007. *Freq. Contr.*, vol. 58, no. 1, pp. 195–205, 2011.
- [27] Wojciechowski, K.E.; Olsson, R.H.; Tuck, M.R.; Roherty-Osmun, E.; Hill, T.A. Single-chip precision oscillators based on multi-frequency, high-q aluminum nitride MEMS resonators. In *Proceedings of the International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems*, Denver, CO, USA, 21–25 June 2009; pp. 2126–2130.
- [28] Joan Lluís López et al. “A CMOS-MEMS RF-Tunable Bandpass Filter Based on Two High-Q 22-MHz Polysilicon Clamped-Clamped Beam Resonators” *IEEE Electron Device Letters* (Vol 30, Issue 7) July 2009.



- [29] Joan Lluís López et al. “Double-Ended Tuning Fork Resonator in 0.35 $\mu$ m CMOS Technology for RF Applications” *Research in Microelectronics and Electronics*. PRIME 2008. June 22- April 25 2008.
- [30] Jaume Verd et al. “CMOS Cantilever-based Oscillator for Attogram Mass Sensing” *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. New Orleans, LA. 27-30 May 2007.
- [31] J. Verd, A. Uranga, J. Segura and N. Barniol, "A 3V CMOS-MEMS oscillator in 0.35 $\mu$ m CMOS technology," in 2013 Transducers and Eurosensors XXVII: The 17th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, TRANSDUCERS and EUROSENSORS 2013.
- [32] M. Riverola, G. Vidal-Álvarez, F. Torres, and N. Barniol. “CMOS-NEM relay based on tungsten VIA layer”. *IEEE Sensors 2014 Proceedings*, pp 162-165, Valencia, Spain, 2-5 Nov 2014.
- [33] W.-L. Huang, R. Zeying, L. Yu-Wei, C. Hsien-Yeh, J. Lahann, C.T.C. Nguyen, *IEEE 21st International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, MEMS (2008)* 10–13, <http://dx.doi.org/10.1109/MEMSYS.2008.4443580>.
- [34] Uranga, A.; Sobreviela, G.; Barniol, N.; Marigo, E.; Tay-Wee-Song, C.; Shunmugam, M.; Zainuddin, A.A.; Kumar-Kantimahanti, A.; Madhavan, V.; Soundara-Pandian, M. Dual-clock with single and monolithic 0-level vacuum packaged MEMS-on-CMOS resonator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Estoril, Portugal, 18–22 January 2015; pp. 1004–1007.
- [35] Huang, W.; Ren, Z.; Lin, Y.; Chen, H.; Lahann, J.; Nguyen, C.T.C. Fully monolithic CMOS nickel micromechanical resonator oscillator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Tucson, AZ, USA, 13–17 January 2008; pp. 10–13.
- [36] K.E. Wojciechowski, R.H. Olsson III, M.R. Tuck, E. Roherty-Osmun, T.A. Hill, *TRANSDUCERS 2009, International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, 2009*, pp. 2126–2130.
- [37] Wojciechowski, K.E.; Olsson, R.H.; Tuck, M.R.; Roherty-Osmun, E.; Hill, T.A. Single-chip precision oscillators based on multi-frequency, high-q aluminum nitride MEMS resonators. In *Proceedings of the International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems*, Denver, CO, USA, 21–25 June 2009; pp. 2126–2130.
- [38] M.L. Johnston, I. Kymissis, K.L. Shepard, *IEEE Sens. J.* 10 (2010) 1042–1047, <http://dx.doi.org/10.1109/JSEN.2010.2042711>.
- [39] M-H Li, C-Y Chen, C-S Li, C-H Chin, C-C Chen, and S-S Li. “Foundry-CMOS Integrated Oscillator Circuits Based on Ultra-low Power Ovenized CMOS-MEMS Resonators”, *IEDM*, 978-1-4799-2306-9/13/\$31.00 ©2013 IEEE.

- [40] M-H Li, C-Y Chen, C-S Li, and S-S Li. “A Sub-150uW BEOL\_embedded CMOS-MEMS Oscillator with a 138dB $\Omega$  Ultra-Low-Noise Tia” *Electron Device Letters*, 2015
- [41] C.-H. Chin, M.-H. Li, C.-Y. Chen, Y.-L. Wang, and S.-S. Li, “A CMOSMEMS arrayed RGFET oscillator,” *J. Micromech. Microeng.*, vol. 25, no. 11, p. 115025, Oct. 2015, doi: 10.1088/0960-1317/25/11/115025.
- [42] J. Verd, A. Uranga, J. Segura, and N. Barniol, “A 3 V CMOS-MEMS oscillator in 0.35  $\mu$ m CMOS technology,” presented at the 2013 Transducers & Eurosensors XXVII: The 17th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS & EUROSENSORS XXVII), pp. 806–809.
- [43] J. Lopez, J. Verd, E. Marigó, A. Uranga, G. Murillo, J. Giner, F. Torres, G. Abadal, and N. Barniol, “Monolithically integrated double-ended tuning fork-based oscillator with low bias voltage in air conditions,” *Proc. Chem.*, vol. 1, no. 1, pp. 614–617, Sep. 2009, doi: 10.1016/j.proche.2009.07.153.
- [44] E. Marigó, J. Verd, JL Lopez, A. Uranga, N. Barniol “Packaged CMOS-MEMS free-free beam oscillator” *Journal Micromech. Microeng.*, 23, 2013, pp. 806–809.
- [45] R. Jansen et al. “A CMOS-compatible 24MHz poly-SiGe MEMS oscillator with low-power heating for frequency stabilization over temperature” 2011 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Proceedings. San Fransisco, CA, 2-5 May 2011.
- [46] M. Lutz, A. Partridge, P. Gupta, N. Buchan, E. Klaassen, J. McDonald, and K. Petersen, “MEMS Oscillators for High Volume Commercial Applications,” presented at the TRANSDUCERS 2007 - 2007 International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, pp. 49–52.
- [47] C. T. C. Nguyen, “Integrated Micromechanical Radio Front-Ends,” presented at the 2008 International Symposium on VLSI Technology, Systems, and Applications (VLSI-TSA), pp. 3–4.
- [48] A. Uranga, J. Verd, and N. Barniol, “CMOS-MEMS resonators: From devices to applications,” *Microelectronic Engineering*, vol. 132, pp. 58–73, Jan. 2015.
- [49] E. Marigó, J. Verd, J. L. Lopez, A. Uranga, and N. Barniol, “Packaged CMOS-MEMS free-free beam oscillator,” *J. Micromech. Microeng.*, vol. 23, no. 11, p. 115018, Oct. 2013.
- [50] W.-C. Chen, W. Fang, and S.-S. Li, “A generalized CMOS-MEMS platform for micromechanical resonators monolithically integrated with circuits,” *J. Micromech. Microeng.*, vol. 21, no. 6, p. 065012, May 2011.
- [51] M. Palaniapan and L. Khine, “Micromechanical resonator with ultra-high quality factor,” *Electron. Lett.*, vol. 43, no. 20, p. 1090, 2007.

- [52] T. L. Naing, T. O. Rocheleau, E. Alon, and C. T. C. Nguyen, “A 78-microwatt GSM phase noise-compliant pierce oscillator referenced to a 61-MHz wine-glass disk resonator,” presented at the 2013 Joint European Frequency and Time Forum & International Frequency Control Symposium (EFTF/IFC), pp. 562–565.
- [53] H. M. Lavasani, W. Pan, B. Harrington, R. Abdolvand, and F. Ayazi, “A 76 dB $\Omega$  1.7 GHz 0.18  $\mu\text{m}$  CMOS Tunable TIA Using Broadband Current Pre-Amplifier for High Frequency Lateral MEMS Oscillators,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 46, no. 1, pp. 224–235, Jan. 2011.
- [54] H. Lee, A. Partridge, and F. Assaderaghi, “Low jitter and temperature stable MEMS oscillators,” presented at the 2012 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS), pp. 1–5.
- [55] S. Zaliasl, J. C. Salvia, G. C. Hill, L. W. Chen, K. Joo, R. Palwai, N. Arumugam, M. Phadke, S. Mukherjee, H.-C. Lee, C. Grosjean, P. M. Hagelin, S. Pamarti, T. S. Fiez, K. A. A. Makinwa, A. Partridge, and V. Menon, “A 3 ppm 1.5 x 0.8 mm<sup>2</sup> 1.0  $\mu\text{A}$  32.768 kHz MEMS-Based Oscillator,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 50, no. 1, pp. 291–302, 2014.
- [56] Y.-C. Liu, M.-H. Tsai, W.-C. Chen, M.-H. Li, S.-S. Li, and W. Fang, “Temperature-Compensated CMOS-MEMS Oxide Resonators,” *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 22, no. 5, pp. 1054–1065, 2013.
- [57] M.-H. Li, C.-Y. Chen, C.-S. Li, C.-H. Chin, and S.-S. Li, “A Monolithic CMOS-MEMS Oscillator Based on an Ultra-Low-Power Ovenized Micromechanical Resonator,” *J. Microelectromech. Syst.*, pp. 1–1, 2015.
- [58] A. N. Cleland and M. L. Roukes, “Noise processes in nanomechanical resonators,” *Journal of Applied Physics*, vol. 92, no. 5, p. 2758, Sep. 2002.
- [59] K. L. Ekinici and M. L. Roukes, “Nanoelectromechanical systems,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 76, no. 6, p. 061101, 2005.
- [60] K. L. Ekinici, “Electromechanical Transducers at the Nanoscale: Actuation and Sensing of Motion in Nanoelectromechanical Systems (NEMS),” *Small*, vol. 1, no. 8, pp. 786–797, Aug. 2005.
- [61] H. Lee, A. Partridge, and F. Assaderaghi, “Low jitter and temperature stable MEMS oscillators,” presented at the 2012 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS), pp. 1–5.
- [62] S. Zaliasl, J. C. Salvia, G. C. Hill, L. W. Chen, K. Joo, R. Palwai, N. Arumugam, M. Phadke, S. Mukherjee, H.-C. Lee, C. Grosjean, P. M. Hagelin, S. Pamarti, T. S. Fiez, K. A. A. Makinwa, A. Partridge, and V. Menon, “A 3 ppm 1.5 x 0.8 mm<sup>2</sup> 1.0  $\mu\text{A}$  32.768 kHz MEMS-Based Oscillator,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 50, no. 1, pp. 291–302, 2014.
- [63] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Oja, and H. Seppa, “Nonlinear Limits for Single-Crystal Silicon Microresonators,” *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 13, no. 5, pp. 715–724, Oct. 2004.

- [64] M. Pardo, L. Sorenson, and F. Ayazi, "An Empirical Phase-Noise Model for MEMS Oscillators Operating in Nonlinear Regime," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 59, no. 5, pp. 979–988, Apr. 2012.
- [65] H. K. Lee, P.A. Ward, A.E. Duwel, J.C. Salvia, Y.Q. Qu, R. Melamud, S.A. Chandorkar, M.A. Hopcroft, B. Kim, and T.W. Kenny "Verification of the phase-noise model for MEMS oscillators operating in the nonlinear regime," 2011 16th International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, pp. 510-513, 2011
- [66] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, and A. Nayfeh, "A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS," *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 12, no. 5, pp. 672–680, Oct. 2003.
- [67] M. I. Younis and A. H. Nayfeh, "A Study of the Nonlinear Response of a Resonant Microbeam to an Electric Actuation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 31, no. 1, pp. 91–117, 2003.
- [68] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Lipsanen, and A. Oja, "Nonlinear mechanical effects in silicon longitudinal mode beam resonators," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 120, no. 1, pp. 64–70, Apr. 2005.
- [69] R.M.C. Mestrom, R.H.B. Fey, J.T.M. van Beek, K.L. Phan, H. Nijmeijer "Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped-clamped beam MEMS resonator," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 162, Issue 2, pp. 225–234, 2010.
- [70] J. J. Gagnepain, "Nonlinear Properties of Quartz Crystal and Quartz Resonators: A Review," presented at the Thirty Fifth Annual Frequency Control Symposium, pp. 14–30, 1981.
- [71] M. Agarwal, K. Park, R. Candler, B. Kim, M. Hopcroft, S. Chandorkar, C. Jha, R. Melamud, T. Kenny, and B. Murmann, "Nonlinear Characterization of Electrostatic MEMS Resonators," presented at the 2006 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition, pp. 209–212.
- [72] M. Agarwal, S. A. Chandorkar, H. Mehta, R. N. Candler, B. Kim, M. A. Hopcroft, R. Melamud, C. M. Jha, G. Bahl, G. Yama, T. W. Kenny, and B. Murmann, "A study of electrostatic force nonlinearities in resonant microstructures," *Applied Physics Letters*, vol. 92, no. 10, p. 104106, 2008.
- [73] M. Agarwal, S. A. Chandorkar, R. N. Candler, B. Kim, M. A. Hopcroft, R. Melamud, C. M. Jha, T. W. Kenny, and B. Murmann, "Optimal drive condition for nonlinearity reduction in electrostatic microresonators," *Applied Physics Letters*, vol. 89, no. 21, p. 214105, 2006.
- [74] H. K. Lee, R. Melamud, B. Kim, S. Chandorkar, J. C. Salvia, T. W. Kenny, "The effect of the temperature-dependent nonlinearities on the temperature stability of micromechanical resonators", *J. of Applied Physics*, Vol 114, Issue 15. pp. Oct. 2013.

- [75] M. Agarwal, K. K. Park, B. Kim, M. A. Hopcroft, S. A. Chandorkar, R. N. Candler, C. M. Jha, R. Melamud, T. W. Kenny, and B. Murmann, "Amplitude noise induced phase noise in electrostatic MEMS resonators," presented at the Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, 2007. TRANSDUCERS 2007. International, 2007.
- [76] V. Kaajakari, J. K. Koskinen, and T. Mattila, "Phase noise in capacitively coupled micromechanical oscillators," *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 52, no. 12, pp. 2322–2331. 2005
- [77] Seungbae Lee and Clark T-C Nguyen, "Influence of automatic level control on micromechanical resonator oscillator phase noise", 2003 IEEE International Frequency Control Symposium. May 2003, pp 341-349. 2003
- [78] F. Nabki, K. Allidina, F. Ahmad, P.-V. Cicek, and M. N. El-Gamal, "A Highly Integrated 1.8 GHz Frequency Synthesizer Based on a MEMS Resonator," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 44, no. 8, pp. 2154–2168, 2009.
- [79] C. Zuo, M. Rinaldi, and G. Piazza, "Power handling and related frequency scaling advantages in piezoelectric AlN contour-mode MEMS resonators," presented at the 2009 IEEE International Ultrasonics Symposium, pp. 1187–1190.
- [80] L. G. Villanueva, E. Kenig, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, M. C. Cross, and M. L. Roukes, "Surpassing Fundamental Limits of Oscillators Using Nonlinear Resonators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 17, p. 177208, Apr. 2013.
- [81] B. Yurke, D. S. Greywall, A. N. Pargellis, and P. A. Busch, "Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator," *Phys. Rev. A*, vol. 51, no. 5, pp. 4211–4229, May, 1995.
- [82] H. K. Lee, R. Melamud, S. Chandorkar, J. Salvia, S. Yoneoka, and T. W. Kenny, "Stable Operation of MEMS Oscillators Far Above the Critical Vibration Amplitude in the Nonlinear Regime," *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 20, no. 6, pp. 1228–1230, Dec. 2011
- [83] R. M. C. Mestrom, R. H. B. Fey, and H. Nigmeijer, "Phase Feedback for Nonlinear MEM Resonators in Oscillator Circuits", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(4), (2009), pp. 423-433. 2009
- [84] E. Kenig, M. C. Cross, L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, and M. L. Roukes, "Optimal operating points of oscillators using nonlinear resonators," *Phys. Rev. E*, vol. 86, no. 5, p. 056207, Nov. 2012.
- [85] P. Ward and A. Duwel, "Oscillator phase noise: systematic construction of an analytical model encompassing nonlinearity," *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect.*

# II. Teoría del resonador MEMS

## 1 Introducción

En el presente capítulo se va a analizar el comportamiento electromecánico de los resonadores MEMS actuados electrostáticamente y transducidos capacitivamente. Para ello primero se mostrará el modelo dinámico del resonador que permitirá predecir la frecuencia natural de resonancia de las estructuras resonantes. A continuación, se mostrará el método de actuación electrostática para conseguir ejercer una fuerza sobre la estructura a la frecuencia de resonancia. Tras esto, se mostrará cómo transducir el movimiento de la estructura en forma de corriente de salida. Con el objetivo de facilitar la simulación de los resonadores operando en el régimen lineal se muestra el modelo eléctrico equivalente al resonador, en el que este se modeliza como un resonador RLC con una capacidad parásita en paralelo  $C_P$ .

Por último se va a mostrar el estado del arte actual en relación a los fenómenos no lineales en el resonador MEMS, sus efectos sobre la frecuencia de resonancia del resonador y los efectos que produce esta no linealidad como los productos de intermodulado o el efecto A-f.

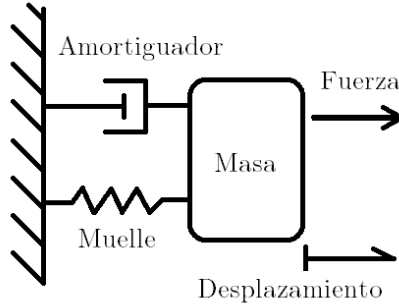
## 2 Comportamiento dinámico

A la hora de diseñar un resonador MEMS resulta imprescindible conocer el comportamiento mecánico de la estructura, así como su interacción con estímulos eléctricos externos. Además, se debe estudiar la forma de transducir el movimiento generado en la estructura a una señal externa. Por lo tanto el estudio del resonador MEMS se puede dividir en tres partes: Excitación, reacción mecánica, y transducción del movimiento. En el presente apartado el estudio de estas tres está ordenado de la siguiente forma: Modelo mecánico, excitación y transducción. Tanto excitación como transducción se analizarán desde el prisma de la excitación y transducción electrostática.

### 2.1 Modelo Masa-Muelle-Amortiguador

Debido a su comportamiento resonante, los resonadores MEMS-NEMS responden a una fuerza aplicada sobre la estructura en un desplazamiento en función de la frecuencia y la magnitud de la fuerza. Esto hace que los resonadores se comporten como filtros mecánicos pasa banda. El modelo más práctico a la hora

de describir el comportamiento dinámico de un resonador MEMS es el modelo Masa-Muelle-Amortiguador. Este modelo permite describir el comportamiento dinámico del resonador a partir de una ecuación diferencial de segundo orden que no es otra que la segunda ley de Newton aplicada al sistema mostrado en la figura 1.



**Figura 1.** Modelo Masa-Muelle-Amortiguador.

En esta ecuación diferencial se tiene en cuenta la superposición de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema (1).

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - \gamma \dot{x}(t) - kx(t) \quad (1)$$

En la ecuación (1) se está utilizando una masa equivalente  $m$ , un coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$ , una constante elástica equivalente  $k$ , y el instante de tiempo  $t$ . El desplazamiento está indicado por  $x(t)$ .  $F(t)$  es la fuerza externa aplicada sobre el sistema,  $\gamma \dot{x}(t)$  la fuerza de amortiguamiento que se opone al movimiento de la estructura, y  $kx(t)$  la fuerza de recuperación elástica (ley de Hooke).

El concepto de masa efectiva se introduce mediante la aproximación de que la masa total del resonador está concentrada en el punto correspondiente a la máxima amplitud de desplazamiento. Así mismo, la constante elástica efectiva supone que la fuerza de recuperación elástica se aplica únicamente sobre este mismo punto. Los valores correspondientes a ambos valores pueden obtenerse de la geometría de los resonadores de geometrías sencillas tipo viga rectangular (longitud  $l$ , anchura  $w$  y grosor  $t$ ) y de su módulo de Young ( $E$ ) como se indica en la tabla I.

Resonador	Cantilever	Puente
Constante elástica equivalente (k)	$\frac{Etw^3}{4l^3}$	$\frac{16Etw^3}{l^3}$
Masa efectiva equivalente (m)	$\frac{3\rho wlt}{(\kappa_n \ell)^4}$	$\frac{192\rho wlt}{(\kappa_n \ell)^4}$
Autovalores $\kappa_n \ell$ para el modo lateral n	1.875, 4.694, 7.855	4.730, 7.853, 10.996

**Tabla I.** Parámetros correspondientes a la masa y constante elástica efectivas en modos flexurales para estructuras tipo viga.

En la tabla se incluyen los autovalores  $\kappa_n \ell$ . Estos autovalores se obtienen del desarrollo matemático de la ecuación de Euler-Bernoulli aplicado al resonador tipo viga y toman un valor distinto para cada modo de resonancia. Estos valores pueden ser simulados para cualquier estructura resonante, independientemente de la complejidad de su geometría, a partir del software basado en el modelado de elementos finitos [1] [2] [3].

Debido a que vamos a trabajar con el resonador desde el punto de vista frecuencial la ecuación (1) del espacio temporal se puede convertir al espacio de frecuencias (2).

$$s^2 mx(s) + s\gamma x(s) + kx(s) = F(s) \quad (2)$$

Despejando el cociente fuerza-desplazamiento se obtiene la función de transferencia (3).

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m_e}}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2} \quad (3)$$

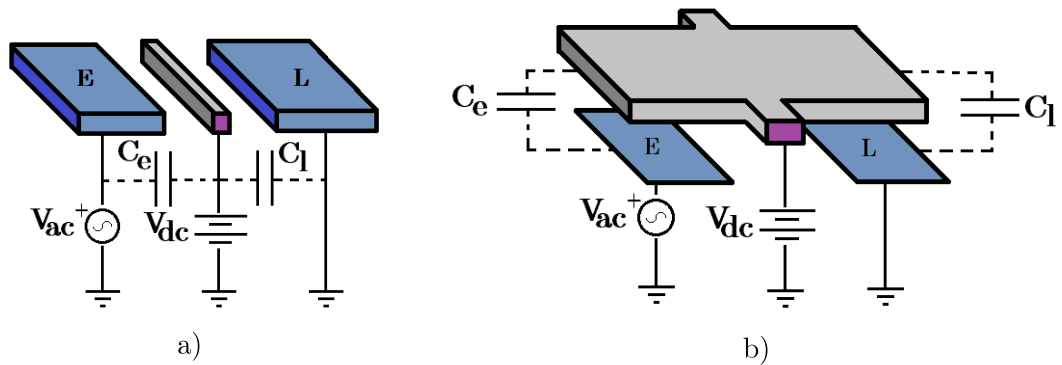
Donde  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  es la frecuencia de resonancia natural del sistema y  $Q = k / \gamma \omega_0$  el factor de calidad del resonador. Mientras que m y k son variables que dependen de la geometría y los materiales del resonador (y por lo tanto también  $\omega_0^2$ ), Q depende tanto de factores internos como externos a la estructura resonante. El significado físico del factor de calidad Q está ligado al



almacenamiento de energía suministrada por periodo respecto a la energía que se disipa en él, y matemáticamente se expresa como el cociente entre ambas energías. Por lo tanto, un resonador cuya  $Q$  tenga un valor elevado disipará sólo una pequeña fracción de energía por cada ciclo de oscilación. De esta forma el factor de calidad indicaría el número de oscilaciones que realiza el resonador cuando se deja libre y fuera de su estado de equilibrio hasta que alcanza su posición final de equilibrio, o lo que es lo mismo, el número de ciclos de relajación [4]. Las causas del amortiguamiento y reducción del factor de calidad son múltiples, pero las más notables se enumeran a continuación: Amortiguamiento debido al efecto de fuerzas *squeeze*, fuerzas de flujo de aire o líquido, fricciones internas, pérdidas por anclaje de la estructura y origen termo-elástico, todas ellas estudiadas en los artículos [5] [6] [7].

### 3 Actuación electrostática

En el apartado anterior se ha estudiado la respuesta del resonador en forma de desplazamiento frente a una fuerza aplicada. Sin embargo, es necesario un método para lograr la aplicación de esta fuerza. El método utilizado en la presente tesis ha sido la actuación electrostática. Este se basa en crear una interacción capacitiva entre la estructura resonante y un electrodo inmóvil. Como se explicará en el apartado 3, con el objetivo de sensar el movimiento de la viga, se implementa un segundo electrodo inmóvil. En la figura 2 se muestra el esquema del resonador en la configuración de dos puertos, los voltajes aplicados sobre el sistema y las capacidades formadas entre los electrodos y la estructura resonante.



**Figura 2.** Representación del sistema en configuración de dos puertos para: a) Estructura resonante tipo viga diseñada para excitar y sensar los modos flexurales horizontales. b) Estructura resonante tipo balancín diseñada para excitar y sensar los modos verticales flexurales y torsionales. La estructura resonante ha sido pintada en gris, las superficies de anclaje de morado, y el electrodo de excitación (E) y el electrodo de lectura (L) han sido pintados en azul. El esquema incluye las capacidades  $C_E$ ,  $C_L$  y las fuentes de tensión

correspondientes a las componentes AC y DC del voltaje de actuación aplicado.

Al aplicar un voltaje  $V_E$  entre los extremos de la capacidad  $C_E$  (Formada entre el electrodo de excitación y la estructura resonante), y un voltaje  $V_L$  entre los extremos de la capacidad  $C_L$  (Formada entre el electrodo de lectura y la estructura resonante), el sistema acumula energía electrostática. Esta energía se calcula a partir de la ecuación (4) y corresponde a la energía almacenada en ambas capacidades  $C_E$  y  $C_L$ .

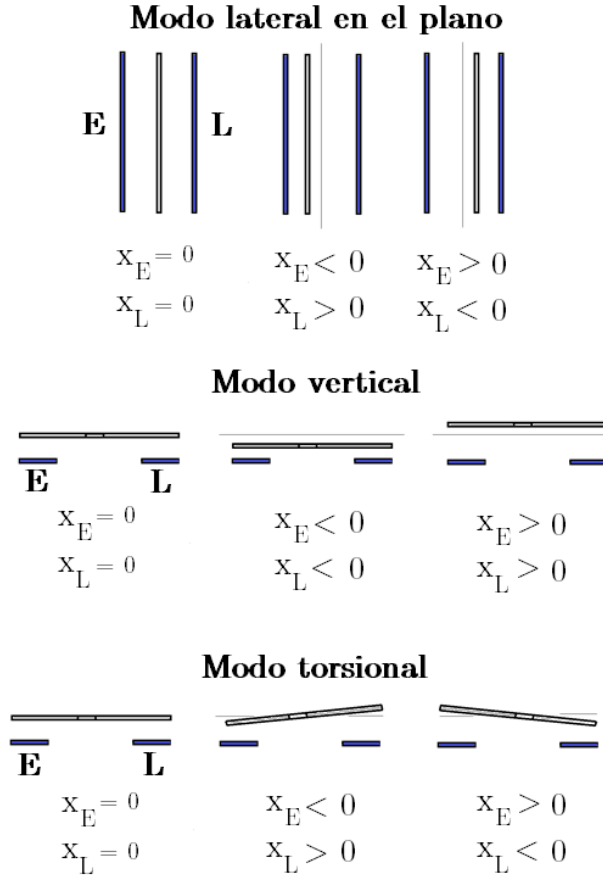
$$W = \frac{1}{2} C_E V_E^2 + \frac{1}{2} C_L V_L^2 \quad (4)$$

Las capacidades que se utilizan en el presente desarrollo siempre se consideran como capacidades plano paralelas. Esta aproximación es lo suficientemente válida como para predecir correctamente el comportamiento del resonador siempre que se esté trabajando en un régimen de pequeña amplitud de movimiento. Sin embargo, existen modelos más completos en los cuales se introduce un factor de forma que permite trabajar con el perfil de desplazamiento real de la estructura resonante [8]. Aceptando la aproximación de placas plano-paralelas el valor de la capacidad en función del desplazamiento de la estructura resonante queda descrito por la ecuación (5).

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g - x} \quad (5)$$

Donde  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_0$  son las permitividades dieléctricas relativa y equivalente del material que se encuentra entre “las placas” planoparalelas.  $A$  representa el área de acoplo entre ambas “placas”,  $g$  la distancia de equilibrio entre ambas, y  $x$  el desplazamiento relativo entre ellas, siendo positivo cuando estas se acercan entre sí y negativo cuando se alejan.

Los perfiles cualitativos de deformación correspondientes a los modos de resonancia de las estructuras presentadas en la figura 2 quedan descritos en la figura 3, donde se analiza cómo varían las capacidades  $C_E$  y  $C_L$  respecto a  $x$ .



a)

$$C_E = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g - x} \quad ; \quad C_L = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g + x}$$

b)

$$C_E = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g - x} \quad ; \quad C_L = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g - x}$$

c)

**Figura 3.** a) Descripción del movimiento para el modo lateral en una estructura tipo viga, y los modos vertical y torsional de una estructura tipo balancín. En cada modo de resonancia se muestra la posición de equilibrio (izquierda) y las posiciones fuera de equilibrio acercándose al electrodo de excitación (centro) y alejándose del mismo (derecha). En las figuras del centro y derecha la línea gris indica la posición de equilibrio. b) Variación de las capacidades  $C_E$  y  $C_L$  respecto al movimiento de la estructura para el modo lateral de la estructura tipo viga y el modo torsional de la estructura tipo balancín. c) Variación de las capacidades  $C_E$  y  $C_L$  respecto al movimiento de la estructura para el modo vertical de la estructura tipo balancín.

Suponiendo que los electrodos de excitación y lectura están fijados y no puede cambiar su posición, la fuerza derivada de la energía electrostática producirá el

desplazamiento únicamente de la estructura resonante. Esta fuerza se obtiene a partir del gradiente de la energía electrostática:

$$F_e = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2}V^2 \left( \frac{dC_E}{dx} + \frac{dC_L}{dx} \right) = -\frac{1}{2}V^2 \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g-x} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g \pm x} \right) \right) \quad (6)$$

Mediante el desarrollo de Taylor de la fuerza para valores pequeños de  $x$  ( $x \ll g$ ), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g-x} \right) &= \frac{C_0}{g} \sum_{n=0} (n+1) \left( \frac{x}{g} \right)^n \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g+x} \right) &= -\frac{C_0}{g} \sum_{n=0} (n+1) \left( \frac{x}{g} \right)^n (-1)^n \end{aligned} \quad (7)$$

La fuerza electrostática es proporcional a la tensión al cuadrado  $V^2$  entre los extremos de la capacidad  $C_E$ , y por lo tanto siempre es atractiva. En nuestro caso se aplicará una tensión DC sobre la estructura móvil y una tensión  $V_{ac0} \cos(\omega t)$  sobre el electrodo de excitación. En consecuencia, los voltajes  $V_E$  y  $V_L$  aplicados entre los electrodos de excitación y lectura respecto a la estructura móvil respectivamente quedan descritos por la ecuación (8).

$$\begin{aligned} V_E^2 &= V_{DC}^2 + \frac{1}{2}V_{AC0}^2 + \frac{1}{2}V_{AC0}^2 \cos(2\omega t) - 2V_{DC}V_{AC0} \cos(\omega t) \\ V_L^2 &= V_{DC}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Para facilitar el análisis, dado que el voltaje  $V_E^2$  y  $V_L^2$  tienen en común el término  $V_{DC}^2$ , se va a analizar por una parte la fuerza total creada por  $V_{DC}^2$ , que dependerá del modo de resonancia de la estructura, y por otra parte la fuerza total creada por el resto de términos, que será independiente del modo de resonancia.

La fuerza total correspondiente al término  $V_{DC}^2$  se muestra en (9).

$$F_{eDC^2} = -\frac{1}{2} \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left( \sum_{n=0} (n+1) \left( \frac{x}{g} \right)^n \mp \sum_{n=0} (n+1) \left( \frac{x}{g} \right)^n (\mp 1)^n \right) \quad (9)$$

Donde el símbolo  $\mp$  toma el valor  $-$  en el caso en el que la derivada de las capacidades  $C_E$  y  $C_L$  tengan el mismo signo, (ver figura 3.c) o  $+$  en el caso en la

que la variación de las capacidades respecto al desplazamiento  $x$  sea de signo opuesto (ver figura 3.b).

El total de la fuerza correspondiente a  $V_{DC}^2$  se muestra en la ecuación (10).

$$\begin{aligned} C_E &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g-x} \quad ; \quad C_L = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g+x} \quad ; \quad F_{eDC^2} = -\frac{1}{2} \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left( 4 \left( \frac{x}{g} \right) + 8 \left( \frac{x}{g} \right)^3 + \dots \right) \\ C_E &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g-x} \quad ; \quad C_L = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g-x} \quad ; \quad F_{eDC^2} = -\frac{1}{2} \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left( 2 \left( 1 + 2 \frac{x}{g} + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Por otra parte, la fuerza total correspondiente al resto de términos ( $V_{AC0}^2, 2V_{DC}V_{AC0}\dots$ ) se muestra en la ecuación (11).

$$F_{eAC^2, ACDC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} V_{AC0}^2 + \frac{1}{2} V_{AC0}^2 \cos(2\omega t) - 2V_{DC}V_{AC0} \cos(\omega t) \right) \frac{C_0}{g} \left( 1 + 2 \left( \frac{x}{g} \right) + \dots \right) \quad (11)$$

En la ecuación de la fuerza (9) y (11) se puede apreciar que al aplicar unas tensiones  $V_E$  y  $V_L$  sobre el sistema aparece una superposición de fuerzas a distintas frecuencias. Si se considera la aproximación de oscilaciones de pequeño desplazamiento  $\left( \frac{x}{g} \ll 1 \right)$ , cuya consecuencia es aproximar  $\left( 1 + 2 \left( \frac{x}{g} \right) + \dots \approx 1 \right)$ , la fuerza sólo tiene las componentes frecuenciales  $0$ ,  $\omega$ , y  $2\omega$ . La primera de estas componentes es una fuerza DC, que producirá un desplazamiento estático sobre la estructura. Respecto a las componentes AC, la componente AC aplicada en el electrodo de excitación ( $V_E$ ) a frecuencia  $\omega$  da origen a dos componentes frecuenciales en la fuerza, correspondientes a la frecuencia de la excitación  $\omega$  y a la frecuencia doble  $2\omega$ . El uso más común que se va a dar va a estar basado en excitar el resonador a una frecuencia  $\omega$  igual a la frecuencia de resonancia de la estructura. Sin embargo, también se puede excitar el sistema a una frecuencia mitad a la frecuencia de resonancia y aun así conseguir que el sistema resuene a su frecuencia natural [9].

Tal como se ha dicho, la ecuación de la fuerza (11) tiene componentes de frecuencia AC y DC, sin embargo, teniendo en cuenta el segundo término de  $\left( 1 + 2 \left( \frac{x}{g} \right) + \dots \right)$ , la fuerza también queda multiplicada por el desplazamiento  $x$ .

Este desplazamiento tiene componentes de frecuencia tanto DC como AC, y el producto del desplazamiento por los términos de voltaje de actuación dará lugar a un comportamiento no lineal del sistema [10]. Las implicaciones de este fenómeno se estudiarán en la sección dedicada al análisis de la no linealidad, sin embargo, es

justo realizar este comentario en este momento, ya que en el modelo lineal se tenderá a utilizar la aproximación  $\left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right) + \dots \approx 1\right)$ .

A modo de resumen se presenta la tabla II, en la cual se incluyen las componentes de la fuerza para las dos configuraciones de capacidades mostradas en la figura 3.

Componente en la fuerza	Caso antisimétrico $C_E = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g-x}$ ; $C_L = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g+x}$	Caso simétrico $C_E = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g-x}$ ; $C_L = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{g-x}$
Componente de fuerza DC	$-\frac{1}{2} \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left(4\left(\frac{x}{g}\right) + 8\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \dots\right)$ $-\frac{1}{4} V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right)\right)$	$-\frac{1}{2} \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left(2\left(1 + 2\frac{x}{g} + \dots\right)\right)$ $-\frac{1}{4} V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right)\right)$
Componente de fuerza AC ( $\omega$ )	$-V_{DC} V_{AC0} \cos(\omega t) \frac{C_0}{g} \left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right)\right)$	
Componente de fuerza AC ( $2\omega$ )	$F_{eAC^2, ACDC} = -\frac{1}{4} V_{AC0}^2 \cos(2\omega t) \frac{C_0}{g} \left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right)\right)$	

**Tabla II.** Componentes frecuenciales de la fuerza de actuación.

Como se ha dicho anteriormente, las componentes de fuerza AC son distintas para las dos configuraciones de capacidades, sin embargo, la fuerza DC es siempre la misma en ambos casos.

### 3.1 Constante elástica de origen electrostático: *Spring softening*

Con el objetivo de relacionar la tabla II con la ley de Hooke se calcula el valor medio de la derivada de la fuerza electrostática ( $F_e$ ) respecto al desplazamiento  $x$ . Al realizar el valor medio los términos cosenoidales quedan promediados con un valor medio nulo, quedando únicamente los términos mostrados en (12)

$$\frac{d\langle F_e \rangle}{dx} = k_{el} = -\left\langle 2V_{DC}^2 + \frac{1}{2} V_{AC0}^2 \right\rangle \frac{C_0}{g^2} \quad (12)$$

Esta constante elástica  $k_{el}$  de origen eléctrico tiene un valor negativo, por lo tanto el sistema Masa-Muelle-Amortiguador que antes experimentaba una fuerza elástica de recuperación frente a desplazamientos  $x$  ahora experimenta una segunda fuerza de origen eléctrico a favor del movimiento.

$$F_{Hooke} = -kx + k_{el}x = (k_{el} - k)x \quad (13)$$

Esto hace que la constante elástica efectiva del sistema Masa-Muelle-Amortiguador ahora sea inferior. Anteriormente se ha calculado la frecuencia de resonancia natural del sistema, cuyo valor era  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Ahora la nueva frecuencia de resonancia modificada, dada la configuración electrostática definida en el apartado es:

$$\omega_{0e}^2 = \frac{k - k_{el}}{m} = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{k_{el}}{k} \right) = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{C_0}{g^2} \frac{2V_{DC}^2 + \frac{1}{2}V_{AC0}^2}{k} \right) \quad (14)$$

Por lo tanto, la nueva frecuencia de resonancia depende tanto de los voltajes  $V_{DC}$  como  $V_{AC}$ , a la vez que existe una dependencia inversa cúbica con respecto a la distancia de equilibrio entre las placas  $g$ . Este fenómeno es conocido como ablandamiento electrostático de la constante elástica efectiva del resonador y tiene por nombre general *electrostatic softening*.

### 3.2 Constante elástica total negativa: colapso de la estructura

#### “pulling”

Este fenómeno de ablandamiento tiene como límite el punto en el cual  $k - k_{el} < 0$ . En este momento la ley de Hooke inversa se impone, por lo que un desplazamiento de la estructura resonante tiene como respuesta una fuerza en la misma dirección del desplazamiento, lo que produce que la estructura colapse contra el electrodo de excitación. El colapso o *pulling* se da cuando se cumple la inecuación:

$$\frac{g^2 k}{C_0} \leq 2V_{DC}^2 + \frac{1}{2}V_{AC0}^2 \quad (15)$$

El colapso puede tener lugar tanto por un voltaje DC (Colapso estático) como por un voltaje AC (Colapso dinámico). Este colapso marca la frontera límite de operación del resonador, por lo que la ecuación (15) indica los límites de actuación del resonador en ambos casos.

## 4 Transducción capacitiva

La excitación electrostática se basa en aplicar un voltaje entre los extremos de la capacidad formada entre la superficie del resonador, el electrodo de excitación y el electrodo de lectura. Debido a este voltaje aparece una fuerza atractiva entre los electrodos y la estructura, lo que produce el desplazamiento del resonador. La aplicación de esta fuerza se ha estudiado en el apartado anterior. Ahora, el desplazamiento del resonador produce la variación de las capacidades  $C_E$  y  $C_L$ . La carga almacenada sobre una capacidad queda descrita por (16).

$$q = CV \quad (16)$$

Por lo tanto, si el movimiento del resonador junto al cambio en el voltaje aplicado no mantiene constante el producto  $CV$ , la capacidad experimentará un proceso de carga o descarga eléctrica. Esta variación en la carga se obtiene mediante la derivación temporal de la ecuación (16) como se muestra en (17).

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C_L V_L)}{dt} = V_L \frac{dC_L}{dt} + C_L \frac{dV_L}{dt} = I_m + I_p \quad (17)$$

Donde  $C_L$  es la capacidad formada entre el electrodo de lectura y la estructura móvil,  $C_{EL}$  es la capacidad formada entre el electrodo de excitación y el electrodo de lectura.  $V_L$  es el voltaje aplicado entre los extremos de la capacidad  $C_L$  y  $V_{EL}$  el voltaje aplicado entre los extremos de la capacidad  $C_{EL}$ .

La corriente que resulta de mayor interés es la corriente mocional correspondiente a la carga y descarga de  $C_L$  vista desde el punto de vista de corriente que entra (signo negativo) o sale (signo positivo) del electrodo de lectura, ya que será considerada como la señal de salida del resonador ( $I_m$ ). El término  $I_p$  representa una corriente parásita que circula a través de las capacidades formadas entre los electrodos de actuación y de lectura, y entre la estructura resonante y el electrodo de lectura. Esta corriente parásita queda sumada a la corriente mocional, por lo que puede llegar a dominar sobre la corriente mocional, impidiendo sensar correctamente el movimiento de la estructura resonante.

En este caso, la diferencia de potencial entre el electrodo de lectura y la estructura

es



$-V_{DC}$ . Tomamos esta ya que nos interesa analizar el sistema desde el nodo de lectura. Desarrollando el término correspondiente a la corriente mocional se tiene:

$$I_m = -V_{DC} \frac{dC_L}{dt} = -V_{DC} \frac{dC_L}{dx} \frac{dx}{dt} = -jV_{DC} \frac{dC_L}{dx} \omega x \quad (18)$$

Donde se ha dado a  $x(t)$  el valor cosenoidal  $x_0 \cos(\omega t)$  donde  $x_0$  es la amplitud del desplazamiento. La relación entre la fuerza  $F_E$  y el desplazamiento se definía en (3). Para la frecuencia de resonancia esta ecuación toma el valor:

$$\frac{x(\omega)}{F_e(\omega)} = \frac{1}{k_e} \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega/(Q\omega_0)} \right) ; \quad \frac{x(\omega_0)}{F_e(\omega_0)} = -j \frac{Q}{k_e} \quad (19)$$

Combinando las ecuaciones (18) y (19) se obtiene:

$$x(\omega = \omega_0) = \frac{1}{k_e} \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega/(Q\omega_0)} \right) F_e = -j \frac{Q}{k_e} \frac{dC_E}{dx} V_{DC} V_{AC} \quad (20)$$

Recuperando la ecuación (18) tenemos un valor de la corriente mocional  $I_m$ :

$$I_m(\omega_0) = \left( -jV_{DC} \frac{dC_L}{dx} \omega \right) \left( -j \frac{Q}{k_e} \frac{dC_E}{dx} V_{DC} V_{AC} \right) = -\frac{Q}{k_e} \frac{dC_L}{dx} \frac{dC_E}{dx} V_{DC}^2 V_{AC} \omega \quad (21)$$

Sustituyendo del valor de las derivadas de  $C_L$  y  $C_E$  en aproximación de pequeñas oscilaciones se tiene (22). Como se ha definido anteriormente  $C_L$  es la capacidad entre la estructura y el electrodo de lectura, y  $C_E$  la capacidad entre la estructura y el electrodo de actuación.

$$\left| \frac{dC_L}{dx} \right| = \left| \frac{dC_E}{dx} \right| = \frac{C_0}{g} \quad (22)$$

Por lo que la corriente mocional, dependiendo del signo de las derivadas de  $C_L$  y  $C_E$  será:

$$I_m = \pm \frac{V_{dc}^2 V_{ac} \omega C_0^2 Q}{g^2 k} \quad (23)$$

Siendo positiva para el caso en el que las derivadas de las capacidades sean de signo opuesto y negativa cuando las derivadas tengan el mismo signo. Esta relación da lugar a la definición de una impedancia mocional:

$$R_m = \frac{V_{AC}}{I_m} = \frac{g^2}{V_{DC}^2 \omega C_0^2} \frac{k}{Q} = \frac{g^4}{V_{DC}^2 \omega A^2 \epsilon^2 \epsilon_r^2} \frac{k}{Q} \quad (24)$$

A partir de la ecuación (24) se puede observar la dependencia de  $R_m$  con el área de acoplo entre la estructura y el electrodo de excitación, así como la distancia  $g$  entre ambos. Sin embargo esta ventaja puede perderse cuando se compara la corriente mocional con una segunda corriente generada en el sistema debida a la configuración de electrodos, la corriente parásita. El valor de esta es:

$$I_p = C_{EL} \frac{dV_{EL}}{dt} = j\omega C_0 V_{AC} \quad (25)$$

Donde  $C_{EL}$  representa la capacidad generada entre los electrodos de excitación y lectura, y  $V_{EL}$  la diferencia de potencial entre el electrodo de excitación y el electrodo de lectura ( $V_{AC}$ ). El cociente entre la corriente mocional y la corriente parásita es:

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{\frac{V_{DC}^2 V_{AC} \omega C_0^2 Q}{g^2 k}}{j\omega V_{AC} C_0} = -j \frac{V_{DC}^2 \epsilon_r \epsilon A Q}{g^3 k} \quad (26)$$

La corriente mocional y la corriente parásita están desfasadas  $\pi/2$  radianes, por lo que si el cociente entre ambas no es suficientemente grande la corriente de salida a la frecuencia de resonancia natural del resonador no estará en fase con el voltaje de excitación. En la figura 4 se muestra el resultado de la suma fasorial de la corriente mocional y la corriente parásita para tres casos.

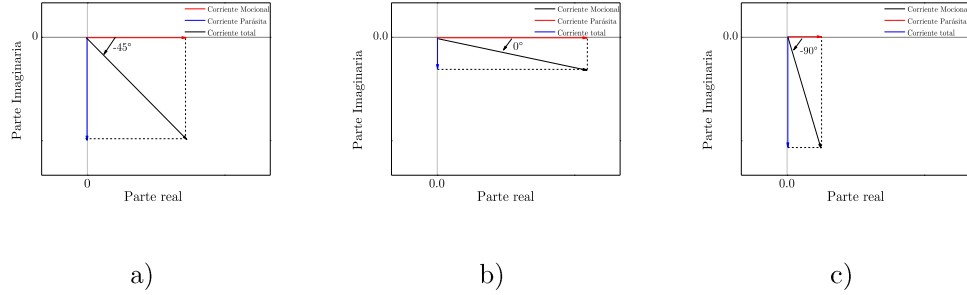


Figura 4. Representación de la suma fasorial de la corriente mocional y la corriente parásita, resultando en la corriente total de sensado. En la figura se muestran tres casos extremos: a) Corrientes mocional y parásita del mismo orden de magnitud, b) Corriente mocional de magnitud muy superior a la magnitud de la corriente parásita y c) Corriente mocional de magnitud muy inferior a la magnitud de la corriente parásita.

En el caso en el cual la corriente parásita sea muy superior en magnitud a la corriente mocional no será posible sensar el movimiento del resonador.

#### 4.1 Modelo RLC para el resonador MEMS

En el apartado 1.1 se ha expuesto el modelo Masa-Muelle-Amortiguador que describe el comportamiento dinámico de un resonador. A través de la ecuación (27).

$$m\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (27)$$

Se relacionaba la fuerza con el desplazamiento del sistema. Una vez estudiado el comportamiento electromecánico del resonador resulta interesante obtener una ecuación similar que describa una relación entre la tensión AC de actuación y la corriente mocional de sensado. En primer lugar, la componente de fuerza a frecuencia  $\omega$  generada por una señal AC de frecuencia  $\omega$  es:

$$F(t) = -V_{DC}V_{AC}(t)\frac{C_0}{g} \quad (28)$$

Por otra parte, la corriente mocional resultante del desplazamiento de  $x$  es:

$$I_m(t) = -V_{DC} \frac{C_0}{g} \dot{x}(t) \quad ; \quad \dot{x}(t) = -\frac{g I_m(t)}{V_{DC} C_0} \quad (29)$$

A partir de esta ecuación se pueden obtener los términos equivalentes a  $x$ ,  $\dot{x}$ , y  $\ddot{x}$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{g}{C_0} \frac{I_m(t)}{V_{AC}(t)} \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{g}{C_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{I_m(t)}{V_{AC}(t)} \right) \\ x(t) &= -\frac{g}{C_0} \int_0^t \frac{I_m(t)}{V_{AC}(t)} \end{aligned} \quad (30)$$

Sustituyendo los términos en la ecuación diferencial se tiene:

$$m \frac{g}{C_0 V_{DC}} \frac{d}{dt} I_m(t) + \gamma \frac{g}{C_0} \frac{I_m(t)}{V_{DC}} + k \frac{g}{C_0 V_{DC}} \int_0^t I_m(t) = V_{DC} V_{AC}(t) \frac{C_0}{g} \quad (31)$$

Comparando la ecuación con la ecuación del circuito RLC se obtienen los parámetros electrónicos equivalentes al sistema resonador [11].

$$\begin{aligned} L_m \frac{di}{dt} + R_m i + \frac{1}{C_m} \int_0^t i dt &= V_{AC} \\ L_m = m \left( \frac{g}{C_0 V_{DC}} \right)^2 \quad ; \quad R_m = \gamma \left( \frac{g}{C_0 V_{DC}} \right)^2 \quad ; \quad C_m = \frac{1}{k} \left( \frac{C_0 V_{DC}}{g} \right)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Como se vio en el apartado dedicado a la transducción capacitiva el signo del producto  $\frac{dC_L}{dx} * \frac{dC_E}{dx}$  condiciona la dirección de la corriente mocional a la frecuencia de resonancia, pudiendo estar en fase o antifase respecto al voltaje AC de excitación. Esto se debe a que se ha supuesto que la tensión DC aplicada entre la estructura resonante y los electrodos de excitación y lectura es la misma en magnitud y signo. En un sistema más general en el que las tensiones DC aplicadas

son diferentes se define el factor de acoplo electromecánico, este factor se muestra en la ecuación (33) y relaciona la corriente mocional generada en el electrodo respecto a la velocidad de movimiento ( $\dot{x} = \partial x / \partial t$ ) de la estructura.

$$\eta = \frac{I_0}{\partial x / \partial t} = V_{DC} \frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g^2} V_{DC} \quad (33)$$

Recuperando la ecuación (21) en la que se muestra la corriente mocional esta puede expresarse a partir de los factores de acoplo electromecánicos (34).

$$I_m(\omega_0) = -\frac{Q}{k_e} \frac{dC_L}{dx} \frac{dC_E}{dx} V_{DC-E} V_{DC-L} V_{AC} \omega = -\frac{Q}{k_e} \eta_E \eta_L V_{AC} \omega \quad (34)$$

Donde  $V_{DC-E}$  y  $V_{DC-L}$  son respectivamente los voltajes DC aplicados entre electrodo de excitación y resonador y electrodo de lectura y resonador. A partir del cociente de los factores de acoplo electromecánicos se puede determinar pues la dirección de la corriente mocional, definiendo el factor como se muestra en (35).

$$\phi_{21} = \frac{\eta_E}{\eta_L} \quad (35)$$

A la hora de representar el circuito correspondiente al resonador se utiliza el sistema RLC junto a un transformador que corrige la dirección de la corriente mocional en función del signo de  $\phi_{21}$  como se muestra en la figura 5.

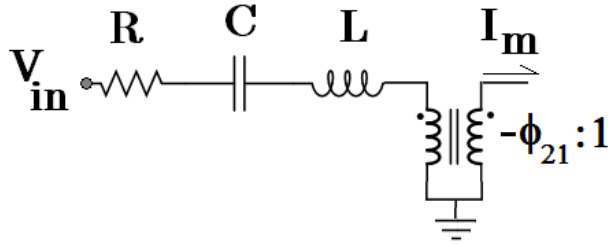


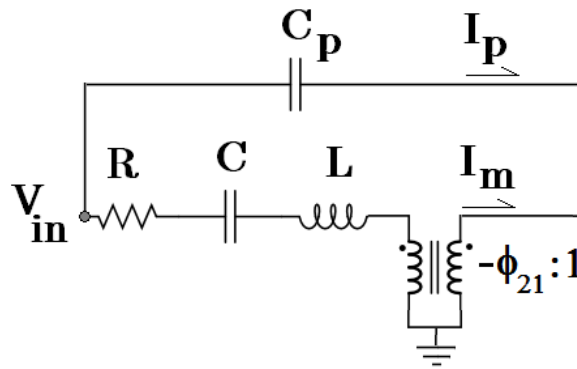
Figura 5. Modelo eléctrico equivalente del resonador.

## 4.2 Modelo eléctrico para la corriente parasita

Al igual que se ha encontrado un equivalente eléctrico a la corriente mocional se puede encontrar un equivalente para la corriente parásita. A partir de la ecuación de la corriente parásita (36) se reconoce un comportamiento puramente capacitivo con un valor de capacidad  $C_P$ .

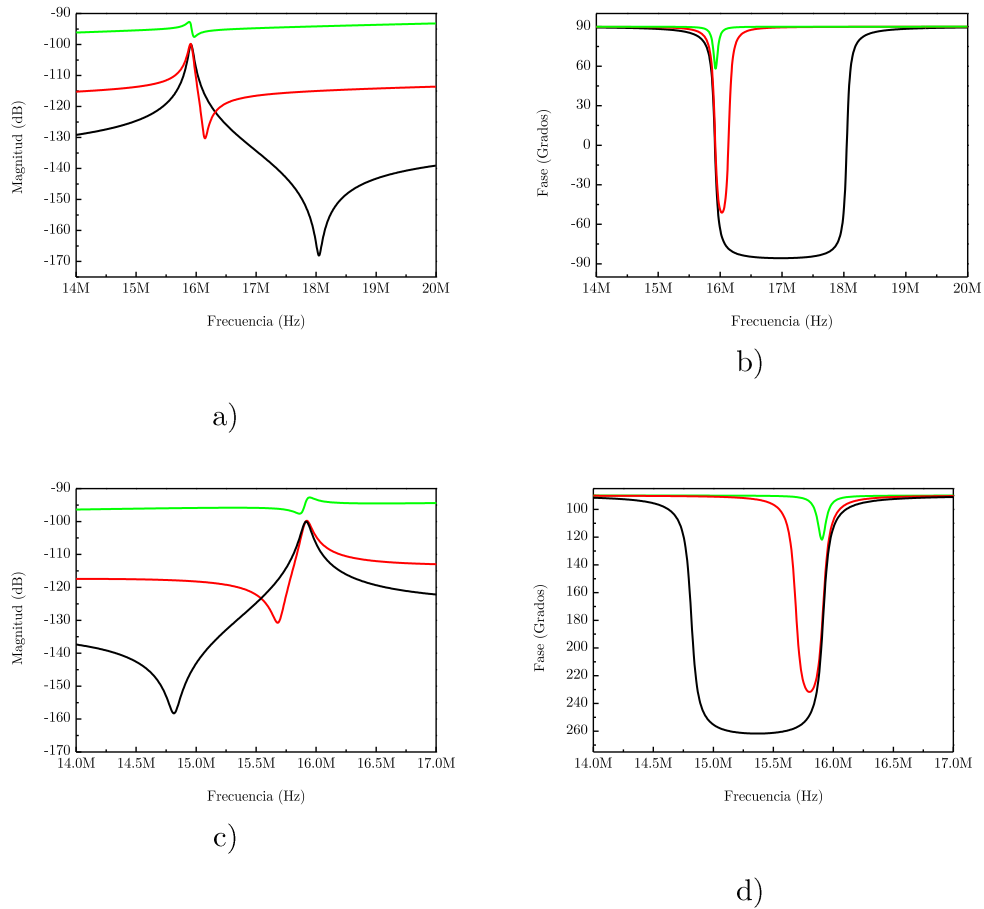
$$I_p = j\omega V_{AC} C_P \quad (36)$$

Esta corriente, al estar sumada la corriente parásita a la corriente mocional, esta capacidad aparecerá en paralelo al sistema RLC como se puede ver en la figura 6.



**Figura 6.** Modelo eléctrico equivalente del resonador incluyendo la capacidad parásita formada entre los electrodos de excitación y lectura.

En la figura 7 se muestra la simulación de dos sistemas RLC. La diferencia entre ambos radica en el signo del transformador. En el primer caso 6.a y 6.b no invierte la fase del circuito RLC mientras que el en segundo 6.c y 6.d si la invierte.



**Figura 7.** Simulación de a) Magnitud b) Fase de un sistema  $RLC||C_p$  en el que no hay inversión de fase. Simulación de c) Magnitud b) Fase en un sistema  $RLC||C_p$  en el que hay inversión de fase. Los valores de R, L y C utilizados son  $5M\Omega$ , 50H, y 2 aF respectivamente. Los valores correspondientes a las capacidades parásitas con en cada caso 10aF (negro), 100aF (rojo) y 1fF (verde).

Como se puede apreciar en la figura 7, cuando el valor de la capacidad parásita se incrementa la altura de la magnitud del pico de resonancia crece. Al mismo tiempo que esto ocurre tiene lugar la aparición de una antirresonancia cada vez más cercana en frecuencia al pico de resonancia. Cuanto más cercana es la antirresonancia al pico de resonancia menor es el factor de calidad del mismo y menor es la transición de fase en las cercanías del pico de resonancia.

## 5 Modelo dinámico no lineal

El modelo lineal del resonador MEMS mostrado en los apartados anteriores es válido únicamente cuando se hace la aproximación de pequeña amplitud de desplazamiento ( $x \ll g$ ). Sin embargo, debido a la naturaleza de los sistemas electromecánicos de escala micrométrica o nanométrica, la amplitud de movimiento no será despreciable respecto al gap. Es por esto que se necesita de una teoría que compagine el comportamiento lineal y no lineal del resonador fijando una frontera entre ambos. Esto permitirá distinguir nítidamente entre un resonador operando en el régimen lineal o en el régimen no lineal.

En los resonadores actuados electrostáticamente y sensados capacitivamente las capacidades formadas entre los electrodos y la estructura resonante, descritas por el modelo de placas plano-paralelas, muestran un comportamiento no lineal respecto al desplazamiento. La fuerza de actuación de la estructura, al tener una dependencia cuadrática con respecto al voltaje de actuación también tiene un comportamiento no lineal. Por último, la constante elástica de la estructura mecánica, cuando el desplazamiento supera la región elástica [12] tiene un comportamiento no lineal. Este comportamiento no lineal en la constante elástica contribuye a su vez a la constante elástica efectiva del sistema, en la que se mezclan las contribuciones mecánicas y eléctricas estudiadas en el apartado de actuación electrostática.

El comportamiento no lineal va a dar lugar a la aparición de resonancia súper y subarmónicas a frecuencias múltiplo de la frecuencia de excitación [13], [14]. A continuación se estudiará el efecto de las no linealidades del sistema electromecánico partiendo desde la incorporación de los primeros términos no lineales hasta los términos de mayor orden.

### 5.1 Constante elástica no lineal, contribuciones eléctricas y mecánicas.

Como se vio en el apartado de actuación electrostática, cuando se calculaba el término correspondiente a la derivada de la capacidad formada entre los electrodos y la estructura resonante esta se desarrollaba mediante un desarrollo de Taylor. En este caso el cociente  $\frac{x}{g}$  se consideraba muy pequeño, sin embargo no despreciable. Las derivadas de las capacidades mostradas en la ecuación (7) se recuperan nuevamente en la ecuación (37)



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g-x}\right) &= \frac{C_0}{g} \sum_{n=0} (n+1) \left(\frac{x}{g}\right)^n \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{g+x}\right) &= -\frac{C_0}{g} \sum_{n=0} (n+1) \left(\frac{x}{g}\right)^n (-1)^n\end{aligned}\quad (37)$$

Para la actuación en un sistema electromecánico configurado a dos puertos se tenían dos opciones. La primera se aplicaba al caso en la que la derivada de las capacidades de actuación y lectura mostraban la misma dependencia, dando lugar a la fuerza electrostática mostrada en (38).

$$F_{E-DC} = -\frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left( 2\left(\frac{x}{g}\right) + 4\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \dots \right) - \frac{1}{4} V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left( 2\frac{x}{g} + 3\left(\frac{x}{g}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \dots \right) \quad (38)$$

Y una segunda opción en la que las capacidades de actuación y lectura mostraban una dependencia inversa, la fuerza DC resultante pasa a ser (39).

$$F_{E-DC} = \frac{C_0}{g} V_{DC}^2 \left( 2\frac{x}{g} + 3\left(\frac{x}{g}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \dots \right) - \frac{1}{2} V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left( 2\frac{x}{g} + 3\left(\frac{x}{g}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \dots \right) \quad (39)$$

En ambos casos (38) y (39) la fuerza es no lineal. Por lo tanto, la ley de Hooke debe expresarse como se muestra en la ecuación (40).

$$F = kx = k_0 x (1 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots) \quad (40)$$

Expresando la no linealidad de la constante elástica como se muestra en la ecuación (41) se pueden identificar los términos no lineales de la constante elástica eléctrica para los casos mostrados en (38) y (39).

$$k = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots \quad (41)$$

Donde  $k_0$  es la constante elástica lineal, y  $k_i$  es el término no lineal de orden  $i$ . En la tabla III se muestran los primeros términos no lineales en la constante elástica de origen eléctrico correspondientes a las ecuaciones (38) y (39).

Término no lineal	Configuración Asimétrica	Configuración Simétrica
$k_0$	$-\frac{2C_0}{g^2}V_{DC}^2 - V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g^2}$	$-\frac{2C_0}{g^2}V_{DC}^2 - V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g^2}$
$k_1$	$-\frac{3}{2}V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left(\frac{1}{g}\right)^2$	$-3\frac{C_0}{g}V_{DC}^2 \left(\frac{1}{g}\right)^2 - \frac{3}{2}V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left(\frac{1}{g}\right)^2$
$k_2$	$-4\frac{C_0}{g}V_{DC}^2 \left(\frac{1}{g}\right)^3 - V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} 4\left(\frac{1}{g}\right)^3$	$-4\frac{C_0}{g}V_{DC}^2 \left(\frac{1}{g}\right)^3 - 2V_{AC0}^2 \frac{C_0}{g} \left(\frac{1}{g}\right)^3$

**Tabla III.** Contribuciones no lineales a la constante elástica de origen eléctrico.

Como se puede observar, el efecto de la no linealidad de origen eléctrico es mayor en los términos de  $i$  impares para la configuración simétrica, mientras que los términos de  $i$  pares son los mismos para ambas configuraciones. Los valores de  $k_i$  mostrados en la tabla tienen un origen puramente eléctrico debido a las condiciones de actuación y lectura del sistema. Sin embargo, estas contribuciones no son las únicas, sino que también hay contribuciones a la no linealidad generadas por la constante elástica mecánica. Estos valores de la constante mecánica dependen de la geometría del resonador y se pueden obtener a partir de la ecuación de Euler-Bernoulli aplicada al resonador [15] con una elevada precisión, o estimada a partir de modelos geométricos más sencillos [16] con una precisión del 30%.

## 5.2 Efecto de la constante elástica no lineal

El efecto de la constante elástica no lineal sobre el comportamiento frecuencial del resonador da lugar a la inclinación de la curva de resonancia hacia frecuencias superiores (hardening) o frecuencias inferiores (softening) en función de si la no linealidad dominante es de origen mecánico o eléctrico respectivamente. Como primera aproximación, para poder modelar este comportamiento basta con tomar los términos no lineales de la nueva constante elástica del sistema hasta segundo orden de no linealidad ( $i=2$ ), siendo cada término suma de contribuciones

mecánicas y eléctricas. Esta constante elástica no lineal se muestra en la ecuación (42).

$$k = k_0 + k_1x + k_2x^2 \quad (42)$$

Por lo tanto, el nuevo problema a resolver es la ecuación diferencial no lineal que describe el desplazamiento no lineal de la estructura resonante. Esta ecuación tiene la forma (43).

$$m_e \ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + k_0x(t) + k_1x(t)^2 + k_2x(t)^3 = F(t) \quad (43)$$

El procedimiento para resolver la ecuación diferencial consta de dos pasos explicados en el tutorial de Kaajakari y en el libro de Landau [17] [18]: El primero es analizar el comportamiento dinámico del sistema no forzado y no amortiguado, y obtener su frecuencia de resonancia. Tras esto se sustituiría la nueva frecuencia natural de resonancia en la ecuación (3). Primero se buscaría la solución de la ecuación:

$$m_e \ddot{x}(t) + k_0x(t) + k_1x(t)^2 + k_2x(t)^3 = 0 \quad (44)$$

Obteniendo mediante la teoría de perturbaciones el valor para la frecuencia natural de resonancia:

$$\omega_0' = \omega_0 + \kappa x(s)^2 \quad (45)$$

Donde

$$\omega_0 = \frac{k_0}{m_e} = \frac{k_e}{m_e} \quad ; \quad \kappa = \frac{3k_2}{8k_0} \omega_0 - \frac{5k_1^2}{12k_0^2} \omega_0 \quad (46)$$

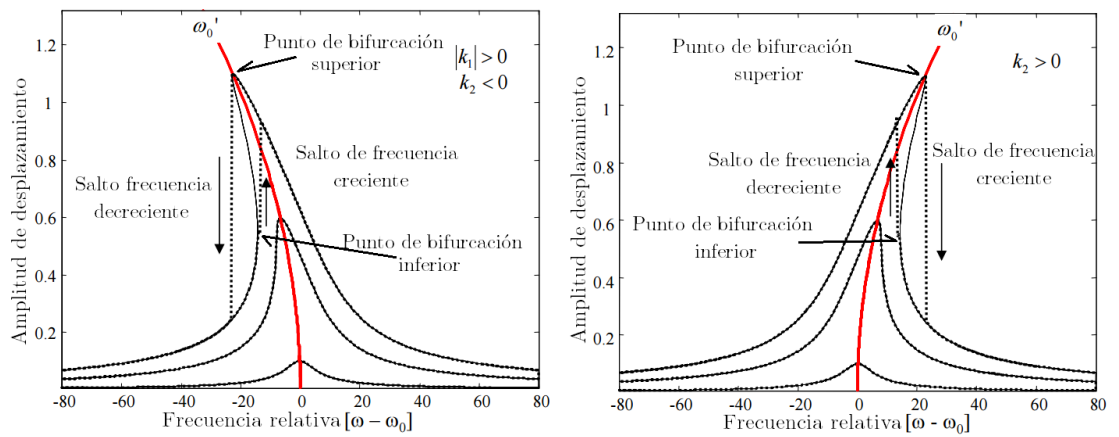
Sustituyendo la nueva frecuencia de resonancia natural del sistema en la ecuación (3) se tiene:

$$\frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0'}\right)^2 + j\omega / (Q\omega_0')} \quad (47)$$

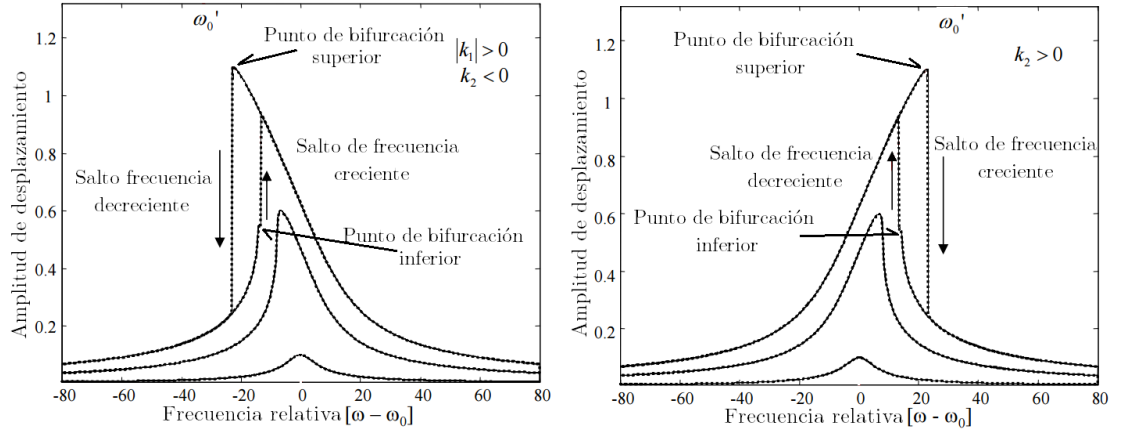
Donde ahora  $\omega_0'$  depende de  $x(s)$ , por lo que se puede despejar  $x(s)$  en la ecuación (47), obteniendo:

$$x(s)^2 = \frac{4Q^2(\omega - \omega_0)\kappa \pm \sqrt{4Q^4(\omega - \omega_0)^2\kappa^2 - 3Q^2(\omega - \omega_0)\kappa}}{6Q^2\kappa^2} \quad (48)$$

La ecuación (48) implica la multivaluación de la curva para un conjunto de frecuencias. La representación gráfica de la ecuación (48) frente a  $\omega$  se muestra en la figura 8, para un mismo voltaje DC y distintos voltajes AC de actuación.



a)



b)

**Figura 8:** a) Respuesta amplitud-frecuencia teórica para el sistema dinámico no lineal en las proximidades de su resonancia. [17] b) Respuesta amplitud-frecuencia simulando la respuesta experimental para el sistema no lineal en las proximidades de su resonancia.

El crecimiento e inclinación de las curvas está ligado al incremento en la amplitud de excitación del resonador. En la gráfica de la izquierda de la figura 4a se ha tomado un valor negativo para  $k_2$ , lo que implicaría la dominancia del término no lineal electrostático frente al mecánico. En la gráfica de la derecha de la figura 8.a  $k_2$  es positivo, teniendo un comportamiento no lineal mecánico dominante.

Cuando la amplitud de excitación sobrepasa el valor crítico:

$$x_c = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{3}Q|\kappa|}} \quad (49)$$

La expresión (48) pasa a estar multivaluada. Esto implica la coexistencia de dos soluciones correspondientes a la misma frecuencia. Como se puede observar en la figura 8, para la tercera curva representada en ambas gráficas esta amplitud se ha sobrepasado. Esto da lugar a la aparición de un ciclo de histéresis frecuencia. Cuando el sistema se excita mediante un barrido ascendente de frecuencia la respuesta del sistema será seguir curva hasta llegar al punto de bifurcación, punto en el cual saltará hasta la parte superior de la curva. Sin embargo, si se realiza un barrido en frecuencia descendente, este seguirá la curva superior hasta llegar al punto de bifurcación superior. En este punto se producirá un salto hasta el fragmento de curva inferior. Estos puntos y recorridos quedan descritos en la figura 8b.

### 5.3 Procesos de mezcla de frecuencias derivados de la no linealidad

Durante el estudio de la actuación electrostática y lectura capacitiva se han evitado los términos no lineales. Esto quedaba justificado ya que se aplicaba la aproximación de pequeña amplitud de desplazamiento, donde  $\frac{x}{g} \ll 1$  y por lo tanto  $\left(1 + 2\left(\frac{x}{g}\right) + \dots \approx 1\right)$ . Sin embargo, en el sistema electromecánico no lineal las no linealidades del sistema producen el producto de intermodulado entre las frecuencias de las señales, como ya se veía en la ecuación de la fuerza de actuación electrostática (Ver tabla II), dando lugar a la aparición de tonos a nuevas frecuencias combinación de las anteriores. El origen matemático del producto de intermodulado viene del producto de cosenos, que transforma la frecuencia de dos señales de excitación en señales de salida de la forma:

$$\cos(\omega_1) \cos(\omega_2) = \frac{\cos(\omega_1 + \omega_2) + \cos(\omega_1 - \omega_2)}{2} \quad (50)$$

Así pues se pueden definir productos de mezclado de frecuencia en el sistema tales que cuando existan distintas componentes AC de excitación en el sistema, las componentes frecuenciales de la corriente mocional a la salida del resonador se obtendrán de la forma:

$$I_m(\omega_0 \pm \Delta\omega) = 2\Gamma V_{AC01}(\omega_0) V_{AC02}(\Delta\omega) \quad (51)$$

Donde  $\Gamma$  es el coeficiente de mezclado de frecuencias,  $V_{AC01}$  es el voltaje AC aplicado en el electrodo de actuación, y  $V_{AC02}$  es un voltaje AC que puede ser aplicado tanto en el electrodo de actuación como directamente sobre la estructura resonante. El objetivo del voltaje  $V_{AC02}$  sirve para predecir el comportamiento del resonador cuando trabaje como un mezclador. Aunque la mayor utilidad para la presente tesis está enfocada en predecir cómo afectarán las componentes de ruido que aparezcan en el voltaje de actuación y en el voltaje de polarización a la corriente mocional de salida del sistema.

El origen de estos términos de mezclado de frecuencia viene tanto de la actuación electrostática como de la transducción capacitiva o la no linealidad de la constante elástica mecánica. En la introducción del apartado se han citado los orígenes de estas no linealidades. A continuación se van a relacionar dichas no

linealidades con los coeficientes de mezclado de frecuencias que afectarán a las componentes frecuenciales en la corriente mocional del resonador.

En los puntos 2 y 3, dedicados a la actuación electrostática y la lectura capacitiva respectivamente se ha analizado la transformación de un voltaje de actuación en una corriente mocional de salida. Este efecto se da en tres etapas: La primera etapa transforma el voltaje de actuación en una fuerza electrostática. La segunda transforma la fuerza electrostática en el desplazamiento de la estructura. Por último, el desplazamiento de la estructura se transforma en una corriente mocional mediante la variación de la capacidad ligada a este desplazamiento y el voltaje a los extremos de esta capacidad. Cada etapa del proceso total se puede ver afectada por la no linealidad, teniendo como consecuencia un coeficiente de mezclado de frecuencia. En la tabla IV se resumen las causas y efectos de cada tipo de no linealidad en cada proceso [19].

Proceso	Causa de no linealidad	Efecto de la no linealidad
Generación de la fuerza	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>F_E \propto V^2</math></li> <li>- <math>\frac{dC_E}{dx} = \frac{C_0}{g} \left(1 + \frac{x}{g}\right)</math></li> </ul>	$\Gamma_F = \frac{Q\omega C_0^2 V_{dc}}{2kg^2} \left(1 - j2 \frac{QC_0 V_{dc}^2}{kg^2}\right)$
Transformación de la fuerza en desplazamiento	- $k = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$	$\Gamma_k = \frac{3Q^2 \omega C_0^4 V_{dc}^5}{2k^3 g^6}$
Transducción del movimiento	- $\frac{dC_L}{dx} = \frac{C_0}{g} \left(1 + \frac{x}{g}\right)$	$\Gamma_C = \frac{Q\omega C_0^2 V_{dc}}{2kg^2}$

**Tabla IV.** Resumen del origen y valor de los coeficientes de mezclado de frecuencia.

Como se estudiará en el próximo capítulo, los términos de mezclado que aparecen en un resonador no lineal van a ser claves a la hora de comprender el funcionamiento del ruido tanto en los resonadores no lineales como en los sistemas osciladores cuyo resonador esté trabajando en el régimen no lineal.

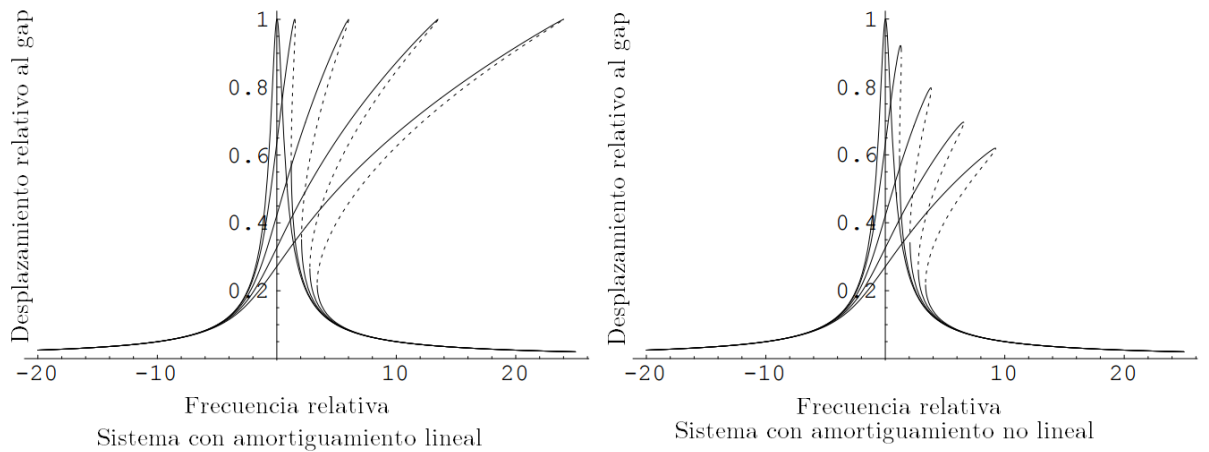
#### 5.4 Efecto de un término de amortiguamiento no lineal

En los sistemas NEMS se ha detectado que no solamente la no linealidad elástica juega un papel importante, sino que además la no linealidad en el

amortiguamiento puede ser de gran importancia. El origen de esta no linealidad es a día de hoy desconocido, aunque existen modelos que tratan de justificar físicamente su aparición [20], [21]. El modelo más aceptado para el amortiguamiento no lineal es un término con dependencia cuadrática respecto a  $x$ . De esta forma se incluiría en la ecuación diferencial no lineal el nuevo término  $\gamma_2 x(t)^2 \dot{x}(t)$ .

$$m_e \ddot{x}(t) + \gamma_0 \dot{x}(t) + \gamma_2 x(t)^2 \dot{x}(t) + k_0 x(t) + k_1 x(t)^2 + k_2 x(t)^3 = F(t) \quad (52)$$

Ante la incapacidad de encontrar una solución analítica a la ecuación, Lifshitz y Cross han utilizado la resolución numérica para representar las soluciones de la ecuación (52) para distintas amplitudes de movimiento (Ver figura 9).



**Figura 9:** Respuesta amplitud-frecuencia para el sistema dinámico no lineal en las proximidades de su resonancia. [22]

Como puede apreciarse en la figura 8, para la gráfica de la izquierda la máxima amplitud de movimiento se mantiene constante independientemente de la amplitud de excitación, sin embargo, en la gráfica de la derecha puede apreciarse el efecto del amortiguamiento no lineal, que se ve incrementado al incrementar la amplitud de excitación.



## 6 Referencias

- [1] <http://www.coventor.com/>
- [2] <http://www.ansys.com/>
- [3] <https://www.comsol.com/>
- [4] P. Polunin et al. “Characterizing MEMS Nonlinearities Directly: The Ring-Down Measurements”. 18<sup>th</sup> International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS 2015). Anchorage, AK. 21-25 June 2015.
- [5] H. Hosaka, K. Itao, S. Kuroda, “Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators”, *Sensors and Actuators (A)*, vol. 49, pp. 87-95, 1995.
- [6] K.Y. Yasumura, T.D. Stowe, E.M. Chow, T. Pfafman, T.W. Kenny, B.C. Stipe, and D. Rugar, "Quality Factors in Micron- and Submicron-Thick Cantilevers", *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 9 (1), pp. 117-125, 2000.
- [7] Amy Duwel, Rob N. Candler, Thomas W. Kenny, and Mathew Varghese. “Engineering MEMS Resonators With Low Thermoelastic Damping”. *Journal of Microelectromechanical Systems* (Volume:15, Issue: 6 ). Dec 2006.
- [8] J.Teva, G.Abadal, Z.J.Davis, J.Verd, X.Borrisé, A.Boisen, F.Pérez-Murano, N.Barniol, “On the electromechanical modelling of a resonating nano-cantilever-based transducer”, *Ultramicroscopy*, vol. 100, pp. 225-232, 2004.
- [9] J.E.-Y. Lee, A.A. Seshia “Parasitic feedthrough cancellation techniques for enhanced electrical characterization of electrostatic microresonators” *Sensors and Actuators A: Physical*. Volume 156, Issue 1, November 2009, Pages 36–42.
- [10] A. Uranga, J. Verd, J.L. Lopez, J. Teva, G. Abadal, F. Torres, J. Esteve, F. Perez-Murano and N. Barniol “Fully integrated MIXLER based on VHF CMOS-MEMS clamped-clamped beam resonator” *Electronics Letters* 12th April 2007 Vol. 43 No. 8.

- [11] C.T.-C. Nguyen and R.T. Howe, "An Integrated CMOS Micromechanical Resonator High-Q Oscillator", *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 34, no. 4, pp. 440-455, April 1999.
- [12] L.D. Landau & E.M. Lifshitz *Theory of Elasticity* (Volume 7 of A Course of Theoretical Physics ) Pergamon Press 1970
- [13] A. H. Nayfeh, *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley, 1979.
- [14] A. Oja, T. Mattila, H. Seppä, J. Kiihamäki, T. Lamminmäki, M. Koskenvuori, P. Rantakari, and I. Tittonen, "Nonlinear effects in bulk acoustic mode microresonators," in *Proc. Eurosensors'02, The 16th European Conference on Solid-State Transducers*, Prague, Czech Republic, Sept. 15–18, 2002, pp. 381–382.
- [15] L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, D. Chi, J. E. Sader, and M. L. Roukes. "Nonlinearity in a nanomechanical cantilevers". *Physical Review B* 87m 924394. 2013
- [16] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Oja, and H. Seppä, "Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators", *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 5, pp. 715-724, Oct. 2004.
- [17] [http://www.kaajakari.net/~ville/research/tutorials/nonlinear\\_resonators\\_tutorial.pdf](http://www.kaajakari.net/~ville/research/tutorials/nonlinear_resonators_tutorial.pdf)
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1999.
- [19] V. Kaajakari, J. K. Koskinen, and T. Mattila, "Phase noise in capacitively coupled micromechanical oscillators", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 52, No. 12, pp. 2322-2331, Dec. 2005.
- [20] Stav Zitsev and Eyal Buks. "Nonlinear damping in nanomechanical beam oscillator" ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands, 7-12 August 2005

[21] A. Eichler, J. Moser, J. Chaste, M- Zdrojek, and A. Bachtold. “Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene,” *Nature Nanotechnology* 6, 339-342. 2011

[22] <http://www.crossgroup.caltech.edu/papers/LifshitzCross08.pdf>

# III. Estabilidad del oscilador

## 1 Introducción

Independientemente del campo de aplicación de los sistemas osciladores la calidad de los mismos puede ser descrita por distintos parámetros. En función de los mejores parámetros de cada oscilador se determinará su campo óptimo de aplicación. Los osciladores de menor estabilidad pero bajo consumo de potencia pueden ser empleados como referencia de reloj en aplicaciones de bajos requisitos tales como microprocesadores, maquinas de estados lógicos, transferencia de datos. Por otra parte, para las aplicaciones de radio y comunicaciones basadas en la modulación de señales como telefonía móvil el oscilador debe destacar por su excelente ruido de fase. En el caso de las comunicaciones de alta velocidad, concretamente las comunicaciones de fibra óptica, es indispensable disponer de osciladores cuyo ruido jitter sea mínimo. Finalmente, existen una serie de productos que necesitan referencias de tiempo de alta estabilidad (o baja desviación Allan) tales como los dispositivos móviles o electrónica considerada vestimenta (wearables).

En el presente capítulo se analizan los parámetros más importantes a la hora de caracterizar la calidad de un sistema oscilador, centrándose en la estabilidad de la frecuencia y la estabilidad de la fase de cada uno de sus módulos (Resonador y amplificador) y su interacción al formar el sistema oscilador.

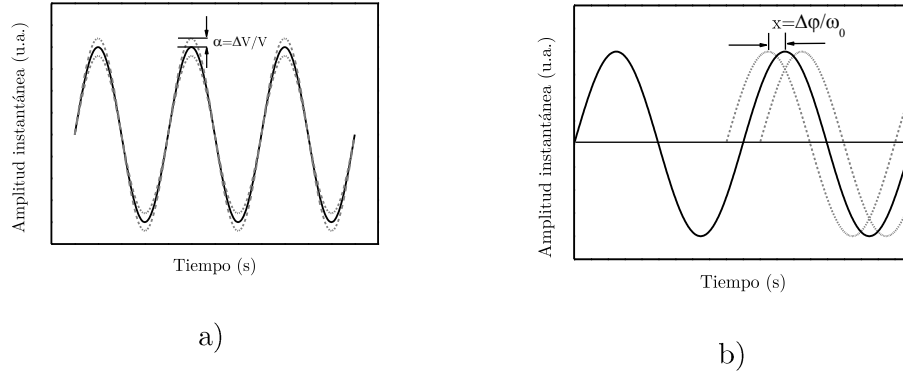
### 1.1 Parámetros de estabilidad para una señal sinusoidal

Idealmente, una señal sinusoidal tiene su frecuencia, fase y amplitud determinadas para todo instante de tiempo (1).

$$V(t) = V_s \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1)$$

Donde  $V_s$  es la amplitud de la señal,  $\omega_0$  es la frecuencia angular,  $\varphi_0$  la fase y  $t$  el tiempo. Sin embargo, para cualquier dispositivo oscilador real, estos tres parámetros fluctúan con el tiempo. Las fluctuaciones en la frecuencia de la señal se denominan ruido en frecuencia (FM), las fluctuaciones en la amplitud ruido de amplitud (AM), y por último las fluctuaciones en la fase se conocen como ruido de fase (PM). En la figura 1 se muestra la representación cualitativa de una señal

sinusoidal bajo fluctuaciones en su amplitud y fluctuaciones en su frecuencia y fase.



**Figura 1:** Representaciones cualitativas de: a) Señal sinusoidal con fluctuaciones en la amplitud AM b) Señal sinusoidal con fluctuaciones en la fase PM o frecuencia FM.

El efecto del ruido PM o FM sobre la señal sinusoidal de la figura 1.b produce un retardo o un adelanto del cruce por cero de la señal, por lo tanto estas fluctuaciones también pueden describirse mediante la variable  $x$ , descrita en la figura 1.a y con unidades de tiempo. Las fluctuaciones mostradas en la figura 1 quedan descritas por la ecuación (2).

$$V(t) = V_s (1 + \alpha(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\phi(t))$$

$$V(t) = V_s (1 + \alpha(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \int_0^t \Delta\omega(t) dt) \quad (2)$$

Donde  $\alpha(t)$  representa el ruido AM fraccional,  $\Delta\phi(t)$  la fluctuación en la frecuencia de la señal perturbada, y  $\Delta\omega$  representa la fluctuación en la frecuencia de la señal perturbada ( $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$ ). En este caso la integral representa la acumulación de las variaciones de la frecuencia a lo largo del tiempo. Las ecuaciones mostradas en (2) están ligadas a través de la relación (3).

$$\Delta\phi(t) = \int_0^t \Delta\omega(t) dt \quad ; \quad \frac{d}{dt}(\Delta\phi(t)) = \Delta\omega(t) \quad (3)$$

Antes de continuar, resulta interesante tratar con dos parámetros útiles derivados de las fluctuaciones AM, PM y FM. Estos parámetros son  $x$  e  $y$  definidos respectivamente como fluctuación de periodo (tiempo) y fluctuación fraccional de frecuencia [1-3], ambas definidas en la ecuación (4).

$$x(t) = \frac{\Delta\varphi(t)}{\omega_0} \quad ; \quad y(t) = \frac{\Delta\omega(t)}{\omega_0} \quad ; \quad \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \quad (4)$$

El valor de  $x$  relaciona las fluctuaciones en la fase con las fluctuaciones en la duración del periodo instantáneo de la señal portadora. Si  $x$  se integra para todas las frecuencias el resultado es el parámetro conocido como ruido Jitter [4], usado para predecir los adelantamientos o retardos de los flancos de subida o bajada en señales digitales.

La ecuación (3) resulta de gran utilidad al ser representada en el espacio frecuencial de Fourier como en la ecuación (5) en lugar del espacio temporal.

$$\Delta\varphi(f) = \frac{\Delta\nu(f)}{f} = \frac{\nu_0}{f} y(f) \quad (5)$$

Donde ahora  $f$  es la frecuencia de Fourier, y  $\nu_0$  la frecuencia de la señal portadora.

## 1.2 Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador

A la hora de caracterizar las fluctuaciones en fase y frecuencia existen dos posibilidades [1]. La primera se basa en la caracterización de la desviación estándar en las fluctuaciones de la fase y la frecuencia trabajando en el dominio temporal. La segunda opción es la medida de estas en el dominio frecuencial de Fourier.

### 1.2.1 Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador en el dominio frecuencial: Densidad espectral de potencia

En el dominio frecuencial, las fluctuaciones en la frecuencia, amplitud y fase de la señal pueden describirse mediante una densidad espectral de potencia de

banda lateral única (SSB). Por ejemplo, la medida de las fluctuaciones en la frecuencia fraccional  $y(f)$  se expresa a través de la densidad espectral de potencia de las fluctuaciones en la frecuencia fraccional  $S_y(f)$  descrita por la ecuación (6).

$$S_y = \frac{y^2(f)}{BW} \quad ; \quad S_\varphi = \frac{S_v}{f^2} = \left(\frac{v_0}{f}\right)^2 S_y \quad (6)$$

Donde BW es el ancho de banda del sistema de medida en Hz. La relación (6) muestra también la relación matemática que relaciona la densidad espectral de potencia el ruido de fase (PM) con la densidad espectral de potencia el ruido en frecuencia (FM) y la densidad espectral de potencia el ruido de frecuencia fraccional [5].

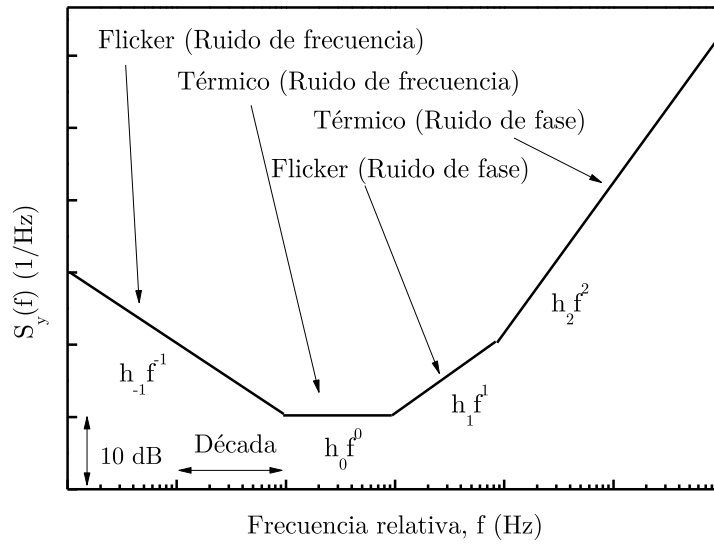
La gran ventaja de  $S_y$  es que, al contrario que  $S_\varphi$ , es invariante frente a la frecuencia del oscilador, ya que evalúa el ruido en frecuencia respecto a la frecuencia del oscilador.

### (a) Ley de potencias del ruido de frecuencia y ruido de fase

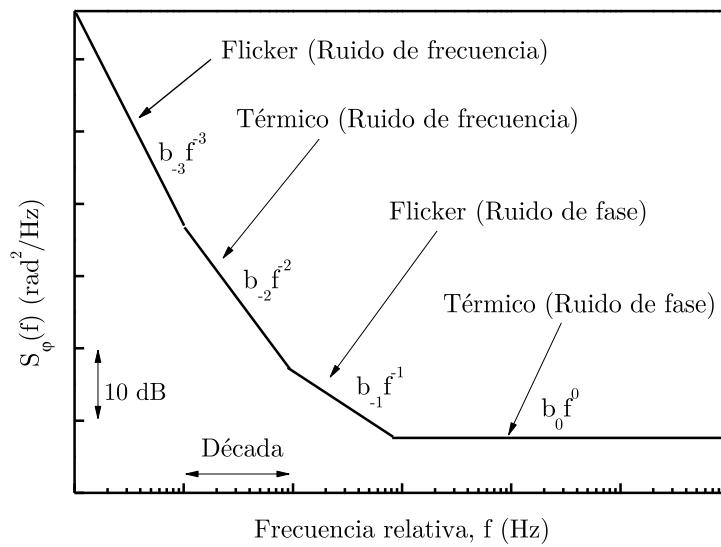
El modelo que resulta de mayor utilidad práctica a la hora de caracterizar  $S_y$  o  $S_\varphi$  en un sistema oscilador es la ley de potencias. En este modelo se considera que en la representación de las componentes frecuenciales ambos tipos de ruido frente a la frecuencia relativa a la señal portadora puede describirse mediante la ecuación (7) [6].

$$S_\varphi = \sum_{i=-4}^n b_i f^i \quad ; \quad S_y = \sum_{i=-2}^n h_i f^i \quad ; \quad h_i = \frac{b_{i-2}}{v_0^2} \quad (7)$$

Por convenio, las unidades de  $b_i f^{-i}$  son  $\text{rad}^2/\text{Hz}$ , lo que sería correcto para  $b_0 f^0$  y no para cualquier otro valor de  $i$ . A pesar de esto, se ha estandarizado el valor  $\text{rad}^2/\text{Hz}$  para todo  $i$ . De la misma forma,  $h_i f^{-i}$  se estandariza al valor  $1/\text{Hz}$ . A continuación, en la figura 2 se representa el comportamiento  $S_y$  y  $S_\varphi$  basado en la ley de potencias.



a)



b)

**Figura 2:** Representación de las distintas dependencias observables en: a) Densidad espectral de potencia de fluctuaciones de frecuencia. b) Densidad espectral de potencia de fluctuaciones de fase.



Como se puede ver, ruido flicker y térmico de frecuencia tienen respectivamente una pendiente de  $f^{-1}$  y  $f^0$  en la representación de  $S_y(f)$ . Mientras que el ruido flicker y térmico de fase tienen respectivamente una pendiente de  $f^{-1}$  y  $f^0$  en la representación de  $S_\varphi(f)$ . De ahí el origen de sus nombres.

### (b) Definición estándar del IEEE para el ruido de fase

Históricamente el ruido de fase ha estado descrito por definiciones ampliamente usadas en distintos campos y en conflicto entre sí. Es por esto que el IEEE decidió unificar las definiciones [7]. Desde entonces el ruido de fase utilizado para describir la operación de un oscilador es el mostrado en la ecuación (8).

$$L(f) = 10 \log \left( \frac{S_\varphi(f)}{2} \right) \quad (8)$$

Este estándar puede resumirse en la tabla I, que incluye la definición de las distintas fluctuaciones, sus unidades y las equivalencias matemáticas entre sí.

Variable	Significado	Unidades	Relación con $S_\varphi(f)$
$S_\varphi(f)$	PSD de fluctuaciones de fase	rad <sup>2</sup> /Hz	$S_\varphi(f)$
$S_y(f)$	PSD de fluctuaciones de frecuencia fraccional	1/Hz	$\frac{v_0^2}{f^2} S_y(f)$
$S_x(f)$	PSD de fluctuaciones de tiempo	sec <sup>2</sup> /Hz	$(2\pi v_0)^2 S_x(f)$
$L(f)$	SSB del cociente del ruido de fase respecto a la potencia de la señal portadora	dBc/Hz	$10 \log \left( \frac{1}{2} S_\varphi(f) \right)$

**Tabla I.** Resumen de las variables que caracterizan la estabilidad de la frecuencia. PSD = Densidad espectral de potencia. SSB = Banda lateral única.

### 1.2.2 Caracterización de la estabilidad de la frecuencia de un oscilador en el dominio temporal: Varianza Allan

En todo sistema oscilador la frecuencia de oscilación sufre fluctuaciones a lo largo del tiempo [2]. Dichas fluctuaciones pueden ser descritas mediante conceptos propios del análisis estadístico como la varianza y la desviación estándar (siendo la varianza el cuadrado de la desviación estándar) aplicadas a un conjunto de frecuencias tomadas en distintos instantes de tiempo mediante el uso de un contador. En el estudio de la caracterización de la estabilidad de la frecuencia estos dos conceptos son adaptados y convertidos en la varianza Allan y desviación Allan respectivamente [8]. Esto puede ser comprendido mediante el siguiente ejemplo: Tras la medida de la variación en la frecuencia normalizada de dos osciladores se obtienen los resultados mostrados en la figura 3.

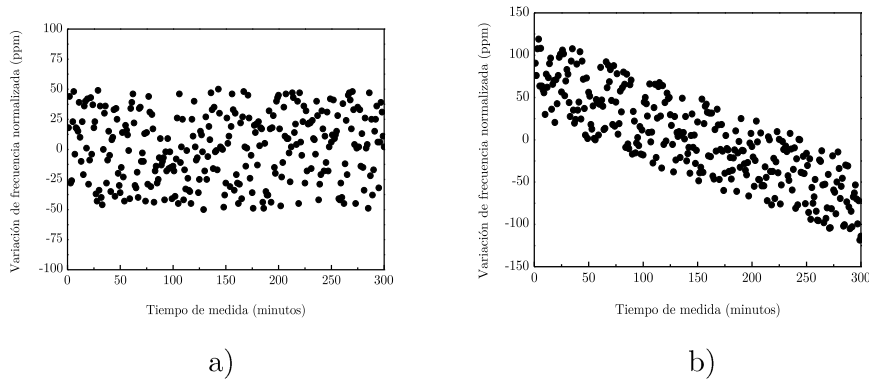


Figura 3: a) Medida de la desviación de la frecuencia en un oscilador caracterizable mediante la varianza estadística. b) Medida de la desviación de la frecuencia en un oscilador caracterizable mediante la varianza Allan.

Las fluctuaciones en la frecuencia del primer oscilador se puede caracterizar mediante la varianza estadística, y sus valores pueden ser acotados al valor máximo y mínimo de  $\pm 50$  ppm manteniendo un valor medio de 0 ppm. Sin embargo, los puntos obtenidos para el segundo oscilador, al ser caracterizados estadísticamente mediante la varianza dan lugar a un valor que describe el sistema de forma errónea, ya que aunque los valores máximo y mínimo de los puntos medidos puedan acotarse entre  $\pm 125$  ppm, es obvio que para un instante de tiempo superior a los 300 minutos el valor que se esperaría medir sería superior a los  $\pm 125$  ppm. A su vez, el valor medio de la desviación en el segundo caso

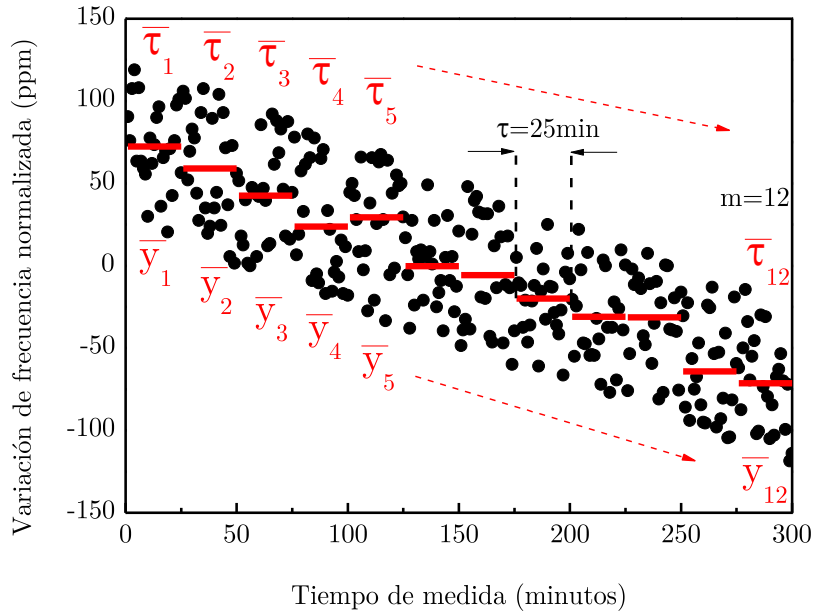
tendería a decrecer con el tiempo. Tanto la varianza como la media divergen para tiempos de medida largos, lo que indica que la estadística utilizada no es apropiada para describir el comportamiento del segundo oscilador. En su momento Allan ya se percató de que la estadística convencional no era útil a la hora de caracterizar las fluctuaciones en la frecuencia para intervalos de tiempo largos. A raíz de esto propuso una nueva herramienta que, a modo de reconocimiento, pasó a denominarse varianza y desviación Allan. El cálculo de la varianza Allan se define mediante la expresión (9) [8].

$$\sigma_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{n=1}^{m-1} (\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n)^2 \quad (9)$$

Donde  $m$  es el número de puntos correspondientes a  $y_n$ , frecuencia fraccional promediada durante un tiempo  $\tau$  como se muestra en la ecuación (10).

$$y_n(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y_n(t + t_v) dt_v \quad (10)$$

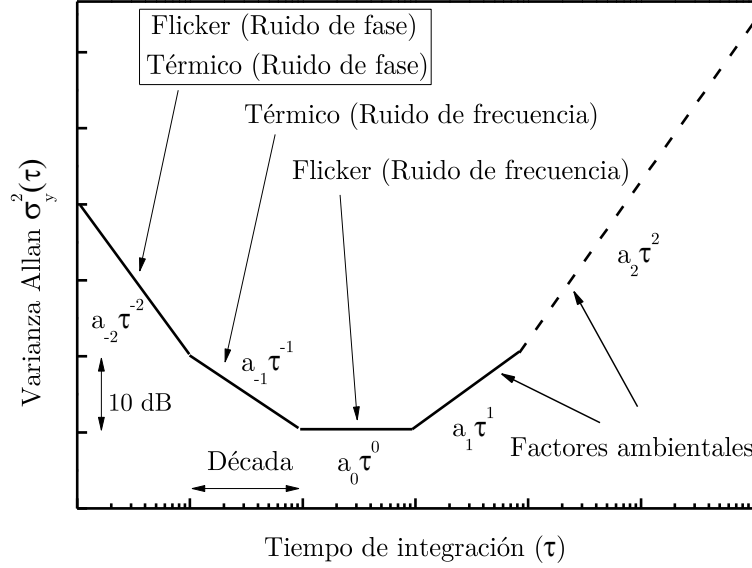
Donde  $t_v$  hace referencia al instante de tiempo dentro del intervalo  $\tau$   $\left( \int_0^{\tau} dt_v = \tau \right)$ . En la figura 4 se muestran las distintas variables que intervienen en la ecuación (10) sobre la nube de puntos correspondiente a la figura 3.b.



**Figura 4:** Cálculo de las variables relacionadas con la varianza Allan a partir de la figura 3.b.  $\bar{y}$  representa la frecuencia fraccional promediada durante el intervalo de tiempo  $\tau$ . En este caso particular,  $\tau$  tiene el valor de 25 minutos, y realiza el promedio de 25 valores de frecuencia fraccional medidos durante estos 25 minutos. El total de intervalos  $\tau$  utilizados en la medida son 12, por lo que  $m = 12$ .

La propuesta de Allan se basa en comparar la frecuencia fraccional promediada durante el tiempo de integración  $\tau$  en el intervalo número  $n+1$  con la frecuencia fraccional promediada respectiva al intervalo de tiempo  $n$  inmediatamente anterior. De esta forma el valor de la varianza Allan da información de la fluctuación media entre dos puntos consecutivos separados entre sí un espacio de tiempo  $\tau$ . Obteniendo un resultado convergente para  $\sigma_y(\tau)$ .

Aplicando la varianza Allan a distintas ventanas de tiempo  $\tau$  se puede reconstruir una gráfica del tipo  $\sigma_y(\tau)$  frente a  $\tau$  como se muestra en la figura 5 [6].



**Figura 5:** Representación de las distintas dependencias observables en la varianza Allan.

La relación entre el ruido de fase o el ruido de frecuencia con el valor de  $\sigma_y(\tau)$  se obtiene a partir de la ecuación (11) [6].

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{2}{\nu_0^2} \int_0^{f_b} S_\phi(f) \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau)^2} df \quad (11)$$

Dada la relación (11) a cada región de la figura 2.a le corresponde una zona en la figura 4, excepto para el caso del ruido flicker y el ruido térmico de fase, que queda superpuesto en una misma recta de dependencia  $\tau^{-2}$ . La tabla II muestra la relación entre las constantes  $b$ ,  $h$  y  $a$  que intervienen en la ley de potencias tanto de  $S_y$ ,  $S_\phi$  y  $\sigma_y^2$  [6].

$S_\phi(f)$	$S_y(f)$	$S_\phi(f) \leftrightarrow S_y(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$
$b_0$	$h_2 f^2$	$h_2 = \frac{b_0}{\nu_0^2}$	$\frac{3f_H h_2}{(2\pi)^2} \tau^{-2}$

$b_{-1}f^{-1}$	$h_1f$	$h_1 = \frac{b_{-1}}{v_0^2}$	$[1.038 + 3\ln(2\pi f_H \tau)] \frac{h_1}{(2\pi)^2} \tau^{-2}$
$b_{-2}f^{-2}$	$h_0$	$h_0 = \frac{b_{-2}}{v_0^2}$	$\frac{1}{2}h_0\tau^{-1}$
$b_{-3}f^{-3}$	$h_{-1}f^{-1}$	$h_{-1} = \frac{b_{-3}}{v_0^2}$	$2\ln(2)h_{-1}$

**Tabla II.** Resumen de las variables que caracterizan la estabilidad de la frecuencia.

Como puede observarse en la figura 4, el comportamiento de la varianza Allan representado frente a  $\tau$  puede dividirse en tres regiones. En la primera zona, correspondiente a los valores inferiores de  $\tau$ , la varianza Allan se reduce con el incremento de  $\tau$ . La segunda zona se corresponde con la estabilización de  $\sigma_y(\tau)$ , el cual deja de depender de  $\tau$ , manteniendo su valor constante. La tercera y última zona, correspondiente a los valores de  $\tau$  más altos, implica un incremento de  $\sigma_y(\tau)$  con  $\tau$ . Este incremento está ligado al efecto de factores ambientales como cambios en la humedad, temperatura ambiente o mecanismos de envejecimiento de los distintos módulos del sistema oscilador.

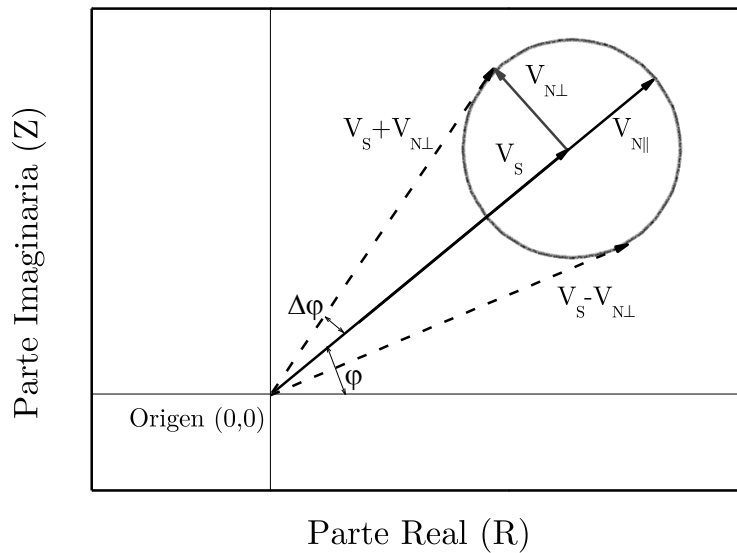
De la gráfica mostrada en la figura 4, el valor más importante que puede extraerse es el componente al punto de unión entre el ruido térmico de frecuencia y el ruido flicker de frecuencia. Este es el punto que corresponde al tiempo de integración más bajo en el cual se alcanza el mínimo valor para  $\sigma_y(\tau)$ . Por otra parte, la varianza Allan no permite distinguir entre las fuentes de ruido que generan los ruidos térmicos y flicker de fase, ya que transforma ambos con una dependencia resultante de  $\tau^{-2}$ . Aunque para la presente tesis no va a ser necesario, en el caso de que fuese importante caracterizar mediante una medida temporal ambos ruidos térmico y flicker de fase se debería utilizar la varianza Allan modificada [9]. En esta transformación no se solapan ambos ruidos, sino que el ruido flicker de fase aparece una dependencia de  $\tau^{-2}$  y el ruido térmico de fase con una dependencia de  $\tau^{-3}$ .

## 2 Teoría del ruido de fase

La interpretación más clara y sencilla a nivel matemático del ruido de fase se obtiene a partir de la representación fasorial. En esta notación la señal sinusoidal está compuesta por una parte real y una parte imaginaria. El módulo de este número complejo es la amplitud ( $|\vec{V}_s|$ ), mientras que el ángulo formado por la

parte real y la imaginaria es la fase de la señal ( $\varphi$ ). Si dos señales de distinta frecuencia y potencia coexisten, la interacción entre ambas queda descrita a su vez como un único vector resultante de la suma de los dos anteriores.

Para el cálculo de las expresiones del ruido de fase se va a utilizar una señal sinusoidal principal, denominada señal portadora, con una amplitud  $V_{\text{rms}}$  y fase  $\varphi$ . A esta señal se le suma una señal sinusoidal que representará una componente frecuencial de ruido a una frecuencia cercana a la de la señal portadora. Este tono puro de ruido tiene una amplitud  $|\vec{V}_N|$  ( $|\vec{V}_S| \gg |\vec{V}_N|$ ) y, dado que está girando a una velocidad angular distinta que la portadora, una fase independiente a la fase de la señal portadora. Se realiza la suma de ambos vectores en un plano bajo la representación  $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ . Como resultado, la suma de estos vectores se puede ver en la figura 6.



**Figura 6:** Superposición de la señal portadora y la señal de ruido en representación polar  $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ . El vector correspondiente a la señal portadora se representa mediante  $\vec{V}_S$ , el correspondiente al ruido de proyección perpendicular con  $\vec{V}_{N\perp}$ , y el correspondiente al ruido de proyección paralela con  $\vec{V}_{N\parallel}$ . El círculo centrado en el extremo del vector  $\vec{V}_S$  representa todas las posibles proyecciones de la suma de ambos vectores, para las distintas orientaciones del vector  $V_N$ .

Debido a que las fases de la señal portadora y la del ruido son independientes el vector  $\vec{V}_N$  puede estar orientado en distintas direcciones respecto a  $\vec{V}_S$ . Se procede a tomar dos casos extremos.

Primero se supone que el vector de ruido es perpendicular al vector de la señal portadora en el plano  $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ . En este caso existen dos posibilidades, que el vector de ruido esté orientado en  $\varphi+90$  o  $\varphi-90$  grados. Los dos vectores resultantes de esta suma se representan en la figura 6 como  $\vec{V}_S + \vec{V}_{N\perp}$  y  $\vec{V}_S - \vec{V}_{N\perp}$ . La fase correspondiente a estos vectores resultantes de la suma es  $\varphi+\Delta\varphi$  y  $\varphi-\Delta\varphi$  respectivamente, y sin embargo, el módulo de este vector resultante apenas se ve perturbado, pudiendo considerarse  $|\vec{V}_S|$ . La interacción perpendicular no afecta a la amplitud resultante, pero sí a la fase del vector. La perturbación de la señal de ruido sobre la fase de la señal portadora queda representada por  $\Delta\varphi$  y es lo que se conoce como ruido de fase (PM). La fluctuación en la fase producida por un vector  $\vec{V}_N$  sobre la señal portadora  $\vec{V}_S$  se obtiene a partir de la relación geométrica de la expresión (12).

$$\frac{|\vec{V}_N|}{|\vec{V}_S|} = \arctan(\Delta\varphi) \quad ; \quad [\Delta\varphi \ll 1] \quad ; \quad \Delta\varphi = \frac{|\vec{V}_N|}{|\vec{V}_S|} \quad (12)$$

En el desarrollo de la expresión (12) se ha estimado que la amplitud de la señal portadora es muchos órdenes de magnitud superior a la amplitud del ruido, por lo tanto la función  $\arctan(x)$  es aproximable a  $x$ .

En segundo lugar, se supone que el vector de ruido es paralelo al vector de la señal, denominándolo  $\vec{V}_{N\parallel}$ . Para este caso particular existen dos posibles direcciones, de fase  $\varphi$  y  $\varphi+180$  grados. En este caso la fase del vector resultante conserva la fase de la señal portadora, mientras que su valor de amplitud cambia con un valor  $|\vec{V}_S| \pm |\vec{V}_N|$ . La interacción paralela no afecta a la fase del vector resultante, pero sí a su módulo. La perturbación de la señal de ruido sobre la amplitud de la señal portadora queda representada por  $|\vec{V}_N|$ , y es lo que se conoce como ruido en amplitud (AM). Es útil desde el punto de vista matemático normalizar la relación entre la amplitud de la señal portadora y la señal de ruido como se indica en la ecuación (13):



$$\alpha = \frac{|\vec{V}_N|}{|\vec{V}_S|} \quad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) explican el origen de los términos de fluctuaciones que aparecen en la ecuación previa (2) que se muestra nuevamente a continuación.

$$V(t) = |\vec{V}_S| (1 + \alpha(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi(t)) \quad (2)$$

Una vez introducida la teoría del ruido de fase los siguientes apartados están enfocados en aplicar esta base matemática a la predicción tanto del ruido de fase  $\Delta\varphi$  en amplificadores y resonadores MEMS como predecir el ruido en amplitud de los mismos a partir de su comportamiento físico.

### 3 Predicción del ruido de fase en amplificadores CMOS

En todos los elementos integrables y conductores de la tecnología CMOS (Transistores, resistencias, diodos...) existe una fluctuación en la carga eléctrica, ya sea la carga que está circulando a través de él o que se encuentre en su interior en una situación cuasi estática. Esto da lugar a la aparición de una caída de voltaje aleatoria no deseada que se añade a la que ya existe entre los extremos del dispositivo. Dicha fluctuación se debe a la agitación térmica en la que se encuentran las cargas dentro del material conductor [10], [11]. Los mecanismos de generación de estas fluctuaciones en la carga, causadas por la energía térmica en los elementos conductores, fue estudiada por primera vez por H. Nyquist y caracterizada por J.B. Johnson, lo que sentó las bases para que a día de hoy se pueda estimar el valor medio y la distribución espectral de estas fluctuaciones. Con el paso del tiempo se han encontrado fluctuaciones de distintos orígenes y comportamientos frecuenciales [12-13]. Entre ellos el más significativo aparece a bajas frecuencias y es denominado ruido Flicker [14-16]. Estas fluctuaciones han pasado a llamarse comúnmente ruido, y su estudio se ha hecho imprescindible a la hora de diseñar sistemas eléctricos. Este ruido define la sensibilidad de los distintos sistemas electrónicos, acotando el voltaje o corriente mínimo con el que puede trabajar el sistema.

El ruido eléctrico no sólo afecta a la amplitud de las señales (Ruido AM) sino que también produce fluctuaciones en la fase (Ruido PM) y en la frecuencia de las mismas (Ruido FM) como se ha visto en el apartado anterior. Esto tiene como consecuencia que aunque se consiguiese excitar un amplificador con una señal

sinusoidal pura, la señal de salida del amplificador tendría estas pequeñas fluctuaciones en su fase, frecuencia y amplitud. En este apartado se analizan los fenómenos de generación y transformación de ruido dentro de un amplificador CMOS, ya que estos amplificadores comprenden uno de los módulos principales del sistema oscilador.

### 3.1 Densidad espectral de ruido en un amplificador CMOS

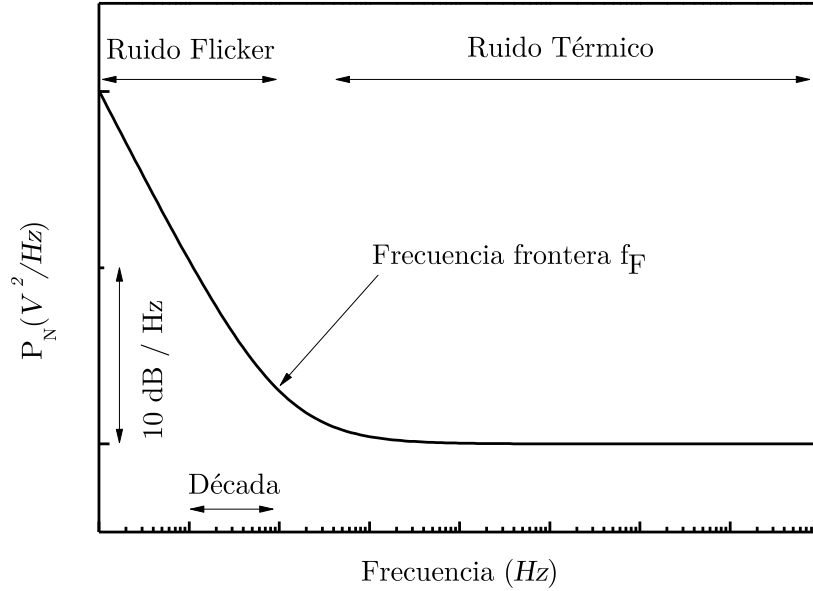
El ruido térmico y Flicker creado en los canales de los transistores CMOS que componen el sistema amplificador dan lugar a la aparición de una densidad espectral de potencia de ruido a la salida del mismo. Las dos principales fuentes de ruido en forma de corriente quedan descritas en la ecuación (14) [17].

$$\begin{aligned}
 i_{\text{Térmico-CMOS}}^2(f) &= \frac{8}{3} k_B T g_m \\
 i_{\text{Flicker-CMOS}}^2(f) &= \frac{K_e}{C_{ox}^2 W L f} g_m
 \end{aligned} \tag{14}$$

Este ruido no correlacionado con la señal útil se denomina ruido aditivo, ya que su espectro de potencia se suma a la potencia de la señal principal. Este ruido queda descrito por la expresión (15).

$$P_N(f) = P_{\text{Térmico}}(f) + P_{\text{Flicker}}(f) = P_{\text{Térmico}}(f) \left( 1 + \frac{f_F}{f} \right) \tag{15}$$

Dado que el parámetro  $K_e$  que aparece en la ecuación del ruido Flicker en la ecuación (14) depende de la tecnología, a la hora de hablar del ruido del amplificador se tiende a dar como dato la frecuencia de frontera  $f_F$ , frecuencia frontera entre el dominio del ruido flicker y el del ruido térmico. La densidad espectral de potencia de ruido a la entrada/salida del amplificador se muestra de forma cualitativa en la figura 7.



**Figura 7.** Representación cualitativa de la densidad espectral de potencia a la entrada/salida del amplificador respecto a la frecuencia cuando este no está siendo excitado.

Esta densidad espectral de potencia a la entrada/salida del amplificador será utilizada para predecir el ruido de fase del mismo, ya que el conjunto de componentes frecuenciales de este ruido rodearán a la señal portadora. El ruido de fase  $L(f)$  se da en la ecuación (16).

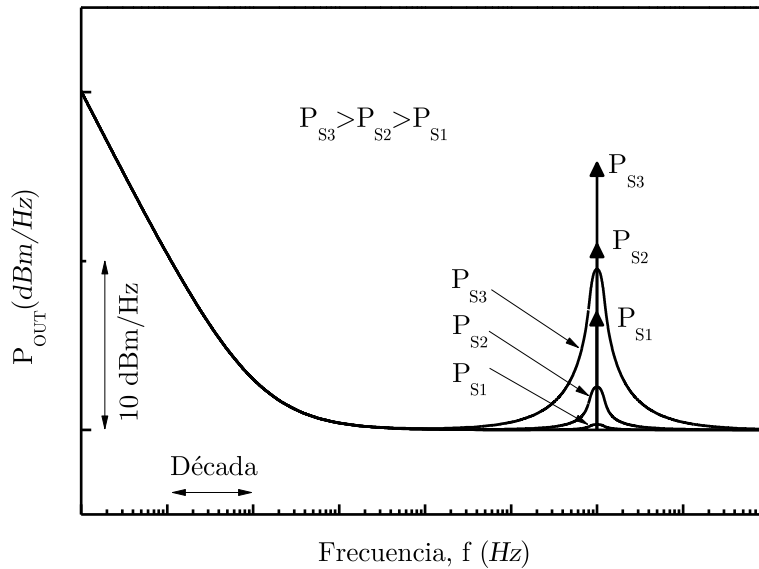
$$L(f) = 10 \log \left( \frac{1}{2} S_{\phi}(f) \right) = 10 \log \left( \frac{P_N(f)}{2P_s} \right) \quad (16)$$

En el caso del amplificador no lineal, para potencias de la señal portadora suficientemente altas se da el fenómeno de mezclado frecuencial, al igual que aparece en los sistemas no lineales mezcladores de frecuencia heterodinos [18]. Este fenómeno de mezclado de frecuencias trasladará el ruido de baja frecuencia a las frecuencias cercanas de la señal portadora. En el sistema amplificador el ruido a bajas frecuencias corresponde al ruido Flicker [19]. Ahora, la densidad espectral de la potencia de salida del amplificador, siendo este excitado por una señal

portadora que le obligue a operar en el régimen no lineal se expresa en la ecuación (17).

$$P_{Out} = P_S(\nu_0) + P_N(\nu) + \Gamma_{G2} P_S P_N(\nu_0 \pm \nu) \quad (17)$$

Donde  $\Gamma_{G2}$  es el coeficiente correspondiente al producto de intermodulado de frecuencias. En la ecuación (17) aparecen tres términos. El primero a la frecuencia de la señal portadora ( $\nu_0$ ). El segundo correspondiente a las componentes de ruido en cada una de las frecuencias ( $\nu$ ). Por último, el tercer término corresponde a la componente de ruido intermodulada con la señal portadora de frecuencia ( $\nu_0 \pm \nu$ ). La densidad espectral de la ecuación (17) se representa cualitativamente en la figura 8 para tres valores de potencia de la señal portadora.



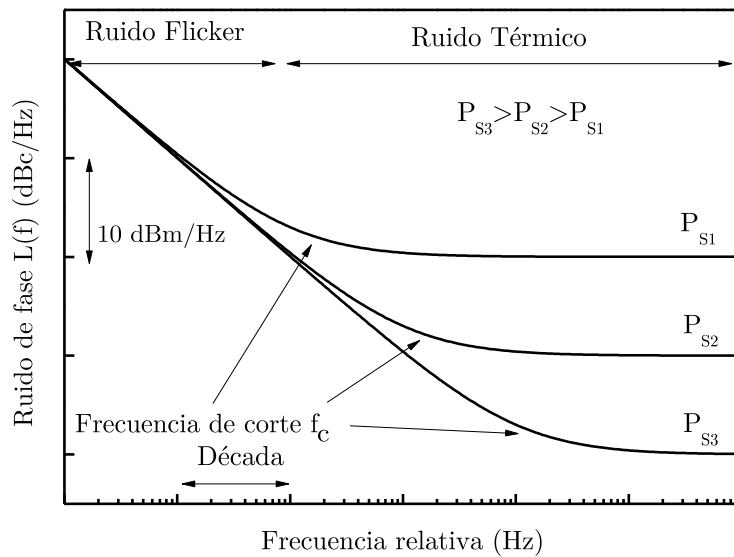
**Figura 8.** Representación cualitativa de la densidad espectral de potencia a la entrada/salida del amplificador no lineal respecto a la frecuencia, cuando el amplificador es excitado por un tono puro. Se representan tres señales de salida de tres potencias distintas. Se utiliza una flecha para indicar la posición de la señal portadora de salida (Delta de Dirac).

En las frecuencias cercanas a la señal portadora aparece una falda rodeando a esta. Esto es debido al mezclado de frecuencias del ruido Flicker de baja frecuencia

con la señal portadora. Mediante el tercer término de la ecuación (17),  $(\Gamma_{G2} P_S P_N(\nu_0 \pm \nu))$ , el ruido Flicker de dependencia  $1/\nu$  queda desplazado a las frecuencias cercanas a la portadora, ahora con una dependencia respecto a la señal portadora de  $1/f$ . En el caso del amplificador no lineal el ruido de fase queda descrito por la ecuación (18).

$$L(f) = 10 \log \left( \frac{P_N(f)}{P_S} + \frac{\Gamma_{G2} P_S P_N(f)}{P_S} \right) = 10 \log \left( \frac{P_N(f)}{P_S} + \phi(f) \right) \quad (18)$$

Es importante remarcar que el primer término de la ecuación (18) se corresponde con el ruido de fase correspondiente al amplificador lineal. La aparición del segundo término implica el incremento del ruido de fase en el amplificador no lineal respecto al lineal. Además, este segundo término no depende de la potencia de la señal portadora,  $P_S$ , sino que depende de la potencia de ruido equivalente a la entrada del amplificador y los distintos términos no lineales del amplificador. En la figura 9 se representa el ruido de fase correspondiente a tres potencias de excitación distintas.



**Figura 9.** Representación cualitativa del ruido de fase a la salida de un amplificador no lineal correspondiente a tres casos en los que se excita el amplificador con un tono puro y una potencia de excitación distinta en cada caso.

En la figura 9 se puede apreciar que la componente de ruido a frecuencias próximas a la portadora es invariante frente a la potencia de excitación (En este caso ruido Flicker trasladado), mientras que la relación entre la potencia de excitación y la potencia de ruido térmico fijan el nivel lejos de la portadora (Ruido térmico), que sí cambia para las distintas potencias de excitación. Es importante comprender que la frecuencia de corte frontera ( $f_c$ ) que marca la separación entre el ruido paramétrico dominante y el ruido térmico dominante se desplaza a frecuencias superiores cuanto mayor sea la potencia de excitación. Sin embargo, el desplazamiento de este codo a frecuencias mayores no es negativo, sino que representa la reducción del ruido de fase del oscilador a frecuencias  $f$  suficientemente alejadas de la frecuencia portadora.

## 4 Predicción del ruido de fase en resonadores MEMS

En este apartado se van a explorar los mecanismos que tienen lugar en los resonadores MEMS que puedan generar el ruido de fase en el mismo. Para ello la sección está dividida en tres partes. Las dos primeras partes hacen referencia al ruido de fase en un resonador operando en el régimen lineal, mientras que la última está dedicada a analizar el comportamiento en el régimen no lineal. En la primera parte se estudia la generación de ruido de fase en el MEMS mediante mecanismos intrínsecos al mismo, prestando especial atención al ruido termomecánico [20-21]. En la segunda parte se estudia cómo la sensibilidad de la frecuencia de resonancia del resonador frente a factores ambientales puede dar lugar a fluctuaciones en la frecuencia, y por lo tanto, en el ruido de fase del resonador. La tercera parte de este apartado se centra en los mecanismos derivados de la no linealidad del resonador que dan lugar a los productos de intermodulación entre ruido y señales portadoras, así como la repercusión del efecto A-f sobre la estabilidad de la frecuencia de resonancia del resonador y su ruido de fase.

### 4.1 Ruido de fase generado intrínsecamente en el MEMS

Como se vió en el capítulo II, la ecuación que describe el desplazamiento de un resonador MEMS operando en el régimen lineal cuando sobre él actúa una fuerza queda descrito por la ecuación:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + k_e x = F(t) \quad (19)$$

El término de amortiguamiento  $\gamma$  da a entender que cuando se deje de ejercer una fuerza sobre el resonador el movimiento de este tenderá a reducirse hasta ser nulo, manteniéndose en la posición natural de equilibrio. Sin embargo, cuando el resonador no está siendo excitado, en este todavía existe un movimiento. Esto es debido a que, al igual que los elementos conductores experimentan ruido de tipo Johnson-Nyquist, los sistemas mecánicos experimentan ruido termomecánico. El ruido Johnson-Nyquist depende de la resistencia del dispositivo conductor y la temperatura, mientras que equivalentemente el ruido termodinámico depende de los mecanismos de disipación del sistema y su temperatura, como queda descrito en el Teorema de Fluctuación-Disipación [11]. Dicho teorema puede resumirse en: Si existe un mecanismo de disipación en un sistema, en el equilibrio termodinámico este mismo mecanismo contribuirá a generar las fluctuaciones en el mismo.

Para comprender los mecanismos de ruido en los resonadores MEMS es necesario conocer el Teorema de Equipartición [22]. El teorema de equipartición puede resumirse en: Dado un sistema en equilibrio térmico a temperatura  $T$ , y sea  $E$  la energía promedio del sistema, cada grado de libertad que aparece en la expresión para la energía del sistema en forma cuadrática contribuye en  $k_B T/2$  a la energía  $E$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K). En el caso del resonador MEMS este grado de libertad en forma cuadrática es el desplazamiento  $x$ , ya que la energía elástica y la energía cinética (cantidades que se conservan en ausencia de disipación) son respectivamente:

$$\langle E_e \rangle = \frac{1}{2} k_e \langle x \rangle^2 \qquad \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle \dot{x} \rangle^2 \omega^2 \qquad (20)$$

Partiendo de la ecuación (20) se iguala la energía térmica a cualquiera de las dos energías anteriores de la forma:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_e \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2} m_e \langle \dot{x} \rangle^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k_B T \qquad (21)$$

Obteniendo una amplitud promedio de desplazamiento generada por la energía térmica de:

$$\langle x \rangle_n^2 = \frac{k_B T}{k_e} \quad (22)$$

Por otra parte, este desplazamiento está producido por una distribución espectral de fuerza en forma de ruido blanco, integrada a todas las frecuencias, mediante la ecuación dinámica del resonador:

$$\langle x \rangle_n^2 = \frac{F_n^2}{k_e^2} \int_0^\infty \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} df = \langle F \rangle_n^2 \frac{Q\omega_0}{4k_e^2} \quad (23)$$

Sustituyendo la ecuación (23) en la ecuación (21) se obtiene que la fuerza originada por el ruido térmico queda expresada por (24).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_e \langle F \rangle_n^2 \frac{Q\omega_0}{4k_e^2} &= \frac{1}{2} k_B T \\ \langle F \rangle_n^2 &= k_B T \frac{4k_e}{Q\omega_0} \end{aligned} \quad (24)$$

Como se vio en la teoría dinámica del resonador, se definía el factor de calidad a través de la expresión  $Q = k_e / \gamma\omega_0$ , por lo que la ecuación (24) pasa a ser la ecuación (25).

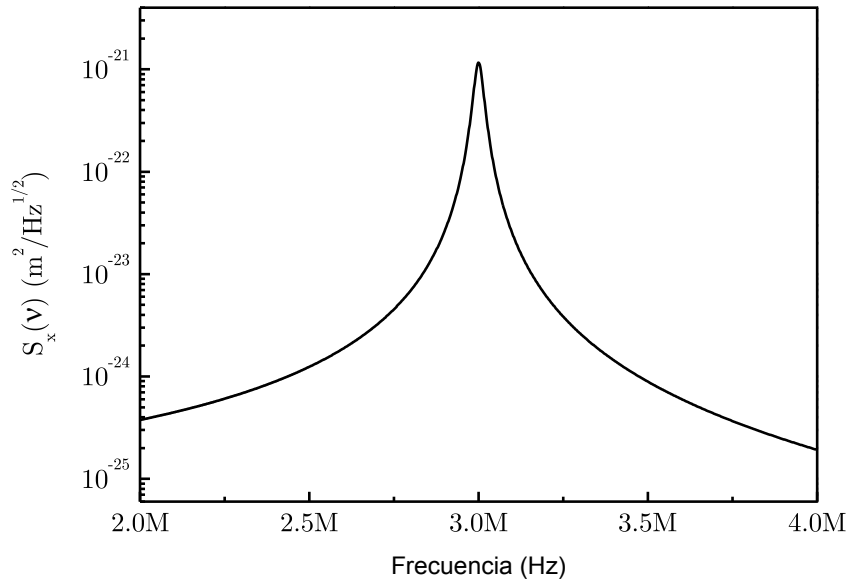
$$\langle F \rangle_n^2 = 4k_B T \gamma \quad (25)$$

El resultado obtenido es consecuente con el Teorema de Fluctuación-Disipación, ya que hemos obtenido la relación directa entre el amortiguamiento del sistema mecánico y la generación de fluctuaciones en el mismo. A partir de la ecuación (25) se puede obtener la densidad espectral de potencia de las fluctuaciones en la amplitud de movimiento del resonador (26) [23].

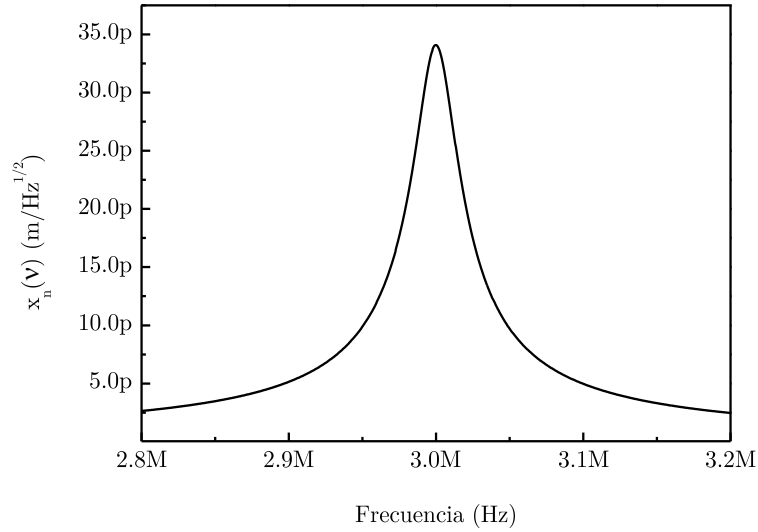


$$S_x^2(\omega) = \frac{4k_B T \gamma}{k_e^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \quad (26)$$

La figura 9 muestra el comportamiento frecuencial de  $S_x^2$  en las cercanías de la frecuencia de resonancia para un resonador cuyos valores se muestran en la tabla 3.



a)



**Figura 9.** Representación de: a) densidad espectral de potencia de fluctuaciones, b) densidad espectral de amplitud de fluctuaciones, ambas en el desplazamiento del resonador MEMS, producido por el ruido termomecánico en un resonador de parámetros mostrados en la tabla 3.

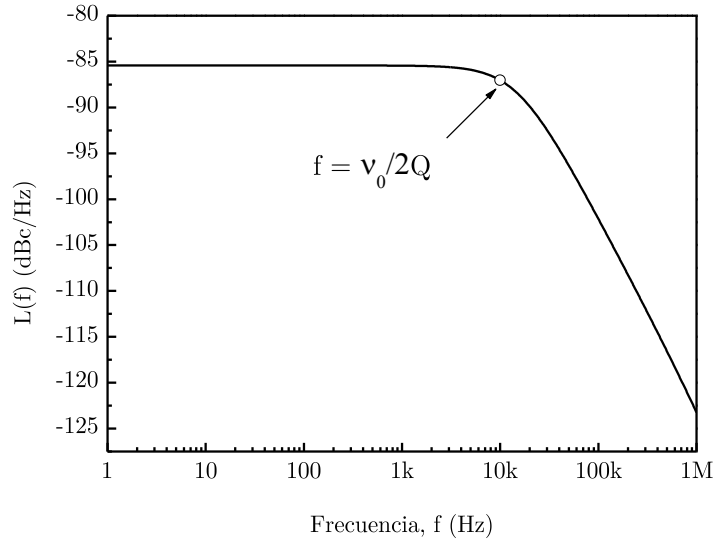
Parámetro	Valor
Frecuencia resonancia (Hz)	$3 \cdot 10^6$
Constante elástica (N/m)	4.75
Factor de calidad	150
Gamma (N/m Hz)	$1.58 \cdot 10^{-8}$
Kb (J/K)	$1.38 \cdot 10^{-23}$
T (K)	300

**Tabla III.** Parámetros utilizados para obtener la figura 9.

El ruido de fase del resonador, calculado a partir del desplazamiento producido por el ruido termomecánico y un voltaje de excitación a la frecuencia de resonancia se obtiene en (27).

$$S_\varphi(\omega) = \frac{S_x^2(\omega)}{x_s^2(\omega_0)} = \frac{4k_B T \gamma g^2}{Q^2 V_{DC}^2 V_{AC}^2 C_0^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \quad (27)$$

Por lo tanto, a partir de (27) se muestran dos posibilidades para reducir el ruido de fase del resonador: La primera está ligada a los parámetros geométricos y mecánicos del resonador, como reducir  $\gamma$  ( $\gamma = k_e / Q\omega_0$ ), reducir la distancia entre los electrodos  $g$ , e incrementar el área de acoplo entre los electrodos  $C_0$ . La segunda está relacionada con los parámetros de excitación del resonador, tales como incrementar la fuerza de excitación, incrementando el voltaje de actuación, tanto la componente DC como la componente AC. A continuación, en la figura 10 se representa el ruido de fase obtenido a partir de las distribuciones mostradas en la figura 9.



**Figura 10.** Representación del ruido de fase generado por las fluctuaciones en la amplitud de desplazamiento del resonador MEMS producido por el ruido termomecánico en un resonador de la figura 9, suponiendo una amplitud de movimiento de 450 nm.

El valor de  $\frac{4k_B T \gamma Q^2}{k_e^2} / x_n^2$  fija el nivel de ruido de fase dentro del ancho de banda del resonador  $f \leq f_0/2Q$ , mientras que el factor de calidad determina el ancho de banda del mismo.

## 4.2 Ruido de fase generado por las condiciones ambientales

Existen factores externos al resonador MEMS que pueden afectar a su frecuencia de resonancia manteniendo el funcionamiento del MEMS siempre en el rango de operación lineal (por debajo de la amplitud crítica) [24]. Cambios como la temperatura, la humedad, o las tensiones sobre la estructura resonante que mediante la variación del módulo de Young del material utilizado en el resonador producen un cambio en la constante elástica mecánica del mismo [20-21] [25-26].

Variaciones en la polarización DC o vibraciones que producen distintos niveles de *spring softening* mediante la modificación de la constante elástica eléctrica. Todas las fluctuaciones en estos parámetros se propagan en forma de fluctuaciones en la frecuencia de resonancia. La ecuación muestra la propagación de estas fluctuaciones:

$$S_\omega = \left| \frac{\partial \omega}{\partial T} \right|^2 S_T + \left| \frac{\partial \omega}{\partial P} \right|^2 S_P + \left| \frac{\partial \omega}{\partial V_{dc}} \right|^2 S_{V_{dc}} + \dots \quad (28)$$

Donde  $S_i$  representa la densidad espectral de fluctuaciones del parámetro  $i$ , siendo T temperatura, P presión, y  $V_{dc}$  tensión de polarización. Estas fluctuaciones de diversos orígenes pueden tener una componente frecuencial cercana a cero Hz pudiendo considerarse DC, afectando a la estabilidad en frecuencia a largo plazo, o componentes frecuenciales que se consideren AC. Estas segundas componentes no modificarán la frecuencia de resonancia, sino que producirán la aparición de picos, resultado de la intermodulación entre la frecuencia de las fluctuaciones y la frecuencia de resonancia.

## 4.3 Resonador MEMS no lineal

Los resonadores MEMS y NEMS no sólo implican una reducción en las dimensiones de los dispositivos resonadores mecánicos, sino que como contrapartida experimentan una reducción en la máxima potencia que pueden asimilar antes de llegar a operar con un comportamiento no lineal [27], [28]. La sensibilidad al ruido termomecánico por parte de estos sistemas crece con la miniaturización [29]. Esto implica que en la práctica, la única manera de poder

mantener una buena relación señal ruido es operando los resonadores MEMS y NEMS en puntos muy cercanos al régimen no lineal, o directamente, en el caso de los segundos, operarán inevitablemente en el régimen no lineal más allá de su amplitud crítica [24]. Dado que los resonadores no lineales son altamente sensibles al punto de operación, cualquier variación en su polarización, excitación o condiciones ambientales dará lugar a la aparición de ruido paramétrico de frecuencia [30] [31].

El estudio matemático del ruido en los resonadores MEMS no lineales resulta complejo, ya que implica el realizar un análisis de los procesos de transformación de ruido cuyo origen está íntimamente ligado al comportamiento físico no lineal del resonador, mostrando soluciones multivaluadas para frecuencias cercanas a la resonancia, dando lugar a la aparición de ciclos de histéresis en frecuencia [32] [33]. En este análisis existen productos de intermodulación entre la señal portadora que está generando la operación no lineal y el ruido [24]. Por otra parte, también aparecen nuevos mecanismos como el efecto A-f, que produce un desplazamiento de la frecuencia de resonancia del resonador a partir del ruido en amplitud de la señal de excitación del resonador [34-35].

El análisis que se realiza en este apartado, al igual que los análisis anteriores, está orientado hacia la explicación y predicción de los fenómenos que se podrán observar experimentalmente. Los fenómenos en los que se centra el apartado son dos: Primero, los fenómenos de mezclado de frecuencia derivados de los diferentes mecanismos no lineales del resonador. Segundo, las consecuencias del efecto A-f que aparece en los resonadores MEMS que experimentan Duffing. Por último, basado en el efecto A-f, se expondrá el efecto de las variaciones en las propiedades del entorno del sistema sobre la frecuencia de resonancia del resonador MEMS no lineal.

#### 4.3.1 Fenómenos de mezclado de frecuencia:

En los resonadores capacitivos tanto la fuerza de excitación como el método de transducción del movimiento son dependientes del valor de la capacidad que se forma entre la estructura resonante y los respectivos electrodos de excitación y lectura. En el modelo de capacidad planoparalela la variación de la capacidad al cambiar la distancia entre las placas para pequeñas amplitudes de movimiento puede considerarse lineal. Sin embargo, para amplitudes de movimiento superiores a la amplitud crítica, este movimiento genera una no linealidad en la fuerza de actuación y en el mecanismo de transducción del movimiento. Este comportamiento también está ligado a la no linealidad en la constante elástica eléctrica del modelo masa-muelle, que también presenta términos no lineales. Por otra parte, la no linealidad mecánica también contribuye con términos no lineales en la constante elástica mecánica. En el capítulo en el que se analiza el modelo

dinámico del resonador se estudiaron los coeficientes de intermodulado debidas a las distintas no linealidades que tienen lugar en el resonador de actuación electrostática y lectura capacitiva [24].

La primera de estas contribuciones era debida a la no linealidad en el valor de las capacidades planoparalelas formadas entre los electrodos de excitación y lectura y la estructura móvil del resonador. Este término de mezclado de frecuencias que representa la no linealidad en la corriente de salida quedaba descrito por la ecuación (29).

$$\Gamma_C = \frac{Q\omega_0\eta_T^2}{2kV_{DC}} \quad (29)$$

Además de este fenómeno, la no linealidad en la fuerza electrostática, debido a estas capacidades, también experimentaba el fenómeno de no linealidad, dando lugar a la aparición del término de intermodulado (30)

$$\Gamma_F = \frac{Q\omega_0\eta^2}{2kV_{DC}} \sqrt{1 + \left(2 \frac{Q\eta_E V_{DC}}{gk}\right)^2} = \Gamma_C \sqrt{1 + \left(2 \frac{Q\eta_E V_{DC}}{gk}\right)^2} \quad (30)$$

Este término incluye el término  $\Gamma_C$ , ya que ambos están generados por el efecto de la no linealidad en las capacidades. La no linealidad en la corriente de salida aparece por la no linealidad en la capacidad entre el resonador y el electrodo de lectura. Sin embargo, la no linealidad en la fuerza eléctrica aparece a partir de las dos capacidades, por lo que tiene un término mayor de up-mixing. Estos dos fenómenos de up-mixing sólo pueden ser compensados utilizando capacidades cuya variación con la posición del resonador sea lineal.

Por otra parte, se vio cómo la no linealidad en la constante elástica del resonador (superposición de componentes eléctricas y mecánicas) genera productos de intermodulado a través de la ecuación (31).

$$\Gamma_k = \frac{3Q^2\omega_0\eta_E^4 V_{DC}}{2g^2k^3} \quad (31)$$

El efecto de estas no linealidades, al igual que las no linealidades del amplificador, producen el desplazamiento de las componentes de ruido de baja

frecuencia a las cercanías de la frecuencia portadora tal como se describió en el capítulo del modelo dinámico, y como se describe en la ecuación (32) [30-31].

$$I_m(\nu_0 \pm f) = 2 \left( \sum_i \Gamma_i \right) V_{AC_1}(\nu_0) V_{AC_n}(f) \quad (32)$$

La contribución al ruido de fase  $S_\phi$  por parte del ruido de origen paramétrico  $S_{\phi_{res}}$  será:

$$S_\phi = S_{\phi_{res}} = \frac{\Gamma_m^2 P_S P_N(f)}{P_S} = \Gamma^2 P_N(f) \quad (33)$$

Donde  $\Gamma_m^2$  es un término de intermodulado que incluye todos los términos de  $S_{\phi_{res}}$  distintos de  $P_S$  y  $P_N$  para obtener una expresión como en (34) para el ruido paramétrico del amplificador.

$$\Gamma_m^2 = \frac{\left( 2 \sum_i \Gamma_i \right)^2}{R_m^2} \quad (34)$$

Donde  $R_m$  es la resistencia mocional del resonador a la frecuencia de resonancia.

#### 4.3.2 Efecto A-f

Cuando se trató el efecto A-f en los resonadores MEMS no lineales se explicó que al resolver la ecuación diferencial no lineal de tercer orden se encontraba que, para un resonador que mostrase no linealidad, mecánica o eléctrica, la respuesta frecuencial del resonador se combaba para amplitudes de movimiento suficientemente grandes, provocando que frecuencia de resonancia dependiese de la amplitud de excitación como muestra la ecuación (35), donde  $x$  corresponde a la amplitud del movimiento [34-35].

$$\Delta \nu = \nu - \nu_0 = \nu_0 \kappa x^2 \quad (35)$$

Por lo que  $S_v(f)$  y  $S_x$  pueden relacionarse a partir de la ecuación (36).

$$S_v(f) = \left| \frac{dv}{dx} \right|^2 S_x = (2\nu_0\kappa)^2 S_x(f) \quad (36)$$

Como se vio en el apartado dedicado a la teoría del ruido de fase, el ruido de frecuencia se puede transformar en ruido de fase equivalente, por lo que el efecto A-f tendría como respuesta al ruido en amplitud del sistema la siguiente distribución espectral (37).

$$S_\varphi(f) = \frac{S_v(f)}{f^2} = \frac{(2\nu_0\kappa)^2}{f^2} S_x(f) \quad (37)$$

Es importante remarcar que la frecuencia de resonancia no sólo es sensible al efecto A-f a través de las fluctuaciones en la amplitud de movimiento del resonador, también es dependiente de las variaciones en el parámetro  $\kappa$ . Este parámetro depende a su vez de parámetros como la temperatura o la presión. Por lo tanto las fluctuaciones de estos parámetros afectan a la frecuencia de resonancia (38) [36-37].

$$S_v(f) = \nu_0^2 x^4 \left( \left| \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right|^2 S_T(f) + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial P} \right|^2 S_P(f) + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial Ac} \right|^2 S_{Ac}(f) \dots \right) \quad (38)$$

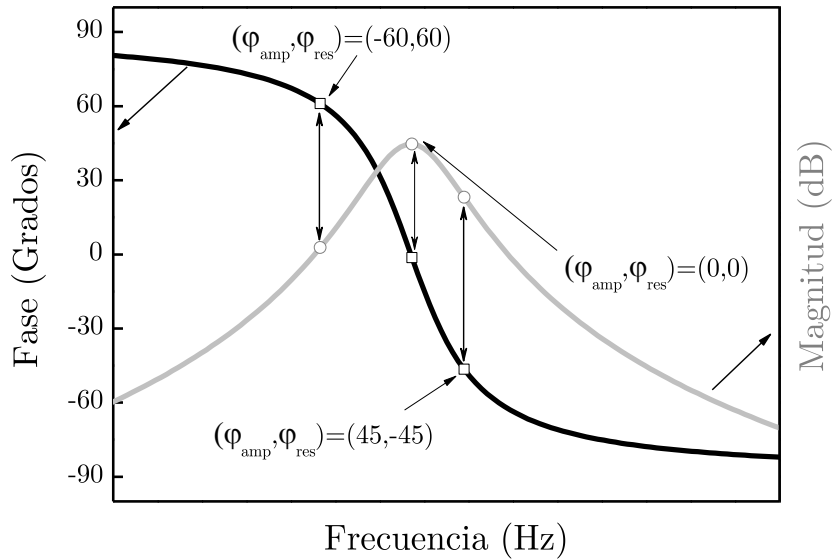
Donde  $S_T$ ,  $S_P$ , y  $S_{Ac}$  representan las densidades espectrales de fluctuaciones en la temperatura, presión y aceleración respectivamente. La contribución total del efecto A-f a  $S_\varphi(f)$  se muestra en (39).

$$S_\varphi(f) = (2\nu_0\kappa)^2 \frac{S_x(f)}{f^2} + \nu_0^2 x^4 \left( \left| \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right|^2 \frac{S_T(f)}{f^2} + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial P} \right|^2 \frac{S_P(f)}{f^2} + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial Ac} \right|^2 \frac{S_{Ac}(f)}{f^2} \dots \right) \quad (39)$$



## 5 Ruido de fase en un sistema oscilador

El sistema oscilador va a estar compuesto por el amplificador que mantendrá la oscilación y el resonador que mantendrá la frecuencia de la oscilación [38]. Tras el análisis del ruido de fase para los dos módulos que componen el sistema oscilador (amplificador y resonador) es necesario analizar cómo interaccionan ambos entre sí cuando se combinan para formar el sistema total. El requisito para que el sistema resonador-amplificador oscile es el cumplimiento del criterio de Barkhausen. Este criterio exige que la ganancia total en lazo abierto ( $G_{\text{Amp}} - R_m$ ) sea igual a cero (una vez alcanzado el equilibrio) así como que la fase total en lazo abierto sea de cero grados. Este apartado se centra en la segunda condición, ya que es clave a la hora de dotar al sistema de libertad para fijar el punto de operación sobre la curva de resonancia del resonador MEMS. Dado que se debe cumplir que  $\varphi_{\text{amp}} + \varphi_{\text{res}} = 0$  para que el sistema oscile, una variación en la fase  $\varphi_{\text{amp}}$  tendrá como reacción el desplazamiento del punto de operación en la curva de resonancia del MEMS para poder cumplir la condición  $\varphi_{\text{res}} = -\varphi_{\text{amp}}$ . La selección del punto de operación puede verse en la figura 8, donde  $\varphi_{\text{amp}}$  toma tres valores distintos, correspondiendo a tres puntos de operación distintos.



**Figura 8.** Representación cualitativa de las curvas fase – frecuencia (negro) y magnitud – frecuencia (gris) correspondientes al resonador MEMS. En la esquina superior derecha se incluye una representación esquemática del oscilador compuesto por el resonador MEMS y el amplificador. La contribución de fase de

cada elemento queda expresada por  $\varphi_{\text{res}}$  y  $\varphi_{\text{amp}}$  respectivamente. El punto de operación fijado por la contribución  $\varphi_{\text{amp}}$  sobre la curva fase – frecuencia queda indicado por un cuadrado hueco en los casos en los que  $\varphi_{\text{amp}} = 60, 0$  y  $-45$ . Por otra parte, a cada punto de operación sobre la curva fase–frecuencia le corresponde un punto en la curva magnitud–frecuencia. Estos puntos están representados respectivamente mediante un círculo hueco y unidos cada uno a su correspondiente cuadrado hueco mediante una doble flecha.

## 5.1 Modelo del oscilador para el MEMS lineal.

El inicio de la oscilación en un sistema que cumple el criterio de Barkhausen [39] ( $G_{\text{Amp}} \geq R_m$ ) el ruido del sistema va a verse amplificado por el amplificador y filtrado en frecuencia por el resonador. Este sistema en el que inicialmente todos los módulos operan en el régimen lineal requiere que uno de estos módulos pase a tener un comportamiento no lineal en magnitud que limite el crecimiento de la amplitud de la oscilación. De esta manera se obtiene una señal estable en frecuencia y amplitud. Por lo tanto, los osciladores van a ser intrínsecamente no lineales, sin embargo, el término oscilador lineal hace referencia al estado de operación del resonador.

Durante décadas se han desarrollado modelos para predecir y justificar el ruido de fase observado en sistemas como los osciladores de cuarzo, y diversos tipos de osciladores como los osciladores de anillo, o los osciladores LC entre muchos. En la actualidad estos modelos son también aplicables a los osciladores MEMS lineales. Entre estos modelos se pueden encontrar desde el primer modelo de Leeson (1966) [40], el modelo de Razavi (1995) [41], el modelo de Hajimiri (1998) [42], el modelo de Demir (2000) [43] o el modelo de Ham (2003) [44].

El modelo más común ha sido y en la actualidad sigue siendo el modelo de Leeson. Este modelo queda descrito por la ecuación (40).

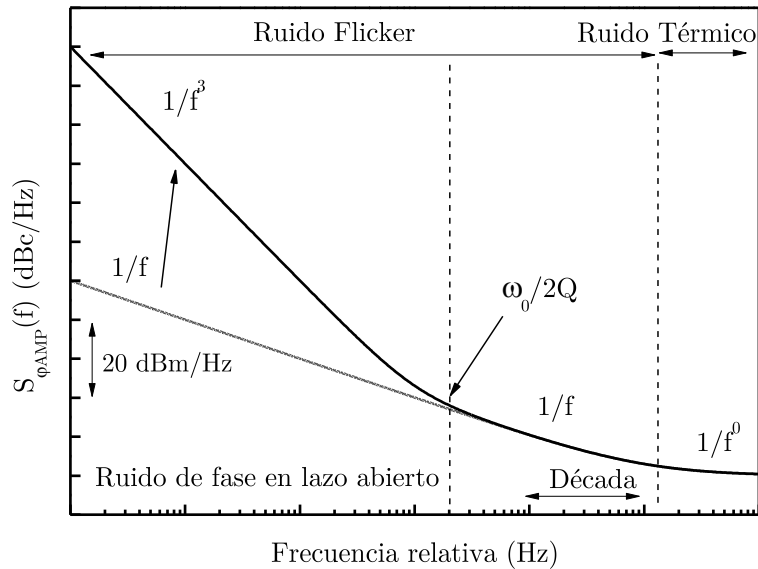
$$L(f) = 10 \log \left( \frac{1}{2} [S_{\varphi_{\text{AMP}}}(f) + S_{\varphi_{\text{RES}}}(f) + S_{\phi}(f)] \left[ 1 + \frac{1}{f^2} \left( \frac{v_0}{2Q} \right)^2 \right] \right) \quad (40)$$

Los términos que aparecen en esta ecuación:  $S_{\varphi_{\text{AMP}}}$ ,  $S_{\varphi_{\text{RES}}}$  y  $S_{\phi}$  corresponden a la contribución del amplificador, del resonador y del ruido paramétrico respectivamente sobre la  $S_{\varphi}$  total del sistema en lazo abierto. En este caso, la componente  $S_{\phi}$  de origen paramétrico es generada por la no linealidad del amplificador, al saturar para estabilizar la amplitud de oscilación. El valor de Q es

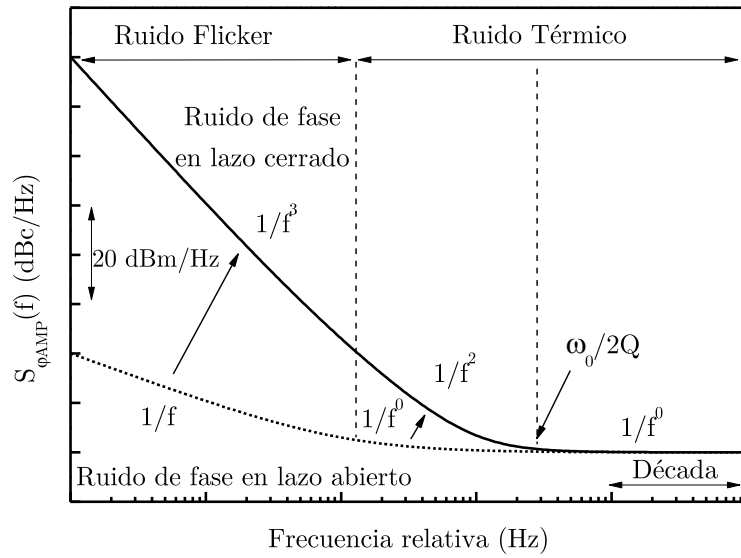
el factor de calidad del resonador MEMS lineal, y  $\nu_0$  la frecuencia de resonancia del resonador y, al mismo tiempo, la frecuencia de oscilación del sistema.

La ecuación (38) representa la transformación de  $S_\varphi$  del sistema en lazo abierto al correspondiente al sistema en lazo cerrado. El ruido de fase a una frecuencia de Fourier  $f > \frac{\nu_0}{2Q}$  no se verá afectada por esta transformación,

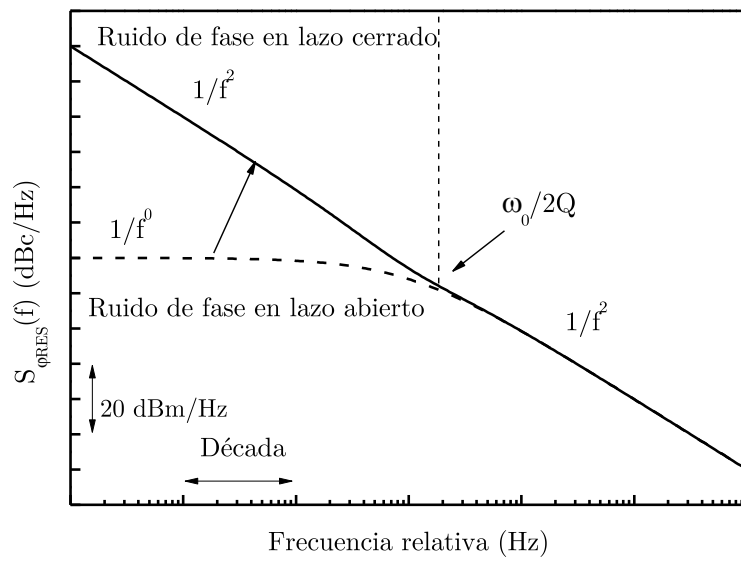
mientras que en el caso de  $f \leq \frac{\nu_0}{2Q}$   $S_\varphi$  quedará multiplicada por  $\frac{1}{f^2}$ , o lo que es lo mismo, su pendiente se verá incrementará. La figura 12 muestra esta transformación tanto de  $S_{\varphi AMP}$  como de  $S_{\varphi RES}$ .



a)



b)



c)

**Figura 12.** Transformación cualitativa del ruido de fase de: Amplificador no lineal en el que ha habido mezclado de frecuencia de ruido Flicker, y: a)  $f_c \geq \frac{\nu_0}{2Q}$ ,

b)  $f_c \leq \frac{\nu_0}{2Q}$ , y c) Resonador MEMS al pasar el sistema a estar de lazo abierto a lazo cerrado, aplicando la expresión (40). La línea discontinua muestra el ruido de fase en lazo abierto, mientras que la línea continua muestra el ruido de fase en lazo cerrado.

En el caso (a), (b) la frecuencia  $\frac{\nu_0}{2Q}$  puede aparecer antes o después del código del ruido Flicker. En el caso (c) la frecuencia  $\frac{\nu_0}{2Q}$  siempre coincide con la del ancho de banda del resonador, por lo que  $S_{\phi RES}$  muestra una dependencia del tipo  $1/f^2$  en todo el espectro  $f$  en la configuración de lazo cerrado.

Al igual que se calculó el mínimo ruido de fase que podía tener un resonador, ahora se puede calcular el mínimo ruido de fase del sistema oscilador, suponiendo que el resonador sea la mayor fuente de ruido de fase. Para mayor facilidad y adaptabilidad a distintos resonadores se muestra el mínimo ruido de fase a partir de las energías que intervienen en la oscilación (41).

$$L(f) = 10 \log \left( \frac{k_B T}{4P_{Disipada}} \left( \frac{1}{2Q} \frac{\nu_0}{f} \right)^2 \right) = 10 \log \left( \frac{k_B T Q}{8\pi E_c \nu_0} \left( \frac{1}{2Q} \frac{\nu_0}{f} \right)^2 \right) \quad (41)$$

$$L(f) = 10 \log \left( \frac{k_B T}{32\pi E_c} \frac{\nu_0}{Q} \frac{1}{f^2} \right)$$

Donde el término  $\left( \frac{1}{2Q} \frac{\nu_0}{f} \right)^2$  representa la dependencia  $1/f^2$  del  $S_{\phi RES}(f)$  una vez que se ha cerrado el lazo [45].

## 5.2 Modelo no lineal del oscilador MEMS.

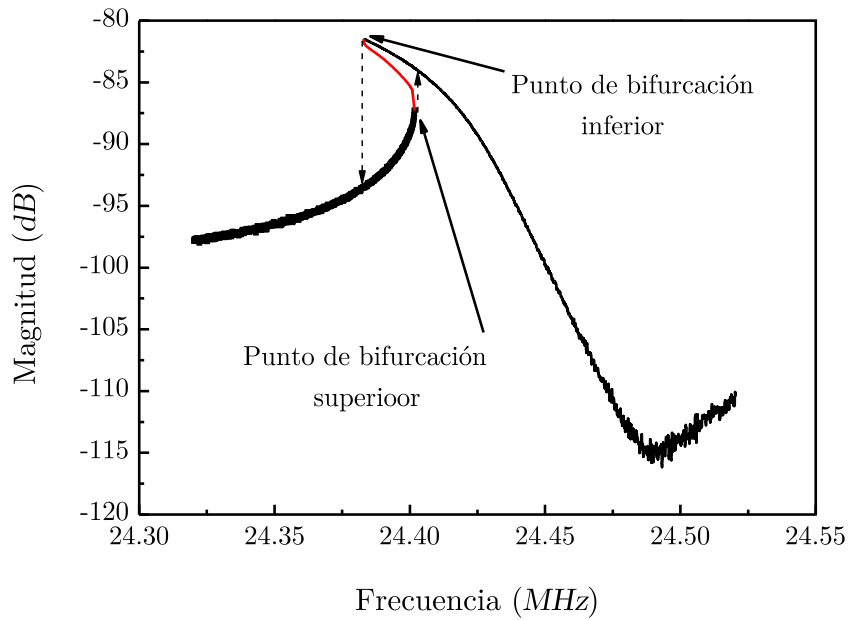
El modelo actual más utilizado para describir el ruido de fase de un sistema oscilador cuyo resonador opera en el régimen no lineal queda descrito por la ecuación (42) [36].

$$L(f) = 10 \log \left( \frac{1}{2} [S_{\varphi AMP}(f) + S_{\varphi RES}(f) + S_{\phi}(f)] \left[ 1 + \frac{1}{f^2} \left( \frac{d\varphi}{dv} \Big|_v \right)^{-2} \right] + \frac{S_v(f)}{f^2} \right) \quad (42)$$

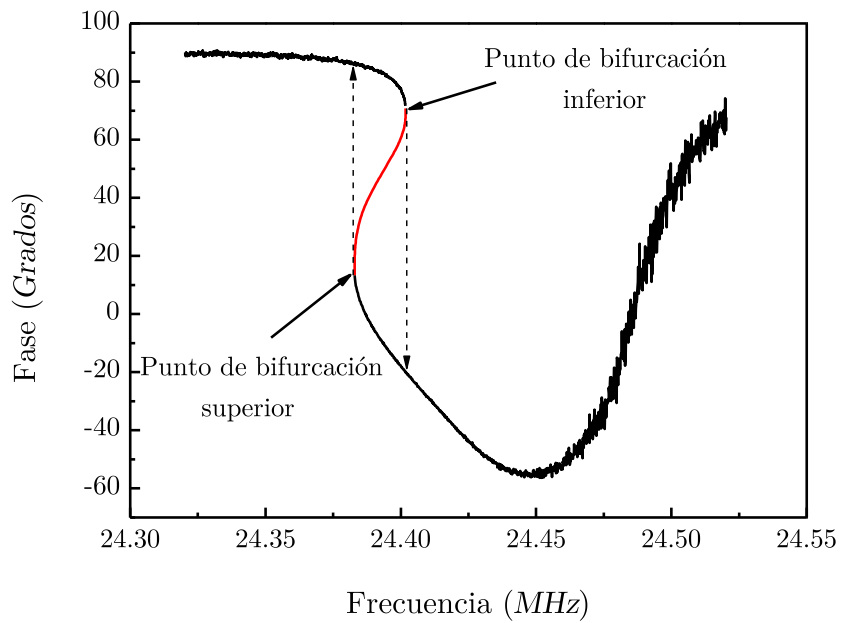
Donde como en el caso lineal  $S_{\varphi}$  se ha dividido en tres contribuciones:  $S_{\varphi AMP}$  representa la contribución del amplificador,  $S_{\varphi RES}$  la contribución del resonador, y por último,  $S_{\phi}$  la contribución de ruido paramétrico cuyo origen está en los productos de intermodulación del amplificador o fenómenos no lineales del resonador [24].  $S_v$  representa el ruido en frecuencia correspondiente a la frecuencia de resonancia del resonador originada por el efecto A-f del resonador no lineal. Todos los parámetros de la ecuación (42) mencionados han sido estudiados en apartados anteriores.

El nuevo término que incluye la ecuación (42),  $\frac{d\varphi}{dv} \Big|_{v=v_0}$  respecto a la ecuación (40) representa la derivada de la fase del resonador respecto a la frecuencia evaluada en la frecuencia de oscilación  $v_0$ . El término que incluye esta derivada,  $\left[ 1 + \frac{1}{f^2} \left( \frac{d\varphi}{dv} \Big|_{v_0} \right)^{-2} \right]$ , representa la transformación que experimenta el ruido de fase en lazo abierto de los distintos módulos del sistema (resonador  $S_{\varphi RES}$ , amplificador  $S_{\varphi AMP}$ , componentes de origen paramétrico  $S_{\phi}$ ) al cerrarse el lazo. La derivada  $\frac{d\varphi}{dv} \Big|_v$  ha aparecido siempre en los modelos de ruido de fase desde el primer modelo de Leeson [40], sólo que al ser aplicado a un resonador lineal esta derivada tomaba el valor  $\frac{v_0}{2Q}$ .

En los resonadores lineales el valor de la derivada  $\frac{d\varphi}{dv} \Big|_v$  tiende a ser un valor finito, sin embargo, en el caso de los resonadores no lineales, el término  $\frac{d\varphi}{dv} \Big|_v$  debe ser analizado cautelosamente, ya que diverge en las cercanías de los puntos de bifurcación del resonador. A continuación se analiza esta derivada para el caso de un resonador no lineal. La figura 13 muestra la magnitud y la fase de un resonador no lineal para una amplitud de excitación superior a la amplitud crítica. Una vez sobrepasada la amplitud crítica, la curva de resonancia del resonador pasa a estar multivaluada, dando lugar a la aparición de un ciclo de histéresis.



a)



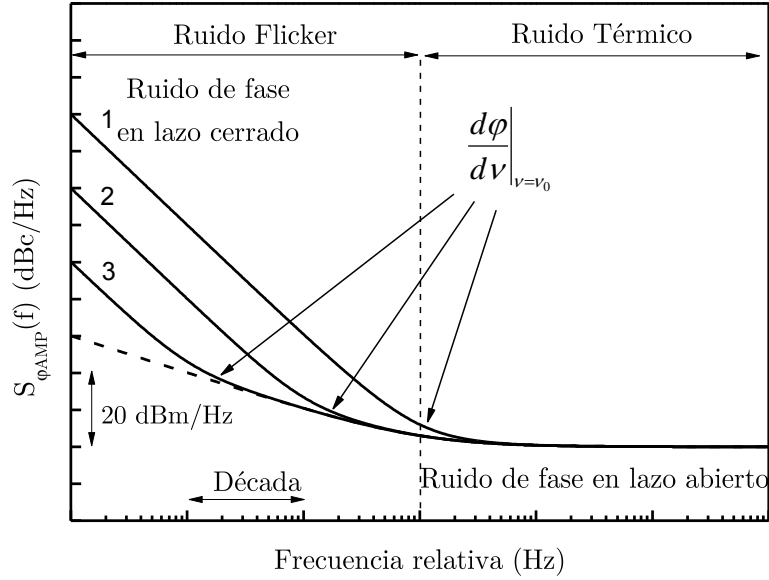
b)

**Figura 13.** Las curvas negras representan la superposición de los barridos de frecuencia ascendente y descendente. La curva roja representa la solución

teórica al comportamiento no lineal del resonador. En ambas gráficas *a* y *b* se indican los puntos de bifurcación.

Como se puede observar, en el resonador no lineal no sólo queda multivaluada la magnitud, sino que también lo queda la fase. En la figura 13 se indican los dos puntos de bifurcación [32] para los cuales tanto la derivada de la fase  $\frac{d\phi}{d\nu}$  como la derivada de la magnitud  $\frac{dM}{d\nu}$  toman un valor infinito [46]. Comparando este resultado con el valor de  $\frac{\nu_0}{2Q}$ , cuando el resonador operase en los puntos de bifurcación el sistema estaría trabajando con un factor de calidad equivalente infinito  $\left. \frac{d\phi}{d\nu} \right|_{\nu} = \frac{2Q_{efectivo}}{\nu_0} = \infty$ . Así pues, desde el punto de vista teórico, cuando el resonador opera en sus puntos de bifurcación el ruido de fase del lazo de realimentación se ve totalmente filtrado [47-49]. Como resultado se obtiene que el ruido de fase del sistema en lazo abierto es el mismo que el sistema en lazo cerrado. En la figura 14 se muestra la progresión en el ruido de fase según se incrementa el grado de no linealidad del resonador, viéndose a su vez incrementada la pendiente y por lo tanto mejorando la capacidad del resonador para filtrar el ruido de fase del lazo [37].





**Figura 14.** Representación de la transformación de la componente  $S_{\varphi^{AMP}}$  del amplificador al cerrar el lazo del sistema. En la figura se representan 3 curvas numeradas del 1 al 3. En este caso las derivadas correspondientes a las curvas cumplen la condición:  $100 \frac{d\varphi}{dv}|_v (1) = 10 \frac{d\varphi}{dv}|_v (2) = \frac{d\varphi}{dv}|_v (3)$ .

Este concepto teórico aplicado a las propiedades de las derivadas sobre los puntos de bifurcación ofrece claras ventajas sobre el resonador lineal, sin embargo, trabajar sobre los puntos de bifurcación implica varios problemas. El primero está ligado a la dificultad de fijar el punto de operación del resonador no lineal sobre los puntos de bifurcación. Para ello es necesario no sólo fijar la fase del sistema, sino que además se debe controlar la amplitud con la que se excita al resonador. El sistema utilizado para lograr este objetivo queda descrito en el artículo [48], donde se describe un sistema que incluye un control de la fase del lazo y la amplitud de realimentación entre otros elementos. La segunda desventaja del resonador no lineal cuando se opera en los puntos de bifurcación es el anteriormente mencionado efecto A-f, descrito en la ecuación (40), que afecta al segundo término de la ecuación (43).

$$\begin{aligned}
S_{\varphi(A-f)}(f) &= \frac{S_v(f)}{f^2} = \frac{(2\nu_0\kappa)^2}{f^2} S_x(f) \\
&+ \nu_0^2 x^4 \left( \left| \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right|^2 S_T(f) + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial P} \right|^2 S_P(f) + \left| \frac{\partial \kappa}{\partial Ac} \right|^2 S_{Ac}(f) \dots \right)
\end{aligned} \tag{43}$$

Recientes estudios [49] demostraron que el efecto A-f que sufre el punto de bifurcación inferior es mucho más suave que el que aparece en el punto superior de bifurcación. Para amplitudes de excitación suficientemente altas, cuya frontera no ha sido definida matemáticamente, se puede observar que el efecto A-f en el punto de bifurcación inferior tiende a anularse. Esto hace que a día de hoy, a nivel teórico el punto de trabajo óptimo para un resonador no lineal está localizado en su punto de bifurcación inferior.

La teoría del resonador no lineal ha sido llevada a la práctica en múltiples sistemas [36-37], [48-51], ofreciendo osciladores cuyas prestaciones en ruido de fase superan los resultados obtenidos con resonadores operando en el régimen lineal en estas mismas tecnologías.

## 6 Referencias

- [1] Jacques Rutman, F. L. Walls, “Characterization of Frequency Stability on Precision Frequency Sources”, Proceedings of the IEEE, Vol 79, No 6. 1991.
- [2] James A. Barnes et. al, “Characterization of Frequency Stability”, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. IM-20, No. 2. 1971.
- [3] David Allan et. al, “Standard Terminology for Fundamental Frequency and Time Metrology”. 42nd Annual Frequency Control Symposium. 1988.
- [4] Alper Demir, “Phase Noise and Timing Jitter in Oscillators With Colored-Noise Sources” IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, Vol 49, No 12. Dec 2002.
- [5] HP, RF & Microwave Phase Noise Measurement Seminar. <http://www.thegleam.com/ke5fx/gpib/pn.html>. 1985.
- [6] Enrico Rubiola, “Phase Noise and Frequency Stability in Oscillators”, Cambridge University Press.
- [7] IEEE Std 1139-1999. IEEE Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology - Random Instabilities
- [8] David W. Allan, “Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators”, IEEE

Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. UFFC-34, No 6. 1987.

[9] David. W Allan and James A. Barnes “A Modified “Allan Variance” with Increased Oscillator Characterization Ability”, Proc. 35<sup>th</sup> Ann. Freq. Control Symposium. May 1981.

[10] J. Johnson, "Thermal Agitation of Electricity in Conductors", Phys. Rev. 32, 97 (1928) – the experiment.

[11] H. Nyquist, "Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors", Phys. Rev. 32, 110 (1928) – the theory.

[12] Aldert van der Ziel. “Noise in Solid State Devices and Circuits”. Wiley, New York 1986.

[13] M. J. Buckingham. “Noise in Electronic Devices and Systems”. Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1983.

[14] S. Christensson, I. Lundström, and C. Svensson. “Low frequency noise in MOS transistors” — I. theory. Solid-State Electronics, 11:797–812, 1968.

[15] S. Christensson and I. Lundström. “Low frequency noise in MOS transistors” — II. experiments. Solid-State Electronics, 11:813–820, 1968.

[16] Kwok K. Hung, Ping K. Ko, Chenming Hu, and Yiu C. Cheng. “A unified model for the flicker noise in metal-oxide-semiconductor field-effect transistors.” IEEE Transactions on Electron Devices, 37(3):654–665, March 1990.

[17] Kent H. Lundberg “Noise Sources in Bulk CMOS”. [http://web.mit.edu/klund/www/papers/UNP\\_noise.pdf](http://web.mit.edu/klund/www/papers/UNP_noise.pdf)

[18] RF Microelectronics 2<sup>nd</sup> edition, The Prentice Hall, 2012, Chapter 6: Mixers.

[19] Design of Analog CMOS Integrated Circuits, McGraw-Hill, 2000, Chapter 7: Noise.

[20] A. N. Cleland and M. L. Roukes, “Noise processes in nanomechanical resonators”, J. Appl. Phys., vol. 92, no. 5, pp. 2758-2769, 2002

[21] T. B. Gabrielson, “Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors”, IEEE Trans. Electron Dev., vol. 40 , no. 5, pp. 903-909, 1993.

[22] Waterson, JJ (1851). British Association Reports 21: 6. *\*Waterson presenta su trabajo fundamental a la Royal Society en 1845. Su trabajo se rechaza y se archiva. En 1891 Lord Rayleigh rescata este trabajo del archivo, reconociendo su autoría y descubrimiento a Waterson y no a Maxwell quien presentó sus trabajos años después.*

[23] K.L. Ekinci, Y.T. Yang, and M.L. Roukes, “Ultimate limits to inertial mass sensing based upon nanoelectromechanical systems”, J. Appl. Phys., vol. 95, pp. 2682, 2004.

- [24] V. Kaajakari, J. K. Koskinen, and T. Mattila, “Phase noise in capacitively coupled micromechanical oscillators,” *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 52, no. 12, pp. 2322–2331.
- [25] Zoran Djuric, “Mechanisms of noise sources in microelectromechanical systems” *Microelectronics Reliability* 40. 2000.
- [26] John R. “Noise in Microelectromechanical System Resonators” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. Vol 46, No6. Nov 1999.
- [27] K. L. Ekinici and M. L. Roukes, “Nanoelectromechanical systems,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 76, no. 6, p. 061101, 2005.
- [28] K. L. Ekinici, “Electromechanical Transducers at the Nanoscale: Actuation and Sensing of Motion in Nanoelectromechanical Systems (NEMS),” *Small*, vol. 1, no. 8, pp. 786–797, Aug. 2005.
- [29] A. N. Cleland and M. L. Roukes, “Noise processes in nanomechanical resonators,” *Journal of Applied Physics*, vol. 92, no. 5, p. 2758, Sep. 2002.
- [30] G. Sobreviela, M. Riverola, A. Uranga, and N. Barniol “Noise effects on resonator bias polarization in CMOS-MEMS oscillators”, *IEEE SENSORS 2014 Proceedings*. Pages 551-554. Valencia, Spain. 2-5 Nov 2014.
- [31] Wan-Cehng Chiu, Ming-Huang Li, Chao-Yu Chen, and Sheng-Shian Li. “Effects of pressure and bias voltage on the phase noise of CMOS-MEMS oscillators” *2015 IEEE International Frequency Control Symposium & the European Frequency and Time Forum*. Page 155-157. Denver, Co. 12-16 April 2015.
- [32] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Oja, and H Seppä, “Nonlinear limits for single-crystal microresonators,” *J. Microelectromech. Syst.*, Vol. 13, No. 5, pp. 715–724, Oct. 2004.
- [33] L. C. Shao, M. Palaniapan, W. W. Tan, and L. Khine, “Nonlinearity in micromechanical free-free beam resonators: Modeling and experimental verification,” *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 18, No. 2, p. 025017, Jan. 2008.
- [34] M. Agarwal, K. Park, R. Candler, B. Kim, M. Hopcroft, S. Chandorkar, C. Jha, R. Melamud, T. Kenny, and B. Murmann, “Nonlinear Characterization of Electrostatic MEMS Resonators,” presented at the 2006 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition, pp. 209–212.
- [35] M. Agarwal, K. K. Park, B. Kim, M. A. Hopcroft, S. A. Chandorkar, R. N. Candler, C. M. Jha, R. Melamud, T. W. Kenny, and B. Murmann, “Amplitude noise induced phase noise in electrostatic MEMS resonators,” presented at the Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, 2007. TRANSDUCERS 2007. International, 2006.
- [36] P. Ward and A. Duwel, “Oscillator phase noise: systematic construction of an analytical model encompassing nonlinearity,” *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 58, no. 1, pp. 195–205.

- [37] M. Pardo, L. Sorenson, and F. Ayazi, "An Empirical Phase-Noise Model for MEMS Oscillators Operating in Nonlinear Regime," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 59, no. 5, pp. 979–988, Apr. 2012.
- [38] E. A. Gerber and A. Ballato, Precision Frequency Control; Volume 2: Oscillators and Standards. Academic Press, London, 1985.
- [39] Rhea, Randall W. (2010). Discrete Oscillator Design: Linear, Nonlinear, Transient, and Noise Domains. Artech House. p. 3. ISBN 1608070484.
- [40] Leeson, D. B. , "A Simple Model of Feedback Oscillator Noise Spectrum", *Proceedings of the IEEE. Feb 1966*.
- [41] B. Razavi, "Analysis, modeling and simulation of phase noise in monolithic voltage-controlled oscillators," in Proc. IEEE Custom Integrated Circuits Conf., May 1995.
- [42] A. Hajimiri and T.H. Lee, "A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*.vol. 33, no. 2, Feb. 1998.
- [43] A. Demir, A. Mehrotra and J. Roychowdhury, "Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization", In *IEEE Trans. Circ. And Syst.-1*, vol. 47, no. 5, pp. 655-674, May 2000.
- [44] Donhee Ham, Ali Hajimiri, "Virtual Damping and Einstein Relation in Oscillators", *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 38, no. 3, March. 2003.
- [45] L. G. Villanueva, E. Kenig, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, M. C. Cross, and M. L. Roukes, "Surpassing Fundamental Limits of Oscillators Using Nonlinear Resonators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 17, p. 177208, Apr. 2013. (Supplementary information)
- [46] B. Yurke, D. S. Greywall, A. N. Pargellis, and P. A. Busch, "Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator," *Phys. Rev. A*, vol. 51, no. 5, pp. 4211–4229, May 1995.
- [47] E. Kenig, M. C. Cross, L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, and M. L. Roukes, "Optimal operating points of oscillators using nonlinear resonators," *Phys. Rev. E*, vol. 86, no. 5, p. 056207, Nov. 2012.
- [48] Mestrom et al, Phase Feedback for Nonlinear MEM Resonators in Oscillator Circuits, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(4), (2009), pp. 423-433
- [49] L. G. Villanueva, E. Kenig, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, M. C. Cross, and M. L. Roukes, "Surpassing Fundamental Limits of Oscillators Using Nonlinear Resonators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 17, p. 177208, Apr. 2013.
- [50] H. K. Lee, R. Melamud, S. Chandorkar, J. Salvia, S. Yoneoka, and T. W. Kenny, "Stable Operation of MEMS Oscillators Far Above the Critical Vibration Amplitude in the Nonlinear Regime," *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 20, no. 6, pp. 1228–1230, Dec. 2011.

[51] H. K. Lee, P.A. Ward, A.E. Duwel, J.C. Salvia, Y.Q. Qu, R. Melamud, S.A. Chandorkar, M.A. Hopcroft, B. Kim, and T.W. Kenny "Verification of the phase-noise model for MEMS oscillators operating in the nonlinear regime," 2011 16th International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, pp. 510-513, 2011