

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

**UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE
ESTIMACIÓN DE ERROR Y GENERACIÓN
AUTOMÁTICA DE MALLAS EN PROCESOS
DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

GABRIEL BUGEDA CASTELLTORT

DIRIGIDA POR:

JAVIER OLIVER OLIVELLA

BARCELONA - MARZO DE 1990.

AGRADECIMIENTOS

Es costumbre incluir en las primeras páginas de una tesis una sección de agradecimientos. Sin embargo, no quisiera que la inclusión de la misma en este trabajo se interpretase como el cumplimiento de una formalidad, sino como la expresión de mi más profundo agradecimiento hacia todas las personas que me han rodeado durante la realización del mismo, y sin las cuales ello no hubiera sido posible.

Quiero agradecer de una forma muy especial la ayuda prestada por el profesor Javier OLIVER en todos los aspectos que han rodeado la realización de esta tesis, no sólo desde el punto de vista de su elaboración, sino también en todo lo que rodea la vida universitaria del investigador. Asimismo, también agradezco muy especialmente la ayuda recibida por parte del profesor Fermín NAVARRINA, al cual debo multitud de sugerencias y una gran cantidad de información procedente de su propia tesis doctoral.

Agradezco también profundamente a los profesores Eugenio OÑATE, Miguel CERVERA, Juan MIQUEL, Benjamín SUÁREZ y Carlos AGELET su constante apoyo y colaboración, no sólo en la confección de este trabajo sino en todo lo referido a la vida académica dentro de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Agradezco también el trabajo de todos los estamentos que forman la misma, gracias al cual es posible la realización de tesis como esta.

También agradezco a Sergio OLLER, Fernando QUINTANA, Carlos GARCIA GARINO y Mario GALINDO todas sus sugerencias para la realización de los ejemplos presentados en esta tesis y para la presentación de la misma.

No quiero olvidar tampoco toda la ayuda recibida en relación con los medios informáticos utilizados en este trabajo. Ha sido muy importante la colaboración en este aspecto de Fermín NAVARRINA, José SARRATE, Alberto LEDESMA, Anna NISARRE, Simon WILLIS y Dominic CLARK. También ha sido muy importante la ayuda recibida por parte de Eduardo GONZÁLEZ, al cual debo la gran calidad de delineación de las figuras que aparecen en este trabajo.

Por último quiero agradecer las ayudas económicas recibidas por parte del Ministerio de Educación y Ciencia (becas F.P.I.) y de la Generalitat de Catalunya (C.I.R.I.T.).

Gabriel BUGEDA CASTELLTORT

Barcelona - Marzo de 1990

INDICE**CAPITULO 1 :
INTRODUCCION Y OBJETIVOS.**

1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 OBJETIVOS	3
1.3 CONTENIDO DE LA TESIS	5

**CAPITULO 2 :
LA ESTIMACIÓN Y LA CORRECCIÓN DEL ERROR EN EL ANÁLISIS
ESTRUCTURAL POR EL MEF. ESTADO DEL ARTE**

2.1 INTRODUCCIÓN	9
2.2 DESARROLLO HISTÓRICO	11
2.3 FORMULACIÓN JERÁRQUICA DE LAS FUNCIONES DE FORMA	16
2.3.1 Funciones de forma jerárquicas	17
2.3.2 Estructura de las ecuaciones	25
2.3.3 Propiedades de las funciones de forma jerárquicas	28
2.4 ANÁLISIS DEL ERROR	31
2.4.1 Normas de medición de error	33
2.4.2 Velocidad de convergencia	38
2.4.3 Estimadores e indicadores de error	42
2.5 INDICADORES DE ERROR	43
2.6 ESTIMADORES DE ERROR	49
2.6.1 Estimador de Babuška, Rheinboldt, Zienkiewicz, Kelly y Gago	50
2.6.2 Estimadores derivados de los indicadores de error	54
2.6.3 Estimador local de error de Specht	55
2.6.4 Estimador de Zienkiewicz y Zhu	59
2.6.5 Estimador de error de Roberti y Melkanoff	65

2.6.6	Estimador de Kelly, Mills, Reizes y Miller	67
2.7	ESTRATEGIAS PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES	70
2.7.1	Estrategias para los refinamientos no jerárquicos	71
2.7.2	Estrategias para los refinamientos jerárquicos	73
2.7.3	Estrategias para los remallados automáticos	75
2.7.3.1	<i>Definición del remallado</i>	76
2.7.3.2	<i>Criterios de optimalidad de la malla</i>	79
2.8	EJEMPLO DE UTILIZACIÓN DE UN ESTIMADOR DE ERROR	86

CAPITULO 3 : TÉCNICAS PARA LA GENERACIÓN DE MALLAS. ESTADO DEL ARTE

3.1	INTRODUCCIÓN	91
3.2	DEFINICIÓN DE CONTORNOS. B-SPLINES	94
3.2.1	Utilización de los B-splines paramétricos para definir contornos	94
3.3	TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS ESTRUCTURADAS	105
3.3.1	Generación de mallas mediante resolución de ecuaciones en derivadas parciales ..	105
3.3.2	Generación de mallas mediante transformaciones conformes	111
3.3.3	Generación de mallas mediante esquemas de interpolación	114
3.3.4	Generación de mallas utilizando multibloques	120
3.4	TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS NO ESTRUCTURADAS	128
3.4.1	Definición de las características de la malla	129
3.4.2	Método del avance frontal	130
3.4.2.1	<i>Generación de puntos sobre el contorno</i>	131
3.4.2.2	<i>Construcción del frente de generación inicial</i>	134
3.4.2.3	<i>Generación de los elementos triangulares</i>	135
3.4.2.4	<i>Introducción del alargamiento</i>	137
3.4.2.5	<i>Estructura de la información</i>	138
3.4.2.6	<i>Operaciones de "cosmética"</i>	139
3.4.3	Método de triangulación de Delaunay	144
3.4.3.i	<i>Generación previa de los nodos</i>	147

3.4.3.2 <i>Triangulación de Delaunay</i>	151
3.5 ADAPTABILIDAD DE LAS MALLAS. MÉTODOS HÍBRIDOS	162
3.6 METODOLOGÍA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN GENERADOR DE MALLAS. PROGRAMA 2DUMG.	166
3.6.1 Información necesaria para el programa de generación	166
3.6.1.1 <i>Información sobre la forma del dominio</i>	167
3.6.1.2 <i>Información sobre cargas y coacciones</i>	168
3.6.1.3 <i>Información sobre la malla de referencia</i>	169
3.6.2 Salida de los resultados del proceso de generación	172
3.6.3 Ejemplos de generación de mallas	172
3.6.3.1 <i>Ejemplo nº 1. Espécimen de laboratorio</i>	173
3.6.3.2 <i>Ejemplo nº 2. Viga entallada</i>	175
3.6.3.3 <i>Ejemplo nº 3. Perfil de ala de avión</i>	176
3.6.3.4 <i>Ejemplo nº 4. Morro de avión a velocidad supersónica</i>	176

CAPITULO 3 – ANEXO A :
DESCRIPCIÓN DE LOS B-SPLINES.

A.1 SPLINES POLINÓMICOS	205
A.2 SPLINES PARAMÉTRICOS	207
A.3 B-SPLINES	207

CAPITULO 4 :
PROCESOS DE REMALLADO AUTOMÁTICO CON CONTROL DE ERRORES.
METODOLOGÍA Y EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

4.1 INTRODUCCIÓN	215
4.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	217
4.3 GENERACIÓN DE LAS MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS	222
4.4 CÁLCULO Y ESTIMACIÓN DEL ERROR	223
4.5 DEFINICIÓN DEL REMALLADO	225
4.6 EJEMPLOS DE APLICACIÓN	226
4.6.1 <i>Ejemplo nº 1. Tubería gruesa sometida a presión interior</i>	229
4.6.2 <i>Ejemplo nº 2. Tubería gruesa sometida a carga repartida diametral.</i>	234

4.6.3	Ejemplo nº 3. Pieza en forma de L.	239
4.6.4	Conclusiones	241

CAPITULO 5 :

UTILIZACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DE ERRORES Y DE LA GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS EN PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

5.1	INTRODUCCIÓN	373
5.2	ASPECTOS GENERALES Y DEFINICIONES	376
5.3	ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE DISEÑO ÓPTIMO	379
5.3.1	Formulación técnica de objetivos	379
5.3.2	Modelado y parametrización del diseño	380
5.3.3	Cálculo	380
5.3.4	Mejora del diseño	381
5.3.5	Descripción del diseño y su comportamiento	381
5.4	METODOLOGÍA PROPUESTA PARA PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL UTILIZANDO LAS TÉCNICAS DE GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS Y CONTROL DE ERRORES	383
5.4.1	Módulo de Definición de Objetivos y Restricciones	384
5.4.2	Módulo de Parametrización	388
5.4.2.1	<i>Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos situados sobre las curvas de definición</i>	394
5.4.2.2	<i>Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos interiores</i>	397
5.4.2.3	<i>Cálculo de las sensibilidades de los vectores de cargas y de coacciones</i>	401
5.4.3	Módulo de Cálculo	402
5.4.4	Módulo de Decisión	408
5.4.4.1	<i>Algoritmo de Optimización</i>	411
5.4.4.2	<i>Clasificación del punto</i>	413
5.4.4.3	<i>Obtención de la dirección de avance</i>	414
5.4.4.4	<i>Obtención del factor de avance</i>	416
5.4.4.5	<i>Actualización de la aproximación a la solución</i>	420
5.4.4.6	<i>Construcción de la malla de referencia para el próximo diseño</i>	420

5.4.5	Módulo de Postproceso	423
5.4.6	Módulo de Control	423
CAPITULO 5 – ANEXO B :		
	CALCULO DE LAS SENSIBILIDADES DE PRIMER ORDEN PARA LAS EXPRESIONES INTEGRALES	425
CAPITULO 5 – ANEXO C :		
	CALCULO DE LAS SENSIBILIDADES DE ORDEN SUPERIOR PARA LAS EXPRESIONES INTEGRALES	431
CAPITULO 6 :		
	EJEMPLOS DE APLICACIÓN EN PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL	
6.1	INTRODUCCIÓN	433
6.2	EJEMPLO Nº 1. OPTIMIZACIÓN DE LA SECCIÓN DE UNA TUBERÍA	435
6.3	EJEMPLO Nº 2. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE UNA BIELA	452
6.4	EJEMPLO Nº 3. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE UN ARCO Y UNA BÓVEDA	461
6.4.1	Optimización de la forma de un arco	461
6.4.2	Optimización de la forma de una bóveda de revolución	469
6.5	EJEMPLO Nº 4. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE LA SECCIÓN CENTRAL DE UNA PRESA BÓVEDA	476
6.5.1	Presa sin cimentación. Caso nº 1.	476
6.5.2	Presa sin cimentación. Caso nº 2.	487
6.5.3	Presa sin cimentación. Caso nº 3.	494
6.5.4	Presa con cimentación. Caso nº 1.	497
6.5.5	Presa con cimentación. Caso nº 2.	504
CAPITULO 7 :		
	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	
7.1	APORTACIONES DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	511
7.2	CONCLUSIONES	513
7.3	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	516
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	519

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1 INTRODUCCIÓN

El gran avance tecnológico de las últimas décadas en el campo de los ordenadores digitales, junto con el desarrollo de los métodos numéricos han conducido a la extensiva utilización del ordenador para resolver cualquier tipo de problema matemático.

Dentro del área del análisis estructural, las técnicas de resolución por el Método de los Elementos Finitos se han impuesto como las más potentes, versátiles y flexibles. Por ello, dichas técnicas son ya de uso común para realizar cálculos de cualquier tipo relacionados con la mecánica estructural. El hecho de que la capacidad y rapidez de los ordenadores, en especial los personales, haya experimentado un fuerte aumento en los últimos años, ha possibilitado que hasta las más pequeñas empresas relacionadas con el mundo de la ingeniería puedan abordar dichos cálculos. Esta herramienta ha descargado al ingeniero de la pesada tarea de realizar manualmente, y mediante fuertes simplificaciones, los cálculos relacionados con el análisis de estructuras.

Otra herramienta, fundamental en el mundo de la ingeniería, y también facilitada por los ordenadores, es el diseño asistido por ordenador. Mediante ésta es posible visualizar rápidamente la forma de los distintos diseños concebidos por el ingeniero. Además, dicha herramienta permite confeccionar planos y otras definiciones geométricas aliviando, de nuevo, al ingeniero de la realización directa de los mismos.

Gracias a todo ello, el coste y el tiempo necesario para llevar a cabo los procesos de diseño ha decrecido considerablemente en los últimos años, y la labor del diseñador puede concentrarse en la toma de decisiones para conseguir el mejor diseño posible. Sin embargo, la utilización de técnicas numéricas que incidan directamente sobre dichas decisiones no ha experimentado un desarrollo tan espectacular. Estas técnicas están encaminadas a proporcionar al ingeniero información sobre las consecuencias derivadas de cada cambio realizado sobre un

diseño, e incluso automatizar la toma de decisiones que conduzca a la obtención de un diseño óptimo bajo un determinado criterio.

El hecho de que el diseño óptimo asistido por ordenador no haya experimentado el desarrollo esperado es debido no tanto al hecho de que sus necesidades computacionales son importantes, como a que el desarrollo de herramientas eficaces en este campo requiere la utilización de técnicas numéricas muy diversas que generan una abundante problemática.

Por otro lado, no existe ningún programa comercial de optimización estructural que sea utilizable para cualquier tipología estructural. Esto es debido a la dificultad de generar una metodología capaz de abordar el problema de optimización relativo a cualquier tipología. Esta carencia se refleja principalmente en tres etapas distintas del proceso de optimización estructural: la parametrización de los diseños, la generación de mallas de elementos finitos y la resolución del problema matemático de optimización.

La parametrización de diseños consiste en la definición completa de cada uno de ellos a partir de una serie de variables que se denominan "variables de diseño". El proceso de optimización estructural trata, precisamente, de hallar los valores de dichas variables que hagan mínima una cierta función llamada "función objetivo". Dicha función es la expresión matemática del criterio que se utilice para decidir cuando un diseño es mejor que otro. El problema de optimización consta además de una serie de "restricciones" que son expresiones en forma de igualdad o desigualdad y constituyen una serie de requisitos que debe cumplir el diseño óptimo. Las posibilidades de parametrización de los programas de optimización estructural existentes en la actualidad están restringidas a ciertas familias de tipologías, por lo que su utilización es muy limitada.

Durante el proceso de optimización estructural es preciso calcular el comportamiento mecánico de cada diseño obtenido y las sensibilidades del mismo respecto a los cambios de cada variable de diseño. Para ello se puede utilizar el método de los elementos finitos, convenientemente desarrollado, para proporcionar el cálculo de sensibilidades. Por tanto, para cada diseño será necesario generar una malla de elementos finitos adecuada a la geometría del mismo. Actualmente existen muy pocas técnicas de generación de mallas que sean capaces de llevar a cabo el mallado de cualquier geometría sin una fuerte intervención del usuario. Por otro lado, la utilización de una malla estructurada que se mueva junto con el diseño durante todo el proceso de optimización puede producir errores apreciables en el cálculo debido a la no idoneidad de la misma para las geometrías utilizadas.

A pesar del gran desarrollo que han experimentado los métodos de cálculo

por elementos finitos, no existe un uso generalizado de las técnicas de estimación de error para conocer el grado de precisión obtenido en un cálculo. Por ello, en la inmensa mayoría de los casos, el calculista no conoce si la malla utilizada en un cierto cálculo ha sido suficientemente adecuada para proporcionar unos resultados con la precisión requerida. Tampoco son de uso generalizado las técnicas de refinamiento o de remallado tendentes a proporcionar resultados con una precisión predeterminada, a base de realizar mejoras sobre las mallas utilizadas. Hasta el momento, la generación de las mallas de elementos finitos utilizadas en los cálculos se basa en la intuición y la experiencia previa del ingeniero calculista, pero sin la utilización de criterios objetivos que facilitan dicha labor. Además, la mayoría de los algoritmos de generación de mallas no permiten un control muy directo de la forma y el tamaño de los elementos generados. Éste es el caso de los generadores de mallas estructurados que, debido a su rigidez funcional, son incapaces de proporcionar unas prestaciones suficientemente flexibles para el usuario.

Finalmente, a pesar de la gran cantidad de algoritmos existentes para resolver el problema matemático de optimización [44], la mayoría de ellos no están especialmente adaptados a los problemas derivados de la optimización estructural. Esto es debido, principalmente, a que dichos algoritmos se han desarrollado en áreas de conocimiento lejanas al cálculo estructural, y por ello su comportamiento es adecuado a problemas en los cuales el carácter de las funciones utilizadas es muy distinto al de las existentes en la mecánica estructural.

1.2 OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo han consistido en realizar una serie de aportaciones para solucionar las problemáticas expuestas anteriormente. Para ello se han llevado a cabo investigaciones en campos muy diversos: la estimación de errores, la generación de mallas y la optimización estructural. Todo ello ha conducido, finalmente, a la creación de una metodología para los procesos de optimización estructural, en la cual están incluidas todas las aportaciones realizadas en cada uno de los campos mencionados.

El primer objetivo ha sido el realizar una extensa recopilación bibliográfica sobre el tema de la estimación del error, y confeccionar un estado del arte que pueda ser utilizado como referencia para esta y futuras investigaciones. En esta recopilación se han destacado los aspectos relativos a la aplicación de las

técnicas de estimación del error en los procesos de corrección automática del mismo. Estos procesos se llevan a cabo mediante refinamientos o remallados automáticos que proporcionan, finalmente, soluciones con el grado de precisión requerido.

Los procesos de remallado automático precisan de la utilización de potentes algoritmos de generación de mallas capaces de funcionar sobre cualquier tipo de geometría y que permitan, además, controlar el tamaño de los elementos generados en cada zona de la misma. El segundo objetivo de este trabajo ha sido el llevar a cabo una extensa labor de documentación bibliográfica sobre los diversos algoritmos existentes para la generación de mallas. Se ha confeccionado un estado del arte sobre dicho tema que muestra el abanico de técnicas de generación existente en la actualidad.

Asimismo, se ha puesto un especial interés en la definición de las geometrías sobre las que se realizarán los cálculos por elementos finitos. Se ha desarrollado una metodología que permita una definición totalmente general de las mismas utilizando un volumen de información lo más reducido posible.

A partir de la labor anterior se ha realizado realización de un programa de ordenador para la generación automática de mallas. Se ha pretendido que este programa sea de uso general y pueda ser utilizado para mallar geometrías de cualquier tipo, controlando la forma y el tamaño de los elementos utilizados. Se ha puesto un énfasis especial en dotar a dicho programa de una gran versatilidad en cuanto a las posibilidades para definir las geometrías a mallar. Este programa se ha diseñado para poder ser utilizado en áreas tan distintas como la dinámica de fluidos o la mecánica estructural.

El tercer objetivo de este trabajo ha sido utilizar los conocimientos adquiridos en los puntos anteriores para desarrollar una metodología de cálculo por elementos finitos, utilizando procesos de remallados automáticos. En la realización de dicha metodología, se ha hecho especial hincapié en facilitar al máximo la labor de entrada de los datos necesarios para definir cada proceso de cálculo. Mediante esa metodología, y utilizando un volumen de información muy reducido por parte del usuario, es posible definir un proceso de remallados automáticos que proporciona una solución final al problema planteado, cuyo nivel de error asociado es inferior a una cota dada.

La metodología anterior se ha plasmado en la realización de un programa de cálculo llamado 2DMOP. Mediante este programa se han resuelto una serie de casos tipo que han permitido comprobar el buen funcionamiento de la metodología presentada, así como comparar las aportaciones realizadas en este trabajo con las técnicas ya existentes previamente.

El cuarto objetivo de este trabajo ha sido la implementación de todo el desarrollo anterior dentro de los procesos de optimización estructural. Para ello se ha desarrollado una nueva metodología para dichos procesos que permite solucionar la mayoría de los problemas comentados en el apartado 1.1. La utilización de un volumen de información reducido para definir cada proceso de optimización ha permitido parametrizar de forma muy general todos los diseños a optimizar. Por ello, mediante la metodología propuesta es posible aplicar las técnicas de optimización estructural a una gran variedad de tipologías facilitando mucho la labor del usuario de la misma.

La integración de los procesos de remallado automático, desarrollados previamente, junto con las técnicas de estimación de error y el cálculo de sus sensibilidades dentro de la optimización estructural ha permitido que la metodología propuesta precise de un volumen de información muy reducido para la definición de los problemas de optimización planteados.

Asimismo, la utilización de las técnicas de estimación de error dentro de la metodología propuesta asegura que los diseños finales obtenidos estarán calculados con un error asociado inferior a una cota suministrada por el usuario. De esta forma se asegura que un nuevo cálculo más preciso del mismo no revele que alguna de las restricciones impuestas ha sido violada.

La metodología propuesta se ha implementado en un programa de ordenador, llamado SAMOP, que ha permitido comprobar la potencia de la misma. Mediante dicho programa se han resuelto una serie de problemas de optimización estructural de tipología y grado de dificultad muy diverso sin tener que realizar ninguna modificación sobre el mismo para cada caso. Todo ello ha servido para comprobar el buen funcionamiento de la metodología presentada.

1.3 CONTENIDO DE LA TESIS

Este trabajo se ha estructurado en 7 capítulos de forma que en cada uno de ellos se desarrolla alguno de los puntos comentados en el apartado 1.2.

En el Capítulo 2. se presenta un estado del arte sobre las diversas técnicas existentes para la estimación de la magnitud del error asociado a unos resultados. Se describe además la aplicación de dichas técnicas a procesos en los cuales se mejoran las soluciones obtenidas hasta que su error asociado es

inferior a un determinado valor. En particular, se describen con detalle los procesos de refinamientos jerárquicos y los de remallados automáticos. Para este último grupo de procesos se presenta una aportación importante de este trabajo que consiste en un nuevo criterio de optimalidad para la distribución del error dentro de las mallas. Al final del capítulo se presenta un ejemplo de utilización de una de las técnicas de estimación de error.

En el Capítulo 3. se presenta un estado del arte sobre las técnicas existentes para la generación de mallas. Dichas técnicas pueden dividirse en dos grupos claramente diferenciados que son los generadores de mallas estructuradas y los generadores de mallas no estructuradas. Dentro de este último grupo se encuentran los algoritmos más potentes de generación y, en especial, los utilizados en este trabajo. Asimismo, en este capítulo se describe la utilización de B-splines para definir la geometría de los dominios sobre los cuales se pretende generar una malla. La utilización de los mismos se profundiza en el Anexo A. Al final de este capítulo se describe la confección del programa de generación de mallas 2DUMG y se presentan una serie de ejemplos de utilización.

En el Capítulo 4 se presenta una metodología para llevar a cabo los procesos de remallado automático. Dichos procesos se llevan a cabo mediante la utilización conjunta de un generador de mallas no estructuradas junto con un estimador de error. Se describe también la estructura de un programa de cálculo que utilice la metodología presentada y, en particular, la del programa 2DMOP. Mediante este programa se han resuelto una serie de problemas cuyos resultados se presentan para comprobar el buen funcionamiento de los algoritmos presentados y realizar diversas comparaciones entre el criterio de optimalidad aportado en este trabajo, en el Capítulo 2, y los existentes previamente.

En el Capítulo 5 se describe con detalle la metodología propuesta para los procesos de optimización estructural. En este capítulo se presenta el cálculo de las sensibilidades de las mallas generadas, así como las del estimador de error utilizado. En particular, se destaca la integración de los procesos de remallados automáticos dentro de la optimización estructural a través del cálculo de sus sensibilidades. Ciertos detalles computacionales se presentan en los anexos B y C.

En el Capítulo 6 se presenta la resolución de una serie de problemas de optimización estructural mediante el programa SAMOP desarrollado en este trabajo. Dichos problemas son de un grado de complejidad muy variable y dan una idea del amplio abanico de posibilidades que ofrece la metodología que se propone en este trabajo.

Por último, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones que se pueden

sacar de todo el trabajo realizado. Asimismo, también se destacan cuales han sido las aportaciones que se han hecho dentro de cada uno de los campos estudiados y cuales pueden ser las futuras líneas de investigación relacionadas con los aspectos desarrollados en esta tesis.

CAPÍTULO 2

LA ESTIMACIÓN Y LA CORRECCIÓN DEL ERROR EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL POR EL MEF. ESTADO DEL ARTE

2.1 INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos no proporciona una indicación directa acerca de la exactitud de las aproximaciones que se realizan. Aunque dicho método ha sido adoptado como una herramienta muy eficaz para la resolución, tanto de problemas estructurales como de mecánica de medios continuos en general, sólo a partir de tiempos relativamente recientes se han propuesto expresiones para la estimación de errores a posteriori.

Evidentemente, la evaluación exacta del error existente en una determinada aproximación a la solución de un problema es imposible sin conocer la solución exacta del mismo. Sin embargo en este capítulo se presentarán diversas técnicas para estimar dicho error de manera muy razonable, con las que es posible obtener una solución a un determinado problema, por elementos finitos, cuyo error esté por debajo de una determinada tolerancia.

En los últimos años se han desarrollado diversas técnicas para resolver el problema de la estimación y la corrección del error. De hecho, la mayoría de los avances que se han realizado dentro del campo de los elementos finitos se pueden entender como formas distintas de minimizar el error existente en las soluciones.

En este capítulo se hablará sobre dos técnicas distintas para la corrección de errores:

- Técnicas de refinamiento: se definen como tales aquellas en las que a una malla utilizada previamente se le añaden nuevos grados de libertad para obtener una solución mejorada sobre la anterior.
- Técnicas de remallado: se definen como tales aquellas en las que a partir de la información obtenida con una determinada malla se genera otra

malla totalmente nueva y más adecuada para obtener unos resultados con la precisión requerida.

A pesar de la existencia de las diversas técnicas que se presentarán en este capítulo no hay que olvidar el importante papel que deben jugar la experiencia y la intuición del ingeniero a la hora de juzgar la bondad de unos resultados obtenidos con ordenador. Sin embargo, el crecimiento del coste de la mano de obra cualificada y el descenso del coste del tiempo de ordenador hacen que se tienda cada vez más a que sea este último el que haga la mayor parte posible del trabajo. Ello implica que los programas de ordenador se deben diseñar para precisar de un número mínimo de datos, para minimizar el trabajo de definición del problema (geometría, condiciones de contorno y cargas), y de una tolerancia prescrita en cuanto a errores. Un algoritmo automático debe ser capaz de obtener la mejor malla y los mejores resultados a un coste razonable. Además debe tener una gran robustez teniendo en cuenta que muchas veces los usuarios de los programas no son expertos en las formulaciones matemáticas que éstos utilizan.

En este capítulo se presenta primero un desarrollo histórico de los primeros intentos llevados a cabo por algunos investigadores en busca de expresiones que permitieran conocer, al menos de forma aproximada, el nivel de error existente en unos resultados obtenidos por el MEF.

A continuación se expone la formulación jerárquica de las funciones de forma por ser una herramienta necesaria y muy útil en los procesos de refinamiento de mallas. Posteriormente se presenta un pequeño desarrollo matemático para clarificar el significado de los errores existentes en las soluciones obtenidas por el MEF, así como diversas alternativas para medirlo.

En los últimos apartados de este capítulo se exponen diversas técnicas de estimación e indicación de errores así como comentarios críticos sobre algunos de ellos desde el punto de vista de su utilización práctica. Finalmente se presenta un nuevo criterio de optimalidad que proporciona la manera de distribuir el error obtenido sobre todo el dominio del problema. Este nuevo criterio se compara con otros ya existentes y se demuestra su mayor adecuación al contexto de los métodos de resolución por elementos finitos.

2.2 DESARROLLO HISTÓRICO

El artículo de McNeice y Marcal [42] publicado en 1971 parece ser el primero en el cual se consideró el problema de distribuir los nodos de una malla para obtener los mejores resultados. La técnica utilizada para ello consistió en minimizar la energía potencial total, dada por

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right] \mathbf{u}^e - \mathbf{P}^T \mathbf{u} \quad (2.2.1)$$

con respecto a las variable nodales y a las coordenadas nodales. En la ecuación (2.2.1) n es el número total de elementos de la malla necesaria para discretizar la estructura, \mathbf{D} es la matriz de constantes elásticas, \mathbf{B} es la matriz de transformación de desplazamientos a deformaciones, \mathbf{u}^e es el vector de desplazamientos asociado al elemento e , \mathbf{u} y \mathbf{P} son los vectores globales de desplazamientos y cargas aplicadas y Ω es el volumen ocupado por el elemento e .

Si denotamos por \mathbf{c} el vector de coordenadas nodales, la condición para que la energía potencial sea mínima es:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_i} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_j} = 0 \quad (2.2.3)$$

donde i y j varían sobre el número de grados de libertad y de coordenadas nodales respectivamente. La ecuación (2.2.2) conduce a la ya familiar expresión

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{P} = 0 \quad (2.2.4)$$

donde

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.2.5)$$

y la ecuación (2.2.3) conduce a

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial c_j} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial c_j} \mathbf{u} = 0 \quad (2.2.6)$$

La expresión (2.2.4) son las conocidas expresiones de las ecuaciones de equilibrio discretizadas mientras que el problema de la localización óptima de los nodos de la malla está gobernada por la ecuación (2.2.6). Esta última es un conjunto de ecuaciones no lineales que depende de la posición inicial de los nodos.

Se han aplicado diversas técnicas de minimización para resolver este problema. Carrol et al. [13] utilizaron el método del gradiente conjugado, Turcke y McNeice [62] usaron la técnica de la búsqueda directa de Rosenbrock, y Felippa [21][22] comparó los anteriores dos métodos con el método de Powell concluyendo que este último era el más eficaz.

No obstante, todas las publicaciones sobre las posibles técnicas para solucionar las ecuaciones (2.2.6) muestran que el grado de no linealidad de las mismas es tan alto que resulta impracticable tanto numérica como económicamente el intentar resolverlas en situaciones fuera del ámbito académico. Felippa muestra que el coste de la resolución de las mismas crece con un factor entre la tercera y la cuarta potencia del número de grados de libertad del modelo discreto.

Oliveira en 1971 [46] sugirió que la configuración óptima de una malla depende de la orientación de las isolíneas de igual energía de deformación. Por ello, propuso el colocar las coordenadas de los elementos siguiendo esas isolíneas que deberían obtenerse mediante un análisis previo. Sin embargo no se daban indicaciones sobre como generar dicha nueva malla.

Después de verificar la no viabilidad de los métodos de minimización, debido al esfuerzo computacional necesario para ello, Turcke y McNeice [62] desarrollaron la idea de Oliveira dando una serie de directrices para su implementación práctica. Turcke [63] mostró en 1976 que en un proceso iterativo en el cual los nodos de la malla se posicionan a lo largo de las líneas de isoenergía obtenidas en las soluciones previas, las posiciones de las mismas convergen modificándose cada vez menos. De esta forma se llegaría a la que sería la malla óptima para un número fijado de grados de libertad.

Los trabajos mencionados trataban de mejorar una malla con un número de grados de libertad determinado. Sin embargo no estimaban en ningún

momento cual era el error existente en unos resultados. Tampoco abordaban el problema de intentar conocer como cambiarían los resultados añadiendo nuevos grados de libertad, o cambiando el tipo de elemento.

Un avance importante se produjo cuando Melosh y Killian [40] abordaron en 1977 el problema de mejorar la malla añadiendo nuevos grados de libertad en contraste con el movimiento de los nodos de los trabajos anteriores. Para ello analizaron el cambio que se producía en la energía potencial total al añadir un nuevo nodo suponiendo que la posición de los nodos ya existentes no variaba.

Una técnica similar fue propuesta por Peano et al. [49] en 1978 al introducir la adaptabilidad asociada a una formulación jerárquica de las funciones de forma de los elementos.

Tanto el método de Melosh y Killian como el de Peano intentan estimar la diferencia en energía entre la solución obtenida y la que se obtendría al añadir un determinado nodo. Entonces el refinamiento se realiza en función de estas estimaciones.

Aunque las bases de ambos métodos son las mismas las técnicas para realizar la estimación son distintas. Melosh y Killian sostienen un comportamiento a priori de la energía de deformación de la forma

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = A e^{BD} \quad (2.2.7)$$

donde $\|\mathbf{e}\|_E^2$ es el error en la energía, D es el número de grados de libertad del análisis y A y B son constantes a determinar a partir de dos soluciones sucesivas. El principal problema de este método es que en general no existe ninguna evidencia de que el error se comporte de forma exponencial.

Peano evita este tipo de aproximaciones al basar su indicador de refinamiento en la extensión que sufre la matriz de rigidez \mathbf{K} al añadir un nuevo grado de libertad de forma jerárquica. Si representamos las ecuaciones de equilibrio correspondientes al problema a resolver por

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \quad (2.2.8)$$

entonces las nuevas ecuaciones de equilibrio asociadas a un refinamiento jerárquico introduciendo un conjunto adicional de variables \mathbf{u}_2 se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Si la ecuación (2.2.9) se resuelve mediante un esquema de Gauss-Seidel se obtiene:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}_1^n = \mathbf{P}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2^{n-1} \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_2^n = \mathbf{P}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1^{n-1} \quad (2.2.11)$$

Como \mathbf{u}_1 es conocido partir de una solución previa, \mathbf{u}_2 se puede estimar y tomar en consideración los valores más significativos después de una normalización en la energía. Este método tiene no obstante dos dificultades:

- Se requiere el cálculo de términos de la matriz de rigidez de alto orden.
- La convergencia hacia la energía exacta del proceso no es adecuada para determinar concentraciones de tensiones.

El primer inconveniente se solucionó con la introducción de la formulación jerárquica de las funciones de forma. La utilización de las mismas se desarrollará en el apartado siguiente ya que son la base de un grupo importante de métodos de refinamiento automático. Por ello no van a ser comentadas con detalle en este apartado.

La técnica desarrollada en el artículo de Peano tiene su origen en otro trabajo de Melosh y Marcal ^[41] publicado en 1977 en el cual la decisión sobre cuales son los nuevos grados de libertad que mejoran sensiblemente los resultados se toma en función de la sensibilidad de la energía potencial total respecto a la introducción de un nuevo nodo δ_i :

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \delta_i} = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \delta_i} \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \delta_i} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \delta_i} \mathbf{u} \quad (2.2.12)$$

Ello introduce una forma alternativa para decidir cuales son los grados de libertad a añadir a la malla.

A pesar de los avances descritos seguía sin existir una forma de estimar la magnitud del error que existía en cada una de las soluciones obtenidas. Babuška

y sus colaboradores [3] sustituyeron para ello las soluciones aproximadas obtenidas por el FEM en las ecuaciones diferenciales que definían el problema. Debido a la aproximación realizada, aparecen al hacer esta sustitución unos residuos que Babuška interpretó de una forma energética para conseguir un estimador de error a posteriori.

Con el trabajo de Babuška y sus colaboradores, el problema de la estimación de errores y la adaptabilidad para un problema general de elementos finitos se aborda por primera vez desde un punto de vista matemático. Así Babuška y Rheinboldt [4] relacionan en 1978 la estimación del error con unas cantidades localizadas η_i que se pueden calcular de forma aproximada. El teorema en que se basa el proceso muestra que esas cantidades conducen a una estimación del error que es óptima en el sentido de que con unas constantes multiplicativas se pueden obtener cotas superiores e inferiores al error, siendo

$$\eta^2 = \sum \eta_i^2 \quad (2.2.13)$$

el error total estimado. Entonces

$$K_1\eta \leq \|e\|_E \leq K_2\eta \quad (2.2.14)$$

donde K_1 y K_2 son constantes independientes de la malla y de la solución.

Babuška y colaboradores desarrollaron esa teoría y la aplicaron a la solución de diversos problemas [5]. Incluso realizaron una extensión a problemas no lineales. No obstante un defecto inicial de esta teoría es que sólo afectaba a elementos lineales.

En tiempos más recientes han aparecido diversos desarrollos de estas técnicas que se describirán en apartados posteriores.

2.3 FORMULACIÓN JERÁRQUICA DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En el método de los elementos finitos la solución u a un problema de contorno se aproxima mediante expresiones del tipo:

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (2.3.1)$$

donde N_i es la función de forma correspondiente al i -ésimo grado de libertad, y a_i es el valor de la variable nodal correspondiente al mismo. Para hacer más sencillas las explicaciones, en este apartado se supondrá que cada función de forma multiplica a un solo coeficiente a_i , es decir, cada una de ellas representará un solo grado de libertad. Además se supondrá que la función u es unidimensional.

Este tipo de aproximaciones es común con otros muchos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, en especial con todos aquellos que expresan la solución mediante un desarrollo en serie. Este es el caso de los desarrollos en serie de Fourier, polinomios de Legendre, funciones de Bessel, etc.

En las formulaciones clásicas de elementos finitos la definición de las funciones de forma N_i cambia totalmente al aumentar el número de grados de libertad. Por tanto, una vez determinada una solución utilizando n_1 grados de libertad y obteniendo por tanto n_1 coeficientes a_i de la expresión (2.3.1) si se quiere refinar la misma utilizando un número mayor de grados de libertad n_2 es preciso recalcular de nuevo los coeficientes a_i correspondientes a todos los grados de libertad. Por ello el refinar una determinada malla obliga a repetir todos los cálculos realizados previamente.

En otros tipos de aproximación como los comentados desarrollos en serie, el realizar un refinamiento de una solución previa requiere solamente el cálculo de términos de mayor orden del desarrollo, pero el valor de los términos ya calculados no varía.

Para evitar este tipo de problemas Zienkiewicz et al. [68] propusieron ya en 1970 una expresión jerárquica de las funciones de forma N_i . Se dice que una aproximación a una función u es jerárquica si al incrementar de n a $n + 1$ el número de funciones N_i las n primeras no alteran su expresión.

2.3.1 Funciones de forma jerárquicas

Se definen los elementos finitos jerárquicos como aquellos en los cuales los refinamientos sucesivos son aditivos de forma similar a las series de Fourier. Con ello se consigue que la matriz de rigidez de un elemento correspondiente a un cierto nivel de refinamiento sea una submatriz de la que le correspondería para un nivel más alto.

Para conseguir que las funciones de forma N_i que aparecen en (2.3.1) no varíen al aumentar el grado de refinamiento debe abandonarse la idea tradicional de que los coeficientes a_i corresponden a los desplazamientos de cada nodo de la malla, ya que no se van a obtener directamente como resultados los movimientos de cada uno de ellos. Los coeficientes mencionados sirven para realizar la combinación lineal (2.3.1) de las funciones de forma pero sin el significado al que se está acostumbrado normalmente. Ocurre algo similar al interpolar la geometría de los elementos isoparamétricos mediante las funciones de forma, donde las constantes que multiplican a cada una de ellas, que usualmente son las coordenadas de los nodos, pierden su significado geométrico.

Existen dos versiones distintas de las formulaciones jerárquicas que se diferencian entre si en la forma en que las funciones de forma se van refinando al aumentar el número de grados de libertad de un elemento. Dichas versiones son las llamadas p y h . En la versión p la aproximación de la solución (2.3.1) se mejora con la introducción de funciones de forma N_i formadas por polinomios de orden p cada vez más alto, mientras que en la versión h lo que se introduce son funciones de forma formadas por polinomios que son siempre del mismo orden pero que están definidas sobre recintos de tamaño h cada vez más pequeño.

En una dimensión, la versión p del MEF trae consigo la adición de funciones de forma cuadrática, cúbica, etc. al elemento lineal, tal como se muestra en la figura 2.1.

Si se expresa las funciones de forma en función de la coordenada isoparamétrica con $-1 \leq \xi \leq 1$ se pueden obtener las funciones de forma que se presentan a continuación. Para los términos lineales:

$$\begin{cases} N_0 = \frac{1-\xi}{2} \\ N_1 = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Para el término cuadrático se escoge una parábola que se anule en los puntos $\xi = -1$ y $\xi = 1$ de forma que no interfiera con los coeficientes a_0 y a_1 .

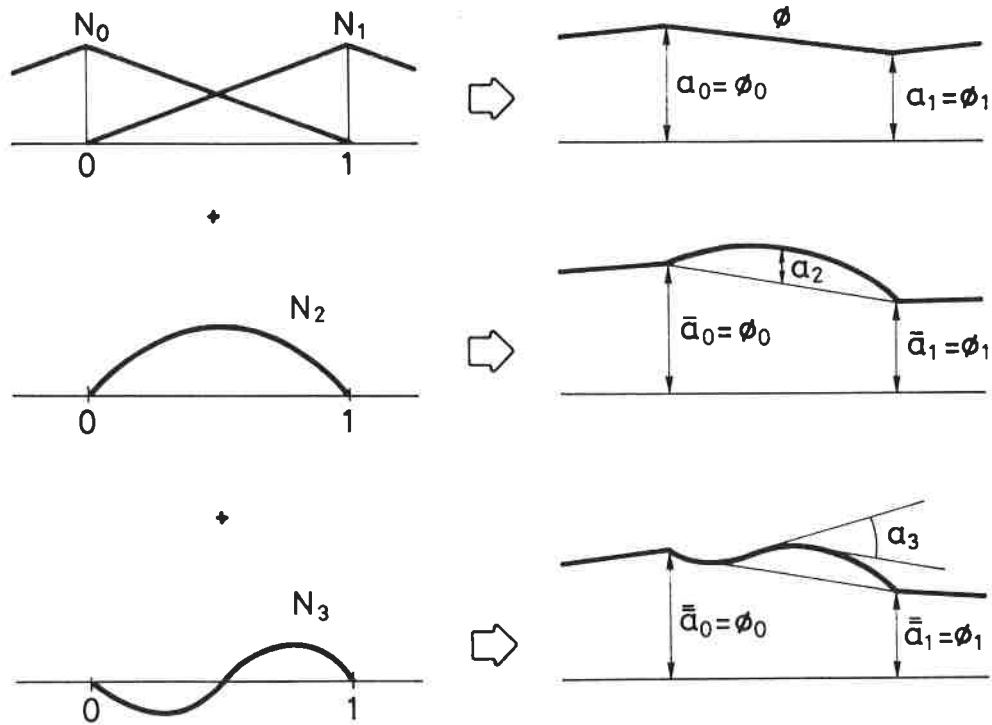


FIGURA 2.1 Elementos jerárquicos unidimensionales para la versión p del método de los elementos finitos.

Por tanto:

$$N_2 = (\xi - 1)(\xi + 1) \tag{2.3.3}$$

Para los términos cúbicos y de mayor orden la única condición es que las funciones de forma se anulen para $\xi = -1$ y $\xi = 1$. Entonces para el término de orden p se puede escribir:

$$N_p = (\xi - 1)(\xi + 1)\xi^{p-2}, \quad p \geq 2 \tag{2.3.4}$$

Existen expresiones alternativas a las anteriores; una de ellas es la propuesta por Peano [49]:

$$N_p = \frac{\xi^p - b}{p!} \quad \begin{cases} b = 1 & \text{si } p \text{ es par} \\ b = \xi & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

donde $p \geq 2$ es el orden del polinomio.

En este caso, el significado de las variables asociadas a_i es el de derivadas de \hat{u} , esto es

$$a_{p+1} = \frac{d^p \hat{u}}{d\xi^p} \quad (2.3.6)$$

En general la forma óptima de las funciones de forma será aquella que haga diagonal la matriz de rigidez. Si la ecuación diferencial a considerar es

$$-u'' + q = 0 \quad (2.3.7)$$

la mejor expresión coincide con las integrales de los polinomios de Legendre:

$$N_p = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-2}} \frac{d^{p-2}}{d\xi^{p-2}} (1 - \xi^2)^{p-1} \quad (2.3.8)$$

Esta última expresión fue introducida por Zienkiewicz et al. [68]. La ventaja de esta última formulación es que para problemas unidimensionales no existe acoplamiento entre los grados de libertad de orden mayor a 2 y por ello las matrices de rigidez sólo presentan valores no nulos en su diagonal para dichos grados de libertad. Ello es debido a que estas funciones de forma son ortogonales con respecto al producto escalar energético que se definirá más adelante.

En el caso de que la ecuación diferencial a resolver sea distinta de la (2.3.7) se pueden hallar expresiones análogas a la (2.3.8) con sus mismas propiedades.

Para la versión h del MEF también existe un número infinito de posibilidades para definir los refinamientos jerárquicos correspondientes a

subdivisiones del elemento inicial en partes iguales o desiguales. Si se considera un refinamiento jerárquico como el representado en la figura 2.2 las funciones de forma serán:

$$\begin{cases} N_0 = \frac{1-\xi}{2} \\ N_1 = \frac{1+\xi}{2} \\ N_2 = \begin{cases} 1 + \xi & \text{si } \xi \leq 0 \\ 1 - \xi & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Viendo la figura 2.2 es obvio que el significado físico de las variables lineales jerárquicas es el de desplazamientos relativos.

Una vez que se han establecido las fórmulas unidimensionales de interpolación, la generación de las funciones de forma jerárquicas para elementos bidimensionales se realiza siguiendo las siguientes premisas:

- las funciones correspondientes a nodos esquina son productos bilineales.
- las funciones jerárquicas adicionales a las anteriores son siempre nulas en las esquinas.

Las funciones de forma de orden superior para elementos bidimensionales se pueden obtener mediante productos de las expresiones unidimensionales. Sin embargo, al pasar a problemas con más de una dimensión se pierden en general las propiedades de ortogonalidad mencionadas anteriormente.

El caso tridimensional, así como el de los elementos triangulares son simplemente casos especiales de los conceptos presentados anteriormente.

En las figuras 2.3 y 2.4 puede verse para el caso bidimensional las funciones de forma clásicas y jerárquicas en las versiones p y h .

En el caso de definiciones de tipo p puede observarse que las funciones de forma están jerarquizadas en el sentido de que para las de segundo orden existen unas funciones cuadráticas que se superponen con otras lineales. De la misma forma, para conseguir un elemento cúbico se superpondrían a las anteriores unas nuevas funciones definidas por polinomios de un orden superior y así sucesivamente. Con definiciones de tipo h sucede algo parecido, aunque lo que se superpone en cada refinamiento son funciones lineales definidas sobre recintos cada vez más pequeños.

En el presente contexto, el número de grados de libertad de una malla no

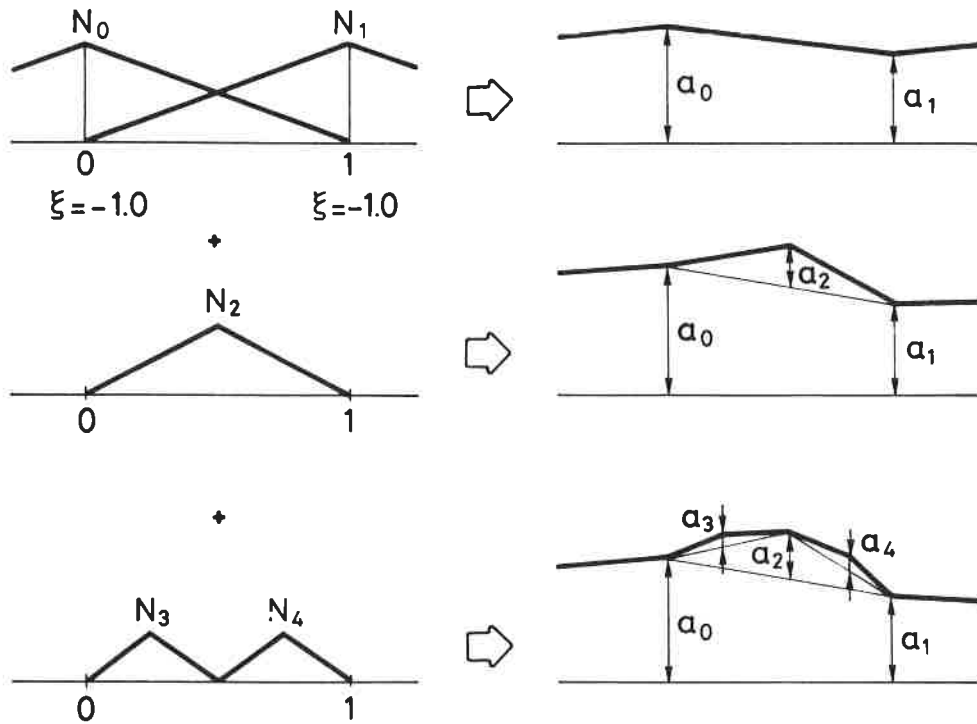


FIGURA 2.2 Elementos jerárquicos unidimensionales para la versión h del método de los elementos finitos.

es el número total de nodos multiplicado por el número de grados de libertad de cada uno de ellos sino que se entiende por ello el número total de funciones N_i empleadas para aproximar el campo de desplazamientos. Esta idea también existe en la formulación clásica de las funciones de forma si bien la idea de grado de libertad se asocia de forma tradicional con la del movimiento de un determinado nodo.

Un punto importante es que los campos de corrimientos generados por las formulaciones clásica y jerárquica son exactamente los mismos. La diferencia estriba en que en un caso y otro éstos están expresados como combinación lineal de funciones distintas. Las funciones de forma clásicas y las jerárquicas son, respectivamente, dos conjuntos de polinomios cuya combinación lineal genera

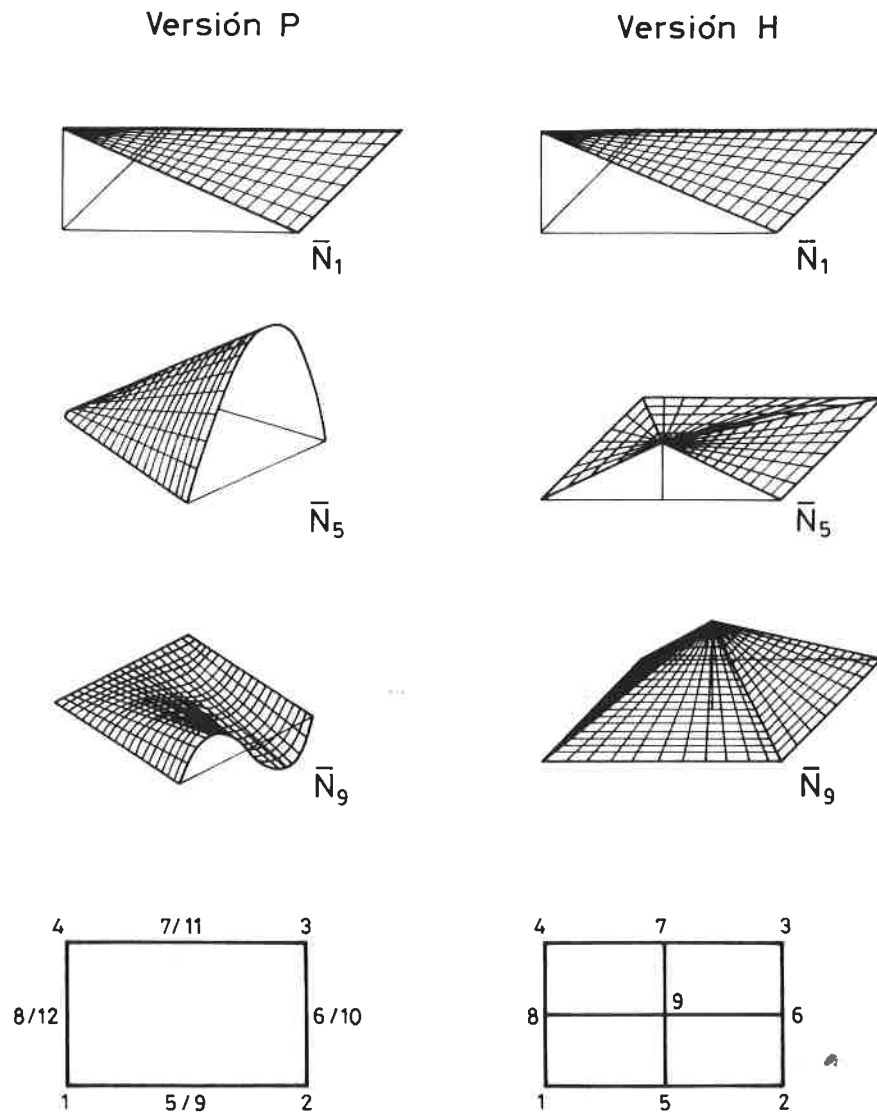


FIGURA 2.3 Formulación clásica de las funciones de forma bidimensionales para las versiones p y h .

el mismo espacio vectorial. Así, para un mismo tipo de elemento, existen dos formulaciones equivalentes, una clásica y otra jerárquica, mediante las cuales pueden obtenerse los mismos estados de deformación.

Existe por ello una correspondencia biunívoca entre los coeficientes de las dos descripciones, y por ello después de haber obtenido un campo de desplazamientos mediante la formulación jerárquica se pueden calcular los coeficientes del mismo para la descripción clásica recuperando el significado tradicional de los mismos. Esta operación es en realidad un cambio de base dentro del espacio vectorial de funciones al que pertenecen los campos de desplazamientos. La idea general es que las funciones de forma clásicas y jerárquicas son dos sistemas de generadores distintos que generan el mismo subespacio vectorial. De esta manera ambos tipos de funciones generan los mismos campos polinómicos para la solución del problema planteado.

Si se denotan las variables jerárquicas como \bar{u} mediante una barra y las clásicas mediante un gorro se puede escribir:

$$\hat{u} = N_i u_i = \bar{N}_j \bar{u}_j \quad (2.3.10)$$

Si se escribe la transformación como

$$\bar{u}_j = \tau_{ji} u_i \quad (2.3.11)$$

sustituyendo (2.3.11) en (2.3.10) se debe cumplir

$$N_i u_i = \bar{N}_j \bar{u}_j = \bar{N}_j \tau_{ji} u_i \quad (2.3.12)$$

para cualquier valor de u_i . En consecuencia:

$$N_i = \bar{N}_j \tau_{ji} \quad (2.3.13)$$

Dada que la solución obtenida mediante la dos formulaciones es la misma, la energía disipada por ambas debe ser también la misma y, por tanto, debe cumplirse:

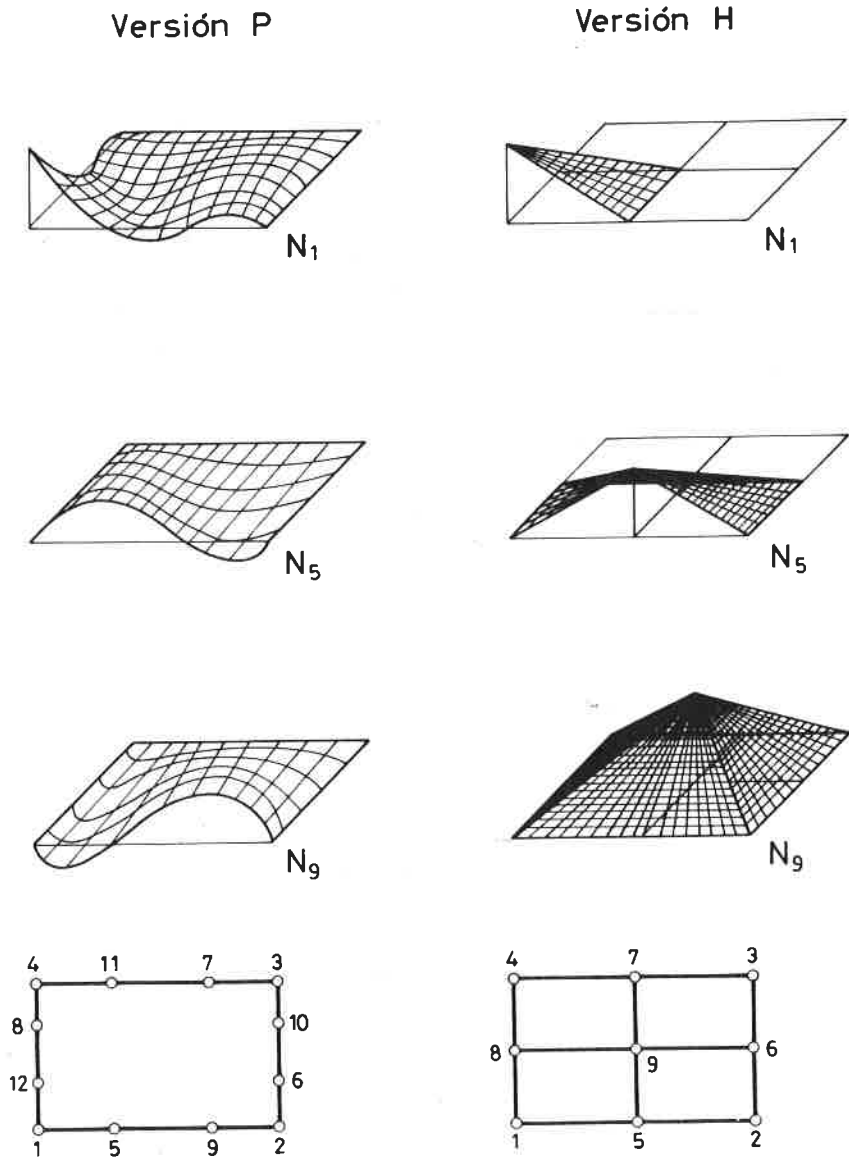


FIGURA 2.4 Formulación jerárquica de las funciones de forma bidimensionales para las versiones *p* y *h*.

$$\begin{aligned}
 u_i K_{ij} u_j &= \bar{u}_i \bar{K}_{ij} \bar{u}_j \\
 &= \tau_{ik} u_k \bar{K}_{ij} \tau_{jl} u_l \\
 &= u_k \tau_{ik} \bar{K}_{ij} \tau_{jl} u_l
 \end{aligned}
 \tag{2.3.14}$$

Lo cual da la transformación de la matriz de rigidez para pasar de la formulación clásica a la jerárquica y viceversa.

$$K_{kl} = \tau_{ik} \bar{K}_{ij} \tau_{jl} \tag{2.3.15}$$

2.3.2 Estructura de las ecuaciones

Consideremos las ecuaciones del problema de contorno que se quiere resolver por el método de los elementos finitos:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \text{ (dominio)} \\ \mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{s} = 0 & \text{en } \Gamma \text{ (contorno)} \end{cases}
 \tag{2.3.16}$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{M} son operadores diferenciales lineales. El caso de elasticidad lineal es uno de los ejemplos más comunes de lo anterior donde \mathbf{L} es un operador lineal de segundo orden y \mathbf{M} suele ser de primer orden.

El método de los elementos finitos aproxima la solución de la forma ya clásica:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(n)} \tag{2.3.17}$$

donde $\mathbf{a}^{(n)}$ es el vector de las incógnitas a determinar, \mathbf{a}_i son los coeficientes que corresponden a cada una de las funciones de forma N_i , \mathbf{N}_i son matrices cuadradas de dimensión igual al número de coeficientes (grados de libertad) a

que multiplica cada una de ellas estando formadas por las funciones N_i en su diagonal y n es el número total de funciones N_i utilizadas en la malla. Dichas funciones pueden estar expresadas mediante cualquier tipo de formulación, ya sea la clásica o la jerárquica.

Si se utilizan las matrices \mathbf{N}_i , al aplicar el método de Galerkin [30][76] se obtiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{L}(\mathbf{N} \mathbf{a}^{(n)}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega + \mathbf{b} = 0 \quad (2.3.18)$$

donde \mathbf{b} depende de las condiciones de contorno [16][30][76].

De la expresión anterior se obtiene, tras integrar convenientemente por partes, la conocida ecuación matricial:

$$\mathbf{K}_{(n)} \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.3.19)$$

donde $\mathbf{K}_{(n)}$ es la llamada matriz de rigidez y \mathbf{f} el vector de fuerzas nodales. Los detalles del proceso se pueden ver en cualquier texto sobre el método de los elementos finitos [16][30][76].

Cuando la malla se refina y se añaden m nuevos grados de libertad, el número de incógnitas crece hasta $\mathbf{a}^{(n+m)}$ y el proceso de discretización conduce a

$$\mathbf{K}_{(n+m)} \mathbf{a}^{(n+m)} = \mathbf{f}^{(n+m)} \quad (2.3.20)$$

Si el refinamiento se hace de forma jerárquica las funciones de forma utilizadas previamente se mantienen. Por ello los coeficientes de la ecuación (2.3.19) se conservan y lo que se hace es calcular los términos correspondientes a los nuevos grados de libertad, por ello se puede reescribir (2.3.20) utilizando los términos previamente calculados y añadiendo las nuevas filas y columnas correspondientes a los nuevos grados de libertad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(n)} & \mathbf{K}_{(n,m)} \\ \mathbf{K}_{(m,n)} & \mathbf{K}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(n)} \\ \mathbf{f}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (2.3.21)$$

De esta forma la matriz $\mathbf{K}_{(n)}$ permanece invariable pudiendo ahorrarse con ello un considerable tiempo de cálculo. Esto por sí solo ya es una ventaja importante. Además, después de la resolución de (2.3.19) se puede obtener una primera aproximación a la solución de (2.3.21) que se puede utilizar como solución inicial de un proceso iterativo de resolución. Esta primera aproximación $\mathbf{a}^{(n)*}$ se obtiene mediante las siguientes expresiones:

$$\mathbf{a}^{(n)*} = (\mathbf{K}_{(n)})^{-1} \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.3.22)$$

$$\mathbf{a}^{(m)*} = (\mathbf{K}_{(m)})^{-1} (\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{K}_{(m,n)} \mathbf{a}^{(n)*}) \quad (2.3.23)$$

También puede utilizarse la forma triangulada de $\mathbf{K}_{(n)}$ para, a partir de ella, obtener la de $\mathbf{K}_{(n+m)}$ para una resolución directa del sistema de ecuaciones.

Aunque los refinamientos se hagan de forma jerárquica los valores de las primeras n incógnitas varían. Esto es debido a que las nuevas funciones de forma que se añaden a la malla no están totalmente desacopladas de las anteriores. Como se ha comentado en el apartado anterior, sólo en problemas unidimensionales es posible expresar las funciones de forma de manera que eso no ocurra. En dos o más dimensiones ello hay que recalcular todas las incógnitas y no sólo las m añadidas. No es posible en esos casos el conseguir expresar las funciones N_i de manera que formen una base ortonormal en el sentido del producto escalar energético definido como:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{L} \mathbf{b} d\Omega \quad (2.3.24)$$

Es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{L} \mathbf{N}_j d\Omega \neq \delta_{ij} \quad (2.3.25)$$

Por otro lado, al añadir los nuevos grados de libertad se puede destruir la estructura en banda de la matriz de rigidez ya que su numeración no será en general la óptima si se considera toda la malla en conjunto. Si se realiza una renumeración de la misma entonces se debe volver a ensamblar toda la matriz y se pierde la posibilidad de aprovechar la forma triangulada de $\mathbf{K}_{(n)}$

para cálculos posteriores. En caso contrario, la adición de nuevas filas y columnas a continuación de las ya existentes puede producir una matriz muy vacía desaprovechando la memoria del ordenador y su tiempo de cálculo al invertir la matriz o al utilizar métodos iterativos de resolución. Es por todo ello que el aspecto práctico del refinamiento en lo que se refiere a la construcción de la nueva matriz $\mathbf{K}_{(n+m)}$ no es tan sencillo como los párrafos anteriores podrían parecer indicar.

Otro aspecto que hay que tratar con cuidado en refinamientos de tipo p es el de las cuadraturas utilizadas al integrar las matrices de rigidez. Cada vez que se incrementa un orden el grado de los polinomios que forman las funciones N_i debe utilizarse también una cuadratura de más alto orden. Por ello, cuando al finalizar el proceso se quiere evaluar el valor de ciertas derivadas de la función incógnita \mathbf{u} , como pueden ser las deformaciones en un problema de elasticidad lineal, éstas deben calcularse en los puntos de integración de las cuadraturas de más alto orden utilizadas en virtud de que en ellos se obtienen los mejores valores. Pero debido a que antes de cada refinamiento las cuadraturas empleadas son de un orden inferior, los productos de las matrices \mathbf{DB} que usualmente se almacenan al calcular las matrices de rigidez elementales, no sirven al cambiar de cuadratura. Por ello deben recalcularse esos productos en los nuevos puntos de integración para todos los grados de libertad. En el caso de refinamientos de tipo h el problema es similar aunque en vez de incrementar el orden de las cuadraturas lo que varía son los recintos de integración en cada refinamiento.

2.3.3 Propiedades de las funciones de forma jerárquicas

Las funciones de forma jerárquicas reúnen una serie de propiedades que las hacen atractivas para su utilización. A saber:

- 1) Utilización de cálculos y soluciones previas a cada refinamiento.
- 2) Generación de un esquema simple de iteración al resolver el problema para los sucesivos refinamientos.
- 3) Mejora del condicionamiento de la matriz de rigidez. Esta propiedad es debida a que los grados de libertad jerárquicos son perturbaciones añadidas a las soluciones obtenidas con funciones de forma de más bajo orden. Por ello la matriz de rigidez resultante es más diagonal dominante que la que se obtendría utilizando una formulación clásica. Gracias a ello,

la diferencia entre el máximo y el mínimo autovalor de la matriz de rigidez es menor en una formulación jerárquica que en una formulación clásica [16][71][76].

- 4) Proporciona una medida del error. Esta capacidad será comentada más adelante.

En contraposición a lo anterior, la utilización de funciones de forma jerárquicas presenta algunas dificultades que hacen que su implementación en un programa de ordenador no sea sencilla. Es más, una mala utilización de las mismas puede eliminar las ventajas enumeradas en los puntos anteriores. Los principales problemas que se presentan son:

- 1) Necesidad de utilizar reglas especiales de integración debido al orden creciente de los polinomios que definen las funciones de forma en cada refinamiento.
- 2) Pérdida de la identificación de cada variable con el movimiento de un determinado nodo. Ello obliga a una transformación previa a la interpretación de los resultados.
- 3) Mala numeración de los grados de libertad añadidos en cada refinamiento. Ello puede provocar que resulte en ocasiones más rentable repetir todos los cálculos con una nueva numeración de los nodos que intentar aprovechar los antiguos, desperdiciando tiempo y memoria de ordenador al trabajar con la nueva matriz.
- 4) Necesidad de recalcular los productos **DB** en los puntos de integración de cada nueva cuadratura utilizada para el cálculo de deformaciones. Ello representa más de un 50% del esfuerzo necesario para calcular una nueva matriz de rigidez.

A partir de los razonamientos anteriores se pueden extraer una serie de conclusiones:

- Dejando aparte el tema de los refinamientos, la utilización de las formulaciones jerárquicas para las funciones de forma es siempre recomendable para conseguir mejoras en el condicionamiento de la matriz de rigidez. En este caso la única dificultad que ello representa es la pérdida de la identificación de cada variable con el movimiento de cada nudo.
- La utilización práctica de las formulaciones jerárquicas en procesos de refinamiento es muy compleja debido a las dificultades comentadas en los

puntos anteriores. Este hecho hace que el atractivo teórico que presenta la utilización de estas formulaciones desaparezca al tratar de solucionar los problemas que aparecen al implementarlas en un programa de ordenador. Esta idea, que en principio parece acertada, puede quedar totalmente desvirtuada a no ser que su implementación sea muy cuidadosa.

2.4 ANÁLISIS DEL ERROR

Las ecuaciones de equilibrio que se emplean dentro del campo de la mecánica de estructuras son siempre ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ejemplos clásicos de ecuaciones de este tipo son las ecuaciones de Laplace, Poisson o Navier [16][30][76].

Las ecuaciones que gobiernan el correspondiente problema de contorno son:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{t} = 0 & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Donde \mathbf{L} es un operador diferencial elíptico de segundo orden, \mathbf{u} es la solución que se trata de aproximar y \mathbf{q} el término de fuerzas. Las dos últimas ecuaciones representan las condiciones de contorno. El contorno del dominio Γ se considera dividido en dos partes $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ donde se especifican condiciones de Dirichlet y Neuman respectivamente. Debe ocurrir que $\Gamma_D \neq \emptyset$ para que la solución sea única.

La solución \mathbf{u} se aproxima de la forma descrita en (2.3.17) con un determinado conjunto de funciones de forma \mathbf{N}_i y con unos coeficientes \mathbf{a}_i que se determinan mediante las ecuaciones (2.3.18).

El hecho de que $\hat{\mathbf{u}}$ sea una aproximación y no la solución exacta a las ecuaciones (2.4.1) hace que si se sustituye en (2.4.1) aparezcan unos residuos \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ .

$$\begin{cases} \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{q} = \mathbf{r}_\Omega & \text{en } \Omega \\ \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t} = \mathbf{r}_\Gamma & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Como se verá más adelante estos residuos proporcionan estimaciones sobre el error local y global en una solución y sobre la mejor manera de reducirlo.

El ámbito de este trabajo se reduce principalmente al caso de problemas de elasticidad lineal. La expresión (2.4.1) se particulariza en este caso a:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{t} = 0 & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (2.4.3)$$

donde se ha utilizado el operador matricial \mathbf{S} que define las deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (2.4.4)$$

y la matriz elástica \mathbf{D} que define las tensiones como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4.5)$$

A partir de las expresiones anteriores se pueden identificar $\mathbf{L} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$ y $\mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S}$. A su vez \mathbf{q} representa las fuerzas de volumen y \mathbf{t} las tensiones prescritas sobre parte del contorno. \mathbf{n} representa el vector normal al contorno en Γ_d .

La matriz \mathbf{B} presentada en (2.2.1) resulta ser el producto:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{N} \quad (2.4.6)$$

Al sustituir la solución aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ en las ecuaciones (2.4.3) aparecen los residuos como:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{q} = \mathbf{r}_\Omega & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t} = \mathbf{r}_\Gamma & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Asimismo, el producto escalar energético definida en (2.3.24) se convierte para este caso particular en:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{b} d\Omega \quad (2.4.8)$$

Puede verse de forma casi inmediata que con este producto escalar, la norma del campo \mathbf{u} coincide con el trabajo realizado por las fuerzas de volumen.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Omega \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

2.4.1 Normas de medición de error

La resolución de un problema de contorno mediante el método de los elementos finitos consiste fundamentalmente en una minimización de algún tipo de "energía", es decir, una solución obtenida por el MEF es óptima en un sentido "energético". En el caso de problemas de elasticidad esta "energía" coincide con la energía real que constituye el funcional a minimizar. En este trabajo se utilizará la norma energética como base del análisis del error ya que es la norma "natural" a considerar.

Para definir el error en la energía se debe definir primero el error asociado a la solución aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ como la diferencia entre ésta y la solución exacta.

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (2.4.10)$$

Asimismo conviene definir el error en tensiones \mathbf{e}_{σ} como la diferencia entre las tensiones de la solución exacta $\boldsymbol{\sigma}$ y las obtenidas a partir de la solución aproximada $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\mathbf{e}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.4.11)$$

La medida del error local definida en (2.4.10) y (2.4.11) no es en general muy conveniente ya que además de ser difícilmente estimable da en ocasiones informaciones confusas. Por ejemplo, bajo cargas puntuales tanto los errores en desplazamientos como en tensiones pueden ser localmente infinitos pero las

soluciones globales pueden ser muy aceptables. Casos similares pueden darse en puntos como entallas o esquinas donde existen singularidades en las tensiones y fuertes concentraciones y gradientes de las mismas. Por ello se introducen 'normas' con forma de integral para representar medidas globales de error.

La forma más extendida de definir la norma del error es la que utiliza el producto escalar ya definido en (2.3.24) [69][70][71][73][76]:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{L} \mathbf{b} d\Omega \quad (2.4.12)$$

La llamada "energía" del error o norma energética del error vendrá dada entonces por:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{L} \mathbf{e} d\Omega \quad (2.4.13)$$

Particularizando al caso de la elasticidad lineal la norma anterior se puede expresar como:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega \quad (2.4.14)$$

Esta norma se puede relacionar con los residuos \mathbf{r}_{Ω} y \mathbf{r}_{Γ} definidos en (2.4.2) y (2.4.7). Utilizando (2.4.3) y (2.4.7) se tiene en el dominio Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} &= \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{q} - (\mathbf{r}_{\Omega} + \mathbf{q}) \\ &= -\mathbf{r}_{\Omega} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Asimismo, usando la parte definida en el contorno de las mencionadas ecuaciones se tiene en Γ_N :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} &= \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{t} - (\mathbf{r}_{\Gamma} + \mathbf{t}) \\ &= -\mathbf{r}_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

y de (2.4.14) y (2.4.15) se puede concluir:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = - \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (2.4.17)$$

De esta manera se puede identificar la energía del error como un producto interno de los residuos no equilibrados por el error \mathbf{e} existente en la solución.

Además, se puede demostrar que para el caso $\Gamma_N = 0$ esta norma energética del error coincide con la diferencia existente entre la energía de las soluciones exacta y aproximada. Para ello se debe comenzar por probar que:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad (2.4.18)$$

De (2.4.7):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{q} + \mathbf{r}_{\Omega}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

El residuo \mathbf{r}_{Ω} es ortogonal a las funciones de forma según el producto escalar (2.3.24). Si no existiese dicha ortogonalidad, la aplicación del residuo como fuerza externa produciría un vector de fuerzas nodales equivalentes no nulo, y entonces se podría hallar un campo de desplazamientos que lo equilibrase. El hecho de que la existencia de \mathbf{r}_{Ω} no se refleje en los vectores de fuerzas que se utilizan para hallar los valores de los desplazamientos hace que las soluciones obtenidas no puedan equilibrarlo.

Teniendo en cuenta la ortogonalidad comentada y el hecho de que la solución $\hat{\mathbf{u}}$ es una combinación lineal de las funciones de forma, se cumplirá que:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (2.4.20)$$

Por lo tanto la expresión (2.4.18) puede reducirse a:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\Omega \quad (2.4.21)$$

y a partir de la propia definición del problema (2.4.3):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\Omega \\ &= \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Ahora se puede demostrar que la energía del error coincide con el error en la energía para esta clase de problemas y para el caso $\Gamma_N = 0$. De (2.4.3) y (2.4.4) se puede escribir:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_E^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} d\Omega - 2 \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

En el desarrollo anterior se ha hecho uso de la propiedad conmutativa del producto escalar definido en (2.3.24), debido a la simetría de la matriz elástica \mathbf{D} .

A partir de (2.4.22) y (2.4.23) se puede ver que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_E^2 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|_E^2 - \|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

que es la condición que se quería demostrar. Aunque la demostración anterior sólo es válida para $\Gamma_N = 0$, la expresión (2.4.24) también se suele aplicar a los casos en que ello no se cumpla.

Desde el punto de vista ingenieril la norma energética no es completamente satisfactoria. Un ingeniero preferiría tener una estimación del error en cada punto del dominio, tanto para las variables principales (desplazamientos), como para sus derivadas (tensiones) que en definitiva son las variables sobre las que se basa el diseño de estructuras. No obstante, no hay que olvidar que el método de los elementos finitos es un método global de aproximación y que por tanto la convergencia local de sus resultados está supeditada a una convergencia global de los mismos.

Existen otras posibilidades para definir la norma o forma de medir el error. Una generalización a (2.4.13) utilizada por Gago [27] consiste en incluir un término correspondiente al incumplimiento de las ecuaciones (2.4.3) en Γ_N .

$$\|\mathbf{e}\|_{E1}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega \quad (2.4.25)$$

En este caso se puede ver que la norma de la solución \mathbf{u} coincide con la energía de deformación elástica disipada por el sólido. Para ello hay que hacer uso del teorema de Clapeyron:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{E1}^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Zienkiewicz [74] propone la utilización de la norma L_2 tanto en desplazamientos como en tensiones:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (2.4.27)$$

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (2.4.28)$$

Estas normas permiten concretar el error sobre las magnitudes de mayor interés del problema tales como los desplazamientos o las tensiones, de esta forma se pierde la necesidad de tener que medir el error sobre algo tan 'abstracto'

como la energía. No obstante, con estas normas se pierde una cierta 'elegancia' matemática por no ser tan coherentes con el ámbito general del MEF [16][30][76].

Asimismo Zienkiewicz también propone utilizar valores medios del error obtenidos de la forma:

$$|\Delta\sigma| = \left(\frac{\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{1/2} \quad (2.4.29)$$

Todas las normas anteriores se pueden evaluar sobre todo el dominio, sobre subdominios e incluso sobre elementos individuales; de forma que:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{e}\|_i^2 \quad (2.4.30)$$

Otras posibilidades comentadas en [27] son:

$$\|\mathbf{e}\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{e}^p d\Omega) \right)^{1/p} \quad 1 < p < \infty \quad (2.4.31)$$

$$\|\mathbf{e}\|_{L_\infty} = \max |\mathbf{e}| \quad x, y \in \Omega \quad (2.4.32)$$

2.4.2 Velocidad de convergencia

Una vez definida la magnitud que caracterizará al error asociado a una determinada solución $\hat{\mathbf{u}}$ es necesario conocer la forma en que se va a intentar evaluar. Para ello existen dos grandes familias de estimadores de error, los denominados "a priori" y los "a posteriori".

Los estimadores de error a posteriori reciben su nombre del hecho de que su cálculo precisa de la resolución previa del problema mediante la malla de

elementos finitos que se utilice. Es a partir de los resultados en desplazamientos, deformaciones y tensiones obtenidas con esa malla con los que se calcula, mediante diversas expresiones, una estimación del error asociada a la misma. Este tipo de estimador proporciona, pues, la información una vez realizado ya todo el proceso de cálculo.

Los estimadores de error a priori dan una idea de como crece o decrece el error al variar la malla que se emplee sin necesidad de un cálculo sobre la misma. La expresión más completa es quizás la dada por Babuška y Dorr [7]:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^{\min(p,m-1)} p^{-(m-1)+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.4.33)$$

donde h es el mayor diámetro de los elementos empleados, p es el grado de los polinomios que describen las funciones de forma, m es una medida del orden de singularidad del problema y C es una constante que depende del problema.

En la expresión (2.4.33) se observa como el error tiende a cero (se converge hacia la solución exacta), tanto al disminuir el tamaño de los elementos como al aumentar el grado de los polinomios.

Zienkiewicz y Craig [73] muestran que si las singularidades del problema se encuentran en el contorno, una expresión inversa a la anterior dice que refinamientos de tipo p convergen hacia la solución exacta dos veces más rápido que los refinamientos de tipo h . En ese y otros trabajos se comprueba mediante ejemplos que con el aumento del número de grados de libertad el error decrece más rápidamente si se aumenta el orden p de los polinomios que si se disminuye el tamaño de los elementos. Es por ello que los refinamientos jerárquicos suelen ser de tipo p , pues su convergencia hacia la solución exacta es más rápida.

De lo anterior se desprende, que si se comparan dos mallas con igual número de grados de libertad pero utilizando en una de ellas polinomios de más alto orden y en la otra elementos más pequeños, los resultados obtenidos con la primera serán, en general, mejores que con la segunda. No obstante, hay que tener en cuenta que el ancho de banda de la matriz de rigidez obtenida en el primer caso será mayor que en el segundo al tener sus elementos más grados de libertad. Si se tiene en cuenta que el coste de la inversión o triangulación de la matriz de rigidez crece aproximadamente con el cuadrado de su semiancho de banda, se comprende que el coste de la resolución en el primer caso puede ser bastante mayor que en el segundo. Por ello, si los resultados se comparan en función de su coste de obtención ya no es tan evidente la ventaja de los refinamientos de tipo p .

La expresión (2.4.33) y similares no pueden utilizarse directamente para estimar el error cometido con una cierta malla ya que en general no se conoce el valor de C . Si se reescribe dicha expresión haciéndola depender del número n de grados de libertad de la malla se obtiene una nueva estimación del tipo [6]:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq C_1 n^{-\alpha} \quad (2.4.34)$$

donde C_1 y α son funciones de p , h , m , y la topología de la malla. No obstante estos dos valores tienden a ser constantes al ir aumentando los niveles de refinamiento y ello conduce a la llamada extrapolación de Richardson [53] para predecir la solución exacta a partir de dos o más resoluciones previas.

Un último punto a tener en cuenta es el hecho conocido de que el uso de funciones de forma de orden p alto tiende a producir grandes oscilaciones de sus derivadas (tensiones y deformaciones) en las proximidades de los puntos singulares tales como cargas puntuales o puntos angulosos del contorno. Sucede algo parecido al intentar aproximar mediante un desarrollo en serie de Fourier una función de tipo escalón donde los términos con frecuencias altas también producen oscilaciones (ver figura 2.5).

Por ello la mayoría de los autores aconsejan no emplear polinomios de orden mayor que 3 en los refinamientos. Esta limitación obliga a partir inicialmente de mallas no demasiado groseras de forma que no sean necesarios más de uno o dos niveles de refinamiento de tipo p para conseguir resultados aceptables. En particular, es aconsejable comenzar con mallas que ya dispongan de elementos pequeños en las zonas próximas a los puntos singulares.

Los condicionantes anteriores hacen que no sea posible iniciar un proceso iterativo de refinamientos de tipo p partiendo de una malla en la cual sólo se hayan tenido en cuenta criterios de tipo geométrico para modelar el contorno de la estructura ya que puede ocurrir que una malla de este tipo sea demasiado grosera para obtener con ella buenos resultados con un número pequeño de niveles de refinamiento. Por ello muchos autores recomiendan combinar los dos métodos, p y h , para superar esta limitación. Se trataría primero de conseguir un cierto nivel de exactitud a base de refinamientos de tipo h para proseguir después con los de tipo p . Esta forma de actuar es mucho más compleja que el utilizar uno solo de los dos procedimientos por lo que hasta la fecha no se conoce ninguna metodología general para llevarlo a cabo, aunque se está de acuerdo en que sería la forma más eficaz y segura de refinar jerárquicamente cualquier tipo de malla.

En este sentido, Zienkiewicz, Zhu y Gong [75] presentan un procedimiento

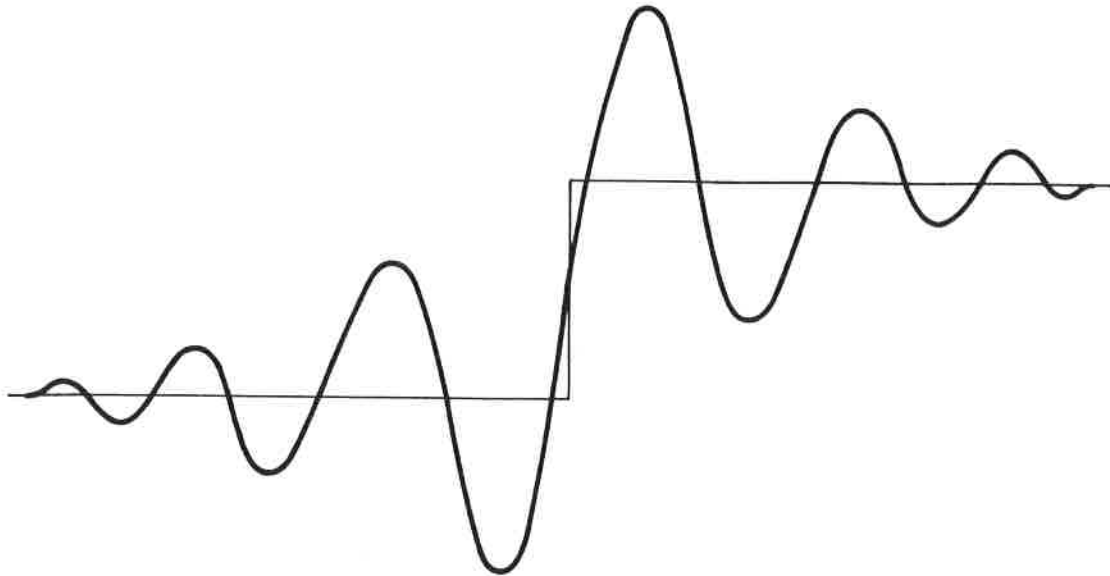


FIGURA 2.5 Aproximación de una función escalón mediante un desarrollo en serie de Fourier.

mediante el cual poder alcanzar niveles de error tan bajos como se quiera. Para ello proponen reducir el nivel de error obtenido mediante una primera malla a través de dos etapas sucesivas en cada una de las cuales se utiliza un método diferente. Por ejemplo, para conseguir una malla con un nivel de error inferior al 1% el proceso sería el siguiente:

1. Utilización de remallados automáticos hasta conseguir un nivel de precisión de un 5%.
2. Realización de un refinamiento jerárquico de tipo p uniforme hasta alcanzar el nivel de error deseado del 1%.

También se presenta la alternativa inversa que consiste en realizar primero refinamientos jerárquicos de tipo p y, a continuación, remallados automáticos.

2.4.3 Estimadores e indicadores de error

Al obtener una solución mediante el MEF es conveniente conocer no sólo la magnitud del error asociado a la misma sino también la forma más eficaz de mejorarla en caso de que no sea satisfactoria. Por ello existen dos tipos de información: los indicadores y los estimadores del error.

Un indicador de error proporciona información sobre donde refinar una cierta malla, mientras que un estimador de error da una aproximación a la medida del error global existente en un determinado elemento o región.

La utilización de indicadores de error es básica para realizar refinamientos jerárquicos a partir de una malla inicial pues su información permite escoger cuales son los grados de libertad que añadidos a la misma permiten mejorar la solución de la forma más económica hasta llegar a un nivel de precisión dado. La necesidad de estos indicadores viene dada por el hecho de que los estimadores de error proporcionan información acerca del error existente en una solución, pero no sobre la forma de disminuirlo. Es por ello que la utilización de los indicadores de error es necesaria para los procesos de refinamiento jerárquico.

En el caso de que la estrategia a utilizar sea de remallado y no de refinamiento lo que se precisa es información acerca del error existente sobre cada elemento por lo cual si se dispone de un estimador de error que la proporcione no es necesaria la utilización de un indicador de error.

2.5 INDICADORES DE ERROR

Como ya se ha comentado anteriormente, los indicadores de error se utilizan en los procesos de refinamientos jerárquicos. Es por ello que en su desarrollo intervienen las formulaciones jerárquicas de las funciones de forma.

Basicamente lo que hace un indicador es informar sobre cuales son los grados de libertad que añadidos a una malla previa permitirán reducir el error de la forma más eficaz. Para obtener su expresión se debe considerar la introducción jerárquica de un conjunto de coeficientes \mathbf{a}_{n+1} que multiplicaría a una nueva función de forma N_{n+1} teniendo en cuenta que ésta puede afectar a varios grados de libertad. Si se supone que ya se tiene un sistema con n funciones de forma para el cual ya se ha determinado la solución $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}$, con ello se obtendría una nueva solución $\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}$. Se trata de aproximar la parte del error que se corregiría con la introducción del nuevo conjunto de variables para utilizar ese valor como indicador de error.

Para ello se define el campo \mathbf{e}_{n+1} como la diferencia entre los dos campos de desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}$ y $\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}$.

$$\mathbf{e}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{u}}^{(n)} \quad (2.5.1)$$

El indicador de error que se está buscando η_{n+1} es una aproximación a la norma energética del campo \mathbf{e}_{n+1} . En otras palabras, el indicador de error η_{n+1} intenta aproximar cual sería la variación de la norma energética del campo $\hat{\mathbf{u}}$ al añadir al sistema una nueva función de forma. En virtud de (2.4.24) puede considerarse que esa variación coincide con la norma energética del campo \mathbf{e}_{n+1} .

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\|_E^2 \approx \eta_{n+1}^2 \quad (2.5.2)$$

A partir de la expresión (2.3.23) se puede aproximar el valor de las nuevas variables \mathbf{a}_{n+1} por:

$$\mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{a}_{n+1}^* = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} (\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)}) \quad (2.5.3)$$

siendo como es usual:

$$\mathbf{K}_{n+1,n+1} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_{n+1} d\Omega \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{q} d\Omega \quad (2.5.5)$$

Si se considera despreciable la variación que sufrirían los n primeros valores \mathbf{a}_i , la corrección que se efectuaría en el campo de desplazamientos sería aproximable por:

$$\mathbf{e}_{n+1} \approx \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}^* \quad (2.5.6)$$

A partir de ello se puede efectuar el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)} &= - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{q} d\Omega - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i d\Omega \right) \mathbf{a}_i \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \left[-\mathbf{q} - \sum_{i=1}^n (\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i) \mathbf{a}_i \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \left[-\mathbf{q} - \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_n \hat{\mathbf{u}}^{(n)} \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

con lo cual:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (2.5.8)$$

Utilizando las expresiones (2.4.17) y (2.5.2) se puede escribir:

$$\eta_{n+1}^2 \approx - \int_{\Omega} \mathbf{e}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (2.5.9)$$

Incluyendo (2.5.5) en (2.5.9) se tiene:

$$\eta_{n+1}^2 = -\mathbf{a}_{n+1}^* \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (2.5.10)$$

Y con la aproximación (2.5.3) y con (2.5.7) se puede concluir con:

$$\eta_{n+1}^2 = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \right)^2 \quad (2.5.11)$$

o bien con

$$\eta_{n+1}^2 = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} (\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)})^2 \quad (2.5.12)$$

La expresión (2.5.12) ya presentada por Peano [50] parece más directa que la (2.5.11) utilizada por Zienkiewicz et al., sin embargo la expresión (2.5.11) no precisa del cálculo de los nuevos términos de la matriz de rigidez $\mathbf{K}_{(n+1,n)}$ y sí en cambio el del residuo \mathbf{r}_{Ω} . Algunos autores [69] afirman que por ello esta última es de utilización más económica.

La evaluación del residuo \mathbf{r}_{Ω} en la expresión (2.5.11) no presenta dificultades si las funciones de forma son de tal grado de continuidad que el valor $\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i$ $i = 1, \dots, n$ es evaluable en todos los puntos del dominio. No obstante, en general las funciones de forma son de continuidad C^0 mientras que el operador formado por la conjunción de $\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$ tiene normalmente términos en derivadas segundas, por ello el residuo puede tomar valores infinitos en las interfaces entre los elementos de la malla. Para superar esta dificultad se divide el dominio Ω en subdominios interiores a los elementos Ω^e y zonas de interface entre ellos I de espesor δ tal como se muestra en la figura 2.6.

En los interfaces entre elementos, cuyo espesor δ se supone tendiendo a 0, se puede escribir:

$$\int_I \mathbf{N}_i^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega = \int_{\Gamma} \int_0^{\delta} \mathbf{N}_i^T \mathbf{r}_{\Omega} d\mathbf{n} d\Gamma \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.13)$$

donde \mathbf{n} es la dirección normal a la interface y Γ es la directriz de la misma.

Los términos infinitos de \mathbf{r}_{Ω} vendrán definidos por derivadas segundas de los desplazamientos por lo que se puede expresar:

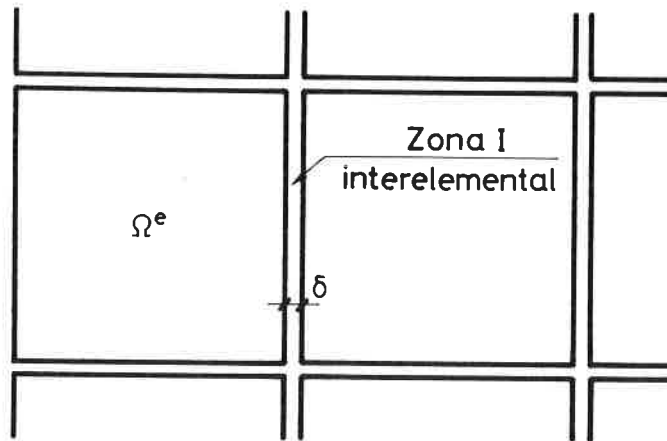


FIGURA 2.6 Zonas interiores a los elementos Ω e interfaces δ entre ellos.

$$\int_0^\delta \frac{d^2 \hat{\mathbf{u}}}{dn^2} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dn} \Big|_0^\delta \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.14)$$

lo cual es simplemente el salto del gradiente de $\hat{\mathbf{u}}$ que ocurre entre dos elementos adyacentes.

Si se denota

$$\int_0^\delta \mathbf{r}_\Omega dn = \mathbf{J} \quad (2.5.15)$$

\mathbf{J} se podrá expresar en función de las componentes de (2.5.14). En particular, \mathbf{J} coincide con el vector cuyos valores son la discontinuidad de tensiones entre elementos adyacentes.

Si se acepta que la variación de \mathbf{N}_i^T es despreciable al atravesar el pequeño espesor δ se puede reescribir el término del lado derecho de la expresión (2.5.11)

como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{J} d\Gamma \quad (2.5.16)$$

donde los sumatorios se extienden sobre todos los elementos y sobre todos los interfaces entre ellos. La segunda de las integrales se extiende sobre dominios que son de una dimensión menor que los de la primera.

Las expresiones anteriores se han deducido suponiendo que los refinamientos jerárquicos se realizan de forma que al añadir una nueva función de forma N_{n+1} se añaden todos los grados de libertad a los que ésta puede afectar. Es decir, para cada nueva función de forma se añade un grado de libertad por cada una de las variables nodales que tiene el problema. Por tanto, en elasticidad tridimensional, la adición de una nueva función afectará a los desplazamientos en x , en y y en z ; y representará la adición de tres nuevos grados de libertad.

Los refinamientos también se pueden realizar añadiendo los grados de libertad uno a uno, de forma que cada una de las nuevas funciones de forma no multiplicará necesariamente a todas las variables nodales posibles. Para ello es preciso expresar los indicadores de error para cada uno de los grados de libertad por separado. Dichas expresiones se pueden obtener reemplazando las matrices \mathbf{N}_{n+1} por otras $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ de la misma dimensión pero que sólo tienen un solo término no nulo, situado en la diagonal y en la fila correspondiente al grado de libertad del cual se está calculando el indicador. Su valor será precisamente el de la función de forma N_{n+1} . Hay que tener en cuenta también que para cada grado de libertad, los que se añade a la matriz de rigidez \mathbf{K} es una sola ecuación y no un conjunto de ellas. Las expresiones (2.5.11) y (2.5.12) se convierten entonces respectivamente en:

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{N}}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega)^2}{K_{(n+1,n+1)}} \quad (2.5.17)$$

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{(\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)})^2}{K_{(n+1,n+1)}} \quad (2.5.18)$$

siendo en este caso $K_{(n+1,n+1)}$ el término de la diagonal de $\mathbf{K}_{(n+1,n+1)}$ correspondiente al grado de libertad del cual se está calculando el indicador.

Asimismo, los términos de $\mathbf{K}_{(n+1,n)}$ son los correspondientes a la ecuación para el grado de libertad correspondiente. El término $f^{(n+1)}$ se calcula en este caso utilizando la matriz $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$.

2.6 ESTIMADORES DE ERROR

En este apartado, y siguiendo el orden de su aparición cronológica, se van a presentar una serie de estimadores de error. Todos ellos pretenden evaluar la norma energética del mismo mediante expresiones que provienen de razonamientos, más o menos rigurosos.

Esta presentación no pretende ser exhaustiva sino que lo que se intenta es dar una visión general de los distintos enfoques que se han dado al problema de la estimación de error. Como se verá, existen muy diversas alternativas cada una de ellas con sus ventajas e inconvenientes. Hasta el momento no existe ningún estimador de error que cumpla todos los requisitos que serían deseables y por ello este es un campo en continuo desarrollo.

Aparte de los estimadores que se van a comentar existen otros muchos que no se incluyen debido a su menor interés desde el punto de vista de este trabajo, o bien a que todavía no se han manifestado como suficientemente útiles. Existen otras familias de estimadores de error que son de amplia aplicación en campos muy distintos al que nos ocupa, como puede ser la dinámica de fluidos [51].

Así como la utilización de los indicadores de error está limitada a los procesos de refinamientos jerárquicos, el uso de los estimadores de error es válido para cualquier tipo de algoritmo de corrección de errores. Por ello, las formulaciones de los estimadores que se describen a continuación no se limitan, salvo indicación de lo contrario, a formulaciones jerárquicas sino que son de uso general tanto para procesos de refinamiento jerárquico como de remallado automático.

Podrían establecerse una serie de requisitos exigibles a un buen estimador de error con el fin de asegurar su utilidad en análisis prácticos. Estos son:

1. Ser determinado a posteriori (a partir de la información recibida del programa de cálculo).
2. Si se define un índice de efectividad θ como el cociente entre la estimación de la norma energética del error y la norma energética exacta del error, entonces debería ocurrir que $\theta \geq 1$ para cualquier malla y además $\theta \approx 1$. Con ello se pretende conseguir que los valores estimados queden del lado de la seguridad además de ser suficientemente aproximados.
3. Un estimador debe converger hacia un valor exacto de forma asintótica. Es decir, $\theta \rightarrow 0$ al tender el número de grados de libertad a infinito.

4. Un estimador debería dar una idea del grado de error en tensiones existente en una determinada solución.
5. Un estimador debería dar algún tipo de indicación local sobre cuales son las zonas que requieren un mayor grado de refinamiento.

Los estimadores de error que se van a presentar tienden a cumplir los requisitos anteriores. Aunque es muy difícil el conseguir que todos ellos se cumplan de forma simultánea.

2.6.1 Estimador de Babuška, Rheinboldt, Zienkiewicz, Kelly y Gago

Este estimador apareció por primera vez ^[5] con una justificación matemática detallada a cargo de Babuška y Rheinboldt. Más tarde, Zienkiewicz, Kelly y Gago ^[69] propusieron otra justificación, más sencilla aunque menos matemática, a la misma expresión para problemas unidimensionales extrapolando sus razonamientos a dos dimensiones. Se presentará aquí esta segunda posibilidad ya que los requerimientos matemáticos de la primera exceden de los planteamientos de este trabajo.

El primer aspecto a considerar es que el error \mathbf{e} definido en (2.4.10) cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} + \mathbf{r}_\Omega = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} + \mathbf{r}_\Gamma = 0 & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.6.1)$$

donde \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ han sido previamente definidas en (2.4.7). La justificación de (2.6.1) es inmediata al sustituir la definición de \mathbf{e} en (2.4.3) y teniendo en cuenta (2.4.7). De esta forma el campo \mathbf{e} se puede considerar como los desplazamientos que sufriría el dominio en estudio sometido a unas cargas volumétricas \mathbf{r}_Ω y unas cargas de contorno \mathbf{r}_Γ .

Consideremos primero un caso particular de las ecuaciones (2.4.1) en una sola dimensión:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + q = 0 \quad \text{en } [0, L] \quad \text{con } u(0) = u(L) = 0 \quad (2.6.2)$$

Consideremos una discretización lineal, a partir de unos puntos nodales x_i , y el correspondiente error e (en este caso escalar). A partir de (2.6.1) se puede escribir:

$$-\frac{d^2 e}{dx^2} + r_\Omega = 0 \quad \text{con} \quad e(0) = e(L) = 0 \quad (2.6.3)$$

Además se puede demostrar que en este caso particular (ver ref. [27]) $e(x_i) = 0$, por lo que e se puede determinar sobre cada intervalo $I_j = (x_{j-1}, x_j)$.

Si se supone que el residuo tiene la forma $r_\Omega = \bar{r} \sin \frac{\pi x}{L}$ entonces la ecuación (2.6.3) es fácil de resolver presuponiendo que e tiene la forma $e = \bar{e} \sin \frac{\pi x}{L}$ obteniéndose:

$$\bar{e} = -\frac{L^2}{\pi^2} \bar{r} \quad (2.6.4)$$

Además sobre el dominio Ω se tendrá:

$$\|e\|_E^2 = -\int_0^L e r_\Omega dx = \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L r_\Omega^2 dx \quad (2.6.5)$$

Si se considera el caso más general en que el residuo tenga la forma de un desarrollo en serie de Fourier

$$r_\Omega = \sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (2.6.6)$$

el error tendrá la forma

$$e = -\sum_i \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (2.6.7)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.6.5) se obtiene:

$$\|e\|_E^2 = \int_0^L \left[\sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right] \left[\sum_i \left(\frac{L}{i\pi} \right)^2 r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right] dx \quad (2.6.8)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones seno se cumple:

$$\int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx = \delta_{ij} \quad (2.6.9)$$

Y, en consecuencia, de (2.6.8) y (2.6.9):

$$\begin{aligned} \|e\|_E^2 &= \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \left[\sum_i \frac{r_i}{i} \sin \frac{i\pi x}{L} \right]^2 dx \\ &\leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \left[\sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right]^2 dx \\ &= \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L r_\Omega^2 dx \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Si se aplica la desigualdad anterior a cada intervalo I_i se obtendrá:

$$\|e\|_E^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_i (x_{i+1} - x_i)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} r_\Omega^2 dx \quad (2.6.11)$$

Para elementos suficientemente pequeños y q suave se ha comprobado que el residuo r_Ω es también suave ^[27] y reemplazando el término π^2 por 12 la cota superior se convierte aproximadamente en el valor exacto de la norma del error. Si se denomina h_i a la longitud de cada elemento se obtiene que la expresión del estimador de error para problemas unidimensionales con elementos lineales es:

$$\|e\|_E^2 = \frac{1}{12} \sum_i h_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} r_\Omega^2 dx \quad (2.6.12)$$

En el caso de dos o tres dimensiones aparecen dos términos de error, uno regular en el interior de cada elemento r_Ω , y otro singular repartido en las interfaces entre ellos r_Γ .

Si se considera primero la parte regular del residuo r_Ω , y se supone que ésta se reparte a partes iguales en las distintas direcciones de los ejes cartesianos, una primera parte del error se puede estimar como:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_1}^2 = 2 \left[\frac{1}{12} \sum_i h_i^2 \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{r}_\Omega}{2} \right)^2 d\Omega \right] \quad (2.6.13)$$

$$\|\mathbf{e}\|_{E_1}^2 = \frac{1}{24} \sum_i h_i^2 \int_\Omega \mathbf{r}_\Omega^2 d\Omega \quad (2.6.14)$$

Para tener en cuenta el término singular se aproxima el residuo en las interfaces por:

$$\mathbf{r}_\Omega \approx \frac{\mathbf{J}}{h} \quad (2.6.15)$$

Esta aproximación se justifica en virtud de (2.5.15) si se considera pequeña la variación de \mathbf{r}_Ω a lo largo de la interface. Sustituyendo ese término en (2.6.14) se obtiene que en los contornos de los elementos:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_2}^2 = \frac{1}{24} \sum_i h_i \int_\Gamma \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (2.6.16)$$

Al término anterior debe añadirse un factor 1/2 al efectuar la suma sobre todos los elementos pues cada interface aparece dos veces.

La expresión final más general y más utilizada para este estimador en la que se ha incluido el efecto del orden p de los polinomios que aparecen en las funciones de forma es:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq \sum_{\Omega_e} \frac{h^2}{24kp} \int_{\Omega_e} \mathbf{r}_\Omega^2 d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \frac{h}{24kp} \int_{\Gamma_e} \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (2.6.17)$$

Donde h es el tamaño de cada elemento, p el grado de los polinomios de las funciones de forma y k una constante dependiente del problema ($k =$ conductividad en problemas térmicos, $E/(1 - \nu)$ en tensión plana, etc.).

Normalmente los valores obtenidos con este estimador son ligeramente inseguros en el sentido de que son inferiores al valor exacto del error. Además el hecho de necesitar una constante dependiente del tipo de problema hace que sea poco generalizable.

Szabo y Dunavant [57] presentan una expresión algo más compleja que permite tener en cuenta factores tales como la desigualdad del orden de los polinomios entre dos elementos contiguos.

2.6.2 Estimadores derivados de los indicadores de error

Dado que los indicadores de error intentan aproximar la modificación de la energía de deformación que se obtiene al añadir cada nuevo grado de libertad, la suma de todos ellos calculados para todos los grados de libertad que podrían ser añadidos a la malla debería dar una medida relativamente exacta de la norma del error. No obstante, al hablar de todos los posibles grados de libertad debe entenderse los infinitos grados de libertad necesarios para llegar a la solución exacta. Éstos pueden estar asociados a funciones de forma de grado muy alto y desconocido a priori.

Cuando se calcula el valor de los indicadores de error se están teniendo en cuenta únicamente los grados de libertad asociados a funciones de forma uno o dos órdenes superiores a las empleadas hasta ese momento. Dado que ésta es sólo una parte de los posibles grados de libertad a añadir a la malla la suma de esos indicadores será siempre inferior o igual al valor correcto de la norma energética del error. Por ello hay que hacer alguna transformación en los indicadores para obtener un estimador de error que no proporcione valores inferiores a los reales.

A partir de la expresión (2.5.11) se puede observar que en ocasiones el residuo r_Ω puede ser ortogonal o casi ortogonal a las funciones de forma candidatas al próximo nivel de refinamiento. En ese caso, el valor de la integral que aparece en la expresión mencionada será muy pequeño para todos los posibles nuevos grados de libertad. Entonces, la corrección del campo de desplazamientos debe hacerse con funciones de más alto orden ya que son los grados de libertad asociados a éstas los que se verían afectados por la aplicación de las cargas correspondientes al residuo r_Ω . Si en un caso donde se produjese ese efecto se efectuase la suma de los indicadores correspondientes a las funciones de forma casi ortogonales al residuo el resultado sería un valor demasiado bajo

para la estimación del error. Una forma de evitar este efecto es intentar buscar una cota superior a la suma de los indicadores que intente aproximarse más al valor real de la norma energética del error. Para ello puede utilizarse la inecuación de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \right)^2 \leq \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^2 d\Omega \int_{\Omega} \mathbf{r}_{\Omega}^2 d\Omega \quad (2.6.18)$$

La utilización de la anterior desigualdad permite conseguir valores más del lado de la seguridad para la estimación del error. Si a lo anterior se añade el razonamiento realizado para la obtención de (2.5.16) se puede escribir:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq K_{(i,i)}^{-1} \left(\sum_i \left(\sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_i^2 d\Omega \int_{\Omega_e} \mathbf{r}_{\Omega}^2 d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_i^2 d\Gamma \int_{\Gamma_e} \mathbf{J}^2 d\Gamma \right) \right) \quad (2.6.19)$$

donde el subíndice i se extiende sobre todas las posibles nuevas funciones de forma que se puedan añadir en el próximo refinamiento.

La experiencia obtenida con este estimador ^[73] muestra que da valores por encima de los reales con factor de aproximadamente $\sqrt{2}$ por lo que suele dividirse la expresión anterior por ese valor.

Tanto este estimador como el anterior presentan el inconveniente de que en sus expresiones intervienen integrales definidas sobre el contorno de todos los elementos. Los programas usuales de elementos finitos no están preparados para calcular integrales de ese tipo ya que carecen de la información topológica para ello, por esa razón su implementación puede ser laboriosa.

2.6.3 Estimador local de error de Specht

Specht ^[56] presenta un nuevo tipo de estimador de error cuya justificación es bastante distinta a la de los anteriores. La principal característica de éste es la discretización del residuo mediante unas funciones que tienen unas propiedades de interpolación especiales.

En un problema de elasticidad lineal como el definido en (2.4.3) el error existente en la solución $\hat{\mathbf{u}}$ obtenida por elementos finitos se manifiesta en las condiciones de equilibrio para las tensiones $\hat{\sigma}_{ij}$ produciéndose unos residuos tanto en el interior del dominio del problema como en su contorno. Para cada elemento e las componentes de estos residuos tendrán la siguiente forma:

$$\begin{cases} r_{\Omega i}^e = \sum_j \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - q_i & \text{en } \Omega_e \\ r_{\Gamma i}^e = \sum_j n_j^e \hat{\sigma}_{ij} - t_i & \text{en } \Gamma_e \cap \Gamma_N \\ r_{\Gamma i}^e = \frac{1}{2} \sum_j n_j^e \hat{\sigma}_{ij}^e + n_j^f \hat{\sigma}_{ij}^f & \text{en } \Gamma_e \cap \Gamma_f \end{cases} \quad (2.6.20)$$

donde r_{Ω}^e es el residuo en el interior del elemento, r_{Γ}^e es el residuo en el contorno del mismo, \mathbf{n} es la normal al contorno en cada punto y \mathbf{t} la tensión prescrita en una parte del mismo $\Gamma_N \subset \Gamma$. Los índices i, j se mueven entre 1 y la dimensión del dominio. En las interfaces entre elementos $\Gamma_e \cap \Gamma_f$ se ha repartido el salto de tensiones entre los dos elementos conectados.

Para discretizar el residuo se utilizan una funciones de forma η_a cuya forma se verá más adelante. Con ello se obtienen unas fuerzas discretas equivalentes r_{ia} que en realidad son tensiones residuales ponderadas de la siguiente forma:

$$r_{ia}^e = \int_{\Omega_e} \sum_j \frac{\partial \eta_a}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) d\Omega \quad (2.6.21)$$

Si se integra por partes la expresión anterior se obtiene:

$$\int_{\Omega_e} \sum_j \frac{\partial \eta_a}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) d\Omega = \int_{\Gamma_e} \eta_a (\sum_j \hat{\sigma}_{ij} n_j - t_i) d\Gamma + \int_{\Omega_e} \eta_a (\sum_j \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - q_i) d\Omega \quad (2.6.22)$$

La integral volumétrica obtenida contiene el término definido en (2.6.20). La integral de superficie contiene un término cuyo valor sólo se conoce en el contorno Γ_N donde se han prescrito tensiones, siendo desconocido en el resto. No obstante parece lógico introducir el término definido en Γ_N en ella como una aproximación. Con ello se obtiene la siguiente expresión:

$$r_{ia}^e \approx \int_{\Gamma_N \cap \Gamma_e} \eta_a r_{\Gamma i}^e d\Gamma + \int_{\Omega_e} \eta_a r_{\Gamma i}^e d\Omega \quad (2.6.23)$$

La cuestión primordial es el tipo de funciones η_a utilizables para definir el error. En el caso de seleccionar para ello las mismas funciones de forma que se han utilizado para discretizar el campo de desplazamientos las fuerzas r_{ia} se anularán idénticamente. Specht propone para evitar este efecto la utilización de unas funciones que cumplen unas condiciones de interpolación especiales en forma de integrales ponderadas:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_e} \gamma_b \eta_a d\Gamma = \delta_{ab} & (b = 1, \dots, n_1) \\ \int_{\Omega_e} \varphi_b \eta_a d\Omega = \delta_{ab} & \begin{cases} (b = n_1 + 1, \dots, n) \\ (a = 1, \dots, n) \end{cases} \end{cases} \quad (2.6.24)$$

Las funciones γ_b y φ_b deben ser capaces de representar los defectos en forma de combinaciones lineales:

$$\begin{cases} r_{\Omega_i}^e = \sum_b \gamma_b r_{ib} & \text{en } \Omega_e, (b = 1, \dots, n_1) \\ r_{\Gamma_i}^e = \sum_b \varphi_b r_{ib} & \text{en } \Gamma_e, (b = n_1 + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (2.6.25)$$

Si se insertan estas ecuaciones en (2.6.23) y se tiene en cuenta las propiedades (2.6.24) se observa que los valores discretos r_{ib}^e coinciden con las fuerzas discretas equivalentes.

Para determinar las expresiones de las funciones η_a a partir de γ_b y φ_b puede partirse de una base de polinomios:

$$Z_a = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, \dots\} \quad (2.6.26)$$

resolviendo un sistema de ecuaciones lineales para hallar los coeficientes de cada η_a .

Las funciones γ_b deben ser no nulas sólo en el contorno del dominio pues en su interior no tienen ningún significado.

Las funciones η_a se pueden utilizar para crear una nueva matriz de rigidez asociada a ellas cuyos coeficientes \hat{K}_{ab} tienen la siguiente expresión:

$$\hat{K}_{ab} = \int_{\Omega} \eta_a^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \eta_b d\Omega \quad (2.6.27)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_a$, y $\boldsymbol{\eta}_b$ son matrices con las funciones η_a y η_b en su diagonal.

Esta nueva matriz de rigidez es la correspondiente a las nuevas funciones de forma η_a y sus coeficientes son los que corresponderían a la ampliación de la matriz \mathbf{K} inicial con los grados de libertad asociados a las nuevas funciones de forma. Las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a esos grados de libertad están definidas en (2.6.23).

Si se supone que el desplazamiento que produce la aplicación de cada componente de la fuerza nodal elemental r_{ia}^e se puede aproximar por $r_{ia}^e / \hat{K}_{aa,d}^e$, donde $\hat{K}_{aa,d}^e$ es el término de la diagonal de $\hat{\mathbf{K}}_{aa}^e$, entonces la norma energética del error existente en el elemento e se podrá aproximar por:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 \approx \sum_{i,a} \frac{(r_{ia}^e)^2}{\hat{K}_{aa,d}^e} \quad (2.6.28)$$

En realidad lo que se está haciendo es similar a lo visto en un apartado anterior para la justificación de la expresión de los indicadores de error. La diferencia está en que en esta ocasión se considera la introducción de unas nuevas funciones de forma que en vez de ser jerárquicas están caracterizadas por las expresiones (2.6.24). Se considera que los nuevos grados de libertad añadidos son los necesarios para llegar a la solución exacta, y que por tanto la energía de deformación que producen los desplazamientos asociados a ellos coincide con la norma energética del error correspondiente a la primera resolución del problema.

Para calcular la expresión (2.6.27) Specht ^[56] propone utilizar las mismas cuadraturas que para la obtención de la matriz de rigidez de la malla, ya que éstas producen una integración reducida de la misma por ser las funciones η_a de mayor orden que las funciones de forma N_i . Ello se traduce en valores mayores para el estimador y por tanto una tendencia hacia el lado de la seguridad.

Los términos r_{ia}^e del vector \mathbf{r}_a^e se obtienen de la expresión:

$$\mathbf{r}_a^e = \mathbf{F}_a^e - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\eta}_a^T \mathbf{S}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega \quad (2.6.29)$$

donde \mathbf{F}_a viene definida por las condiciones de contorno del problema:

$$\mathbf{F}_\alpha = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\eta}_\alpha^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_N} \boldsymbol{\eta}_\alpha^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.6.30)$$

Specht [56] presenta la obtención de las funciones η_α correspondientes a los elementos planos de 4 y 8 nodos y su aplicación a un caso sencillo.

El algoritmo para el cálculo del estimador de error (2.6.28) es atractivo, sin embargo hay que hacer una serie de consideraciones:

- Para el cálculo de (2.6.27) se precisa repetir el cálculo de la matriz de rigidez empleando las funciones de forma η_α . Esto representa un elevado coste en términos de tiempo de cálculo.
- Para aplicar este estimador a cualquier tipo de elemento es preciso el cálculo previo de la expresión de las funciones η_α correspondientes. Este proceso no parece muy caro pues para cada uno de los elementos usuales sólo debe realizarse una vez. Sin embargo, si se está efectuando un refinamiento jerárquico de una determinada malla aparecen elementos de diversos tipos que pueden incluir o no diversas funciones de forma según el grado de refinamiento alcanzado. El hecho de que a partir de la malla inicial se vayan introduciendo de forma selectiva nuevas funciones de forma a cada elemento hace que en cada paso las funciones η_α deban cambiar de forma no predecible a priori y sea necesario calcularlas para cada una de las nuevas tipologías de elemento que puedan ir apareciendo. Por ello la implementación de este estimador en un proceso de refinamientos jerárquicos puede ser cara y complicada y su utilización parece más indicada en procesos donde en cada paso se efectúe un remallado total de la malla conservando siempre el mismo tipo de elemento.

2.6.4 Estimador de Zienkiewicz y Zhu

En la resolución por elementos finitos de las ecuaciones (2.4.3) se utilizan normalmente funciones de forma de continuidad C^0 , lo cual se traduce en una aproximación discontinua a las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Además es muy conocido el hecho de que la evaluación de las mismas en puntos que no sean los correspondientes a la cuadratura de integración utilizada produce muy malos resultados. Para obtener resultados aceptables en cualquier punto de la malla se suele hacer un

promediado o alisado de las tensiones mismas de forma que el campo resultante σ^* se interpola con las mismas funciones de forma que los desplazamientos. Para un sistema con n nodos se define

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n N_i \bar{\sigma}_i^* = \bar{N}^T \bar{\sigma}^* \quad (2.6.31)$$

donde $\bar{\sigma}_i^*$ son las tensiones alisadas nodales correspondientes al nodo i -ésimo, \bar{N} es un vector columna formado por las n funciones de forma correspondientes a cada uno de los nodos utilizados y $\bar{\sigma}^*$ es una matriz en la cual la fila i -ésima está formada por las tensiones alisadas nodales $\bar{\sigma}_i^*$. Zienkiewicz y Zhu [74] utilizan estas tensiones alisadas para construir con ellas un estimador de error.

En un proceso de alisamiento global la condición que se impone al campo de tensiones alisadas es:

$$\int_{\Omega} N_i (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6.32)$$

Esta expresión es equivalente a minimizar por mínimos cuadrados la diferencia entre las tensiones σ^* y $\hat{\sigma}$. También puede interpretarse la anterior expresión como una proyección de las tensiones $\hat{\sigma}$ sobre las funciones de forma. La expresión resultante para hallar los valores de $\bar{\sigma}^*$ es:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* &= \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \bar{N}^T \hat{\sigma} d\Omega \\ \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \bar{N} \bar{N}^T d\Omega \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

donde \mathbf{M} tiene la misma forma que las matrices de masas que normalmente se emplean para el análisis dinámico de estructuras [15], y $\bar{\sigma}^*$ es el vector de tensiones nodales alisadas.

La expresión anterior es muy sencilla de calcular, sobre todo si se utiliza una forma condensada de la matriz \mathbf{M} , aunque esto último suele producir malos resultados para la estimación de errores. Por otro lado los valores de \mathbf{M} para cada una de las componentes del vector de tensiones son iguales y por lo tanto se puede formar la matriz como si este vector tuviese una sola componente y aplicarla de forma reiterada a cada una de ellas. Con ello se consigue disminuir

el tamaño de la memoria y el tiempo de cálculo necesarios para invertirla. El número de filas y columnas de \mathbf{M} será por tanto la mitad que el de la matriz de rigidez \mathbf{K} en un problema plano, y la tercera parte en un problema tridimensional.

La evaluación de las integrales (2.6.33) requiere la utilización de cuadraturas un orden superior a las utilizadas para calcular la matriz \mathbf{K} . Ello es debido a que al calcular la matriz \mathbf{M} dentro de la integral aparecen las funciones de forma, mientras que al calcular \mathbf{K} lo que aparece son términos expresados en función de sus derivadas, que serán de un orden menor.

Las tensiones obtenidas mediante alisados no están, generalmente, en equilibrio sino que necesitan unas fuerzas residuales para ser equilibradas. Se pueden generar esquemas iterativos para minimizar esas fuerzas residuales (ver ref. [72]) pero en general son de convergencia lenta e insegura. No obstante, la magnitud de esas fuerzas residuales decrece al ir refinando la malla con lo que al ir disminuyendo la norma del error también disminuyen éstas.

También existe la posibilidad de utilizar métodos mixtos en tensiones y desplazamientos (ver ref. [76]) para obtener campos de tensiones continuos y en equilibrio, pero no tiene sentido, por razones de coste, el resolver un nuevo problema de elementos finitos aumentado en su número de incógnitas y complejidad para estimar el error cometido en un cálculo previo. Además, en esta nueva resolución se obtendría un nuevo campo de tensiones de mayor calidad que el anterior por lo que este último sería el que se aceptaría como correcto perdiendo interés el anterior.

Es razonable suponer que las tensiones alisadas σ^* son una mejor aproximación a la solución exacta del problema que las obtenidas directamente de los desplazamientos $\hat{\sigma}$. Hay dos razones que avalan esta hipótesis:

- En el proceso de alisado se eliminan las discontinuidades del campo de tensiones que existen en las caras de contacto entre elementos. Dado que de la solución exacta se espera que sea continua, es razonable suponer que el campo de tensiones alisado es más cercano a aquella.
- Asimismo, mediante el alisado se consigue una distribución de tensiones más uniforme dentro del dominio, de forma que la evaluación de dichas tensiones es posible en cualquier punto con buenos resultados. Ello no es posible en el campo de tensiones inicial donde éstas sólo pueden evaluarse correctamente en los puntos de integración utilizados. Por ello puede decirse que el campo de tensiones alisadas tiene un nivel más alto de precisión.

Los experimentos numéricos confirman, efectivamente, la obtención de mejores resultados en tensiones después de un proceso de alisado.

En virtud de lo que se acaba de comentar se puede estimar el error en tensiones como:

$$\mathbf{e}_\sigma \approx \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.6.34)$$

y estimar con ello la norma energética del error mediante:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \approx \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (2.6.35)$$

La expresión anterior es la que proponen Zienkiewicz y Zhu [74] como estimador del error. Es fácil ver que la integral anterior se puede realizar sobre cada elemento obteniendo así un valor local del error para cada uno de ellos.

La aproximación (2.6.34) converge hacia un valor exacto y nulo a medida que se va refinando la malla ya que ambos campos de tensiones se acercan cada vez más a la solución exacta del problema. Por ello el el estimador tenderá también a producir valores más correctos durante dicho proceso.

En este trabajo se ha deducido una expresión equivalente a la expresión (2.6.35) que viene proporcionada por el producto entre el vector de fuerzas residuales de las tensiones alisadas y los desplazamientos nodales:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \approx \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right)_i \quad (2.6.36)$$

(S N)^T

Para demostrar dicha equivalencia hay que demostrar previamente la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega = 0 \quad (2.6.37)$$

Para ello se desarrolla la expresión (2.6.37) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega &= \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*T} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \\
 &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \right]_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \quad (2.6.38) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \mathbf{D}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_i (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

El término $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i$ denota el vector fila formado por las sucesivas i -ésimas componentes de las tensiones alisadas nodales. La matriz \mathbf{D}^{-1} se puede sacar fuera de la integral por ser constante así como las tensiones $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i$. La expresión anterior se anula en virtud de la condición (2.6.32) que deben cumplir las tensiones alisadas.

Por otro lado la expresión (2.6.36) se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right)_i &= \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right) \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\mathbf{S} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i)^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (2.6.39) \\
 &= \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega
 \end{aligned}$$

Las expresiones (2.6.35) y (2.6.39) se diferencian únicamente en el término de (2.6.37), pero por ser este último nulo se comprueba la realidad de la igualdad de las dos expresiones para el estimador de error. La expresión (2.6.39) representa además una tercera alternativa para el cálculo del estimador de error obtenida en este trabajo.

Hay cuatro razones que hacen atractiva la utilización de estas expresiones:

- 1.- La sencillez de su cálculo y su facilidad para ser incorporadas a cualquier programa de elementos finitos.

- 2.- El hecho de que precisa del cálculo previo de unas tensiones alisadas no representa muchas veces un coste adicional, pues muchos programas ya lo realizan durante su normal funcionamiento.
- 3.- La circunstancia, no comentada hasta ahora, de que este tipo de estimador es matemáticamente equivalente al presentado en la sección 2.6.1, al menos para los elementos bilineales, de forma que los estudios matemáticos realizados por Babuška sobre el mismo le son también aplicables. Esta equivalencia puede profundizarse en las referencias [74].
- 4.- El hecho de que el error estimado corresponde al campo de tensiones obtenido de forma directa a partir de los desplazamientos y no al campo de tensiones alisadas. Si se acepta que estas últimas son más exactas, su error será menor que el de las anteriores. Dado que el error estimado mediante la expresión (2.6.35) es el correspondiente a las tensiones no alisadas, se tendrá la casi total seguridad de que éste es una cota superior al que existe en el campo de tensiones alisadas.

En la expresión de este estimador se supone que las tensiones σ^* son exactas y por tanto se estima el error en tensiones a partir de (2.6.34). En realidad lo que ocurre es que se acepta que las tensiones σ^* son una mejor aproximación a las existentes en la solución exacta de (2.4.3) que las obtenidas directamente a partir de \hat{u} . La exactitud de los resultados obtenidos con este estimador dependerá por tanto de la exactitud de las tensiones σ^* . Estas últimas se obtienen mediante un simple alisado de tensiones, sin embargo pueden desarrollarse procedimientos más complejos para conseguir campos de tensiones todavía mejores. La única limitación a estos procesos es su coste, ya que no se considera aceptable que el cálculo del estimador de error suponga un coste superior al de la resolución de las mismas ecuaciones (2.4.3). Algunas posibilidades para mejorar el campo de tensiones alisadas podrían ser:

- Obtención de un campo de tensiones alisadas cuyas fuerzas residuales nodales sean nulas. Como ya se ha comentado existen procedimientos iterativos para ello pero en general no son muy robustos. El hecho de que un campo de tensiones alisadas esté en equilibrio es, evidentemente, una mejora importante.
- Aplicación de las condiciones de contorno especificadas en Γ_N al campo de tensiones alisadas. De esta forma se obtendría un campo de tensiones mejorado en el sentido de que cumpliría exactamente las condiciones de contorno del problema. Sin embargo, el coste de este proceso sería muy alto ya que en general las condiciones se especificarían sobre tensiones en direcciones arbitrarias. Debido a ello ya no sería posible desacoplar el alisado de cada componente por separado creciendo el tamaño de la matriz

de masas M por encima incluso del de la matriz de rigidez. Además, este procedimiento podría producir problemas en puntos con discontinuidades de tensiones (interfaces entre materiales distintos, puntos de aplicación de cargas puntuales, fronteras entre zonas cargadas y zonas descargadas, puntos singulares, etc).

Ainsworth, Zhu, Craig y Zienkiewicz [1] presentan un análisis matemático de las propiedades de este estimador de error. Éste se sitúa dentro de una familia más amplia de estimadores en los cuales se efectúa algún tipo de proyección de las tensiones $\hat{\sigma}$ sobre una familia de funciones que en este caso son las funciones de forma. Se incluyen también en esta familia los estimadores en los cuales se realiza un alisado de deformaciones y no de tensiones. Éstos parecen poseer algunas virtudes adicionales desde el punto de vista matemático.

2.6.5 Estimador de error de Roberti y Melkanoff

Roberti y Melkanoff [55] proponen un nuevo estimador de error, válido para elementos lineales en una dimensión, y elementos triangulares y tetraédricos, también lineales, en dos y tres dimensiones respectivamente. La justificación de la expresión que presentan se basa en que si los elementos son suficientemente pequeños se pueden considerar como ciertas las siguientes proposiciones:

- La solución exacta para las tensiones σ se puede considerar lineal en el interior de cada uno de los elementos.
- El valor exacto de las tensiones σ coincide con el obtenido del cálculo por elementos finitos $\hat{\sigma}$ en el centroide de cada elemento.

En estas condiciones, los autores mencionados proponen, para refinar una determinada malla A , una estrategia a base de subdividir los elementos tal como se señala en la figura 2.7 para el caso de triángulos planos. De esta forma cada uno de los elementos de la malla A queda subdividido en cuatro nuevos elementos de una nueva malla B . A partir de las diferencias de tensiones entre las dos mallas se puede estimar el error de las mismas en la malla B .

De una forma muy resumida se puede decir que después de refinar el triángulo A para obtener los cuatro nuevos de B , el máximo error en tensiones de estos últimos se puede obtener a partir de la máxima diferencia de las mismas

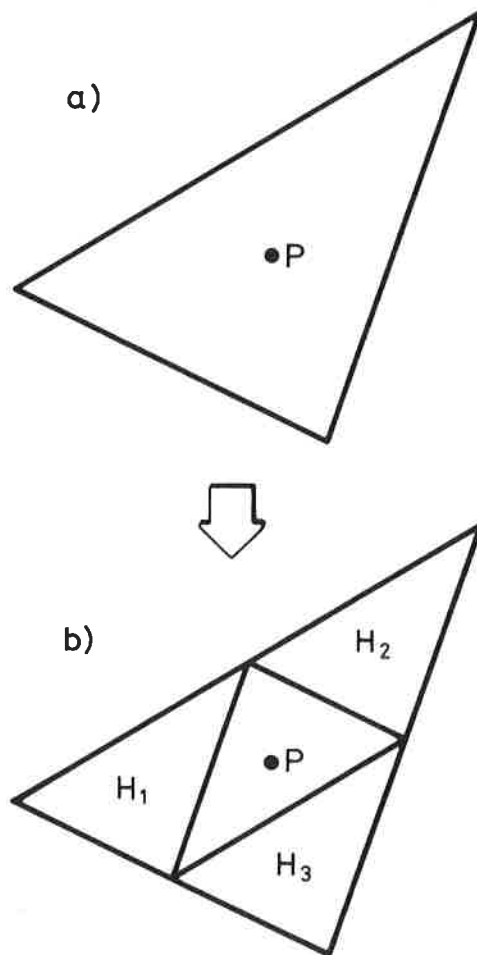


FIGURA 2.7 Subdivisión de los elementos.

entre las obtenidas en el centroide del elemento P y las obtenidas en el de H_1 , H_2 y H_3 . En la referencia [55] se justifica la anterior afirmación para el caso de una y dos dimensiones y se razona su rango de validez para una dimensión. Los razonamientos empleados para ello son puramente geométricos tomando como premisas las proposiciones ya mencionadas. Los triángulos donde el error exceda de un determinado límite prefijado se refinan repitiendo el proceso anterior.

La estimación del error propuesta es muy simple pero adolece de las siguientes limitaciones:

- Solo es válida para elementos triangulares o tetraédricos lineales no siendo extrapolable, por el momento, a otros tipos de elementos.
- Precisa del refinamiento de una malla inicial con lo que sólo puede estimarse el error tras un primer refinamiento y, por tanto, después de haber empleado, al menos, dos mallas.
- No queda necesariamente del lado de la seguridad en sus estimaciones pudiendo ser en ocasiones inseguro.
- Los refinamientos deben realizarse de la forma mostrada en la figura 2.7 y por ello no es posible realizar refinamientos jerárquicos ni remallados automáticos no estructurados.

2.6.6 Estimador de Kelly, Mills, Reizes y Miller

Este estimador introducido por Kelly ^[34] y perfeccionado por él mismo y sus colaboradores Mills, Reizes y Miller ^{[35][36]}, proporciona unas cotas superior e inferior para la norma del error de una solución obtenida por cualquier método numérico. Este estimador está desarrollado para un caso particular de (2.4.1) que es el siguiente:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma \\ \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset \end{cases} \quad (2.6.40)$$

Asimismo, el producto escalar que se define para calcular la magnitud del error viene definido, en un espacio bidimensional, por la expresión:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.6.41)$$

Como se puede ver, las ecuaciones anteriores no corresponden a problemas de elasticidad lineal sino más bien a problemas de flujo, torsión o membranas. No obstante, el desarrollo del estimador de error parece extrapolable al primer tipo de problema mencionado si bien éste es un trabajo todavía no realizado.

Kelly y sus colaboradores presentan unas expresiones de las que se puede obtener cotas superior e inferior a la norma del campo \mathbf{u} solución de la ecuación diferencial (2.6.40) a partir de resultados obtenidos ya sea por elementos finitos, diferencias finitas o elementos de contorno. En el primer caso la norma de la solución $\hat{\mathbf{u}}$ obtenida por el cálculo resulta ser una cota inferior de la norma de \mathbf{u} por lo que todo el problema se centra en hallar una cota superior.

$$\sqrt{\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (2.6.42)$$

Para ello el primer paso consiste en ver que el error en desplazamientos \mathbf{e} definido en (2.4.10) cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{e} = \mathbf{r} & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial n} = \mathbf{g} - \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial n} & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{e} = 0 & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (2.6.43)$$

donde \mathbf{r} es el residuo definido por:

$$\mathbf{r} = \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \quad (2.6.44)$$

A continuación, Kelly propone repartir las discontinuidades que existen en las derivadas del campo $\hat{\mathbf{u}}$ en cada interface entre cada dos elementos contiguos de forma que sobre cada elemento exista un equilibrio entre el residuo r y las partes correspondientes de las discontinuidades mencionadas. A partir de ello se construye un campo de derivadas Q_x, Q_y que cumple las ecuaciones (2.6.43) y está autoequilibrado con lo que la cota superior a la norma de \mathbf{u} se puede obtener con la expresión:

$$\|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} [(Q_x)^2 + (Q_y)^2] d\Omega \quad (2.6.45)$$

los detalles para la obtención de Q_x y Q_y se pueden obtener en las referencias

[34].

Este estimador presenta algunas deficiencias graves que quizás sean subsanables en un futuro desarrollo más completo. Éstas son:

- Su no aplicabilidad, con el desarrollo actual, a problemas de elasticidad lineal.
- El hecho de que para obtener las funciones Q_x y Q_y sólo existe una construcción, aplicable únicamente a elementos bilineales y con mallas cartesianas, es decir, con mallas cuyo contorno siga la dirección de los ejes coordenados.

2.7 ESTRATEGIAS PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES

Tras la obtención de unos resultados con una cierta malla y haber estimado el correspondiente error, puede ocurrir que dicho error esté por encima de una determinada tolerancia. En ese caso existen una serie de estrategias para intentar conseguir unos nuevos resultados cuyo error no sobrepase esa tolerancia. Estas estrategias se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Refinamientos de la malla utilizada previamente. En este caso se utiliza la malla anterior añadiendo nuevos grados de libertad. Estos nuevos grados de libertad se pueden obtener subdividiendo elementos de la malla original para obtener otros más pequeños, o bien añadiéndolos de forma jerárquica. Ambas posibilidades se comentarán más ampliamente a continuación.
- Remallados automáticos o adaptables. En este caso se utiliza la información procedente del estimador de error para generar una malla *completamente nueva* y más adecuada con la cual se repetirá el cálculo. La forma en que se utiliza la información de los estimadores de error se explicará en un apartado posterior. Las herramientas para generar la nueva malla se comentan en el Capítulo 3.

En los apartados siguientes se describirán con detalle ambas estrategias.

Como ya se ha comentado anteriormente, los estimadores de error pueden dar una idea bastante aproximada de la magnitud de la norma energética del error. Esta magnitud es la que se pretende que quede por debajo de una cierta tolerancia.

Dado que la norma energética del error está muy relacionada con alguna forma de error en la energía, parece lógico establecer como tolerancia un cierto porcentaje de la energía total de deformación del sólido objeto de estudio. Por ello lo que se suele hacer es limitar la norma energética del error a un cierto porcentaje de la energía de deformación obtenida del cálculo. Esta energía E es fácilmente calculable a partir de unos resultados utilizando una de las dos siguientes expresiones:

$$E = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.7.1)$$

$$E = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.7.2)$$

Ambas expresiones, perfectamente equivalentes, proporcionan una estimación a la energía de deformación exacta del problema. Además, las dos se pueden calcular elemento por elemento por lo que puede estimarse así la energía correspondiente a cada uno de ellos.

2.7.1 Estrategias para los refinamientos no jerárquicos

Este tipo de refinamientos consiste en subdividir en varias partes los elementos situados en las zonas donde el error sea mayor que el admisible. Para ello es necesario utilizar un estimador de error que estime el error en la energía para cada elemento, y calcular también para cada uno de ellos las expresiones (2.7.1) o (2.7.2). Los elementos que deberán ser refinados son aquellos cuyo cociente entre el error estimado y su energía de deformación sea mayor que un porcentaje predeterminado como tolerancia máxima. La forma en que se puede definir este porcentaje se describe en el apartado 2.7.3.1.

Una vez decidido cuales son los elementos que se van a refinar existe la posibilidad de que al realizar particiones sobre los mismos aparezcan nuevos nodos o grados de libertad a través de los cuales se pierda la continuidad del campo de desplazamientos. Esto es lo que sucede por ejemplo en la figura 2.8 en la cual los nodos 10 y 17 pertenecientes a los elementos *B* y *C* no tienen contrapartida en el elemento *A*. Por ello si se asignan valores arbitrarios a los desplazamientos de estos nodos, el campo obtenido será discontinuo en la interface entre el elemento *A* y los elementos *B* y *C*. A los nodos como el 10 o el 17 se les llamará nodos no conformes.

Existen diversas técnicas para evitar los problemas mencionados, algunas de las cuales se enumeran a continuación:

- Prolongar todas las subdivisiones entre elementos a través de toda la malla añadiendo todos los elementos y grados de libertad que hagan falta para ello. Para ello, allí donde aparezca un nodo no conforme se parte el elemento contiguo para conseguir que éste también tenga el nodo correspondiente. Este procedimiento es muy caro ya que obliga a refinar no sólo los elementos en que ello sea necesario, sino además todos aquellos situados sobre las líneas con las que se subdivide cada uno de ellos.
- Utilizar alguna técnica de subdivisión de la malla que evite el problema anterior.

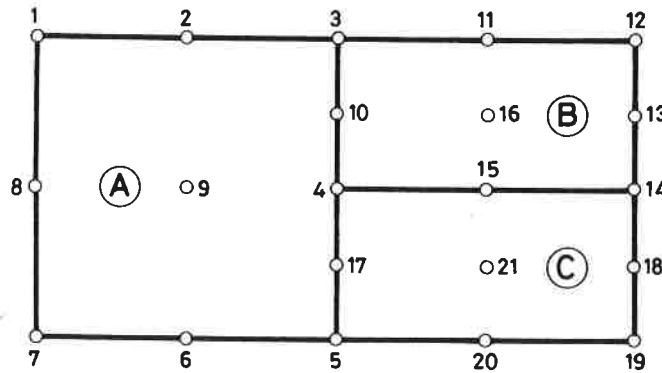


FIGURA 2.8 Refinamiento no conforme.

Rivara [54] y Roberti y Melkanoff [55] presentan de forma independiente algoritmos mediante los cuales los elementos situados alrededor de los que precisan ser refinados se subdividen a su vez para mantener la continuidad. El atractivo de estos algoritmos es que su aplicación sucesiva no produce mallas con elementos distorsionados sino que se obtienen mallas muy bien graduadas con elementos bien proporcionados. La desventaja de los mismos es que sólo sirven para mallas con elementos triangulares. Los algoritmos propuestos consisten básicamente en cortar por la bisectriz correspondiente al lado mayor cada uno de los elementos en contacto con un nodo no conforme. La aplicación reiterada de este proceso elimina los nodos no conformes.

Para mallas de elementos cuadrangulares pueden utilizarse elementos de transición tal como propone Irons [30].

- Utilizar alguna técnica para imponer que los desplazamientos de los nodos no conformes sean tales que se mantenga la continuidad de los desplazamientos a través de las interfaces entre elementos. Para ello Fortin y Tanguy [23] proponen una técnica muy simple y efectiva, válida para problemas tanto lineales como no lineales, que consiste a grandes rasgos en efectuar alteraciones en las funciones de forma de los elementos que contengan nodos no conformes. Esta técnica parece especialmente útil por ser aplicable a todo tipo de elementos realizando cambios mínimos en

los programas.

Dado que para recuperar la continuidad, el desplazamiento de los nodos no conformes debe ser igual al de los puntos correspondientes pertenecientes a los elementos contiguos, la técnica propuesta consiste en imponer esa restricción a la matriz de rigidez. La forma de imponer esta restricción consiste básicamente en alterar las funciones de forma de los elementos con nodos no conformes de forma que ésta se cumpla de forma implícita.

Aunque las técnicas anteriores permiten utilizar los refinamientos no jerárquicos de forma práctica, hay que tener en cuenta el hecho de que el partir de una malla inicial demasiado grosera obliga a muchos ciclos de refinamiento hasta llegar a una solución satisfactoria. Las mallas obtenidas, si bien cumplirán los requisitos exigidos en cuanto a la magnitud del error, requerirán para ello un número de elementos superior, en general, a las que se obtendrían mediante procesos de remallados adaptables en los cuales se genera de forma directa la malla adecuada controlando el tamaño y la forma de cada elemento.

2.7.2 Estrategias para los refinamientos jerárquicos

El primer paso para realizar un refinamiento de este tipo es el calcular el valor de los indicadores de error correspondientes a todas las posibles funciones de forma candidatas a ser incluidas en la malla. Para ello puede hacerse uso de las expresiones (2.5.11) o (2.5.12). Una vez conocidos los valores de los indicadores puede optarse por seguir una de las siguientes estrategias:

- 1) Añadir siempre una proporción fija de todas las funciones de forma disponibles escogiendo aquellas que tengan valores más altos para los indicadores. Esta estrategia tiene el defecto de que, en caso de ser necesarios varios refinamientos sucesivos, puede refinar poco la malla al principio del proceso iterativo de refinamiento y mucho al final.
- 2) Decidir a priori un valor del indicador $\bar{\eta}$ de forma que todas las funciones de forma que produzcan valores mayores para el indicador serán añadidas. Este procedimiento también resulta ser muy rígido y es difícil la elección de $\bar{\eta}$.
- 3) Una alternativa más flexible, a medio camino entre las dos anteriores, es definir un parámetro γ tal que $0 \leq \gamma \leq 1$ y añadir todas las funciones de

forma correspondientes a valores del indicador η tales que $\eta \geq \gamma\eta_{max}$. El parámetro γ controla entonces la velocidad de convergencia: si γ es nulo se añaden todas las posibles funciones de forma, mientras que si γ vale 1 no se añade ninguna. De esta forma las funciones de forma que se añaden son una proporción variable del total que depende de los valores de los indicadores de error.

La alternativa utilizada más comunmente es la tercera ya que permite un mayor control sobre el proceso de refinamiento. Además se ha comprobado experimentalmente ^[73] que valores de γ bajos, del orden de 0.1, son los que conducen a procesos iterativos de refinamiento más económicos tanto por el número relativamente pequeño de funciones de forma que se añaden a la malla como por la rapidez de convergencia hacia una solución con la deseada precisión. Ello es debido a que por regla general son pocos los elementos que precisan de refinamiento.

Una vez decidido cuales van a ser las funciones de forma que se van a añadir a la malla, su inclusión se realiza utilizando las propiedades de las formulaciones jerárquicas, es decir, puede aprovecharse la matriz de rigidez calculada anteriormente y añadir a ella los términos correspondientes a los nuevos grados de libertad de orden más alto. Después del nuevo cálculo debe volverse a estimar el error cometido con la malla refinada y, en caso de ser necesario, puede realizarse un nuevo refinamiento repitiendo de forma iterativa todo el proceso comentado.

Los refinamientos jerárquicos pueden realizarse también añadiendo uno por uno todos los grados de libertad que pueden verse afectados por la inclusión de una nueva función de forma. De esta manera se es mucho más selectivo en cuanto al número total de grados de libertad que se añaden en cada refinamiento. En ese caso, para calcular el valor de los indicadores de error se utilizan en vez de las expresiones mencionadas las (2.5.17) o (2.5.18). La estrategia para decidir cuales van a ser los nuevos grados de libertad es idéntica al caso anterior.

En todos los procesos de refinamiento se obtiene, después de varios pasos, una situación en la cual los valores de los indicadores son casi constantes (si el proceso se inicia a partir de una malla más densa ese estado se alcanzará con menos iteraciones que si se comienza con una más grosera). Por ello se dice que una malla es óptima cuando se alcanza una distribución uniforme de los indicadores de error. Parece razonable suponer que en ese caso los grados de libertad están colocados de forma que en función de su colocación el error energético es mínimo. No obstante, no existe una demostración analítica que asegure la equivalencia entre la minimización del error respecto a la colocación de los grados de libertad y la distribución uniforme de los indicadores.

Otra característica importante es que los estimadores de error en general alcanzan sus cotas más altas de precisión cuando se llega al estado de malla óptima, y es en ese momento cuando se alcanzan las velocidades de convergencia hacia la solución exacta predichas por los estimadores de error a priori, incluso cuando existen puntos singulares.

Los refinamientos jerárquicos no presentan los problemas que se han comentado en el apartado anterior referentes a la aparición de nodos no conformes. Ello es debido a que durante este proceso lo que se añade a una determinada malla no son nuevos nodos o elementos sino nuevas funciones de forma que se añaden a las anteriores de forma jerárquica. Esta adición es ya conforme pues cada nueva función de forma es continua y afecta para ello a todos los elementos que sea necesario.

2.7.3 Estrategias para los remallados automáticos

Ya se ha comentado anteriormente que una alternativa a los refinamientos, en los cuales se conserva la estructura inicial de la malla durante todo el proceso, es el generar en cada paso una nueva malla partiendo de la información obtenida con otra anterior. Para llevar a cabo este proceso se precisa de un programa de generación de mallas que sea capaz de funcionar dentro del dominio del problema ajustándose a los tamaños de elemento marcados en cada zona por la estimación de los errores obtenidos con una malla previa. De esta forma se trabaja con un sistema de tres etapas que se repite hasta llegar a una malla óptima:

1. Generación de la malla.
2. Cálculo de la solución al problema sobre la malla generada.
3. Estimación del error cometido con la malla utilizada.

Frente a la posibilidad de aprovechar cálculos previos que se atribuye a los refinamientos jerárquicos (aspecto que se ha criticado en apartados anteriores) se contrapone la simplicidad del proceso que se presenta en este apartado donde cada una de las etapas es independiente de las otras dos y, por tanto, más cómoda de programar. En particular, un programa de cálculo por elementos finitos no necesita sufrir ninguna modificación para ser incorporado a un sistema

de este tipo. Simplemente hay que conectarlo con un programa de generación de mallas y con otro de estimación de errores a partir de sus resultados.

El hecho de que en cada momento se genere una malla totalmente nueva hace que el resultado final no dependa de la malla inicial con la que se comienza el proceso de refinamiento. No ocurre así en los refinamientos jerárquicos donde esa independencia es un objetivo todavía no alcanzado y para llegar al cual ya se habla de refinamientos combinados de tipo p y h conduciendo todo ello hacia una complejidad todavía mayor en su programación.

Frente a la alta velocidad de convergencia que se atribuye a los refinamientos de tipo p se puede objetar que ello es a costa de generar matrices de rigidez con grandes anchos de banda y por tanto costosas de invertir. Los refinamientos no jerárquicos conducirán a mallas que quizás precisarán de más grados de libertad, pero su ancho de banda será mucho menor y, en consecuencia, el coste de su inversión también.

Un generador de mallas eficaz será aquel que sea capaz de funcionar con la única información de la forma del contorno y el tamaño máximo de elemento definido en cada subregión. Con estos datos el programa debe ser capaz de llenar de elementos el dominio del problema. Generadores de este tipo son los desarrollados por Peraire [51][52], Löhner [39] y Frey [25] que utilizan elementos triangulares planos. La ventaja de los elementos triangulares para los generadores de este tipo es que con ellos es más fácil ajustarse a cualquier tipo de contorno que con elementos cuadrangulares y por ello son los preferidos para procesos de generación. Ello no constituye ninguna limitación pues los elementos cuadráticos de este tipo funcionan de forma, cuanto menos, comparable a los planos de 8 ó 9 nodos. Generadores de este tipo serán descritos en el Capítulo 3.

2.7.3.1 Definición del remallado

La estrategia de remallado dependerá del tipo de criterio que se utilice para decidir cuando unos resultados son suficientemente exactos. Básicamente, lo que se pretende es que a partir de los resultados obtenidos con una cierta malla, y de la estimación de su error, determinar cual debería ser el tamaño de cada elemento para obtener una malla que produjese resultados con un nivel de error acotado a un cierto valor y que además fuese "óptima" según un determinado criterio.

Como ya se ha comentado, una forma muy usual de limitar la norma energética del error es fijar un cierto porcentaje γ de la energía total de deformación.

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \frac{\gamma}{100} \|\mathbf{u}\|_E \quad (2.7.3)$$

La forma en que se pretende que se distribuya el error sobre todos los elementos de la malla depende del criterio de optimalidad que se utilice para considerar que una malla es óptima. Existen dos criterios distintos para ello que se comentarán en el siguiente subapartado.

A partir del criterio utilizado y del valor γ adoptado se puede averiguar cual debería ser el valor del error obtenido sobre cada uno de los elementos e de la malla. La forma de obtener este valor se explicará al comentar los distintos criterios de optimalidad en el apartado 2.7.3.2. Este valor se podrá expresar también como un cierto porcentaje γ_e para cada elemento. Si se denomina por $\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}$ a la norma del error requerida para cada elemento, entonces se puede expresar:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma_e}{100} \|\mathbf{u}\|_{E_e} \quad (2.7.4)$$

A partir de la expresión (2.4.33) se puede ver que si el orden p de los polinomios usados en las funciones de forma se mantiene constante, la dependencia del error respecto al tamaño de los elementos se puede aproximar por:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^p \quad (2.7.5)$$

Si en la zona ocupada por un cierto elemento de tamaño h_e el error energético calculado vale $\|\mathbf{e}\|_{E_e}$, a partir de (2.7.5) se puede ver que el tamaño que en esa zona debería tener la malla de elementos finitos para obtener un error de valor $\gamma_e \|\mathbf{u}\|_{E_e} / 100$ vendrá dado por la expresión:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/p}} \quad (2.7.6)$$

siendo

$$\xi_e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E_e}}{\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}} = \frac{100\|\mathbf{e}\|_{E_e}}{\gamma_e\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \quad (2.7.7)$$

En caso de que se utilice una norma del error distinta de la energética, tal como las que se definen en las expresiones (2.4.25) a (2.4.32), la ley de evolución del error respecto del tamaño de elemento que se toma es la misma que en (2.7.5). Aunque esta expresión está justificada únicamente para el caso de la norma energética del error parece que su utilización con otras normas es satisfactoria.

La expresión (2.7.6) es válida para los elementos que no estén en contacto con una singularidad. Para mejorar el remallado en las zonas donde existen puntos singulares Zienkiewicz ^{[67][75][76]} propone sustituir, para los elementos en contacto con singularidades, la expresión (2.7.6) por:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/\lambda}} \quad (2.7.8)$$

donde el valor de λ depende del tipo de singularidad con la que se esté tratando. Por razones de tipo práctico se suele tomar $\lambda = 0.5$ ya que en la mayoría de los casos este valor oscila entre 0.5 y 1.

Mediante las expresiones (2.7.6) a (2.7.8) se puede estimar cuales deberían ser los tamaños de cada elemento para que la malla fuese óptima. Utilizando esta información es posible generar una malla completamente nueva que cumpla estos requerimientos y para ello es necesario utilizar un generador de mallas que tenga la capacidad de controlar el tamaño de cada elemento generado.

2.7.3.2 Criterios de optimalidad de la malla

El criterio de optimalidad más comunmente utilizado considera que una malla es óptima cuando la norma del error es la misma para todos los elementos. Es decir, en el caso más usual en que se utilice la norma energética del error, una malla será óptima, para un cierto nivel de error, cuando ocurra que $\|\mathbf{e}\|_{E_e}$ sea igual para todos los elementos.

Para una malla formada por n elementos que cumpla el anterior criterio de optimalidad se cumplirá, en virtud de la propiedad aditiva de las integrales extendidas sobre subdominios, que:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \sum_{e=1}^n \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 = n \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 \quad (2.7.9)$$

Si además el error se acota mediante una expresión como la (2.7.3) debe ocurrir que:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = n \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 = \frac{\gamma^2}{100^2} \|\mathbf{u}\|_E^2 \quad (2.7.10)$$

Normalmente la expresión anterior no se cumplirá a no ser que se esté trabajando con una malla que ya sea óptima. En caso contrario dicha expresión se puede utilizar para determinar cual sería el error requerido para cada elemento. Si se denota dicho error como $\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}$, ello conduce a la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma}{100} \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\sqrt{n}} \quad (2.7.11)$$

Mediante la expresión anterior se puede definir el valor de γ_e utilizado en (2.7.4) para el caso particular de este criterio de optimalidad y se obtiene:

$$\gamma_e = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \quad (2.7.12)$$

Dado que, como se ha comentado en el apartado 2.4.1, la norma energética del error se puede interpretar como un aproximación al error existente en la energía de deformación, de acuerdo con la ecuación (2.4.24) se puede escribir:

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2 \quad (2.7.13)$$

La demostración de (2.7.13) se ha deducido unicamente para los casos en que $\Gamma_N = 0$. No obstante se considera que dicha expresión es una buena aproximación en el resto de los casos.

Mediante (2.7.13) se puede averiguar cual sería el error "óptimo" para cada elemento y para este criterio en particular:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma}{100} \sqrt{\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2}{n}} \quad (2.7.14)$$

Y por lo tanto se podrá aproximar también:

$$\gamma_e = \frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \sqrt{\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2}{n}} \quad (2.7.15)$$

Normalmente se acepta [3][76] que dado un determinado nivel de error global, como el definido por (2.7.3), de todas las posibles mallas que produzcan resultados con ese nivel de error la que cumpla el criterio de optimalidad comentado es la que estará formada por un menor número de elementos. Es decir, esa malla será óptima en el sentido de que producirá un cierto nivel exigido de error a un coste mínimo.

No existe hasta el momento una demostración sólida para la afirmación anterior, pero sí hay diversas justificaciones para casos particulares que indican que la misma es razonable. Una justificación interesante de esta idea realizada por Babuška y Rheinboldt puede verse en [3][5][76].

Por otra parte, hay dos problemas relacionados con la utilización de este criterio:

1. Produce mallas en las cuales el error en la energía de deformación es el mismo para todos los elementos. Normalmente el interés del ingeniero radica principalmente en las zonas donde se producen concentraciones de tensiones e incluso puntos singulares, ya que es ahí donde se producirán las máximas tensiones que son las que debe comprobarse que estén por debajo de un determinado límite. Por otro lado es en esas zonas donde, debido a las bruscas variaciones de tensión, serán necesarias mayores densidades de elementos para acotar el error cometido. Dado que en esas zonas se localizarán más elementos que en el resto y que el error que se produce en cada uno de ellos será el mismo entonces resulta que el error a su vez se acumulará en las zonas con mayor densidad de elementos.

En vista de lo anterior resulta que el error se concentra, aunque de una forma controlada, en las zonas de mayor interés para la interpretación de resultados por parte de un ingeniero y por ello, desde su punto de vista, esa malla no será tan óptima como este criterio puede indicar. Visto de otra manera, este criterio de optimalidad tiene en cuenta unicamente el coste necesario para alcanzar un cierto nivel global de precisión y no la calidad de los resultados en cuanto a su interpretación.

2. La utilización de este criterio juntamente con la técnica de remallado presentada en el apartado 2.7.3.1 no conduce necesariamente a una malla "óptima". Dada una malla inicial con la cual se produce un cierto nivel de error, las expresiones (2.7.6) y (2.7.8) proporcionan los tamaños h de elemento que serían necesarios para obtener el nivel de error requerido en las zona cubiertas por cada una de los elementos de esa malla inicial. Ello no significa que cada uno de los nuevos elementos generados en una nueva malla con esos tamaños proporcione el mismo nivel de error local.

En efecto, supongamos que en la malla inicial existen dos elementos A y B para los cuales los tamaños de elemento que proporciona la expresión (2.7.6) resultan ser h_1 y h_2 respectivamente (ver fig 2.9). Un remallado con estos tamaños producirá una nueva malla en la cual la zona cubierta por el anterior elemento A estará ahora cubierta por n_1 nuevos elementos, y la zona del elemento B lo estará por n_2 elementos. Si se acepta que la expresión (2.7.5) se cumple resultará que con la nueva malla el nivel de error obtenido en las zonas anteriormente ocupadas por los elementos A y B será el mismo y valdrá $\|\mathbf{e}^r\|_E$. Sin embargo, si se acepta que ese error se reparte uniformemente entre los nuevos elementos que ocupan esas zonas se tendrá que para los elementos de la zona A :

$$\|\mathbf{e}^r\|_E^2 = n_1 \|\mathbf{e}\|_{E_{e_1}}^2 \quad (2.7.16)$$

$$\|e\|_{E_{e_1}} = \frac{\|e^r\|_E}{\sqrt{n_1}} \quad (2.7.17)$$

Mientras que para los elementos de la zona B ocurrirá:

$$\|e\|_{E_{e_2}} = \frac{\|e^r\|_E}{\sqrt{n_2}} \quad (2.7.18)$$

Como se ve, el nivel de error de los elementos pertenecientes a una y otra zona no va a ser el mismo tal como exigiría el criterio de optimalidad. De alguna manera, el algoritmo de regeneración lo que proporciona son mallas que cumplen que el nivel de error existente en la zona ocupada por cada una de los elementos de la malla anterior es el mismo. Pero eso no es lo que se toma como criterio de optimalidad. Luego en este aspecto aparece una contradicción entre el criterio de optimalidad y el algoritmo de regeneración de mallas.

El algoritmo de regeneración proporcionará mallas más cercanas al cumplimiento del criterio de optimalidad cuanto más cercanas estén a ello las mallas iniciales.

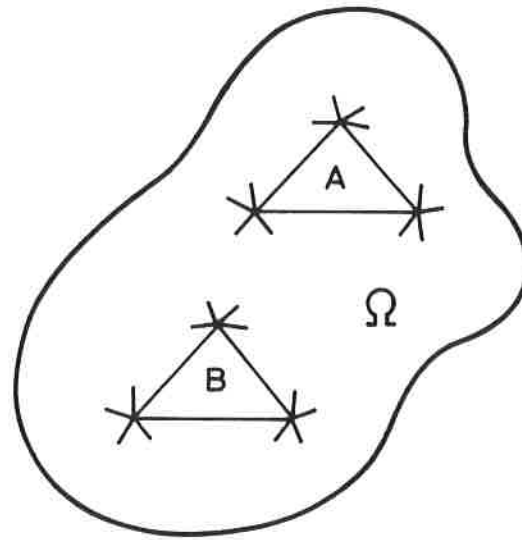
Para evitar los dos inconvenientes comentados se presenta en este trabajo un nuevo criterio de optimalidad. Este consiste en considerar que una malla es óptima cuando el error se reparte de forma uniforme a través de todo el volumen Ω independientemente de la forma y tamaño de los elementos.

Si se acepta de nuevo una limitación del tipo (2.7.3) lo que este criterio exige a una malla "óptima" es que se cumpla

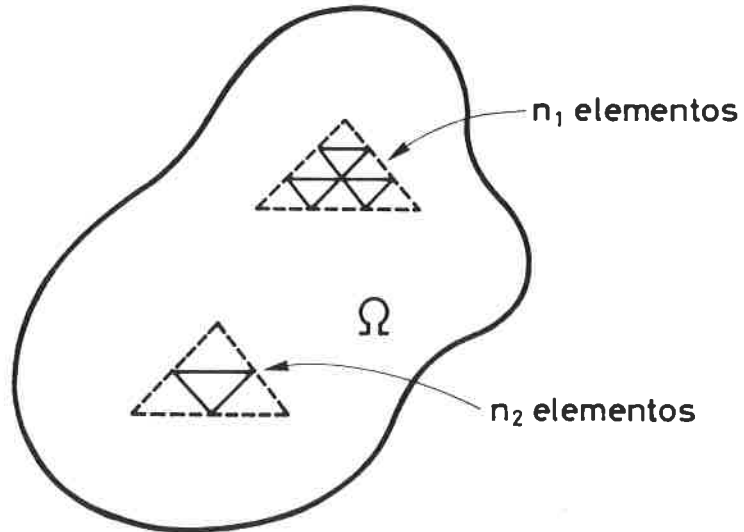
$$\frac{\|e\|_{E_e}^2}{\Omega_e} = \frac{\|e\|_E^2}{\Omega} = \alpha \quad (2.7.19)$$

siendo α una constante.

Mediante este criterio el error requerido en cada uno de los elementos de una malla previa valdrá:



MALLA INICIAL



MALLA FINAL

FIGURA 2.9 Refinamiento de dos elementos distintos A y B.

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \|\mathbf{e}\|_E \sqrt{\frac{\Omega_e}{\Omega}} \quad (2.7.20)$$

Y por tanto utilizando las expresiones (2.7.3), (2.7.4) y (2.7.17) se puede obtener en este caso:

$$\gamma_e = \gamma \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \sqrt{\frac{\Omega_e}{\Omega}} \quad (2.7.21)$$

La expresión anterior es la que se emplearía en este caso para definir el valor γ_e de (2.7.4).

Con este criterio se define un error por unidad de volumen α que se distribuye de forma uniforme a través de todo el espacio Ω . Por ello los resultados obtenidos presentarán el mismo nivel de error para cualquier zona en observación independientemente del número de elementos que exista en ella. Con ello se obtiene un criterio más ingenieril que permite una mejor interpretación de resultados solucionando el primer problema del criterio clásico.

Además, se puede ver que la utilización conjunta de la técnica de regeneración automática con este criterio sí conduce a mallas "óptimas". En efecto, volviendo a la figura anterior se puede ver que la aplicación de este criterio conducirá a una nueva malla donde la zona ocupada por el antiguo elemento A proporcionará un error de valor:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_A}^2 = \alpha \Omega_A \quad (2.7.22)$$

El cual a su vez será la suma de los errores de los n_1 elementos que ocupan la zona. Si se supone que en esos nuevos elementos va a cumplirse el criterio de optimalidad resultará que:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_A}^2 = \sum_{e=1}^{n_1} \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 = \sum_{e=1}^{n_1} \Omega_e \alpha = \alpha \Omega_A \quad (2.7.23)$$

El último razonamiento confirma que la utilización de este criterio si es compatible con la técnica de regeneración automática por lo que su utilización conjunta parece más razonable que en el caso anterior.

El criterio propuesto conducirá a mallas con mayor número de elementos que el criterio clásico ya que no garantiza que este número sea mínimo para un determinado nivel de error global. Sin embargo su utilización está más de acuerdo con lo que un ingeniero espera de unos resultados y presenta menos problemas de coherencia algorítmica.

2.8 EJEMPLO DE UTILIZACIÓN DE UN ESTIMADOR DE ERROR

En este trabajo se ha escogido la expresión (2.6.35), propuesta por Zienkiewicz y Zhu ^[74], para ser utilizada como estimador de error. Dicha elección se basa en las propiedades enumeradas en el apartado 2.6.4 al describir dicho estimador de error. Basicamente estas propiedades se refieren a la sencillez de su implementación en un programa de elementos finitos y a su equivalencia formal con otros tipos de estimadores.

Para comprobar la bondad de los resultados que se pueden obtener al utilizar la expresión (2.6.35) se han preparado dos ejemplos. Ambos corresponden al caso de una ménsula discretizada con mallas de distinta densidad y sometida a dos tipos de carga distintos. En la figura 2.10 se presenta la ménsula con los casos de carga considerados. El primero de ellos corresponde a un ejemplo presentado por Zienkiewicz y Zhu ^[74] al presentar la expresión de su estimador de error.

Las características mecánicas del material que forma la ménsula son $E = 10^5$ y $\nu = 0.3$. No se especifica ningún sistema de unidades por ser los resultados independientes de ellos.

Para cada caso de carga se han utilizado tres mallas distintas con elementos bilineales de 4 nodos. Dichas mallas se presentan en la figura 2.11.

Los resultados de cada caso se presentan en forma de tablas. En cada una de ellas se pueden observar las siguientes cantidades:

G.D.L. Número de grados de libertad de la malla utilizada.

$\|\mathbf{u}\|$ Energía de deformación exacta.

$\|\hat{\mathbf{u}}\|$ Energía de deformación obtenida.

$\|\mathbf{e}\|$ Error exacto en la energía.

$\|\hat{\mathbf{e}}\|$ Error en la energía obtenido.

η Porcentaje exacto de error.

$\hat{\eta}$ Porcentaje de error obtenido.

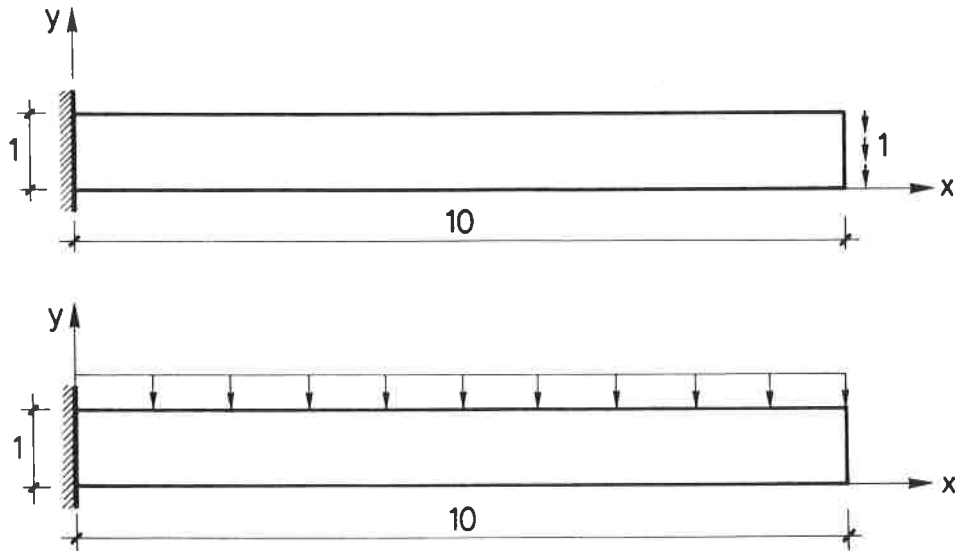


FIGURA 2.10 Definición de ménsula y casos de carga

θ Índice de efectividad ($\|\hat{\mathbf{e}}\|/\|\mathbf{e}\|$).

Los valores exactos de la energía se han obtenido a partir de la teoría de vigas. Si bien dicha teoría es sólo una aproximación, se puede considerar que en este caso sus valores son exactos en comparación con los obtenidos mediante las mallas utilizadas.

Los valores obtenidos se presentan en las tablas 2.1 y 2.2.

Como se puede apreciar en las tablas, la evolución de las diversas cantidades es muy similar en los dos casos. A la vista de las mismas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La energía de deformación obtenida $\|\hat{\mathbf{u}}\|$ va convergiendo hacia su valor exacto $\|\mathbf{u}\|$ a medida que se incrementa el número de grados de libertad utilizado. Dicha evolución es, sin embargo, bastante lenta por lo que

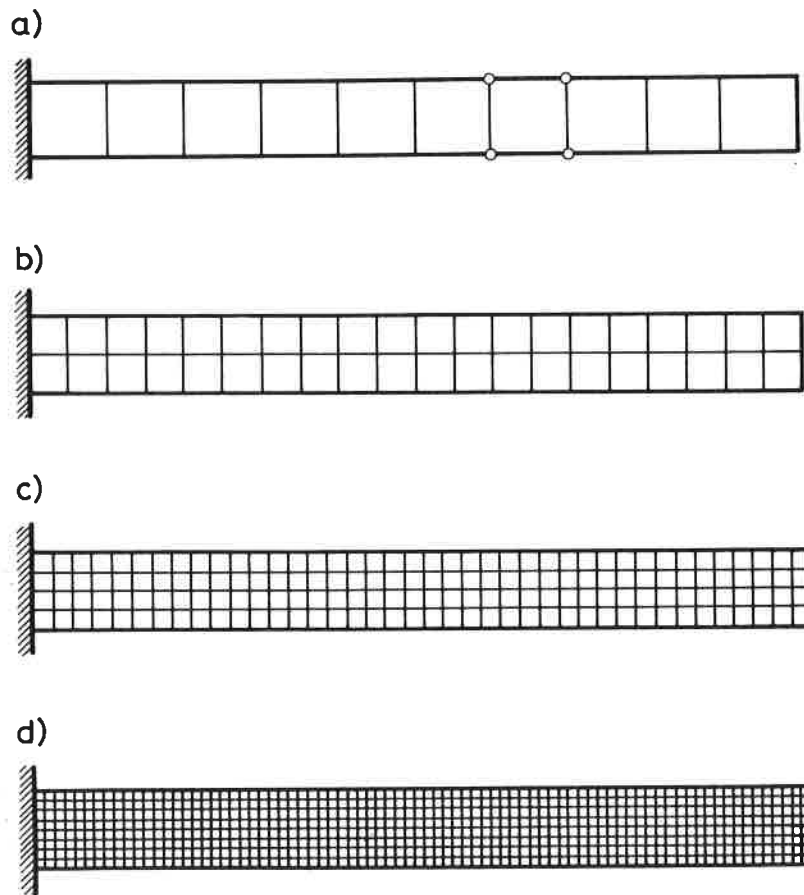


FIGURA 2.11 Mallas utilizadas para el cálculo de la ménsula

sería necesario utilizar un número de elementos realmente muy alto para

G.D.L.	$\ \mathbf{u}\ $	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \mathbf{e}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	η	$\hat{\eta}$	θ
40	0.201	0.165	0.114	0.080	57.1	43.8	0.701
120	0.201	0.189	0.066	0.059	33.4	29.8	0.888
400	0.201	0.198	0.035	0.033	17.9	16.5	0.943
1440	0.201	0.200	0.018	0.017	9.0	8.6	0.959

TABLA 2.1 Valores obtenidos con carga en el extremo de la ménsula

G.D.L.	$\ \mathbf{u}\ $	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \mathbf{e}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	η	$\hat{\eta}$	θ
40	0.781	0.643	0.443	0.301	56.8	42.4	0.678
120	0.781	0.736	0.260	0.225	33.3	29.3	0.865
400	0.781	0.758	0.138	0.128	17.7	16.4	0.922
1440	0.781	0.778	0.072	0.067	9.2	8.6	0.938

TABLA 2.2 Valores obtenidos con carga repartida superior.

conseguir porcentajes pequeños de error.

- La estimación del error es tanto más exacta cuanto más exacta sea la solución obtenida. Tanto la norma del error como su porcentaje van convergiendo hacia sus valores exactos a medida que se va refinando la malla. También se puede observar como el índice de efectividad θ va convergiendo hacia 1.0.

Estos resultados confirman la convergencia asintótica del estimador hacia valores exactos a medida que se va refinando la solución.

Para mallas muy groseras el valor del estimador es suficientemente alto como para detectar que la solución es bastante inexacta aunque el valor del estimador mismo lo sea también. A medida que se va refinando la malla para conseguir buenos resultados la exactitud del estimador es suficiente como para dar una buena idea del grado de error obtenido.

Los anteriores comentarios confirman el buen comportamiento del estimador de error y justifican su utilización.

CAPÍTULO 3

TÉCNICAS PARA LA GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS. ESTADO DEL ARTE

3.1 INTRODUCCIÓN

Dentro de los procesos de análisis por elementos finitos, una de las tareas más laboriosas y menos automatizadas que existen es la de generación de mallas. Esta tarea es quizás, aparte de la interpretación de resultados, la que más tiempo consume por parte de los analistas o ingenieros que utilizan los programas de cálculo. El hecho de que el coste de la hora de trabajo del personal especializado sea cada vez mayor en relación al coste del tiempo de CPU utilizado en un ordenador, hace que sea cada vez más necesario el disponer de programas para la generación automática de mallas que permitan trasladar al ordenador la mayor parte del esfuerzo.

Al hablar de generación de mallas debe pensarse no sólo en la construcción de las mismas sino también en la aplicación, sobre determinados puntos y elementos, de cargas y coacciones. En muchas ocasiones, una vez generada la malla, el averiguar la numeración de los puntos sobre los cuales se aplican las cargas o coacciones es un trabajo lento y pesado por lo que debería ser el propio programa de generación de mallas el encargado de hacerlo.

Hoy en día existen, disponibles para cualquier usuario, una gran variedad de programas de cálculo entre los cuales se puede escoger el más apropiado para un determinado caso. El hecho de que con programas de estructura muy similar se puedan resolver mediante el método de los elementos finitos problemas muy distintos hace que existan códigos apropiados para casi todos los tipos de aplicaciones. Además, siempre es posible modificar estos códigos para resolver problemas no previstos en el momento de su confección.

Sin embargo, la variedad existente de generadores de mallas es mucho más restringida y para muchas aplicaciones no existe ninguno que se adapte a los requerimientos de muchos de los problemas que pueden surgir. Esta limitación

es, en parte, debida a que existe una gran variedad de tipologías distintas en cuanto a geometría y los programas apropiados para algunas de ellas no lo son para las otras.

Por otro lado, los generadores de mallas existentes no permiten en muchos casos controlar de forma suficiente el tamaño de los elementos generados. En la mayoría de las ocasiones se trata de generadores de mallas “estructuradas”, las cuales son muy poco flexibles al intentar fijar los tamaños de los elementos generados en cada zona.

Al utilizar procesos de remallado automático como los descritos en el Capítulo 2. surge la necesidad de disponer de programas de generación de mallas donde en cada punto se pueda controlar el tamaño de elemento generado, el cual vendrá fijado por las técnicas comentadas en el apartado 2.7.3. Procesos de este tipo no se pueden llevar a cabo mediante los generadores de mallas estandar existentes hasta el momento por lo que aparece la necesidad de desarrollar nuevas técnicas más apropiadas para ello.

Debido a las anteriores consideraciones surge la necesidad de desarrollar una nueva metodología para su aplicación práctica tanto en procesos de generación de mallas como de remallados automáticos. Esta metodología se aplicará también en un capítulo posterior a procesos de optimización estructural.

Al hablar de generación de mallas es preciso distinguir entre mallas “estructuradas” y mallas “no estructuradas”. La utilización de mallas estructuradas proviene de los métodos de resolución por diferencias finitas en los cuales los nodos están situados en las intersecciones de dos (o tres) familias de curvas que definen un sistema de coordenadas curvilíneas. Las mallas no estructuradas son mucho más flexibles por el hecho de no estar sometidas a ningún posicionamiento especial de sus nudos. Los algoritmos para generación de mallas no estructuradas han sufrido un fuerte desarrollo en los últimos tiempos [25][39][51][52], sin embargo la utilización de mallas estructuradas está quizás más extendida debido a que su empleo proviene de más antiguo.

Un paso previo a la generación de mallas consiste en la definición de la forma que tiene el dominio que se pretende mallar. En muchas ocasiones son necesarias técnicas de CAD para definir objetos de forma complicada y los programas de generación de mallas deben adaptarse para ser capaces de recibir información de los programas de CAD utilizados.

En este capítulo se hablará, salvo mención específica, de problemas bidimensionales. La mayor parte de las veces, aunque los conceptos sean generalizables a tres dimensiones los costes tanto de programación como de

computación necesarios crecen de forma desproporcionada al pasar al espacio tridimensional siendo necesarias técnicas adicionales de programación para intentar contenerlo.

En primer lugar se comenta una metodología para definir geometrías en dos dimensiones. El tipo de curva utilizado en este trabajo es el B-spline por ser quizás el que admite más posibilidades en cuanto a su definición. Esta metodología se describe con detalle en el Anexo A. de este capítulo.

A continuación se hace una clasificación y descripción de diversos algoritmos para la generación de mallas estructuradas. Posteriormente se describen las dos técnicas más utilizadas para la generación de mallas no estructuradas y se analizan sus virtudes frente a la utilización de mallas estructuradas.

Asimismo, se presenta un caso práctico con la realización de un programa de ordenador capaz de tratar con multitud de geometrías distintas. Éste es el primer paso para la construcción de un programa de regeneración automática de mallas, el cual incorpora tanto las técnicas de estimación de errores descritas en el capítulo anterior como las de generación de mallas que se presentan en este. Asimismo las herramientas obtenidas con la construcción de estos programas se han utilizado para incorporar estas técnicas en procesos de optimización estructural.

En este último apartado se presentan también ejemplos de utilización del generador de mallas construido.

3.2 DEFINICIÓN DE CONTORNOS. B-SPLINES

El primer paso de un proceso de generación de una malla de elementos finitos consiste en definir la forma del contorno del dominio que contiene a la misma. Para ello hay que modelar mediante algún tipo de curva la geometría del objeto que se desea calcular.

En muchas ocasiones la información de que se dispone acerca de la forma del objeto sobre el cual se desea generar una malla, consiste en la definición de una serie de puntos situados sobre su contorno de los cuales se conocen sus coordenadas. En esas ocasiones debe utilizarse algún tipo de curva para interpolar la geometría del contorno entre esos puntos llamados "de definición".

En otras ocasiones el contorno ya viene definido de forma analítica por lo que en ese caso la interpolación de puntos dentro del mismo no requiere la utilización de herramientas especiales para la interpolación. No obstante es importante el utilizar tipos de curvas estandar, como las utilizadas por los programas de CAD, para definir las geometrías pues los programas de generación estarán normalmente preparados para trabajar con ese tipo de curvas.

En el siguiente apartado se describe la utilización de los B-splines paramétricos (descritos en el Anexo A) para la definición de contornos.

3.2.1 Utilización de los B-splines paramétricos para definir contornos

Los B-splines pueden utilizarse para ajustar curvas de cualquier tipo. En particular se pueden utilizar para representar los contornos de las superficies sobre las cuales se quiera generar una malla de elementos finitos. El proceso normal es definir una serie de puntos por los cuales se quiere que pase la curva y definir además una serie de condiciones adicionales sobre continuidades, pendientes, etc. Además de contornos también se pueden definir mediante este tipo de curva agujeros interiores, interfaces de separación entre materiales, líneas de aplicación de cargas, etc.

Dado un conjunto de puntos por los cuales se pretende que pase un B-spline, hay que hallar los vectores que forman su polígono de definición. Cabe la posibilidad de que en algún punto se quiera rebajar el grado de continuidad

de la curva. Este sería el caso de tangencias entre círculo y recta o puntos angulosos. En esos casos habría que añadir una condición adicional por cada grado en que se desee disminuir la continuidad en esos puntos. Así, para cada punto doble se tendrá que añadir una condición adicional, para cada punto triple dos condiciones adicionales, etc. Estas condiciones adicionales suelen fijar características tales como la pendiente o la curvatura de la curva en los puntos donde el grado de continuidad se ha disminuido. Además, en el caso en que la curva sea abierta hay que añadir una condición adicional en cada extremo referente a su pendiente o a su curvatura.

Una vez definido el número de puntos por el cual se desea que pase la curva y en cuales de ellos se quiere disminuir el grado de continuidad lo primero que debe hacerse es definir el conjunto de puntos expandido. Para ello debe tenerse en cuenta que los puntos de derivada segunda discontinua serán puntos dobles, los de derivada primera discontinua serán puntos triples y los puntos de discontinuidad serán puntos cuádruples. Por ejemplo, si se tiene un conjunto de 9 puntos de definición, numerados del 0 al 8, para una curva abierta con las siguientes características.

- El punto número 2 es de curvatura discontinua.
- El punto número 4 es de pendiente y curvatura discontinuas.

el conjunto de puntos expandido será:

$$0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8 \quad (3.2.1)$$

Como puede verse el punto número 2 es doble y el punto número 4 es triple. Asimismo los puntos extremos 0 y 8 también son cuádruples. Los distintos B-splines normalizados definidos mediante este conjunto de puntos se pueden ver en la figura 3.1.

En (3.2.1) se puede ver que existen 14 posibles grupos de 4 intervalos consecutivos. Dado que sobre cada uno de ellos se podrá definir un B-spline existirán pues 14 B-splines distintos, tal como aparecen en la figura 3.1.

Cada uno de esos 14 B-splines vendrá multiplicado por su correspondiente vector \mathbf{r}_i que tendrá tantas componentes como dimensiones tenga el espacio de trabajo. Cada componente de los vectores se puede hallar por separado de forma que el proceso es como hallar una combinación de B-splines para cada una de las dimensiones del espacio. Así para el caso bidimensional primero se hallaría la curva $x(t)$ obteniendo las componentes x de los vectores \mathbf{r}_i y

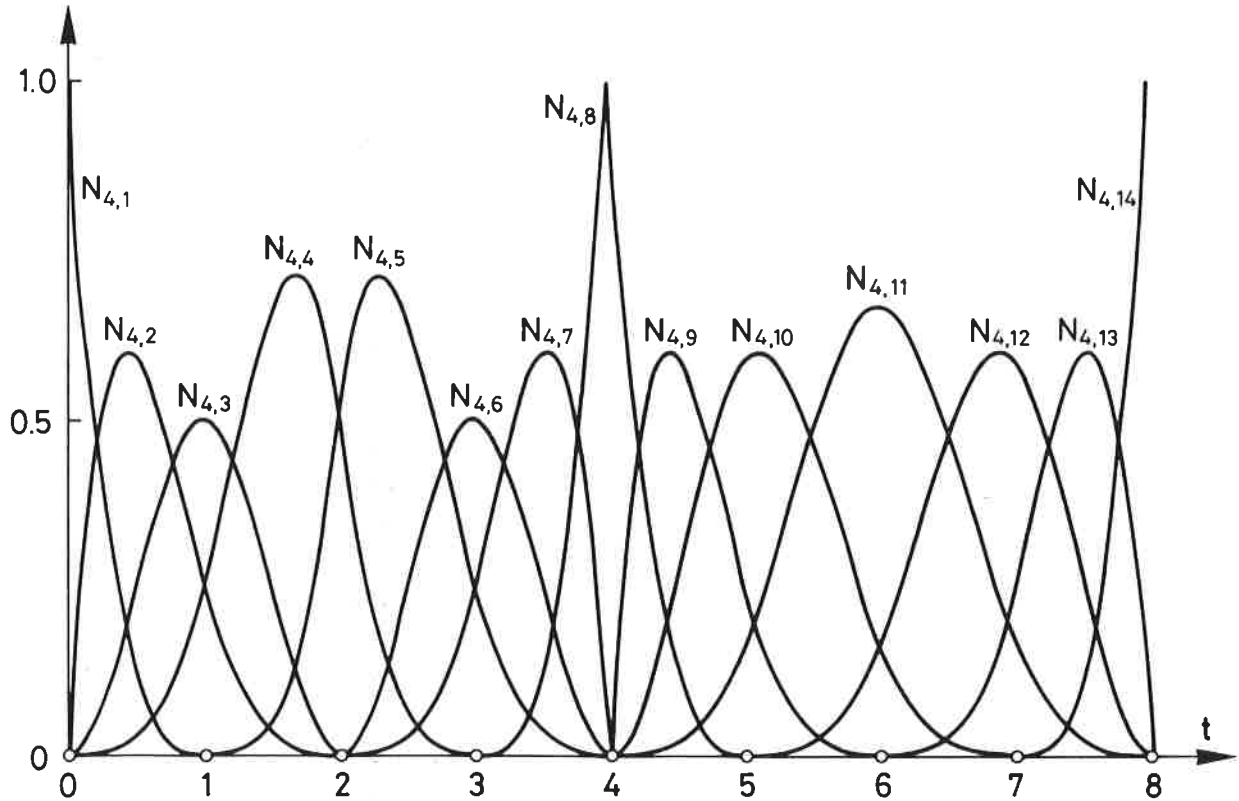


FIGURA 3.1 B-splines normalizados definidos sobre el conjunto de puntos (3.2.1).

luego se hallaría $y(t)$ para las componentes y . Los valores de t correspondientes a cada punto de definición son enteros y son el mismo que su numeración. Las condiciones necesarias para obtener, por ejemplo, las componentes x de la primera combinación de B-splines serán:

- $x(t_i) = x(i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, 8$. Son las 9 condiciones necesarias para que la curva pase por los 9 puntos definidos.
- Una condición sobre la curvatura o la pendiente en el punto 2.
- Dos condiciones sobre curvatura o pendiente en el punto 4.
- Una condición adicional para cada uno de los extremos de la curva acerca de su curvatura o de su pendiente.

El número total de condiciones es igual a 14, lo cual coincide con el número total de coeficientes a determinar. Para las componentes en la dirección y las condiciones son completamente análogas a las anteriores.

Las condiciones necesarias para que la curva pase por los puntos de definición se imponen de forma análoga a la expresión (A.10) pero teniendo en cuenta que los B-splines son normalizados y que se está trabajando con una definición paramétrica de la curva. El hecho de que existan puntos dobles y triples hace que los B-splines que son no nulos para un cierto t_i no sean como en (A.10) los $i + 1$, $i + 2$ y $i + 3$ sino que serán los $i + b + 1$, $i + b + 2$ y $i + b + 3$ siendo b para cada t_i el número total de órdenes de continuidad que se han relajado en los puntos previos. Así en el ejemplo propuesto, para $t_i = 0, 1, 2$ $b = 0$, para $t_i = 3, 4$ $b = 1$ ya que se ha relajado un orden de continuidad en el punto 2 y para $t_i = 5, 6, 7, 8$ $b = 3$ ya que se han relajado dos órdenes de continuidad más en el punto 4. Por tanto la condición para las coordenadas x será del tipo:

$$x_i = r_{i+b+1_x} N_{4,i+b+1}(t_i) + r_{i+b+2_x} N_{4,i+b+2}(t_i) + r_{i+b+3_x} N_{4,i+b+3}(t_i) \quad (3.2.2)$$

y para las coordenadas y será:

$$y_i = r_{i+b+1_y} N_{4,i+b+1}(t_i) + r_{i+b+2_y} N_{4,i+b+2}(t_i) + r_{i+b+3_y} N_{4,i+b+3}(t_i) \quad (3.2.3)$$

En puntos como el 2 o el 4 hay que añadir condiciones adicionales sobre pendientes o curvaturas. Estas condiciones se pueden especificar sobre la parte de la curva inmediatamente anterior al punto o sobre la parte posterior. Las condiciones se referirán a uno u otro lado según se escojan los B-splines con derivadas no nulas a uno u otro lado.

La forma de imponer una cierta pendiente p en un punto de parámetro t consiste en hacer $x'(t) = f * \text{sen}(p)$ y $y'(t) = f * \text{cos}(p)$. La curva tendrá esa pendiente en ese punto para cualquier valor de f utilizado. El efecto que producen las variaciones del factor f se pueden ver en la figura 3.2. En ella se esquematiza un caso en el cual existen dos puntos t_i y t_{i+1} pertenecientes a una curva dada siendo el punto t_i de pendiente prefijada. Se puede ver el efecto de la elección del factor f de forma que el arco de la curva aumenta al aumentar éste. En general es recomendable utilizar valores pequeños de f para evitar la aparición inesperada de bucles.

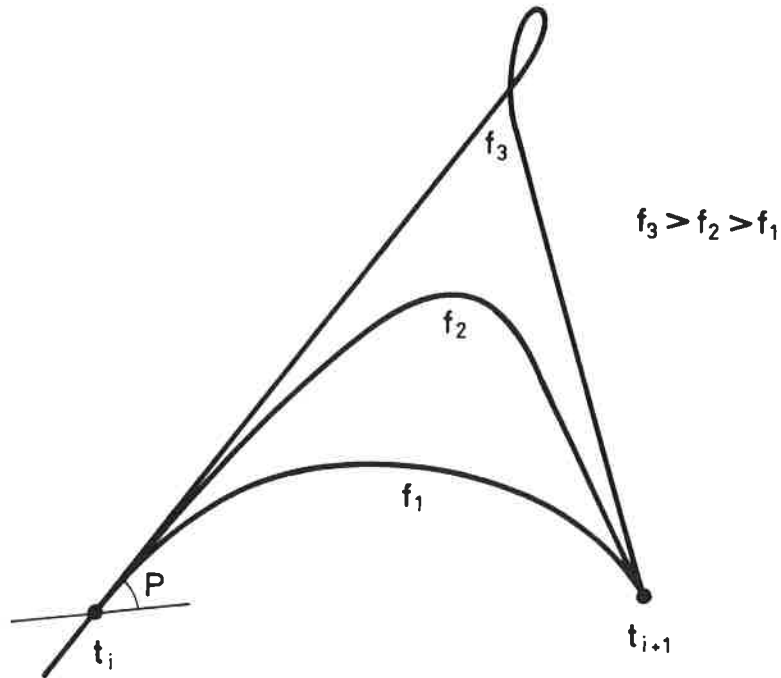


FIGURA 3.2 Efecto de la variación del factor f .

Una forma de imponer que la curvatura sea nula en un determinado punto es obligar que se cumpla:

$$\begin{aligned} x''(t) - hx'(t) &= 0 \\ y''(t) - hy'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

De este modo, para cualquier valor de h se cumplirá que

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0 \tag{3.2.5}$$

que es la condición de curvatura nula. Normalmente se suele tomar $h = 0$ ya que el efecto de su variación afecta muy poco a la forma global de la curva.

Las condiciones mencionadas aplicadas a la curva en la parte anterior a un punto t_i serán pues para el caso de la pendiente prefijada:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+b+1_x} N'_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_x} N'_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_x} N'_{4,i+b+3}(t_i) &= f \operatorname{sen}(p) \\ \mathbf{r}_{i+b+1_y} N'_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_y} N'_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_y} N'_{4,i+b+3}(t_i) &= f \operatorname{cos}(p) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Y para el caso de curvatura nula serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+b+1_x} N''_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_x} N''_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_x} N''_{4,i+b+3}(t_i) - \\ h(\mathbf{r}_{i+b+1_x} N'_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_x} N'_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_x} N'_{4,i+b+3}(t_i)) &= 0 \\ \mathbf{r}_{i+b+1_y} N''_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_y} N''_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_y} N''_{4,i+b+3}(t_i) - \\ h(\mathbf{r}_{i+b+1_y} N'_{4,i+b+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+2_y} N'_{4,i+b+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+b+3_y} N'_{4,i+b+3}(t_i)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Si se denomina c al número de grados que se ha disminuido la continuidad en el punto t_i (1 o 2), y se denota $d = b+c$, entonces las condiciones mencionadas aplicadas a la parte posterior se convierten en

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+d+1_x} N'_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_x} N'_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_x} N'_{4,i+d+3}(t_i) &= f \operatorname{sen}(p) \\ \mathbf{r}_{i+d+1_y} N'_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_y} N'_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_y} N'_{4,i+d+3}(t_i) &= f \operatorname{cos}(p) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

para el caso de pendiente prefijada, y en

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+d+1_x} N''_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_x} N''_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_x} N''_{4,i+d+3}(t_i) - \\ h(\mathbf{r}_{i+d+1_x} N'_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_x} N'_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_x} N'_{4,i+d+3}(t_i)) &= 0 \\ \mathbf{r}_{i+d+1_y} N''_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_y} N''_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_y} N''_{4,i+d+3}(t_i) - \\ h(\mathbf{r}_{i+d+1_y} N'_{4,i+d+1}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+2_y} N'_{4,i+d+2}(t_i) + \mathbf{r}_{i+d+3_y} N'_{4,i+d+3}(t_i)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

para el caso de curvatura nula.

Para puntos como el 2, $c = 1$ mientras que para puntos como el 4, $c = 2$.

Mediante las expresiones anteriores pueden imponerse condiciones como las correspondientes a los puntos de tangencia entre círculo y recta. En esos puntos puede imponerse que la curvatura sea nula o bien en un lado o bien en el otro. En el caso de puntos angulosos se puede controlar la pendiente en las dos vertientes de la curva, o bien la curvatura, o bien la pendiente a un lado y la curvatura en el otro o viceversa. En la figura 3.3 se pueden ver algunos de los casos mencionados.

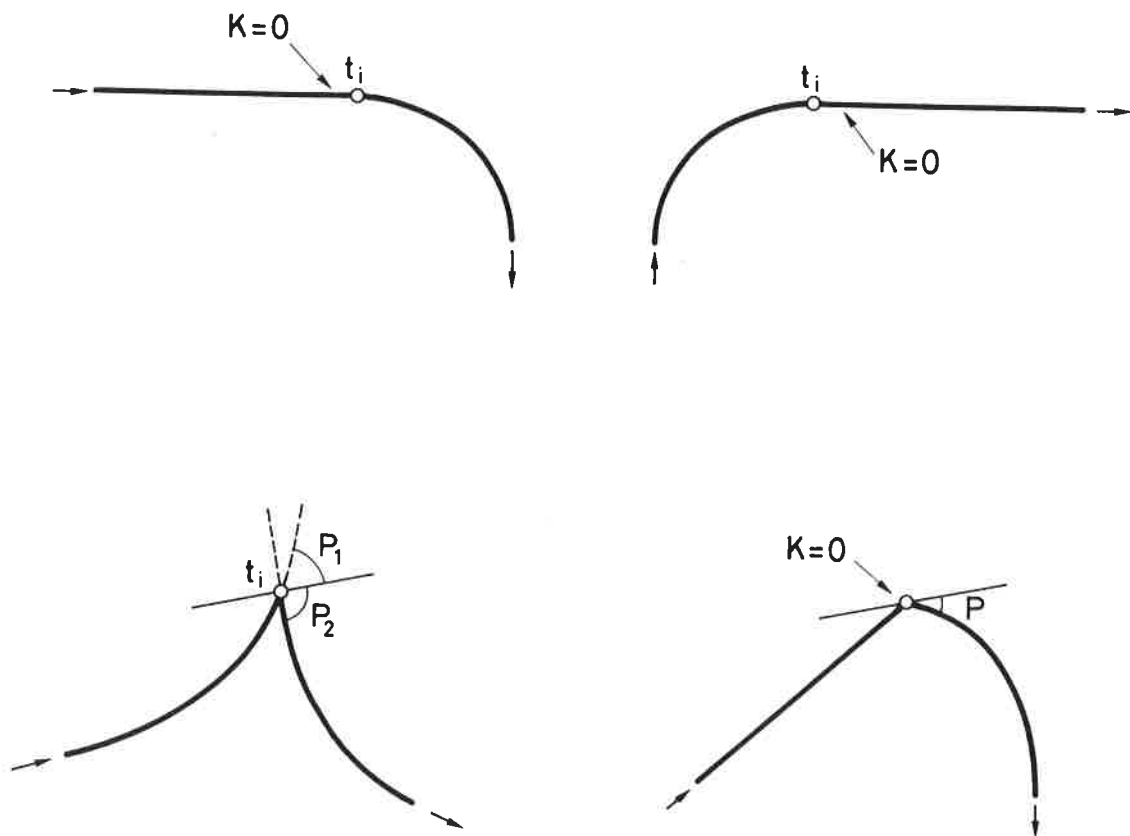


FIGURA 3.3 Posibilidades para la imposición de condiciones según el orden de continuidad de las curvas.

Mediante las condiciones expuestas puede modelarse cualquier tipo de tipología de curva. Asimismo estas expresiones sirven también para imponer las condiciones necesarias en los extremos de la curva teniendo en cuenta que

para el primer punto $t_0 = 0$ será $b = 0$ y $c = 0$ y para el último punto bastará con considerar que se está imponiendo la condición en la parte anterior de la curva correspondiente al último valor de t .

La imposición de todas las anteriores condiciones conduce a un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución proporciona los puntos del polígono de definición de la curva. Al imponer por separado las condiciones anteriores a cada una de las componentes de los vectores r se obtienen tantos sistemas de ecuaciones como número de componentes tengan éstos. Sin embargo todos los sistemas tienen las mismas matrices cambiando entre ellos únicamente los términos independientes. Además en el caso de curvas abiertas estas matrices se pueden organizar de forma que sean tridiagonales por lo que su resolución es muy sencilla.

En el caso de que se quieran generar curvas cerradas hay que añadir al conjunto de puntos expandido un nuevo intervalo que una el último punto definido con el primero. Además hay que controlar el orden de continuidad existente en el primer punto al cerrar la curva sobre sí misma. Por ejemplo, en el caso anterior definido con 9 puntos distintos hay que añadir al final un décimo punto que equivalga al punto número 0 para crear un nuevo intervalo que será el que une los puntos 8 y 0. A continuación hay que expandir el conjunto de puntos por ambos lados pero de forma que los puntos 0 y 9 sean simples y no cuádruples como ocurría en el caso de una curva abierta. El conjunto de puntos expandido que resulta es:

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12 \quad (3.2.10)$$

Los B-splines generados mediante ese conjunto se pueden ver en la figura 3.4. En ella se ve que el punto número 9 equivale al número 0 y que si se enrolla la curva sobre sí misma de forma que los puntos 9 y 0 se unan los B-splines definidos son perfectamente continuos. Por ello los B-splines $N_{4,1}$, $N_{4,2}$, $N_{4,3}$ y $N_{4,12}$ están definidos sobre el intervalo que une los puntos 8 y 0 que es el que cierra la curva. Los valores $-3, -2, -1$ y $9, 10, 11, 12$ sirven únicamente a efectos de definir los B-splines a utilizar pero no corresponden a ningún punto de los que definen la curva. Lo que se hace en realidad es añadir un décimo punto que tiene las mismas coordenadas que el punto 0 y montar el conjunto de puntos expandido de forma que los B-splines existentes en los extremos sean una prolongación continua los unos de los otros.

En este caso se han definido 12 B-splines y por tanto habrá que imponer 12 condiciones para hallar los coeficientes de su combinación. En el caso de curvas cerradas no es necesario imponer condiciones en los extremos de las mismas

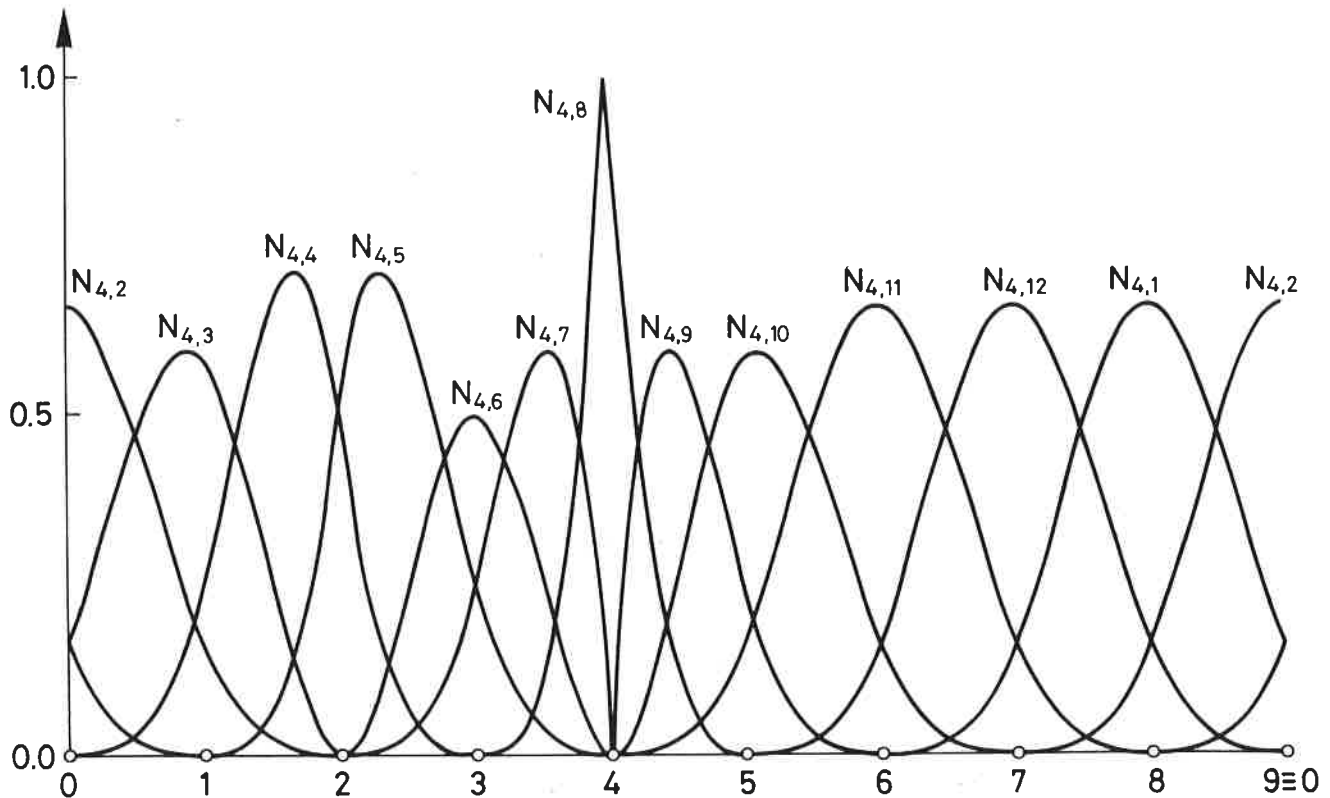


FIGURA 3.4 B-splines generados mediante el conjunto de puntos (3.2.10).

ya que en realidad no existen extremos. Estas condiciones ya se imponen de forma implícita al obligar a que la curva se cierre. Por ello las condiciones a imponer serán exactamente las mismas que en el caso abierto pero eliminando las correspondientes a los extremos del intervalo. Si en el caso anterior existían 14 condiciones, eliminando las de los extremos quedarán 12 que son las que se necesitan en este caso.

Es posible definir tanto el punto 0 como el 8 como dobles o triples para rebajar el orden de continuidad de la curva sobre ellos. Para hacer que el punto 0 sea doble o triple bastará con hacer que tanto éste como el 9 aparezcan como dobles o triples en el conjunto de puntos expandido. Por ejemplo si se quiere que el punto 0 sea doble el conjunto de puntos expandidos será:

$$-2, -1, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11 \quad (3.2.11)$$

Y si se quiere que sea triple bastará con hacer:

$$-1, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10 \quad (3.2.12)$$

Los B-splines correspondientes a esos dos casos se pueden ver en las figuras 3.5 y 3.6.

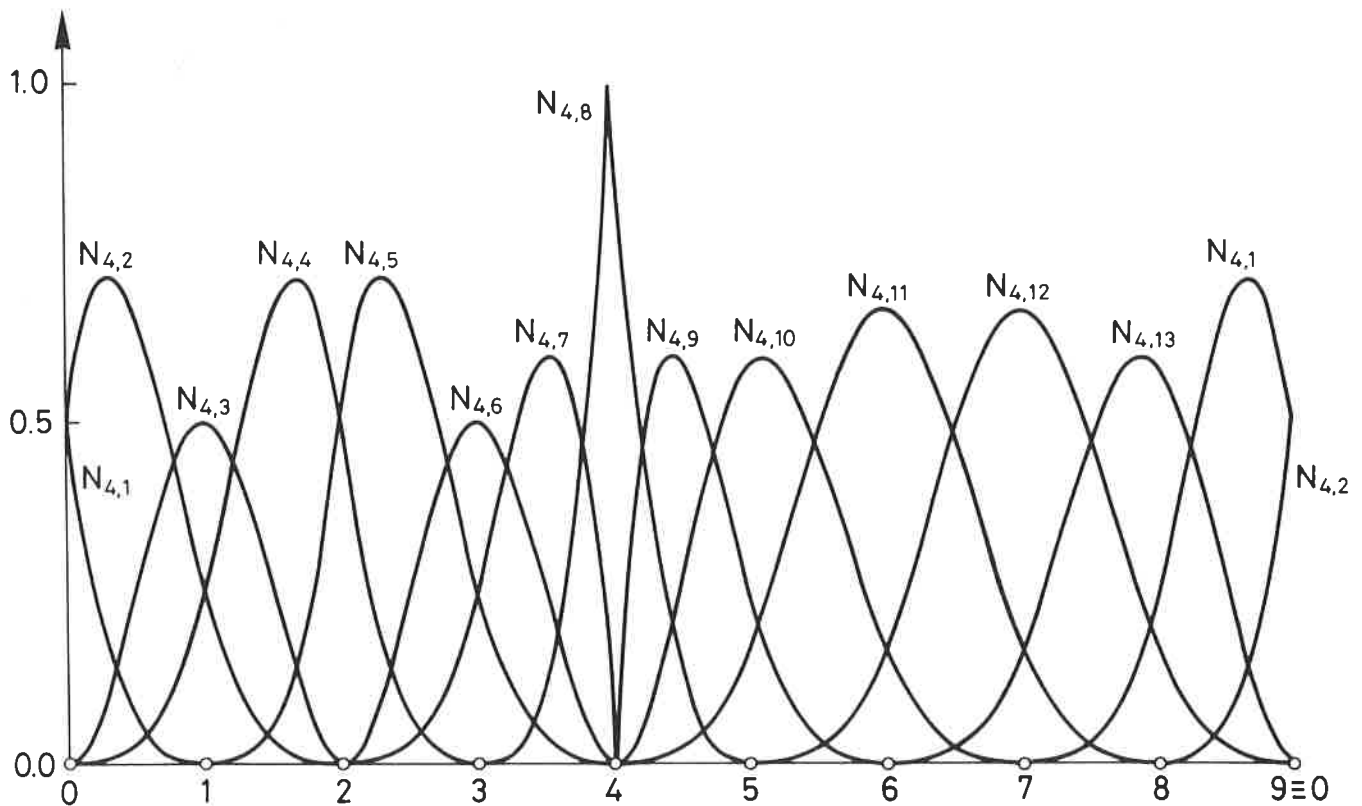


FIGURA 3.5 B-splines generados mediante el conjunto de puntos (3.2.11).

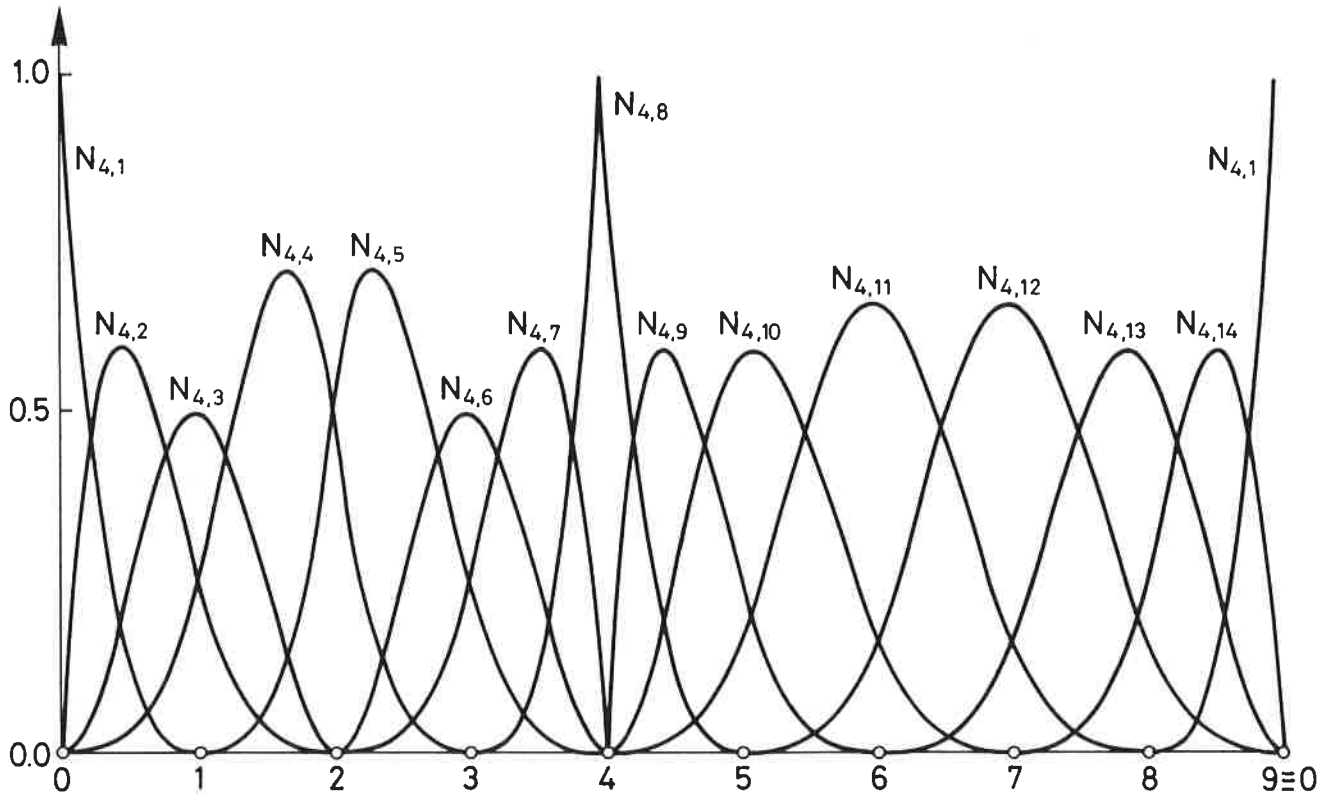


FIGURA 3.6 B-splines generados mediante el conjunto de puntos (3.2.12).

Para hacer que el punto 8 sea doble o triple bastará con repetirlo una vez o dos en el conjunto de puntos expandido. Tanto en este caso como en los anteriores las condiciones sobre esos puntos se imponen de la misma forma que en el caso de curva abierta teniendo en cuenta que el intervalo 9–10 corresponde al tramo de la curva anterior al punto 0.

En el caso de las curvas cerradas los sistemas de ecuaciones que se obtienen al hallar el polígono de definición ya no son tridiagonales sino que aparecen unos pocos términos en la parte inferior izquierda de la matriz que son los correspondientes a los coeficientes de los B-splines que cierran la curva. Si bien se pueden utilizar algoritmos para matrices llenas para resolver esos sistemas de ecuaciones también se pueden idear algoritmos especiales adecuados para esta estructura particular de matriz.

3.3 TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS ESTRUCTURADAS

Las mallas estructuradas se distinguen de las no estructuradas por tener los nodos colocados en las intersecciones de varias familias de curvas que forman un sistema de coordenadas curvilíneas. Los generadores de mallas estructuradas proporcionan precisamente la forma de esas familias de curvas sobre las cuales se colocarán los nodos.

Existen varios tipos de procedimientos para la generación de mallas estructuradas. Una primera clasificación podría ser:

- Resolución de ecuaciones en derivadas parciales.
- Realización de transformaciones conformes.
- Técnicas de interpolación.
- Técnicas de utilización de multibloques.

En los siguientes apartados se describen con cierto detalle las técnicas mencionadas. Éstas se han desarrollado en muchas ocasiones dentro el contexto de los métodos de resolución por diferencias finitas y por ello los algoritmos datan de cuando la utilización de estos métodos estaba en su apogeo. Descripciones más detalladas de estas técnicas se pueden encontrar en [65].

3.3.1 Generación de mallas mediante resolución de ecuaciones en derivadas parciales

Este tipo de técnicas consiste básicamente en resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya solución proporcionará la localización de los nodos de la malla. En principio no parece lógico sugerir que antes de resolver un problema mediante el método de los elementos finitos se resuelva un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para generar la malla necesaria. Este tipo de técnica, sin embargo, no sólo es viable sino que se ha convertido en una de las más utilizadas. Las propiedades de las mallas obtenidas con este tipo de algoritmo están muy relacionadas con las propiedades de las ecuaciones en derivadas parciales que se utilicen para su generación.

Normalmente se utilizan ecuaciones de tipo elíptico para los fines de generación. La razón principal para ello es que este tipo de ecuaciones tiene la propiedad de alisar, dentro del dominio, las condiciones impuestas en el contorno. Ello hace que sus soluciones presenten gradientes e isolíneas que pueden utilizarse para generar una malla.

Las ecuaciones elípticas que se plantean normalmente son del tipo:

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

siendo las funciones

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

En estas ecuaciones x e y se tratan como variables dependientes de forma que en la solución a (3.3.1) las curvas $\xi = cte.$ y $\eta = cte.$ proporcionarán las familias de curvas que generarán la malla. Asimismo, de esta forma es posible imponer las condiciones de contorno en x e y las cuales, en general, serán los valores de las coordenadas de los puntos pertenecientes al contorno. Las funciones P y Q se pueden denominar como funciones "fuente" y permiten controlar la forma de la malla.

Diferenciando las ecuaciones (3.3.2) respecto a ξ y η respectivamente se obtiene:

$$\begin{aligned}\xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi &= 1 \\ \xi_x x_\eta + \xi_y y_\eta &= 0 \\ \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi &= 0 \\ \eta_x x_\eta + \eta_y y_\eta &= 1\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Y resolviendo para ξ_x , ξ_y , η_x y η_y se obtiene:

$$\xi_x = J^{-1} y_\eta, \quad \xi_y = -J^{-1} x_\eta, \quad \eta_x = -J^{-1} y_\xi, \quad \eta_y = J^{-1} x_\xi \quad (3.3.4)$$

siendo el jacobiano de la transformación (3.3.2)

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} \quad (3.3.5)$$

Derivando ahora (3.3.3) se llega a:

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= -J^{-2}y_{\eta}J_x + J^{-2}(y_{\xi\eta}y_{\eta} - y_{\eta\eta}y_{\xi}) \\ \xi_{yy} &= J^{-2}x_{\eta}J_y - J^{-2}(x_{\eta\eta}x_{\xi} - x_{\eta\xi}x_{\eta}) \\ \eta_{xx} &= J^{-2}y_{\xi}J_x - J^{-2}(y_{\xi\xi}y_{\eta} - y_{\xi\eta}y_{\xi}) \\ \eta_{yy} &= -J^{-2}x_{\xi}J_y + J^{-2}(x_{\xi\eta}x_{\xi} - x_{\xi\xi}x_{\eta}) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

siendo

$$\begin{aligned} J_x &= J_{\xi}\xi_x + J_{\eta}\eta_x \\ J_y &= J_{\xi}\xi_y + J_{\eta}\eta_y \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= x_{\xi\xi}y_{\eta} + x_{\xi}y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta}y_{\xi} - x_{\eta}y_{\xi\xi} \\ J_{\eta} &= x_{\xi\eta}y_{\eta} + x_{\xi}y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta}y_{\xi} - x_{\eta}y_{\xi\eta} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Introduciendo estas últimas relaciones en (3.3.1) se llega a un sistema de ecuaciones no lineales acopladas en x e y de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^{-2}(x_{\xi}P + x_{\eta}Q) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^{-2}(y_{\xi}P + y_{\eta}Q) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

siendo

$$\alpha = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2), \quad \beta = (x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}), \quad \gamma = (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) \quad (3.3.10)$$

Las ecuaciones (3.3.9) y (3.3.10) que fueron obtenidas por primera vez por Thompson, Thames y Mastin ^[59] son las ecuaciones de la transformación

entre (ξ, η) y (x, y) . Estas ecuaciones, sujetas a las condiciones de contorno aplicadas, forman el sistema para la generación de mallas. Hay que hacer notar que α , β y γ son los coeficientes de la métrica de dicha transformación y que si $\beta = 0$ en todo el dominio entonces la malla obtenida será ortogonal. A pesar de esto último no es suficiente con hacer $\beta = 0$ en (3.3.9) para conseguir la ortogonalidad y de hecho ello puede generar efectos extraños a lo largo del contorno [65].

La solución del sistema de ecuaciones (3.3.9) se puede obtener utilizando una linealización apropiada y un esquema en diferencias centrales para las derivadas. Para $P = Q = 0$ el residuo sobre una malla cuadrada con $\xi = ih$, ($i = 0, 1, 2, \dots, m - 1, m$), $\eta = jh$, ($j = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$) se puede representar como:

$$\begin{aligned} R_{i,j}^n = & \alpha_{i,j}(\mathbf{u}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n) - \\ & 2\beta_{i,j}(\mathbf{u}_{i+1,j+1}^n + \mathbf{u}_{i-1,j+1}^n + \mathbf{u}_{i+1,j-1}^n + \mathbf{u}_{i-1,j-1}^n) + \\ & \gamma_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j+1}^n - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= (x_{i,j+1}^n - x_{i,j-1}^n)^2 + (y_{i,j+1}^n - y_{i,j-1}^n)^2 \\ \beta_{i,j} &= (x_{i+1,j}^n - x_{i-1,j}^n)(x_{i,j+1}^n - x_{i,j-1}^n) + (y_{i+1,j}^n - y_{i-1,j}^n)(y_{i,j+1}^n - y_{i,j-1}^n) \\ \gamma_{i,j} &= (x_{i+1,j}^n - x_{i-1,j}^n)^2 + (y_{i+1,j}^n - y_{i-1,j}^n)^2 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

En los esquemas anteriores $\mathbf{u} = (x, y)$ y $\mathbf{u}_{i,j}^n$ representan las incógnitas en el punto (i, j) en la iteración número n . La solución a las ecuaciones (3.3.9) se puede obtener utilizando un esquema de tipo:

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{u}_{i,j}^n + \omega R_{i,j}^n \quad (3.3.13)$$

donde ω es un parámetro de relajación cuyo valor debe ser $1 \leq \omega \leq 2$. Es importante resaltar el hecho de que el esquema en diferencias finitas comentado se resuelve sobre un cuadrado sobre el cual el generar la malla de diferencias finitas es una tarea trivial. Por ello, el procedimiento es muy generalizable y el único punto que dependerá de la geometría del contorno que se quiera

mallar para que la malla generada se ajuste a su forma será la aplicación de las condiciones de contorno al esquema de diferencias finitas.

El proceso normal de generación de una malla mediante esta técnica constará entonces de los siguientes pasos:

1. Generar una malla dentro del espacio (ξ, η) en el cuadrado unidad $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ para resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (3.3.9) mediante el método de las diferencias finitas. Cada punto de esa malla corresponderá a un nodo en la malla de elementos finitos obtenida al final.
2. Resolver las ecuaciones (3.3.9) mediante el esquema en diferencias finitas (3.3.13) aplicando las condiciones de contorno convenientes, de forma que para los valores de ξ y de η correspondientes a los lados del cuadrado unidad se obtenga la solución (x, y) correspondiente a las coordenadas del contorno del dominio que se desea mallar.

Un procedimiento similar se puede utilizar para incluir las funciones fuente P y Q . Estas funciones, llamadas a menudo funciones de control de la malla, se pueden diseñar para conseguir la flexibilidad que en ocasiones se requiere para controlar el espaciamiento entre los puntos de las mallas generadas. Efectos típicos de como actúan las funciones P y Q se pueden ver en la figura 3.7.

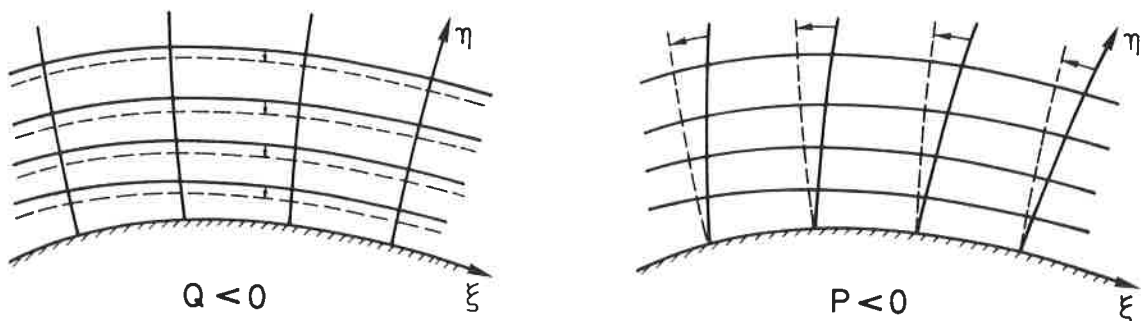


FIGURA 3.7 Efectos de la utilización de las funciones fuente P y Q .

Valores negativos de Q hacen que las líneas coordenadas de η tiendan a moverse en la dirección de sus valores decrecientes. Asimismo, valores negativos de P hacen que las líneas coordenadas de ξ tiendan a moverse también en su dirección decreciente. Thompson et al [60] desarrollaron una serie de funciones que se pueden usar para atraer o repeler la malla hacia líneas o puntos. Una función típica es

$$P(\xi, \eta) = - \sum a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) e^{-c_i |\xi - \xi_i|} - \sum b_i \text{sign}(\xi - \xi_i) e^{-d_i ((\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_j)^2)^{1/2}} \tag{3.3.14}$$

La forma para Q sería muy similar. El efecto de la amplitud de a_i es atraer las líneas coordenadas de ξ hacia la línea de ξ_i , mientras que el efecto de b_i es atraer dichas líneas hacia el punto (ξ_i, η_j) . Estos efectos se pueden observar en la figura 3.8.

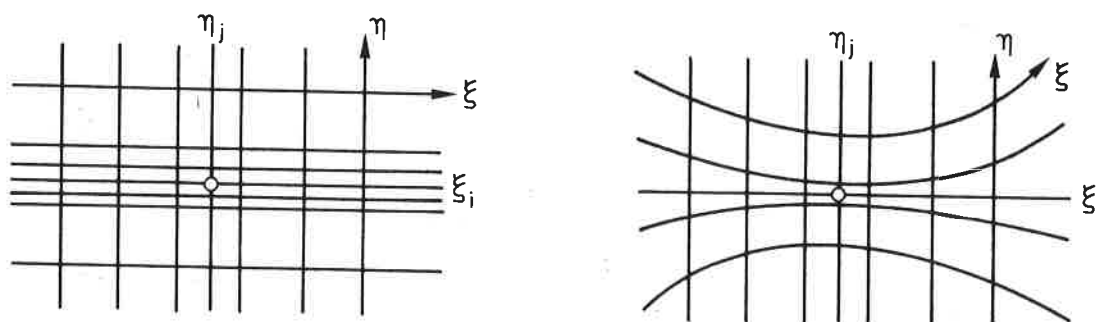


FIGURA 3.8 Efectos de la magnitud de los coeficientes a_i y b_i en la expresión (3.3.14).

El mayor problema para la generación automática mediante estas técnicas es la elección de las funciones de control y de los parámetros asociados con ellas. Se han desarrollado métodos automáticos para ello y quizás el más potente sea el propuesto por Thomas y Middlecoff [58]. La idea básica es utilizar la distribución de puntos sobre el contorno para calcular las funciones de control las cuales se interpolan después dentro del dominio. Usando ecuaciones elípticas

y suponiendo que las derivadas segundas de x y de y respecto a ξ y a η son nulas a través del contorno estos autores proponen utilizar sobre el mismo:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{x_{\xi}x_{\xi\xi} + y_{\xi}y_{\xi\xi}}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} && \text{a lo largo del contorno } \eta = cte. \\ Q &= -\frac{x_{\eta}x_{\eta\eta} + y_{\eta}y_{\eta\eta}}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} && \text{a lo largo del contorno } \xi = cte. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Entonces, dada una distribución de puntos sobre el contorno, las funciones de control se pueden calcular para reflejar esa distribución en el interior del dominio.

Todos los pasos de la técnica descrita se pueden extrapolar al caso tridimensional sin más que añadir una nueva dimensión.

También es posible utilizar ecuaciones de tipo parabólico o bien hiperbólico para generar las líneas coordenadas de la malla si bien su empleo está menos generalizado que en el caso elíptico.

La utilización de técnicas de este tipo puede servir para generar mallas sobre dominios de forma relativamente compleja. Sin embargo su utilización es prácticamente imposible cuando dentro de esos dominios aparecen agujeros, o bien interfaces entre diversos materiales, sobre los cuales se pretende que exista una línea de nudos. La única forma de tratar con ese tipo de dominios para generar mallas estructuradas es, como se verá más adelante, la utilización de multibloques.

3.3.2 Generación de mallas mediante transformaciones conformes

El problema de generar una malla sobre un dominio geoméricamente complicado se puede trasladar, mediante algún tipo de transformación, a generar una malla sobre otro dominio de forma mucho más simple. Quizás la técnica más sencilla y extendida para hacer este tipo de transformaciones es la utilización de las transformaciones de los elementos finitos isoparamétricos entre el espacio real (x, y, z) y el espacio isoparamétrico (ξ, η, ζ) . Esta técnica consiste en subdividir el dominio del problema en uno o más macroelementos,

cada uno de los cuales es a su vez transformado en un cuadrado o un cubo unidad en el espacio isoparamétrico. En dicho espacio la generación de una malla es trivial y deshaciendo la transformación se puede obtener una malla en el espacio real.

En muchas ocasiones una técnica tan simple no es suficiente y se utilizan otros tipos de transformación como las transformaciones conformes de variable compleja. Por ejemplo, si el contorno de un cierto dominio se transforma en un círculo centrado en el origen del plano complejo $z = \rho e^{i\theta}$, la líneas $\rho = cte.$ y $\theta = cte.$ formarán una malla ortogonal al deshacer la transformación. Dada una geometría particular, el problema estriba en hallar la transformación que la convierta en un dominio sencillo sobre el cual se pueda construir fácilmente una malla.

En muchas ocasiones es importante conseguir que la malla obtenida sea más o menos ortogonal, es decir, que los lados de los elementos se corten perpendicularmente en los nudos. Esta característica es más deseable para resolver problemas mediante en esquemas de diferencias finitas que mediante el método de los elementos finitos. No obstante, con ello se consigue controlar la forma de los elementos evitando así su distorsión. Los métodos de generación mediante transformaciones conformes permiten crear mallas ortogonales. Más información sobre este tema puede encontrarse en las referencias [65].

El concepto principal de una transformación es definir una relación entre un dominio D , definido en el plano (x, y) , y un dominio rectangular R sobre el plano (ξ, η) . La definición geométrica de esa relación entre D y R vendrá dada por las componentes del tensor de métrico g_{ij} ($i, j = 1, 2$). De la definición de transformación conforme [10] se deduce que las componentes del mencionado tensor deben cumplir:

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} \\ g_{12} = g_{21} = 0 \end{cases} \quad (3.3.16)$$

Además las relaciones de la transformación $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ deben cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann en el dominio R

$$\begin{cases} x_{\xi} = y_{\eta} \\ x_{\eta} = -y_{\xi} \end{cases} \quad (3.3.17)$$

y la condición de integrabilidad obliga a que se cumpla:

$$\nabla^2 x = \nabla^2 y = 0 \quad (3.3.18)$$

Esta técnica de generación consiste en buscar expresiones que transformen el dominio D en otro mucho más simple R y que además cumplan las condiciones (3.3.16) – (3.3.18). En el caso de que exista una transformación de este tipo cualquier malla ortogonal generada sobre el dominio R mantendrá su ortogonalidad al deshacer la transformación y pasar a D .

Las condiciones (3.3.17) imposibilitan el fijar de forma simultánea x e y en el contorno de R para solucionar las ecuaciones (3.3.18). Una posibilidad es fijar en las caras $\xi = cte.$ del rectángulo R el valor de la función x y por tanto el valor de la derivada y_ξ , mientras que en las caras $\eta = cte.$ se fija la función y y las derivadas x_η .

En el caso de transformaciones conformes no es posible especificar la distribución de los puntos de la malla debido a las restricciones que deben cumplir las componentes del tensor de la métrica g_{11} y g_{22} . Una técnica algo más flexible consiste en relajar la condición $g_{11} = g_{22}$ de forma que se convierta en:

$$g_{11} = F^2(\xi, \eta)g_{22}, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (3.3.19)$$

La función F llamada a veces función de dilatación permite una cierta flexibilidad sin la pérdida de ortogonalidad. Las transformaciones conformes son un caso particular de (3.3.19) en el cual $F = 1$. Las ecuaciones análogas a (3.3.17) y (3.3.18) se convierten entonces en:

$$\begin{cases} Fx_\xi & = y_\eta \\ x_\eta & = -Fy_\xi \end{cases} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(F \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} + \frac{\partial \left(\frac{1}{F} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \left(F \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} + \frac{\partial \left(\frac{1}{F} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Esta técnica es todavía restrictiva en lo que se refiere a la imposición de la forma del contorno y además requiere de una definición adecuada de la

función F . En [61] se describe una información más detallada sobre este tipo de transformaciones.

Existen una serie de transformaciones ya clásicas que permiten trabajar de forma sencilla con ciertas tipologías. Así por ejemplo Baldwin y Schreyer presentan en [11] una transformación que permite convertir cualquier dominio limitado por un contorno poligonal de n lados en un polígono regular de igual número de lados en el plano complejo. La generación de una malla sobre este último permite, al deshacer la transformación, generar una malla en el dominio original.

Otra transformación ya clásica en el campo de la dinámica de fluidos es la de Joukowski [31], la cual convierte toda una familia de perfiles de ala de avión en un círculo en el plano complejo.

Estas técnicas no son directamente extrapolables al espacio tridimensional pues su fundamento estriba en realizar transformaciones entre el plano complejo y el plano real siendo ambos bidimensionales. No obstante existen trabajos en este sentido para trabajar con una tercera dimensión [10].

3.3.3 Generación de mallas mediante esquemas de interpolación

Las técnicas de generación mediante esquemas de interpolación permiten establecer descripciones para las transformaciones entre el dominio computacional y el dominio físico. El método más clásico es quizás el de las transformaciones conformes, descrito en el apartado anterior, el cual proporciona expresiones para transformar ciertos tipos de geometría proporcionando mallas ortogonales. No obstante estos métodos no permiten en muchas ocasiones especificar la posición de los puntos del contorno y están además limitados a dominios bidimensionales.

Para solventar las anteriores restricciones se han desarrollado una serie de técnicas que se basan en la interpolación de geometrías entre contornos. Estas técnicas se denominan también en muchas ocasiones técnicas de generación algebraicas.

El caso más sencillo es el de la interpolación unidireccional. Este caso sería aquel en el cual la generación de mallas se puede ver como una interpolación de curvas entre puntos pertenecientes a contornos opuestos. Por ejemplo, en

la figura 3.9 dados dos contornos opuestos cuya expresión sea $R_1(\xi)$ y $R_2(\xi)$ la expresión de la función $R(\xi, \eta)$ que proporcionaría para cada $\eta = cte.$ una línea de interpolación entre dos puntos pertenecientes cada uno de ellos a un contorno sería:

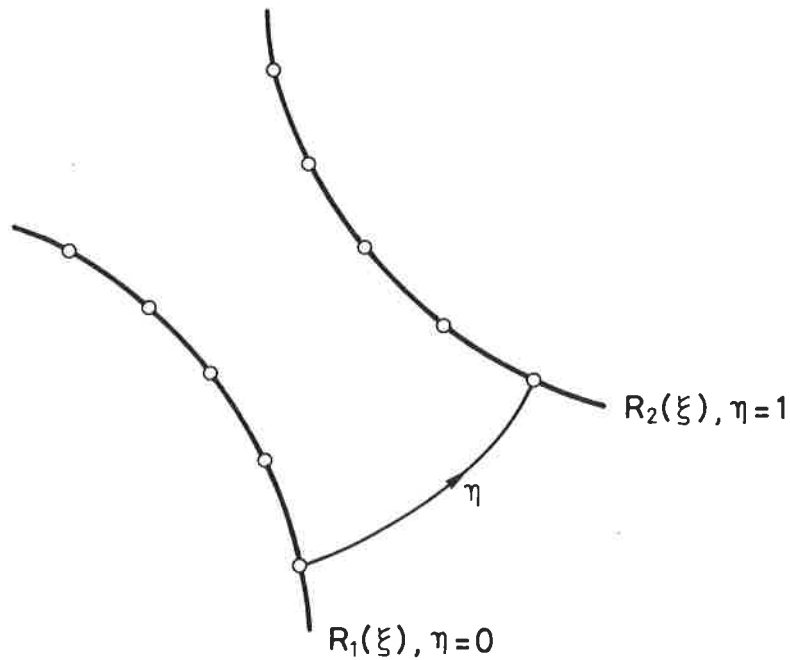


FIGURA 3.9 Interpolación de curvas entre contornos opuestos.

$$R(\xi, \eta) = R_1(\xi) + \eta(R_2(\xi) - R_1(\xi)) \quad (3.3.22)$$

Para $\eta = 0$ se recupera el contorno R_1 y para $\eta = 1$ se recupera R_2 .

Si en cada línea de interpolación se pretende introducir puntos adicionales la expresión (3.3.22) puede expandirse utilizando para ello las técnicas de interpolación de los polinomios de Lagrange.

Si además de fijar puntos sobre el contorno se requiere fijar información sobre las derivadas deben utilizarse también polinomios de orden suficientemente alto como para poder imponer todas las condiciones. Si se quiere

especificar el valor de las derivadas las interpolaciones dejan de basarse en los polinomios de Lagrange para pasar a hacerlo en los polinomios de Legendre. Dados los gradientes y los puntos sobre dos caras opuestas del contorno, la expresión de la interpolación sería:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\xi, \eta) = & (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\mathbf{R}_1(\xi) + \eta^2(3 - 2\eta)\mathbf{R}_2(\xi) + \\ & \eta(1 - \eta)^2 \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \eta} + \eta^2(\eta - 1) \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Para $\eta = 0$ se recupera, al igual que anteriormente, la expresión de \mathbf{R}_1 y para $\eta = 1$ se recupera \mathbf{R}_2 . Asimismo, para $\eta = 0$ la expresión de $\partial \mathbf{R} / \partial \eta$ resulta ser igual a $\partial \mathbf{R}_1 / \partial \eta$ y para $\eta = 1$ es igual a $\partial \mathbf{R}_2 / \partial \eta$, con lo cual se cumplen las condiciones impuestas en el contorno. La dificultad del método anterior suele ser la especificación de los gradientes en el contorno.

En muchas ocasiones no es suficiente especificar los datos del contorno unicamente sobre dos caras opuestas. En estos casos lo que se tiene es información sobre 4 caras en dos dimensiones o sobre 6 en tres dimensiones. En estos casos los esquemas de interpolación deben preservar toda la información existente sobre todo el contorno. Si en el caso bidimensional se expresan las dos posibles interpolaciones unidireccionales se obtienen:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a(\xi, \eta) &= (1 - \xi)\mathbf{R}(0, \eta) + \xi\mathbf{R}(1, \eta) \\ \mathbf{R}_b(\xi, \eta) &= (1 - \eta)\mathbf{R}(\xi, 0) + \eta\mathbf{R}(\xi, 1) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Sin embargo la suma de ambas interpolaciones $\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b$ no cumple las condiciones en el contorno. Por ejemplo para $\eta = 0$:

$$\mathbf{R}_a(\xi, 0) + \mathbf{R}_b(\xi, 0) = (1 - \xi)\mathbf{R}(0, 0) + \xi\mathbf{R}(1, 0) + \mathbf{R}(\xi, 0) \neq \mathbf{R}(\xi, 0) \quad (3.3.25)$$

En el resto de los contorno se presenta el mismo problema. Para solucionar lo anterior se añade un tercer término \mathbf{R}_c a la combinación anterior cuya expresión es:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c(\xi, \eta) = & (1 - \xi)(1 - \eta)\mathbf{R}(0, 0) + \xi(1 - \eta)\mathbf{R}(1, 0) + \\ & (1 - \xi)\eta\mathbf{R}(0, 1) + \xi\eta\mathbf{R}(1, 1) \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Entonces la fórmula de interpolación obtenida será $\mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b - \mathbf{R}_c$ y su expresión completa se podrá expresar como:

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = [(1 - \xi) \quad \xi] \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0, \eta) \\ \mathbf{R}(1, \eta) \end{bmatrix} + [\mathbf{R}(\xi, 0) \quad \mathbf{R}(\xi, 1)] \begin{bmatrix} 1 - \eta \\ \eta \end{bmatrix} - \\ [(1 - \xi) \quad \xi] \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0, 0) & \mathbf{R}(0, 1) \\ \mathbf{R}(1, 0) & \mathbf{R}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \eta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

Este tipo de interpolación se denomina en ocasiones interpolación transfinita y a las funciones ξ , $(1 - \xi)$, η y $(1 - \eta)$ se les llama funciones de combinación.

Las ideas anteriores se pueden extender para incluir también información sobre las pendientes deseadas sobre el contorno. En ese caso, la interpolación entre caras de $\xi = cte.$ se escribe como:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{f}(\xi_1, \eta) \alpha_1(\xi) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi} \right|_{(\xi_1, \eta)} \alpha_2(\xi) + \mathbf{f}(\xi_2, \eta) \alpha_3(\xi) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi} \right|_{(\xi_2, \eta)} \alpha_4(\xi) \quad (3.3.28)$$

y la interpolación entre caras de $\eta = cte.$ como:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}(\xi, \eta_1) \beta_1(\eta) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta_1)} \beta_2(\eta) + \mathbf{f}(\xi, \eta_2) \beta_3(\eta) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} \right|_{(\xi, \eta_2)} \beta_4(\eta) \quad (3.3.29)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede escribir la interpolación dentro de todo el dominio como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_a \mathbf{f}_b \quad (3.3.30)$$

donde $\mathbf{f} = (x, y)$ es la función que proporciona las coordenadas del espacio real, y las funciones α_i deben cumplir que:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1(\xi_1) = 1 & \alpha_1(\xi_2) = 0 & \alpha'_1(\xi_1) = 0 & \alpha'_1(\xi_2) = 0 \\ \alpha_2(\xi_1) = 0 & \alpha_2(\xi_2) = 0 & \alpha'_3(\xi_1) = 1 & \alpha'_2(\xi_2) = 0 \\ \alpha_3(\xi_1) = 0 & \alpha_3(\xi_2) = 1 & \alpha'_3(\xi_1) = 0 & \alpha'_3(\xi_2) = 0 \\ \alpha_4(\xi_1) = 0 & \alpha_4(\xi_2) = 0 & \alpha'_4(\xi_1) = 0 & \alpha'_4(\xi_2) = 1 \end{array} \quad (3.3.31)$$

Las funciones β_i deben cumplir condiciones análogas a las anteriores. En este caso las funciones de combinación serán las α_i y las β_i que son las que combinan de forma adecuada la información que se conoce acerca del contorno.

Si en (3.3.30) se sustituyen respectivamente los valores $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$ y $\eta = 1$ se recuperarán las expresiones de la función f definidos sobre esos contornos. Asimismo, si se sustituyen esos valores en las derivadas $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ se recuperarán también los valores definidos para esas derivadas en el contorno.

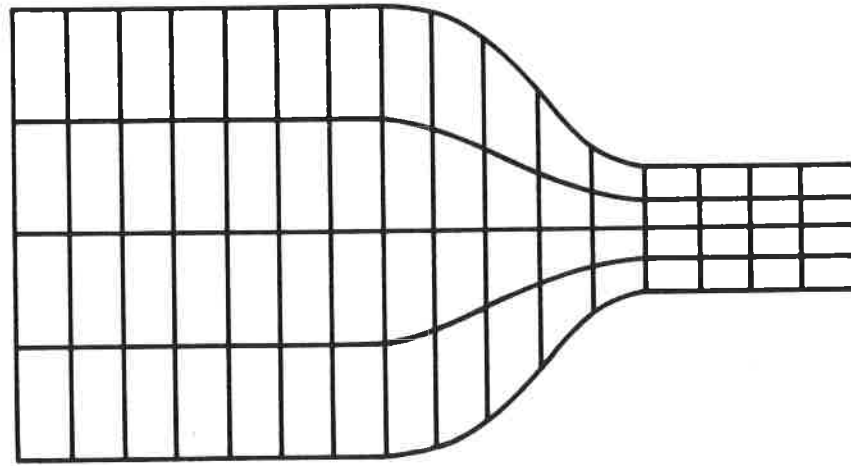
Esta formulación es fácilmente extrapolable a tres dimensiones. Más detalles sobre la misma se pueden consultar en Gordon y Hall [28] y en Eriksson [18][19].

Una vez hallada la expresión de la función f , la generación de la malla consiste unicamente en construir una retícula sobre el cuadrado unidad $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ y mediante la expresión (3.3.30) hallar las coordenadas (x, y) correspondientes a cada punto de la retícula de coordenadas (ξ, η) . Esas coordenadas serán las de los nodos que formarán la malla. Asimismo, los lados de los elementos serán las líneas del espacio (x, y) correspondientes a las líneas $\xi = cte.$ y $\eta = cte.$ del cuadrado unidad.

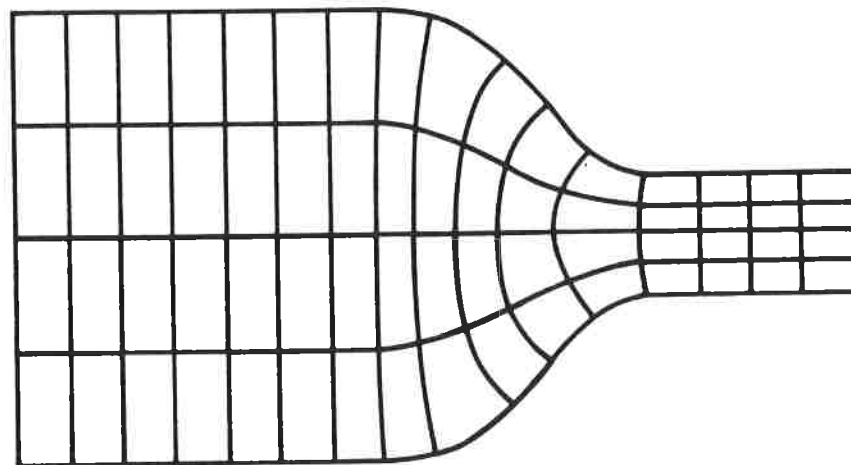
El éxito de esta técnica reside en una elección adecuada de las funciones de combinación α y β y de las derivadas en los contornos. El posicionamiento de los puntos dentro de la malla se puede controlar también mediante las funciones mencionadas.

Un ejemplo bastante simple se puede observar en la figura 3.10.

- En el caso a) las líneas verticales de la malla son oblicuas al contorno. En este caso se ha utilizado una simple interpolación lineal como la de (3.3.27) sin ningún control sobre las pendientes.
- En el caso b) se presenta una malla sobre la misma geometría pero se ha generado con la inclusión de los valores de las pendientes en el contorno. En este caso se ha utilizado la formulación descrita en (3.3.28) – (3.3.31). Los valores de las pendientes se determinan a partir de la dirección de la normal en cada punto del contorno. Las funciones de combinación que se usan para casos como este son de la forma:



a)



b)

FIGURA 3.10 Ejemplos de la elección de las funciones de combinación α y β .

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (-2(1 - \xi)^3 + 3(1 - \xi)^2)e^{-a\xi^2} \\
\alpha_2 &= (-(1 - \xi)^3 + (1 - \xi)^2)e^{-a\xi^2} \\
\alpha_3 &= (2(1 - \xi)^3 - 3(1 - \xi)^2 + 1)e^{-a(1-\xi)^2} \\
\alpha_4 &= (-(1 - \xi)^3 + 2(1 - \xi)^2 - (1 - \xi))e^{-a(1-\xi)^2}
\end{aligned}
\tag{3.3.32}$$

donde $0 \leq \xi \leq 1$. Para β las expresiones son idénticas cambiando ξ por η .

En la figura 3.11 están esquematizadas el significado de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ y el rango de variación de las variables ξ y η .

Los valores de las pendientes de las líneas de la malla en el contorno se pueden calcular analíticamente si se tiene la definición analítica del mismo. En caso contrario se pueden aproximar mediante algún tipo de técnica numérica.

3.3.4 Generación de mallas utilizando multibloques

En los apartados anteriores se han comentado las técnicas más usuales para la generación de mallas estructuradas. Cualquiera de estas técnicas conduce a la obtención de un sistema de coordenadas curvilíneas que permite la transformación de un dominio físico en otro dominio "computacional" de geometría más sencilla sobre el cual el trabajo de la generación de una red cartesiana es trivial. Una malla cartesiana en este último dominio conduce, al deshacer la transformación, a una malla de cuadriláteros no necesariamente regulares. La malla resultante consiste en una red formada por las intersecciones de dos familias de curvas que son las correspondientes a las líneas que forman la red en el dominio computacional. En este sentido las mallas estructuradas poseen un sistema general de coordenadas curvilíneas. Esta propiedad contrasta con la filosofía de las mallas no estructuradas en las cuales cada elemento se construye de forma local sin tener en cuenta ninguna estructura global.

La propiedad de tener un sistema "global" de coordenadas curvilíneas hace que la generación de mallas estructuradas esté de alguna forma limitada cuando se pretende aplicarla a geometrías complicadas. La generación "local" de las mallas no estructuradas hace que estas últimas estén especialmente indicadas para estos casos.

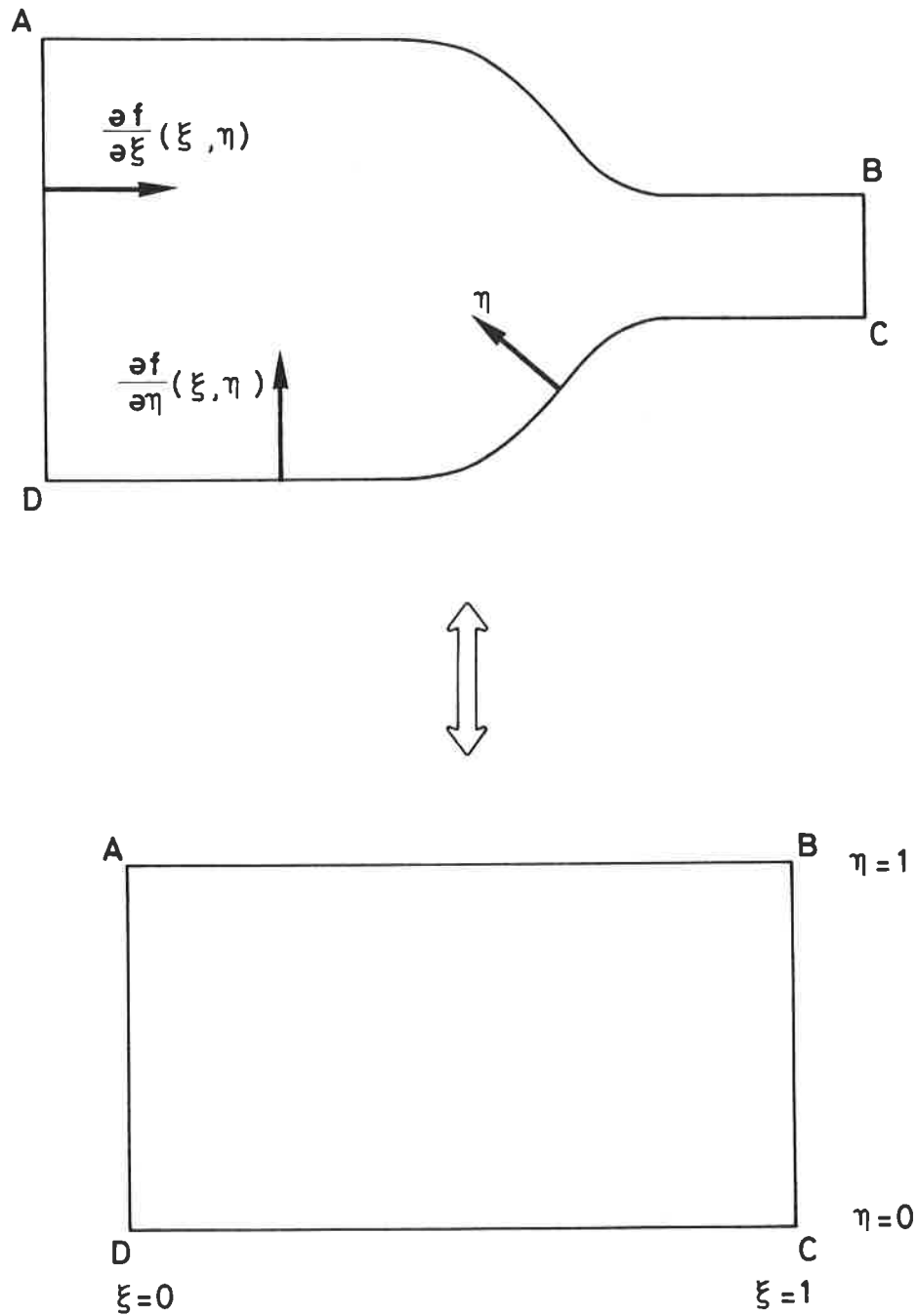


FIGURA 3.11 Significado de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, y del rango de variación de ξ y η .

La idea principal de la utilización de multibloques es que no se utiliza un solo sistema de coordenadas curvilíneas para todo el dominio físico sino que se

utilizan varios de ellos que a su vez se conectan de forma adecuada. El dominio físico se subdivide en varios bloques y dentro de cada uno de ellos se construye un sistema de coordenadas curvilíneas. La subdivisión en bloques produce la flexibilidad necesaria para trabajar con geometrías complicadas. Esta técnica constituye un compromiso entre una malla globalmente estructurada y otra completamente no estructurada. Limitando el número de bloques a uno solo se recupera una malla totalmente estructurada mientras que si se utiliza un número ilimitado de ellos, dentro de cada uno de los cuales se genera un solo elemento, se produce una malla no estructurada.

La disposición de los múltiples bloques determina como se conectan los distintos sistemas de coordenadas curvilíneas y esa conexión define la topología de la malla. Para una geometría dada esa topología no es única y dependerá de como se haga la subdivisión en bloques del dominio físico. Esta subdivisión se puede hacer de forma que las mallas resultantes sean adecuadas para resolver las ecuaciones planteadas dentro del dominio físico.

El concepto de multibloque no se restringe a ninguna técnica particular de generación de mallas. La construcción de las mismas dentro de cada uno de los bloques se puede realizar mediante cualquiera de los métodos descritos en los apartados anteriores.

Al establecer la subdivisión en bloques del dominio físico hay que definir el número de ellos y sus interconexiones. Una forma de organizar la información referente a cada bloque es definir para cada una de sus caras los siguientes datos:

- Si esa cara pertenece al contorno del dominio físico o bien si está conectada con otro bloque. Si pertenece al contorno se debe definir sobre ella la forma del mismo. En caso contrario son necesarios los datos siguientes.
 - El número del bloque ayacente.
 - La cara del bloque adyacente en contacto con el bloque del cual se está organizando la información.
 - La orientación del sistema de coordenadas curvilíneas del bloque adyacente relativo al del bloque en cuestión.

La información anterior es fácilmente visualizable y en la figura 3.12 se describe un ejemplo. En esta figura se presenta un caso en el cual se pretende construir una malla alrededor del perfil de un ala de avión. La geometría se ha descompuesto en tres bloques de los cuales se ha representado su interconexión. Asimismo también se han definido cuales de sus lados corresponden al contorno

del dominio, ya sea al propio perfil o bien al límite de la zona en estudio.

Para generar la malla sobre todo el dominio se tendrá que hacer un bucle sobre todos los bloques definidos. Para cada uno de ellos se tendrá que generar un sistema de coordenadas curvilíneas mediante alguna de las técnicas de los subapartados anteriores. Cualquiera de estas técnicas es capaz de generar una malla en el interior de un bloque a partir de los puntos situados en el contorno. En principio, para cada bucle se deberían conocer a priori la posición de los puntos situados sobre los contornos de cada bloque y es a partir de ellos como se generaría la malla en el interior.

Los puntos situados sobre interfaces comunes a dos bloques deben cumplir una condición esencial que es la de mantener la continuidad de la malla a través de ellas. Es decir, dados dos bloques con una cara en común, cada punto situado en esa cara y perteneciente a uno de los bloques debe tener su homólogo en el otro bloque y sobre la misma cara. Esta condición, aunque obvia, es muy importante de cara a organizar todo el proceso de generación.

La condición anterior obliga a que las líneas coordenadas sean continuas al pasar de un bloque al contiguo. Esa continuidad debe ser al menos de orden C^0 , sin embargo existen tratamientos para elevar ese grado de continuidad. Las formas más comunes de aumentar esa continuidad son las siguientes:

- *Continuidad de orden C^1 en las interfaces entre bloques.* Una vez fijada la posición de los puntos sobre las caras de los bloques es posible generar las mallas en su interior. Sin embargo no existirá ningún control ni sobre los ángulos que formarán las líneas coordenadas con el contorno del dominio físico, ni sobre los ángulos que formarán entre sí las propias líneas al pasar de un bloque a otro.

Las técnicas de generación mediante esquemas de interpolación permiten, mediante las expresiones (3.3.28) – (3.3.31), controlar esos ángulos de forma que las líneas coordenadas mantengan una continuidad de orden C^1 en las interfaces entre bloques. Asimismo también permiten controlar los ángulos de esas líneas con el contorno.

Las técnicas de generación mediante la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales también permiten controlar ese grado de continuidad mediante la manipulación de las funciones de control que anteriormente se han denominado P y Q .

- *Continuidad completa en las interfaces entre bloques.* Cualquiera de las técnicas de generación de mallas estructuradas producen mallas que son

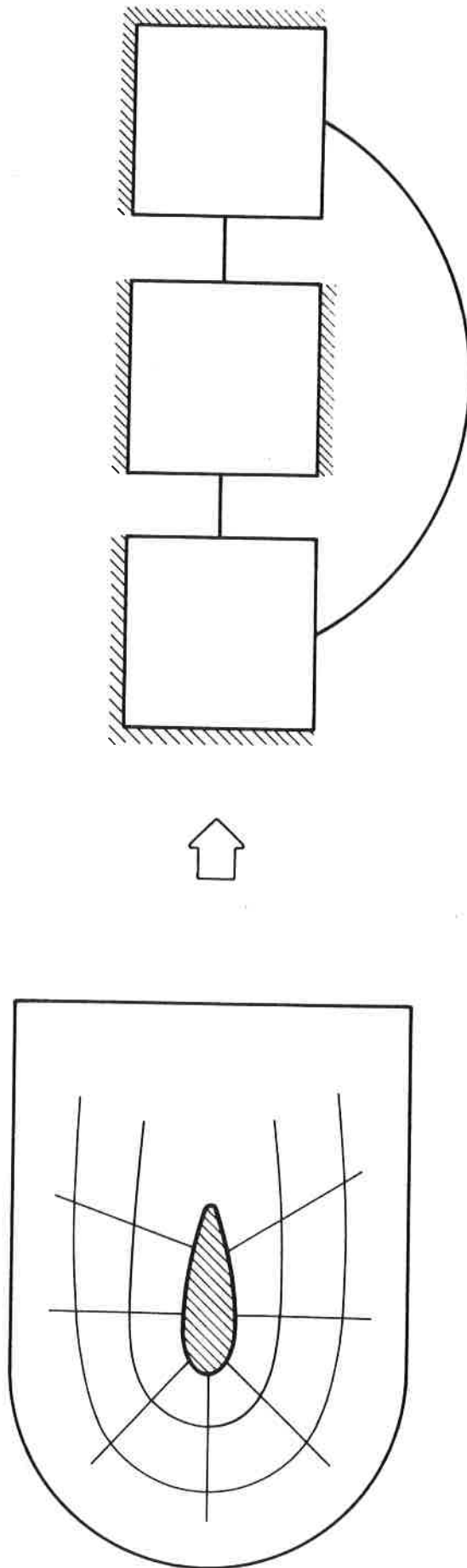


FIGURA 3.15 Descomposición en bloques del dominio alrededor del ala de un avión.

contínuas hasta un determinado nivel. Así, por ejemplo, las ecuaciones elípticas (3.3.9) – (3.3.10) producen mallas de continuidad C^2 en el interior del dominio y los esquemas de interpolación también producen mallas que son contínuas hasta un determinado nivel que depende de las expresiones que se utilicen. Continuidad completa en las interfaces entre bloques significa que las líneas coordenadas tengan el mismo grado de continuidad en esas interfaces que en el interior de los bloques. Estos grados de continuidad se consiguen normalmente a costa de no poder controlar la posición de los puntos sobre las caras de los bloques ya que el posicionamiento de los mismos formará parte del proceso global de generación. En este caso el proceso de generación no se limita a una generación bloque por bloque sino que la malla sobre todos ellos se genera a la vez.

Para conseguir la condición anterior, los datos necesarios para generar la posición de un punto sobre un contorno y otro en el interior de un bloque deben ser del mismo tipo. En el caso de la resolución de un sistema de ecuaciones elípticas, la posición de un punto interior requiere información de sus vecinos directos. En este caso la posición de un punto situado sobre el contorno de un bloque requerirá información de los puntos situados inmediatamente a su alrededor pero que estarán en bloques distintos. Para puntos situados sobre una cara se requerirá información proveniente de dos bloques distintos, mientras que para puntos esquina esa información vendrá de tres bloques distintos. Para asegurar una continuidad completa la información referente a un bloque se debe aumentar con la información de los bloques adyacentes. Esta información se referirá a los puntos de esos bloques que forman una corona alrededor del primero.

En la figura 3.13 se puede ver los puntos de los cuales se precisa información alrededor de un determinado bloque. El tamaño de la información necesaria para cada bloque crece en dos filas y dos columnas lo cual produce un aumento de la capacidad necesaria para su almacenamiento. Los esquemas en diferencias finitas se deben utilizar sobre todos los bloques a la vez actualizando en cada ciclo la información sobre la corona de cada bloque.

Como ya se ha comentado, en los nodos situados dentro de cada bloque se cruzan dos familias de líneas coordenadas. Estas dos familias corresponden a las coordenadas ξ y η del espacio computacional. Al utilizar las técnicas de multibloque pueden aparecer puntos en los cuales se crucen más de dos familias de curvas. Asimismo también pueden aparecer puntos donde sólo pase una curva perteneciente a una de las familias. Estos puntos se denominan “singulares” y estarán siempre situados en los vértices de los bloques. El orden de singularidad se puede definir como $(n - 8)/2$ donde n es el número de caras del polígono que

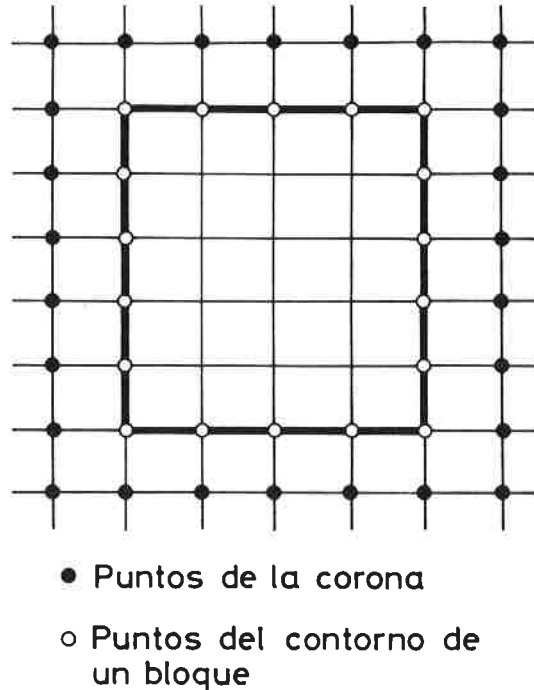


FIGURA 3.13 Puntos de información alrededor de un bloque.

forma la unión de los bloques situados alrededor del punto en cuestión. En la figura 3.14 se pueden ver casos típicos de singularidad y su clasificación.

La denominación de singulares aplicada a estos puntos proviene del hecho de que al utilizar técnicas en diferencias finitas no se puede definir en ellos la expresión de las derivadas parciales. Para solventar este problema hay que aplicar alguna estrategia específica en estos puntos. En el contexto de los métodos de resolución por el método de los elementos finitos la presencia de nodos de este tipo no supone ninguna dificultad adicional por lo que la denominación de singular no afecta en este caso ni a las técnicas de resolución ni a la solución obtenida en esos puntos. En este último caso la única propiedad que los caracterizará será el hecho de que el número de elementos que conectan no será igual a cuatro.

Los conceptos anteriores se pueden ampliar fácilmente a espacios tridimensionales sin más que tener en cuenta la presencia de otra dimensión. En ese caso la definición de las superficies que delimitan el dominio físico se puede realizar utilizando herramientas propias del CAD. En la referencia [65] se puede ver la descripción de un sistema para generación de mallas tridimensionales

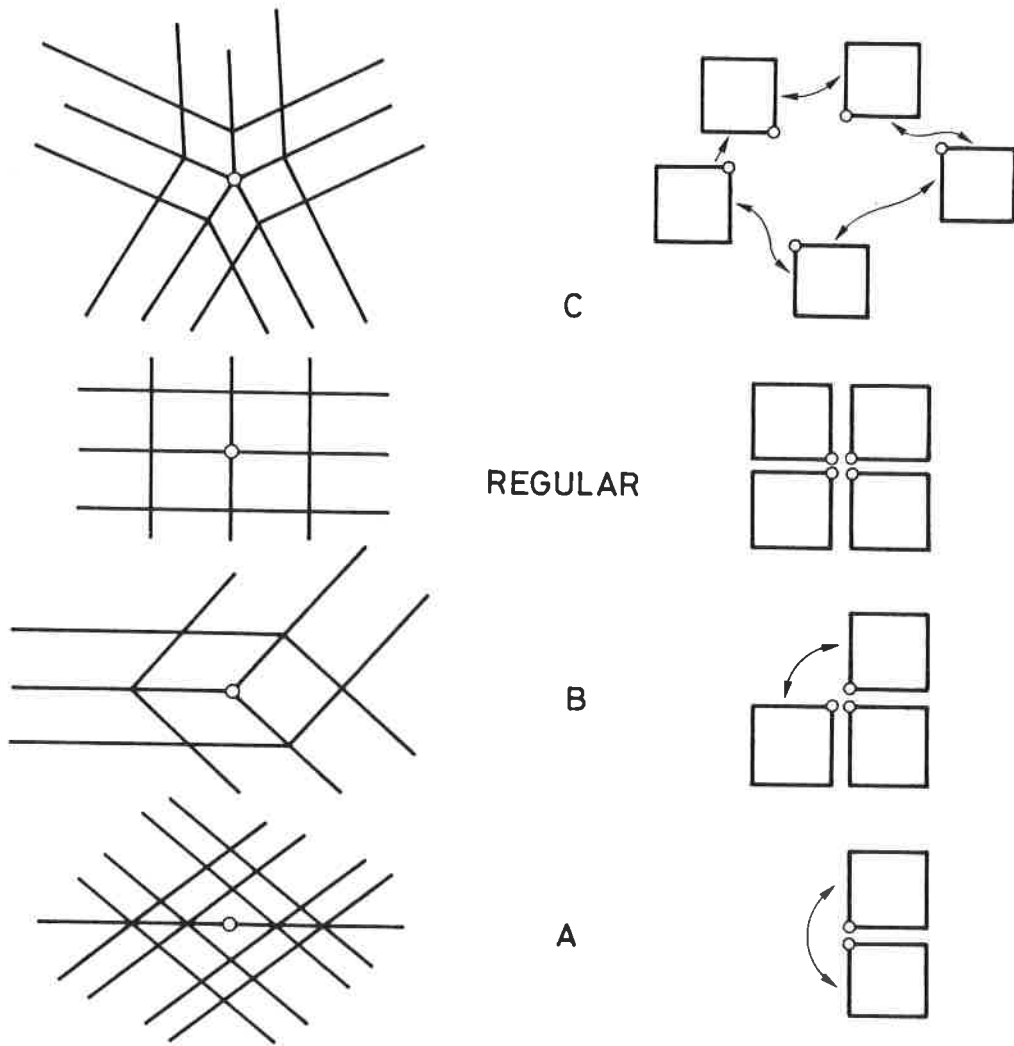


FIGURA 3.14 Clasificación de los puntos singulares.

utilizando las técnicas descritas.

3.4 TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS NO ESTRUCTURADAS

Como ya se ha comentado anteriormente las mallas no estructuradas son aquellas que no presentan ningún tipo de estructura global. Este hecho las contrapone a las mallas estructuradas anteriormente descritas, en las cuales existe una estructuración global de la disposición de los nodos y elementos. En este sentido también se dice que las mallas no estructuradas son mallas locales ya que cada nodo y elemento se generan localmente.

El desarrollo de las técnicas de generación de mallas no estructuradas ha avanzado de forma casi totalmente independiente del trabajo realizado referente a las mallas estructuradas. Este hecho es en gran parte debido a que los métodos de resolución por diferencias finitas conducen a la utilización de mallas estructuradas mientras que las mallas no estructuradas se han utilizado siempre con el método de los elementos finitos. Solo a partir de tiempos recientes existe una cierta compenetración entre métodos de ambos tipos para conseguir técnicas híbridas que aprovechen las ventajas de ambos métodos.

Las técnicas de generación de mallas no estructuradas se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- *Generación simultánea de nodos y elementos.* Los algoritmos de este grupo generan a la vez los nodos y los elementos de forma que cada vez que se genera un nuevo punto éste se conecta inmediatamente al resto de la malla. El método más utilizado dentro de este grupo es el del avance frontal [39][51][52].
- *Generación de nodos y elementos en fases distintas.* Estas técnicas utilizan primero alguna forma de generación de puntos para obtener una distribución de los nodos de la malla. A continuación llevan a cabo lo que se llama una triangulación de la malla para formar los elementos mediante la conexión de los nodos ya existentes. La técnica de triangulación más utilizada es la de Delaunay [25].

Ambos grupos de algoritmos producen mallas de elementos triangulares. No existen todavía algoritmos de generación de mallas no estructuradas formadas por elementos cuadrangulares debido a que la interconexión de elementos de este tipo es más difícil de encajar en una geometría cualquiera que la de los elementos triangulares.

Sí existen, en cambio, algoritmos de generación de mallas no estructuradas tridimensionales. En este caso el tipo de elemento empleado es el tetraedro. En

este capítulo se van a describir únicamente los algoritmos de generación en dos dimensiones. Sin embargo su extrapolación a tres dimensiones no presenta grandes dificultades desde el punto de vista conceptual, aunque sí desde el punto de vista del coste del tiempo de computación.

Todos los generadores de mallas no estructuradas precisan de la utilización de algún algoritmo de reenumeración para disminuir los anchos de banda, o de frente, de las mallas obtenidas. La propia naturaleza de estos generadores hace que sea imposible controlar dichos anchos durante el proceso de generación. Por ello, es muy recomendable la utilización de algún algoritmo de reenumeración al finalizar el mismo.

3.4.1 Definición de las características de la malla

Dado el carácter local de los algoritmos de generación de mallas no estructuradas éstos permiten controlar el tamaño y en ocasiones incluso la forma de cada uno de los elementos generados. Para aprovechar esta circunstancia es necesario definir de alguna manera las características que se desea que tengan los elementos generados en cada zona del dominio.

Una técnica muy usual desarrollada por Peraire et al. [39][51][52] consiste en utilizar una malla previa, llamada de base o de referencia, y definir sobre los nodos o los elementos de la misma las características esperadas en la nueva malla a generar. El único requerimiento que debe cumplir esta malla base es que cubra todo el dominio del problema en estudio. En cada etapa del proceso de generación de un nuevo punto o elemento situados sobre una determinada zona, se buscará en la malla de referencia que tamaño y forma están definidos en esa zona.

En el caso de que las características de la malla a generar estén definidas sobre los elementos de la malla de base entonces las características del elemento a generar sobre cada punto serán las definidas sobre el elemento de la malla de referencia en el que está incluido.

En el caso de que esas características estén definidas sobre los nodos de la malla de base entonces las características del elemento a generar sobre cada punto se podrán obtener interpolando en ese punto los valores nodales definidos en los nodos del elemento en el que está incluido. Esta interpolación se puede realizar mediante las propias funciones de forma de los elementos triangulares.

Esta forma de definir las variables que controlarán la forma de la nueva malla se adapta de forma muy “natural” a los procesos de refinamiento automático a partir de los valores del error obtenidos mediante un estimador. Tal como se ha visto en el Capítulo 2., a partir de los valores del estimador de error obtenidos sobre cada elemento se puede predecir cuales deberían ser los nuevos tamaños de elemento a utilizar sobre las zonas ocupadas por cada uno de ellos para obtener un nivel de precisión dado. De esta manera queda definido sobre cada elemento un nuevo tamaño que será el que deberá tener en cuenta el generador para construir la nueva malla.

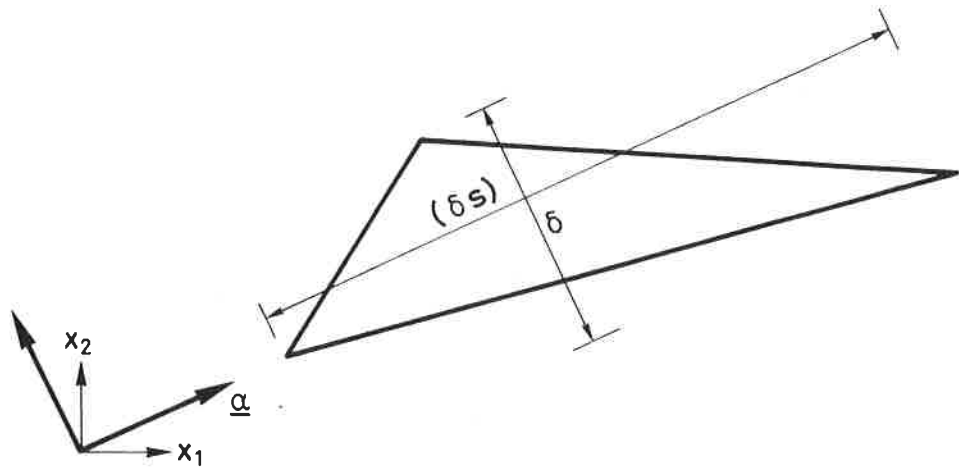
De esta manera, la malla empleada en un cálculo previo pasa a utilizarse como malla de base para la generación de la siguiente. Los tamaños de los elementos también pueden definirse sobre los nodos realizando un alisado de los valores definidos sobre los elementos. De esta forma, se consiguen mallas con variaciones más graduales de los tamaños de elemento.

Las técnicas de remallado automático utilizando la malla anterior como malla de referencia comenzaron su desarrollo en el campo de la dinámica de fluidos [39][51][52]. En ese campo los estimadores de error, distintos de los descritos en el capítulo anterior, proporcionan directamente los valores de los tamaños de elemento en los nodos de la malla de base, por lo que en ese caso no es necesario el proceso de alisado.

3.4.2 Método del avance frontal

Este método de generación permite no sólo controlar el tamaño de los elementos generados sino también su forma. Con esta técnica se pueden generar elementos “alargados” en una determinada dirección y para ello hay que definir los parámetros necesarios para controlar ese alargamiento. En la figura 3.15 se puede ver el significado de los parámetros tamaño δ , alargamiento s , y orientación α que definen la forma de un triángulo alargado. Estos son los parámetros que se tendrán que definir en la malla de referencia.

En el ámbito de la mecánica de sólidos no está todavía muy extendida la utilización de elementos alargados controlando los valores de s y α . Ello es debido a que todavía no está claro como determinar el valor de esos parámetros a partir de los estimadores de error existentes. En cambio, la utilización de alargamientos sí está muy difundida dentro del campo de la dinámica de fluidos donde los estimadores de error utilizados ya dan información para generar mallas

FIGURA 3.15 Significado de los parámetros δ , s , α .

con elementos alargados. Este tipo de elementos se utiliza normalmente para localizar ondas de choque [39][51][52].

El método del avance frontal recibe su nombre del hecho de que en cada etapa del proceso existe un frente de generación formado por todos los posibles lados sobre los cuales se va a generar un nuevo triángulo. De forma repetitiva el proceso consta de una etapa de generación de un triángulo y de otra etapa de actualización del frente, teniendo en cuenta la existencia del nuevo triángulo.

Este método produce una malla de triángulos que pueden ser utilizados como elementos lineales, cuadráticos o de más alto orden sin más que generar posteriormente los nodos intermedios necesarios.

3.4.2.1 Generación de puntos sobre el contorno

Antes de comenzar a generar elementos dentro del dominio existe una etapa previa que es la de generar puntos sobre el contorno para, a continuación, crear el frente de generación inicial que será el que contendrá la información acerca de todas las caras del contorno sobre las que se podrá generar un triángulo.

El contorno del dominio estará formado por la combinación de una serie de curvas cerradas que limitarán el dominio tanto exterior, como interiormente en caso de que existan huecos. Asimismo, también podrán existir curvas interiores al dominio que separen materiales distintos o bien sean líneas de aplicación de cargas. Cada una de esas curvas estará definida mediante la interpolación de una serie de puntos definidos como datos. Dicha interpolación se puede realizar mediante expresiones como las descritas en el apartado 3.2.

Las curvas cerradas que delimiten exteriormente el dominio se orientarán en sentido contrario a las agujas de un reloj mientras que las que lo delimiten interiormente lo estarán al revés. En las curvas interiores no importará la orientación ya que en ellas se generarán elementos sobre sus dos lados. Estas orientaciones se pueden ver en la figura 3.16. La orientación de las curvas vendrá dada por el orden en que se listan los puntos que las definen.

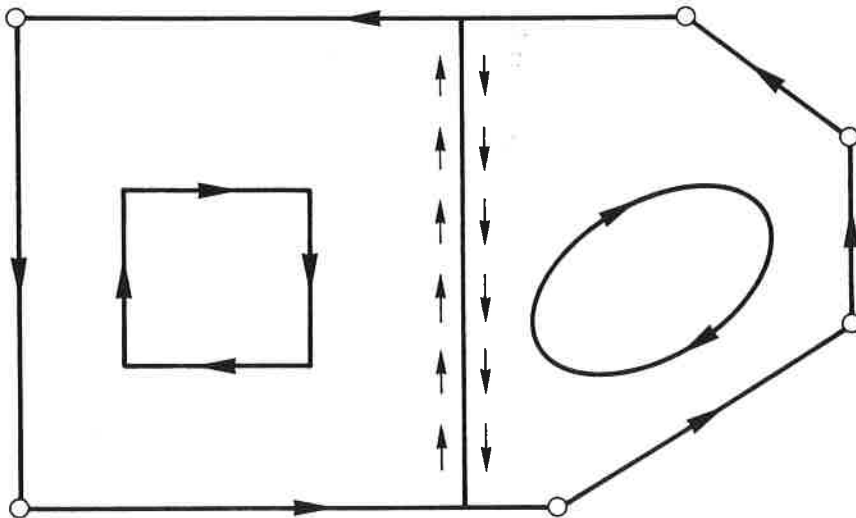


FIGURA 3.16 Orientación de las curvas de definición del contorno.

Preservando esta orientación, el programa generará puntos intermedios a los de definición satisfaciendo la condición del espaciamiento entre puntos δ definido en la malla de referencia. Todos los segmentos formados por los puntos situados sobre las curvas del contorno serán caras de triángulos al final del proceso de generación.

La generación de puntos intermedios entre dos puntos de definición de

cada curva se realiza como sigue:

1. Se calcula la longitud l del tramo de curva situado entre los dos puntos.
2. Se interpolan los parámetros definidos en la malla base, sobre una serie de puntos del segmento en cuestión (por ejemplo cada $l/100$). En el caso de que exista alargamiento de elementos el valor del espaciamiento en la dirección de la curva δ_c se calculará teniendo en cuenta este hecho. La forma de calcularlo se describe en el apartado 3.4.2.4.
3. El número de caras N_s que se deberán colocar en el intervalo de curva se calculará mediante la siguiente expresión:

$$A_s = \int_0^l \frac{1}{\delta_c} dl \quad (3.4.1)$$

4. Se tomará N_s como el entero más cercano a A_s de forma que $N_s > A_s$.
5. Se colocarán los puntos intermedios de manera que los valores del arco l_i para cada uno de ellos deberá cumplir la condición de que:

$$\frac{N_s}{A_s} = \int_0^{l_i} \frac{1}{\delta_c} dl \quad (3.4.2)$$

En ocasiones aparecerán tramos de curva con curvaturas κ muy altas. En ese caso es conveniente limitar el tamaño de las distancias entre los puntos generados mediante criterios geométricos en lugar de lo marcado por la malla de referencia. En esas ocasiones se puede escoger la distancia entre dos puntos como el mínimo entre la definida por (3.4.2) y la limitada por $\kappa(l_i - l_{i-1}) < \varphi$, siendo φ el valor máximo del ángulo que puede girar la curva entre esos dos puntos. Limitando dicho ángulo a 20° se consigue, por ejemplo, que el ángulo que gire la curva entre dos puntos consecutivos sea menor que ese valor consiguiéndose así que la malla tenga una buena representación de curvas con grandes curvaturas.

3.4.2.2 Construcción del frente de generación inicial

La siguiente operación consiste en la construcción del frente de generación inicial. Dicho frente estará formado por dos vectores de variables enteras que tienen tantas componentes como caras activas haya en cada momento. Una cara se llamará "activa" cuando sobre ella sea posible construir un nuevo triángulo. En un vector se guarda el número del primer nodo de cada cara mientras que el del segundo nodo se guarda en el segundo vector. Las caras no necesitan estar almacenadas en ningún orden especial.

En virtud de la orientación de las curvas definida en la figura 3.16, el dominio sobre el cual se deberá generar la malla estará siempre situado a la izquierda de todas las líneas que conectan dos puntos del contorno consecutivo. En el caso de las curvas interiores cada segmento aparecerá dos veces pero con distintas orientaciones. De esta forma se generarán elementos sobre sus dos lados.

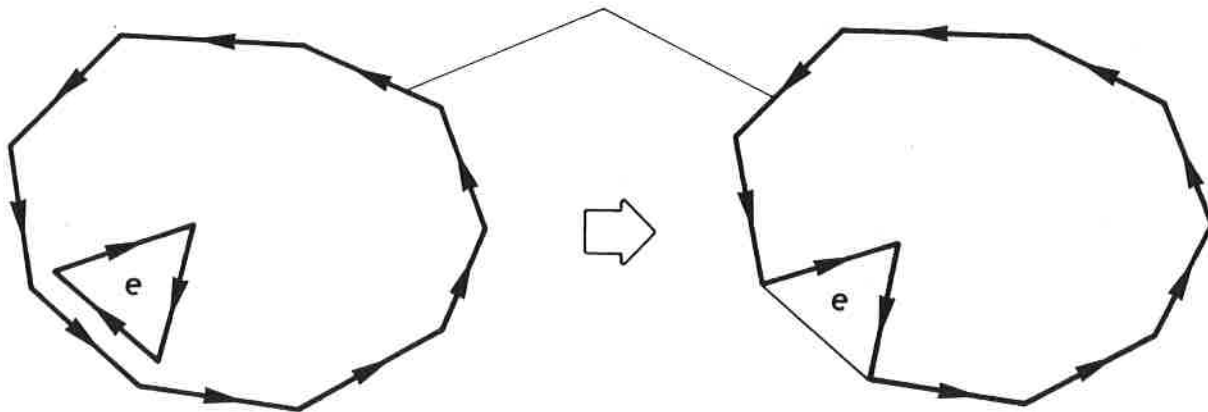


FIGURA 3.17 Actualización del frente.

Al principio del proceso de triangulación, el frente de generación será exactamente igual al conjunto de segmentos situados sobre las curvas definidas para modelar los contornos y el interior del dominio. Después de la generación de cada triángulo, apoyado sobre uno de los lados del frente, este último deberá ser actualizado para eliminar las caras que hayan dejado de ser activas y añadir las del elemento recién generado que hayan pasado a serlo.

El frente de generación cambia durante el proceso de generación y al finalizar el mismo, el número de segmentos que contiene debe ser nulo. Después de la generación de cada triángulo sus caras se añaden al frente de generación. A continuación todas las caras que aparezcan dos veces y en sentidos distintos se eliminan del frente (ver figura 3.17).

3.4.2.3 Generación de los elementos triangulares

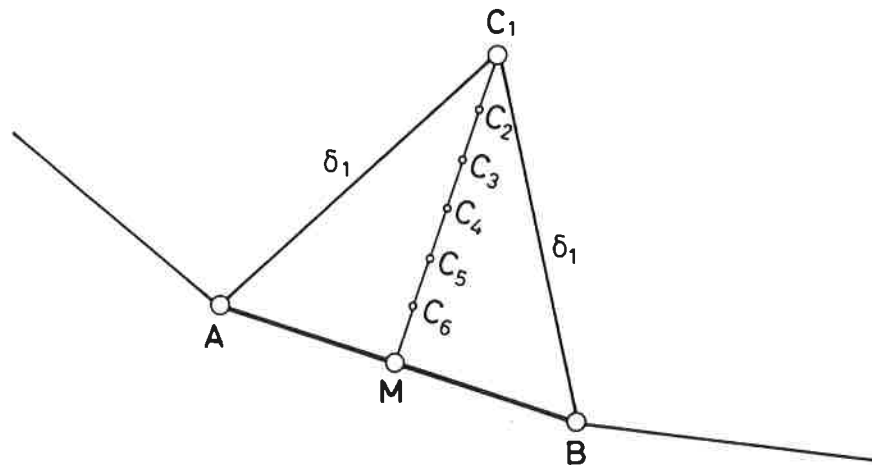
El algoritmo que se presenta a continuación es una de las muchas variantes que existen sobre la técnica de avance frontal. En las referencias [39][51][52][65] se pueden encontrar otras variantes aunque el resultado de todas ellas es muy similar.

El proceso de generación de cada triángulo constará de los siguientes pasos:

1. Elección del segmento del frente de generación que se usará como base del nuevo triángulo. Si se está generando una malla con grandes variaciones en el tamaño de los elementos es conveniente comenzar generando los más pequeños. Por ello se escogerá el más pequeño de todos los segmentos del frente. Los nodos del segmento escogido se pueden denominar por A y B (ver figura 3.18).
2. Obtención del valor del espaciamiento δ obtenido de la malla de referencia correspondiente al punto M situado en la mitad del segmento AB .
3. Determinación del punto C_1 a una distancia δ_1 de A y B . δ_1 se escoge a partir de las siguientes expresiones [51][52]:

$$\delta_1 = \begin{cases} \delta & \text{si } 0.55 |\vec{AB}| < \delta < 2 |\vec{AB}| \\ 0.55 |\vec{AB}| & \text{si } 0.55 |\vec{AB}| > \delta \\ 2 |\vec{AB}| & \text{si } \delta > 2 |\vec{AB}| \end{cases} \quad (3.4.3)$$

4. Determinación de los puntos C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 que estarán equiespaciados en el segmento que unirá los puntos C_1 y M .
5. Determinación de los nodos pertenecientes al frente de generación actual que estén situados dentro de un círculo de radio $r = 3 |\vec{AB}|$ y centro

FIGURA 3.18 Determinación de los puntos C_1, \dots, C_6 .

- C_1 . De estos nodos se escogen los que estén situados en el semiplano delimitado por la recta que une los puntos A y B y que contiene al punto C_1 . Estos nodos se ordenan de acuerdo con su distancia al punto C_1 de forma que el primero de la lista será el más cercano. Sea m el número de nodos ($a_i; i = 1, \dots, m$) contenidos en la lista.
6. Colocación de los puntos C_1, \dots, C_6 en la lista. Su colocación se realizará teniendo en cuenta su verdadera distancia al punto C_1 más una penalización de valor δ_1 .
 7. Determinación del punto de conexión a_j . Este se toma como el primer nodo de la lista que satisfaga las siguientes dos condiciones:
 - A. El interior del triángulo ABa_j no contiene ninguno de los restantes nodos de la lista (a excepción de los C_i).
 - B. El segmento a_jM no corta ninguna de las caras existentes en ese momento en el frente de generación.
 8. Formación y almacenamiento del nuevo elemento. Si se ha escogido como punto de conexión alguno de los C_i entonces se habrá creado también un nuevo nudo.

9. Actualización del frente de generación. Deberán eliminarse del frente aquellas caras del contorno que ya pertenezcan a un elemento y aquellas caras interiores que pertenezcan a dos elementos. Deberán incluirse en el frente aquellas caras pertenecientes al nuevo elemento recién generado que no pertenezcan previamente a otro elemento.

3.4.2.4 Introducción del alargamiento

La inclusión del alargamiento se consigue mediante una transformación local que relaciona el plano real, en el cual se desea un alargamiento, con un plano ficticio en el cual los triángulos que satisfagan las condiciones de alargamiento especificadas (s y α) aparecerán como equiláteros. Esta transformación consiste en una rotación de los ejes de forma que α coincida con el eje x , un escalado con un factor de s del eje x y una rotación inversa para devolver al eje x a su posición original. Los valores de α y s se interpolan de la malla de referencia al mismo tiempo que el valor de δ . Todos los puntos relevantes para la generación de un triángulo se transforman a ese nuevo espacio. La matriz de transformación \mathbf{T} para este cambio tendrá la siguiente expresión:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} s\alpha_1^2 + \alpha_2^2 & (s-1)\alpha_1\alpha_2 \\ (s-1)\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 + s\alpha_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

Para generar el punto C_1 del proceso anterior se transformarán los puntos A y B al nuevo espacio mediante la matriz \mathbf{T} y después se realizará el punto 3 del algoritmo descrito anteriormente. Una vez generado el punto C_1 en ese nuevo espacio se deshará la transformación mediante la matriz \mathbf{T}^{-1} y se conseguirá la posición del punto C_1 en el espacio real. A partir de ello se seguirá con los puntos 4-9 del algoritmo de generación.

Para la obtención del espaciamiento δ_c utilizado en la generación de los puntos sobre el contorno se utiliza el siguiente algoritmo:

1. Interpolación de la malla de base de los valores δ , s y α .
2. Transformación del vector unitario tangente a la curva \mathbf{t} al espacio de generación mediante la matriz \mathbf{T} ($\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{t}$).

3. Cálculo en el nuevo espacio del vector unitario \mathbf{t}' en la dirección de \mathbf{v} .
4. Aplicación de la transformación inversa al vector \mathbf{t}' para hallar un nuevo vector \mathbf{r} ($\mathbf{r} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{t}'$).
5. Cálculo del valor de δ_c mediante la expresión $\delta_c = \delta|\mathbf{r}|$.

A partir del valor de δ_c para cada punto se pueden calcular las integrales que aparecen en las expresiones (3.4.1) y (3.4.2). En el caso en que no exista alargamiento ($s = 1$) ocurrirá que $\delta_c = \delta$.

3.4.2.5 Estructura de la información

La implementación eficaz del algoritmo para generación de mallas descrito, presenta problemas desde el punto de vista del tratamiento de la información. Operaciones tales como buscar las caras del frente situadas dentro de una cierta región, insertar y borrar datos de una lista o simplemente buscar el segmento más pequeño situado en el frente son operaciones que se realizan muchas veces y consumen un tiempo de CPU en ocasiones inaceptable. La proporción que tiene el coste de estas operaciones frente al coste total de la generación es tanto mayor cuanto mayores sean las mallas que se están generando. Por ello puede ocurrir que los programas de generación lleguen a ser inoperantes para generar mallas muy densas.

Las operaciones que potencialmente pueden consumir más tiempo de cálculo son las siguientes:

- Interpolación de los parámetros de la malla a partir de la malla de referencia. Esta interpolación puede ser muy costosa si la malla de base tiene muchos elementos ya que hay que localizar previamente a que elemento pertenece un punto dado. Con mallas de referencia del orden de unos miles de elementos este proceso llega a ser de los más costosos. Hay que pensar que en un proceso de refinamiento automático cada malla puede servir de referencia para la generación posterior y de ahí la posibilidad de que aparezcan mallas muy densas como mallas de base.
- Buscar, borrar e insertar caras en el frente de generación. Si el frente tiene muchas caras las tareas anteriores pueden ser muy costosas. Al generar mallas del orden de unos miles de elementos los frentes de generación

existentes en cada momento son lo suficientemente grandes como para que estas operaciones sean casi inabordables.

Peraire et al. [52] proponen utilizar una estructura de datos especial llamada “árbol digital alternado” para almacenar los elementos de la malla de referencia y las caras del frente de generación. Con esta estructura de datos el coste de generación resulta ser del orden de $N \log(N)$ donde N es el número de elementos generado.

La utilización de estructuras de este tipo está muy justificada para programas de generación de mallas tridimensionales ya que en ese caso los costes de generación crecen enormemente. Actualmente se están generando, dentro del campo de la dinámica de fluidos, mallas del orden de unos cientos de miles de elementos por lo que el coste de su generación es muy alto. En programas bidimensionales el coste es significativamente menor y normalmente no es necesario recurrir a estructuras de datos tan sofisticadas. En este último caso suele ser suficiente con utilizar buenos algoritmos de búsqueda y de ordenación (ver referencia [51]).

Un algoritmo interesante para buscar a que elemento de la malla de base pertenece un punto P consiste en utilizar las coordenadas de área de P respecto a un triángulo. Así, si los valores de las tres coordenadas de área con respecto a un determinado elemento triangular están entre 0 y 1 el punto estará situado en el interior del mismo. En caso contrario la búsqueda se continúa con el elemento conectado a la cara opuesta al nodo respecto al cual la coordenada de área es menor. Este proceso permite recorrer la malla desde el primer elemento observado hasta el que contiene el punto P mediante un recorrido practicamente rectilíneo a través de la malla, y evita tener que hacer bucles sobre todos los elementos de la misma para localizar aquel que contiene al punto P . Este proceso es muy rápido si para cada elemento se almacena, para cada una de sus caras, con que otros elementos está conectado.

3.4.2.6 Operaciones de “cosmética”

Después de generar la malla es recomendable efectuar una serie de operaciones tendentes a mejorar la misma. La finalidad de estas operaciones es mejorar no sólo el aspecto estético de la malla sino también su funcionalidad. Esta funcionalidad intenta mejorarse a través del cumplimiento de dos objetivos:

1. Que cada nodo interior al dominio esté conectado a 6 elementos. Este sería el caso en que todos los triángulos fuesen perfectamente equiláteros y su acoplamiento sería similar al de las celdas de un panal de abejas. Los seis elementos unidos a cada punto formarían un hexágono perfecto. Aún en el caso en que se usen elementos alargados es conveniente mantener este objetivo ya que en el espacio resultante después de realizar la transformación (3.4.4) los elementos deberían tener también un aspecto similar al de las celdas de un panal de abeja. Mediante este objetivo se consigue evitar la aparición de nodos con un número o bien muy pequeño o bien excesivo de conexiones. El número ideal de conexiones de los nodos situados en el contorno será el valor del entero más próximo a $\frac{6\alpha}{360}$ donde α es el ángulo que forman los dos lados que confluyen en ese nodo y forman parte del contorno.
2. Que la variación de tamaños y de formas de los elementos a lo largo del dominio sea lo más gradual posible intentando evitar contactos entre elementos con tamaño y forma muy dispares.

Existen una serie de operaciones que intentan que la malla obtenida cumpla los requisitos mencionados, las cuales se describen a continuación:

Eliminación de los nodos interiores conectados a sólo 3 elementos.

En la figura 3.19 se puede ver un caso de este tipo en el cual existe un punto P que está únicamente conectado a 3 elementos. Dado que este número de conectividades está bastante alejado del ideal que es de 6 lo que se suele hacer es eliminar el nodo en cuestión y sustituir los tres elementos conectados en ese nodo por uno solo que unirá los tres nudos exteriores de la figura A , B y C . De esta forma se eliminan los nodos con mala conectividad sin alterar de forma significativa el tamaño de los elementos.

Eliminación de los nodos interiores conectados a sólo 4 elementos.

En estos casos, como el de la figura 3.20, lo que ocurre es que existe un punto P conectado únicamente a 4 elementos. De este nodo parten por tanto 4 lados que son los lados comunes, dos a dos, a los 4 elementos.

Para mejorar el número de conectividades lo que se hace en estos casos es eliminar 2 de los 4 lados que convergen en P y dejar que los dos restantes formen un solo lado nuevo eliminando por tanto el propio nodo P . Los dos lados eliminados serán siempre lados opuestos. De esta forma se eliminan los 4 elementos anteriores y se forman dos nuevos.

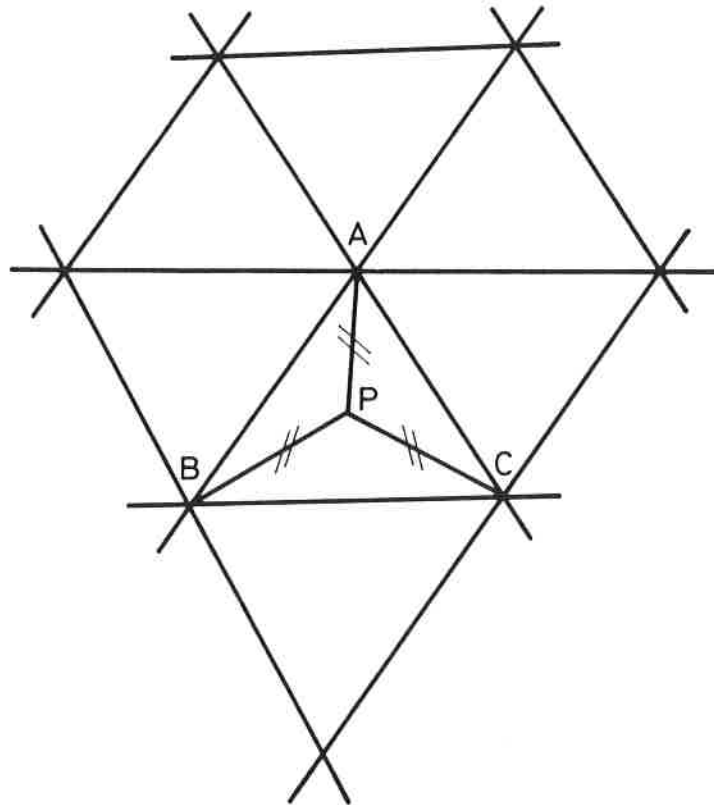


FIGURA 3.19 Eliminación de los nodos interiores conectados a sólo 3 elementos.

La elección de los lados que se eliminan se hace en función de las conectividades remanentes de los nodos A , B , C y D . Se elimina el par de lados que hace que las conectividades de estos puntos esté lo más cerca posible al número ideal.

Se puede tomar como índice de conectividad la suma de los valores absolutos de las diferencias entre el número real de conectividades de cada nodo y el número ideal. Los cambios en la malla se harán de manera que el valor de dicho índice sea mínimo.

Permutación de diagonales

En la figura 3.21 se puede observar un caso en el cual cambiando la posición de los lados se mejora de forma ostensible el número de conectividades

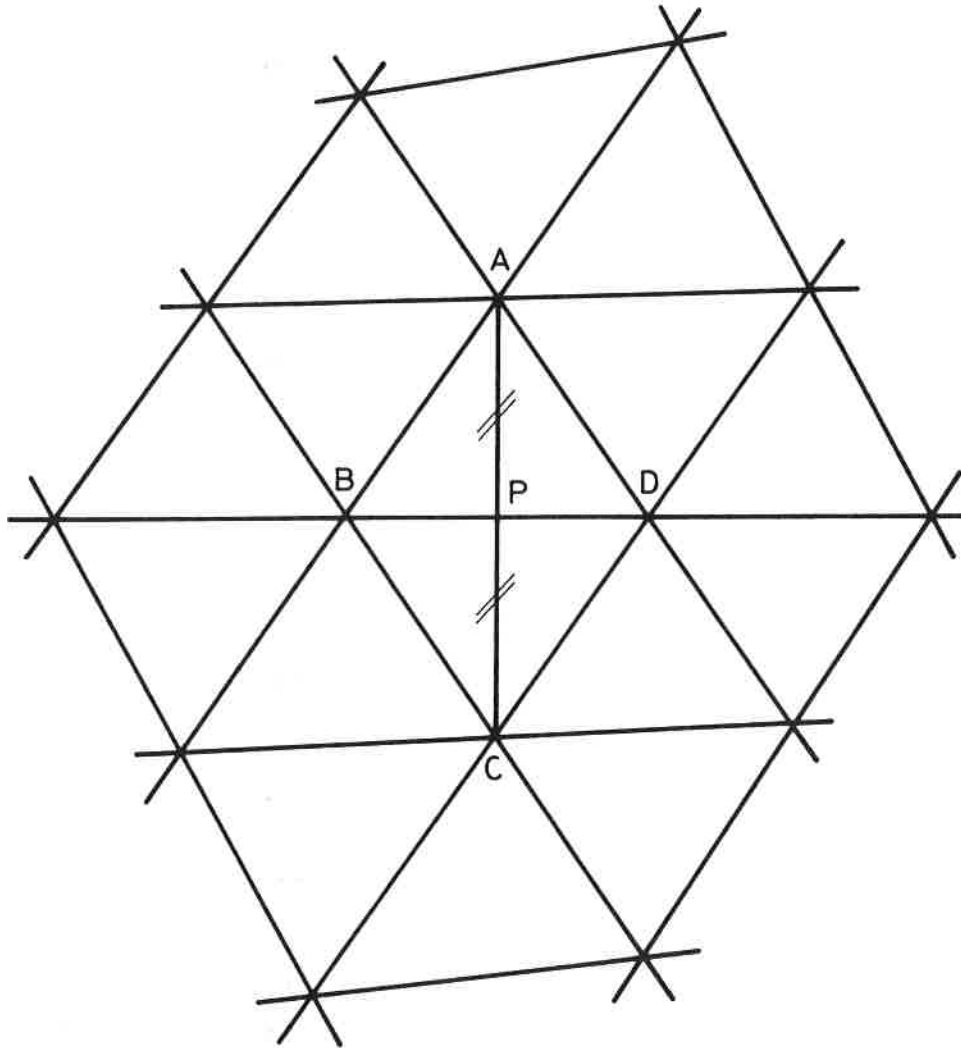


FIGURA 3.20 Eliminación de los nodos interiores conectados a sólo 4 elementos.

de los nodos. Esta técnica consiste en comprobar para cada lado si el hecho de permutarlo mejora el número de conectividades de los cuatro nodos que tiene alrededor. En caso afirmativo se realiza el cambio.

La permutación de una diagonal se hará siempre que el valor del índice de conectividad disminuya.

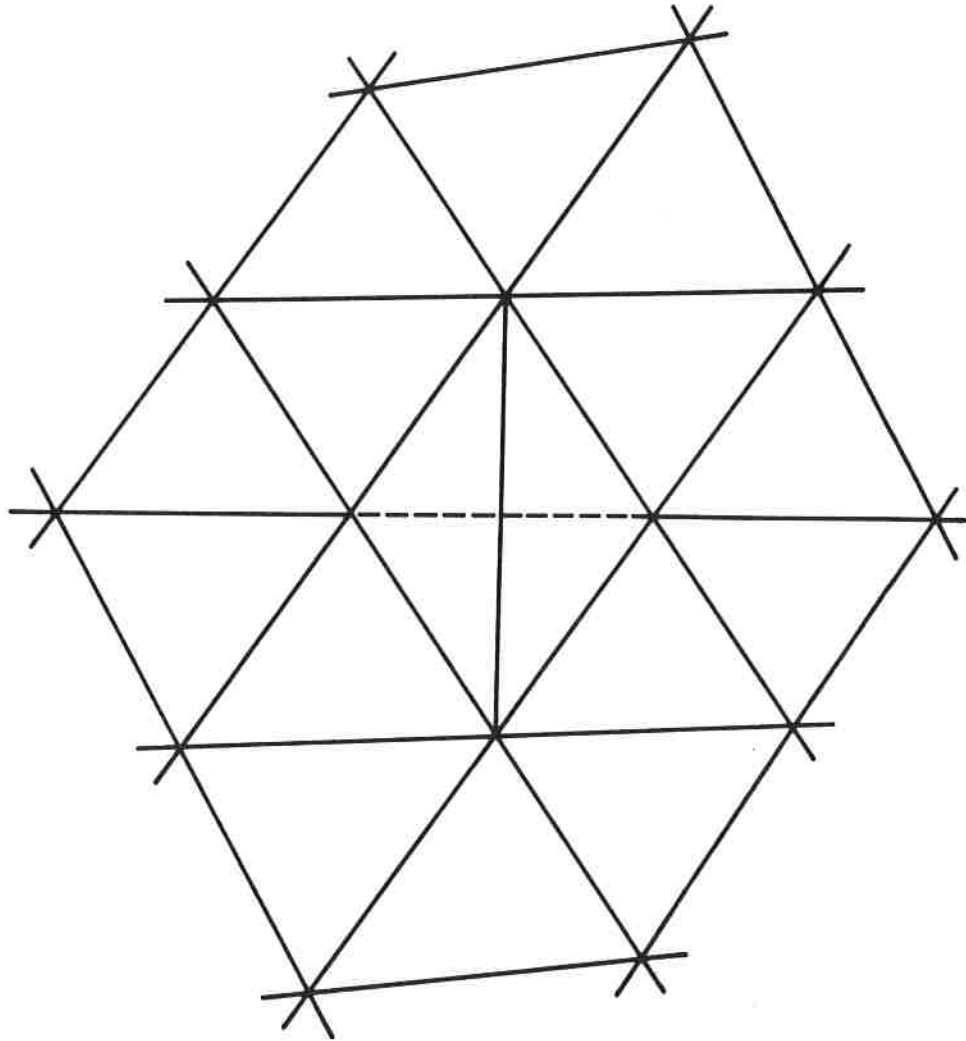


FIGURA 3.21 Permutación de diagonales.

Alisado de la malla.

Al final de todo el proceso se suele aplicar un alisado de la malla que en ocasiones se denomina alisado de Laplace ^{[14][25]}. Dicho nombre proviene del hecho de que la fórmula de reposicionamiento utilizada se puede obtener como una aproximación por diferencias finitas a la ecuación de Laplace.

La aplicación del alisado consiste en colocar cada nodo interior en el centroide de los nodos con los que está conectado. Esta recolocación se hace

para todos los nodos interiores de forma que se crea un lazo sobre todos esos nodos.

La aplicación reiterada de este lazo sobre todos los puntos produce mallas en las cuales las variaciones de los tamaños de elemento son muy graduales. Con ello se intenta alcanzar el segundo de los objetivos indicados.

El coste de computación necesario para realizar todas las operaciones de cosmética es muy pequeño en comparación al coste total de la generación de la malla. Gracias a ello se pueden conseguir mejoras importantes en la forma de la misma a un coste muy razonable.

En la figura 3.22 se puede observar como cambia el aspecto de una malla después de aplicar sobre ella las técnicas de cosmética descritas. Puede observarse que el aspecto de la misma mejora sensiblemente.

3.4.3 Método de triangulación de Delaunay

Los métodos de triangulación se utilizan para conectar entre sí una serie de puntos conocidos de antemano. Aunque cualquier persona es capaz de realizar una tarea de este tipo con un esfuerzo mínimo, sin más que trazar sobre un papel una serie de líneas que unan esos puntos, resulta realmente complejo desarrollar algoritmos para realizar esta labor que sean apropiados para su utilización en un programa de ordenador. Estos algoritmos son todavía más complejos si además se exige que la malla generada cumpla unos requisitos mínimos en cuanto a la forma y la no excesiva distorsión de los elementos.

Los algoritmos de este tipo no permiten, en general, controlar la forma de los elementos generados. Debido a ello no es posible utilizarlos si se quieren obtener mallas con elementos alargados, tal como se puede hacer con las técnicas de avance frontal. Este hecho hace que los métodos de triangulación sean algo menos versátiles, en cuanto al control que se puede ejercer sobre la forma de los elementos, si los comparamos con los anteriormente descritos. No obstante, en el caso de querer generar mallas con elementos equiláteros la utilización de esta técnica no presenta ninguna limitación.

Los tamaños de los elementos generados dependerán de la separación existente entre los puntos generados previamente. Por ello la capacidad de

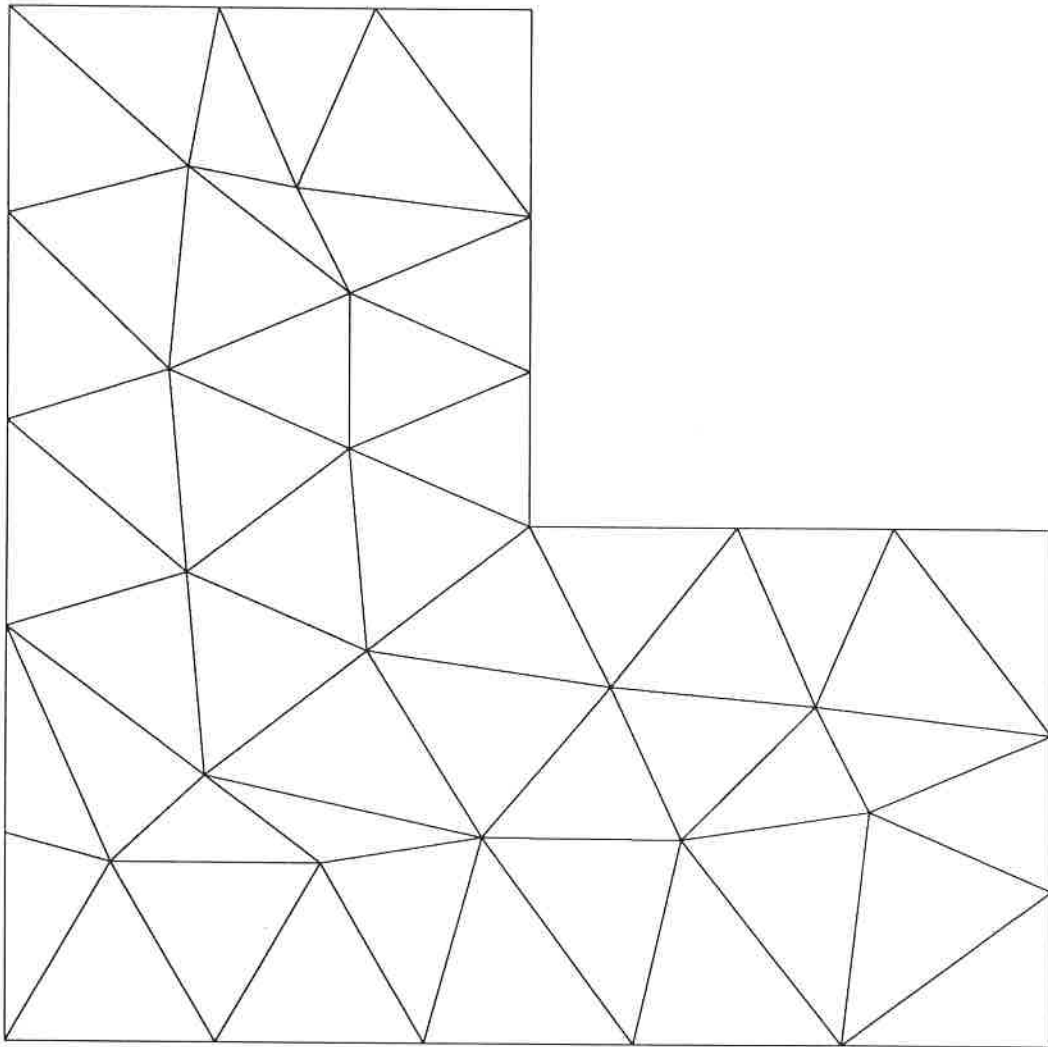


FIGURA 3.22a Malla obtenida previamente a las operaciones de cosmética.

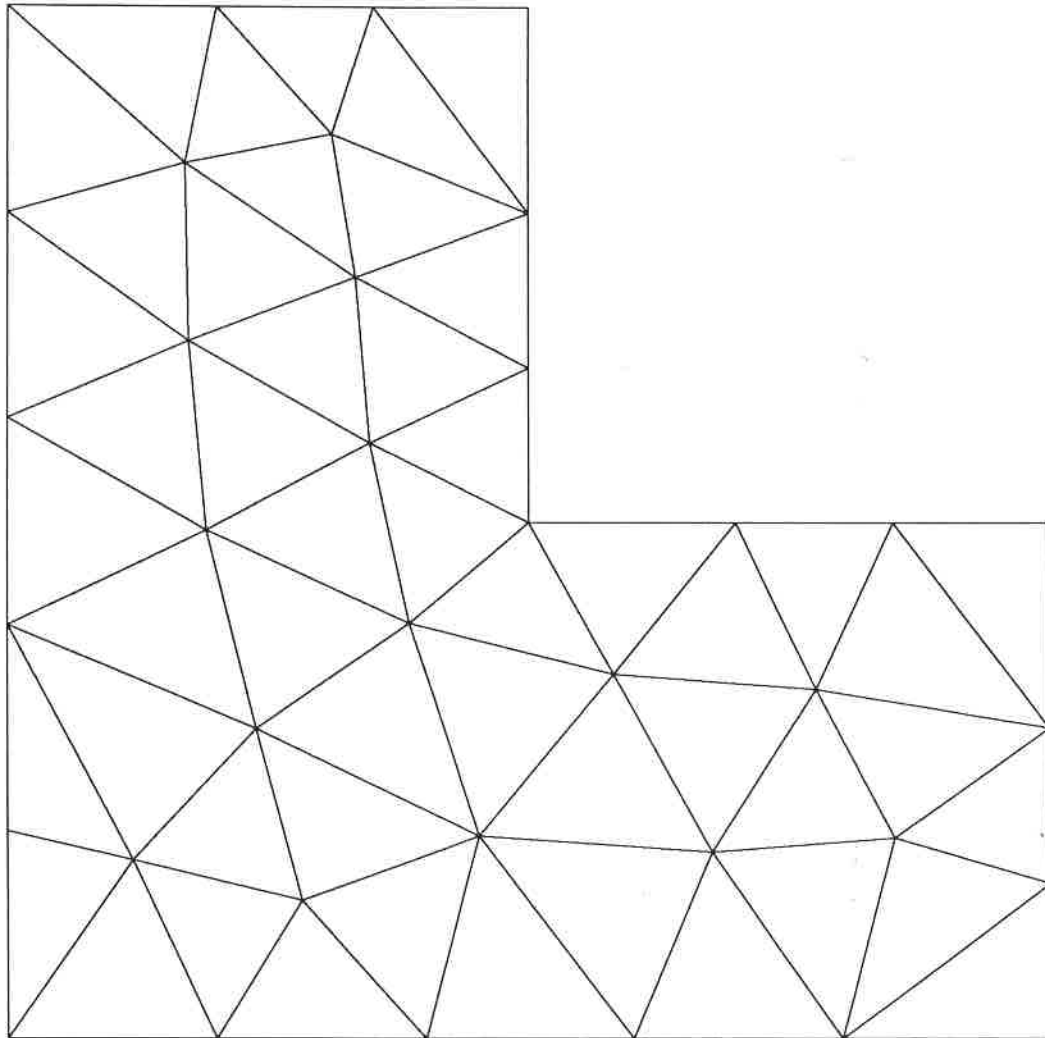


FIGURA 3.22b Malla obtenida después de las operaciones de cosmética.

controlar este tamaño vendrá dada por el algoritmo de generación previa de los nodos y no por la técnica de triangulación.

3.4.3.1 Generación previa de los nodos

La generación de los nodos suele comenzar sobre el contorno. La razón es que esos puntos serán los que definan la forma del mismo y además es sencillo controlar el espaciado que habrá entre ellos. Para realizar esta primera etapa se puede utilizar la misma técnica descrita en el apartado anterior al hablar de la creación del frente de generación inicial pero sin tener en cuenta la posibilidad de obtener elementos alargados.

Frey [25] presenta un algoritmo alternativo para la colocación de los puntos en el contorno del dominio. Dicho algoritmo calcula primero el número de puntos a disponer en un cierto tramo mediante una expresión idéntica a la (3.4.1) y a continuación posiciona estos puntos de forma equiespaciada dentro del intervalo. A continuación, y mediante un proceso iterativo, va moviendo todos los puntos hasta conseguir que sus posiciones converjan. Este proceso iterativo calcula de forma consecutiva las nuevas posiciones de cada punto mediante la expresión:

$$l_i = \frac{1}{2}(l_{i+1} + l_{i-1}) + \frac{1}{2}(l_{i+1} - l_{i-1}) \frac{\delta(m_i) - \delta(m_{i+1})}{\delta(m_i) + \delta(m_{i+1})} \quad (3.4.5)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N_s - 1$ y $m_i = \frac{l_{i-1} + l_i}{2}$.

El algoritmo anterior converge hacia una situación en la cual se cumple que la longitud del intervalo entre cada dos puntos consecutivos es proporcional al espaciado especificado en su punto medio siendo esa constante c la misma para todos los intervalos. Es decir:

$$s_i - s_{i-1} = c\delta(m_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (3.4.6)$$

La convergencia de este algoritmo es muy lenta e incluso incierta si la función que define el espaciado δ varía de manera muy brusca dentro del intervalo.

Existen diversas formas de generar distribuciones de puntos en el interior de un dominio de forma que su espaciamiento responda a algún tipo de criterio. Fukuda y Suhara [26] y Cavendish [14] desarrollaron un algoritmo que genera nodos en el interior del dominio utilizando para ello una malla uniforme de elementos cuadrados cuyos lados tenían una longitud igual al espaciamiento δ y que debía cubrir todo el dominio. De forma consecutiva se generaba un nodo dentro de cada cuadrado cuya posición se determinaba de forma aleatoria y cumpliendo siempre que la distancia entre éste y todos los nodos generados con anterioridad fuese superior a δ . En el caso de que hubiesen zonas con espaciamientos δ distintos el proceso anterior se realizaba utilizando una malla cuadrada distinta para cada zona. En la figura 3.23 se puede observar un ejemplo de aplicación de esta técnica para el caso en que el espaciamiento δ sea constante.

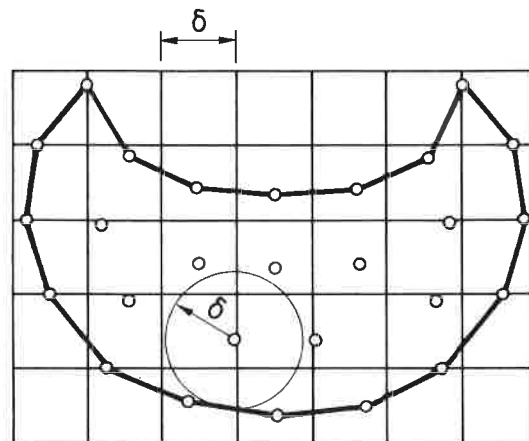


FIGURA 3.23 Algoritmo para la generación de puntos de Fukuda, Suhara y Cavendish.

El carácter aleatorio del posicionamiento de los nodos dentro de cada cuadrado de la malla anterior hace que la forma de los elementos obtenidos no sea controlable pudiéndose obtener triángulos con formas muy dispares. Para mejorar este problema S.H. Lo propone en [38] sustituir la malla de cuadrados mencionada anteriormente por otra de rectángulos cuyos lados tuviesen unas longitudes en relación 2 a $\sqrt{3}$. De esta forma generando un punto en el centro de cada rectángulo y uniéndolos se obtiene una malla de elementos triangulares equiláteros tal como se puede ver en la figura 3.24.

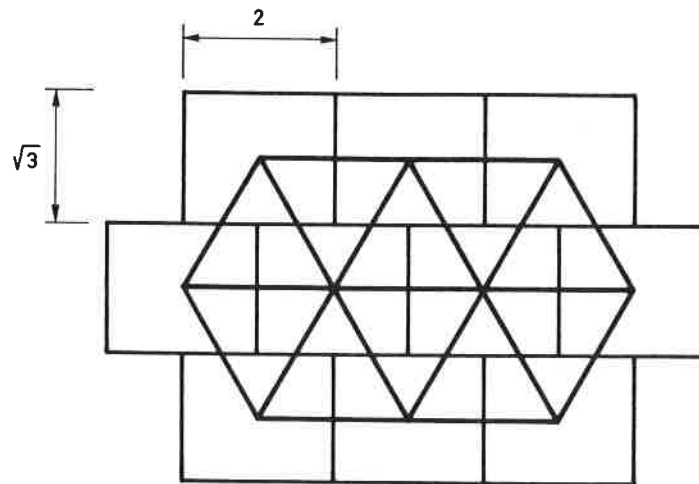


FIGURA 3.24 Algoritmo para la generación de puntos de Lo.

Cualquiera de las dos técnicas mencionadas presenta muchos problemas si se quiere utilizar una distribución de espaciamientos variables especificada mediante una malla de referencia. Ello obligaría a utilizar retículas distintas sobre cada elemento de la malla de base, que a su vez pueden ser muy numerosos y tener tamaños muy dispares. Estos métodos son más adecuados para casos en los que el dominio esté dividido en unas pocas zonas grandes en cada una de las cuales el espaciamiento sea constante.

Una técnica para la generación de los nodos interiores más flexible que las anteriores fue ideada en principio por Yerry y Shepard ^[66] y consiste en utilizar una estructura jerárquica de cuadrados que se van subdividiendo hasta alcanzar los tamaños del espaciamiento definidos en cada punto.

El algoritmo comienza por generar un cuadrado que cubre todo el dominio y que será la raíz de todo el árbol jerárquico de cuadrados que se generará posteriormente. A continuación este cuadrado se subdivide en cuatro cuadrantes y cada uno de los cuales se subdivide a su vez en otros cuatro si el espaciamiento definido en algún punto de su interior es inferior a la longitud de su lado. Este proceso se repite para todos los nuevos cuadrantes generados hasta que ya no sea necesario hacer nuevas particiones por ser los espaciamientos definidos en cada punto mayores o iguales a las longitudes de los lados de los cuadrados en que están incluidos. Asimismo se controla también el hecho de que cada cuadrado no esté en contacto con otro que esté más de dos peldaños por encima en el árbol de generación. Esto último controla que al final del proceso no hayan saltos bruscos en el espaciamiento de los nodos generados.

Al final de todo el proceso se obtiene una estructura jerárquica de cuadrados de manera que dentro de cada uno de ellos el espaciamiento definido no es inferior a la longitud de su lado. A partir de ello se puede optar por utilizar los vértices de esos cuadrados que sean interiores al dominio, como los nodos interiores sobre los cuales se efectuará una triangulación, o bien por generar de forma aleatoria un nodo dentro de cada uno de ellos. En la figura 3.25 se puede ver un esquema de la generación de una estructura jerárquica de cuadrados. En este ejemplo se ha procurado conseguir una distribución de espaciamientos pequeños en los puntos cercanos al contorno y mayores en el interior del dominio.

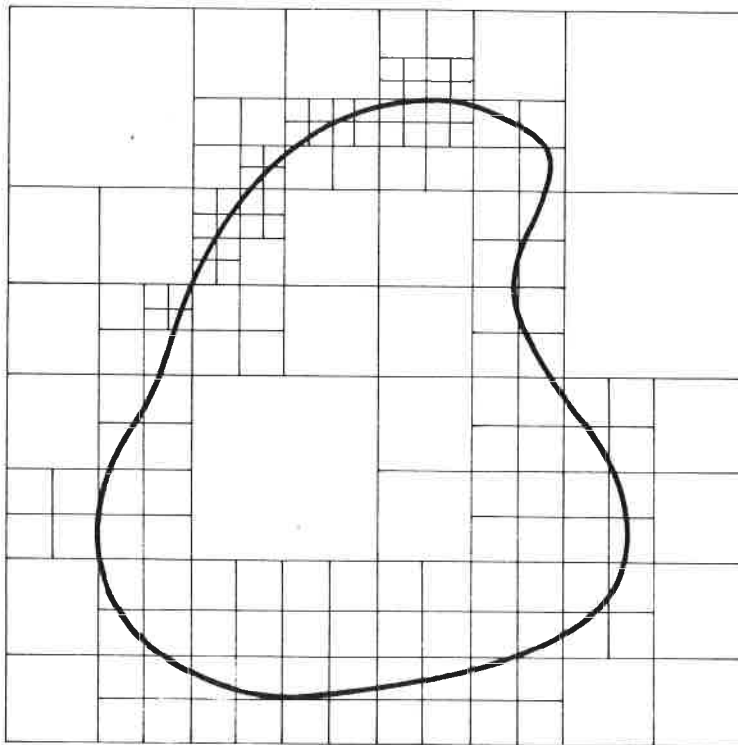


FIGURA 3.25 Estructura jerárquicos de cuadrados para la generación de puntos.

Otra técnica presentada por Frey [25] consiste en realizar una primera triangulación utilizando únicamente los puntos generados sobre el contorno. A continuación se examina cada elemento generado para ver si en su interior es o no necesario generar un nuevo punto. En caso afirmativo este punto se genera y

se añade a la triangulación. Los nuevos puntos generados se colocan siempre en el centro del círculo circunscrito al triángulo dentro del cual el nodo es generado.

Esta última técnica es similar a la anterior pero lo que se subdivide en cada etapa son triángulos y no cuadrados. Además en cada etapa del proceso y con la adición de cada nuevo punto se actualiza la malla ya generada. Por ello este proceso se puede utilizar también para realizar refinamientos de mallas ya utilizadas en un cálculo previo. Después de la adición de cada nuevo punto éste se conecta a los anteriores mediante una triangulación de Delaunay ya que como se verá a continuación esta técnica permite ir incluyendo los nuevos puntos uno por uno.

Las dos últimas técnicas descritas parecen las más potentes y a la vez flexibles para realizar procesos de remallados automáticos. Sin embargo ninguna de ellas ofrece la comodidad de los métodos de generación por avance frontal.

3.4.3.2 Triangulación de Delaunay

Dirichlet ^[17] propuso en 1850 un método mediante el cual un dominio dado se podía descomponer en un conjunto de polígonos convexos. Dado un conjunto de puntos en el plano, la teselación de Dirichlet es la construcción que asigna a cada punto una zona que es el área del plano más cercana a ese punto que a cualquier otro. Esta teselación en un dominio cerrado produce un conjunto de polígonos convexos no solapados, llamados regiones de Voronoi, que lo cubren totalmente. Esta definición se puede extrapolar fácilmente a un número superior de dimensiones.

Esta idea básica ha sido posteriormente redescubierta por varios investigadores en diferentes campos, y las regiones de Dirichlet se han descrito bajo una variedad de nombres: regiones de Theissen (meteorología), células de Wigner-Seitz (física de estado sólido), y diagramas de Voronoi (geometría computacional). Una extensa discusión sobre la aplicación de los diagramas de Voronoi se puede encontrar en la publicación de Green y Sibson ^[29].

Si un conjunto de puntos se denomina por $\{P_i\}$, entonces la región de Voronoi $\{V_i\}$ se puede definir como:

$$\{V_i\} = \{p : \|P - P_i\| < \|P - P_j\|, \quad \forall i \neq j\} \quad (3.4.7)$$

Es decir, la región de Voronoi $\{V_i\}$ es el conjunto de todos los puntos p que están más cercanos a P_i que a cualquier otro punto. La suma de todos los puntos p forma un polígono de Voronoi.

De la anterior definición se desprende que, en dos dimensiones, las líneas que forman las caras de un polígono de Voronoi son las medianas entre los dos puntos que ésta separa y por tanto son segmentos de la recta perpendicular por su punto medio a la línea que une ese par de puntos. Si todos los puntos que tienen en común alguna cara de los polígonos de Voronoi se unen el resultado es una triangulación de la región convexa formada por la unión de todos los puntos P_i . Esta triangulación se conoce como la triangulación de Delaunay del conjunto de puntos $\{P_i\}$.

Para cada triángulo existe un vértice del diagrama de Voronoi asociado, el cual está situado en el circuncentro de los tres puntos que forman el triángulo. En otras palabras, cada triángulo de Delaunay contiene un único vértice del diagrama de Voronoi, y ningún otro punto de la triangulación está situado dentro del circuncírculo de ese triángulo. La figura 3.26 muestra un esquema de un diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay asociada para un pequeño conjunto de puntos. En tres dimensiones cada región de Voronoi es un poliedro convexo y cada vértice de la estructura de Voronoi está en el circuncentro de una esfera definida por los cuatro puntos que definen un tetraedro de Delaunay.

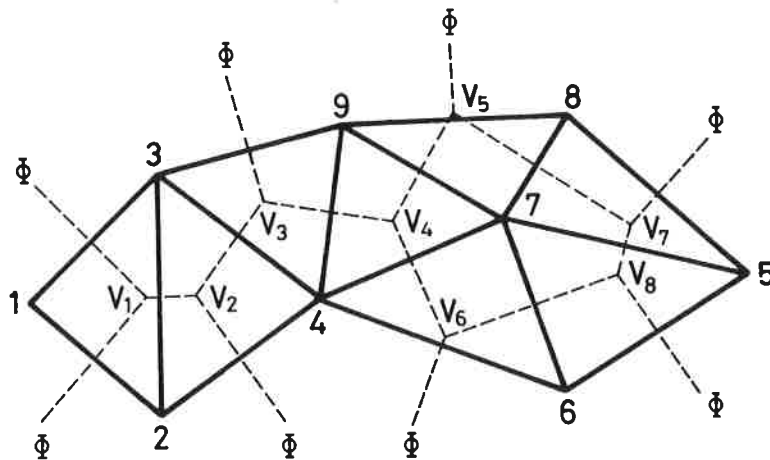


FIGURA 3.26 Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay asociada.

En la publicación de Green y Sibson [29] se pueden ver varios métodos para construir los diagramas de Voronoi y las triangulaciones de Delaunay. Otros artículos que describen otros algoritmos eficaces son los de Watson [64], Bowyer [12] y Fortune [24]. El algoritmo que aquí se va a comentar está basado en el trabajo de Bowyer.

Es posible describir completamente la estructura de un diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay construyendo dos listas para cada vértice de Voronoi: una formada por los puntos que forman el vértice de Voronoi (esos puntos son los que forman un triángulo de Delaunay); y otra formada por los vértices más inmediatos. En n dimensiones cada vértice tiene $n + 1$ puntos de formación y $n + 1$ vértices inmediatos. La tabla 3.1 contiene la información correspondiente a la figura 3.26.

VÉRTICE	PUNTOS DE FORMACIÓN			VÉRTICES INMEDIATOS		
1	1	2	3	2	Φ	Φ
2	2	3	4	1	3	Φ
3	3	4	9	2	4	Φ
4	4	7	9	3	5	Φ
5	7	8	9	4	7	Φ
6	4	7	6	4	8	Φ
7	5	7	8	5	8	Φ
8	5	6	7	5	8	Φ

TABLA 3.1 Estructura de datos para la triangulación mostrada en la figura 3.26.

El algoritmo de Delaunay es un proceso secuencial. Cada nuevo punto se introduce en la estructura ya existente, la cual se rompe y se reconecta para formar una nueva triangulación de Delaunay.

Los detalles del algoritmo se presentan paso a paso para el caso bidimensional.

1. Definir un polígono convexo que contendrá todos los puntos. Especificar cuatro puntos junto con su diagrama de Voronoi asociado. La figura 3.27 presenta un comienzo típico de este algoritmo junto con la estructura de Voronoi asociada y la tabla 3.2 describe la correspondiente estructura de datos. Los vértices 1, 2, 3 y 4 no están estrictamente definidos ya que están situados en el exterior del polígono inicial y por ello no tienen ni tres puntos de formación ni tres puntos inmediatamente cercanos. Para

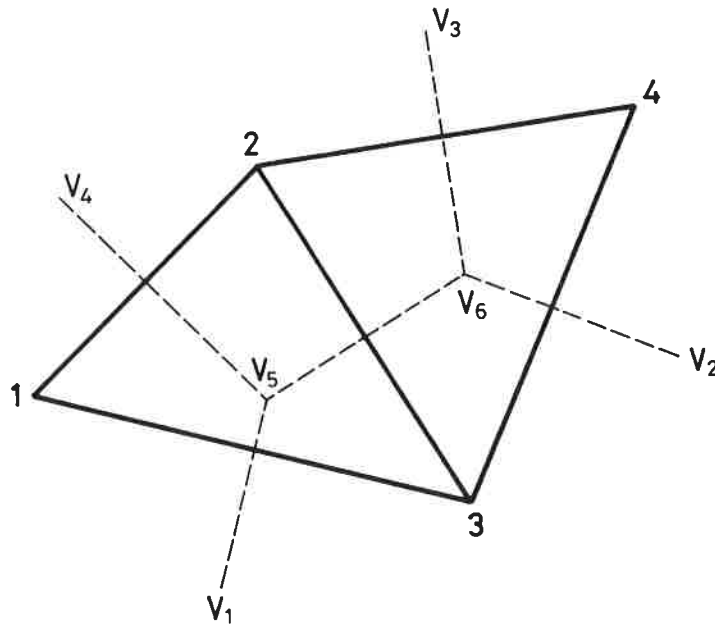


FIGURA 3.27 Triangulación inicial.

VÉRTICE	PUNTOS DE FORMACIÓN			VÉRTICES INMEDIATOS		
1	-10	1	3	-10	-10	5
2	-10	3	4	-10	-10	6
3	-10	2	4	-10	-10	6
4	-10	1	2	-10	-10	5
5	1	2	3	1	4	6
6	4	2	3	5	2	3

TABLA 3.2 Estructura de datos para la triangulación mostrada en la figura 3.27.

esos valores no determinados se ha utilizado un -10.

2. Introducir un nuevo punto dentro del polígono convexo formado por { 1, 2, 3, 4} .
3. Determinar todos los vértices del diagrama de Voronoi que serán eliminados. Todos los vértices cuyo circuncírculo asociado contenga el nuevo punto añadido será eliminado. Este paso es necesario para cumplir

la condición anteriormente mencionada acerca de la no existencia de ningún punto dentro del circuncírculo de cada triángulo. Para realizar esta operación es muy conveniente tener almacenadas la posición de cada vértice y el radio de su circuncírculo asociado.

4. Determinar cuales son los puntos de formación de los vértices de Voronoi a eliminar. Estos puntos serán los que se unirán al punto recién añadido para formar nuevos triángulos y rehacer la triangulación. La unión de cada uno de estos puntos con el nuevo punto formará cada una de las nuevas caras de los nuevos triángulos.
5. Determinar los vértices de Voronoi inmediatos a los vértices que van a ser eliminados que a su vez no sean eliminables. Esta información será importante para determinar las combinaciones válidas de vértices contiguos que se construirán en el paso 7.
6. Determinar los puntos de formación de los nuevos vértices de Voronoi. Los puntos de formación de cada nuevo vértice estarán formados por el nuevo punto añadido junto con dos puntos más que serán contiguos entre sí y formarán parte de alguno de los triángulos ya existentes. Estos dos puntos adicionales para formar cada triángulo serán siempre de los determinados en el paso 4.
7. Determinar los vértices de Voronoi inmediatos a los nuevos vértices. Después del paso 6. se habrán calculado cuales son los puntos de formación de todos los nuevos vértices de Voronoi. Para cada nuevo vértice se hace una búsqueda sobre los puntos de formación de todos los vértices inmediatos hallados en el paso 5. En el caso de que un par de puntos de formación coincida para un nuevo vértice y para otro de los hallados en 5. entonces estos dos vértices pasan a tener una conexión inmediata.
8. Reordenar la estructura de datos eliminando las filas correspondientes a los vértices eliminados
9. Repetir los pasos 2. a 8. para cada nuevo punto.

Siguiendo esta descripción, después de la adición de cada nuevo punto se obtendrá una nueva triangulación de Delaunay y su correspondiente diagrama de Voronoi. A efectos de facilitar la comprensión del funcionamiento del proceso se puede decir que todos los pasos anteriores para la adición de un nuevo punto P a una triangulación ya existente se pueden resumir en dos:

1. Eliminar todos aquellos triángulos cuyo circuncírculo contenga al nuevo

punto P . Después de dicha eliminación quedará una zona del dominio que no estará triangulada.

2. Conectar todos los vértices de la línea que delimita la zona no triangulada con el nuevo punto P . De esta forma se construye una nueva triangulación.

Esta última descripción muestra claramente cual es la filosofía del método. Sin embargo, para poder programar sobre un ordenador el algoritmo de triangulación de Delaunay es conveniente seguir todas las etapas detalladas al principio.

En la figura 3.28 se puede ver una situación general en la que a una triangulación ya realizada se añade un nuevo punto P . En la primera figura están marcados los triángulos cuyo circuncírculo contiene al nuevo punto añadido. Los vértices correspondientes a estos triángulos, marcados con un "o", serán los eliminados. Tal como se ve al pasar a la segunda figura los puntos de formación de los vértices eliminados se unen al nuevo punto para formar la nueva triangulación.

Los vértices almacenados en el paso 5. son los correspondientes a los triángulos adyacentes a los que están marcados para eliminar, éstos están marcados con un "o". Estos vértices se unen en la segunda figura a los de los nuevos triángulos contiguos.

En la figura 3.28 se puede ver también las dos etapas en que se puede resumir todo el proceso. En el primer dibujo se ha rayado la zona ocupada por los elementos cuyo circuncírculo contiene al nuevo punto P . Estos elementos se eliminan y los vértices del contorno de la zona que queda vacía se reconectan con el nuevo punto P tal como muestra el segundo dibujo.

La especificación de los cuatro puntos iniciales que definen el primer polígono convexo, en el cual deben estar incluidos todos los puntos, no representa en la práctica ninguna restricción. Estos puntos se pueden escoger de forma que el polígono que formen sea lo suficientemente grande como para acoger todos los puntos interiores. En ese caso no se tendrá ninguna restricción al generar la malla.

Al efectuar una triangulación de este tipo pueden aparecer problemas de tres tipos:

- a) Dos puntos coinciden en el plano.
- b) Tres puntos de un posible triángulo están situados sobre una recta.

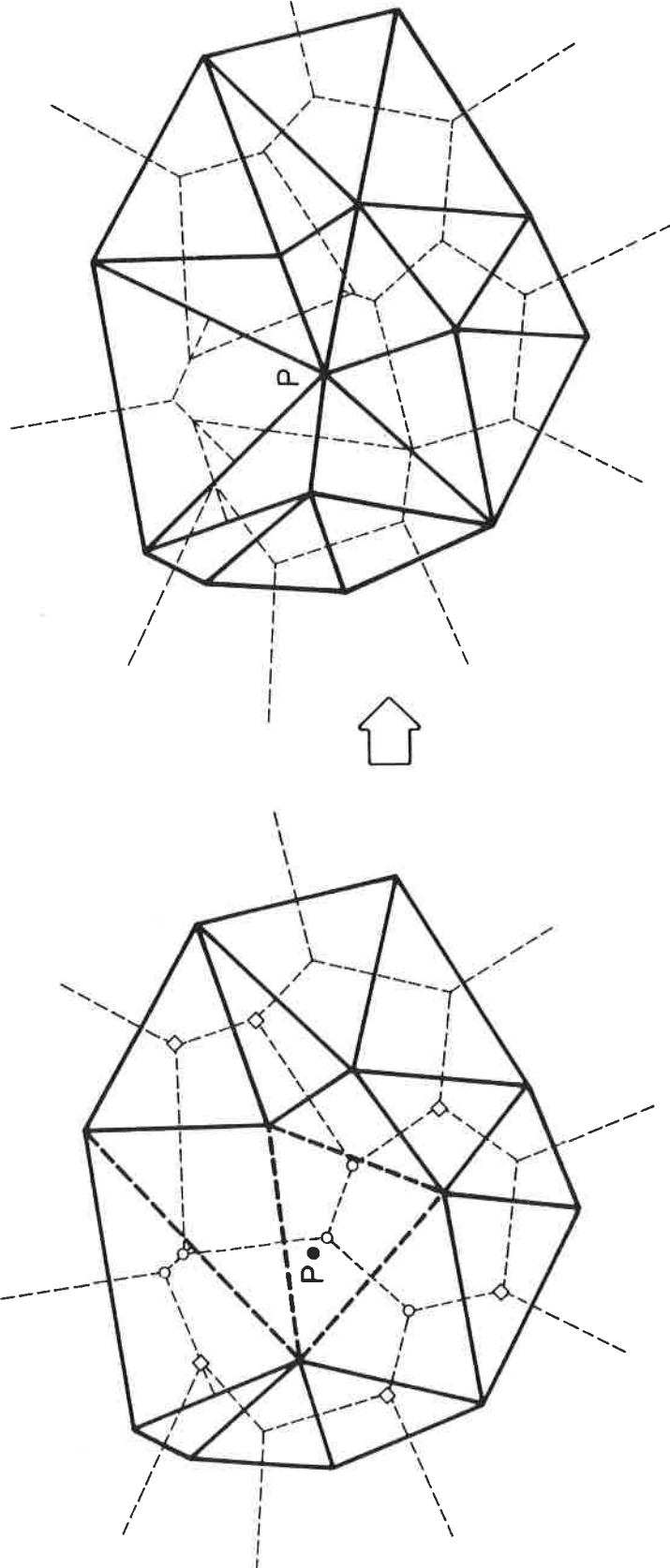


FIGURA 3.28 Adición de un nuevo punto P a una triangulación previa.

- c) Cuatro o más puntos están situados sobre un círculo.

Los problemas del primer tipo se pueden evitar fácilmente exigiendo que cada nuevo punto esté a más de una distancia mínima antes de ser admitido en el paso 2.

El segundo de los problemas implica que el circuncentro de los tres puntos está en el infinito. Esta posición es fácilmente detectable y en ese caso el nuevo punto que causa el problema se puede rechazar o mover una pequeña distancia antes de ser incluido.

El tercero de los problemas es de naturaleza más sutil que los anteriores. En este caso dos o más vértices coinciden y dan lugar a puntos en los cuales se encuentran más de tres polígonos de Voronoi. En tales situaciones la triangulación resultante no es única, pero ello no es en sí mismo un problema. El proceso de triangulación es todavía válido para estos casos. No obstante esta degeneración se puede manifestar en una fase posterior del proceso cuando al introducir un nuevo punto se debe eliminar uno de los vértices pero no el otro. En ese caso puede surgir una inconsistencia en la estructura de datos que puede colapsar el proceso. Los problemas de este tipo ocurren en muchas ocasiones debido a los errores de redondeo.

La triangulación de Delaunay proporciona una forma sistemática de construir un conjunto de triángulos cubriendo un conjunto de puntos. Al aplicar esta técnica a la generación de mallas de elementos finitos hay que controlar dos aspectos: que la triangulación se ajuste a la forma del contorno del dominio; y que la malla tenga una variación de tamaños tan regular y suave como sea posible. Una propiedad de la triangulación de Delaunay es la maximización de la "suavidad" de los triángulos formados para cualquier conjunto de puntos. Una distribución regular de los puntos contribuye además a mejorar este último aspecto. La primera de las condiciones es, no obstante, algo más difícil de conseguir.

La triangulación de un conjunto de puntos, que incluye puntos de los contornos exterior e interiores (agujeros), cubrirá todo el polígono convexo que se haya formado en el paso 1. Es necesario, al final del proceso de triangulación, eliminar los triángulos interiores a los agujeros y exteriores al contorno y asegurar que las superficies de la malla coincidan con las del objeto en cuestión. En general, para una forma dada y un conjunto de puntos arbitrario no será posible obtener, sin técnicas adicionales, una malla válida. Ello será debido a que el contorno no estará formado por caras conectadas ya que algunos de los lados de los triángulos cruzarán ese contorno.

Se han propuesto diversos métodos para asegurar la obtención de mallas

válidas [65]. La mayoría siguen los mismos procedimientos generales pero varían en los detalles. En general la generación de mallas utilizando el algoritmo de Delaunay sigue los siguientes pasos:

1. Formación de un polígono inicial que contenga todos los puntos. Este polígono es igual al precisado al principio del proceso de triangulación anteriormente descrito.
2. Utilización del algoritmo de Delaunay, tal como se ha descrito previamente, para triangular los puntos pertenecientes a los contornos tanto exteriores como interiores. Es importante el tener clasificados los puntos según estén sobre un contorno exterior, interior o fuera de él.
3. Identificación de los triángulos exteriores al dominio, es decir, que se salgan fuera del dominio tanto por fuera como por dentro en el caso de que haya agujeros. Este proceso, que puede ser trivial en dos dimensiones, es algo más complejo en un espacio tridimensional.
4. Comprobación de que los contornos están completos. Si los contornos no están completos o bien algunos de los circuncírculos son demasiado grandes se añaden nuevos puntos sobre el contorno hasta conseguirlo.

Los contornos deben estar correctamente definidos de forma que ninguna cara penetre dentro del dominio. Es decir, un contorno debe estar definido por caras existentes en la triangulación (ver figura 3.29). Es fácil comprobar si cada punto del contorno está conectado por dos caras de dos triángulos que no estén marcados como pertenecientes al exterior del dominio. Si esta condición no se cumple es sencillo añadir un nuevo punto sobre ese contorno y retriangular. En la figura 3.29 una cara que conecta los puntos U y W penetra el contorno y la cara CD no existe en la triangulación. No obstante si se añade un punto adicional F la nueva triangulación produce las caras CF y FD que hacen que el contorno sea conforme. Este proceso se termina hasta que el contorno esté completo.

5. Identificación y marca de todos los triángulos exteriores al dominio. Si todos los contornos son conformes entonces una repetición del paso 3. identifica todos los triángulos exteriores. Estos triángulos se marcan ya que se deben proteger ante la introducción de nuevos puntos. Es decir, los puntos que al ser introducidos podrían romper alguno de los triángulos marcados son rechazados. De esta forma es posible asegurar que los lados del contorno permanecen intactos.

Este proceso de rechazo de puntos puede conducir a la eliminación de un

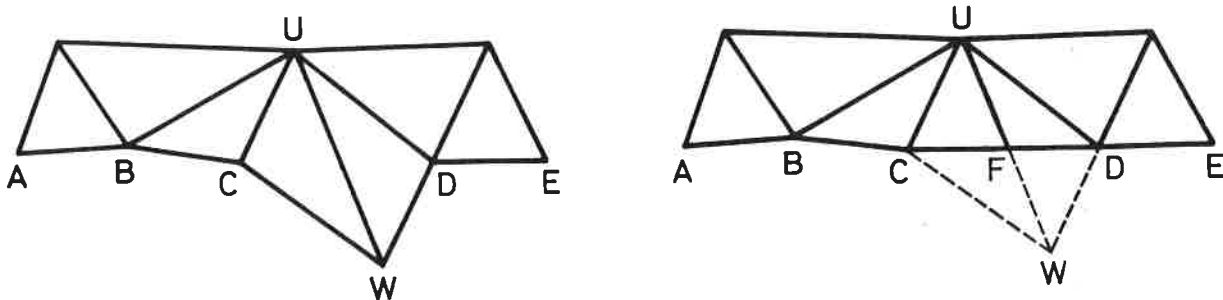


FIGURA 3.29 Adición de un nuevo punto para modelar correctamente el contorno.

número importante de los mismos que estén cercanos a los contornos. Ya que en general es importante tener un gran número de ellos cerca de los contornos esta estrategia no siempre es adecuada. Para prevenir estos casos Baker ^[8]^[9] sugiere chequear el círculo de Delaunay asociado a cada nodo del contorno y si su radio excede un valor máximo se añaden nuevos puntos para reducirlo. El efecto de estas actuaciones es reducir el tamaño de las regiones protegidas donde no es posible añadir nuevos puntos, y por ello, facilitar la colocación de puntos más cercanos a los contornos.

6. Adición de todos los puntos interiores al dominio. Todos los puntos que al ser introducidos intenten modificar alguno de los triángulos marcados se eliminan.
7. Eliminación de todos los triángulos marcados.
8. Comprobación de la calidad de la malla. Para mejorar la misma se pueden utilizar las técnicas de cosmética descritas anteriormente.

La naturaleza aditiva punto por punto de este algoritmo permite que después de haber realizado un cálculo introducir más puntos dentro de la malla para relizar un refinamiento. Es por ello que Frey ^[25] propone el chequear los elementos dentro de los cuales es necesario introducir nuevos puntos y colocar, en caso afirmativo, un nuevo punto en su circuncentro.

Las técnicas como la descrita son realmente potentes para efectuar la triangulación de un conjunto de puntos. Sin embargo, no está tan bien resuelto

el aspecto de la generación de los propios puntos que marcarán totalmente las propiedades de la triangulación posterior. Además hay que recordar que estas técnicas generan elementos lo más equiláteros posible no permitiendo por tanto el uso de elementos alargados.

3.5 ADAPTABILIDAD DE LAS MALLAS. MÉTODOS HÍBRIDOS

Los requerimientos que pueden establecerse para las mallas de elementos finitos son de dos tipos:

- Que sean capaces de representar la geometría del dominio con la adecuada resolución.
- Que proporcionen buenos resultados al ser utilizadas en algún cálculo por elementos finitos.

Estos requerimientos son comunes a todos los contextos en que estas mallas pueden ser utilizadas, desde la mecánica de sólidos hasta la dinámica de fluidos pasando por los problemas térmicos, electromagnéticos, etc.

El primero de los requerimientos se cumple sin más que observar si la representación del contorno en la malla es lo suficientemente precisa como para considerar que su geometría coincide con la del dominio en estudio.

Para el segundo requerimiento será preciso en general utilizar alguna técnica de adaptabilidad para conseguir una malla que proporcione resultados con la adecuada precisión. Dada la imposibilidad de generar una malla adecuada sin conocer a priori ni siquiera una aproximación a la solución del problema planteado, resulta imposible construir la misma sin recurrir a soluciones previas. Es por ello que la construcción de mallas adecuadas es un proceso iterativo donde las mismas se van adaptando a los requerimientos del problema.

El tipo de generación de mallas empleado (estructuradas o no estructuradas) facilita la utilización de una u otra técnica de adaptabilidad. Los algoritmos de refinamientos jerárquicos son quizás los más independientes del tipo de generador empleado para construir la malla de base. Es decir, estas técnicas de adaptabilidad se pueden emplear a partir de cualquier tipo de malla. Por ejemplo Zienkiewicz, Zhu y Gong ^[75] presentan una técnica mixta en la cual utilizan primero un algoritmo de remallados automáticos no estructurados hasta alcanzar un cierto nivel de precisión y a continuación terminan el proceso de adaptabilidad mediante un proceso de refinamiento de tipo p .

Si se trabaja con mallas estructuradas las técnicas existentes para efectuar procesos de adaptabilidad son:

1. *Refinamientos jerárquicos.*

2. *Refinamientos no jerárquicos.* Esta técnica consiste en introducir nuevos nodos en la malla pero teniendo cuidado de no alterar la conformidad de la misma. Esta introducción, no obstante, puede llegar a destruir la propia estructura de la malla alterando por tanto sus propiedades. Detalles de procesos de este tipo se han descrito en el capítulo anterior.
3. *Redistribución de nodos.* La forma de llevar a cabo este proceso se ha descrito en el apartado 2.2. En estos casos el número de nodos es fijo y lo que se hace es optimizar la posición de los mismos minimizando la estimación del error.

La utilización de mallas no estructuradas es mucho más flexible en cuanto al uso de técnicas de adaptabilidad. Todas las técnicas recién mencionadas se pueden utilizar también en este caso sin temor además a perder ningún tipo de estructura. Sin embargo, la gran flexibilidad de este tipo de mallas hace que los algoritmos que mejor se adaptan a las mismas sean los siguientes:

1. *Refinamientos no jerárquicos.* Estos refinamientos se pueden efectuar de diversas maneras. Dadas las posibilidades de reconexión de nuevos elementos que proporcionan estas mallas se pueden llevar a cabo refinamientos locales como los esquematizados en la figura 3.30. Además, si se está utilizando un algoritmo de triangulación de Delaunay, se puede realizar una nueva triangulación después de la adición de cada nuevo punto sin más que alterar la malla localmente.
2. *Remallados automáticos.* Estos son los procesos asociados, por excelencia, con los generadores de mallas no estructuradas ya que es de esta forma como se saca más partido de sus posibilidades. Las técnicas de este tipo explotan la capacidad que tienen estos generadores de controlar en cada punto el tamaño de los elementos generados. Por tanto, en vez de efectuar refinamientos o modificaciones locales sobre una malla previa lo que se hace es construir otra malla completamente nueva y hecha exactamente a la medida de las necesidades del problema. Para este proceso se utiliza una distribución de espaciamientos obtenida a partir de la utilización de un estimador de error sobre unos resultados obtenidos con una malla previa que a su vez podrá utilizarse como malla de referencia. Como ya se ha comentado los procesos de este tipo actúan de una forma muy elegante y "natural" de forma que todas las secuencias del mismo se encadenan formando un flujo cíclico de información como el de la figura 3.31.

Los algoritmos de este tipo producen mallas cuya calidad es totalmente independiente de lo buenas o lo malas que hayan sido las mallas utilizadas previamente.

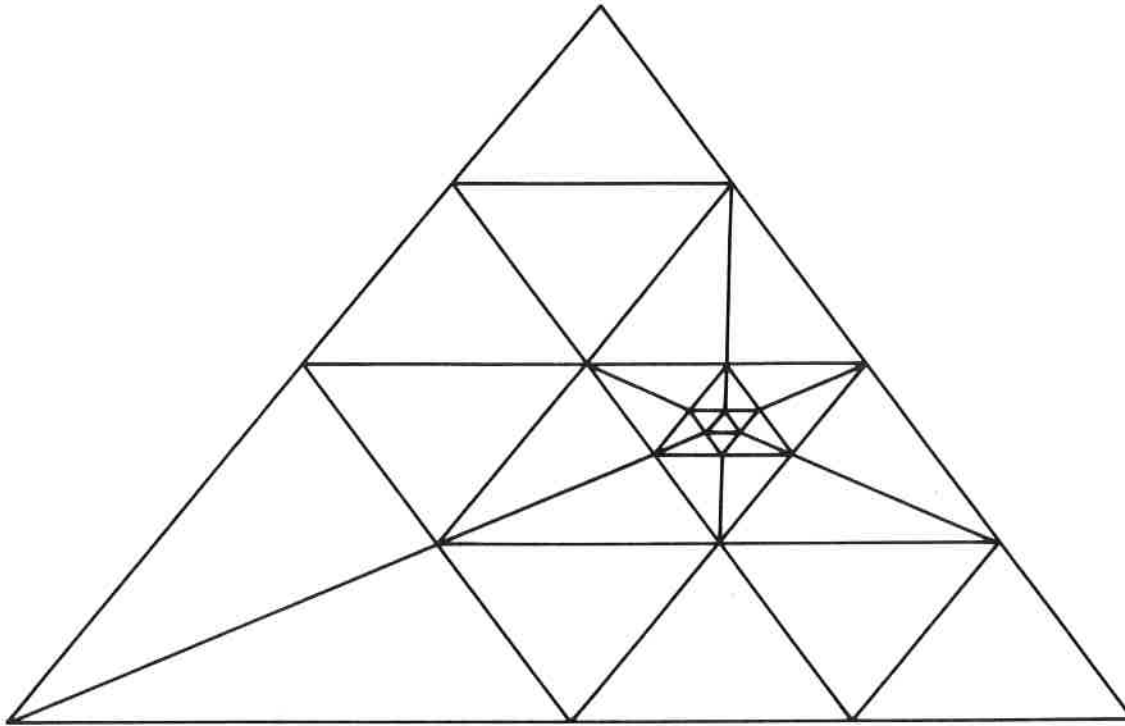


FIGURA 3.30 Refinamiento local no jerárquico.

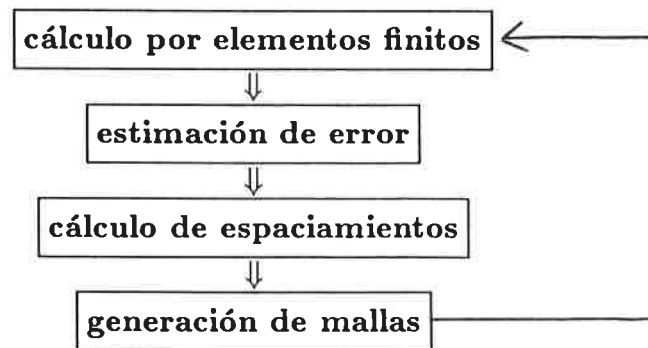


FIGURA 3.31 Flujo cíclico de la información en los remallados automáticos.

En un intento por conseguir aunar las virtudes de los dos grandes tipos de generadores de mallas han surgido las técnicas híbridas de generación. Estas técnicas descomponen los dominios en bloques de forma que dentro de cada uno de ellos sea sencillo generar una malla estructurada. A continuación estos bloques se unen utilizando algoritmos de mallas no estructuradas. Algoritmos

de este tipo resultan especialmente útiles cuando hay que tratar con dominios que a su vez están formados por varias partes claramente diferenciadas. Asimismo, este tipo de técnicas permiten hacer refinamientos locales de las zonas estructuradas mediante técnicas propias de mallas no estructuradas. Más información sobre este tipo de generación se puede encontrar en la publicación de Weatherill ^[65].

3.6 METODOLOGÍA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN GENERADOR DE MALLAS. PROGRAMA 2DUMG.

Al realizar un programa de generación de mallas hay que pensar no sólo en la creación de las mismas sino también en la generación de todos los datos necesarios para formar el input de un programa de cálculo por elementos finitos. Ello significa que, además de generar la información necesaria para describir la malla, también será necesario generar información para describir las cargas y las coacciones que actuarán sobre ella.

Un programa de generación de mallas debe, por tanto, ser capaz de aceptar información acerca de como se distribuyen las cargas y coacciones en el contorno y producir información sobre cuales son los elementos y nodos de la malla afectados por ellas. De esta forma se evita que, una vez generada la malla, el usuario tenga que identificar sobre ella los elementos y nodos que definen la aplicación de una determinada carga o coacción.

Para comprobar la capacidad de alguna de las técnicas de generación descritas, se ha confeccionado un programa de ordenador llamado 2DUMG que presenta todas las posibilidades mencionadas. Este programa utiliza B-splines para definir las curvas que definen el dominio. Asimismo utiliza el método de generación por avance frontal, comentado en el apartado 3.4.2 y usa una malla de referencia para indicar las características de la malla a generar.

En los siguientes apartados se describe la información necesaria para alimentar este programa de generación, lo cual da una idea de cuales son sus posibilidades. Asimismo también se presenta la forma de los resultados y algunos ejemplos de aplicación.

3.6.1 Información necesaria para el programa de generación

La información necesaria para alimentar el programa de generación se puede dividir en tres partes:

- Información sobre la forma del dominio.
- Información sobre la localización y valor de las cargas y coacciones definidas sobre el dominio.

- Información sobre la malla de referencia.

3.6.1.1 Información sobre la forma del dominio

Para definir la forma del dominio se utilizan B-splines los cuales pueden formar curvas abiertas o cerradas que a su vez pueden ser interiores o de contorno.

Las curvas de contorno son aquellas que formarán la frontera del dominio en estudio y por tanto el algoritmo de generación de mallas construirá elementos únicamente sobre uno de sus lados. Estas curvas pueden formar no solo el contorno exterior de un objeto sino también agujeros interiores. El dominio debe estar totalmente delimitado por curvas de este tipo.

Las curvas interiores son aquellas que no forman parte del contorno del dominio. El algoritmo de generación formará elementos sobre los dos lados de estas curvas. Estas curvas se pueden utilizar para modelar diversas características como pueden ser:

- Líneas de separación entre materiales distintos.
- Líneas de aplicación de cargas, ya sean repartidas o puntuales.
- Líneas de aplicación de coacciones.
- Líneas de generación de lados de elementos para conseguir nodos situados sobre una determinada curva.

Las curvas únicamente pueden cruzarse sobre los puntos que se utilice para definir las.

En todos los puntos utilizados para definir las curvas se puede utilizar las capacidades de los B-splines para controlar su grado de continuidad. Para ello se hace uso de los conceptos explicados en el apartado **3.2.3**.

Para definir las curvas necesarias, el primer dato debe ser el número de curvas y el número de puntos necesarios para definir todas ellas. A continuación se deben suministrar las coordenadas de todos los puntos que se utilicen

para definir las. Para cada una de las curvas se debe suministrar la siguiente información.

- Número de puntos que definen esa curva.
- Indicador sobre si la curva es abierta o cerrada.
- Indicador sobre si la curva es interior o de contorno. En este último caso debe tenerse en cuenta que los elementos se generarán sobre el lado derecho de la misma según el sentido de recorrido de los puntos que la definen.
- Tipo de material de los elementos situados a la derecha de la curva. En el caso de las curvas interiores también debe especificarse el tipo de material a la izquierda de la misma.
- Número y características de los puntos de definición de la curva. Las características de los puntos se refieren al grado de continuidad de la curva sobre los mismos. En cada punto en que la curva no sea de derivada segunda continua se deben imponer tantas condiciones como grados de continuidad se rebajen. Estas condiciones afectan a las pendientes y curvaturas de la curva en ese punto y se deben suministrar los parámetros p , f y/o h descritos en el subapartado 3.2.3.

El programa acepta también las características mecánicas de cada tipo de material con objeto de que éstas puedan ser escritas en un archivo de datos que puede sea utilizable directamente como input del programa de cálculo.

3.6.1.2 Información sobre cargas y coacciones

Las cargas y coacciones se tratan de la misma manera identificando sobre las curvas definidas las zonas en que éstas actúan.

Se pueden definir varios conjuntos de coacciones, pero de manera que los nodos afectados sean siempre los mismos cambiando entre ellos los valores impuestos. De esta forma todos los conjuntos de coacciones definidos se pueden resolver con el mismo ensamblaje de la matriz de rigidez.

Tanto las cargas como las coacciones pueden ser puntuales o estar referidas a tramos de las curvas definidas. Por ello lo primero que hay que definir es cuantas de ellas son puntuales y cuantas son repartidas. A continuación se debe introducir información sobre cada una de ellas.

Las cargas o coacciones puntuales solo pueden estar definidas sobre puntos de los utilizados para definir las curvas. En ese caso la información necesaria para definir las es el número del punto, el grado de libertad a que afecta la carga o coacción y su valor.

Las cargas o coacciones repartidas deben estar definidas sobre tramos de curva limitados por puntos de definición. Los datos necesarios para definir las son:

- Número de la curva.
- Número de grado de libertad coartado o cargado.
- Número del punto en el cual comienza el tramo coartado o cargado.
- Número del punto en el cual acaba el tramo coartado o cargado.
- Valor de la coacción o carga sobre el primer punto del tramo.
- Valor de la coacción o carga sobre el último punto del tramo.

Los valores de las cargas y coacciones se interpolan linealmente con la longitud del tramo definido. Además la curva se recorrerá siempre en el sentido en que ha sido definida para ir desde el primer punto del tramo hasta el último.

3.6.1.3 Información sobre la malla de referencia

Para definir la malla de referencia es necesario conocer las coordenadas de los nodos que la forman y las conexiones nodales de cada elemento. Para ello hay que especificar el número de nodos y elementos, y sus vectores de coordenadas y conexiones nodales.

Además hay que definir los parámetros necesarios para generar la malla utilizando el algoritmo de avance frontal. Como ya se ha comentado en el

subapartado 3.4.1 estos parámetros se pueden definir sobre los elementos o bien sobre los nodos de la malla de base. En cualquiera de los dos casos estos parámetros son:

- Espaciamiento δ .
- Alargamiento s . En caso de que no se quiera generar una malla con elementos alargados se debe hacer $s = 1$.
- Vector que define la dirección del alargamiento α .

Un paso previo importante antes de comenzar el proceso de generación de puntos sobre el contorno es realizar una expansión de la malla de referencia. Dado que un programa de generación como el que se está describiendo se puede utilizar dentro de un proceso de refinamientos automáticos, ocurrirá en muchas ocasiones que las mallas de referencia serán mallas utilizadas en cálculos previos. En estos casos, debido a que la discretización del contorno es solo una aproximación al mismo, puede ocurrir que haya puntos situados sobre las curvas de los contornos que estén fuera de la malla de base. Si se pretende hallar los parámetros de generación correspondientes a esos puntos ocurrirá que no es posible hallar sobre que elementos de la malla de referencia están situados, y por tanto, no se podrán conocer esos valores. Un esquema de esta problemática se puede ver en la figura 3.32 donde el punto P no pertenece a ninguno de los elementos de la malla de base.

El problema anterior se subsana realizando una expansión de la malla de referencia. Esta expansión se realiza mediante dos etapas:

1. Adición de nuevos elementos a la malla de base para conseguir una malla convexa en caso de que no lo sea. Esta etapa es necesaria ya que de esta forma para realizar la expansión será necesario mover solo los puntos situados sobre el contorno de la malla convexa. En caso contrario se tendrían que mover también los puntos situados sobre contornos interiores pudiendo ocurrir que algunos elementos se introdujesen dentro de otros.

Para conseguir una malla convexa se puede utilizar el mismo algoritmo de generación por avance frontal del apartado 3.4.2 generando un frente con los segmentos del contorno que no formen parte del polígono convexo y uniéndolos con puntos ya existentes en el contorno.

2. Expansión de la malla. Para ello hay que detectar los nodos situados sobre el polígono convexo formado y moverlos una pequeña distancia hacia el exterior del mismo.

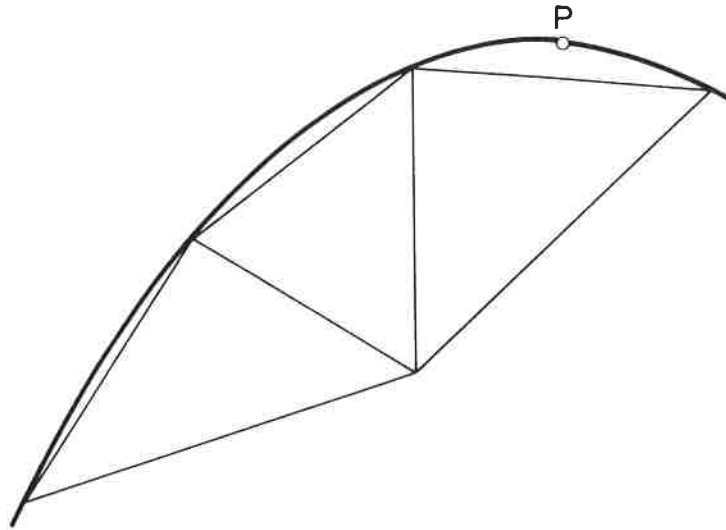


FIGURA 3.32 Punto del contorno P situado fuera de la malla de referencia.

3.6.2 Salida de los resultados del proceso de generación

Es muy conveniente que un programa de generación de mallas pueda volcar sus resultados de diversas maneras. En el caso del programa 2DUMG se pueden obtener las siguientes salidas:

- Salida alfanumérica con la información necesaria para definir la malla generada y las cargas y coacciones definidas sobre ella. Esta salida puede ser utilizada directamente como archivo de entrada de datos para un programa de cálculo.
- Salida en código binario sobre la malla generada. Esta salida es apropiada si se quiere utilizar un programa de postproceso para ver las características de la malla generada.
- Salida gráfica de los diversos pasos del proceso de generación. Esta salida proporciona una representación gráfica, ya sea sobre una terminal, impresora, plotter, etc. de las siguientes informaciones:
 - Curvas de definición del dominio. Con esta representación se puede comprobar que su definición ha sido correcta.
 - Malla de referencia. También se puede así comprobar que su

definición ha sido correcta.

- Puntos generados sobre el contorno.
- Proceso de generación. El programa va dibujando uno a uno todos los elementos a medida que los va generando. Esta representación es una herramienta muy útil para testear el correcto funcionamiento del algoritmo de generación.
- Malla final. Al final de todo el proceso de generación y cosmética el programa dibuja la malla generada.

3.6.3 Ejemplos de generación de mallas

En este apartado se van a presentar una serie de mallas generadas con el programa 2DUMG. Para su construcción se han utilizado todas las posibilidades comentadas anteriormente de forma que a la vista de los mismos se puede comprobar la gran capacidad y versatilidad que puede llegar a tener un programa de este tipo.

Todos los ejemplos que se presentan a continuación corresponden a trabajos llevados a cabo en el Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña siguiendo varias de sus líneas de investigación. En todos ellos se han utilizado las técnicas de generación de mallas descritas en este capítulo y concretamente el programa 2DUMG. Estas líneas de investigación abarcan campos diversos que van desde la mecánica de sólidos hasta la dinámica de fluidos. Esta diversidad permite apreciar que la aplicación de un generador de este tipo es muy amplia, incluyendo todos aquellos ámbitos en que se utilice el método de los elementos finitos.

En uno de los ejemplos presentados se ha hecho uso de las técnicas de remallado automático dentro del ámbito de la dinámica de fluidos. En él se presentan una sucesión de mallas obtenida a través de diversos remallados y utilizando un estimador de error propio de ese contexto y, por tanto, distinto de los descritos en el capítulo 2.

3.6.3.1 Ejemplo nº 1. Espécimen de laboratorio

En este primer ejemplo se presentan las mallas utilizadas en un trabajo de investigación cuyos resultados están publicados en un artículo escrito por Oliver, Cervera, Oller y Lubliner [47][48]. El objeto de este estudio es tratar de modelar los resultados experimentales conseguidos en el ensayo de fractura de un espécimen de laboratorio que tiene la forma de la figura 3.33. Para ello se comparan dos ecuaciones constitutivas distintas para modelar el hormigón. El tipo de elemento utilizado es el lineal de 3 nodos. El contorno de la pieza es un cuadrado de 45.7 cm. de lado.

Además del estudio sobre ecuaciones constitutivas realizado se ha intentado ver cual es la dependencia de los resultados obtenidos respecto a posibles direccionalidades de la malla. Para ello, utilizando las posibilidades del programa de generación, se han construido varias mallas virtualmente idénticas con la diferencia de que en cada una de ellas hay unas direcciones de elementos prefijadas a partir del punto donde comienza la fisuración. Estas direcciones provocan que la fisuración vaya avanzando siguiendo una línea quebrada. Las cargas a que se somete el espécimen son dos fuerzas puntuales aplicadas en los dos extremos del diámetro horizontal del agujero circular que tiene la pieza.

En las figuras 3.33-3.47 se puede ver la sucesión de definiciones de dominio mallas de referencia y mallas generadas para diversas inclinaciones de la dirección prefijada de la malla. La definición de los contornos se ha conseguido utilizando las siguientes curvas:

- Contorno exterior que sigue la forma del agujero circular y la entalladura. Para los puntos angulosos se ha utilizado la capacidad de los B-splines de producir en ellos curvas con pendiente discontinua y curvatura nula.
- Dos líneas rectas que definen un cuadrado interior que constituye una zona de especial interés en el estudio realizado.
- Dos líneas rectas que parten de la entalladura, donde comienza la fisuración, y se prolongan hasta el contorno con una dirección prefijada.

En la malla de referencia se han especificado en los nudos los siguientes tamaños de elemento:

- 0.6 cm. en el punto situado sobre la entalladura.
- 3.0 cm. en el punto situado sobre el otro extremo de la línea que marca la direccionalidad de la fisura.

- 5.0 cm. sobre los puntos situados sobre los vértices del cuadrado interior que delimita la zona de especial interés en el estudio.
- 12.0 cm. en el resto de los puntos.

Como puede apreciarse en las figuras, las rectas interiores marcan siempre la dirección de una cadena de lados de elementos lo cual se utiliza en este caso para provocar la direccionalidad deseada. Además el tamaño de los elementos es mínimo alrededor de la entalladura y siguiendo las líneas que salen de ella para crecer a medida que se acercan al contorno.

3.6.3.2 Ejemplo nº 2. Viga entallada

Este segundo ejemplo se ha utilizado en un estudio muy similar al anterior. Se trata en este caso de estudiar la direccionalidad de la malla para el cálculo con un modelo de fisuración de una viga biapoyada con una entalla en su parte inferior. El tipo de elemento utilizado es también en este caso el lineal de 3 nodos. Las dimensiones de la viga son de 100x450 cm.

El objeto de este estudio ha sido el observar la dependencia de la propagación de la fisuración con respecto a la direccionalidad de los elementos. Para ello se han marcado en la malla unas direcciones con inclinación diversa a partir del punto de la entalla.

En las figuras 3.48-3.51 se puede ver para cada caso la definición del dominio, la malla de referencia y la malla generada.

Al igual que en el caso anterior se ha delimitado una zona cuadrada justamente por encima de la entalla que constituye un área de especial interés por ser la zona por donde avanza la fisuración. Dentro de este área se han definido unas líneas rectas que marcan la dirección de los elementos generados. Para delimitar el contorno se han utilizado, al igual que en el caso anterior, puntos con pendiente discontinua y curvatura nula.

Los tamaños de los elementos se han definido sobre los nudos de la malla de referencia y son:

- 6.0 cm. en los puntos situados en el cuadrado interior.

- 50.0 cm. en los puntos situados sobre el borde inferior de la viga.
- 120.0 cm. en los dos vértices extremos del borde superior de la viga.

En este caso se puede apreciar también la versatilidad del programa utilizado pudiéndose generar, con un mínimo esfuerzo, varias mallas equivalentes que se diferencian únicamente en las direcciones preferentes de los lados de los elementos situados en la zona de estudio.

3.6.3.3 Ejemplo nº 3. Perfil de ala de avión

Este ejemplo corresponde al caso del perfil de un ala de avión tipo NACA0012 y corresponde a un trabajo realizado por Miquel, Oñate y Quintana [43]. Se trata, en este caso, de estudiar el flujo del aire alrededor del mencionado perfil tanto a velocidades subsónicas como supersónicas utilizando las ecuaciones de Euler.

La malla utilizada discretiza el dominio por donde circula el aire que está situado entre el perfil y un contorno suficientemente lejano como para que las condiciones de contorno aplicadas sobre él no afecten negativamente a la solución. Por razones de presentación, en las figuras se ha situado el contorno mucho más cercano al perfil de lo que en realidad lo está en las mallas utilizadas para el cálculo.

En la figura 3.52 se representa la definición de los contornos utilizados. Se ha situado una línea horizontal que parte del extremo del borde de ataque del perfil y sobre la cual se desea que esté situada una línea de nudos. Esta sucesión de nudos se utiliza para representar la variación de las variables del problema a medida que se acercan al borde del perfil. El punto situado en el extremo del borde de salida es un punto con pendiente discontinua y curvatura nula.

En la figura 3.53 está representada la malla obtenida. En este caso la malla de referencia utilizada está compuesta de un solo elemento que cubre todo el dominio y que marca una variación lineal del tamaño de elemento.

En esta malla se puede apreciar una gran densidad de elementos situada justo sobre el extremo del borde de ataque. Esta densidad está provocada por la necesidad de representar con la suficiente exactitud la forma del contorno en esa zona en la cual existe una alta curvatura.

3.6.3.4 Ejemplo nº 4. Morro de avión a velocidad supersónica

Este ejemplo se utiliza en los trabajos realizados por Miquel Oñate y Quintana [43]. Estos trabajos están englobados dentro del contexto de la dinámica de fluidos a velocidades supersónicas e hipersónicas. En ellos se utilizan las ecuaciones de Euler para modelar el comportamiento de fluidos alrededor de un objeto dado.

En este tipo de cálculos es muy importante el disponer de la posibilidad de realizar remallados a partir de soluciones previas. El disponer o no de una buena malla puede representar la diferencia no sólo entre obtener buenos o malos resultados sino también que las técnicas de resolución de las ecuaciones converjan o no.

Es en este área donde se comenzaron a utilizar los procesos de remallado automático [51]. En el presente contexto se utiliza además la posibilidad de alargar los elementos generados.

La dificultad de la resolución de las ecuaciones de Euler para este tipo de problemas proviene de la aparición en la solución de ondas de choque a través de las cuales la variación de las diversas magnitudes del flujo es discontinua. Dado que con las técnicas de resolución existentes no es posible ajustar funciones discontinuas es necesaria alguna forma de modelar estas discontinuidades mediante cambios bruscos en la solución.

Para conseguir esta última propiedad es necesario el concentrar una gran cantidad de elementos en las zonas por donde pasa la mencionada onda de choque. De esta forma se puede conseguir una buena modelización de las discontinuidades existentes. Es preciso, por tanto, disponer de una gran cantidad de elementos en la dirección perpendicular a la onda de choque. Sin embargo, en la dirección de dicha onda esta necesidad no existe, por lo que colocando elementos alargados con su longitud mayor en la dirección de la onda se puede conseguir un ahorro importante en el número de elementos necesario, y por tanto en el coste de resolución, sin menoscabo de la calidad de la solución obtenida.

Los estimadores de error que normalmente se utilizan en este contexto, son expresiones en las que intervienen las derivadas segundas de alguna de las variables nodales utilizadas (velocidades, presión, temperatura, etc.). Las bruscas variaciones de éstas a través de las ondas de choque hace que sus derivadas tengan valores muy altos, hecho éste que se aprovecha para detectar su posición y refinar la malla en esas zonas. Las direcciones principales de la matriz formada por dichas derivadas segundas marcan además las direcciones

en que se pueden disponer los alargamientos de los elementos.

En este caso se ha estudiado el flujo del aire alrededor del morro de un avión que circula a una velocidad de Mach 8.15. El flujo incide por la parte inferior del morro con una inclinación de 30° .

La forma del morro del avión se ha modelado mediante dos arcos de dos elipses prolongándose por detrás mediante dos rectas. La forma del mismo se puede observar en la figura 3.54 en la cual se puede ver también como se ha delimitado el dominio exteriormente. Se ha dispuesto además una recta horizontal a partir del vértice de una de las elipses para estudiar la variación de las variables a través de los nodos generados sobre ella.

La primera malla utilizada se ha obtenido con una malla de base de 14 elementos y 12 nodos. La forma de la misma puede verse en la figura 3.55. En esta figura aparece solamente la parte de dicha malla que cubre el dominio de interés ya que el resto no afecta la generación de la nueva malla. Los valores para los tamaños de los elementos se han especificado de manera que ya aparezca una pequeña densificación de elementos sobre la zona donde se espera que aparezca, de manera aproximada, la onda de choque. Esta primera densificación es importante para facilitar la convergencia del proceso de resolución en esta primera etapa. En la figura 3.56 se puede ver la primera malla obtenida con 2047 elementos y 1071 nudos.

Utilizando esta primera malla como malla de referencia y un estimador de error del tipo mencionado se ha construido una segunda malla que se puede contemplar en la figura 3.57. En este caso se han utilizado elementos alargados con un alargamiento máximo de 4. Esta segunda malla está formada por 3920 elementos y 2017 nodos. Como puede observarse, aparece claramente marcada una onda de choque que está alrededor de la parte frontal del avión. Existe además una pequeña densificación en la zona del vértice donde intersectan las dos elipses debido a la aparición en ella de una pequeña onda de choque adicional.

La utilización de esta segunda malla mejora muy sensiblemente la calidad de los resultados obtenidos. No obstante se ha conseguido mejorar esa calidad todavía más repitiendo el proceso y generando una tercera malla, que se puede contemplar en la figura 3.58. Como se puede observar, la zona de actuación de la onda de choque está todavía más marcada hasta el extremo de que los elementos situados sobre ella no se distinguen debido a su pequeño tamaño. Esta última malla está compuesta por 5228 elementos y 2660 nodos.

Esta es un ejemplo típico en el que se pueden apreciar las grandes posibilidades de los procesos de remallado automático. Observando la última

mallas generadas es posible comprender la tipología del flujo existente sin prácticamente necesidad de ver los resultados numéricos del análisis.

Es innegable que las técnicas de remallado automático permiten obtener soluciones con una calidad que de otra forma sería imposible alcanzar. Estos resultados son, en ocasiones como esta, realmente espectaculares y dan una idea de la gran capacidad de dichas técnicas.

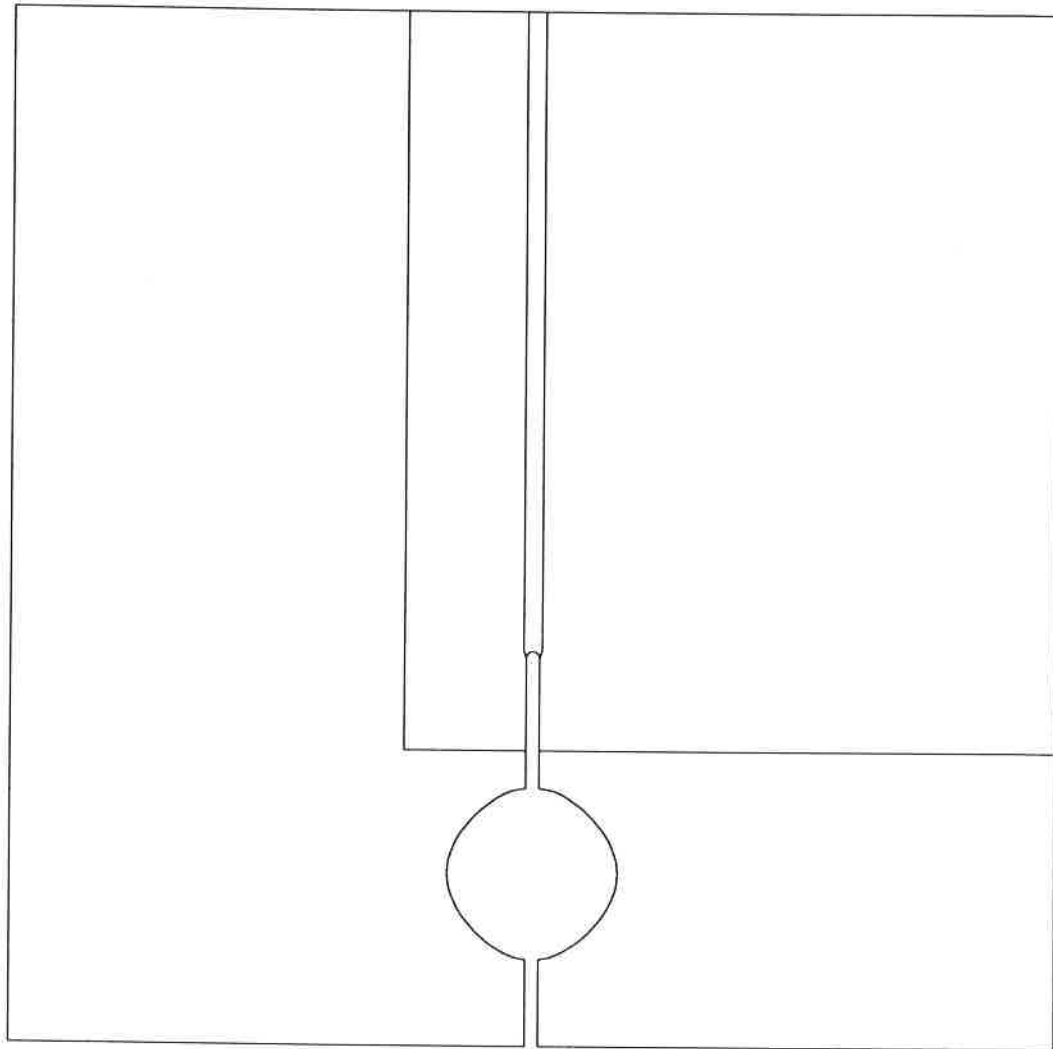


FIGURA 3.33 Espécimen de laboratorio. Líneas de definición para la malla con dirección prefijada a 90°.

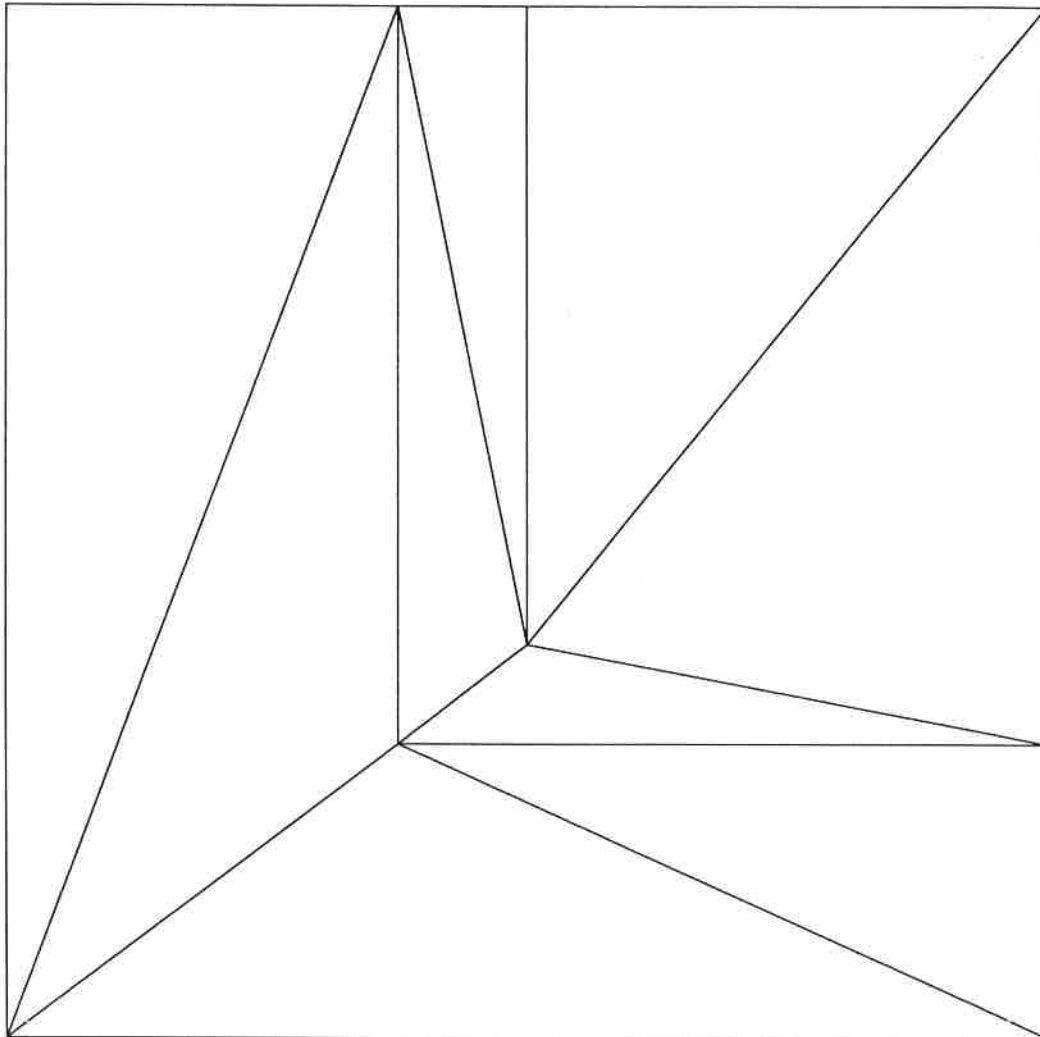


FIGURA 3.34 Espécimen de laboratorio. Malla de referencia para la malla con dirección prefijada a 90°.

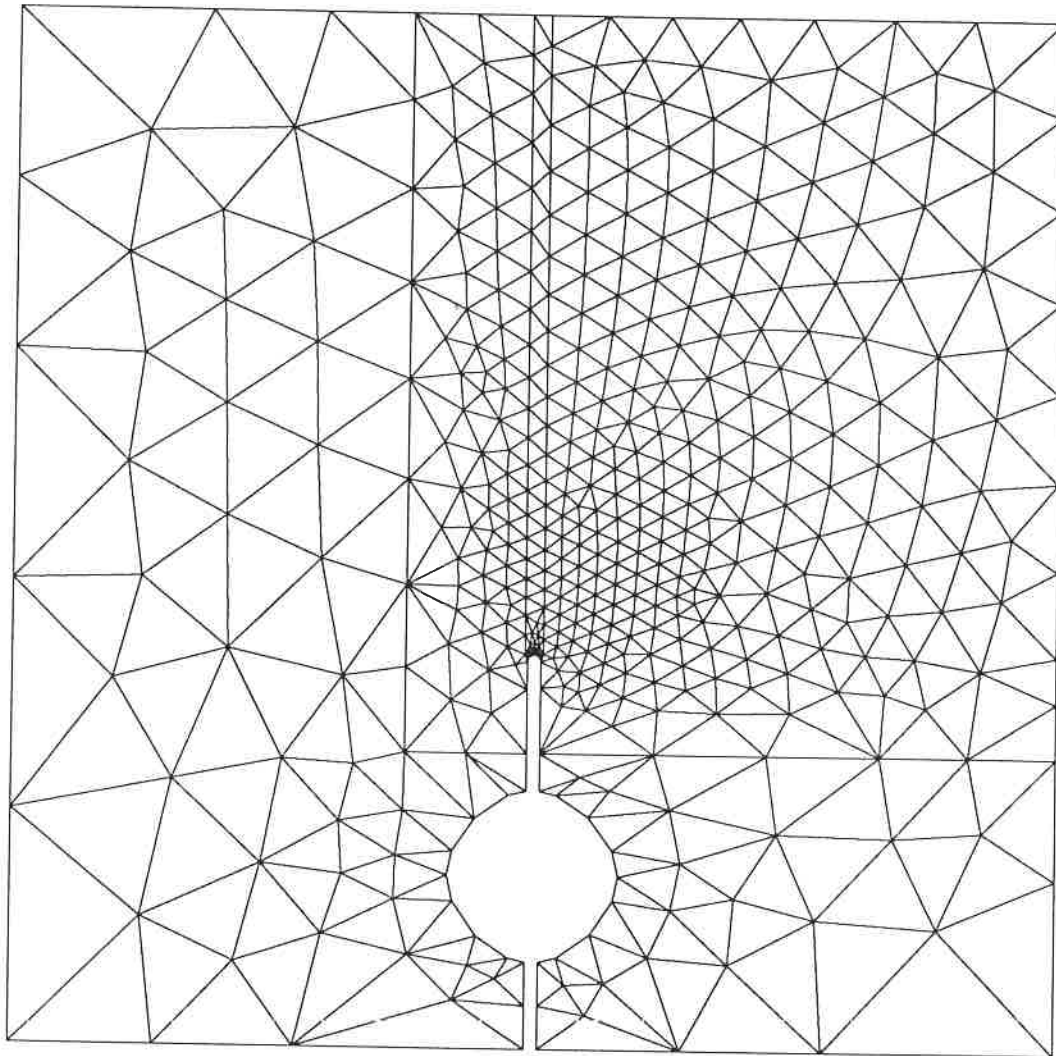


FIGURA 3.35 Espécimen de laboratorio. Malla obtenida con dirección prefijada a 90° . n° elementos=825, n° puntos=448

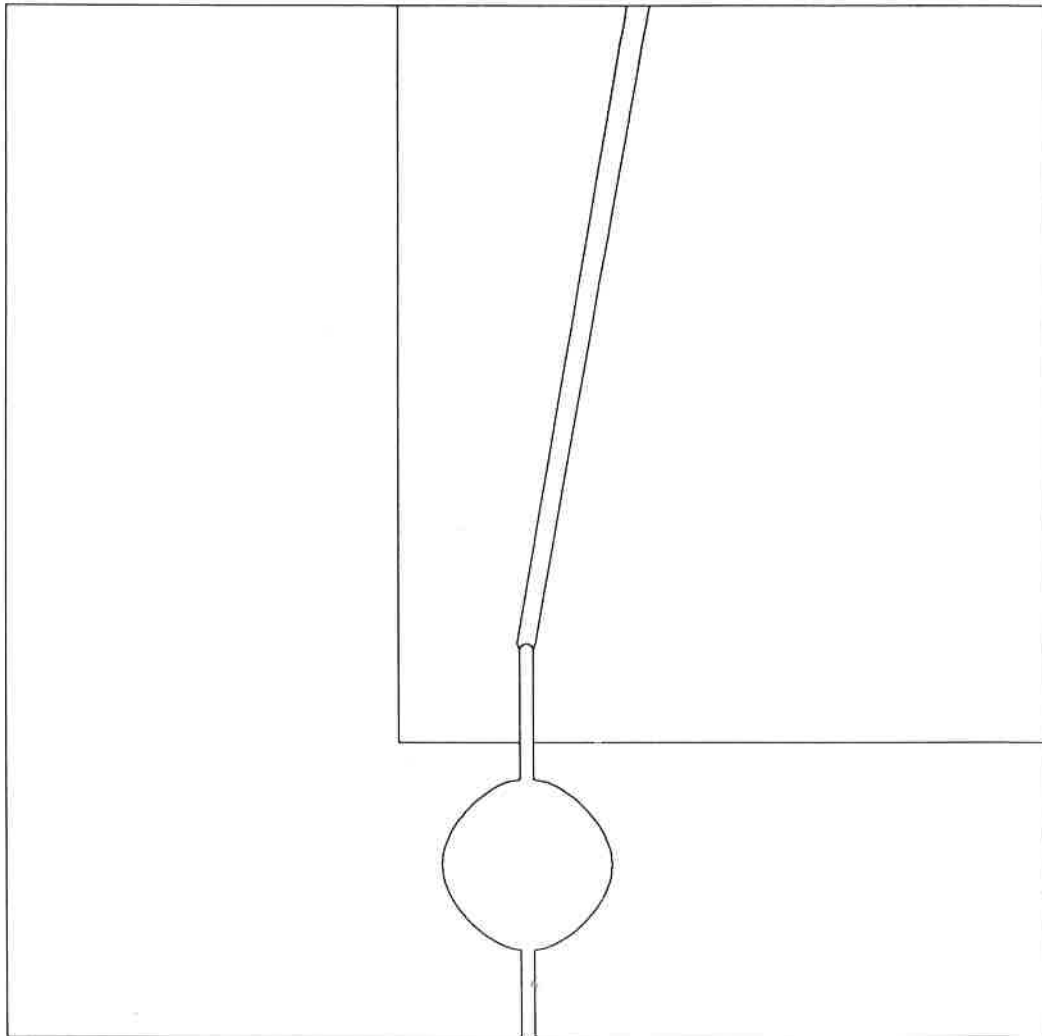


FIGURA 3.36 Espécimen de laboratorio. Líneas de definición para la malla con dirección prefijada a 80° .

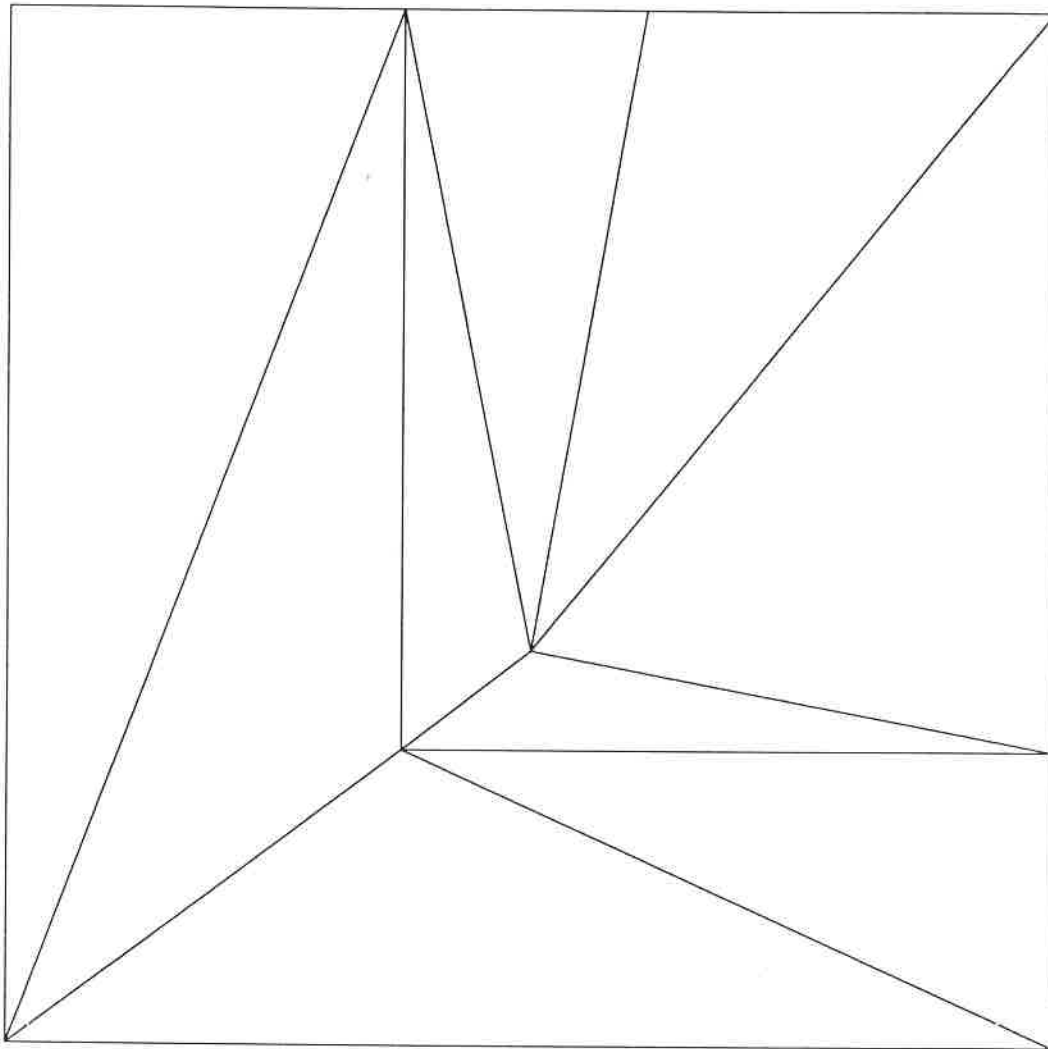


FIGURA 3.37 Espécimen de laboratorio. Malla de referencia para la malla con dirección prefijada a 80° .

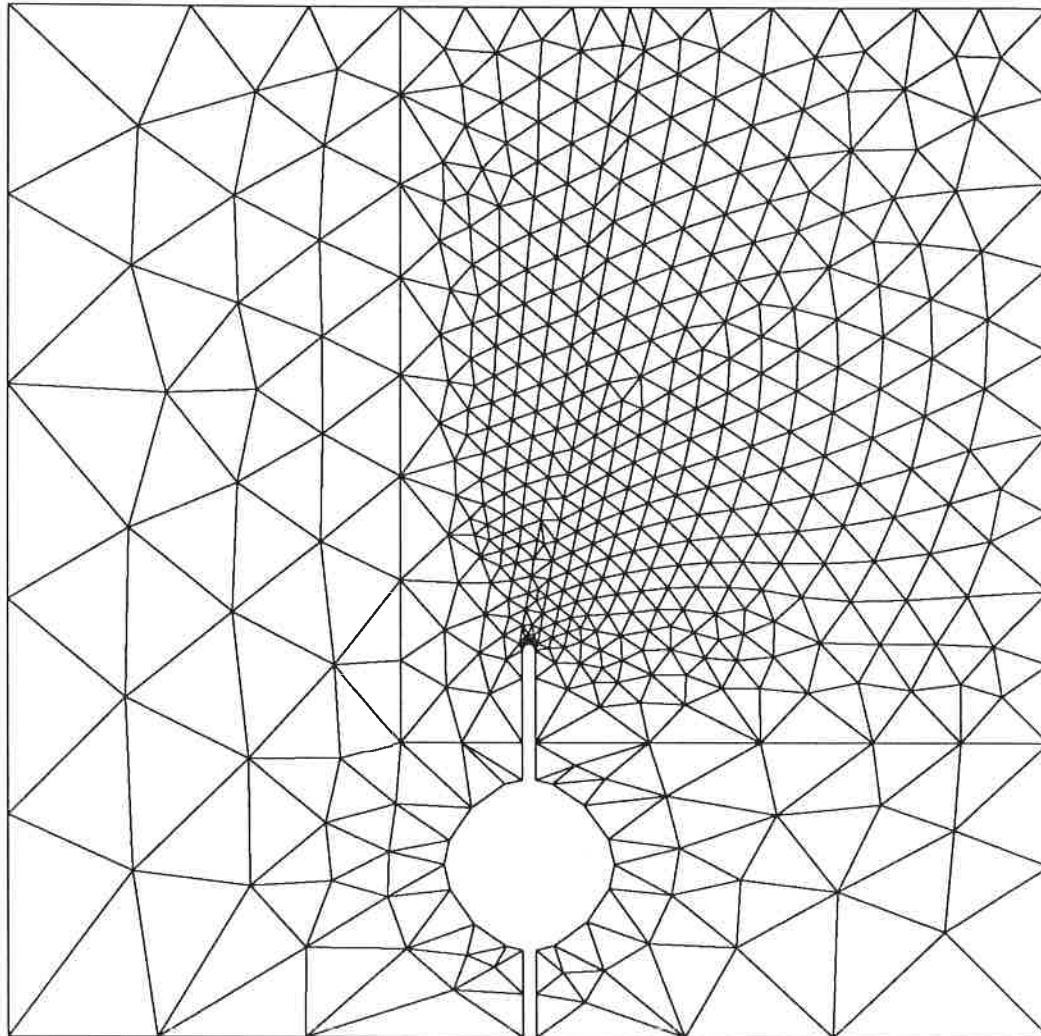


FIGURA 3.38 Espécimen de laboratorio. Malla obtenida con dirección prefijada a 80° . n^o elementos=911, n^o puntos=492

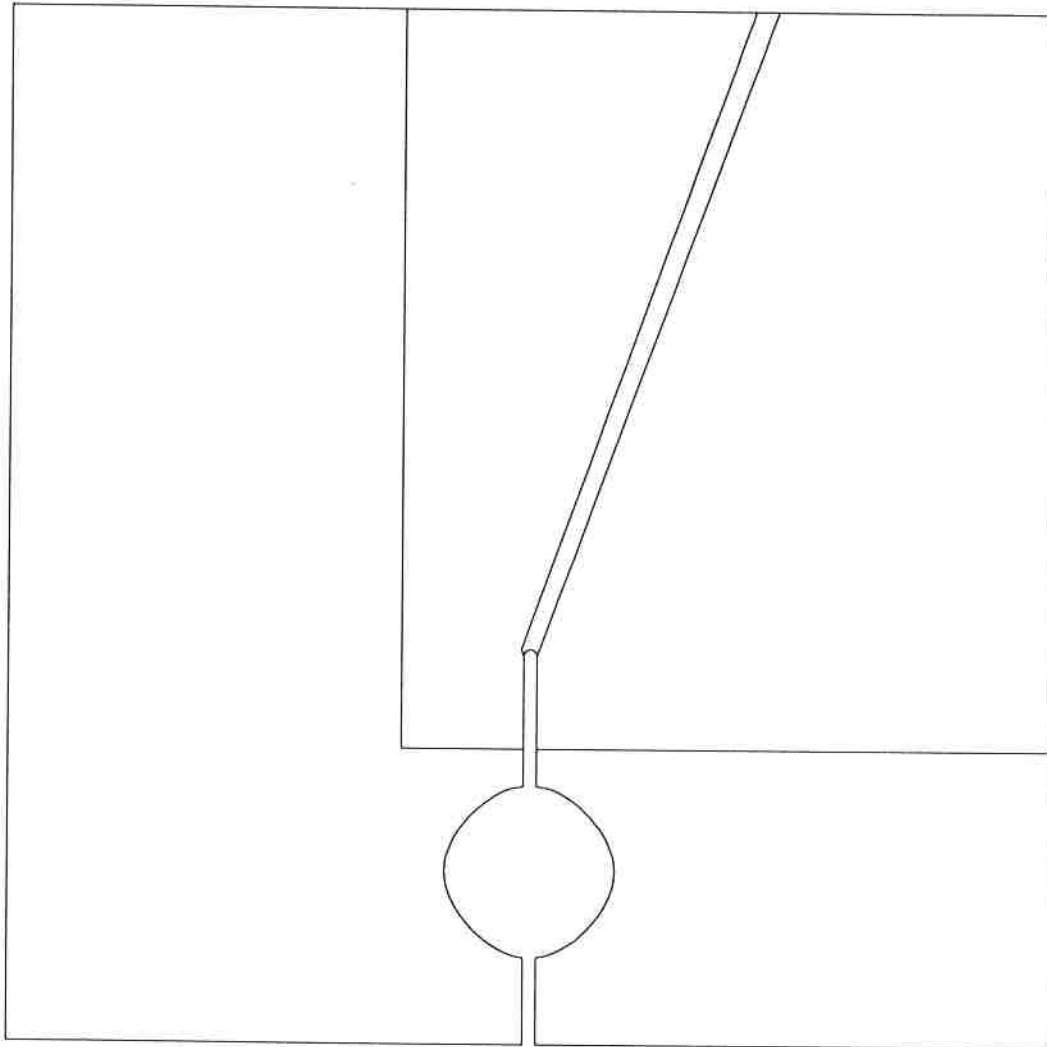


FIGURA 3.39 Espécimen de laboratorio. Líneas de definición para la malla con dirección prefijada a 70° .

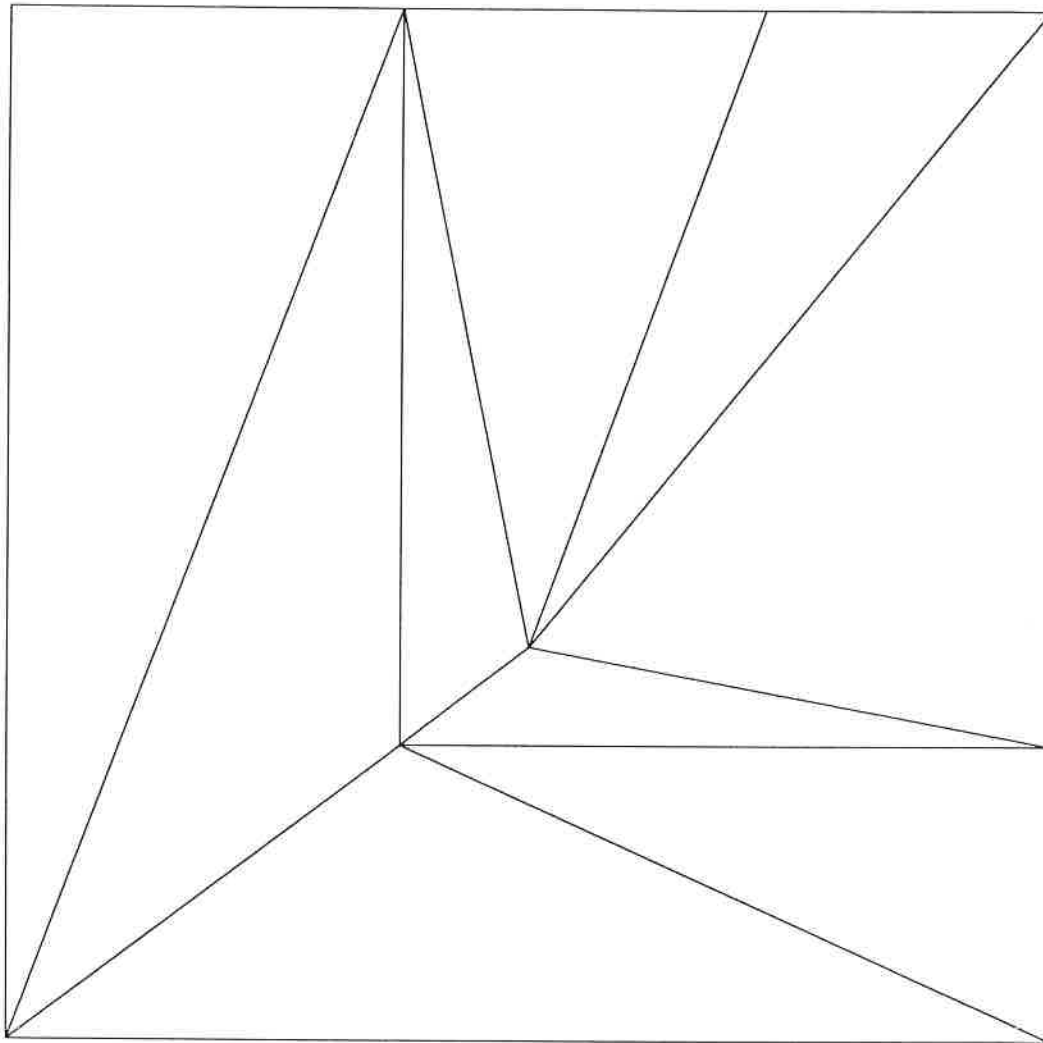


FIGURA 3.40 Espécimen de laboratorio. Malla de referencia para la malla con dirección prefijada a 70°.

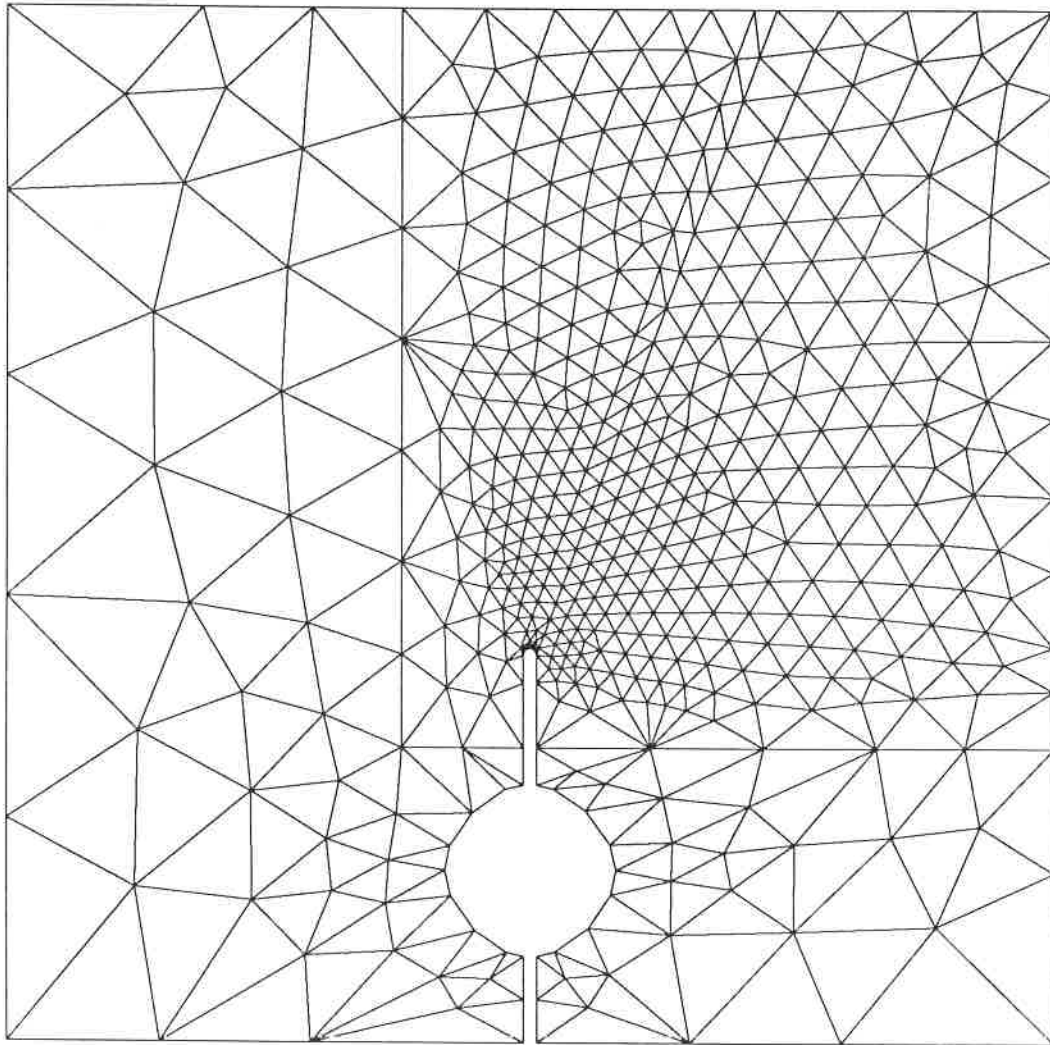


FIGURA 3.41 Espécimen de laboratorio. Malla obtenida con dirección prefijada a 70° . n° elementos=891, n° puntos=482

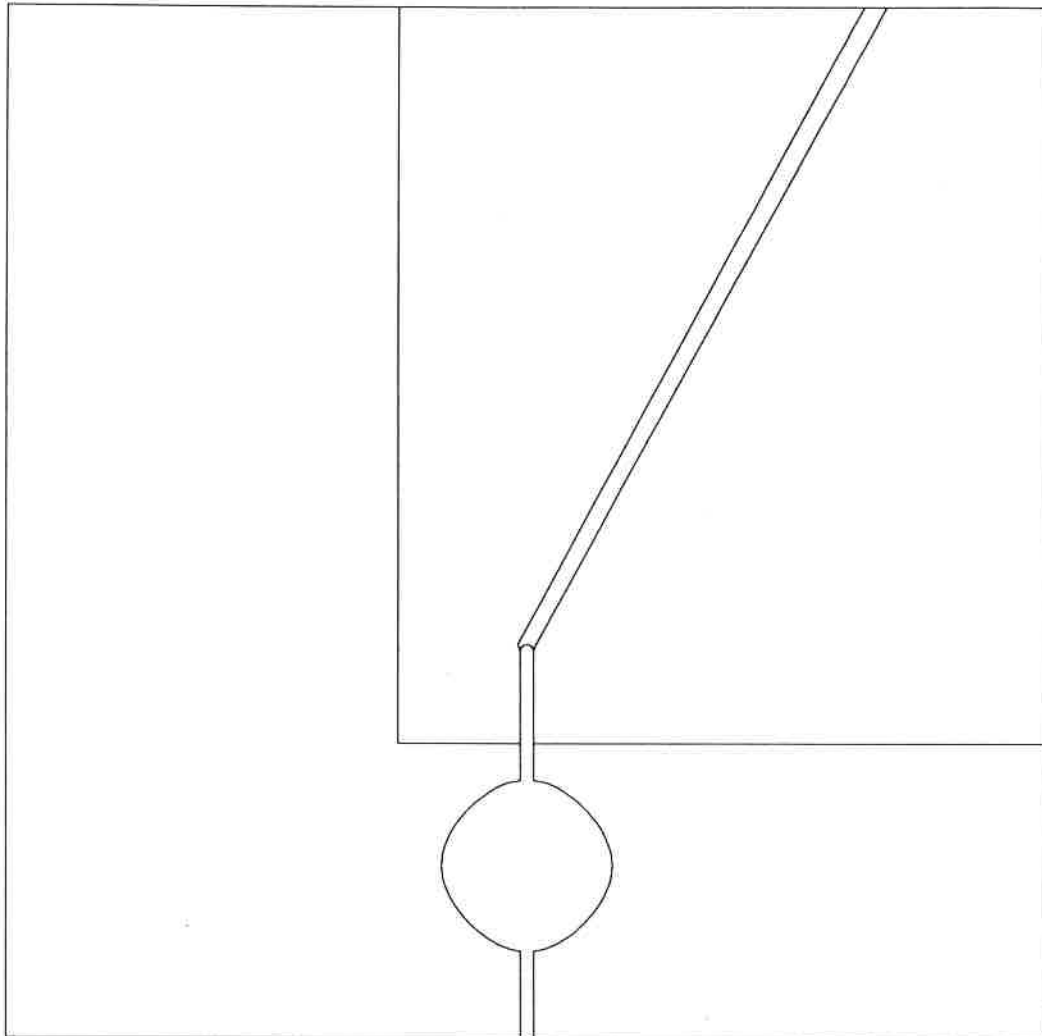


FIGURA 3.42 Espécimen de laboratorio. Líneas de definición para la malla con dirección prefijada a 60°.

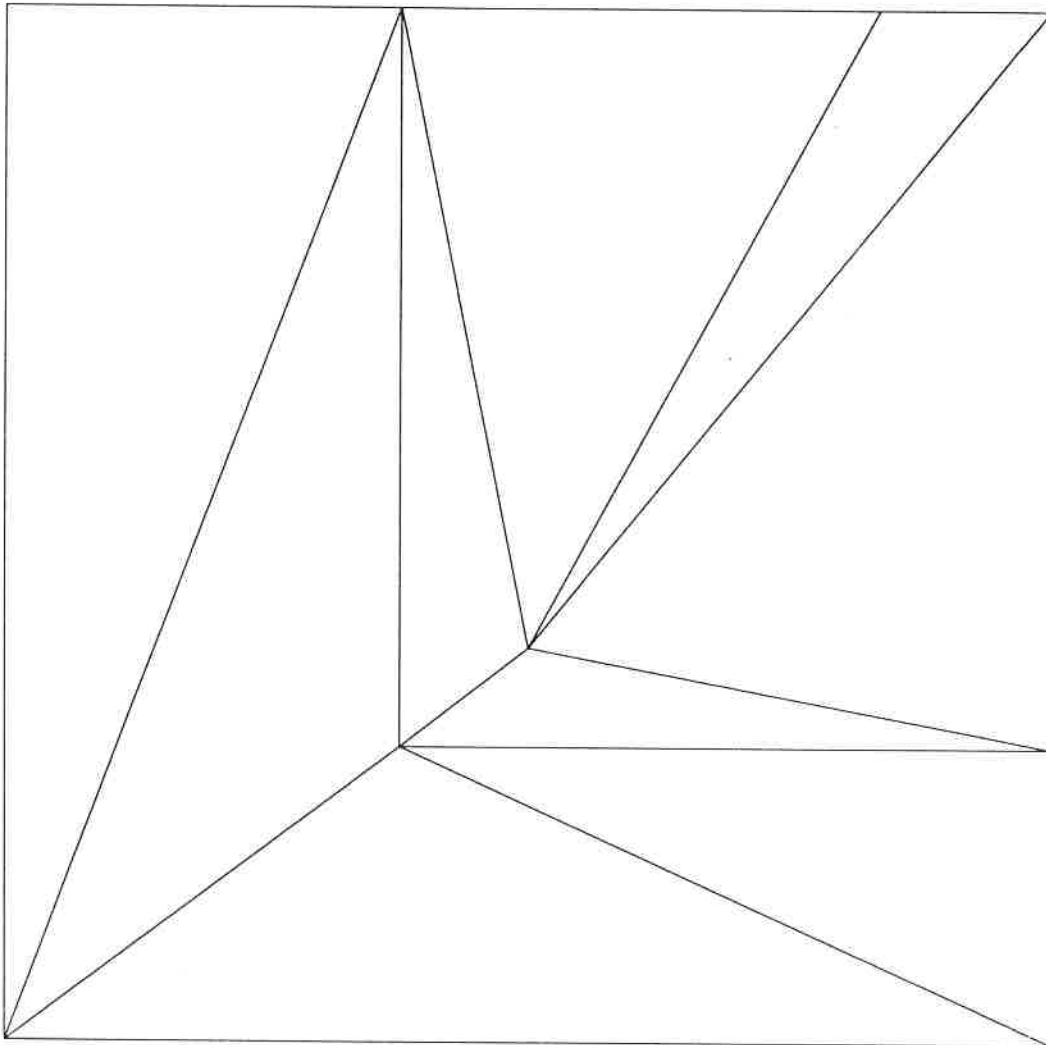


FIGURA 3.43 Espécimen de laboratorio. Malla de referencia para la malla con dirección prefijada a 60° .

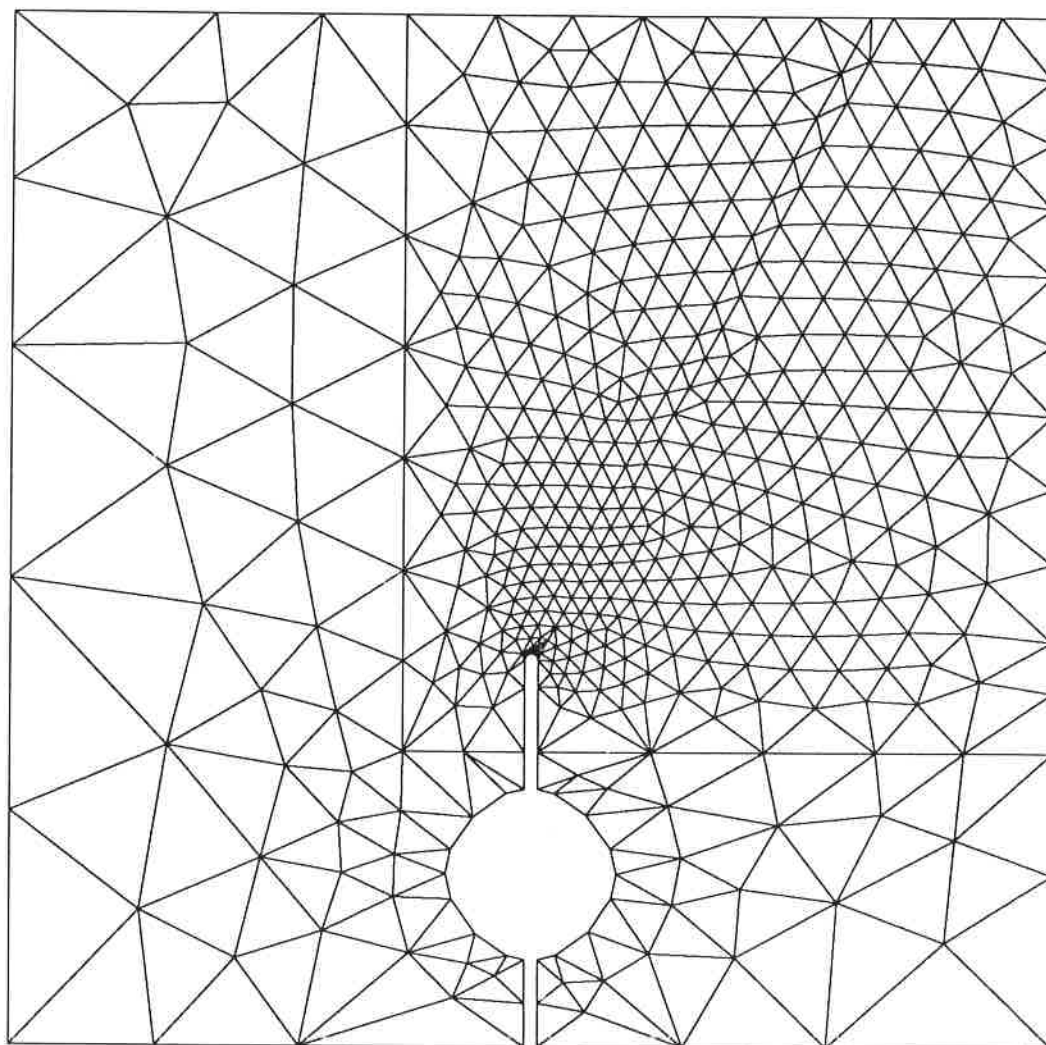


FIGURA 3.44 Espécimen de laboratorio. Malla obtenida con dirección prefijada a 60° . n^o elementos=900, n^o puntos=487

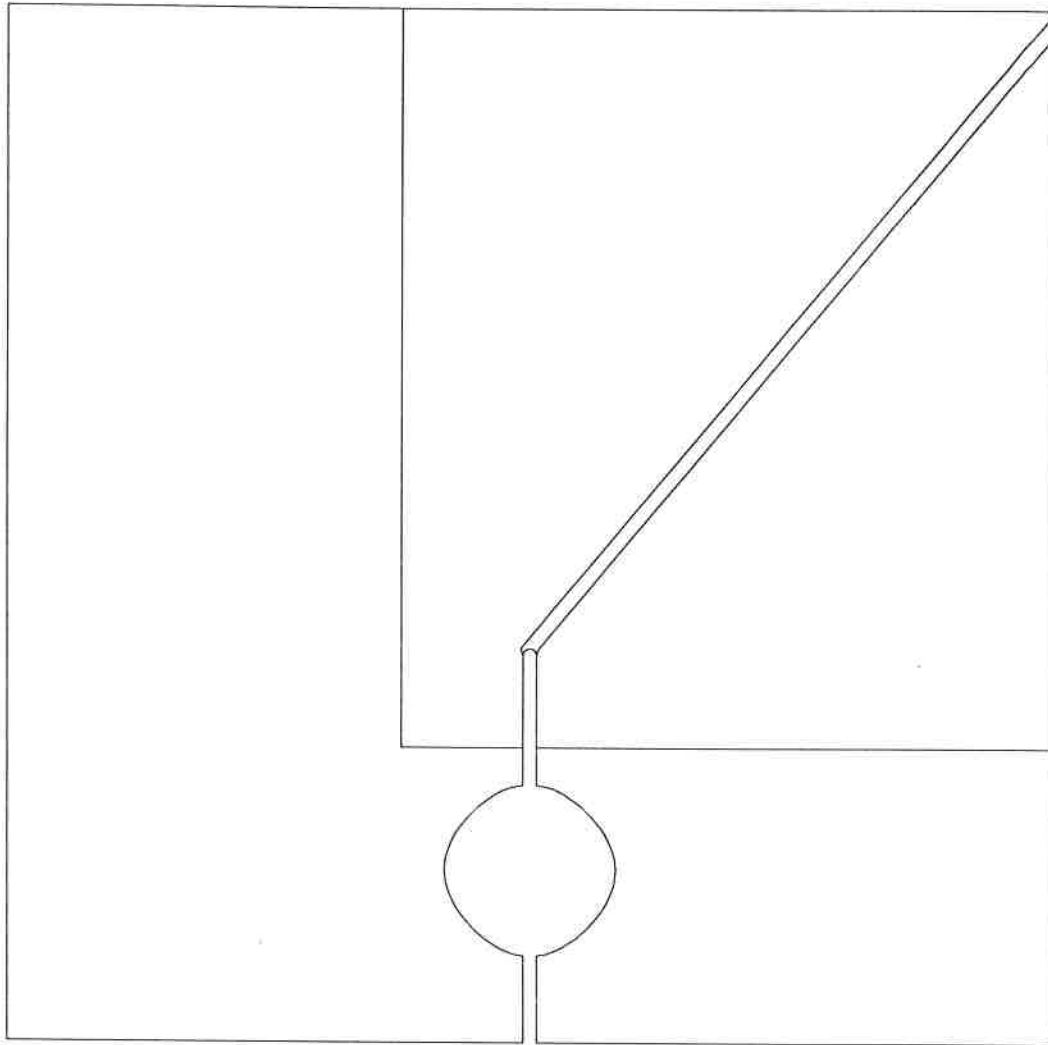


FIGURA 3.45 Espécimen de laboratorio. Líneas de definición para la malla con dirección prefijada a 50°.

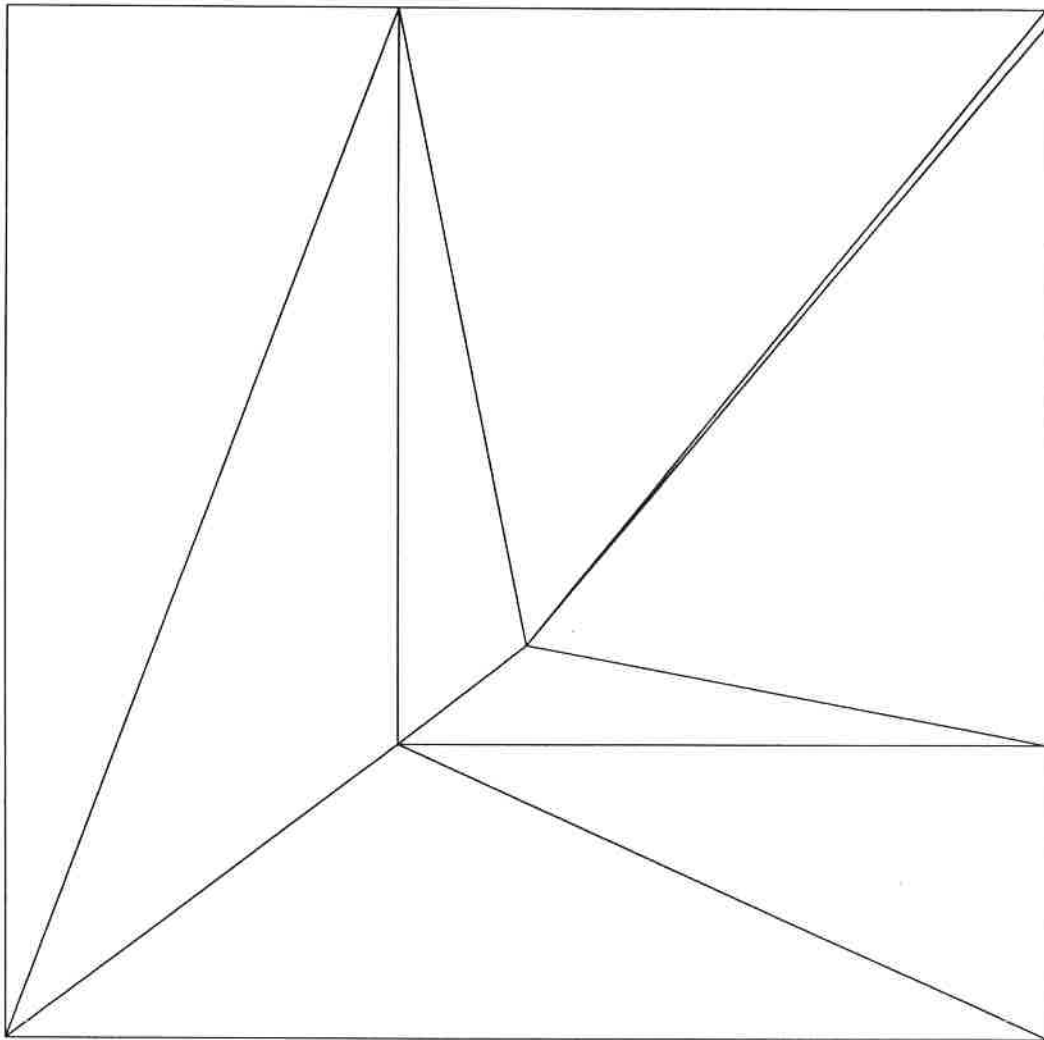


FIGURA 3.46 Espécimen de laboratorio. Malla de referencia para la malla con dirección prefijada a 50° .

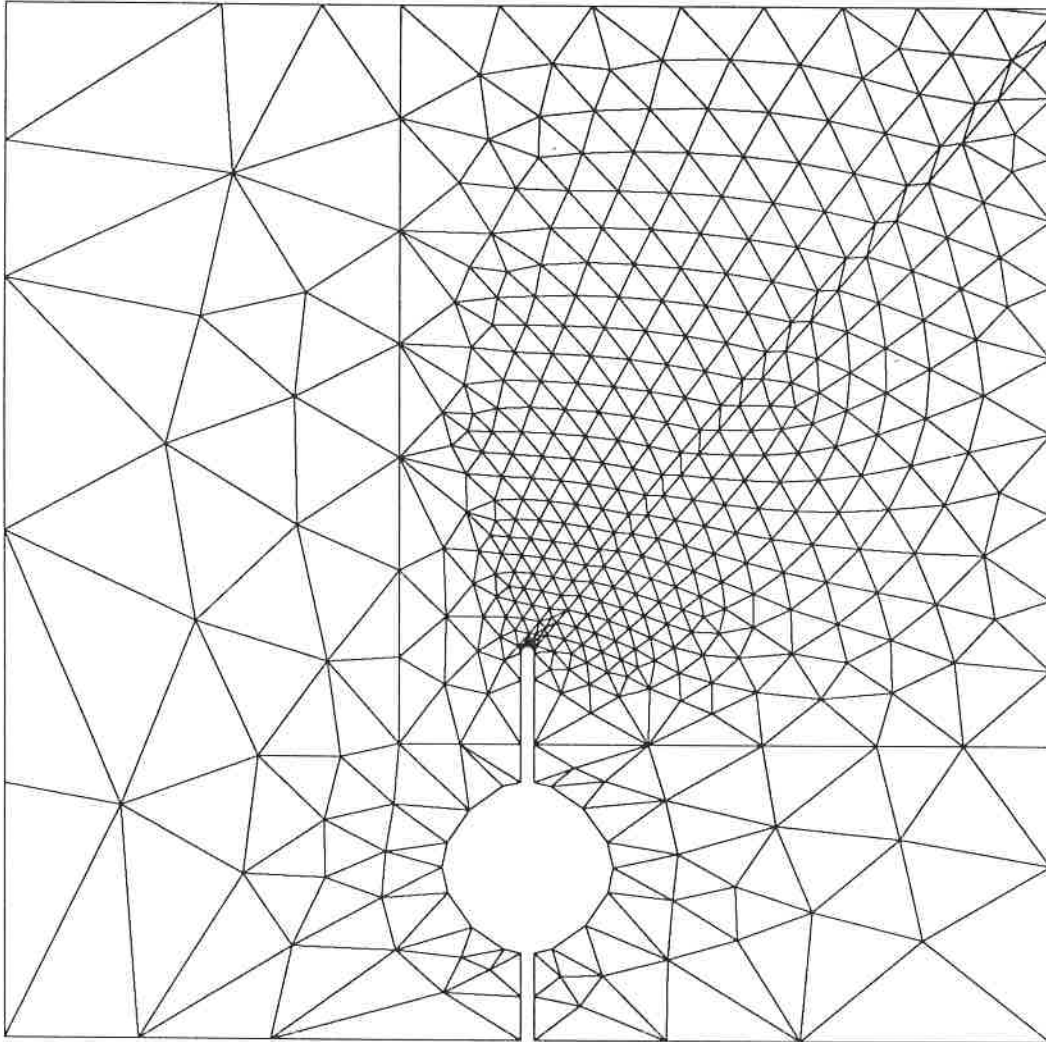


FIGURA 3.47 Espécimen de laboratorio. Malla obtenida con dirección prefijada a 50° . n° elementos=834, n° puntos=453

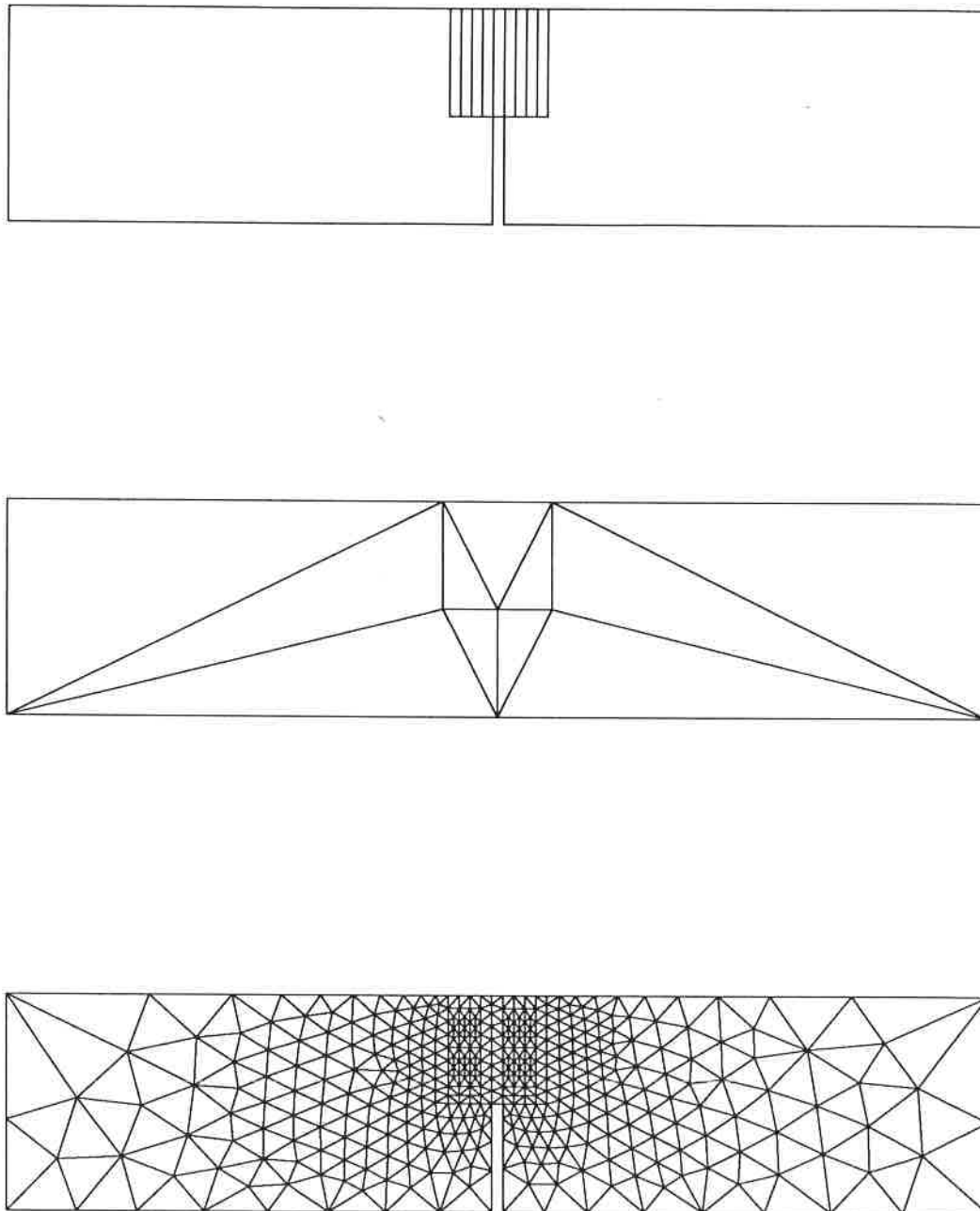


FIGURA 3.48 Viga entallada. Definición del dominio, malla de referencia y malla obtenida con dirección prefijada a 90°. n^o elementos=750, n^o puntos=405

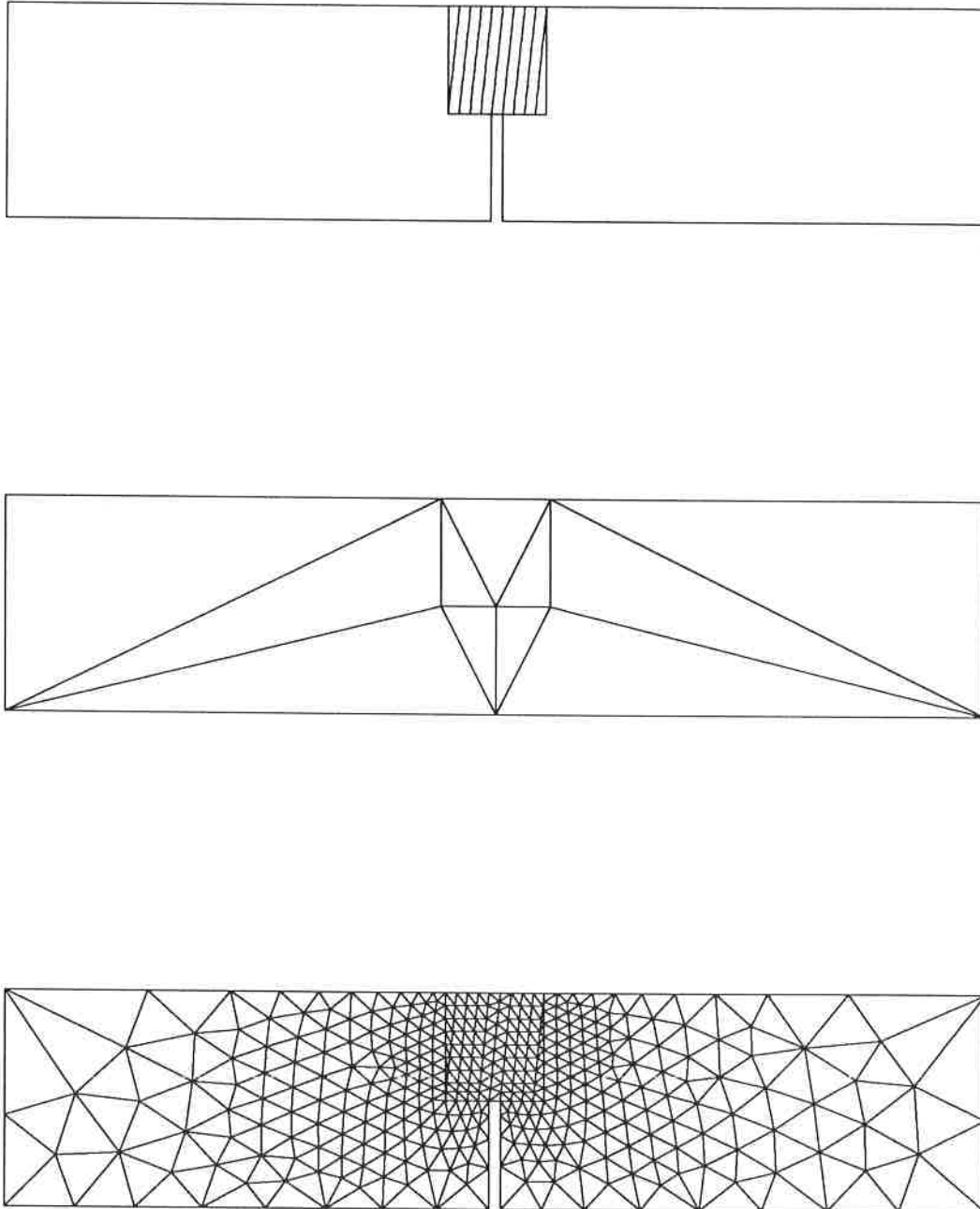


FIGURA 3.49 Viga entallada. Definición del dominio, malla de referencia y malla obtenida con dirección prefijada a 85° . n^o elementos=694, n^o puntos=377

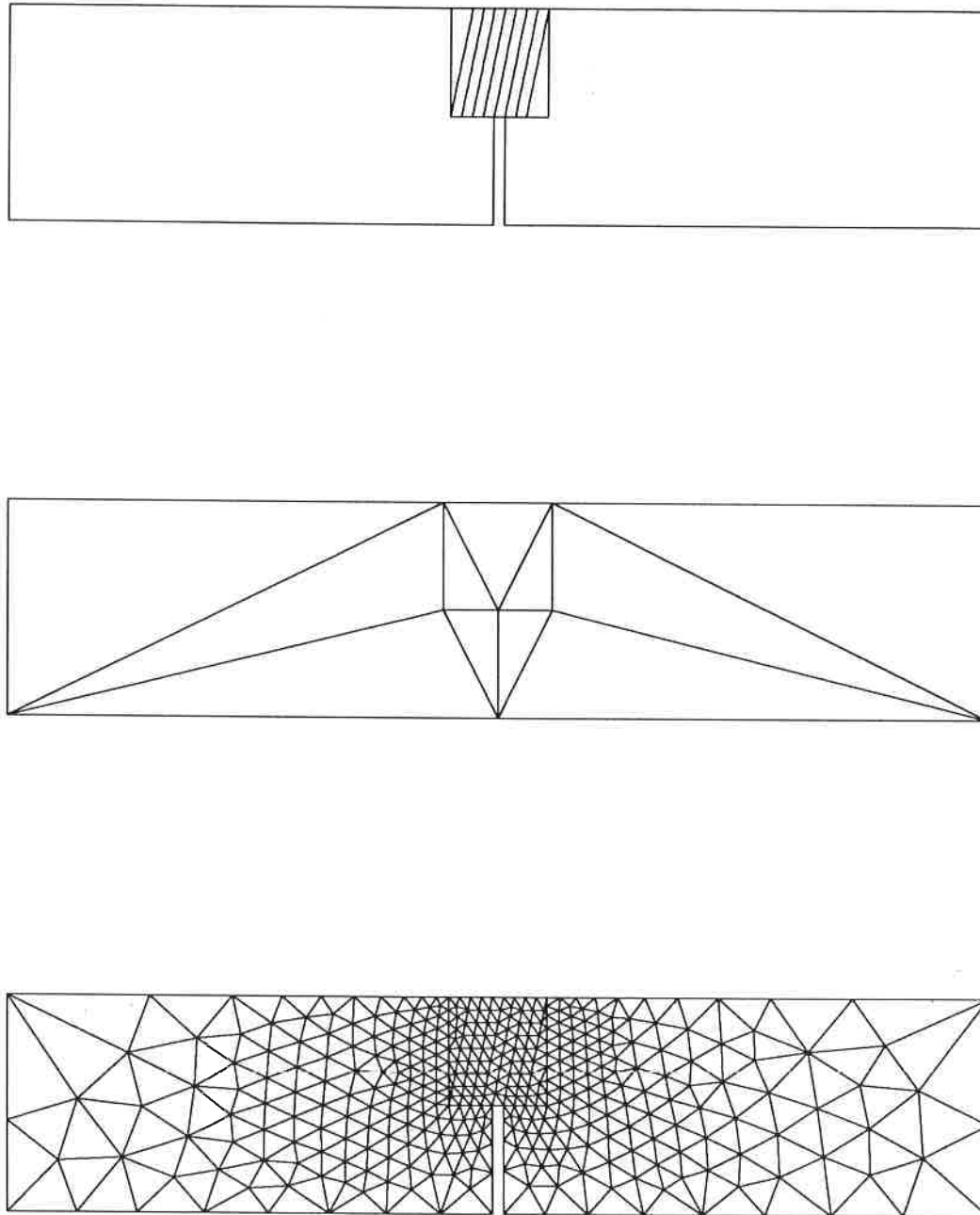


FIGURA 3.50 Viga entallada. Definición del dominio, malla de referencia y malla obtenida con dirección prefijada a 80° . n° elementos=690, n° puntos=375

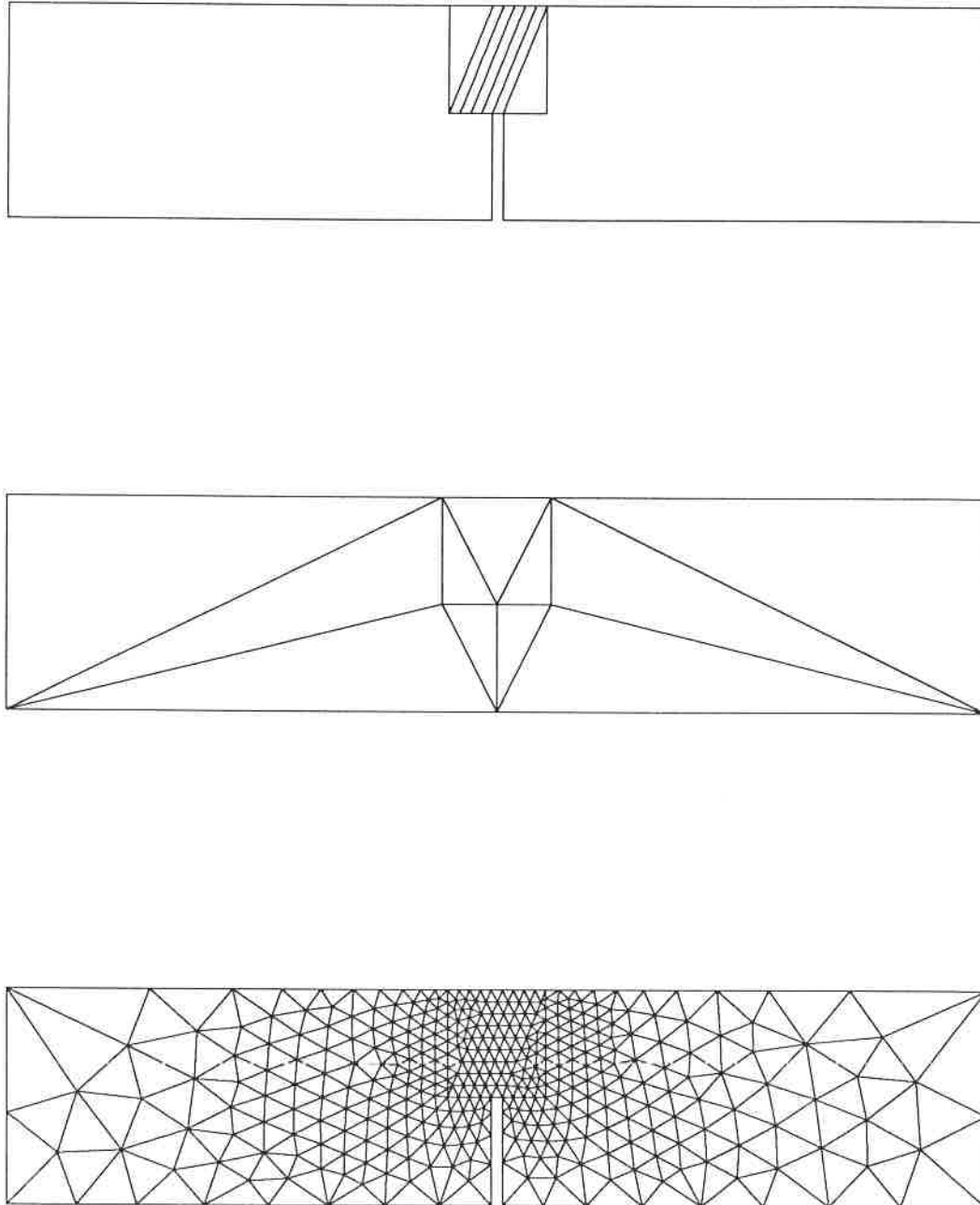


FIGURA 3.51 Viga entallada. Definición del dominio, malla de referencia y malla obtenida con dirección prefijada a 70° . n° elementos=696, n° puntos=378

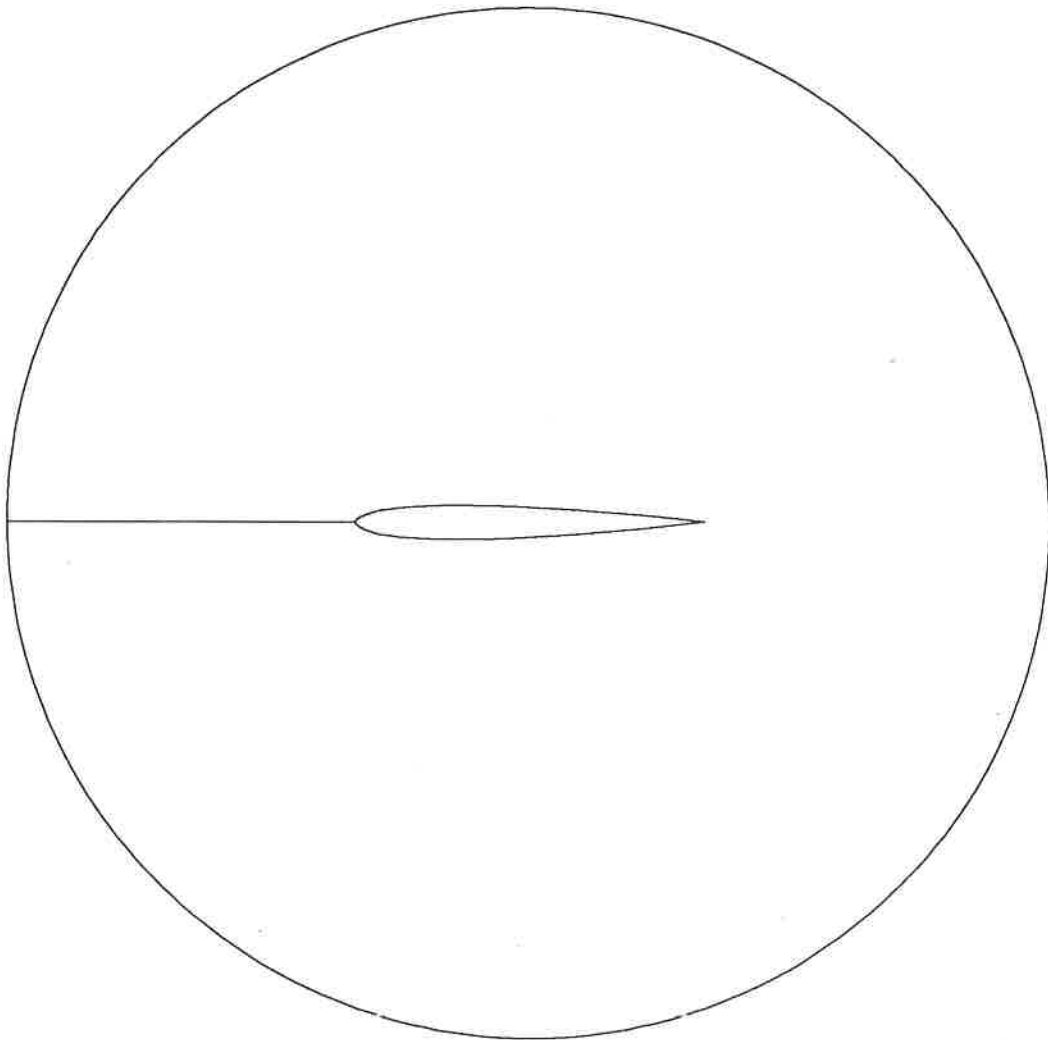


FIGURA 3.52 Perfil de ala de avión. Representación de la definición del dominio.

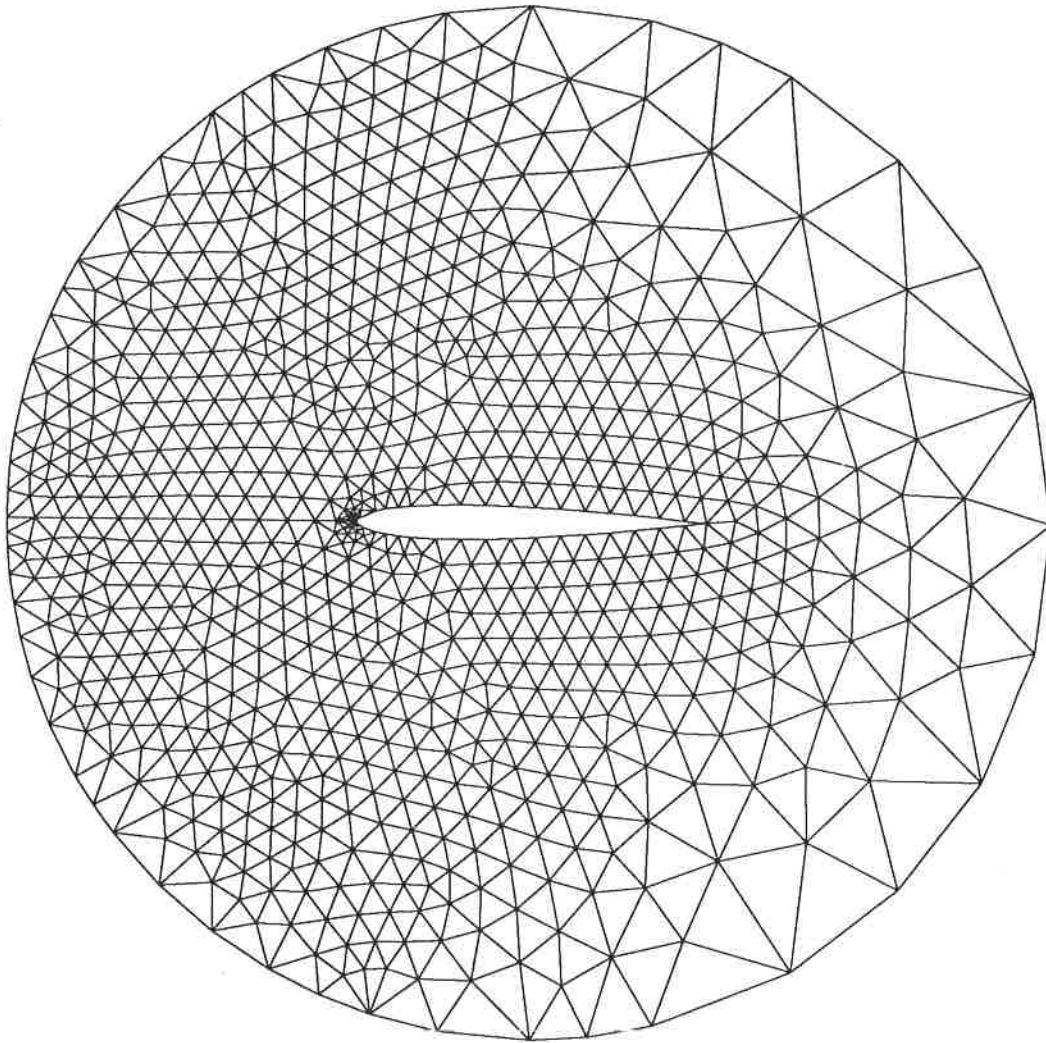


FIGURA 3.53 Perfil de ala de avión. Malla obtenida.
nº elementos=1548, nº puntos=817

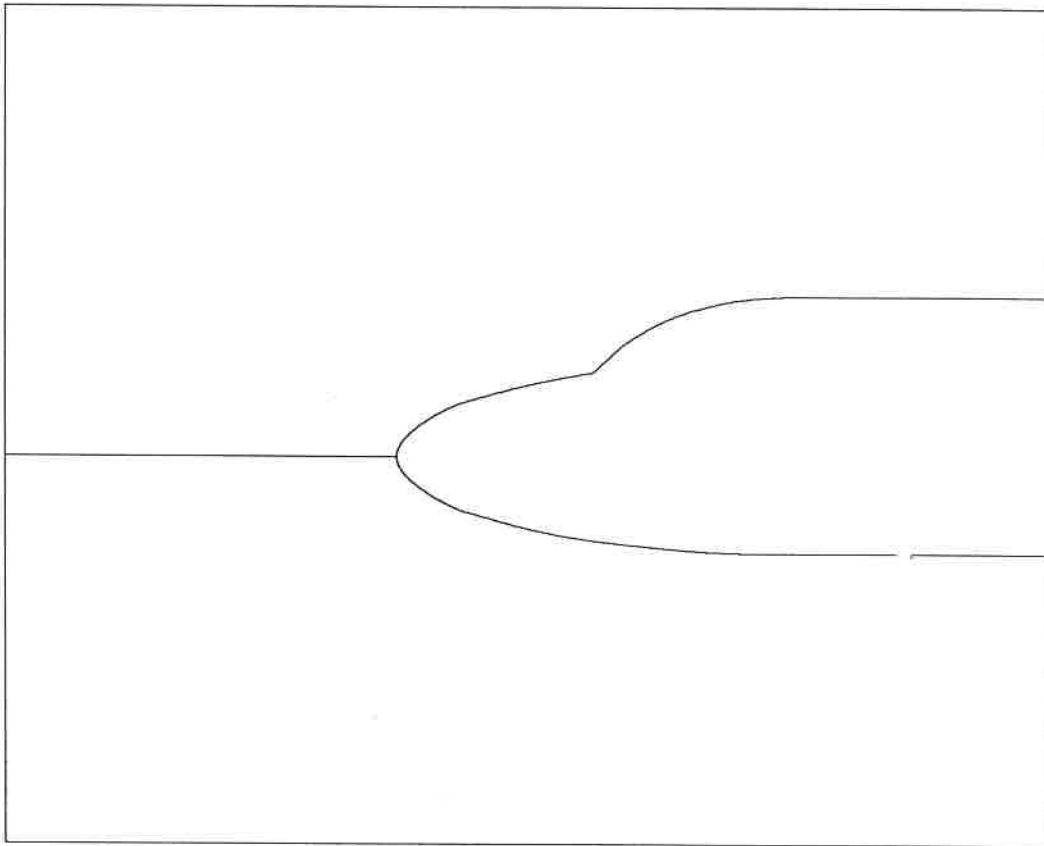


FIGURA 3.54 Perfil del morro de un avión. Modelación mediante dos arcos de elipse.

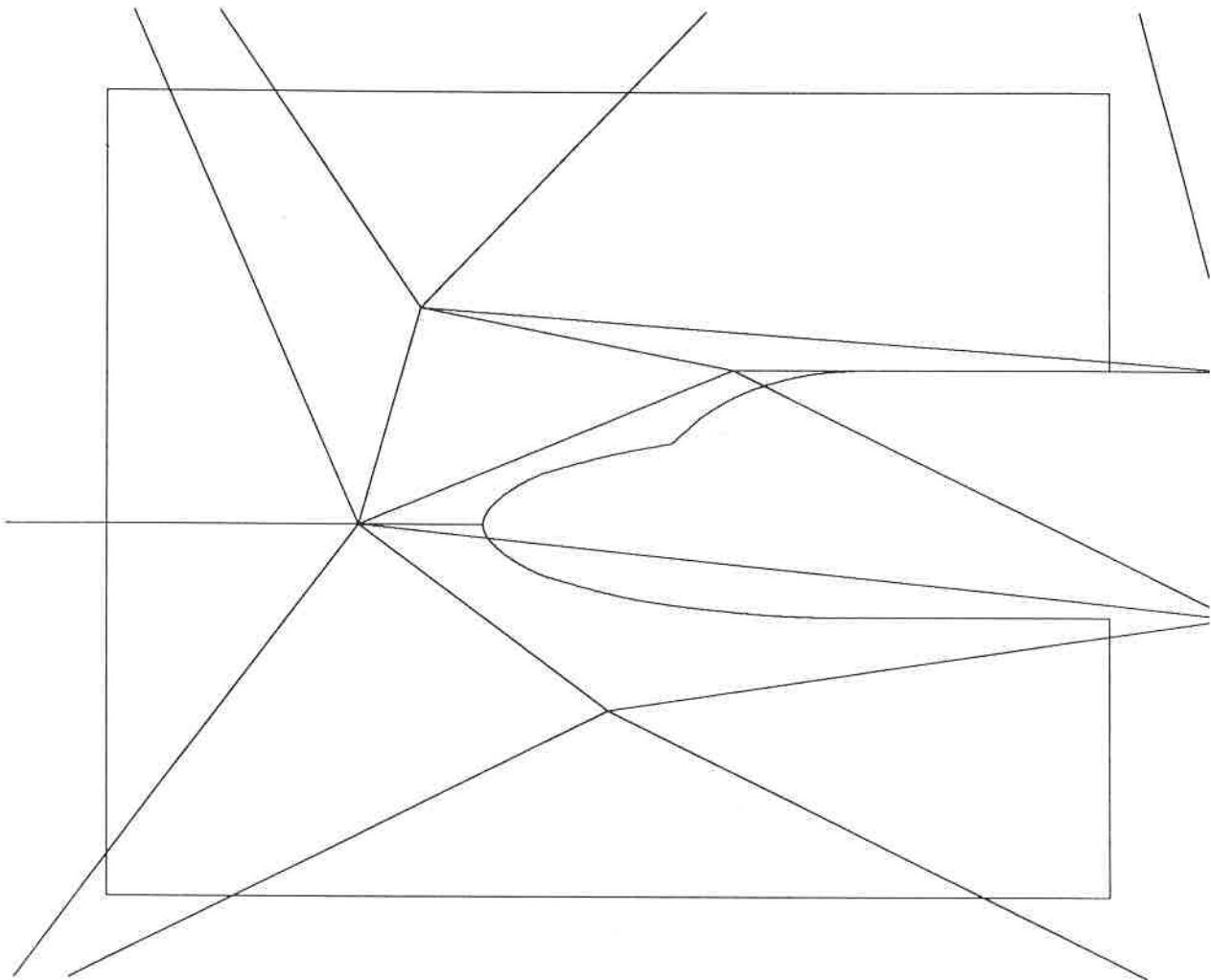


FIGURA 3.55 Perfil del morro de un avión. Representación del dominio y de la malla de referencia.

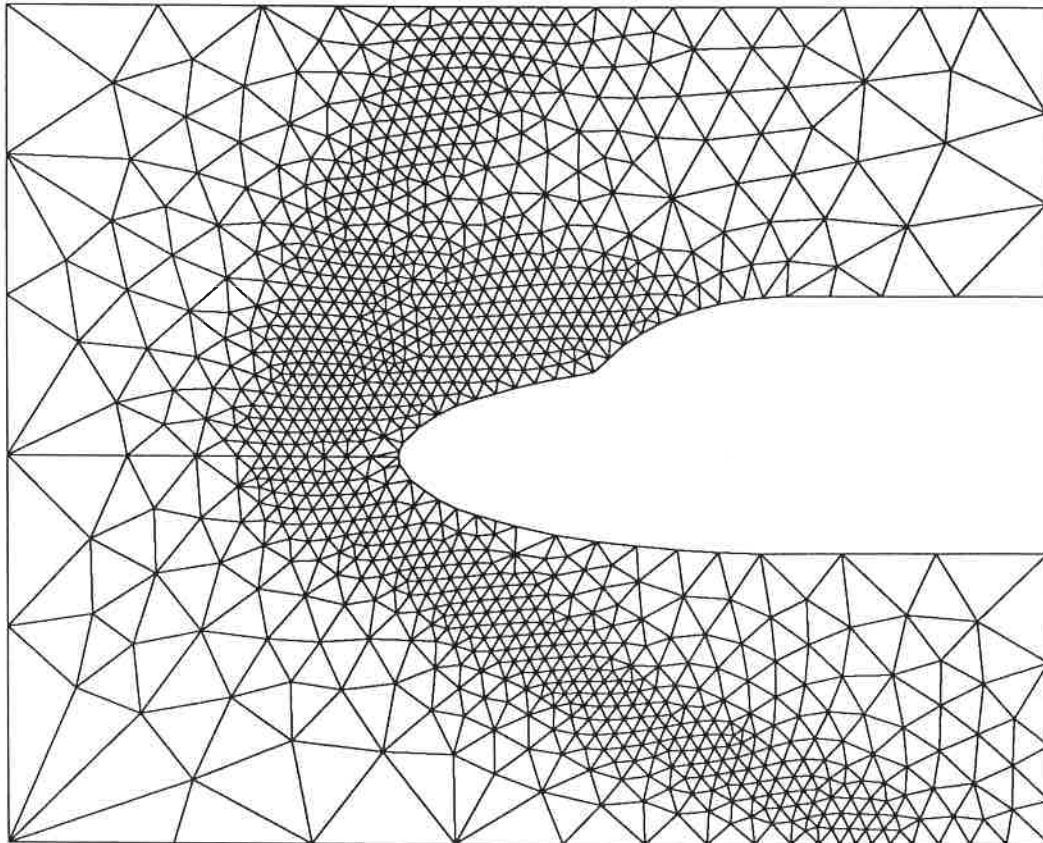


FIGURA 3.56 Perfil del morro de un avión. Primera malla obtenida. n° elementos=2047, n° puntos=1071

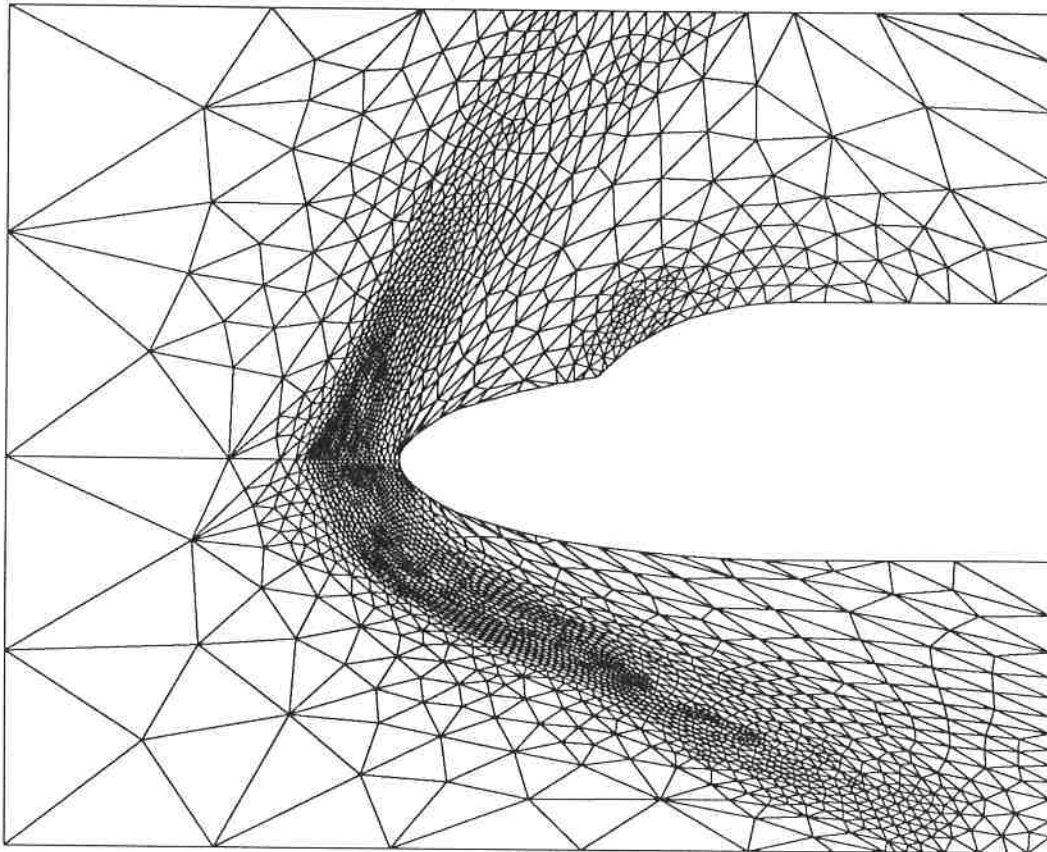


FIGURA 3.57 Perfil del morro de un avión. Segunda malla obtenida. n^o elementos=3920, n^o puntos=2017

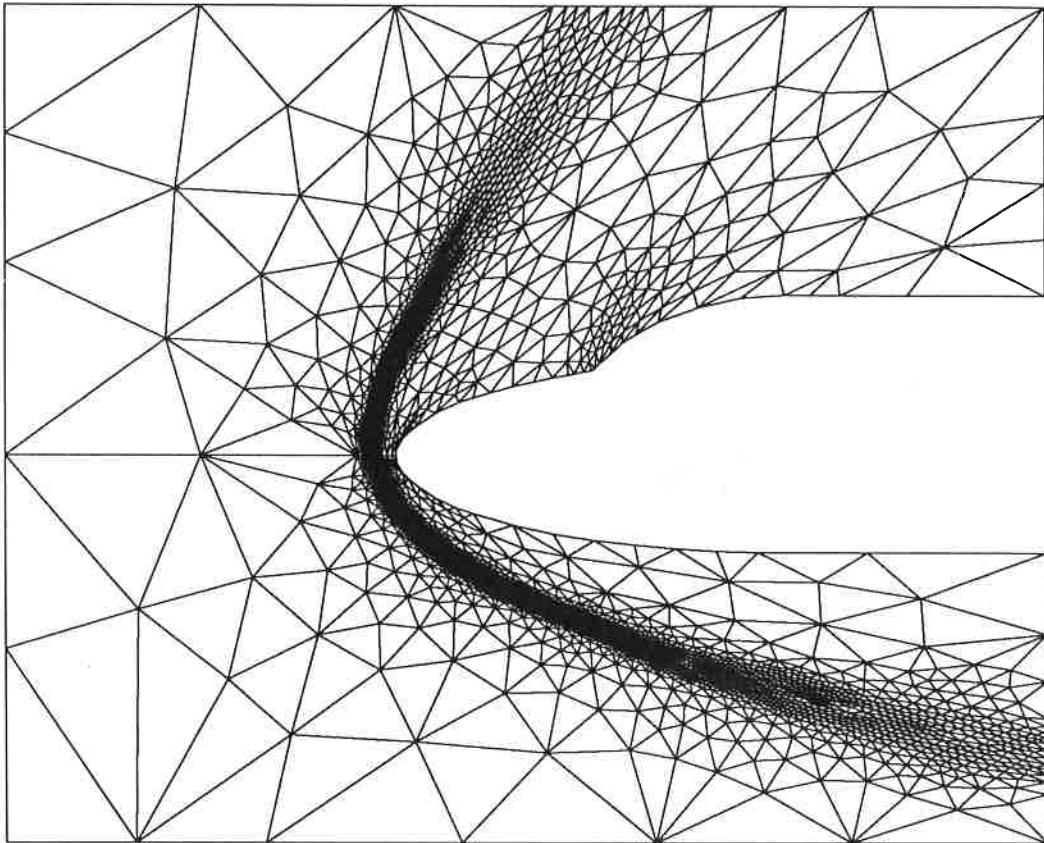


FIGURA 3.58 Perfil del morro de un avión. Tercera malla obtenida.
nº elementos=5228, nº puntos=2660

(CAPÍTULO 3) ANEXO A**DESCRIPCIÓN DE LOS B-SPLINES****A.1 SPLINES POLINÓMICOS**

Dada una serie de puntos existen diversos tipos de curva para interpolar la geometría entre ellos. La forma más sencilla de realizar esta interpolación son los polinomios de Lagrange. Esta técnica consiste en hallar el polinomio de grado n que pase por $n + 1$ puntos dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. De esta forma se consigue una función continua que interpola la geometría entre los puntos definidos. El problema de esta técnica es que conduce a la utilización de polinomios de grado muy alto lo cual produce grandes oscilaciones en las curvas obtenidas.

Una mejora muy importante respecto de lo anterior consiste en la utilización de splines. Éstos permiten utilizar polinomios de bajo orden eliminando los problemas de oscilación comentados. Para ver sus características se considera un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ siendo $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ y se pretende interpolarlos mediante una función compuesta $\phi(x)$ que cumpla las siguientes propiedades.

- Sobre cada subintervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\phi(x)$ es un polinomio cúbico.
- $\phi(x)$ y sus derivadas primera y segunda son continuas en los puntos de definición.

La curva resultante de aplicar las anteriores condiciones se denomina spline cúbico. Es posible definir splines de mayor orden definiendo continuidades sobre derivadas de tercer orden, y mayores, en los puntos de definición. Se puede demostrar que el spline es la curva que, pasando por los puntos definidos, hace mínima la integral del cuadrado de su curvatura ^[20].

Para calcular los coeficientes de los polinomios que forman los splines es necesario utilizar las coordenadas de los $n + 1$ puntos especificados más dos condiciones adicionales en los extremos. Estas condiciones pueden ser:

- Extremos libres: esta condición especifica que las curvaturas deben ser nulas en los extremos del intervalo, es decir, $\phi''(x_0) = \phi''(x_n) = 0$. Este caso es el denominado como spline natural.
- Pendientes prefijadas en los extremos. $\phi'(x_0) = p_0$, $\phi'(x_n) = p_n$.
- Curvaturas prefijadas en los extremos.

El nombre de spline aplicado a este tipo de curvas procede de la utilización, por parte de los delineantes, de reglas flexibles de metal o madera flexible que en inglés reciben ese nombre. La traducción literal del inglés para spline es junquillo que es precisamente una planta que proporciona un tallo extremadamente flexible que puede utilizarse para ser adaptada de forma que la curva que forme pase por una serie dada de puntos. En realidad esto último es lo que se hace con los splines polinómicos, tomando un conjunto de polinomios de un cierto grado y haciéndolos pasar por una serie de puntos.

Los splines cúbicos constituyen un tipo muy flexible de curva que tiene la gran ventaja de proporcionar continuidades de segundo orden (curvatura continua) utilizando una información muy simple como es la de las coordenadas de una serie de puntos. No obstante presentan una serie de limitaciones.

1. La modificación de uno solo de los puntos de definición altera la forma de todo el spline. Esto es un inconveniente grave si este tipo de curva se utiliza en procesos de diseño, ya que pequeñas modificaciones en una parte de la curva provocan alteraciones en todo el diseño.
2. Un spline, tal como se ha definido hasta ahora, no puede proporcionar en ningún punto una tangente vertical. Ello es debido a su definición polinómica que le impide tomar valores infinitos para sus primeras derivadas.
3. Se pueden producir problemas de oscilaciones al intentar aproximar una curva que tenga una discontinuidad en la derivada segunda. Este es el caso, por ejemplo, del punto de tangencia entre una recta y un círculo que no se puede modelar mediante una curva que se ha definido como de derivada segunda continua.

El segundo punto se puede solucionar mediante la utilización de splines paramétricos, lo cual mejora además su comportamiento frente a problemas como los del tercer punto. Este tipo de splines se describirá a continuación. Por otro lado, el primer punto se puede solucionar mediante la utilización de B-splines, los cuales se describirán en el apartado **A.3**. Asimismo, la utilización

de B-splines paramétricos permite resolver los tres anteriores problemas de forma simultánea.

A.2 SPLINES PARAMÉTRICOS

La utilización de los splines paramétricos es muy similar a la de los splines polinómicos. La principal diferencia es que existe un spline polinómico para cada una de las direcciones cartesianas del espacio bidimensional en que se trabaje. La extensión a un espacio tridimensional es inmediata. Así, dado un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ lo que se hace es generar dos splines cúbicos por separado en términos de un parámetro t , $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Al igual que anteriormente se precisa de condiciones adicionales en los extremos para cada uno de los splines. Cada uno de los ellos pasará respectivamente por los puntos $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ y $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$.

La utilización de splines paramétricos produce también curvas con curvatura continua y que además pueden tener pendientes verticales e incluso generar curvas cerradas o con lazos.

La forma más adecuada de escoger el parámetro t es hacerlo de forma que la diferencia entre los valores correspondientes a dos puntos de definición consecutivos corresponda a la distancia, en línea recta, entre ellos. Esto es:

$$t_{i+1} = t_i + [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2} \quad (A.1)$$

También pueden asignarse a t valores enteros consecutivos para cada punto de definición pero esto puede producir problemas si el espaciamiento entre los puntos de definición presenta grandes diferencias entre cada par.

A.3 B-SPLINES

En el apartado anterior se ha descrito como se puede construir un spline sobre n intervalos formados por $n + 1$ puntos de definición. Los únicos datos

necesarios para ello son los valores a interpolar en los $n + 1$ puntos y dos condiciones adicionales en los extremos, todo lo cual forma un total de $n + 3$ datos.

Supongamos ahora que se pretende construir un spline cúbico $\phi(x)$ con las condiciones $\phi(x) = \phi'(x) = \phi''(x) = 0$ en cada extremo. Estos seis datos deberían ser suficientes para definir un spline sobre 3 intervalos, pero en este caso este spline sería idénticamente nulo. En el caso de que las condiciones anteriores se aplicasen a un spline definido sobre cuatro intervalos sería necesaria una condición adicional acerca de las coordenadas de un cierto punto (x, y) por donde debería pasar, y entonces se obtendría un spline no nulo. La forma general de una curva de este tipo se puede ver en la figura A.1. En ese diagrama el spline se ha extendido a partir de sus extremos x_{i-4} y x_i mediante rectas que corren a lo largo del eje horizontal. El resultado es un spline cúbico definido sobre un número indefinido de intervalos pero que únicamente es no nulo sobre cuatro de ellos. Una función de este tipo se denomina un "B-spline" (o spline fundamental) de orden 4 (o grado 3).

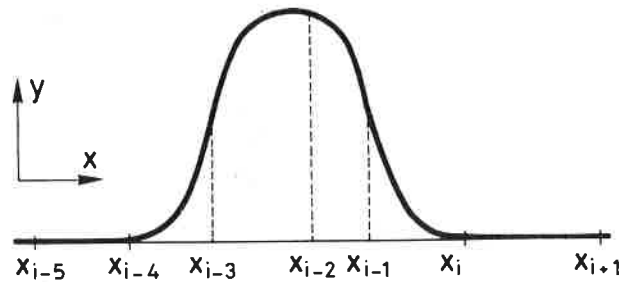


FIGURA A.1 B-spline de orden 4.

Un B-spline cúbico está completamente determinado por el conjunto de puntos sobre los que está definido y por un valor de (x, y) especificado. También se puede decir que un B-spline $M_{m,i}(x)$ de orden m sobre un conjunto de puntos es nulo en todos los intervalos a excepción de los m sucesivos que cumplen $x_{i-m} < x < x_i$. Es usual eliminar la condición de tener que definir un valor de (x, y) mediante una normalización definiendo los B-splines normalizados de manera que en lugar de esa condición cumplan:

$$\int_{x_{i-m}}^{x_i} N_{m,i}(x) dx = m^{-1} \quad (A.2)$$

La importancia práctica de los B-splines proviene del hecho de que cualquier spline de orden m definido sobre un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_n se puede expresar como una combinación lineal de B-splines definidos sobre el mismo conjunto de puntos extendido con $m - 1$ puntos adicionales en cada extremo que se pueden escoger de forma arbitraria: $x_{-m+1}, x_{-m+2}, \dots, x_{-1}$ y $x_{n+1}, \dots, x_{n+m-1}$.

En el conjunto expandido de puntos existen $m + n - 1$ grupos formados por m intervalos consecutivos cada uno, por ello será posible construir $m + n - 1$ B-splines sucesivos sobre ese conjunto, cada uno de los cuales será no nulo sobre uno de los grupos de m intervalos constitutivos. Se puede escribir entonces:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m+n-1} c_i M_{m,i}(x) \quad (A.3)$$

donde $\phi(x)$ puede ser cualquier spline de grado $m - 1$ definido sobre el conjunto original de puntos y $M_{m,i}(x)$ es el B-spline del conjunto expandido de puntos que es no nulo en el intervalo $x_{i-m} < x < x_i$. Los c_i son los coeficientes de la combinación lineal.

El resultado anterior es muy significativo ya que los B-splines son no nulos únicamente de forma local. Si un spline de grado $m - 1$ se expresa como una combinación de B-splines, cambiando el coeficiente c_i de uno de ellos se altera la curva únicamente sobre m intervalos. Ello significa que, a diferencia con los splines, los B-splines permiten realizar modificaciones locales de las curvas sin afectar al resto. Es por todo ello que la utilización de B-splines soluciona el primero de los tres problemas comentados en el apartado A.1.

La generación de los B-splines se suele hacer mediante la siguiente relación recurrente:

$$M_{m,i}(x) = \frac{(x - x_{i-m})M_{m-1,i-1}(x) + (x_i - x)M_{m-1,i}(x)}{x_i - x_{i-m}} \quad (A.4)$$

La anterior relación permite por ejemplo calcular los valores para $M_{4,i}(x)$ mediante la utilización del siguiente árbol de dependencia:

$$\begin{array}{cccc}
 M_{1,i-3}(x) & & & \\
 & M_{2,i-2}(x) & & \\
 M_{1,i-2}(x) & & M_{3,i-1}(x) & \\
 & M_{2,i-1}(x) & & M_{4,i}(x) \\
 M_{1,i-1}(x) & & M_{3,i}(x) & \\
 & M_{2,i}(x) & & \\
 M_{1,i}(x) & & &
 \end{array} \tag{A.5}$$

En el anterior esquema las columnas contienen respectivamente splines de orden 1 (constantes), de orden 2 (lineales), de orden 3 (cuadráticos) y de orden 4 (cúbicos). Tal como se ha definido un B-spline de orden 1 será no nulo únicamente sobre un intervalo donde su valor será constante. Si se estandariza de la forma comentada será:

$$M_{1,j}(x) = \begin{cases} (x_j - x_{j-1})^{-1}, & x_{j-1} \leq x < x_j \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{A.6}$$

En la práctica, el árbol de dependencia anterior se puede simplificar ya que esta última expresión muestra que algunos de sus elementos son nulos. Por ejemplo, si se quiere averiguar el valor de $M_{4,i}(x)$ para $x_{i-2} \leq x < x_{i-1}$ bastará con calcular los siguientes términos:

$$\begin{array}{cccc}
 & & M_{3,i-1}(x) & \\
 & M_{2,i-1}(x) & & M_{4,i}(x) \\
 M_{1,i-1}(x) & & M_{3,i}(x) & \\
 & M_{2,i}(x) & &
 \end{array} \tag{A.7}$$

La relación que existe entre estos B-splines definidos y los normalizados definidos en (A.2) es, para $m \geq 2$:

$$N_{m,i}(x) = (x_i - x_{i-m})M_{m,i}(x) \tag{A.8}$$

Dado que en la expresión (A.6) se producen valores siempre mayores o iguales a 0 y que en (A.7) lo que se hace es sumarlos puede verse que los B-splines son siempre positivos dentro del intervalo en el que dejan de anularse.

Para resolver el problema de la interpolación de una función definida en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n utilizando B-splines cúbicos deben añadirse tres puntos

donde los valores de los coeficientes c son incógnitas. Existirá una ecuación como la (A.10) para cada uno de los puntos de definición x_0, x_1, \dots, x_n , pero existen $n + 3$ B-splines sobre el conjunto expandido de puntos y por lo tanto $n + 3$ coeficientes c_1, c_2, \dots, c_{n+3} a determinar. Por ello se precisa, al igual que en el caso de los splines, de dos datos adicionales para determinar $\phi(x)$. Éstos se suelen referir a las derivadas en los extremos y sus ecuaciones se obtienen derivando la ecuación (A.10) respecto a x e imponiendo esas condiciones.

Una vez que todos los coeficientes c se han determinado, la combinación lineal de B-splines se puede evaluar en cualquier punto para obtener los resultados de la interpolación.

Para resolver el segundo de los tres problemas que presentaba la utilización de splines se debe utilizar también en este caso una formulación paramétrica. En este caso se suelen utilizar los B-splines normalizados que en el caso cúbico se denominarán de la forma $N_{4,i}(t)$. Estos B-splines se definen sobre un conjunto de puntos $t_i = i$, $i = 0, 1, \dots, n$ y serán no nulos para $t_{i-4} < t < t_i$. Debe ocurrir que $n \geq 3$. La forma más natural de extender el conjunto de puntos es haciendo $t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = 0$ y $t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = n$. Entonces los intervalos extra añadidos tienen longitud nula y los puntos inicial y final se convierten en "puntos múltiples" cuya multiplicidad en este caso es 4.

El efecto de introducir un punto múltiple es decrecer el orden de continuidad del spline en ese punto. Así, mientras un spline cúbico es continuo hasta su segunda derivada en un punto simple, será discontinuo en esa segunda derivada en un punto doble, discontinuo también en la primera derivada en un punto triple y discontinuo en un punto cuádruple. Estos efectos se ilustran en la figura A.3. en la cual se presenta el conjunto completo de B-splines normalizados que se pueden construir sobre el conjunto expandido de puntos $0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5$. Nótese que $N''_{4,3}(0)$, $N''_{4,2}(0)$, $N'_{4,2}(0)$, $N''_{4,1}(0)$, $N'_{4,1}(0)$ y $N'_{4,1}(0)$ son no nulos y que algo equivalente sucede en el otro extremo. Con la introducción de puntos múltiples pueden ajustarse curvas que presenten discontinuidades en una cierta derivada. De esta forma se soluciona el tercer problema de los comentados en el subapartado anterior al hablar de los splines.

A partir de (A.3) se puede ver que cualquier spline cúbico ϕ definido sobre el conjunto de puntos $0, 1, 2, \dots, n$ se puede expresar en términos de los B-splines cúbicos mediante

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n+3} c_i N_{4,i}(t) \quad (A.11)$$

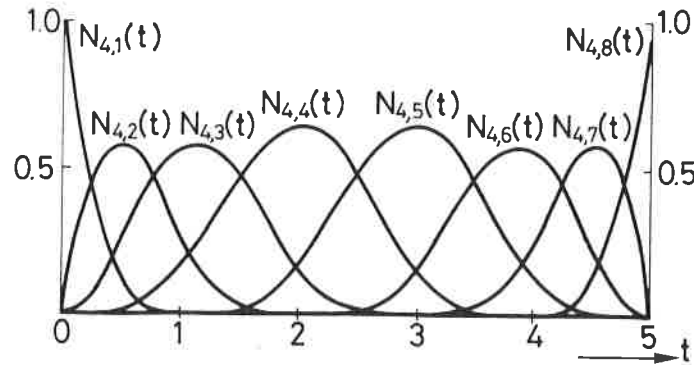


FIGURA A.3 B-splines normalizados sobre el intervalo $0 \leq t \leq 5$.

donde los c_i son coeficientes escalares. El hecho de introducir puntos múltiples no altera este resultado. Si se tiene un conjunto de vectores $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ se puede construir una ecuación análoga a la anterior pero definiendo una curva en el espacio.

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i N_{4,i+1}(t) \tag{A.12}$$

Al tener $n + 1$ coeficientes vectoriales se necesitarán $n + 1$ B-splines, los cuales se definirán sobre un conjunto de puntos expandido $0, 0, 0, 0, 1, 2, \dots, (n - 3), (n - 2), (n - 2), (n - 2), (n - 2)$.

Para $0 \leq t \leq n - 2$ (A.12) es la ecuación de un B-spline cúbico en el espacio del cual se dice que los puntos cuyo vector de posición son los vectores \mathbf{r}_i forman su polígono de definición. Este nombre proviene del hecho de que el polígono formado por la unión de los puntos cuyos vectores de posición son los \mathbf{r}_i sigue de forma aproximada la trayectoria de la curva definida.

Finalmente, cabe mencionar la siguiente interesante propiedad que cumplen los B-splines normalizados:

$$\sum_{i=0}^n N_{4,i+1}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq n - 2 \tag{A.13}$$

Más información sobre este tema se puede encontrar en la referencia [20].

CAPÍTULO 4

PROCESOS DE REMALLADO AUTOMÁTICO CON CONTROL DE ERRORES. METODOLOGÍA Y EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

4.1 INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 2. y 3. ya se ha hablado de los procesos de remallado automático. Éstos tienen como objetivo el conseguir unos resultados cuyo nivel de error esté por debajo de un cierto umbral a partir de resultados obtenidos en análisis previos y generando mallas adecuadas para ello.

La utilidad de procesos de este tipo es evidente ya que gracias a los mismos es posible obtener resultados con niveles de error por debajo de un valor prefijado. La utilización de un estimador de error de forma aislada proporciona únicamente información acerca del nivel de error asociado a unos resultados, pero por sí misma no es suficiente para corregir dicho error. Esta corrección debe realizarse mediante alguna de las técnicas de corrección de errores descritas en el Capítulo 2. Sin embargo, si dichas técnicas no se incorporan a un programa de ordenador que las utilice de forma automática, son prácticamente inoperativas, ya que la magnitud del trabajo que supone su aplicación sólo está al alcance de los ordenadores. Es por todo ello que las herramientas para estimación de errores y generación de mallas debe utilizarse de forma conjunta y automática sin que representen trabajo adicional para el usuario.

Los procesos de remallado automático utilizan las técnicas de estimación de error y generación automática de mallas descritas en los Capítulos 2. y 3. Dichas técnicas se agrupan dentro de un solo proceso encadenado como el descrito en el apartado 3.5, de forma que se establece un flujo de información entre las distintas etapas que forman el proceso.

En este capítulo se presenta una metodología general, desarrollada a lo largo de esta investigación, para este tipo de procesos. resultados de un cierto cálculo por elementos finitos. La presentación de este desarrollo se puede descomponer en varios puntos:

- Definición del dominio del problema y de las cargas y coacciones definidos sobre éste.
- Generación de la malla de elementos finitos.
- Realización del cálculo por elementos finitos y estimación del error.
- Definición del remallado.

Cada uno de los puntos mencionados se describe con detalle en su correspondiente apartado.

El desarrollo de esta metodología se ha llevado a cabo de forma que permita, no sólo llevar a cabo procesos de remallado automático, sino que además facilite al máximo la entrada de datos requerida por un programa de cálculo por elementos finitos. Un programa que utilice las técnicas presentadas precisa únicamente de la definición general del dominio de estudio siendo capaz de generar a partir de ello las mallas necesarias para el cálculo y todo el proceso subsiguiente.

Utilizando esta metodología se ha confeccionado el programa de ordenador 2DMOP con el cual se han realizado una serie de experimentos numéricos para comprobar la capacidad de las técnicas presentadas. En el último apartado de este capítulo se presentan algunos ejemplos de utilización del programa que permiten extraer conclusiones tanto sobre el funcionamiento de los procesos de remallado automático como sobre la utilización de los dos criterios de optimalidad presentados en el Capítulo 2.

4.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La utilización de un programa de elementos finitos requiere la confección de un archivo de datos en el cual deben estar definidas todas las características tanto de la malla empleada como de los materiales, cargas, coacciones, etc. Toda esta información es necesaria para definir el problema que se pretende estudiar.

La entrada de datos de un programa clásico de elementos finitos utilizando un modelo de material elástico y lineal requiere la siguientes información:

1. Coordenadas de todos los nodos de la malla a utilizar.
2. Conexiones nodales de todos los elementos de la malla.
3. Definición de las propiedades del material de cada elemento.
4. Lista de nodos con desplazamientos prescritos.
5. Lista de nodos con cargas puntuales.
6. Lista de caras de elementos con cargas repartidas.
7. Lista de elementos con fuerzas de volumen.

La generación de toda esta información es un trabajo arduo y pesado y en la mayoría de las ocasiones requiere la utilización de algún tipo de programa para generación de mallas. Como ya se ha mencionado en el Capítulo 3, un programa de este tipo debe generar no sólo la información para los puntos 1. y 2. sino también para todos los demás, ya que aunque la generación de la malla sea un proceso tedioso, también lo es el identificar los nodos y elementos para definir las cargas, coacciones y tipos de material.

Un programa capaz de llevar a cabo remallados automáticos precisa de información más general que la mencionada anteriormente. La razón es que los datos que requiere no tienen por objeto la generación de una malla concreta, sino la generación de las sucesivas mallas y la aplicación, sobre cada una de ellas, de las cargas y coacciones. Es por ello que lo que se debe definir en estos casos es la forma y estructura del dominio y como se aplican sobre éste las cargas y coacciones. Esta información es más general que la anterior y es la estrictamente necesaria para definir el problema que se quiere estudiar.

La metodología que se propone para definir el dominio y las cargas y coacciones que actúan sobre éste es la misma que la presentada en el apartado **3.6.1** al hablar de la información necesaria para un programa de generación. Dicha información es la que el programa necesita para definir la malla y, al mismo tiempo, imponer las cargas y coacciones sobre ella.

Tal como se ha visto en los ejemplos presentados en el Capítulo **3**, una definición de este tipo permite modelar cualquier tipo de dominio. Esta capacidad es debida a las grandes posibilidades que proporciona el uso de los B-splines para interpolar cualquier tipo de geometría.

Al igual que en el caso del programa para generación de mallas 2DUMG el dominio del problema se puede definir mediante diversas curvas que pueden ser interiores o de contorno, y a su vez abiertas o cerradas. Este tipo de definición permite definir a posteriori las zonas con distinto material, y la localización y valor de las cargas y coacciones. La forma de definir dichas curvas y la información necesaria para ello ya se ha descrito en el apartado **3.6.1.1**.

Para la definición de las cargas y las coacciones se recomienda una metodología algo más general que la definida en el Capítulo **3** para el generador de mallas. Recordemos que, en este caso, la información generada va a ser utilizada directamente por un módulo de cálculo sin pasar por la escritura de archivos intermedios para almacenar la misma. Por ello la estructura de la información debe ser lo más clara posible de cara a generar la información para el módulo de cálculo. La metodología presentada consiste básicamente en definir unas cargas y unas coacciones “tipo” que a continuación se combinan linealmente para definir cada caso de carga.

El primer paso para definir las cargas es definir una serie de “tipos” de manera que cada una de ellas esté formada por cargas pertenecientes todas ellas a uno solo de los siguientes grupos:

- Cargas puntuales.
- Cargas repartidas.
- Cargas gravitatorias.
- Cargas centrífugas (para sólidos de revolución).

Así, por ejemplo, se puede tener un tipo de carga compuesto por una serie de cargas puntuales, otro compuesto por varias cargas repartidas, etc. El objetivo de esta definición es agrupar las distintas cargas que pueden actuar

sobre una estructura en conjuntos separados. De esta forma, cada caso de carga se podrá definir como una cierta combinación lineal de estos conjuntos o tipos. En el caso de que alguno de los tipos esté presente en varios casos de carga no será necesario el repetir su definición para cada uno de ellos.

Para el caso de las coacciones también se definen una serie de “tipos” pero con un sentido algo distinto. Todos los tipos de coacción afectarán a los mismos grados de libertad y lo que puede variar entre ellos es el valor de las coacciones impuestas. Así, un determinado tipo puede corresponder a desplazamientos nulos para todos los grados de libertad coartados mientras que el resto de los tipos pueden corresponder a valores no nulos para distintos conjuntos de puntos coartados. Combinando linealmente todos los tipos de coacciones se pueden imponer desplazamientos no nulos sobre cualquier combinación de puntos y con cualquier combinación de valores.

A partir de las cargas y coacciones tipo se puede formar cada “caso” de carga. Cada uno de ellos se construirá mediante una combinación lineal tanto de cargas tipo como de coacciones tipo. Estos casos de carga son los que realmente se aplican sobre el dominio estudiado.

Esta forma de definir las cargas y coacciones permite una gran flexibilidad para definir distintos casos de carga que sean combinación de varias solicitaciones. Por ejemplo, en muchas ocasiones se tienen obras de ingeniería en las cuales siempre actuará el peso propio. Además en cada caso de carga pueden actuar otras solicitaciones añadidas que pueden ser cargas puntuales, cargas repartidas, descensos de apoyo, etc. Mediante esta metodología se podrá combinar el peso propio con cualquier combinación adicional de cargas sin más que tener que definir cada tipo una sola vez y definir para cada caso los coeficientes que los combinan.

Una organización de este tipo puede ser realmente útil para calcular una estructura en régimen de servicio siguiendo la norma española sobre estructuras de hormigón. En ese caso se pueden introducir en conjuntos o tipos distintos las cargas permanentes y cada uno de los distintos tipos de sobrecargas de uso. A continuación resulta muy sencillo el combinar cada tipo de carga, mediante los coeficientes de seguridad que dicta la norma, para formar los distintos casos de carga que deben calcularse.

Desde el punto de vista de la programación la metodología expuesta resulta muy cómoda. La forma de proceder viene descrita en los siguientes pasos:

- Almacenar los valores de cargas y coacciones correspondientes a los nodos generados sobre cada una de las curvas utilizadas para definir el contorno.

- Calcular, una vez generada totalmente la malla, el vector de cargas nodales equivalentes correspondiente a cada tipo de carga y almacenarlo.
- En el momento de resolver el sistema de ecuaciones formado por los desplazamientos y la matriz de rigidez, el vector de cargas correspondiente a cada caso de carga será la correspondiente combinación lineal de los vectores anteriormente calculados y almacenados para cada tipo de carga.

De esta manera, una vez definidos los vectores de cargas iniciales, resulta trivial el efectuar combinaciones sobre ellos. Una ventaja importante es que el vector de cargas nodales equivalentes correspondiente a cada tipo de carga se calcula y ensambla una sola vez, independientemente del número de casos de carga en que éste pueda aparecer.

Para el caso de las coacciones el proceso es muy similar sin más que combinar para cada caso de carga los vectores de coacciones correspondientes a cada tipo.

La definición de cada tipo de carga o de coacción se hace de la forma presentada en el subapartado 3.6.1.2. La información requerida para ello es la definición de las zonas de las curvas sobre las que actuarán cada tipo de carga o coacción y sus valores.

A partir de todo lo anterior puede catalogarse toda la información que precisa un programa que utilice la presente metodología. Será por tanto necesario definir la información referente a los siguientes aspectos:

- Curvas de definición del dominio mediante las cuales se modela tanto el contorno del mismo, como las zonas de separación entre materiales distintos.
- Propiedades de cada material.
- Características de cada tipo de carga.
- Características de cada tipo de coacción.
- Coeficientes de la combinación de los tipos de carga y coacción para cada caso de carga.
- Número y posición de los puntos singulares existentes sobre el dominio.

Utilizando un esquema como el propuesto el trabajo necesario para

preparar esta información es mínimo ya que se deja en manos del programa la realización de casi todo el trabajo. Es por ello que esta metodología es muy atractiva, no sólo por la flexibilidad que tiene para definir cualquier tipo de problema sino además por la gran comodidad que representa para el usuario el preparar la mínima cantidad de información necesaria.

Todos los pasos descritos en esta metodología se pueden extrapolar para problemas tridimensionales. En este caso el dominio se deberá definir mediante la utilización de curvas y superficies en el espacio. Para homologar una definición de este tipo con los trabajos de diseño que se realizan en el mundo de la industria es importante el utilizar tipos de curvas y superficies estándar dentro del mundo del CAD. Dentro del campo de la programación, la dificultad surge al construir un programa de generación de mallas con las mismas prestaciones que el descrito en el capítulo anterior pero capaz de generar mallas en el espacio.

La definición de los puntos singulares se puede realizar fácilmente si éstos se utilizan como puntos de definición del contorno. De esta forma sólo hay que indicar el número de puntos singulares existentes, y la numeración de cada uno de ellos dentro de la lista de puntos de definición. Esta información se utiliza después de cada cálculo para calcular los tamaños de los elementos de la nueva malla.

4.3 GENERACIÓN DE LAS MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS

Para generar la malla de elementos finitos es necesario disponer de la información descrita en el apartado anterior para definir la forma del dominio y las cargas y coacciones que actuarán sobre éste. Además, también es necesaria la definición de una malla de referencia.

Durante cada etapa del proceso iterativo de remallado automático se genera una nueva malla utilizando como malla de base la utilizada en la etapa inmediatamente anterior. Por ello la malla de referencia queda definida de forma automática a partir de cálculos previos. De esta forma, manteniendo las definiciones descritas en el apartado anterior y cambiando en cada etapa la malla de base se obtendrá una sucesión de mallas mejoradas. En cada etapa, la definición de los parámetros de generación definidos sobre la malla de referencia se realizará a partir de los resultados de un estimador de error.

Sin embargo, para iniciar el proceso iterativo y generar la primera malla es necesaria la introducción por parte del usuario de una primera malla de referencia. Si no se tiene una idea clara de como va a ser la solución al problema planteado se puede construir esa primera malla con un solo elemento suficientemente grande para cubrir todo el dominio y definir sobre éste un tamaño de elemento uniforme. En el caso de que ya se tenga una idea general de como va a ser la solución del problema se puede construir una malla de base algo más compleja definiendo entonces tamaños más pequeños en las zonas donde se prevea que existan concentraciones de tensiones.

El proceso de generación de las mallas engloba también la definición de los nodos y elementos cargados, y la de los nodos coartados. Además hay que almacenar también la numeración de los nodos de la malla que corresponden con alguno de los puntos singulares definidos.

La información generada en esta fase pasará directamente al módulo de cálculo por elementos finitos.

4.4 CÁLCULO Y ESTIMACIÓN DEL ERROR

A partir de la información generada utilizando la metodología expuesta en los apartados anteriores es posible realizar el cálculo por elementos finitos del problema planteado. Esta etapa utiliza las herramientas que normalmente se emplean en la mayoría de los programas de elementos finitos y se puede utilizar para ello cualquier módulo de cálculo ya existente. La única peculiaridad que se debe tener en cuenta es que el vector de fuerzas nodales equivalentes utilizado para cada caso de carga se obtiene como combinación lineal de los vectores generados previamente para cada tipo de carga.

La información que proporciona el módulo de cálculo será la que utilizarán los diversos estimadores de error. Dicha información debe ser, por tanto, almacenada, o bien direccionada directamente hacia las subrutinas que realizan este cálculo.

Entre los estimadores de error existentes en la actualidad se ha prestado especial atención al desarrollado por Zienkiewicz y Zhu. Tal como se ha visto en el ejemplo del apartado 2.8, este estimador proporciona resultados muy aceptables.

Además de la buena aproximación que proporciona el estimador de Zienkiewicz y Zhu, hay que valorar también la facilidad con la que éste se puede incorporar a cualquier programa de uso general. Muchos de los programas ya existentes realizan alisados de las tensiones para presentar sus valores en los nodos a efectos de facilitar la labor de postproceso. Estas tensiones alisadas se pueden aprovechar directamente para ser introducidas en la expresión del estimador de error de Zienkiewicz y Zhu. Aunque esta expresión se ha presentado para ser utilizada con unas tensiones obtenidas a partir de un alisamiento consistente (con una matriz de masas M global y consistente), se pueden conseguir también buenos resultados utilizando alisamientos de otro tipo como los que ya puede llevar incorporado cualquier programa ya existente.

La facilidad de implementación de este estimador es debida a que todas las operaciones necesarias para ello se realizan a nivel de elemento por lo que la estructura de la información necesaria para llevarlas a cabo es la misma que la normalmente utilizada en un programa de elementos finitos. No ocurre así con las expresiones de otros estimadores de error en las cuales es necesario realizar integrales en las interfaces entre elementos, o generar nuevas funciones de forma, o comparar dos mallas distintas. Ninguna de las operaciones anteriores se puede implementar fácilmente en un programa cualquiera sin alterar sustancialmente su estructura.

Dado que el error global en toda la estructura se obtiene como la suma de los errores existentes sobre cada elemento resulta posible y además conveniente el conocer no sólo el nivel de ese error sino también las zonas en las que éste es máximo y mínimo. Otro dato interesante puede ser también el conocer el porcentaje del volumen del dominio sobre el cual el error es mayor que el admisible.

Los datos mencionados pueden ser útiles en el momento de juzgar cuando unos resultados son suficientemente buenos. Por ejemplo, en ocasiones puede ser necesario admitir como válidos resultados en los cuales exista un alto nivel de error concentrado sobre un área muy pequeña. Casos como este ocurrirán siempre que exista algún punto singular, pues el error estimado en sus alrededores no sólo no disminuirá al ir refinando la malla sino que aumentará debido a que la precisión del estimador irá aumentando. Lo que se conseguirá en ese caso al ir refinando la malla es ir concentrando el error en los alrededores del punto singular. Sin embargo el estimador de error crecerá en esa zona no porque la solución sea peor sino porque éste detectará cada vez con más precisión la existencia de una singularidad.

Es muy conveniente presentar la magnitud del error estimado, tanto a nivel local como a nivel global, como un porcentaje de la energía total de deformación obtenida del cálculo. De esta forma se puede tener una idea de la magnitud relativa del error existente tanto a nivel local elemental como a nivel global.

4.5 DEFINICIÓN DEL REMALLADO

A partir de la información proporcionada por el estimador de error, es posible generar los parámetros necesarios para definir la generación de una nueva malla.

Utilizando la técnica descrita en el capítulo anterior en el apartado 2.7.3.1 y uno de los criterios de optimalidad descritos en el apartado 2.7.3.2 es posible definir los nuevos tamaños de elemento sobre cada uno de los elementos ya utilizados en la malla anterior. Esta definición se realiza elemento por elemento a partir del error obtenido en el cálculo previo y el error requerido por el criterio de optimalidad escogido. Mediante este proceso se define el tamaño que deberán tener los elementos de la malla siguiente sobre la zona ocupada previamente por cada uno de los elementos de la malla anterior.

En el momento de calcular los tamaños de los elementos de la nueva malla es conveniente saber cuales de ellos están en contacto con algún punto singular. Para ello, si el generador de mallas proporciona la información necesaria para saber que nodos de la malla corresponden a puntos singulares lo único que hay que hacer para cada elemento es comprobar si éste está en contacto con algún punto singular antes de calcular el nuevo tamaño.

Los valores de los nuevos tamaños que están definidos como un valor sobre cada elemento de la malla ya utilizada constituyen una ley de tamaños a lo largo de todo el dominio que es discontinua por ser constante dentro de cada uno de los elementos. Si estas discontinuidades son muy grandes se pueden producir variaciones de tamaño demasiado bruscas en la nueva malla. Para evitar este inconveniente se puede realizar un alisado de los tamaños definidos para obtener una nueva ley que estará entonces definida sobre los nodos de la nueva malla. Entonces, en el interior de cada elemento, el tamaño definido sobre cada punto se interpolará mediante las funciones de forma a partir de sus valores nodales.

Un alisado de este tipo se puede efectuar utilizando la matriz de masas M ya calculada y factorizada previamente para realizar el alisado de las tensiones. En ese caso el coste de realizar un alisado global de los tamaños definidos para los elementos será mínimo. No obstante, desde el punto de vista práctico no existe ninguna garantía de que al alisar un campo de valores positivos no aparezca algún valor negativo definido sobre alguno de los nodos. De hecho esto ocurre con cierta frecuencia cuando existen variaciones bruscas del tamaño de elemento. No tiene sentido el definir un valor negativo para el tamaño de elemento sobre ningún punto, y de hecho ello puede provocar un fallo en el programa de generación. Por ello se recomienda que, en lugar de realizar un alisado global, se realice un simple promediado en cada nodo del tamaño

definido sobre los elementos que le rodean. De esta forma la media de una serie de valores positivos sí será siempre otro valor positivo.

La información generada en este punto será la que se utilizará para la generación de una nueva malla cerrándose así el proceso iterativo de remallados automáticos. Para esta nueva generación se utilizará la nueva distribución de tamaños de elemento definida sobre la malla anterior juntamente con los datos para la definición del problema expuestos en el primero de los puntos descritos.

4.6 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado se presentan varios ejemplos de aplicación de las técnicas de remallados automáticos. Estos ejemplos se han realizado con el programa de ordenador 2DMOP confeccionado especialmente para llevar a cabo procesos de este tipo. Este programa incorpora todos los detalles descritos en los apartados previos de este Capítulo lo cual permite comprobar la utilidad de los mismos.

Los ejemplos que se presentan a continuación corresponden a geometrías sencillas sometidas a un solo tipo de carga. Se han utilizado geometrías con y sin puntos singulares para comprobar la convergencia de los algoritmos en cada caso. Asimismo, se han utilizado también los dos criterios de optimalidad descritos en el Capítulo 2 para poder realizar comparaciones sobre los resultados obtenidos con cada uno de ellos. Por último todos los ejemplos se han resuelto utilizando elementos de 3 y de 6 nodos para poder comprobar el buen funcionamiento de estas técnicas en ambos casos.

Estos ejemplos han sido utilizados en varias publicaciones [74][75] para comprobar el buen funcionamiento de los procesos de remallado automático. Su empleo resulta especialmente útil debido a que, a pesar de su sencillez, permiten extraer interesantes conclusiones.

En cada ejemplo se ha solicitado al programa la producción de resultados con un determinado nivel de error. En la mayoría de los casos este nivel de error se ha conseguido de forma global al realizar el primer remallado y sólo en unas pocas ocasiones se ha tenido que recurrir a un segundo remallado. Sin embargo, en todos los casos se han utilizado hasta cinco mallas para comprobar la evolución de la distribución del error a lo ancho de todo el dominio en función del criterio de optimalidad utilizado. Ello ha permitido ver cual es la evolución de estos procesos en función del criterio de optimalidad utilizado.

Para cada malla se presentan una serie de magnitudes que pretenden mostrar la bondad de los resultados obtenidos con las mismas. Estas magnitudes son:

Nº Malla: Número de la malla utilizada dentro del proceso iterativo.

NELEM: Número de elementos de la malla.

NPOIN: Número de nodos de la malla.

$\|\hat{\mathbf{u}}\|$: Energía de deformación estimada mediante el cálculo por elementos finitos.

$\|\hat{\mathbf{e}}\|$: Error estimado en la energía de deformación.

$\hat{\eta}$: Porcentaje de error estimado. $\hat{\eta} = \frac{\|\hat{\mathbf{e}}\|}{\sqrt{\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{e}}\|^2}}$

% área: Porcentaje del área del dominio respecto al área total en la cual el error obtenido es superior al error requerido según el criterio de optimalidad utilizado en cada caso.

Min. ξ_e : Mínimo cociente entre el error obtenido y el error requerido para cada elemento. Dicho cociente está definido en (2.7.7).

Max. ξ_e : Máximo cociente entre el error obtenido y el error requerido para cada elemento.

Las magnitudes anteriores permiten observar la evolución de los resultados obtenidos a través de toda la secuencia de mallas. Estas magnitudes se presentan, para cada caso, en forma de tabla.

Para cada malla utilizada se presenta además una figura en la cual se pueden observar cuatro representaciones:

1. Malla utilizada.
2. Líneas de igual tensión principal máxima.
3. Líneas de igual cociente ξ_e obtenidas siguiendo el criterio de optimalidad de error equidistribuido sobre los elementos.
4. Líneas de igual cociente ξ_e obtenidas siguiendo el criterio de error por

unidad de área constante.

Las tensiones presentadas corresponden al campo alisado de las mismas obtenido mediante la expresión (2.6.33).

La obtención de los coeficientes ξ_e que se utiliza en cada caso depende de cual sea el criterio de optimalidad considerado. Sin embargo, en las figuras se presentan los coeficientes correspondientes a los dos criterios para poder ver como se reparte el error sobre todo el dominio.

En ocasiones los valores máximo y mínimo de ξ_e presentados en las figuras difieren ligeramente de los presentados en las tablas correspondientes. Ello es debido a que los valores presentados en las tablas corresponden a los elementos en que estos cocientes alcanzan sus valores extremos mientras que en las figuras lo que se representa son los valores obtenidos a partir de un alisado de los anteriores. Este alisado se realiza para poder obtener un campo continuo de cocientes y poder representar sobre éste sus isolíneas. Mediante el alisado se obtienen unos valores nodales de ξ_e que se pueden interpolar dentro de los elementos mediante las funciones de forma.

En las figuras que presentan mallas con elementos de 6 nodos, las isolíneas presentadas aparecen como quebradas dando la impresión de que los resultados obtenidos son peores que los que proporcionan los elementos de 3 nodos. La razón de este hecho es que el programa de postproceso utilizado interpola las variables de forma lineal dentro del elemento tanto si éste es lineal como cuadrático. Por ello, aunque en el caso de los elementos cuadráticos el campo alisado de tensiones sea cuadrático, sus isolíneas se dibujan como si fuese lineal dando la impresión, por tanto, de que su calidad es inferior a la real. Con los elementos lineales este efecto no se nota debido al gran número de elementos que normalmente se utiliza.

Para simplificar los comentarios sobre la comparación entre los dos criterios de optimalidad definidos en el Capítulo 2. se denominará:

- Criterio de optimalidad A o primer criterio: al correspondiente a la distribución del error en partes iguales sobre todos los elementos. El error óptimo para cada elemento, obtenido mediante este criterio, es el definido por la expresión (2.7.14).
- Criterio de optimalidad B o segundo criterio: al correspondiente a hacer constante la magnitud del error por unidad de área. El error óptimo para cada elemento, obtenido mediante este criterio, es el definido por la expresión (2.7.20).

4.6.1 Ejemplo n° 1. Tubería gruesa sometida a presión interior

Este ejemplo corresponde al cálculo de una tubería gruesa sometida a una presión en su interior. Dada la simetría del problema el estudio se ha limitado a un cuadrante de la misma coartando los desplazamientos de los puntos situados sobre los cortes realizados, en la dirección perpendicular a los ejes de simetría.

La geometría utilizada, así como la carga externa aplicada y las coacciones se pueden ver en la figura 4.1. Para definir la geometría se han utilizado únicamente los cuatro puntos esquina especificando condiciones de curvatura nula o pendiente fijada según el caso.

El modelo de cálculo utilizado es un modelo bidimensional de deformación plana y las propiedades del material son $E = 1.0 \cdot 10^5$ y $\nu = 0.3$.

Este ejemplo se ha calculado utilizando los dos posibles criterios de optimalidad y elementos tanto lineales como cuadráticos.

En una primera etapa se han utilizado elementos lineales de 3 nodos exigiendo un nivel máximo de error de un 5%. En las figuras 4.2-4.6 se pueden ver los resultados obtenidos al utilizar el criterio de optimalidad A, mientras que en las figuras 4.7-4.11 se presentan los resultados obtenidos con el criterio de optimalidad B. Asimismo, en las tablas 4.1 y 4.2 se presentan respectivamente los valores característicos correspondientes a cada malla.

En ambos casos, para la primera malla se ha especificado un tamaño de elemento uniforme de 2.0.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	200	119	0.0228	0.00482	20.7	49.0	0.26	19.7
2	2806	1457	0.0237	0.00105	4.4	78.5	0.13	5.7
3	2558	1345	0.0237	0.00107	4.5	13.0	0.09	3.2
4	2554	1329	0.0237	0.00105	4.4	78.0	0.17	4.4
5	2335	1226	0.0237	0.00104	4.4	12.9	0.12	2.8

TABLA 4.1 Valores obtenidos para la tubería con presión interior.
Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad A.

En los dos casos se observa que se consiguen resultados con un error global inferior al 5% ya con el primer remallado. Es decir, se alcanza un nivel de error

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	200	119	0.0228	0.00482	20.7	47.9	0.29	24.0
2	3052	1582	0.0237	0.00107	4.5	26.7	0.40	2.7
3	6563	3369	0.0237	0.00094	4.0	11.0	0.38	1.4
4	6101	3136	0.0237	0.00094	3.9	11.7	0.38	1.7
5	5826	3001	0.0237	0.00095	4.0	11.3	0.40	1.6

TABLA 4.2 Valores obtenidos para la tubería con presión interior.
Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad B.

global inferior al requerido con la segunda malla del proceso.

En las mallas obtenidas con el criterio de optimalidad A se pueden observar las siguientes características:

- El porcentaje de error global se mantiene alrededor del 4.5% a partir de la segunda malla.
- Se observa un comportamiento oscilatorio del porcentaje de área con error superior al admisible y del máximo cociente ξ_e . Mirando las mallas obtenidas se observa que existe una sucesión en la que se alternan mallas más o menos uniformes con otras en las que existe una fuerte variación en el tamaño de los elementos.
- Los cocientes ξ_e obtenidos a lo ancho de todo el dominio oscilan, en la última malla, entre valores de 0.1 y 2.8.

En cambio las mallas obtenidas con el criterio de optimalidad B proporcionan los siguientes puntos a destacar:

- El porcentaje de error es de un 4.5 % en la segunda malla y luego se mantiene alrededor del 4.0%.
- No se observa ningún comportamiento oscilatorio. Los valores del porcentaje del área y los cocientes ξ_e descienden y luego se mantienen estables.
- Los cocientes ξ_e obtenidos a lo largo de todo el dominio se estabilizan a valores que oscilan entre 0.0 y 1.7.

Después de haber obtenido los resultados anteriores, se ha repetido el

proceso pero utilizando elementos de 6 nodos y requiriendo en este caso un error máximo de un 1%. La calidad de los resultados obtenidos con elementos cuadráticos es claramente superior a la de los elementos lineales por lo que es posible pedir un nivel de precisión mayor para este caso. En realidad, el exigir un porcentaje de error de un 5% no es ninguna restricción para los elementos de 6 nodos ya que ese nivel de precisión se alcanza utilizando muy pocos elementos. Por ello, para testear el funcionamiento de estos algoritmos, se ha requerido el bajar hasta un 1% de error. El tamaño de elemento especificado para la primera malla ha sido uniforme y de un valor de 10.

Los resultados obtenidos con los elementos cuadráticos se representan en las figuras 4.12-4.16 para el criterio de optimalidad A, y en las figuras 4.17-4.21 para el criterio de optimalidad B. Asimismo, los valores característicos obtenidos se presentan en las tablas 4.3 y 4.4.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	24	61	0.0236	0.00151	6.4	100.	1.80	11.2
2	119	264	0.0237	0.00026	1.1	19.6	0.21	3.0
3	167	362	0.0237	0.00018	0.8	22.2	0.24	1.9
4	160	351	0.0237	0.00018	0.8	14.0	0.20	1.5
5	148	327	0.0237	0.00019	0.8	5.3	0.27	1.3

TABLA 4.3 Valores obtenidos para la tubería con presión interior.
Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 1%.
Criterio de optimalidad A.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	24	61	0.0236	0.00151	6.4	100.	1.30	20.2
2	135	298	0.0237	0.00021	0.9	14.3	0.22	3.4
3	213	458	0.0237	0.00013	0.6	3.7	0.27	1.5
4	226	485	0.0237	0.00014	0.6	2.6	0.28	1.5
5	230	495	0.0237	0.00013	0.6	3.4	0.23	1.3

TABLA 4.4 Valores obtenidos para la tubería con presión interior.
Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 1%.
Criterio de optimalidad B.

Con la utilización del criterio de optimalidad A no se alcanza un error global inferior al requerido hasta la tercera malla, si bien ya con la segunda

malla los resultados contienen sólo un 1.1% de error. El criterio B proporciona resultados con un error inferior al especificado ya con la segunda malla.

La evolución de las distintas magnitudes presentadas en las tablas 4.3 y 4.4 es más uniforme, para ambos criterios, que en el caso de los elementos lineales. Sin embargo, la utilización del criterio B proporciona siempre valores inferiores tanto para el porcentaje de área con mayor error al admisible como para el máximo valor de ξ_e .

A partir de los resultados obtenidos con este ejemplo se pueden efectuar las siguientes comparaciones entre los dos criterios de optimalidad:

- El criterio de optimalidad B proporciona niveles globales de error ligeramente inferiores a los del criterio A.
- Asimismo, el máximo valor de ξ_e también es siempre ligeramente menor al utilizar el criterio B.
- El criterio A proporciona, en ocasiones, un comportamiento oscilatorio alternando mallas con fuertes variaciones en el tamaño de los elementos con otras mucho más uniformes. El criterio B no presenta, hasta ahora, comportamientos de este tipo.
- El criterio B es mucho más exigente con el nivel de error existente en los elementos pequeños que el criterio A. Ello es debido a que al obligar a que el nivel de error por unidad de área sea constante se requiere que los elementos de área pequeña contengan poco error mientras que los de área grande podrán contener más error.
- La utilización del criterio B proporciona mallas con muchos más nodos y elementos que el criterio A. El número de elementos generados con este criterio puede ser de más del doble que con el criterio A.

A primera vista, el último punto de las anteriores comparaciones podría hacer deshechar la utilización del criterio de optimalidad B porque ello supone un coste adicional muy grande respecto del criterio A. Sin embargo hay que tener en cuenta los comentarios hechos al respecto en el subapartado 2.7.3.2 respecto a la mejor distribución del error en este último caso, y respecto a la mejor convergencia hacia la malla óptima. En efecto, se puede ver que con este segundo criterio siempre se llega antes a una configuración estable en la cual tanto el porcentaje de área con error mayor al admisible como el rango de valores en que se mueve ξ_e a lo ancho de todo el dominio permanecen prácticamente constantes. En este sentido, la utilización del criterio A produce

peores convergencias hacia una situación estable y además produce siempre valores mayores para ξ_e .

Hay que tener en cuenta, además, que el hecho de que el criterio de optimalidad B sea más exigente en las zonas donde los elementos son pequeños hace que la precisión en ellas sea mayor que con el criterio A. El hecho de que el interés del cálculo esté siempre centrado en ese tipo de zonas hace que este criterio proporcione resultados mucho más adecuados para su interpretación ingenieril.

Si se compara el número de elementos necesario para alcanzar un cierto nivel global de error, es evidente que el segundo criterio resulta muy desfavorable, pues requiere un número de elementos mucho mayor. Sin embargo, la precisión alcanzada en las zonas difíciles con este criterio sólo es alcanzable con el criterio A utilizando niveles mucho más bajos de error global. Para justificar la afirmación afirmación hay que realizar los siguientes razonamientos:

- Si se centra la atención en la zona del dominio donde se producen los mayores gradientes de tensiones, resultará que el tamaño de elemento necesario para alcanzar un cierto nivel de error en la misma será independiente del criterio de optimalidad que se esté utilizando. Nos estamos refiriendo en este caso al tamaño de elemento necesario para que el valor de la integral (2.4.14), extendida sobre el subdominio mencionado, alcance un valor dado.
- Si dicho tamaño de elemento se consigue mediante la utilización del criterio de optimalidad B, se habrá generado un malla en la cual el nivel de error existente en el volumen cubierto por cada elemento será proporcional al tamaño del mismo. Por ello, fuera del subdominio mencionado, los elementos serán mayores, y el nivel de error asociado a cada uno de ellos será mayor que el de los existentes en dicho subdominio.
- Por otro lado, si el nivel de error local mencionado al principio se alcanza mediante la utilización del criterio de optimalidad A, resultará que en la zona exterior al subdominio de interés los elementos deberán contener el mismo nivel de error que en el interior del mismo.
- A partir de lo anterior se puede deducir que: a igualdad de error local en las zonas comprometidas del estudio, el criterio A es más exigente con el error existente en cada elemento situado en el exterior de las mismas que el criterio B. Por ello, a igualdad de error local, el criterio A proporcionará mallas con menor error global que el criterio B.

En virtud de los razonamientos anteriores, si la comparación se efectúa en función del número de elementos necesario para alcanzar un cierto nivel de error local en las zonas de mayor interés, entonces el criterio de optimalidad B resulta ser el más económico.

Dicho de otra manera, si lo que se pretende es conseguir resultados en los cuales exista un determinado nivel de error en las zonas difíciles con concentraciones de tensiones, se tendrá que utilizar un nivel de error global mucho menor si se utiliza el criterio A que si se utiliza el segundo. Por ello lo que hay que comparar es el número de elementos necesarios para conseguir un cierto nivel de error en una determinada zona de interés utilizando los dos criterios. Si se realiza esta comparación, la utilización del criterio B resulta favorable en cuanto a coste, y además aparece como la más recomendable por su facilidad de convergencia. Por otro lado, a igualdad de error local en las zonas donde el tamaño de los elementos es menor, el criterio A será más restrictivo con los elementos mayores que el criterio B, ya que este último permitirá la existencia de mayor error en los elementos grandes. Por ello, en estos casos la utilización del criterio B producirá mallas con menor número de elementos.

Desde el punto de vista ingenieril los comentarios anteriores justifican el que cuando se utilice el criterio de optimalidad B, se puedan exigir niveles de error más altos que cuando se utilice el criterio A.

4.6.2 Ejemplo nº 2. Tubería gruesa sometida a carga repartida diametral.

En este segundo ejemplo se ha utilizado la misma tubería del caso anterior pero cambiando la carga aplicada. Ésta consiste ahora en una presión aplicada en dos pequeñas zonas diametralmente opuestas. La geometría y la carga aplicada se pueden observar en la figura 4.22. Para definir la geometría de este caso ha sido necesario añadir un quinto punto a la definición del ejemplo anterior para poder definir la zona de actuación de la carga repartida. Este nuevo punto es el situado en la intersección del radio que forma un ángulo de 10° con la vertical y el círculo exterior.

En este ejemplo se provoca la aparición de un punto singular situado en el extremo de la carga repartida. Este punto es singular porque sobre el mismo aparece una discontinuidad del campo de tensiones. Esta discontinuidad aparece porque las condiciones de contorno son discontinuas. Asimismo, también se

produce una fuerte concentración de tensiones en la parte interior de la tubería, especialmente en la zona del diámetro cargado.

Al igual que en el ejemplo anterior se ha comenzado por utilizar elementos lineales requiriendo un error máximo de un 5% y utilizando los dos posibles criterios de optimalidad. Para la malla inicial se ha especificado un tamaño de elemento uniforme de valor 2.

Los resultados obtenidos con la utilización del criterio A se presentan en las figuras 4.23-4.27 y en la tabla 4.5 mientras que los del criterio B se presentan en las figuras 4.28-4.31 y en la tabla 4.6.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	201	120	0.0198	0.00363	18.1	88.7	0.64	13.0
2	2719	1428	0.0203	0.00106	5.2	72.9	0.17	4.8
3	3564	1872	0.0203	0.00090	4.4	19.2	0.17	3.3
4	3363	1762	0.0203	0.00096	4.7	65.7	0.18	3.1
5	3603	1886	0.0203	0.00089	4.4	18.7	0.20	4.0

TABLA 4.5 Valores obtenidos para la tubería con carga repartida diametral. Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	201	120	0.0198	0.00363	18.1	86.6	0.64	12.6
2	2890	1515	0.0203	0.00105	5.2	35.0	0.53	9.5
3	7306	3786	0.0203	0.00089	4.4	19.7	0.41	9.8
4	10569	5452	0.0203	0.00093	4.6	23.8	0.41	9.3
5	>12500	>6500						

TABLA 4.6 Valores obtenidos para la tubería con carga repartida diametral. Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B.

Al generar la quinta de las mallas utilizando el criterio de optimalidad B, se tuvo que detener el proceso porque el número de nodos y elementos generados sobrepasó los límites permitidos. Aún así, con las cuatro mallas obtenidas ya es posible observar una serie de puntos:

- El nivel de error requerido se alcanza en los dos casos con la tercera malla utilizada, si bien, ya con la segunda malla el nivel es casi aceptable. De hecho, la evolución de los niveles globales de error es casi idéntica para los dos criterios de optimalidad utilizados.
- Al utilizar el criterio de optimalidad A vuelve a repetirse el comportamiento oscilatorio detectado en el ejemplo anterior.
- La utilización del criterio B produce mallas con un número de elementos y nodos cada vez mayor hasta llegar a colapsar el programa de generación.

Dado que sobre un punto singular no es posible alcanzar el nivel de precisión exigido el proceso intenta remallar esa zona indefinidamente. Este efecto es mucho más acusado al intentar distribuir el error uniformemente sobre todo el área del dominio ya que se intenta que en los elementos que están alrededor del punto singular, que son los de menor tamaño, el error sea muy pequeño. Por ello el número de elementos generados va creciendo de forma indefinida hasta sobrepasar las capacidades del programa. Además, puede comprobarse que en todos los casos los valores más altos de ξ_e están situados en la zona del punto singular.

Del comentario anterior puede extraerse la conclusión de que en el caso de que exista algún punto singular en el dominio hay que controlar que el número de elementos generados no crezca demasiado. Además, la calidad de la solución no mejora a partir de la tercera malla por lo que no es necesario realizar más refinamientos. Se puede decir como regla general que cuando se utilicen elementos lineales y se quiera utilizar el criterio B, no conviene realizar más de dos o tres remallados.

Para observar la diferencia existente entre las soluciones finales obtenidas con cada criterio de optimalidad se han representado gráficamente las máximas tensiones principales a lo largo del contorno exterior de la tubería. En la figura 4.32 se representan dichas tensiones obtenidas mediante el criterio A, mientras que en la figura 4.33 se representan las obtenidas con el criterio B. En ambos casos se aprecia el salto existente sobre el punto extremo de la carga repartida aplicada. El valor de dichas tensiones debería pasar de ser -1.0, en la zona sometida a dicha carga, a 0.0 en la zona inmediatamente colindante. Este salto se aprecia claramente en las dos figuras. Asimismo, en ambas figuras se aprecian unas pequeñas oscilaciones en la zona situada alrededor del salto de tensiones. La amplitud de dichas oscilaciones es algo menor en la figura correspondiente al criterio de optimalidad B.

Al igual que en el ejemplo anterior, en este caso también se ha repetido todo el proceso pero utilizando elementos cuadráticos de 6 nodos e imponiendo

un porcentaje requerido de error de un 1%. Los resultados obtenidos con el primer criterio de optimalidad se presentan en las figuras 4.34-4.38 y en la tabla 4.7, y los obtenidos con el segundo criterio en las figuras 4.39-4.43 y en la tabla 4.8. Para la malla inicial se ha especificado un tamaño de elemento uniforme de valor 10.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	25	64	0.0199	0.00201	10.1	100.	1.62	25.3
2	599	1262	0.0203	0.00029	1.4	49.0	0.00	11.5
3	422	897	0.0203	0.00015	0.7	20.0	0.04	3.4
4	324	697	0.0203	0.00015	0.7	7.5	0.08	2.3
5	294	635	0.0203	0.00019	0.9	29.4	0.17	2.6

TABLA 4.7 Valores obtenidos para la tubería con carga repartida diametral. Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	25	64	0.0199	0.00201	10.1	100.	1.09	23.9
2	622	1309	0.0237	0.00027	1.3	9.5	0.00	16.4
3	516	1087	0.0237	0.00015	0.7	9.7	0.15	18.0
4	611	1286	0.0237	0.00014	0.7	5.7	0.13	19.6
5	706	1483	0.0237	0.00012	0.6	7.9	0.11	19.2

TABLA 4.8 Valores obtenidos para la tubería con carga repartida diametral. Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B.

Se puede observar que en esta ocasión el error global requerido no se alcanza hasta la tercera malla y su evolución es muy similar en los dos casos.

En la secuencia obtenida con el criterio A se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El mayor número de elementos corresponde a la segunda malla y a partir de ella éste va disminuyendo.
- El porcentaje de área con error mayor al admisible descende hasta la cuarta malla pero luego vuelve a crecer de golpe en la quinta. Este

efecto recuerda el comportamiento oscilatorio obtenido con este criterio y utilizando elementos lineales.

- El valor máximo de ξ_e desciende hasta valores alrededor de 2.5 y parece estabilizarse en las dos últimas mallas.

Las observaciones correspondientes hechas sobre la secuencia obtenida con el criterio B son:

- El número de elementos utilizados llega a ser de 706 en la quinta malla. En las figuras correspondientes se puede ver que la mayoría de ellos se concentra alrededor del punto singular.
- El porcentaje de área con error mayor al admisible desciende hasta un 5.7% para luego ascender ligeramente hasta un 7.9%.
- Los valores máximos de ξ_e crecen hasta valores superiores a 19. En este caso, al decrecer el tamaño de los elementos alrededor del punto singular la precisión del estimador de error aumenta y se detecta por tanto la necesidad de tender a tamaños de elemento infinitesimales para poder obtener un nivel reducido de error en esa zona. El cociente entre el error obtenido y el requerido aumenta no porque el error obtenido sea mayor sino porque crece la sensibilidad del estimador de error. Lo que crece en realidad es el valor estimador de error, pero no su valor real.

De nuevo vuelven a obtenerse mallas más densas con la utilización del segundo criterio siendo éste mucho más exigente en la zona alrededor del punto singular. Sin embargo, con los elementos cuadráticos el coste de la resolución es asequible en todos los casos ya que el número total de elementos generados, aunque mayor con el segundo criterio, no es exagerado.

Al igual que en la resolución anterior, también se han representado gráficamente las tensiones principales obtenidas a lo largo del contorno exterior de la tubería. Dichas tensiones se representan en la figura 4.44 para el criterio A y en la figura 4.45 para el criterio B. En este caso también son aplicables los comentarios realizados en el caso anterior respecto a las oscilaciones de las tensiones obtenidas alrededor de la singularidad. En esta ocasión, las tensiones obtenidas mediante el criterio B vuelven a ser ligeramente mejores que las del criterio A, ya que la amplitud de sus oscilaciones es menor.

4.6.3 Ejemplo nº 3. Pieza en forma de L.

En este tercer ejemplo se ha estudiado el comportamiento de los procesos de remallado automático al calcular un dominio en forma de L coartado y cargado tal como se muestra en la figura 4.46. Este problema presenta un punto singular en la esquina interna de la L y es ahí donde se espera que se produzcan grandes concentraciones de tensiones y, por tanto, de elementos.

El modelo de cálculo utilizado es un modelo bidimensional de deformación plana y las propiedades del material utilizadas son $E = 1.0 \cdot 10^5$ y $\nu = 0.3$.

Para definir la geometría se ha definido únicamente la posición de los 6 puntos esquina especificando en todos los casos condiciones de curvatura nula.

Al igual que en los casos anteriores se ha comenzado por utilizar elementos lineales de 3 nodos y requiriendo un error global de un 5%. Los resultados obtenidos con el primer criterio de optimalidad se muestran en las figuras 4.47-4.51 y la tabla 4.9 y los resultados con el segundo criterio se pueden ver en las figuras 4.52-4.54 y la tabla 4.10.

El tamaño de elemento definido para la primera malla ha sido de 20.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	50	37	0.4997	0.1428	27.5	96.1	0.64	11.3
2	1906	1012	0.5310	0.0338	6.3	74.3	0.14	9.8
3	3513	1845	0.5317	0.0241	4.5	32.4	0.09	3.3
4	3476	1819	0.5317	0.0237	4.4	44.1	0.25	3.3
5	3308	1741	0.5317	0.0243	4.6	33.4	0.17	2.7

TABLA 4.9 Valores obtenidos para el dominio en forma de L.
Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad A.

De nuevo en este caso el generador de mallas se ha visto colapsado al intentar generar la cuarta malla utilizando el criterio de optimalidad B. El programa falló después de haber generado más de 32300 elementos y 16800 nodos.

En ambos casos no se alcanza un error global inferior al requerido hasta la tercera malla y los valores obtenidos hasta ese momento son muy similares en los dos casos.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	50	37	0.4997	0.1428	27.5	96.1	0.71	11.4
2	1918	1019	0.5310	0.0343	6.4	67.6	0.20	35.4
3	6891	3556	0.5317	0.0233	4.4	17.0	0.35	120.
4	>32300	>16800						

TABLA 4.10 Valores obtenidos para el dominio en forma de L.
Elementos lineales de 3 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad B.

La utilización de los dos criterios de optimalidad producen en ambos casos comportamientos muy similares a los obtenidos en el ejemplo anterior donde también existía un punto singular. Se concentra una gran cantidad de elementos alrededor del punto singular y en el caso del segundo criterio el número de elementos generados crece indefinidamente. También crecen en este último caso los valores máximos de ξ_e .

Los cálculos se han repetido también utilizando elementos cuadráticos de 6 nodos y exigiendo un nivel global de error inferior en esta ocasión a un 5%. El tamaño de elemento definido inicialmente ha sido de 40. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4.55-4.59 y en la tabla 4.11 para el primer criterio de optimalidad, y en las figuras 4.60-4.64 y en la tabla 4.12 para el segundo.

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	12	39	0.5211	0.0592	11.3	61.7	0.35	4.7
2	94	211	0.5313	0.0214	4.0	6.2	0.07	4.0
3	79	178	0.5316	0.0178	3.3	14.7	0.11	2.3
4	76	171	0.5316	0.0176	3.3	0.4	0.14	2.6
5	57	132	0.5314	0.0209	3.9	0.7	0.16	2.7

TABLA 4.11 Valores obtenidos para el dominio en forma de L.
Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad A.

En este caso se alcanza un nivel global de error inferior al requerido ya con la segunda malla. Este nivel desciende hasta un 3.3% con el primer criterio y hasta un 2.1% con el segundo.

El exigir un nivel global de error inferior a un 5% no representa un esfuerzo demasiado grande con este tipo de elementos. Sin embargo a este nivel se puede

Nº Malla	NELEM	NNODE	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	$\hat{\eta}$	% área	Min. ξ_e	Max. ξ_e
1	12	39	0.5211	0.0592	11.3	66.2	0.49	4.7
2	72	167	0.5310	0.0239	4.5	5.1	0.01	8.0
3	94	207	0.5317	0.0169	3.2	1.4	0.11	11.1
4	123	268	0.5319	0.0126	2.4	0.5	0.13	21.3
5	201	428	0.5319	0.0113	2.1	0.0	0.01	41.3

TABLA 4.12 Valores obtenidos para el dominio en forma de L.
Elementos lineales de 6 nodos. Error requerido 5%.
Criterio de optimalidad B.

ver que la utilización del segundo criterio de optimalidad ya produce mallas con concentraciones de elementos alrededor del punto singular (ver figura 4.64), mientras que con el primer criterio esto no ocurre (ver figura 4.59). Este nivel de error es todavía grosero para que el primer criterio detecte la existencia de un punto singular mientras que el segundo sí lo hace. Este hecho confirma lo mencionado anteriormente acerca de que a igualdad de error global el segundo de los criterios proporciona más precisión en las zonas con grandes concentraciones de tensiones y en los puntos singulares.

Para ver la evolución de la máxima tensión principal obtenida en el punto singular se ha representado en la figura 4.65 el valor de la misma obtenida para cada iteración y para cada criterio. Como puede observarse, la solución obtenida mediante el criterio A no mejora a partir de la tercera iteración, mientras que la correspondiente al criterio B crece de forma cada vez más rápida intentado llegar a un valor infinito que es el correspondiente para dicho punto.

4.6.4 Conclusiones

De los resultados obtenidos con los ejemplos anteriores se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La utilización de los procesos de remallados automáticos permite alcanzar niveles de error inferiores a los especificados en una o dos iteraciones. Esta afirmación es válida independientemente del criterio de optimalidad que se utilice.
- El criterio de optimalidad B produce mejoras en cuanto al comportamiento del proceso iterativo si se le compara con la

equidistribución del error sobre los elementos. Estas mejoras son previsibles teniendo en cuenta la mayor coherencia algorítmica que presenta este criterio.

- El criterio de optimalidad B produce resultados con mayor precisión en las zonas con mayores gradientes de tensiones y en los puntos singulares. Esta mayor precisión se consigue mediante la utilización de mallas con un número de elementos mucho mayor que las que produce el otro criterio.
- A igualdad de error global, el coste que representa la utilización del criterio B resulta ser superior a la del criterio A. Sin embargo, si lo que se observa es el nivel de error local alcanzado en las zonas con mayores concentraciones de tensiones la comparación anterior resulta ser favorable al criterio de optimalidad B.
- Los dos criterios utilizados tienden a refinar indefinidamente las zonas situadas alrededor de los puntos singulares. Ello es debido a que las singularidades existentes no son modelables mediante la utilización de técnicas estandar de elementos finitos. Por ello, parece necesaria la utilización de elementos especiales en dichas zonas.

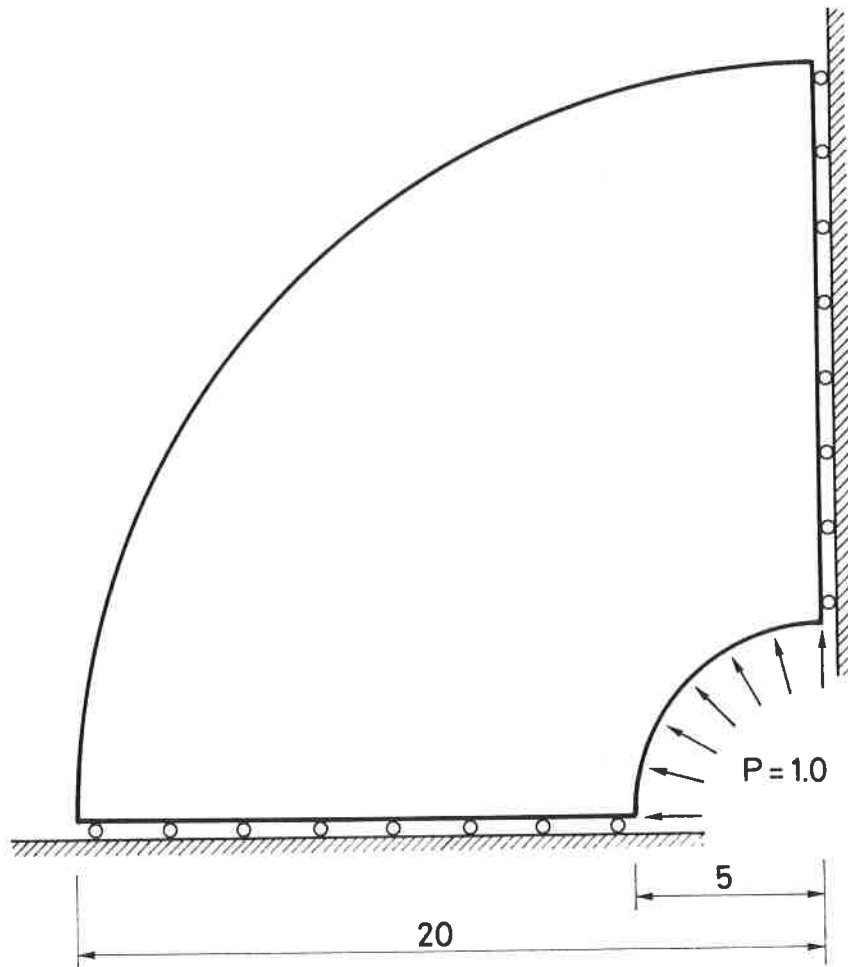


FIGURA 4.1 Tubería gruesa con presión interior. Descripción de geometría y cargas.

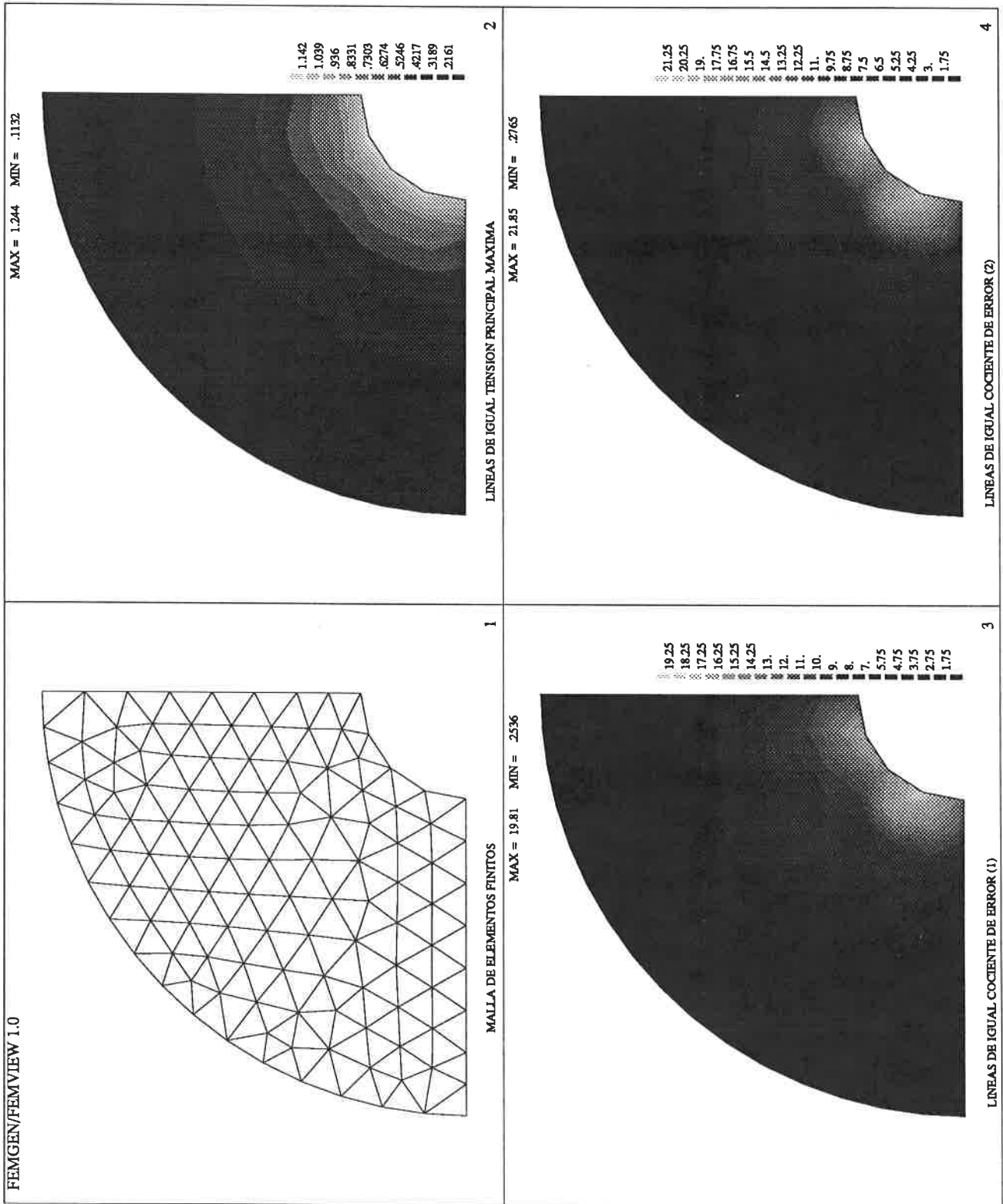


FIGURA 4.2 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

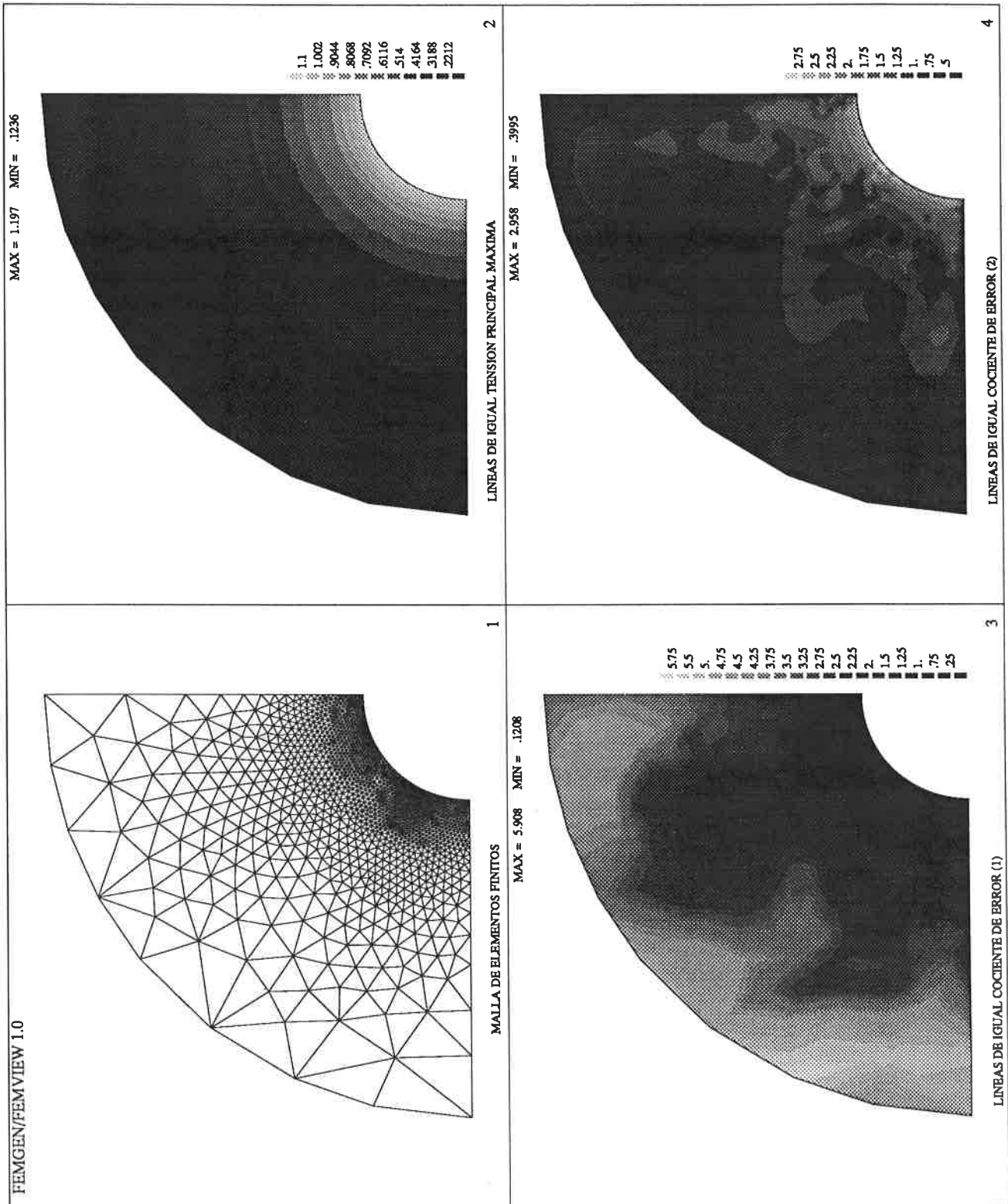


FIGURA 4.3 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

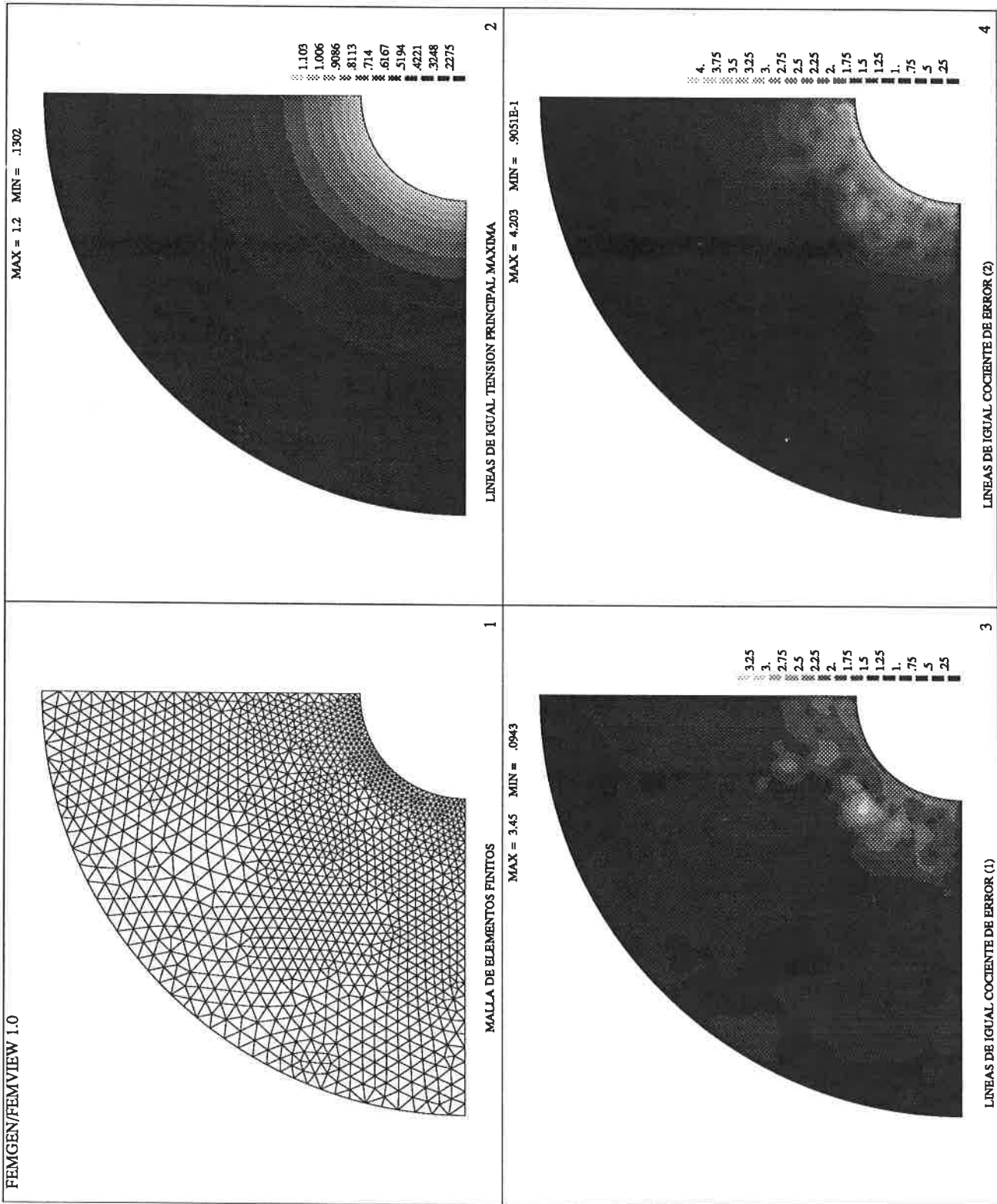


FIGURA 4.4 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

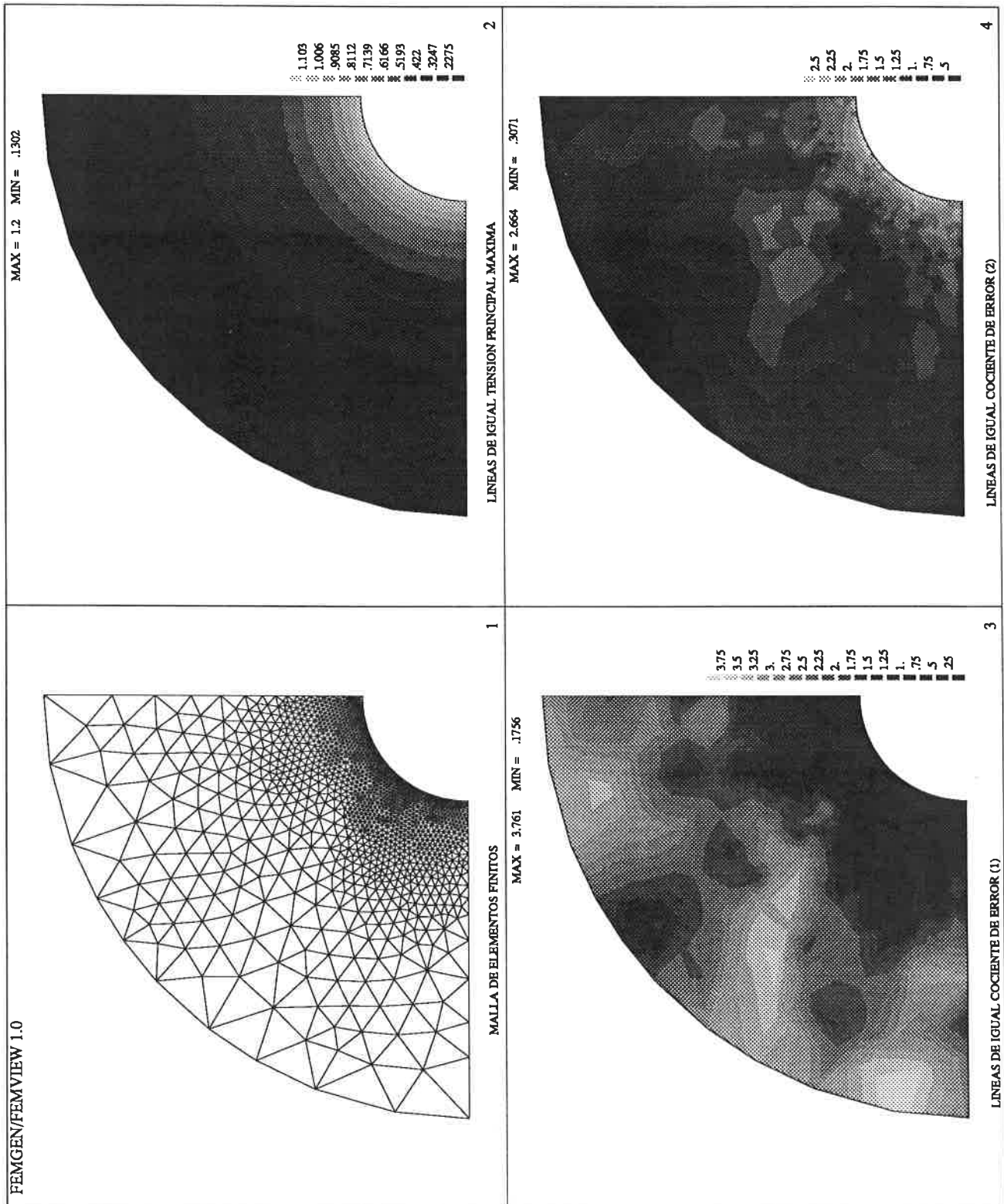


FIGURA 4.5 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

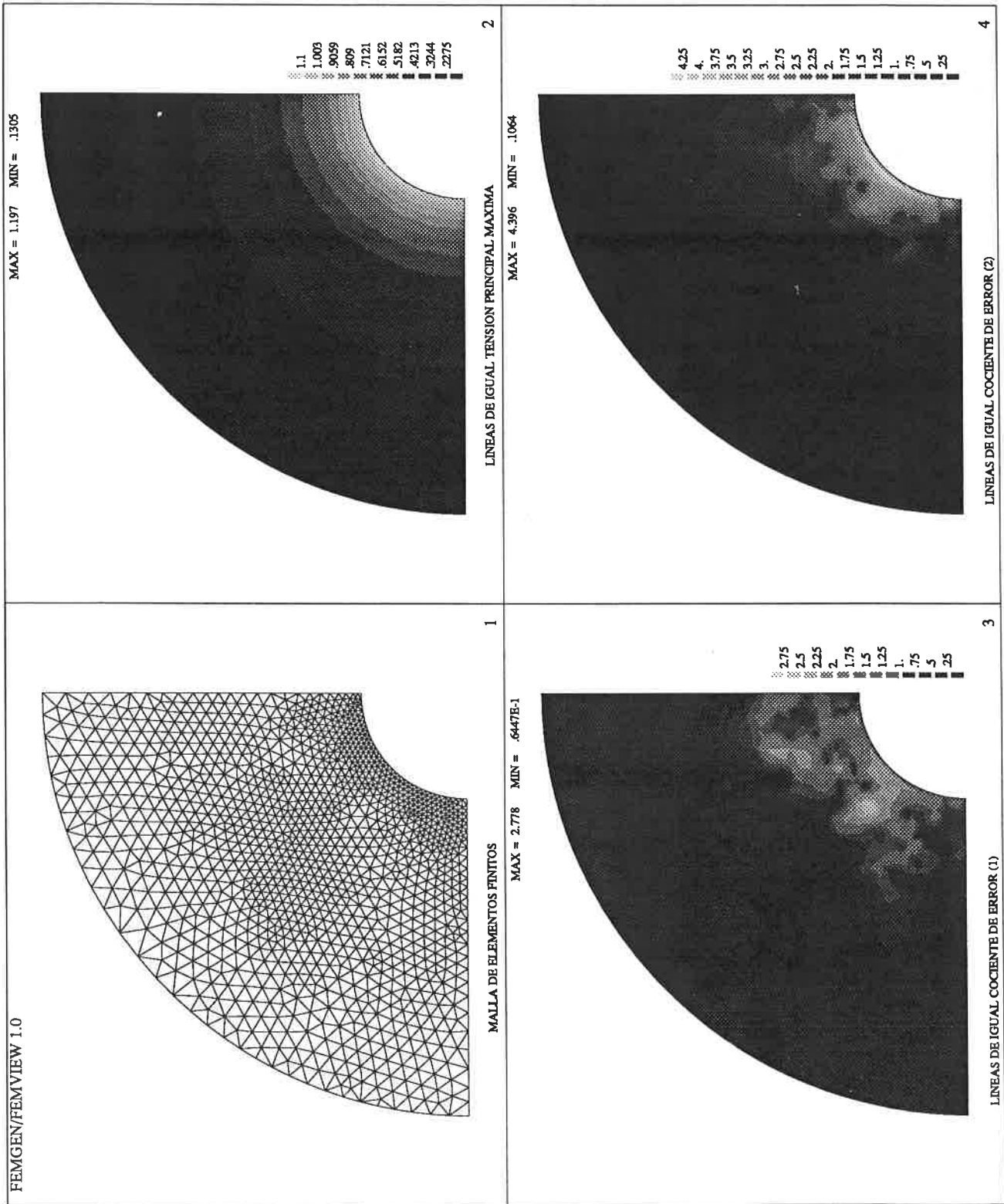


FIGURA 4.6 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

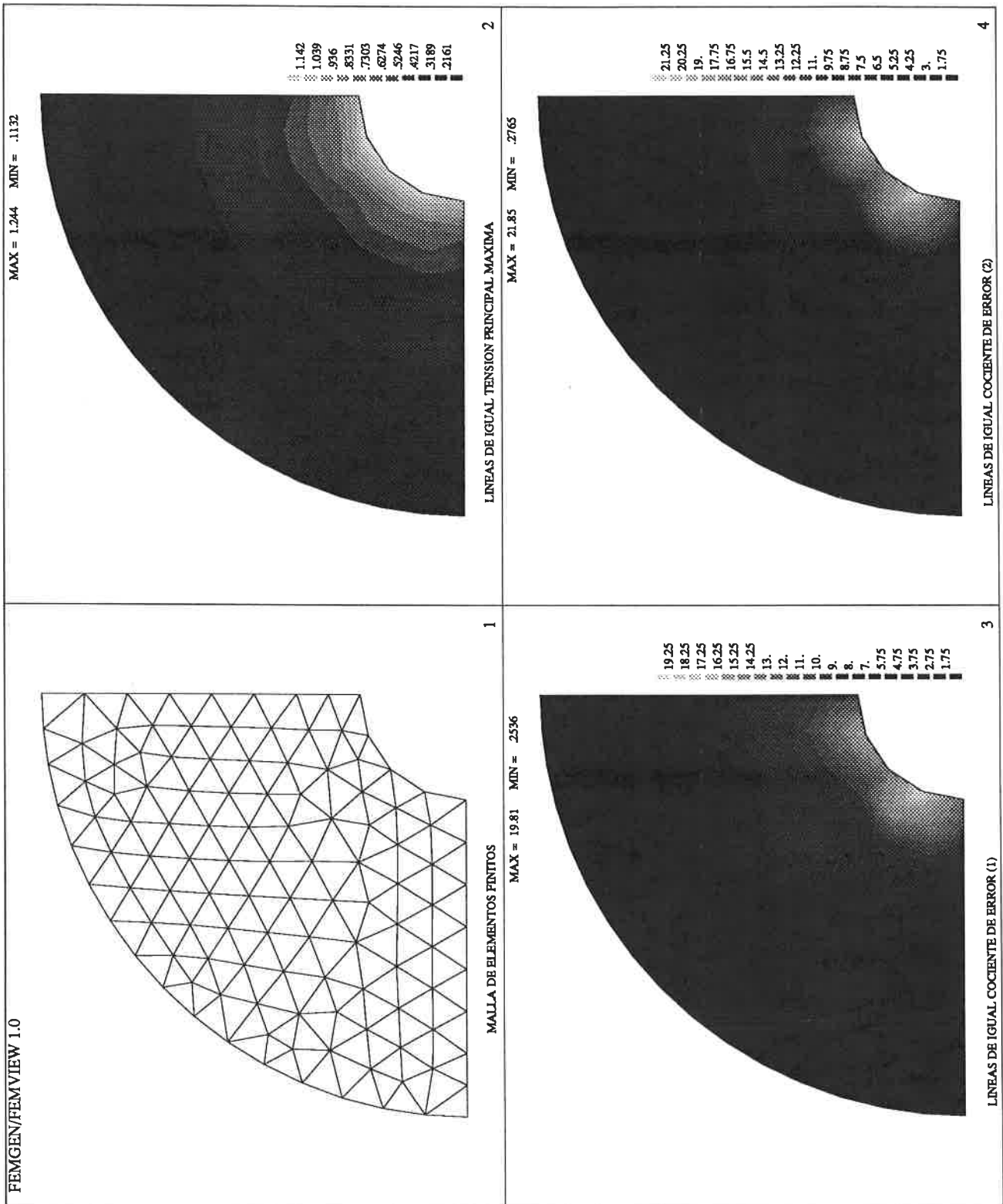


FIGURA 4.7 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

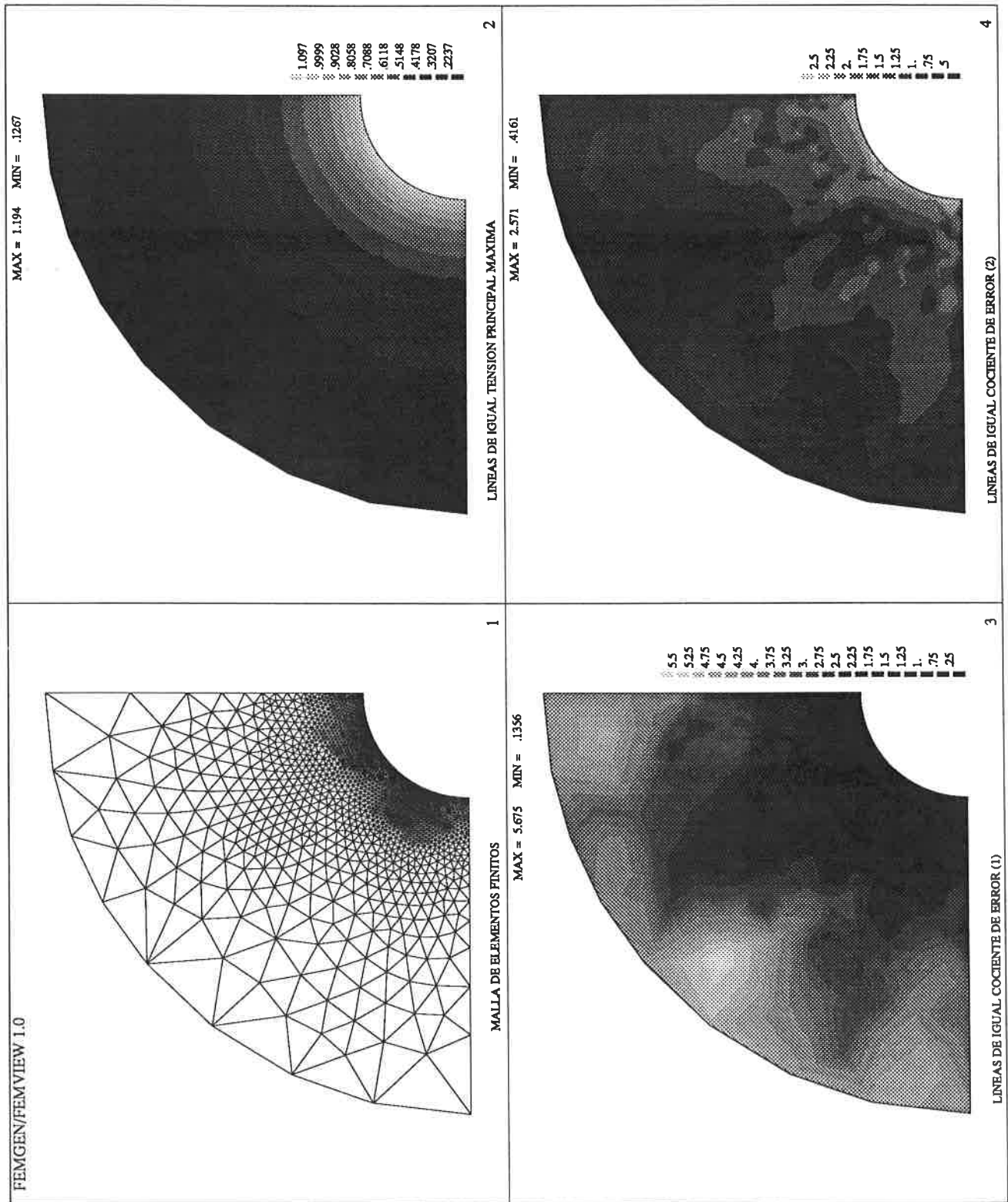


FIGURA 4.8 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

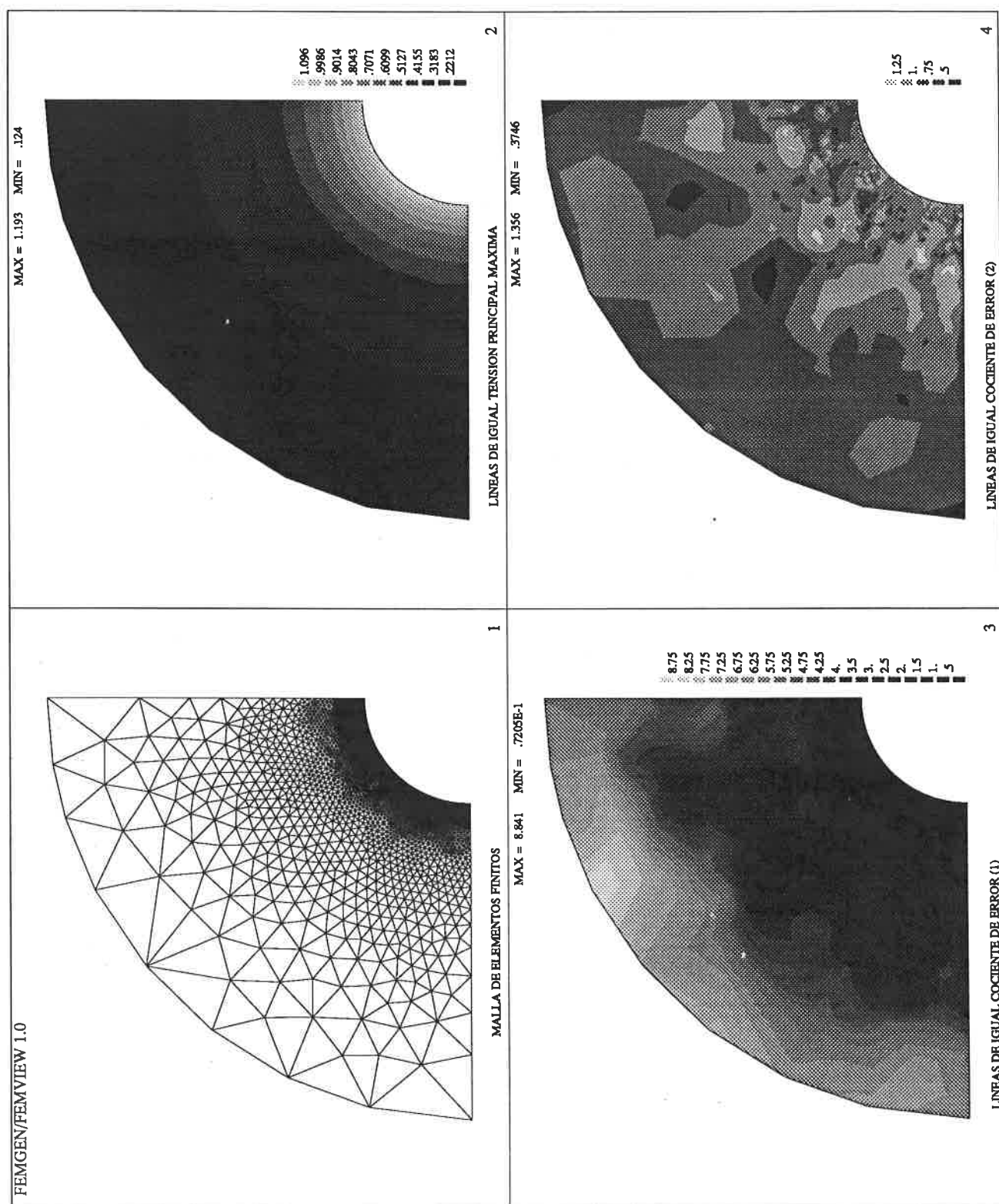


FIGURA 4.9 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

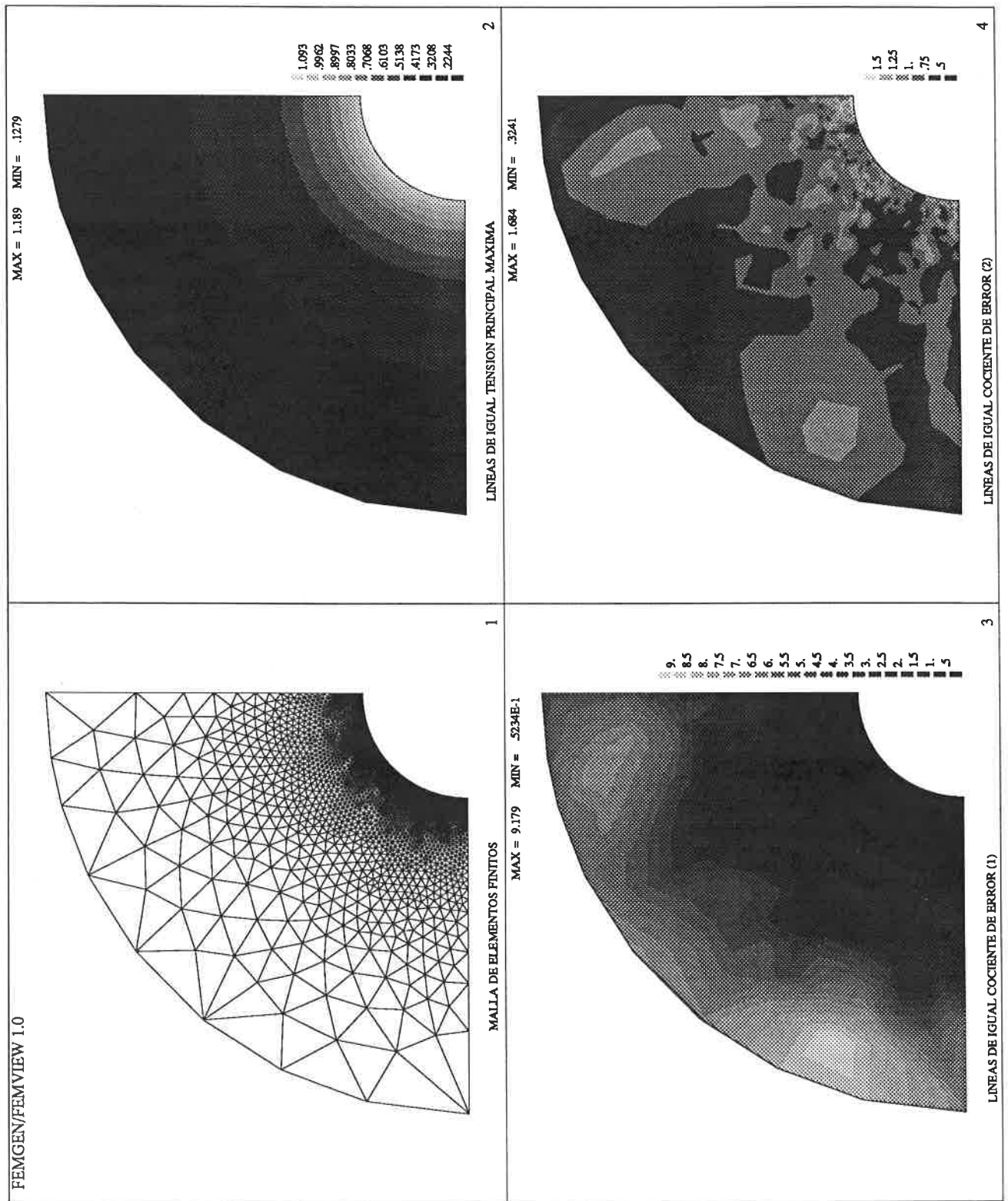


FIGURA 4.10 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 4ª malla.

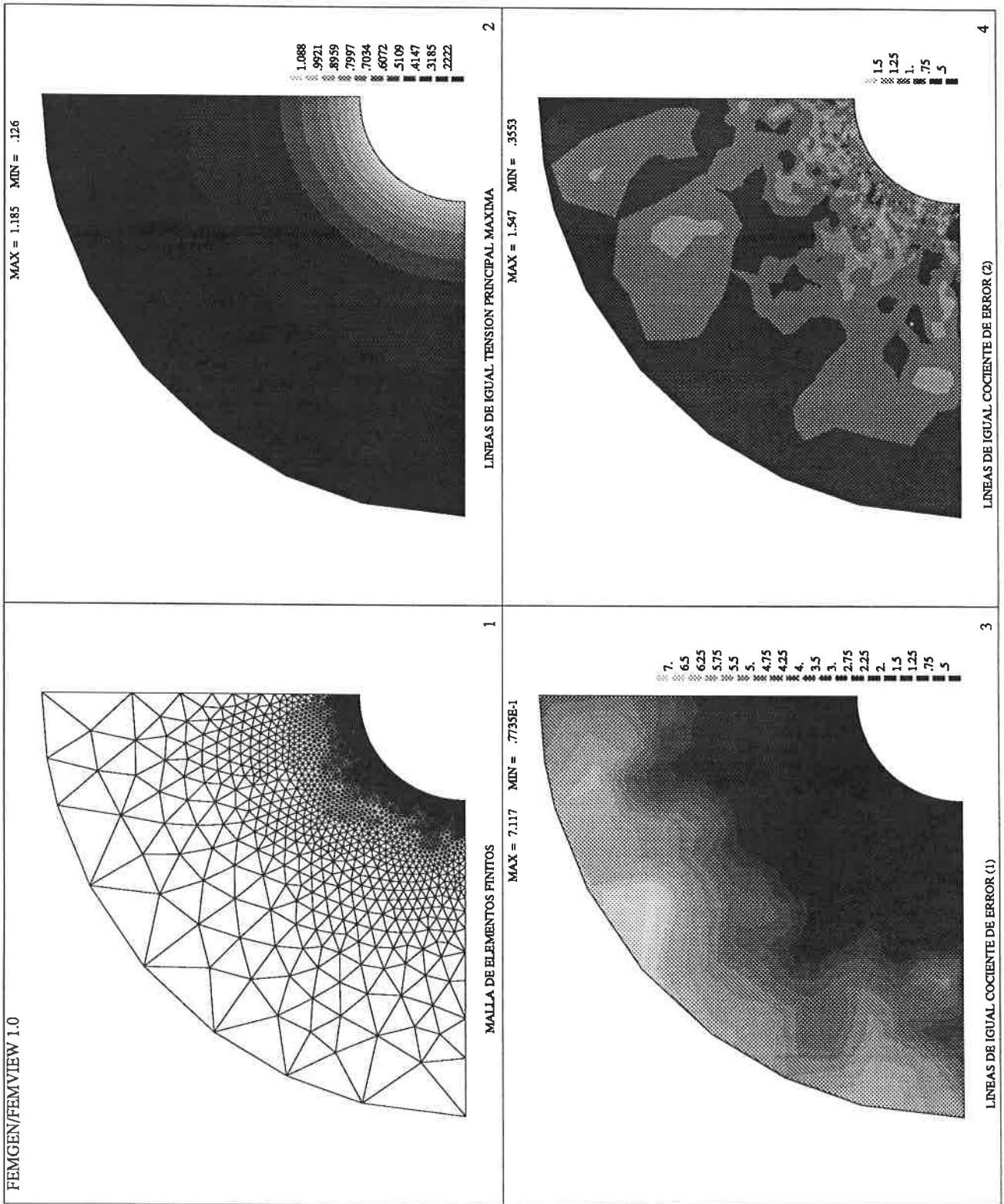


FIGURA 4.11 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 5ª malla.

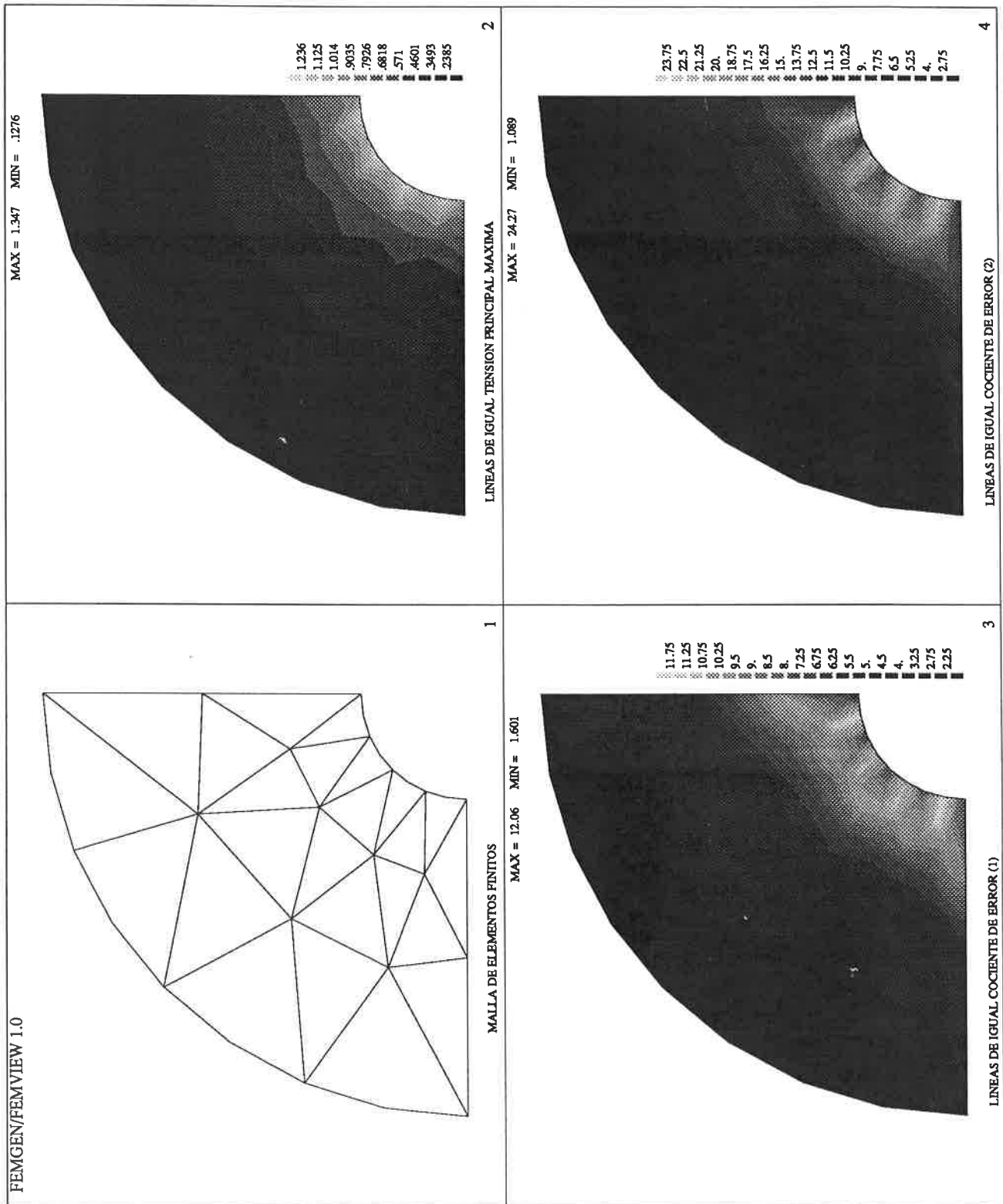


FIGURA 4.12 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

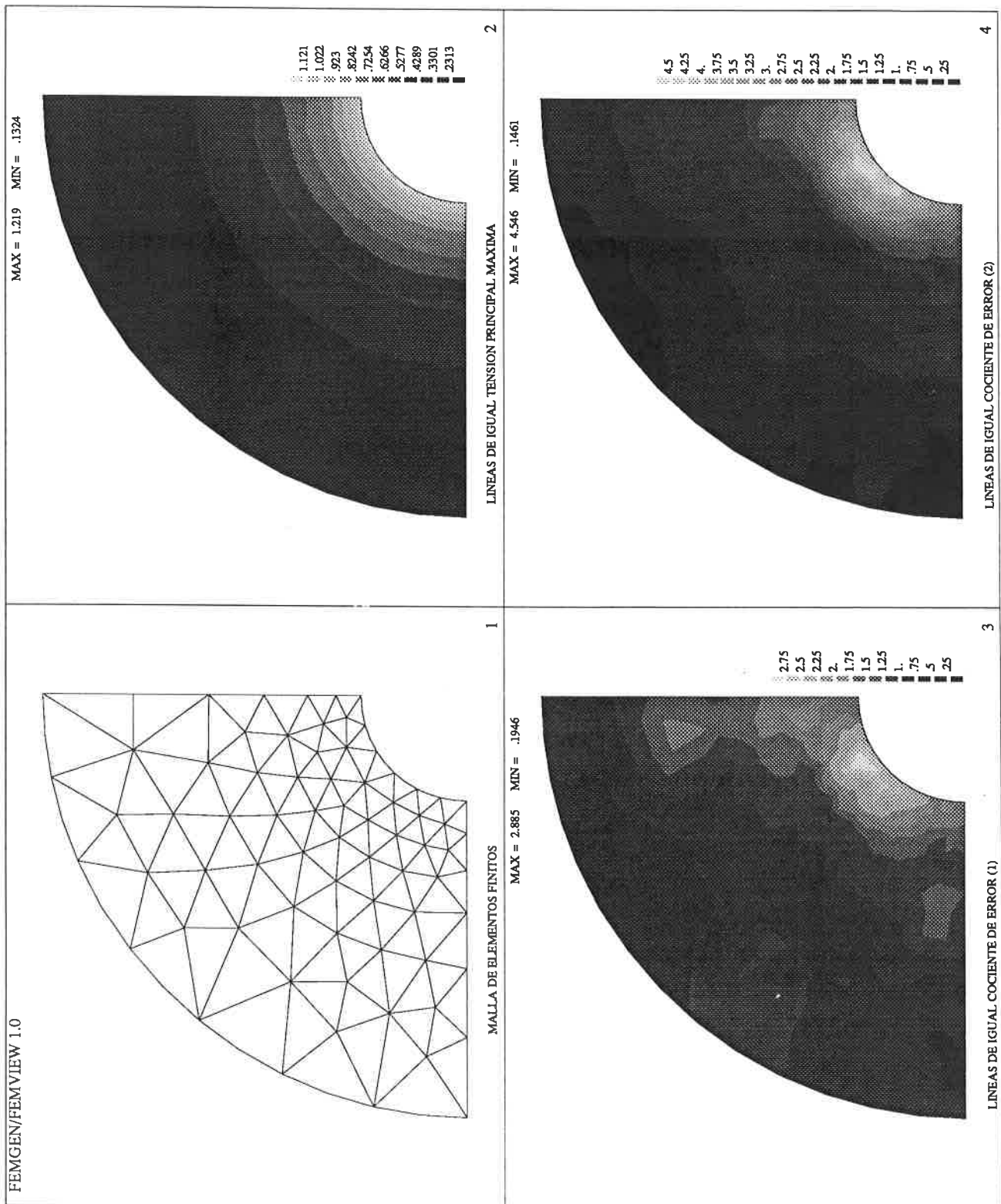


FIGURA 4.13 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

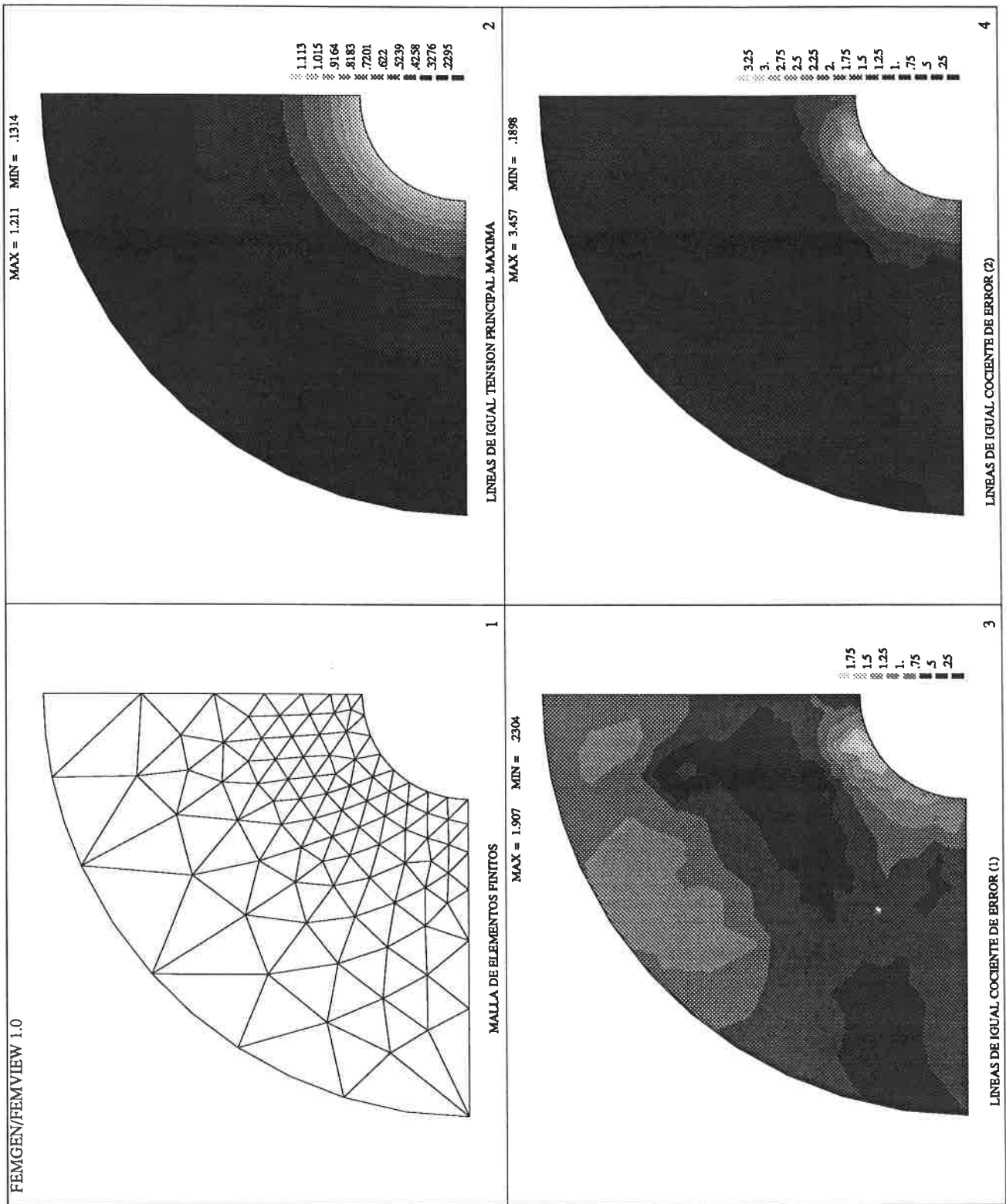


FIGURA 4.14 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

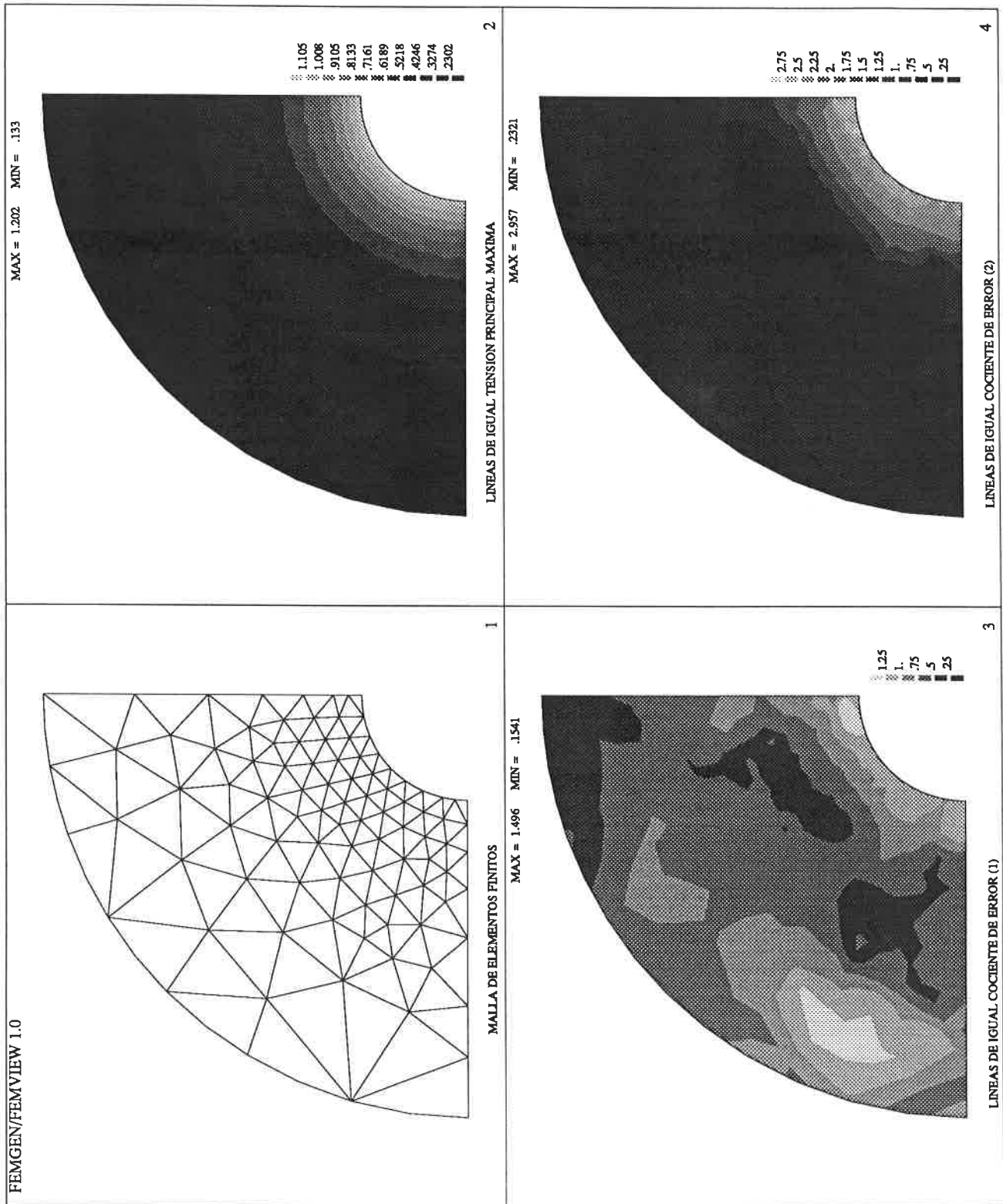


FIGURA 4.15 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

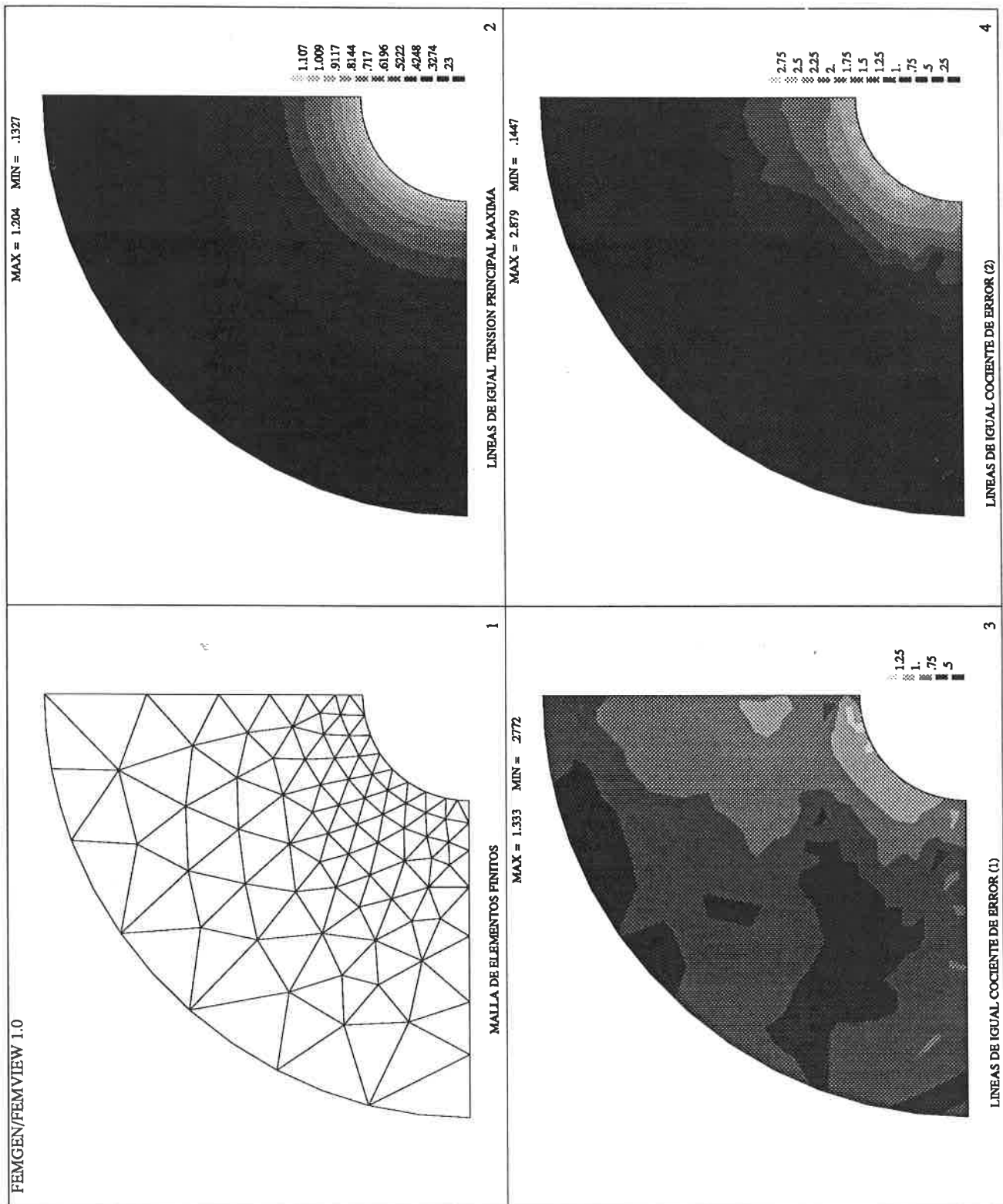


FIGURA 4.16 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

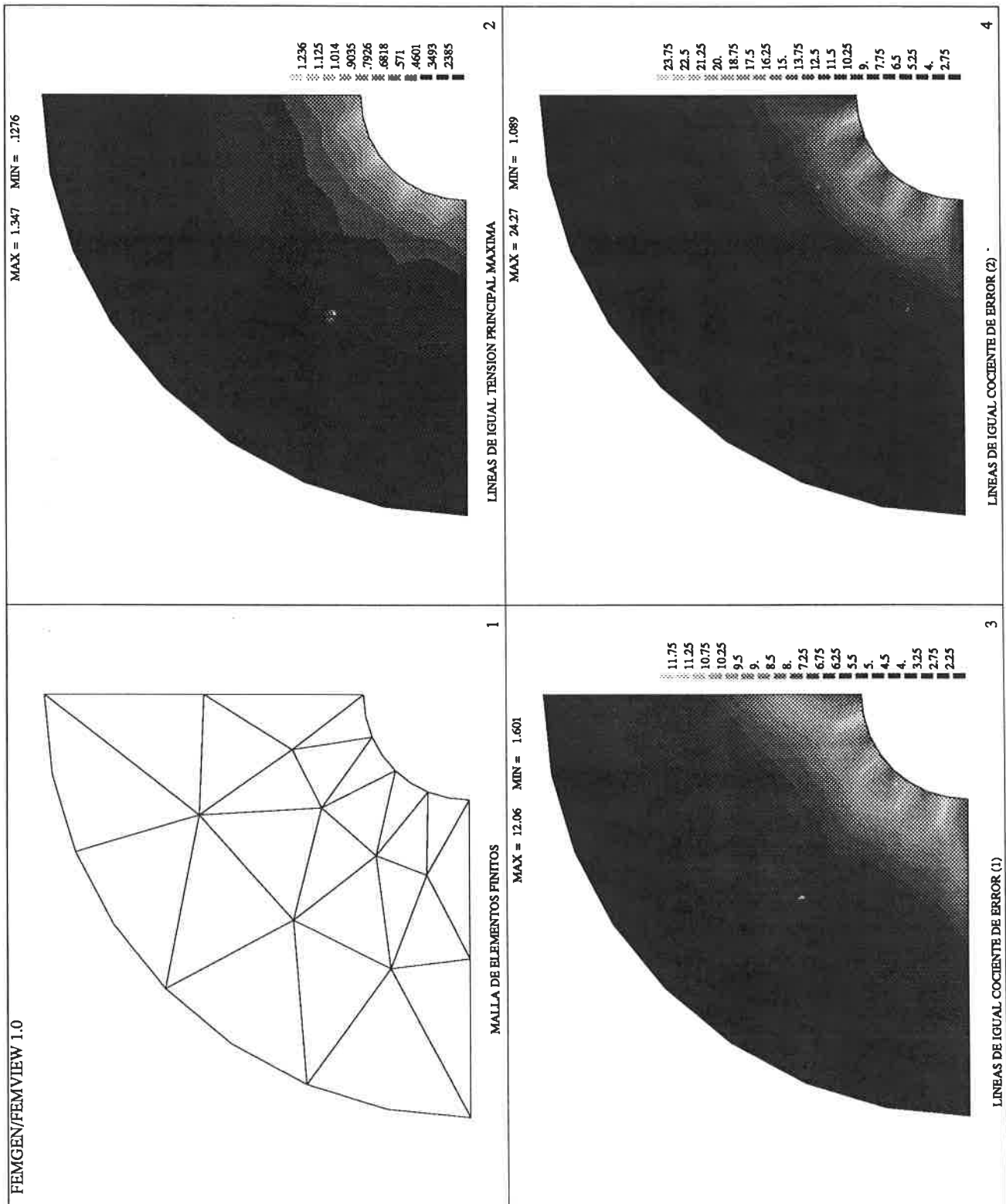


FIGURA 4.17 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

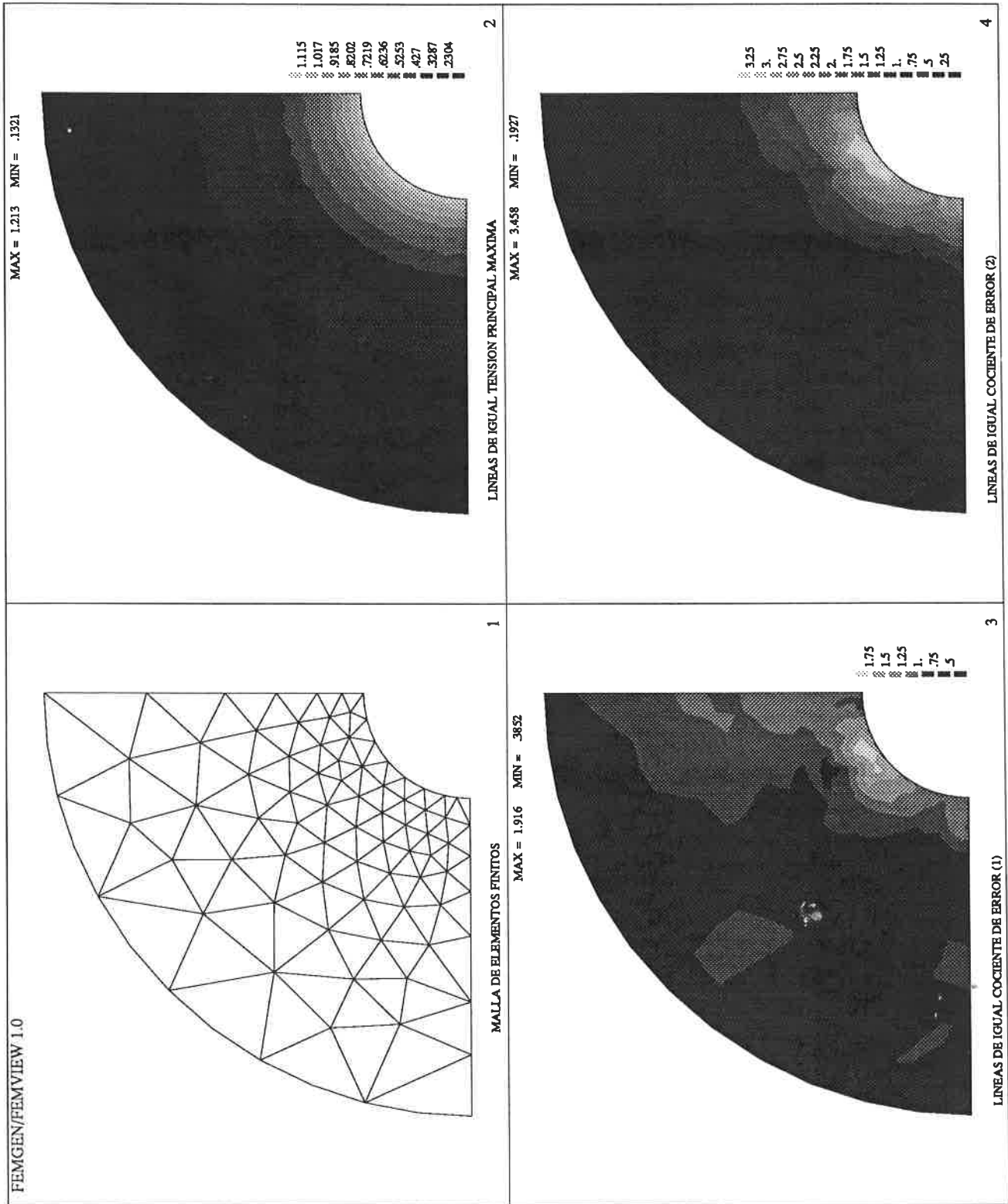


FIGURA 4.18 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

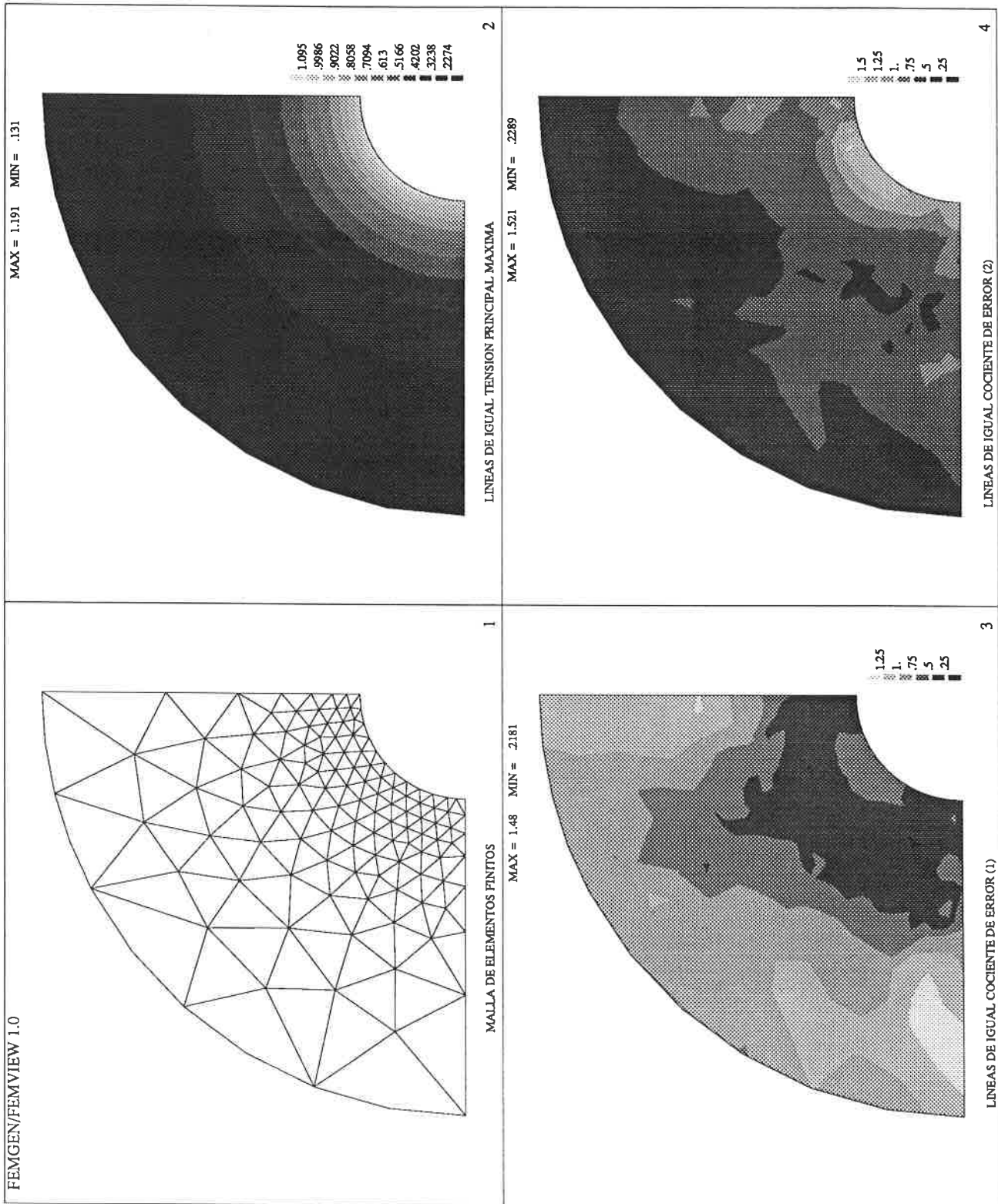


FIGURA 4.19 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

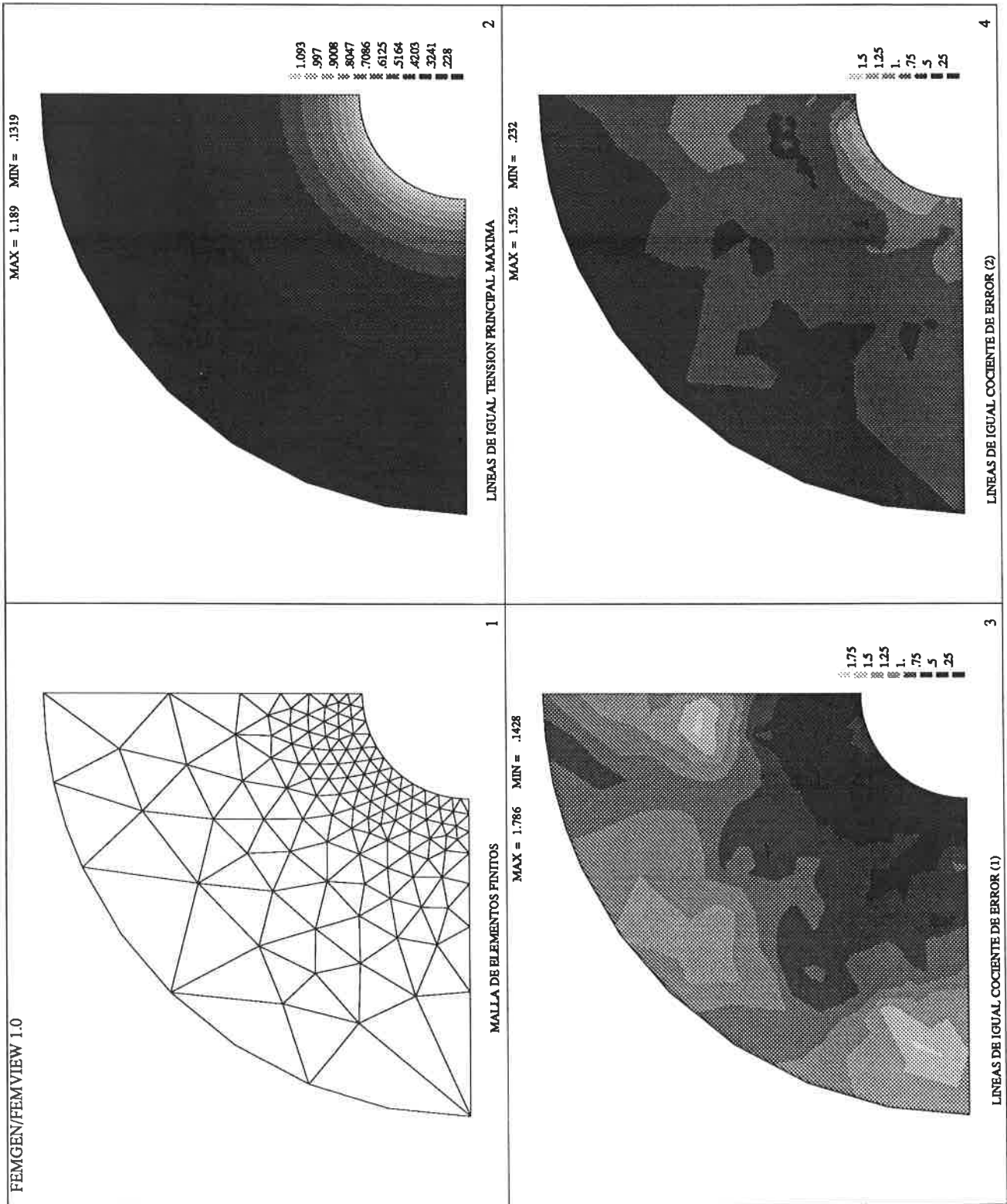


FIGURA 4.20 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 4ª malla.

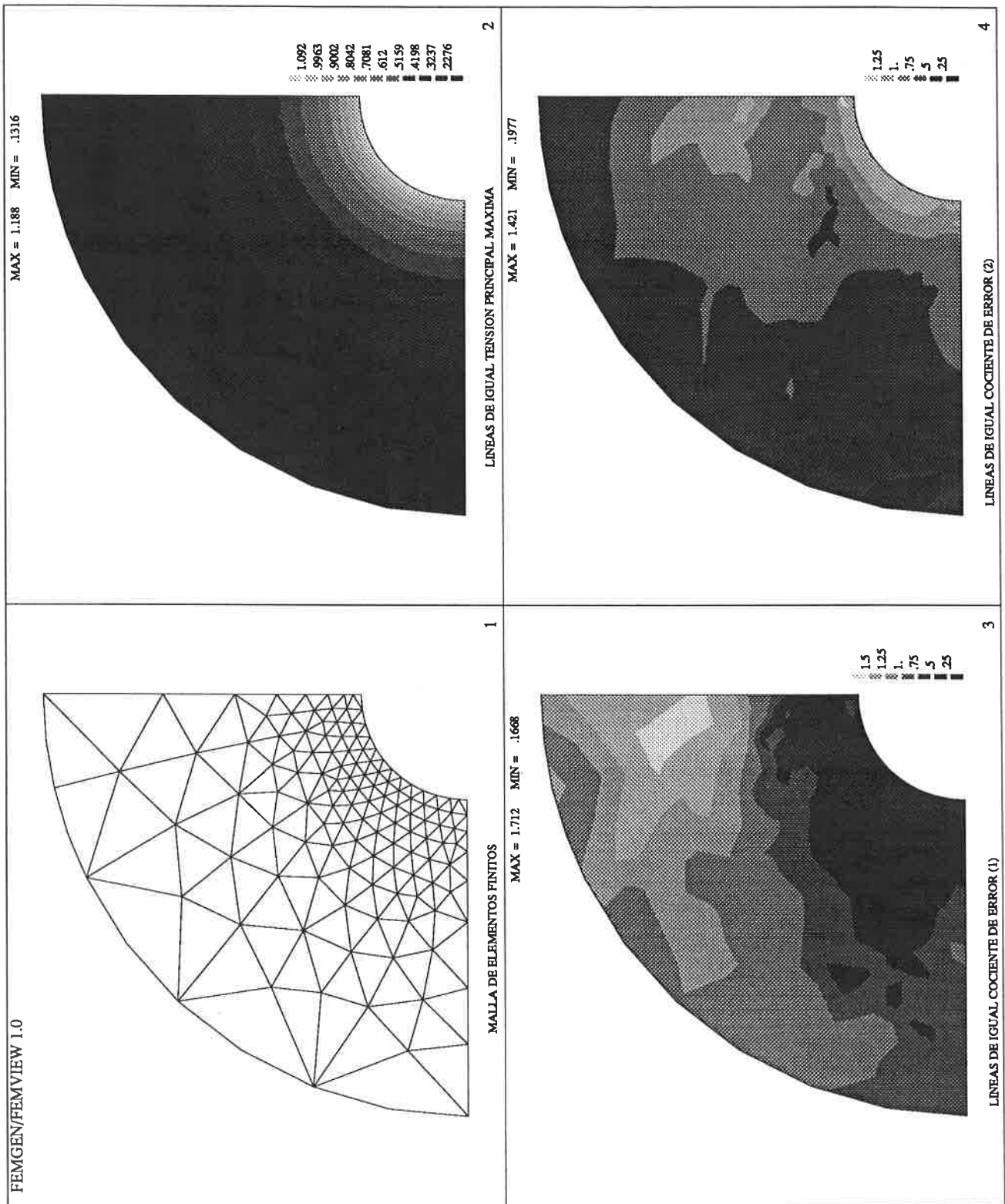


FIGURA 4.21 Tubería gruesa con presión interior. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 5ª malla.

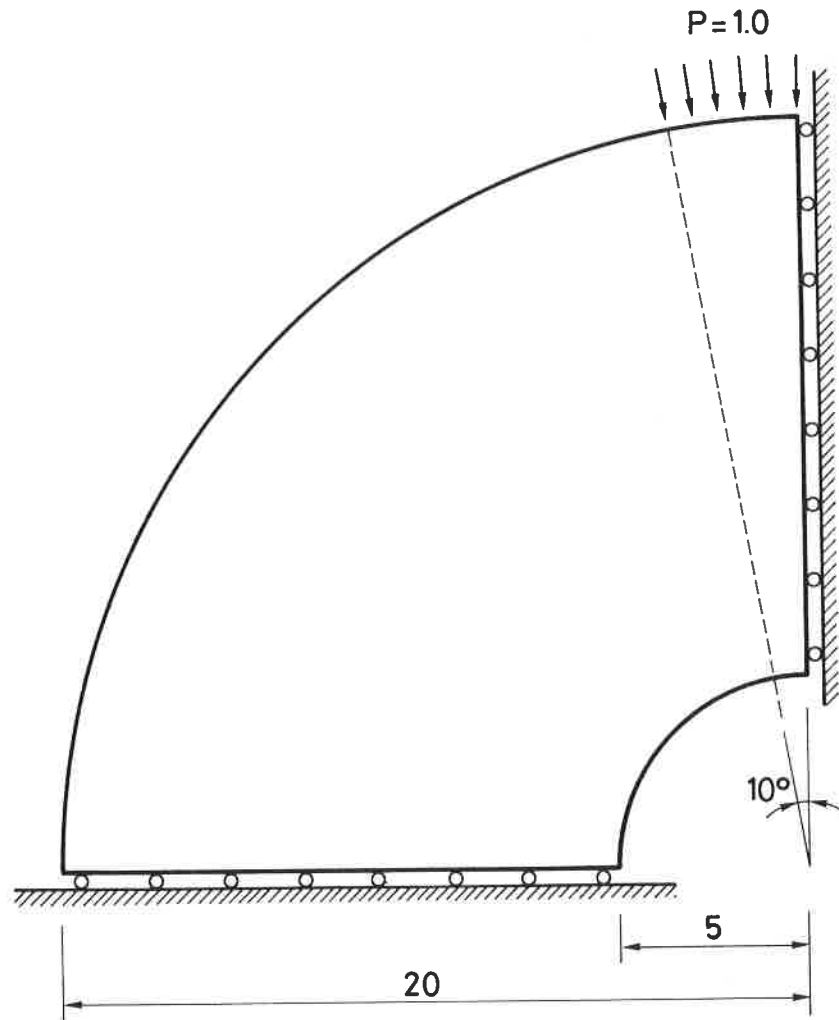


FIGURA 4.22 Tubería gruesa con carga dimetral. Descripción de geometría y cargas.

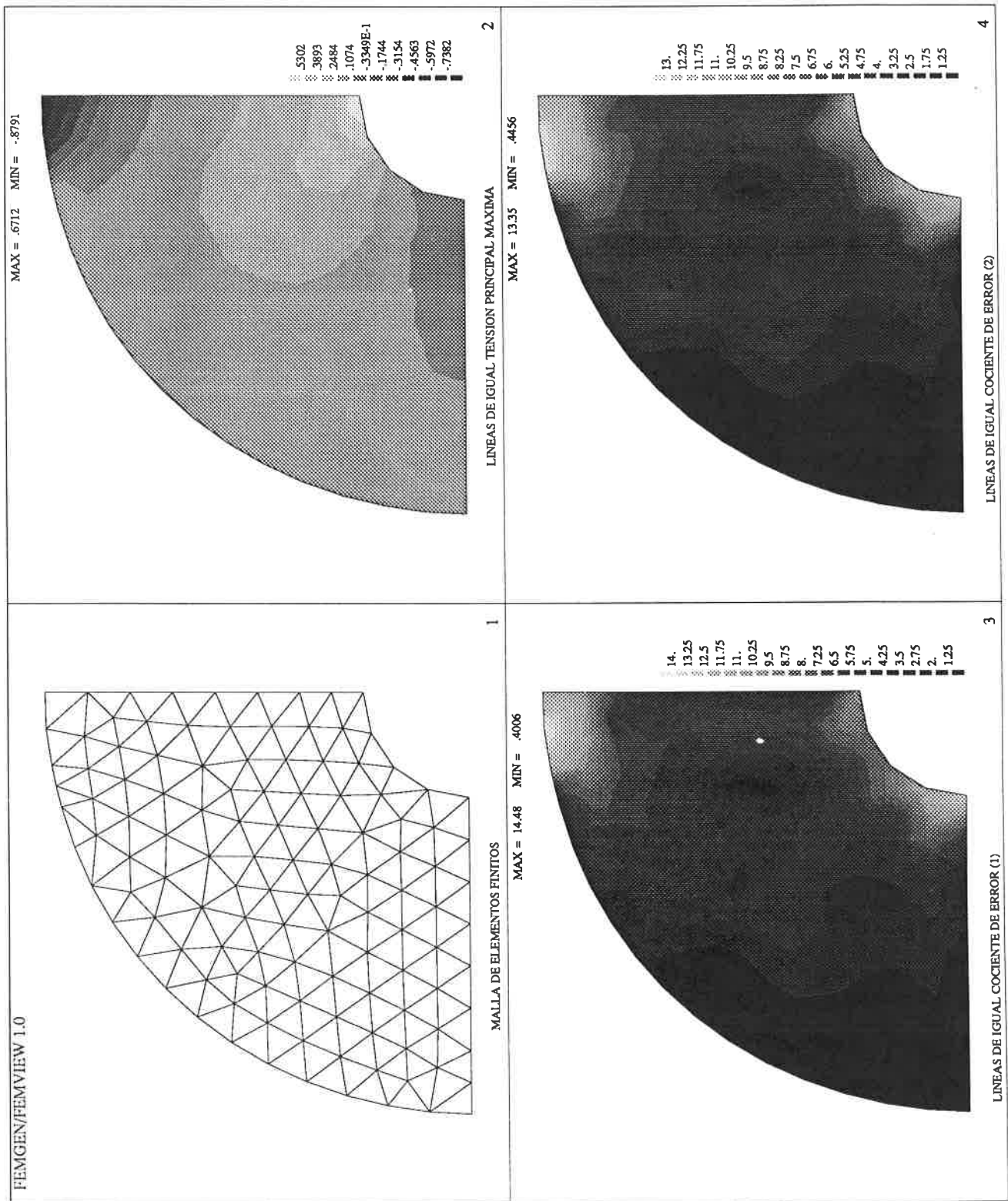


FIGURA 4.23 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

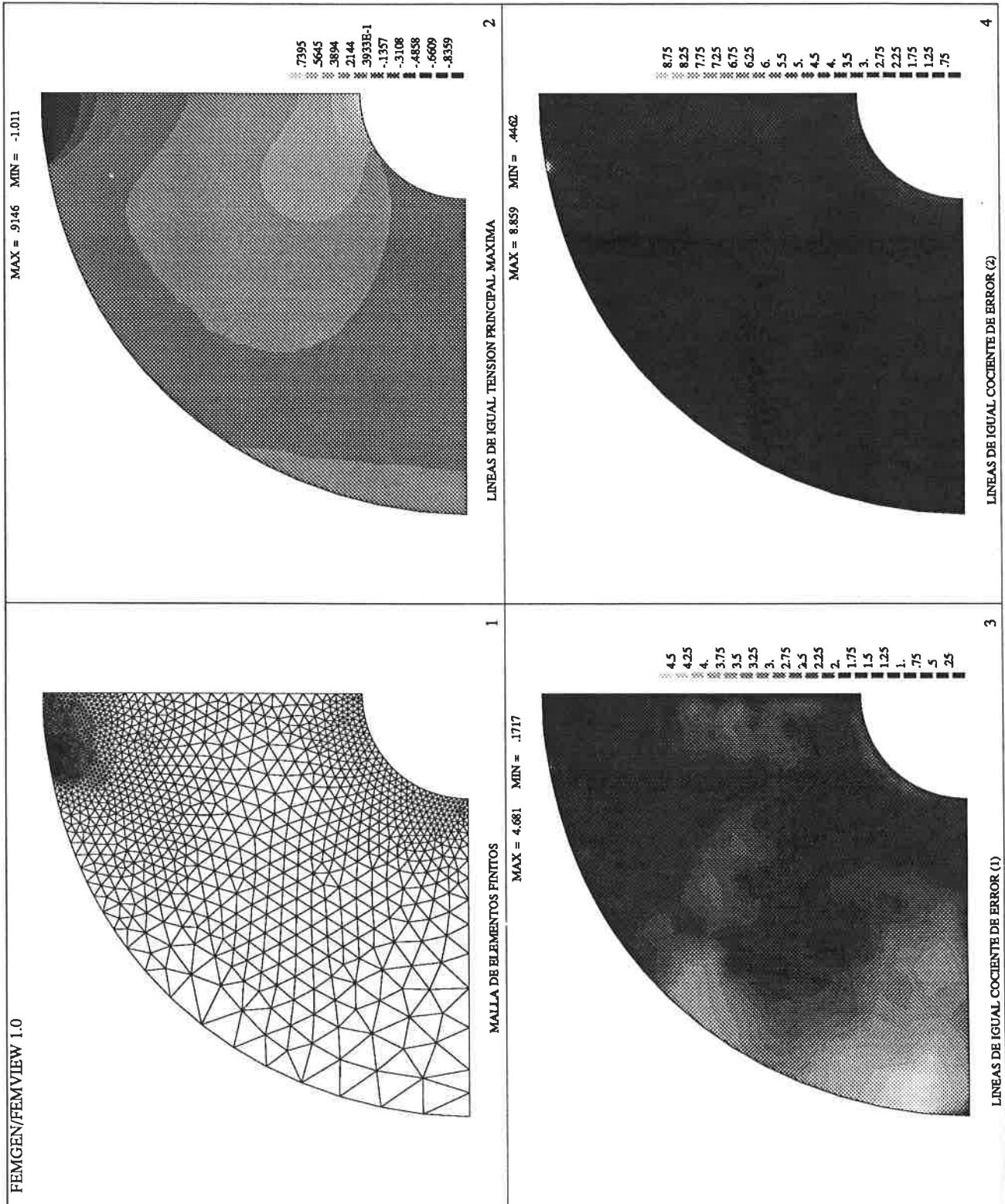


FIGURA 4.24 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

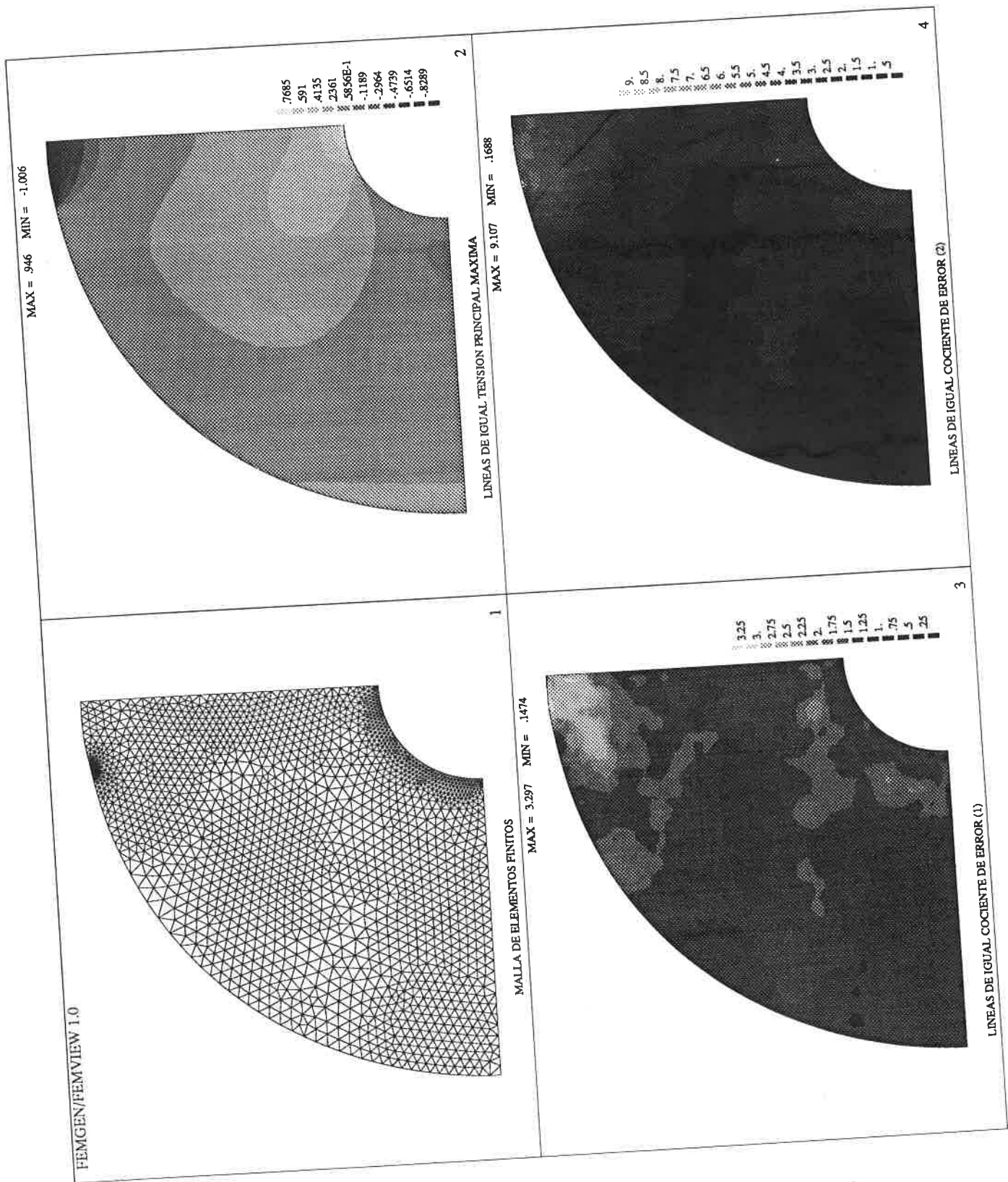


FIGURA 4.25 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

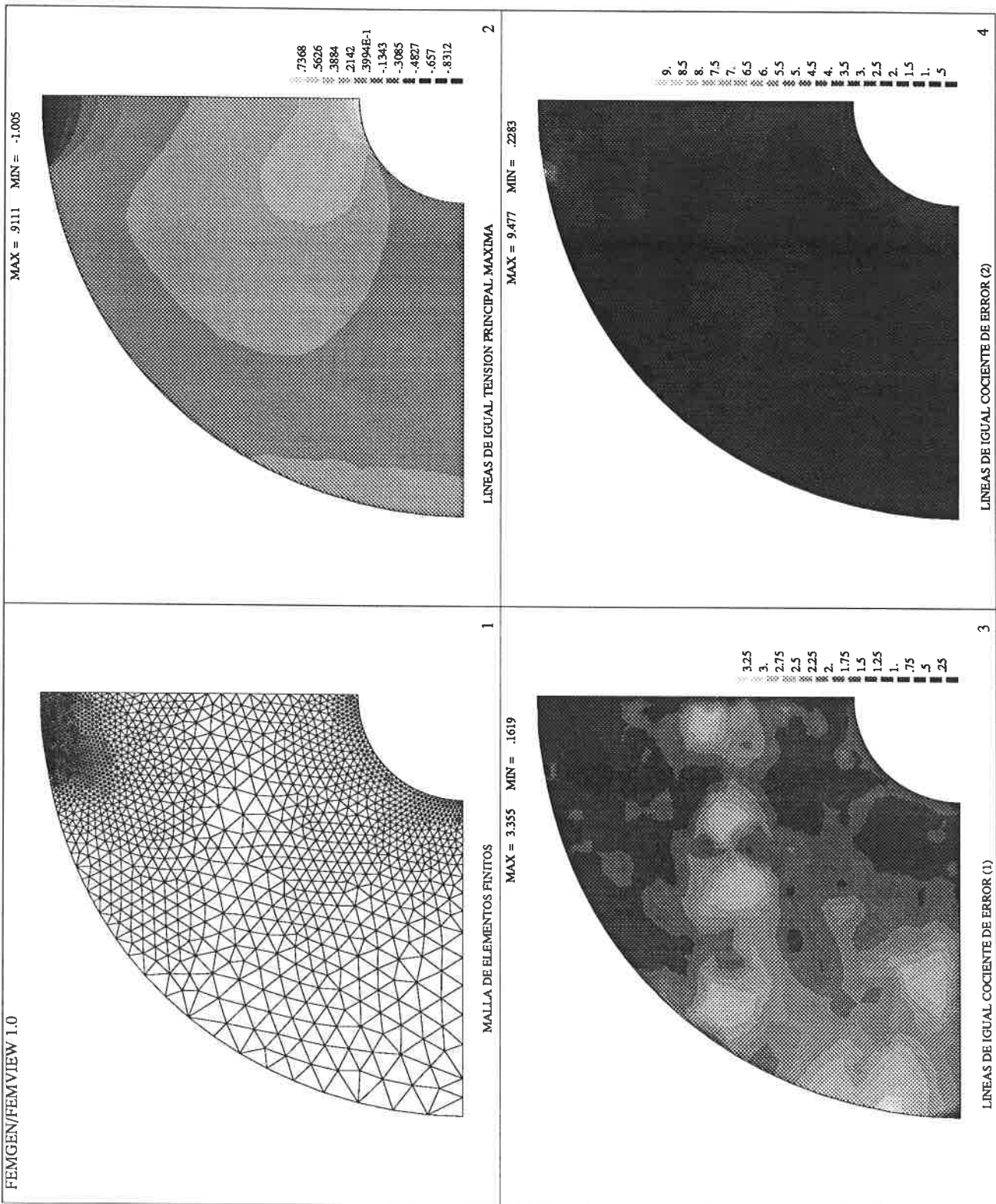


FIGURA 4.26 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

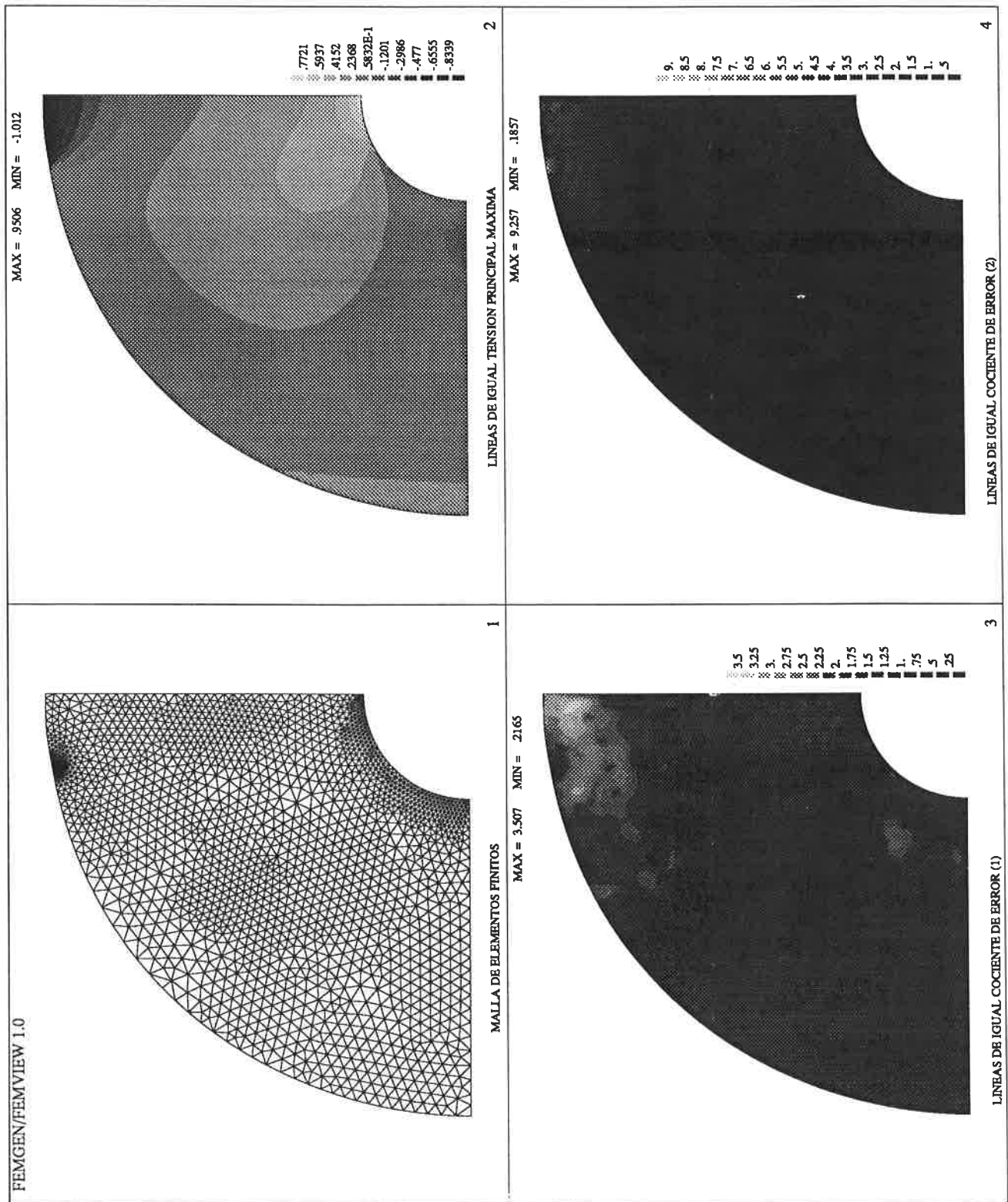


FIGURA 4.27 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

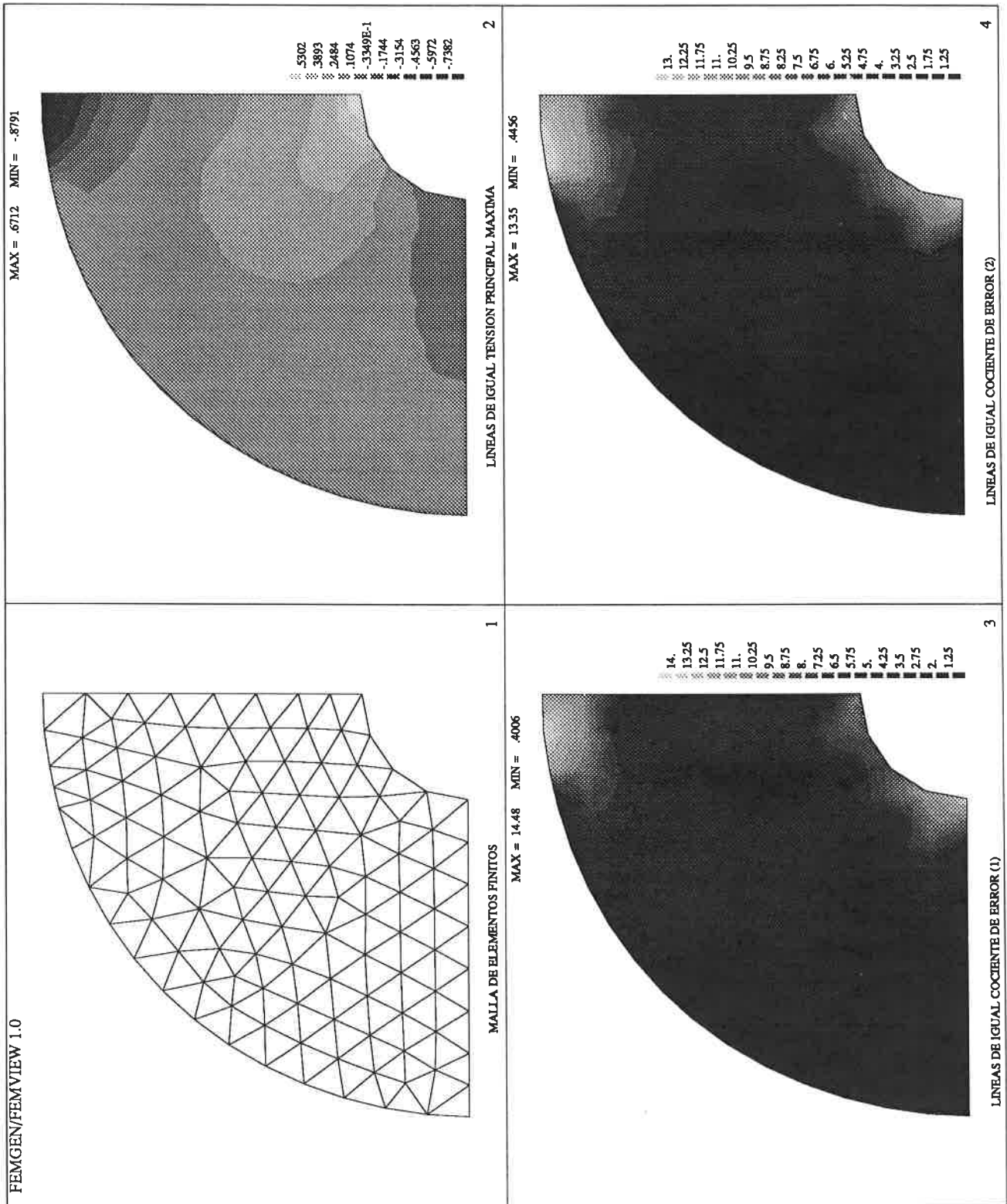


FIGURA 4.28 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

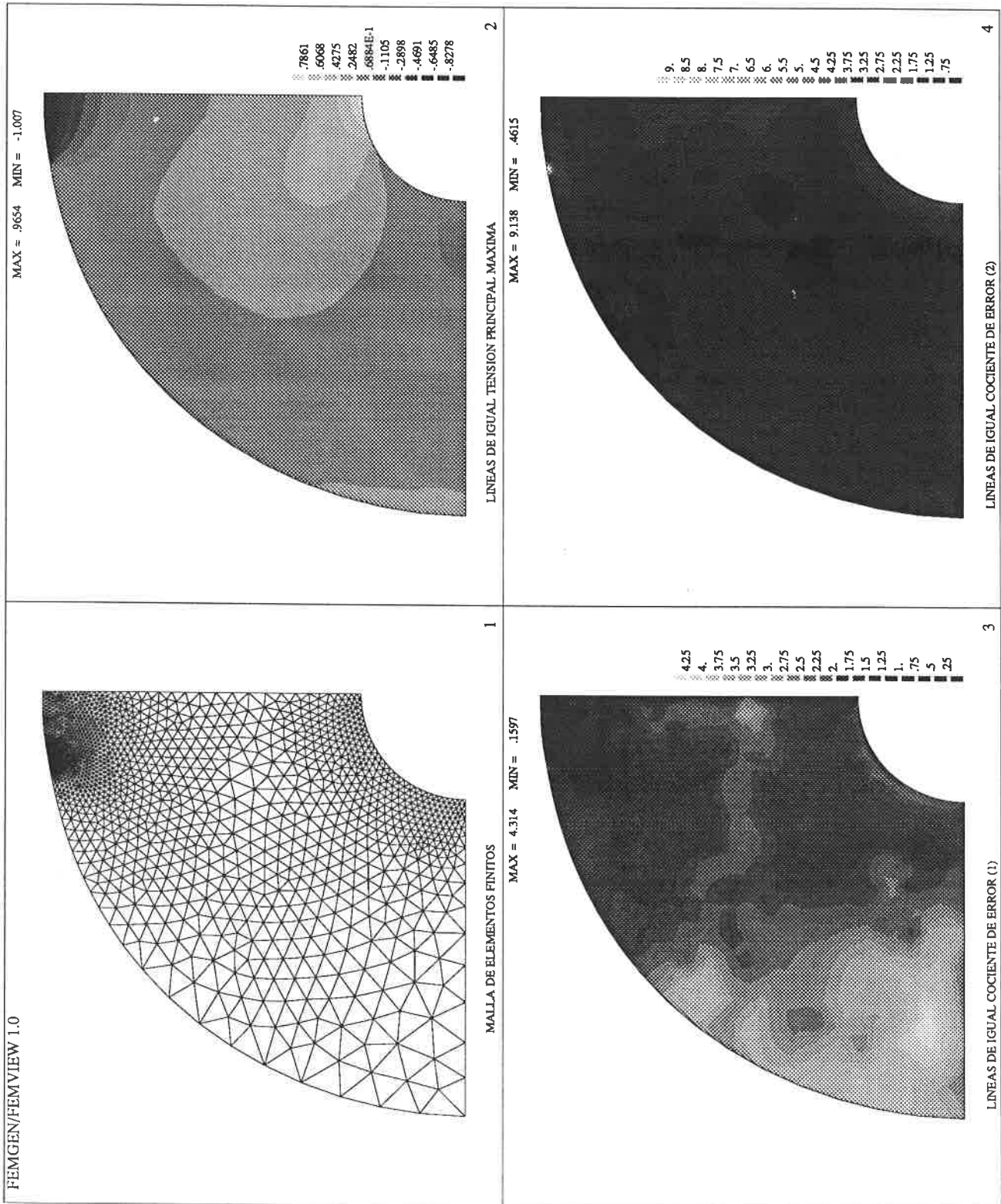


FIGURA 4.29 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

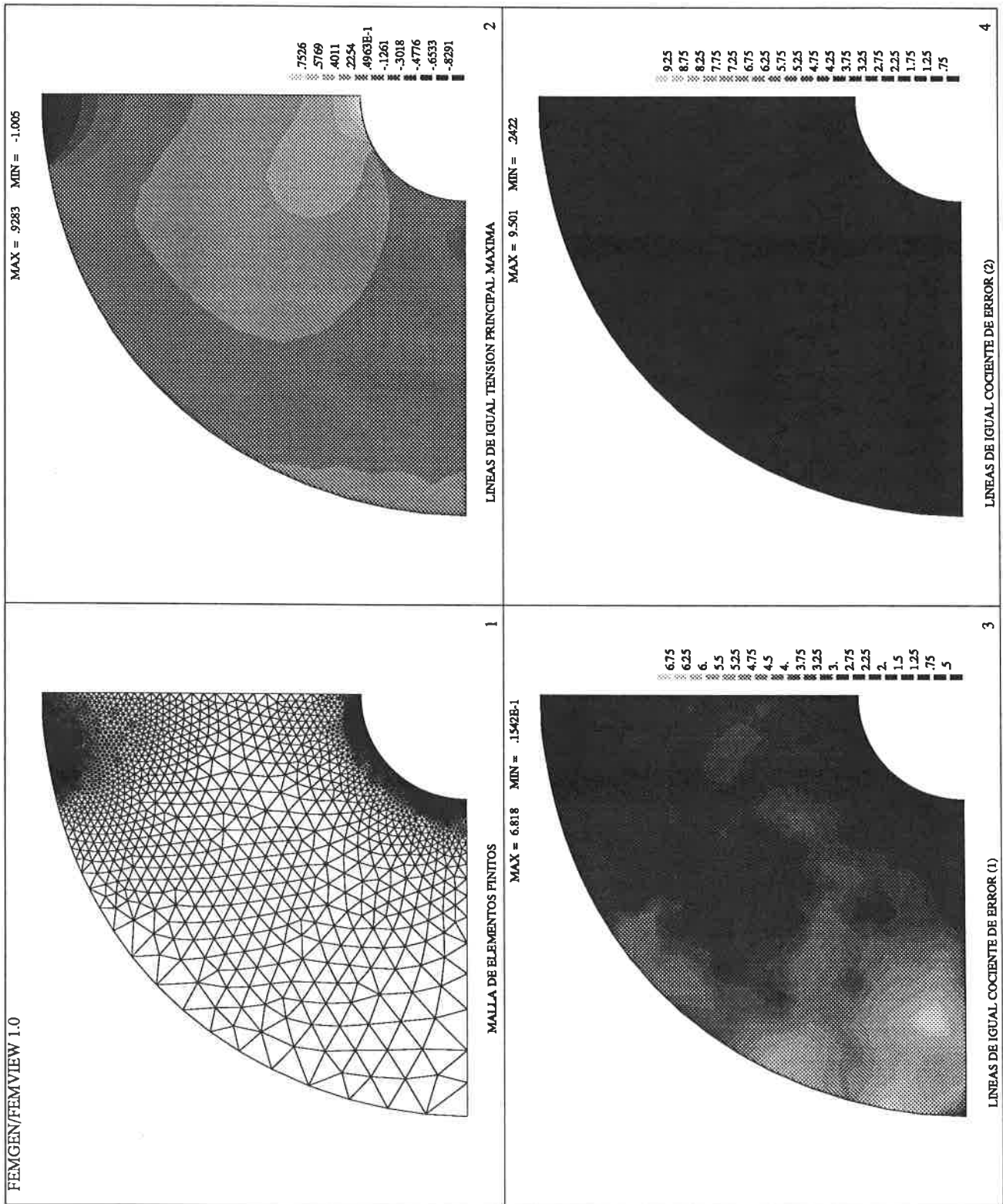


FIGURA 4.30 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

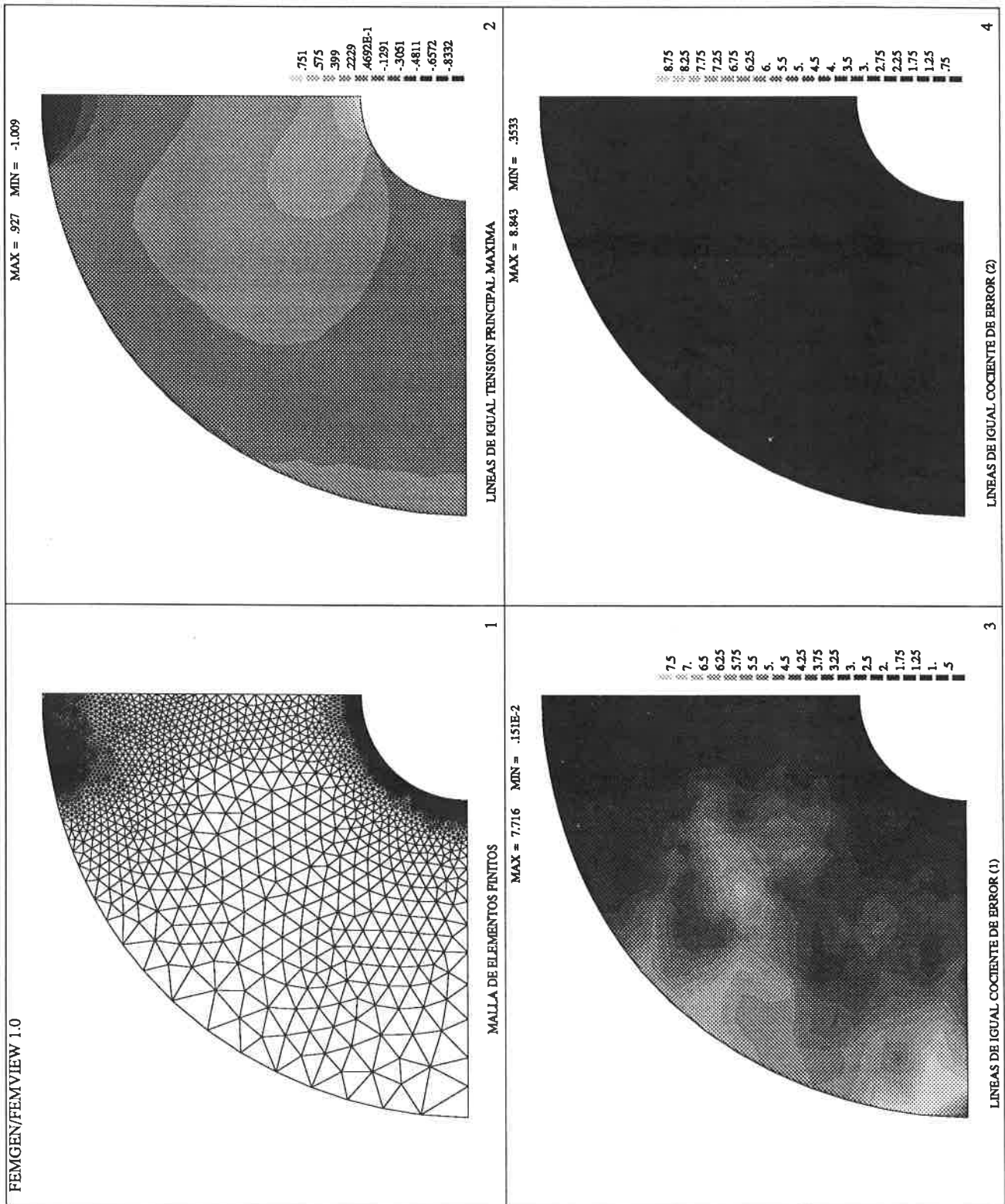


FIGURA 4.31 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 4ª malla.

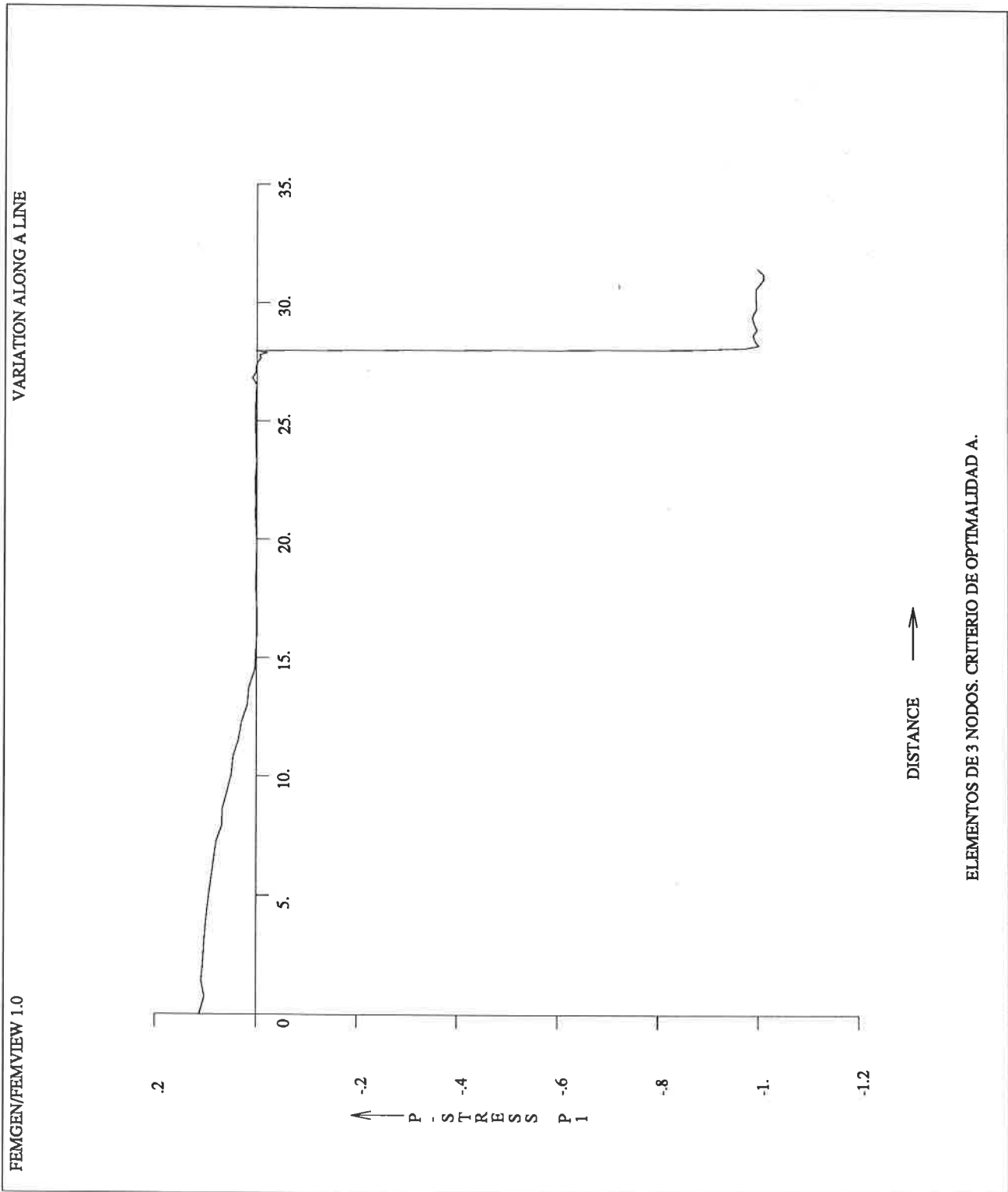


FIGURA 4.32 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. Tensiones obtenidas en contorno exterior.

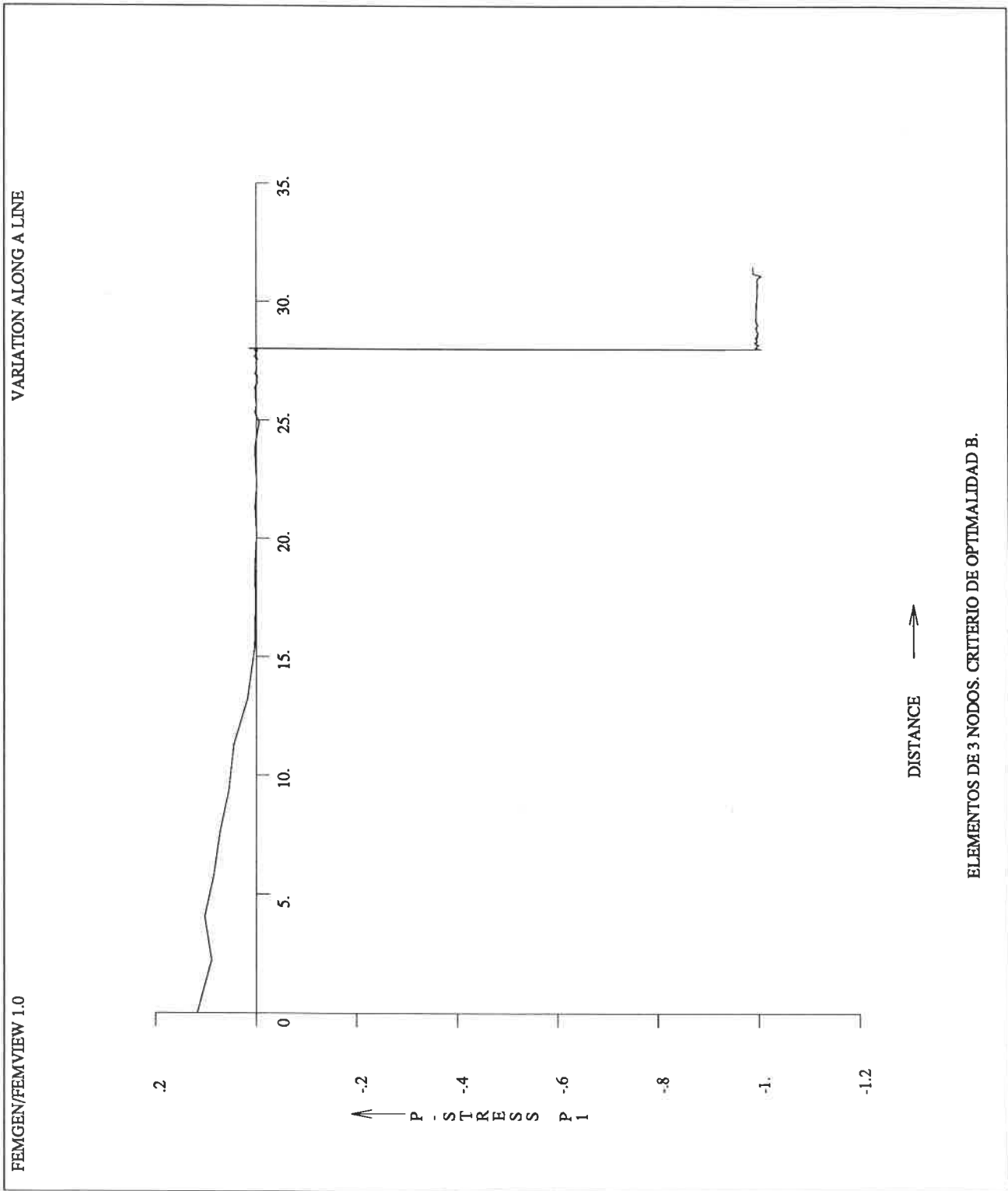


FIGURA 4.33 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. Tensiones obtenidas en contorno exterior.

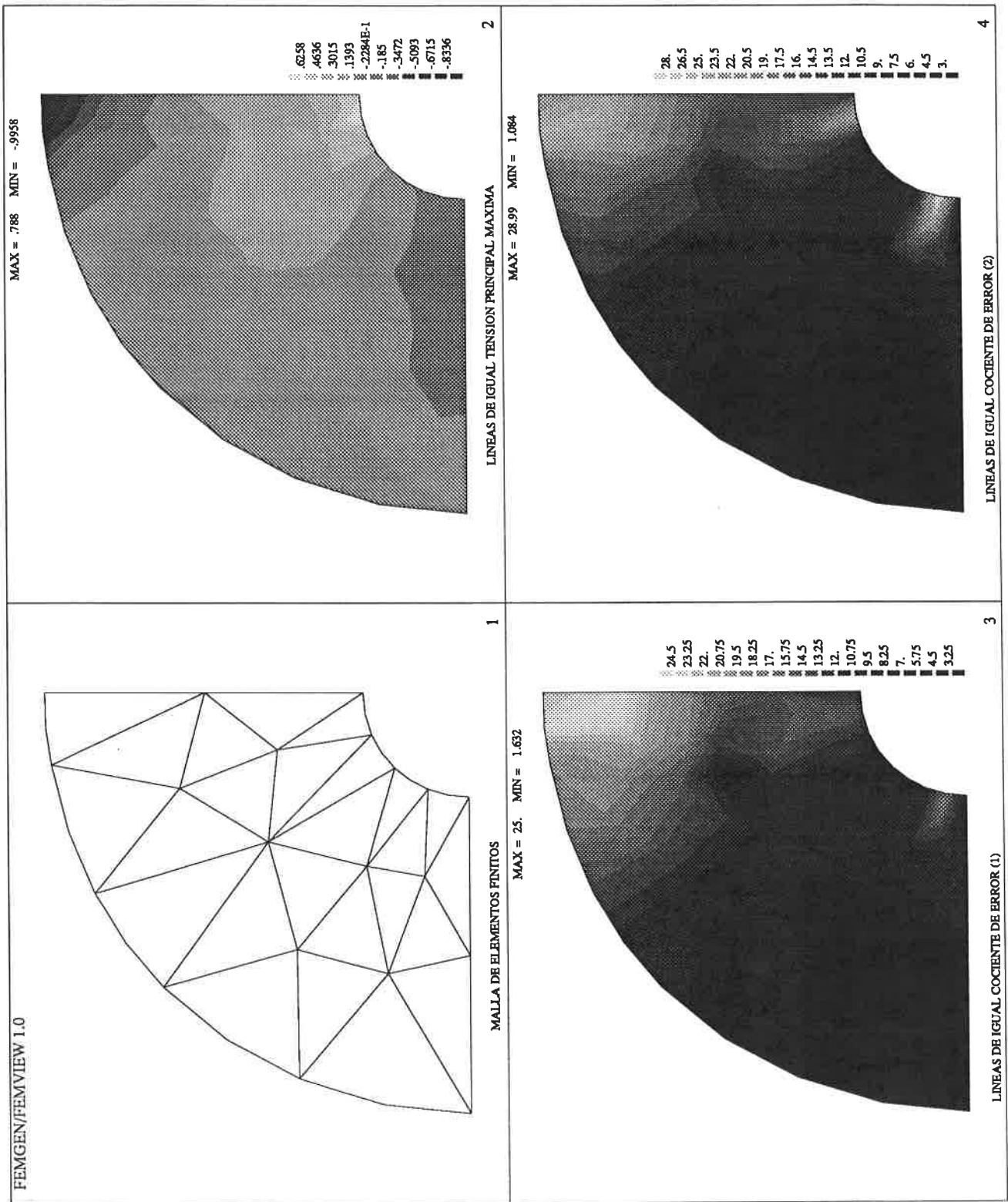


FIGURA 4.34 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

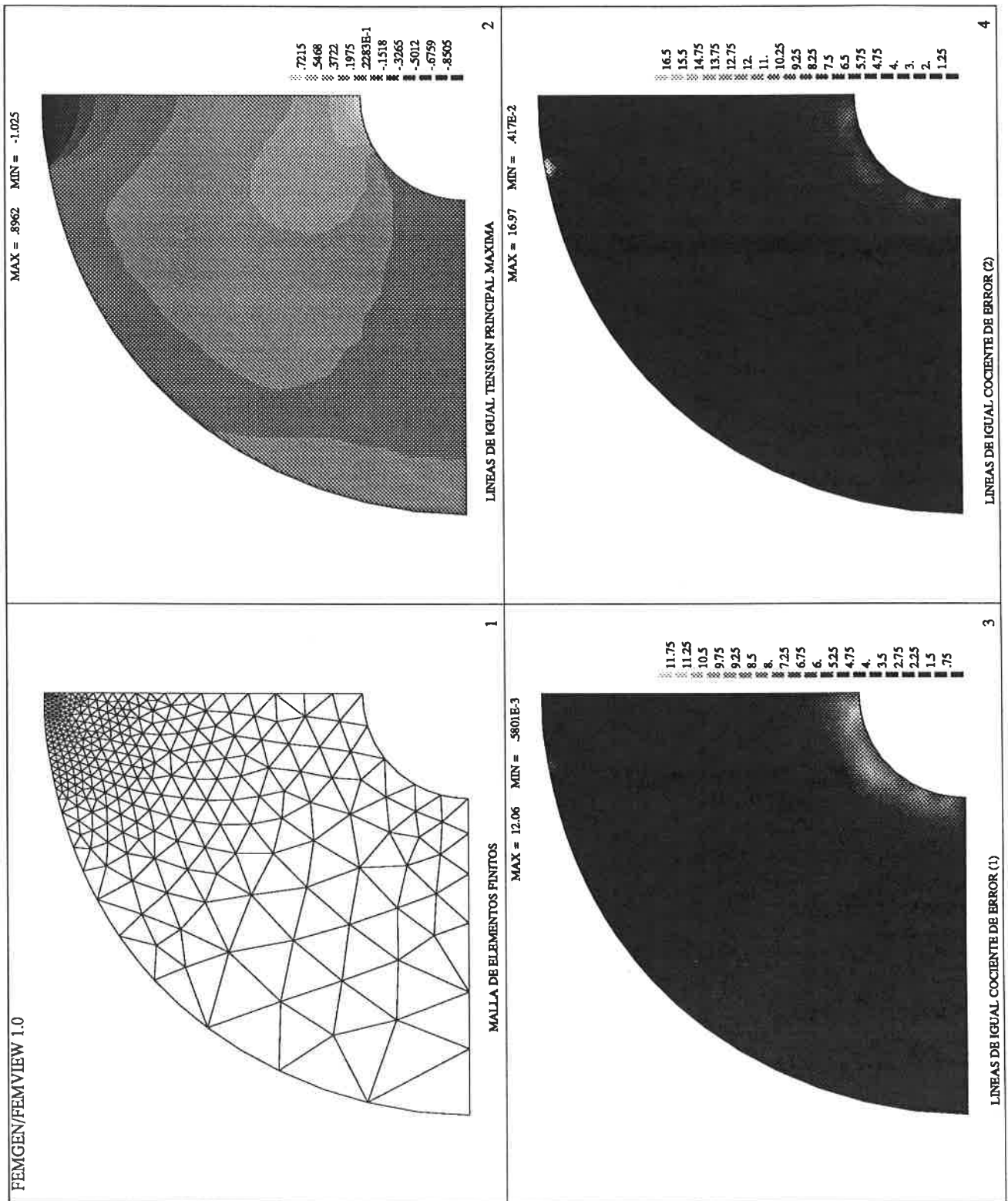


FIGURA 4.35 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

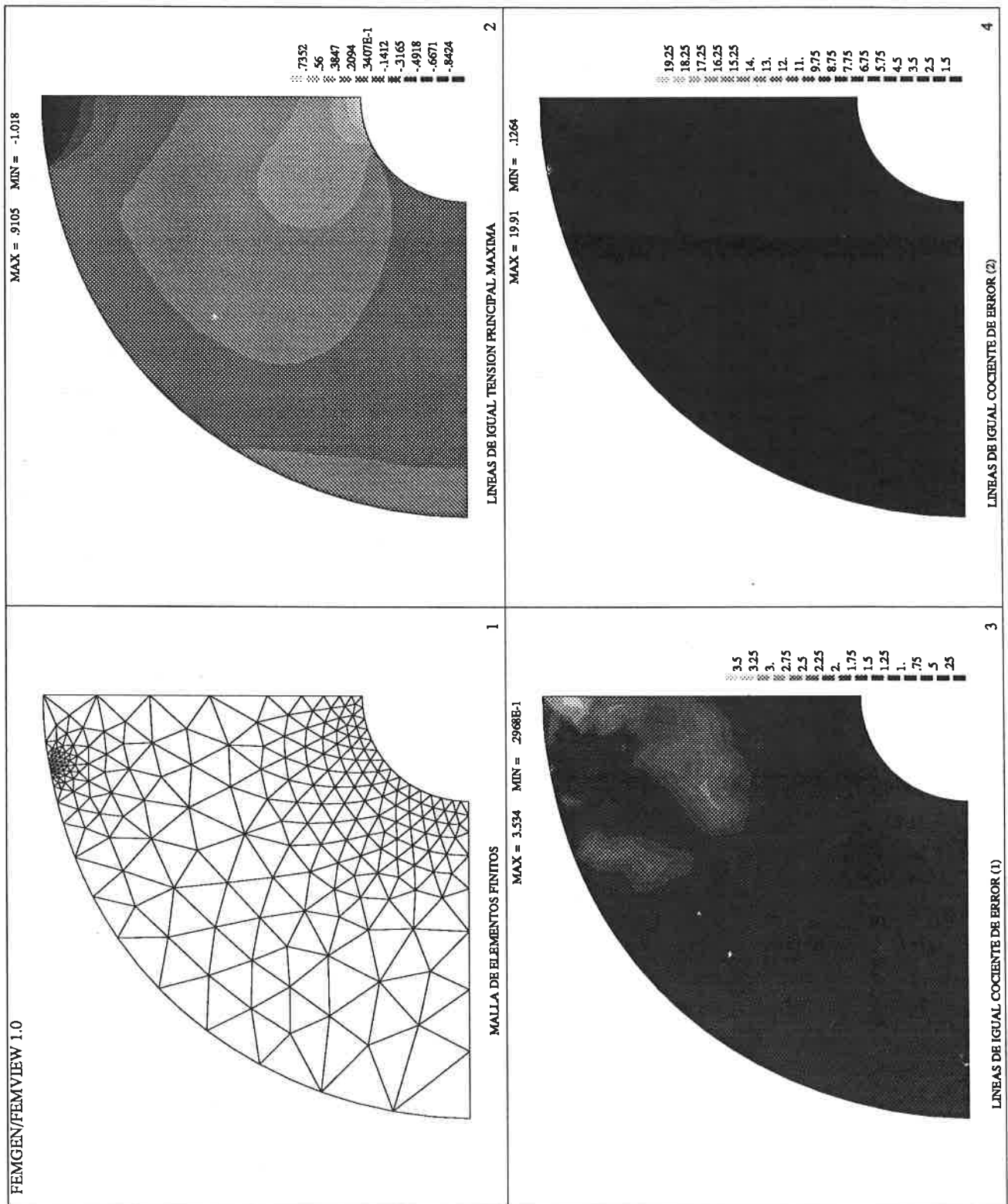


FIGURA 4.36 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

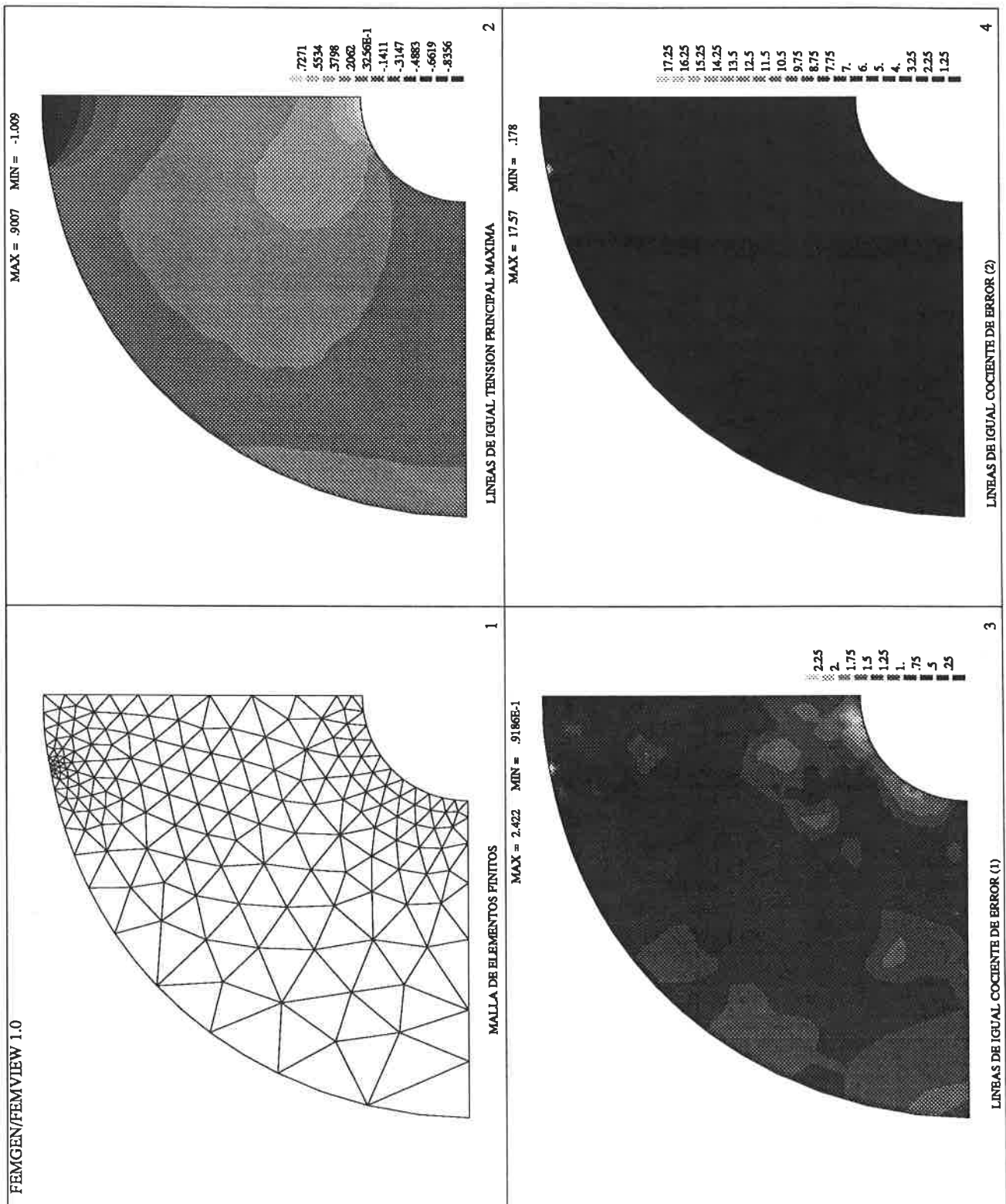


FIGURA 4.37 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

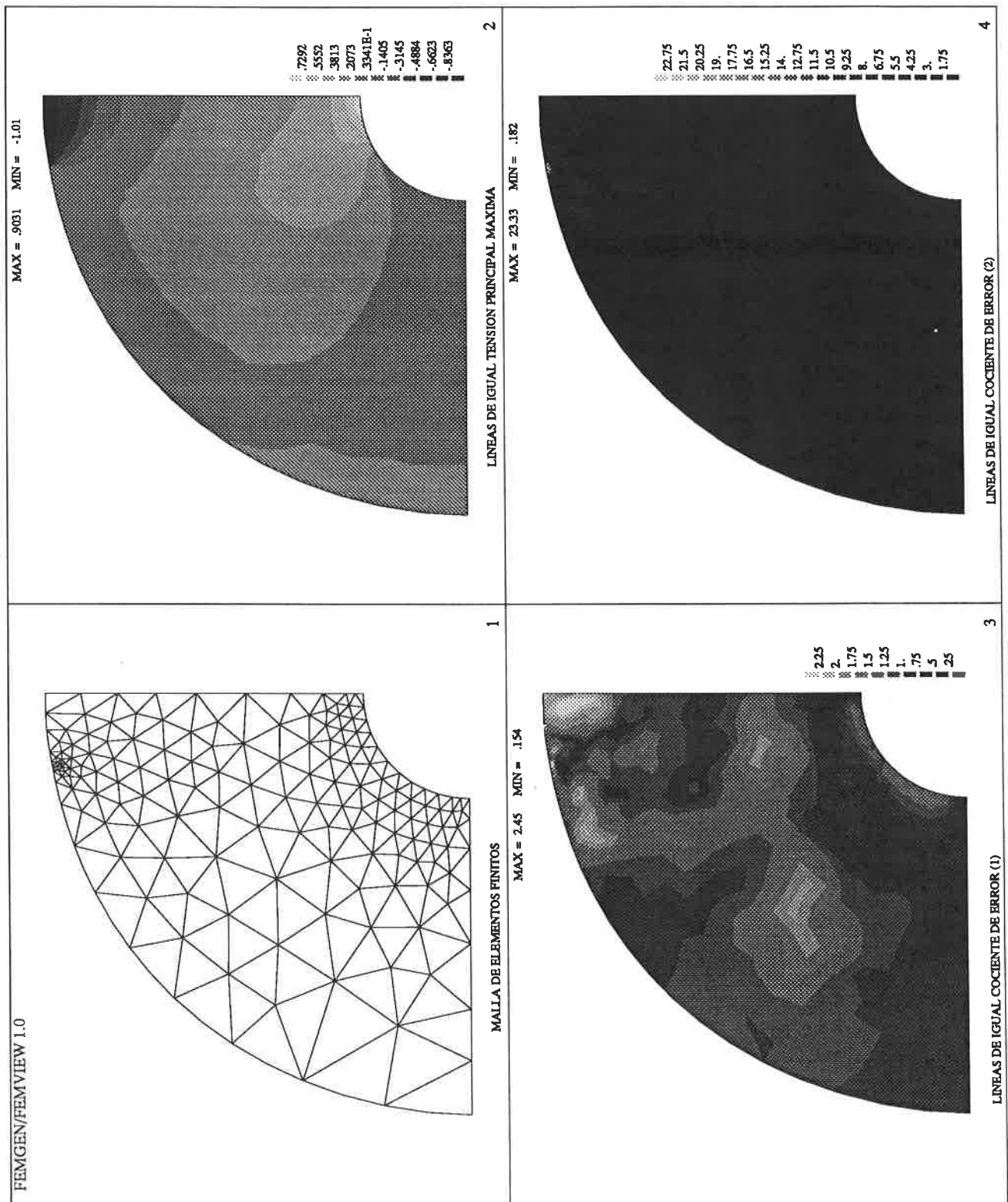


FIGURA 4.38 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

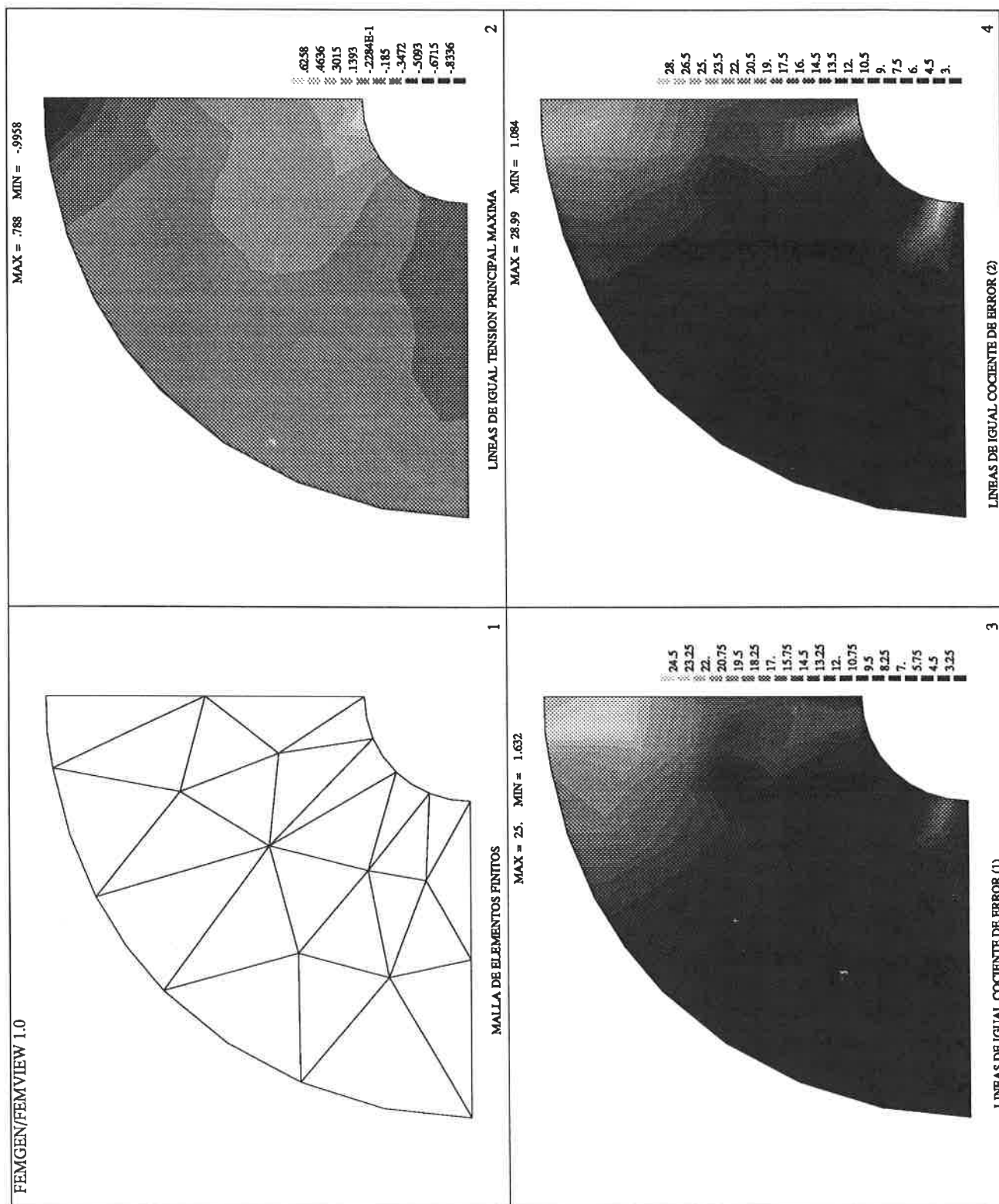


FIGURA 4.39 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

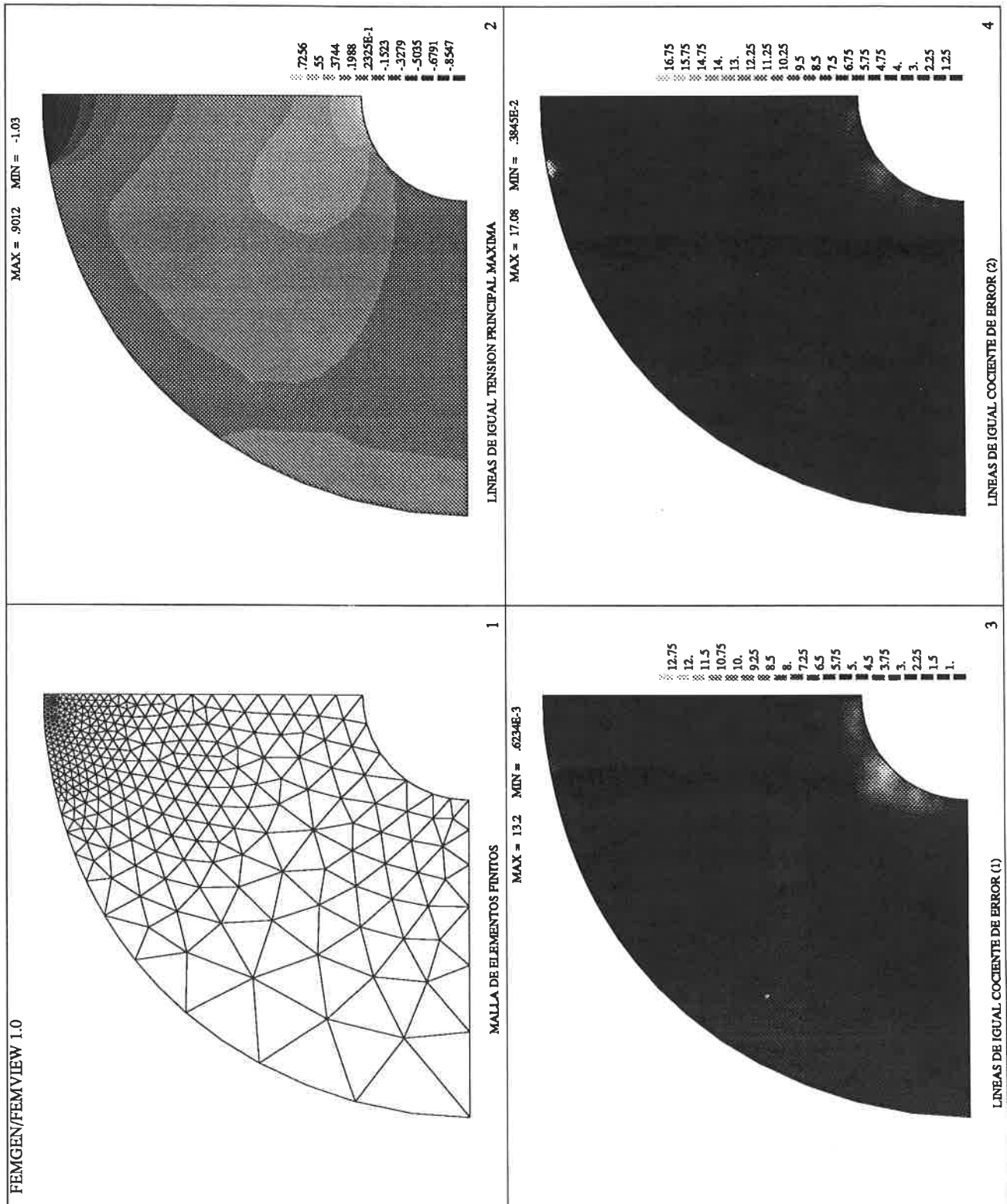


FIGURA 4.40 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

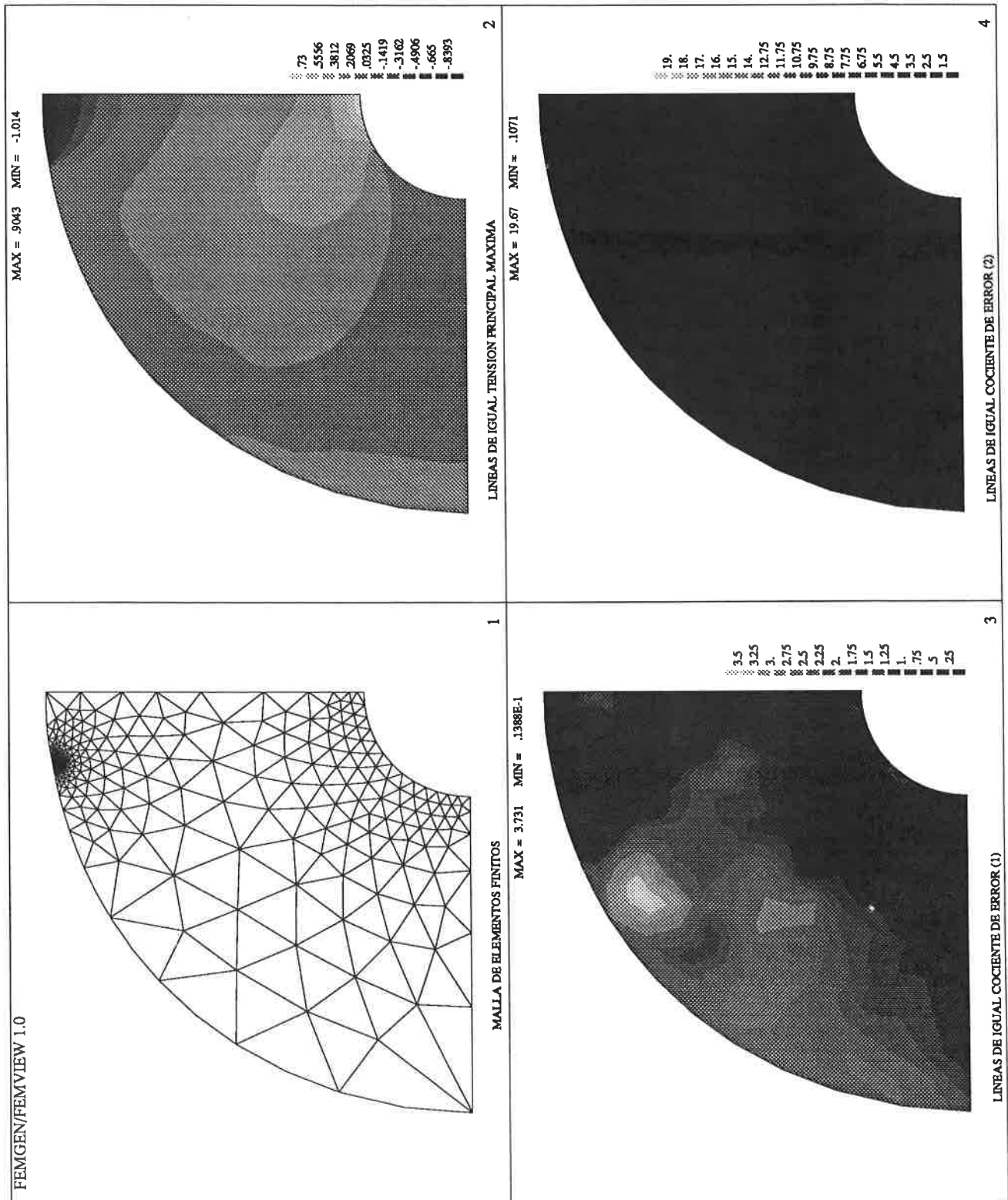


FIGURA 4.41 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

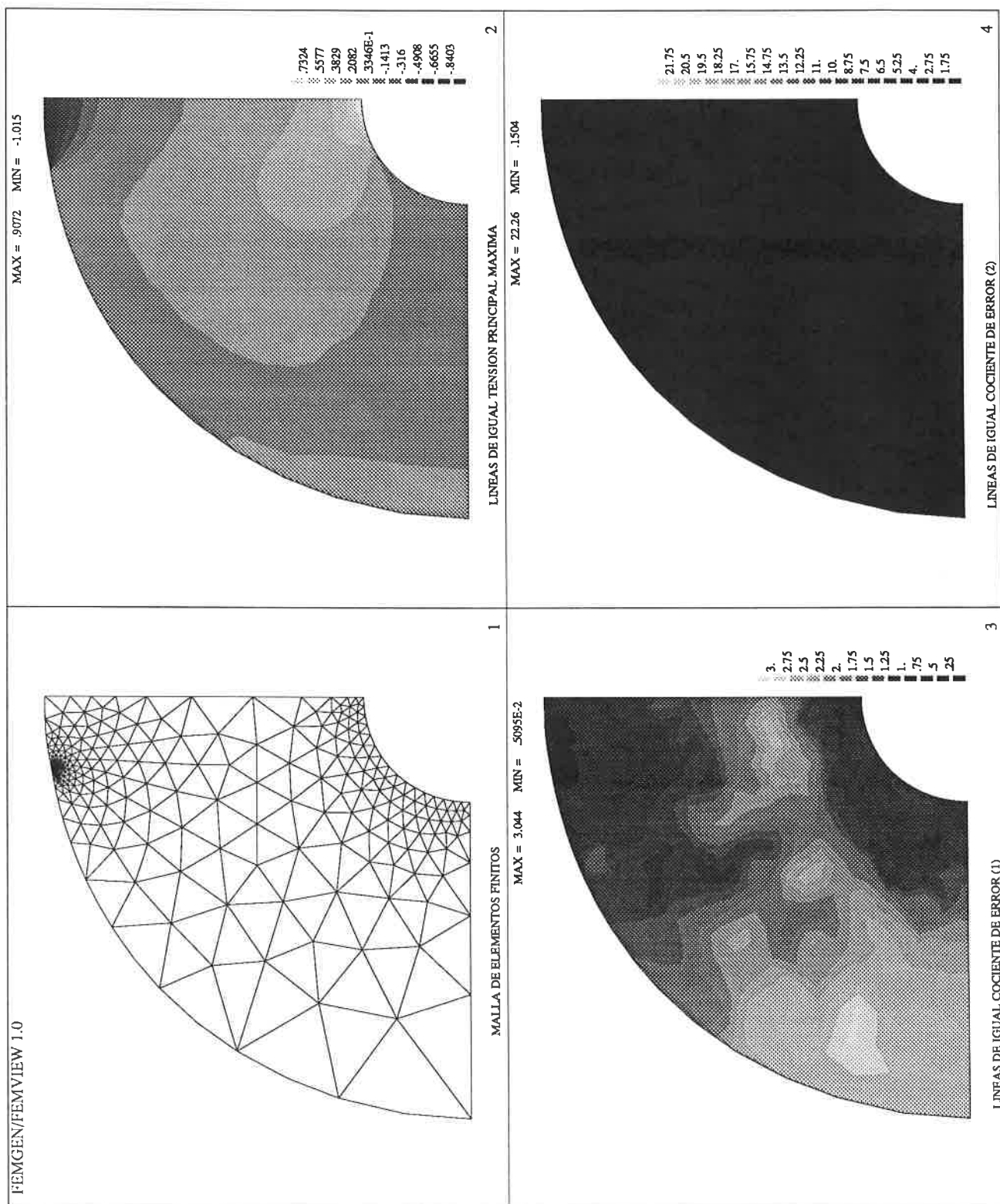


FIGURA 4.42 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 4ª malla.

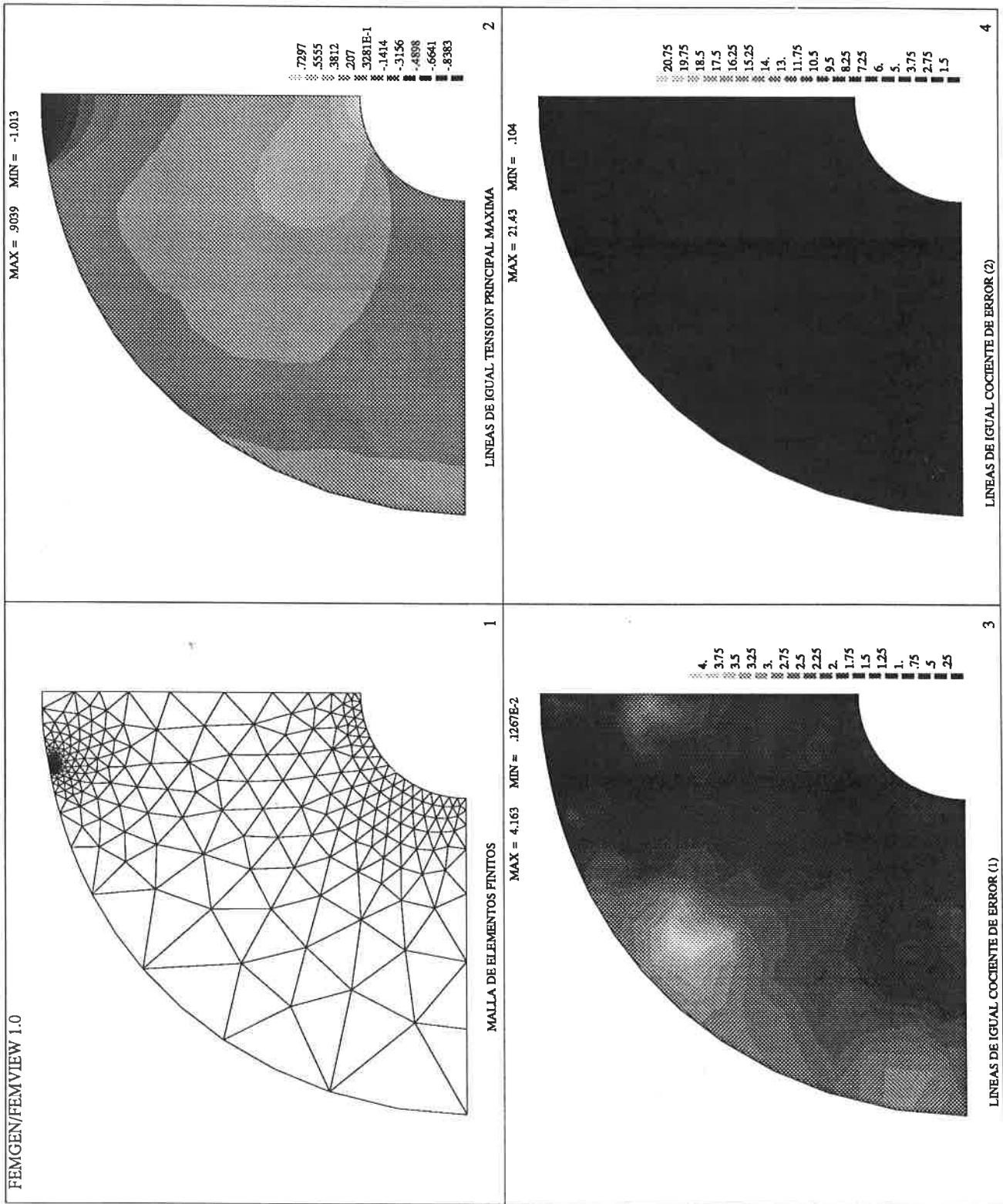


FIGURA 4.43 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. 5ª malla.

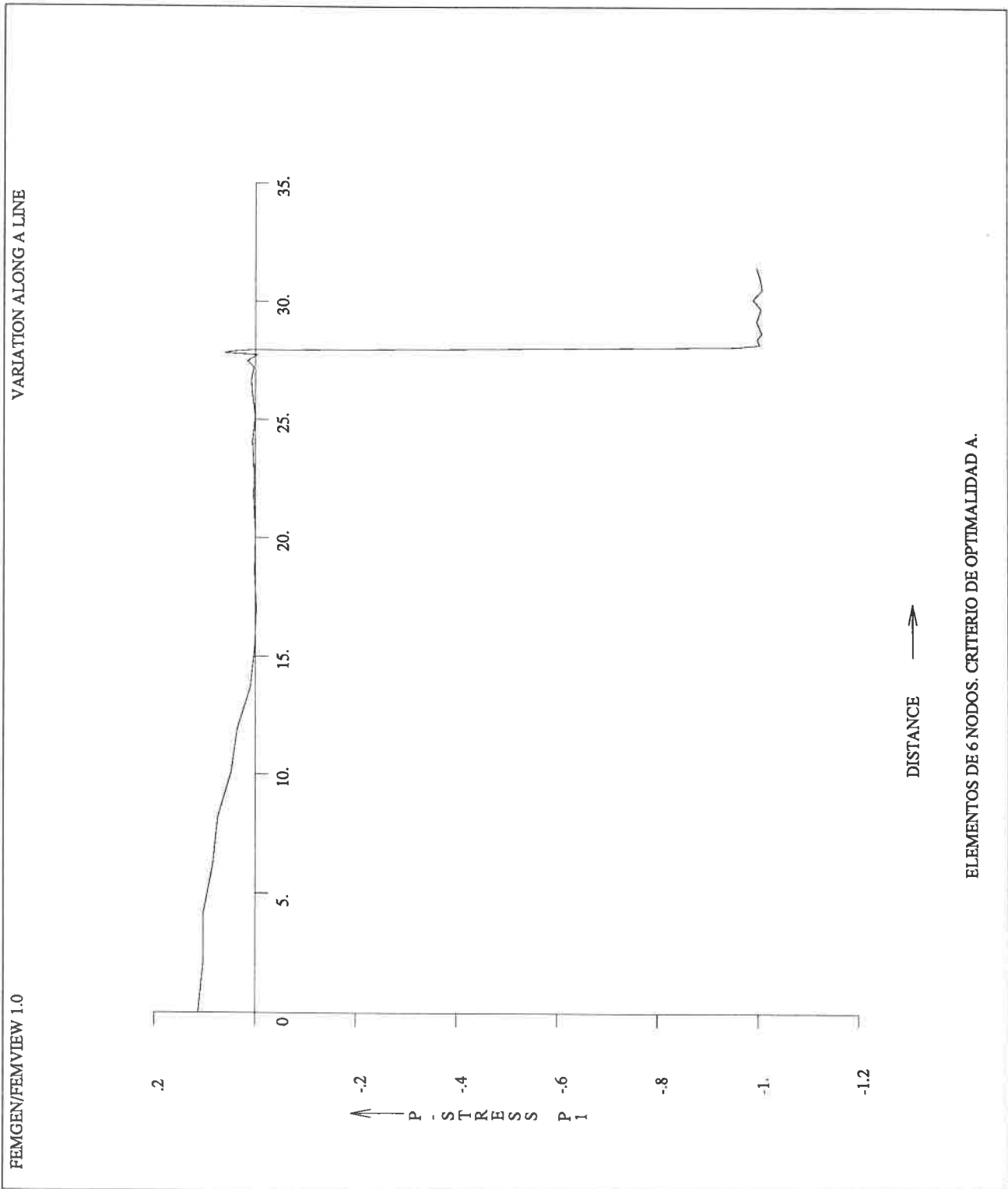


FIGURA 4.44 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad A. Tensiones obtenidas en contorno exterior.

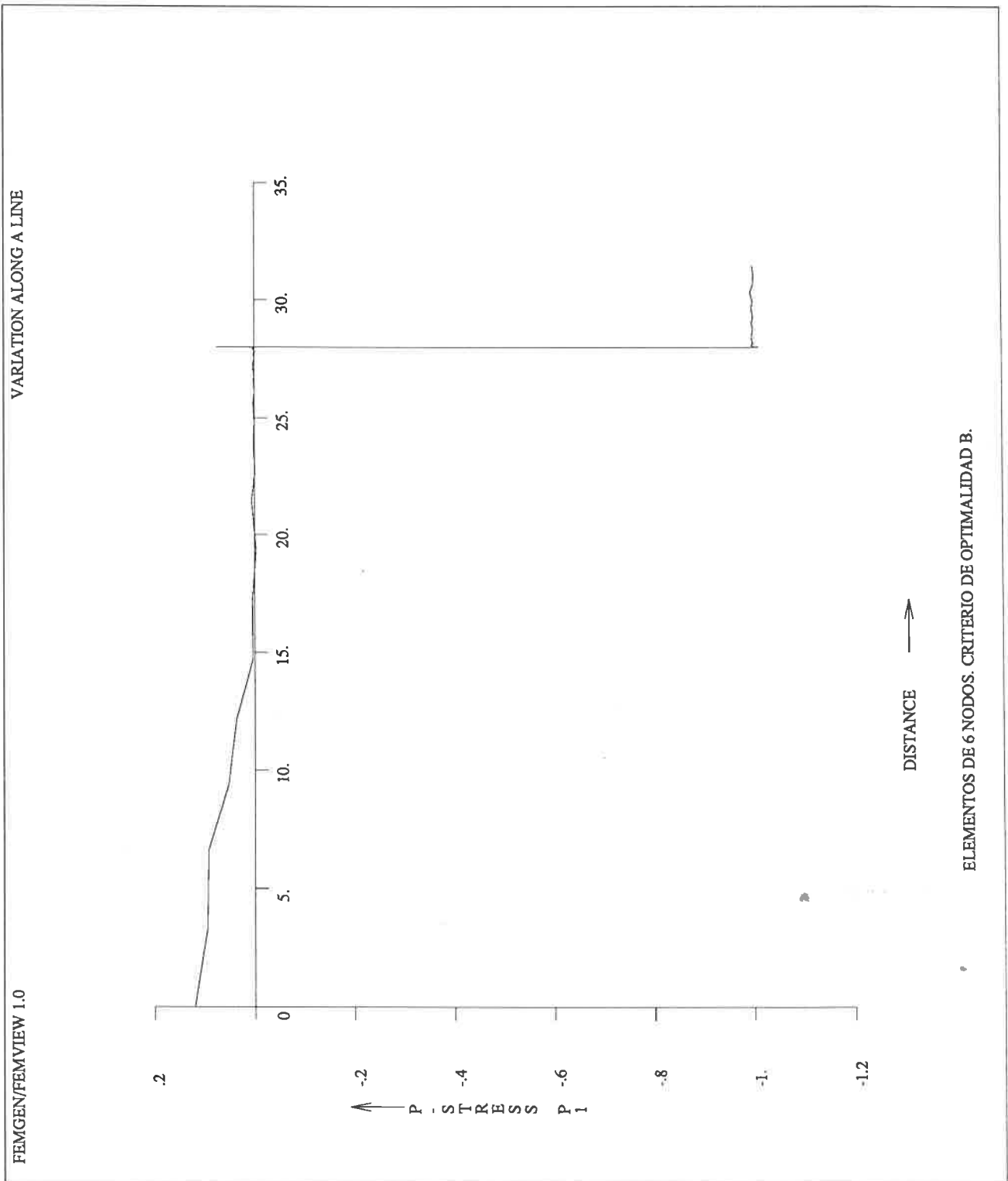


FIGURA 4.45 Tubería gruesa con carga diametral. Elementos de 6 nodos. Error requerido 1%. Criterio de optimalidad B. Tensiones obtenidas en contorno exterior.

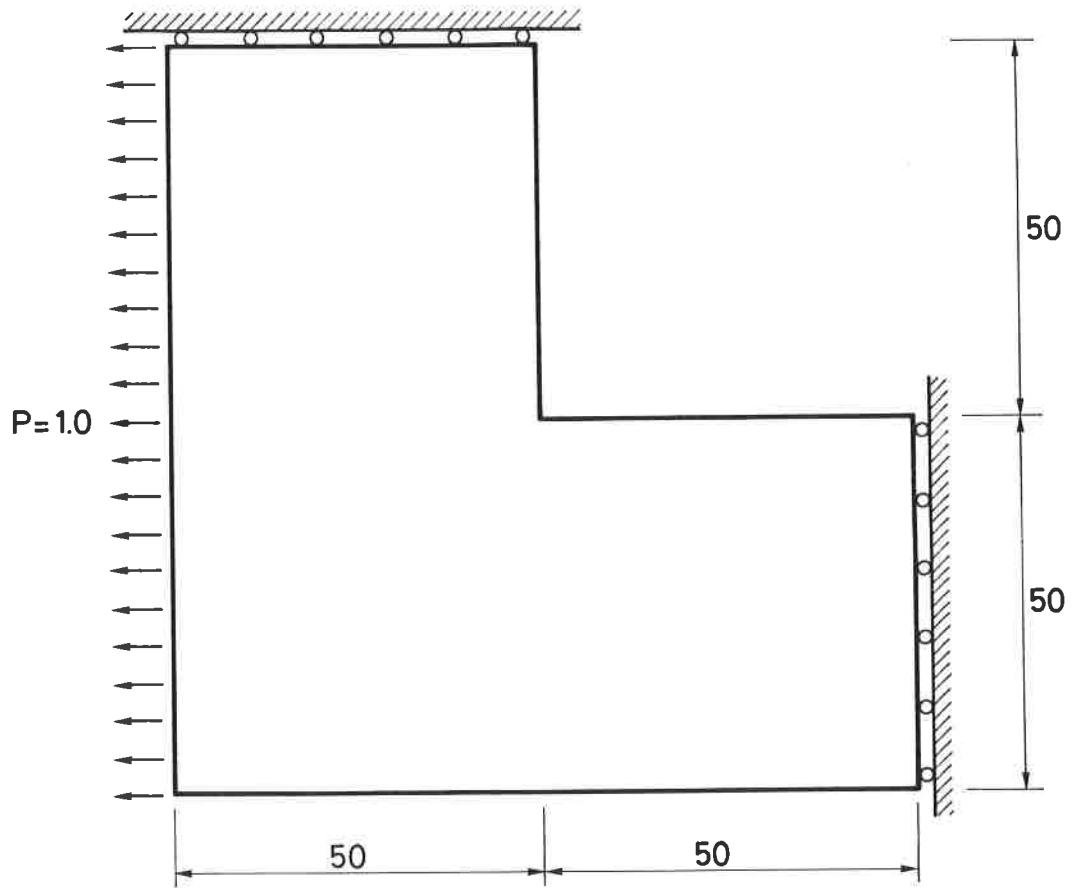


FIGURA 4.46 Dominio en forma de L. Descripción de geometría y cargas.

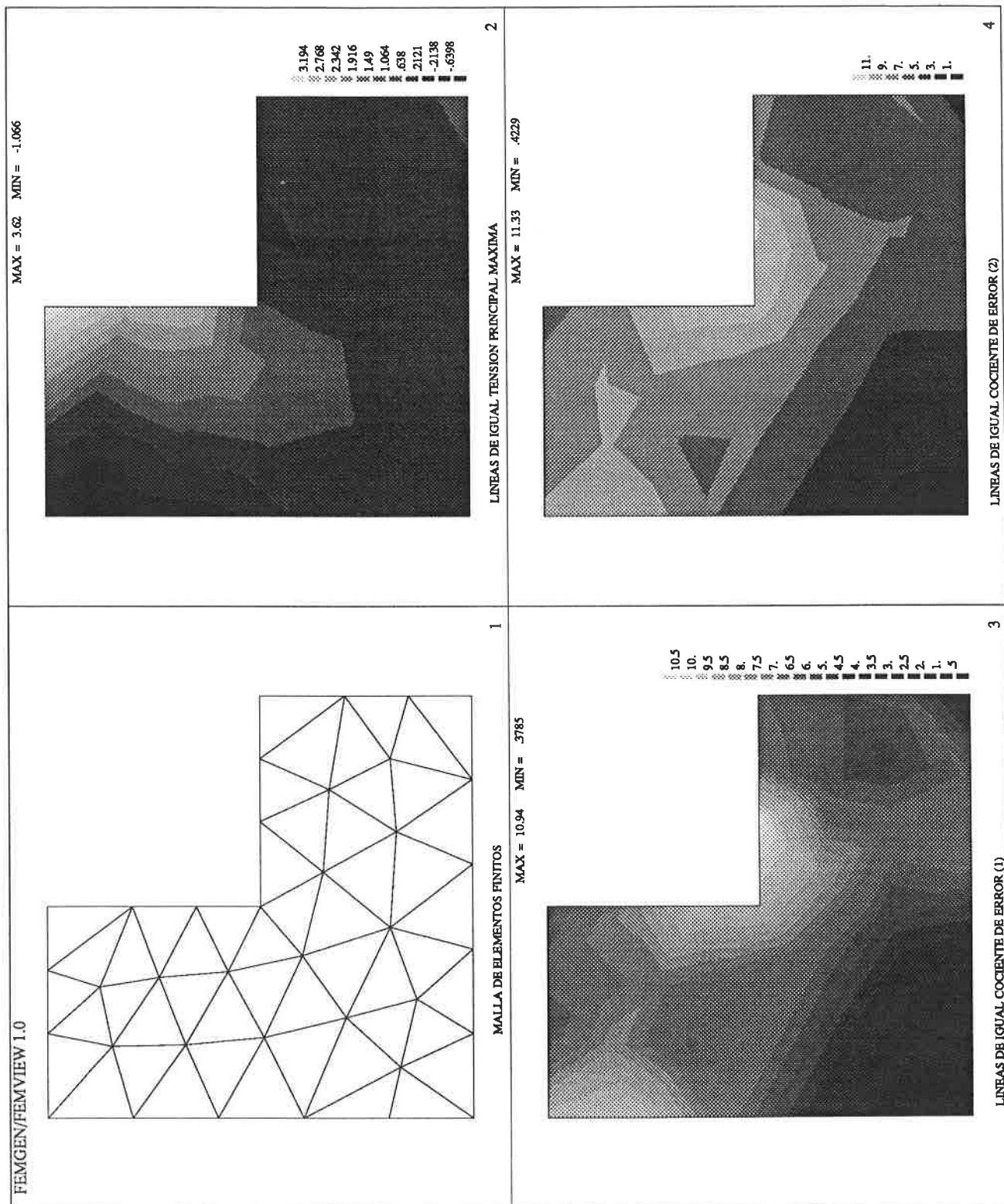


FIGURA 4.47 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

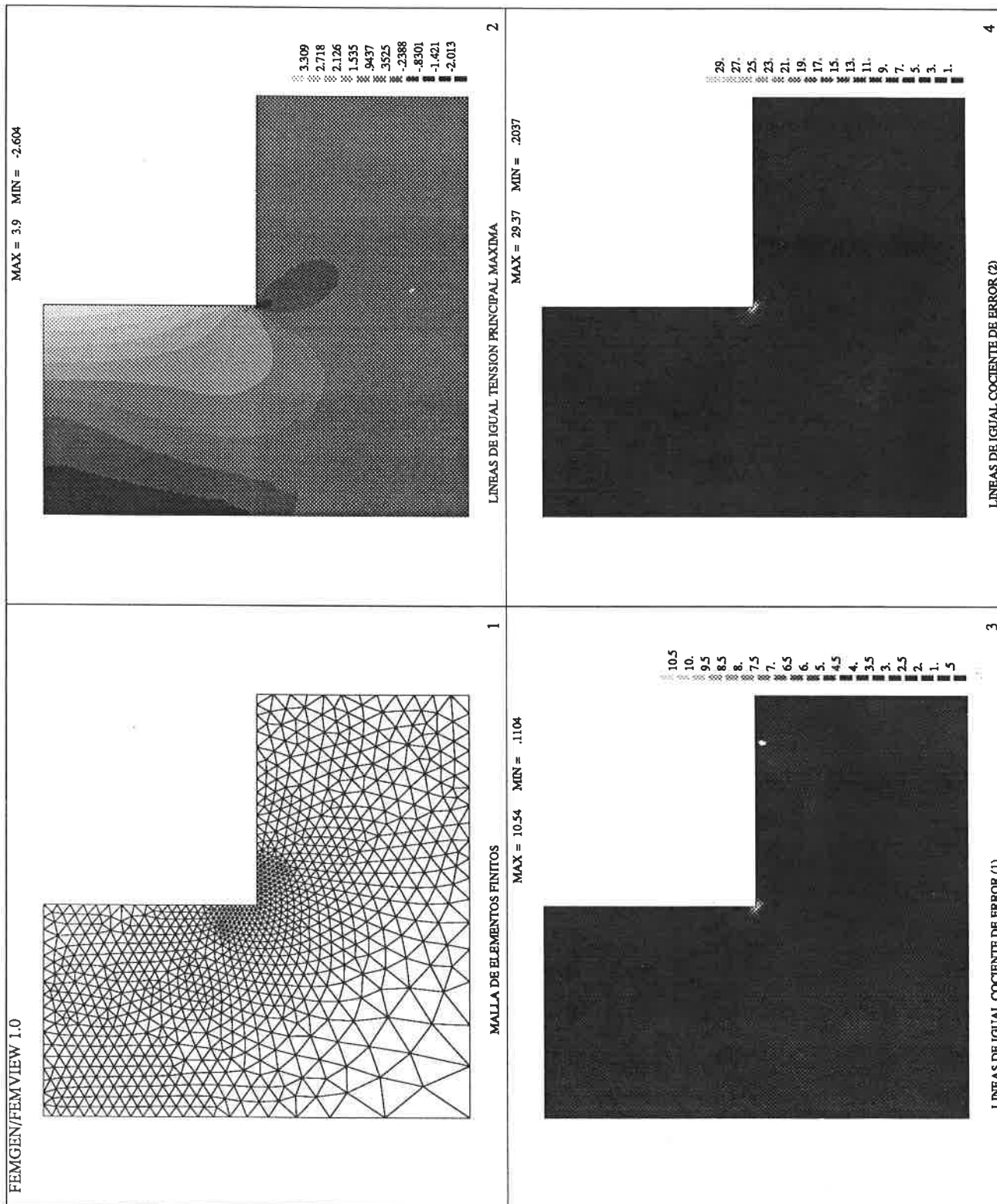


FIGURA 4.48 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

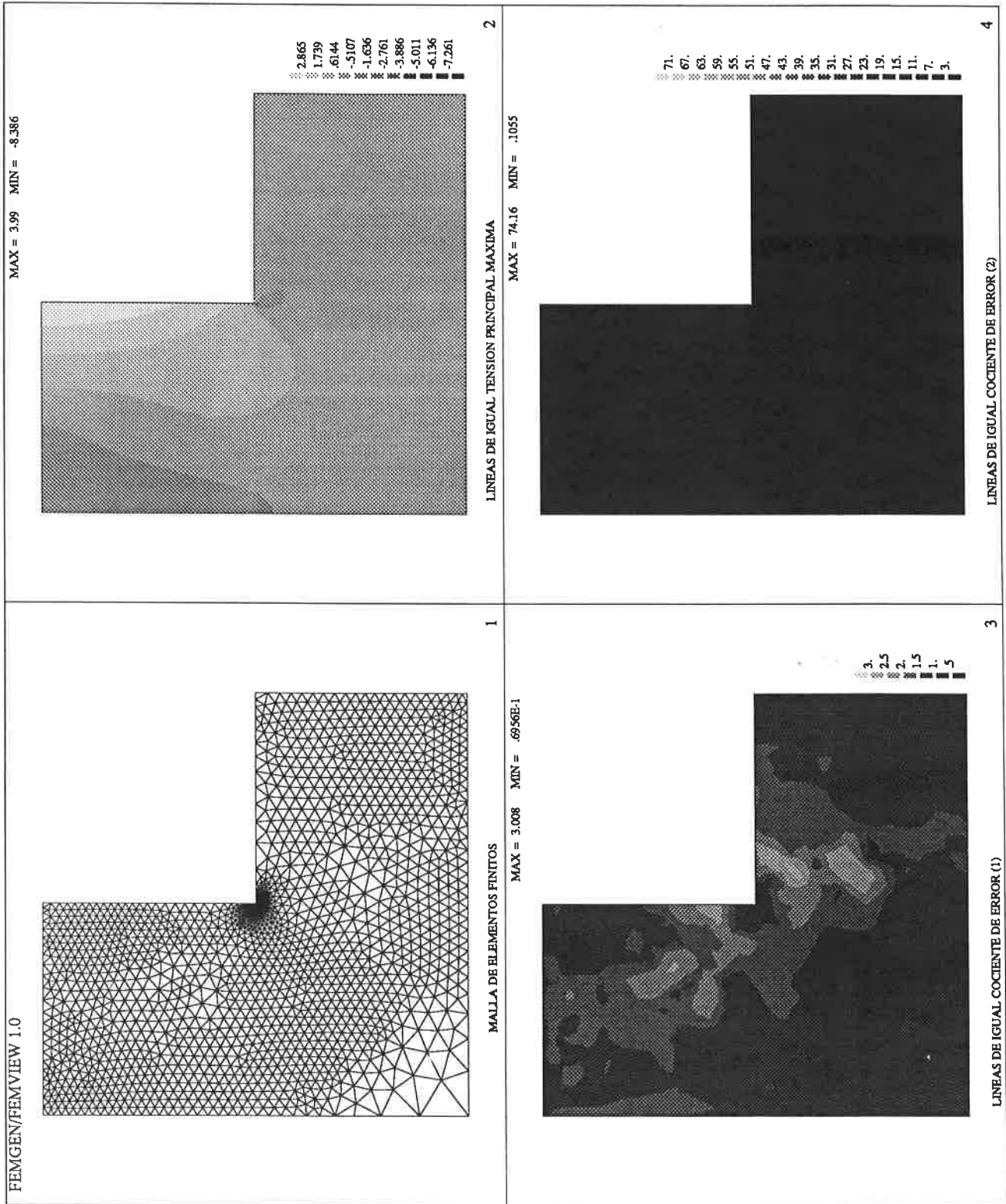


FIGURA 4.49 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

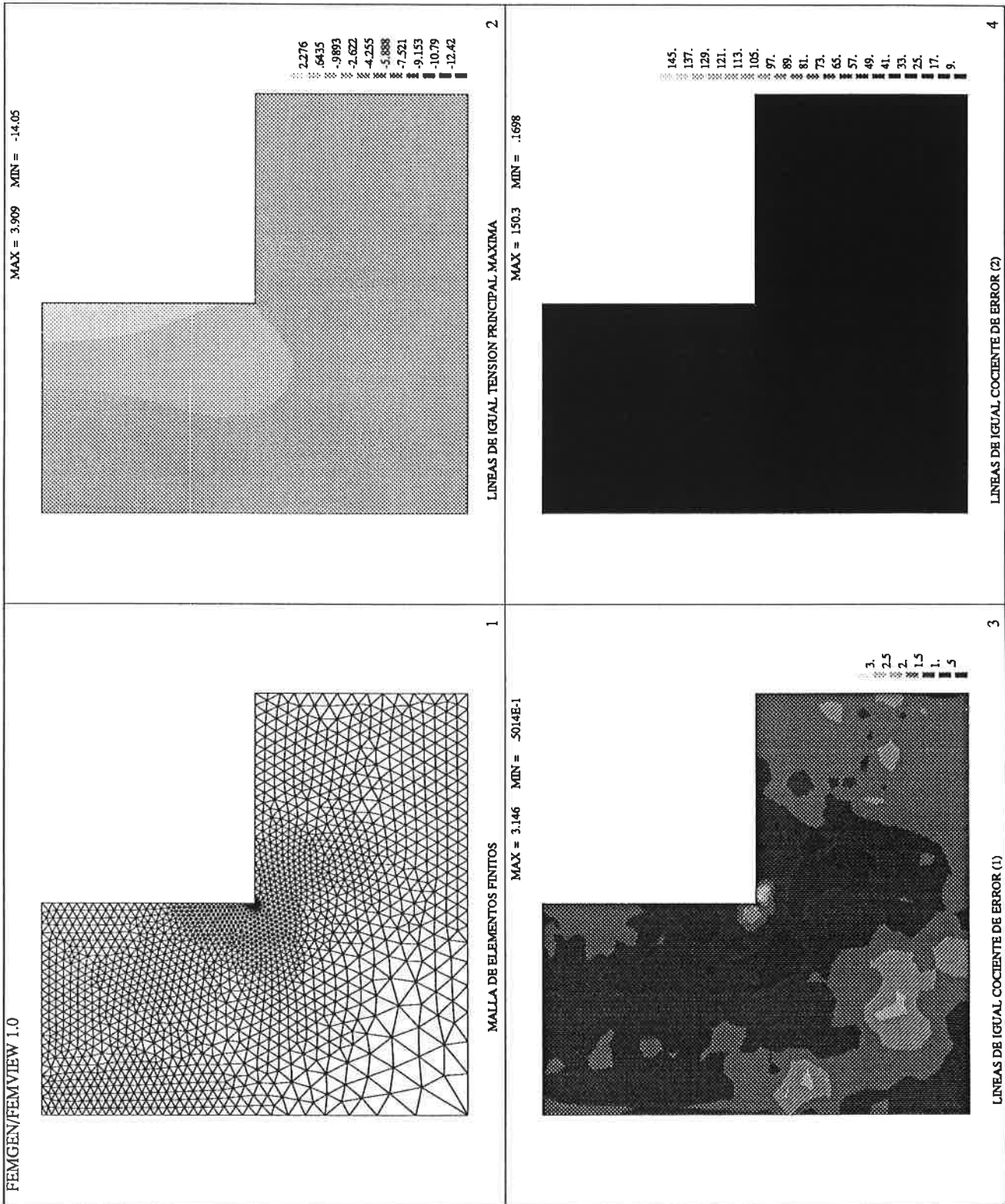


FIGURA 4.50 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

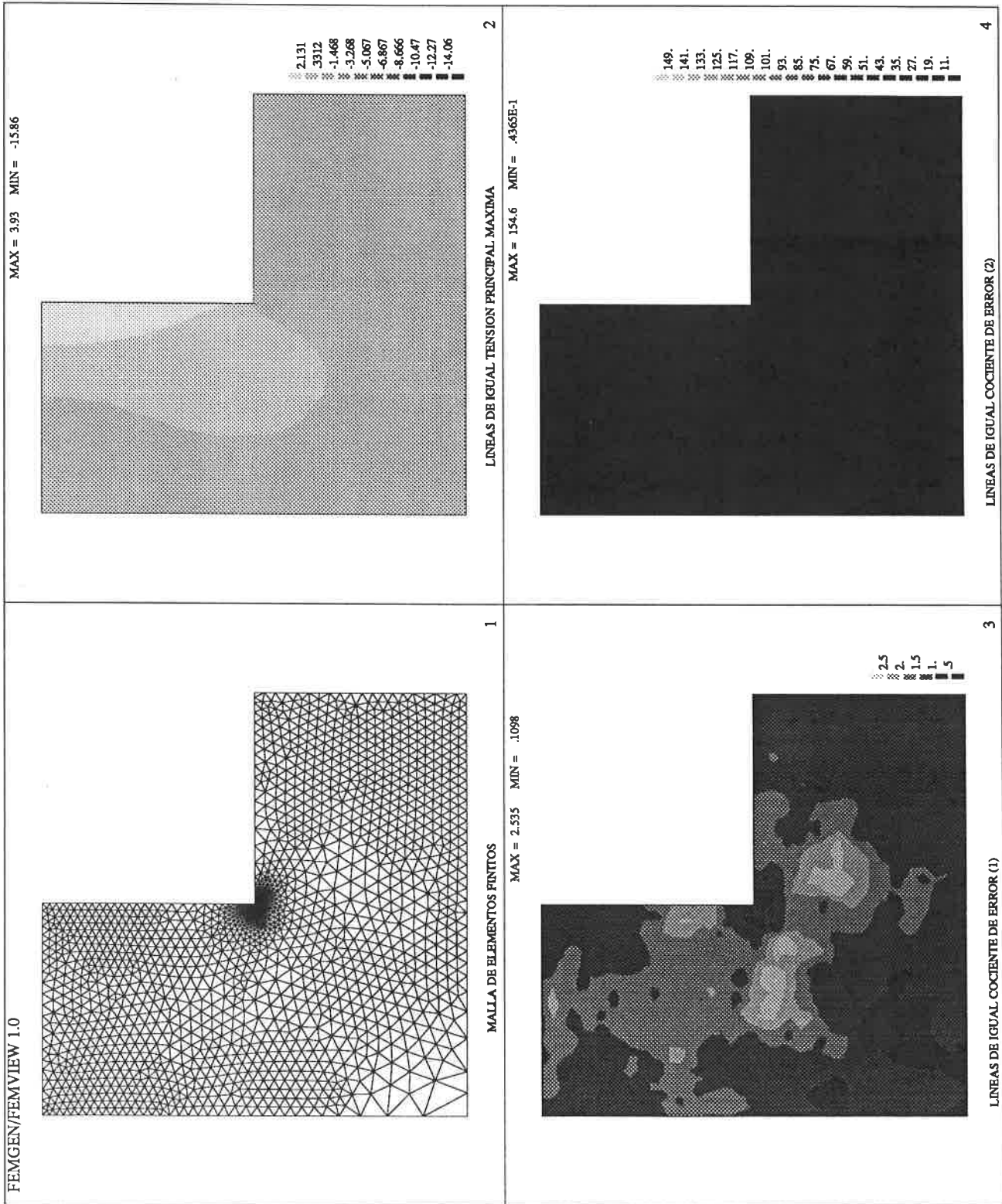


FIGURA 4.51 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

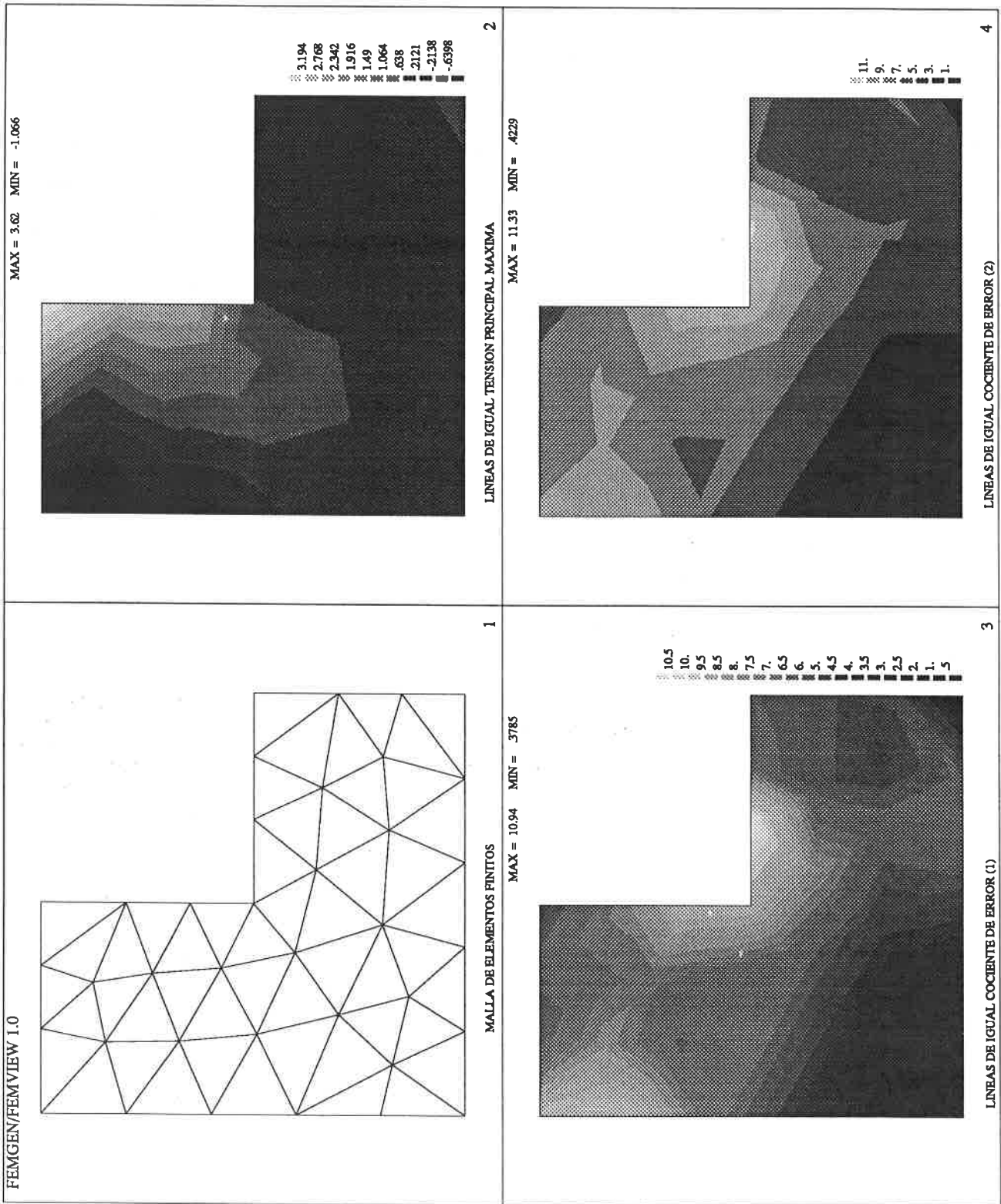


FIGURA 4.52 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

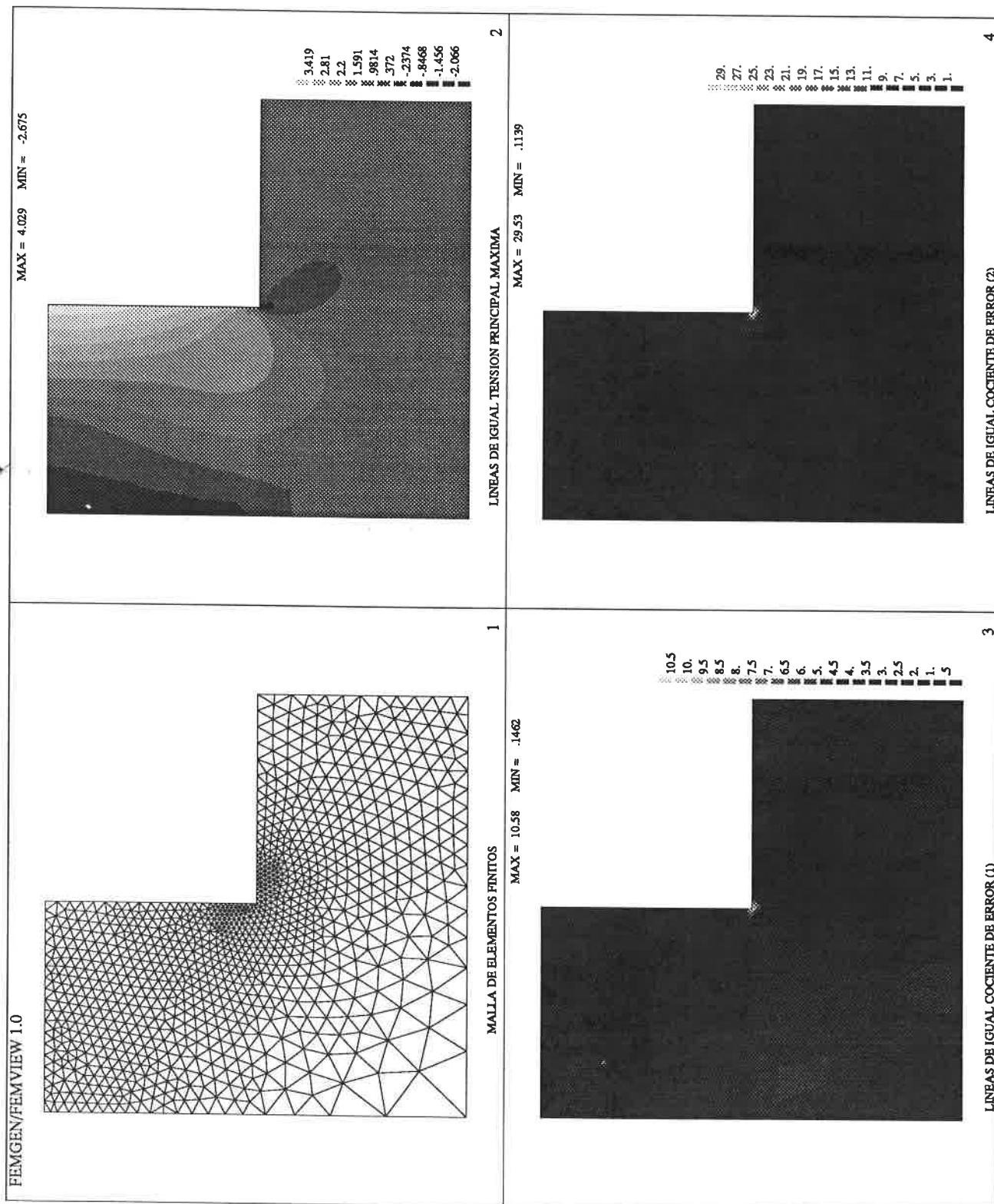


FIGURA 4.53 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

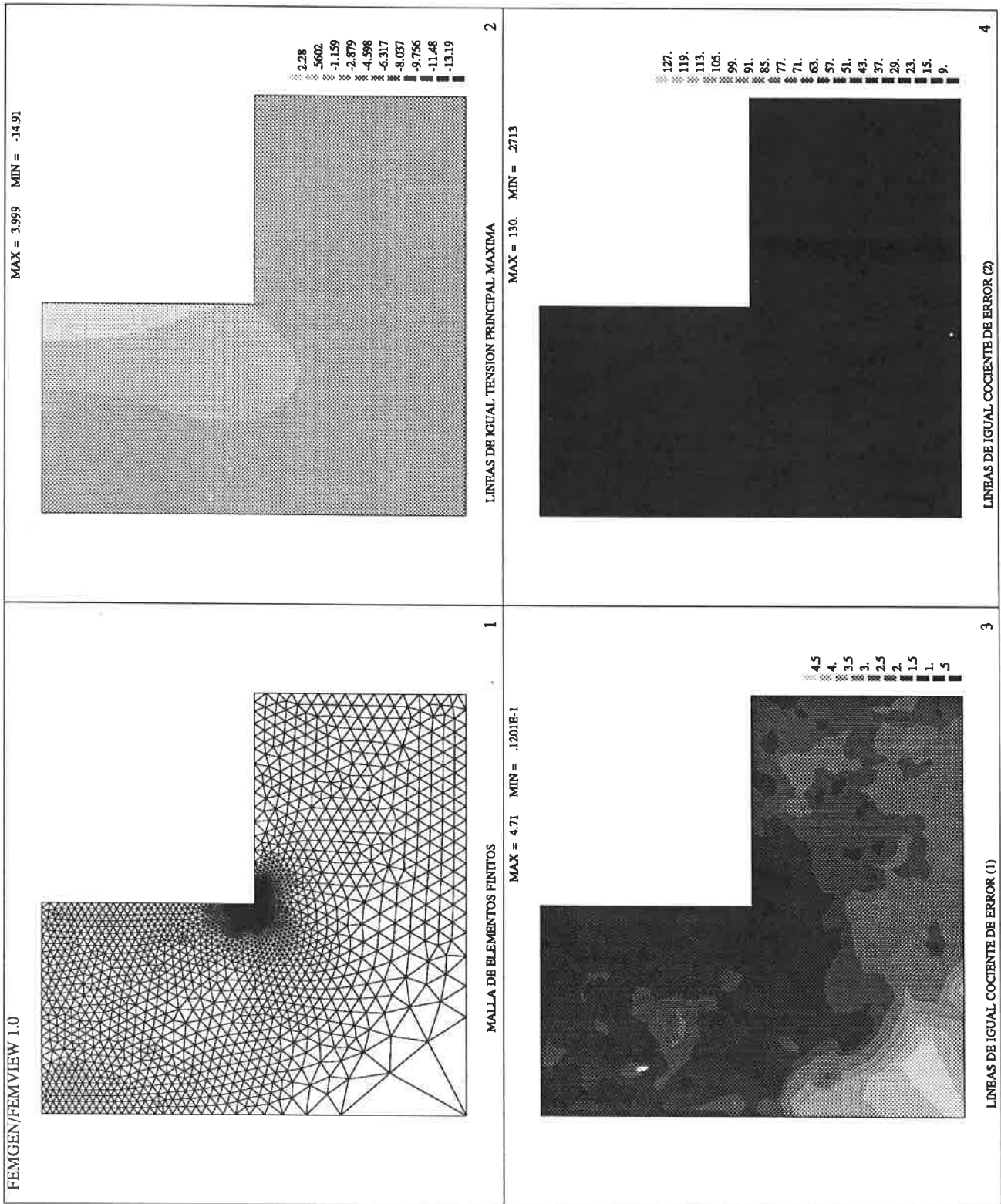


FIGURA 4.54 Dominio en forma de L. Elementos de 3 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

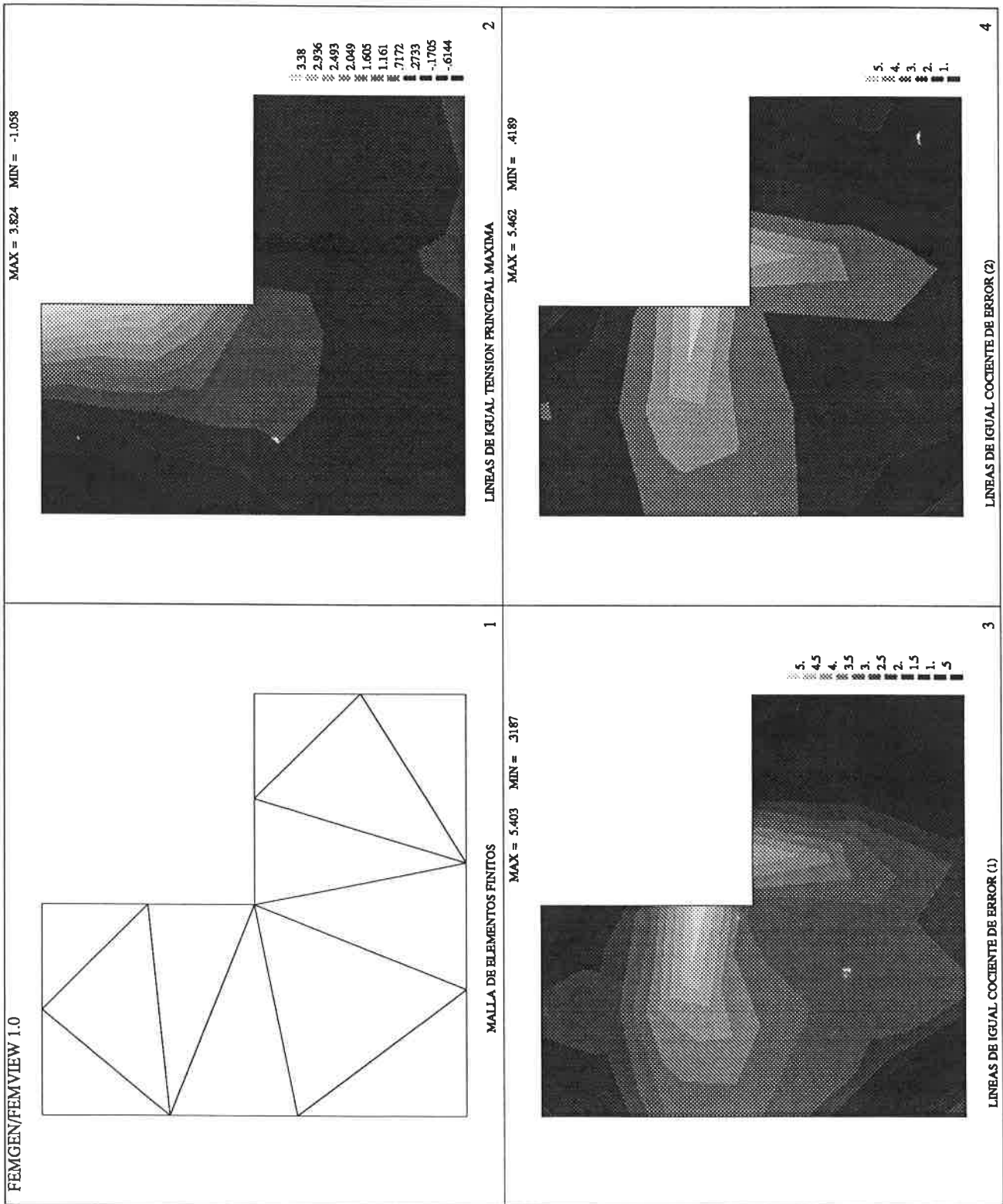


FIGURA 4.55 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 1ª malla.

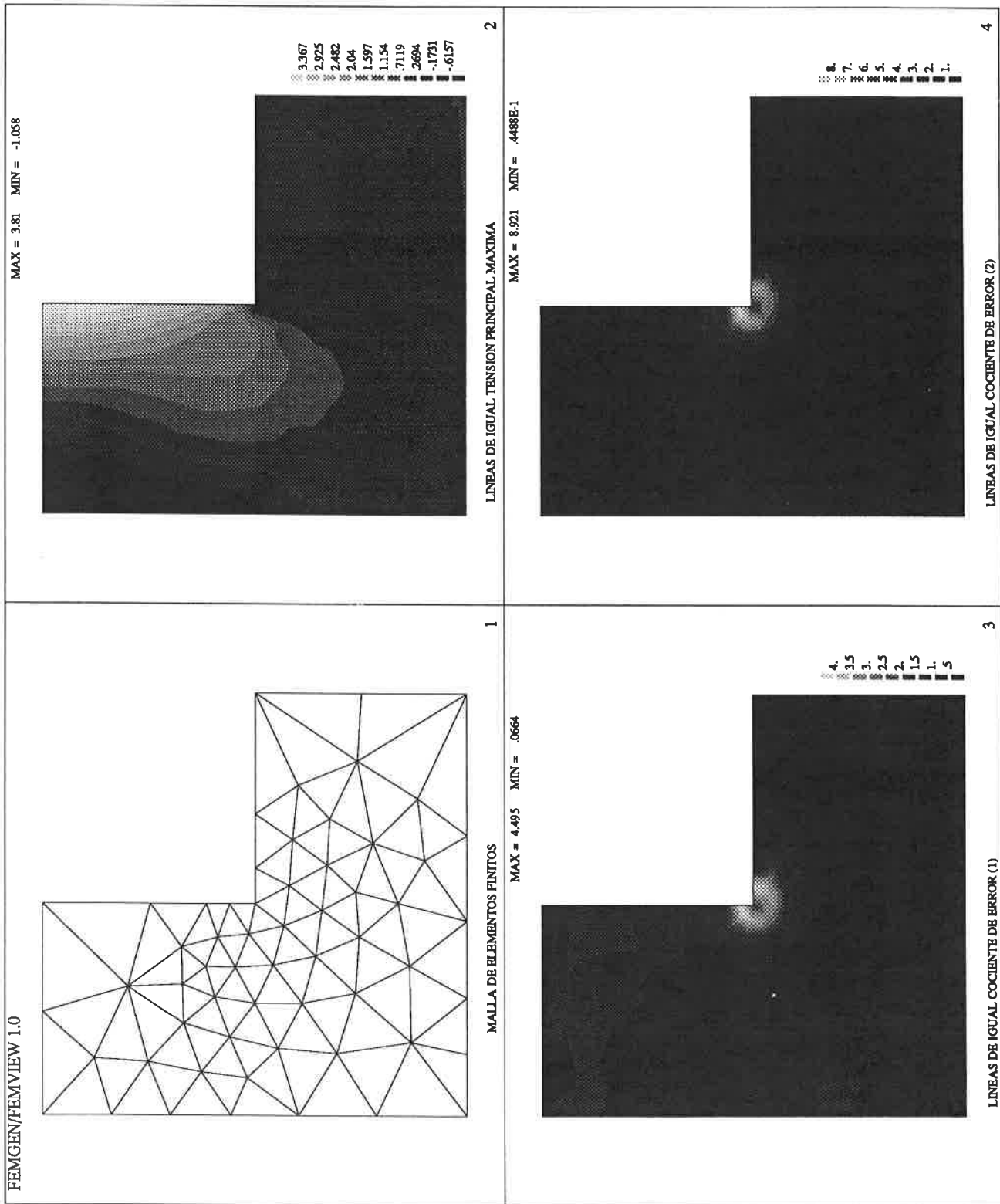


FIGURA 4.56 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 2ª malla.

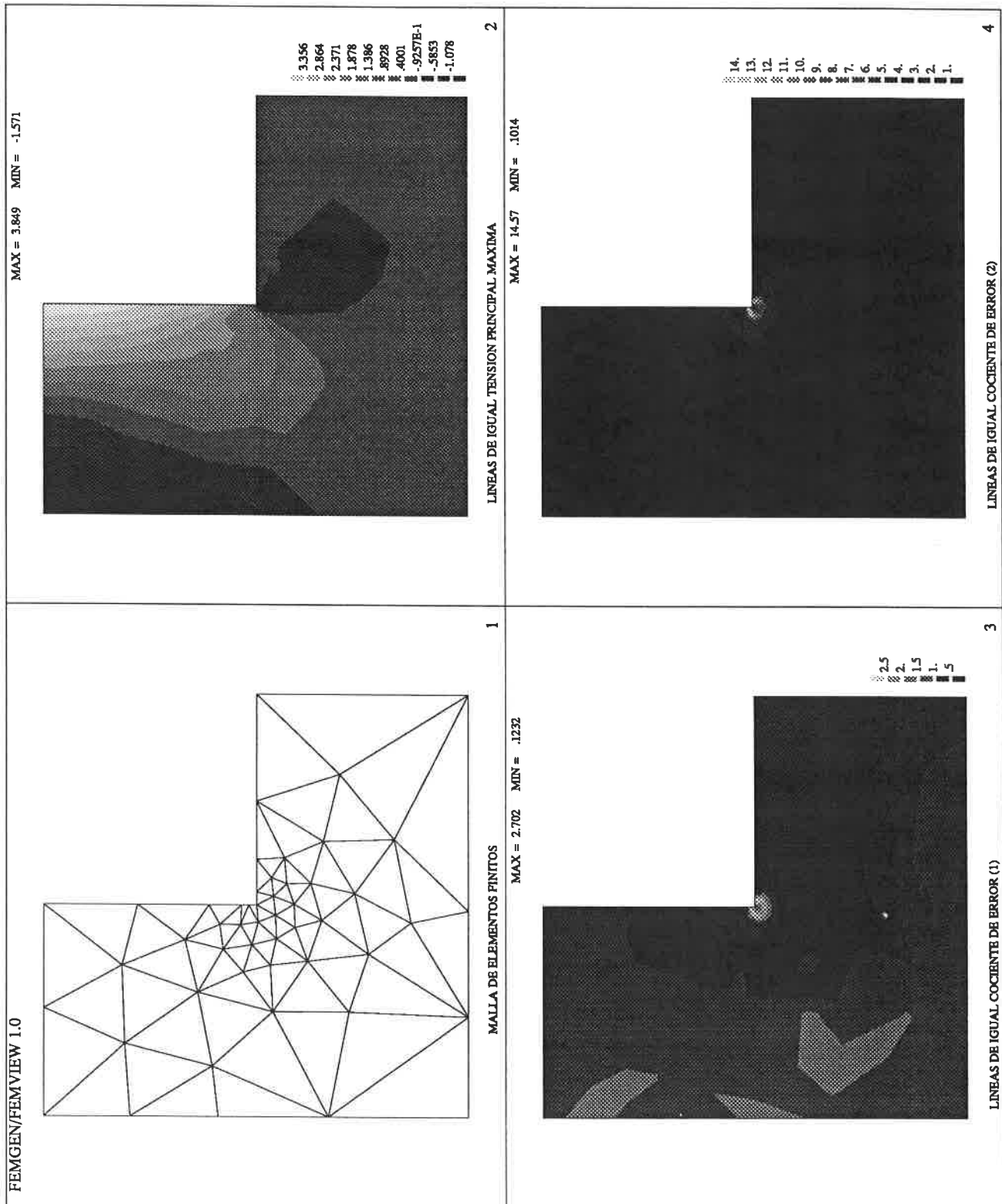


FIGURA 4.57 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 3ª malla.

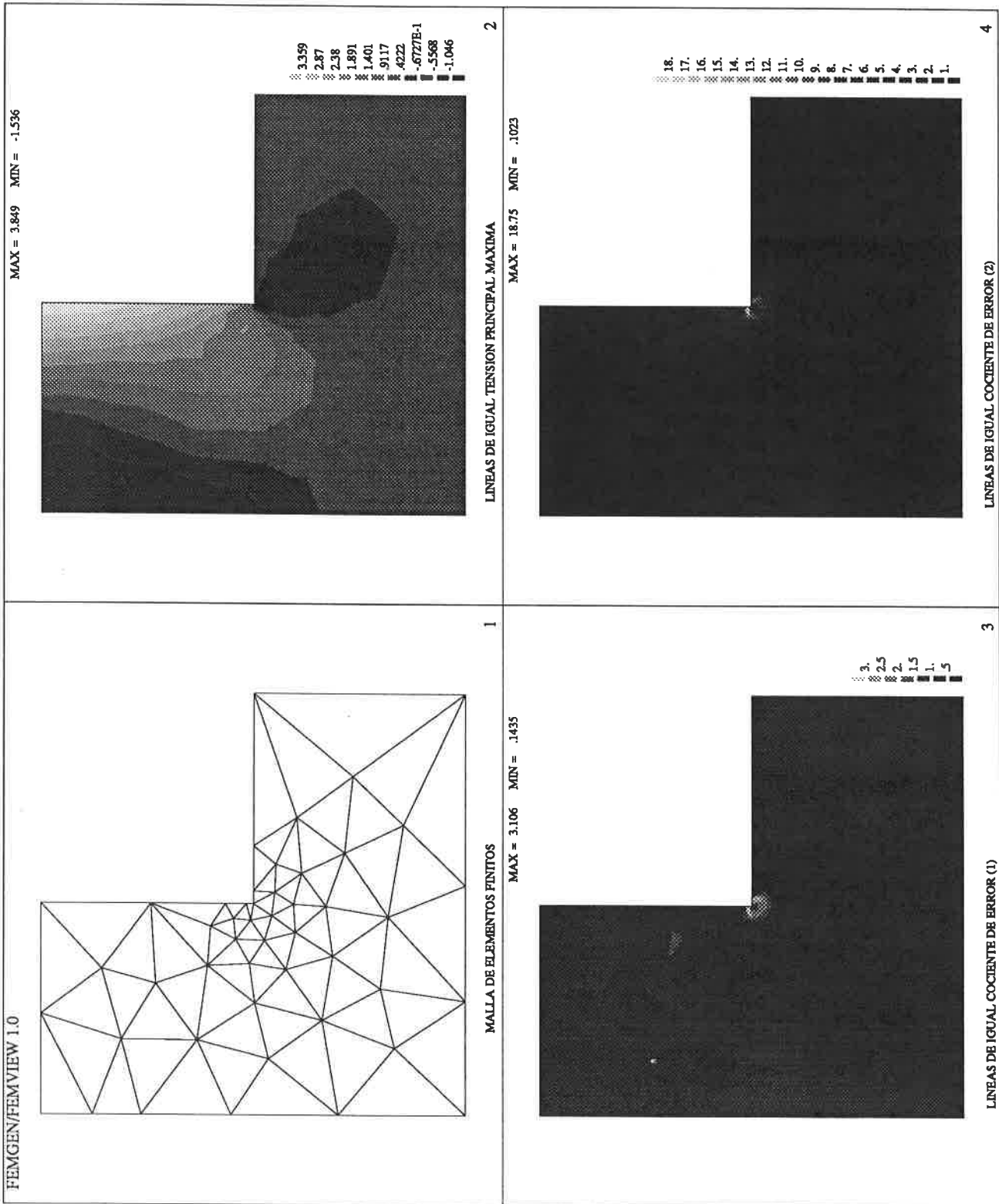


FIGURA 4.58 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 4ª malla.

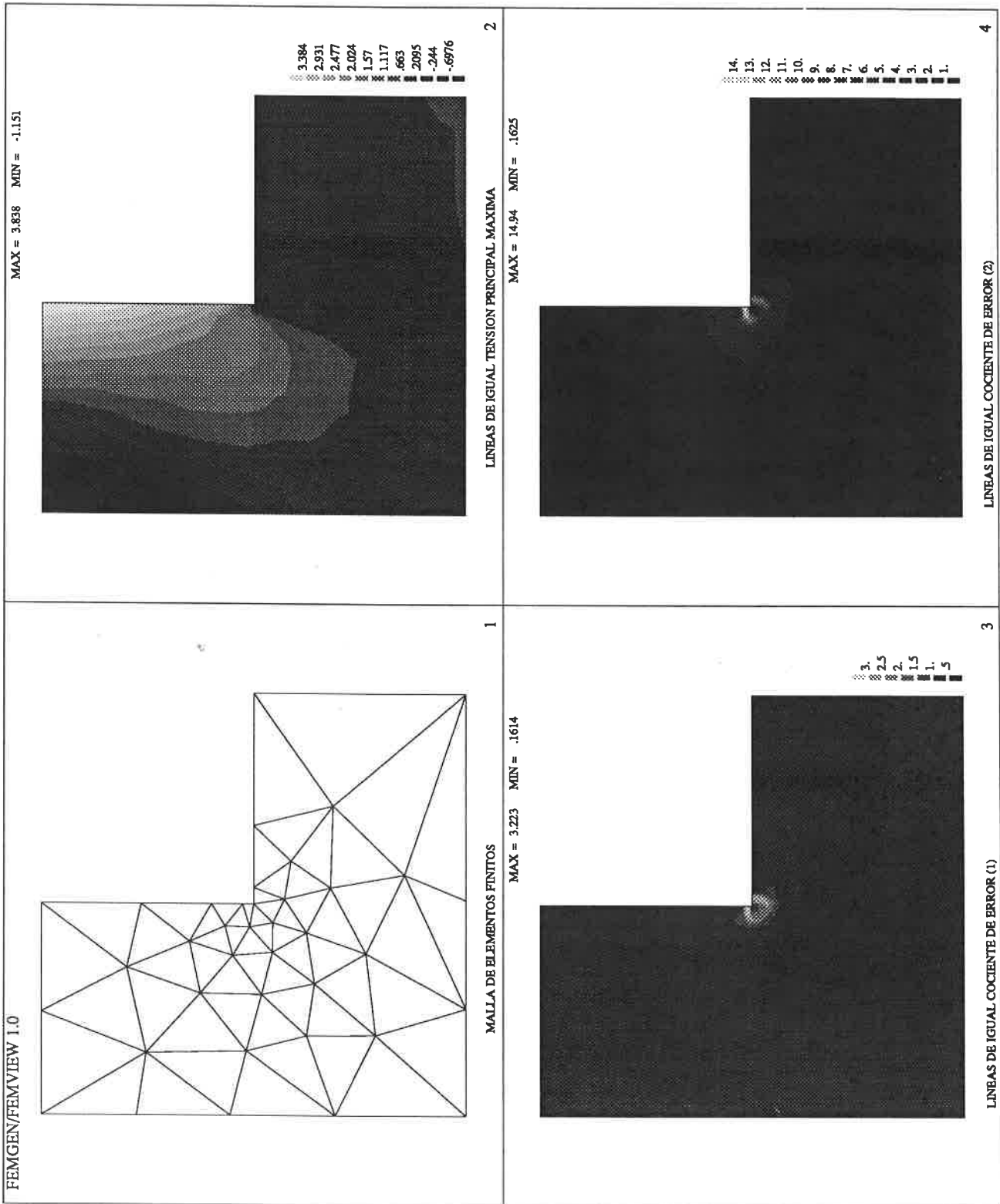


FIGURA 4.59 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad A. 5ª malla.

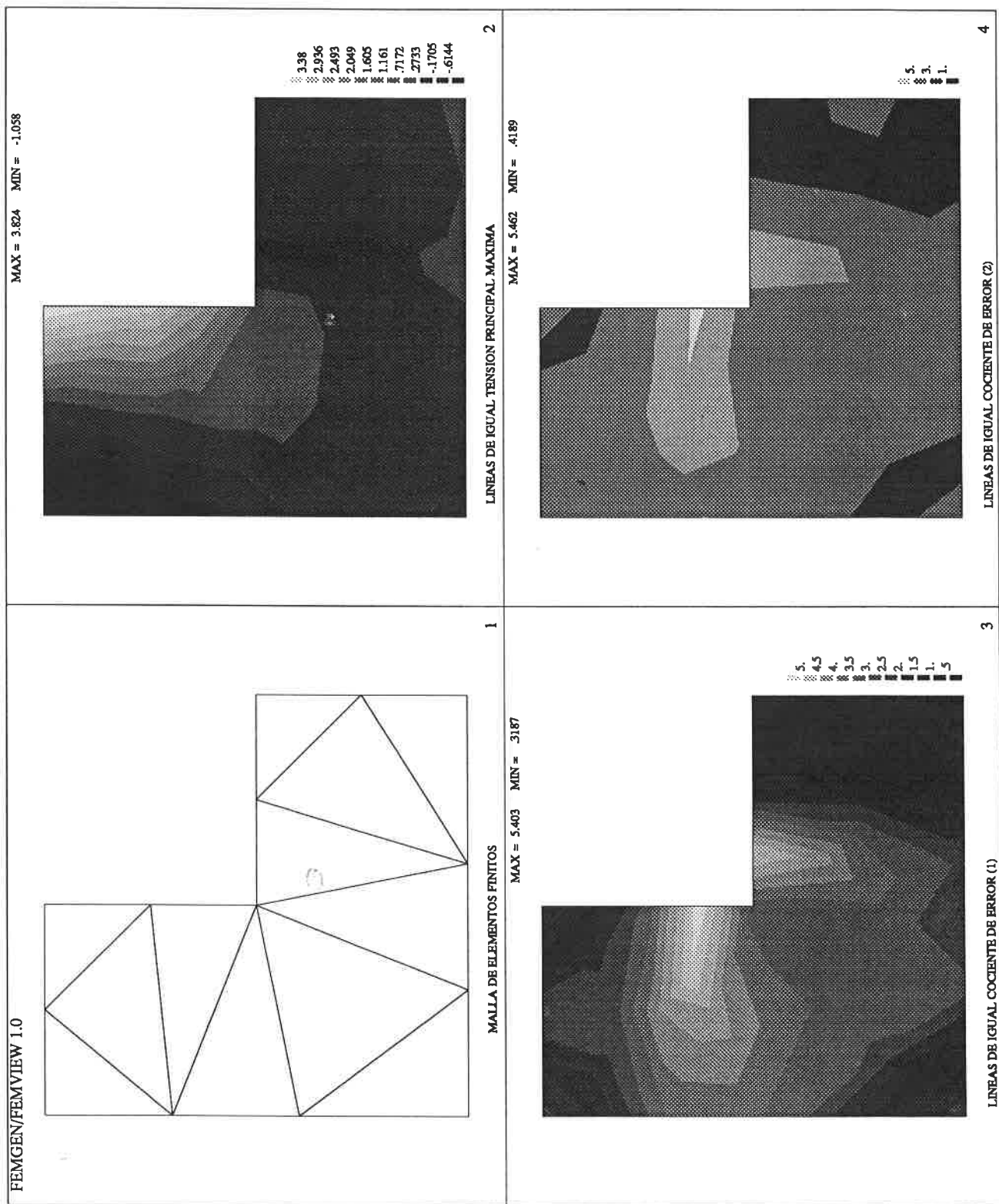


FIGURA 4.60 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 1ª malla.

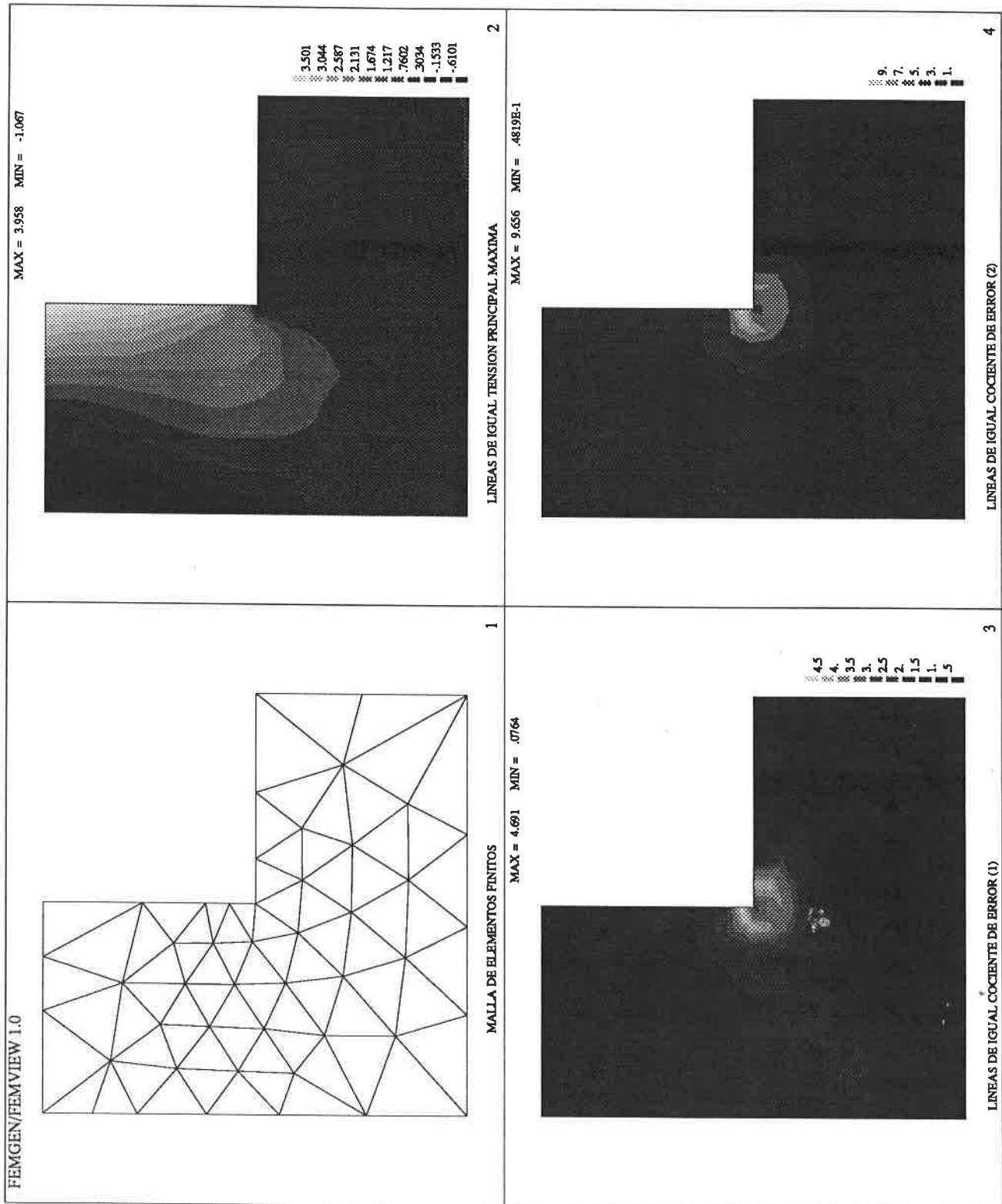


FIGURA 4.61 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 2ª malla.

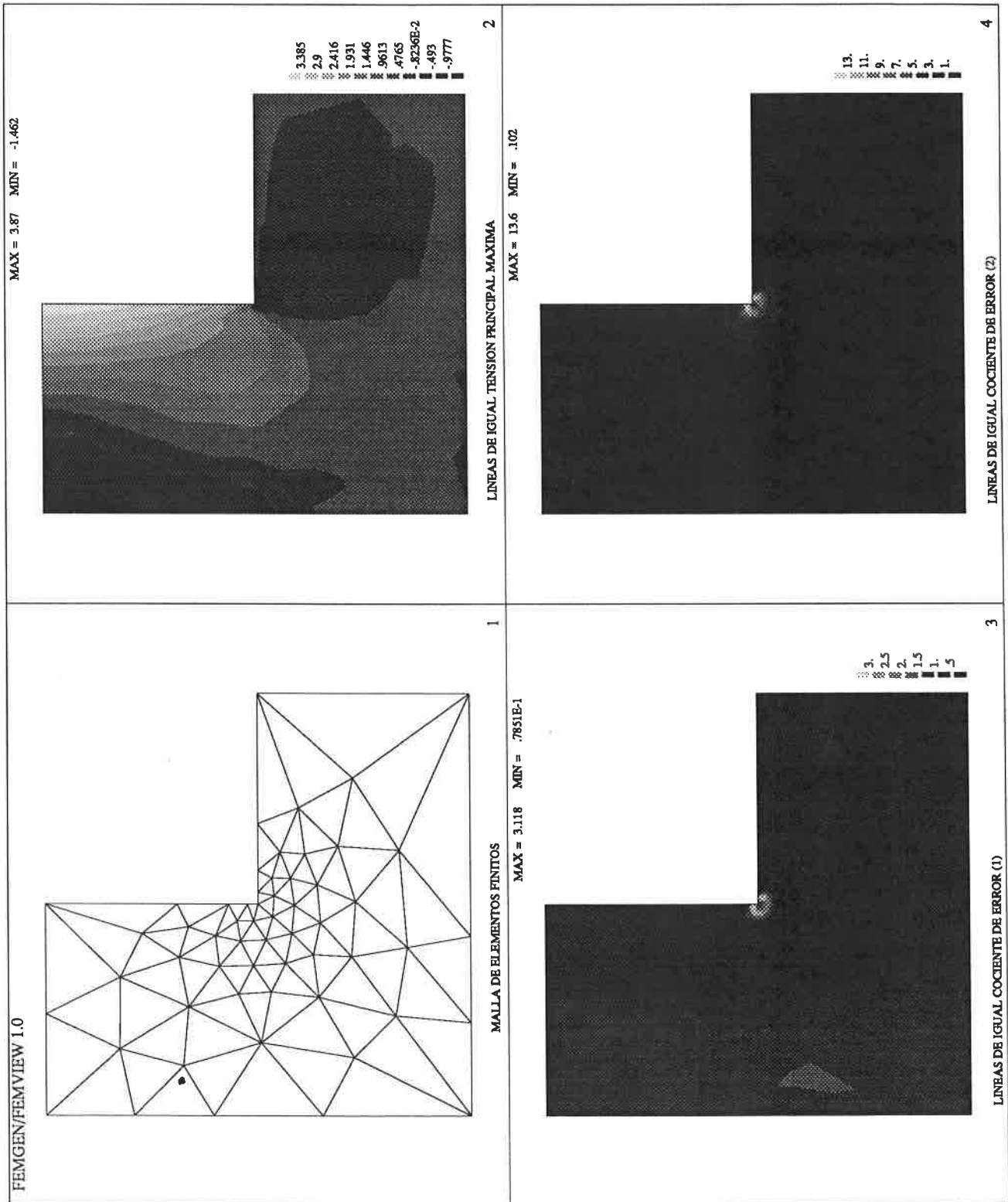


FIGURA 4.62 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 3ª malla.

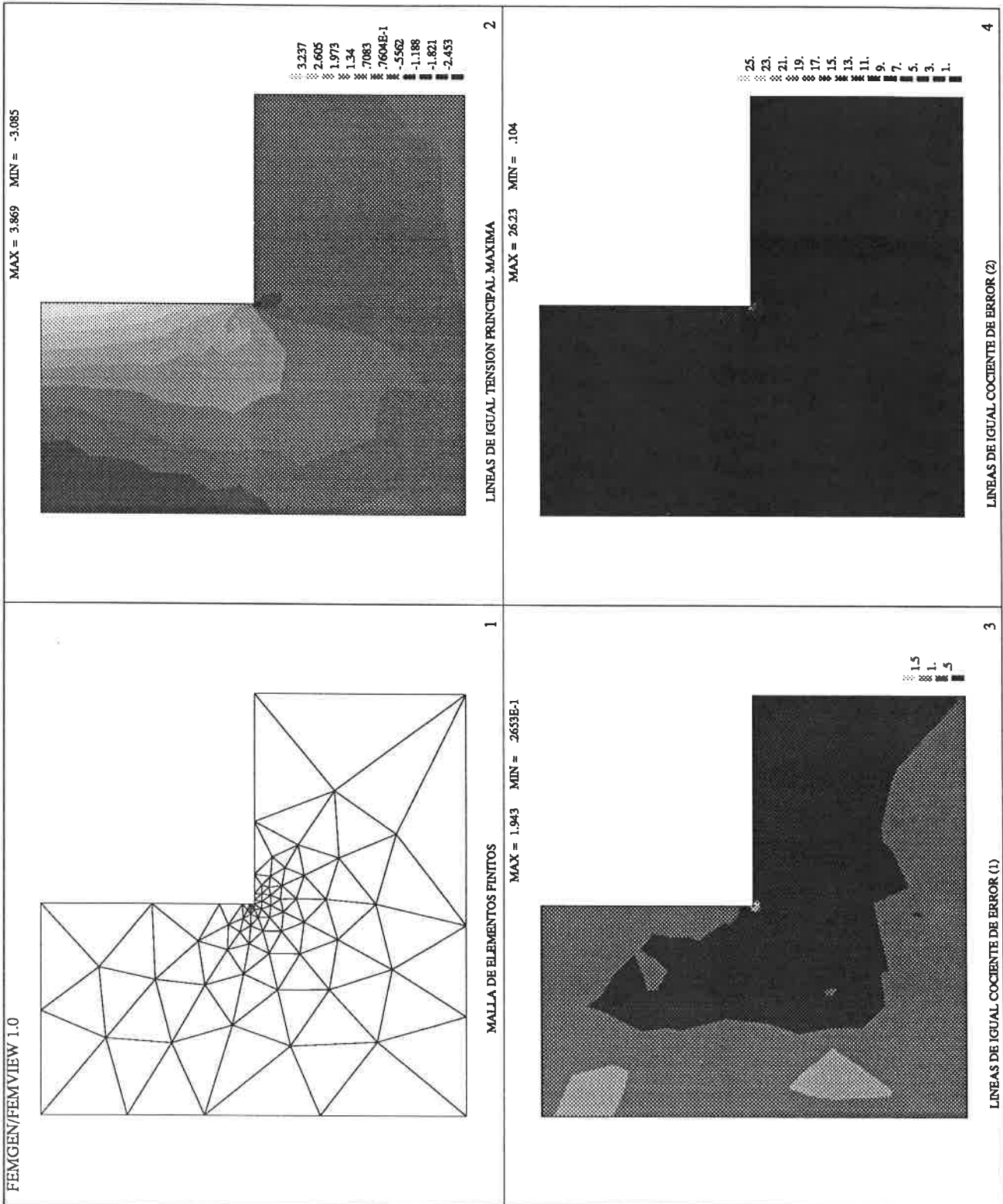


FIGURA 4.63 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 4ª malla.

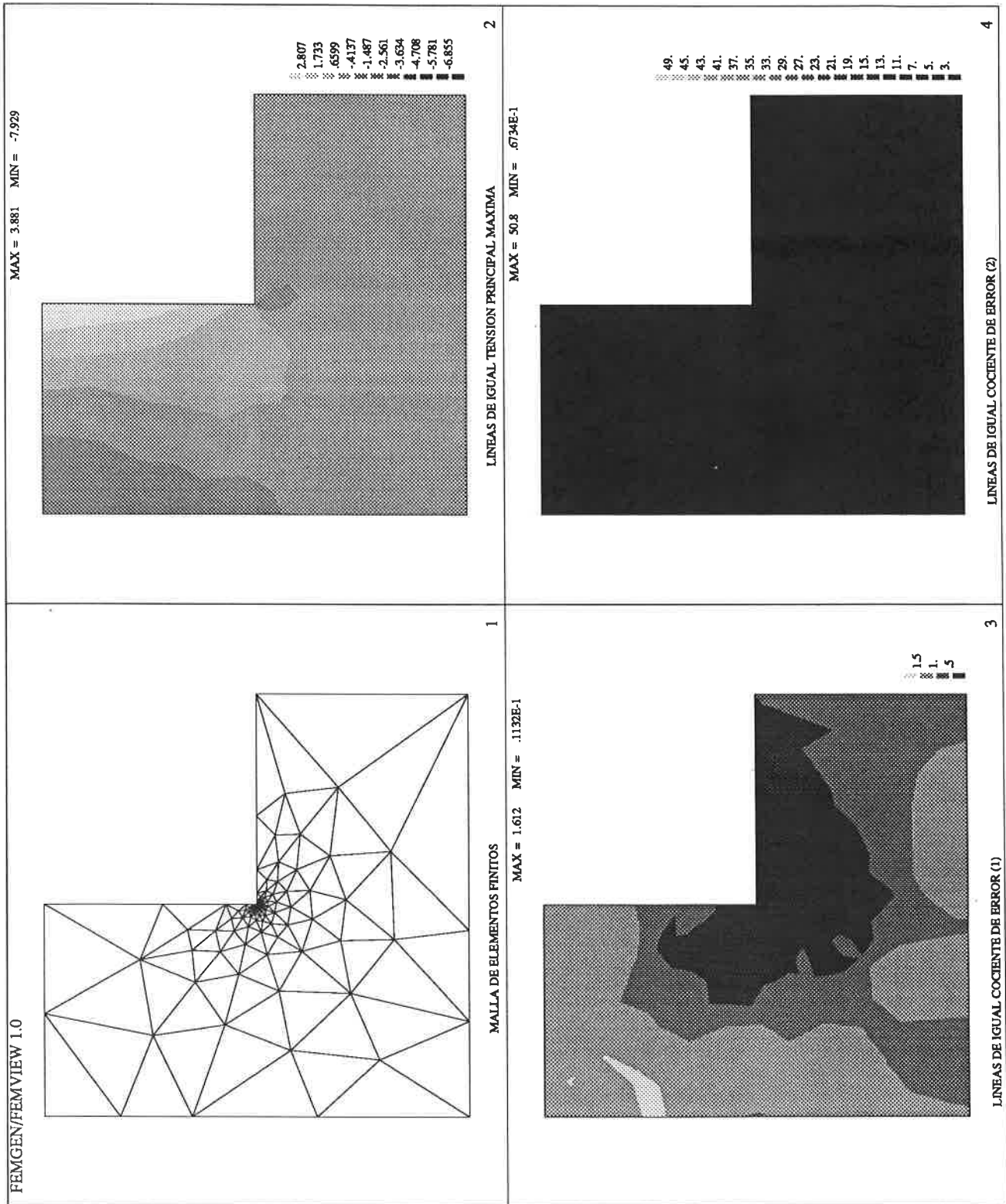


FIGURA 4.64 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Criterio de optimalidad B. 5ª malla.

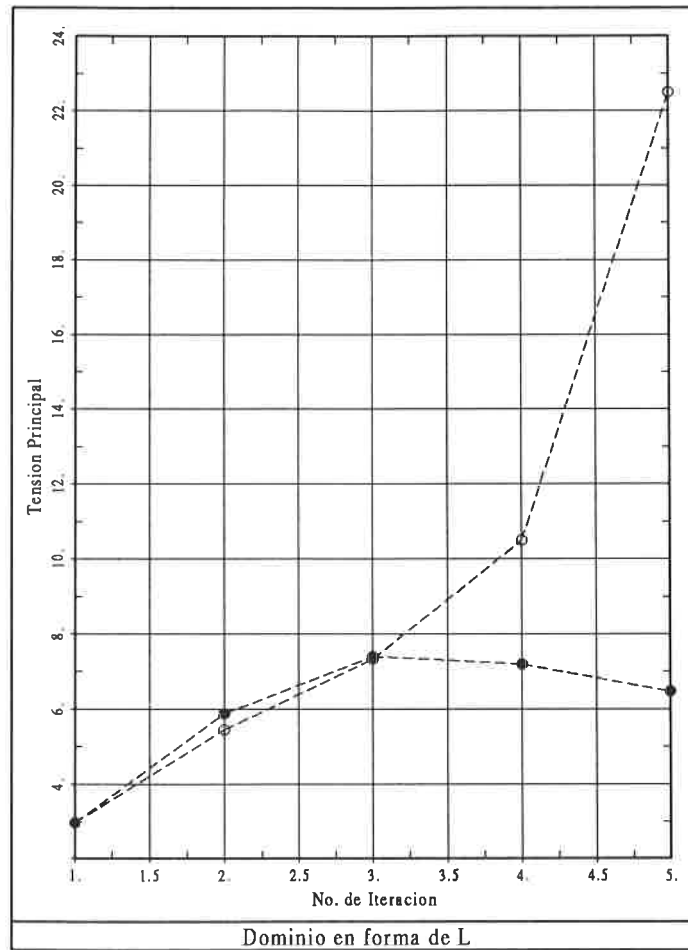


FIGURA 4.65 Dominio en forma de L. Elementos de 6 nodos. Error requerido 5%. Tensiones principales obtenidas en cada iteración.

- Criterio de optimalidad A.
- Criterio de optimalidad B.

CAPÍTULO 5

UTILIZACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DE ERRORES Y DE LA GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS EN PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

5.1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas descritas en los capítulos anteriores son aplicables a problemas en los cuales se pretende conocer el comportamiento de una cierta estructura sometida a una serie de solicitaciones. La definición de un problema de este tipo se realizará en función de la geometría de la misma, las propiedades de los materiales, sus condiciones de vinculación y las cargas a las que se la somete. Toda esta información debe ser conocida de antemano en el momento de realizar el cálculo y por tanto el diseño de la estructura ya debe estar totalmente definido en este momento.

En los procesos de optimización estructural se da un paso más y lo que se pretende es no sólo calcular una determinada estructura, sino también realizar ciertos cambios sobre ella de forma que se consigan mejoras según un determinado criterio. De esta forma el grado de dificultad que presenta la resolución de este tipo de problemas es un grado mayor que los anteriores ya que además de realizar los cálculos convencionales hay que averiguar de que manera se puede modificar un determinado diseño para mejorarlo.

Debido a su mayor complejidad, la optimización estructural no se ha desarrollado al mismo ritmo que el cálculo de estructuras por ordenador. Si bien la utilización de programas de cálculo por elementos finitos ha llegado a ser relativamente corriente dentro del mundo de la ingeniería, la difusión de las técnicas de optimización estructural todavía no ha recibido el impulso suficiente para llegar a ser de uso cotidiano. La razón básica de esta menor difusión es la dificultad tanto teórica como funcional que presentan los procesos de optimización estructural.

La optimización estructural se basa en la descripción de cada diseño en función de una serie de variables a las que se suele denominar variables de diseño.

Éstas suelen estar directamente relacionadas con propiedades geométricas de la estructura (forma, dimensiones, etc.) o bien con propiedades de los materiales empleados (resistencia, características mecánicas, etc.).

Para tener una medida de la calidad de un determinado diseño es necesario definir una función objetivo. Ésta permite comparar varios diseños distintos de forma que el mejor será aquel que proporcione un valor menor para dicha función. De esta manera el problema de optimización se convierte en un problema matemático de minimización [44]. En los problemas de optimización estructural se utilizan funciones objetivo directamente relacionadas con el coste de la estructura. En el caso más sencillo se suele tomar dicha función proporcional al peso total de cada diseño.

Es necesario definir además una serie de restricciones que debe cumplir el diseño final. Estas restricciones pueden obedecer tanto a razones de resistencia (tensiones y desplazamientos máximos) como constructivas (espesores mínimos).

Tanto la función objetivo como las restricciones se pueden expresar, mediante relaciones, más o menos complejas, en función de las variables de diseño. La derivación de estas relaciones constituye el llamado cálculo de sensibilidades a partir del cual se pueden utilizar los algoritmos de optimización [44].

Navarrina [44] presenta una metodología general para la optimización estructural en el diseño asistido por ordenador, basada en la utilización del método de los elementos finitos. En ella se presentan una serie de módulos entre los cuales se reparte todo el trabajo computacional. En este trabajo se presenta una extensión a dicha metodología que resuelve algunos de los puntos que quedaron pendientes en su definición inicial. Para ello se ha incorporado la utilización de una serie de técnicas que permiten una utilización más general de los procesos de optimización estructural. Las aportaciones que se han hecho en este trabajo dentro de la metodología general son las siguientes:

- Una parametrización de diseños suficientemente general para no tener que realizar cambios en un programa de optimización al cambiar la tipología de la estructura. En esta extensión se utiliza la descripción de problemas presentada en el Capítulo 4 para, a continuación, definir sobre ella cuales son las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones.
- Un generador de mallas capaz de generarlas dentro de los dominios definidos según la descripción anterior. La utilización del mismo evita la necesidad de definir para cada tipología la construcción de una malla estructurada que se va moviendo a medida que avanza el proceso de

optimización. De esta forma se puede generar, además, la malla adecuada para cada diseño evitando de esta forma el problema de que una malla definida para calcular un diseño inicial puede no ser apropiada para calcular el diseño final.

- Utilización de un estimador de error para controlar el mismo al calcular cada uno de los diseños obtenidos durante el proceso de optimización estructural. Para ello es necesario el cálculo de las sensibilidades del estimador de error con respecto a las variables de diseño.

En el apartado 5.2 de este capítulo se describen una serie de conceptos y definiciones generales necesarios para definir el problema matemático de minimización. En el apartado 5.3 se describe una metodología general para llevar a cabo procesos de optimización estructural mediante formulaciones totalmente genéricas. Esta descripción sigue las líneas generales presentadas en [44]. En el apartado 5.4 se particulariza la metodología general propuesta a un caso basado en el método de los elementos finitos. Es en este apartado donde se presentan las mayores aportaciones de este trabajo que completan la concepción original presentada en [44].

En un último apartado se presentan diversos ejemplos de la utilización de esta metodología para la resolución de una serie de problemas de optimización estructural.

Por último, se presentan en los anexos B. y C. la obtención general de las expresiones necesarias para efectuar el cálculo de las sensibilidades de las funciones que controlan el funcionamiento del proceso.

No se ha considerado necesario incluir en este capítulo la confección de un estado del arte sobre la optimización estructural y los algoritmos existentes para llevarla a cabo, por existir el trabajo muy reciente de Navarrina [44] donde ya están descritos de una forma magistral.

5.2 ASPECTOS GENERALES Y DEFINICIONES

La optimización estructural se puede plantear como un problema matemático de minimización de una función real de varias variables con restricciones. Este tipo de problemas suele recibir la denominación de problemas de programación matemática [44]. En el caso que nos ocupa se puede describir el problema general de la optimización estructural como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar : } f(\mathbf{x}) & ; \mathbf{x} = \{x_i\} ; i = 1, \dots, n \\ \text{dados : } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_j(\mathbf{x})\} & ; j = 1, \dots, m \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_k(\mathbf{x})\} ; k = 1, \dots, p \\ \text{verificando : } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 ; k = 1, \dots, p \\ & a_i \leq x_i \leq b_i ; i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

El conjunto de variables x_i constituyen lo que antes se ha definido como variables de diseño y las funciones g_j y h_k constituye el conjunto de restricciones que pueden ser de igualdad o en desigualdad. La función $f(\mathbf{x})$ constituye, evidentemente, la función objetivo a minimizar.

Se denomina “espacio de diseño” al espacio n -dimensional formado por las n variables de diseño. Las inecuaciones g_j reciben el nombre de “restricciones en desigualdad”, y las ecuaciones h_k se denominan “restricciones en igualdad”. Las desigualdades que forman el último conjunto de condiciones de la ecuación (5.2.1) reciben el nombre de “restricciones laterales”.

Un punto cualquiera \mathbf{x} del espacio de diseño se dice “factible” si en él se verifican todas las restricciones impuestas y “no factible” en caso contrario. Se llama “región factible” al subconjunto de puntos factibles dentro del espacio de diseño. Asimismo, al diseño definido por el punto \mathbf{x} se le llamará también factible o no factible en función de si cumple o no todas las restricciones impuestas sobre él en (5.2.1).

Una restricción en desigualdad no violada en un punto \mathbf{x} se dice activa si se cumple estrictamente la relación de igualdad, e inactiva en caso contrario. En el caso de que el punto \mathbf{x} sea no factible a las restricciones que no se cumplan se les llama “violadas”.

Una variable de diseño x_i se dice “libre” si su valor se encuentra dentro del rango de variación admitido en las últimas condiciones de (5.2.1). Por contra, la

variable se dice “fija” si su valor coincide estrictamente con uno de los extremos del intervalo de variación.

Una restricción en igualdad se puede convertir en un conjunto equivalente de dos restricciones en desigualdad. Para ello basta hacer la conversión:

$$h(\mathbf{x}) = 0 \iff \begin{cases} h(\mathbf{x}) \leq 0 \\ -h(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Mediante la expresión anterior puede convertirse el problema definido en (5.2.1) en otro totalmente equivalente donde únicamente existirán restricciones en desigualdad. Ese nuevo problema se podrá definir utilizando el siguiente grupo de expresiones:

$$\begin{cases} \text{minimizar : } f(\mathbf{x}) & ; \mathbf{x} = \{x_i\} ; i = 1, \dots, n \\ \text{dados : } & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_j(\mathbf{x})\} & ; j = 1, \dots, m \\ \text{verificando : } & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ & a_i \leq x_i \leq b_i & ; i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Un punto factible se dirá “mínimo local” o “mínimo relativo” del problema general planteado en (5.2.1) o en (5.2.3) si en un cierto entorno alrededor del mismo la función objetivo alcanza su valor mínimo en dicho punto. Además, un mínimo local será además un “mínimo global” u “óptimo” si en él la función objetivo toma un valor inferior al de cualquier otro punto factible.

En general no es sencillo probar la existencia y unicidad de la solución para un problema como el de las expresiones (5.2.1) o (5.2.3). Normalmente es preciso utilizar métodos iterativos para abordar el cálculo de la misma y, en general, este tipo de procedimientos sólo proporcionan mínimos locales. Por ello siempre existe la incertidumbre de si la solución obtenida constituye realmente la solución al problema planteado o únicamente un mínimo local.

Se han desarrollado numerosos algoritmos para la resolución de las expresiones descritas la mayor parte de los cuales basan su funcionamiento sobre ciertas hipótesis acerca de la “convexidad” del problema planteado [44]. El problema de optimización se dice convexo si se cumple que la región factible es convexa y además la función objetivo también lo es. La convexidad tanto de un conjunto como de una función se definen como sigue:

- Un conjunto $A \subset R^n$ se dice convexo si se verifica:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A \text{ y } \forall t \in [0,1] \text{ se cumple:} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\} \subset A \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

- Una función $f(\mathbf{x})$ se dice convexa en un conjunto convexo A si se verifica:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A \text{ y } \forall t \in [0,1] \text{ se cumple:} \\ f(\mathbf{x}) \leq (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) \\ \text{donde } \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

El concepto de convexidad adquiere una importancia fundamental en el ámbito de la programación matemática ya que las demostraciones de existencia y unicidad de la solución para los problemas planteados, así como los algoritmos utilizables para obtenerla son, en la mayor parte de los casos, válidos para problemas exclusivamente convexos ^[44].

La descripción de los algoritmos existentes en la actualidad para resolver los problemas de programación matemática excede del planteamiento de este trabajo. Para una extensa información sobre este tema se recomienda acudir a la referencia ^[44]. No obstante, en el apartado 5.4.4. se describe en detalle el algoritmo que se ha utilizado en este trabajo.

5.3 ESTRUCTURACIÓN DEL PROCESO DE DISEÑO ÓPTIMO

Un proceso general de optimización está formado por una serie de etapas que se suceden hasta llegar a un resultado final. Estas etapas son siempre las mismas sea cual sea el procedimiento de optimización, tanto si éste se realiza con la ayuda de un ordenador como si se realiza por otros métodos.

Desde un punto de vista operativo los procesos de diseño óptimo se pueden estructurar en cinco niveles diferenciados:

1. Formulación técnica de objetivos.
2. Modelado y parametrización de diseños.
3. Cálculo.
4. Mejora del diseño.
5. Descripción del diseño y de su comportamiento.

A continuación se describe el cometido de cada uno de los cinco niveles mencionados.

5.3.1 Formulación técnica de objetivos

Esta fase del proceso ocurre después de un análisis previo en el cual se ha detectado la necesidad de disponer de un determinado objeto. Esta fase corresponde a la definición de los objetivos que debe cumplir el objeto a diseñar y de los requisitos que debe satisfacer. En esta fase se definen los cometidos que debe cumplir el diseño y cual debe ser su respuesta frente a una serie de solicitudes para cumplir con los objetivos propuestos.

Es en este nivel cuando se definen exactamente los criterios de preferencia que decidirán cual es el diseño óptimo. Dichos criterios, expresados en forma matemática, son lo que previamente se ha denominado como función objetivo. Los criterios mencionados pueden ser de índole muy diversa y su planteamiento puede corresponder a aspectos tanto económicos como estéticos, sociales, etc.

La formulación de estos criterios u objetivos a satisfacer se realizará en función de una serie de variables de control (dimensiones, volumen, peso, coste, tensiones, deformaciones, desplazamientos, temperaturas, etc.) que serán los indicadores del funcionamiento de cada diseño.

Asimismo también deben definirse en esta fase los requisitos que debe cumplir el objeto a diseñar. Éstos pueden ser de tipo geométrico, constructivo, tensional, deformacional, etc. La formulación de los mismos se hará también en función de las variables de control mencionadas en el párrafo anterior y constituirán las restricciones aplicadas al problema de optimización.

5.3.2 Modelado y parametrización del diseño

Este nivel consiste en la elaboración de un modelo de diseño. Para ello se genera lo que se denomina un modelo de parametrización el cual está formado por una serie de parámetros que serán las constantes y las variables de diseño. Mediante el modelo de parametrización será posible definir totalmente las características de cada diseño (geometría, propiedades de materiales, acciones externas, etc.) a partir de los valores de dichos parámetros. La adopción de un cierto valor para una de las variables de diseño se traducirá, por tanto, en la generación de un determinado diseño.

Las constantes de diseño se utilizan únicamente a efectos de definir la parametrización del diseño, pero su valor no se alterará durante todo el proceso de optimización. Sí cambiarán, en cambio, los valores de las variables de diseño y el proceso de optimización consistirá precisamente en hallar el conjunto de valores de las mismas que produzcan el mejor de los diseños posibles según los criterios mencionados en la formulación de objetivos.

5.3.3 Cálculo

A partir de la definición del diseño obtenida con el modelo de parametrización es posible generar un modelo de cálculo para determinar su comportamiento. En este nivel se realiza un análisis para determinar el valor

de las variables de control. Éstas son las que se utilizarán para comprobar la bondad de cada diseño en función de los criterios definidos en el primer nivel. La realización del cálculo es necesaria para comprobar si una cierta configuración es o no admisible y hasta que punto es satisfactoria.

Este nivel se encarga también de proporcionar la información necesaria para tomar posteriormente decisiones sobre como modificar un diseño para mejorarlo. Desde un punto de vista matemático, esto constituye el llamado cálculo de sensibilidades.

5.3.4 Mejora del diseño

El cuarto nivel utiliza la información obtenida mediante el análisis de sensibilidad para realizar una toma de decisiones que permitirá, ya sea modificar la configuración del diseño de forma que se produzcan mejoras, o bien finalizar el proceso. Éste terminará cuando se haya obtenido un diseño suficientemente satisfactorio en función de los criterios definidos, en cuyo caso se pasará a efectuar las operaciones involucradas en el último nivel.

En ocasiones ocurrirá que no es posible obtener un diseño que satisfaga simultáneamente todas las condiciones impuestas. En este último caso el proceso finalizará sin proporcionar una solución adecuada a los requisitos exigidos.

5.3.5 Descripción del diseño y su comportamiento

Este nivel corresponde a la descripción tanto del diseño final como de su comportamiento. Esta descripción debe servir, no sólo para que el diseñador conozca cuales son las características del diseño obtenido, sino también para generar a partir de ella todos los elementos necesarios para su construcción.

En ocasiones, a la vista del resultado final del proceso puede ocurrir que éste no sea totalmente satisfactorio debido a que los criterios y requisitos empleados en su elaboración no sean totalmente adecuados. En ese caso se

deben tomar decisiones acerca de su modificación para repetir el proceso y obtener un mejor resultado final.

Todos los niveles anteriores necesitan normalmente de la interacción con el diseñador el cual será quien, en último término, aceptará o no los resultados generados en cada uno de ellos. Aunque el desarrollo de los métodos numéricos permiten automatizar en gran medida todo el proceso de optimización debe ser el ingeniero quien, a partir de su experiencia y de sus conocimientos técnicos, determine si el resultado final del mismo cumple con todas las expectativas depositadas sobre el proyecto que se está realizando.

5.4 METODOLOGÍA PROPUESTA PARA PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL UTILIZANDO LAS TÉCNICAS DE GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS Y CONTROL DE ERRORES

En el apartado 5.3 se ha descrito una estructura general para los procesos de optimización que es válida sean cuales sean el objeto a diseñar y las técnicas utilizadas para ello. En este apartado se va a concretar la estructuración anterior al caso en que el objeto a optimizar sea una estructura de tipo continuo (pieza mecánica simple, componente estructural o estructura completa) y además el cálculo de la respuesta estructural se realice por el método de los elementos finitos.

La elección del método de los elementos finitos como modelo numérico para resolver este tipo de problemas responde a la necesidad de poder abarcar el mayor número posible de situaciones. Dicho método permite el cálculo de estructuras con tipologías muy diversas por lo que su ámbito de aplicación es enorme [16][30][76].

El diseño de las estructuras se hace normalmente para que éstas cumplan una serie de requisitos en régimen de servicio. Una vez que éste está ya totalmente definido se realiza una comprobación a rotura para prever cual sería el comportamiento del mismo frente a situaciones extraordinarias. Dado que los niveles de tensión y deformación que se dan en régimen de servicio son relativamente bajos, su comportamiento se puede modelar con bastante exactitud suponiendo que el material es elástico y lineal. Por ello éste es el modelo de cálculo que se ha adoptado en este trabajo.

Dada la magnitud del cálculo, todo el proceso de optimización se basará en la utilización de programas de ordenador que permitan realizar todas las funciones correspondientes a los cinco niveles anteriormente descritos. A cada uno de ellos corresponderá un módulo de programación.

Además de los módulos correspondientes a cada nivel será necesario un módulo de control para controlar el flujo de información entre todos ellos y el funcionamiento coordinado de los mismos. Por tanto, la estructura de un proceso de diseño de este tipo se puede describir a partir de los módulos siguientes:

- Módulo de Definición de Objetivos y Restricciones.
- Módulo de Parametrización.

- Módulo de Cálculo.
- Módulo de Decisión.
- Módulo de Postproceso.
- Módulo de Control del Sistema.

Además de los módulos anteriores será necesario disponer de una serie de interfaces para transportar información entre ellos. Estas interfaces estarán también controladas por el Módulo de Control.

A continuación se hace una descripción detallada del cometido de cada uno de estos módulos.

5.4.1 Módulo de Definición de Objetivos y Restricciones

En este módulo se calculan los valores tanto de la función objetivo como de las restricciones impuestas sobre los diseños. Todas estas funciones estarán definidas sobre una serie de variables de control cuyo valor se calculará a partir de la información que proporciona el Módulo de Cálculo a través de una interface de definición.

Las restricciones que normalmente se imponen en los procesos de optimización estructural pueden clasificarse en los siguientes grupos:

- Restricciones sobre las variables de diseño.
- Restricciones geométricas.
- Restricciones sobre el estado deformacional.
- Restricciones sobre el estado tensional.
- Restricciones sobre las condiciones de vinculación.

Las funciones objetivo que se pueden utilizar pueden ser de índole muy diversa aunque normalmente están relacionadas con el coste de la estructura.

Así, es muy frecuente utilizar un criterio de mínimo peso ya que éste constituye en muchas ocasiones un claro indicador del coste de cada diseño [44]. También es usual utilizar una función de coste que puede obtenerse multiplicando el volumen de cada componente de la estructura por su precio unitario.

Otros criterios menos extendidos son aquellos en que se intenta minimizar el valor máximo que alcanza una tensión de comparación (Von Mises, Tresca, etc.) en todos los puntos de la estructura o bien minimizar la concentración de tensiones en secciones fuertemente solicitadas de las estructuras.

No existe hasta el momento ninguna forma general de expresar matemáticamente criterios tales como la estética o el interés social de una determinada estructura. Por ello es muy difícil incluir los mismos dentro de la definición matemática de los procesos de optimización estructural y no se conocen trabajos sobre ello.

Las restricciones sobre las variables de diseño constituyen lo que en el apartado 5.2 se define como restricciones laterales y simplemente limitan los valores máximo y mínimo de dichas variables.

Las restricciones geométricas serán funciones sencillas de las variables de diseño. Ejemplos típicos de este tipo de restricciones pueden ser limitaciones sobre ciertas dimensiones como el ancho, el alto, el espesor, la distancia entre dos puntos, etc. Estas expresiones estarán determinadas por el Módulo de Parametrización.

Las restricciones sobre el estado deformacional estarán definidas normalmente sobre los desplazamientos de una serie de puntos de la estructura bajo ciertos estados de carga.

Las restricciones sobre el estado tensional se expresarán en función de las componentes del tensor de tensiones o de sus invariantes. Es normal imponer condiciones sobre las tensiones principales, tensiones en una determinada dirección o tensiones de comparación correspondientes a diversos criterios de rotura (Tresca, Von Mises, etc.). En cualquiera de estos casos las expresiones de las restricciones serán funciones sencillas de las componentes del tensor de tensiones y por tanto la evaluación de las mismas así como la de sus sensibilidades se realizará respectivamente a partir de las mencionadas componentes y sus sensibilidades obtenidas mediante el Módulo de Cálculo.

Al utilizar el método de los elementos finitos los valores más aproximados de las tensiones se obtienen en los puntos de integración de una cuadratura de Gauss [16][30][76]. Por otro lado, es un hecho conocido que los valores máximos

de las tensiones suelen producirse en puntos situados sobre el contorno de las estructuras por lo que resulta conveniente imponer restricciones sobre las mismas en dichos puntos. Para obtener valores tensionales en puntos que no sean los de integración es necesario realizar previamente un alisado de las tensiones para extrapolar sus valores a puntos del contorno.

La imposición de restricciones sobre las tensiones en puntos del contorno representa por tanto no sólo el cálculo de unas tensiones alisadas sino también el de la sensibilidad del alisamiento. Aunque este cálculo representa un pequeño coste adicional hay que tener en cuenta que la información que se obtiene de él se aplicará también en la evaluación del estimador de error, aspecto que se comentará en el apartado 5.4.3, y en las tareas de postproceso. Por ello este pequeño sobreprecio queda ampliamente compensado por las nuevas posibilidades de utilización que se obtienen. El cálculo de la sensibilidad del alisamiento se describirá en el apartado 5.4.3, al comentar la introducción de la estimación de errores dentro de estos procesos.

En la metodología que se está describiendo se utiliza un generador de mallas no estructuradas para construir una malla apropiada para cada diseño. Esto significa que la topología y la forma de la misma será distinta para cada uno de ellos y por lo tanto la posición de los puntos de integración utilizados en una malla no se corresponderá con los de la siguiente. Si se imponen restricciones en dichos puntos ocurrirá que sobre cada diseño se habrán impuesto condiciones distintas ya que éstas afectarán a puntos diferentes en cada caso. Este problema puede afectar gravemente al proceso de optimización ya que las restricciones no estarán definidas de forma rigurosa y afectarán en cada caso a puntos distintos. Esto es otra razón adicional para imponer las restricciones sobre puntos del contorno ya que entonces la definición podrá ser unívoca evitando esta problemática. Se recomienda, por tanto, definir una serie de puntos fijos en el contorno que servirán para imponer las restricciones sobre el estado tensional.

Las restricciones sobre las condiciones de vinculación afectarán normalmente a las reacciones obtenidas en los nodos coaccionados. Por ello el módulo de cálculo deberá proporcionar sus valores así como sus sensibilidades. Por la misma razón que en el caso anterior de las tensiones conviene imponer este tipo de restricciones en puntos prefijados del contorno y no sobre todos los nodos que sobre él se generen, ya que su posición cambiará de un diseño a otro.

En algunos problemas de optimización estructural es importante conocer la respuesta de cada diseño frente a sollicitaciones dinámicas. En ese caso es posible imponer restricciones sobre las frecuencias y los modos propios de vibración del objeto a diseñar. Para ello es necesario el realizar un cálculo dinámico de cada diseño y además calcular las sensibilidades de esas frecuencias y modos propios respecto a las variables de diseño. La descripción de la forma

de abordar esas operaciones excede de los objetivos de este trabajo, sin embargo hay que decir que a partir del cálculo de sensibilidades que se describe en los anexos B. y C. puede obtenerse una metodología para determinar las derivadas de las frecuencias y los modos propios de vibración.

Tanto la función objetivo como las restricciones se pueden expresar en función de una serie de variables, llamadas "de control", que son las que caracterizarán el comportamiento de cada diseño. Las variables de control que se consideran en este trabajo son funciones sencillas de las variables de diseño, de los desplazamientos nodales (módulo de los mismos), de las tensiones evaluadas en los puntos de integración de Gauss (tensiones principales o de Von Mises), de las tensiones evaluadas en puntos prefijados del contorno (tensiones principales o de Von Mises) y de las reacciones en los nodos coaccionados (módulo de las mismas). Asimismo, también pueden constituir variables de control el volumen, el peso o el coste de los materiales de toda la estructura o de una parte de la misma.

El Módulo de Definición de Objetivos y Restricciones debe evaluar las variables de control y sus sensibilidades a partir de los resultados obtenidos a través del Módulo de Cálculo. Este último proporcionará los valores de los desplazamientos, reacciones, tensiones, volúmenes, etc. así como los de sus sensibilidades. A partir de esa información, el Módulo de Definición calculará el valor y las sensibilidades de las variables de control utilizando las funciones que las definen y las derivadas de las mismas expresadas en función de la información obtenida del Módulo de Cálculo.

Las restricciones impuestas limitarán normalmente los valores máximos de los desplazamientos, reacciones, tensiones y dimensiones admitidos en un diseño. Las limitaciones de los desplazamientos, tensiones y reacciones podrán imponerse además sobre varios estados de carga sin que ello represente una gran dificultad adicional. De hecho, en alguno de los ejemplos presentados al final de este capítulo se han impuesto restricciones no sólo sobre varios estados de carga sino además sobre cálculos efectuados con diferentes teorías. El único inconveniente que representa la imposición de restricciones sobre varios estados de carga es el aumento de la dimensión del problema de optimización planteado aumentando por ello el tiempo de cálculo y las necesidades de almacenamiento.

En general, las restricciones que se imponen en los problemas de optimización estructural son restricciones en desigualdad ya que dichas condiciones suelen referirse a valores máximos o mínimos admitidos en la estructura. En caso de existir alguna restricción de igualdad siempre puede reconvertirse en otras dos restricciones en desigualdad mediante las expresiones (5.2.2).

Hay que tener muy en cuenta que la función objetivo y las restricciones impuestas condicionan totalmente el diseño final obtenido. Por ello su elección debe ser muy cuidadosa contemplando todos aquellos aspectos de interés que se puedan presentar.

Los valores de la función objetivo, las restricciones y sus sensibilidades han de ser proporcionados al Módulo de Control, el cual a su vez los suministrará al Módulo de Decisión.

5.4.2 Módulo de Parametrización

La función del Módulo de Parametrización es modelar cada diseño a partir de los valores que toman los parámetros que lo definen. Como ya se ha comentado, dichos parámetros pueden ser constantes o variables de diseño.

Este módulo debe definir también el modelo de cálculo utilizado para conocer el comportamiento de cada diseño. Ello significa que uno de los principales cometidos del mismo es la generación de las mallas de elementos finitos utilizadas así como la obtención de las sensibilidades de las coordenadas de sus nodos respecto a las variables de diseño. Dentro de esta labor debe incluirse también la definición de las cargas y coacciones que se aplicarán sobre dichas mallas, así como sus sensibilidades.

Una de las principales aportaciones realizadas en este trabajo es, precisamente, la construcción de un Módulo de Parametrización con la suficiente generalidad para poder modelar cualquier tipo de estructura sin tener que realizar cambios sobre el programa al alterar la tipología de la misma. La utilización de la metodología que se describe permite la construcción de un programa de ordenador capaz de optimizar objetos de índole muy diversa sin necesidad de alterar su parametrización en función de la forma de los mismos. Ello se consigue a partir de una estructura muy general de los datos necesarios para definir cada problema, lo cual permite abordar la optimización de cualquier tipo de estructura definiendo el archivo de datos correspondiente.

Con la metodología que se propone se pretende obtener una herramienta muy eficaz que permita definir, con el mínimo esfuerzo, cualquier problema de optimización estructural.

El módulo de Parametrización que se propone se basa en la estructura de información utilizada en el Capítulo 4 para definir los procesos de remallado

automático. Recordemos que la utilización del esquema definido proporciona una gran flexibilidad para describir objetos de cualquier tipo, junto con unos requerimientos mínimos en cuanto al trabajo necesario para generar los archivos de datos. Los puntos en que puede clasificarse la información necesaria para definir el cálculo de una determinada estructura utilizando la metodología propuesta son:

- Curvas de definición del dominio mediante las cuales se modela tanto el contorno del mismo como las zonas de separación entre materiales distintos.
- Propiedades de cada material.
- Características de cada tipo de carga.
- Características de cada tipo de coacción.
- Coeficientes de la combinación de los tipos de carga y coacción para cada caso de carga.
- Número y posición de los puntos singulares existentes sobre el dominio.

En este trabajo se propone utilizar la estructura de datos anterior para definir un diseño inicial dentro del proceso de optimización. A continuación se pueden definir sobre dichos datos cuales son las variables de diseño que se pretenden utilizar.

Las variables de diseño corresponderán a alguno de los datos utilizados para definir el primer diseño. El proceso de optimización consistirá por tanto en modificar algunos de los datos que se le suministran al programa para mejorar el diseño inicial. Los tipos de variables que se pueden utilizar siguiendo esta metodología son:

- Coordenadas y características de los puntos utilizados para definir las curvas (B-splines) que modelan el contorno y las interfaces entre materiales.
- Propiedades de alguno de los materiales.
- Valores de los coeficientes utilizados para combinar linealmente los distintos tipos de coacciones definidos.
- Valores de los coeficientes utilizados para combinar linealmente los

distintos tipos de carga definidos.

El primer grupo corresponde a las variables que definen la forma de la estructura a optimizar. En este sentido, los procesos en que intervengan variables de diseño de este tipo se llamarán de “optimización de formas” en contraposición a los de “optimización de dimensiones” en los cuales sólo intervienen variables de los otros tres tipos. Esta distinción se justifica por la forma distinta en que se puede abordar el cálculo de sensibilidades según si la optimización es de formas o únicamente de dimensiones [44]. Estas definiciones se profundizarán al describir el cálculo de sensibilidades. Dentro de este primer grupo se encuentran todos los datos que se refieren a la definición de las curvas que forman el contorno. El caso más corriente será aquel en que se usen como variables de diseño las coordenadas de los puntos que definen dichas curvas. Además, en los puntos en que el grado de continuidad de las curvas utilizadas se haya rebajado, también es posible definir como variables las pendientes p y los factores f o h definidos en el apartado 3.2.1.

El segundo grupo de variables de diseño corresponde a las propiedades de los materiales utilizados. No será muy corriente utilizar las propiedades mecánicas de los materiales (E y ν) como variables de diseño ya que estos parámetros no se pueden controlar en los materiales constructivos utilizados en la actualidad. En cambio, sí será usual utilizar como variables los espesores de los objetos discretizados mediante mallas bidimensionales. Hay que recordar que cuando se utilizan modelos de cálculo bidimensionales, los espesores se introducen como una propiedad de los materiales y no como una definición geométrica.

El tercer y el cuarto grupo de variables corresponden a los valores de los coeficientes utilizados para formar cada caso de carga como combinación lineal de los distintos tipos de cargas y de coacciones. Estas variables de diseño se utilizarán únicamente cuando se quiera optimizar la aplicación de una carga o un desplazamiento impuesto a una estructura lo cual no será muy usual cuando la respuesta de la misma sea estática. La utilización de estos coeficientes tiene más sentido dentro del campo del control dinámico de estructuras en el cual se intentan contrarrestar efectos dinámicos externos (sismos, ráfagas de viento, etc.) mediante la aplicación de fuerzas o desplazamientos que se pretenden optimizar de forma que el comportamiento global de las estructuras sea óptimo [44].

Definiendo un diseño inicial y especificando que datos de su definición son alterables se tiene totalmente definida la parametrización del objeto a optimizar. De esta forma, cambiando los valores de las variables de diseño se alterará la primera definición obteniéndose una sucesión de nuevos diseños.

Utilizando este sistema para definir la parametrización del proceso de optimización se aprovecha toda la potencia y la flexibilidad que presenta la metodología descrita en el capítulo anterior para llevar a cabo los procesos de remallado automático.

La elección de los puntos escogidos para definir el diseño inicial y la parametrización deben hacerse con especial cuidado ya que de ello depende la definición del diseño final u óptimo. Es conveniente utilizar el mínimo número posible de puntos para definir las curvas del dominio ya que así se limita la dimensión del problema de optimización planteado. Por otro lado, conviene que las posibilidades de cambio del diseño inicial sean máximas ya que ello aumentará las posibilidades de mejora del mismo. La definición de la parametrización será, por tanto, un compromiso entre definir una gran cantidad de variables de diseño para poder optimizar al máximo la estructura y limitar su número para no obtener una dimensión demasiado grande del problema de optimización lo cual incrementaría su coste y las dificultades de convergencia hacia la solución final.

Hay que evitar además que se produzcan situaciones de no unicidad de la definición del diseño en función de las variables de diseño. Un caso extremo en donde esto puede suceder es cuando las coordenadas de todos los puntos de definición se utilizan como variables de diseño. En esta situación sucede que si se aplican los mismos cambios a todas las variables se obtiene un movimiento de sólido rígido del diseño sin que haya habido ningún cambio en su forma o en su comportamiento. Esta mala definición puede afectar gravemente al funcionamiento del Módulo de Decisión ya que ciertos cambios en las variables de diseño no producirán los efectos deseados. Errores de redondeo en el cálculo de las sensibilidades pueden producir movimientos de sólido rígido en la definición del diseño que evitarán que el proceso de optimización converja.

Otro caso de mala definición, más frecuente que el anterior, es el que se presenta en la figura 5.1. En este caso la forma de una ménsula se define en función de la posición de 3 puntos x_1 , x_2 y x_3 . Si se utiliza la coordenada x de todos ellos como variable de diseño ocurrirá que las variaciones de la posición del punto x_1 no se traducirán en cambios de la forma de la ménsula.

Aunque la imposición de restricciones ya se ha descrito en el apartado 5.4.1, después de definir la metodología utilizada para definir cada diseño es necesario hacer algunos comentarios adicionales. La particular estructura que adquiere la descripción de la forma de cada diseño con esta metodología, permite que la descripción de las restricciones impuestas sea particularmente sencilla. Para ello se utiliza el hecho de que las curvas que delimitan el dominio se generan a partir de la posición de una serie de puntos de definición.

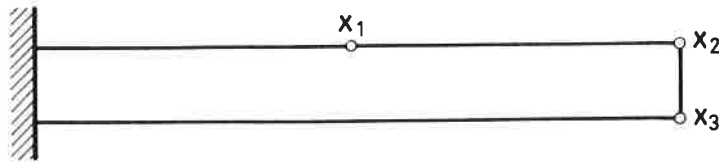


FIGURA 5.1 Parametrización errónea de una ménsula.

Debido al hecho, ya comentado en el apartado 5.4.1, de que por regla general la posición de los nodos de las mallas cambia de un diseño a otro, es conveniente definir una serie de “puntos de control” sobre los cuales definir las restricciones. Estos puntos estarán situados en los tramos de curva existentes entre cada dos puntos de definición. La posición de los mismos estará determinada de forma que corresponda siempre a valores fijos del parámetro t utilizado para definir las curvas. De esta forma, existirá una relación fija entre la posición de estos puntos de control y los valores de las variables de diseño. Debido a ello, las restricciones impuestas en dichos puntos definirán perfectamente el problema matemático de optimización. Los puntos de definición podrán ser también a su vez puntos de control ya que su posición corresponde siempre a valores fijos, en este caso enteros, del parámetro t .

Los distintos tipos de restricciones que se pueden imponer siguiendo esta metodología son:

1. Restricciones sobre los desplazamientos de un determinado punto de definición.
2. Restricciones sobre los desplazamientos de todos los puntos de control situados en un determinado tramo de una curva.
3. Restricciones sobre las reacciones de un determinado punto de definición.
4. Restricciones sobre las reacciones de todos los puntos de control situados en un determinado tramo de una curva.
5. Restricciones sobre las tensiones en un determinado punto de definición.
6. Restricciones sobre las tensiones en todos los puntos de control situados

en un determinado tramo de una curva.

7. Restricciones laterales.
8. Restricciones sobre la suma o la diferencia de dos variables de diseño.

Este último tipo de restricciones responde a la necesidad que surge en ocasiones de limitar ciertas dimensiones de la estructura a optimizar. Por ejemplo, si en el caso de la figura 5.1 se impone una restricción sobre la diferencia de las coordenadas verticales de los puntos x_2 y x_3 , se habrá limitado el canto mínimo que puede tener la ménsula en su extremo.

El paso siguiente a la parametrización es la generación de la malla de elementos finitos que se va a utilizar. El algoritmo de generación que se propone en esta metodología es, al igual que en el caso de los remallados automáticos, el de avance frontal descrito en el apartado **3.4.2**.

Durante el proceso de generación se calcularán no sólo las coordenadas de los nodos de la malla sino también sus sensibilidades respecto a todas las variables de diseño que afecten a los puntos de definición de las curvas. Además, durante esta operación se generará la información necesaria para, posteriormente, poder calcular sensibilidades de orden superior si el Módulo de Decisión lo requiere.

Es importante destacar que las variables de diseño referentes a las propiedades de los materiales y a los coeficientes utilizados para combinar los tipos de cargas y coacciones no afectan a las coordenadas de los nodos de la malla. Por ello, las sensibilidades de las mismas respecto a dichas variables serán nulas y dicho cálculo no será necesario.

El hecho de que la generación de mallas y el cálculo de sus sensibilidades esté incluido dentro de este módulo se debe a que estos procesos están íntimamente ligados a la parametrización del modelo.

Para cada diseño, la malla de referencia utilizada será la malla del diseño anterior convenientemente modificada según los cambios realizados en los valores de las variables de diseño. Para el primer diseño dicha malla deberá ser suministrada por el usuario. La forma de modificar estas mallas, así como el cálculo de los tamaños de los elementos se describirán al hablar del Módulo de Cálculo, en el apartado **5.4.3**.

5.4.2.1 *Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos situados sobre las curvas de definición*

El cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos de las mallas generadas es una aportación de esta tesis. El hecho de que no exista ningún trabajo previo sobre la utilización de mallas no estructuradas en procesos de optimización hace que tampoco se haya desarrollado con anterioridad el cálculo de sus sensibilidades tal como se ha hecho en este trabajo.

Al igual que durante el proceso de generación, el cálculo de las sensibilidades de las coordenadas se puede realizar en dos pasos:

- Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos situados sobre las curvas utilizadas para definir el modelo. Éste se realizará separadamente para cada una de las curvas.
- Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas del resto de los nodos.

Para los nodos situados sobre las curvas de definición hay que recordar que la expresión de las coordenadas de un punto situado sobre un B-spline es:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{l=0}^q \mathbf{r}_l N_{4,l+1}(t) \quad (5.4.1)$$

En la expresión anterior se ha cambiado la notación de los índices respecto a (A.12) para no confundirlos con los de (5.2.1).

El funcionamiento de muchos algoritmos de optimización se basa en la extrapolación de los valores obtenidos al calcular un determinado diseño. Esta extrapolación se realiza mediante desarrollos en serie de Taylor truncados en la primera o en la segunda derivada. Estas derivadas son lo que, dentro de este contexto, se conoce como sensibilidades.

El objetivo del cálculo de sensibilidades es, por tanto, el poder extrapolar los valores de la función objetivo y las restricciones obtenidos con un diseño, a otros diseños. Dicha extrapolación se puede realizar sin alterar los valores del parámetro t correspondientes a los puntos de la malla situados sobre las curvas de definición. Es decir, se pueden hacer las mencionadas extrapolaciones a diseños alterados respecto al original pero en los cuales los puntos situados sobre el contorno correspondan a los mismos valores de t .

Dicho de otra manera, el cálculo de sensibilidades se puede realizar considerando que la "estructura" de las mallas utilizadas se conserva y que las extrapolaciones se realizan a diseños calculados con mallas con la misma topología y estructura que la original. Después de decidir cuales serán los cambios a realizar sobre el diseño será cuando se generará una malla totalmente nueva para calcularlo y repetir el proceso iterativo de optimización.

Por otro lado, al realizar el cálculo de sensibilidades es obligado el considerar constante el parámetro t ya que en caso contrario no se conocería su ley de variación y por tanto no se podría realizar el cálculo de sus derivadas.

En función de estos razonamientos se puede realizar el cálculo de las sensibilidades de la expresión (5.4.1) respecto a la variable de diseño x_i :

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial x_i} = \sum_{l=0}^q \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial x_i} N_{4,l+1}(t) \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.4.2)$$

Recordemos que la expresión de los B-splines $N_{4,l+1}$ no depende de la posición de los puntos de definición.

El valor de los coeficientes \mathbf{r}_l se obtiene mediante la resolución de un sistema de ecuaciones definido mediante las expresiones (3.2.2) – (3.2.9):

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}\mathbf{R} \quad (5.4.3)$$

En la expresión anterior \mathbf{R} es una matriz de q filas y cada una de ellas está formada por las componentes de \mathbf{r}_l , $l = 0, \dots, q$. Asimismo, \mathbf{B} es otra matriz cuyas columnas son los términos independientes de las ecuaciones (3.2.2) – (3.2.9) correspondientes a cada componente. La matriz \mathbf{N} está compuesta por las coeficientes de dichas ecuaciones que son iguales para cada componente.

La derivación de este sistema de ecuaciones respecto a x_i conduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} = \mathbf{N}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{R} \right) \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.4.4)$$

Observando las expresiones (3.2.2) – (3.2.9) puede verse que las derivadas $\partial \mathbf{N} / \partial x_i$ serán no nulas únicamente en el caso en que la variable x_i corresponda al valor de h definido en un punto de curvatura nula. La elección de dicho valor como variable de diseño es altamente improbable ya que los efectos de su variación son bastante impredecibles. De hecho, se recomienda utilizar valores nulos para dicho parámetro por lo que su utilización como variable no tiene mucho sentido. Por tanto, normalmente sólo será necesario calcular los términos $\partial \mathbf{B} / \partial x_i$ para conocer las sensibilidades de \mathbf{R} .

La matriz \mathbf{N} ya se habrá invertido o factorizado previamente para hallar los valores de los coeficientes \mathbf{r}_l por lo que el coste de la resolución de los sistemas (5.4.4) será pequeño.

Es interesante destacar que, en el caso en que las variables de diseño contengan únicamente valores de las coordenadas de los puntos de definición, la dependencia de \mathbf{R} respecto de las mismas será lineal, por lo que las derivadas de orden superior serán nulas. Por ello, las extrapolaciones que se realicen sobre la posición de los nodos situados sobre las curvas de definición utilizando las sensibilidades de primer orden será exacta sin que se pierda precisión en las mismas por haber truncado el desarrollo en serie de Taylor. Esta propiedad contribuye a un buen comportamiento del proceso de optimización y demuestra que la parametrización que se propone es adecuada.

En ocasiones es necesario calcular los valores de las derivadas de \mathbf{r} según una cierta dirección. En el caso de que esta dirección esté definida mediante un vector unitario $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$ dicha derivada se puede obtener mediante:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}} = \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \quad (5.4.5)$$

El algoritmo de optimización que se ha utilizado en este trabajo requiere también el cálculo de las derivadas segundas direccionales de ciertas magnitudes. Para ello hay que derivar nuevamente las expresiones (5.4.2) y (5.4.4):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{s}^2} = \sum_{l=0}^q \frac{\partial^2 \mathbf{r}_l}{\partial \mathbf{s}^2} N_{4,l+1}(t) \quad (5.4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}^2} = \mathbf{N}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \mathbf{s}^2} \mathbf{R} - 2 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right) \quad (5.4.7)$$

donde el término $\partial^2 \mathbf{B} / \partial \mathbf{s}^2$ puede obtenerse multiplicando la matriz de derivadas segundas por los vectores \mathbf{s} y \mathbf{s}^T .

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}^2} = \sum_{i,j=1}^n s_i \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_i \partial x_j} s_j \quad (5.4.8)$$

Sin embargo, las únicas ecuaciones que pueden dar lugar a alguna derivada cruzada no nula son las (3.2.8). Por lo tanto, en la expresión anterior sólo existirá algún término no nulo en el caso de que exista algún punto con pendiente prefijada y que además se consideren como variables de diseño tanto la propia pendiente p como el factor f . Por ello, la ecuación (5.4.8) sólo deberá calcularse en estos casos.

Dada la estructura de las ecuaciones (3.2.2) – (3.2.9), los términos $\partial^2 \mathbf{N} / \partial \mathbf{s}^2$ serán siempre nulos por lo que su cálculo se puede suprimir. También es válido en este caso el comentario hecho anteriormente acerca de que los términos $\partial \mathbf{N} / \partial \mathbf{s}$ serán no nulos únicamente en el caso de que se utilice como variable de diseño el valor de algún parámetro h .

A partir de estos comentarios se puede ver que las derivadas segundas de (5.4.7) serán nulas en la mayoría de los casos. Existirán valores no nulos únicamente cuando se empleen como variables de diseño los valores de p y f asociados a un mismo punto con pendiente fijada, o bien en el caso, improbable, en que se utilice como variable el valor de h asociado a algún punto con condiciones de curvatura nula.

5.4.2.2 Cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos interiores

Mediante las expresiones anteriores es posible calcular las sensibilidades de primer y segundo orden de los vectores de posición \mathbf{r} de los puntos situados sobre las curvas de definición. El paso siguiente es calcular las sensibilidades de los nodos generados mediante el método de avance frontal. Para conseguir una mayor claridad, la explicación del cálculo de las mismas se realizará para el caso en que no se utilice la posibilidad de generar elementos alargados. La generalización a este último caso es muy sencilla sin más que añadir nuevos términos a los desarrollos que siguen.

Para deducir el cálculo de las sensibilidades de los puntos de la malla hay que recordar la forma en que éstos se generan. La creación de un nuevo punto se apoya siempre sobre alguno de los segmentos pertenecientes al frente en un momento dado. Así, para la generación de uno de los puntos $C_i; i = 1, \dots, 6$ de la figura 3.18 se utilizará la siguiente expresión.

$$(x_{C_i}, y_{C_i}) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) + \frac{(7-i)\delta_1\sqrt{3}}{12} \frac{(y_B - y_A, x_A - x_B)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} \quad (5.4.9)$$

La expresión anterior se obtiene sumando a las coordenadas del punto M un vector unitario perpendicular a \vec{AB} multiplicado por una cierta longitud. Para calcular las coordenadas de todos los puntos de la malla se habrá utilizado una expresión como la anterior. Por ello ésta es la que hay que derivar para hallar su sensibilidad. La expresión para calcular la derivada direccional de las coordenadas de un punto será por tanto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_{C_i}}{\partial s}, \frac{\partial y_{C_i}}{\partial s} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_A}{\partial s} + \frac{\partial x_B}{\partial s}, \frac{\partial y_A}{\partial s} + \frac{\partial y_B}{\partial s} \right) + \\ &\frac{(7-i)\sqrt{3}}{12} \left[\frac{\partial \delta_1}{\partial s} \frac{(y_B - y_A, x_A - x_B)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} + \right. \\ &\delta_1 \frac{\left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s}, \frac{\partial x_A}{\partial s} - \frac{\partial x_B}{\partial s} \right)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} - \\ &\left. \delta_1 (y_B - y_A, x_A - x_B) \frac{(y_B - y_A) \left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s} \right) + (x_B - x_A) \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s} \right)}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^3}} \right] \quad (5.4.10) \end{aligned}$$

La expresión del término $\partial\delta_1/\partial\mathbf{s}$ depende de como se haya escogido su valor en base a la expresión (3.4.3). La forma de su derivada será entonces:

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial\mathbf{s}} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0.55 |\vec{AB}| < \delta < 2 |\vec{AB}| \\ 0.55 D_1 & \text{si } 0.55 |\vec{AB}| > \delta \\ 2.0 D_1 & \text{si } \delta > 2 |\vec{AB}| \end{cases} \quad (5.4.11)$$

siendo

$$D_1 = \frac{(y_B - y_A)\left(\frac{\partial y_B}{\partial\mathbf{s}} - \frac{\partial y_A}{\partial\mathbf{s}}\right) + (x_B - x_A)\left(\frac{\partial x_B}{\partial\mathbf{s}} - \frac{\partial x_A}{\partial\mathbf{s}}\right)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} \quad (5.4.12)$$

Para utilizar la expresión (5.4.11) es necesario conocer, para cada punto, cuales han sido los dos nodos base para su generación (A y B), el valor de δ interpolado de la malla de referencia, y a cual de los tipos de nodos generados corresponde (C_1, \dots, C_6).

La generación de los primeros puntos de la malla se hará utilizando como segmentos base los situados sobre las curvas de definición. Por tanto, aplicando por orden de aparición la expresión (5.4.10) a todos los puntos generados por el método de avance frontal, se podrá conocer el valor de sus sensibilidades a partir de las de los nodos situados sobre las curvas de definición.

Para el cálculo de las sensibilidades de segundo orden se derivan de nuevo las expresiones anteriores obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 x_{C_i}}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 y_{C_i}}{\partial s^2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x_A}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x_B}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 y_A}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 y_B}{\partial s^2} \right) + \\
 &\frac{(7-i)\sqrt{3}}{12} \left[\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial s^2} \frac{(y_B - y_A, x_A - x_B)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} + \right. \\
 &2 \frac{\partial \delta_1}{\partial s} \frac{\left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s}, \frac{\partial x_A}{\partial s} - \frac{\partial x_B}{\partial s} \right)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} - \\
 &2 \frac{\partial \delta_1}{\partial s} (y_B - y_A, x_A - x_B) \frac{(y_B - y_A) \left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s} \right) + (x_B - y_A) \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s} \right)}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^3}} \\
 &2 \delta_1 \left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s}, \frac{\partial x_A}{\partial s} - \frac{\partial x_B}{\partial s} \right) \frac{(y_B - y_A) \left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s} \right) + (x_B - y_A) \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s} \right)}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^3}} + \\
 &\delta_1 \frac{\left(\frac{\partial^2 y_B}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 y_A}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 x_A}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 x_B}{\partial s^2} \right)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} \\
 &\delta_i (y_B - y_A, x_A - x_B) \left[\frac{\left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s} \right)^2}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^3}} + \right. \\
 &\frac{(y_B - y_A) \left(\frac{\partial^2 y_B}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 y_A}{\partial s^2} \right) + (x_B - y_A) \left(\frac{\partial^2 x_B}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 x_A}{\partial s^2} \right)}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^3}} \\
 &\left. \left. 3 \frac{\left[(y_B - y_A) \left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s} \right) + (x_B - y_A) \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s} \right) \right]^2}{\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \right)^5}} \right] \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.4.13}$$

Al igual que en el caso anterior también hay que calcular las sensibilidades de segundo orden de δ_1 :

$$\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial s^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0.55 |\vec{A}\vec{B}| < \delta < 2 |\vec{A}\vec{B}| \\ 0.55 D_2 & \text{si } 0.55 |\vec{A}\vec{B}| > \delta \\ 2.0 D_2 & \text{si } \delta > 2 |\vec{A}\vec{B}| \end{cases}
 \tag{5.4.14}$$

siendo

$$\begin{aligned}
D_2 = & \frac{\left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s}\right)^2}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} + \\
& \frac{(y_B - y_A)\left(\frac{\partial^2 y_B}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 y_A}{\partial s^2}\right) + (x_B - x_A)\left(\frac{\partial^2 x_B}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 x_A}{\partial s^2}\right)}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}} \\
& + \frac{\left[(y_B - y_A)\left(\frac{\partial y_B}{\partial s} - \frac{\partial y_A}{\partial s}\right) + (x_B - x_A)\left(\frac{\partial x_B}{\partial s} - \frac{\partial x_A}{\partial s}\right)\right]^2}{3\sqrt{\left((y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2\right)^3}}
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

A pesar de que las expresiones anteriores pueden parecer largas y pesadas su implementación en un programa de ordenador es muy sencilla. Ello es debido a que éstas están formadas por una serie de términos que se repiten constantemente y cuya evaluación previa facilita enormemente el cálculo. Además hay que tener en cuenta que las sensibilidades de segundo orden serán nulas en muchos casos.

Los objetivos de este trabajo se han limitado a la optimización de estructuras planas proporcionando un punto de partida para el caso tridimensional. La generalización a 3 dimensiones de esta metodología requiere la utilización de técnicas de CAD para definir las superficies que forman el contorno de los objetos a optimizar. A partir de ellas es posible repetir las operaciones descritas para el caso bidimensional a 3 dimensiones.

5.4.2.3 Cálculo de las sensibilidades de los vectores de cargas y de coacciones

La última operación que debe llevar a cabo el Módulo de Parametrización es la generación de los vectores que definen las cargas y las coacciones aplicadas a cada diseño.

La definición de los vectores que definen cada tipo de coacción no depende de ninguna de las variables de diseño. Por ello no será necesario calcular sus sensibilidades. En el caso de que alguna de las variables de diseño sea uno de los coeficientes utilizados para combinar linealmente los tipos de coacciones correspondientes a cada caso de carga, sí se tendrá que calcular la sensibilidad de primer orden de esa combinación respecto a esa variable de diseño. El cálculo

de dicha sensibilidad es trivial teniendo en cuenta que su dependencia respecto a la variable correspondiente es lineal. En cualquier caso, las sensibilidades de segundo orden de los vectores de coacciones correspondientes a cada caso de carga serán nulas.

Los vectores con los valores nodales correspondientes a cada tipo de carga sí requieren el cálculo de sus sensibilidades con respecto a las variables que afecten a la forma del dominio donde estén aplicadas. Ello es debido a que la expresión que proporciona los valores nodales correspondientes a una carga repartida o volumétrica es una integral cuyo dominio de integración puede verse afectado por las variaciones geométricas del diseño. El cálculo de las sensibilidades de dichas integrales se describe en los anexos B. y C.

Además, si alguna de las variables de diseño es uno de los coeficientes utilizados para combinar las cargas, la sensibilidad del vector correspondiente a ese caso de carga con respecto a esa variable será, debido a su dependencia lineal, el vector del tipo correspondiente de carga.

En cuanto a las propiedades de los materiales, sus sensibilidades serán nulas a excepción de aquellas que se hayan definido como variables de diseño. En este último caso su sensibilidad de primer orden valdrá 1 y la de segundo orden valdrá 0.

5.4.3 Módulo de Cálculo

El Módulo de Cálculo es el encargado de realizar todas las operaciones necesarias para conocer el comportamiento de cada diseño frente a una serie de solicitaciones, así como las sensibilidades de todas las magnitudes involucradas en dicho proceso. Este módulo es el que debe suministrar los valores de las variables de control utilizadas así como las sensibilidades que sean necesarias para el Módulo de Decisión.

Una de las aportaciones de este trabajo consiste en la posibilidad de utilizar las tensiones nodales, obtenidas mediante un alisado, como variables de control. Para ello se han tenido que calcular las sensibilidades de las mismas respecto a las variables de diseños que se presentan en este apartado. El cálculo de las sensibilidades del estimador de error se presenta también en este apartado y su utilidad se hará patente al describir el Módulo de Decisión. Como se verá

más adelante, dichos cálculos posibilitan una de las aportaciones de esta tesis referentes a la generación de mallas adecuadas para cada diseño.

La información necesaria para este módulo proviene básicamente del Módulo de Parametrización a través del Módulo de Control. Ésta se puede clasificar en los siguientes puntos:

- Topología de la discretización.
- Coordenadas nodales y sus sensibilidades.
- Propiedades de los materiales, incluyendo espesores y otras dimensiones que no afecten a la posición de los puntos nodales, así como sus sensibilidades.
- Vectores de cargas nodales correspondientes a las cargas, volumétricas, distribuidas y puntuales, así como sus sensibilidades.
- Vectores con las condiciones de vinculación así como sus sensibilidades.

A partir de la información anterior se pueden escribir todas las ecuaciones que gobiernan el proceso de cálculo por elementos finitos. En las expresiones que siguen a partir de este punto se ha suprimido el signo $\hat{\cdot}$ que diferenciaba los resultados obtenidos mediante el cálculo $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ de la solución exacta a las ecuaciones (2.4.1) $(\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma})$. Siguiendo la notación de la referencia [76] se pueden escribir las ecuaciones mencionadas como:

- Ecuaciones de equilibrio:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (5.4.16)$$

- Regla de ensamblaje:

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e \\ \mathbf{f} = \sum_e \mathbf{f}_e \\ \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{\Omega_e} + \mathbf{f}_{\Gamma_e} + \mathbf{f}_{P_e} \end{cases} \quad (5.4.17)$$

- Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (5.4.18)$$

- Vectores de fuerzas nodales:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \\ \mathbf{f}_{\Gamma_e} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \\ \mathbf{f}_{P_e} = \sum \mathbf{N}^T \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.4.19)$$

- Ecuación geométrica y ecuación constitutiva:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \end{cases} \quad (5.4.20)$$

- Alisado de tensiones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^* = \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{M}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}} \\ \bar{\boldsymbol{\Phi}} = \sum_e \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{N}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\ \mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}_e \\ \mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{N}}^T d\Omega \end{cases} \quad (5.4.21)$$

El significado de los términos anteriores es el ya clásico dentro del contexto de los métodos de resolución por elementos finitos [76]. Baste precisar que los términos \mathbf{b} , \mathbf{t} y \mathbf{p} corresponden respectivamente a las cargas volumétricas, de superficie y puntuales que se apliquen en cada caso. Asimismo, se ha considerado también la posibilidad de que existan deformaciones iniciales $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, debidas entre otras causas a efectos térmicos o a la propia reología del material, y tensiones iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0$.

Las ecuaciones anteriores son las que proporcionarán los valores de las variables de control utilizadas. Por ello, para calcular las sensibilidades de las variables de control es necesario derivar las expresiones (5.4.16) – (5.4.21).

El cálculo de los vectores de fuerzas nodales equivalentes (5.4.19) así como el de sus sensibilidades se habrá realizado previamente en el Módulo de

Parametrización. Su expresión se ha incluido aquí para completar todas las expresiones.

El cálculo de las sensibilidades de las matrices de rigidez elementales (5.4.18) se describe en los anexos B. y C. A partir del mismo se pueden hallar las sensibilidades de primer y segundo orden del vector de desplazamientos mediante derivaciones sucesivas de la ecuación (5.4.16).

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{a} \right] \quad (5.4.22)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}^2} = \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}^2} \mathbf{a} - 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (5.4.23)$$

En estas últimas expresiones puede verse que la inversa de la matriz de rigidez aparece cada vez que se quiere calcular una nueva sensibilidad. Esta matriz ya se habrá utilizado previamente para resolver el sistema (5.4.16). Por ello, si anteriormente se ha utilizado un método que permita resolver nuevos sistemas con idéntica matriz aprovechando las operaciones hechas en la primera resolución, el coste adicional que supone la evaluación de cada nueva derivada direccional mediante (5.4.22) o (5.4.23) es reducido. Por este motivo, en procesos de optimización estructural como el que se está describiendo, es aconsejable la utilización de métodos directos de factorización o eliminación para la resolución de sistemas de ecuaciones del tipo (5.4.16). En particular, los métodos de descomposición de la matriz de rigidez en la forma \mathbf{LDL}^T son muy adecuados. No lo son, en cambio, otros métodos de probada eficacia, ya sean directos o iterativos ^{[16][44]}, si no permiten resolver a posteriori nuevos problemas con idéntica matriz.

Otro punto remarcable a señalar es que para el cálculo de las expresiones (5.4.22) y (5.4.23) no es necesario ensamblar las derivadas de la matriz de rigidez. Éstas aparecen únicamente multiplicando a otros vectores. Por ello ese producto puede hacerse elemento por elemento evitando así la necesidad de almacenar las sensibilidades de la matriz de rigidez global.

Una vez conocidas las sensibilidades del vector de desplazamientos nodales, es posible calcular las sensibilidades de las deformaciones y las tensiones evaluadas en los puntos de integración:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{a} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.4.24)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{s}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}^2} \mathbf{a} + 2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.25)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{s}} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.4.26)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial \mathbf{s}^2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{D} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.27)$$

No se ha considerado en esta trabajo la posibilidad de que las deformaciones iniciales $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ y las tensiones iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0$ dependan de ninguna de las variables de diseño. Por ello, en las anteriores expresiones se ha considerado nulo el valor de sus sensibilidades. Se podrían plantear problemas en los cuales fuese preciso optimizar una distribución de deformaciones o tensiones iniciales. Por ejemplo, este sería el caso si se quisiese obtener la mejor forma de calentar una pieza para obtener un cierto estado tensional. En situaciones como esta el cálculo de las sensibilidades de $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ y $\boldsymbol{\sigma}_0$ debería incluirse en las expresiones (5.4.26) y (5.4.27).

El último grupo de variables de control que puede ser necesario calcular es el de las correspondientes a las tensiones alisadas. Para ello pueden utilizarse las expresiones (5.4.21) que además se tendrán que derivar para hallar sus sensibilidades.

El cálculo de las sensibilidades de la matriz de masas \mathbf{M} y del vector $\boldsymbol{\Phi}$ es muy similar al de todas las expresiones integrales que aparecen en (5.4.18) y (5.4.19). Por ello las expresiones necesarias para ello se presentan en los anexos B. y C. Una vez conocidos sus valores se pueden hallar las sensibilidades de las tensiones alisadas mediante:

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{s}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \right] \quad (5.4.28)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}^2} = \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \mathbf{s}^2} \bar{\sigma}^* - 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \bar{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (5.4.29)$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial \mathbf{s}} = \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial \bar{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial \mathbf{s}^2} = \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.31)$$

Debido a que la inversa de la matriz de masas aparece en las expresiones (5.4.28) y (5.4.29) para el cálculo de cada nueva sensibilidad, también son aplicables los comentarios hechos anteriormente a favor de la utilización de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones que permitan resolver nuevos sistemas con la misma matriz.

También en este caso es innecesario el ensamblaje de las sensibilidades de las matrices de masas elementales reduciéndose así el coste y las necesidades de almacenamiento necesarias para evaluar las expresiones (5.4.28) y (5.4.29).

El último cometido de este módulo es el cálculo del estimador de error y de sus sensibilidades. Partiendo del estimador de error de Zienkiewicz y Zhu, descrito en el apartado 2.6.4., el cálculo de su sensibilidad puede hacerse siguiendo las técnicas utilizadas para todas las expresiones integrales. Esto último facilita enormemente su implementación en estos procesos. Si se denomina por η_e la estimación de la norma energética del error calculada sobre un elemento, su expresión podrá escribirse como:

$$\eta_e^2 = \int_{\Omega_e} (\sigma^* - \sigma)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma) d\Omega \quad (5.4.32)$$

El cálculo de sus sensibilidades sigue las líneas generales utilizadas para la derivación de expresiones integrales que se describe en los anexos B y C. Por ello la expresión detallada del mismo se presenta en los mencionados anexos.

Asimismo, para calcular la energía de deformación de un elemento y sus sensibilidades se pueden utilizar las siguientes expresiones:

$$\|\mathbf{u}\|_{E_e}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_e \mathbf{a} \quad (5.4.33)$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{u}\|_{E_e}^2}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{a}^T}{\partial s} \mathbf{K}_e \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial s} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} \quad (5.4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \|\mathbf{u}\|_{E_e}^2}{\partial s^2} = & \frac{\partial^2 \mathbf{a}^T}{\partial s^2} \mathbf{K}_e \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \frac{\partial^2 \mathbf{K}_e}{\partial s^2} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{K}_e \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial s^2} + \\ & 2 \frac{\partial \mathbf{a}^T}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial s} \mathbf{a} + 2 \frac{\partial \mathbf{a}^T}{\partial s} \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} + 2 \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

5.4.4 Módulo de Decisión

Este módulo es el encargado de tomar las decisiones necesarias para modificar cada diseño de la mejor forma posible. Para ello debe utilizarse algún algoritmo de optimización que sea capaz de utilizar la información generada por el Módulo de Cálculo y modificar los valores de las variables de diseño a fin de mejorarlo, todo ello con el menor coste posible. Es, por tanto, en este módulo donde deben residir los algoritmos de optimización necesarios para llevar a cabo el proceso.

Como ya se ha comentado previamente, la toma de decisiones puede plantearse como la minimización de una función objetivo con restricciones que pueden ser de igualdad o en desigualdad. En los problemas de optimización estructural las restricciones corresponden a limitaciones en los valores máximo y mínimo que pueden alcanzar ciertas magnitudes. Por ello, éstas suelen expresarse mediante inecuaciones. En el caso de existir alguna restricción en igualdad, ésta siempre puede reconvertirse en dos inecuaciones mediante las expresiones (5.2.2). Por ello, en lo sucesivo consideraremos el problema de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar : } f(\mathbf{x}) & ; \mathbf{x} = \{x_i\} ; i = 1, \dots, n \\ \text{verificando : } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ & a_i \leq x_i \leq b_i \quad ; i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (5.4.36)$$

separando explícitamente las restricciones laterales de las restantes restricciones en desigualdad.

Los problemas de minimización estructural presentan una serie de características particulares que se reflejan en la naturaleza del problema de minimización planteado. Éstas son:

- El número de variables de diseño utilizadas no es muy elevado, ya que la parametrización se suele hacer en función de un conjunto relativamente pequeño de valores.
- La función objetivo será, en general, una función no lineal de las variables de diseño. Sin embargo, esa no linealidad no será muy acusada siendo posible un buen ajuste de la misma mediante desarrollos lineales o cuadráticos. En muchas ocasiones esta función consistirá en el peso total de la estructura o en magnitudes directamente relacionadas con éste. La evaluación de la misma y la de sus sensibilidades representará un cierto coste normalmente inferior al requerido para las restricciones.
- Las restricciones en desigualdad serán o bien laterales, o bien definidas sobre funciones sencillas de las variables de diseño (relaciones de tipo geométrico), o bien restricciones definidas mediante funciones altamente no lineales de las variables de diseño. Este último caso es el que corresponde a las restricciones sobre desplazamientos y tensiones y la evaluación de las mismas, junto con la de sus sensibilidades, representará la realización de un cálculo completo de cada diseño. Existirá en general un número elevado de restricciones pertenecientes a este último grupo, altamente no lineales y de difícil cálculo y derivación.
- El problema podrá tener varios mínimos locales y, dada su complejidad, no existirán indicaciones acerca de su convexidad.
- No será posible determinar a priori cuales son las restricciones que condicionarán la forma del diseño final.

Además, dada la naturaleza de los problemas de optimización estructural, se pueden considerar los siguientes aspectos:

- El diseño inicial puede no ser factible. De hecho, la obtención de un diseño inicial factible puede representar un problema de gran complejidad.
- Por debajo de ciertos límites no será necesario mejorar la solución. No tiene sentido invertir esfuerzo en intentar reducir en unos cuantos gramos

el peso de una estructura de miles de toneladas. Este sería el caso, por ejemplo, de una presa.

- Tampoco será necesario obtener los valores de las variables de diseño con una precisión que esté por debajo de ciertos límites. No tiene sentido el determinar con errores inferiores al milímetro, las dimensiones de una estructura de varios metros ya que por motivos constructivos no se podrá alcanzar tal precisión durante su realización material.
- Las restricciones impuestas presentarán normalmente una cierta tolerancia en cuanto a su cumplimiento por los mismos motivos que en el caso anterior. Además, durante el proceso de diseño se habrán aplicado los correspondientes coeficientes de seguridad.

Por todo lo anterior, es conveniente que los algoritmos utilizados para resolver el problema matemático de optimización verifiquen las siguientes condiciones:

- Que sean capaces de alcanzar soluciones finales factibles partiendo de diseños iniciales no factibles, y de llegar a soluciones virtualmente idénticas partiendo de diseños iniciales distintos.
- Que sean capaces de mejorar las soluciones iniciales hasta niveles por debajo de los cuales no sea necesario refinar la solución.
- Que tengan en cuenta los condicionantes relativos al coste de los cálculos de la función objetivo, las restricciones y sus sensibilidades. El cálculo de las derivadas de primer orden puede llevarse a cabo con un coste operativo aceptable. Para órdenes superiores el coste de la evaluación de todas las derivadas será inaceptable siendo únicamente admisible calcular algunas derivadas direccionales de segundo orden.

Los condicionantes anteriores hacen que la gran mayoría de los algoritmos de optimización, desarrollados en contextos distintos del análisis estructural, no sean adecuados para resolver problemas como el planteado. Muchos algoritmos son de gran rendimiento únicamente cuando la función objetivo y las restricciones son lineales o casi lineales respecto a las variables de diseño. Otros lo son cuando la función objetivo es no lineal pero las restricciones son lineales. Tampoco existen algoritmos capaces de llegar a la región factible partiendo de un diseño inicial no factible.

El algoritmo que se ha utilizado en este trabajo es el desarrollado por Navarrina ^[44] y es un intento de conjugar todos los requerimientos anteriores

para la resolución de los problemas de optimización estructural. Durante su descripción, a las restricciones no laterales se les denominará simplemente como restricciones, y se diferenciarán de las restricciones laterales haciendo mención expresa a estas últimas cuando sea necesario.

5.4.4.1 Algoritmo de Optimización

El algoritmo de optimización utilizado requiere de la definición de una serie de parámetros:

- Conjunto de límites móviles que definen las máximas variaciones permitidas en los valores de las variables de diseño en cada iteración:

$$\mathbf{c} = c_i \quad ; c_i > 0 \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.4.37)$$

- Conjunto de tolerancias en las variables de diseño que definen la precisión con que se desea obtener las mismas en el diseño final. Se considerará que el proceso de optimización ha convergido cuando los valores absolutos de las modificaciones de todas las variables de diseño en una iteración se encuentran por debajo de esas tolerancias.

$$\boldsymbol{\epsilon}^x = \epsilon_i^x \quad ; \epsilon_i^x > 0 \quad ; i = 1, \dots, n \quad (5.4.38)$$

- Conjunto de tolerancias en las restricciones que definen los máximos incumplimientos admitidos en las mismas:

$$\boldsymbol{\epsilon}^g = \epsilon_j^g \quad ; \epsilon_j^g > 0 \quad ; j = 1, \dots, m \quad (5.4.39)$$

- Conjunto de límites de actividad que se utilizarán con diversos propósitos que se definirán en la descripción del algoritmo:

$$\boldsymbol{\eta} = \eta_j \quad ; \eta_j > 0 \quad ; j = 1, \dots, m \quad (5.4.40)$$

Se dirá que un punto \mathbf{x}^k se encuentra en la banda de actividad de la restricción j si se verifica:

$$|g_j(\mathbf{x}^k)| < \eta_j \quad (5.4.41)$$

En lo sucesivo se considerará que en todas las iteraciones se verifican las restricciones laterales, asumiendo que el diseño inicial \mathbf{x}^0 las verifica, puesto que en el algoritmo se verifica un control que evita su incumplimiento.

Se escribirá el algoritmo en la forma iterativa genérica:

$$\begin{cases} \text{dado:} & \mathbf{x}^k \\ \text{obtener:} & \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \theta^k \mathbf{s}^k \end{cases} \quad (5.4.42)$$

En cada iteración se realizarán las siguientes operaciones de forma consecutiva:

- Clasificación del punto actual a partir de los resultados del cálculo de la función objetivo y las restricciones.
- Obtención de la dirección de avance \mathbf{s}^k a partir de la información suministrada por el análisis de sensibilidad de primer orden completo. Este análisis requiere el cálculo de las sensibilidades de primer orden respecto a todas las variables de diseño.
- Obtención del factor de avance θ^k a partir de la información suministrada por el análisis de sensibilidad de segundo orden en la dirección de avance. Ello requerirá el cálculo de la derivada segunda direccional en la dirección de \mathbf{s}^k .
- Actualización de la aproximación a la solución, y análisis de la convergencia.
- Construcción de la malla de referencia para el próximo diseño.

5.4.4.2 Clasificación del punto

En cada iteración se clasifica el punto actual según los criterios siguientes:

- La restricción j en la iteración k se dirá:

$$\begin{cases} \text{"desactivada"} & \text{si } g_j(\mathbf{x}^k) < -\eta_j \\ \text{"activada"} & \text{si } g_j(\mathbf{x}^k) \geq -\eta_j \end{cases} \quad (5.4.43)$$

Se denominará Λ_k al conjunto de restricciones activadas en la iteración k .

- La restricción j en la iteración k se dirá.

$$\begin{cases} \text{"no violada"} & \text{si } g_j(\mathbf{x}^k) \leq 0 \\ \text{"cuasi no violada"} & \text{si } 0 < g_j(\mathbf{x}^k) \leq \epsilon_j^g \\ \text{"débilmente violada"} & \text{si } \epsilon_j^g < g_j(\mathbf{x}^k) \leq \eta_j \\ \text{"fuertemente violada"} & \text{si } g_j(\mathbf{x}^k) > \eta_j \end{cases} \quad (5.4.44)$$

Se denominará V_k al conjunto de restricciones débil o fuertemente violadas en la iteración k .

El punto \mathbf{x}^k se dirá:

- "Factible", si todas las restricciones son no violadas.
- "Admisible", si todas las restricciones son no violadas o cuasi no violadas.
- "Débilmente no factible", si todas las restricciones son no violadas, cuasi no violadas o débilmente violadas.
- "Fuertemente no factible", si hay alguna restricción fuertemente violada.

5.4.4.3 Obtención de la dirección de avance

Se determinará el vector unitario \mathbf{s}^k según la dirección de avance, o bien se asumirá que el algoritmo ha convergido, en función del vector \mathbf{r}^k en la forma:

$$\begin{cases} \text{si } |\mathbf{r}^k| \neq 0 & \Rightarrow \mathbf{s}^k = \frac{\mathbf{r}^k}{|\mathbf{r}^k|} \\ \text{si } |\mathbf{r}^k| = 0 & \Rightarrow \text{el algoritmo ha convergido} \end{cases} \quad (5.4.45)$$

donde \mathbf{r}^k se calculará mediante uno de los tres procedimientos siguientes, según la clasificación del punto:

Procedimiento 1.

Si \mathbf{x}^k no pertenece a la banda de actividad de ninguna de las restricciones, se adopta como vector de avance el opuesto al gradiente de la función objetivo. En el caso de que alguna variable de diseño esté fija, y en la dirección opuesta al gradiente de la función objetivo se viole la restricción lateral correspondiente, el gradiente se proyectará sobre el hiperplano que la define, es decir:

$$r_i^k = \begin{cases} -v_i^k & \text{si } a_i < x_i < b_i \\ 0 & \text{si } \begin{cases} x_i = a_i & \text{y } v_i^k > 0 \\ \text{o} \\ x_i = b_i & \text{y } v_i^k < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.4.46)$$

$$v_i^k = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (5.4.47)$$

Esta situación únicamente ocurrirá cuando el diseño inicial es una estructura muy sobredimensionada que verifica con suficiente holgura todas las restricciones.

Procedimiento 2.

Si \mathbf{x}^k pertenece a la banda de actividad de al menos una de las restricciones, se obtendrá el vector de avance \mathbf{r}^k como:

$$\mathbf{r}^k = \boldsymbol{\alpha}^k + \mathbf{t}^k - \mathbf{x}^k \quad (5.4.48)$$

donde \mathbf{t}^k se obtiene resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}^k \text{ minimiza : } F(\mathbf{t}) = F(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{x}^k)\mathbf{t} \\ \text{verificando : } G_j(\mathbf{t}) = G_j(\mathbf{0}) + \nabla g_j(\mathbf{x}^k)\mathbf{t} \leq 0 \quad ; j \in \Lambda_k \\ 0 \leq t_i \leq \beta_i^k - \alpha_i^k \quad ; j = 1, \dots, n \\ \text{con : } F(\mathbf{0}) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)(\boldsymbol{\alpha}^k - \mathbf{x}^k) \\ G_j(\mathbf{0}) = g_j(\mathbf{x}^k) + \nabla g_j(\mathbf{x}^k)(\boldsymbol{\beta}^k - \mathbf{x}^k) \quad ; j \in \Lambda_k \\ \alpha_i^k = \max\{a_i, x_i^k - c_i\} \quad ; i = 1, \dots, n \\ \beta_i^k = \min\{b_i, x_i^k + c_i\} \quad ; i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (5.4.49)$$

El problema planeado es equivalente a la linealización de (5.4.36) considerando unicamente las restricciones activas, y con las condiciones laterales adicionales correspondientes a los límites móviles (5.4.37).

Si el problema (5.4.49) carece de solución, la región factible del problema linealizado no existe, y se adopta como dirección de entrada en la región factible la obtenida por el tercer procedimiento.

Procedimiento 3.

En caso de fallo del procedimiento anterior, se adopta como dirección de avance la definida como:

$$r_i^k = c_i v_i^k \quad (5.4.50)$$

con:

$$\mathbf{v}^k = - \sum_{j \in V_k} \frac{\mu_j \nabla^T g_j(\mathbf{x}^k)}{|\nabla g_j(\mathbf{x}^k)|} \quad (5.4.51)$$

$$\mu_j = \frac{g_j(\mathbf{x}^k)}{|\nabla g_j(\mathbf{x}^k)|}$$

Puede demostrarse [44] que, como aproximación de primer orden, la dirección anterior es la más adecuada si los gradientes a las restricciones violadas son ortogonales entre sí.

Las componentes del vector de avance \mathbf{r}^k se obtienen ponderando las componentes del vector \mathbf{v}^k por un conjunto de coeficientes que indique la importancia relativa que se concede a la modificación de una variable de diseño frente a las demás. En este trabajo se han utilizado como tales coeficientes los propios límites móviles (5.4.37), si bien, para este fin se podría definir otro conjunto de parámetros, o adoptar coeficientes unitarios si se desea respetar la elección del vector \mathbf{v}^k .

5.4.4.4 Obtención del factor de avance

Para que una aproximación a la solución de (5.4.36) de la forma:

$$\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{x}^k + \theta \mathbf{s}^k \quad (5.4.52)$$

verifique las restricciones laterales y se encuentre dentro del marco impuesto por los límites móviles (5.4.37) en torno a la aproximación \mathbf{x}^k , es preciso que el factor de avance θ verifique la condición:

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \quad (5.4.53)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \max(\theta_{\min}^1, \theta_{\min}^2) \\ \theta_{\max} &= \min(\theta_{\max}^1, \theta_{\max}^2) \end{aligned} \quad (5.4.54)$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{\min}^1 = \max_{s_i^k > 0} \frac{\alpha_i^k - x_i^k}{s_i^k} \\ \theta_{\min}^2 = \max_{s_i^k < 0} \frac{\beta_i^k - x_i^k}{s_i^k} \\ \theta_{\max}^1 = \min_{s_i^k > 0} \frac{\alpha_i^k - x_i^k}{s_i^k} \\ \theta_{\max}^2 = \min_{s_i^k < 0} \frac{\beta_i^k - x_i^k}{s_i^k} \end{array} \right. \quad (5.4.55)$$

siendo α^k y β^k los definidos en (5.4.49).

Sean entonces las aproximaciones cuadráticas a la función objetivo y a las restricciones en el punto \mathbf{x}^k y según la dirección \mathbf{s}^k las siguientes funciones de variable real:

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= f(\mathbf{x}^k) + \theta \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}^k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} + \frac{1}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \\ \chi(\theta) &= g_j(\mathbf{x}^k) + \theta \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}^k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} + \frac{1}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 g_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad ; j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.4.56)$$

De forma análoga a (5.4.44), se dirá que la aproximación cuadrática $\chi_j(\theta)$ a la restricción j en función de θ es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{"no violada"} & \text{si } \chi_j(\mathbf{x}^k) \leq 0 \\ \text{"cuasi no violada"} & \text{si } 0 < \chi_j(\mathbf{x}^k) \leq \epsilon_j^g \\ \text{"débilmente violada"} & \text{si } \epsilon_j^g < \chi_j(\mathbf{x}^k) \leq \eta_j \\ \text{"fuertemente violada"} & \text{si } \chi_j(\mathbf{x}^k) > \eta_j \end{array} \right. \quad (5.4.57)$$

Se denominará $V_k(\theta)$ al conjunto de restricciones cuyas aproximaciones sean cuasi no violadas, débilmente violadas o fuertemente violadas para el factor de avance θ .

La aproximación a la solución (5.4.52) para el factor de avance θ se dirá:

- "Factible", si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas.

- “Admisible”, si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas o cuasi no violadas.
- “Débilmente no factible”, si todas las aproximaciones cuadráticas a las restricciones son no violadas, cuasi no violadas o débilmente violadas.
- “Fuertemente no factible”, si hay alguna aproximación a la restricción fuertemente violada.

Se define la función “incumplimiento” de las aproximaciones cuadráticas a las restricciones en la forma:

$$E(\theta) = \sum_{j \in V_k(\theta)} (\chi_j(\theta))^2 \quad (5.4.58)$$

El sumatorio anterior se extiende a todas las aproximaciones a las restricciones que estén violadas en cualquier grado.

En los términos anteriores, se adoptará el factor de avance θ^k , en la dirección actual mediante una de las tres estrategias siguientes, dependiendo de la clasificación de la aproximación actual \mathbf{x}^k a la solución:

Estrategia 1.

Si el punto \mathbf{x}^k es factible o admisible, se adoptará como factor de avance el valor θ^k tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta^k \text{ minimiza:} & \phi(\theta) \\ \text{verificando:} & \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \\ & \mathbf{x}(\theta) \text{ es factible o admisible} \end{array} \right. \quad (5.4.59)$$

Estrategia 2.

Si el punto \mathbf{x}^k es débilmente no factible, se adoptará como factor de avance el valor θ^k que soluciona el problema (5.4.59). En su defecto, si (5.4.59) no tiene solución, se adoptará el valor θ^k tal que:

$$\begin{cases} \theta^k \text{ minimiza : } & E(\theta) \\ \text{verificando:} & \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \\ & \mathbf{x}(\theta) \text{ es débilmente no factible} \end{cases} \quad (5.4.60)$$

Estrategia 3.

Si el punto \mathbf{x}^k es fuertemente no factible, se adoptará como factor de avance el valor θ^k que soluciona el problema (5.4.59). En su defecto, si (5.4.59) no tiene solución, se adoptará el valor θ^k que soluciona el problema (5.4.60). En su defecto, si el problema (5.4.60) no tiene solución, se adoptará como factor de avance el valor de θ^k tal que:

$$\begin{cases} \theta^k \text{ minimiza : } & E(\theta) \\ \text{verificando:} & \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \end{cases} \quad (5.4.61)$$

La solución a los problemas (5.4.59), (5.4.60) y (5.4.61) puede abordarse mediante diversos métodos de diferente grado de complejidad [44]. El método conceptualmente más sencillo consiste en realizar una inspección simple en el intervalo definido por la condición (5.4.53), para los siguientes valores del factor de avance:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_{\min} + \Delta\theta_i \quad ; i = 0, \dots, n_I \\ \text{con: } n_I &= \frac{(\theta_{\max} - \theta_{\min})}{\Delta\theta} \\ \Delta\theta &\leq \min_{s_i^k \neq 0} \left\{ \frac{\epsilon_i^x}{s_i^k} \right\} \end{aligned} \quad (5.4.62)$$

de forma que el error cometido en las variables de diseño sea inferior a las tolerancias (5.4.38). El algoritmo de búsqueda discreta anterior puede admitir diversos refinamientos con objeto de reducir el número de operaciones necesarias. En cualquier caso, las funciones (5.4.56) que es preciso evaluar en la resolución de los problemas anteriores son cuadráticas y de una sola variable. En general, el coste operativo de su resolución es muy inferior al implicado en otras fases de la resolución del problema de optimización estructural, tales como la obtención de la dirección de avance, el cálculo estructural o la realización del análisis de sensibilidad.

5.4.4.5 Actualización de la aproximación a la solución

Una vez evaluadas la dirección y el factor de avance se obtendrá el valor de la nueva aproximación a la solución mediante la aplicación directa de la expresión (5.4.42).

Para comprobar si el algoritmo de optimización ha convergido se aplica un criterio de convergencia sobre las variables de diseño. Además hay que controlar también que el nivel de error existente en los cálculos correspondientes al último diseño sea inferior a un límite prefijado. Por ello el proceso se detendrá cuando se verifique de forma simultánea:

$$\begin{aligned} |x_i^{k+1} - x_i^k| &< \epsilon_i^x \quad ; i = 1, \dots, n \\ \|\mathbf{e}\|_E &\leq \frac{\gamma}{100} \|\mathbf{u}\|_E \end{aligned} \quad (5.4.63)$$

en cuyo caso se dice que el proceso ha convergido. En caso contrario el proceso se detiene tras realizar un número determinado de iteraciones.

La falta de convergencia puede deberse a dos motivos:

- La aproximación final no es factible ni admisible pero el problema (5.4.36) tiene solución. En este caso debe reiniciarse el proceso de optimización con diferentes parámetros de funcionamiento del algoritmo o con otra aproximación inicial.
- El problema (5.4.36) carece de solución porque la región factible es vacía, debido a la imposición incorrecta de las restricciones.

5.4.4.6 Construcción de la malla de referencia para el próximo diseño

En el caso en que el proceso de optimización no haya convergido todavía, se tendrá que construir la malla de referencia necesaria para generar la malla de elementos finitos correspondiente a la siguiente iteración. Mediante el cálculo de sensibilidades realizado anteriormente, se pueden extrapolar todos los valores obtenidos en el diseño previo a cualquier nuevo conjunto de valores de las

variables de diseño. Por ello, también se podrán extrapolar al nuevo diseño las coordenadas de la malla utilizada previamente y los valores del error y la energía de deformación estimados.

Así, el nuevo vector de posición \mathbf{r}^{k+1} correspondiente a cada nudo de la malla utilizada se podrá extrapolar mediante:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r} + \theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{1}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.64)$$

Asimismo, el error y la energía de deformación estimadas sobre cada elemento también podrán extrapolarse mediante:

$$\eta_e^{2^{k+1}} = \eta_e^2 + \theta \frac{\partial \eta_e^2}{\partial \mathbf{s}} + \frac{1}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 \eta_e^2}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.65)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{E_e}^{2^{k+1}} = \|\mathbf{u}\|_{E_e}^2 + \theta \frac{\partial \|\mathbf{u}\|_{E_e}^2}{\partial \mathbf{s}} + \frac{1}{2} \theta^2 \frac{\partial^2 \|\mathbf{u}\|_{E_e}^2}{\partial \mathbf{s}^2} \quad (5.4.66)$$

Mediante las anteriores extrapolaciones se obtendrá una aproximación a los valores del error y la energía de deformación, correspondientes al cálculo del nuevo diseño, utilizando la malla previa convenientemente deformada. *Es decir, antes de realizar ningún cálculo sobre el nuevo diseño, ya se dispondrá de información sobre la calidad de los resultados que se obtendrían utilizando una malla equivalente a la anterior. De esta forma, un estimador de error que se calcula a posteriori, después de haber efectuado los cálculos sobre un diseño, se convierte, después de la extrapolación, en un estimador de error a priori para el diseño siguiente.*

A partir de las extrapolaciones realizadas mediante (5.4.64) – (5.4.66) se puede actuar como si esos valores procediesen de un cálculo previo y realizar las mismas operaciones que en los procesos de remallado automático para determinar los parámetros de cada nueva malla. Para ello es necesario hallar los tamaños de los elementos de la malla a generar mediante las expresiones (2.7.6) – (2.7.8), teniendo en cuenta el criterio de optimalidad que se utilice. Con esta información puede procederse a generar la malla para el nuevo diseño.

La idea anterior constituye una herramienta fundamental para la inclusión del control de errores y la generación automática de mallas dentro de

los procesos de optimización estructural, sin que ello suponga un aumento apreciable de su coste. El hecho de disponer de información sobre el cálculo de un cierto diseño antes de haber realizado ninguna operación sobre él permite generar directamente una malla adecuada al nivel de error que se desee. De esta forma, a diferencia de los procesos de remallado automático, no se repiten cálculos sobre ninguno de los diseños sino que se aprovecha al máximo toda la información obtenida con cada uno de ellos para calcular el siguiente.

El razonamiento anterior constituye, quizás, la mayor aportación de este trabajo, ya que permite incluir de una forma muy "natural" el control de errores y la generación automática de mallas dentro de los procesos de optimización estructural, con el mínimo coste.

Por otro lado hay que pensar que el objetivo último de estos procesos es conseguir un diseño óptimo que además esté calculado con un cierto nivel de precisión. Esto quiere decir que tanto el valor de la función objetivo como los de las restricciones aplicadas se obtendrán con ese nivel de precisión, garantizando por tanto que ese óptimo está bien calculado. En caso contrario podría suceder que después de obtener un diseño óptimo, un cálculo más preciso del mismo demostrase que en realidad las restricciones estuviesen violadas invalidando, por tanto, todo el proceso de optimización.

Los diversos diseños intermedios que se obtienen durante el proceso iterativo de optimización tienen un interés relativo en el sentido de que son simplemente "puntos de paso" dentro del espacio de diseño. Por ello, la precisión con la que se calculan los mismos debe ser suficiente para tomar buenas decisiones en cuanto a la dirección y el factor de avance, pero puede ser inferior a la del diseño final porque no se estará especialmente interesado en conocer su comportamiento. Por ello, para abaratar el coste de los cálculos, puede pensarse en desarrollar algoritmos que exijan niveles de precisión no muy estrictos para los primeros diseños para ser luego más exigente al ir acercándose al óptimo.

Una forma muy sencilla de llevar al cabo la idea anterior es la de "amortiguar" el refinamiento utilizando una malla muy grosera para el diseño inicial y limitando las variaciones en el tamaño de los elementos al pasar de un diseño al siguiente. De esta forma se evita que los elementos muy pequeños no aparezcan hasta estar relativamente cerca del diseño final.

Por otro lado, hay que pensar que los diseños óptimos tienden a evitar que se produzcan concentraciones de tensiones de forma que toda la estructura trabaje a un nivel lo más uniforme posible. En ocasiones esas concentraciones aparecen, momentáneamente, en diseños intermedios y un cálculo preciso de las mismas no proporciona mejoras sensibles dentro del proceso. Por ello

resulta también recomendable que el tamaño de los elementos no se reduzca con demasiada rapidez para tener luego que crecer al llegar al diseño final.

Una forma muy sencilla de implementar la limitación anterior consiste en acotar el valor de ξ_e de (2.7.7) a un cierto valor, de forma que la disminución de los tamaños de elemento será, como mucho, un cierto porcentaje de los utilizados previamente. En los ejemplos que se presentan en el Capítulo 6. este valor se ha limitado a 1.5.

Asimismo, resulta conveniente limitar el tamaño mínimo que puede tener un elemento para evitar que sucesivos refinamientos en las zonas situadas alrededor de puntos singulares conduzcan a la generación de mallas con demasiados elementos, haciendo el coste de su resolución inabordable.

5.4.5 Módulo de Postproceso

Las funciones de este módulo consisten, básicamente, en facilitar la interpretación de los resultados del proceso de optimización. Dado que el funcionamiento de la metodología propuesta es totalmente automático y no precisa de la interacción con el usuario, las funciones de postproceso se pueden realizar a posteriori una vez finalizado todo el cálculo. Para ello únicamente se necesita almacenar toda la información obtenida durante el proceso de optimización, para poder acceder a ella posteriormente.

5.4.6 Módulo de Control

Este módulo es el encargado de coordinar el funcionamiento de todos los demás, así como de controlar el flujo de información necesario entre ellos. La forma de llevar a cabo esta tarea engloba principalmente aspectos informáticos, por lo que su descripción sale fuera de este contexto.

(CAPÍTULO 5) ANEXO B**CÁLCULO DE LAS SENSIBILIDADES
DE PRIMER ORDEN PARA LAS
EXPRESIONES INTEGRALES**

Durante el proceso de cálculo por elementos finitos aparecen varias expresiones integrales que es preciso derivar para conocer sus sensibilidades. Estas expresiones integrales están normalmente definidas sobre dominios que corresponden a un elemento o a una cara del mismo. En cálculo tridimensional cabe también la posibilidad de tener integrales de línea definidas sobre aristas de elementos.

La forma general de estas expresiones es la siguiente:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_e(\mathbf{x})} \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Omega \\ Q(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_e(\mathbf{x})} \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Gamma \\ S(\mathbf{x}) &= \int_{l_e(\mathbf{x})} \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) dl \end{aligned} \quad (B.1)$$

En general, las expresiones a integrar dependerán de las coordenadas del espacio \mathbf{r} y de las variables de diseño \mathbf{x} . Al espacio \mathbf{r} en que están definidas las integrales se le llamará espacio material. La forma de los dominios de integración también dependerá de las variables \mathbf{x} si éstas afectan a la geometría de los elementos.

Tradicionalmente se ha dado en llamar procesos de “optimización de dimensiones” a aquellos en los cuales la dependencia respecto a las variables de diseño ocurre únicamente en las funciones subintegrando. En ese caso, la geometría de los dominios de integración no cambia y la derivación de las expresiones anteriores se puede llevar a cabo con relativa sencillez sin más que calcular las integrales de las sensibilidades de las funciones a integrar. Este caso corresponde a procesos en los cuales las variables de diseño afectan únicamente a las propiedades del material, dimensiones que no afecten a la geometría, y a la magnitud de las acciones exteriores.

Por contra, en los procesos de “optimización de formas” sí existe una dependencia de la geometría de los dominios de integración respecto a la variación de las variables de diseño.

A pesar de la distinción anterior, se recomienda llevar a cabo un procedimiento unificado para ambos tipos de optimización ya que ello redundaría en una mayor generalidad y sencillez. Las expresiones que aquí se presentan son generales y pueden utilizarse en ambos casos.

Para el cálculo de las integrales (B.1) se utiliza normalmente una transformación entre el espacio material, donde está definida la estructura, y un espacio de referencia o isoparamétrico donde están definidas las funciones de forma. Es en este último espacio donde se utilizan las cuadraturas de integración que permiten evaluar las expresiones (B.1). En este segundo espacio, los recintos de integración se definen en función de las llamadas coordenadas isoparamétricas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) y su geometría responde siempre a valores fijos de estas últimas.

La transformación anterior se define mediante las funciones de forma:

$$\mathbf{r} = \sum_i N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{r}_i \quad (B.2)$$

donde \mathbf{r}_i son los valores de las coordenadas materiales correspondientes a cada nodo del elemento. Mediante este cambio de coordenadas las integrales de (B.1) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_e(\mathbf{x})} \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}} \mathbf{p}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x}) |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_e(\mathbf{x})} \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}} \mathbf{q}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x}) \|\mathbf{n}\| d\xi_1 d\xi_2 \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \int_{l_e(\mathbf{x})} \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) dl = \int_{l_{\boldsymbol{\xi}}} \mathbf{s}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x}) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right\| d\xi_1 \end{aligned} \quad (B.3)$$

Las normas que aparecen en las expresiones anteriores son euclídeas. El jacobiano de la transformación $\mathbf{J} = J_{jk}$ se define, como es usual, de la forma:

$$J_{jk} = \frac{\partial r_j}{\partial \xi_k} \quad (B.4)$$

Asimismo, el vector normal \mathbf{n} se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \quad (B.5)$$

En las nuevas expresiones, obtenidas después de hacer la transformación, la forma de los dominios de integración ya no depende de las variables de diseño. Por ello, el cálculo de sus sensibilidades se puede llevar a cabo sin más que derivar los términos del subintegrando. La dependencia que existía previamente respecto de dichas variables se reflejará ahora dentro de la matriz jacobiana \mathbf{J} , el vector normal \mathbf{n} y el vector $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_1$ respectivamente. El cálculo de las sensibilidades direccionales se podrá realizar entonces mediante las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_{\xi}} \left[\frac{\partial p(\xi, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} |\mathbf{J}| + p(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \mathbf{s}} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Gamma_{\xi}} \left[\frac{\partial q(\xi, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} \|\mathbf{n}\| + q(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial \|\mathbf{n}\|}{\partial \mathbf{s}} \right] d\xi_1 d\xi_2 \quad (B.7)$$

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{l_{\xi}} \left[\frac{\partial s(\xi, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} \|\mathbf{n}\| \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right\| + s(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial \|\partial \mathbf{r} / \partial \xi_1\|}{\partial \mathbf{s}} \right] d\xi_1 \quad (B.8)$$

Para evaluar las integrales anteriores es útil utilizar las siguientes expresiones debidas a Navarrina ^{[44][45]}:

$$\frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \mathbf{s}} = |\mathbf{J}| \operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \quad (B.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial \mathbf{s}} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{J}^{-1} \quad (B.10)$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{n}\|}{\partial \mathbf{s}} = \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) - \frac{\mathbf{n}^T \left(\mathbf{J}^{-1T} \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{s}} \right) \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \right] \|\mathbf{n}\| \quad (B.11)$$

$$\frac{\partial \|\partial \mathbf{r} / \partial \xi_1\|}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}}{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}\right)^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right\| \quad (B.12)$$

Utilizando las expresiones anteriores es posible calcular todas las sensibilidades de primer orden de las integrales que aparecen en (5.2.23), (5.2.24), (5.2.26) y (5.2.37). Así, para la matriz de rigidez \mathbf{K} se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_{\xi}} \left[\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{D} \mathbf{B} |J| + \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{B} |J| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} |J| + \right. \\ \left. \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| \operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (B.13)$$

El cálculo de las sensibilidades de las matrices \mathbf{B} y \mathbf{J} es un poco elaborado y por ello se va a describir con detalle. En elasticidad tridimensional, la matriz \mathbf{B} de un elemento con n nodos tendrá la forma:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (B.14)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (B.15)$$

Además, el cálculo de las derivadas de la matriz anterior se puede llevar a cabo teniendo en cuenta:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (B.16)$$

Por lo tanto, derivando la expresión anterior y teniendo en cuenta (B.10) se puede obtener:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

Queda por tanto resolver la derivación de la matriz jacobiana \mathbf{J} . Para ello sólo hay que considerar la derivación de cada uno de los términos de (B.4):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} r_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \mathbf{s}} \quad (B.18)$$

r_{ij} denota la componente j -ésima del vector de posición del punto i -ésimo.

Las expresiones anteriores relacionan el cálculo de las sensibilidades de las matrices \mathbf{J} y \mathbf{B} con las sensibilidades de las coordenadas de los nodos de la malla descritas en el apartado 5.4.2.

A partir de lo anterior es posible derivar el resto de las expresiones integrales que participan en todo el proceso de cálculo. Así, para los vectores de fuerzas será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{s}} = & \int_{\Omega_\xi} \left[\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0)) \|\mathbf{J}\| + \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{s}} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \|\mathbf{J}\| + \right. \\ & \left. \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0) \|\mathbf{J}\| \operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \\ & \int_{\Omega_\xi} \left[\mathbf{N}^T \mathbf{b} \|\mathbf{J}\| \operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (B.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\Gamma_e}}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) - \frac{\mathbf{n}^T \left(\mathbf{J}^{-1T} \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{s}} \right) \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \right] \|\mathbf{n}\| d\xi_1 d\xi_2 \quad (B.20)$$

La particularización de las expresiones anteriores para el caso bidimensional es trivial. Para las expresiones (5.2.26) se tendrá:

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_{\xi}} \left[\bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}} \|\mathbf{J}\| + \bar{\mathbf{N}}^T \boldsymbol{\sigma} \|\mathbf{J}\| \text{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (B.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_{\xi}} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} \|\mathbf{J}\| \text{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (B.22)$$

Por último, queda calcular la sensibilidad del estimador de error (5.2.37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_e^2}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_{\xi}} & \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}} \right)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}) \|\mathbf{J}\| + \right. \\ & (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^T \frac{\partial \mathbf{D}^{-1}}{\partial \mathbf{s}} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}) \|\mathbf{J}\| + \\ & (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}} \right) \|\mathbf{J}\| + \\ & \left. (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}) \|\mathbf{J}\| \text{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (B.23)$$

Para un estudio más detallado de la deducción de las expresiones anteriores se pueden consultar las referencias [44][45].

(CAPÍTULO 5) ANEXO C**CÁLCULO DE LAS SENSIBILIDADES
DE ORDEN SUPERIOR PARA LAS
EXPRESIONES INTEGRALES**

Siguiendo la metodología presentada en [44][45] para la derivación de orden superior, se definen los siguientes operadores:

$$D_{\mathbf{s}}^{\Omega} : \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} + \text{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \quad (B.1)$$

$$D_{\mathbf{s}}^{\Gamma} : \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} + \left[\text{tr} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{s}} \right) - \frac{\mathbf{n}^T \left(\mathbf{J}^{-1T} \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{s}} \right) \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \right] \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \quad (B.2)$$

$$D_{\mathbf{s}}^l : \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}}{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right)^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}} \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \quad (B.3)$$

Las ecuaciones (A.6), (A.7) y (A.8) se pueden escribir de la forma:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Omega_e(\mathbf{x})} D_{\mathbf{s}}^{\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Omega \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{\Gamma_e(\mathbf{x})} D_{\mathbf{s}}^{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\Gamma \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \int_{l_e(\mathbf{x})} D_{\mathbf{s}}^l \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) dl \quad (B.6)$$

La estructura de las expresiones anteriores es la misma que la de la de los segundos miembros de (A.1). Por lo tanto la operación de derivación direccional se puede expresar de forma recurrente, obteniendo para la derivada n -ésima de las funciones definidas en (A.1) las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^n \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\partial s_1, \dots, \partial s_n} = \int_{\Omega_{\xi}} D_{s_n}^{\Omega}, \dots, D_{s_1}^{\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \|\mathbf{J}\| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (B.7)$$

$$\frac{\partial^n \mathbf{Q}(\mathbf{x})}{\partial s_1, \dots, \partial s_n} = \int_{\Gamma_{\xi}} D_{s_n}^{\Gamma}, \dots, D_{s_1}^{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \|\mathbf{n}\| d\xi_1 d\xi_2 \quad (B.8)$$

$$\frac{\partial^n \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial s_1, \dots, \partial s_n} = \int_{l_{\xi}} D_{s_n}^l, \dots, D_{s_1}^l \mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right\| d\xi_1 \quad (B.9)$$

CAPÍTULO 6

EJEMPLOS DE APLICACIÓN EN PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

6.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo se contrasta la validez y utilidad de las técnicas y algoritmos expuestos en capítulos anteriores, mediante su aplicación a diversos problemas de optimización estructural.

A partir de los planteamientos descritos en el Capítulo 5. se ha confeccionado un programa de ordenador, llamado SAMOP, que consta de unas 30.000 instrucciones. Este programa contempla la optimización de estructuras en régimen elástico lineal y estático calculadas mediante el método de los Elementos Finitos, abarcando las siguientes teorías:

- Tensión plana.
- Deformación Plana.
- Simetría de revolución.

Se incluye la posibilidad de que una misma estructura tenga que ser calculada mediante varias de las teorías anteriores simulando comportamientos distintos en diversas fases de su construcción.

Mediante este programa de ordenador se han resuelto una serie de ejemplos, cuyo grado de dificultad es muy diverso. Sin embargo, las técnicas presentadas en el Capítulo 5. han permitido la resolución de todos ellos con el mismo programa de ordenador.

En el ejemplo nº 1 se analiza la optimización de la sección de una tubería sometida a una presión interior. Este ejemplo se ha resuelto utilizando dos parametrizaciones muy distintas que han proporcionado el mismo resultado final.

En el ejemplo nº 2 se analiza la optimización de la forma de una biela sometida a una fuerza de tracción.

En el ejemplo nº 3 se incluyen dos problemas muy semejantes en cuanto a su tipología, que se diferencian, básicamente, en el modelo de cálculo utilizado en cada caso. Estos problemas consisten en la optimización de la forma de un arco y de una bóveda respectivamente.

En el ejemplo nº 4 se analiza la optimización de la forma de la sección central de una presa bóveda. En este ejemplo se han utilizado dos teorías de cálculo distintas (tensión plana y simetría de revolución) y se han combinado los casos de carga correspondientes al peso propio y a la presión hidrostática del agua. Este problema se ha resuelto en primer lugar sin considerar la influencia de la cimentación y, posteriormente, se ha incluido la misma en el análisis.

El criterio de optimalidad utilizado para la generación de las mallas ha sido, en todos los casos, el de error constante por unidad de área. Asimismo, la función objetivo que se ha utilizado en todos los ejemplos es la correspondiente al peso de la estructura optimizada y el algoritmo utilizado para resolver el problema matemático de optimización es el descrito en el Capítulo 5.

6.2 EJEMPLO N° 1. OPTIMIZACIÓN DE LA SECCIÓN DE UNA TUBERÍA

En este ejemplo se ha planteado la optimización de la forma de la sección de una tubería sometida a una presión interior. La solución a este problema es, evidentemente, una sección circular de espesor uniforme, el cual depende del nivel de tensión alcanzado y de la resistencia del material. La utilidad de este ejemplo, tan sencillo, es comprobar el buen funcionamiento del sistema.

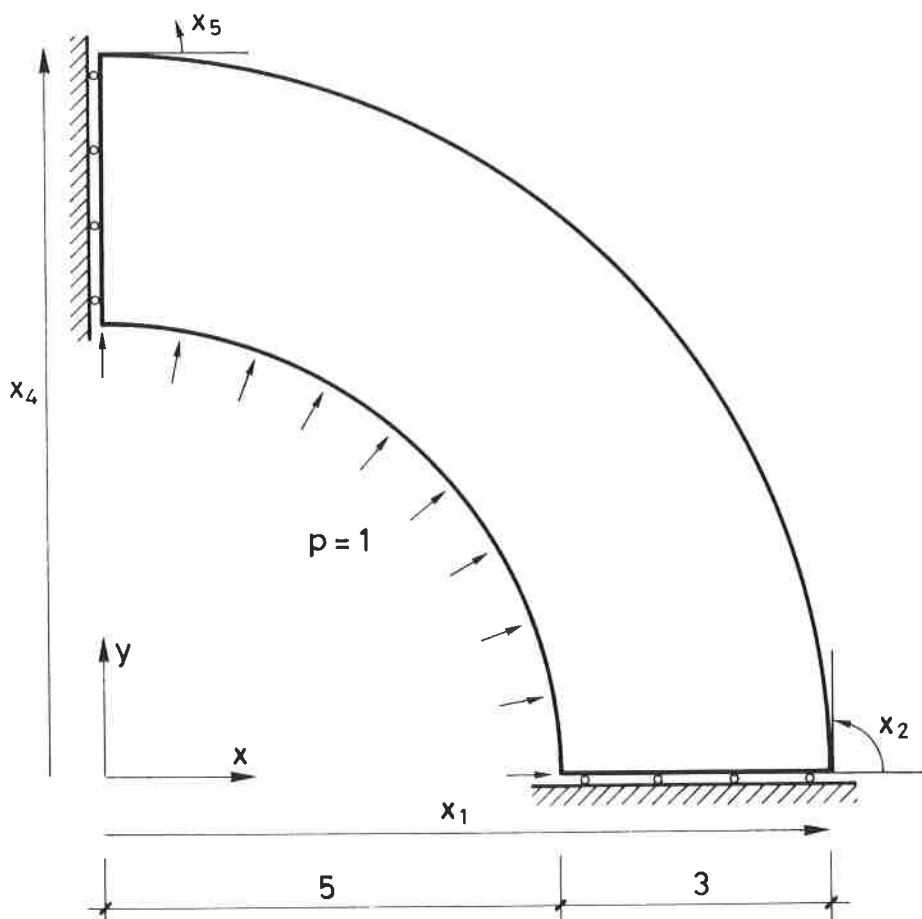


FIGURA 6.1 Optimización de tubo. Caso 1. Parametrización de los diseños.

Debido a la simetría del problema, el proceso de optimización se ha

limitado a hallar la forma óptima de un cuadrante de la sección. La geometría de la misma se ha modelado mediante una sola curva formada por cuatro puntos en los cuales la pendiente de la misma es discontinua. La forma del diseño inicial, así como su parametrización se describen en la figura 6.1. Se han tomado como variables de diseño las distancias de los dos puntos extremos al centro del círculo (x_1 y x_4), las pendientes de la curva en esos puntos (x_2 y x_5) y los factores f correspondientes a esas pendientes (x_3 y x_6). De esta forma, el proceso de optimización consistirá en modificar la forma de la superficie exterior de la tubería hasta hallar el óptimo, manteniendo el radio interior constante.

Las características mecánicas del material utilizado corresponden a un caso hipotético y son $E = 100000. Kg/cm^2$, y $\nu = 0.3$. Los cálculos se han realizado con un modelo de deformación plana.

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_i^x
x_1	0.	50.	1.	0.1
x_2	-30.	30.	10.	0.3
x_3	8.5	50.	2.	0.3
x_4	0.	50.	1.	0.1
x_5	240.	300.	10.	0.3
x_6	8.5	50.	2.	0.3

TABLA 6.1 Optimización de tubo. Caso 1. Parámetros definidos para las variables de diseño.

Restricción	Máximo	ϵ_j^g	η_j
r_1	10.	1.	0.1

TABLA 6.2 Optimización de tubo. Caso 1. Parámetros definidos para las restricciones.

La carga aplicada es una presión interior uniforme de valor $1.0 Kg/cm^2$.

Se han impuesto restricciones r_1 sobre las tensiones obtenidas en todos los nodos generados sobre el contorno, limitando el valor de la máxima tensión principal a $10 Kg/cm^2$.

Los parámetros necesarios para el funcionamiento del algoritmo de optimización que se han utilizado se describen en las tablas 6.1 y 6.2.

El problema se ha resuelto utilizando elementos triangulares de 6 nodos y limitando el nivel global de error a un 1%.

La sucesión de diseños y mallas obtenidos se presenta en la figura 6.2. Como puede apreciarse, el proceso converge en la séptima iteración y el diseño final es el esperado. En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se presentan, respectivamente, las evoluciones de la función objetivo, el porcentaje global de error y el número de elementos utilizados en cada malla.

La función objetivo (fig. 6.3) desciende muy rápidamente hasta llegar a un diseño no factible en la iteración número 2. Después aumenta ligeramente para proporcionar un diseño factible y vuelve a descender para los últimos diseños.

El número de elementos utilizado (fig. 6.5) crece hasta la iteración número 3 y luego desciende permaneciendo entre los 15 y los 20 elementos. Asimismo el porcentaje de error (fig. 6.4) tiene un pico en la iteración número 2 y luego permanece por debajo del porcentaje exigido de un 1%.

Durante la realización de este ejemplo se puso de manifiesto la utilidad del “amortiguamiento” del refinamiento descrito en el apartado 5.4.4.5. Sin éste, el programa produjo una malla mucho más densa en el diseño número 2 para evitar que creciese el porcentaje de error global. Ello duplicó el tiempo de ordenador necesario para resolver el problema sin producir ninguna mejora en el proceso iterativo de optimización. De hecho, la introducción del “amortiguamiento” redujo en una iteración el número de pasos necesarios para llegar al diseño final.

El aumento del porcentaje de error global registrado en la iteración número 2 es, por tanto, debida a que el “amortiguamiento” introducido no permitió generar el número suficiente de elementos para disminuir el mismo por debajo del límite fijado.

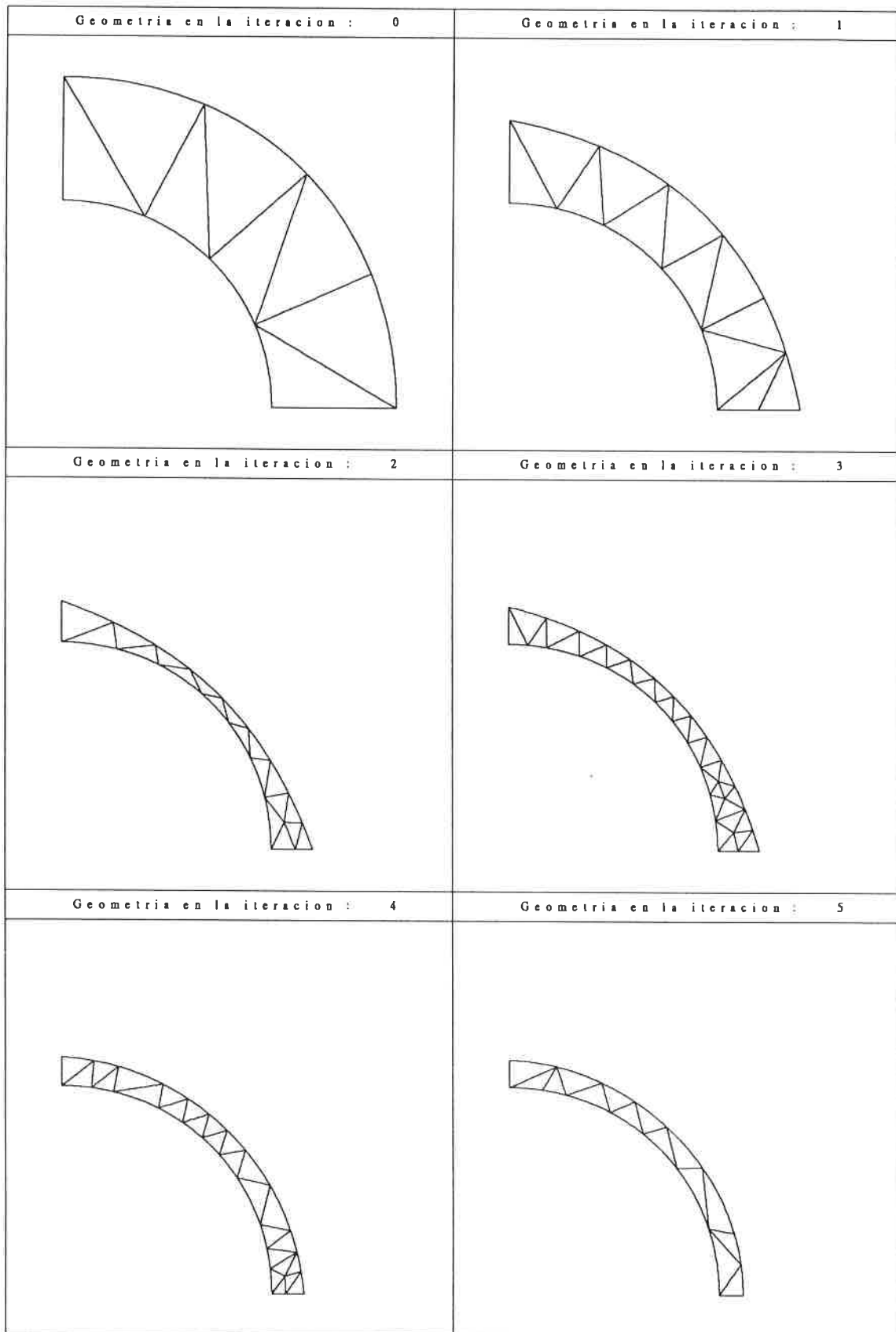


FIGURA 6.2A Optimización de tubo. Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

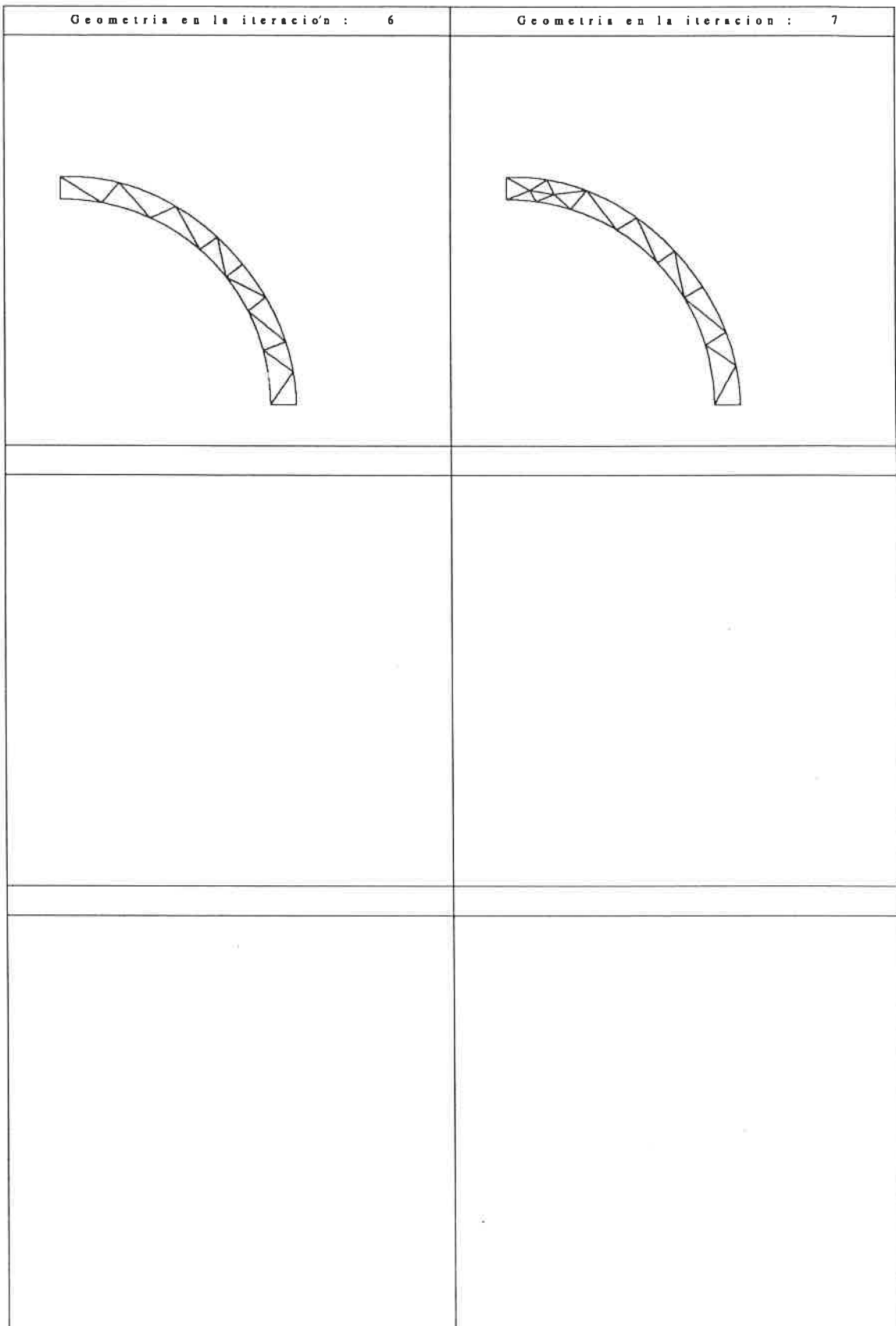


FIGURA 6.2B Optimización de tubo. Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

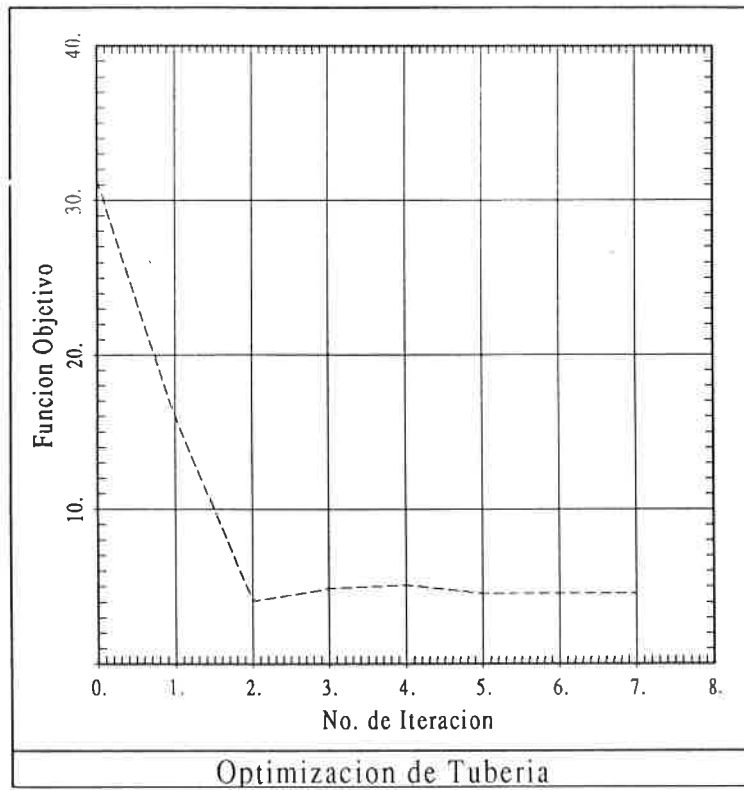


FIGURA 6.3 Optimización de tubo. Caso 1. Evolución de la función objetivo.

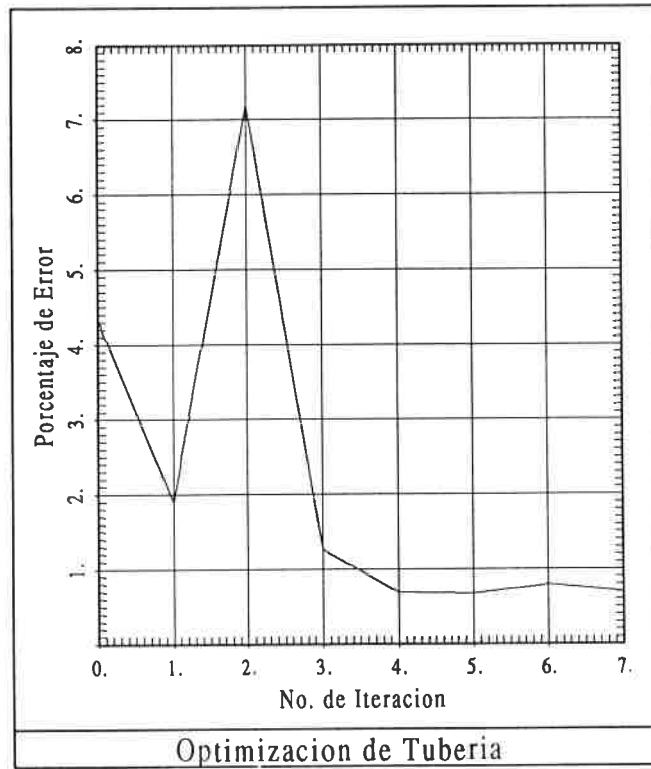


FIGURA 6.4 Optimización de tubo. Caso 1. Evolución del porcentaje global de error.

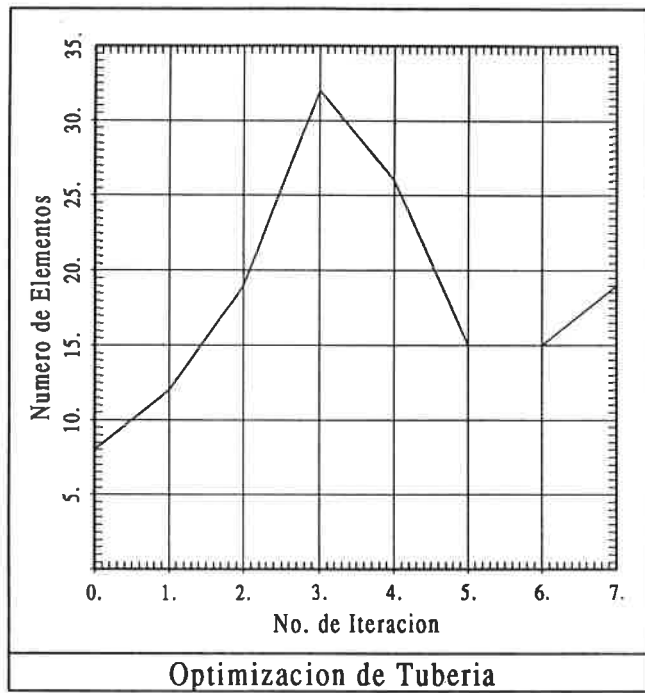


FIGURA 6.5 Optimización de tubo. Caso 1. Evolución del número de elementos utilizados.

La parametrización utilizada en este primer caso es muy sencilla y se ha definido en función de unas pocas variables de diseño que además conducen a una forma circular con mucha facilidad. Para poner a prueba el algoritmo de optimización se ha vuelto a resolver el problema con una parametrización más compleja utilizando más variables de diseño. Además se ha comenzado con un diseño inicial mucho más alejado de la solución final que en el caso anterior. En este caso, las posibilidades de variación de la forma de cada diseño son mucho mayores, dificultando por tanto la resolución del problema.

La parametrización utilizada en este caso se esquematiza en la figura 6.6. Se han utilizado como variables de diseño 6 coordenadas de puntos ($x_1, x_4, x_7, x_8, x_{13}$ y x_{14}), 6 ángulos ($x_2, x_5, x_9, x_{11}, x_{15}$ y x_{17}), y los 6 factores f asociados a esos ángulos ($x_3, x_6, x_{10}, x_{12}, x_{16}$ y x_{18}). Para ser más estricto que en el caso anterior se han disminuido las tolerancias admitidas en las variables de diseño.

Se han impuesto las mismas restricciones en tensión que en el caso anterior (r_1). Para conservar la bisectriz del primer cuadrante como eje de simetría se han impuesto también restricciones r_2 sobre los pares de variables x_7, x_8 y x_{13}, x_{14} de forma que sus valores sean iguales y los puntos correspondientes se muevan sobre el eje de simetría durante el proceso. Estas restricciones se han impuesto sobre cada par, obligando a que la diferencia entre los valores que toma cada variable sea muy pequeña.

Los parámetros utilizados para informar al algoritmo de optimización se presentan en las tablas 6.3 y 6.4.

El resto de los datos necesarios para definir el problema son iguales a los del primer caso analizado.

La sucesión de diseños y mallas obtenidos se presenta en la figura 6.7. Asimismo, la evolución de la función objetivo, el porcentaje de error y el número de elementos utilizado se presentan respectivamente en las figuras 6.8, 6.9 y 6.10.

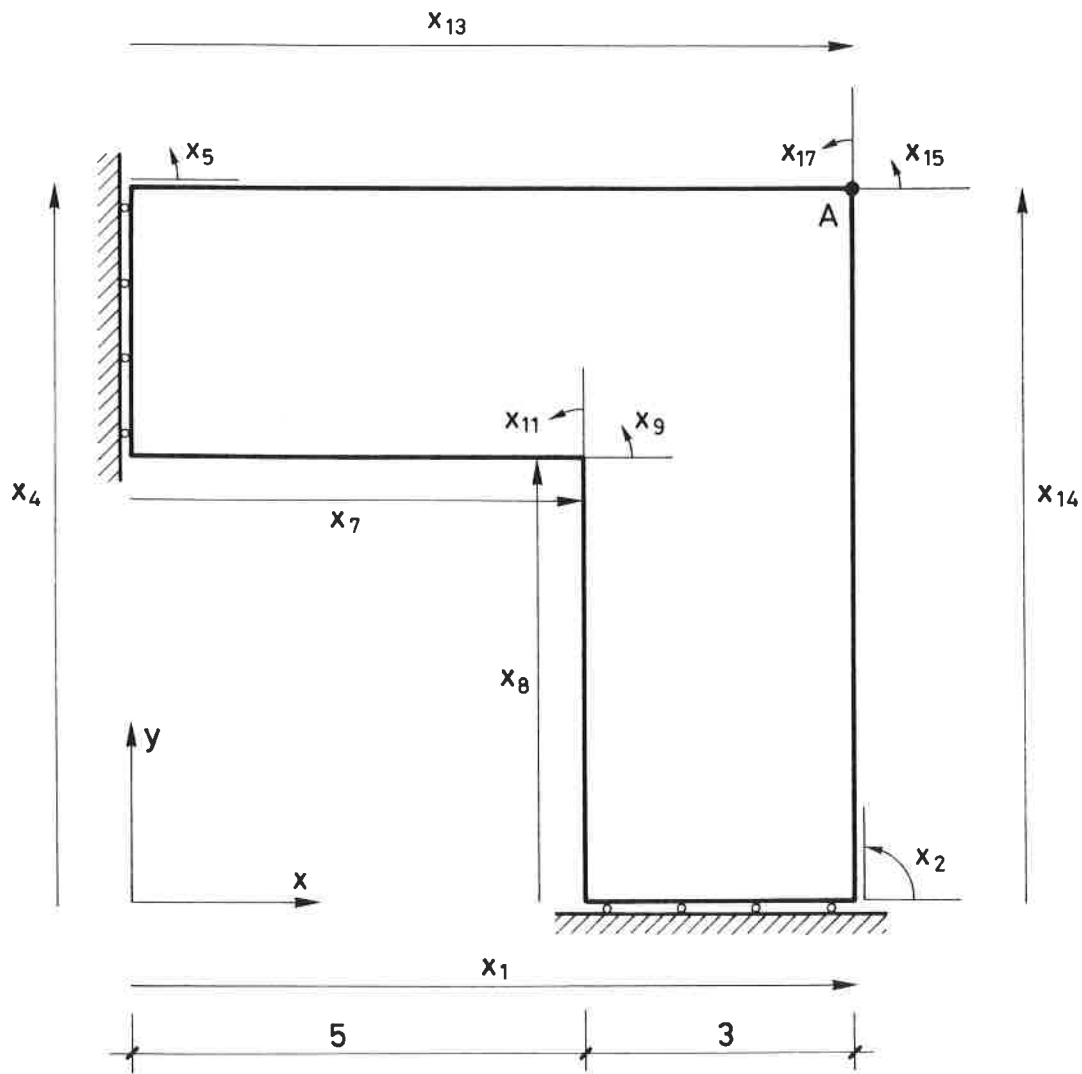


FIGURA 6.6 Optimización de tubo. Caso 2. Parametrización de los diseños.

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_i^x
x_1	0.	50.	1.	0.001
x_2	-30.	30.	10.	0.001
x_3	8.5	50.	2.	0.001
x_4	0.	50.	1.	0.001
x_5	240.	300.	10.	0.001
x_6	8.5	50.	2.	0.001
x_7	0.	50.	3.	0.001
x_8	0.	50.	3.	0.001
x_9	90.	180.	30.	0.001
x_{10}	0.	50.	2.	0.001
x_{11}	90.	180.	30.	0.001
x_{12}	0.	50.	2.	0.001
x_{13}	0.	50.	3.	0.001
x_{14}	0.	50.	3.	0.001
x_{15}	-90.	0.	30.	0.001
x_{16}	0.	50.	2.	0.001
x_{17}	270.	360.	30.	0.001
x_{18}	0.	50.	2.	0.001

TABLA 6.3 Optimización de tubo. Caso 2. Parámetros definidos para las variables de diseño.

Restricción	Máximo	ϵ_j^y	η_j
r_1	10.	1.	0.1
r_2	0.2	0.3	20.

TABLA 6.4 Optimización de tubo. Caso 2. Parámetros definidos para las restricciones.

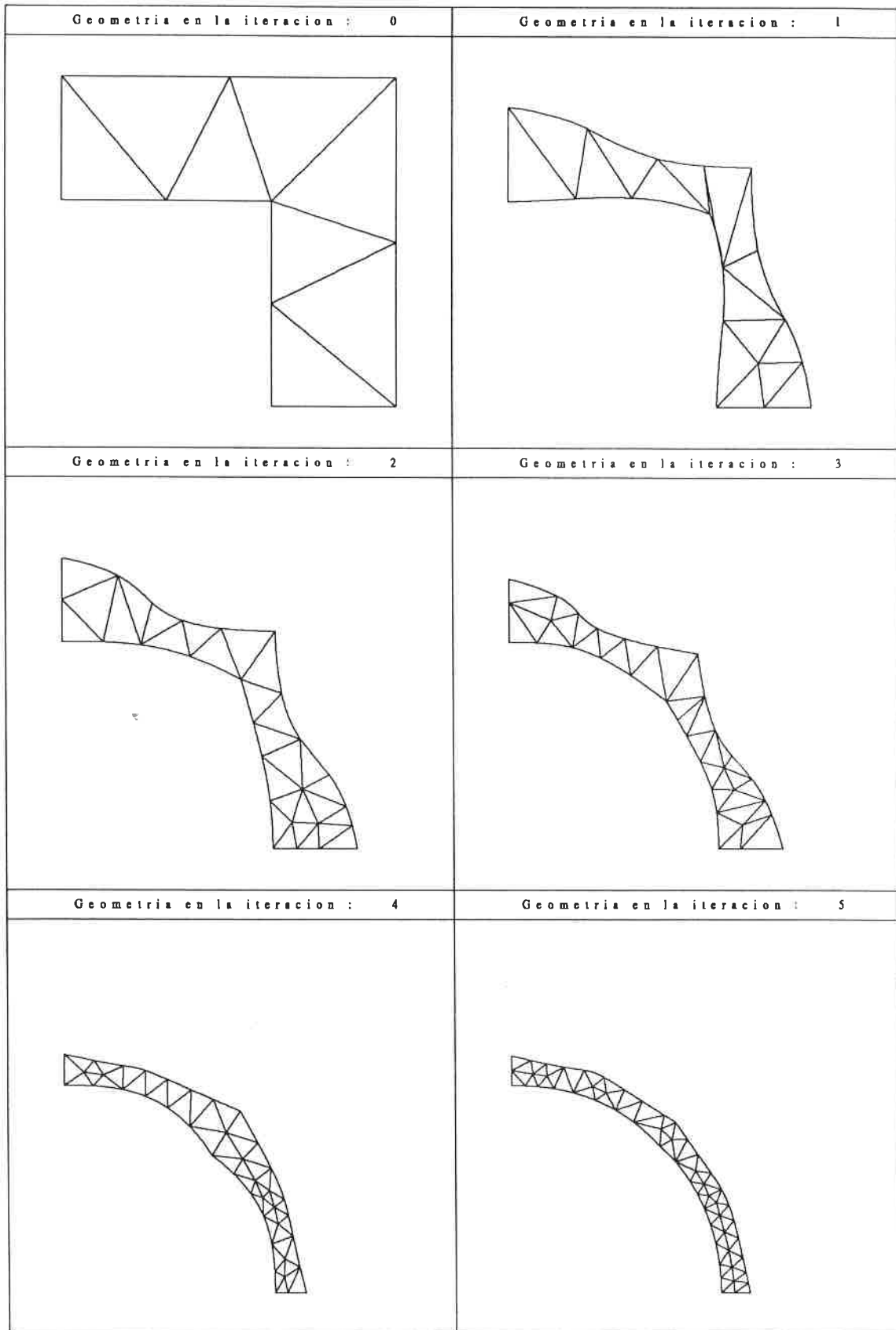


FIGURA 6.7A Optimización de tubo. Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

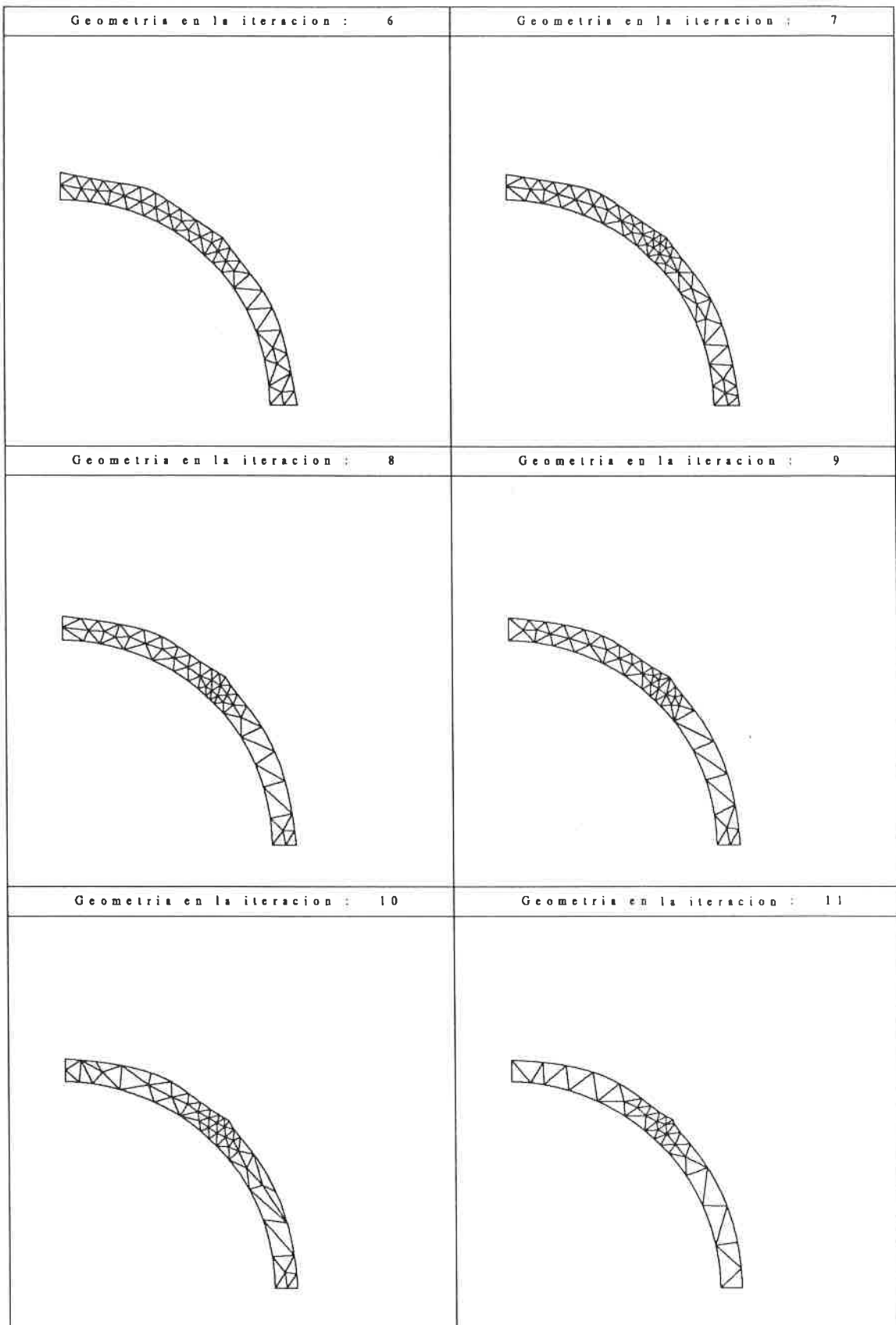


FIGURA 6.7B Optimización de tubo. Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

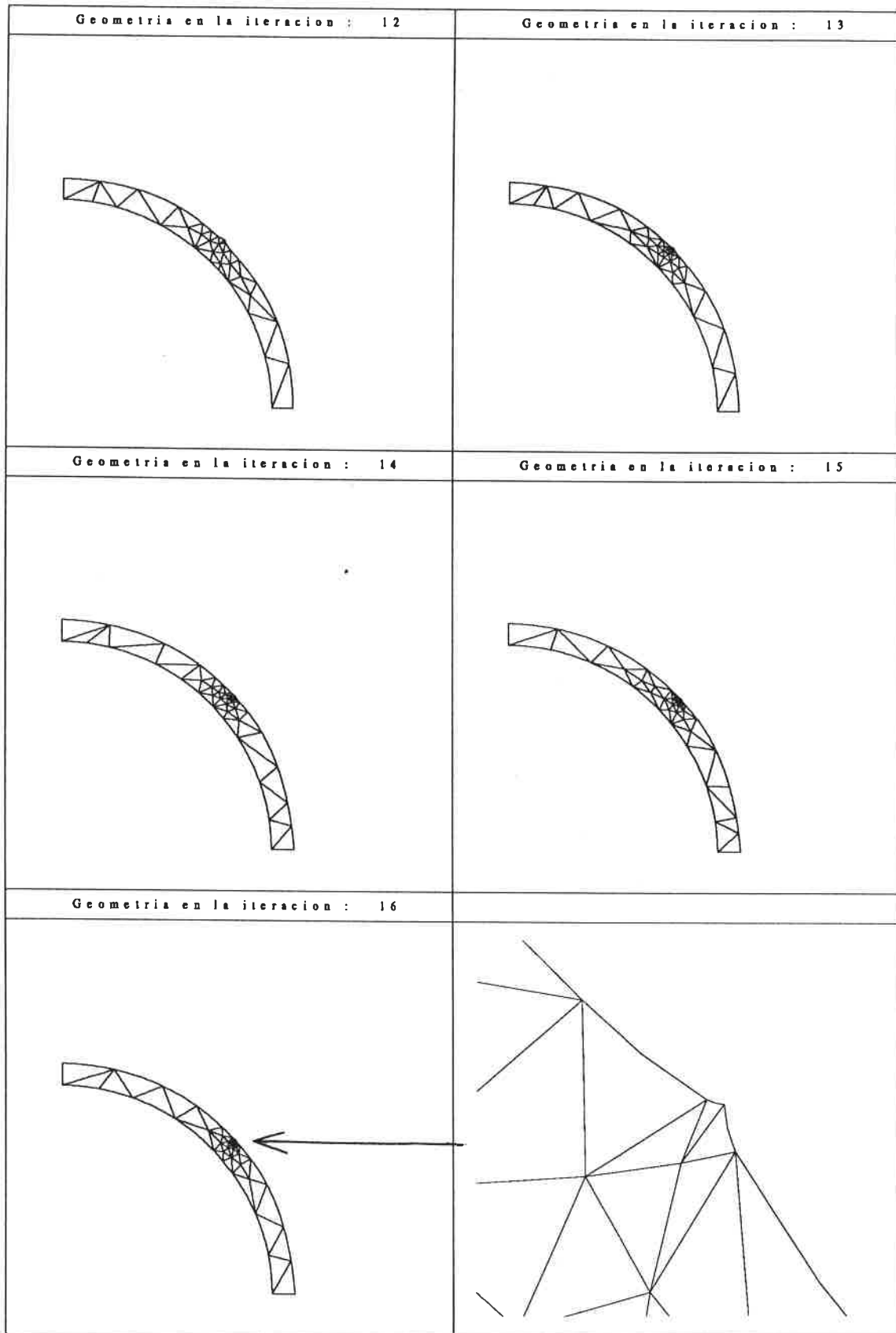


FIGURA 6.7C Optimización de tubo. Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

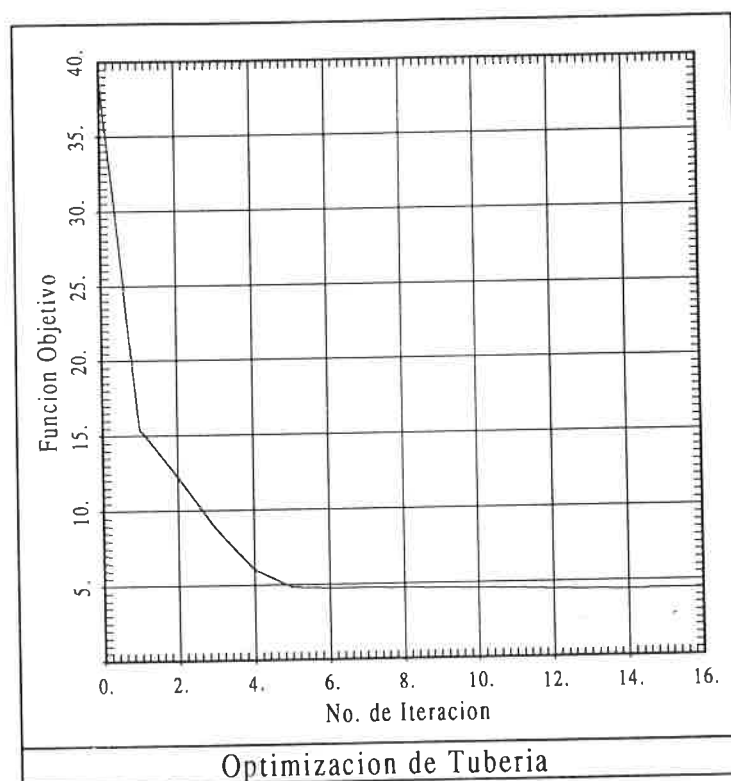


FIGURA 6.8 Optimización de tubo. Caso 2. Evolución de la función objetivo.

A pesar de la mayor complejidad que representa esta nueva parametrización, los resultados demuestran que el algoritmo ha sido capaz de llegar al mismo resultado final que en el primer caso. La convergencia hacia la misma es, además, muy rápida tal como muestra el gráfico de variación de la función objetivo. El porcentaje de error de las mallas utilizadas disminuye también muy rápidamente en las primeras iteraciones y luego permanece estable. El número de elementos utilizados crece hasta la séptima iteración y luego oscila entre valores de 40 y 70 elementos.

En los últimos diseños obtenidos se aprecia una creciente concentración de elementos alrededor del punto anguloso A (ver figura 6.6). En la figura 6.7 se puede ver un detalle del último diseño en el cual se aprecia la existencia de una pequeña angulosidad que provoca una singularidad tensional en el problema y, por tanto, una concentración de elementos en esa zona. Esta concentración indica al diseñador la existencia esta singularidad, lo que puede ser muy importante ya que advierte de que la parametrización utilizada no ha sido muy adecuada y que se puede mejorar la misma aumentando el orden de

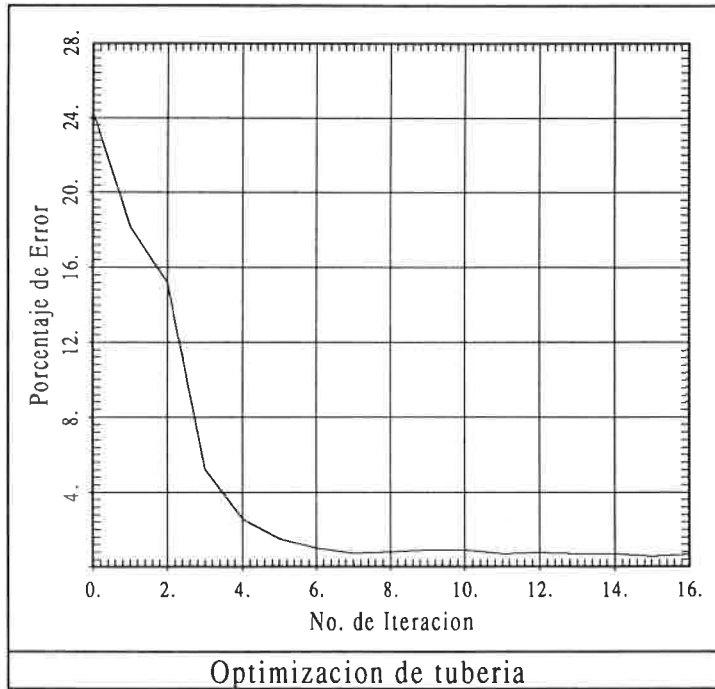


FIGURA 6.9 Optimización de tubo. Caso 2. Evolución del porcentaje global de error.

continuidad de la curva del contorno en ese punto.

Así, al haberse iniciado el diseño con una parametrización “cuadrada” del tipo de la figura 6.6, los resultados sugieren automáticamente repetir el proceso con una parametrización “circular” como la de la figura 6.1. Esta posibilidad nace de la utilización de esquemas de mallas no estructuradas adaptables que advierten, mediante las concentraciones de elementos, de la singularidad tensional originada por una mala parametrización.

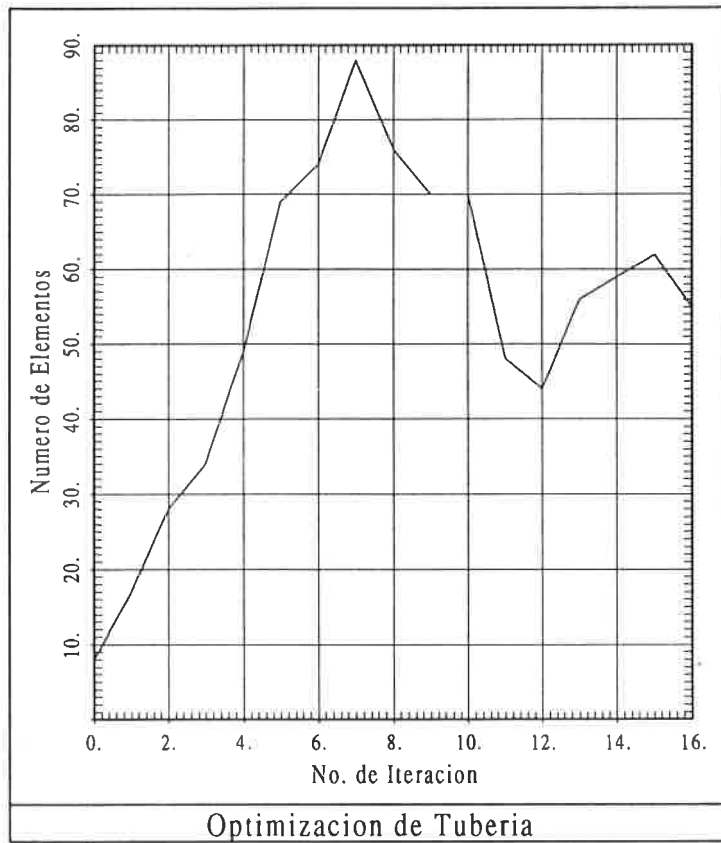


FIGURA 6.10 Optimización de tubo. Caso 2. Evolución del número de elementos utilizados.

6.3 EJEMPLO N^o 2. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE UNA BIELA

En este segundo ejemplo se ha optimizado la forma de la parte superior de una biela de motor. Para ello se han realizado unas hipótesis muy simples sobre la naturaleza de la carga que se transmite a la propia biela a través del bulón de conexión con el pistón. Dada la simetría del problema, el análisis se ha limitado a la mitad de la pieza.

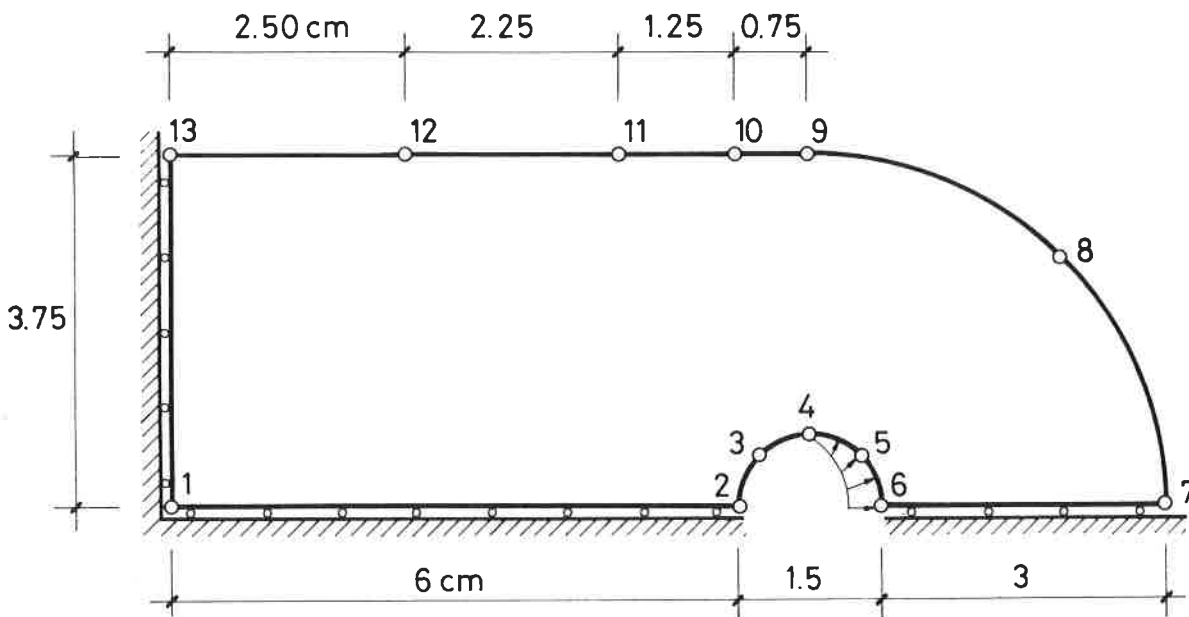


FIGURA 6.11 Optimización de biela. Diseño inicial y puntos de definición.

La forma del diseño inicial, así como los puntos utilizados para definirlo, se muestran en la figura 6.11. Para definir la curva que modelará la forma de cada diseño se han utilizado 13 puntos. Los puntos número 1, 2, 6, 7 y 13 son puntos donde la curva tiene pendiente discontinua. En el diseño inicial, los puntos 9, 8 y 7, así como los 2, 3, 4, 5, y 6 están colocados sobre sendas circunferencias. En los puntos 7 y 13 se han fijado las pendientes respectivas a $90.^{\circ}$ y $180.^{\circ}$ respectivamente.

Las características mecánicas del material utilizado son

$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$ y $\nu = 0.3$. Los cálculos se han realizado con un modelo de tensión plana.

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_i^x
x_1	0.8	6.75	2.0	0.010
x_2	0.0	3.0	1.5	0.010
x_3	0.57	6.75	1.4	0.010
x_4	0.57	6.75	1.4	0.010
x_5	0.8	6.75	2.0	0.010
x_6	0.5	6.75	2.0	0.010
x_7	0.25	6.75	2.0	0.010
x_8	0.25	6.75	2.0	0.010
x_9	0.25	6.75	2.0	0.010
x_{10}	0.0	6.0	0.5	0.010

TABLA 6.5 Optimización de biela. Parámetros definidos para las variables de diseño.

Restricción	Máximo	ϵ_j^g	η_j
r_1	2000.	5.	20.
r_2	0.2	0.3	20.

TABLA 6.6 Optimización de biela. Parámetros definidos para las restricciones.

Se han utilizado 10 variables de diseño que son:

- Coordenadas x de los puntos 7 y 8 (x_1, x_3).
- Coordenadas y de los puntos 8, 9, 10, 11, 12 y 13 ($x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$).
- Factor f de los ángulos de $90.^\circ$ y $180.^\circ$ definidos respectivamente para los puntos 7 y 13 (x_2, x_{10}).

Se han impuesto restricciones sobre la tensión de comparación de Von Mises r_1 limitando su valor a 2000.0 Kg/cm^2 . Estas restricciones se han impuesto sobre las tensiones obtenidos en todos los nodos situados sobre el contorno en cada malla. Asimismo se han impuesto restricciones r_2 sobre los valores de las coordenadas del punto 8 para que éste se mueva sobre la bisectriz del primer cuadrante.

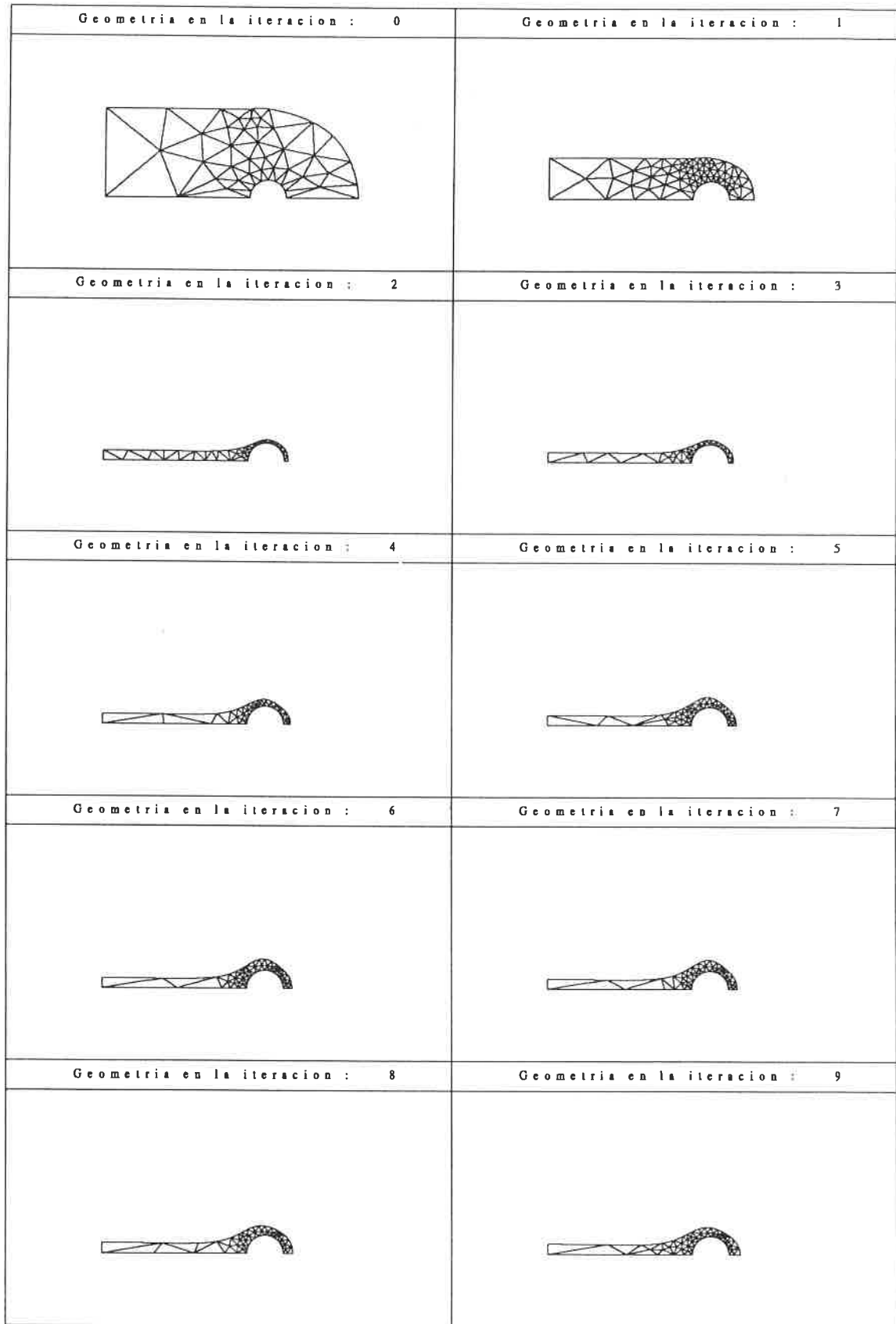


FIGURA 6.12A Optimización de biela.
obtenidos.

Sucesión de diseños

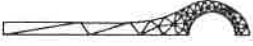
Geometría en la iteración : 10	
	

FIGURA 6.12B Optimización de biela.
obtenidos.

Sucesión de diseños



Los parámetros utilizados para definir el comportamiento de las variables de diseño y las restricciones se presentan en las tablas 6.5 y 6.6.

Para simular la aplicación de la carga de tracción se ha aplicado una carga de presión en el tramo situado entre los nudos 4 a 6. La forma de dicha carga es de variación parabólica con el arco, de forma que es nula en el nudo 4 y máxima en el nudo 6. El valor total de dicha carga es el adecuado para conseguir una resultante de valor 400.0 Kg. actuando sobre toda la biela.

El problema se ha resuelto utilizando elementos triangulares de 6 nodos limitando el nivel de error global a un 5%.

En la figura 6.12 se puede ver la sucesión de diseños y mallas obtenidas. Asimismo, en las figuras 6.13, 6.14 y 6.15 se presenta la evolución de la función objetivo, el porcentaje de error global y el número de elementos utilizado.

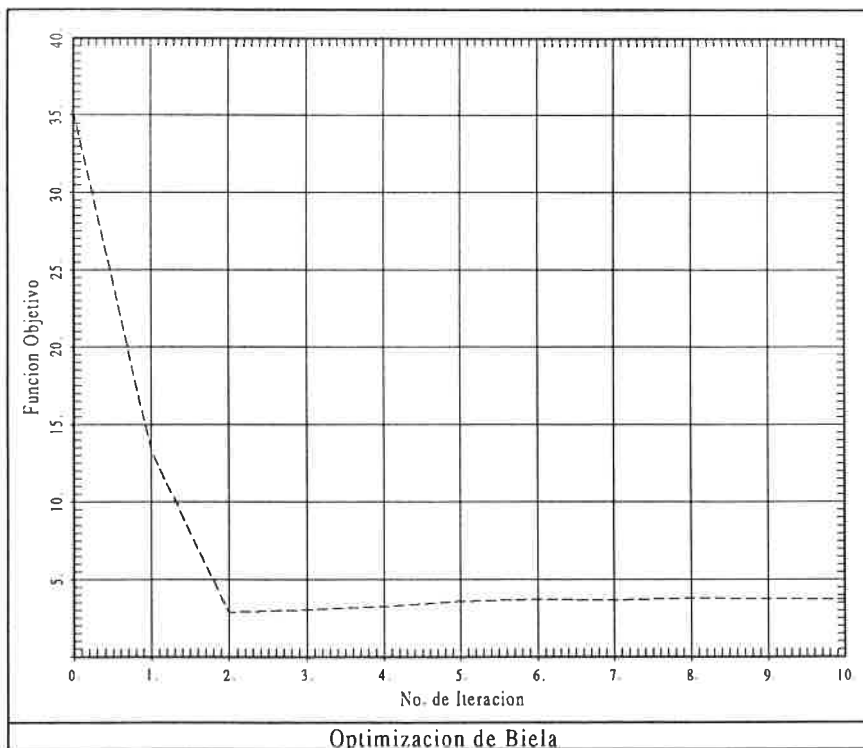


FIGURA 6.13 Optimización de biela. Evolución de la función objetivo.

A la vista de las figuras se pueden hacer las siguientes consideraciones:

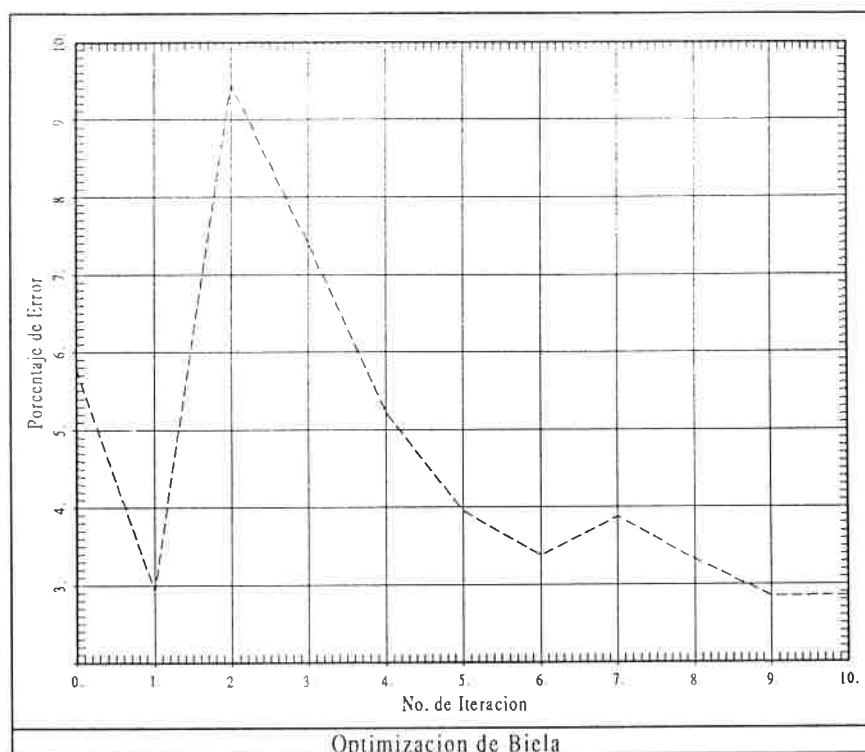


FIGURA 6.14 Optimización de biela. Evolución del porcentaje global de error.

- La función objetivo decrece rápidamente hasta el diseño número 2 que es no factible. A continuación aumenta ligeramente hasta llegar al diseño final.
- El porcentaje global de error presenta un pico muy acusado en la iteración número 2 y luego desciende paulatinamente hasta para situarse por debajo del valor prefijado del 5%.
- El número de elementos utilizados es máximo para el diseño número 1, luego desciende rápidamente y es mínimo en los diseños 2, 3 y 4 y luego sube y permanece estable hasta llegar al diseño final.

Los anteriores comentarios revelan un comportamiento anómalo del algoritmo al pasar al segundo diseño ya que éste proporciona un diseño no factible que además tiene un elevado porcentaje de error. Viendo la figura 6.12 puede verse que el cambio del diseño 1 al 2 representa una variación muy sustancial en la forma de la biela. Este cambio se traduce en una diferencia importante tanto en el comportamiento mecánico de la pieza como en los

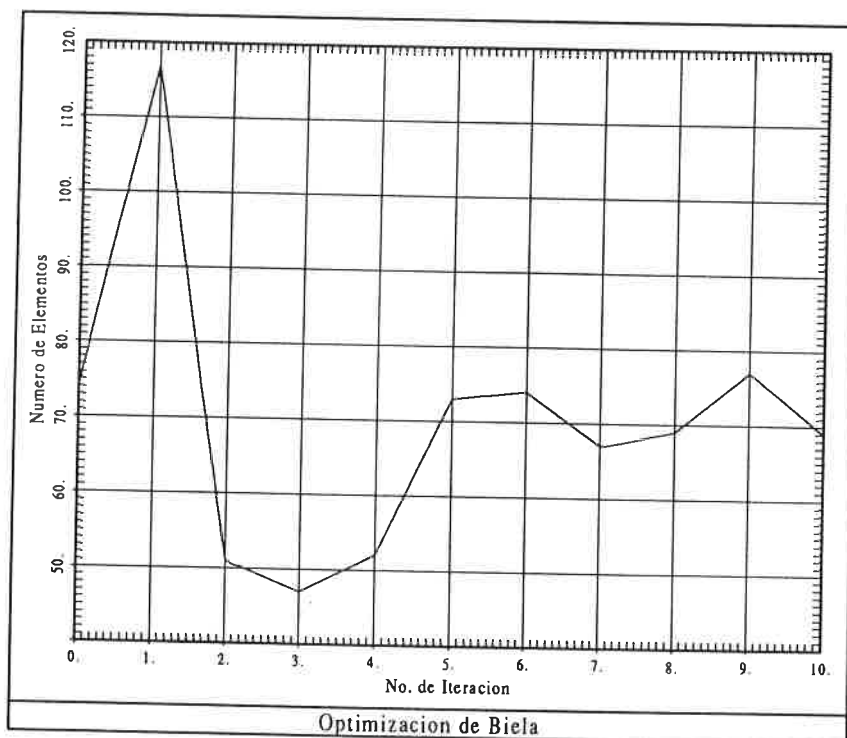


FIGURA 6.15 Optimización de biela. Evolución del número de elementos utilizados.

requerimientos para un cálculo correcto de la misma. Por ello, dada la magnitud del cambio, no es extraño que las extrapolaciones realizadas mediante el análisis de sensibilidad desde el diseño número 1 al 2 no sean tan precisos como en las iteraciones posteriores.

El espesor obtenido en la zona circular de la biela es bastante mayor que el estrictamente necesario para soportar la carga impuesta si la pieza trabajase únicamente a tracción. Este hecho es debido a que esa zona tiene un comportamiento añadido de flexión que puede observarse en las tensiones representadas en la figura 6.16 para el diseño final. En dicha figura puede observarse como las máximas tracciones aparecen en la zona superior del agujero interior de la biela. Las máximas compresiones aparecen en la intersección de dicho agujero con el eje de simetría.

Asimismo, en la figura 6.16 se prepresenta también la distribución del cociente de errores elementales ξ_e obtenido para el último diseño. Como puede comprobarse, los valores del mismo son bastante cercanos a 1 que correspondería a la hipotéticamente perfecta distribución uniforme del error. Únicamente

aparece una pequeña zona donde el mencionado cociente toma un valor de aproximadamente 2. En esta zona es donde produce la concentración de tensiones de tracción y por ello se precisa una mayor cantidad de elementos en sus alrededores.

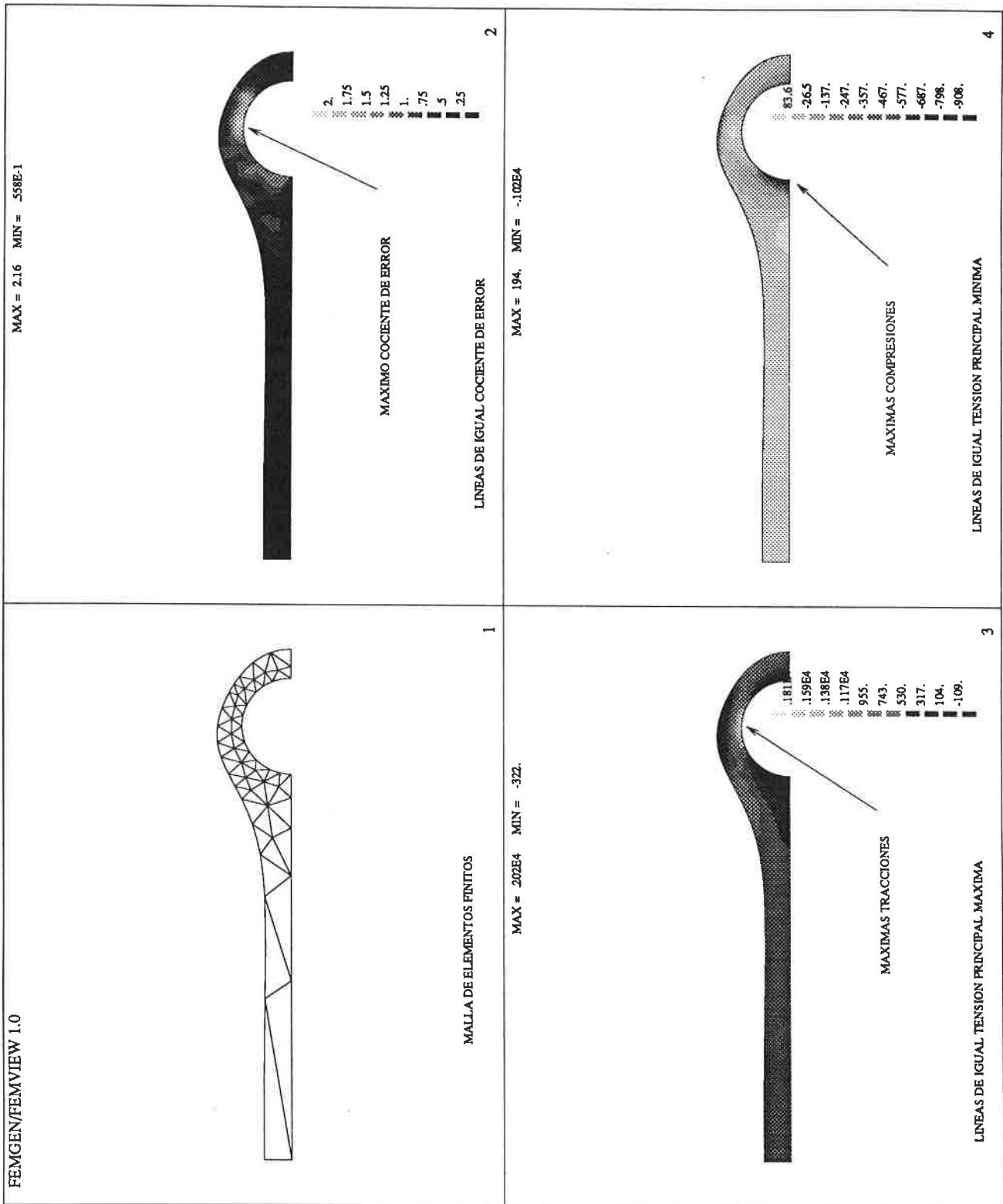


FIGURA 6.16 Optimización de biela. Diseño final obtenido.

6.4 EJEMPLO N^o 3. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE UN ARCO Y UNA BÓVEDA

En este tercer ejemplo se ha planteado la optimización de dos tipologías estructurales típicas como son el arco y la bóveda.

6.4.1 Optimización de la forma de un arco

El primer caso planteado es el del arco cuyo diseño inicial, descripción y parametrización se describen en la figura 6.17. La forma del mismo se describe mediante 8 puntos de definición siendo la pendiente discontinua en los puntos 1, 4, 5 y 8. Las coacciones impuestas son de empotramiento en los dos extremos.

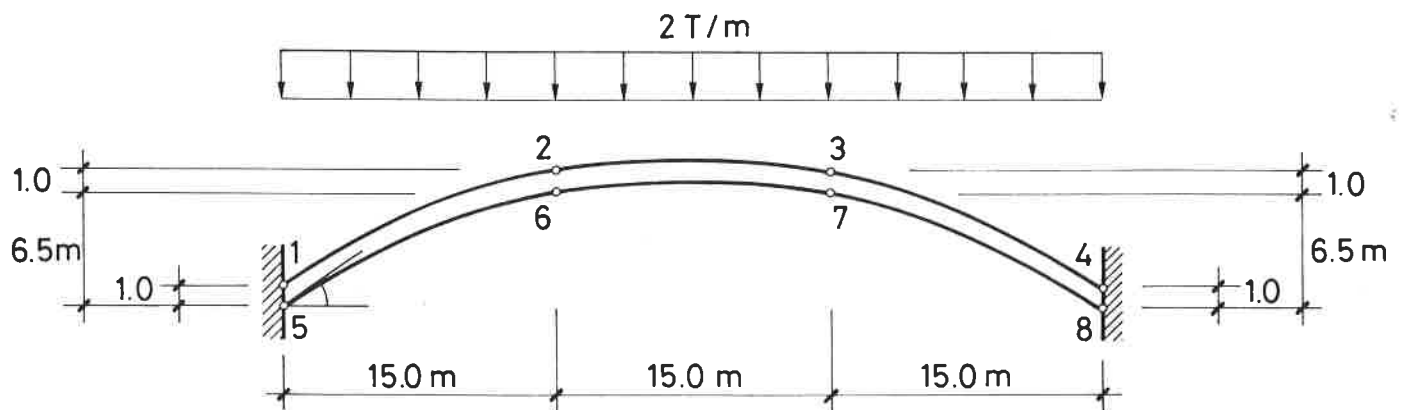


FIGURA 6.17 Optimización de arco. Diseño inicial y puntos de definición.

Las características mecánicas del material utilizado corresponden a las de un hormigón de alta calidad y son $E = 3000000 \text{ T/m}^2$, $\nu = 0.2$ y $\rho = 2.3 \text{ T/m}^3$. Los cálculos se han realizado con un modelo de tensión plana.

Se han utilizado 14 variables de diseño que son:

- Coordenadas y de los puntos 1, 2, 3, 4, 6 y 7 ($x_1, x_4, x_5, x_6, x_{11}, x_{12}$).
- Pendientes del arco en los puntos 1, 4, 5 y 8 (x_2, x_7, x_9, x_{13}).
- Factores f correspondientes a las pendientes anteriores (x_3, x_8, x_{10}, x_{14}).

Se han considerado dos casos de carga distintos. El primero de ellos corresponde unicamente al peso propio, mientras que en el segundo se han considerado el peso propio y una sobrecarga aplicada de 2.0 T/m .

Se han impuesto restricciones r_1 sobre las máximas compresiones admisibles en los dos casos de carga. Estas restricciones se han impuesto sobre todos los puntos situados sobre el contorno del arco y su valor es de 1000. T/m^2 .

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_j^x
x_1	0.1	2.0	0.5	0.020
x_2	0.0	90.	5.0	1.000
x_3	0.0	5.0	0.5	0.100
x_4	0.1	10.0	0.5	0.020
x_5	0.1	10.0	0.5	0.020
x_6	0.1	2.0	0.5	0.020
x_7	270.	360.	5.0	1.000
x_8	0.0	5.0	0.5	0.100
x_9	180.	270.	5.0	1.000
x_{10}	0.0	5.0	0.5	0.100
x_{11}	0.0	10.0	0.5	0.020
x_{12}	0.0	10.0	0.5	0.020
x_{13}	90.	180.	5.0	1.000
x_{14}	0.0	5.0	0.5	0.100

TABLA 6.7 Optimización de arco. Parámetros definidos para las variables de diseño.

Restricción	Máximo	ϵ_j^y	η_j
r_1	1000.0	5.0	200.0
r_2	0.1	0.01	0.1
r_3	0.01	0.005	0.1

TABLA 6.8 Optimización de arco. Parámetros definidos para las restricciones.

Asimismo, también se han impuesto restricciones r_2 sobre canto mínimo de forma que el espesor obtenido a partir de la diferencia de alturas de los pares de puntos (2,6) y (3,7) sea superior a 10 cm.

Para obligar al proceso de optimización a conservar la simetría del problema se han impuesto restricciones adicionales r_3 de forma que la máxima diferencia de coordenadas y entre los pares de puntos (1,4), (2,3) y (6,7) no sea superior a 1 cm.

Los parámetros utilizados para definir el comportamiento de las variables de diseño y las restricciones se presentan en las tablas 6.7 y 6.8.

El problema se ha resuelto utilizando elementos triangulares de 6 nodos limitando el nivel de error global a un 5%.

Aunque el material utilizado es un hormigón, no se han impuesto restricciones sobre máximas tensiones a tracción. Esto es debido principalmente a dos razones:

- Si se imponen restricciones sobre tracciones máximas resultará que el diseño inicial es no factible. Por ello, se dificulta enormemente el proceso de optimización ya que, como paso previo, se debe entrar dentro de la región factible.
- Aunque no existan restricciones sobre tracciones máximas, el algoritmo de optimización debe “darse cuenta” de que la mejor forma de aprovechar el material es haciéndolo trabajar a compresión. Por ello, aunque las tracciones no se eliminen totalmente para cumplir unas ciertas restricciones el proceso de optimización tratará de eliminar las zonas sometidas a tracción.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que el hecho de someter la estructura a dos casos de carga distintos hace que no sea posible hallar una forma que sea, de forma simultánea, antifunicular de ambos casos. Por ello, siempre aparecerán tracciones en todos los diseños y el algoritmo tratará de que las zonas donde éstas existan sean mínimas.

La sucesión de diseños y mallas obtenidas se presenta en la figura 6.18. Asimismo, en las figuras 6.19, 6.20 y 6.21 se presentan respectivamente las evoluciones de la función objetivo, el porcentaje de error global y el número de elementos utilizados en cada malla.

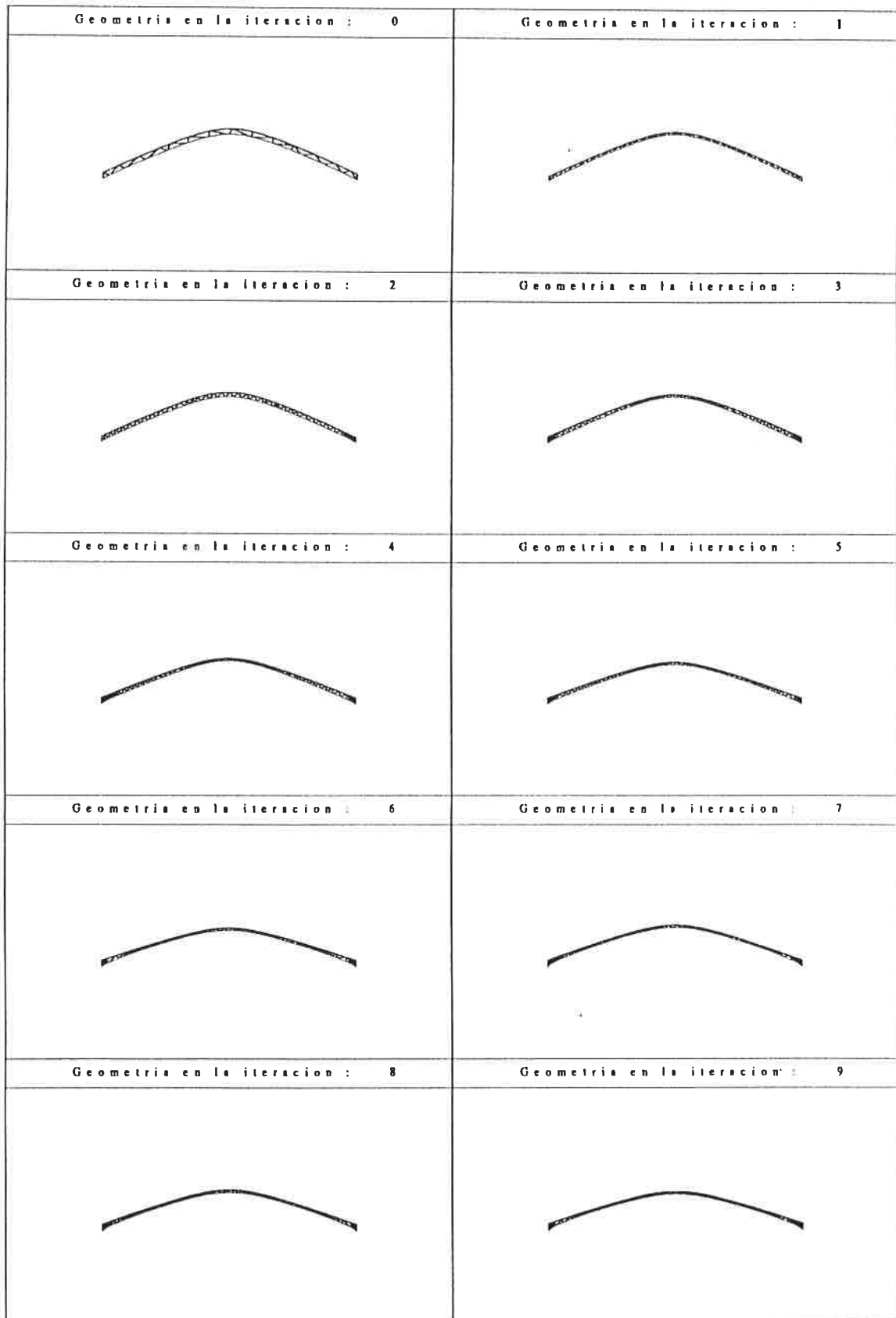


FIGURA 6.18A Optimización de arco. Sucesión de diseños obtenidos.




Geometría en la iteración : 10	Geometría en la iteración : 11
	
Geometría en la iteración : 12	
	

FIGURA 6.18B Optimización de arco. Sucesión de diseños obtenidos.

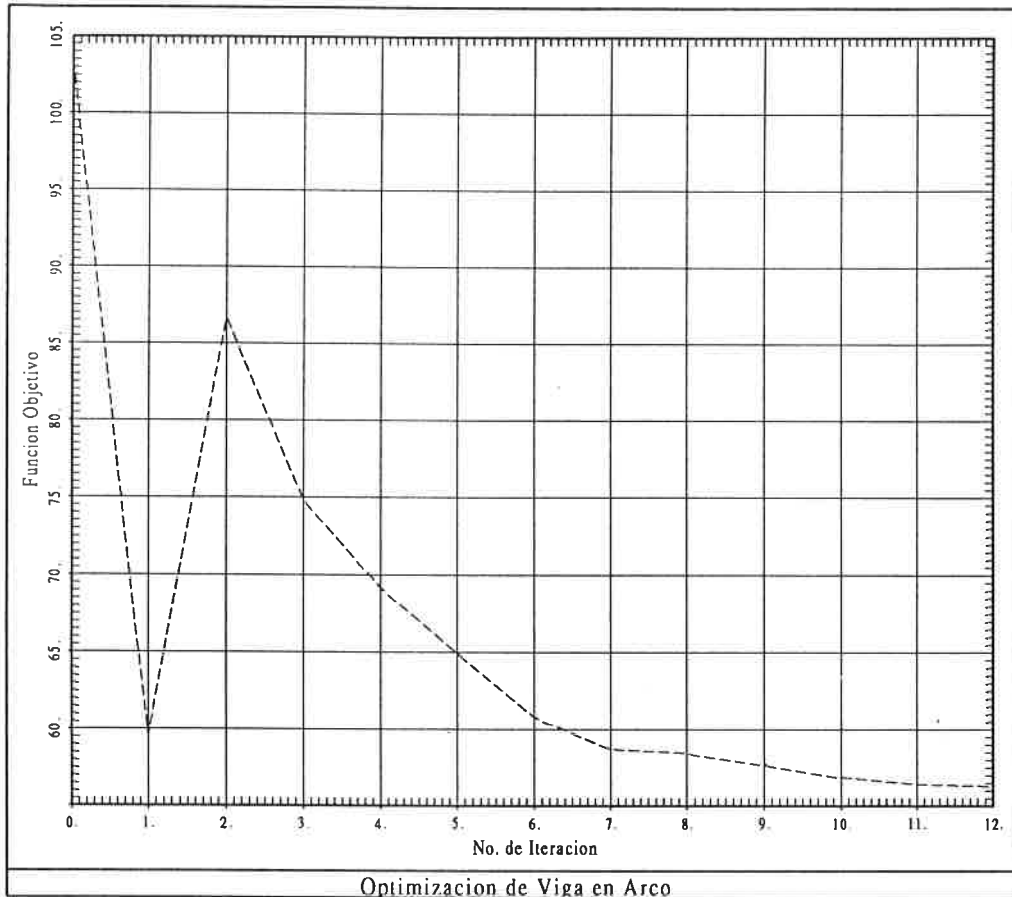


FIGURA 6.19 Optimización de arco. Evolución de la función objetivo.

Obsérvese como este número de elementos es bajo en las primeras iteraciones (lejos del óptimo), con el consiguiente ahorro computacional, y crece al acercarse a la solución del problema.

Las tracciones que aparecen en el diseño final son pequeñas y están resringidas a las zonas de los apoyos y a la clave. Estas tracciones son mayores en el caso de carga correspondiente al peso propio más sobrecarga y su valor es siempre inferior a los 20.0 Kg/cm^2 pudiendo ser absorbidas por una armadura colocada al efecto.

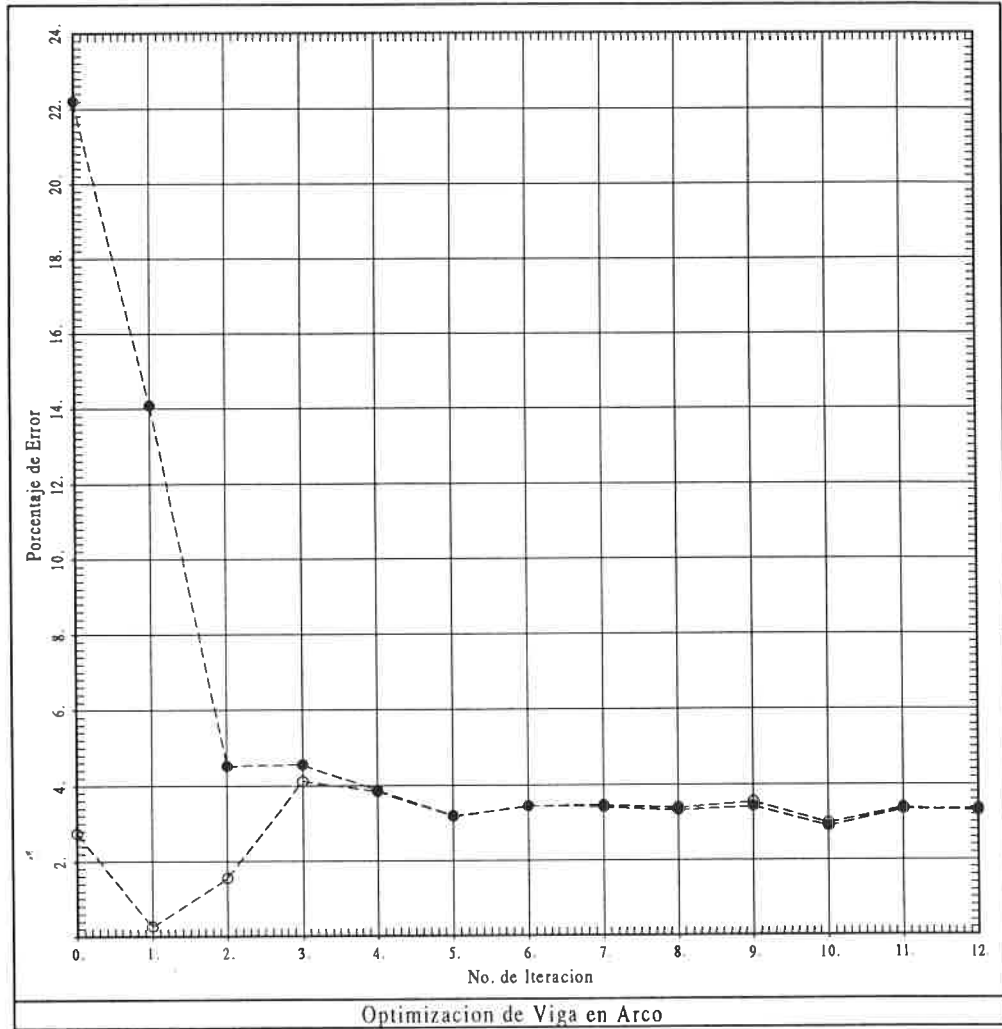


FIGURA 6.20 Optimización de arco. Evolución del porcentaje global de error.

- peso propio.
- peso propio + sobrecarga.

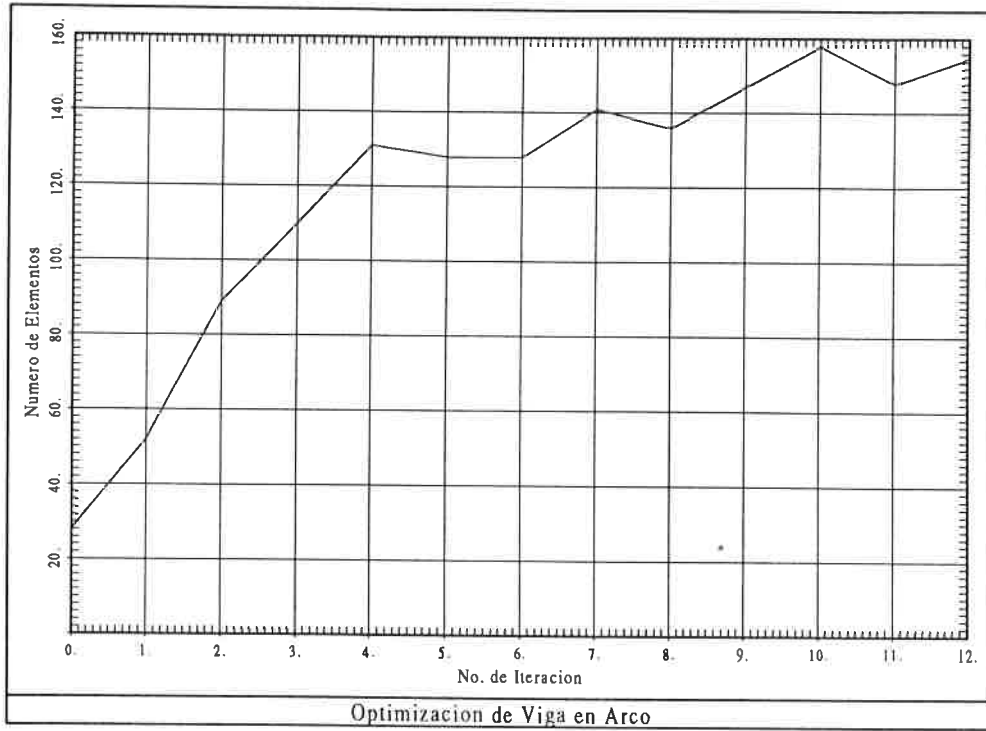


FIGURA 6.21 Optimización de arco. Evolución del número de elementos utilizados.

6.4.2 Optimización de la forma de una bóveda de revolución

Para completar este ejemplo se ha resuelto también el caso correspondiente a una bóveda de revolución. La diferencia de este caso con el anterior estriba, básicamente, en el modelo de cálculo que en este caso será de simetría de revolución. La parametrización, así como el diseño inicial utilizado se presentan en la figura 6.22. Se han utilizado 6 puntos de definición para la curva que limita el contorno de la bóveda. Las características mecánicas del material son las mismas que en el caso anterior para el arco.

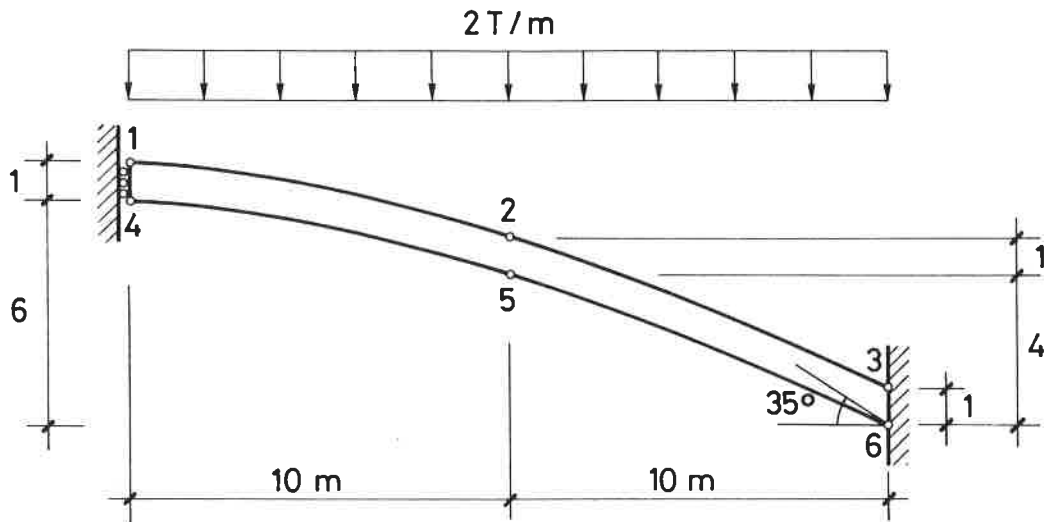


FIGURA 6.22 Optimización de bóveda. Diseño inicial y puntos de definición.

Se han utilizado 11 variables de diseño que son:

- Coordenadas de los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 (x_1, x_3, x_4, x_7, x_9).
- Pendientes de la bóveda en los puntos 3 y 6 (x_5, x_{10}).
- Factores f correspondientes a dichas pendientes (x_6, x_{11}).
- Factores f correspondientes a los ángulos de $0.^\circ$ de los puntos 1 y 4 (x_2, x_8).

Los casos de carga considerados así como las restricciones r_1 sobre las

compresiones máximas son iguales al caso anterior. Debido a las características del modelo utilizado en este caso, se han añadido, además, las restricciones en tensión correspondientes a las tensiones circunferenciales.

Se han impuesto también restricciones r_2 sobre el canto mínimo como la diferencia entre las alturas de los puntos 2 y 5, y entre las de los puntos 1 y 4.

Los parámetros utilizados para definir el comportamiento de las variables de diseño y las restricciones se presentan en las tablas 6.9 y 6.10.

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_i^x
x_1	0.1	10.0	0.5	0.020
x_2	0.0	5.0	0.5	0.100
x_3	0.1	10.0	0.5	0.020
x_4	0.1	2.0	0.5	0.020
x_5	270.	360.	5.0	1.000
x_6	0.0	5.0	0.5	0.100
x_7	0.1	10.0	0.5	0.020
x_8	0.0	5.0	0.5	0.100
x_9	0.0	10.0	0.5	0.020
x_{10}	90.	180.	5.0	1.000
x_{11}	0.0	5.0	0.5	0.100

TABLA 6.9 Optimización de bóveda. Parámetros definidos para las variables de diseño.

Restricción	Máximo	ϵ_j^g	η_j
r_1	1000.0	5.0	200.0
r_2	0.1	0.01	0.1

TABLA 6.10 Optimización de bóveda. Parámetros definidos para las restricciones.

El porcentaje de error admitido es de un 5% habiéndose utilizado elementos triangulares de 6 nodos.

La sucesión de diseños y mallas obtenidas se presenta en la figura 6.23.

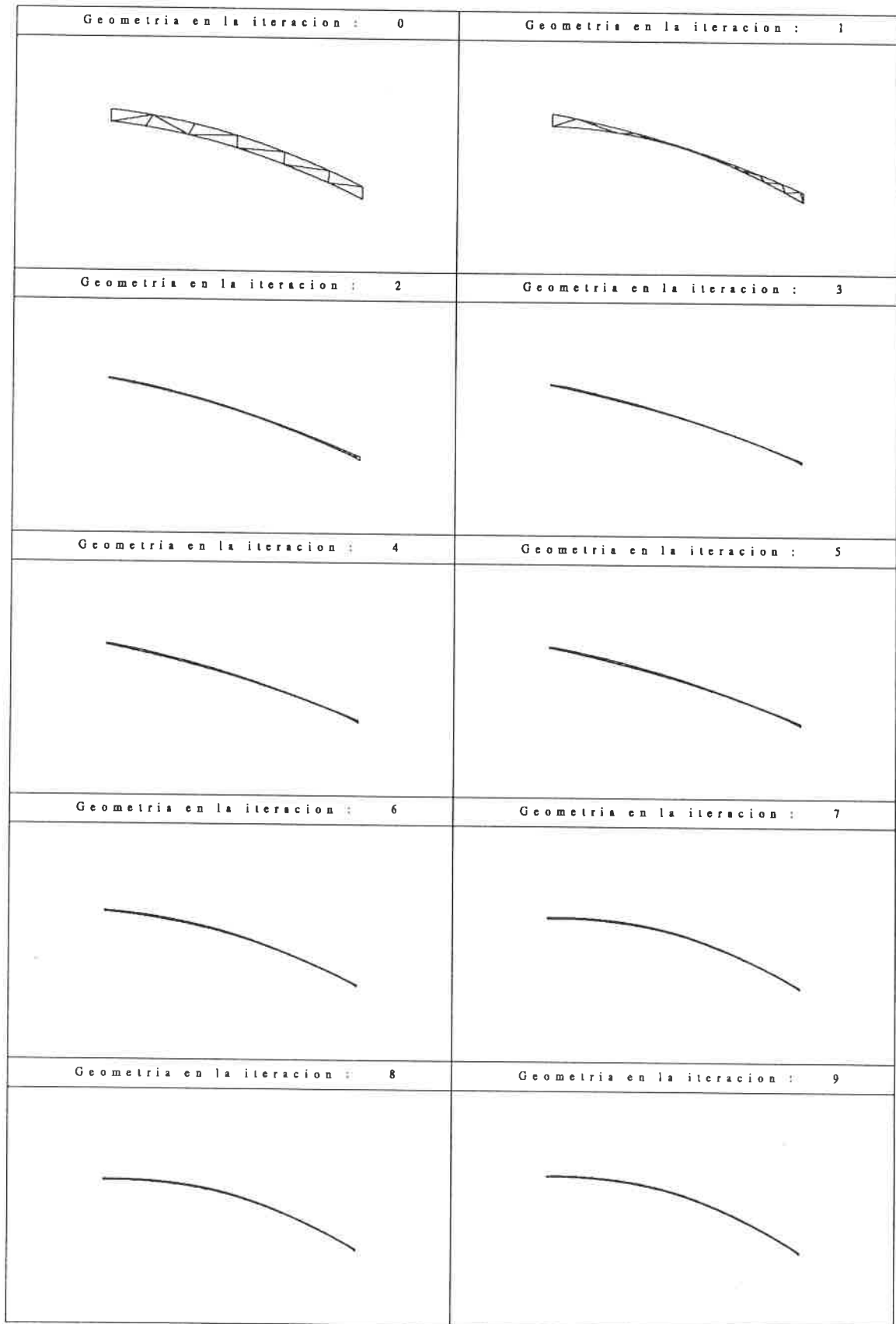


FIGURA 6.23 Optimización de bóveda. Sucesión de diseños obtenidos.

Asimismo, en las figuras 6.24, 6.25 y 6.26 se presentan respectivamente las evoluciones de la función objetivo, el porcentaje de error global y el número de elementos utilizados en cada malla.

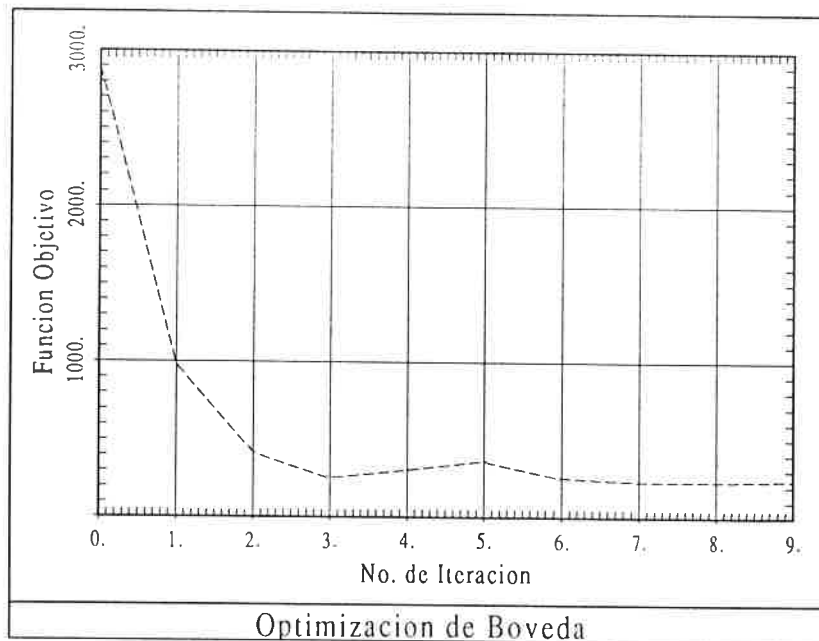


FIGURA 6.24 Optimización de bóveda. Evolución de la función objetivo.

A la vista de dichas figuras se pueden hacer los siguientes comentarios:

- La función objetivo desciende de forma rápida al principio hasta llegar a un diseño no factible en la tercera iteración. Luego crece ligeramente para recuperar la factibilidad y vuelve a descender de forma paulatina.
- El porcentaje de error desciende por debajo del 4% en la tercera iteración y permanece entre el 0% y el 4% durante el resto del proceso, a excepción de un pico muy alto obtenido en la iteración número 7.

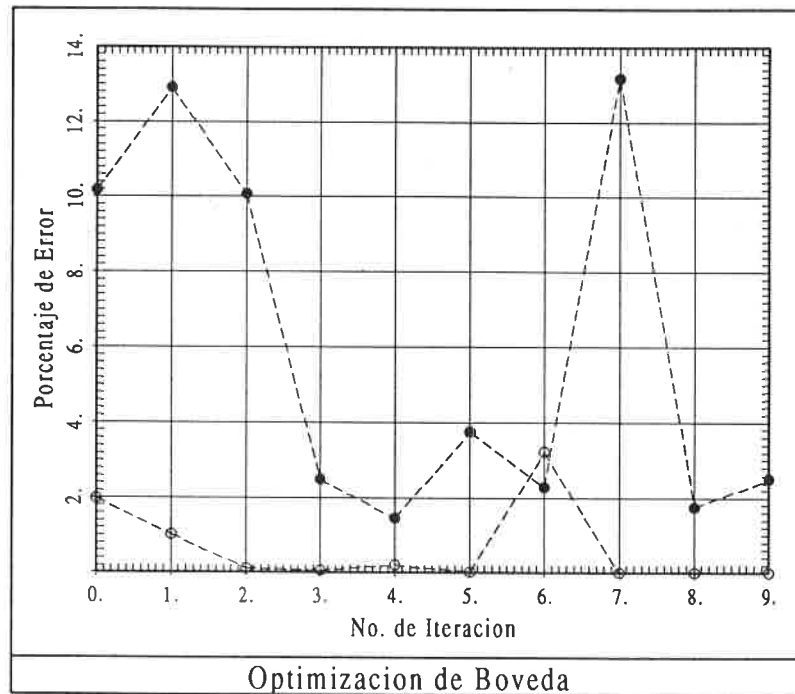


FIGURA 6.25 Optimización de bóveda. Evolución del porcentaje global de error.
 ● peso propio.
 ○ peso propio + sobrecarga.

- El número de elementos utilizado crece de forma casi continua hasta superar los 55 elementos. El pico del porcentaje de error obtenido en la iteración número 7 coincide con un claro aumento del número de elementos utilizado.

Los problemas observados en la séptima iteración son debidos, esencialmente, a dos razones:

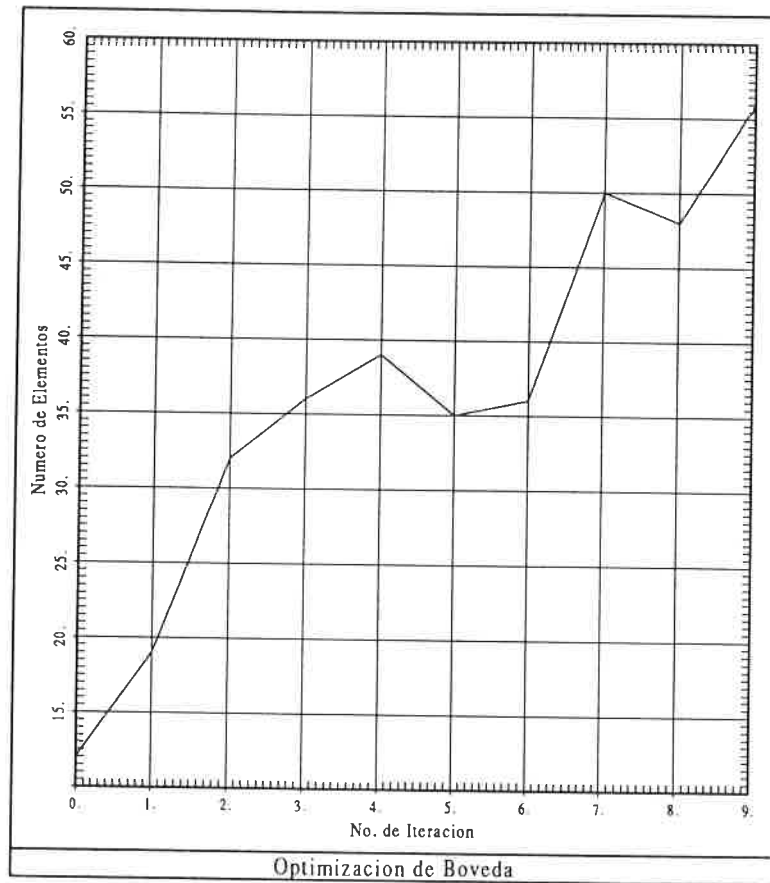


FIGURA 6.26 Optimización de bóveda. Evolución del número de elementos utilizados.

- Se produce un cambio sustancial en la forma del diseño pasando a ser mucho más redondeado que en los casos anteriores. Esta brusca variación de forma puede hacer fallar las extrapolaciones hechas desde el diseño anterior.
- El fuerte crecimiento del porcentaje de error coincide con un fuerte aumento del número de elementos utilizado. Al haberse limitado el incremento del número de elementos mediante el “amortiguamiento” introducido, no se permite al proceso generar una malla suficientemente densa como para disminuir el error al porcentaje deseado. No obstante puede comprobarse como en las siguientes iteraciones dicho porcentaje vuelve a colocarse por debajo del límite prescrito, con lo cual se demuestra que el “amortiguamiento” disminuye los incrementos de cálculo debidos a refinamientos puntuales, pero luego permite mantener el nivel de error por debajo del límite prefijado.

Los cantos obtenidos en el diseño final coinciden exactamente con el mínimo prescrito de 10.0 cm. En cambio, las tensiones obtenidas están muy

lejos del máximo admisible de 100.0 Kg/cm^2 . Estos resultados indican que el diseño final está condicionado por las limitaciones geométricas impuestas (limitaciones constructivas) y no por los límites de resistencia de material.

6.5 EJEMPLO N^o 4. OPTIMIZACIÓN DE LA FORMA DE LA SECCIÓN CENTRAL DE UNA PRESA BÓVEDA

Este ejemplo está tomado de la referencia [44], donde se resuelve mediante la utilización de una malla estructurada no adaptable sin control de errores, y corresponde a la optimización de la forma de la ménsula central de una presa bóveda. Para ello se han realizado una serie de hipótesis simplificadoras acerca del comportamiento de la misma frente a las cargas de peso propio y presión de agua. Asimismo, se han introducido aspectos relativos al proceso constructivo para tener en cuenta el comportamiento, previo a la inyección de las juntas.

La resolución de este ejemplo se ha efectuado mediante dos parametrizaciones distintas. En la primera de ellas no se ha tenido en cuenta el efecto que la cimentación puede ejercer sobre el cuerpo de la presa. Por ello, sus condiciones de vinculación en la base son muy simples y producen la aparición de una singularidad en la misma debida a una fuerza puntual. Esta singularidad ha proporcionado dificultades al proceso de optimización que se han corregido mediante la consideración de la cimentación dentro de los cálculos.

La función objetivo utilizada en todos los casos ha sido el peso de la presa obtenido desarrollando la ménsula central sobre una directriz circular.

En cada caso, el ejemplo se ha resuelto imponiendo restricciones en tensión en puntos distintos. Los resultados obtenidos en cada caso se exponen en los próximos apartados.

6.5.1 Presa sin cimentación. Caso n^o 1.

El diseño inicial y los puntos que definen la forma de la sección central de la misma se presentan en la figura 6.27.

Para la parametrización del modelo se han utilizado 8 variables de diseño que corresponden a las coordenadas x de los puntos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$). Los parámetros necesarios para el algoritmo de optimización que se han utilizado se presentan en la tabla 6.11.

Las propiedades del material utilizado son $E = 3000000.0 \text{ T/m}^2$, $\nu = 0.2$ y $\rho = 2.3 \text{ T/m}^3$.

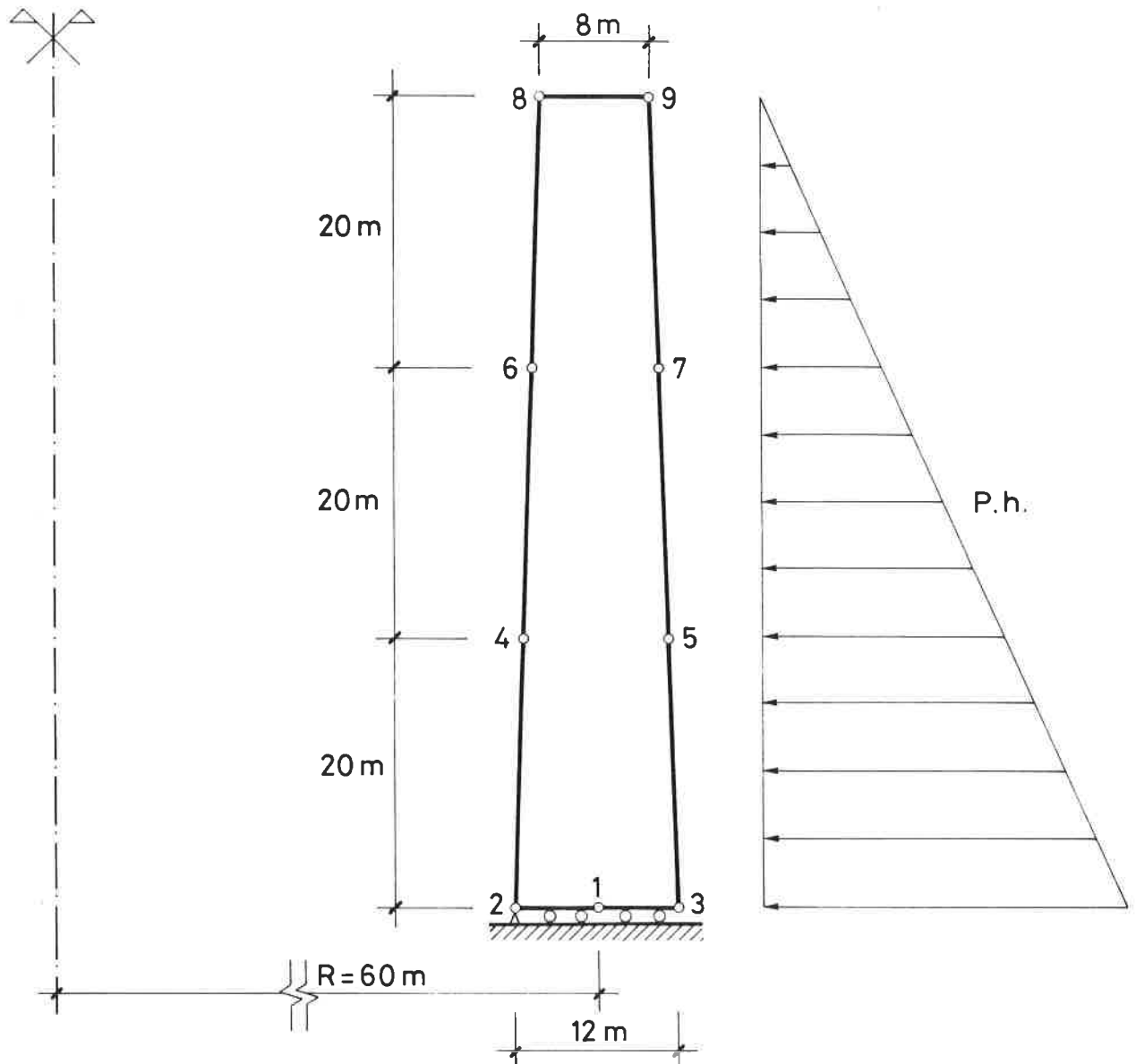


FIGURA 6.27 Optimización de ménsula central de presa bóveda.
Diseño inicial y puntos de definición.

Para modelar el comportamiento de la estructura se han utilizado dos modelos de cálculo distintos:

- Se ha considerado que el proceso constructivo consiste en fabricar primero las ménsulas verticales y, posteriormente, dar continuidad a la presa inyectando las juntas entre bloques. Por ello, se puede considerar que,

Variable	a_i	b_i	c_i	ϵ_i^x
x_1	0.0	57.5	2.	0.100
x_2	62.5	100.	2.	0.100
x_3	0.0	100.	2.	0.100
x_4	0.0	100.	2.	0.100
x_5	0.0	100.	2.	0.100
x_6	0.0	100.	2.	0.100
x_7	0.0	100.	2.	0.100
x_8	0.0	100.	2.	0.100

TABLA 6.11 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 1. Parámetros definidos para las variables de diseño.

inicialmente, todas las ménsulas de la presa trabajan en tensión plana, de forma independiente sin interacción entre ellas. El único caso de carga considerado en esta etapa es el correspondiente al peso propio de la presa. Bajo esas condiciones se han impuesto restricciones sobre las máximas tracciones r_1 limitándolas a $50.0 T/m^2$, y sobre las máximas compresiones limitándolas a $2750.0 T/m^2$.

- Una vez finalizado el proceso constructivo, y con la presa ya en régimen de servicio, se ha considerado que su comportamiento se puede aproximar mediante un modelo de sólido de revolución. Se ha supuesto que al dar continuidad a la presa las tensiones debidas al peso propio se redistribuyen, en mayor o menor grado, debido a los procesos de relajación y fluencia que sufre el hormigón. En esta etapa se han considerado dos casos de carga: el primero de ellos corresponde al peso propio de la presa, mientras que el segundo corresponde a dicho peso propio más la presión hidrostática del agua. En ambos casos se han impuesto restricciones sobre la máximas tracciones r_3 limitando su valor a $20.0 T/m^2$, y sobre la máximas compresiones r_4 limitando su valor a $2750.0 T/m^2$.

El hecho de ser menos estricto en las restricciones aplicadas durante la fase constructiva responde al hecho de que durante dicho proceso se pueden admitir, de forma temporal, tensiones más elevadas.

Se han impuesto además dos restricciones adicionales de tipo geométrico:

- Se ha limitado inferiormente el ancho de la coronación r_5 imponiendo que la diferencia de las variables de diseño x_7 y x_8 sea superior a 5 m.
- Se ha obligado a que el valor de la semisuma de las variables x_1 y x_2 esté entre 59.5 m. y 60.5 m. Con ello se obliga a la presa a conservar, de forma

aproximada, su radio inicial de 60.0 m. evitando que toda ella se desplace hacia el centro para minimizar su volumen. La forma de imponer esta restricción ha sido limitar superiormente el valor de la suma $x_1 + x_2$ a 121.0 m. (r_6), e inferiormente el valor de $-x_1 - x_2$ a -119.0 m. (r_7).

Los parámetros referentes a las restricciones necesarios para definir el algoritmo de optimización que se han utilizado se presentan en la tabla 6.12.

Restricción	Extremo	ϵ_j^g	η_j
r_1	50.	0.05	200.0
r_2	-2750.0	0.05	200.0
r_3	20.	0.05	200.0
r_4	-2750.0	0.05	200.0
r_5	5.0	0.05	50.0
r_6	121.0	1.00	100.0
r_7	-119.0	1.00	100.0

TABLA 6.12 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 1. Parámetros definidos para las restricciones.

Se han utilizado elementos de 6 nodos y se ha limitado el porcentaje de error global a un 5%.

El apoyo puntual colocado en el punto número 2 de la figura 6.27 provoca la aplicación de una carga puntual sobre el mismo. Por ello, en ese punto aparece una singularidad y la tensión sobre el mismo tenderá a hacerse infinita. Por esta razón, el algoritmo de regeneración tratará de concentrar elementos alrededor de esa zona.

Para imponer las restricciones sobre las tensiones (r_1 , r_2 , r_3 y r_4) se ha tenido que definir una serie de "puntos de control" donde aplicar las mismas. A diferencia de los ejemplos anteriores, donde las restricciones se aplicaban sobre todos los nodos generados sobre el contorno, en este caso la aplicación de éstas debe hacerse sobre una serie de puntos fijos. La razón es que, debido a la singularidad, cada vez se generarán nodos más cercanos al punto número 2 y las tensiones en los mismos crecerán al acercarse al mismo. Este es un caso típico de los comentados en el apartado 5.4.2 donde, para definir correctamente el problema matemático de optimización, hay que utilizar una serie de "puntos de control" sobre los cuales se imponen las restricciones.

En este primer caso se han definido como puntos de control los puntos de

definición situados sobre los paramentos verticales, a excepción de los situados sobre la base donde está situada la singularidad. Además, también se han definido como tales dos puntos más situados entre cada par de puntos de definición situados sobre los mencionados paramentos. La posición de estos últimos puntos es la correspondiente a la división, en tres intervalos iguales, del parámetro t de la curva utilizada entre cada dos puntos de definición. Debido a las propiedades de los B-splines paramétricos, dichos puntos resultan estar equiespaciados según la altura entre cada par de puntos de definición. Asimismo, también se han utilizado como puntos de control el punto de definición número 1 y dos puntos más situados en la base y equiespaciados respectivamente de los pares de puntos (1,2) y (1,3).

En la figura 6.28 se presenta la sucesión de diseños y mallas obtenidos en el proceso. En la malla correspondiente al diseño inicial (iteración 0) se pueden ver todos los puntos de control definidos, ya se corresponden con todos los nodos situados sobre el contorno, a excepción de los extremos de la base (puntos 2 y 3 de la figura 6.27).

En las figuras 6.29, 6.30 y 6.31 se puede observar las evoluciones respectivas de la función objetivo, los porcentajes globales de error correspondientes a cada caso de carga y el número de elementos utilizados.

A la vista de las figuras se pueden hacer los siguientes comentarios:

- La función objetivo aumenta sustancialmente en la primera iteración debido a que el diseño inicial no es factible. A continuación desciende rápidamente hasta la novena iteración en que se obtiene otro diseño no factible. A partir de este punto el algoritmo realiza ligeras mejoras para producir un diseño factible sin aumentar significativamente el peso.
- El porcentaje de error global se mantiene por debajo del 5% para los tres casos de carga a partir de la cuarta iteración. Sin embargo, aparece un fuerte pico en la sexta iteración en el caso de carga correspondiente al peso propio más la presión hidrostática. Este fuerte pico puede ser debido a la detección de la singularidad existente ya que a partir de ese momento el algoritmo comienza a refinar fuertemente la zona situada alrededor del punto singular. El porcentaje global de error vuelve a descender por debajo del 5% ya en la séptima iteración.

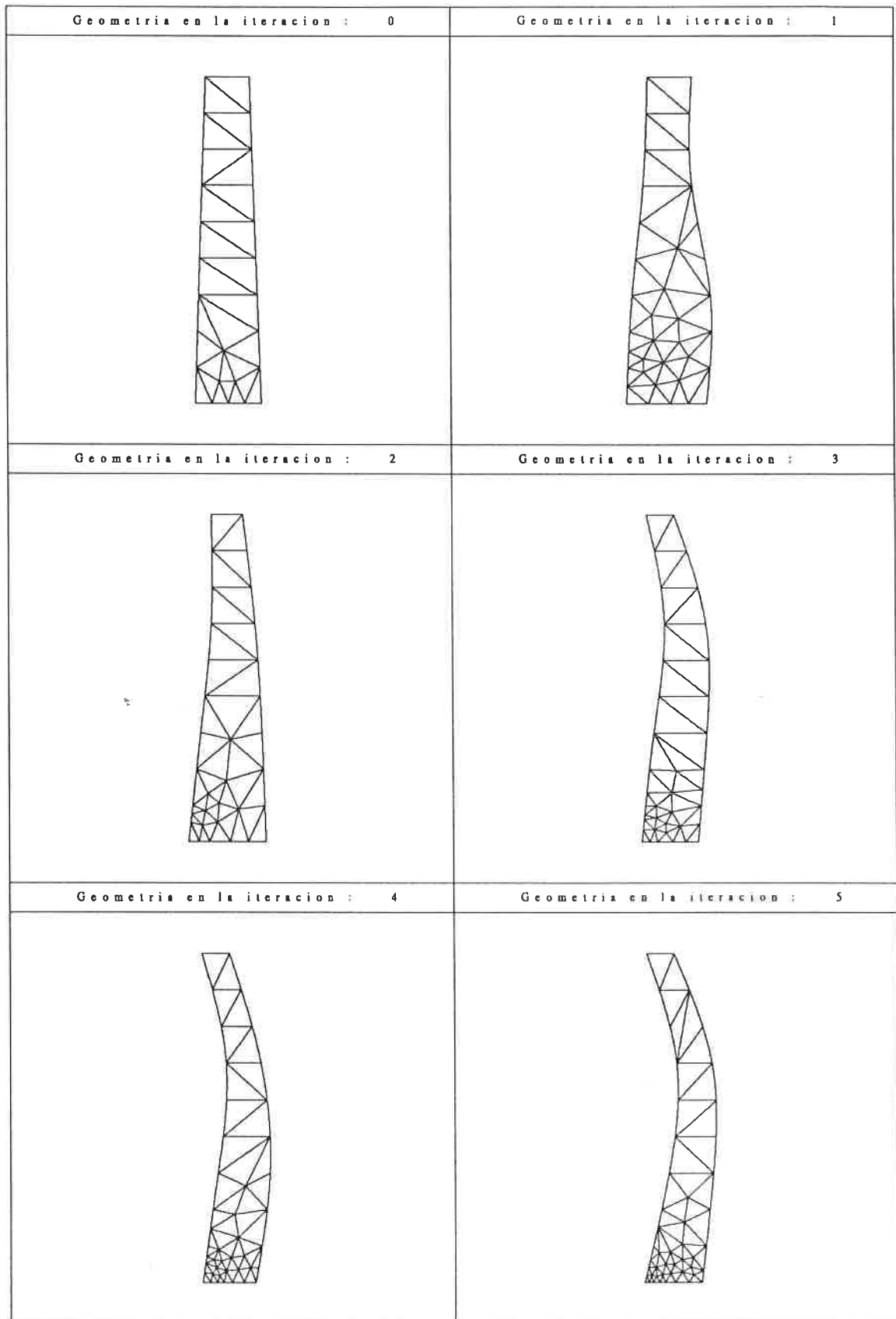


FIGURA 6.28A Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

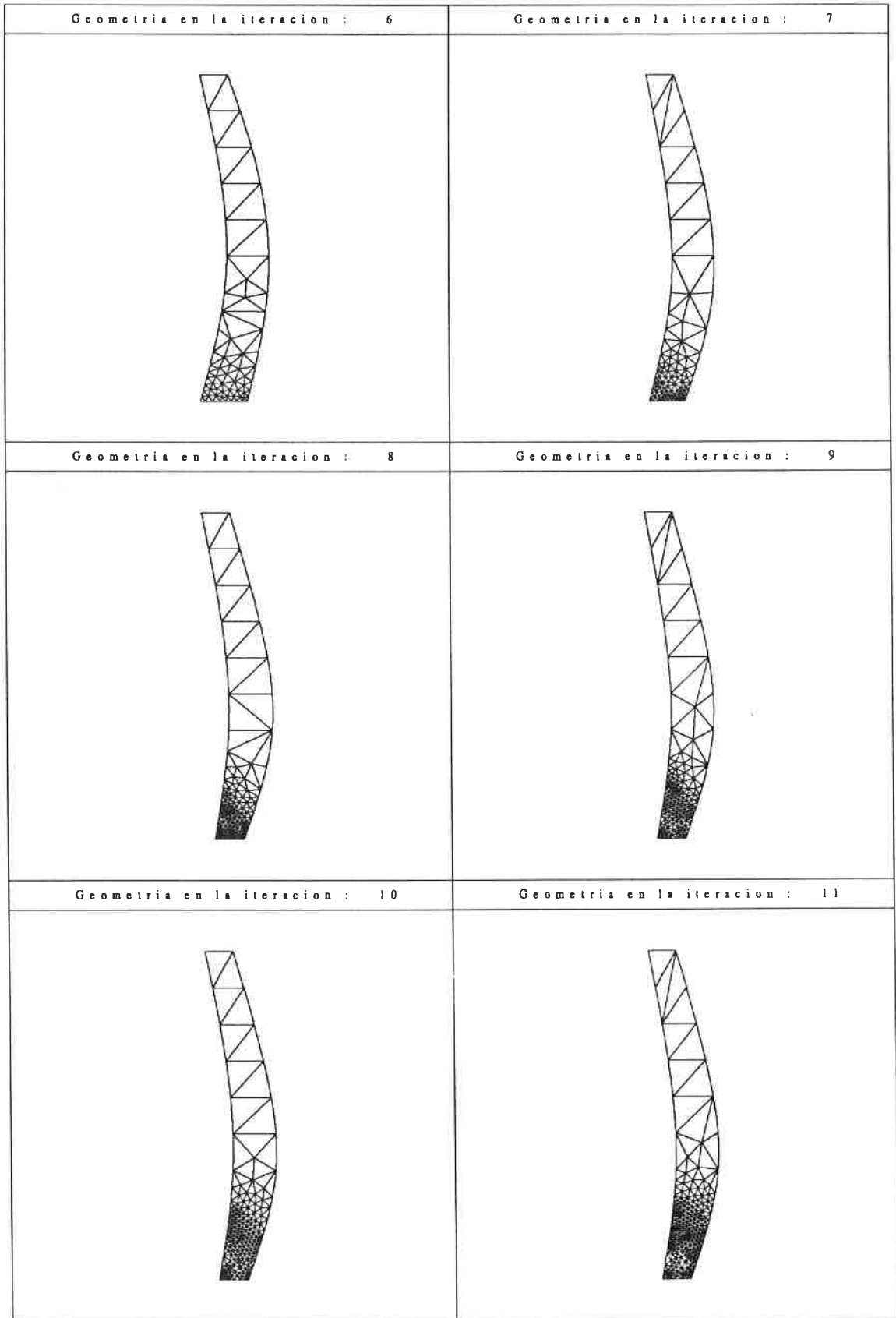


FIGURA 6.28B Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

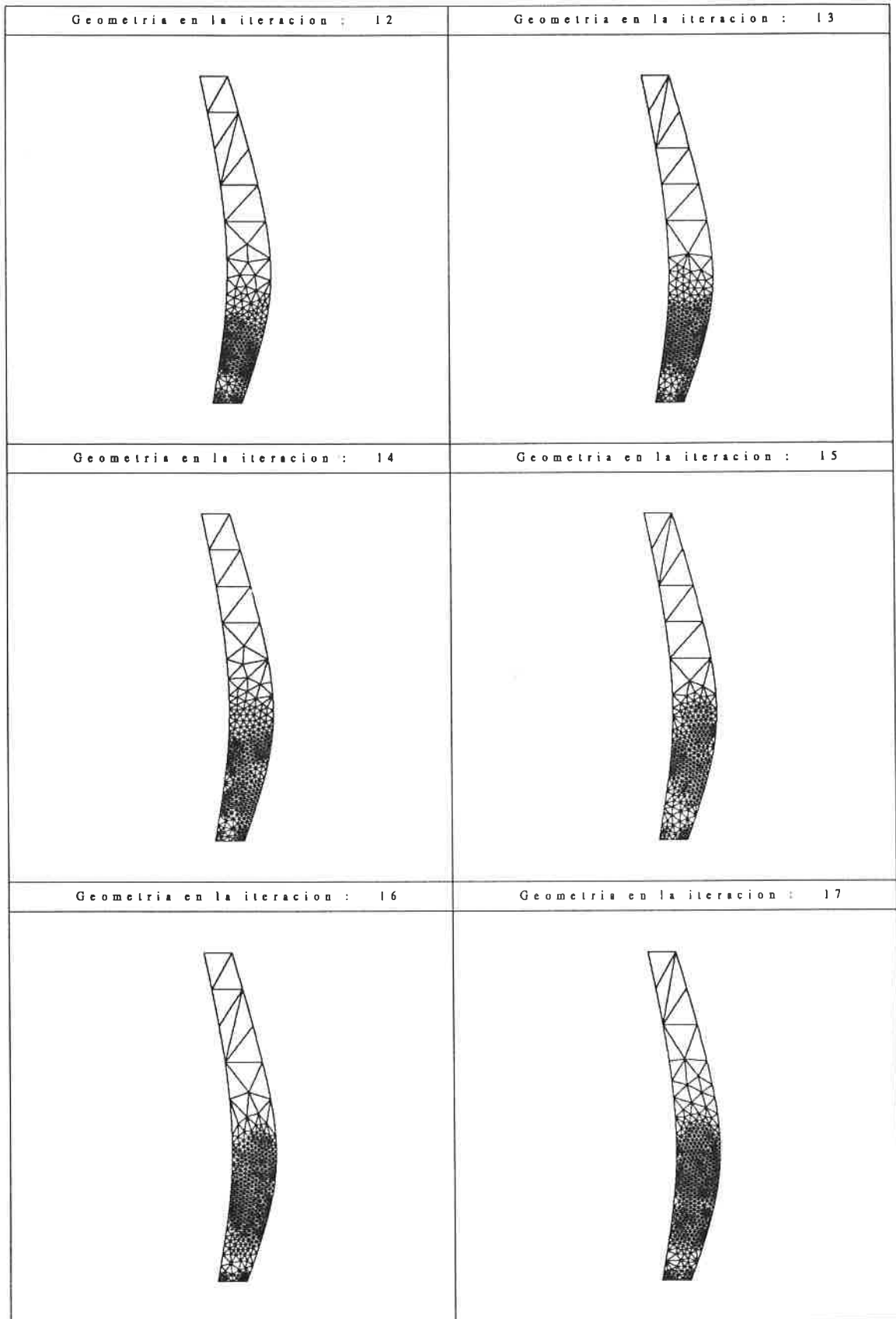


FIGURA 6.28C Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

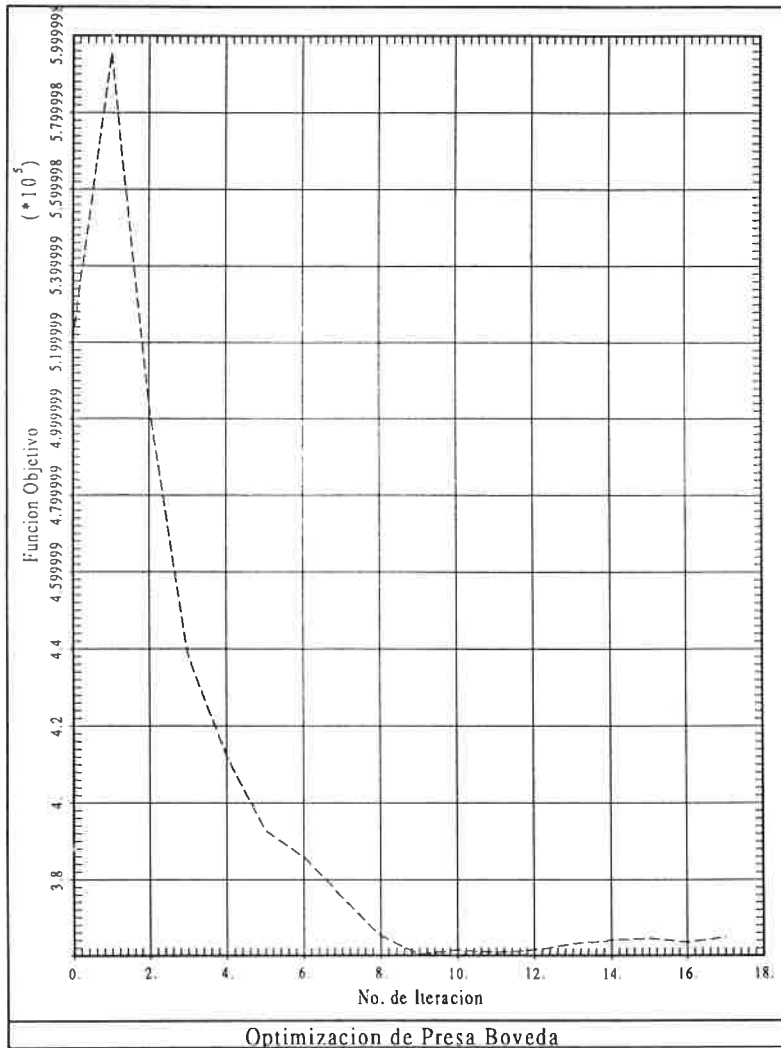


FIGURA 6.29 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 1. Evolución de la función objetivo.

- El número de elementos crece durante todo el proceso a excepción de la iteración número 15 donde desciende de forma puntual. El ritmo de crecimiento aumenta fuertemente a partir de la sexta iteración que es la correspondiente al pico de error comentado en el párrafo anterior.

En este ejemplo se comprueba que la existencia del punto singular hace crecer enormemente el coste del proceso debido al fuerte incremento del número de elementos utilizados. Puede observarse también como el aumento del número de elementos no se circunscribe únicamente a la zona próxima al punto singular sino que progresa por todo el tercio inferior de la sección.

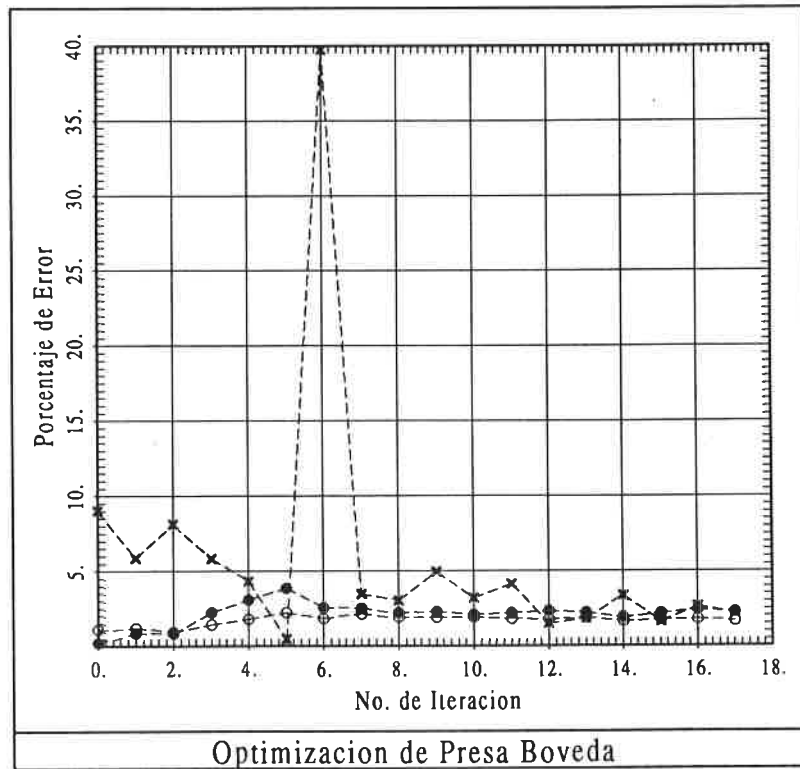


FIGURA 6.30 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 1. Evolución del porcentaje global de error.
 ● peso propio en tensión plana.
 ○ peso propio en simetría de revolución.
 × peso propio + presión hidrostática en simetría de revolución.

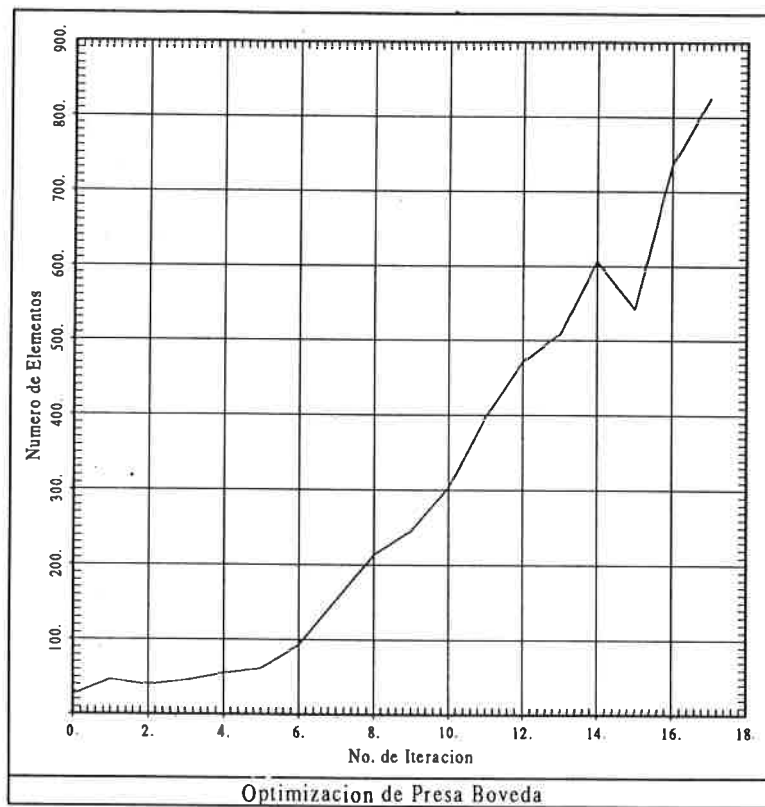


FIGURA 6.31 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 1. Evolución del número de elementos utilizados.

6.5.2 Presa sin cimentación. Caso n^o 2.

Para comprobar la influencia de la localización de los puntos de control, y la distancia de los mismos al punto singular, se ha repetido la resolución del problema cambiando la definición de éstos. En este caso, se han colocado más puntos de control sobre los paramentos verticales de forma que entre cada dos puntos de definición existirán tres puntos adicionales de control. De esta forma se ha aumentado su número, y los puntos inferiores están más cercanos al punto singular de la base. Todas las demás características de este caso son idénticas al anterior.

En la figura 6.32 se presenta la sucesión de diseños y mallas obtenidos. Al igual que en el caso anterior, en el diseño inicial se puede ver la posición de todos los puntos de control utilizados. Como puede comprobarse, su número ha aumentado con respecto al caso anterior. En la figura 6.33 se puede observar la evolución de la función objetivo correspondiente a este caso.

Como se puede observar en la figura 6.32, el diseño final al que se llega es claramente distinto al obtenido en el caso anterior. La mayor diferencia estriba en el ancho de la base que, en este caso, se ha hecho mucho mayor intentando disminuir la magnitud de las tensiones que aparecen en la parte baja de la presa. A priori, es imposible conocer si esa solución constituye un mínimo global del problema matemático planteado o bien un mínimo local.

Observando la figura 6.33 puede verse que la función objetivo crece en las tres primeras iteraciones y luego desciende rápidamente para oscilar en las últimas iteraciones. Su valor final es claramente superior al obtenido en el caso anterior, lo cual hace pensar que nos hallamos ante un mínimo local.

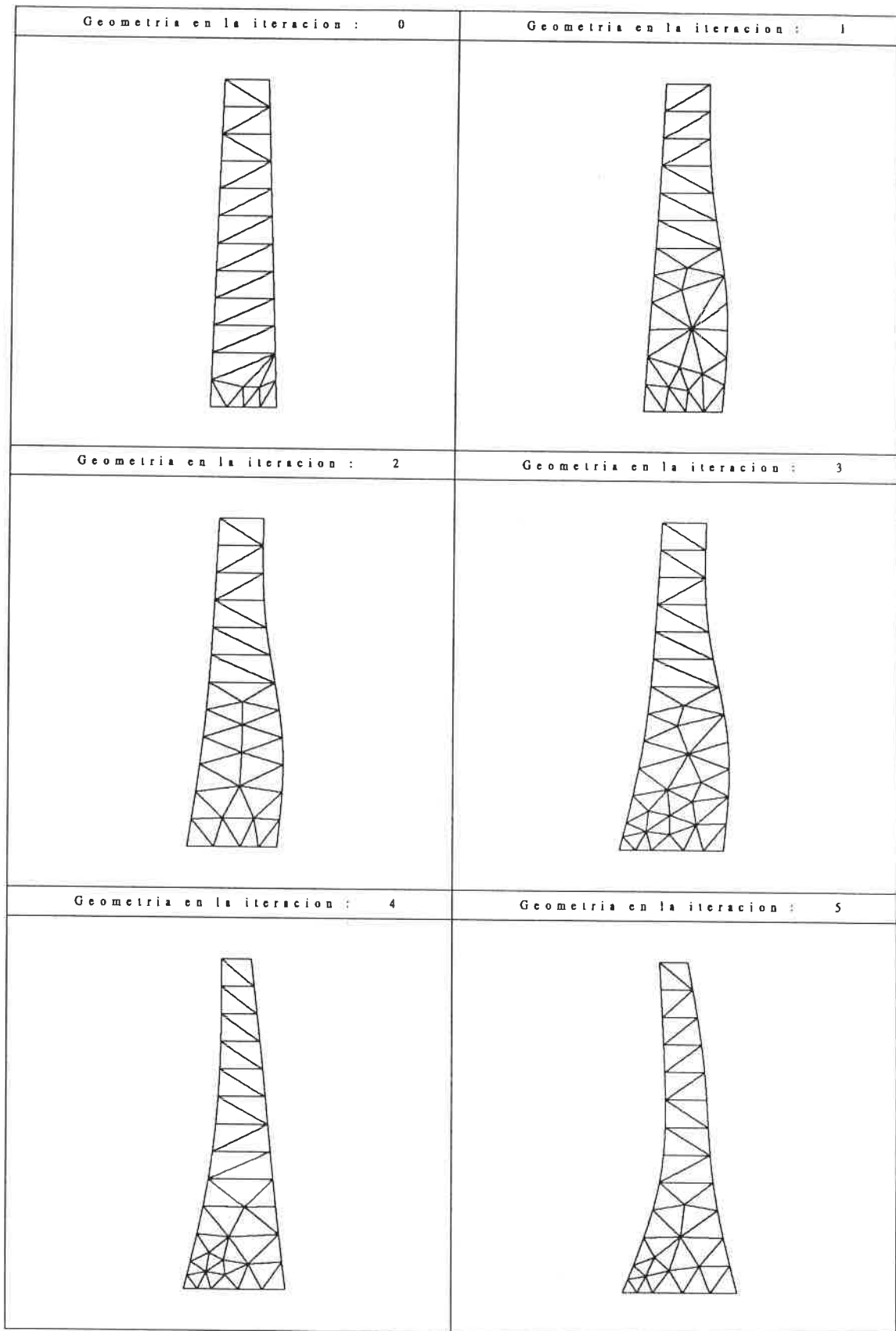


FIGURA 6.32A Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 2.Sucesión de diseños obtenidos.

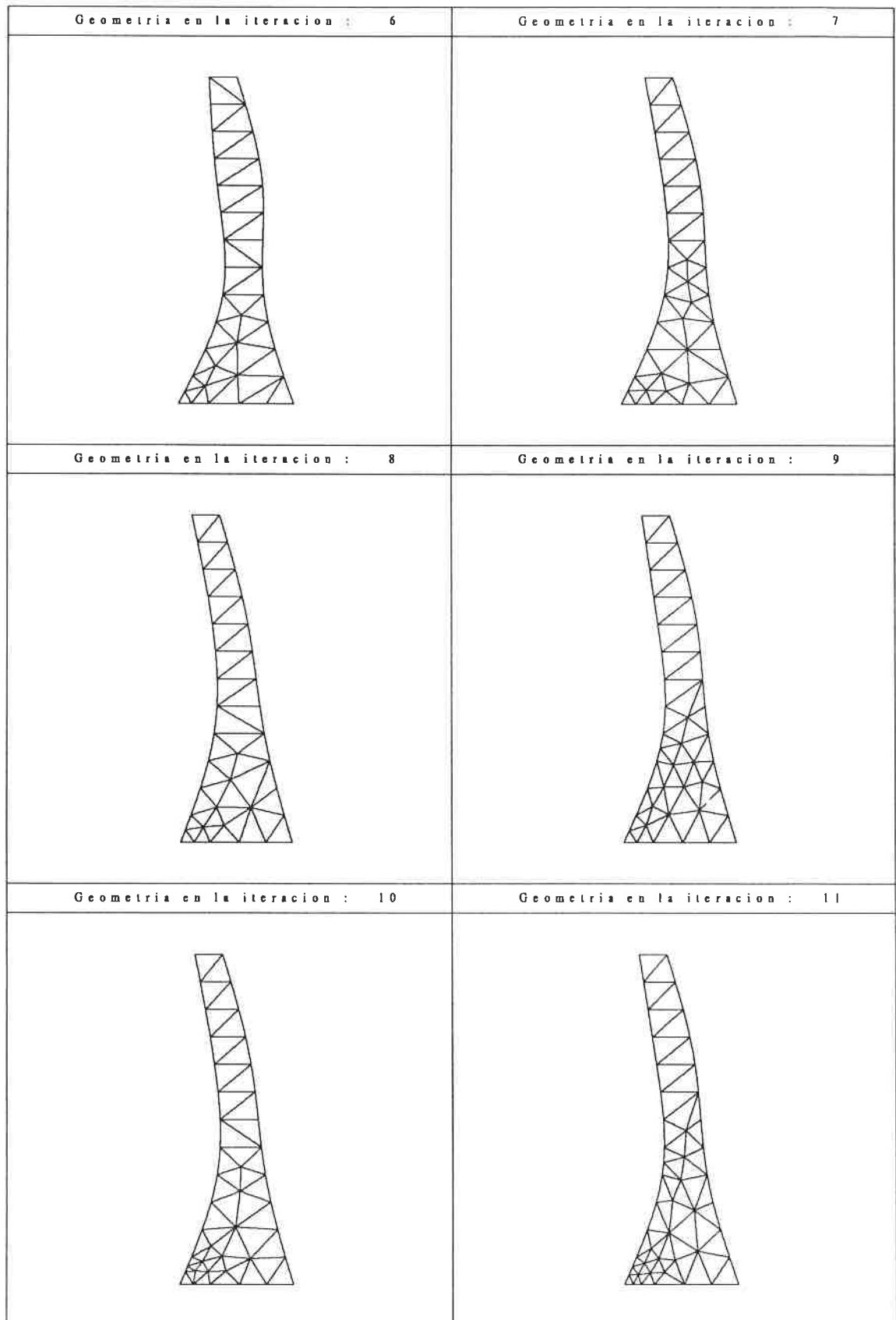


FIGURA 6.32B Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 2.Sucesión de diseños obtenidos.

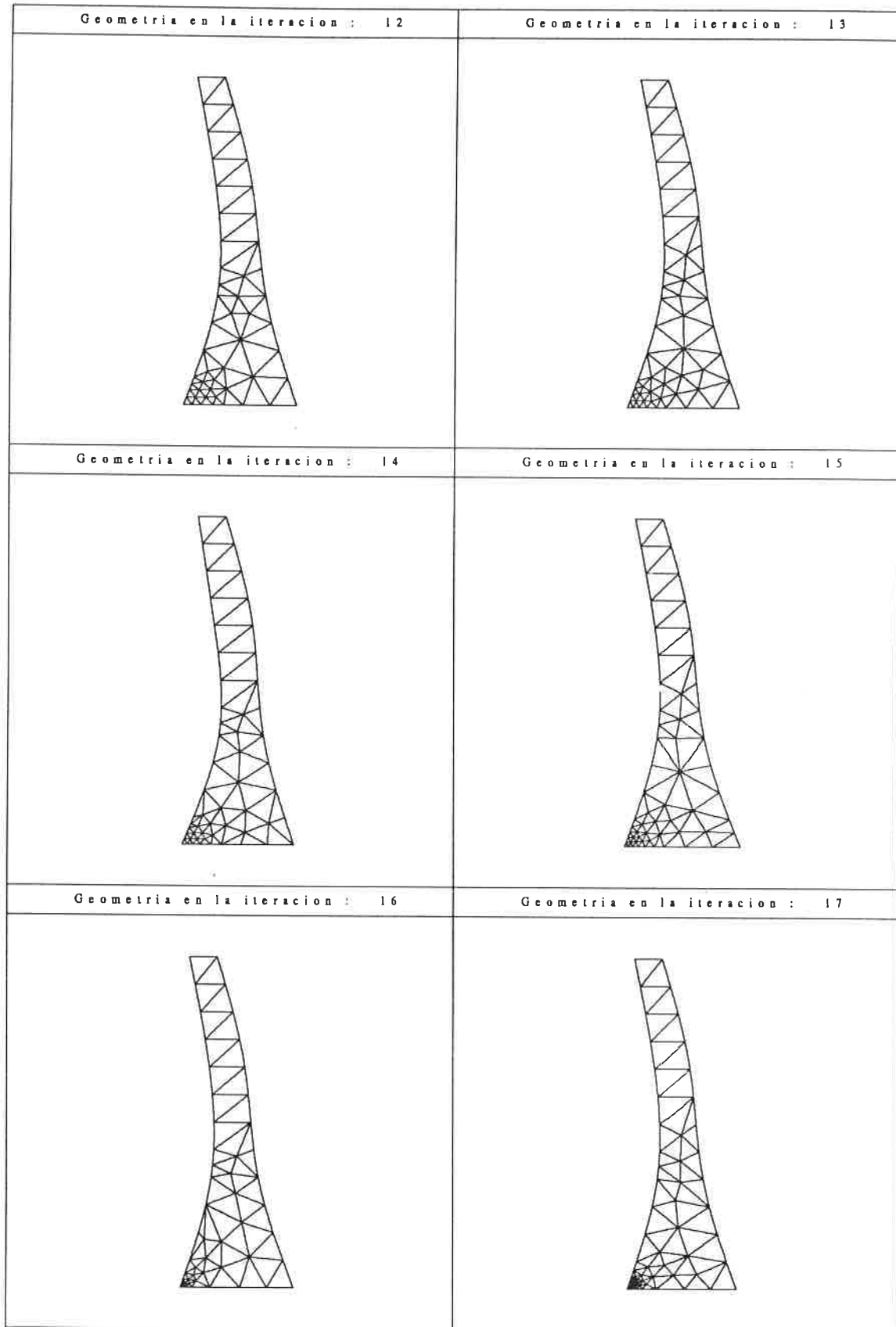


FIGURA 6.32C Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 2.Sucesión de diseños obtenidos.

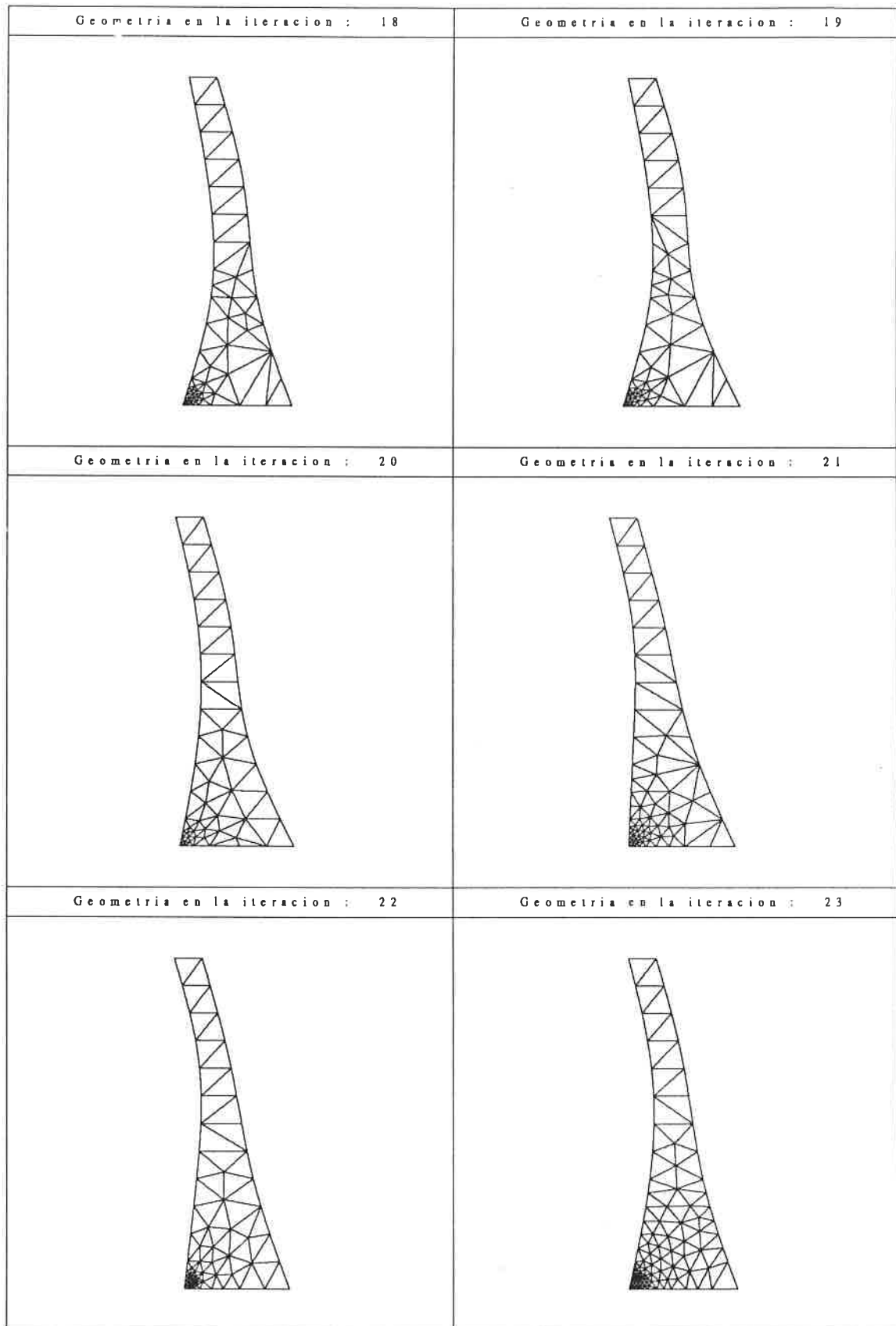


FIGURA 6.32D Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 2.Sucesión de diseños obtenidos.

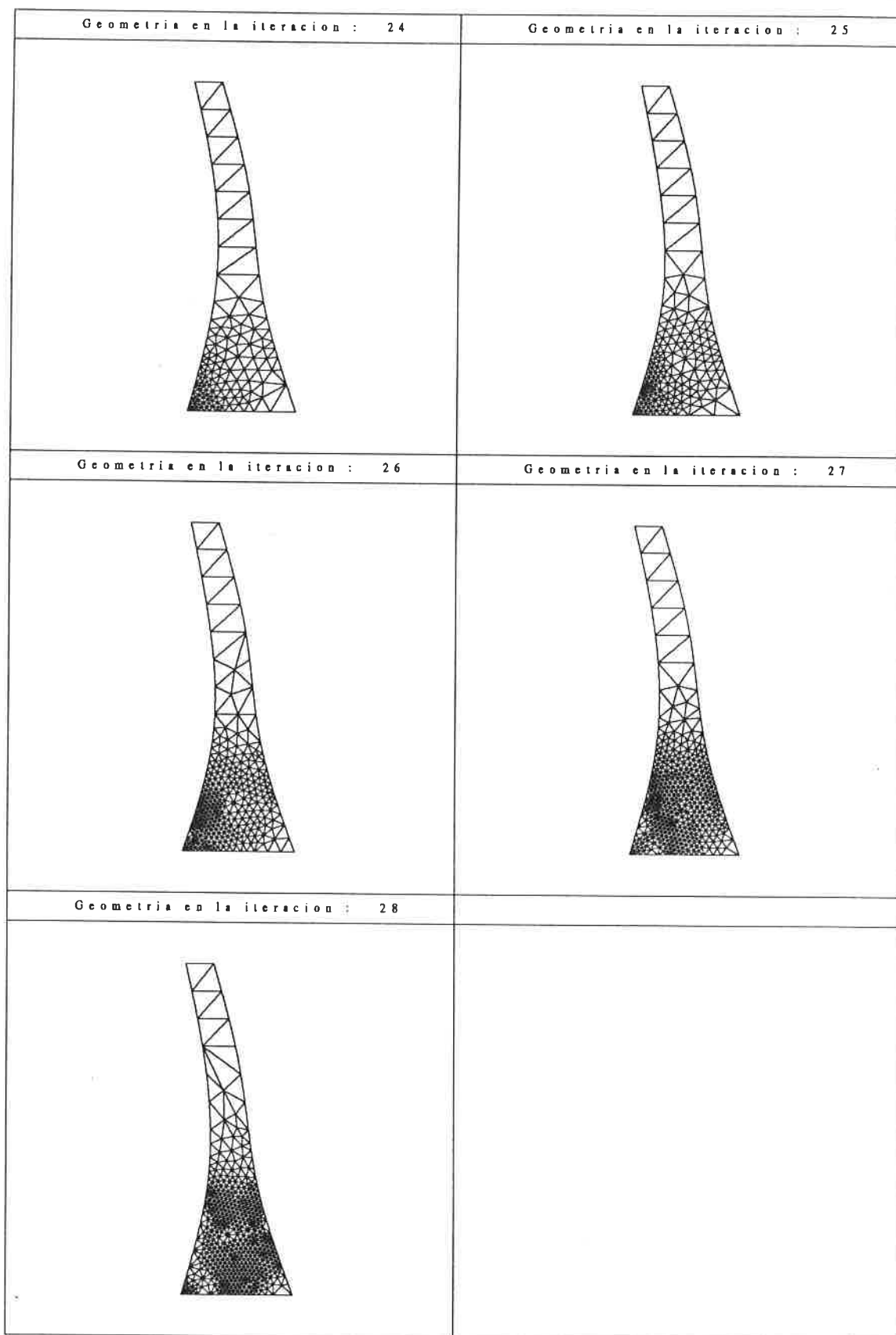


FIGURA 6.32E Optimización de presa bóveda sin cimentación.
Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

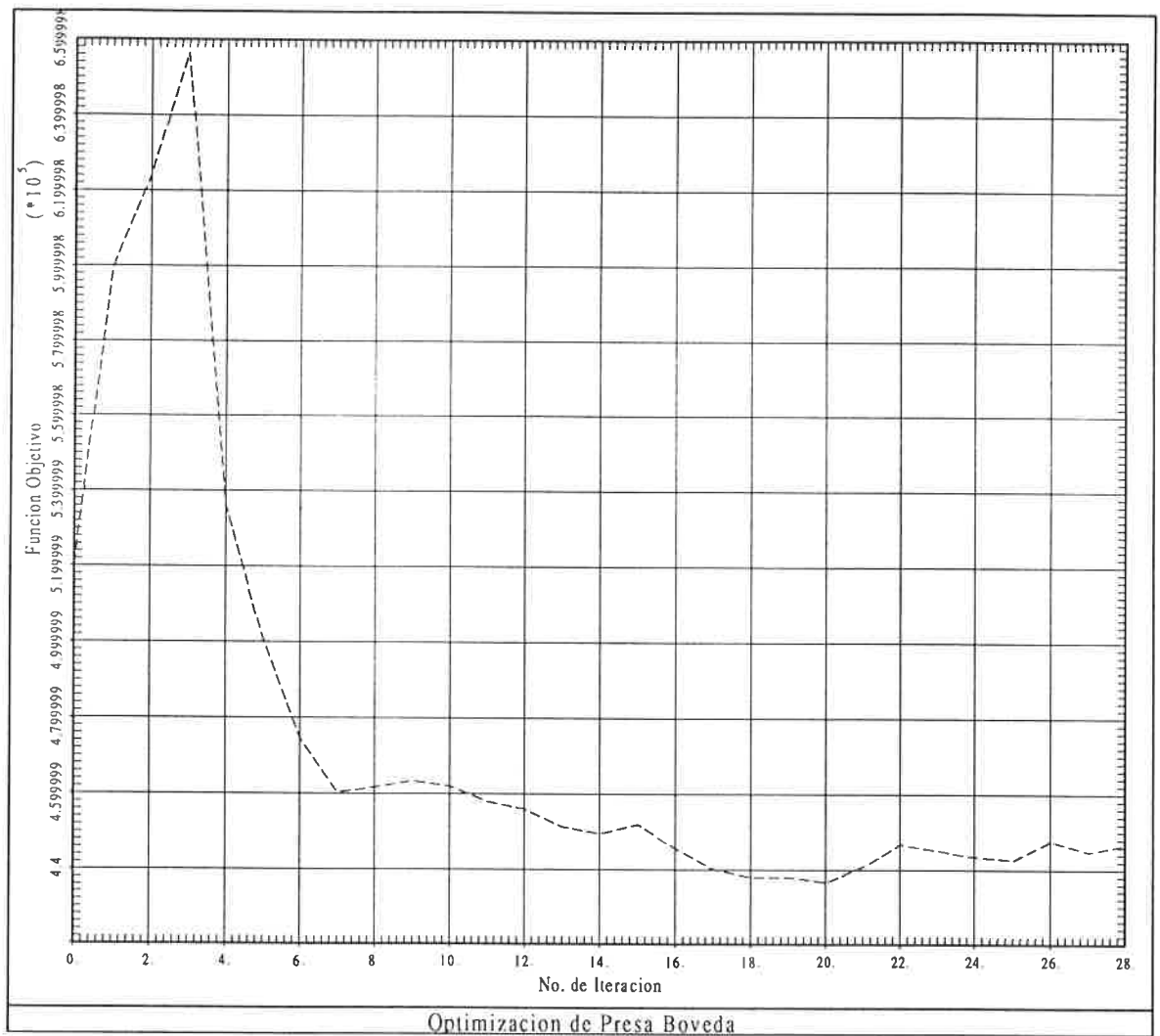


FIGURA 6.33 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 2. Evolución de la función objetivo.

6.5.3 Presa sin cimentación. Caso n° 3.

Para comprobar si la solución obtenida en el caso n° 2 corresponde a un mínimo local o a un mínimo global del problema de optimización planteado se ha repetido la resolución del mismo partiendo de un diseño inicial distinto. En este nuevo caso, se ha tomado como diseño inicial el obtenido como solución final del caso n° 1. Para ello se ha reinicializado el proceso utilizando como valores iniciales de las variables de diseño los obtenidos en la resolución del apartado 6.5.1.

La sucesión de diseños y mallas obtenidas en esta nueva resolución se presentan en la figura 6.34. Asimismo, la evolución de la función objetivo se presenta en la figura 6.35.

La solución obtenida en esta ocasión es factible, y no difiere sustancialmente de la obtenida en el prime caso. Por ello, puede concluirse que la solución obtenida previamente en el caso n° 2 constituye un mínimo local.

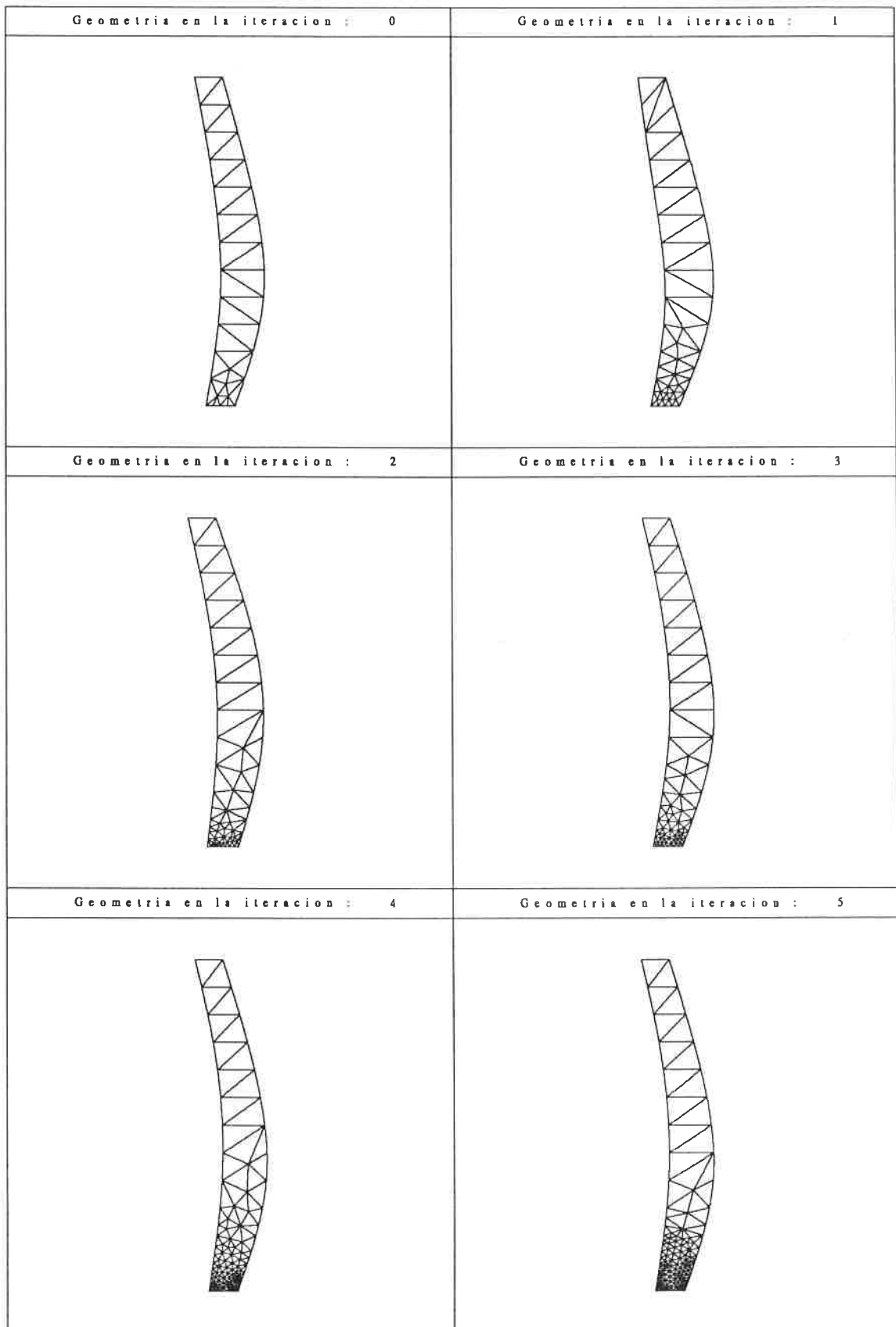


FIGURA 6.34 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 3. Sucesión de diseños obtenidos.

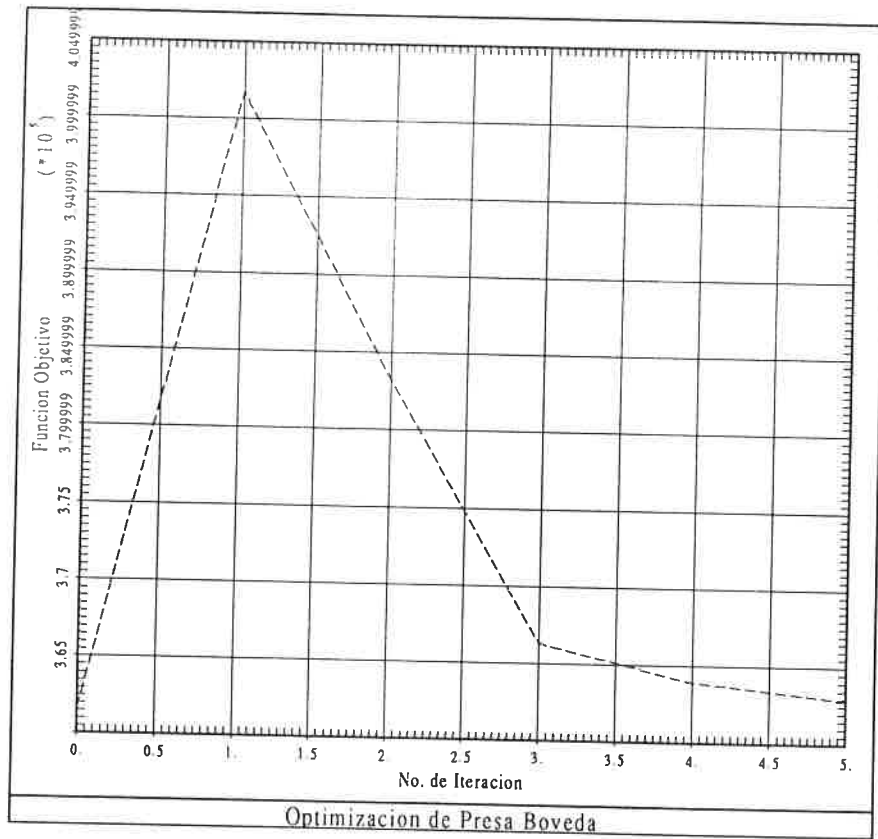


FIGURA 6.35 Optimización de presa bóveda sin cimentación. Caso 3. Evolución de la función objetivo.

6.5.4 Presa con cimentación. Caso n^o 1.

Los resultados obtenidos con una parametrización que incluye sólo el cuerpo de la presa, y una reacción puntual que origina un punto singular en la misma ponen de manifiesto, a través de una “anormal” densificación de la malla alrededor del punto singular, que la parametrización utilizada no es muy adecuada. Por ello, se ha procedido a un nuevo estudio de la presa, considerando en este caso la presencia del terreno donde se asienta. La modelización de la presa más el terreno se ha hecho tal como se indica en la figura 6.36. La única diferencia geométrica con respecto a los casos anteriores es la inclusión de una parte del terreno dentro de los cálculos.

La función objetivo considerada en este caso es el peso de la presa, sin considerar el peso del terreno añadido.

Las variables de diseño utilizadas, así como las restricciones, son exactamente las mismas que en los casos anteriores. También son iguales las características mecánicas del hormigón de la presa. Sin embargo, para modelar la respuesta del terreno se ha utilizado un valor más bajo del Módulo de Young que en el caso del hormigón. Las características mecánicas que se han utilizado para el terreno son $E = 1000000.0 \text{ T/m}^2$ y $\nu = 0.2$.

Los modelos de cálculo utilizados, así como los casos de carga, también son iguales a los anteriores teniendo en cuenta que, en este caso, la presión hidrostática del agua también actuará sobre la superficie del terreno situado aguas arriba de la presa. El peso propio del terreno no se ha considerado ya que se supone que éste ya habrá adquirido unas tensiones iniciales previas a la construcción de la presa.

El porcentaje de error admitido se ha elevado en este caso a un 10% para reducir los costes de computación, ya que en este caso la dimensión del dominio es mucho mayor y puede dar lugar a la generación de mallas con un número mucho mayor de nodos y elementos.

La sucesión de diseños y mallas obtenidos se presenta en la figura 6.37. Las evoluciones de la función objetivo, el porcentaje de error global y el número de elementos utilizados se presentan respectivamente en las figuras 6.38, 6.39 y 6.40.

Como puede observarse en la figura 6.37, las mallas obtenidas indican la existencia de dos puntos singulares en la base de la sección. Estas singularidades son debidas a que el contorno es anguloso en dichos puntos y sigue habiendo, por tanto, una discontinuidad en las condiciones de contorno aplicadas sobre

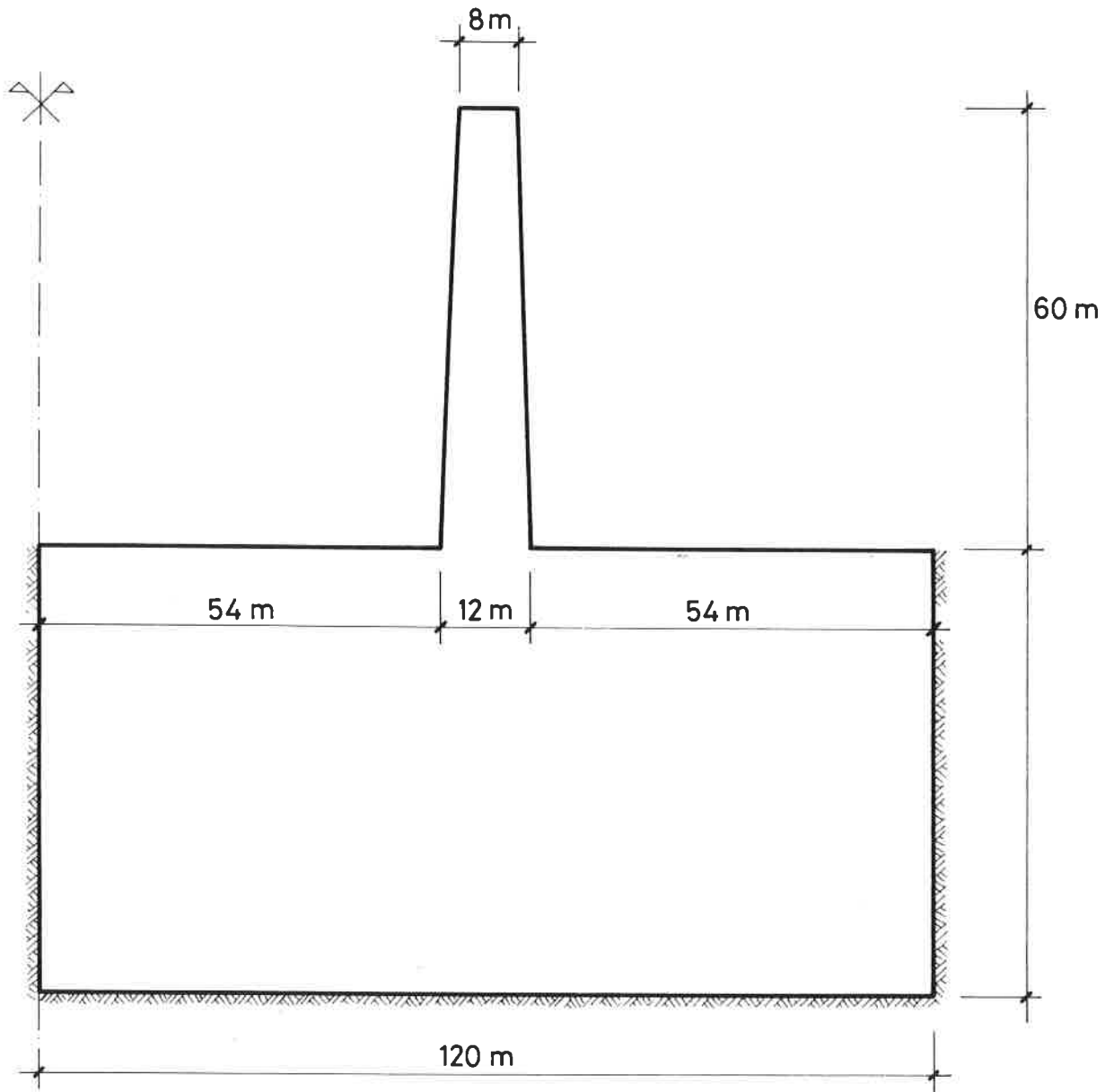


FIGURA 6.36 Optimización de ménsula central de presa bóveda.
Diseño inicial y definición de dimensiones.

dichas zonas. Dichas condiciones son las referidas a las tensiones normales a la superficie y la singularidad proviene del hecho de que el vector normal a la misma es discontinuo. Sin embargo, el tipo de discontinuidad existente en este caso es distinto al de los casos estudiados previamente ya que no es debido a la aplicación de una carga puntual.

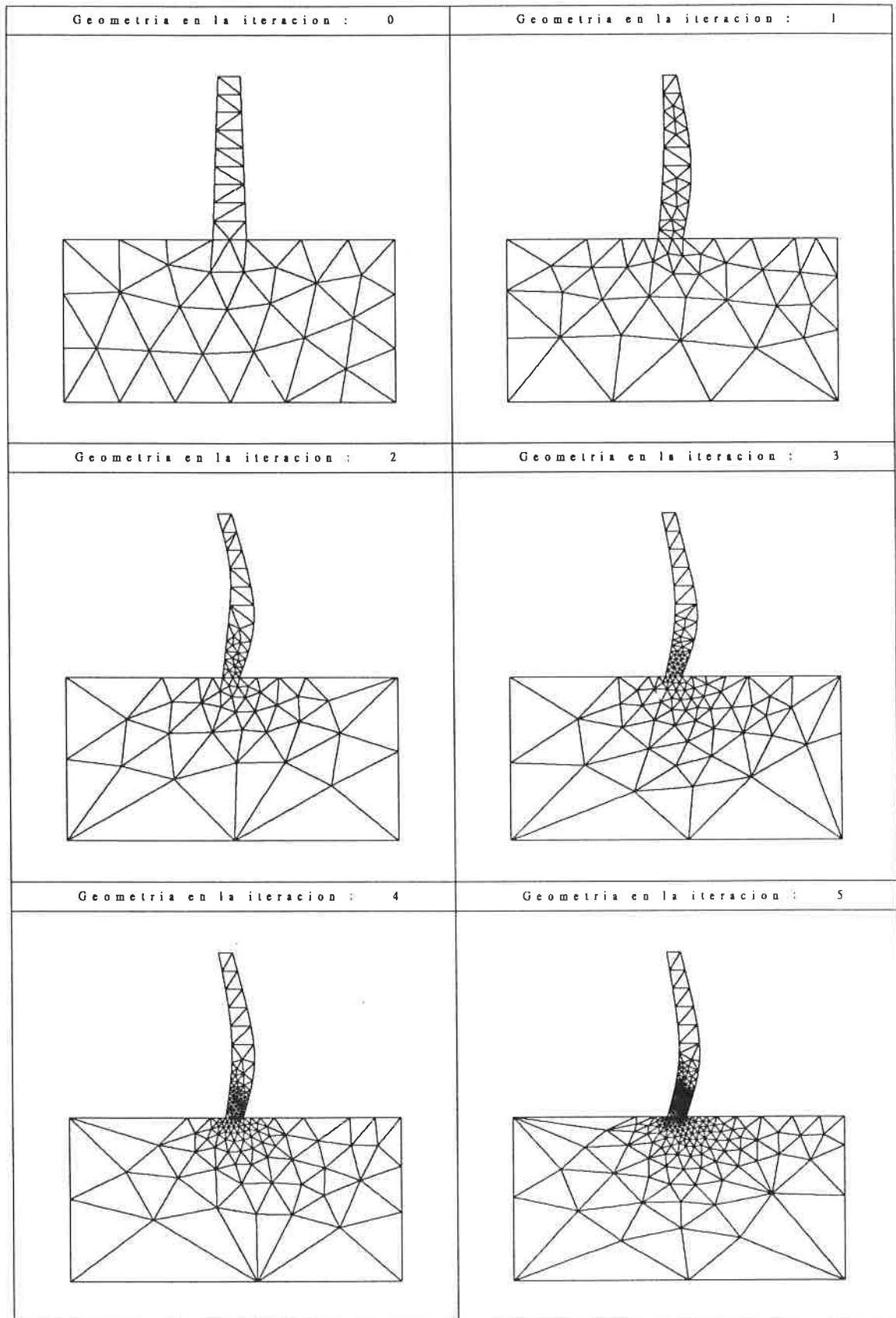


FIGURA 6.37A Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

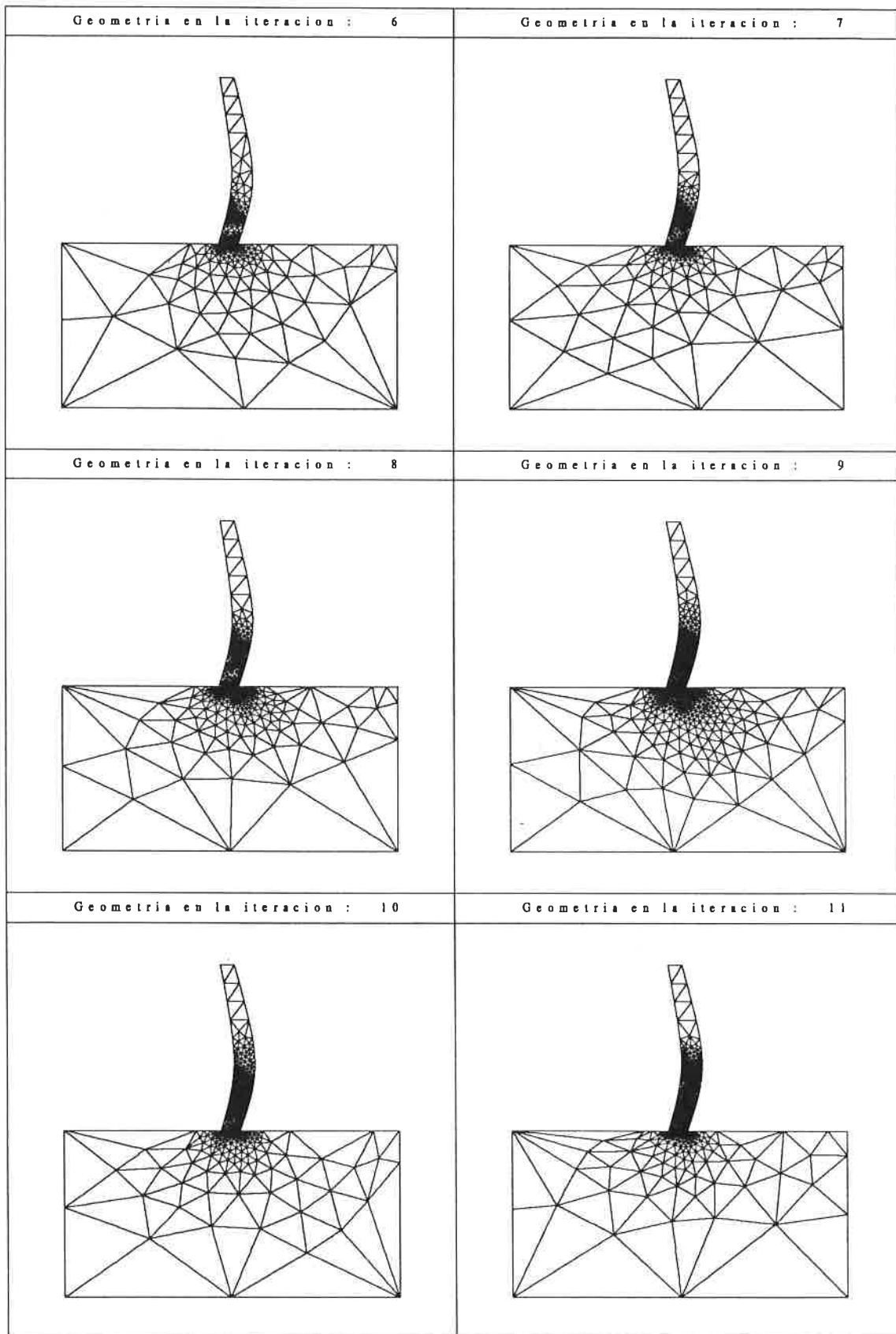


FIGURA 6.37B Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 1. Sucesión de diseños obtenidos.

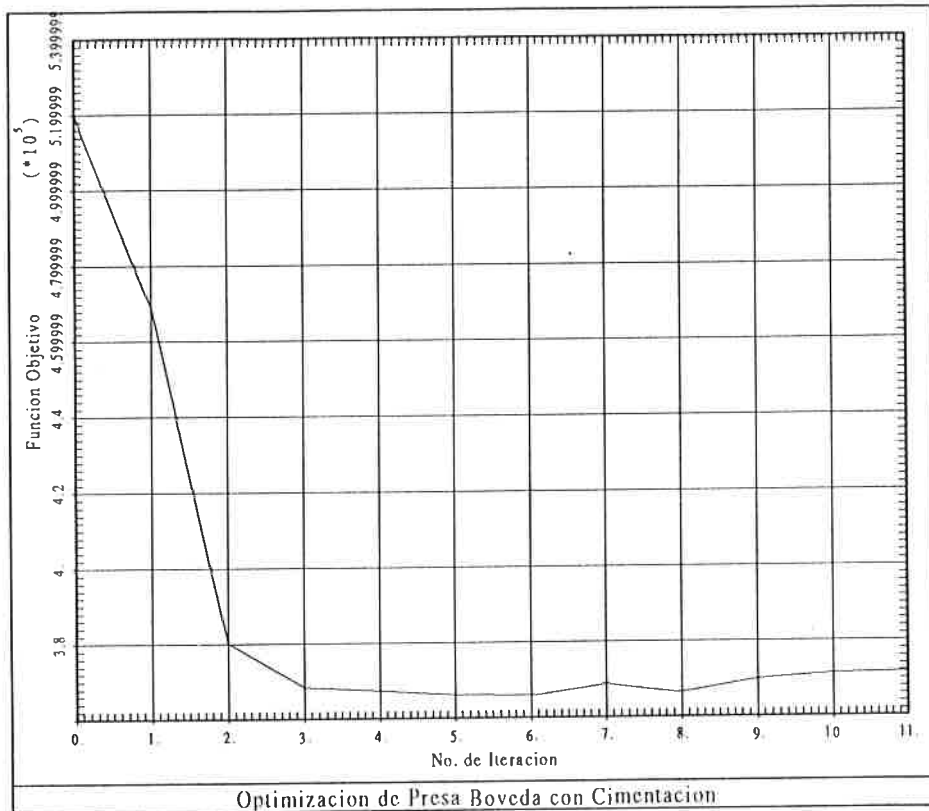


FIGURA 6.38 Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 1. Evolución de la función objetivo.

En esta ocasión, el proceso llega a la solución final en 11 iteraciones. Dicho número es bastante inferior al obtenido en el caso n^o 1 de la presa sin cimentación por lo que la convergencia resulta ser, en este caso, significativamente más rápida. El valor final de la función objetivo, así como la forma del diseño, son además muy similares a los obtenidos previamente para la presa sin cimentación.

La evolución de la función objetivo es descendente al principio y ligeramente oscilante al final del proceso para conseguir un diseño factible.

Todos los porcentajes globales de error están por debajo del 10% exigido a partir de la cuarta iteración, y no se observa el comportamiento fuertemente oscilatorio de los casos anteriores.

El número de elementos utilizados crece rápidamente hasta llegar hasta la iteración número 9 donde se emplean 900 elementos. A partir de ese momento dicho número permanece por debajo de dicho valor.

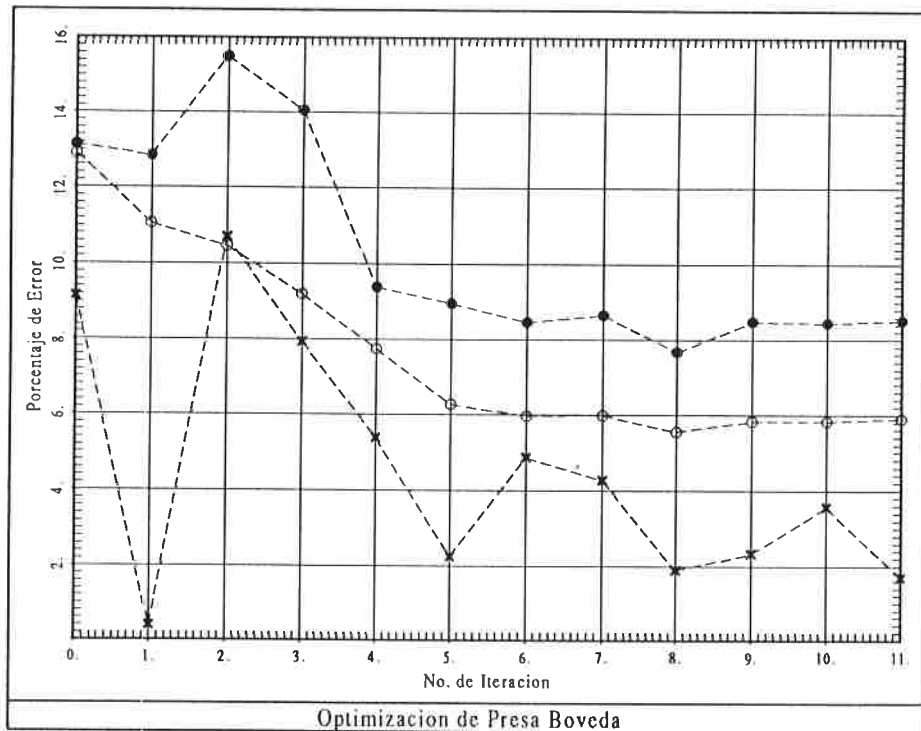


FIGURA 6.39 Optimización de presa bóveda con cimentación.
 Caso 1. Evolución del porcentaje global de error.
 ● peso propio en tensión plana.
 ○ peso propio en simetría de revolución.
 × peso propio + presión hidrostática en simetría de revolución.

La presencia de los puntos singulares produce, también en este caso, un fuerte refinamiento de la mitad inferior del cuerpo de la presa. Sin embargo, el comportamiento general del proceso iterativo de optimización es mejor, en este caso, que cuando la singularidad era debida a la existencia de una carga puntual.

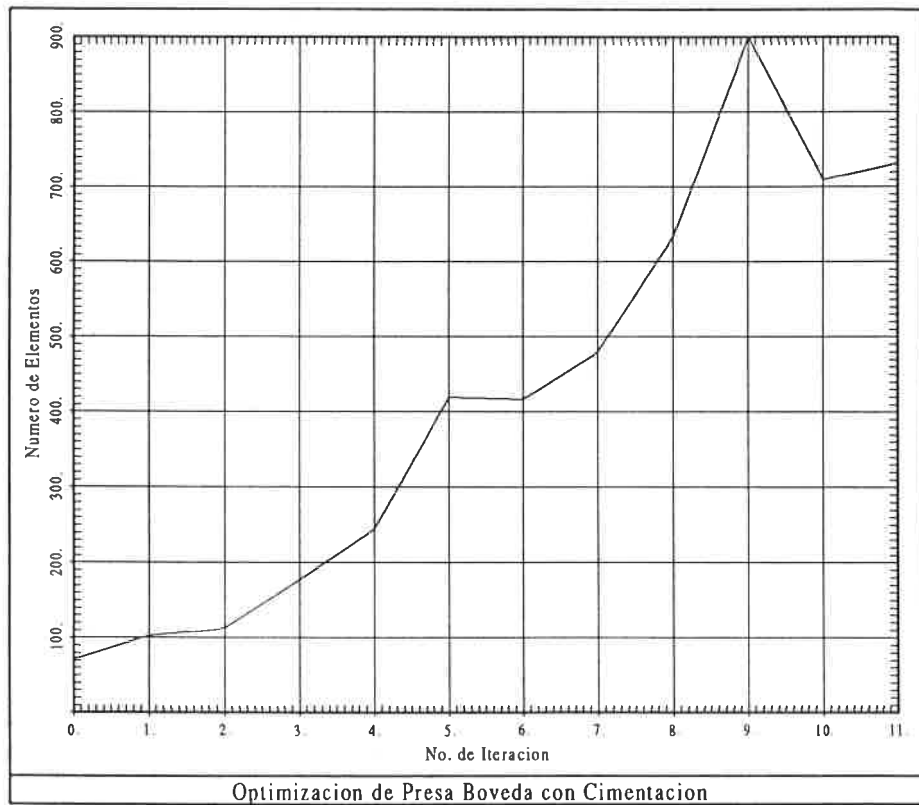


FIGURA 6.40 Optimización de presa bóveda con cimentación.
 Caso 1. Evolución del número de elementos utilizados.

6.5.5 Presa con cimentación. Caso n^o 2.

Para estudiar si la inclusión de la cimentación evita el problema detectado en el apartado 6.5.2, al aumentar el número de puntos de control, se ha repetido el caso anterior, con cimentación, pero utilizando los mismos puntos de control que en el mencionado apartado. Todas las características de este problema son idénticas a las del apartado 6.5.4, a excepción de los puntos de control utilizados que son los mismos que en el apartado 6.5.2.

La sucesión de diseños y mallas obtenidos en este último caso se presentan en la figura 6.41. Las evoluciones de la función objetivo, los porcentajes globales de error y el número de elementos utilizados se presentan, respectivamente, en las figuras 6.42, 6.43 y 6.44.

En esta ocasión, la modificación de los puntos de control utilizados no ha producido una modificación sustancial en el diseño final obtenido. Asimismo, el número de iteraciones necesarias para llegar al mismo ha sido de 10, es decir, la velocidad de convergencia también es mayor en este caso que cuando no se consideraba la cimentación.

El comportamiento de la función objetivo ha sido, en este caso, muy similar al caso anterior. Primero se ha producido un descenso rápido de la misma y, posteriormente, unas ligeras oscilaciones para producir un diseño factible.

Los porcentajes de error global se mantienen por debajo del 10% a partir de la cuarta iteración, y tampoco en esta ocasión se presentan las fuertes oscilaciones que aparecían en el caso sin cimentación.

El número de elementos utilizados crece hasta la iteración número 8, y luego registra una oscilación terminando con 615 elementos.

La conclusión más importante que se puede extraer en este último caso estudiado es que la variación en los puntos de control utilizados no ha producido alteraciones sustanciales en el resultado final. Además, el comportamiento de todo el proceso iterativo, en su conjunto, es mejor que cuando no se consideraba la presencia del terreno.

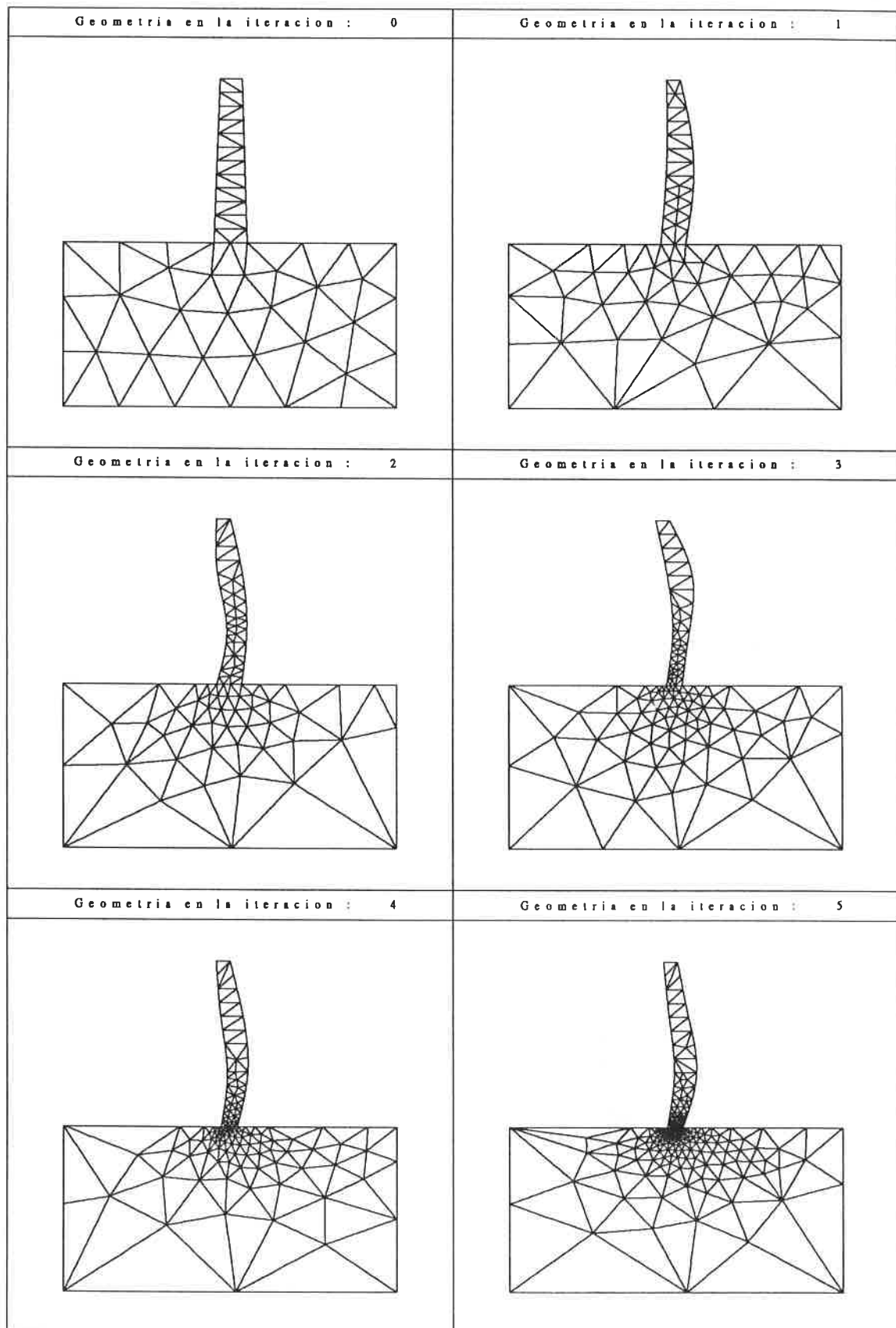


FIGURA 6.41A Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

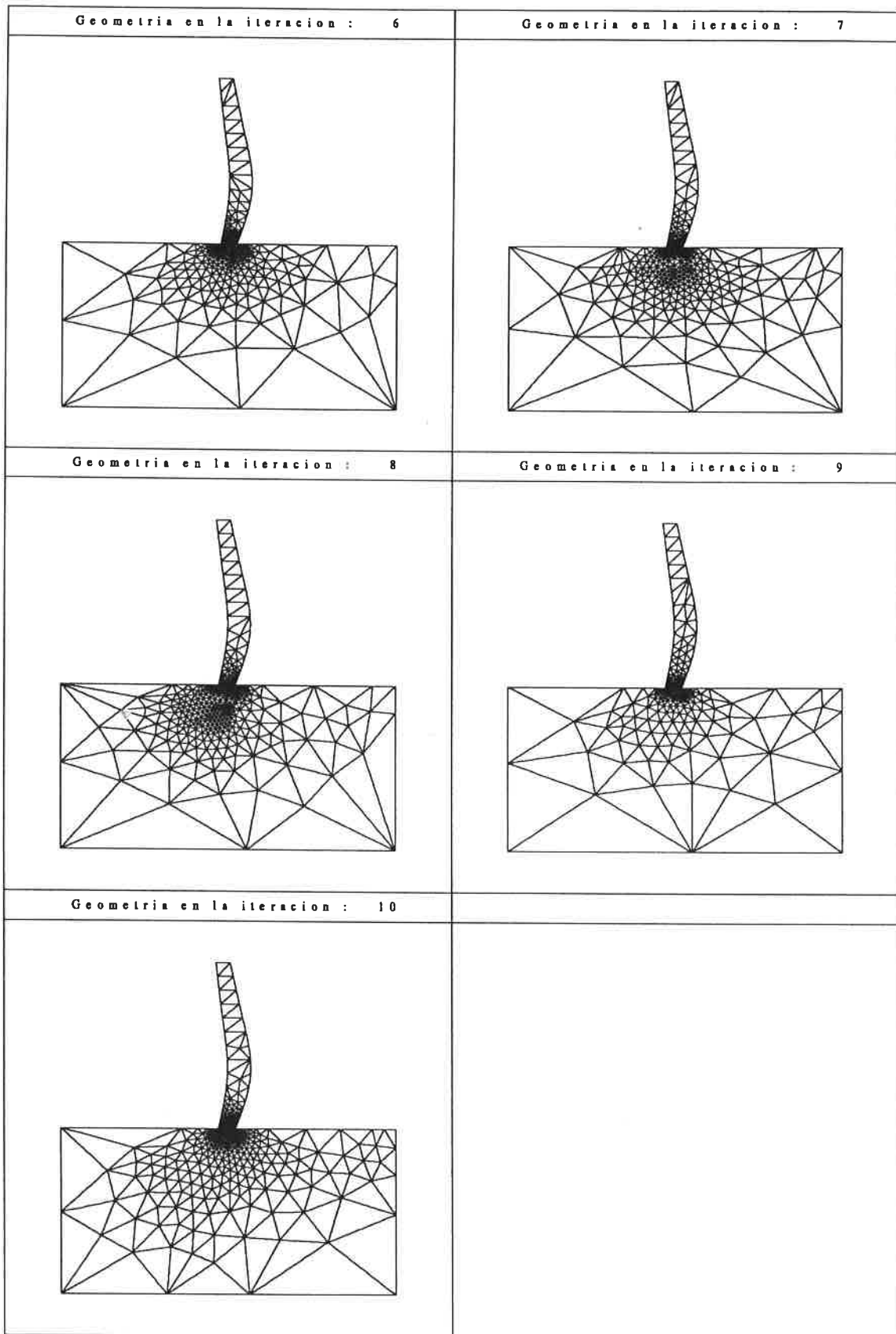


FIGURA 6.41B Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 2. Sucesión de diseños obtenidos.

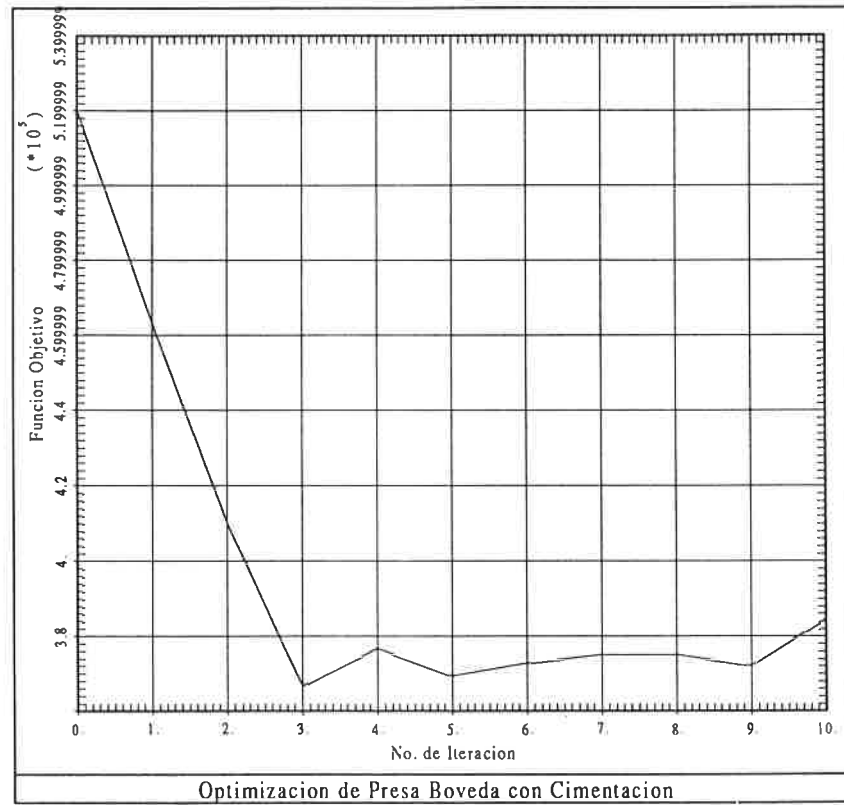


FIGURA 6.42 Optimización de presa bóveda con cimentación.
Caso 2. Evolución de la función objetivo.

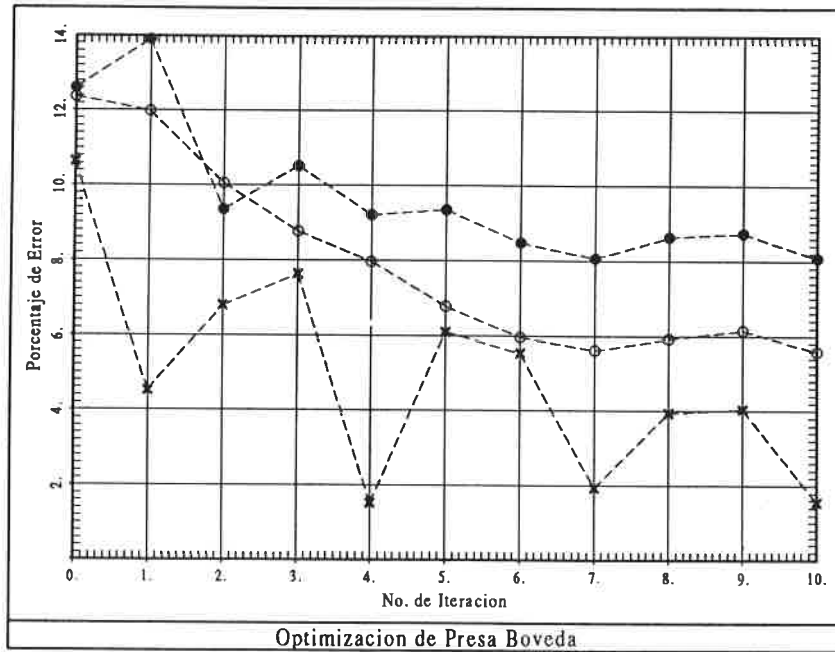


FIGURA 6.43 Optimización de presa bóveda con cimentación.
 Caso 2. Evolución del porcentaje global de error.
 ● peso propio en tensión plana.
 ○ peso propio en simetría de revolución.
 × peso propio + presión hidrostática en simetría de revolución.

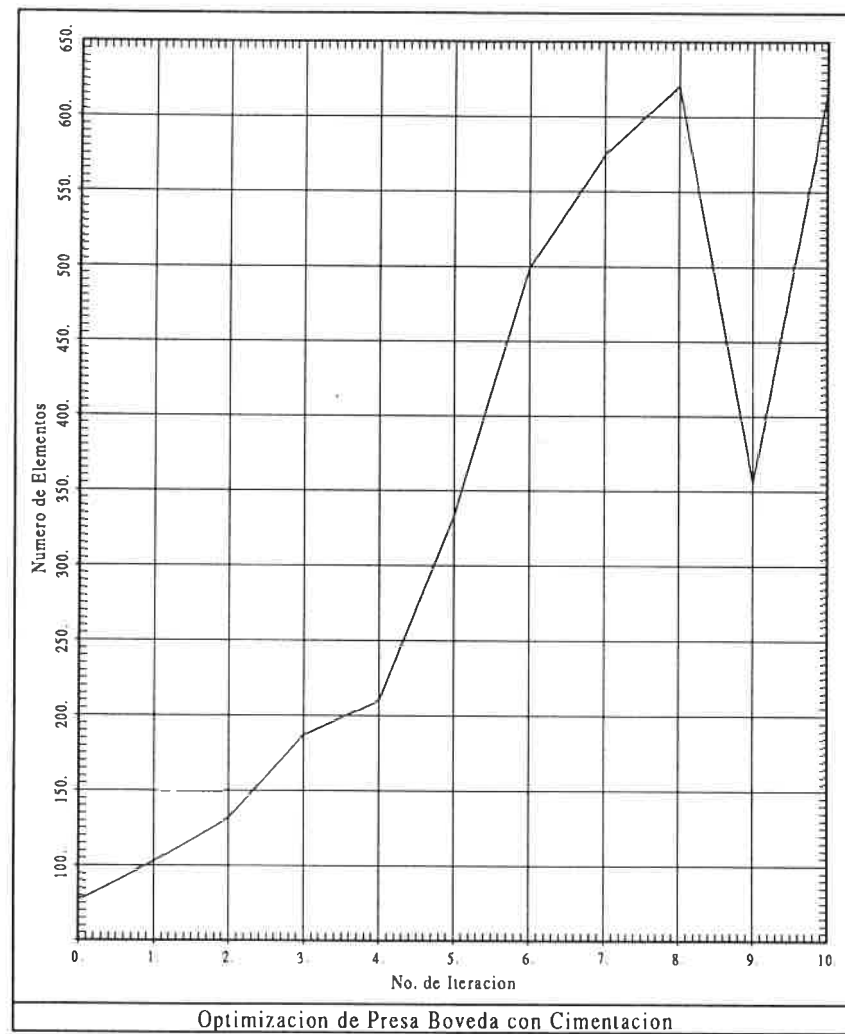


FIGURA 6.44 Optimización de presa bóveda con cimentación.
 Caso 2. Evolución del número de elementos utilizados.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

7.1 APORTACIONES DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Dada la diversidad de temas tratados en este trabajo, se ha considerado necesario destacar las aportaciones realizadas dentro de cada uno de ellos que se describen a continuación, respetando el orden en que han ido apareciendo en los capítulos anteriores:

A) Dentro del campo de la *estimación del error* se han obtenido dos nuevas expresiones para calcular el valor del estimador de Zienkiewicz y Zhu que se presentan en el apartado 2.6.4. Estas nuevas expresiones son más económicas de calcular que las originales si se pretende conocer únicamente el nivel global de error. Sin embargo, no dan información sobre su distribución sobre los elementos.

B) Se ha desarrollado un nuevo criterio de optimalidad para la distribución del error sobre los elementos que constituyen una malla. Este nuevo criterio, presentado en el apartado 2.7.3.2, considera que una malla es óptima cuando el nivel de error existente por unidad de superficie es constante, y se contrapone a otro criterio alternativo, ya clásico, que considera que una malla es óptima cuando todos los elementos contienen el mismo nivel de error. El criterio propuesto, proporciona unos resultados cuya distribución de error es más apropiada para su interpretación por parte del ingeniero y además presenta una mayor coherencia algorítmica que el anterior.

C) Dentro del campo de la *generación de mallas* se han aportado las herramientas necesarias para utilizar los B-splines como definición de las geometrías de los problemas a calcular (apartado 3.2). Mediante este tipo de curvas se ha simplificado enormemente la información necesaria para definir la forma del dominio correspondiente a cada problema particular, permitiendo además su utilización para cualquier tipo de geometría.

D) La utilización de los B-splines ha permitido confeccionar una metodología general para la utilización de los procesos de remallado automático.

Esta metodología, descrita en el Capítulo 4, permite la resolución de una gran variedad de problemas precisando de un volumen mínimo de información para la definición de cada uno de ellos. Con ello, toda la información necesaria para definir un determinado problema se reduce a la definición de su contorno y de las cargas y coacciones que actúan sobre él.

E) Dentro del campo de la *optimización estructural* se ha desarrollado una nueva metodología que incluye la utilización de las técnicas de remallado automático (estimación de error y generación automática de mallas no estructuradas). Según los conocimientos del autor, esta es la primera vez que se ha confeccionado una metodología de este tipo y los resultados de su utilización son claramente alentadores. Para la elaboración de la misma ha sido necesario desarrollar una serie de aspectos que se enumeran a continuación:

- El cálculo de sensibilidades de primer y segundo orden para las coordenadas de los nodos situados sobre los B-splines utilizados para definir la geometría (apartado 5.4.2.1).
- El cálculo de las sensibilidades de las coordenadas de los nodos interiores generados mediante la técnica de avance frontal y utilizando una malla de referencia (apartado 5.4.2.2).
- La deducción de las expresiones necesarias para calcular las sensibilidades del estimador de error de Zienkiewicz y Zhu. Asimismo, se han sentado las bases para el cálculo de sensibilidades de cualquier otro estimador de error (apartado 5.4.3).
- Un módulo de parametrización general que utiliza la definición de la geometría mediante B-splines para definir cuales son las variables de diseño y las restricciones (apartado 5.4.2).

7.2 CONCLUSIONES

El trabajo realizado durante la investigación ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- Existen una serie de técnicas capaces de estimar, al menos de forma global, el error asociado a unos resultados. En este trabajo se ha utilizado el estimador de error de Zienkiewicz y Zhu obteniéndose resultados muy cercanos a los esperados. La precisión de dicho estimador de error es tanto mayor cuanto más cercana esté la solución obtenida de la solución exacta.
- La utilización del nuevo criterio de optimalidad sobre la distribución del error conduce a mallas en las cuales el error por unidad de área es constante y se contrapone al criterio clásico de distribuir el error a partes iguales entre todos los elementos. La utilización del nuevo criterio produce una mejor convergencia del proceso iterativo de remallados automáticos hacia una solución estacionaria. Además, este criterio proporciona resultados más precisos que el anterior en las zonas que requieren fuertes refinamientos como son las zonas de concentración de tensiones o los puntos singulares.
- A igualdad del nivel de error global, la utilización del nuevo criterio de optimalidad conduce a mallas con un número de elementos muy superior a las obtenidas con el criterio clásico. Sin embargo, si la comparación se hace a través del grado de precisión obtenido en las zonas con mayor concentración de elementos, este nuevo criterio resulta ser más económico que el anterior.
- Los procesos de remallado automático refinan de forma indefinida las zonas situadas alrededor de los puntos singulares. Ello es debido a que el estimador de error detecta, cada vez con mayor precisión, la singularidad existente y por ello el nivel de error local se hace cada vez mayor no porque la solución obtenida sea peor, sino porque la distancia detectada entre ésta y la solución exacta crece.
- La utilización de B-splines para definir geometrías se ha mostrado como una herramienta muy eficaz, potente y flexible que se puede utilizar para cualquier tipología estructural. Además, la posibilidad de definir sobre las curvas utilizadas las cargas, coacciones, tipos de material, etc. permite reducir al máximo la cantidad de información necesaria para los programas de cálculo. Esta capacidad se traduce en un menor esfuerzo por parte del usuario, y en la posibilidad de definir un módulo de parametrización

general en los procesos de optimización estructural. El hecho de que las curvas utilizadas (B-splines) sean de uso común dentro del mundo del diseño asistido por ordenador hace que la metodología presentada pueda utilizarse directamente a partir de la información generada por los programas de diseño.

- Existen una serie de algoritmos para la generación de mallas de elementos finitos cuya potencia y flexibilidad es muy variable. Los algoritmos que producen mallas estructuradas resultan ser muy poco flexibles y precisan de una gran intervención por parte del usuario para proporcionar mallas adecuadas a cada caso. Su potencia se ve muy incrementada si se utiliza una subdivisión previa del dominio en bloques.
- Los algoritmos de generación de mallas no estructuradas se han revelado como extraordinariamente potentes y son los que han posibilitado la confección de los procesos de remallado automático. Estos algoritmos, y en particular el método de avance frontal, son capaces de funcionar dentro de dominios con cualquier geometría produciendo además elementos de tamaño y forma controladas. Los ejemplos presentados muestran como la utilidad de estos algoritmos se extiende sobre todos los campos en que las técnicas de resolución por elementos finitos son aplicables.
- La metodología propuesta para los procesos de remallado automático se ha mostrado, a través de los ejemplos resueltos, como muy potente y fácil de utilizar. En particular, cabe resaltar la capacidad de la misma para proporcionar resultados con un nivel de error global inferior al exigido, sea cual sea el criterio de optimalidad utilizado.
- La inclusión de la generación automática de mallas y la definición de las geometrías mediante B-splines dentro de los procesos de optimización estructural ha posibilitado la confección de una metodología capaz de resolver problemas de tipología y grado de dificultad muy diversos. Los ejemplos presentados muestran como mediante la utilización de la misma es posible afrontar la optimización de estructuras muy diversas minimizando tanto la intervención del usuario como el volumen de información necesario para definir las.
- La metodología propuesta contiene un módulo de parametrización que precisa de muy poca información para definir el problema matemático de optimización correspondiente a cada caso. Resulta extraordinariamente sencillo definir, a partir de un diseño inicial, cuales son las variables de diseño, y cuales son las restricciones que se quiere aplicar sobre el mismo. Esta metodología permite además resolver problemas de tipología muy diversa sin realizar ninguna alteración en el programa de cálculo

utilizado. Esta capacidad la distingue de otras propuestas anteriormente en las que era preciso programar la parametrización correspondiente a cada problema.

- El hecho de que la metodología presentada proporcione una malla adecuada para calcular el diseño final advierte al diseñador de cuales son las zonas tensionalmente más problemáticas del mismo. Tal como se ha visto en los ejemplos presentados, esta información puede sugerir realizar cambios en la parametrización utilizada para evitar la aparición de puntos singulares y facilitar la obtención de un buen diseño final.
- La utilización de un control sobre el nivel de error global admitido durante el proceso de optimización asegura que el diseño final estará calculado con el grado de precisión exigido. Este aspecto garantiza que un nuevo cálculo del mismo no revele la no factibilidad del mismo debido al incumplimiento de alguna de las restricciones en desplazamientos o tensiones.

7.3 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

El trabajo presentado en esta tesis puede continuarse a través de una serie de nuevas líneas de investigación. En ocasiones, estas nuevas líneas constituyen una profundización de temas ya tratados pero que pueden mejorarse mediante un desarrollo más intenso. En otras ocasiones se propone la investigación sobre aspectos que quizás precisan de un nuevo enfoque que conduzca a soluciones más satisfactorias. Se considera como prioritarias las siguientes líneas de investigación:

- La profundización en el estudio de las técnicas de estimación de error para intentar obtener expresiones más precisas. En particular, se propone investigar sobre las consecuencias de imponer condiciones de contorno sobre las tensiones al realizar el alisado del estimador de Zienkiewicz y Zhu. Asimismo, también se propone estudiar las consecuencias de efectuar dicho alisado sobre las deformaciones y no sobre las tensiones.
- El estudio de alternativas a la utilización de los elementos finitos estándar para modelar la solución en zonas con singularidades. Parece adecuado investigar sobre la utilización de mallas mixtas en las que dichas zonas estén cubiertas por elementos específicos para modelar las mismas.
- El estudio de las posibilidades de utilización de las técnicas de remallado automático para problemas no lineales.
- La extrapolación al caso tridimensional de las técnicas propuestas para la modelización de contornos mediante B-splines y la generación de mallas. En particular, sería necesario la definición de algún tipo de superficie que sea capaz de modelar cualquier tipo de geometría en el espacio. Esta extrapolación serviría tanto para generar mallas sobre superficies curvas (láminas) como para generar mallas sobre sólidos tridimensionales.
- La investigación de técnicas para el manejo de la información necesaria para el funcionamiento de los algoritmos de generación de mallas por avance frontal. Esta investigación tendría como fin la obtención de algoritmos cuyo coste sea accesible, para la generación de mallas con un gran número de elementos tanto en el plano como en el espacio.
- Extrapolar la metodología de optimización estructural a casos no cubiertos en este trabajo como la optimización de láminas y sólidos tridimensionales. Esta extrapolación precisaría del desarrollo de alguno de los puntos anteriores sobre la modelización de superficies en el espacio y la generación de mallas sobre ellas.

- La investigación sobre nuevos algoritmos de resolución del problema matemático de optimización que se adapten a la estructura particular de los problemas derivados de la optimización estructural, es decir, con funciones objetivo suaves y restricciones altamente no lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.Z.** - *Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, pp. 2161-2174 (1989)
- [2] **Almansa F.J., Rodellar J.** - *Control activo de estructuras en edificación.* - Sistemas en la ingeniería civil. Identificación, optimización, control. Ed. José Rodellar. CIMNE (1989)
- [3] **Babuška I., Rheinboldt W.C.** - *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations.* - Siam Journal Numerical Analysis, vol 15. No. 4 (1978)
- [4] **Babuška I., Rheinboldt W.C.** - *A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1597-1615 (1978)
- [5] **Babuška I., Rheinboldt W.C.** - *Reliable Error Estimation and Mesh Adaptation for the Finite Element Method.* - Computational Methods in Nonlinear Mechanics, pp. 67-108 Ed. J.T. Oden (1980)
- [6] **Babuška I., Szabo B.A.** - *On the Rates of Convergence of the Finite Element Method.* - Report WU/CCM-80/2. Center for Computational Mechanics. Washington University (1980)
- [7] **Babuška I., Dorr M.** - *Error estimates for the combined h y p versions of the finite element method.* - Numerical Mathematica, vol. 25, pp. 257-277 (1981)
- [8] **Baker T.J.** - *Three-dimensional mesh generation by triangulation of arbitrary point sets.* - Proceedings of the AIAA 8th CFD Conference, Hawaii (1987)
- [9] **Baker T.J.** - *In Numerical Grid Generation in CFD.* - Ed. Sengupta, Hauser, Eiseman and Thompson, Pineridge Press, Swansea (1988)

-
- [10] **Baker T.J.** - *Mesh generation by a sequence of transformations.* - Journal of Applied Numerical Mathematics, vol. 2, No. 6 pp. 515-528 (1986)
- [11] **Baldwin K.H.** and **Schreyer H.L.** - *Automatic generation of quadrilateral elements by a conformal mapping.* - Engineering Computations, vol. 2 pp. 187-194 (1985)
- [12] **Bowyer A.** - *Computing Dirichlet tessellations.* - The Computer Journal, vol. 24, No. 2, pp. 162-166 (1981)
- [13] **Carrol W.E.** and **Baker R.M.** - *A Theorem for Optimum Finite Element Idealization.* - International Journal Solid Structures, vol. 9 pp. 883-895 (1973)
- [14] **Cavendish J.C.** - *Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the Finite Element Method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, pp. 679-696 (1974)
- [15] **Clough R.W.** and **Penzien J.** - *Dynamics of Structures.* - McGraw-Hill (1975)
- [16] **Crisfield M.A.** - *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis. Vol. 1: Linear Analysis.* - T.R.R.L., Crowthorne, U.K. Pineridge Press, Swansea (1986)
- [17] **Dirichlet G.L.** - *Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen.* - Z. Reine Angew. Math., vol. 40, no. 3 pp. 209-277 (1850)
- [18] **Eriksson L.E.** - *Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation* - AIAA Journal, vol. 20, no. 10 pp. 1313-1320 (1982)
- [19] **Eriksson L.E.** - *Transfinite interpolation* - VKI Lecture Series in CFD
- [20] **Faux I.D., Pratt M.D.** - *Computational Geometry for Design and Manufacture.* - Ellis-Horwood Ltd. (1979)
- [21] **Felippa C.A.** - *Numerical Experiments in Finite Element Grid Optimization by Direct Energy Search.* - Applied Mathematics Modelling, vol. 1 (1977)
- [22] **Felippa C.A.** - *Optimization of Finite Element Grids by Direct Energy*

- Search.* - Applied Mathematics Modelling, vol. 1 (1978)
- [23] **Fortin M. and Tanguy P.** - *A non-standard mesh refinement procedure through node labelling.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering - Short Communications pp. 1361-1365 (1984)
- [24] **Fortune S.** - *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams.* - AT+T, Bell Laboratory Report, Murray Hill, N.J. (1985)
- [25] **Frey W.H.** - *Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 2183-2200 (1987)
- [26] **Fukuda J. and Suhara J.** - *Automatic mesh generation for finite element analysis.* - Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Ed. J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto, UAM Press, Huntsville, Alabama (1972)
- [27] **Gago J.P. de S.R.** - *A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method.* - Ph. D. Thesis - University College of Swansea (1982)
- [28] **Gordon W.J. and Hall C.A.** - *Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 7 pp. 461-477 (1973)
- [29] **Green P.J. and Sibson R.** - *Computing Dirichlet tessellations in the plane* - Computing Journal, no. 2 pp. 168-173 (1978)
- [30] **Irons B. and Ahmad S.** - *Techniques of Finite Elements* - Ellis Horwood Series in Engineering Science, John Wiley & Sons (1980)
- [31] **Joukowski N.** - *Ueber ie konturen der drachen flieger* - ZFM (1910)
- [32] **Kelly D.W., Gago J.P. de S.R., Zienkiewicz O. and Babuška I.** - *A posteriori error analysis and adaptive processes in the Finite Element method: Part I - Error Analysis.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19 pp. 1593-1619 (1983)
- [33] **Kelly D.W., Gago J.P. de S.R., Zienkiewicz O. and Babuška I.** - *A posteriori error analysis and adaptive processes in the Finite Element method: Part II - Adaptive Mesh Refinement.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19 pp. 1621-1656 (1983)

- [34] Kelly D.W. - *The self-equilibration or residuals and complementary a posteriori error estimates in the Finite Element Method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20 pp. 1491-1506 (1984)
- [35] Kelly D.W., Mills R.J., Reizes J.A. and Miller A.D. - *A posteriori estimates of the solution error caused by discretization in the finite element, finite difference and boundary element methods.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 1921-1939 (1987)
- [36] Kelly D.W. - *A generalised a-posteriori analysis of the discretization error in numerical solutions to linear problems.* - Proceedings of NUMETA 87, Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design (1987)
- [37] Kober H. - *Dictionary of Conformal Representation.* - Dover Publications, New York (1952)
- [38] Lo S.H. - *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21 pp. 1403-1426 (1985)
- [39] Löhner R. and Parikh P. - *Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method.* - International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 8 pp. 1135-1149 (1988)
- [40] Melosh R.J. and Killian D.E. - *Finite Element Analysis to Attain a Pre-specified Accuracy.* - Proceedings 3rd National Congress on Computing in Structures (1976)
- [41] Melosh R.J. and Marcal P.V. - *An Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 2 pp. 1083-1091 (1977)
- [42] McNeic B.M. and Marcal P.V. - *Optimization of Finite Element Grids Based on Maximum Potential Energy.* - Technical Report no. 7, Brown University, Providence (1971)
- [43] Miquel J., Oñate E. and Quintana F. - *A Formulation for the Solution of Euler Equations for Compressible Flow* - Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, vol. 2

- [44] **Navarrina F.** - *Una metodología general para optimización estructural en diseño asistido por ordenador.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña (1987)
- [45] **Navarrina F., Bendito E. and Casteleiro M.** - *High order sensitivity analysis in shape optimization problems.* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 75 pp. 267-281 (1989)
- [46] **Oliveira E.R. de Arantes** - *Optimization of Finite Element Solutions.* - Proceedings 3rd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 750-769 (1971)
- [47] **Oliver J., Cervera M., Oller S. and Lubliner J.** - *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete.* - SCI-C, Zell an See, Austria (1990)
- [48] **Oliver J., Cervera M., Galindo M. and Bugeda G.** - *Utilización de modelos de degradación para la simulación de procesos de fractura. Aplicación al análisis de patologías en presas de hormigón.* - Reunión del grupo Español de Fractura, Sigüenza (1990)
- [49] **Peano A., Riccioni R., Pasini A. and Sardella L.** - *Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis.* - ISMES, Bérgamo (1978)
- [50] **Peano A., Fanelly M., Riccioni R. and Sardella L.** - *Self adaptive convergence of the crack tip of a am buttres.* - International Conference on Fracture Mechanics, Swansea (1979)
- [51] **Peraire J.** - *A Finite Element Method for Convection Dominated Flows.* - Ph. D. Thesis - University College of Swansea (1986)
- [52] **Peraire J., Morgan K. and Peiró J.** - *Unstructured finite element mesh generation and adaptive procedures for CFD.* - AGARD FDP: Specialist's Meeting, Loen, Noruega (1989)
- [53] **Richardson L.F.** - *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems.* Transocanic Royal Society. London. A210 pp. 307-357 (1910)
- [54] **Rivara M.C.** - *A grid generator based on 4-triangles conforming mesh-refinement algorithms.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 1343-1354 (1987)

- [55] **Roberti P. and Melkanoff M.A.** - *Self-adaptive stress analysis based on stress convergence* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 1973-1992 (1987)
- [56] **Specht B.** - *A general construction of local error estimators for conforming finite elements.* - Computers & Structures, vol. 19, no. 5/6 pp. 815-822 (1984)
- [57] **Szabo B.A. and Dunavant D.A.** - *An adaptive procedure based on the P-version of the finite element method.* - Specialist's Conference, Institute for Physical Science and Technology, University of Mariland (1980)
- [58] **Thomas P.D. and Middlecoff J.F.** - *Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations.* - AIAA Journal, vol. 18 pp. 652 (1980)
- [59] **Thompson J.F., Thames F.C. and Mastin C.W.** - *Automatic numerical grid generation of body-fitted curvilinear coordinate system of field containing any number of arbitrary 2-dimensional bodies.* - Journal Computational in Physics, vol. 15 pp. 299-319 (1974)
- [60] **Thompson J.F., Warsi, Mastin C.W.** - *Numerical grid generation: Foundations and Applications.* - North-Holland (1985)
- [61] **Trefethen L.N. (Editor)** - *Numerical Conformal Mapping.* - North-Holland, Amsterdam (1986)
- [62] **Turcke D.J. and Mcneice G.M.** - *Guidelines for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimum Study.* - Computers & Structures, vol. 4 pp. 499-519 (1974)
- [63] **Turcke D.J.** - *On Optimum Element Grid Configurations.* - AAA Journal, vol. 14 (1976)
- [64] **Watson D.F.** - *Computing the n-dimensional Delaunay tesellation with application to Voronoi Polytopes.* - Computer Journal, vol. 24, no. 2 pp. 167-172 (1981)
- [65] **Weatherill N.P.** - *Mesh Generation in CFD.* - VKI Lecture Series in CFD (1989)
- [66] **Yerri M.A. and Sheppard M.S.** - *Automatic 3-dimensional mesh generation by the modified-octree technique.* - International Journal for

- Numerical Methods in Engineering, vol. 20 pp. 1965-1990 (1984)
- [67] **Zhu J.Z. and Zienkiewicz O.C.** - *Adaptive Techniques in the Finite Element Method.* - Communications in Applied Numerical Methods, vol. 4 pp. 197-204 (1988)
- [68] **Zienkiewicz O.C., Irons B.M., Scott F.E. and Campbell J.S.** - *High Speed Computing of Elastic Structures.* - Proceedings of the Symposium of International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Liege (1970)
- [69] **Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Gago J. and Babuška I.** - *Hierarchical Finite Element Approaches, Error Estimates and Adaptive Refinement.* - The mathematics of finite elements and applications, Ed. J.R. Whiteman, Academic Press (1982)
- [70] **Zienkiewicz O.C. and Craig A.W.** - *A-Posteriori error estimation and adaptive mesh refinement in the finite element method.* - Lecture presented at the Institute of Mathematics and Its Applications, Imperial College, London (1983)
- [71] **Zienkiewicz O.C., Gago J.P. de S.R. and Kelly D.W.** - *The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis.* - Computers & Structures, vol. 16, no. 1-4 pp. 53-65 (1983)
- [72] **Zienkiewicz O.C.** - *Iterative solution techniques of mixed problems and the stress recovery procedures.* - C/R/476/84 Swansea (1984)
- [73] **Zienkiewicz O.C. and Craig A.** - *Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite Element Method Concepts.* - Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Edited by I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago and E.R. de A. Oliveira, John Wiley & Sons Ltd. (1986)
- [74] **Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z.** - *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 337-357 (1987)
- [75] **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. and Gong N.G.** - *Effective and Practical $h-p$ -version adaptive analysis procedures for the finite element method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28 pp. 879-891 (1989)

- [76] **Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L.** - *The Finite Element Method. Fourth Edition. Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems.* - McGraw-Hill Book Company (1989)
- [77] **Gallagher R.H. and Zienkiewicz O.C.** - *Optimum Structural Design: Theory and Applications.* - John Wiley & Sons, London (1973)
- [78] **Morris A.J.** - *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach.* - John Wiley & Sons, London (1982)
- [79] **Atrek E., Gallagher R.H., Ragsdell K.M. and Zienkiewicz O.C.** - *New Directions in Optimum Structural Design.* - John Wiley & Sons, London (1982)