



Análisis no lineal de placas de hormigón postesado

José Ramón Solé Marzo

ADVERTIMENT La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del repositori institucional UPCommons (<http://upcommons.upc.edu/tesis>) i el repositori cooperatiu TDX (<http://www.tdx.cat/>) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual **únicament per a usos privats** emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei UPCommons o TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a UPCommons (*framing*). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del repositorio institucional UPCommons (<http://upcommons.upc.edu/tesis>) y el repositorio cooperativo TDR (<http://www.tdx.cat/?locale-attribute=es>) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual **únicamente para usos privados enmarcados** en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio UPCommons. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a UPCommons (*framing*). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the institutional repository UPCommons (<http://upcommons.upc.edu/tesis>) and the cooperative repository TDX (<http://www.tdx.cat/?locale-attribute=en>) has been authorized by the titular of the intellectual property rights **only for private uses** placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading nor availability from a site foreign to the UPCommons service. Introducing its content in a window or frame foreign to the UPCommons service is not authorized (*framing*). These rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

TESIS DOCTORAL

**ANÁLISIS NO LINEAL
DE
PLACAS DE HORMIGÓN POSTESADO**

Presentada en la
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE BARCELONA
perteneciente a la
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA (UPC)
para la obtención del
GRADO DE DOCTOR EN ARQUITECTURA

Autor: **José Ramón Solé Marzo**

Arquitecto por la Universidad Politécnica de Catalunya

Director: **Dr. Lluís Moya i Ferrer**

Dr. Arquitecto y catedrático de
Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de las estructuras

Programa: **Tecnología de la Arquitectura, Edificación y Urbanismo**

Tarragona, Noviembre de 2016



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

RESUMEN

Se propone un modelo de cálculo para losas de hormigón postesado basado en la teoría general de análisis de placas delgadas, mediante el método de los elementos finitos, teniendo en cuenta la degradación de las secciones más solicitadas de las losas, normalmente localizadas sobre sus soportes.

La consideración de la referida degradación de las secciones deriva en la pérdida de proporcionalidad en la relación entre acción y respuesta o, dicho de otra forma, en la no linealidad del problema.

El modelo propuesto parte de un procedimiento de cálculo iterativo muy extendido en el análisis no lineal de problemas estructurales de diversa naturaleza que, convenientemente adaptado, permite el estudio específico de las losas postesadas incluyendo los efectos de degradación de sus secciones.

El planteamiento conlleva, pues, un estudio detallado de la evolución del comportamiento de las secciones de hormigón postesado, desde el inicio de su servicio hasta su rotura.

Con el soporte de este modelo se demuestra, preliminarmente y de forma exclusivamente analítica, que parece posible proyectar o revisar las losas postesadas moderando sustancialmente la cantidad de acero requerido en las regiones más comprometidas del problema, comparándose, en la parte final del trabajo, las soluciones obtenidas en el estudio de ciertos casos representativos con las que se obtendrían en un cálculo o procedimiento profesional al uso.





ABSTRACT

This thesis includes a proposal for a calculation model for post-tensioned concrete slabs based on the general theory of analysis of thin slabs by the finite element method, taking into account the degradation of the critical sections of the slabs, usually located on their supports.

The consideration of the degradation of the sections referred to above results in the loss of proportionality in the relationship between action and response or, put another way, in the nonlinearity of the problem.

The model proposed part of a widespread process of iterative calculation in the nonlinear analysis of structural problems of various kinds which, suitably adapted, allows the specific study of those post-tensioned slabs including the effects of degradation of their sections.

The approach involves, therefore, a detailed study of the evolution of behavior of the post-tensioned concrete sections, from the beginning of their service until their failure.

With the support of this model we can demonstrate, in a preliminary and purely analytical way, that it seems possible to project or review post-tensioned slabs substantially moderating the amount of steel required in the most compromising parts of the problem, comparing, in the final part of the work, the solutions obtained in the study of some representative cases with those that would be obtained in a professional calculation or in a more common process of calculation.





AGRADECIMIENTOS

Desde el inicio de mis estudios universitarios para obtener el título de arquitecto se despertó en mí la pasión por el aprendizaje, muy especialmente por todo lo relativo a la ciencia de las estructuras. Esta vocación no supuso un camino fácil en una carrera donde las mayores exigencias suelen partir de otras áreas de conocimiento, por lo que pronto tuve que sacar tiempo de donde no la había para satisfacer mis tempranas inquietudes, inquietudes que, de forma progresiva, fueron quedando más orientadas hacia al análisis computacional de estructuras. Más tarde, tuve que combinar la práctica profesional intensa, con la docencia y el estudio, y, luego, con la familia. Por todo ello, la culminación de esta tesis doctoral salda en mi caso una cuenta pendiente que no había conseguido satisfacer antes y, en definitiva, supone un feliz broche de oro a todo el tiempo que he dedicado al estudio de las formas más diversas.

Precisamente por la dificultad del camino, tan solo ha sido posible llegar hasta aquí contando con la ayuda de unas pocas personas, a las qué, sin duda, debo agradecer su soporte u orientación en momentos clave, algunos incluso muy anteriores al inicio de este trabajo, según hago en lo que sigue.

En primer lugar, quiero dar las gracias a mi Director de tesis, el Dr. Lluís Moya i Ferrer, con quien he compartido el estudio, la docencia, los primeros años de mi vida profesional y, en definitiva, una vocación. Le debo mucho de lo que poco pueda saber, nunca me ha fallado, siempre he contado con su voto de confianza, incluso cuando quizás no lo merecí, y él ha dado luz a este trabajo cuando ha sido necesario.

Estimo necesario reconocer a la Universidad Europea de Valencia, donde actualmente imparto clases de diseño y cálculo estructural, a mis compañeros y, especialmente, a mis directores en dicha universidad: María Rosario Cervera y Pablo Moreno. Puedo decir que he contado en este tránsito con su ánimo, comprensión y confianza incondicional, lo que me ha puesto las cosas algo más fáciles.

Debo citar también a mi actual socio, el arquitecto Joel Juanpere; su apoyo y dedicación han sido, sin duda, uno de los elementos clave que me han permitido alcanzar este paso.

Más allá de mi ámbito profesional y universitario, tengo que empezar dando las gracias a mis padres, quienes han hecho posible todo lo bueno que ha pasado en mi vida, incluyendo esta tesis. De mi padre aprendí a distinguir lo importante de lo accesorio y de madre aprendí que la tenacidad, bien orientada, compensa muchas carencias; sin ambas enseñanzas no hubiera llegado hasta aquí.

Por último, quiero dar las gracias a mi mujer, Sarah, por entender y tolerar mi pasión, y, sobre todo, a mis hijas, Olivia y Enya, por todos los fines de semana que han aceptado no ver prácticamente a su padre en lo más bonito de su infancia.





ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN	13
1.1	Las losas postesadas. Oportunidad del Problema	13
1.2	Antecedentes	15
1.3	Objetivos y estructura general de la investigación	17
1.4	Marco normativo	18
2	ESTADO DE LA CUESTIÓN	19
2.1	Análisis elasto-plástico de placas de hormigón armado	20
2.2	Análisis post-elástico del hormigón postesado	21
2.3	Software	24
3	ORGANIZACIÓN CONSTRUCTIVA DE UNA LOSA POSTESADA	25
3.1	La armadura activa	25
3.2	La armadura pasiva	29
3.3	Las losas macizas	32
	3.3.1 Organización distribuida-distribuida	32
	3.3.2 Organización concentrada-concentrada	33
	3.3.3 Organización mixta	33
	3.3.4 Organización concentrada-distribuida	34
4	ANÁLISIS DE LOSAS POSTESADAS EN RÉGIMEN ELÁSTICO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	37
4.1	El problema de placa	39
	4.1.1 Hipótesis definitorias y consideraciones previas	39
	4.1.2 Ecuaciones de equilibrio	41
	4.1.3 Cambio de referencias. Momentos principales	43
	4.1.4 Deformaciones de placa	44
	4.1.5 Relaciones esfuerzo-deformación	45
	4.1.6 Ecuación de Lagrange	46
	4.1.7 Planteamiento matricial del problema	46
	4.1.7.1 Campo de corrimientos	47
	4.1.7.2 Campo de deformaciones	47
	4.1.7.3 Campo de tensiones generalizadas	47
4.2	El problema de cáscara	50
	4.2.1 Hipótesis definitorias y consideraciones previas	50
	4.2.2 Ecuaciones de equilibrio	50
	4.2.3 Deformaciones de cáscara	51
	4.2.4 Relaciones esfuerzo-deformación	52
	4.2.5 Planteamiento matricial del problema	53
	4.2.5.1 Campo de corrimientos	53
	4.2.5.2 Campo de deformaciones	53
	4.2.5.3 Campo de tensiones generalizadas	54
4.3	Ecuación general de equilibrio. La matriz de rigidez en el MEF	55
4.4	Elementos finitos adoptados	57
	4.4.1 Elemento de placa delgada. DKT	57



4.4.2	Elemento de cáscara. ANDES	62
5	LA DEFINICIÓN DE LA ARMADURA ACTIVA.....	67
5.1	La fuerza de tesado	67
5.1.1	Pérdidas instantáneas	67
5.1.1.1	Pérdidas por rozamiento	67
5.1.1.2	Pérdidas por penetración de cuñas	68
5.1.1.3	Pérdidas por acortamiento elástico del hormigón	69
5.1.2	Pérdidas diferidas	69
5.2	Cálculo de la sección de armadura	72
5.3	Fuerzas equivalentes	72
5.4	El trazado de la armadura activa	74
5.5	Condiciones generales en vacío y en servicio	76
5.5.1	Fuerza de tesado necesaria	77
5.5.2	Excentricidad final de la armadura activa	78
5.6	La incidencia de la hiperestaticidad de la estructura	80
5.7	Algoritmos seguidos en el trabajo	82
6	COMPORTAMIENTO ELÁSTICO Y POST-ELÁSTICO DE LAS SECCIONES CON ARMADURA POSTESA	85
6.1	Mecánica básica del hormigón	85
6.2	Mecánica básica del acero pasivo	86
6.3	Mecánica básica del acero activo	87
6.4	El conjunto postesado en flexo-compresión	89
6.4.1	Análisis evolutivo no lineal de la sección postesada	90
6.4.1.1	Discretización de la sección en partículas	90
6.4.1.2	La rigidez de la sección	92
6.4.1.3	Deformación de la sección	93
6.4.1.4	Fuerzas residuales por iteración	94
6.4.1.5	Estado inicial (en vacío) y estados posteriores	94
6.5	Relación entre momento y curvatura	96
6.5.1	Secciones tipo estudiadas	101
6.5.1.1	Secciones para placa de 12x12 metros	103
6.5.1.2	Secciones para placa de 16x16 metros	109
6.5.1.3	Secciones para placa de 20x20 metros	115
6.5.2	Naturaleza de la función momento-curvatura	121
6.5.2.1	Escenario PT-A	122
6.5.2.2	Escenario PT-P	123
6.5.2.3	Escenario AR-A	124
6.5.2.4	Escenario AR-P	125
6.5.2.5	Análisis comparativo	126
6.5.3	Aspectos clave de la relación entre momento y curvatura	131
6.6	El problema de las tensiones tangenciales	132
6.7	Cálculo e incidencia del refuerzo pasivo	136
6.7.1	Equilibrio del estado límite último	136



6.7.2	La presencia de las armaduras pasivas. Afección sobre la relación entre momento y curvatura	138
6.7.3	La insuficiencia de refuerzo en términos de sección	139
6.8	Conclusiones del capítulo	140
7	ANÁLISIS NO LINEAL DE LOSAS POSTESADAS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	141
7.1	Organización general del problema	141
7.1.1	Cálculo no lineal de la placa	143
7.2	Resolución del problema no lineal específico	144
7.3	Rigidez y degradación de la sección de cálculo	147
7.4	La condición de degradación en el cálculo de la placa	151
7.4.1	Matriz de elasticidad de placa degradada	151
7.4.2	Organización numérica de la degradación de la placa	151
7.5	Problemas de contraste del modelo propuesto	153
7.5.1	Viga de 10x1m con un 50% de degradación	154
7.5.2	Viga de 10x1m con un 90% de degradación	156
7.5.3	Viga de 10x1m con un 100% de degradación	158
7.5.4	Placa 12x12m con un 100% de degradación	160
7.6	Formas de degradación. Ajuste de los problemas numéricos asociados	167
7.7	Conclusiones del capítulo	173
8	ESTUDIO DE CASOS REPRESENTATIVOS.....	175
8.1	Caso primero: placa de 12x12 metros	175
8.1.1	Definición del problema	175
8.1.2	Discretización por el MEF	178
8.1.2.1	Las condiciones de contorno	178
8.1.3	Resultados generales en régimen elástico	184
8.1.3.1	Deformaciones	184
8.1.3.2	Esfuerzos	187
8.1.4	Estudio del refuerzo superior pasivo	189
8.1.4.1	La sección de referencia. Ancho de integración	189
8.1.4.2	Modelo conjunto de degradación. La incidencia de las armaduras pasivas	190
8.1.5	Resultados en cálculo no lineal. Comparativa	195
8.1.5.1	A partir de ámbitos de refuerzo predeterminados	195
8.1.5.2	A partir de cantidades de refuerzo predeterminadas	203
8.1.6	Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas	224
8.1.7	Resumen del procedimiento de cálculo	228
8.2	Placa de 16x16 metros	229
8.2.1	Definición del problema	230



8.2.2	Condiciones de contorno y características de la malla de elementos finitos adoptada	230
8.2.3	Resultados generales en régimen elástico	231
8.2.3.1	La armadura activa	231
8.2.3.2	Deformaciones	233
8.2.3.3	Esfuerzos	236
8.2.4	Estudio del refuerzo superior pasivo	238
8.2.4.1	Relaciones Momento-Curvatura ($M-\Gamma$)	238
8.2.5	Resultados del estudio de las opciones de refuerzo	241
8.2.5.1	Resultados derivados del análisis en régimen elástico	241
8.2.5.2	Resultados derivados del análisis en régimen post-elástico	242
8.2.5.3	Resultados en el comportamiento mecánico. Comparativa	243
8.2.6	Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas	252
8.3	Placa de 12x14 metros	254
8.3.1	Definición del problema	255
8.3.2	Condiciones de contorno y características de la malla de elementos finitos adoptada	255
8.3.3	Resultados generales en régimen elástico	256
8.3.3.1	La armadura activa	256
8.3.3.2	Deformaciones	258
8.3.3.3	Esfuerzos	261
8.3.4	Estudio del refuerzo superior pasivo	263
8.3.4.1	Relaciones Momento-Curvatura ($M-\Gamma$)	263
8.3.5	Resultados del estudio de las opciones de refuerzo	266
8.3.5.1	Resultados derivados del análisis en régimen elástico	266
8.3.5.2	Resultados derivados del análisis en régimen post-elástico	267
8.3.5.3	Resultados en el comportamiento mecánico. Comparativa	268
8.3.6	Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas	277
8.4	Conclusiones al capítulo	279
9	PROBLEMAS ASOCIADOS A LA DEGRADACIÓN POR FLEXIÓN	281
9.1	El cortante/punzonamiento	281
9.1.1	La sollicitación	281
9.1.2	La resistencia frente al punzonamiento	286
9.1.2.1	Zona con armadura transversal de punzonamiento	286
9.1.2.2	Zona exterior a la armadura de punzonamiento	288
9.1.2.3	Zona adyacente al soporte	289
9.1.3	La resistencia frente al cortante	290
9.2	La torsión	295



9.3	La deformación transversal	297
9.4	Estabilidad lateral en edificaciones	299
9.5	Conclusiones del capítulo	301
10	CONCLUSIONES AL TRABAJO	303
11	LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN Y TRABAJOS ADICIONALES	307
11.1	Vinculados a la aplicabilidad de la propuesta	307
	11.1.1 Relacionados con el problema numérico específico	307
	11.1.2 Relacionados con la física del problema	307
	11.1.2.1 Estrictamente necesarios	307
	11.1.2.2 Convenientes	308
11.2	Otras líneas de trabajo	309
	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.....	311
	Bibliografía y referencias por orden alfabético	311
	Bibliografía y referencias por orden cronológico	317
	ANEJOS.....	323
	Anejo 1. Programación en C++ de las matrices de rigidez de los elementos finitos	323
	A1.1 Matriz de rigidez del elemento de cáscara	323



1 INTRODUCCIÓN

1.1 Las losas postesadas. Oportunidad del Problema

La formación de forjados planos en la edificación mediante el empleo de losas postesadas conlleva una serie de claras ventajas con respecto al uso de otras tipologías de forjados planos de carácter más convencional o extendido. Entre estas ventajas cabría destacar, de entrada, las siguientes:

- La diafanidad, entendida como la posibilidad de cubrir grandes distancias entre soportes manteniendo, además, el monolitismo
- Una reducción en las cantidades de los materiales empleados, tanto del acero como del hormigón
- Una mayor esbeltez de la solución, medida en términos de la relación entre canto y luz; los cantos necesarios resultan, genéricamente, entre un 30% y un 40% menores a los equivalentes de cualquier otra tipología ejecutada *in situ*
- Un mejor control de los efectos reológicos gracias al estado general de compresión de los forjados postesados
- Una mayor durabilidad de las armaduras por el citado estado general de compresión
- Y una ejecución genéricamente más precisa y controlada

El tamaño de los vanos cuando se utilizan losas postesadas, sin la ayuda de vigas ni elementos especiales, oscila normalmente entre los 8 y los 20 metros, aunque no es tan inhabitual encontrar soluciones más forzadas. La versatilidad de la losa postesada, en cuanto al rango de vanos que puede cubrir de una forma eficiente, convierte a esta tipología en competitiva en el diseño de diferentes tipos edificatorios: hospitales, centros docentes, oficinas, aparcamientos, salas de audiencia o de exposición, etc.

Por otra parte, la reducción de la cantidad de acero y de hormigón necesario para formar un forjado postesado hace que la tipología en cuestión empiece a resultar interesante incluso en problemas con luces menores en los que otras tipologías más baratas funcionan correctamente, por los requerimientos de sostenibilidad cada vez más exigentes y predominantes en nuestra sociedad.

El uso de la tipología en países con niveles de desarrollo económico parecido al español resulta relativamente común, incluso en ciertos países con menores capacidades económicas. En algunos casos, como el de los EEUU, el empleo cotidiano del postesado en la edificación se arraiga en los años 80 del pasado siglo XX, cuando se ya se podían encontrar estados como el de California donde los forjados postesados pasaron a ser la primera opción de entre las soluciones posibles en hormigón [AALAMI, B., 1989].

El uso de la tipología en España con una cierta profusión se puede calificar como reciente, al menos si se compara con el de otros países de nuestro entorno cultural y económico, pues puede decirse que no ha sido hasta entrado el siglo XXI cuando se han ido pudiendo encontrar referencias suficientemente significativas o recurrentes.

La crisis económica iniciada en el año 2008 ha provocado una lógica caída de su utilización en el país, no sólo por el colapso general del mercado de la construcción, sino también porque los tipos edificatorios que escasamente se siguen construyendo no resultan los más propicios para el empleo de las soluciones postesadas.



Dejando aparte la coyuntura, todo parece indicar que la tecnología del postesado ha llegado para quedarse, merced a las importantes ventajas enumeradas arriba, resultando oportuno, por tanto, cualquier estudio profundo en la materia, en cuanto se trata de una tecnología que probablemente irá consolidando su anterior pujanza, a medida que el sector de la construcción vaya adentrándose de nuevo en una situación menos excepcional.

En las dos imágenes posteriores se reconocen dos ejemplos que enmarcan el contacto profesional del autor con el problema, contactos que han propiciado también de alguna forma el trabajo aquí documentado y que, en buena medida, ilustran también la versatilidad de la tipología aquí estudiada.



Fotografía 1-1. Edificio Tecno-Parc de Redessa en Reus, Tarragona (2010-2011)



Fotografía 1-2. Torre AGBAR de Barcelona (2001-2005)

1.2 Antecedentes

El proyecto de losas continuas de hormigón sobre columnas, basado generalmente en cálculos elásticos y lineales, implica la consideración de cantidades elevadas de refuerzos en unas regiones de reducido tamaño adyacentes a los propios soportes (ábacos), tanto en el caso de losas de hormigón armado como en el caso de losas de hormigón postesado.

Esta concentración de refuerzo dificulta o incomoda la ejecución de las losas por el número de armaduras de diferente orientación que se deben colocar en la zona del ábaco, armaduras que, además, acaban entorpeciendo sustancialmente el compactado mecánico de la masa de hormigón junto a los soportes.

Las necesidades de armadura en los ábacos obedecen mayoritariamente al equilibrio de dos familias de esfuerzos: momentos flectores y cortantes. Los cortantes de placa quedan analizados normalmente en su versión extendida o integrada: el punzonamiento.



Fotografía 1-3. Detalle de la concentración de armadura junto a un pilar en un momento de la ejecución de una losa postesada (poco antes de su hormigonado)

En cuanto a la cantidad de punzonamiento a equilibrar sobre un soporte, parece que las posibilidades de modificar su valor a través del control del flujo de cargas o de esfuerzos resultan bastante limitadas. En cambio, la redistribución de momentos flectores, sea de forma directa o mediante la consideración de rótulas plásticas, es una técnica relativamente extendida en el campo profesional en el análisis de vigas continuas, de pórticos y en el análisis simplificado de placas de hormigón regulares (mediante el método de los pórticos virtuales). De hecho, las diferentes instrucciones españolas del hormigón vienen recogiendo desde hace tiempo los criterios de redistribución directa o, alternativamente, las bases del análisis plástico.

Está claro que las citadas redistribuciones, bien por la vía directa o por la vía del análisis plástico, tienen por objeto moderar los picos más intensos de los momentos flectores, picos que en un pórtico convencional se encuentran sobre los soportes interiores. Las redistribuciones moderan, asimismo, aunque en bastante menor medida, la intensidad de los esfuerzos cortantes y ajustan los esfuerzos de diseño a la relajación propiciada por la mayor fluencia del hormigón con el paso del tiempo en las zonas más solicitadas.

Aunque es claro, pues, que el análisis plástico de losas de hormigón puede aportar una importante mejora en la racionalización de la distribución de sus armaduras, resulta difícil de encontrar referencias que propongan un modelo cerrado de análisis de placas de hormigón teniendo en cuenta su comportamiento postelástico. A pesar también de que, por el contrario, las referencias sobre el comportamiento plástico del hormigón y del hormigón armado, en cuanto al análisis de materiales y de elementos lineales (pilares y vigas principalmente), o muros, resultan prácticamente inabarcables.

En el caso de las losas de hormigón armado, reforzadas únicamente mediante armaduras pasivas, el Dr. **Lluís Moya Ferrer**, director de la presente tesis, propuso de forma preliminar, en el trabajo de investigación presentado para el Concurso-Oposición para la provisión de plaza de Catedrático de Universidad en el año 2003, [MOYA, L., 2003], un modelo de análisis elasto-plástico basado en la teoría general de placas delgadas, soportado mediante el método de los elementos finitos.

El citado modelo de análisis, aunque presenta varios aspectos que deben ser estudiados con mayor profundidad para su mejor aprovechamiento, significados por el mismo autor como futuras líneas de investigación, permitió comprobar la robustez de las placas de hormigón armado en cuanto a su comportamiento a flexión frente a cesiones plásticas más o menos intensas de sus secciones críticas.

Aunque el susodicho modelo no es el único relativo a esta cuestión, véase por ejemplo la referencia [BELL, J., 1971], sí que supone el antecedente y referente más claro del trabajo de investigación aquí documentado. No obstante, debe aclararse que su extensión directa al campo del hormigón pretensado no resulta posible, por las particularidades que conlleva el mismo uso de la tecnología del postesado. En efecto, según se irá desgranando en los siguientes capítulos, las losas de hormigón postesado presentan un comportamiento mecánico suficientemente diferenciado de las losas de hormigón armado, circunstancia que obliga a la consideración de modelos de análisis propios, tanto en régimen lineal como, especialmente, en régimen no lineal.



1.3 Objetivos y estructura general de la investigación

Aceptada la conveniencia de poder revisar a la baja los momentos flectores máximos que se calculan en una losa postesada de forma elástica, de cara a poder revisar, a su vez, las cantidades de armadura empleadas en las zonas de ábaco, el objetivo del trabajo que se presenta es el de proponer un modelo de análisis no lineal que permita precisamente dicha revisión.

Por tanto, son dos los propósitos: el primero, la definición de una forma no lineal de análisis de placas de hormigón postesado suficientemente rigurosa y, el segundo, la comprobación de las posibilidades que permite esta nueva forma de análisis, en cuanto a la cantidad de refuerzo empleado, mediante el estudio detallado de unos casos tipo suficientemente ilustrativos.

La idea última expresada en conjunto pasa, pues, por poder revisar a la baja la cantidad de refuerzo pasivo que se emplea comúnmente en las losas postesadas considerando el posible comportamiento no lineal de esta tipología estructural.

El orden en el que se ha desarrollado la investigación, más allá de lógicos vaivenes y matices, responde en términos generales a la estructura presentada en el índice de este documento, según se comenta sucintamente en lo que sigue para no caer en la repetición de lo que más adelante se explica minuciosamente.

Estado de la cuestión aparte, en los capítulos 3, 4 y 5 se define el marco teórico en el que se desarrolla la investigación. La definición del marco teórico es obligadamente amplia, puesto que el trabajo desarrollado presenta una fuerte transversalidad al quedar a caballo entre dos ámbitos generales: el científico-técnico y el profesional.

En los capítulos 6 y 7 se estudian y definen, primero, las características del problema no lineal específico que plantea el análisis de las losas postesadas, a partir de la consideración de la mecánica precisa de los tres materiales estructurales que engloba el problema, y, segundo, el proceso general de cálculo no lineal de placas, abordando tanto la física de la cuestión como el problema numérico asociado.

En los capítulos 8 y 9, se estudian las posibilidades y consecuencias de la consideración de la forma de análisis propuesta, en lo que refiere a la revisión de la cantidad de armadura a emplear, al comportamiento mecánico detallado de las losas postesadas en las que se propone menos refuerzo y a los problemas asociados a la referida reducción de refuerzos. Este estudio se realiza sobre casos tipo suficientemente ilustrativos, como se indicaba antes, comparando los resultados obtenidos con los que se obtienen en los mismos casos usando una metodología profesional al uso. El primer caso tipo tratado permite, en buena lógica, la revisión y ajuste de la forma de análisis que se plantea.

Finalmente, en los capítulos 10 y 11, se establecen las conclusiones al trabajo y las diversas líneas de investigación que se pueden abrir a partir de la tesis presentada.



1.4 Marco normativo

Aunque la tesis aquí sustentada propone en buena medida un modelo nuevo o propio en el planteamiento del equilibrio de las losas postesadas y de su análisis, las bases de cálculo quedan referidas, en la medida en que la propia propuesta y los elementos de investigación lo permiten, a las instrucciones españolas vigentes y, de forma más concreta, a las siguientes:

- MINISTERIO DE FOMENTO (2008). EHE-08. Instrucción del Hormigón Estructural.
Real Decreto 1247/2008. Madrid
- MINISTERIO DE VIVIENDA (2006). Código Técnico de la Edificación.
Documento Básico de Seguridad Estructural. Bases de cálculo.
Real Decreto 314/2006. Madrid
- MINISTERIO DE VIVIENDA (2006). Código Técnico de la Edificación.
Documento Básico de Seguridad Estructural. Acciones en la edificación.
Real Decreto 314/2006. Madrid

En determinados casos, como apoyo específico al análisis o discusión de ciertos aspectos más concretos, se alude a instrucciones de rango europeo o de otros países, según se va aclarando en el propio documento.

No obstante, los fundamentos del presente trabajo y sus conclusiones pertenecen a la ciencia general de las estructuras; las referencias normativas se realizan principalmente para partir de datos o modelos concretos coherentes con los utilizados en la práctica profesional común y/o para discutir o comparar puntualmente los resultados obtenidos a partir del modelo propuesto.



2 ESTADO DE LA CUESTIÓN

Como se ha apuntado líneas arriba, resulta fácil encontrar referencias del estudio del hormigón en plasticidad; desde los trabajos de *Henri Édouard Tresca* en el siglo XIX, trabajos en los que se expone por primera vez un criterio preciso de plastificación para materiales dúctiles en problemas espaciales, las referencias sobre el tema resultan realmente difíciles de controlar.

Criterios de plastificación material como el de *Tresca*, entre otros, fundamentan los algoritmos de cálculo plástico o elasto-plástico del hormigón y del acero de los programas más avanzados de cálculo y de reconocido prestigio internacional, como pueda ser el programa ANSYS.

No obstante, en el problema particular de las placas de hormigón, tanto el de las placas de hormigón armado como el de las placas de hormigón postesado, resulta muy improbable que la plastificación de una sección sometida a flexión se produzca por un exceso de tensión del bloque comprimido o bicomprimido, como puede suceder menos extrañamente en vigas de hormigón armado [BAKER, A.L.L., 1949]. De hecho, cuando se da un exceso de sollicitación en el bloque comprimido de las secciones pésimas de una placa, suele ser indicativo de que el techo en cuestión está lejos de presentar un comportamiento deformacional aceptable y, por tanto, de que haya un problema previo de diseño de la placa bajo análisis en cuanto a su espesor, posiblemente demasiado reducido.

Si lo que se pretende es una optimización o racionalización de la armadura de flexión junto a los soportes mediante la aceptación de un cierto comportamiento plástico o degradado de las secciones críticas de la placa, dicho comportamiento devendrá necesariamente por que se dispone menos armadura de tracción que la estrictamente necesaria para obtener un equilibrio elástico. Por lo tanto, la base del trabajo que aquí se pretende abordar radica en el comportamiento de las secciones, entendidas éstas como un conjunto compuesto de dos materiales: hormigón y armaduras de acero.

En lo relativo al estudio del comportamiento de las secciones de hormigón armado y postesado en tanto sección compuesta, aceptando o no el comportamiento plástico de sus materiales constituyentes, las referencias resultan también inabarcables, más en el caso del hormigón armado que en el del hormigón postesado.

En cambio, cuando se pretende extender el problema al campo de las placas delgadas, analizadas mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), y orientándolo a la discusión de la cantidad de refuerzo utilizado, aunque sí se encuentran referencias destinadas a su optimización, véase por ejemplo [BOZZO, L.M., 1994], resulta mucho más difícil encontrar estudios que observen un modelo global de análisis postelástico que incorpore la mecánica diferenciada de sus materiales constituyentes.

En este sentido, más allá del modelo propuesto por el Dr. *Lluís Moya* [MOYA, L., 2003] para el caso de las placas de hormigón armado, de cuantas referencias han sido encontradas durante el desarrollo de esta tesis, la más antigua y de las pocas que observa también un modelo que recoge globalmente el comportamiento postelástico de las placas de hormigón armado [BELL, J., 1971], queda orientada a la predicción de configuraciones de rotura y, no tanto, a la discusión de la cantidad de refuerzo a utilizar o a su optimización.



Consecuencia del estado de la cuestión descrito, es que tampoco se pueda encontrar software comercial o libre aplicable de una manera directa al análisis no lineal de placas de hormigón armado o post-tesado, circunstancia que ha dificultado en buena medida el desarrollo del trabajo aquí documentado.

2.1 Análisis elasto-plástico de placas de hormigón armado

El modelo propuesto por el Dr. *Lluís Moya* en [MOYA, L., 2003] parte del estudio de la degradación de las secciones de hormigón armado sometidas a flexión hasta que se alcanza la plastificación de la armadura de tracción, atendiendo tanto a la evolución de la deformación de la sección, como a la evolución de las propiedades de rigidez de la sección.

El estudio de la evolución de la deformación de la sección permite corroborar que resulta aceptable adoptar una relación entre momento-curvatura ($\mathbf{M}-\Gamma$) elasto-plástica perfecta, siguiendo un esquema, por otra parte, sobradamente conocido, y que queda expuesto en la imagen posterior (Fig. 2-1).

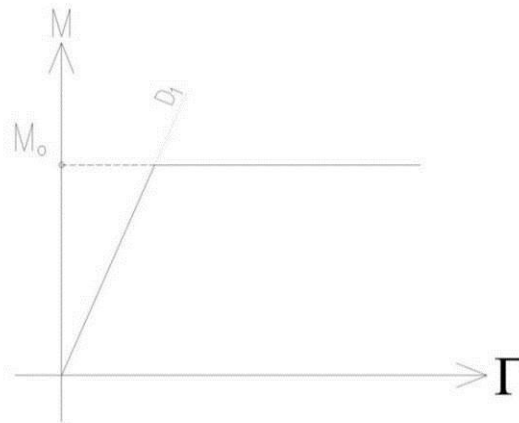


Figura 2-1. Diagrama momento-curvatura en una sección de hormigón armado adoptado en [MOYA, L. 2003]

Dicha relación $\mathbf{M}-\Gamma$ define, en consecuencia, el comportamiento a flexión de las secciones representadas en los correspondientes modelos de elementos finitos, bajo la teoría general de placas delgadas, y propone, por tanto, un comportamiento perfectamente lineal de la placa hasta que se alcanza el momento de plastificación (\mathbf{M}_0) en una sección, cuando pasa a aceptarse un comportamiento completamente plástico, en el que se pierde la relación entre causa y efecto. Este tipo de comportamiento, como se demostrará posteriormente, no resulta tan directamente aplicable al análisis de las losas postesadas.

El estudio de la evolución de las propiedades de rigidez de la sección, en coherencia con el diagrama momento-curvatura expuesto, deduce una variación brusca de la rigidez a flexión, cuando adviene la plastificación de la sección, pero una mayor estabilidad de la rigidez frente al momento torsor (\mathbf{M}_{xy}), tipo de esfuerzo que resulta relevante en el análisis general de placas delgadas.

Como se irá viendo también en adelante, el comportamiento post-elástico del hormigón postesado resulta diferente al del hormigón armado cuando se estudia la degradación de su rigidez de flexión, pero ambos comportamientos resultan más similares cuando se estudia la evolución de su rigidez a torsión.

2.2 Análisis post-elástico del hormigón postesado

El estudio del hormigón postesado más allá de su umbral elástico queda documentado y analizado en profundidad en múltiples trabajos. Aunque no se ha encontrado ninguna referencia explícita que atienda al comportamiento no lineal de las losas de hormigón postesado, sí que es posible también encontrar referencias de análisis post-elástico para el caso de vigas postesadas. En relación a éstas últimas, aunque sus conclusiones no son directamente extrapolables al campo de las placas, cabría destacar las tres siguientes:

- BAKER, A. L. L. (1949) *A plastic theory of design for ordinary reinforced and prestressed concrete including moment re-distribution in continuous members*, pp 57-66
En: Magazine of concrete research
- REVESZ, Stephen (1953) *Factors governing the ultimate bending moment of normal reinforced and prestressed concrete beams, with reference to a proposed plastic theory*, pp 11-26
En: Magazine of concrete research
- JANNEY, J.R. et al. (1956) *Ultimate flexural strength of prestressed and conventionally reinforcement reinforced beams*
En: Journal of the American Concrete Institute, vol. 52

En [BAKER, A.L.L., 1949] se estudia con detalle el comportamiento de las secciones atendiendo a su historia de carga, lo que permite establecer criterios de redistribución de esfuerzos en vigas, calculadas como barras, que no pueden ser extendidos, por tanto, al cálculo de placas mediante el método de los elementos finitos. Aunque de entre las conclusiones fijadas en el referido trabajo sí que conviene destacar la constatación de una particularidad del hormigón post-tesado a la hora de redistribuir esfuerzos: la menor cantidad de refuerzo de acero empleado implica una menor ductilidad de las secciones críticas y, en consecuencia, una menor capacidad de redistribución de esfuerzos.

En [REVESZ, S., 1953] los análisis quedan también ceñidos a problema de vigas, pero resulta interesante la descripción detallada de las formas de fallo de la sección, particularmente en lo relativo a la cantidad de refuerzo y al nivel de pretensión en el caso de secciones pretensadas. Esta descripción permitir ratificar algunas de las conclusiones expuestas en el capítulo 6 del presente trabajo.

A los efectos del presente trabajo y con respecto a la última de las tres referencias indicadas en este apartado [JANNEY, J.R, 1956], merecen ser destacados los resultados obtenidos de forma empírica en el ensayo de vigas de hormigón armado y postesado para establecer una correlación del momento flector aplicado con la flecha obtenida en diferentes modelos reales, modelos que se muestran gráficamente en la Figura 2-2.

Del conjunto de resultados obtenidos en esta última referencia resulta obligado entresacar los diagramas que relacionan las flechas verificadas para cada nivel de carga aplicada en los diferentes modelos y para diferentes cantidades de armadura activa o pasiva, los cuales se muestran en la Figura 2-3.

En relación al particular reseñado en el párrafo anterior, cabe recordar que la evolución de la flecha depende en primera instancia de la evolución de la curvatura de las secciones, siendo éste uno de los aspectos claves del presente trabajo.



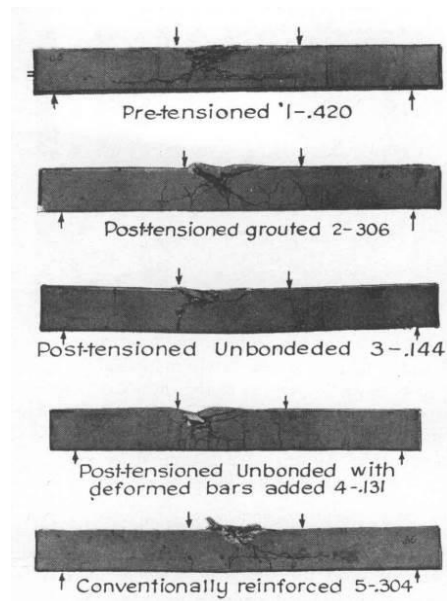


Figura 2-2. Modelos ensayados y esquemas de rotura en [JANNEY, J.R, 1956]

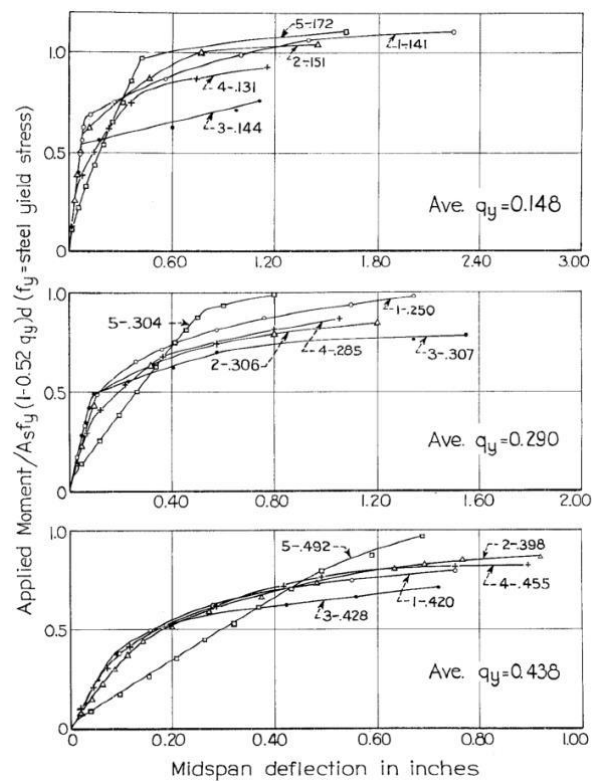


Figura 2-3. Evolución de la deformación de las vigas ensayadas en relación al momento aplicado según [JANNEY, J.R, 1956]

Los resultados mostrados permiten contrastar el diferente comportamiento entre los modelos de hormigón armado y los modelos de hormigón postesado, a la par de augurar la lógica incidencia de la cantidad de refuerzo pasivo en la deformación de una sección postesada, lo que también se corrobora con detalle en el capítulo sexto del presente trabajo.

Una de las probables razones de la falta de referencias de métodos de análisis inelásticos de estructuras postesadas, particularmente en el campo de las losas, puede encontrarse en la naturaleza del acero que constituye la armadura activa, la cual se detalla en el capítulo 6, ya que su entrada en plasticidad no queda tan lejos de su máximo alargamiento admisible, como sí sucede en el caso de una armadura pasiva. Esta circunstancia parece hacer desaconsejable intentar adentrarse en estados más avanzados de sollicitación de las secciones postesadas y, aunque la instrucción EHE-08 no contempla ninguna limitación explícita al respecto, el Eurocódigo 2, en su Parte 1-1 (Reglas generales y reglas para edificación) [CEN, 1991] sí que desaconseja el análisis plástico de placas pretensadas, salvo justificación.

En cualquier caso, el presente trabajo tampoco propone un análisis plástico *stricto sensu* a pesar de aceptarse una degradación avanzada de las secciones críticas, lo que, como se verá a partir de ciertas consideraciones, no resulta tan impropio.



2.3 Software

Como se apuntaba antes, resultado directo de que no exista un modelo previo concreto para el análisis no lineal de losas post-tesadas, es que no se encuentre en estos momentos en el mercado una aplicación que permita el análisis de placas post-tesadas aceptando la degradación de sus secciones por “insuficiencia” de refuerzo. Es cierto que programas como ANSYS permiten adaptaciones que posibilitarían implementar en buena medida, con más o menos dificultades, los procedimientos propuestos y seguidos en posteriores apartados, al menos en lo concerniente al problema de placas abordado por el MEF, salvando la dificultad añadida que implica la consideración del post-tesado.

Por otra parte, los programas que permiten el desarrollo profesional de proyectos de losas post-tesadas no contemplan actualmente el análisis no lineal mecánico de las placas, ni permiten alterar siquiera sus procedimientos generales de cálculo, más allá de la debida implementación de las variables relevantes de cada problema específico.

Además, la tesis aquí propuesta debe enraizarse ineludiblemente en el análisis detallado de las secciones post-tesadas, con o sin refuerzo pasivo, en los términos que se irán exponiendo con posterioridad. Ello añade una nueva complejidad al problema propuesto en lo relativo al empleo de aplicaciones disponibles en el mercado, ya que el análisis riguroso de dichas secciones pasa por un cálculo evolutivo no lineal, el cual tenga en cuenta, al mismo tiempo, tanto la no linealidad del comportamiento de los materiales constituyentes como las fases de entrada en carga de cada uno de estos materiales.

Atendiendo al estado de la cuestión en lo relativo al software y dado el recorrido personal del autor del presente trabajo en el desarrollo de software de análisis de estructural, se estimó como opción más conveniente al inicio del propio trabajo la implementación y modificación de aplicaciones que permiten el análisis global del problema, atendiendo, pues, a los siguientes aspectos:

- Análisis evolutivo no lineal de secciones postesadas
- Análisis de losas postesadas
- Análisis no lineal de placas delgadas mediante el MEF.

En consecuencia, todos los cálculos y análisis que se exponen en los siguientes apartados, han sido realizados mediante aplicaciones desarrolladas específicamente para la presente tesis, aplicaciones que han sido convenientemente comprobadas mediante la resolución de los debidos problemas de contraste con respuestas conocidas.



3 ORGANIZACIÓN CONSTRUCTIVA DE UNA LOSA POSTESADA

Los materiales o elementos constituyentes de un forjado postesado son, como es sabido, genéricamente tres:

- Hormigón
- Armadura activa: compuesta típicamente por grupos de alambres, arrollados helicoidalmente, denominados cordones
- Armadura pasiva: compuesta por barras corrugadas

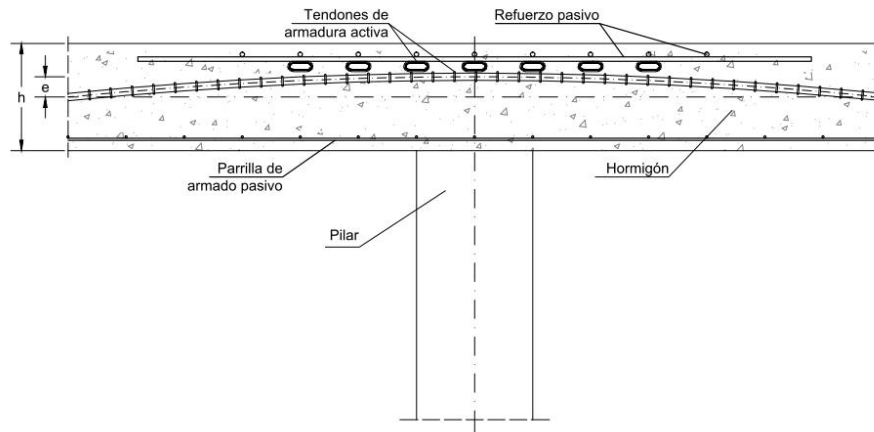


Figura 3-1. Materiales constituyentes de las losas postesadas detallados en una zona típica de soporte o ábaco interior

Dado que el hormigón es una masa continua, normalmente de igual espesor, la organización de una losa postesada depende básicamente de la ordenación de sus armaduras.

A la hora de exponer de forma detallada la organización de una losa postesada plana se podría llegar a distinguir entre dos casos, las losas macizas y las losas aligeradas, pero, atendiendo a que los principios mecánicos fundamentales de ambos casos son los mismos, el trabajo quedará centrado en adelante, por mayor simplicidad, en el caso de las losas macizas planas.

No obstante, conviene fijar antes mínimamente la función de cada uno de los dos tipos de armadura para referenciar debidamente ciertos análisis que se encuentran con posterioridad.

3.1 La armadura activa

El papel de la armadura activa es el de introducir las fuerzas de tesado en el forjado, compresiones y acciones perpendiculares a la placa (merced a sus curvaturas), compensando los momentos flectores provocados por acción de las cargas gravitatorias, según se muestra en el esquema posterior.

En la técnica del postesado la armadura activa queda alojada dentro de una funda o vaina, que permite que el fraguado del hormigón vertido *in situ* no apalanque a la propia armadura activa, evitando, pues, su contacto directo con la masa de hormigón. Esta independencia permite que la operación de tesado tenga lugar cuando el hormigón ya ha adquirido resistencia suficiente.

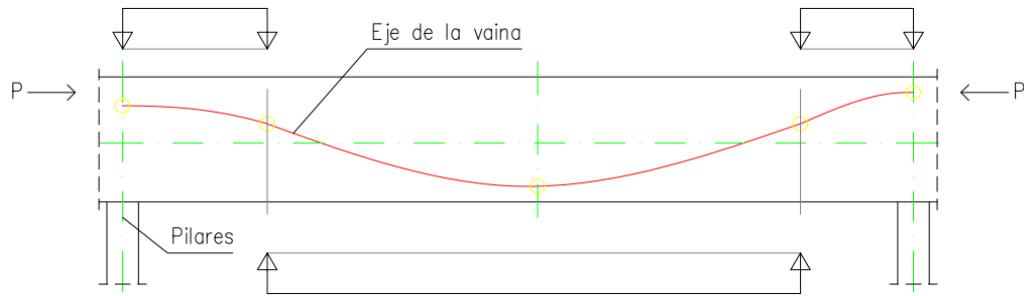


Figura 3-2. Acciones de la armadura activa sobre el forjado en una dirección

Finalizadas las maniobras de tesado, la vaina debe ser inyectada con lechada de cemento **portland** para la protección de la armadura. Si no va inyectada, las armaduras deben quedar protegidas por grasas específicas, resultando en este caso que la armadura activa no queda adherida al forjado (armadura no adherente), circunstancia, esta última, que introduce algunos matices en ciertos aspectos del cálculo.

Cuando la armadura activa es adherente – con vainas inyectadas con lechada de cemento – la propia armadura activa tiene una participación mayor en el equilibrio de esfuerzos, siendo quizás destacable su mayor contribución en el análisis del punzonamiento.

Dado que la mayoría de forjados postesados en la edificación quedan resueltos, de un tiempo a esta parte, con armadura adherente, especialmente a medida que la distancia entre soportes se incrementa, el presente estudio ha quedado centrado en las losas postesadas proyectadas con armadura activas fijadas a la masa de hormigón después de su tesado (adherentes).

La magnitud de los esfuerzos de la mayoría de problemas reales provoca que el número de cordones a emplear sea suficientemente elevado para que éstos tengan que quedar agrupados dentro de una misma vaina conformando lo que se denomina tendones.

Las vainas que alojan los grupos de cordones pueden ser circulares y, si el número de cordones a alojar no es muy elevado, pueden ser planas. Si para un mismo número de cordones es posible la utilización de vainas planas, su empleo en edificación resulta más ventajoso porque, al resultar los cantos de forjado habitualmente reducidos, la altura de la vaina incide muchas veces de forma relevante en la definición del canto útil de las secciones.

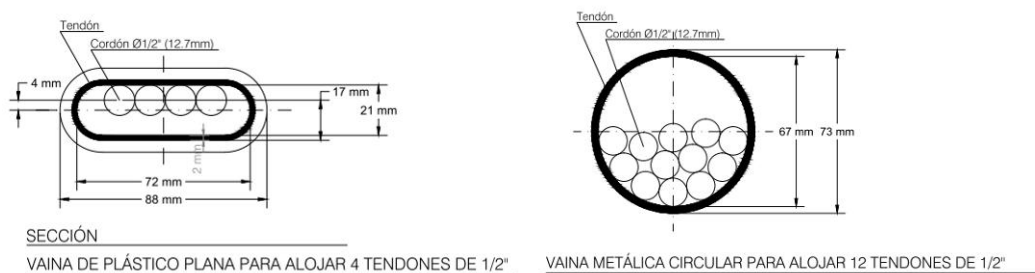


Figura 3-3. Tipos básicos de tendón en una armadura activa

El tesado de las armaduras tiene lugar normalmente en uno de sus extremos denominado cabeza activa, mediante una placa de anclaje que permite el bloqueo de los cordones mediante mordazas o cuñas, según se puede apreciar en los siguientes detalles. La cabeza pasiva, situada en el extremo contrario, presenta un esquema más básico al no requerir la posibilidad de bloqueo posterior al tesado y, normalmente, no queda accesible desde el exterior.

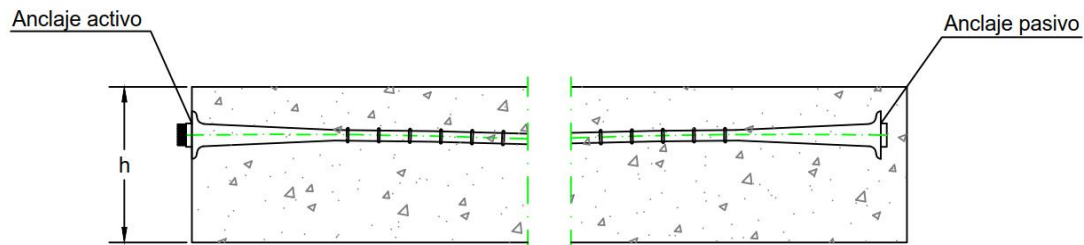


Figura 3-4. Detalles típicos de cabezas activas y pasivas

Algunas veces, cuando las armaduras son muy largas o cuando cubren un número elevado de vanos (4 o más), resulta necesario que en los dos extremos de las armaduras las cabezas sean activas para mejorar el rendimiento del tesado, tesando desde ambos costados.

Los trazados de armadura activa intentan maximizar su excentricidad en las secciones críticas a momento flector positivo, en la parte central de los vanos, y a momento flector negativo, sobre todo en los soportes interiores, describiendo curvaturas adecuadas a cada situación.

Cuando los escenarios de carga gravitatoria son regulares, con acciones superficiales uniformes de carácter predominante, las curvas suelen ser de tipo parabólico, lo que permite que las acciones de postesado perpendiculares a la placa sean de tipo uniforme y, por tanto, que los efectos correctores resulten más fáciles de proporcionar a los propios efectos de las acciones gravitatorias.

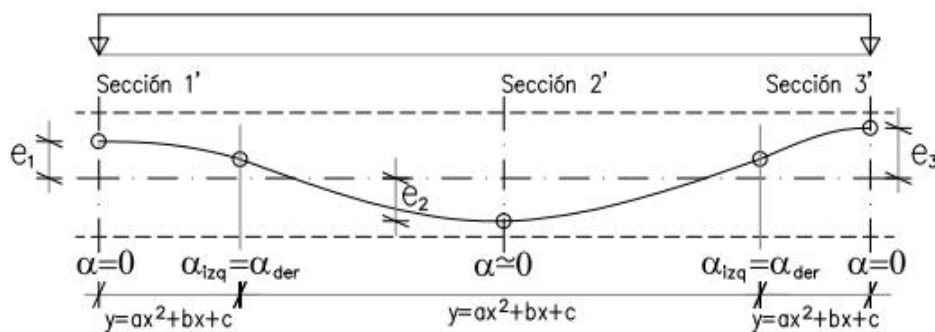


Figura 3-5. Trazado típico de la armadura activa en un vano interior

El trazado mostrado en la imagen anterior, es el trazado de referencia de cualquier armadura activa del presente trabajo, al corresponderse con un vano interior, en donde no hay incidencia de los problemas locales asociados a los mecanismos extremos de anclaje de la armadura activa. Además, en estos vanos interiores es precisamente donde tiene más sentido estudiar la posible optimización de la armadura de refuerzo, al localizarse en ellos los picos de esfuerzo más elevados.



3.2 La armadura pasiva

La armadura pasiva complementa a la activa a la hora de equilibrar los momentos flectores en las secciones críticas, junto a los soportes, y de forma más excepcional en los centros de vano.

Su sola presencia ayuda también al equilibrio de acciones indirectas de carácter reológico, sobre todo a edades tempranas, cuando todavía no se han aplicado las fuerzas de pretensado y cuando la demanda provocada por la retracción hidráulica sufre un mayor incremento.

Dos colocaciones (o situaciones de colocación) típicas de este tipo de armadura pueden ser reconocidas en los esquemas adjuntos: la primera, en la zona de soporte y, la segunda, en una zona de centro de vano.

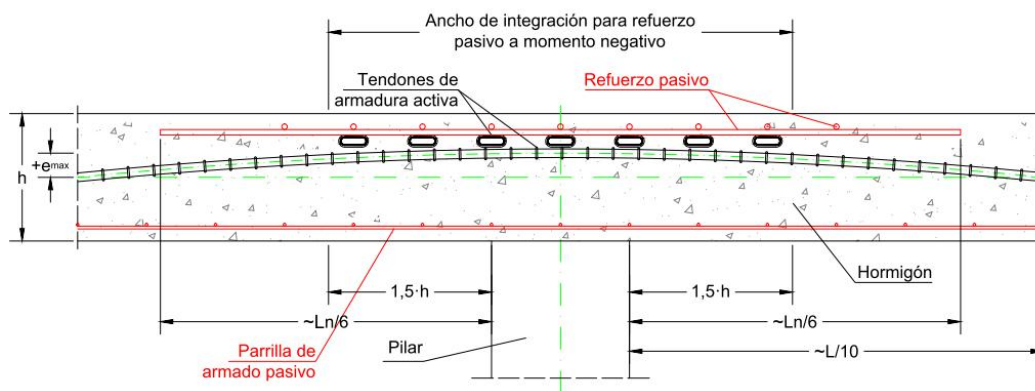


Figura 3-6. Definición de armadura pasiva sobre soporte

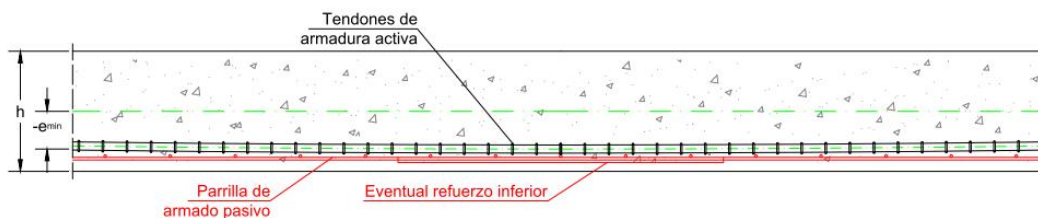


Figura 3-7. Definición de armadura pasiva en centro de vano

Además de en las situaciones típicas, resulta necesaria la disposición local de refuerzos pasivos en las zonas de borde y anclaje, donde en la mayoría de las ocasiones se concentra intensamente la aplicación de la fuerza de tesado, circunstancia que pretende explicarse en la Figura 3-8.

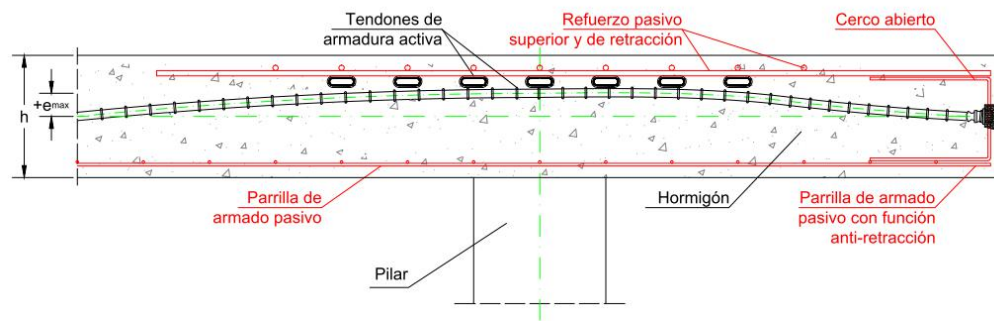


Figura 3-8. Definición de armadura pasiva en borde

El último tipo de refuerzo pasivo necesario es el que atiende al equilibrio del punzonamiento. Son diversas las formas con las que se puede materializar este tipo de refuerzo, aunque en España la forma más común pasa por la colocación de las denominadas crucetas de punzonamiento. Dichas crucetas agrupan, en una serie de brazos que arrancan desde los soportes, tanto la armadura horizontal como la armadura vertical, esta última en forma de estribos, según se ilustra en la Figura 3-9.

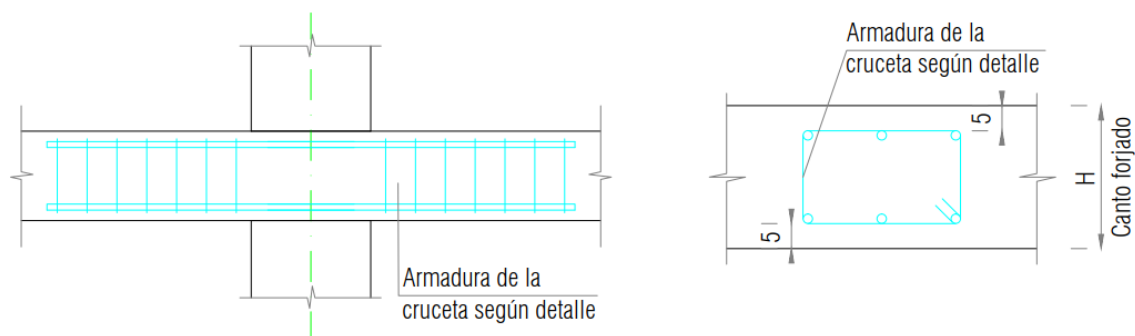


Figura 3-9. Cruceta de punzonamiento.

Aclarados los tipos de refuerzo pasivo por su rol y/o posición, conviene insistir en la geometría del refuerzo longitudinal superior, el ubicado sobre los soportes, por la incidencia que tiene dicha geometría en el presente trabajo.

En relación al ámbito que debe ocupar el refuerzo negativo (armadura pasiva longitudinal superior), en contra de lo que sucede en otras tipologías de forjado, como pueda ser el caso de las losas de hormigón armado, no hay una disposición normativa española o europea que regule de forma explícita su extensión o, en su defecto, un uso común sobre el que apoyarse. En estas circunstancias, la superficie ocupada por el refuerzo suele ser determinada en cada caso en función de los esfuerzos actuantes y/o de los criterios particulares de cada técnico.

En la instrucción americana, ACI 318-08, sí que se establecen unos valores mínimos para longitud de los refuerzos pasivos y para la amplitud ocupada por dichos refuerzos en el proyecto de las losas postesadas. En relación a estas disposiciones normativas, cabe destacar el resumen y aclaraciones contenidas en [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000]. En las figuras posteriores, 3-10 y 3-11, se recogen precisamente las disposiciones ACI en relación a la extensión de los refuerzos pasivos, grafiadas por la publicación citada.

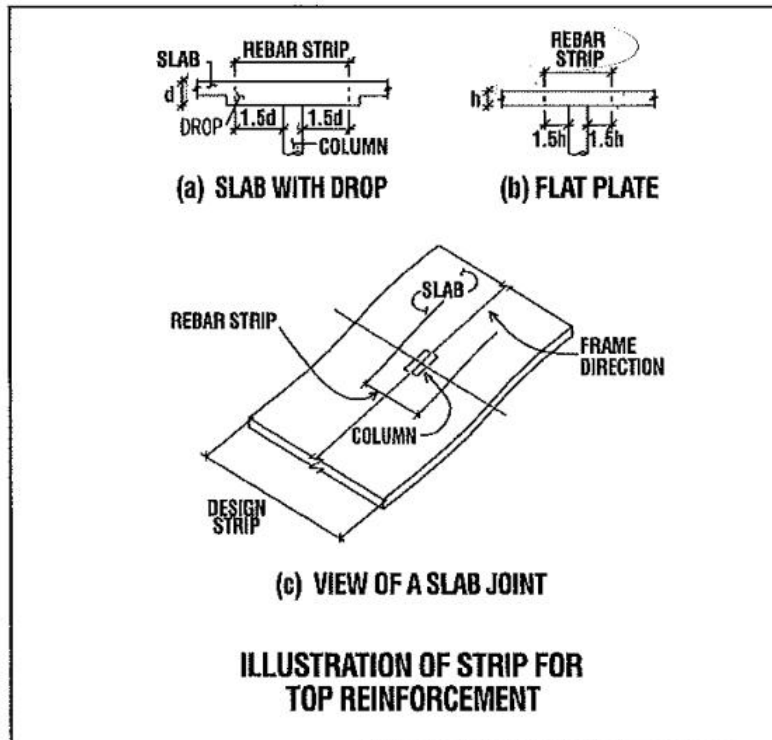


Figura 3-10. Amplitud mínima de los refuerzos pasivos según ACI-318, [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000]

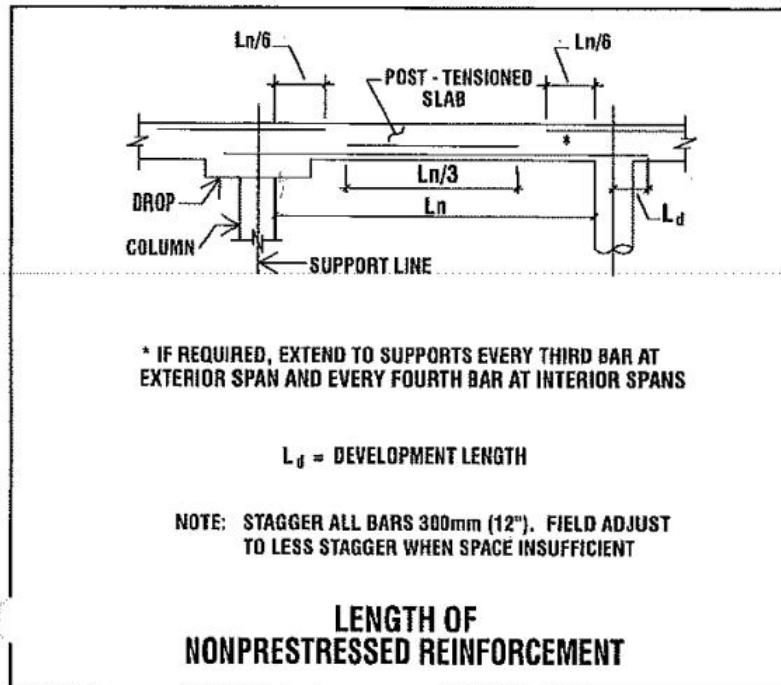


Figura 3-11. Longitud mínima de los refuerzos pasivos según ACI-318, [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000]

3.3 Las losas macizas

En el caso de las losas macizas, problema de referencia en el presente trabajo, de los dos tipos de armadura a considerar genéricamente, es la armadura activa la que realmente define la organización de una losa en función de su propio esquema de colocación, dado que la distribución de la armadura pasiva, en conjunto menos protagonista, admite menos posibilidades organizativas.

En este sentido, debe definirse las posibilidades de colocación de la armadura activa, las cuales resultan de entrada las cuatro siguientes:

3.3.1 Organización distribuida-distribuida

La armadura activa se distribuye de forma uniforme a lo largo de las dos direcciones principales del problema, aunque suelen concentrarse unos pocos tendones sobre los pilares, donde los momentos flectores son más intensos.

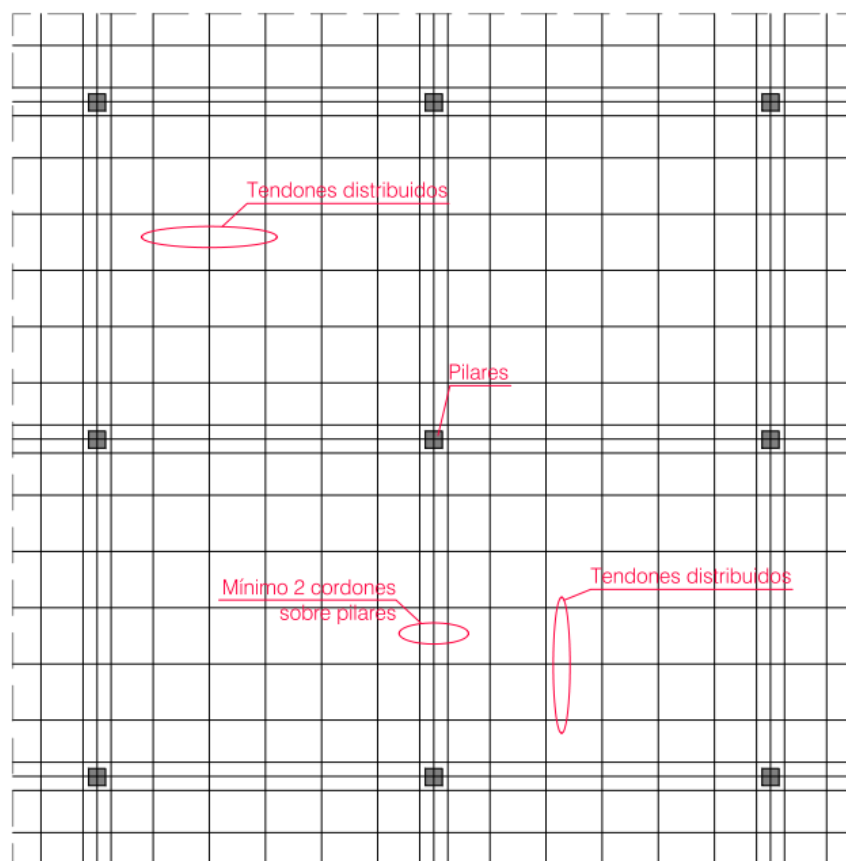


Figura 3-12. Esquema de organización DISTRIBUIDA - DISTRIBUIDA

En esta opción, las armaduras activas que no quedan sobre las columnas provocan unas fuertes acciones descendentes en las bandas soportes que penalizan significativamente el rendimiento de este sistema.

3.3.2 Organización concentrada-concentrada

Toda la armadura activa queda concentrada en ambas direcciones sobre los pilares o en una franja lo más estrecha posible que quede sobre los citados pilares.

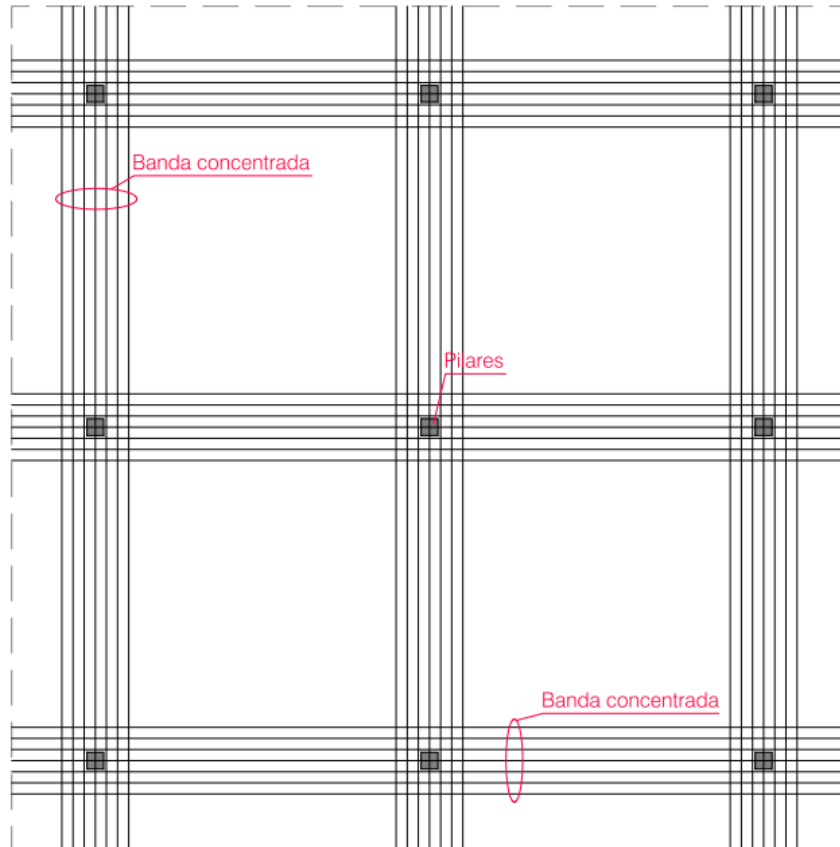


Figura 3-13. Esquema de organización CONCENTRADA - CONCENTRADA

Es una distribución muy poco utilizada porque el entrelazado de tendones en la zona de ábaco resulta muy complejo, a no ser que se acepte una reducción significativa del canto útil en cualquiera de las direcciones.

Además, las acciones ascendentes correctoras provocadas por los cables, al quedar concentradas en ambas direcciones, presentan una forma muy distinta a la de las acciones sollicitación de carácter mucho más uniforme.

3.3.3 Organización mixta

La mayor parte de la armadura, en ambas direcciones, queda concentrada sobre los soportes, aunque unos pocos tendones se distribuyen de forma uniforme a lo largo del vano.

Esta organización, representada en la Figura 3-15, adolece un poco de todos los problemas de las organizaciones anteriores.

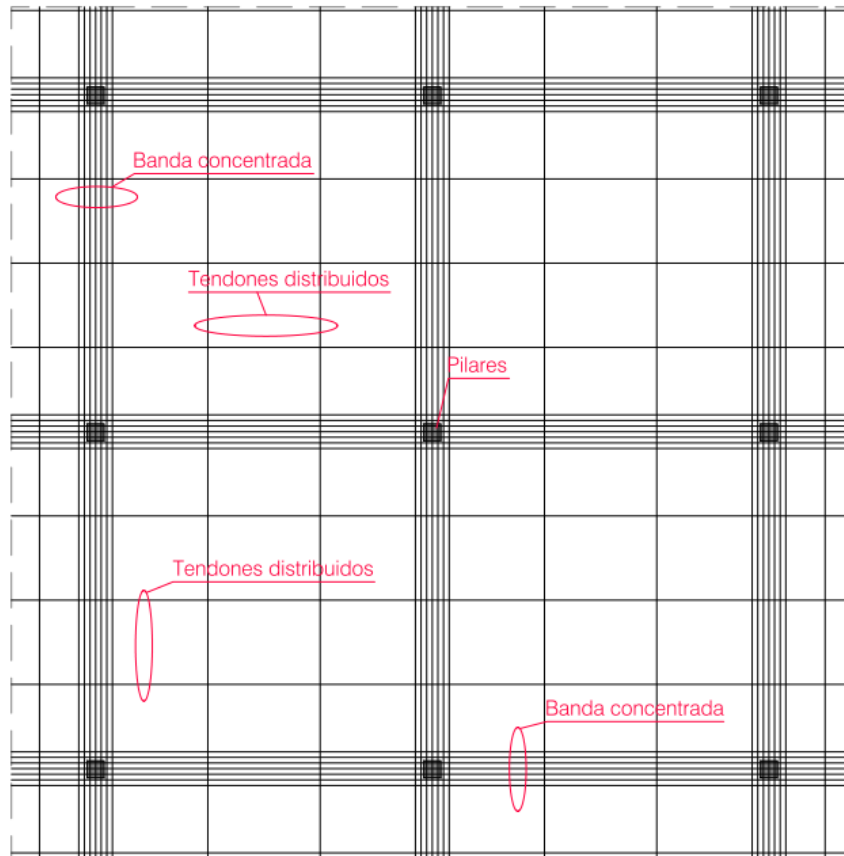


Figura 3-14. Esquema de organización MIXTA

3.3.4 Organización concentrada-distribuida

En una dirección los tendones se distribuyen de forma uniforme mientras que en la dirección complementaria los tendones se distribuyen de forma concentrada, de manera que queden sobre los soportes o lo más cercanos posible a éstos.

Esta organización permite un más fácil entrelazado de armaduras activas y permite, por tanto, que el canto útil de las secciones críticas sea óptimo, lo que pretende ilustrarse en el siguiente esquema.

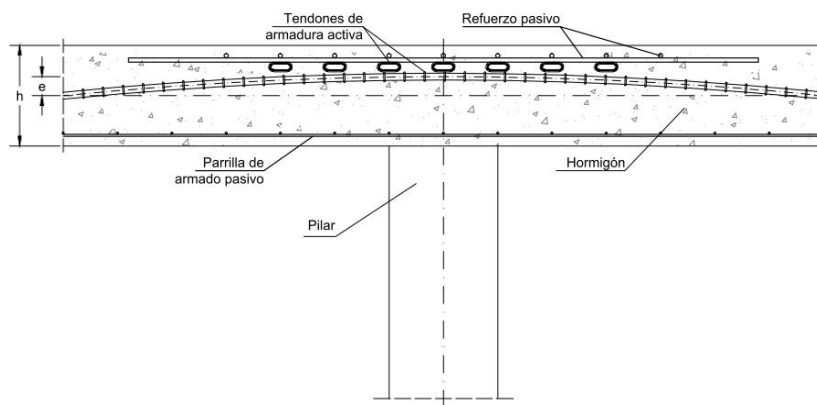


Figura 3-15. Excentricidades máximas y sencillez de entrelazado.

La armadura distribuida de forma uniforme provoca una intensa fuerza descendente en las bandas soportes de la dirección complementaria, pero esta fuerza descendente queda bien compensada por la banda concentrada.

Aunque siguiendo este esquema las placas se adentran en un comportamiento más ortótropo, pesan más las ventajas prácticas y mecánicas antes citadas, y por ello ésta es la organización más recomendable en el diseño de losas postesadas, según indica el *Post-Tensioning Institute* en, por ejemplo, [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000].

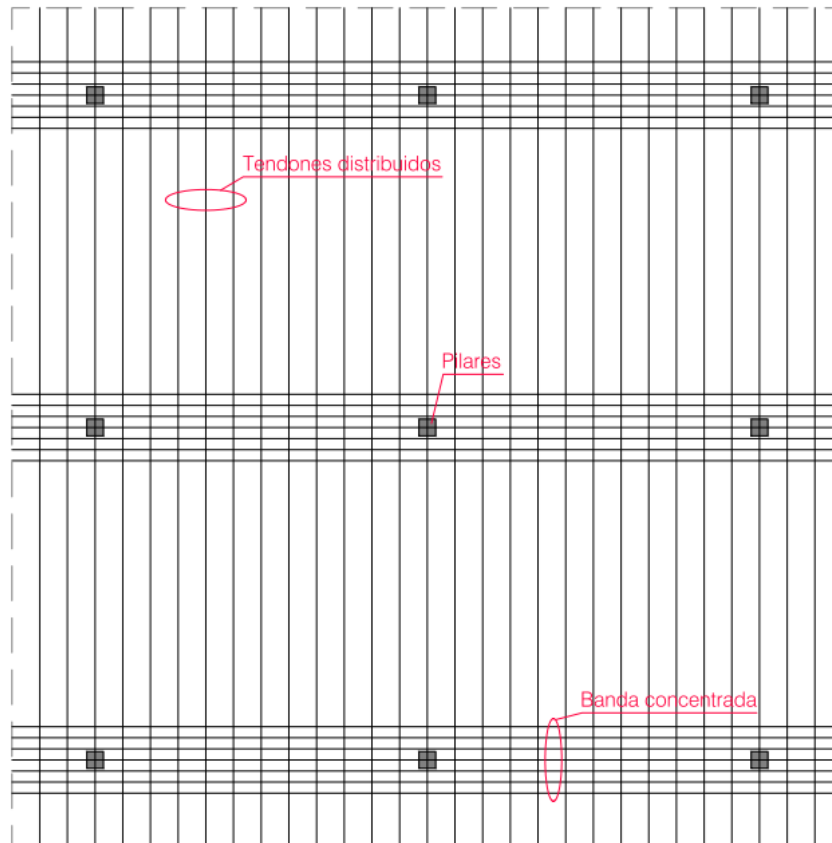


Figura 3-16. Esquema de organización CONCENTRADA – DISTRIBUIDA

Atendiendo, pues, a que la organización concentrada-distribuida resulta la más extendida y adecuada, todos los estudios posteriores, los cuales quedan afectados de una manera u otra por la forma de ordenación de la armadura activa, se fundamentan en este último modelo organizativo.



4 ANÁLISIS DE LOSAS POSTESADAS EN RÉGIMEN ELÁSTICO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El estudio de losas postesadas, a diferencia de lo que sucede en el estudio de la mayoría de otras soluciones de forjado, conlleva el análisis de dos problemas mecánicos específicos: primero, aquél asociado a las cargas perpendiculares a la losa (problema de placa) y, segundo, aquél el asociado a las cargas axiales originadas fundamentalmente por las fuerzas de tesado (problema de cáscara).

La consideración conjunta de los dos problemas referidos inscribe el análisis de los forjados postesados bajo cargas gravitatorias, en términos meramente conceptuales, en un problema laminar más general, según se pretende explicar en los esquemas contiguos.

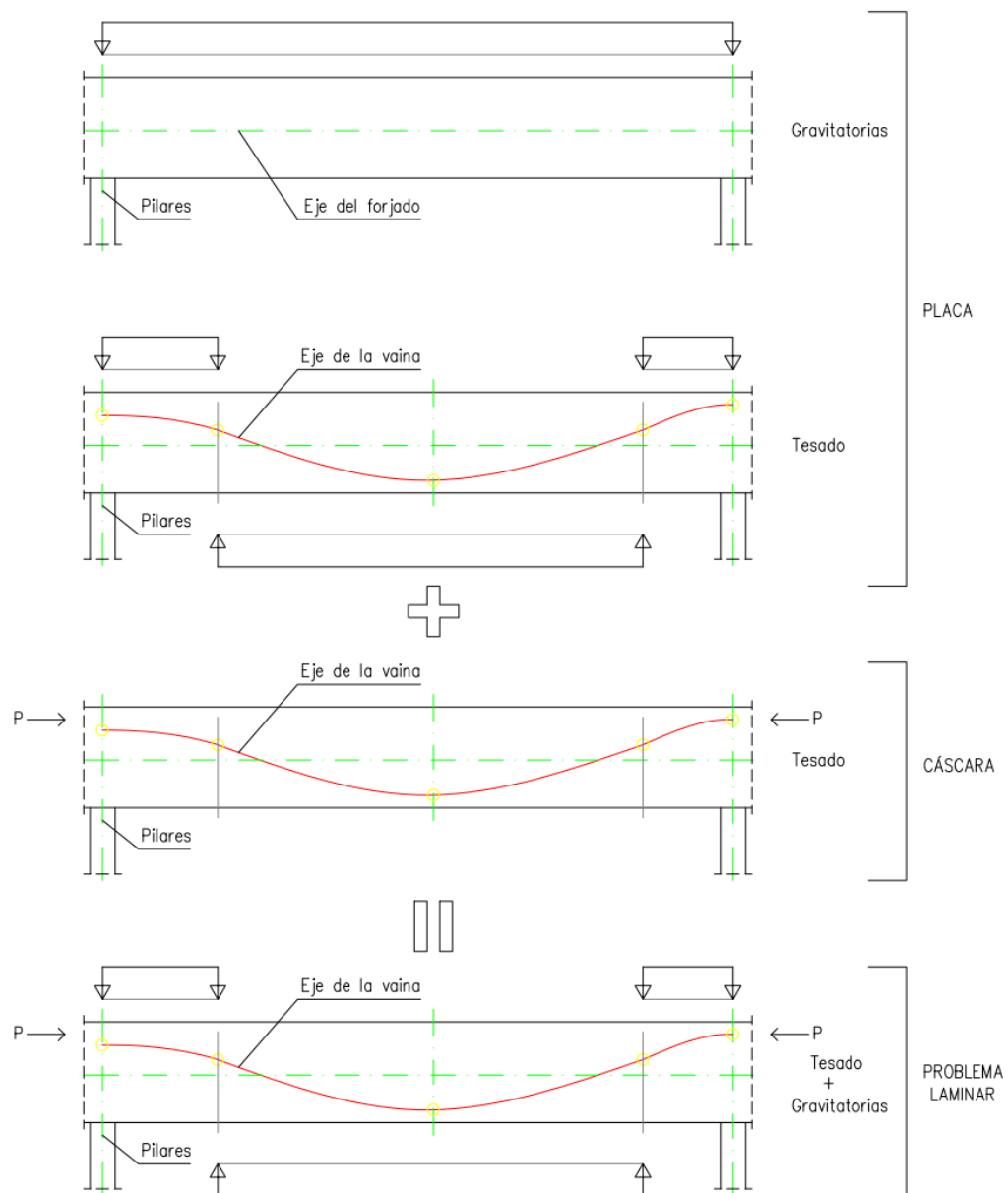


Figura 4-1. Acciones equivalentes de la armadura activa sobre el forjado en una dirección

Es cierto que el problema de cáscara asociado a la fuerza de pretensado presenta una cierta monotonía, lejos de las zonas de anclaje, si la estructura presenta una cierta regularidad, ya que los efectos de dicha fuerza quedan repartidos enseguida de tal forma que propician regímenes de tensión cuasi uniformes a lo largo de un determinado ancho de análisis.

Además, la revisión de la cantidad de la armadura de flexión que propone la presente tesis conlleva que resulte mucho más relevante a esos efectos la parte del problema de placa, como se irá desgranando con posterioridad.

En cualquier caso, se glosan en lo que sigue las bases teóricas genéricas de ambos problemas elementales, para permitir exponer con posterioridad de forma suficientemente precisa cuales son los principios de estas bases teóricas que se proponen revisar de forma específica para proponer finalmente un modelo de análisis no lineal de placas de hormigón postesado.

La exposición se hace orientada al análisis mediante el método de los elementos finitos (MEF) y, al final del capítulo, se recogen los principios de los dos tipos de elementos finitos adoptados en cada caso a la hora de desarrollar las aplicaciones de software necesarias para soportar el modelo propuesto.



4.1 El problema de placa

4.1.1 Hipótesis definitorias y consideraciones previas

Dentro de la generalidad de los problemas estructurales se puede distinguir el problema mecánico de placas porque una *placa* es un elemento plano que presenta una dimensión mucho menor, su espesor, que las otras dos¹. Además, la aplicación de las fuerzas que actúan sobre el elemento en cuestión debe producirse estrictamente en la dirección perpendicular a su plano medio, constituyéndose un escenario geométrico y de carga conocido como *estado de placa*.

De lo anterior se deduce que los posibles momentos flectores actuantes en una placa deben quedar siempre referenciados a ejes contenidos a su plano medio o, lo que es lo mismo, deben quedar contenidos en planos perpendiculares al plano medio de la placa que definen las secciones de cálculo.

Una vez delimitado el ámbito general del problema de placas cabe establecer seguidamente que se abren en él, a su vez, dos campos de comportamiento en función de la relación que guarde el espesor de la placa con la distancia entre sus apoyos o entre dos puntos de momento nulo, por la necesidad de tener que contemplar o no las deformaciones por cortante en el planteamiento del equilibrio del problema. En el caso que la mencionada relación se mantenga dentro de valores "bajos" el problema se sitúa dentro del campo de las *placas delgadas*, por contra, cuando la susodicha relación alcance valores "altos" el problema se sitúa dentro de las llamadas *placas gruesas*².

El equilibrio general en el caso de placas delgadas, se estudia según los criterios fijados en la *Teoría de Placas de Kirchhoff*, cuya hipótesis fundamental viene dada por la consideración de que las secciones transversales de una placa deben quedar, después de la deformación, rectas y perpendiculares al plano neutro, análogamente a la que establece la teoría de flexión de vigas de *Navier-Bernouilli*. Por tanto, en la solución del equilibrio del problema se encuentra un plano neutro donde las deformaciones longitudinales son nulas.

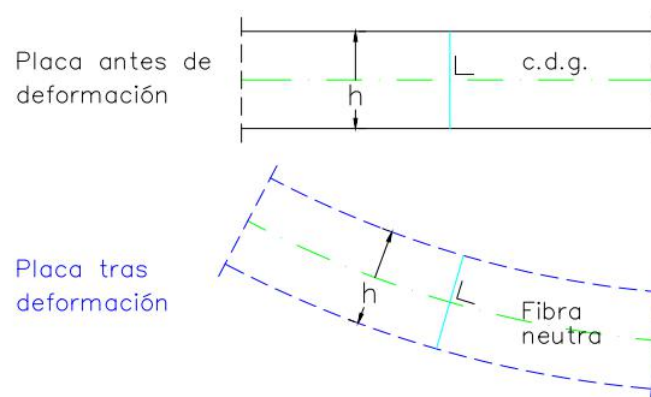


Figura 4-2. Condición de deformación de una sección de placa bajo la teoría de Kirchhoff

- 1 El Eurocódigo 2 [CEN, 1991] establece en su apartado 2.5.2.1 que para que un miembro estructural puede ser considerado como una placa, la luz mínima no debe ser menor que cuatro veces el espesor medio de la placa.
- 2 Eugenio Oñate establece como valor frontera en [OÑATE, E., 1995] el dado por una relación espesor-ancho de 0.1, que para el caso de las placas delgadas deberá ser necesariamente menor.

La hipótesis anterior - secciones transversales rectas y perpendiculares al plano neutro después de la deformación - lleva de forma implícita a no considerar la deformación por cortante en la consecución del equilibrio.

En el caso de placas gruesas, por el contrario, resulta obligada la consideración del cortante en el equilibrio, perdiéndose pues la condición de *Kirchoff*. El comportamiento de este segundo problema queda regido por la *Teoría de Placas de Reissner-Mindlin*.

En cierta manera la teoría de *Reissner-Mindlin* resulta más precisa por el hecho de contemplar la deformación por corte o, de alguna forma, más general. Sin embargo, el uso de elementos finitos bajo la teoría de *Reissner-Mindlin* lleva asociado un cuerpo teórico más complejo que no ofrece ninguna ventaja adicional a los efectos de este trabajo. De hecho, el problema de una placa de hormigón postesado podría decirse que responde seguramente mejor que ninguna otra solución de forjado al problema de placas de *Kirchoff*, porque las relaciones entre canto y luz resultan mucho más apuradas, con toda generalidad, que en cualquier otro caso.

Consecuentemente, dada la especificidad del problema aquí estudiado, el análisis de placas va a ser abordado, en lo que sigue, bajo la teoría de placas de *Kirchoff*.

Otra hipótesis simplificadora del problema parte de la consideración de que la tensión normal al plano medio no es relevante. Aunque, resulta fácil apreciar que la referida tensión normal no es siempre nula, cuando menos en aquellas regiones que reciben directamente carga exterior, tal y como se puede entender en la posterior figura. Sin embargo, su importancia relativa en la deformación de la placa, con respecto a los esfuerzos de flexión es perfectamente despreciable, y por ello no se incluyen sus efectos en el análisis de placas;

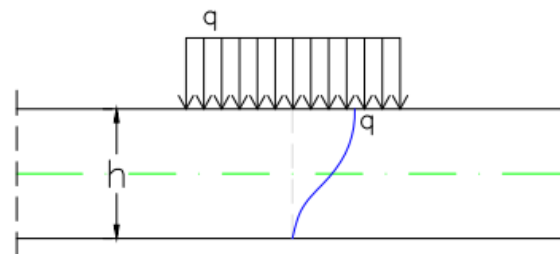


Figura 4-3. Variación de la tensión normal en una zona bajo carga

La última de las hipótesis definitorias de la teoría de placas que fundamenta el presente trabajo pasa por la suposición de que los desplazamientos transversales de la superficie media (w) son pequeños en comparación con el espesor de placa (h), espesor que ha de ser, además, constante a lo largo de todo un elemento de tamaño diferencial.

La anterior hipótesis es en la práctica de cumplimiento obligado en forjados de edificación, por razón de su uso, de la integridad de los elementos constructivos que soportan y del aspecto que se les requiere mantener. Además, permite que el problema presente una respuesta independiente de las variaciones geométricas que vaya experimentando fruto de su deformación, deformación que está, como consecuencia de todo lo expuesto, únicamente causada por la flexión.

En base a todo lo anterior, el problema teórico de base es claramente de naturaleza lineal y esta linealidad sólo quedará alterada en capítulos posteriores a partir de la reconsideración de la forma equilibrio de los momentos flectores de placa.

4.1.2 Ecuaciones de equilibrio

En los términos comentados, el estado general de sollicitación al que puede verse sometido un elemento diferencial de placa, considerando todo el espesor de la propia placa, puede obtenerse como la suma de los siguientes tres esquemas básicos de sollicitación o de esfuerzos;

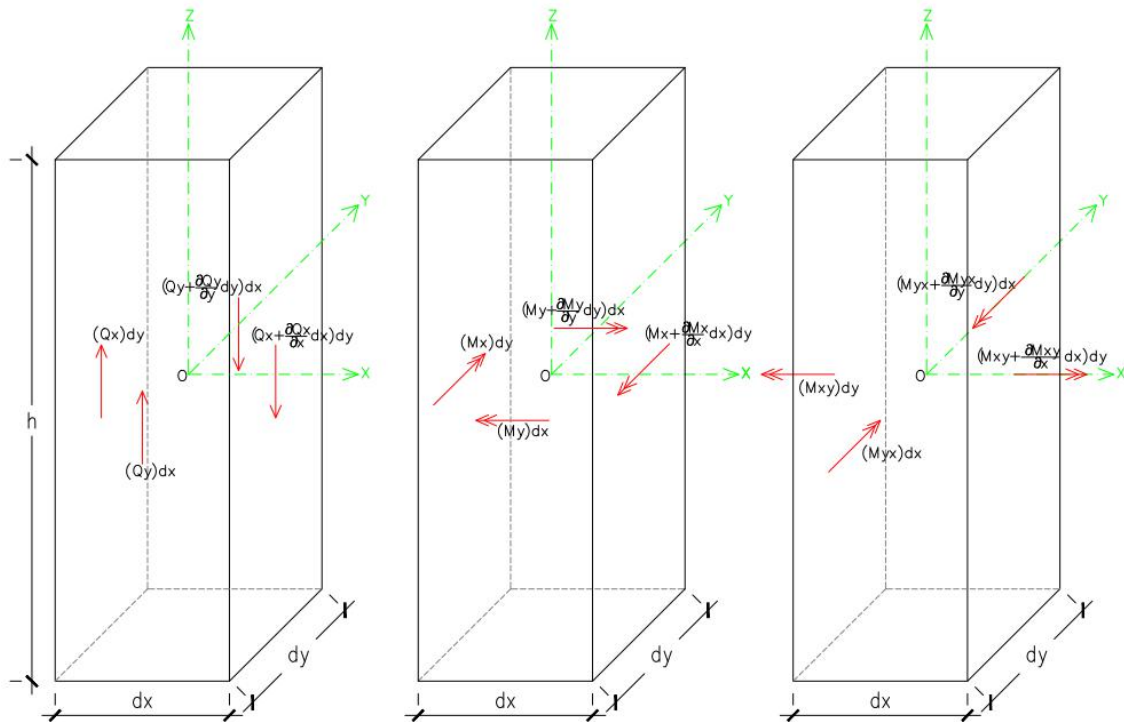


Figura 4-4. Esfuerzos Cortantes , Momentos flectores y Momentos torsores

En los anteriores esquemas los esfuerzos, los cortantes y los momentos flectores, quedan definidos por las correspondientes expresiones de integración de tensiones;

$$Q_x = \int_z \tau_{xz} dz$$

$$M_x = \int_z z \cdot \sigma_x dz$$

$$M_{xy} = \int_z z \cdot \tau_{xy} dz$$

$$Q_y = \int_z \tau_{yz} dz$$

$$M_y = \int_z z \cdot \sigma_y dz$$

$$M_{yx} = \int_z z \cdot \tau_{yx} dz$$

Esfuerzos cortantes

Esfuerzos de flexión

Esfuerzos de torsión

Del equilibrio de fuerzas verticales, únicos vectores de fuerza existentes sobre el elemento diferencial, resulta la siguiente expresión;

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q(x, y)$$

En la expresión anterior $\mathbf{q}(x,y)$ es la carga externa que actúa sobre el elemento diferencial de placa, que se supondrá uniformemente repartida en toda su superficie.

Planteando alternativamente el equilibrio de momentos sobre los ejes X e Y particulares del elemento diferencial de referencia, con lo que quedarían cubiertas las tres condiciones básicas de equilibrio del problema, se obtienen el siguiente par de ecuaciones;

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x$$

Ahora bien, considerando la reciprocidad de tensiones tangenciales que se cumple, en este caso, para las cuatro tensiones tangenciales horizontales actuantes en cualquiera de los planos acostados del elemento diferencial, se deduce que los momentos torsores contenidos en cada plano vertical resultan idénticos, siempre que las direcciones de análisis sean ortogonales;

$$M_{yx} = M_{xy}$$

El argumento anterior permite rescribir las ecuaciones de equilibrio de momentos de la siguiente manera;

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x$$

Las tres ecuaciones de equilibrio se pueden conjugar en una única procediendo de la siguiente manera;

- Se derivan las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto de Y y X alternativamente;

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_x}{\partial x}$$

- Se sustituye la ecuación de equilibrio de fuerzas en la primera de las anteriores ecuaciones

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - q(x,y)$$



· Se sustituye la segunda de las ecuaciones derivadas en la anterior:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -f_z$$

Ecuación fundamental de equilibrio de placas delgadas

La ecuación que conjuga las tres ecuaciones de equilibrio del problema es conocida como la ecuación fundamental de equilibrio de placas delgadas. Como se aprecia, en ella no tiene incidencia alguna el cortante, a pesar de que este existe en tanto haya la más mínima variación en la flexión.

4.1.3 Cambio de referencias. Momentos principales

Resulta importante para la operativa de otros capítulos fijar como se calcula cada uno de los tres momentos actuantes – los dos flectores, M_ζ y M_η , y el torsor, $M_{\zeta\eta}$ – en otras referencias locales, ζ y η , diferentes de las generales, X e Y, para las que se conocen los momentos – M_x , M_y , y el torsor, M_{xy} – dado que la propia existencia del momento torsor incide en la transformación.

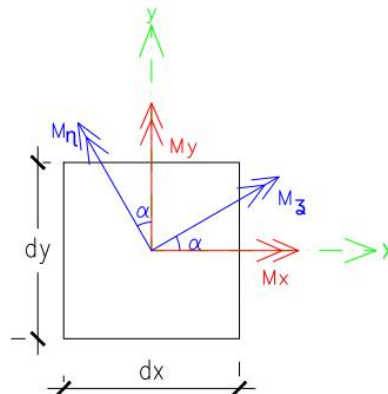


Figura 4-5. Momentos flectores de placa para dos diferentes sistemas de referencia

Concretamente, al tener que considerarse los tres momentos actuantes, la transformación adopta el siguiente aspecto:

$$\begin{bmatrix} M_\zeta & M_{\zeta\eta} \\ M_{\eta\zeta} & M_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la simetría diagonal de los momentos torsores, la operación de cambio de referencias puede ser presentada de forma más compacta de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \\ M_{\zeta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

La matriz de transformación de placa, $[T_\alpha]$, queda entonces como sigue:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Siempre existe un ángulo, α , en el que se cumple que el momento torsor $\mathbf{M}_{\zeta\eta}$ resulta nulo, lo que implica que las tensiones rasantes horizontales resultan también nulas cuando se analiza dicha dirección. Este ángulo define, pues, las direcciones principales del problema y se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\tan(2\alpha) = -\frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}$$

En consecuencia, los momentos principales, asociados a dicho ángulo, resultan los siguientes:

$$M_1 = \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2}$$

$$M_2 = \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2}$$

4.1.4 Deformaciones de placa

Atendiendo a lo expuesto hasta aquí, las tensiones relevantes del problema a nivel diferencial son las dos normales asociadas a la flexión, σ_x y σ_y , y la tangencial horizontal asociada a la torsión, τ_{xy} , que tienen asociadas las tres siguientes deformaciones diferenciales:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Donde u y v quedan referenciados al giro de la sección por acción de los respectivos flectores, \mathbf{M}_x y \mathbf{M}_y , de la siguiente forma:

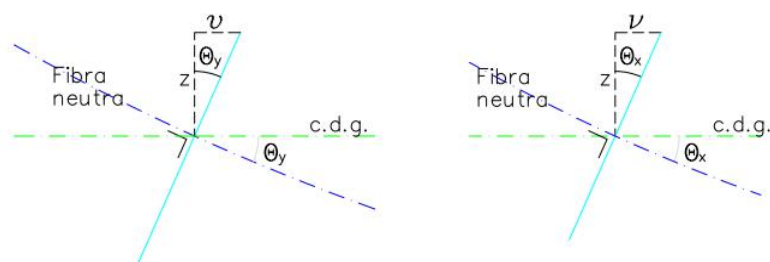


Figura 4-6. Giro de dos secciones transversales de placa por acción de cada uno de los dos momentos flectores M_x y M_y

Por tanto:

$$u = z \cdot \theta_y, \text{ y } v = z \cdot \theta_x$$

Como, además, por teoría general de cálculo de estructuras, los giros se relacionan con las flechas, w , por la ecuación diferencial de la flexión, de la siguiente forma:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \text{ y } \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Entonces, las deformaciones de placa pueden quedar expresadas en función del desplazamiento transversal, w :

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = 2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

4.1.5 Relaciones esfuerzo-deformación

Partiendo de la teoría general de elasticidad y en base a las hipótesis definitorias del problema de placas, las relaciones entre tensiones y deformaciones unitarias resultan las siguientes:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Estas relaciones pueden quedar también descritas en función del desplazamiento transversal:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Considerando la definición de los momentos como las tensiones correspondientes integradas, según se ha expresado con anterioridad, los propios momentos quedan también relacionados con la deformación transversal así:

$$M_x = \int_z z^2 \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz; \quad M_x = -\frac{h^3}{12} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \int_z z^2 \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz; \quad M_y = -\frac{h^3}{12} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \int_z z^2 \cdot \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz; \quad M_{xy} = -\frac{h^3}{12} \cdot \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



De las expresiones anteriores conviene destacar que los momentos dependen en última instancia de un mismo término, **D**, que incluye el espesor general del problema y las constantes elástica **E** y **v** como sigue:

$$D = \frac{h^3 \cdot E}{12(1 - \nu^2)}$$

D es conocido como el *término de rigidez de placa a flexión*, y viene a equivaler de alguna forma al concepto de inercia y de rigidez a flexión propio de los problemas de barras. La definición de **D** permite reescribir la relación entre momentos y deformaciones de la siguiente forma:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

4.1.6 Ecuación de Lagrange

En el problema de placas delgadas tiene particular interés que la expresión de los momentos en función del término de rigidez de placa a flexión, **D**, y de la deformación transversal permite operar la ecuación fundamental de equilibrio, expuesta líneas arriba, para obtener la siguiente expresión alternativa de equilibrio diferencial:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}$$

En la expresión anterior, conocida como la *ecuación de Lagrange*, el equilibrio depende únicamente de la deformación transversal, del término de rigidez de la placa a flexión (por tanto, del espesor de placa y de las constantes elásticas del problema, **E** y **v**) y de la carga externa.

A diferencia de los problemas de estructuras de barras el coeficiente de *Poisson*, **v**, matiza en este caso el comportamiento a flexión y a torsión, si bien diversos autores, como se hace a título de simple ejemplo en [PARK R. y GAMBLE N.L., 1994], consideran que, para el problema particular de placas de hormigón, se debe considerar que el mencionado coeficiente de *Poisson* es nulo, por el inherente proceso de fisuración de los elementos de hormigón sometidos a flexión. Esta última consideración también queda recogida en [CEN, 1991]. Sea como fuere, los efectos de la fisuración en relación a esta cuestión quedan luego contemplados de una forma más minuciosa, según se propone en los capítulos 6 y 7.

4.1.7 Planteamiento matricial del problema

Seguidamente se desarrolla el planteamiento matricial de la teoría general de cálculo de placas delgadas, desde un punto de vista más acorde con los procedimientos de cálculo utilizados en el MEF, lo que permite acometer el problema desde la programación.



4.1.7.1 Campo de corrimientos

Los tres corrimientos relevantes del problema de placas delgadas son el desplazamiento trasversal sobre Z o flecha, w , el giro alrededor del eje X, θ_x , y el giro alrededor del Y, θ_y , los cuales se agrupan habitualmente en la denominada matriz de corrimientos:

$$[u] = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$$

Todos pueden quedar expresados, según lo expuesto, en función de la flecha:

$$[u] = \begin{bmatrix} w \\ w/\partial x \\ w/\partial y \end{bmatrix}$$

4.1.7.2 Campo de deformaciones

Se dan tres deformaciones relevantes: el alargamiento en la dirección de X, ϵ_x , el alargamiento Y, ϵ_y , y la distorsión de cualquier plano horizontal XY, γ_{xy} . Las tres deformaciones de referencia quedan agrupadas, como se muestra seguidamente, en la denominada matriz de deformaciones:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \partial^2 w/\partial x^2 \\ -z \partial^2 w/\partial y^2 \\ -2z(\partial^2 w/\partial x \partial y) \end{bmatrix}$$

4.1.7.3 Campo de tensiones generalizadas

Según se ha visto, las tensiones relevantes del problema se reducen a las dos tensiones normales a los dos planos perpendiculares a los ejes X e Y, σ_x y σ_y , y a la tensión tangencial, τ_{xy} , contenida en cualquiera de los planos horizontales del elemento diferencial:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

La relación entre tensiones y deformaciones expuesta con anterioridad puede ordenarse también en forma matricial:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial anterior suele expresarse también de forma compacta:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

donde **[D]** es la *matriz de elasticidad*, cuyos términos en problemas elásticos lineales son constantes, siempre positivos, y presentan simetría respecto de la diagonal principal.

Aunque su demostración no tiene mayor interés a los efectos del presente trabajo, la *matriz de elasticidad* **[D]** presenta una forma diferente para el caso de materiales *ortótropos*:

$$[D] = \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_x & 0 \\ \nu_{yx} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) G_{xy} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_x & 0 \\ \nu_{yx} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

La forma de **[D]** correspondiente a materiales ortótropos es la utilizada en capítulos posteriores, porque las losas postesadas resultan genéricamente ortótropas.

Los tres módulos de elasticidad - **E_x**, **E_y** y **G_{xy}** - se relacionan a través de los coeficientes de Poisson - **ν_{xy}**, **ν_{yx}** - de la siguiente forma:

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1 + \nu_{yx}}{E_x} + \frac{1 + \nu_{xy}}{E_y}$$



La **matriz de elasticidad** presenta también en el caso de los materiales ortótropos simetría respecto a la diagonal principal, con lo que necesariamente se cumple también que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}}$$

El análisis profesional de estructuras se suele evaluar en términos de esfuerzos en las secciones de cálculo, esfuerzos que resultan de la integración de las tensiones sobre dichas secciones, lo que lleva a hablar de **tensiones generalizadas** o **esfuerzos**, que suelen agruparse matricialmente en el problema de placas delgadas como se expone:

$$[\hat{\sigma}] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_h -z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_h -z[\sigma] dz$$

Además, en el análisis matricial, las tensiones a integrar suelen quedar expresadas en función del producto de la matriz de elasticidad por la matriz de deformación, obteniéndose el vector de tensiones generalizadas de la siguiente forma:

$$[\hat{\sigma}] = \int_h -z[D][\varepsilon] dz \quad \text{o} \quad [\hat{\sigma}] = \int_h -z^2[D][\hat{\varepsilon}] dz = [\hat{D}][\hat{\varepsilon}]$$

Con,

$$[\hat{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ (\partial^2 w / \partial x \partial y) \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon] = -z \cdot [\hat{\varepsilon}] \quad \text{y} \quad [\hat{D}] = \frac{t^3}{12} [D]$$

Donde,

$[\hat{\varepsilon}]$ es el vector de **deformaciones generalizadas**,

$[\hat{D}]$ es la **matriz de elasticidad generalizada** de flexión.



4.2 El problema de cáscara

4.2.1 Hipótesis definitorias y consideraciones previas

Un cáscara o membrana es un elemento estructural, plano o curvo, que alcanza el equilibrio sin desarrollar cortantes de placa ni momentos flectores o, dicho de otro modo, que alcanza el equilibrio desarrollando esfuerzos asociados a pares de fuerzas que quedan siempre contenidas en el plano medio de la cáscara.

El caso de una losa postesada es, pues, el caso particular de una cáscara plana horizontal cuando se estudian separadamente los efectos de las fuerzas de precompresión propios de la técnica del hormigón postesado.

Algunas veces el análisis de una superficie estructural únicamente cargada mediante fuerzas en su plano medio lleva aparejada la aparición de tensiones perpendiculares a éste, por la existencia de un confinamiento de la dilatación o contracción transversal de la propia superficie asociada a las tensiones motivadas por las propias fuerzas de cáscara por "**efecto Poisson**". Este problema específico se denomina de deformación plana: las deformaciones transversales resultan nulas a costa de que se generen tensiones transversales de confinamiento. Por el contrario, cuando la superficie puede dilatar o contraer con libertad por efecto de las tensiones de membrana se dice que el problema es de tensión plana.

El estudio de los efectos de precompresión en losas postesadas queda inscrito, en consecuencia, a un caso o problema de tensión plana, cuyas bases teóricas particulares quedan glosadas brevemente en lo que sigue.

4.2.2 Ecuaciones de equilibrio

En los términos comentados, el estado general de sollicitación al que puede verse sometido un elemento diferencial de cáscara, considerando todo su espesor, puede obtenerse como la suma de dos esquemas básicos de sollicitación:

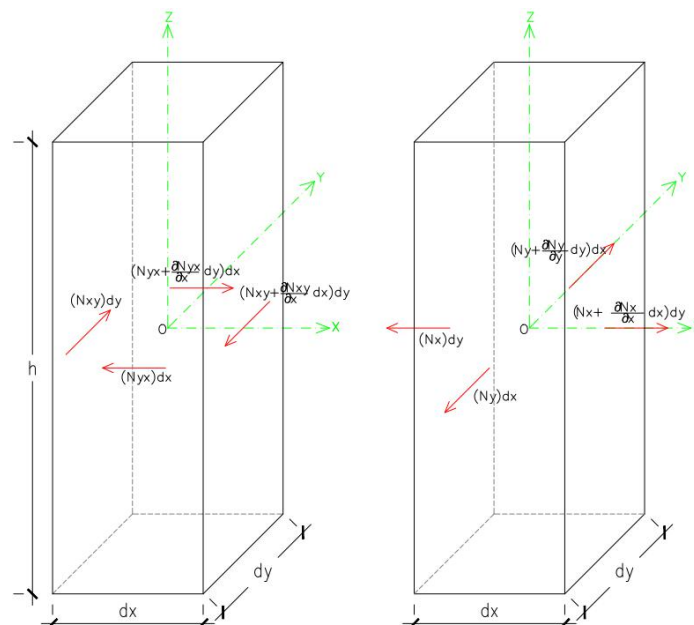


Figura 4-7. Esfuerzos Cortantes de Cáscara y Esfuerzos axiales

En los anteriores esquemas los esfuerzos de cáscara, tanto los cortantes de cáscara como los esfuerzos axiales, también quedan definidos por las correspondientes expresiones de integración de tensiones:

$$N_x = \int_z \sigma_x dy dz ; \quad N_{xy} = \int_z \tau_{xy} dy dz$$

$$N_y = \int_z \sigma_y dx dz ; \quad N_{yx} = \int_z \tau_{yx} dx dz$$

Esfuerzos axiales de cáscara

Esfuerzos cortantes de cáscara

Planteando el equilibrio de momentos y en coherencia con el principio de reciprocidad de tensiones tangenciales, se deduce que los cortantes de membrana resultan iguales entre ellos para dos direcciones de análisis perpendiculares:

$$2 \cdot N_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot N_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$N_{xy} = N_{yx}$$

Planteando el equilibrio de las fuerzas horizontales, en X e Y, se obtienen dos expresiones de equilibrio interno de fuerzas

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy - N_x \cdot dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx - N_{xy} \cdot dx + f_x \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx - N_y \cdot dx + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy - N_{xy} \cdot dy + f_y \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 ; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + f_y = 0$$

4.2.3 Deformaciones de cáscara

En los problemas de tensión plana, se dan dos tensiones normales asociadas a los esfuerzos axiales, σ_x y σ_y , y una tensión tangencial horizontal asociada al cortante de membrana, τ_{xy} . A cada una de estas tres tensiones queda asociada una deformación, según sigue:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



En problemas de tensión plana, hay que añadir la deformación unitaria transversal, $\boldsymbol{\varepsilon}_z$, por inexistencia de confinamiento, aunque esta última deformación no resulta relevante en el equilibrio general del problema:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right);$$

El desplazamiento vertical o flecha, \mathbf{w} , no participa entonces en el equilibrio y su variación a lo largo de Z por efecto del problema de cáscara es lineal:

$$w = az + b;$$

4.2.4 Relaciones esfuerzo-deformación

Partiendo de la teoría general de elasticidad y en base a las hipótesis definitorias del problema de cáscaras, las relaciones entre tensiones y deformaciones unitarias resultan las siguientes:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Las tensiones pueden quedar entonces en función de las deformaciones de cáscara, \mathbf{u} y \mathbf{v} :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Las deformaciones diferenciales de cáscara \mathbf{u} y \mathbf{v} , quedan detalladas en la figura adjunta:

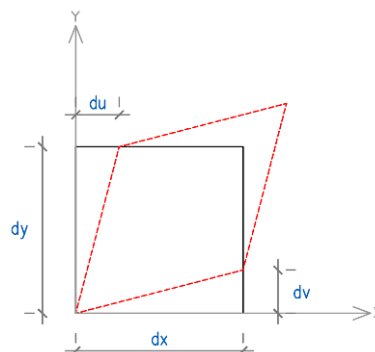


Figura 4-8. Deformaciones diferenciales de cáscara

Considerando las anteriores expresiones los esfuerzos de este tipo de problema en función de las deformaciones quedan, pues, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \cdot dz ; \\
 N_y &= \int_z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \cdot dz ; \\
 N_{xy} &= \int_z \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \cdot dz
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{cases}
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0
 \end{cases}$$

4.2.5 Planteamiento matricial del problema

Desde un punto de vista más acorde con los procedimientos de cálculo utilizados en el MEF, de forma análoga a lo propuesto en el caso de las placas, se desarrolla seguidamente planteamiento matricial de la teoría general de cálculo de cáscaras.

4.2.5.1 Campo de corrimientos

Si se omite el desplazamiento transversal a la cáscara, por ser irrelevante en el equilibrio, los corrimientos relevantes del problema, \mathbf{u} y \mathbf{v} , quedan agrupados en la matriz de corrimientos de la siguiente forma:

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

4.2.5.2 Campo de deformaciones

Las tres deformaciones relevantes del problema, expresadas en función de los desplazamientos, quedan normalmente agrupadas en la matriz de deformación de la siguiente manera:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix}$$



4.2.5.3 Campo de tensiones generalizadas

Debe destacarse que las tensiones relevantes del problema coinciden con las del problema de placas delgadas: las dos tensiones normales a los dos planos perpendiculares a los ejes X e Y, σ_x y σ_y , y a la tensión tangencial, τ_{xy} , contenida en cualquiera de los planos horizontales del elemento diferencial, lo que permite que las tensiones puedan quedar nuevamente agrupadas y expresadas de la misma forma:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Siendo asimismo la expresión compacta, a partir de la matriz de elasticidad, $[D]$, la siguiente:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

Mientras que las tensiones generalizadas o esfuerzos quedarían así calculadas en forma matricial:

$$[\hat{\sigma}] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_h \begin{bmatrix} \sigma_x dy \\ \sigma_y dx \\ \tau_{xy} dy \end{bmatrix} dz$$

4.3 Ecuación general de equilibrio. La matriz de rigidez en el MEF

El método de los elementos finitos, utilizado como soporte del modelo propuesto para el análisis de las losas postesadas en la presente tesis, permite, como es sobradamente conocido, el estudio de un problema estructural continuo a partir de su discretización en porciones denominadas elementos finitos.

La resolución de un problema así discretizado pasa por el cálculo de los corrimientos nodales que enmarcan cada elemento finito, a partir de la resolución de la clásica ecuación general de equilibrio estático:

$$[f] = [K][a]$$

Donde,

$[f]$ es el vector general de fuerzas
 $[K]$ es la matriz general de rigidez
 $[a]$ es la matriz general de corrimientos nodales

En la referida ecuación general de equilibrio el término más relevante a los efectos de lo que aquí ocupa, en el sentido de que requiere un trabajo particularizado en adelante, es la matriz de rigidez general $[K]$. Dicha matriz de rigidez general se obtiene a partir de la rigidez aportada por todos los elementos finitos que componen el problema en cada uno de sus nodos, mediante el correspondiente ensamblaje de las rigideces parciales, siguiendo la operativa convencional del análisis matricial de estructuras.

Las rigideces parciales de un elemento finito, i , se agrupan matricialmente en la correspondiente matriz de rigidez parcial de cada elemento: $[K_i]$.

Sin extenderse demasiado en aspectos aquí innecesarios, conviene destacar que la expresión básica de cálculo de la matriz de rigidez parcial $[K_i]$ de un elemento finito superficial de área, A , puede ser deducida imponiendo sus condiciones parciales de equilibrio mediante el Teorema de los Trabajos Virtuales o mediante la aplicación del Teorema de la Minimización de la Energía de deformación [MOYA, L., 1994].

Sea como fuere, el cálculo de la matriz $[K_i]$ de cada elemento responde, al final, a la siguiente expresión básica:

$$K_i = \int_A [B]^T [\hat{D}] [B] dA$$

En la expresión anterior $[B]$ es la denominada matriz de deformación, propia del tipo de elemento finito utilizado, y $[\hat{D}]$ la matriz de elasticidad generalizada propia del problema mecánico que se analice, la cual ha sido detallada líneas arriba para los dos problemas relevantes en una losa postesada (placa y membrana).

La organización de la matriz de elasticidad permite establecer también la correlación de las tensiones o esfuerzos con los corrimientos relevantes del problema.



Es cierto que la expresión anterior presenta muchas veces particularizaciones, pero resulta fundamental destacar en este capítulo cuarto la dependencia de la rigidez de los elementos finitos de la matriz de elasticidad generalizada y, por tanto, de la matriz de elasticidad básica, describiendo esta última la parte de la mecánica del problema que no depende de la geometría. De hecho, el gobierno del análisis no lineal aquí propuesto pasa fundamentalmente por el estudio de la matriz de elasticidad generalizada, en base a la consideración de la degradación de las losas postesadas **por un "exceso" de flexión**, en los términos que se exponen con detalle en adelante.

Otro aspecto importante a destacar es que, cuando el análisis se hace en régimen de pequeños corrimientos, el problema de placa y el problema de cáscara resultan completamente independientes o desacoplados: sus rigideces y, por tanto, sus respuestas mecánicas pueden ser calculadas por separado, como, de hecho, resulta común.

En los dos apartados siguientes se detalla las características elementales de los dos tipos de elemento finito aquí utilizados: el primero, para la parte del problema de placas delgadas y, el segundo, para la parte del problema de cáscara.



4.4 Elementos finitos adoptados

4.4.1 Elemento de placa delgada. DKT

El elemento de placa DKT, elemento triangular de tres nodos y nueve grados de libertad, es una particularización del elemento de placa de seis nodos y quince grados de libertad obtenida a través de la observación de las siguientes condiciones:

- Los giros, θ_x y θ_y , varían cuadráticamente sobre el elemento, lo cual se consigue interpolándolos mediante las funciones de forma del elemento triangular cuadrático de seis nodos de clase C_0 ,
- La variación de la flecha a lo largo de los contornos es cúbica,
- Se impone una variación de tipo lineal del giro normal al lado a lo largo de los contornos,
- Se imponen las condiciones de deformación transversal nula en los nodos de esquina y en los centros de lado,
- La matriz de rigidez sólo se formula en flexión.

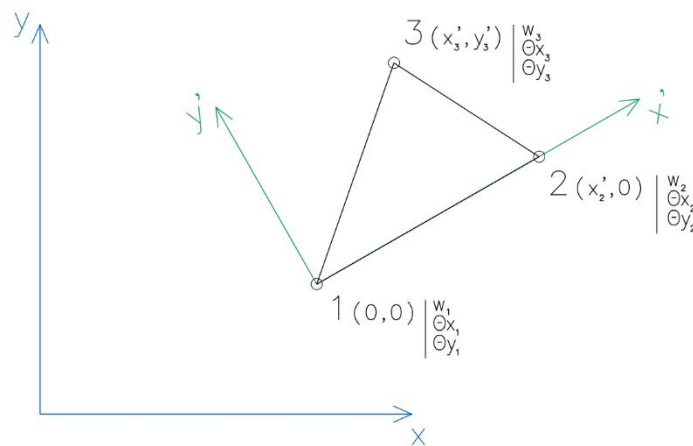


Figura 4-9. Definición y referencias del elemento DKT

Su matriz de corrimientos resulta, pues, la siguiente:

$$[u] = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x,1} \\ \theta_{y,1} \\ w_2 \\ \theta_{x,2} \\ \theta_{y,2} \\ w_3 \\ \theta_{x,3} \\ \theta_{y,3} \end{bmatrix}$$

La expresión que define su matriz de rigidez resulta:

$$[k'] = \int_A [B]^T * [\tilde{D}] * [B] * dx * dy$$

Donde la forma explícita de la matriz geométrica $[B]$ de dimensión 9x9 se define, sumada para cada uno de los tres puntos de integración, como sigue:

$$B = \begin{pmatrix} B_{i,j} & \cdots & B_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{j,n} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

Con,

$$B_{00} = 6 * \left(\frac{sx_2}{q_0 * dx_{12}} - \frac{sx_1}{q_2 * dx_{31}} \right)$$

$$B_{01} = -3 * \left(\frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dx_{31}} + \frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dx_{12}} \right)$$

$$B_{02} = 4 * (dx_1 - pc_1 * dx_{31} - pc_2 * dx_{12})$$

$$B_{03} = 6 * \left(\frac{sx_0}{q_1 * dx_{12}} - \frac{sx_2}{q_0 * dx_{31}} \right)$$

$$B_{04} = -3 * \left(\frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dx_{31}} + \frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dx_{12}} \right)$$

$$B_{05} = 4 * (dx_1 - pc_2 * dx_{31} - pc_0 * dx_{12})$$

$$B_{06} = 6 * \left(\frac{sx_1}{q_2 * dx_{12}} - \frac{sx_0}{q_1 * dx_{31}} \right)$$

$$B_{07} = -3 * \left(\frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dx_{31}} + \frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dx_{12}} \right)$$

$$B_{08} = 4 * (dx_1 - pc_0 * dx_{31} - pc_1 * dx_{12})$$



$$B_{10} = -6 * \left(\frac{sy_2}{q_0 * dy_{12}} - \frac{sy_1}{q_2 * dy_{31}} \right)$$

$$B_{11} = -4 * (dy_1 - pb_1 * dy_{31} - pb_2 * dy_{12})$$

$$B_{12} = 3 * \left(\frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dy_{31}} + \frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dy_{12}} \right)$$

$$B_{13} = -6 * \left(\frac{sy_0}{q_1 * dy_{12}} - \frac{sy_2}{q_0 * dy_{31}} \right)$$

$$B_{14} = -4 * (dy_1 - pb_2 * dy_{31} - pb_0 * dy_{12})$$

$$B_{15} = 3 * \left(\frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dy_{31}} + \frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dy_{12}} \right)$$

$$B_{16} = -6 * \left(\frac{sy_1}{q_2 * dy_{12}} - \frac{sy_0}{q_1 * dy_{31}} \right)$$

$$B_{17} = -4 * (dy_1 - pb_0 * dy_{31} - pb_1 * dy_{12})$$

$$B_{18} = 3 * \left(\frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dy_{31}} + \frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dy_{12}} \right)$$

$$B_{20} = 6 * \left(\frac{sx_2}{q_0 * dy_{12}} - \frac{sx_1}{q_2 * dy_{31}} - \frac{sy_2}{q_0 * dx_{12}} + \frac{sy_1}{q_2 * dx_{31}} \right)$$

$$B_{21} = -3 * \left(\frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dy_{31}} + \frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dy_{12}} \right) - 4 * (dx_1 - pb_1 * dx_{31} - pb_2 * dx_{12})$$

$$B_{22} = 4 * (dy_1 - pc_1 * dy_{31} - pc_2 * dy_{12}) + 3 * \left(\frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dx_{31}} + \frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dx_{12}} \right)$$

$$B_{23} = 6 * \left(\frac{sx_0}{q_1 * dy_{12}} - \frac{sx_2}{q_0 * dy_{31}} - \frac{sy_0}{q_1 * dx_{12}} + \frac{sy_2}{q_0 * dx_{31}} \right)$$

$$B_{24} = -3 * \left(\frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dy_{31}} + \frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dy_{12}} \right) - 4 * (dx_1 - pb_2 * dx_{31} - pb_0 * dx_{12})$$

$$B_{25} = 4 * (dy_1 - pc_2 * dy_{31} - pc_0 * dy_{12}) + 3 * \left(\frac{sx_2 * sy_2}{q_0 * dx_{31}} + \frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dx_{12}} \right)$$

$$B_{26} = 6 * \left(\frac{sx_1}{q_2 * dy_{12}} - \frac{sx_0}{q_1 * dy_{31}} - \frac{sy_1}{q_2 * dx_{12}} + \frac{sy_0}{q_1 * dx_{31}} \right)$$

$$* B_{27} = -3 * \left(\frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dy_{31}} + \frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dy_{12}} \right) - 4 * (dx_1 - pb_0 * dx_{31} - pb_1 * dx_{12})$$

$$B_{28} = 4 * (dy_1 - pc_0 * dy_{31} - pc_1 * dy_{12}) + 3 * \left(\frac{sx_0 * sy_0}{q_1 * dx_{31}} + \frac{sx_1 * sy_1}{q_2 * dx_{12}} \right)$$

Y,

$$dx_1 = \frac{sy_0 * (l_0 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dy_1 = \frac{sx_0 * (l_0 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dx_{12} = \frac{(sy_0 * l_1) + (sy_1 * l_0)}{det}$$

$$dy_{12} = \frac{(sx_0 * l_1) + (sx_1 * l_0)}{det}$$

$$dx_{31} = \frac{(sy_2 * l_0) + (sy_0 * l_2)}{det}$$

$$dy_{31} = \frac{(sx_2 * l_0) + (sx_0 * l_2)}{det}$$

$$dx_1 = \frac{sy_1 * (l_1 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dy_1 = \frac{sx_1 * (l_1 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dx_{12} = \frac{sy_1 * l_2 + sy_2 * l_1}{det}$$

$$dy_{12} = \frac{sx_1 * l_2 + sx_2 * l_1}{det}$$

$$dx_{31} = \frac{sy_0 * l_1 + sy_1 * l_0}{det}$$

$$dy_{31} = \frac{sx_0 * l_1 + sx_1 * l_0}{det}$$

$$dx_1 = \frac{sy_2 * (l_2 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dy_1 = \frac{sx_2 * (l_2 - \frac{1}{4})}{det}$$

$$dx_{12} = \frac{sy_2 * l_0 + sy_0 * l_2}{det}$$

$$dy_{12} = \frac{sx_2 * l_0 + sx_0 * l_2}{det}$$

$$dx_{31} = \frac{sy_1 * l_2 + sy_2 * l_1}{det}$$

$$dy_{31} = \frac{sx_1 * l_2 + sx_2 * l_1}{det}$$

$$det = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$



$$pb_0 = \frac{\frac{sy_0^2}{4} - \frac{sx_0^2}{2}}{q_1}$$

$$pc_0 = \frac{\frac{sx_0^2}{4} - \frac{sy_0^2}{2}}{q_1}$$

$$pb_1 = \frac{\frac{sy_1^2}{4} - \frac{sx_1^2}{2}}{q_2} \quad pc_1 = \frac{\frac{sx_1^2}{4} - \frac{sy_1^2}{2}}{q_2}$$

$$pb_2 = \frac{\frac{sy_2^2}{4} - \frac{sx_2^2}{2}}{q_0} \quad pc_2 = \frac{\frac{sx_2^2}{4} - \frac{sy_2^2}{2}}{q_0}$$

$$sx_0 = x_2 - x_1 \quad sx_1 = x_0 - x_2 \quad sx_2 = x_1 - x_0$$

$$sy_0 = y_1 - y_2 \quad sy_1 = y_2 - y_0 \quad sy_2 = y_0 - y_1$$

$$q_0 = dl_0^2 \quad q_1 = dl_1^2 \quad q_2 = dl_2^2$$

El excelente comportamiento numérico de este tipo de elemento finito de placa, del que existen formulaciones explícitas para evitar la integración en el cálculo de la matriz de rigidez, como la formulación aquí adoptada, desde hace bastante tiempo (véase la referencia [BATOZ, J.L., 1982]), queda sancionado tanto por la experiencia como por estudios científico-técnicos específicos, estudios de entre los que cabe destacar el documentado en la referencia [BATOZ, J.L. 1980].

4.4.2 Elemento de cáscara. ANDES

Se conoce como formulación ANS (Assumed Natural Strain), la resolución basada en el estudio de las deformaciones en coordenadas naturales. ANDES (Assumed Natural Deviatoric Strain) representa una variación de la formulación ANS. "Deviatoric" significa cambio, del estado de deformación constante

El elemento de membrana ANDES, elemento triangular de tres nodos y nueve grados de libertad, incluye también los grados de libertad rotacionales perpendiculares al plano de la membrana, de forma que utilizado junto al elemento DKT se obtienen los 6 grados de libertad necesarios en cada nodo, correspondientes a los tres desplazamientos y a los tres giros sobre los ejes del sistema de ejes de referencia.

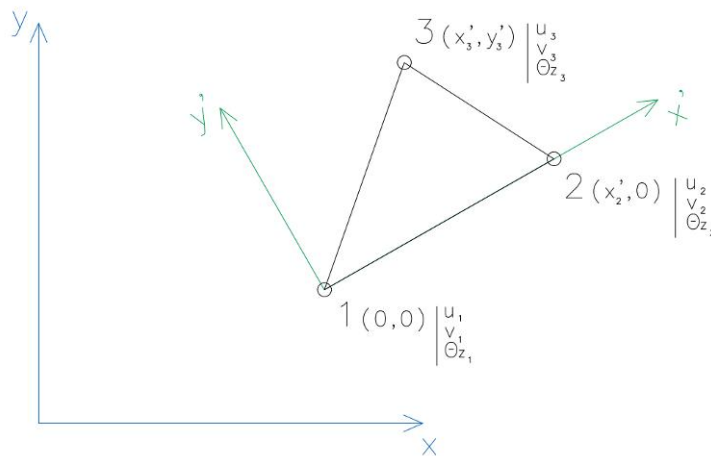


Figura 4-10. Definición y referencias del elemento ANDES

Su matriz de corrimientos resulta, pues, la siguiente:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z,1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z,2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z,3} \end{bmatrix}$$

El elemento construye su matriz de rigidez a partir de dos matrices, una que llamamos básica $K_b(\alpha_i)$ y otra de alto orden $K_h(\beta_i)$.

$$K = K_b(\alpha_i) + K_h(\beta_i)$$

Estas matrices se pueden representar mediante una plantilla en la que aparecen una serie de parámetros libres con valores por asignar. Una determinada combinación de valores permite la obtención de un elemento finito de cáscara típico o característico. En este trabajo, la forma del elemento utilizado es el denominado como OPT (de óptima) en el siguiente cuadro:

Nombre	α_b	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
ALL-3I	1	4/9	1/12	5/12	1/2	0	1/3	-1/3	-1/12	-1/2	-5/12
ALL-3M	1	4/9	1/4	5/4	3/2	0	1	-1	-1/4	-3/2	-5/4
ALL-EX	No es una instancia de la plantilla ANDES										
ALL-LS	1	4/9	3/20	3/4	9/10	0	3/5	-3/5	-3/20	-9/10	-3/4
CST	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FF84	No es una instancia de la plantilla ANDES										
LST-Ret	4/3	1/2	2/3	-2/3	0	0	-4/3	4/3	-2/3	0	2/3
OPT	3/2	1/2	1	2	1	0	1	-1	-1	-1	-2

Tabla 4-1. Firmas de diferentes elementos de la familia ANDES

La forma explícita de la **matriz de rigidez básica** puede expresarse de la siguiente forma:

$$K_b = V^{-1} L E L^T$$

Donde V es el volumen del elemento ($A \cdot h$), y L es una matriz de 3x9 que contiene el parámetro libre α_b :

$$L = \frac{1}{2} h \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ \frac{1}{6}\alpha_b y_{23}(y_{13}-y_{21}) & \frac{1}{6}\alpha_b x_{32}(x_{31}-x_{12}) & \frac{1}{3}\alpha_b(x_{31}y_{13}-x_{12}y_{21}) \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ \frac{1}{6}\alpha_b y_{31}(y_{21}-y_{32}) & \frac{1}{6}\alpha_b x_{13}(x_{12}-x_{23}) & \frac{1}{3}\alpha_b(x_{12}y_{21}-x_{23}y_{32}) \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \\ \frac{1}{6}\alpha_b y_{12}(y_{32}-y_{13}) & \frac{1}{6}\alpha_b x_{21}(x_{23}-x_{31}) & \frac{1}{3}\alpha_b(x_{23}y_{32}-x_{31}y_{13}) \end{bmatrix}$$

Si $\alpha_b = 0$, la matriz de rigidez total queda reducida a la del elemento clásico CST, en el cual la filas y columnas asociadas con las rotaciones desaparecen.

La **matriz de rigidez de alto orden** puede expresarse de la siguiente forma:

$$K_h = c_{fac} \tilde{T}_{\theta u}^T K_{\theta} \tilde{T}_{\theta u}$$

Donde K_{θ} es una matriz de alto orden en términos de las rotaciones jerárquicas θ , $\tilde{T}_{\theta u}$ es la matriz de transformación que relaciona estas deformaciones jerárquicas con los corrimientos en los nodos, y c_{fac} es un factor escalar a determinar.



El método ANDES toma los siguientes patrones de rotaciones jerárquicas para dotar de rango suficiente a la matriz K_h . Estos patrones son cuatro, tres correspondientes a modos de flexión paralelos a los lados y uno correspondiente al modo de torsión.

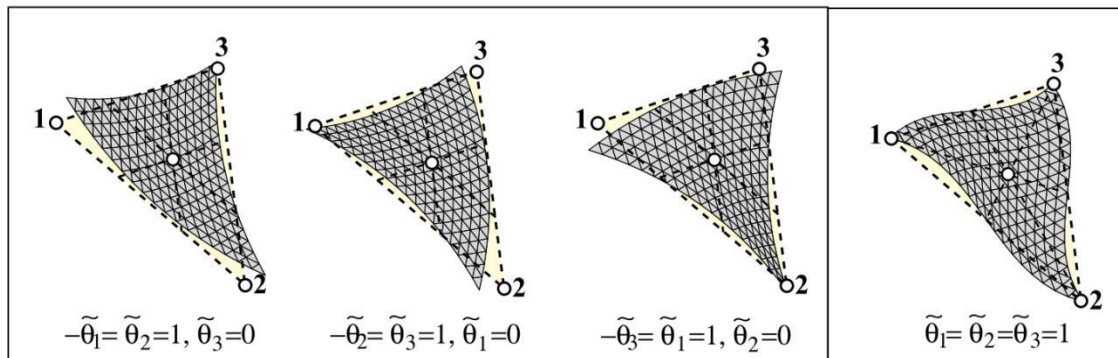


Figura 4-11. Patrones de rotación del elemento ANDES [FELIPPA, C.A., 2003].

Para relacionar las rotaciones jerárquicas con las deformaciones en los nodos en coordenadas naturales se utilizan las siguientes matrices, que dependen de 9 parámetros no dimensionales:

$$[Q_1] = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ l_{21}^2 & l_{21}^2 & l_{21}^2 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ l_{32}^2 & l_{32}^2 & l_{32}^2 \\ \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \\ l_{13}^2 & l_{13}^2 & l_{13}^2 \end{bmatrix} \quad [Q_2] = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \beta_9 & \beta_7 & \beta_8 \\ l_{21}^2 & l_{21}^2 & l_{21}^2 \\ \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \\ l_{32}^2 & l_{32}^2 & l_{32}^2 \\ \beta_6 & \beta_4 & \beta_5 \\ l_{13}^2 & l_{13}^2 & l_{13}^2 \end{bmatrix} \quad [Q_3] = \frac{2A}{3} \begin{bmatrix} \beta_5 & \beta_6 & \beta_4 \\ l_{21}^2 & l_{21}^2 & l_{21}^2 \\ \beta_8 & \beta_9 & \beta_7 \\ l_{32}^2 & l_{32}^2 & l_{32}^2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_1 \\ l_{13}^2 & l_{13}^2 & l_{13}^2 \end{bmatrix}$$

Donde $l_{ji}^2 = x_{ji}^2 + y_{ji}^2$

Evaluadas en los puntos medios:

$$Q_4 = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \quad Q_5 = \frac{1}{2} (Q_2 + Q_3) \quad Q_6 = \frac{1}{2} (Q_3 + Q_1)$$

Y finalmente integradas sobre el triángulo:

$$K_9 = h (Q_4^T E_{nat} Q_4 + Q_5^T E_{nat} Q_5 + Q_6^T E_{nat} Q_6)$$

La matriz queda definida en función de 9 parámetros libres β_i . Teniendo en cuenta el principio de la ortogonalidad de la energía en elementos de alto orden con variación de tensiones lineales, el valor $Q = Q_1 \alpha_1 + Q_2 \alpha_2 + Q_3 \alpha_3$ desaparece en el centroide $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$. Esto da la condición algebraica:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$



Trasladado a la matriz, queda $\beta_1 + \beta_5 + \beta_9 = \beta_2 + \beta_6 + \beta_7 = \beta_3 + \beta_4 + \beta_8 = 0$ e imponiendo la condición de simetría triangular:

$$\beta_7 = -\beta_1, \quad \beta_8 = -\beta_3, \quad \beta_9 = -\beta_2$$

La matriz E_{nat} relaciona tensiones y deformaciones en coordenadas naturales. Se define como:

$$E_{nat} = T_e^T E T_e$$

En donde la matriz T_e está relacionando las deformaciones naturales con las cartesianas, $e = T_e \epsilon$:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} y_{23}y_{13}l_{21}^2 & y_{31}y_{21}l_{32}^2 & y_{12}y_{32}l_{13}^2 \\ x_{23}x_{13}l_{21}^2 & x_{31}x_{21}l_{32}^2 & x_{12}x_{32}l_{13}^2 \\ (y_{23}x_{31} + x_{32}y_{13})l_{21}^2 & (y_{31}x_{12} + x_{13}y_{21})l_{32}^2 & (y_{12}x_{23} + x_{21}y_{32})l_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix}$$

La relación entre las rotaciones jerárquicas $\tilde{\theta}_i$ y las rotaciones nodales θ_i se obtiene sustrayendo la rotación media o rotación CST θ_0 :

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_0$$

Donde $i = 1, 2, 3$ es el índice del vértice y:

$$\theta_0 = \frac{1}{4A} (x_{23}u_{x1} + x_{31}u_{x2} + x_{12}u_{x3} + y_{23}u_{y1} + y_{31}u_{y2} + y_{12}u_{y3})$$

Resultando la siguiente transformación:

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} x_{32} & y_{32} & 4A & x_{13} & y_{13} & 0 & x_{21} & y_{21} & 0 \\ x_{32} & y_{32} & 0 & x_{13} & y_{13} & 4A & x_{21} & y_{21} & 0 \\ x_{32} & y_{32} & 0 & x_{13} & y_{13} & 0 & x_{21} & y_{21} & 4A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y1} \\ \theta_2 \\ u_{x3} \\ u_{y1} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \tilde{T}_{\theta u} u_R$$

El excelente comportamiento numérico de este tipo de elemento finito de cáscara y la precisión de las respuestas con éste obtenidas queda acreditado en [FELIPPA, C.A., 2003].





5 LA DEFINICIÓN DE LA ARMADURA ACTIVA

El último bloque teórico tenido en cuenta en el presente trabajo y, por tanto, cuya exposición resulta necesaria para la comprensión global del modelo de análisis propuesto, es el correspondiente a la determinación o cálculo de la armadura activa.

Más allá de los procedimientos propios de cálculo de este tipo de refuerzo, procedimientos que se detallan en los apartados inmediatamente posteriores, conviene destacar previamente la circunstancia de que la armadura activa se calcula básicamente en condiciones de servicio. De hecho, la armadura así obtenida no se modifica en el análisis de condiciones de sollicitación más exigentes: si esta armadura no resulta suficiente, como se verá en el capítulo posterior, se dispone un refuerzo adicional de armaduras pasivas. Y es precisamente la cantidad de refuerzo pasivo la que se pretende discutir, luego, mediante un análisis no lineal.

5.1 La fuerza de tesado

Uno de los primeros aspectos a tener en cuenta es la evolución en el tiempo de la fuerza de tesado suministrada a la losa, más allá de los principios básicos antes expuestos. De entrada, el procedimiento general es bastante elemental: se estira la armadura con un gato hidráulico y, cuando se ha alcanzado la fuerza de tesado deseada, P_0 , se bloquean las cuñas descritas en el capítulo tercero para que la fuerza quede transferida de forma permanente a la losa y, entonces, se retira el gato.

Una de las dificultades analíticas pasa por el hecho de que la fuerza suministrada, P_0 , presenta pérdidas tanto de forma instantánea como de forma diferida, por las razones que se exponen enseguida.

5.1.1 Pérdidas instantáneas

Las pérdidas instantáneas hacen que el valor de tesado suministrado por el gato, P_0 , presente un valor menor en la losa desde el mismo momento en el que se bloquean las cuñas, valor que queda referido en este trabajo como P_1 , fruto de la propia variación de la fuerza de tesado:

$$P_1 = P_0 - \Delta P_0$$

Los motivos de la variación de P_0 son los siguientes:

5.1.1.1 Pérdidas por rozamiento

Cuando se estiran los cables con el gato desde la cabeza activa, éstos rozan a lo largo de su recorrido con la vaina que los envuelve, lo que origina pérdidas por rozamiento, tanto en los tramos rectos como, de forma incrementada, en los tramos curvos, en donde la armadura presenta un mayor apalancamiento.



La variación de P_0 a lo largo del eje del problema por razón del rozamiento responde a la siguiente expresión:

$$\Delta P_0(x) = P_0 \cdot (1 - e^{-(\mu\alpha + Kx)})$$

Donde,

- μ es el coeficiente de rozamiento entre la armadura activa y la vaina en curva
- K es el coeficiente de rozamiento entre la armadura activa y la vaina en recta
- α es la variación angular de la armadura activa en el tramo analizado
- x es la longitud de armadura activa en el tramo analizado

Las pérdidas por rozamiento, especialmente las vinculadas a la curvatura suponen una fuerte limitación en la técnica del postesado, que obliga a veces que las operaciones de tesado se tengan que hacer desde ambos extremos de la armadura activa y, en otras ocasiones, sencillamente hace que un problema no sea viable por la cantidad de fricción asociada a un determinado trazado de armadura activa.

5.1.1.2 Pérdidas por penetración de cuñas

Cuando se bloquean las cuñas o mordazas y se libera la tensión del gato, éstas presentan una leve penetración, del orden de 5 mm, dentro de la placa de anclaje. Dicha penetración permite que la armadura activa se relaje someramente, al acortarse, lo que equivale, por tanto, a una nueva pérdida de carga.

La variación P_0 a lo largo del eje del problema por este efecto responde a la siguiente expresión:

$$\Delta P_0(x) = 2 \cdot P_0 \cdot (1 - e^{-(\mu\alpha + K \cdot (l_a - x))})$$

Siendo l_a la distancia, contada desde la cabeza activa, a partir de la cual las pérdidas por penetración de cuñas resultan irrelevantes por acción del mismo rozamiento; en este caso, el rozamiento tiene un efecto beneficioso, al amortiguar esta pérdida de forma simétrica a la que amortigua la fuerza de tesado cuando el gato estira la armadura.

La longitud l_a se calcula con la siguiente fórmula:

$$l_a = \frac{\alpha \cdot E_p \cdot A_p}{2 \cdot \left(P_0 - P_0 \cdot e^{-\mu \left(\alpha + \frac{k}{\mu} \cdot l_a \right)} \right)}$$

Donde,

- α es la profundidad de penetración de las cuñas
- E_p es el módulo de elasticidad longitudinal de la armadura activa
- A_p es el área o sección transversal de la armadura activa



5.1.1.3 Pérdidas por acortamiento elástico del hormigón

El último fenómeno que explica que se produzcan pérdidas de forma instantánea es el acortamiento del hormigón derivado de su entrada en carga: al quedar en compresión se contrae mínimamente, y esta contracción permite un nuevo acortamiento de la armadura y su consecuente relajación.

La variación de P_0 por este efecto resulta en cada sección la siguiente:

$$\Delta P_0 = \sigma_{cp} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{A_p \cdot E_p}{E_{cj}}$$

Donde,

- σ_{cp} es la tensión de compresión a nivel del centro de gravedad de las armaduras activas en el instante posterior al bloque de las cuñas
- n es el número de tendones de la banda o unidad de tesado
- E_{cj} es el módulo de elasticidad longitudinal del hormigón en el instante de tesado j

5.1.2 Pérdidas diferidas

Una vez se ha estabilizado el valor de la fuerza suministrada por el gato, P_0 , en la fuerza P_1 de forma prácticamente instantánea, empieza un proceso mucho más gradual de reducción de la fuerza de tesado hasta que ésta alcanza un valor, referido aquí como P_2 , que se puede considerar ya definitivo o permanente, y partir del cual se analizan las condiciones de servicio de la estructura.

Esta nueva reducción parte, pues, del remanente de la fuerza de tesado tras las pérdidas instantáneas, por lo que el cálculo de la fuerza P_2 se formula genéricamente de la siguiente forma:

$$P_2 = P_1 - \Delta P_1$$

Este último tránsito de la fuerza de tesado se explica a partir de los siguientes bien conocidos fenómenos físicos:

- La fluencia o acortamiento diferido del hormigón en régimen de compresión constante o cuasi constante
- Una inherente relajación del acero que constituye las armaduras activas, la cual se constata con el paso del tiempo
- La retracción hidráulica o acortamiento del hormigón por su propia naturaleza físico-química.



La variación de P_1 a causa de los tres fenómenos descritos, se calcula de una sola vez, según la instrucción de referencia del presente trabajo a estos efectos, EHE-08, en base a la siguiente expresión:

$$\Delta P_1 = \frac{n\varphi(t, t_0)\sigma_{cp} + E_p \cdot \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \chi \cdot \Delta\sigma_{pr} \cdot A_p}{1 + \frac{E_p}{E_{cj}} \cdot \frac{A_p}{A_{c,i}} \left(1 + \frac{A_{c,i} \cdot e_i^2}{I_{c,i}} \right)} \cdot A_p$$

Donde,

$\varphi(t, t_0)$ es el coeficiente de fluencia del hormigón a largo plazo contado desde el día de tesado t_0

$\varepsilon_{cs}(t, t_0)$ es el coeficiente de retracción del hormigón a largo plazo a partir del día de tesado t_0

$\Delta\sigma_{pr}$ es la pérdida de tensión de la armadura activa a longitud constante por relajación

χ es el coeficiente de envejecimiento del hormigón

En la imagen posterior se ilustra el comportamiento típico de la evolución de la fuerza de tesado, P , tanto por efecto de las pérdidas instantáneas como por efecto de las pérdidas diferidas, en un problema de una viga biempotrada de un solo vano.

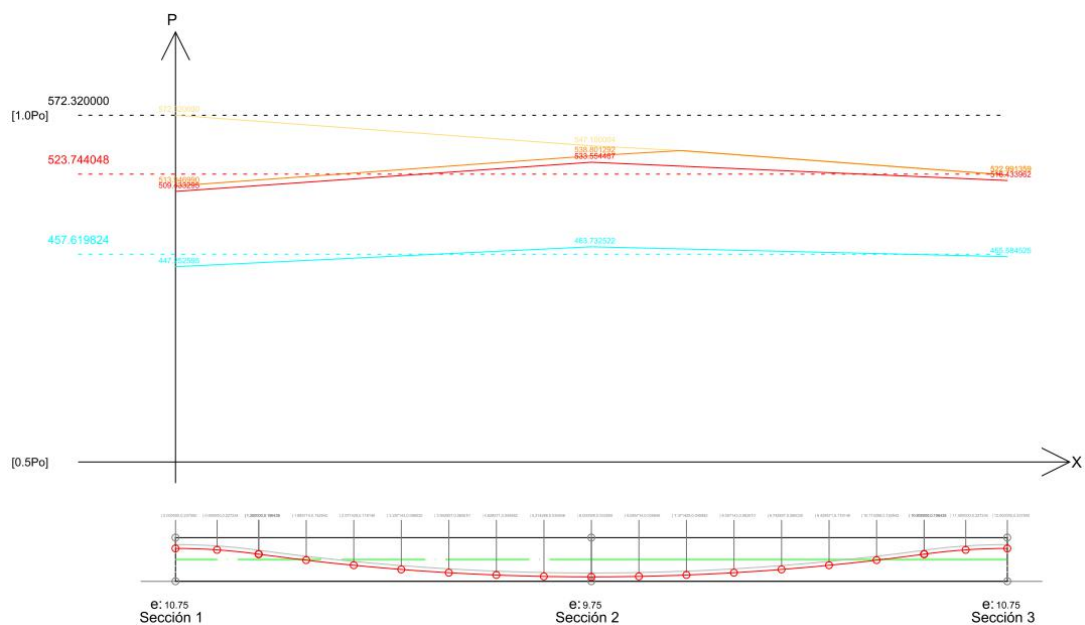


Figura 5-1. Ejemplo de la evolución de la fuerza de tesado por efecto de las pérdidas inherentes a la tecnología

En el ejemplo anterior la fuerza de tesado (P_0) se suministra en el apoyo izquierdo (Sección 1). Los códigos de color, también utilizados en adelante de la misma forma en el análisis de la evolución de la fuerza de tesado, responden al siguiente significado:

- **Línea amarilla:** variación de la fuerza de tesado a lo largo del eje x descontando las pérdidas por rozamiento
- **Línea naranja:** variación de la fuerza de tesado a lo largo del eje x tras el bloqueo de las cuñas
- **Línea roja:** variación de la fuerza de tesado a lo largo del eje x habiendo incluido el efecto del acortamiento elástico del hormigón ($P_{1,i}$)
- **Línea azul:** variación de la fuerza de tesado final a lo largo del eje x una vez descontadas todas las pérdidas diferidas ($P_{2,i}$)

Las líneas discontinuas indican lo siguiente:

- **Línea discontinua negra:** fuerza de tesado (P_0)
- **Línea discontinua roja:** fuerza de tesado media habiendo descontado el conjunto de las pérdidas instantáneas (P_1)
- **Línea azul:** fuerza de tesado media habiendo descontado el conjunto de las pérdida instantáneas y de las diferidas (P_2)

Resulta interesante comentar que, para controlar que no se hayan producido anomalías durante el proceso de tesado en la obra, se compara el alargamiento real de la armadura activa, medido por los gatos hidráulicos que la estiran, con el alargamiento teórico descontado las pérdidas de rozamiento, el cual responde a la siguiente expresión:

$$\Delta l = \frac{\int_0^l P_0 - P_0 \cdot (1 - e^{-(\mu \alpha + Kx)}) dx}{E \cdot A_p}$$

En cuanto a todo lo referente a las pérdidas de la carga de tesado, quizás lo más interesante a los efectos del presente documento es el hecho de que, en condiciones normales de servicio, la armadura activa presenta, en consecuencia, un estado relativamente alejado o progresivamente alejado de su situación límite, gracias a la relajación propiciada por las diferentes pérdidas, las cuales, en términos generales, suelen implicar una reducción de fuerza del orden del 30%. Esta circunstancia define un margen razonable para poder considerar un nuevo o posterior estiramiento de la armadura activa por cualquier otro efecto.

5.2 Cálculo de la sección de armadura

Teniendo en cuenta, pues, la evolución de la carga en las armaduras activas, la situación crítica para estas armaduras se corresponde, de entrada, con el instante de su tesado, en el sentido de que se trata del momento en el que se produce la mayor sollicitación de la armadura en cuestión. Más concretamente, debido a la propia evolución y distribución de las pérdidas, la máxima sollicitación se da junto a las cabezas activas, donde no hay reducciones relevantes del tesado, siquiera por rozamiento.

Es por lo anterior que la cantidad de armadura activa o, lo que es equivalente, su sección transversal debe ser tal que la tensión en el instante de tesado sea suficientemente segura, condición general, que acostumbra a ser determinante en la definición de la propia armadura activa.

Así pues, según la instrucción EHE-08, la armadura debe trabajar en el instante de tesado como máximo al 75% de su tensión de rotura y sin superar una tensión igual al 90% del límite elástico, de tal forma que la sección transversal de la armadura activa, A_p , ha de satisfacer las dos siguientes condiciones:

$$A_p \geq \frac{P_0}{0,75 \cdot f_{uk}}; \quad A_p \geq \frac{P_0}{0,90 \cdot f_{pk}}$$

Donde,

f_{uk} tensión de rotura de la armadura activa

f_{pk} límite elástico de la armadura activa

5.3 Fuerzas equivalentes

Como ha sido comentado en apartados anteriores, una de las funciones principales de la armadura activa es la de introducir las fuerzas de tesado en el forjado, compresiones y acciones perpendiculares a la placa (provocadas por las curvaturas de los cables), compensando los momentos flectores provocados por acción de las cargas gravitatorias, según se pretende ejemplificar en los dos siguientes esquemas para el caso de una placa o viga de dos vanos, con pilares en los extremos y un pilar central.

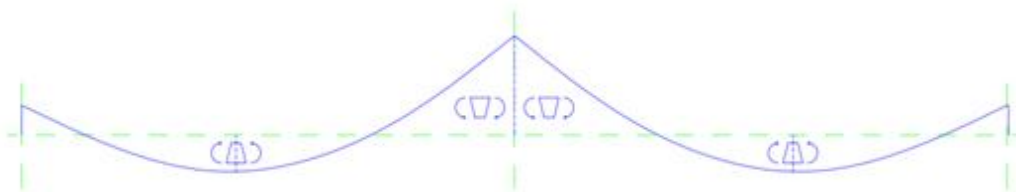


Figura 5-2. Evolución cualitativa de los momentos flectores en una placa o viga de dos vanos sobre tres pilares bajo la acción de las cargas gravitatorias

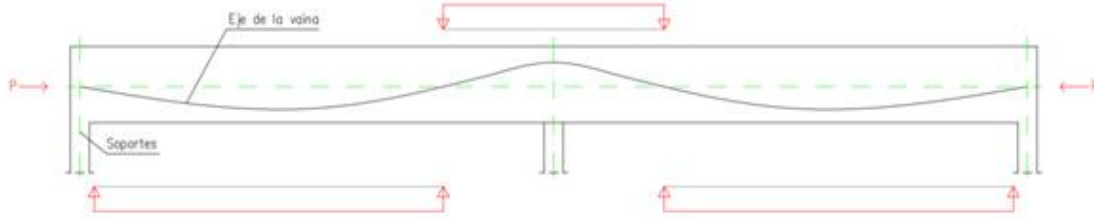


Figura 5-3. Acciones equivalentes de la armadura activa en la misma placa para compensar los efectos de las acciones gravitatorias

En el caso de las losas postesadas, normalmente con cantos especialmente reducidos con respecto a las distancias entre soportes, las acciones provocadas por las curvaturas se pueden considerar perfectamente perpendiculares al plano medio de la losa.

En condiciones servicio, cuando la fuerza de tesado ha descendido hasta el valor de P_2 , la acción perpendicular equivalente de la armadura activa en un determinado tramo curvo i , $q_{k,i}$, responde a la carga axial de la propia armadura en ese tramo dividida por su radio de curvatura:

$$q_{k,i} = \frac{P_2}{r_i}; \text{ con } r_i = \frac{1}{Y(x)_i}''$$

Por tanto, si la curvatura de la armadura activa no fuese constante en un determinado tramo, la acción equivalente pasaría a ser una función de la distancia: $q_{k,i}(x)$. Si bien es cierto que, mayoritariamente, las curvas suelen ser concebidas como la agregación de diferentes funciones polinómicas de segundo grado (parábolas), tangentes entre ellas, las cuales definen curvaturas y cargas equivalentes constantes. Las cargas equivalentes constantes provocan, además, unos efectos correctores más proporcionados a las propias cargas gravitatorias, normalmente uniformemente distribuidas, según se pretende ilustrar con más detalle en la siguiente imagen.

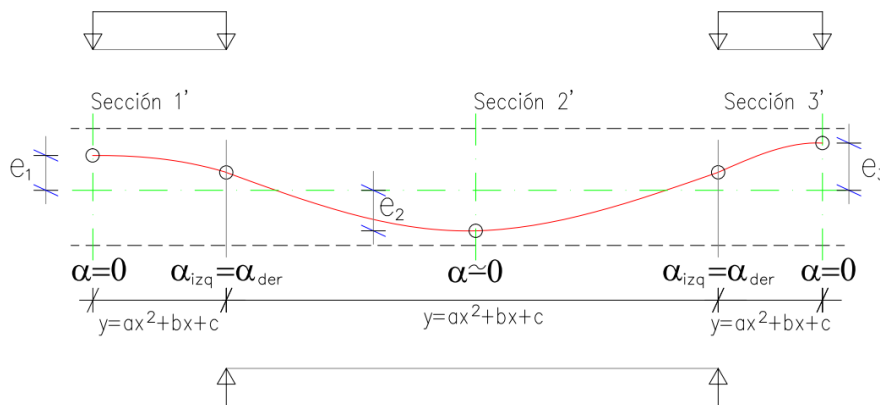


Figura 5-4. Acciones de placa propiciadas por una armadura activa formada por tres curvas parabólicas sobre un vano cualesquiera de un forjado

5.4 El trazado de la armadura activa

La armadura activa, como cualquier otra armadura en un problema de flexión de un elemento de hormigón, juega también un papel directo en el equilibrio de los momentos flectores en aquellas secciones transversales en las que queda en la parte en tracción (por encima o por debajo de la fibra neutra según corresponda), pero en su caso, también en buena medida, mediante la carga de tesado.

En ese sentido, conviene que la armadura activa quede lo más alejada posible del centro de gravedad, para maximizar los efectos equilibradores de su propia tracción.

Por tanto, el trazado de la armadura activa responde a dos claves generales:

- La primera, presentar curvaturas adecuadas para que las acciones equivalentes de placa sean lo más efectivas posible teniendo en cuenta, típicamente, la forma de las cargas gravitatorias.
- La segunda, presentar excentricidades adecuadas en las secciones críticas para equilibrar los momentos flectores, quedando situadas éstas normalmente sobre los soportes y en las zonas centrales de los vanos.

La consideración de las dos claves o condiciones anteriores propicia que sean varios los trazados que se pueden llegar a tener en cuenta en la práctica profesional, en función de la forma de las cargas gravitatorias y en base a las propias condiciones de apoyo de los elementos postesados. En los croquis adjuntos se representan algunos de los trazados más comunes.

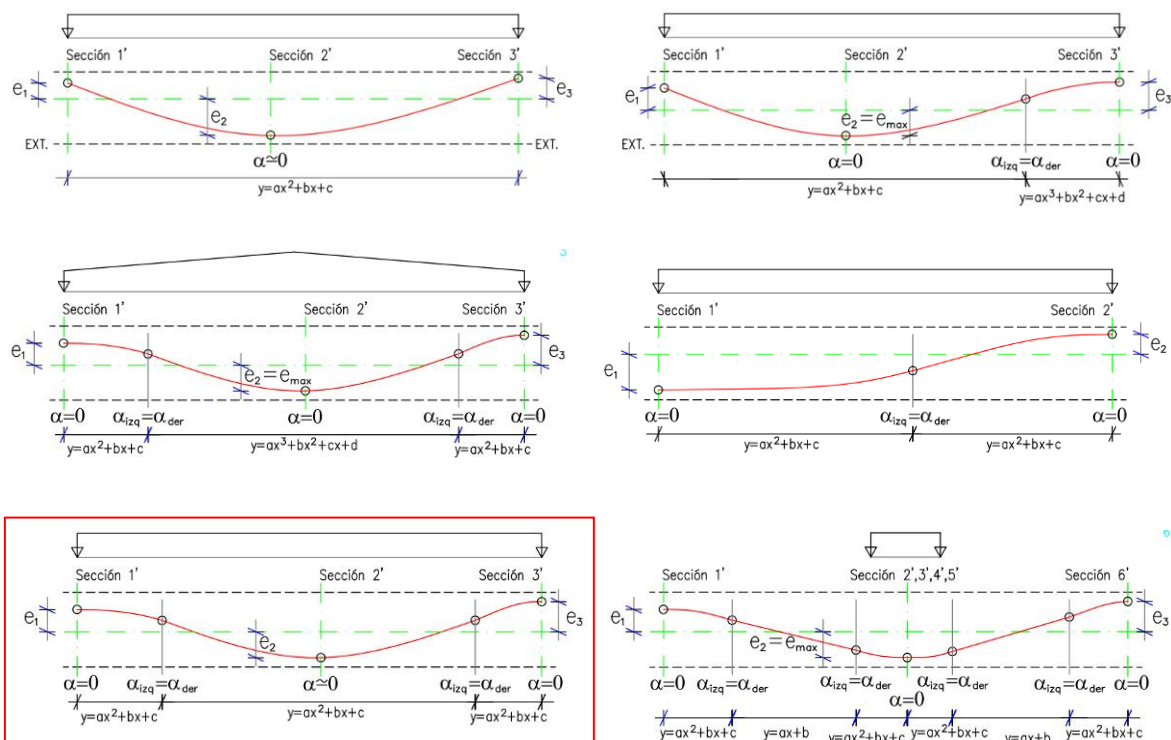


Figura 5-5. Trazados típicos de armadura activa en vanos interiores

Sea como fuere, queda enmarcado en rojo el trazado considerado siempre en este trabajo, ya que, como se verá, todos los ejemplos estudiados hacen referencia a vanos centrales sometidos a cargas gravitatorias uniformes.

Es importante señalar también que en cada sección crítica la excentricidad de la armadura presenta un valor máximo constructivo, referido en este trabajo como $e_{m\acute{a}x}$, para preservar los preceptivos recubrimientos. La satisfacción de los recubrimientos implica que la armadura activa quede siempre en posiciones más interiores que los refuerzos pasivos, en las zonas en las que éstos resultan necesarios. Esta organización geométrica de las armaduras en sección o, si se quiere, en altura resulta determinante a la hora de comprender el comportamiento de los diferentes tipos de armadura a medida que las solicitaciones se hacen mayores, según se detalla en el capítulo octavo.

Asimismo, se debe considerar una excentricidad mínima, $e_{m\acute{i}n}$, excentricidad que normalmente podrá llegar a ser nula, si interesa y si no se dan otros requerimientos especiales externos al problema de turno.



5.5 Condiciones generales en vacío y en servicio

La fuerza de tesado de la armadura activa se suele calcular para que, en las condiciones de servicio, las tracciones del hormigón en la fibra más extrema de la sección sean menores que las que acepta el propio hormigón, f_{ct} , buscando una fisuración nula o reducida, fisuración que, posteriormente, se comprueba con mayor detalle.

Teniendo en cuenta la evolución de la carga de tesado las condiciones de servicio se verifican, pues, con el valor P_2 .

Previamente, se da una situación también crítica para las secciones de hormigón cuando se introduce la carga de tesado; en este instante la única carga gravitatoria real suele ser el peso propio y la fuerza de tesado ha quedado dimensionada para compensar una carga normalmente bastante mayor. En esta situación, conocida como situación de vacío, las tensiones pésimas suelen quedar localizadas en las fibras contrarias a las desfavorables en condiciones de servicio, lo que obliga también a un estudio particularizado del elemento postesado, una vez bloqueadas las cuñas, en base a P_1 .

En la situación de vacío se demanda de nuevo que las tracciones del hormigón sean menores que f_{ct} , siendo incluso más exigentes, en las secciones críticas que quedan sobre los apoyos, donde es común incluso no aceptar tracción alguna, para evitar una inversión del signo del momento flector allá donde el cortante o el punzonamiento resulta pésimo.

Las tensiones en compresión quedan limitadas, tanto en vacío como en servicio, al 60% de la resistencia característica del hormigón (f_{ck}).

La situación de vacío, dado que define un escenario mínimo de carga gravitatoria, limita normalmente el valor máximo de la fuerza de tesado, mientras que la situación de servicio, donde ya actúan la totalidad de las cargas gravitatorias, define un valor mínimo de la fuerza de tesado.

Dado que, en ambas situaciones, la de vacío y la de servicio, no hay apenas fisuración y las tensiones de compresión no son todavía elevadas, es aceptado comprobar las tensiones de una sección postesada en dichas situaciones suponiendo un comportamiento lineal del hormigón, según se expone en la siguiente figura.

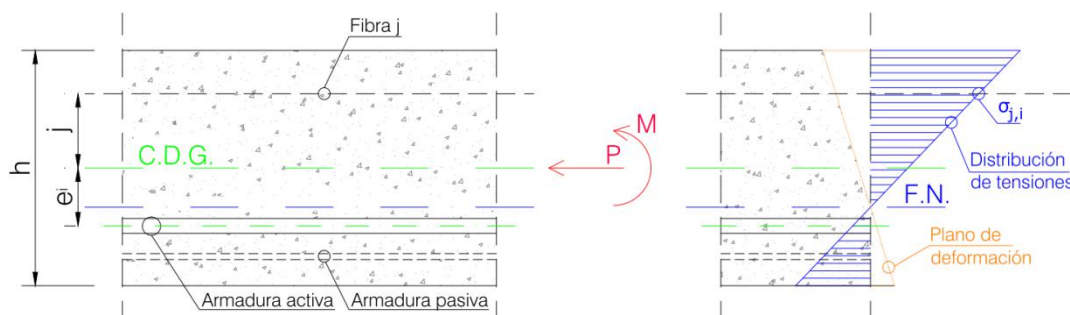


Figura 5-6. Representación de la respuesta tensil de una sección postesada en servicio

Aceptado lo expuesto hasta aquí y tomando los coeficientes de combinación establecidos por la instrucción EHE-08, la verificación de las tensiones responde a las siguientes expresiones:

$$\text{En vacío:} \quad \sigma_{j,i} = -0,9 \frac{P_{1,i}}{A_i} + \frac{\pm M_{1,i} \pm 0,9 \cdot P_{1,i} \cdot e_i}{I_i} \cdot y_{j,i}$$

$$\text{En servicio:} \quad \sigma_{j,i} = -0,9 \frac{P_{2,i}}{A_i} + \frac{\pm M_{k,i} \pm 0,9 \cdot P_{2,i} \cdot e_i}{I_i} \cdot y_{j,i}$$

Donde:

A_i es el área de la sección i

I_i es la inercia de la sección i

$P_{1,i}$ es la fuerza de tesado después de pérdidas instantáneas actuante en la sección i

$P_{2,i}$ es la fuerza de tesado después de pérdidas diferidas actuante en la sección i

$M_{1,i}$ es el momento flector actuante en la sección i en el instante de tesado

$M_{k,i}$ es el momento flector de servicio actuante en la sección i

$y_{j,i}$ es la profundidad de la fibra j de la sección i en la que se evalúa la sección

5.5.1 Fuerza de tesado necesaria

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en la situación de vacío se pueda calcular la fuerza máxima de tesado, $P_{0,\max}$, que admite una sección:

- Por exceso de tracción:

$$P_{0,\max} = \frac{A_i \cdot I_i \cdot f_{ct} \pm A_i \cdot M_{1,i} \cdot y_{j,i}}{-1,1 \cdot (I - A_i \cdot e_{\min,i} \cdot y_{j,i})} \cdot \frac{1}{1 - CP_{ins,i}} \quad \text{con } f_{ct}=0,0, \text{ si } M_{1,i}<0$$

- Por exceso de compresión:

$$P_{0,\max} = \frac{-A_i \cdot I_i \cdot 0,60 f_{ck} \pm A_i \cdot M_{1,i} \cdot y_{j,i}}{-1,1 \cdot (I + A_i \cdot e_{\min,i} \cdot y_{j,i})} \cdot \frac{1}{1 - CP_{ins,i}}$$

$CP_{ins,i}$ es el coeficiente de pérdidas instantáneas en la sección i ; coeficiente que se define genéricamente de la siguiente forma:

$$CP_{ins,i} = \frac{P_0 - P_{1,i}}{P_0}$$



Mientras que el cálculo de la fuerza mínima de tesado $P_{0,\min}$ que admite una sección se calcula a partir de las condiciones de servicio en base a las siguientes expresiones:

- Por exceso de compresión:

$$P_{0,\min} = \frac{-A_i \cdot I_i \cdot 0,60 \cdot f_{ck} \pm A_i \cdot M_{k,i} \cdot y_{j,i}}{-0,9 \cdot (I_i - A_i \cdot e_{\max,i} \cdot y_{j,i})} \cdot \frac{1}{1 - CP_{ins,i}} \cdot \frac{1}{1 - CP_{dif,i}}$$

- Por exceso de tracción:

$$P_{0,\min} = \frac{+A_i \cdot I_i \cdot f_{ct} \pm A_i \cdot M_{k,i} \cdot y_{j,i}}{-0,9 \cdot (I_i + A_i \cdot e_{\max,i} \cdot y_{j,i})} \cdot \frac{1}{1 - CP_{ins,i}} \cdot \frac{1}{1 - CP_{dif,i}} \quad \text{con } f_{ct}=0.0 \text{ si } M_{k,i}<0$$

Siendo $CP_{dif,i}$ el coeficiente de pérdidas diferidas en la sección i ; coeficiente que se define genéricamente de la siguiente forma:

$$CP_{dif,i} = \frac{P_{1,i} - P_{2,i}}{P_{1,i}}$$

En un trazado general el valor máximo de la fuerza de tesado será el menor de los máximos obtenidos en el conjunto de secciones críticas, mientras que el valor mínimo general de la fuerza de tesado será el mayor de los mínimos obtenidos en el conjunto de secciones críticas.

Las fuerzas mínimas y máximas de tesado de un determinado problema son, pues, valores independientes que pueden responder a necesidades mecánicas de secciones diferentes.

Cualquier valor de la fuerza de tesado comprendido entre la fuerza mínima y la fuerza máxima supone, de entrada, una respuesta correcta o, cuando menos, aceptable en un problema determinado, aunque se suele coger el valor mayor, o uno cercano al mayor, en aras a conseguir la mayor acción correctora admisible.

Si, en otro caso, la fuerza mínima resulta mayor que la máxima, deben revisarse las condiciones generales de diseño del problema.

5.5.2 Excentricidad final de la armadura activa

Una vez calculada la fuerza general de tesado en un determinado problema, deben revisarse las excentricidades en cada sección, ya que dicha fuerza general de tesado puede responder, según se ha comentado, a las necesidades precisas de un par de secciones en concreto, sino de una.

En consecuencia, en cada sección se revisará cuáles son las excentricidades compatibles con dicha fuerza, lo que se suele hacer en base a los criterios que se exponen seguidamente.



La excentricidad máxima en una determinada sección por razones mecánicas, $e_{1,i}$, se obtiene, en vacío, como la menor de las dos siguientes:

$$e_{1,i} = \frac{A_i \cdot I_i \cdot f_{ct} \pm A_i \cdot M_{1,i} \cdot y_{j,i} + 1,1 \cdot I_i \cdot P_{1,i}}{1,1 \cdot (A_i \cdot P_{1,i} \cdot y_{j,i})} \quad \text{con } f_{ct}=0.0 \text{ si, } M_{1,i} < 0$$

$$e_{1,i} = \frac{-A_i \cdot I_i \cdot 0,60 f_{ck} \pm A_i \cdot M_{1,i} \cdot y_{j,i} + 1,1 \cdot I_i \cdot P_{1,i}}{-1,1 \cdot (A_i \cdot P_{1,i} \cdot y_{j,i})}$$

La excentricidad mínima en una determinada sección por razones mecánicas, $e_{2,i}$, se obtiene, en servicio, como la mayor de las dos siguientes:

$$e_{2,i} = \frac{-A_i \cdot I_i \cdot 0,60 f_{ck} \pm A_i \cdot M_{k,i} \cdot y_{j,i} + 0,9 \cdot I_i \cdot P_{2,i}}{0,9 \cdot (A_i \cdot P_{2,i} \cdot y_{j,i})}$$

$$e_{2,i} = \frac{+A_i \cdot I_i \cdot f_{ct} \pm A_i \cdot M_{k,i} \cdot y_{j,i} + 0,9 \cdot I_i \cdot P_{2,i}}{-0,9 \cdot (A_i \cdot P_{2,i} \cdot y_{j,i})} \quad \text{con } f_{ct}=0.0, \text{ si } M_{k,i} < 0$$

La excentricidad final de la armadura activa en una sección crítica será, pues, mayor a $e_{2,i}$ y e_{\min} , y menor $e_{1,i}$ y e_{\max} . Si ello no fuese posible, deben revisarse las condiciones generales de diseño del problema.



5.6 La incidencia de la hiperestaticidad de la estructura

Cuando el elemento estructural que debe ser postesado es hiperestático, lo cual suele suceder en la mayoría de casos y sucede, particularmente, en el caso de las losas postesadas con prácticamente toda generalidad, los efectos correctores de las acciones equivalentes de tesado, tanto los de las acciones de placa como, en algunos casos, los de las acciones de membrana, quedan amortiguados al quedar parcialmente equilibrados por partes externas al propio elemento tesado.

En el ejemplo siguiente, correspondiente a una viga de un vano se pretende ejemplificar la amortiguación de la flexión propiciada por la acción equivalente ascendente, al considerar un empotramiento en el soporte izquierdo, empotramiento que bien podría simular una condición de continuidad o de simetría.

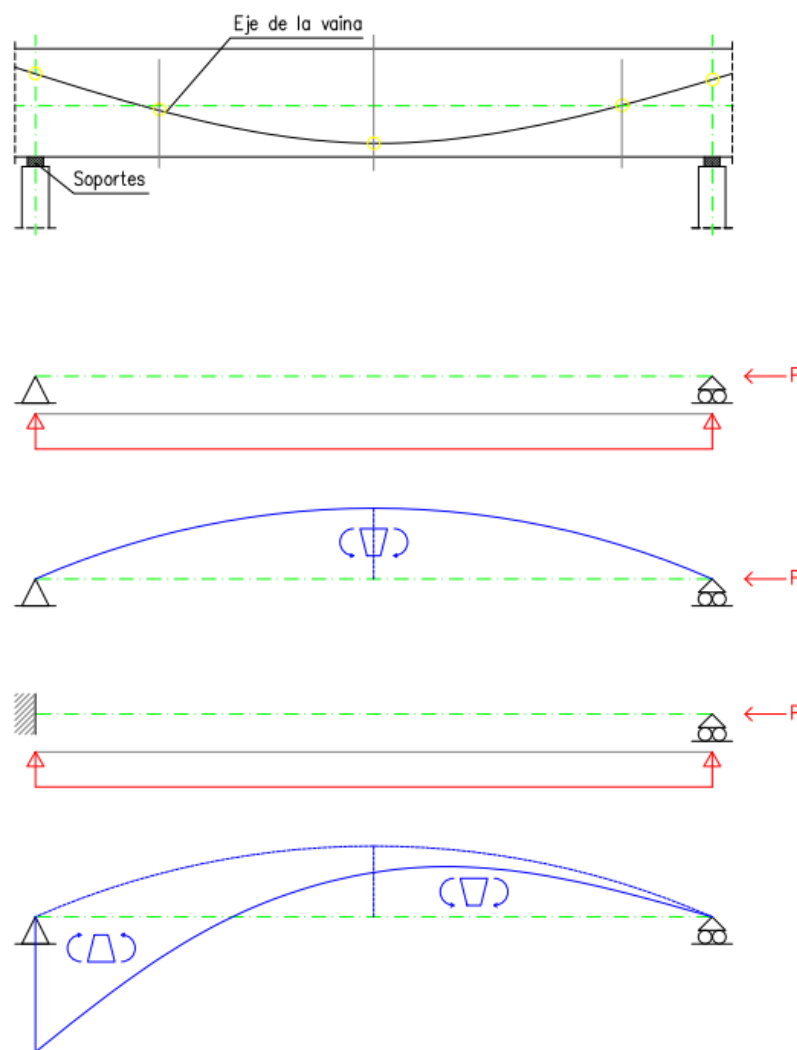


Figura 5-7. Variación de los efectos correctores del postesado en una viga bi-apoyada de un vano al empotrar el nodo izquierdo

En modelos isostáticos, para un determinado valor de la fuerza de tesado actuante, P , los esfuerzos por acción de la misma fuerza de tesado en cualquier sección, en la que se considera una excentricidad de la armadura activa, e , responden a los siguientes valores:

- *Esfuerzo axial:* P
- *Momento flector:* $P \cdot e$

Los esfuerzos así calculados son los denominados esfuerzos isostáticos y su eventual diferencia con los esfuerzos calculados por acción del tesado en la estructura real viene dada, pues, por el hiperestatismo.

Así, se entiende por esfuerzo hiperestático la diferencia entre el esfuerzo isostático y el esfuerzo que se obtiene en el elemento estructural tesado, por acción del propio tesado, considerando las correctas condiciones de contorno.

Esta circunstancia complica un poco más el cálculo de la fuerza de tesado, aunque afortunadamente, si se acepta un trazado de armadura como fijo, los efectos hiperestáticos resultan siempre proporcionales a la fuerza de tesado, lo que facilita en alguna medida el análisis general.



5.7 Algoritmos seguidos en el trabajo

En el presente trabajo se ha considerado la determinación de la armadura activa de los problemas analizados en dos etapas diferenciadas que se comentan seguidamente.

La primera etapa, denominada aquí de predimensionado, queda destinada a proponer un trazado fijo que permita establecer una correlación posterior fija con los esfuerzos hiperestáticos. En ella se sigue el siguiente algoritmo, cuyos pasos generales han sido explicados líneas arriba:

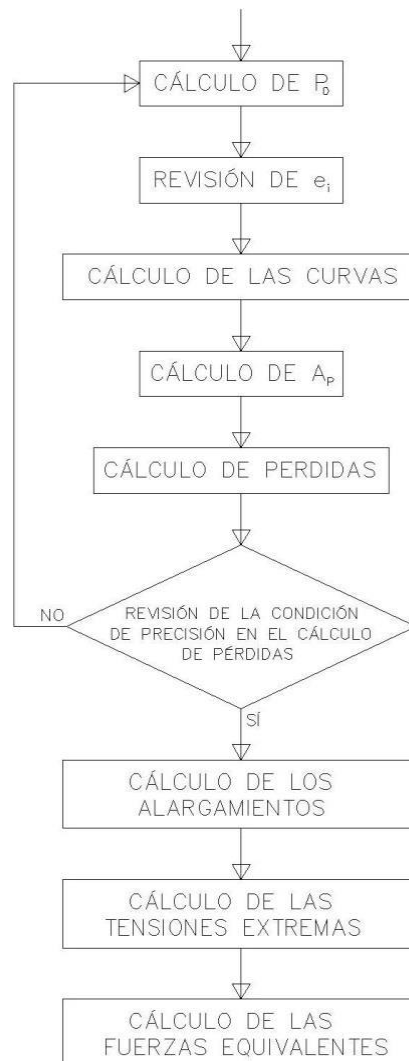


Figura 5-8. Proceso de predimensionado de elementos postesados

Como el cálculo preciso de las pérdidas depende del trazado (y de sus curvas) y de los esfuerzos actuantes, el cálculo es iterativo: no se encara la parte final del proceso hasta que las pérdidas obtenidas en una iteración son suficientemente parecidas a las obtenidas en la iteración previa y siempre que no se haya variado el trazado.

La segunda etapa, denominada aquí de dimensionado, queda destinada a incluir los efectos hiperestáticos que han permitido calibrar de forma previa las acciones equivalentes obtenidas en el paso anterior, siempre sin variar el trazado.

En esta etapa, solo se modifica, pues, el valor de la fuerza de tesado y del área de armadura activa necesaria. Es cierto que ello conlleva una nueva valoración de pérdidas, lo que inscribe el cálculo en un proceso doblemente iterativo que en este trabajo se resuelve en base al siguiente algoritmo:

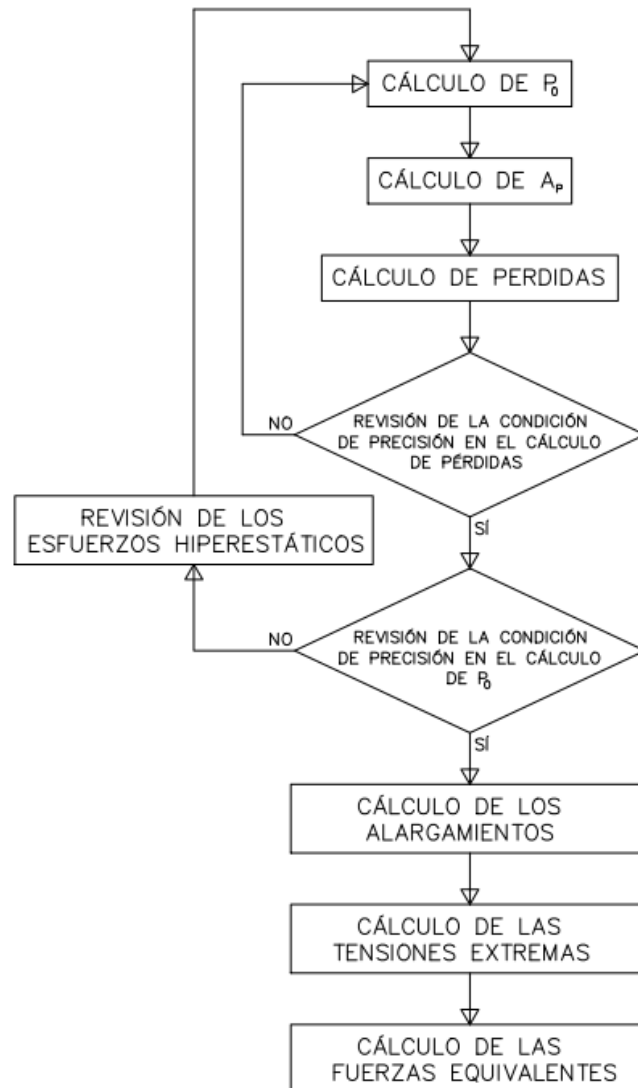


Figura 5-9. Proceso de dimensionado de elementos postesados.



6 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO Y POST-ELÁSTICO DE LAS SECCIONES CON ARMADURA POSTESA

El comportamiento de una sección de hormigón postesado va a quedar lógicamente condicionado por el propio comportamiento de cada uno de los tres materiales que la constituye: el hormigón, el acero de la armadura pasiva y el acero de la armadura activa.

En lo relativo a la mecánica de estos tres materiales se adoptan los modelos propuestos por la instrucción EHE-08, en base a lo comentado en la introducción. Estos modelos, reproducidos en cierta forma por instrucciones anteriores desde hace ya algún tiempo, resultan coherentes con los propuestos en los Eurocódigos y son equiparables a los utilizados en la mayor parte de códigos o países.

En base, pues, a la referida instrucción, se expone en los apartados siguientes de forma breve las bases de la mecánica aceptada para cada uno de los tres materiales.

6.1 Mecánica básica del hormigón

La curva característica compresión-deformación del hormigón es una curva acampanada que presenta un valor máximo que define la resistencia característica del hormigón, f_{ck} , según se puede reconocer en la Figura 6-1.

A los efectos del presente trabajo el aspecto más interesante de la curva característica es que, **para tensiones normales, σ , menores a $0,6 f_{ck}$** , parece razonable aceptar un comportamiento lineal del material, circunstancia que posibilita la forma de cálculo de la armadura activa expuesta en el capítulo quinto.

En el análisis de los estados límites últimos se ha adoptado el diagrama parábola rectángulo propuesto en el artículo 39 de la citada instrucción, EHE-08 (curva de cálculo). En consecuencia, la ecuación que define la tensión del hormigón, σ_c , asociada a una determinada deformación unitaria, ϵ_c , en el tramo parabólico responde a la siguiente expresión:

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}} \right)^2 \right]$$

Donde f_{cd} es la resistencia de cálculo del hormigón i ϵ_{c0} , la deformación correspondiente a la rotura por compresión simple que se iguala a 0,002.

La función anterior resulta válida para deformaciones unitarias comprendidas entre 0 i ϵ_{c0} . Por tanto, no se aceptan genéricamente deformaciones en tracción o, lo que es lo mismo, se prescinde de la colaboración del hormigón cuando este se mantiene en un régimen de tracción. En el tramo rectilíneo para deformaciones unitarias comprendidas entre ϵ_{c0} , y, la deformación de rotura por compresión en flexión, ϵ_{cu} , que se iguala 0,0035, la tensión, σ_c , resulta igual a la resistencia de cálculo f_{cd} .

El tramo rectilíneo acota, de entrada, el posible comportamiento plástico del hormigón, aunque, como se expondrá enseguida, esta forma de plasticidad no resulta tan relevante a la hora de abordar el análisis no lineal de una placa postesada.



La resistencia de cálculo f_{cd} responde a la minoración de la resistencia característica, f_{ck} , según el siguiente criterio:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Como coeficiente de minoración, γ_c , se ha adoptado un valor igual a 1,5, el cual se corresponde con el análisis de situaciones persistentes o transitorias en base a un control estadístico de la resistencia del hormigón, también en función de lo dispuesto en la instrucción EHE-08 en sus artículos 15° y 86°.

Las relaciones compresión-deformación comentadas resultan gráficamente de la siguiente forma:

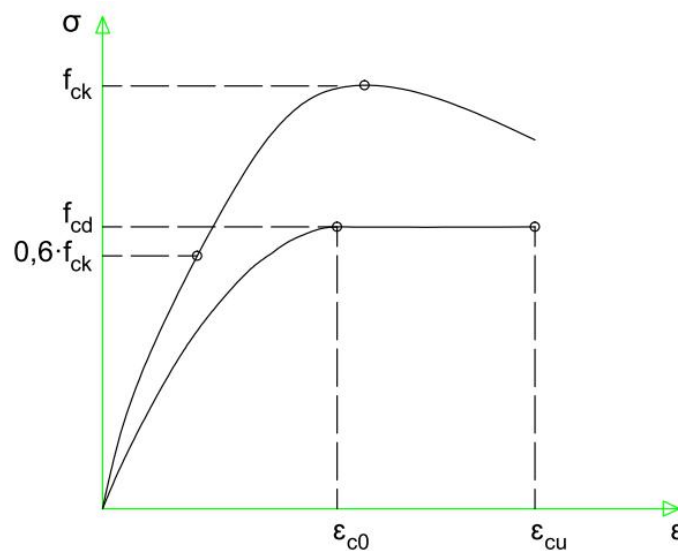


Figura 6-1. Diagrama tensión-deformación característico y de cálculo del hormigón estructural según la instrucción EHE-08

6.2 Mecánica básica del acero pasivo

El diagrama tensión-deformación elasto-plástico perfecto (bilineal) propuesto por la instrucción EHE-08 (Artículo 38), sin endurecimiento en el tramo plástico, parte de las siguientes limitaciones:

- La elongación unitaria máxima, ϵ_{max} , del acero constituyente de las armaduras pasivas queda limitada a 0,01.
- El acortamiento máximo unitario de la armadura queda limitado por el acortamiento máximo del hormigón ϵ_{cu} (0,0035)

La resistencia de cálculo f_{yd} responde a la minoración de la resistencia característica, f_{yk} , según el siguiente criterio:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

El coeficiente de minoración, γ_s , se ha tomado siempre igual a 1,15, bajo el supuesto de que el análisis se corresponde con el del análisis de situaciones persistentes o transitorias en base a lo dispuesto por la propia EHE (Artículo 15).

Se considera un módulo de elasticidad longitudinal $E=200.000 \text{ N/mm}^2$, para tensiones inferiores a f_{yd} . Al no considerarse el posible endurecimiento del acero, el módulo E resulta nulo cuando se alcanza una tensión igual a f_{yd} . Por tanto, se supone que adviene la plastificación perfecta del material cuando la tensión de cálculo del acero alcanza un valor igual a f_{yd} .

La relación tensión-deformación adoptada resulta gráficamente de la siguiente forma:

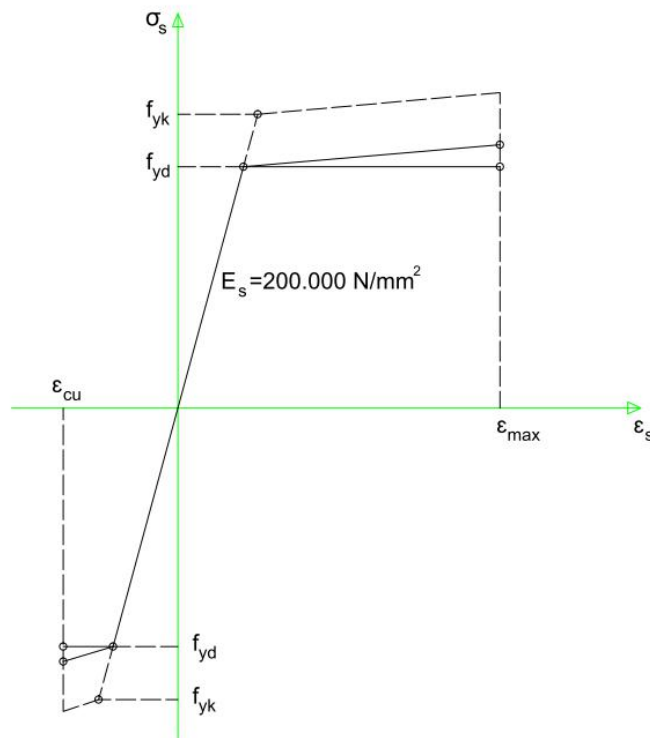


Figura 6-2. Diagrama tensión-deformación característico y de cálculo del acero de las armaduras pasivas

6.3 Mecánica básica del acero activo

El diagrama tensión-deformación propuesto por la instrucción EHE-08 parte de las siguientes consideraciones:

- La elongación unitaria característica, ϵ_p , máxima garantizada no puede ser inferior a 0,01.
- Para tensiones inferiores a $0,70 \cdot f_{pk}$, se toma un comportamiento lineal, mientras que para tensiones superiores se adopta la siguiente expresión:

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 0,823 \left(\frac{\sigma_p}{f_{pk}} - 0,7 \right)^5$$

La resistencia de cálculo f_{pd} responde a la minoración del límite elástico característico, f_{pk} , según el siguiente criterio:

$$f_{pd} = \frac{f_{pk}}{\gamma_s}$$

Nuevamente, el coeficiente de minoración, γ_s , se ha tomado siempre igual a 1,15, bajo el supuesto de que el análisis se corresponde con el del análisis de situaciones persistentes o transitorias (Artículo 15 de la EHE-08).

La relación tensión-deformación adoptada resulta gráficamente de la siguiente forma:

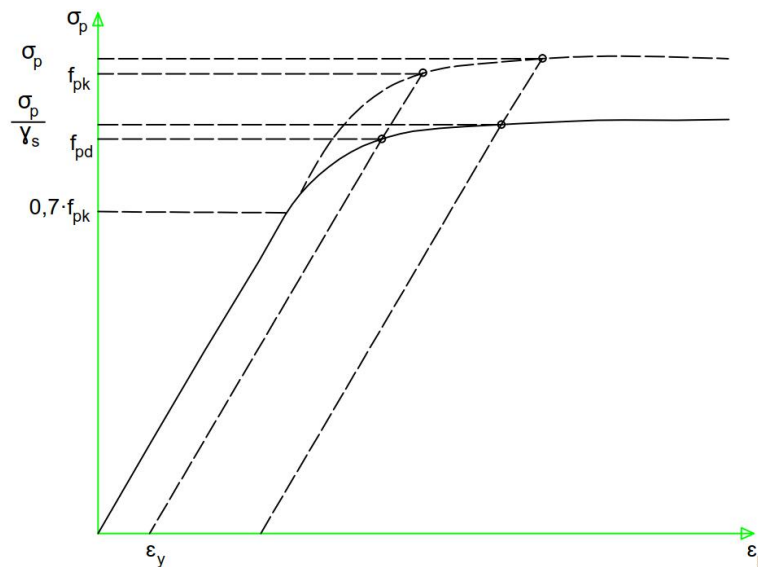


Figura 6-3. Diagrama tensión-deformación característico y de cálculo del acero de las armaduras activas

Nótese que la obtención de la elongación correspondiente a la tensión de cálculo o minorada, f_{pd} , se consigue mediante una afinidad oblicua, según prescribe la instrucción EHE-08. En relación a esta última consideración, la referencia de la **tensión** σ_p pretende explicar que la afinidad oblicua propuesta rige para cualquier tensión eventualmente superior a f_{pk} o f_{pd} , según se quiera. También se acepta suponer una plastificación perfecta a partir de f_{pd} , simplificación que no ha sido adoptada en el presente trabajo. La definición del límite elástico en el caso de las armaduras activas es un tanto atípica, al no darse una frontera clara de cambio de comportamiento en la mecánica del material. Según la instrucción de referencia, el límite elástico del acero constituyente de las armaduras activas se corresponde con la tensión que le provoca una deformación remanente ϵ_y del 0,2%¹.

A los efectos del presente trabajo, el aspecto más relevante de la mecánica del acero que conforma las armaduras activas es, como se entenderá en adelante, la forma curvilínea de la relación entre la tensión normal y la deformación unitaria cuando sus sollicitaciones empiezan a ser elevadas.

1 El valor consignado para la deformación remanente podrá ser revisado por la correspondiente norma europea armonizada

6.4 El conjunto postesado en flexo-compresión

Si se atiende al comportamiento mecánico elemental descrito para los tres tipos de material que componen una sección postesada, resulta destacable que dos de los materiales base, el hormigón y el acero constituyente de la armadura activa, presentan un comportamiento claramente no lineal. Además, los tres presentan una rama plástica, más o menos perfecta, que se hará necesariamente más relevante a medida que se vaya incrementando la flexión.

Por otra parte, una sección postesada presenta dos escalones de carga diferenciados: el primero, correspondiente al instante de tesado y, el segundo, **correspondiente a cualquier incremento del momento flector actuante, ΔM , por el normal aumento de la carga sobre la losa a lo largo de la vida de la construcción.**

Otra complejidad de la historia de carga de una sección postesada es la evolución del esfuerzo axial, propiciado por la fuerza de tesado, ya que, como se ha visto en el capítulo quinto, dicha fuerza va presentando con el paso del tiempo una relajación sustancial por diferentes efectos, siendo el valor inicial, una vez bloqueada la acción de tesado, P_1 , para acabar a largo plazo en P_2 , bajo los criterios expuestos con anterioridad.

En los croquis adjuntos se pretende ilustrar los dos escalones de carga básicos en los que se puede resumir de forma simplificada la historia de carga de una sección postesada, en la que las cargas gravitatorias movilizan un momento M_d positivo (tracción inferior) que se pretende corregir por efecto del postesado.

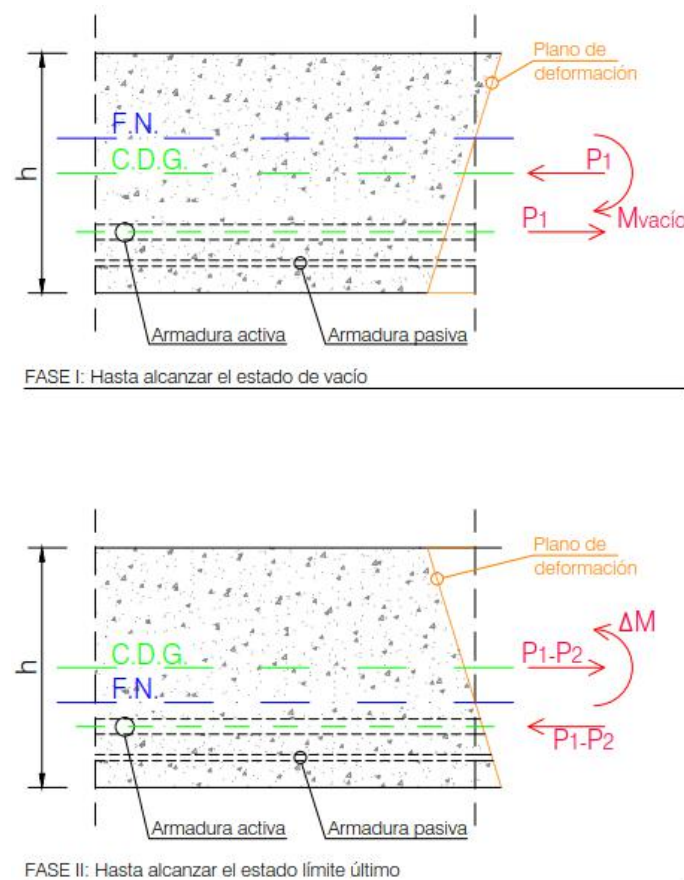


Figura 6-4. Escalones elementales de carga en una sección postesada

En la simplificación anterior, cabría discutir cual es el valor preciso de la fuerza de tesado en el instante en **el que se aplica la variación de momento flector, ΔM** , ya que el tránsito de P_1 a P_2 es un tránsito lento y paulatino que depende de la fluencia y retracción del hormigón, y de la relajación de la propia armadura activa. Sin embargo, tener en cuenta esta evolución obligaría a considerar el paso del tiempo en los análisis, complicándolos en exceso para no aportar una mejor precisión o seguridad.

Aún aceptada la simplificación anterior, queda claro que, en consecuencia, el estudio de una sección postesada requiere un cálculo evolutivo no lineal; evolutivo, por la propia historia de carga y, no lineal, por la mecánica de sus materiales.

En el presente trabajo dicho análisis se resuelve como se expone el siguiente apartado.

6.4.1 Análisis evolutivo no lineal de la sección postesada

6.4.1.1 Discretización de la sección en partículas

Una forma de abordar el análisis de cada fase de la historia de carga de una sección postesada pasa por discretizar la sección en partículas suficientemente pequeñas para que su rigidez local a flexión resulte irrelevante, las cuales permitan el control minucioso del estado de sus materiales constituyentes mediante el registro de la deformación unitaria longitudinal de las propias partículas. De esta forma, se podrá obtener el plano de equilibrio ante un determinado estado de sollicitación, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal de los materiales (en el que destaca la no admisión de tracciones del hormigón), basándose en el alargamiento o acortamiento compatible de las partículas en las que ha sido discretizada la sección o, lo que es igual, respetando la condición de *Navier*.

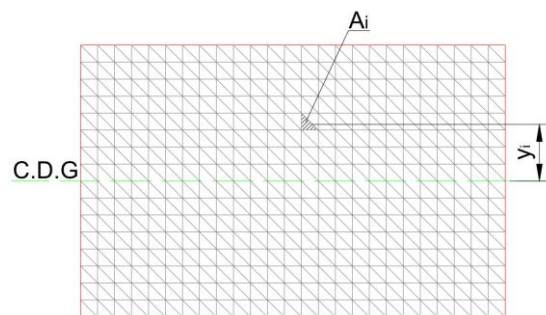


Figura 6-5. Discretización en partículas de una sección para su análisis no lineal en flexo-compresión

En el caso de secciones de placas delgadas, el plano válido de equilibrio debe satisfacer, además de la condición de *Navier*, la de *Bernouilli* (condiciones base de la teoría de placas delgadas de *Kirchoff*)

La tendencia mecánica de los tres materiales, salvando las claras distancias entre cada uno de sus comportamientos mecánicos básicos particulares, es la de perder rigidez a medida que va incrementándose su nivel de tensión, circunstancia que conlleva que la sección presente una tendencia a perder rigidez a medida que se incrementa el momento flector (ΔM), tratándose pues de un problema no lineal de rigidez decreciente (Ver Figura 6-6).

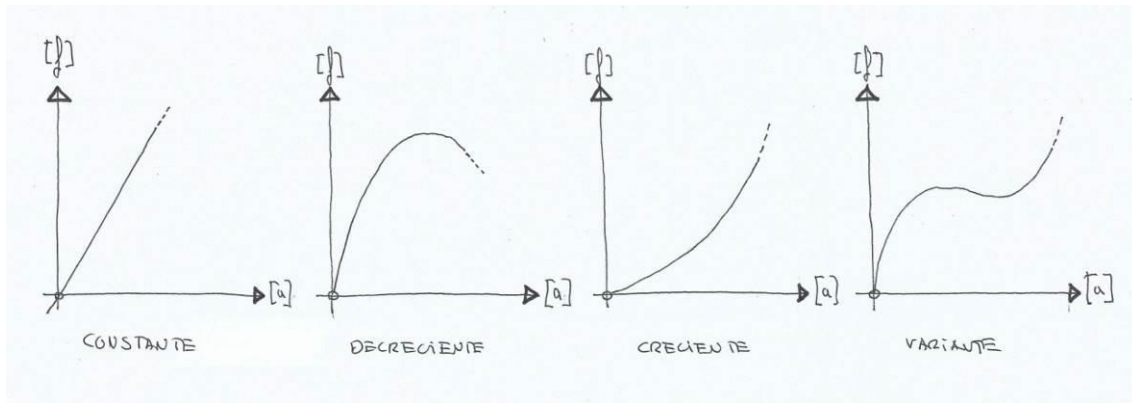


Figura 6-6. Reseña de la mecánica básica en problemas lineales y no lineales

Los problemas de rigidez decreciente son problemas que se dan con cierta recurrencia en el análisis de estructuras y uno de los métodos más aceptados para su resolución es el método iterativo de *Newton-Raphson*, método aquí adoptado.

El método de *Newton-Raphson* pasa por la valoración iterativa de la deformación, $[a]$, revisando la cantidad de carga $[f]$ que realmente se consigue equilibrar con la deformación calculada en cada iteración, al tener en cuenta la eventual pérdida de rigidez de las partículas. El cálculo de la deformación de cada nueva iteración se hace a partir de la rigidez tangente asociada a dicha deformación, lo que permite aproximar más rápidamente la solución. Como la rigidez es decreciente, la finalización del proceso queda asociada a la convergencia de los resultados de cálculo hacia una determinada respuesta (la respuesta), por tanto, asociada a un cierto nivel de precisión. La convergencia se identifica fácilmente por la reducción progresiva de la deformación obtenida en cada iteración, siempre que la sección pueda equilibrar por sí misma las acciones a las que está sometida.

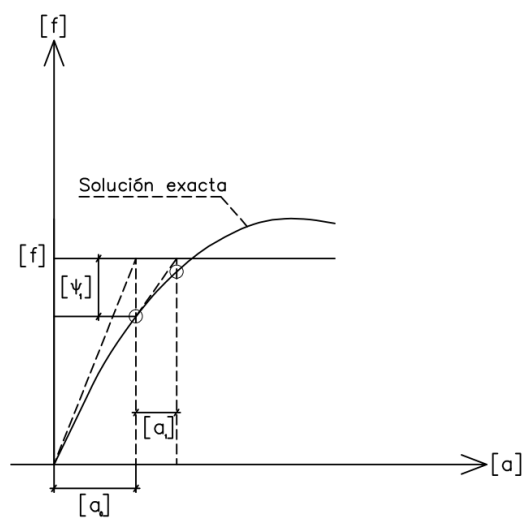


Figura 6-7. Conceptualización gráfica básica del método de *Newton-Raphson*

Cada iteración pasará por la determinación de los siguientes aspectos:

- Rigidez tangente de la sección, a partir de lo expuesto en 6.4.1.2
- Obtención del plano de o nivel de deformación $[a_i]$, según 6.4.1.3
- Cálculo de la fuerza residual $[\psi_i]$ no equilibrada por un plano de deformación habiendo considerado la correspondiente pérdida de rigidez, según 6.4.1.4

Es cierto que hay otras formas de abordar el problema expuesto, pero su análisis por partículas resulta también especialmente interesante u oportuno para poder valorar con rigor otros aspectos relevantes a los efectos del presente trabajo que quedan asociados a la obtención del plano de equilibrio, según se irá desgranando con posterioridad.

6.4.1.2 La rigidez de la sección

Una sección postesada, en la que la distorsión por cortante resulta despreciable para la obtención del equilibrio, presenta dos únicos esfuerzos relevantes a la hora de discutir su situación deformacional: esfuerzo axial y momento flector. En consecuencia, la valoración de la rigidez del problema pasará por la valoración de la rigidez particular frente a esos esfuerzos. Estas rigideces, en el caso de una sección postesada discretizada por partículas, pueden quedar calculadas de la siguiente forma:

Rigidez axial

$$EA_{total} = \sum_{i=1}^l E_{c,i} \cdot A_{c,i} + \sum_{j=1}^m E_{s,j} \cdot A_{s,j} + \sum_{k=1}^n E_{p,k} \cdot A_{p,k}$$

En donde,

- l es el número de nodos de hormigón de la discretización
- $E_{c,i}$ es el módulo de elasticidad del nodo i en la iteración en tránsito
- $A_{c,i}$ es el área del nodo i
- m es el número de armaduras pasivas
- $E_{s,j}$ es el módulo de elasticidad de la armadura pasiva j en la iteración en tránsito
- $A_{s,j}$ es el área de la armadura pasiva j
- n es el número de armaduras activas
- $E_{p,k}$ es el módulo de elasticidad de la armadura activa k en la iteración en tránsito
- $A_{p,k}$ es el área de la armadura activa k

Rigidez a flexión

$$EI_{total} = \sum_{i=1}^l E_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_{c,i}^2 + \sum_{j=1}^m E_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot y_{s,j}^2 + \sum_{k=1}^n E_{p,k} \cdot A_{p,k} \cdot y_{p,k}^2$$

En donde,

- $y_{c,i}$ es la distancia que separa el nodo i del C.D.G. de la sección
- $y_{s,j}$ es la distancia que separa la armadura pasiva j del C.D.G. de la sección
- $y_{p,k}$ es la distancia que separa la armadura activa j del C.D.G.



6.4.1.3 Deformación de la sección

Por tanto, en cada iteración del proceso general de cálculo se podrá valorar el plano de deformación particular a partir de la deformación recta causada por la fuerza axial, N , y del giro originado por el momento flector, M :

$$\varepsilon_{\text{sección}} = \frac{N}{EA_{\text{sección}}}; \quad \theta_{\text{sección}} = \frac{M}{EI_{\text{sección}}}$$

En donde,

$\varepsilon_{\text{sección}}$ es la deformación longitudinal unitaria de la sección en la iteración en tránsito

$\theta_{\text{sección}}$ es el ángulo de giro de la sección en la iteración en tránsito

Para un determinado plano de deformación – $\varepsilon_{\text{sección}}$, $\theta_{\text{sección}}$ –, se puede calcular el nivel de deformación propio de las partículas de cada uno de los tres materiales constituyentes de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{c,i} = \varepsilon_{\text{sección}} + \theta_{\text{sección}} \cdot y_{c,i} \quad \varepsilon_{s,j} = \varepsilon_{\text{sección}} + \theta_{\text{sección}} \cdot y_{s,j} \quad \varepsilon_{p,k} = \varepsilon_{\text{sección}} + \theta_{\text{sección}} \cdot y_{p,k}$$

En donde,

$\varepsilon_{c,i}$ es la deformación longitudinal unitaria del nodo i en la iteración en tránsito

$\varepsilon_{s,j}$ es la deformación longitudinal unitaria de la armadura pasiva j en la iteración en tránsito

$\varepsilon_{p,k}$ es la deformación longitudinal unitaria de la armadura activa k en la iteración en tránsito

El control de la deformación longitudinal de cada partícula permite discutir su estado – elástico, plástico o en rotura – en base a la mecánica básica expuesta anteriormente y, en definitiva, el control de su rigidez longitudinal particular a través de la corrección de su módulo de elasticidad longitudinal, lo que permite obtener también la rigidez tangente del problema en cada iteración.

Este control de la degradación de las partículas posibilita, pues, monitorizar con precisión la rigidez de la sección a flexión teniendo en cuenta la fuerza de pretensado y, a su vez, cómo se verá más adelante, la rigidez a torsión del problema general de placa.



6.4.1.4 Fuerzas residuales por iteración

Como se ha dicho, la fuerza o esfuerzo residual es la cantidad de esfuerzo no equilibrado por las partículas por razón de su degradación ante un determinado incremento de deformación. Esta degradación tiene reflejo en el valor de la tensión de cada partícula, tensión que se obtiene a partir de su estado de deformación longitudinal y de su módulo de deformación "real" o asociado al propio nivel de deformación:

$$\sigma_{c,i} = \varepsilon_{c,i} \cdot E_{c,i}; \quad \sigma_{s,j} = \varepsilon_{s,j} \cdot E_{s,j}; \quad \sigma_{p,k} = \varepsilon_{p,k} \cdot E_{p,k}$$

Las tensiones calculadas teniendo la degradación de cada partícula permiten el cálculo de los esfuerzos residuales de la siguiente forma:

Fuerza axial residual

$$N_{res} = N - \left(\sum_{i=1}^l \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} + \sum_{j=1}^m \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} + \sum_{k=1}^n \sigma_{p,k} \cdot A_{p,k} \right)$$

Momento flector residual

$$M_{res} = M - \left(\sum_{i=1}^l \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_{c,i} + \sum_{j=1}^m \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot y_{s,j} + \sum_{k=1}^n \sigma_{p,k} \cdot A_{p,k} \cdot y_{p,k} \right)$$

6.4.1.5 Estado inicial (en vacío) y estados posteriores

La sección postesada tiene un comportamiento muy particular al inicio de su historia de carga, ya que, cuando se estira y bloquea la armadura, aún después de que se produzcan las pérdidas instantáneas, la deformación longitudinal de la **armadura activa**, $\varepsilon_{p,k}$, resulta independiente de la del resto de partículas, de tal suerte que la armadura activa no pertenece al plano de deformación general de la sección.

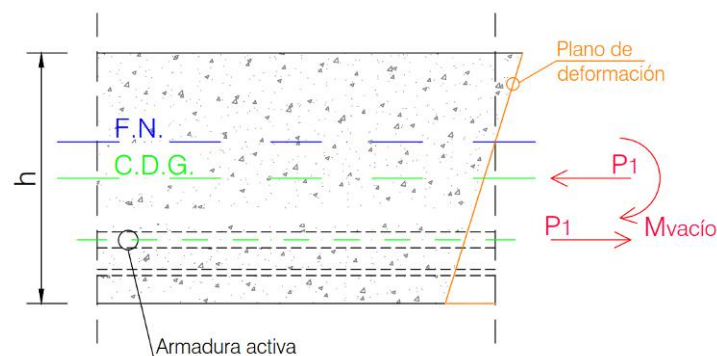


Figura 6-8. Deformación de la sección postesada en vacío

Esta circunstancia, añadida a la propia mutación de la fuerza de tesado, redundante en que el cálculo deba acometerse de forma evolutiva y en que el análisis de la situación en vacío deba abordarse de forma diferente al análisis de cualquier otro escalón de carga.

En este sentido, en el estudio de la situación de vacío deben tenerse en cuenta estas dos condiciones:

- El plano de deformación general de la sección debe ser obtenido sin tener en cuenta la participación de la armadura activa
- La deformación de la armadura activa será la correspondiente únicamente al equilibrio de la fuerza de tesado descontando las pérdidas instantáneas (P_1)

La situación en vacío define, por tanto, un estado específico de deformación y de tensión de las partículas de la sección que marca el punto de partida del análisis de las situaciones de carga posteriores. En estas situaciones posteriores, en el caso aquí estudiado de armaduras adherentes, todos los materiales contribuyen a la vez, pues las vainas ya han sido inyectadas con posterioridad al bloqueo de las cuñas, si es que no se han detectado problemas de tesado o, más genéricamente, de ejecución.



6.5 Relación entre momento y curvatura

El análisis evolutivo no lineal de una sección postesada permite fijar de forma precisa, por ende, la relación entre los momentos aplicados sobre ésta y su curvatura, desde el inicio del servicio de la sección, cuando se aplica la fuerza de tesado, hasta su rotura. Esta relación describe fielmente, a la par, la forma de degradación de la sección analizada ante el incremento del momento flector y permite anticipar ciertos aspectos que resultan fundamentales en el análisis no lineal de una placa postesada.

A la vez, el análisis basado en partículas con deformación unitaria compatible con las hipótesis de *Navier* y *Bernouilli* permite valorar de forma rigurosa, como se irá viendo, la evolución de las rigideces relevantes de la sección en un problema de placas delgadas, a medida que se va agotando la resistencia de la sección de turno.

En este sentido se estudia en los apartados siguientes de forma detallada las relaciones entre momento y curvatura en las secciones críticas de las dos direcciones principales de tres problemas o casos teóricos correspondientes genéricamente a una losa postesada de planta cuadrada soportada sobre cuatro pilares, siguiendo fielmente el conjunto de condiciones y procedimientos expuestos hasta aquí. Los casos estudiados, los cuales se describen con más detalle en adelante, son los siguientes:

- Placa de 12x12 metros
- Placa de 16x16 metros
- Placa de 20x20 metros

El rango de luces propuesto, de 12 a 20 metros, es el rango donde la tecnología de postesado puede resultar normalmente más competitiva frente a otras tecnologías capaces de formar esos mismos techos y, por tanto, los resultados obtenidos resultan suficientemente representativos.

El análisis de las referidas secciones críticas, además de establecer relaciones entre momento y curvatura, permite seguir de forma minuciosa la degradación particular de los materiales que componen dichas secciones a través del estado o situación de las partículas en las que han sido discretizadas. Este seguimiento se explica gráficamente y de forma resumida en el presente trabajo a través de los códigos de color de las partículas que se definen consecutivamente para cada uno de los tres materiales básicos.

Se representa ahora una sección supuestamente solicitada por acción de las cargas gravitatorias a un momento negativo (tracción superior) y en la que, en consecuencia, la armadura activa queda en la parte superior.



· Hormigón

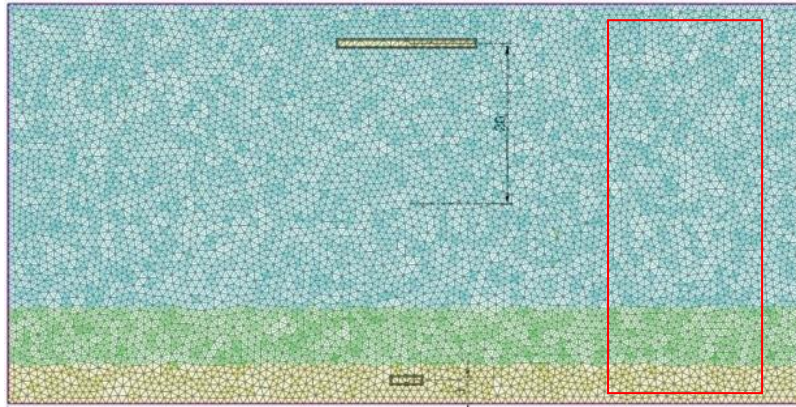


Figura 6-9. Análisis de evolutivo de una sección postesada.
Códigos de color adoptados para monitorizar la degradación del hormigón

- Azul:** Partículas de la sección que se encuentran rotas o en fisuración por tracción; no intervienen en las ecuaciones de equilibrio, pues se desprecia su contribución
- Verde:** Partículas de la sección que se encuentran en compresión y régimen elástico
 $0,002 \leq \varepsilon_i$
- Amarillo:** Partículas de la sección que se encuentran en compresión y régimen plástico
 $0,002 < \varepsilon_i < 0,0035$
- Rojo:** Partículas de la sección que se encuentran rotas por compresión; esta situación implica que se ha alcanzado el fallo de la sección – momento último – por rotura del hormigón
 $\varepsilon_i \geq 0,0035$

· Acero de las armaduras pasivas

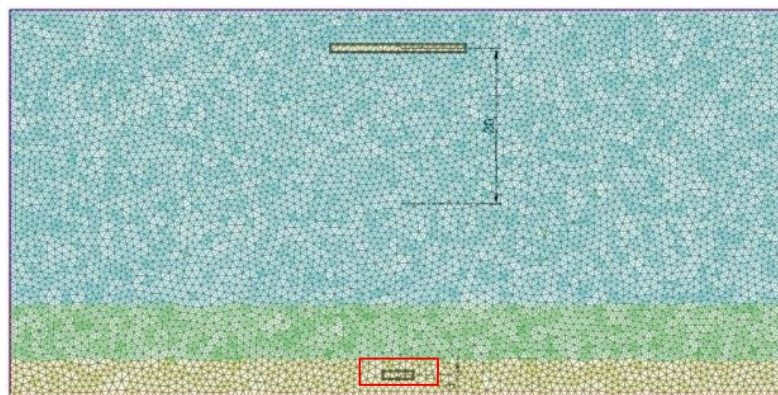


Figura 6-10. Análisis de evolutivo de una sección postesada.
Códigos de color adoptados para seguir la degradación del acero de las armaduras pasivas

- Verde:** Partículas de la sección que se encuentran en régimen elástico
 $f_{yd}/E \leq \epsilon_i$
- Amarillo:** Partículas de la sección que se encuentran en régimen plástico
 $f_{yd}/E < \epsilon_i < 0.01$
- Rojo:** Partículas de la sección que presentan una deformación unitaria inadmisibles por tracción o compresión; esta situación implica que se ha alcanzado el fallo de la sección – momento último – por rotura del refuerzo pasivo
 $\epsilon_i \geq 0,01$ o $\epsilon_i \leq 0,0035$

· Acero de las armaduras activas

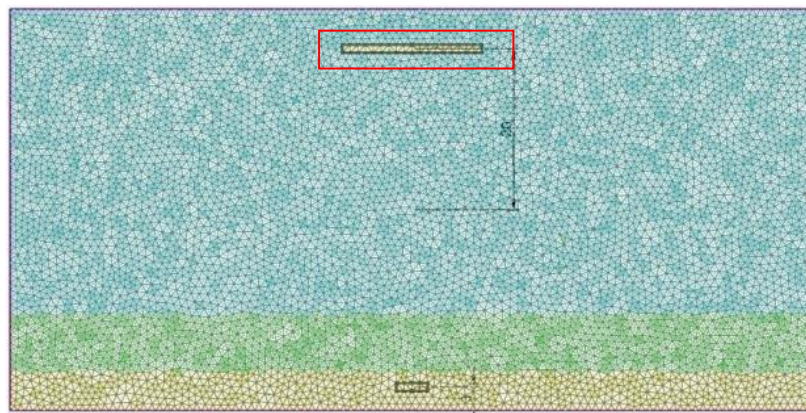


Figura 6-11. Análisis de evolutivo de una sección postesada.
 Códigos de color adoptados para seguir la degradación del acero de las armaduras pasivas

- Verde:** Partículas de la sección que se encuentran en tracción y régimen elástico lineal según la relación tensión-deformación normativa del material
 $0,00964 \leq \epsilon_i$
- Amarillo:** Partículas de la sección que se encuentran en tracción y régimen elástico, pero dentro del curvilíneo de la ecuación constitutiva - ecuación polinómica de 5º grado - según la relación tensión-deformación normativa del material
 $0,00964 < \epsilon_i < 0,01849$
- Rojo:** Partícula de la sección que se encuentran presentan una deformación unitaria inadmisibles por exceso de tracción; esta situación implica que se ha alcanzado el fallo de la sección – momento último – por rotura de la armadura activa
 $\epsilon_i \geq 0,01849$

Los materiales adoptados para el estudio de los tres casos citados han sido siempre los siguientes:

- Hormigón: **HP-40**
 - Resistencia característica $f_{ck} = 40\text{N/mm}^2$
 - Coeficiente de minoración $\gamma_c = 1,5$
- Armaduras pasivas: **B-500 S**
 - Límite elástico $f_{yk} = 50\text{N/mm}^2$
 - Coeficiente de minoración $\gamma_s = 1,15$
- Armaduras activas: **Y 1860 C**
 - Carga unitaria máxima $f_{max} = 1.860\text{ N/mm}^2$
 - Coeficiente de minoración $\gamma_s = 1,15$

Los códigos de color adoptados para la identificación del valor de la tensión normal de las partículas en las que se ha discretizado cada uno de los tres materiales que configuran la sección son los siguientes:

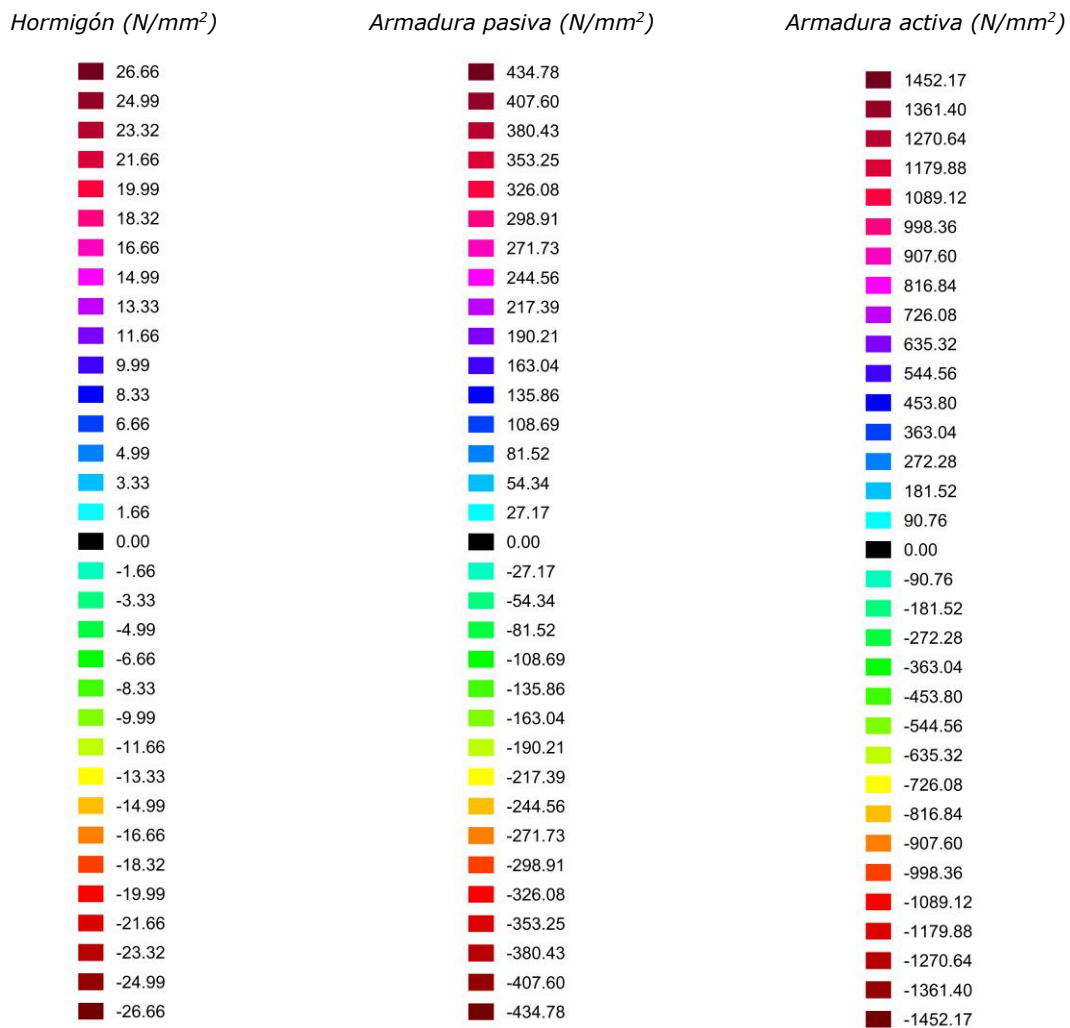


Figura 6-12. Códigos de tensión de las partículas de cada uno de los materiales constituyentes



En la figura posterior se ilustra, a modo de ejemplo, la representación en color de las tensiones sobre las partículas de una sección postesada, analizada con los procedimientos propuestos, nuevamente solicitada por acción de las cargas gravitatorias a un momento negativo (tracción superior)

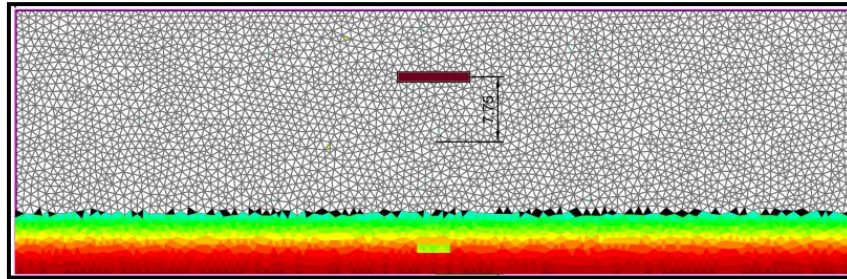


Figura 6-13. Análisis de evolutivo de una sección postesada.
Ejemplo de representación del nivel de tensiones normales en cada partícula

Aunque se trate de una mera referencia, debe aclararse que la sección mostrada en la figura anterior se encuentra en situación de agotamiento por plastificación de la armadura activa, armadura únicamente presente en este caso por encima de la fibra neutra, lo que explica la fisuración masiva de la sección en cuestión (la armadura activa entra en plastificación presentando una elongación muy superior a la que presenta una armadura pasiva cuando alcanza su límite elástico).

Conviene comentar también que algunos de los códigos generales de tensión presentados - elaborados para intensidades simétricas con respecto a la tensión nula, por comodidad - no tienen sentido físico, según se establece en los diagramas tensión-deformación de cada material, y nunca van a ser utilizados, por tanto, en el trabajo. Así pues, el hormigón no va a presentar tracciones, ni la armadura activa va a presentar compresiones.

6.5.1 Secciones tipo estudiadas

Las secciones estudiadas se corresponden con las críticas de una placa de planta cuadrangular que pretende representar un vano interior cualquiera de un forjado de edificación apoyado sobre cuatro pilares ubicados en sus esquinas, en base al siguiente esquema:

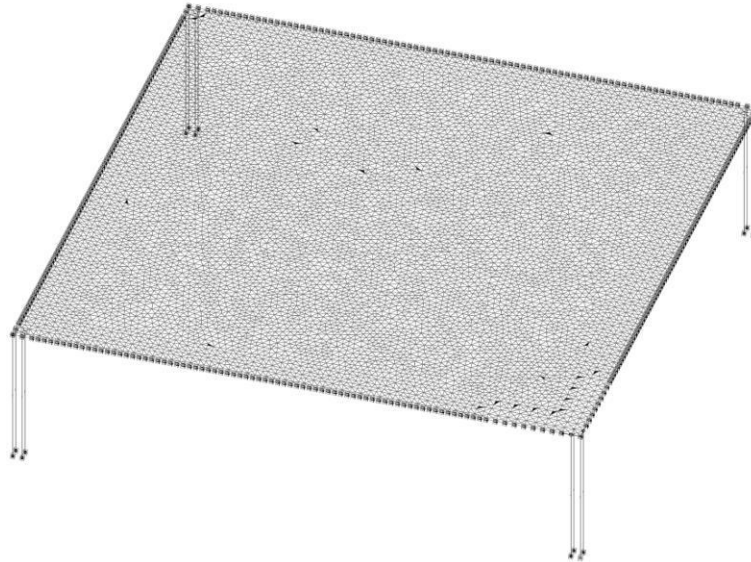


Figura 6-14. Perspectiva del modelo general de losa propuesto

En los bordes de la placa se impide el giro perpendicular a cada margen para simular adecuadamente la condición de continuidad perfecta que se propone. En estas condiciones las secciones críticas se corresponden con las que quedan justo encima de los soportes, donde quedan solicitadas al mayor momento flector. Este momento flector mayor (en valor absoluto) tiene, por tanto, signo negativo, dándose la tracción motivada por la flexión en las fibras superiores de la sección.

La sección unitaria de cálculo, en la que el canto, H , queda definido específicamente en cada caso, responde siempre al siguiente patrón, una vez discretizada en partículas:

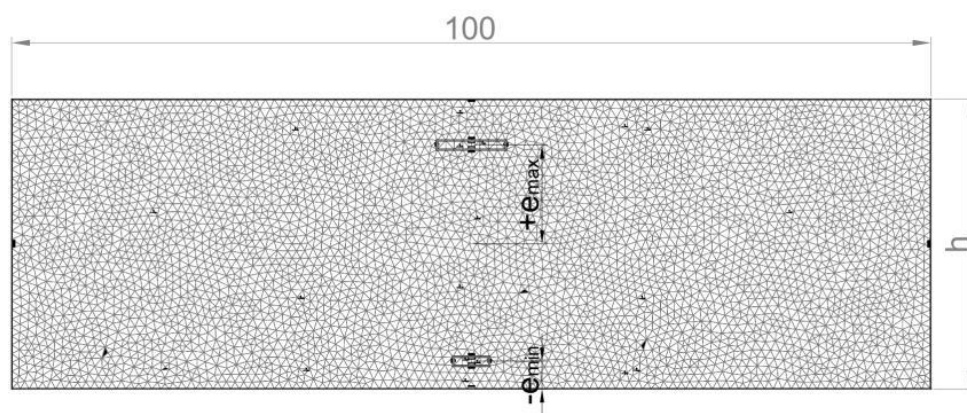


Figura 6-15. Sección unitaria de cálculo tipo (cotas en centímetros)

Debe destacarse también de forma previa que la posición en altura de la armadura activa varía en función de si se analiza la banda secundaria o la banda principal, debido a que la propia organización constructiva de la armadura activa así lo condiciona, según se ha expuesto en el capítulo tercero.

Para cada placa propuesta se muestran primero los resultados de cálculo de la armadura activa, obtenidos en la situación pésima de servicio: en primer lugar, los resultados correspondientes a la banda secundaria y, en segundo lugar, los resultados correspondientes a la banda principal.

La armadura activa secundaria se considera dispuesta en la dirección X, luego la armadura activa principal queda orientada en la dirección Y

Los resultados numéricos obedecen a la siguiente notación particular:

- $A_{p,x}$: Área de la armadura activa de la banda secundaria, X, por unidad de longitud
- $P_{2,x}$: Fuerza de tesado descontando las pérdidas instantáneas y diferidas aplicada en la banda secundaria, X, por unidad de longitud
- $M_{o,x}$: Momento actuante en la situación de vacío por unidad de longitud en la banda secundaria. Se incluyen aquí tanto el peso propio de la placa como las correspondientes acciones de tesado.
- $M_{u,x}$: Momento último de la sección por unidad de longitud en la banda secundaria
- $A_{p,y}$: Área de la armadura activa de la banda principal, Y, por unidad de longitud
- $P_{2,y}$: Fuerza de tesado descontando las pérdidas instantáneas y diferidas aplicada en la banda principal, Y, por unidad de longitud
- $M_{o,y}$: Momento actuante en la situación de vacío por unidad de longitud en la banda principal. Se incluyen aquí tanto el peso propio de la placa como las correspondientes acciones de tesado.
- $M_{u,y}$: Momento último de la sección por unidad de longitud en la banda principal
- A_s : Área de la armadura pasiva

Una vez determinada la armadura activa necesaria, los momentos últimos, $M_{u,x}$ y $M_{u,y}$, quedan calculados en base al análisis evolutivo no lineal de la sección, siguiendo el procedimiento expuesto precedentemente.

En este capítulo, para la mejor comprensión de la sección postesada en su pureza, todavía no se considera primeramente la incidencia de la necesaria colocación de refuerzos pasivos en la parte superior de las secciones críticas para el equilibrio de los Estados Límites Últimos, incidencia que se analiza de forma detallada en apartados posteriores.

Por tanto, la armadura pasiva considerada es la mínima que propone la instrucción para el control de la retracción en losas, armadura que, por prudencia y costumbre, se sigue colocando siempre en la cara inferior de los forjados. Esta armadura, A_s , resulta de igual cuantía en ambas direcciones de análisis.



6.5.1.1 Secciones para placa de 12x12 metros

Datos fundamentales del problema:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 31,5$ cm
- Peso propio $7,88$ kN/m²
- Carga permanente $2,50$ kN/m²
- Sobrecarga $3,50$ kN/m²

Resultados de cálculo de la armadura activa, momentos últimos y diagramas momento curvatura obtenidos:

Banda secundaria (X):

$$A_{p,x} = 8,400 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 18 \text{ Tendones de 4 cordones en total}$$

$$P_{2,x} = 917,6 \text{ kN/m}$$

$$A_s = 3,927 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 1\Phi 10\text{c}/20$$

$$M_{0,x} = -13,57 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

$$M_{u,x} = -209,58 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

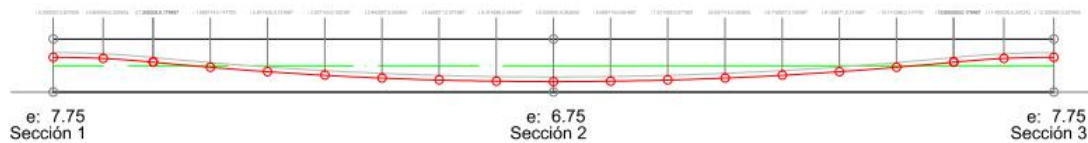


Figura 6-16. Trazado de la banda secundaria de armadura activa para la placa de 12x12 metros

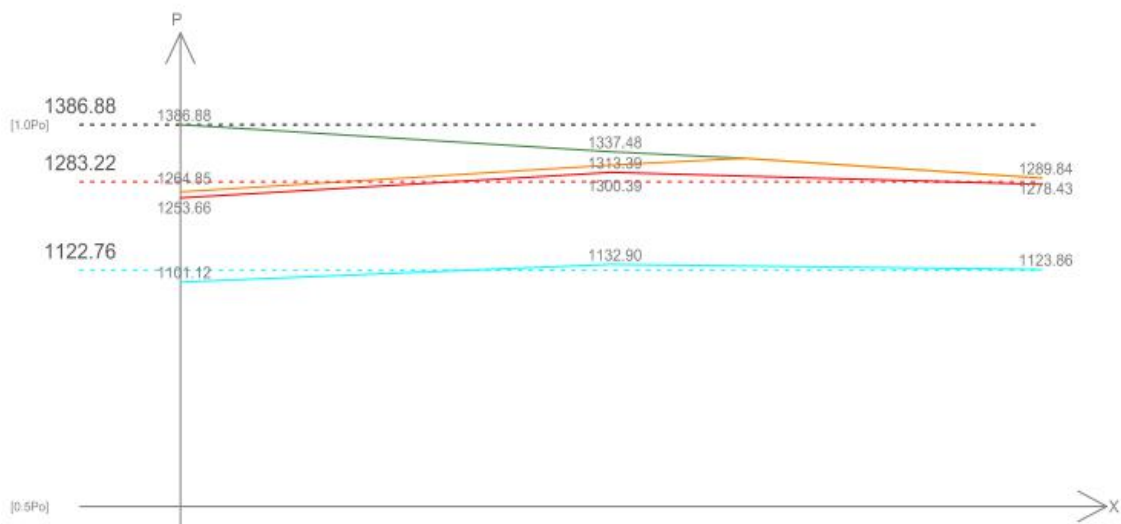


Figura 6-17. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección X para la placa de 12x12 metros

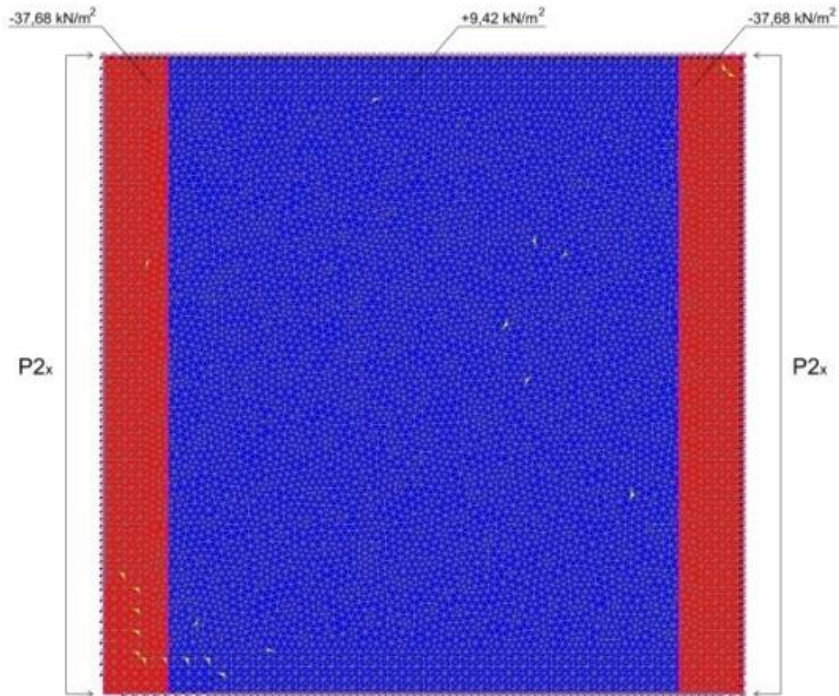


Figura 6-18. Cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda secundaria del problema de placa de 12x12m en la dirección X

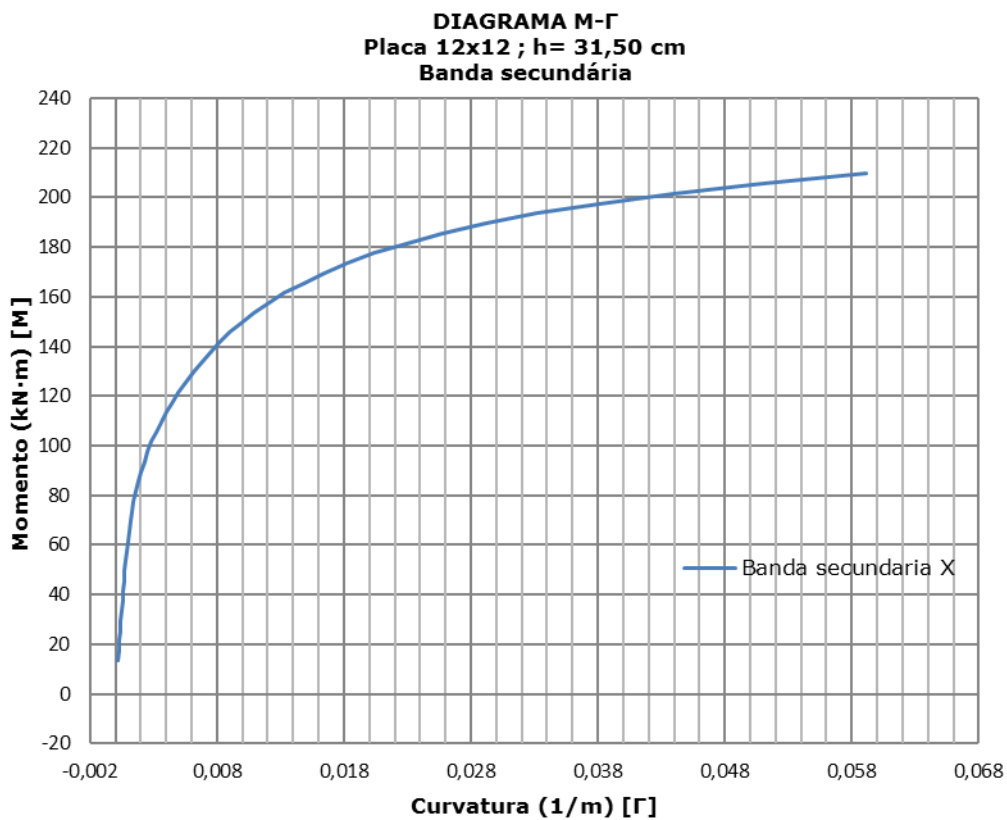


Figura 6-19. Diagrama momento curvatura de la sección crítica en la dirección X del problema de placa de 12x12m

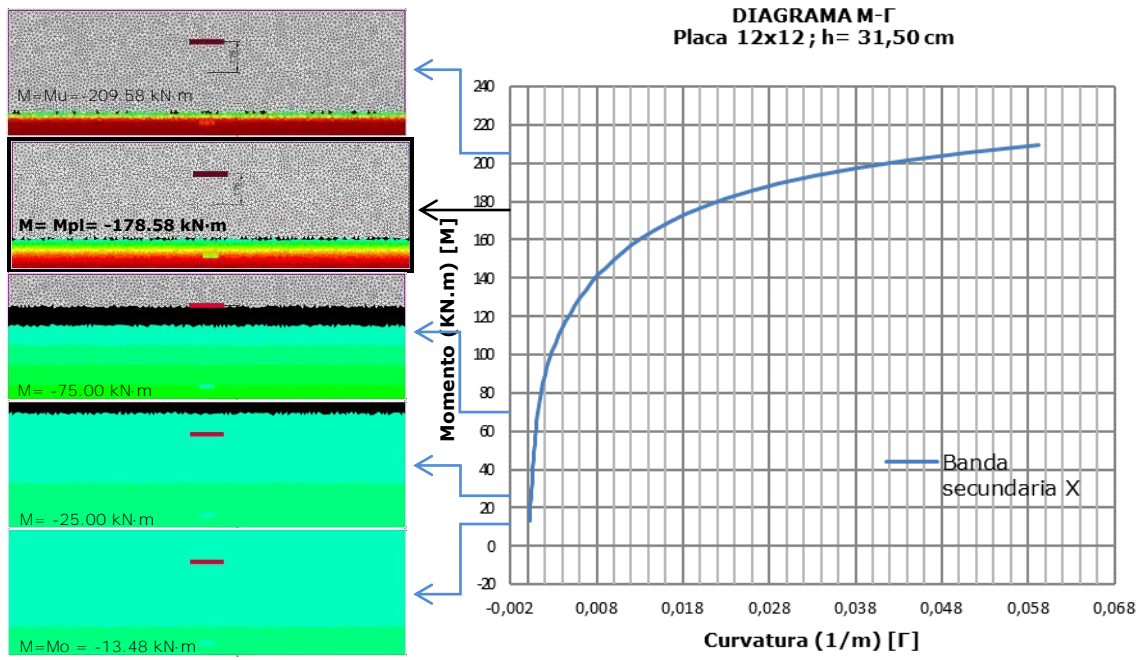


Figura 6-20. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica, dirección X, placa de 12x12m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

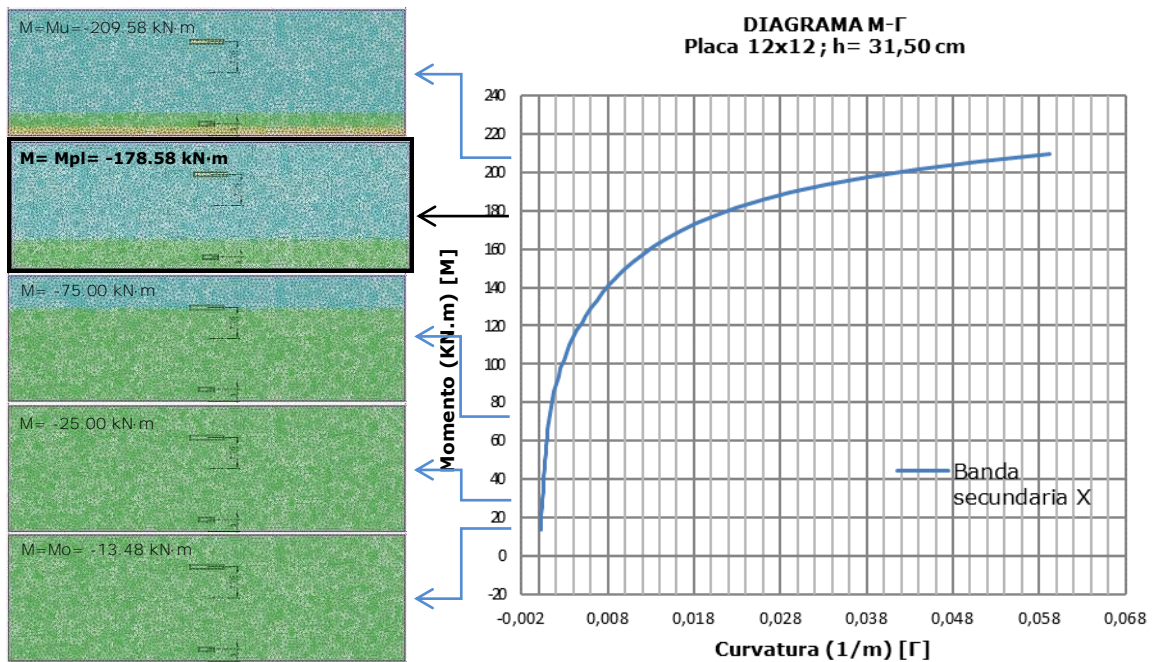


Figura 6-21. Evolución de la degradación material en la sección crítica, dirección X, placa de 12x12m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

Banda principal (Y):

- $A_{p,y}$ = 7,460 cm²/m → 8 Tendones de 4 cordones en total
- P_{2y} = 743,5 kN/m
- A_s = 3,927 cm²/m → 1Φ10c/20
- $M_{o,y}$ = -1,42 kN·m/m
- $M_{u,y}$ = -209,43 kN·m/m



Figura 6-22. Trazado de la banda principal de armadura activa para la placa de 12x12 metros

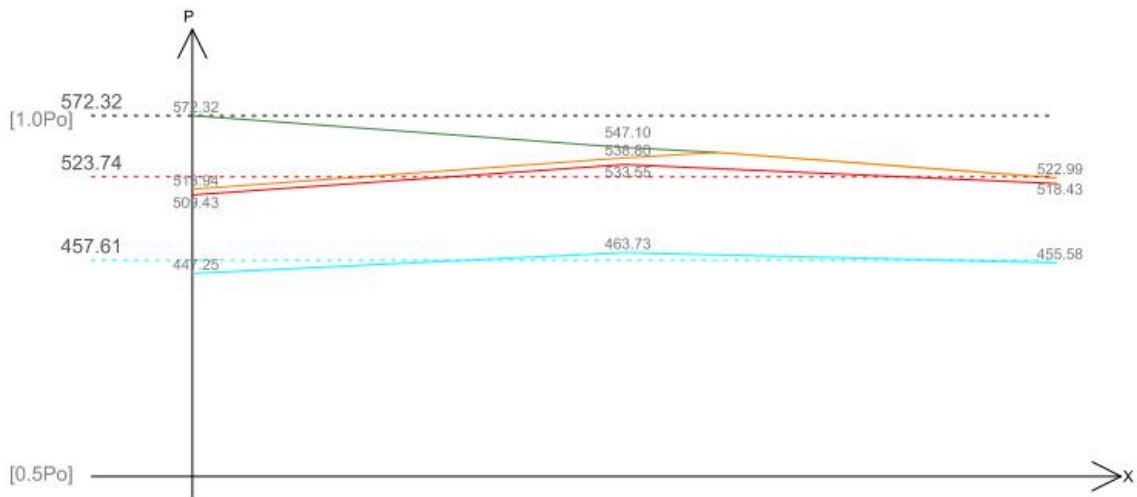


Figura 6-23. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección Y para la placa de 12x12 metros

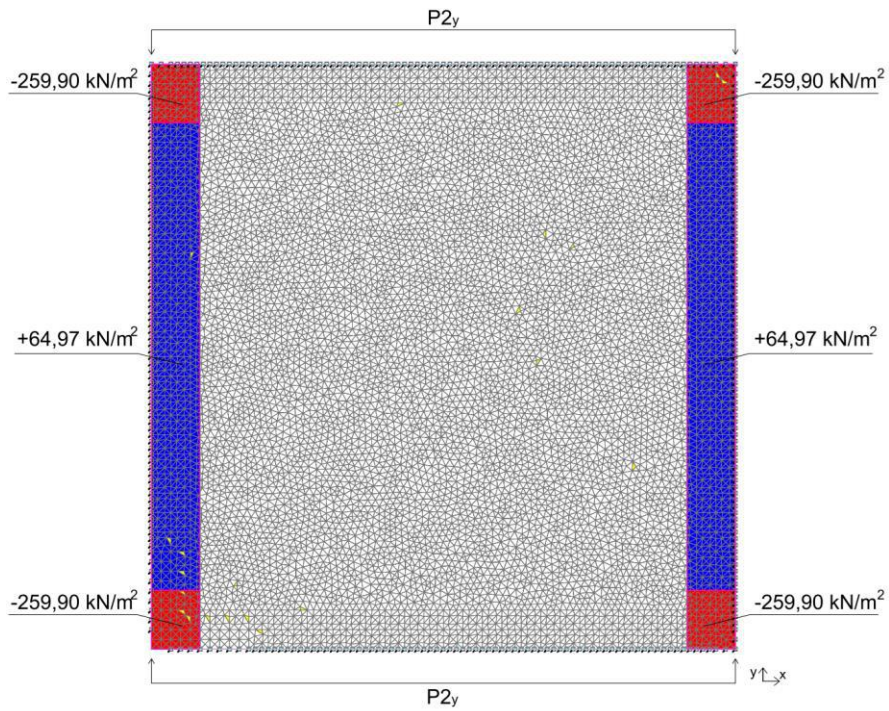


Figura 6-24. Cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda principal del problema de placa de 12x12m en la dirección Y

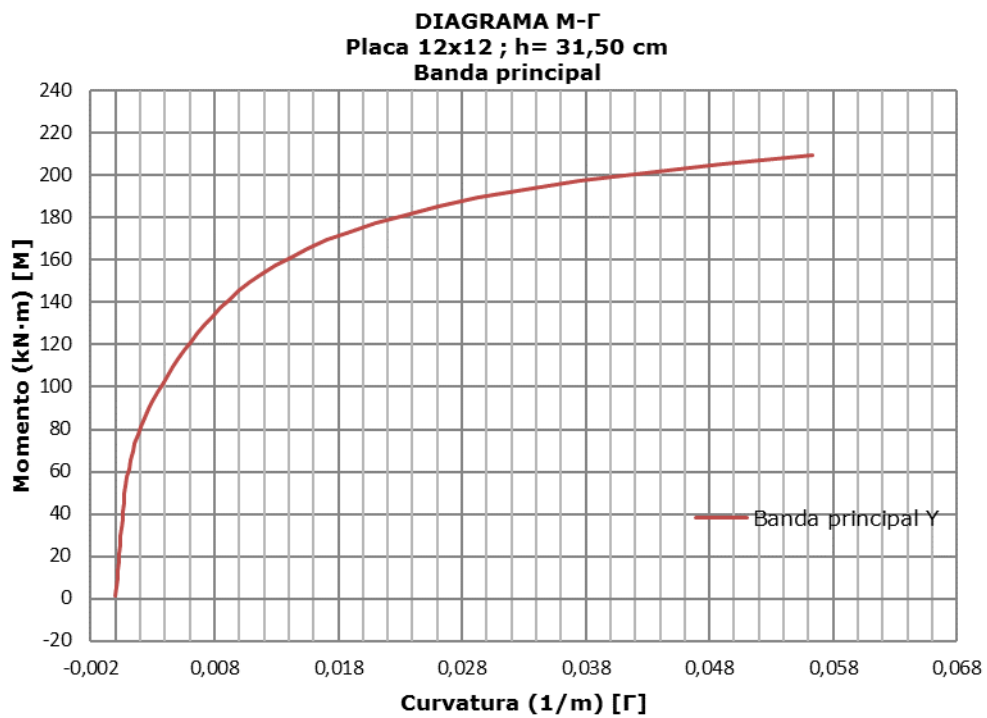


Figura 6-25. Diagrama momento curvatura de la sección crítica en la dirección Y del problema de placa de 12x12m

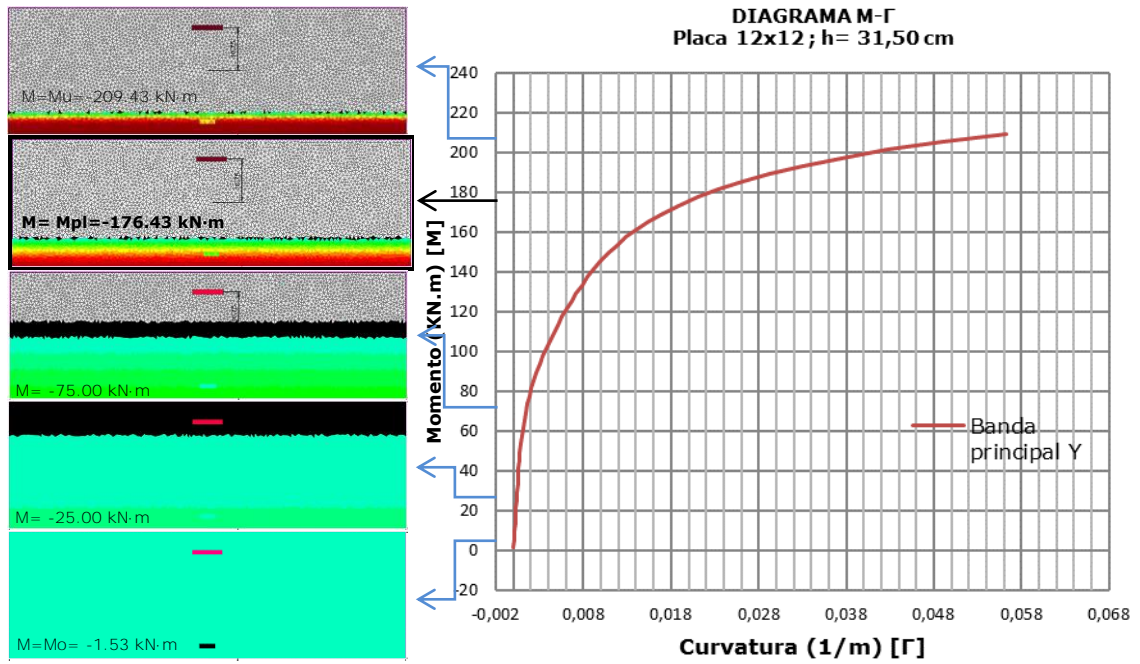


Figura 6-26. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica, dirección Y, placa de 12x12m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

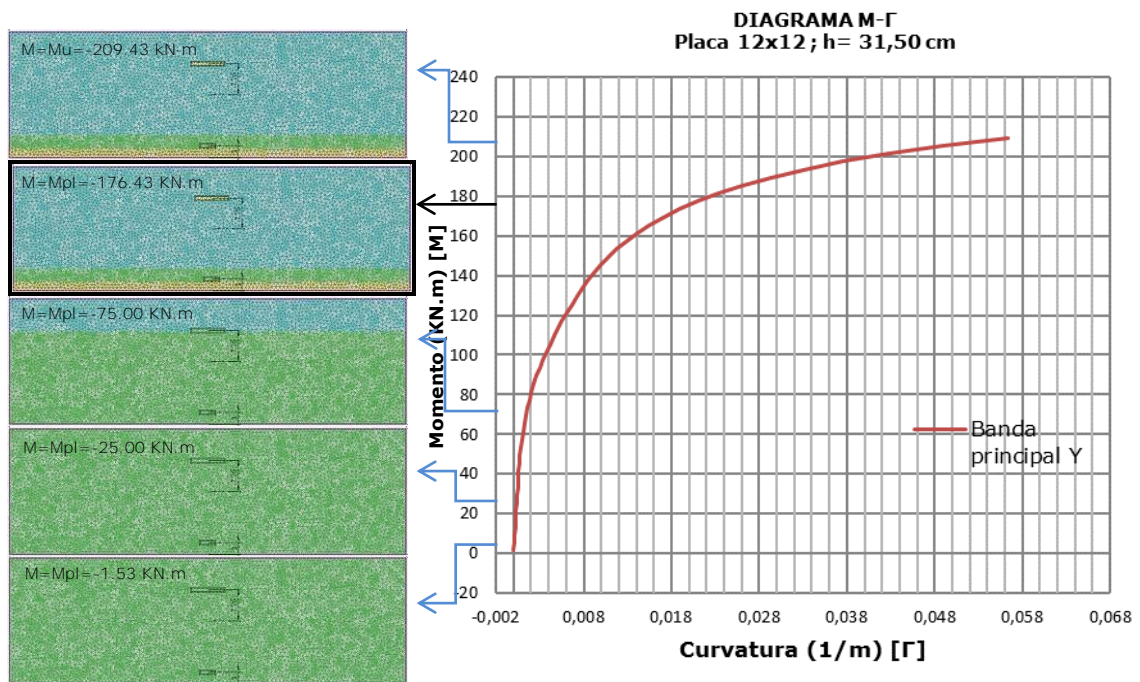


Figura 6-27. Evolución de la degradación material en la sección crítica, dirección Y, placa de 12x12m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

6.5.1.2 Secciones para placa de 16x16 metros

Datos fundamentales del problema:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 42,00 \text{ cm}$
- Peso propio $10,50 \text{ kN/m}^2$
- Carga permanente $2,50 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga $3,50 \text{ kN/m}^2$

Resultados de cálculo de la armadura activa, momentos últimos y diagramas momento curvatura obtenidos:

Banda secundaria (X):

$$A_{p,x} = 12,600 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 36 \text{ Tendones de 4 cordones en total}$$

$$P_{2,x} = 1394,0 \text{ kN/m}$$

$$A_s = 3,927 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1\Phi 10\text{c}/20$$

$$M_{0,x} = -6,32 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$$

$$M_{u,x} = -426,33 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$$

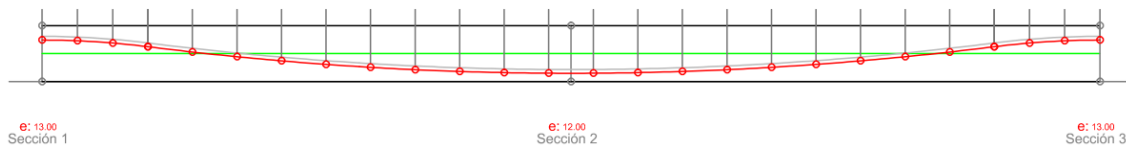


Figura 6-28. Trazado de la banda secundaria de armadura activa para la placa de 16x16 metros

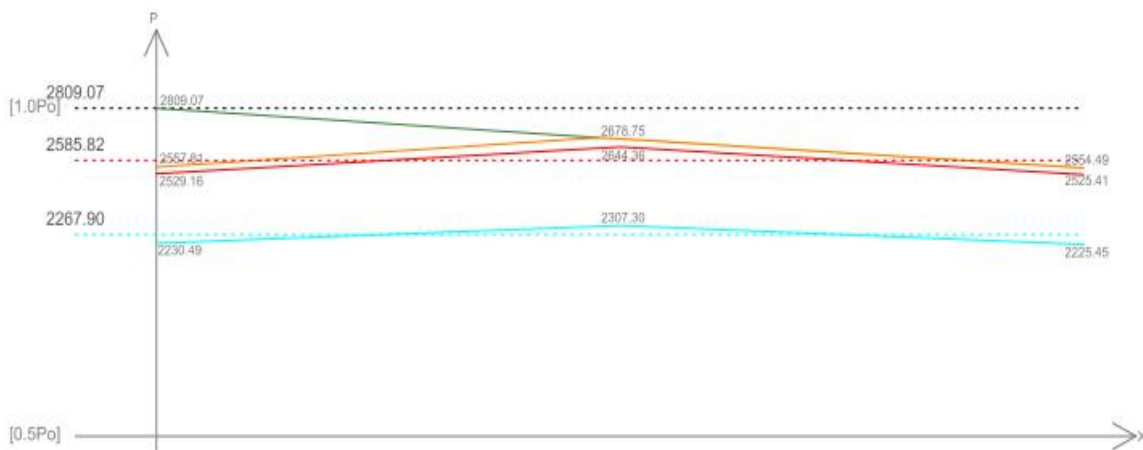


Figura 6-29. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección X para la placa de 16x16 metros.

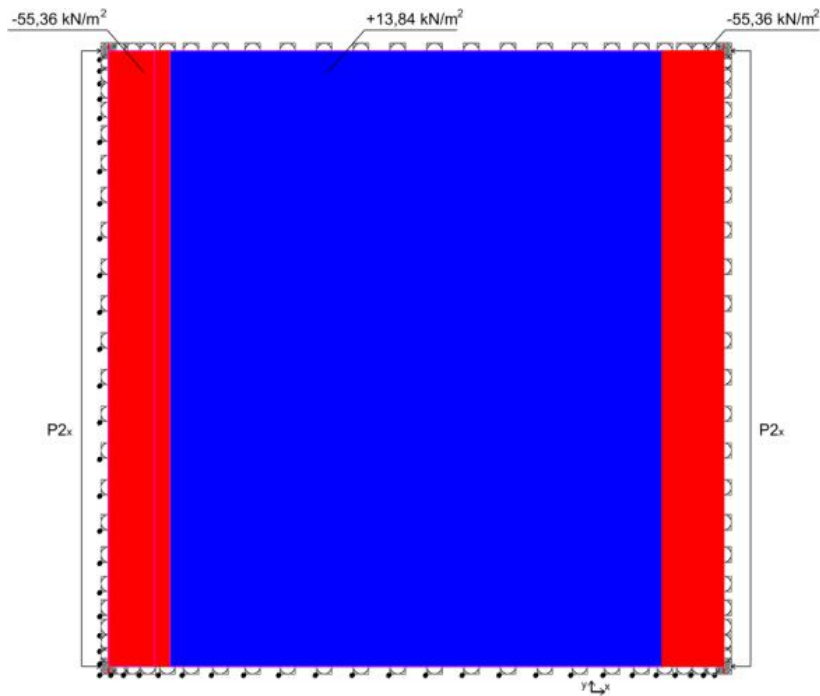


Figura 6-30. Cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda secundaria del problema de placa de 16x16m en la dirección X

DIAGRAMA M-Γ
Placa 16x16 ; h=42cm
Banda secundaria

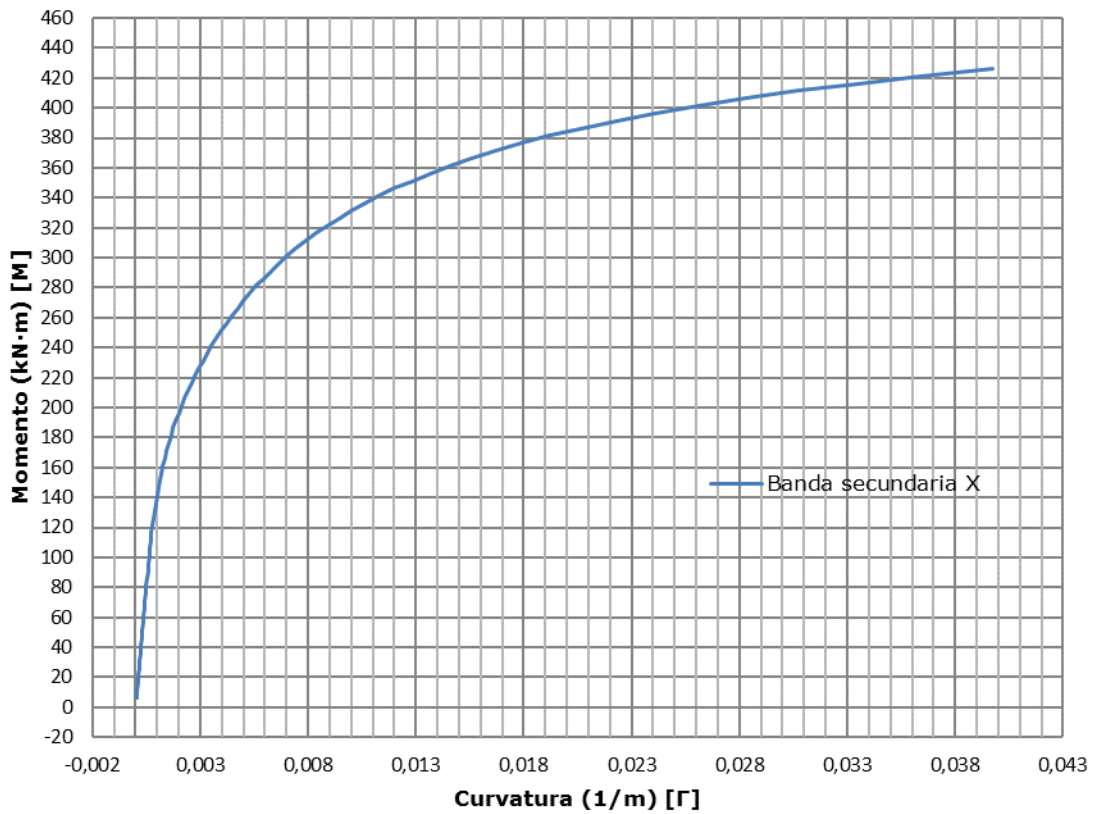


Figura 6-31. Diagrama momento curvatura de la sección crítica en la dirección X del problema de placa de 16x16m

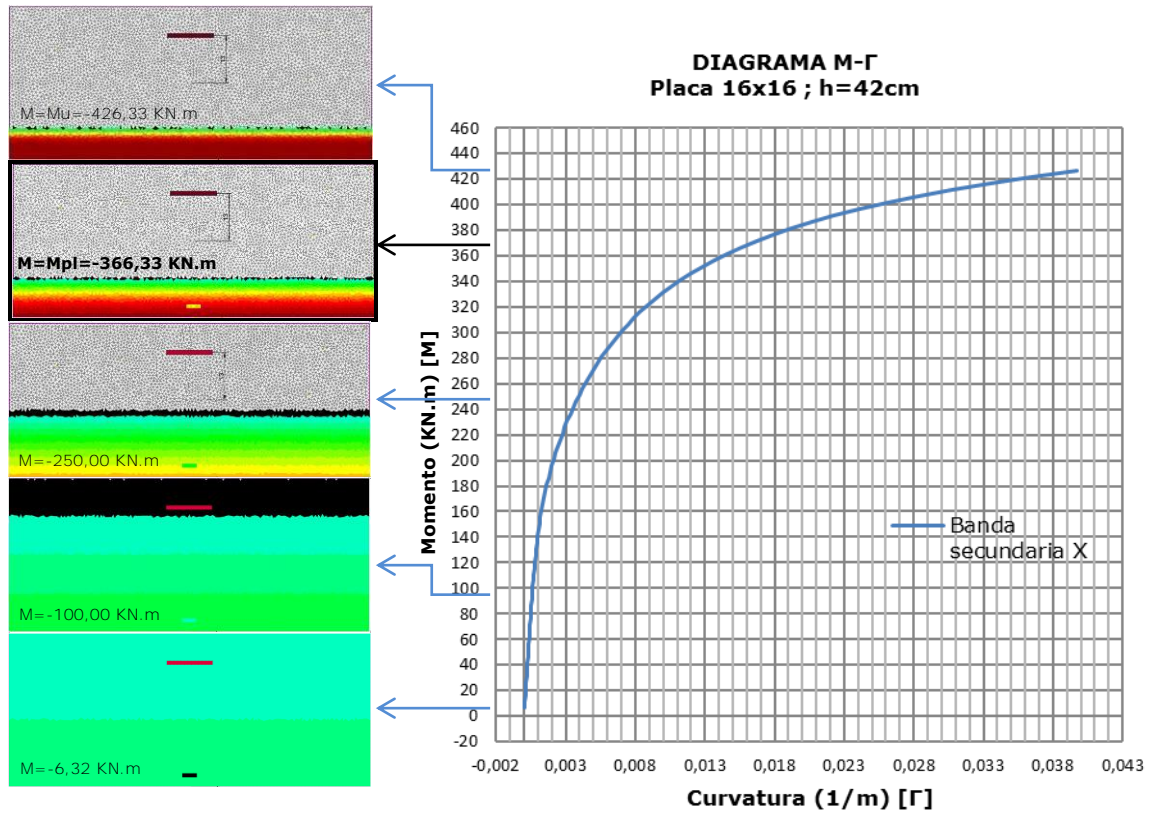


Figura 6-32. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica, dirección X, placa de 16x16m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento de momento flector negativo aplicado

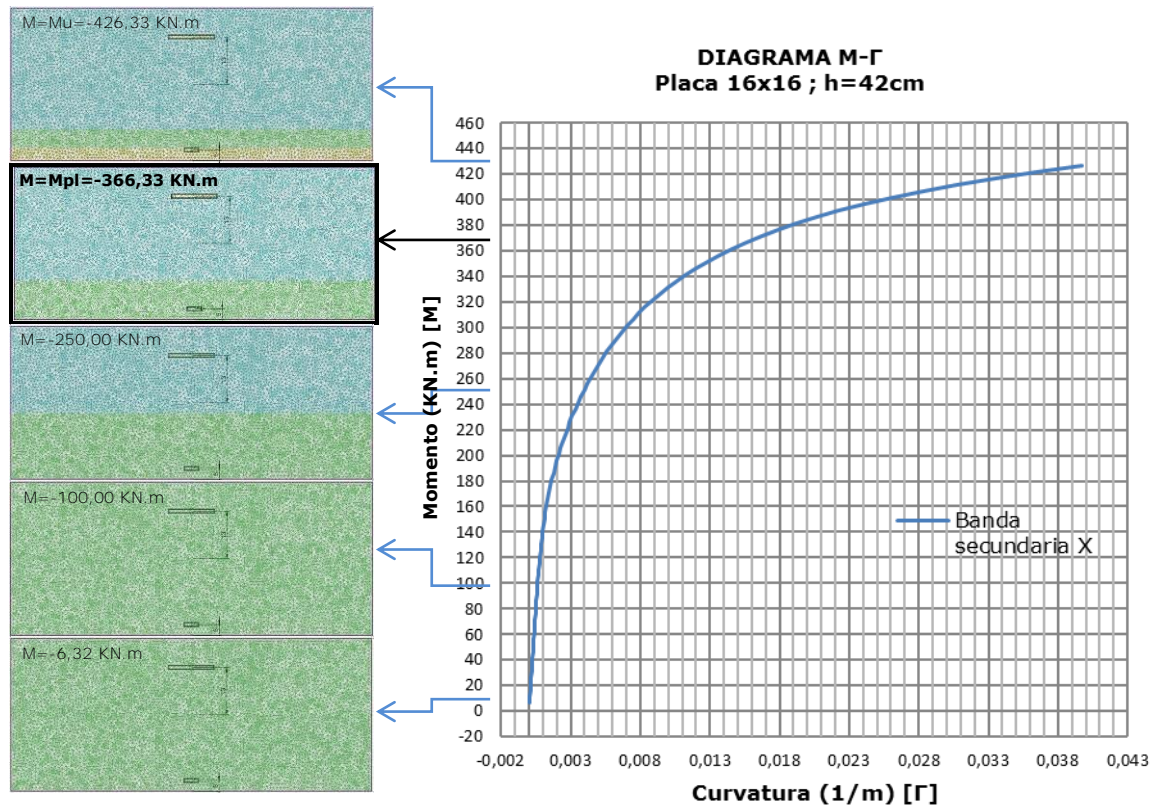


Figura 6-33. Evolución de la degradación del material en la sección crítica, dirección X, placa 16x16m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado.

Banda principal (Y):

$$A_{p,y} = 11,200 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 8 \text{ Tendones de 4 cordones}$$

$$P_{2y} = 1208,8 \text{ kN/m}$$

$$A_s = 3,927 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1 \Phi 10\text{c}/20$$

$$M_{o,y} = -3,42 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

$$M_{u,y} = -413,43 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$



Figura 6-34. Trazado de la banda principal de armadura activa para placa de 16x16 metros

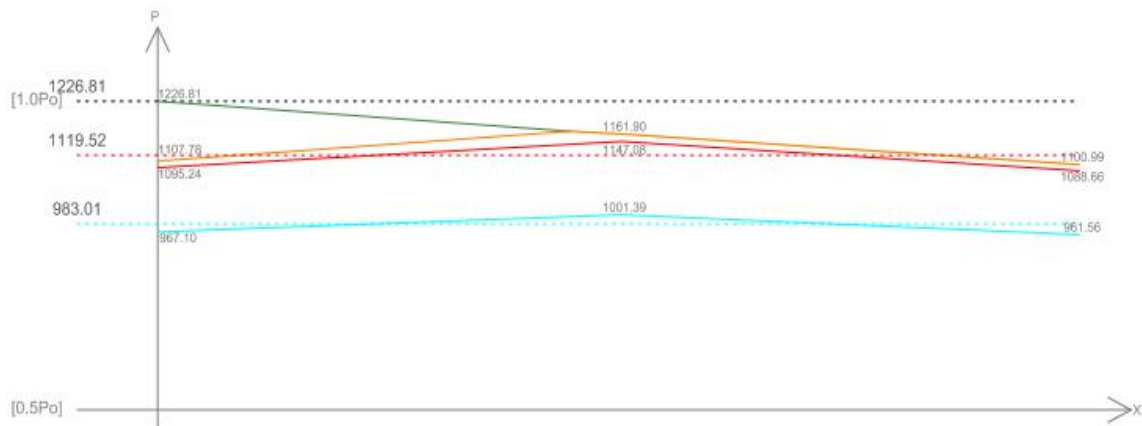


Figura 6-35. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección Y para la placa de 16x16 metros

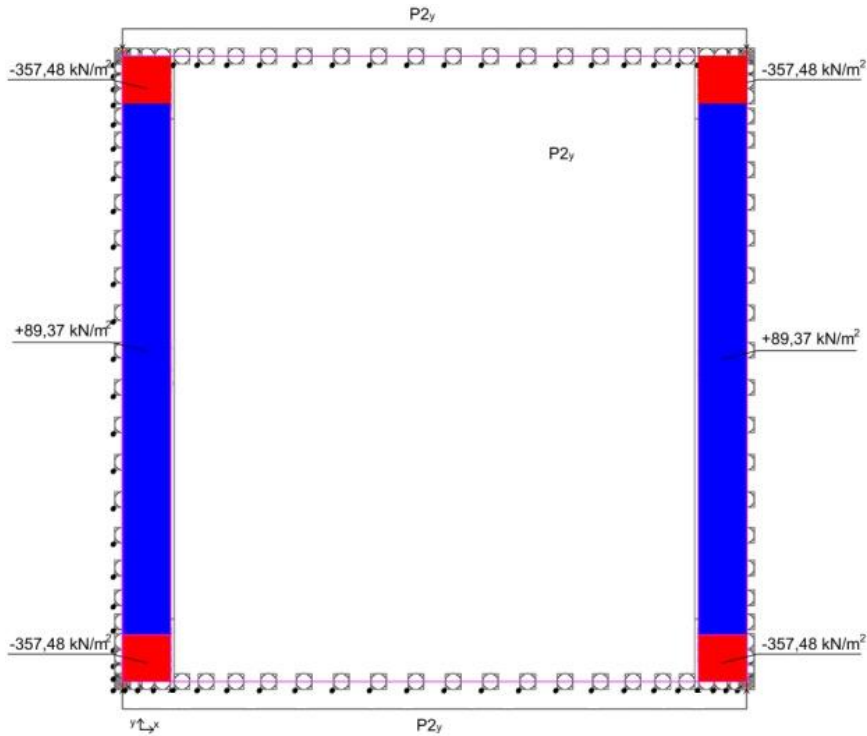


Figura 6-36. Cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda principal del problema de placa de 16x16m en la dirección Y

DIAGRAMA M-Γ
Placa 16x16 ; h=42cm
Banda principal

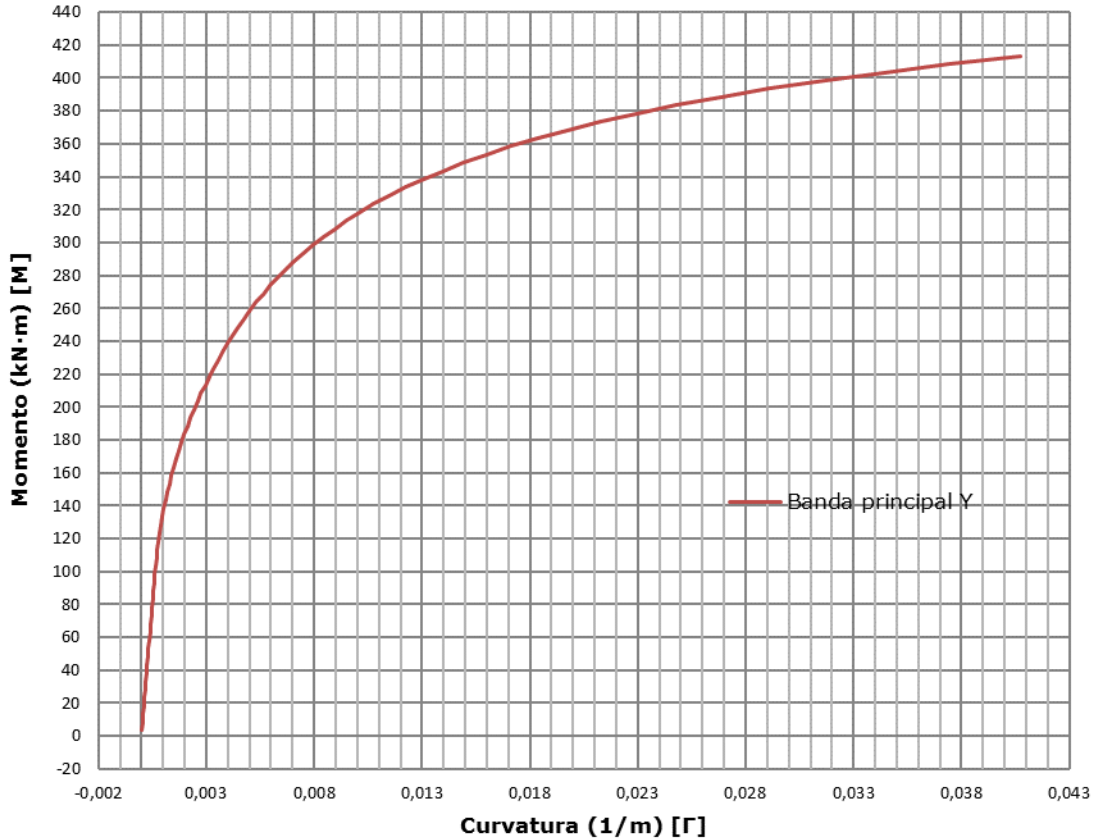


Figura 6-37. Diagrama momento de curvatura de la sección crítica en la dirección Y del problema de placa de 16x16m



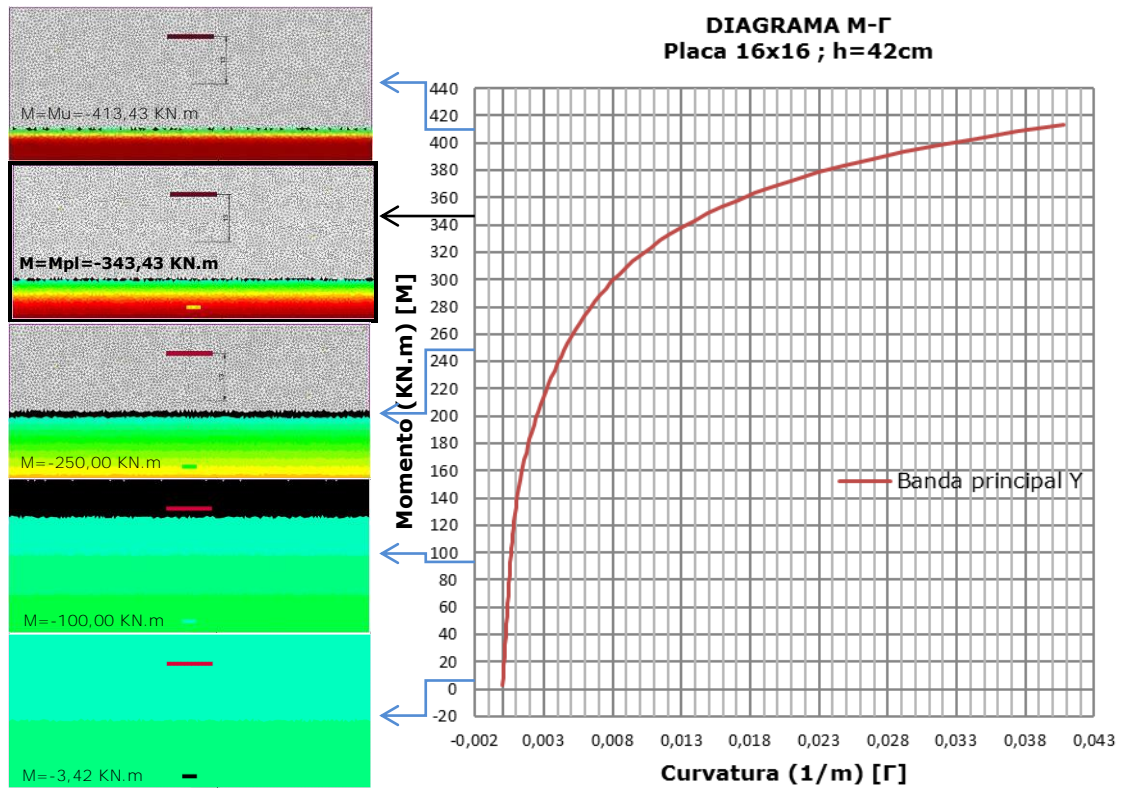


Figura 6-38. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica, dirección Y, placa 16x16m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

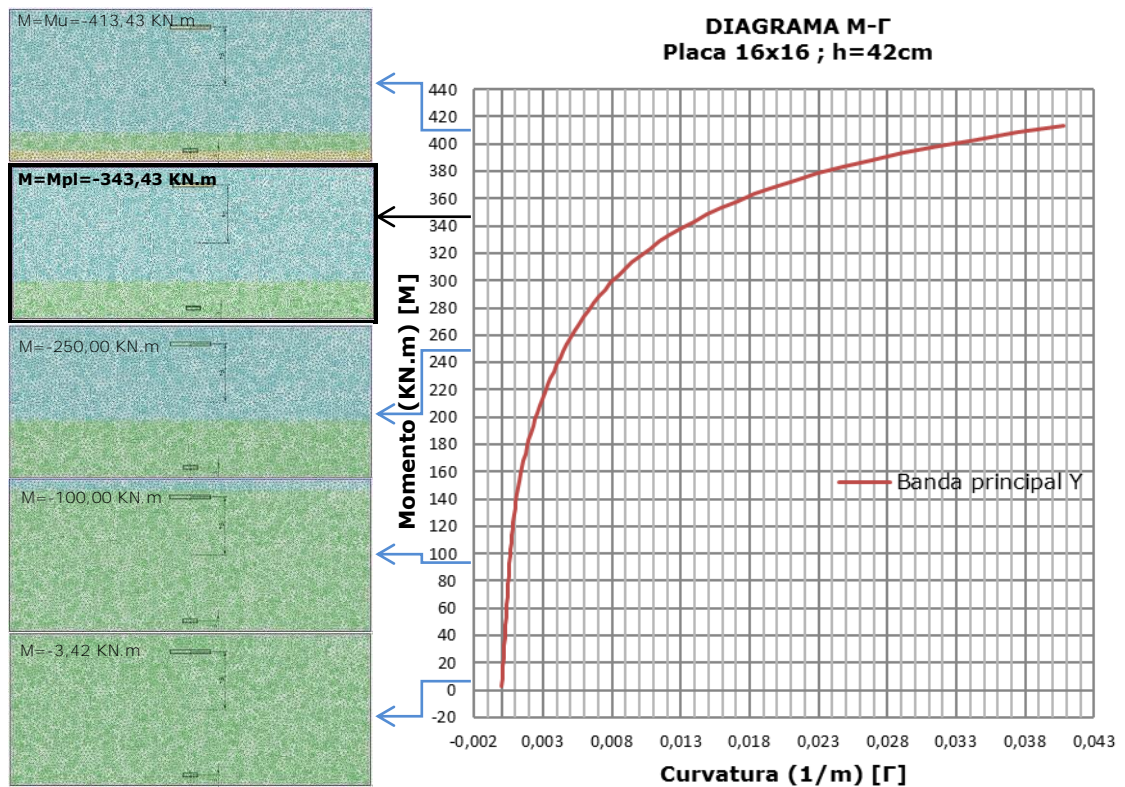


Figura 6-39. Evolución de la degradación material en la sección crítica, dirección Y, placa 16x16m, desde el tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

6.5.1.3 Secciones para placa de 20x20 metros

Datos fundamentales del problema:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 50,00$ cm
- Peso propio $12,50$ kN/m²
- Carga permanente $2,50$ kN/m²
- Sobrecarga $3,50$ kN/m²

Resultados de cálculo de la armadura activa, momentos últimos y diagramas momento curvatura obtenidos:

Banda secundaria (X):

$$A_{p,x} = 19,040 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 68 \text{ Tendones de 4 cordones en total}$$

$$P_{2,x} = 2088,0 \text{ kN/m}$$

$$A_s = 3,927 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1\Phi 10\text{c}/20$$

$$M_{o,x} = -3,43 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

$$M_{u,x} = -723,44 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

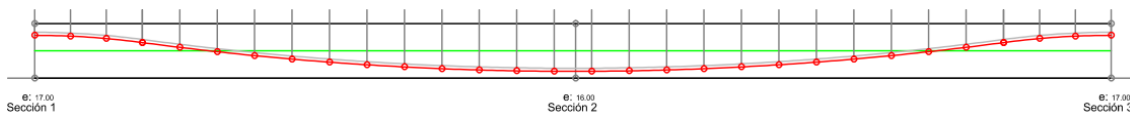


Figura 6-40. Trazado de la banda secundaria de armadura activa para la placa 20x20 metros

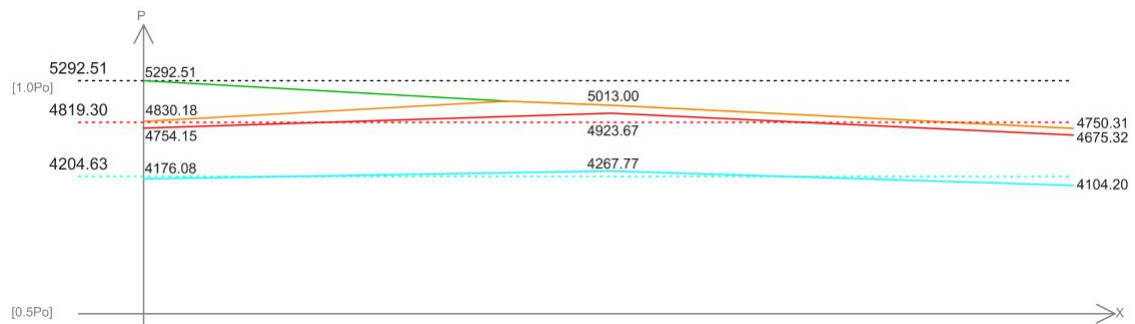


Figura 6-41. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección X para la placa de 20x20 metros

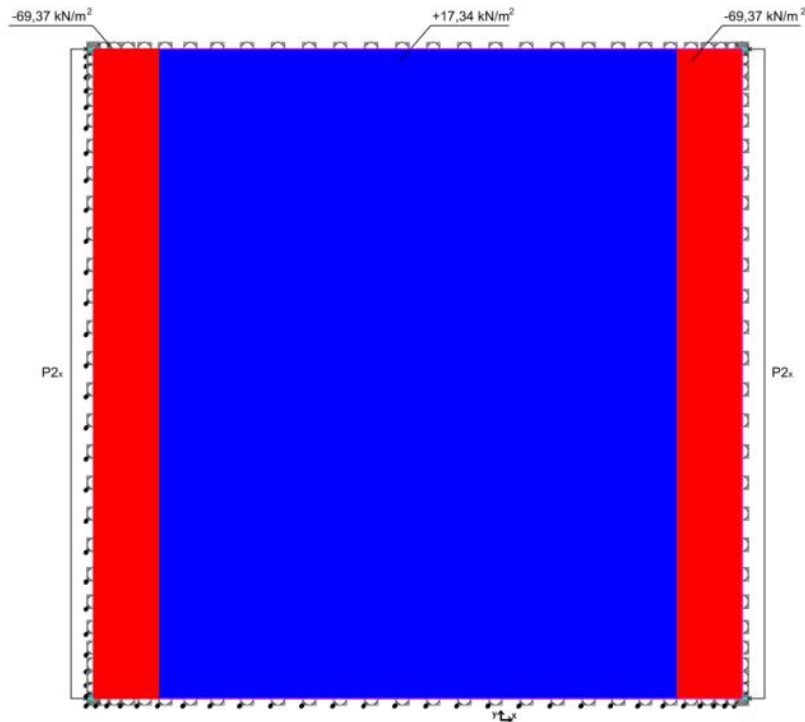


Figura 6-42. Estado de cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda secundaria del problema de placa de 20x20m en la dirección X

DIAGRAMA M- Γ
Placa 20x20 ; h=50cm
Banda secundaria

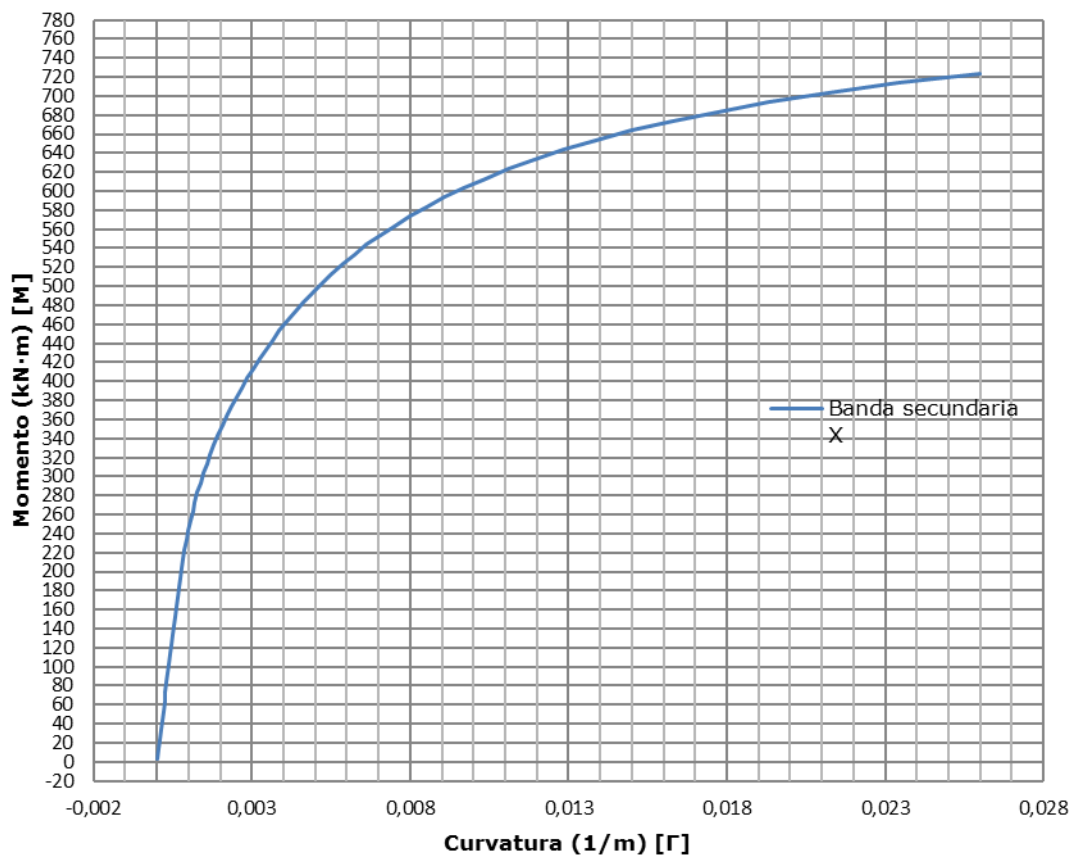


Figura 6-43. Diagrama momento curvatura de la sección crítica en la dirección X del problema de placa de 20x20m

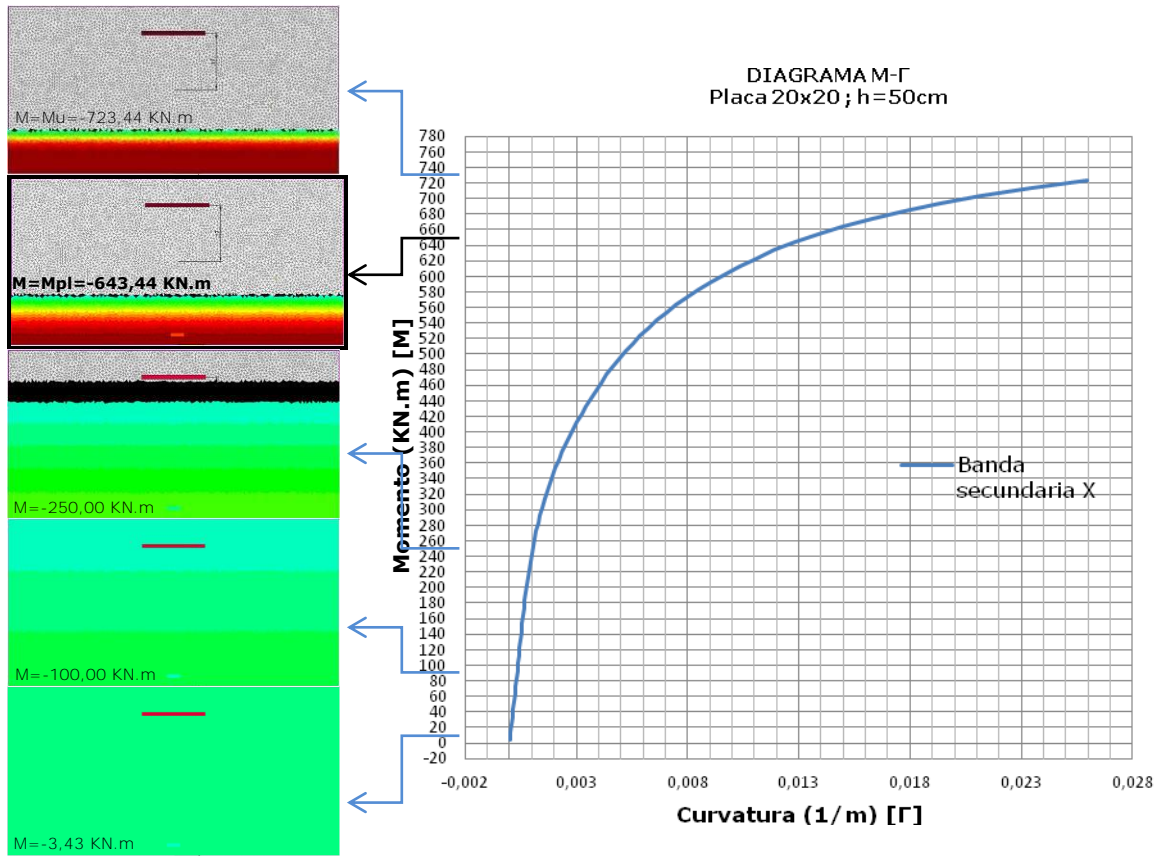


Figura 6-44. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica, dirección X, placa de 20x20m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

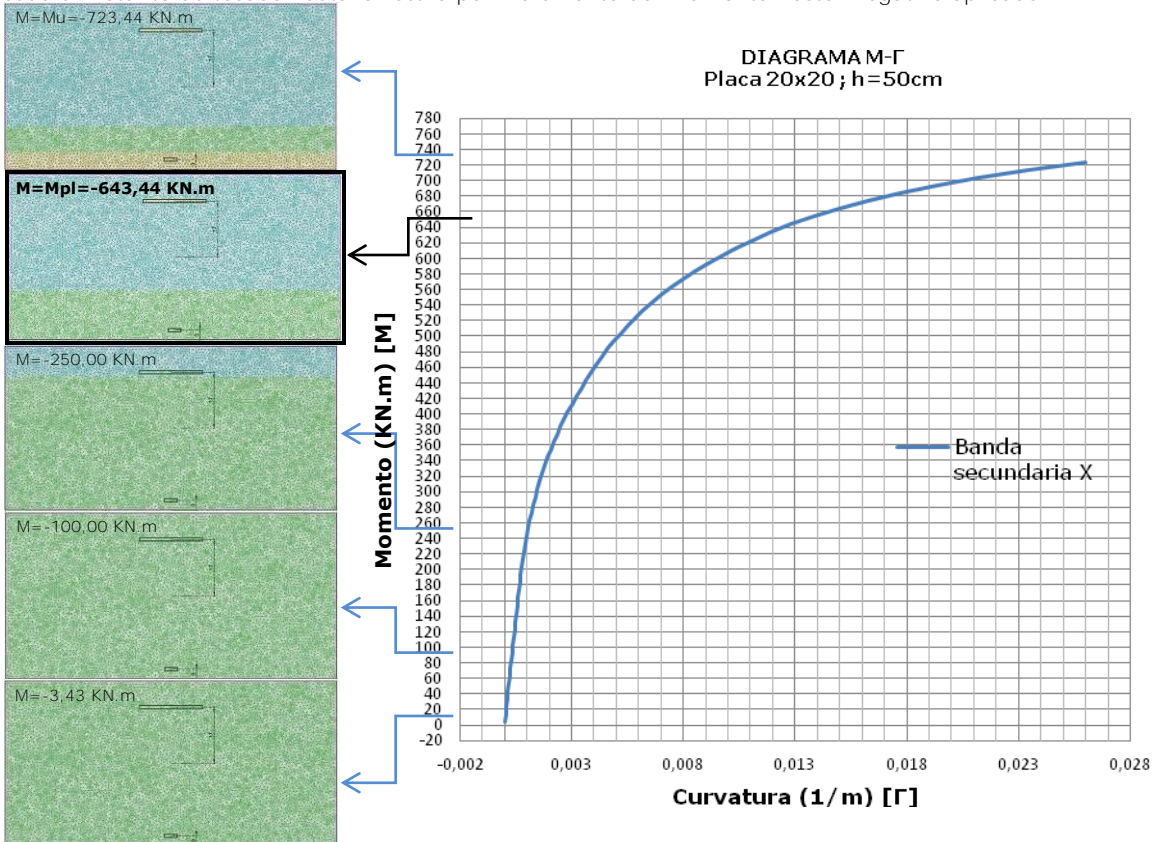


Figura 6-45. Evolución de la degradación material de la sección, dirección X, placa 20x20m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado

Banda principal (Y):

$$A_{p,x} = 17,360 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 31 \text{ Tendones de 4 cordones en total}$$

$$P_{2,x} = 1858,5 \text{ kN/m}$$

$$A_s = 3,927 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow 1\Phi 10\text{c}/20$$

$$M_{o,x} = +18,74 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

$$M_{u,x} = -721,27 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

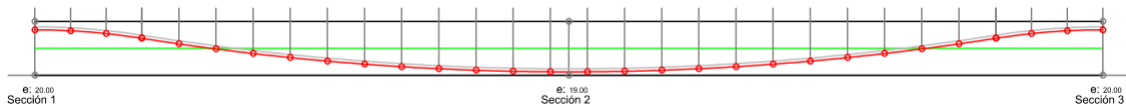


Figura 6-46. Trazado de la banda principal de armadura activa para la placa de 20x20 metros

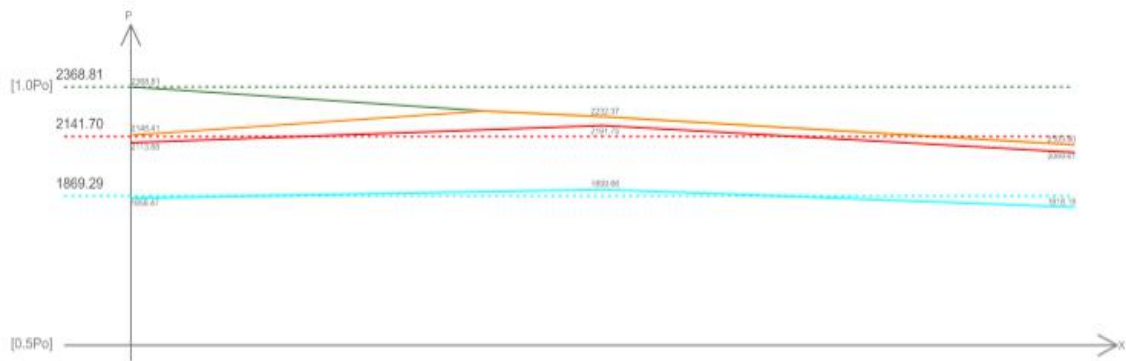


Figura 6-47. Evolución de las pérdidas de la fuerza de tesado total aplicada en la dirección Y para la placa de 20x20 metros

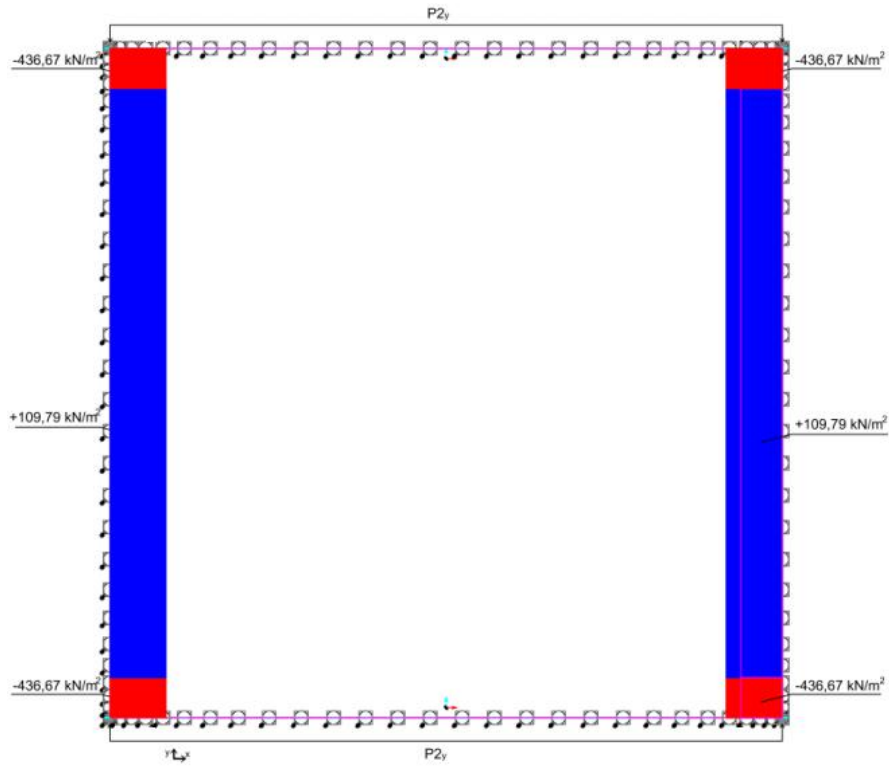


Figura 6-48. Cargas equivalentes en servicio propiciadas por el tesado de la banda principal de placa de 20x20m en la dirección Y

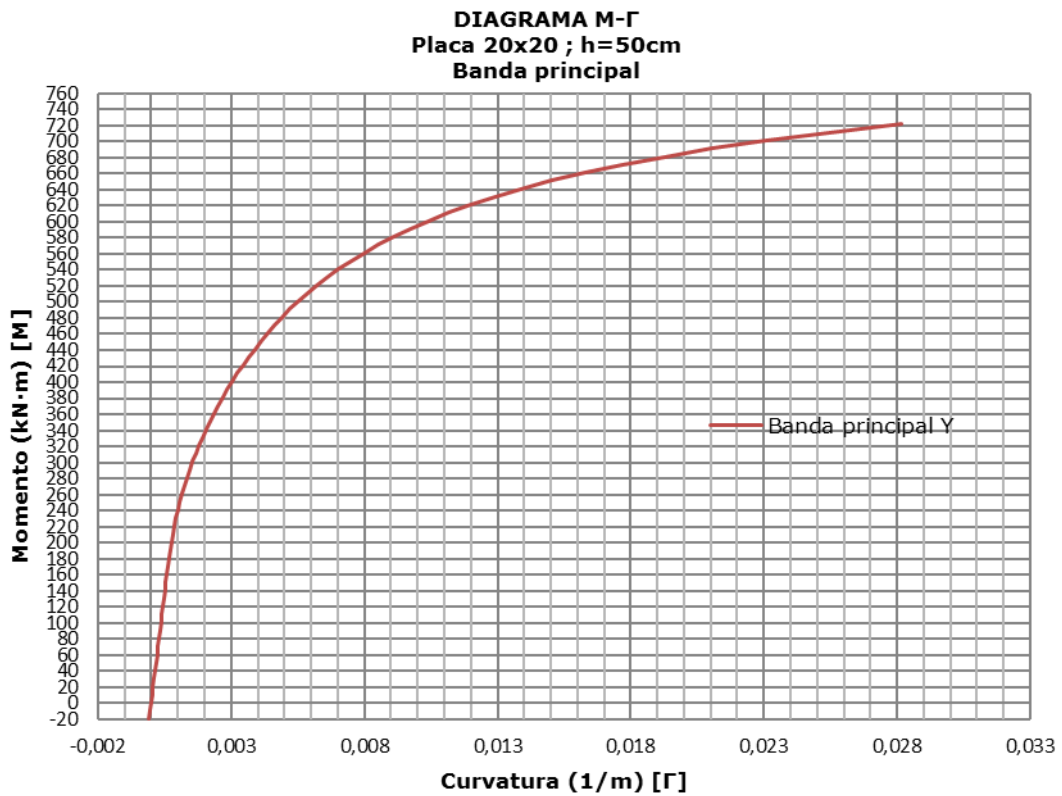


Figura 6-49. Diagrama momento curvatura de la sección crítica en la dirección Y del problema de placa de 20x20m

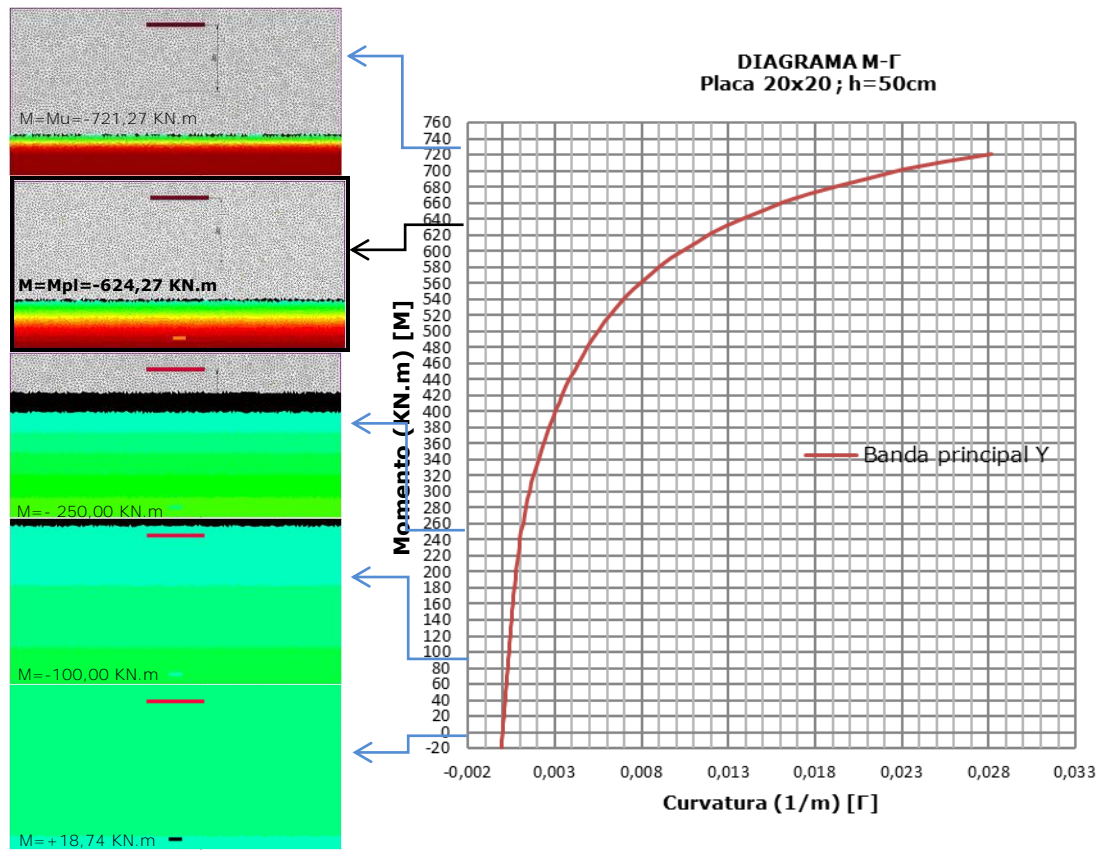


Figura 6-50. Evolución del estado de tensiones en la sección crítica de la dirección Y, placa 20x20m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado.

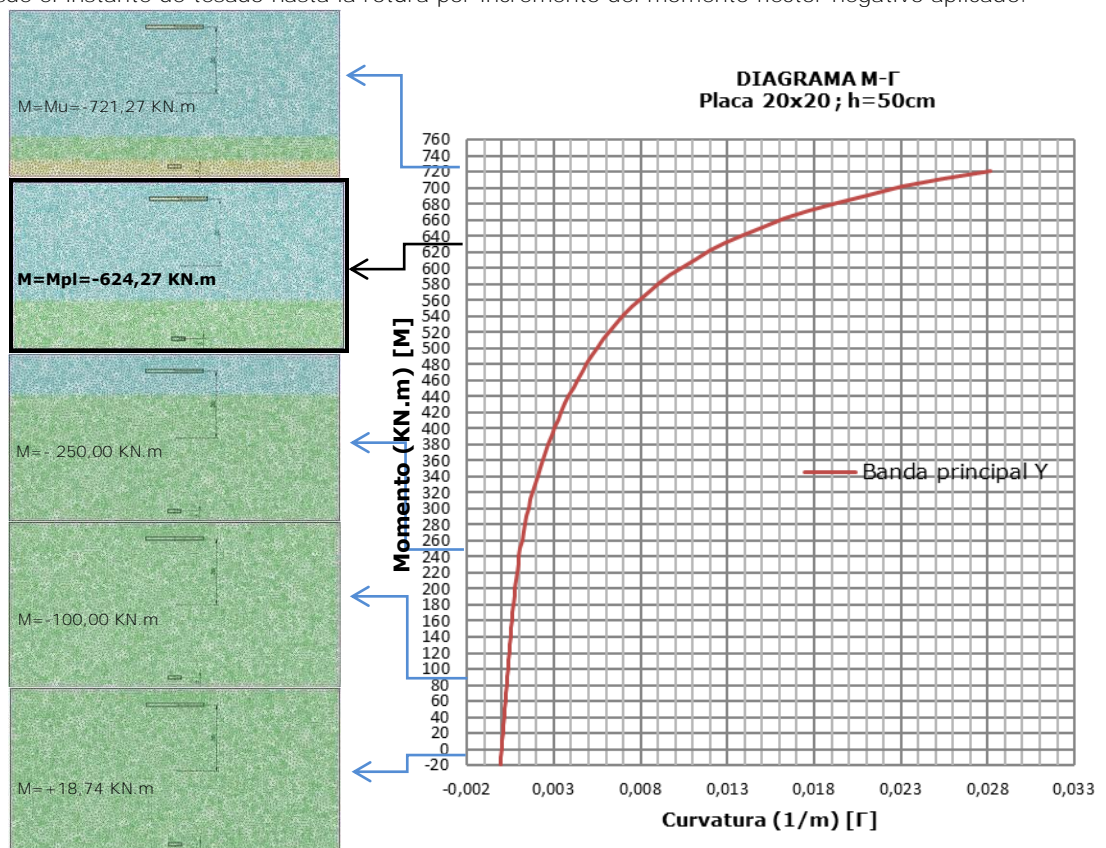


Figura 6-51. Evolución de la degradación material en la sección crítica, dirección Y, placa 20x20m, desde el instante de tesado hasta la rotura por incremento del momento flector negativo aplicado.

6.5.2 Naturaleza de la función momento-curvatura

El estudio de la relación entre momento y curvatura abordado para los problemas y secciones propuestos confirma que el tamaño del problema no incide substancialmente en la forma del diagrama momento-curvatura, la cual, moviéndose dentro de las escalas más habituales de los problemas de postesado adherente en la edificación, resulta cualitativamente estable.

Una conclusión clara e importante que el citado estudio de la relación entre momento y curvatura identifica también de entrada es que el ocaso de una sección postesada por aumento de la flexión, sin refuerzo pasivo adicional, se alcanza de forma muy paulatina. Esta circunstancia separa o diferencia la forma de degradación de las placas de hormigón armado, con un marcado carácter elasto-plástico, de la forma de degradación de las placas de hormigón postesado, lo que, como se verá con posterioridad, obliga a que los mecanismos de análisis no lineal de una losa postesada, considerando la degradación de sus secciones por flexión, sean ciertamente particulares.

En este sentido y dada la relevancia del asunto, se ha considerado interesante estudiar mejor la naturaleza de la progresividad del agotamiento de una sección postesada, intentando discernir si dicha progresividad obedece a la propia naturaleza de los materiales constituyentes o si obedece, en cambio, al efecto del pretensado.

Para ello se propone el estudio de la relación entre momento y curvatura de la sección crítica de la banda principal, respetando las cuantías de armadura obtenidas en el análisis de la losa de 12x12 metros detallado anteriormente, considerando cuatro escenarios:

<u>Escenario PT-A:</u>	Sección postesada en la que el tipo de acero de la armadura superior es el Y 1860 C. La fuerza de tesado se transmite a través de la armadura superior
<u>Escenario PT-P:</u>	Sección postesada en la que el tipo de acero de la armadura superior es el B 500 S. La fuerza de tesado se aplica como una acción exterior
<u>Escenario AR-A:</u>	Sección de hormigón armado en la que el tipo de acero de la armadura superior es el Y 1860 C. No se aplica fuerza de tesado
<u>Escenario AR-P:</u>	Sección de hormigón armado en la que el tipo de acero de la armadura superior es el B 500 S. No se aplica fuerza de tesado

Los tres últimos escenarios de la serie anterior son escenarios evidentemente teóricos que no pueden responder a una situación práctica real, pero permiten comprender mejor, mediante el estudio comparado con el primer caso, la naturaleza de las relaciones momento curvatura presentadas hasta aquí.



El primer escenario es, entonces, el práctico que ya ha sido estudiado en el apartado anterior, aunque también se recuerda sus resultados particulares en lo que sigue para facilitar la comparación.

En las condiciones citadas, los resultados obtenidos para cada uno de los escenarios son los siguientes:

6.5.2.1 Escenario PT-A

Sección postesada en la que el tipo de acero que conforma la armadura superior es el acero Y 1860 C (cable).

La fuerza de tesado se transmite de forma normal a través de la propia armadura superior.

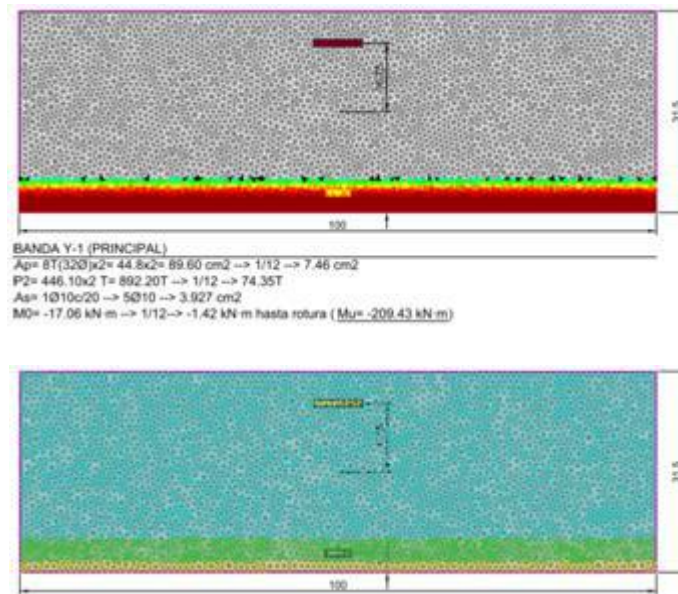


Figura 6-52. Distribución de tensiones y régimen de los materiales al alcanzar el momento último M_u en el escenario PT-A

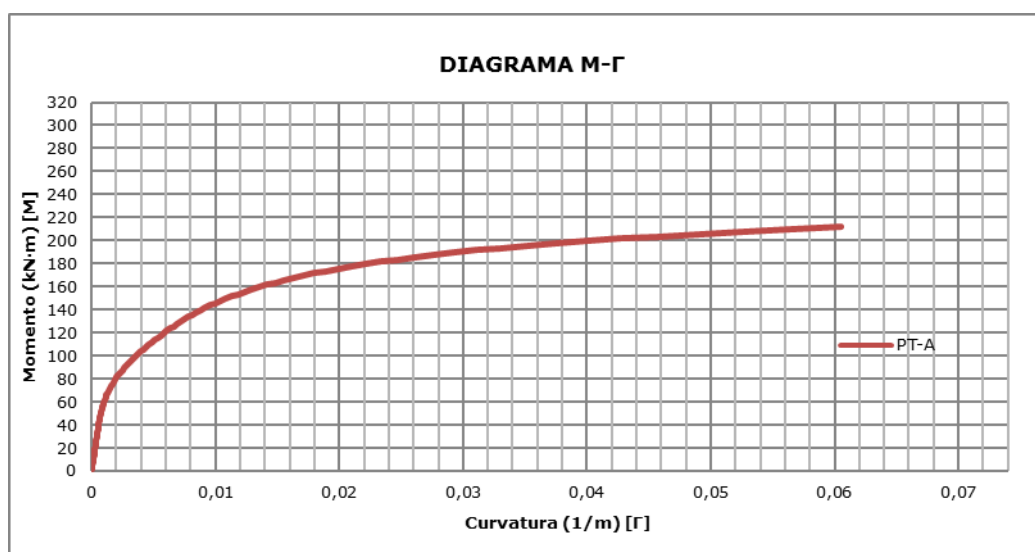


Figura 6-53. Diagrama momento-curvatura (M- Γ) en el escenario PT-A

6.5.2.2 Escenario PT-P

Sección postesada en la que el tipo de acero que conforma la armadura superior es el acero B-500 S (barra corrugada).

La fuerza de tesado se aplica como una acción exterior de compresión

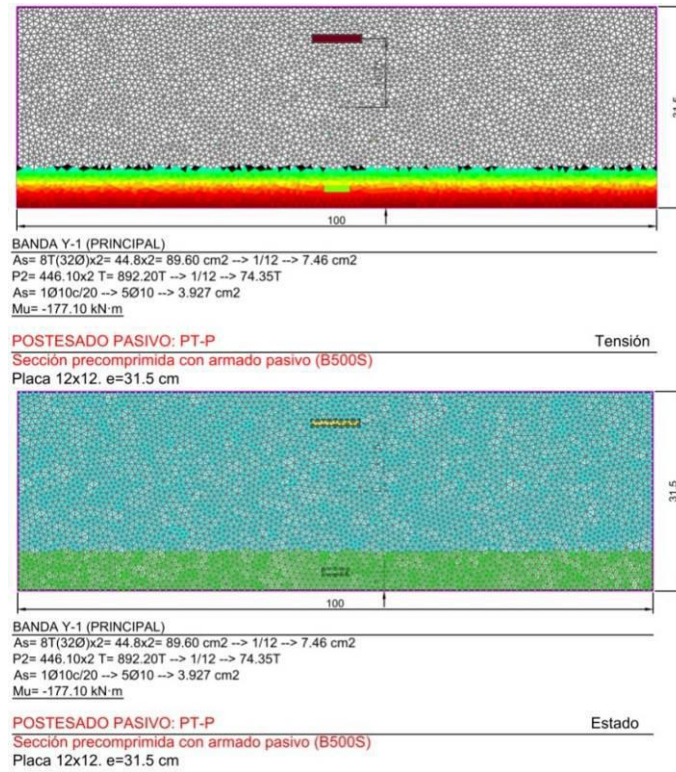


Figura 6-54. Distribución de tensiones y régimen de los materiales al alcanzar el momento último M_u en el escenario PT-P

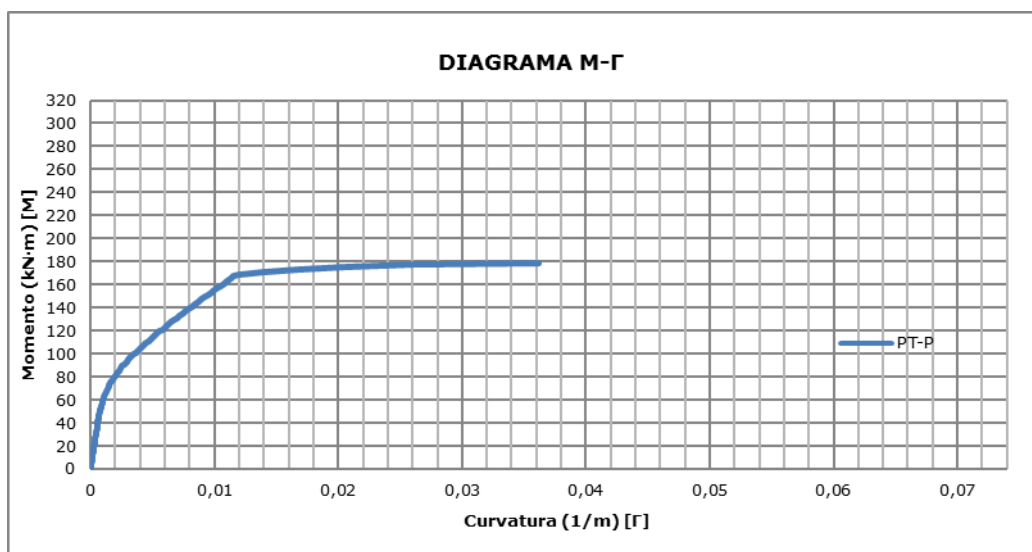


Figura 6-55. Diagrama momento-curvatura (M- Γ) en el escenario PT-P

6.5.2.3 Escenario AR-A

Sección de hormigón armado en la que el tipo de acero que conforma la armadura superior es el acero Y 1860 C (cable).

No hay fuerza de pretensado.

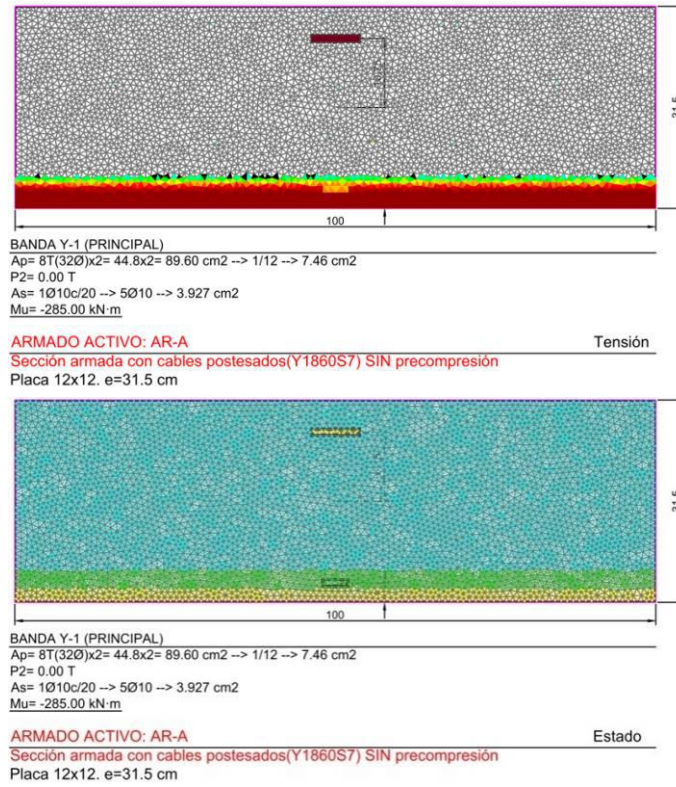


Figura 6-56. Distribución de tensiones y régimen de los materiales al alcanzar el momento último M_u en el escenario AR-A

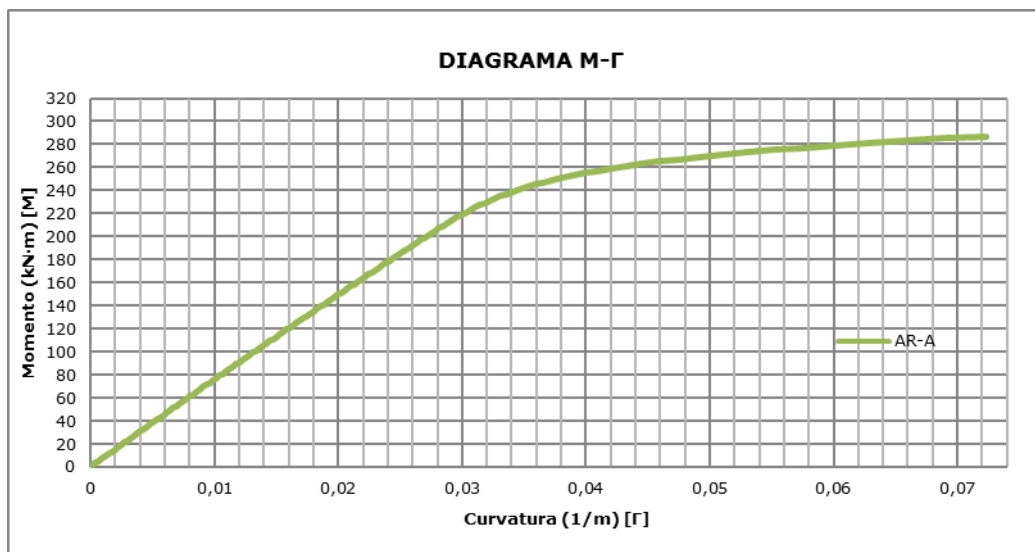


Figura 6-57. Diagrama momento-curvatura (M-Γ) en el escenario AR-A

6.5.2.4 Escenario AR-P

Sección de hormigón armado en la que el tipo de acero que conforma la armadura superior es el acero B 500 S (acero corrugado).

No hay fuerza de pretensado.

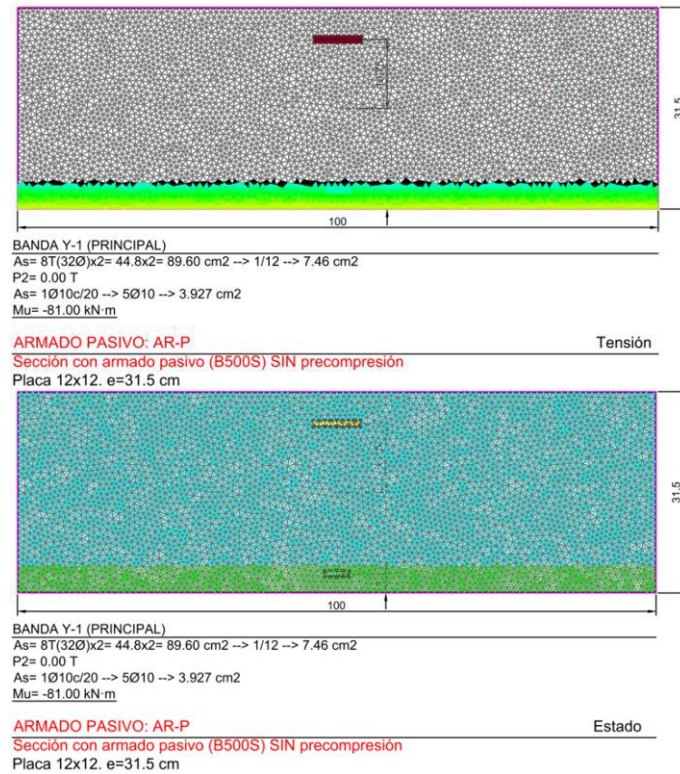


Figura 6-58. Distribución de tensiones y régimen de los materiales al alcanzar el momento último M_u en el escenario AR-P

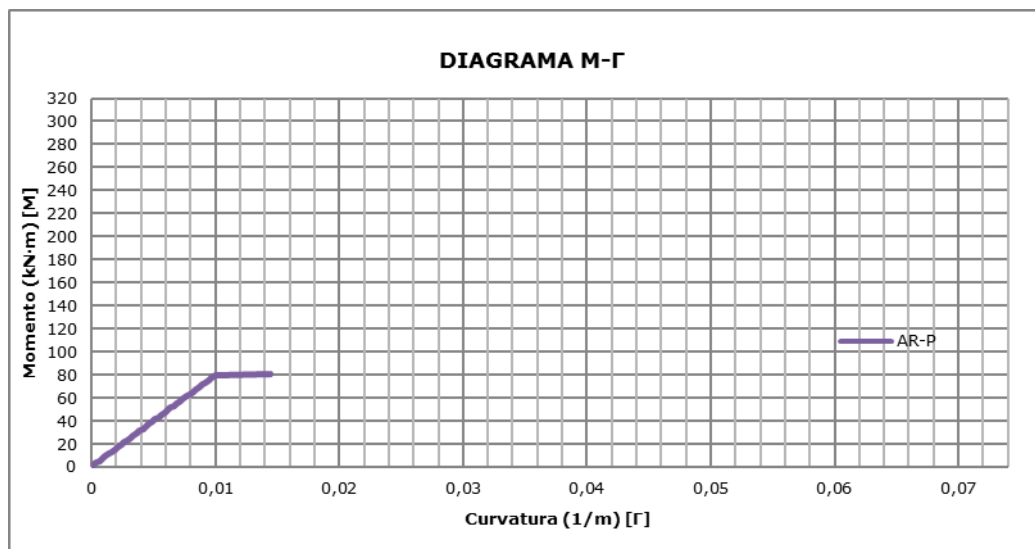


Figura 6-59. Diagrama momento-curvatura (M- Γ) en el escenario AR-P

6.5.2.5 Análisis comparativo

Cuando se alcanza el momento último la situación tensional de los materiales que constituyen cada una de las secciones o escenarios es la siguiente:

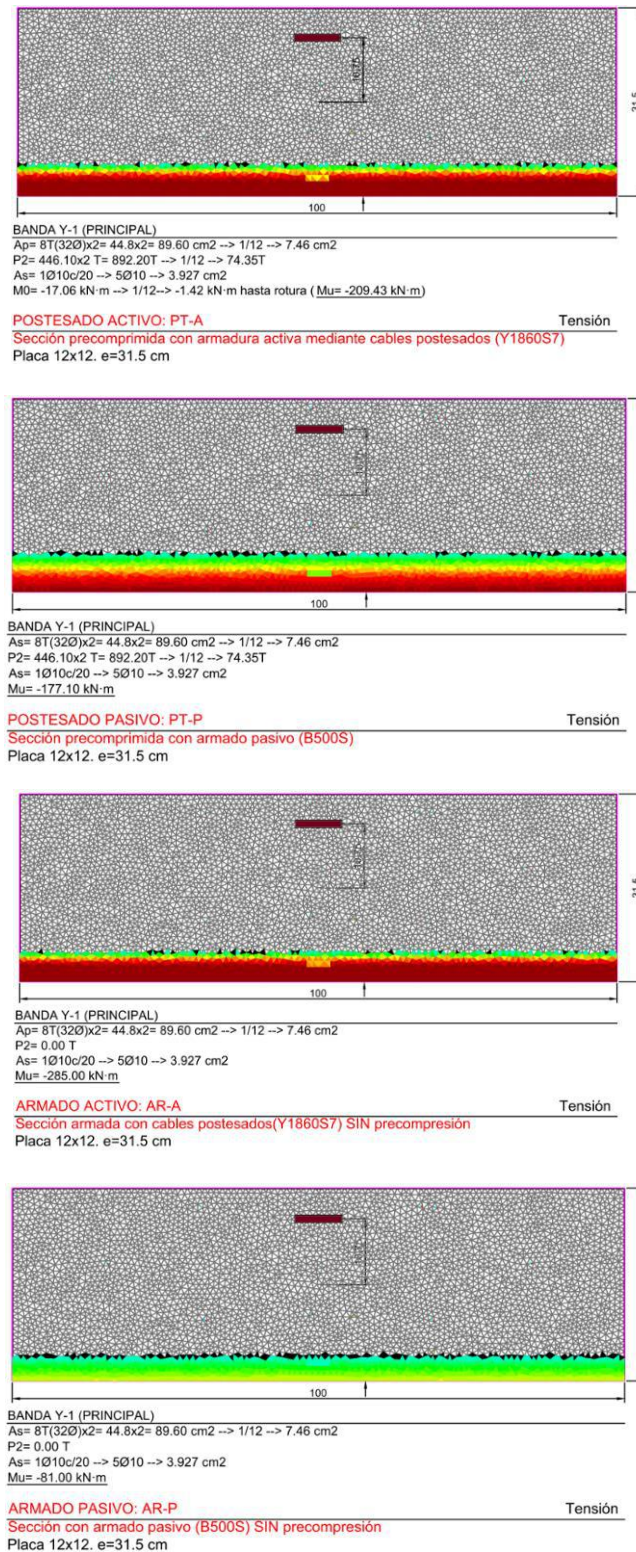


Figura 6-60. Comparación de la tensión material de los escenarios supuestos

Mientras que el estado de las partículas, en la misma situación última, resulta en cada caso el siguiente:

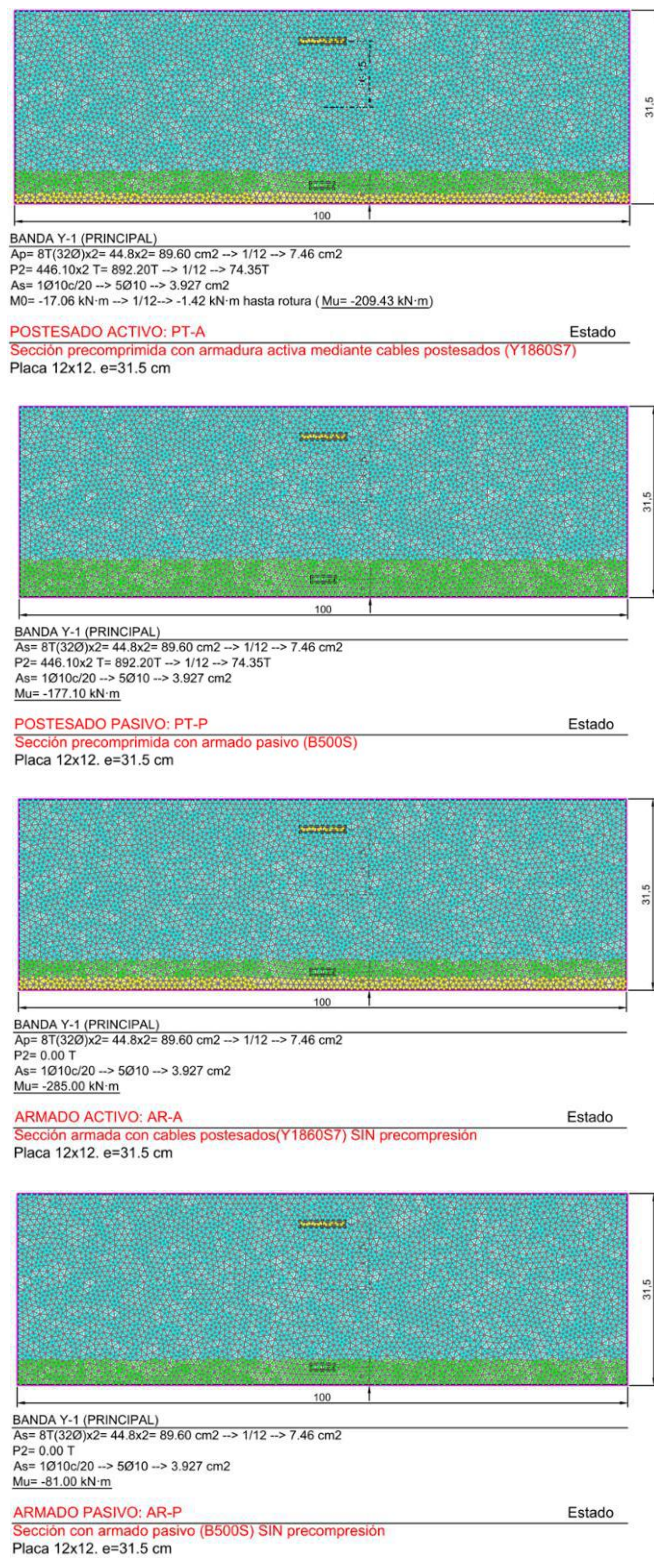


Figura 6-61. Comparación del régimen de los materiales en los escenarios supuestos

Por lo tanto, en todos los escenarios la cesión de la sección deviene por plastificación de la armadura superior, resultando además que en el escenario PT-A y AR-A hay unas pocas fibras del hormigón que se encuentran en régimen plástico.

La profundidad del bloque de hormigón comprimido es mínima en el escenario AR-P correspondiente a la de una sección de hormigón armado casi convencional. La profundidad máxima del bloque comprimido se da en el escenario PT-P, que se corresponde con una sección virtual postesada y armada con acero corrugado del tipo B-500 S.

Queda claro, analizando los dos casos que contemplan fuerza de compresión, que la presencia de esa fuerza (de tesado) mejora mínimamente la situación de la sección en rotura, al reducirse el número de partículas rotas por tracción, lo cual era en buena medida bastante predecible.

Resulta muy interesante solapar las funciones $M-\Gamma$ de cada uno de los escenarios en un mismo sistema de referencia, según se muestra en la imagen siguiente.

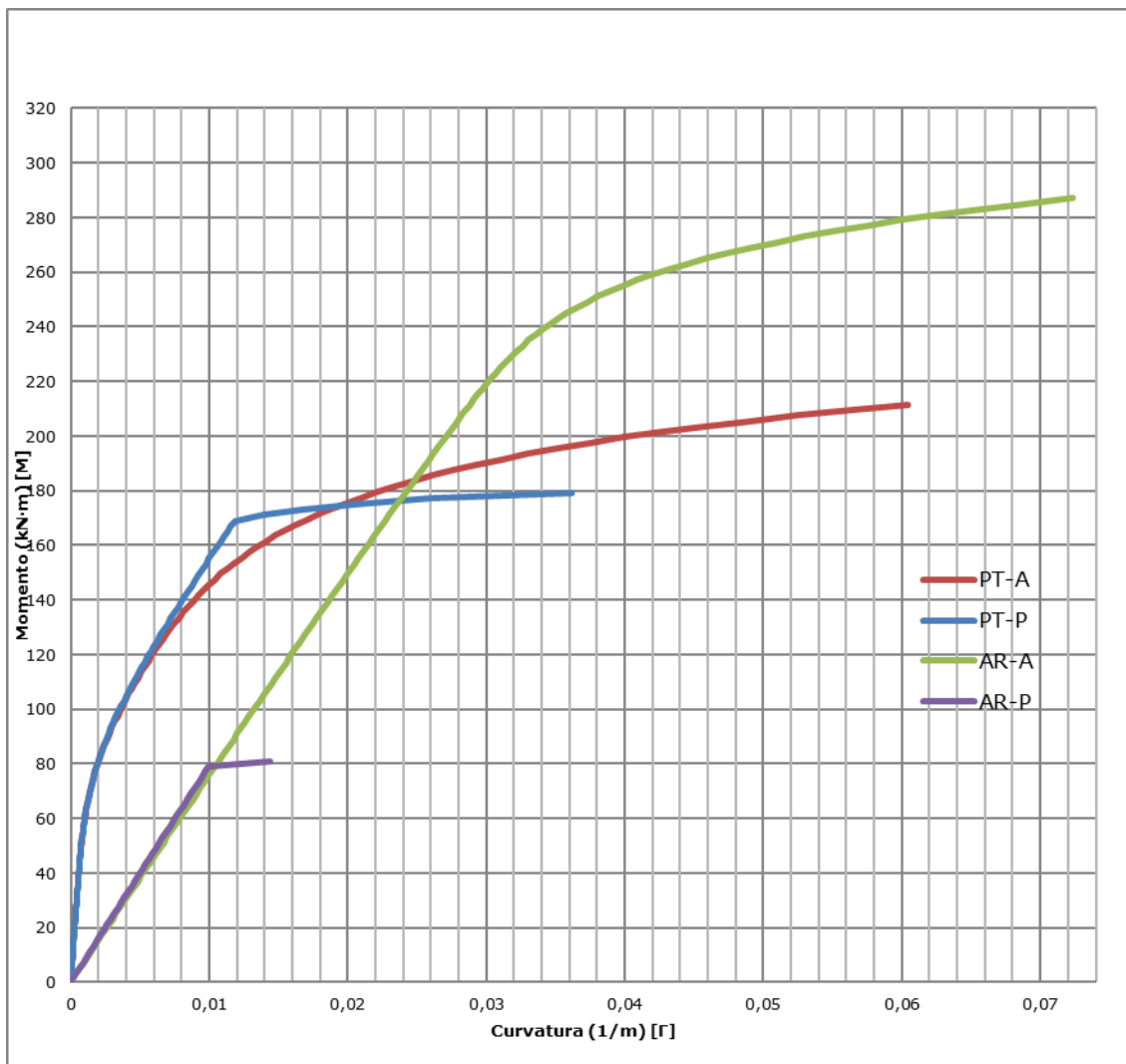


Figura 6-62. Comparación de las funciones $M-\Gamma$ para los diferentes escenarios estudiados

Aunque los resultados numéricos expuestos también lo indican, destaca en la figura anterior como el efecto de la acción de compresión en el escenario PT-P incrementa la resistencia de la sección armada con acero B-500S y como, en cambio, resulta mucho más resistente la sección del escenario AR (armada con acero Y 1860 C pero sin efecto alguno de precompresión) que la sección postesada convencional (escenario PT-A), sección, esta última, **en la que la armadura activa está "pre-agotada" por efecto de la acción de tesado**. La sección más resistente es, pues, la sección armada con acero Y 1860 C, pero sin incluir la fuerza de tesado.

Las dos secciones armadas con cables (acero del tipo Y 1860 C) resultan mucho más dúctiles en el sentido de que admiten mucho más giro antes de ceder, siendo incluso algo más dúctil la sección AR-A en la que no hay fuerza de tesado aplicada.

Las secciones con efecto de precompresión (PT-A y PT-P) se mantienen como más rígidas mientras el hormigón no se ha degradado de forma significativa por la tracción de sus partículas por encima de la fibra neutra. Esta afirmación se verifica si se toma un valor de curvatura fijo y se analiza el momento movilizado en cada sección tipo, lo que se ilustra en la imagen posterior.

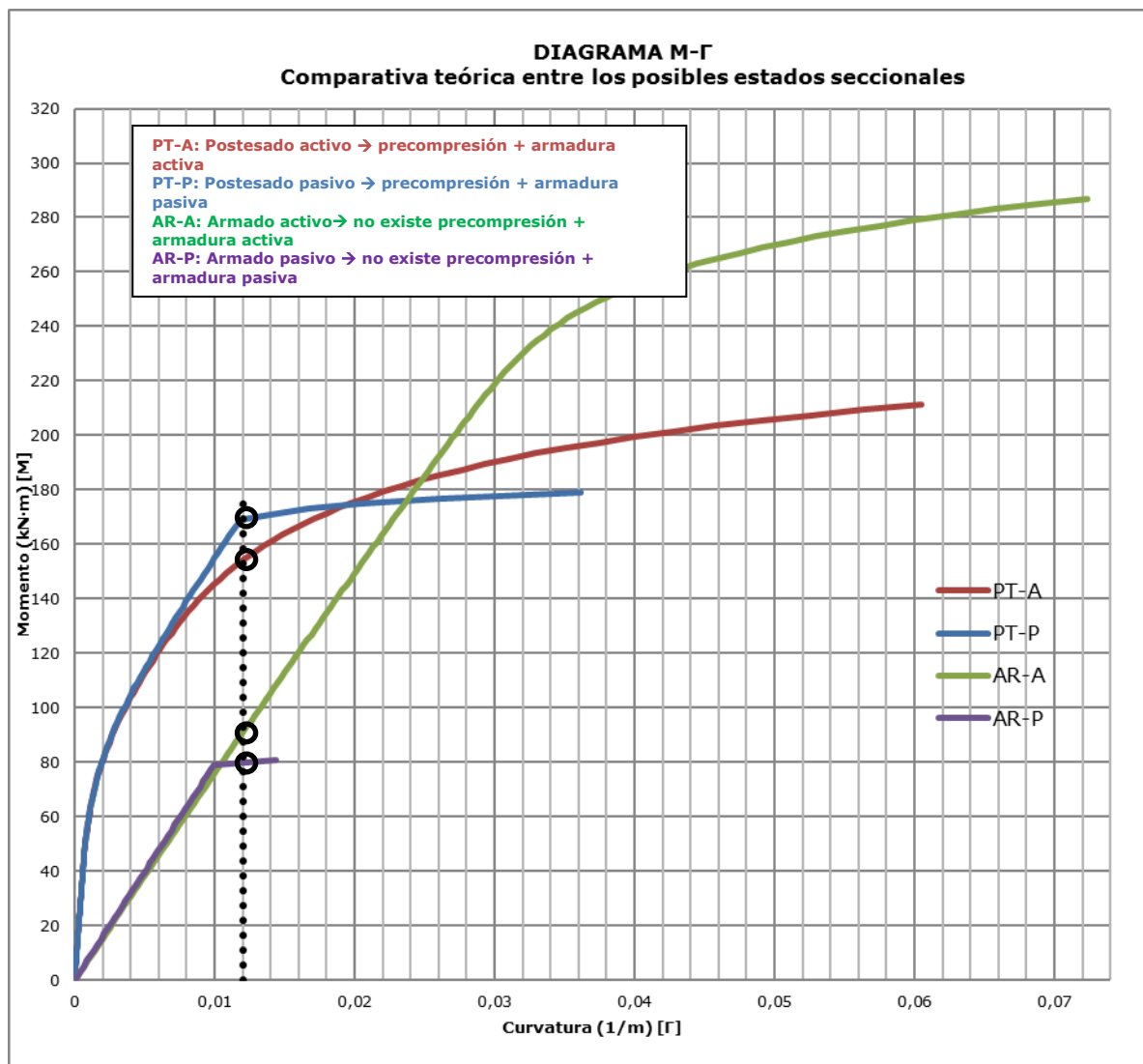


Figura 6-63. Momento obtenido en cada escenario o sección estudiada para una curvatura dada

Otro ejercicio interesante pasa por intentar trasladar las funciones de las secciones postesadas sobre las no postesadas pero armadas con el mismo tipo de acero, según se intenta mostrar en la figura posterior.

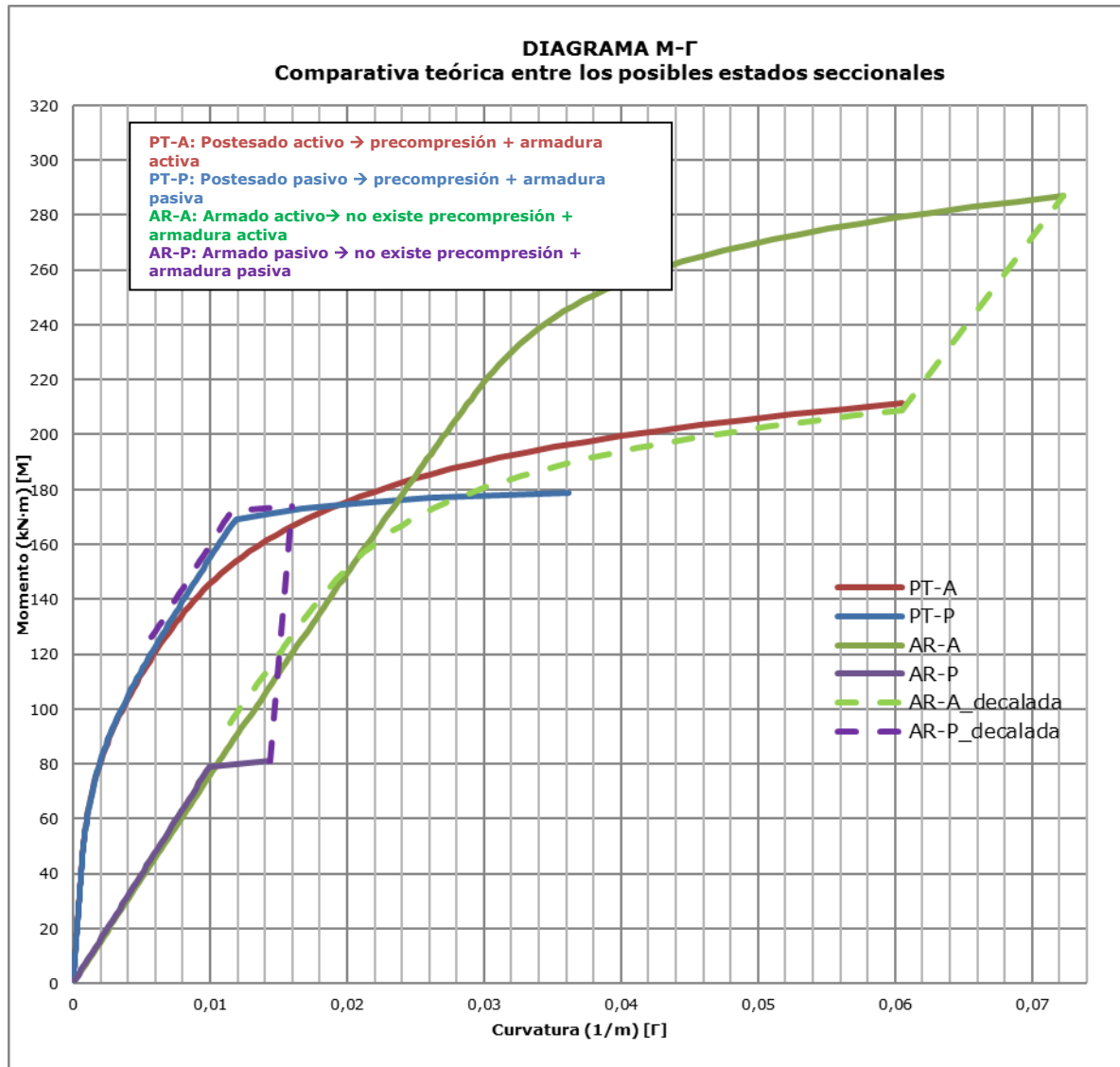


Figura 6-64. Comparación de la forma de las funciones M- Γ entre secciones pre-comprimidas y no pre-comprimidas

El ejercicio anterior demuestra que en las secciones postesadas la parte final de su comportamiento a flexión queda regida por las características mecánicas de su armadura en tracción y que, en cambio, al inicio de su historia de carga la presencia de la acción de pretensado juega un papel determinante que hace a las secciones más rígidas y, sobre todo, suaviza su forma de degradación general. Estas circunstancias se constatan de una forma particularmente fiel en la sección o escenario real PT-A

6.5.3 Aspectos clave de la relación entre momento y curvatura

El primer aspecto clave destacable del estudio de la relación $M-\Gamma$ en una sección postesada es, sin duda, por su trascendencia en el análisis general, la forma paulatina en la que se alcanza la rotura por flexión. Esta progresividad, se explica a partir de dos factores determinantes:

Primero, la incidencia de la acción de tesado en la fase inicial de servicio, acción que provoca una degradación continua del hormigón en tracción, no brusca, hasta que la profundidad del bloque comprimido va estabilizándose, lo que se puede observar en la serie de imágenes adjunta, correspondientes a la sección crítica de la dirección principal de la placa de 20x20m antes estudiada.

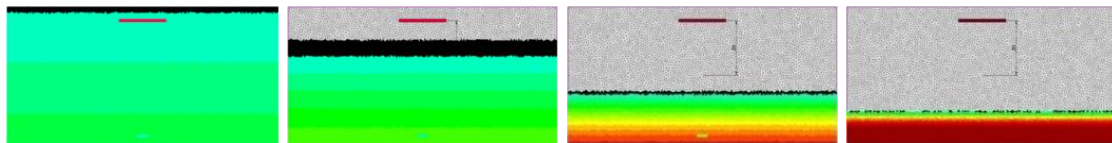


Figura 6-65. Evolución de las tensiones en una sección postesada sin refuerzo pasivo

Segundo, la influencia de la forma de plastificación de la armadura activa (formada por cables) en las fases finales de servicio; con el bloque comprimido estabilizado, es el estiramiento de la armadura activa el que condiciona el ocaso de la sección por flexión, según se puede entrever en esta otra secuencia de imágenes.

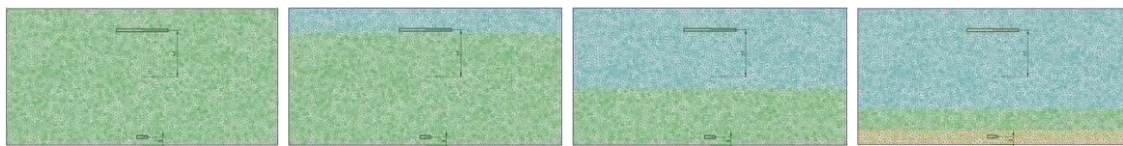


Figura 6-66. Evolución del régimen de los materiales en una sección postesada sin refuerzo pasivo

Resulta también interesante que, para momentos flectores no muy elevados, inferiores al 35% del momento último, las funciones $M-\Gamma$ **resultan cuasi lineales** pudiendo asumirse en estos tramos con todo el rigor un comportamiento lineal.

Debe destacarse, por último, que en el instante de cesión de la sección ni el hormigón ni la armadura han alcanzado realmente acortamientos o elongaciones que implican una rotura material; se trata por tanto de una cesión plástica, aunque es cierto que los materiales no distan mucho de su rotura.

6.6 El problema de las tensiones tangenciales

En base a lo expuesto en el capítulo cuarto, en la parte correspondiente al problema de placa, resulta también fundamental discutir cómo afecta la degradación de una sección postesada, por efecto de un aumento de la flexión, a la transmisión de las tensiones tangenciales que actúan sobre dicha sección, tensiones que, a la postre, definen el momento torsor de placa que la solicita.

En un cálculo elástico de placas convencional, sean éstas de hormigón armado o de hormigón postesado, aunque está claro que un número indefinido de secciones van a presentar fisuración, no se discute la incidencia de la fisuración en equilibrio de las tensiones tangenciales. De hecho, la incidencia de la referida fisuración apenas se repercute en los cálculos habituales en el mundo profesional incrementando, mediante formas simplificadas, las deformaciones causadas por la flexión.

Sin embargo, si se pretende tener en cuenta la forma de degradación de las secciones en el análisis de placas, resulta obligado estudiar que sucede en lo referente a las tensiones tangenciales, a medida que los momentos flectores crecen, y las eventuales consecuencias en el planteamiento de la ecuación general de equilibrio del problema.

A nivel diferencial o a nivel de partícula, si se sigue con los modelos propuestos en apartados precedentes, la afección de la elongación del hormigón sobre la capacidad de transmisión de tensiones tangenciales de esa misma partícula no se produce hasta el instante en que el hormigón fisura.

Por tanto, no hay afección alguna en todas aquellas partículas que están en compresión **y en todas aquellas que presentan una elongación, ϵ_{cr}** , tal que la tensión de tracción del hormigón es inferior a la admisible. A estos efectos, en el presente trabajo, dado que se trata esencialmente, como se irá viendo, de una cuestión de rigidez, se ha considerado que no hay afección alguna si la tensión del hormigón en tracción resulta inferior la resistencia media del hormigón a tracción, $f_{ct,m}$, en los términos definidos por la instrucción EHE-08:

$$f_{ct,m} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3}$$

Cuando se alcanza la tensión de tracción límite, $f_{ct,m}$, se produce una pérdida súbita de rigidez, pero no completa. El estudio de esa pérdida de rigidez ha ocupado muchos trabajos de investigación **vinculados al efecto conocido como "Tension Stiffening"**. De las referencias consultas por esta parte en relación a esta cuestión, cabría destacar las siguientes:

· KHALFALLAH, S. et GUERDOUH, D. (2014) *Tension stiffening approach in concrete of tensioned members*

En: International Journal of Advanced Structural Engineering

· LAM, J. Y. K., Ng, P.L., et KWAN, A.K.H. (2010) *Tension stiffening in concrete beams, Part 2: member analysis*

En: Structures and buildings

· TORRES, L.I, LÓPEZ-ALMANSA, F. et BOZZO, L.M. (2004) *Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members*

En: Journal of Structural Engineering



Sea como fuere, una de las relaciones más aceptadas para calibrar la pérdida de rigidez del hormigón en tracción es la establecida por Damjanic y Owen en 1.984. [DAMJANIC y OWEN, 1984], relación de la que se puede deducir que la pérdida completa de rigidez entre tensión tangencial y distorsión angular, a nivel diferencial, se alcanza de forma lineal según describe la siguiente función:

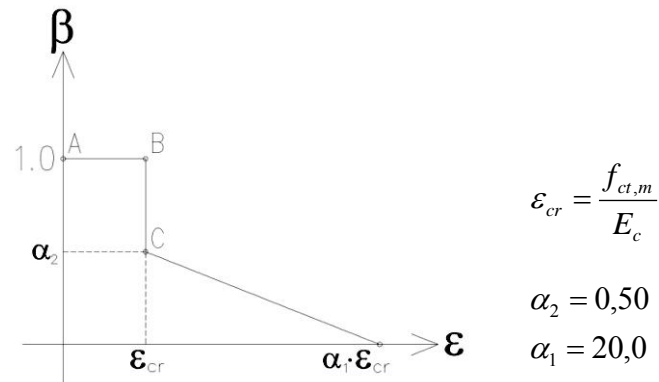


Figura 6-67. Variación del coeficiente β en función del alargamiento del hormigón

En la función anterior el factor β , el cual en adelante quedará referido como *coeficiente de retención de la rigidez frente a tensiones tangenciales*, afecta al término diferencial de rigidez frente a tensiones tangenciales de la siguiente forma:

$$\tau = \beta \cdot G \cdot \gamma$$

El sostenimiento y degradación paulatina de la rigidez una vez rebasada la **deformación crítica**, ϵ_{cr} , se explica a partir de la consideración de dos mecanismos de equilibrio de las tensiones tangenciales aceptados en el análisis de secciones de hormigón en fisuración: el primero, el cosido de los labios de la fisura por la existencia de armaduras y, el segundo, la trabazón geométrica de los referidos labios de fisura debido a que sus superficies resultan necesariamente quebradas e idénticas. Ambos mecanismos quedan ilustrados en las dos imágenes posteriores.

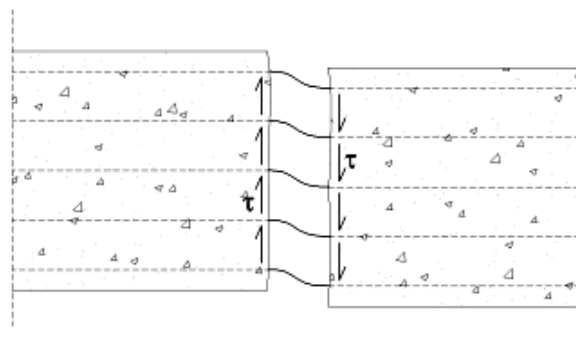


Figura 6-68. Transmisión de tensiones tangenciales a través de los labios de la armadura por efecto del cosido

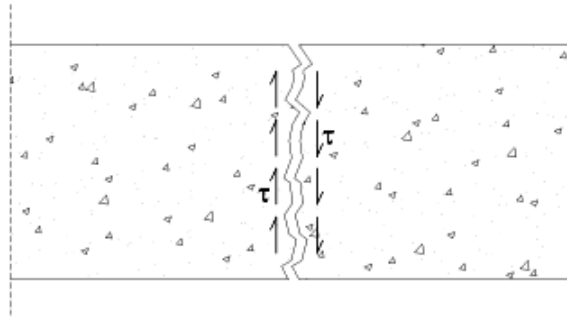


Figura 6-69. Transmisión de tensiones tangenciales a través de los labios de la fisura por efecto del "engranamiento" entre superficies

El trabajo de referencia [MOYA, L., 2003] ya recogía este comportamiento a nivel diferencial, a partir del cual se articulaba un estudio de sus posibles efectos integrados a nivel de sección completa en diferentes escenarios límite de sollicitación de las secciones de placa de hormigón armado más comunes. Sin embargo, la existencia de la fuerza de tesado, en el caso de las placas de hormigón postesado, provoca una casuística mucho más abierta que obliga a que el estudio integral debe particularizarse sección por sección.

En este sentido, el análisis de las secciones por partículas expuesto anteriormente permite fijar con total precisión dentro del modelo propuesto el valor de coeficiente de retención de la rigidez frente a tensiones tangenciales de cada partícula, $\beta_{c,i}$, para su elongación particular, $\epsilon_{c,i}$.

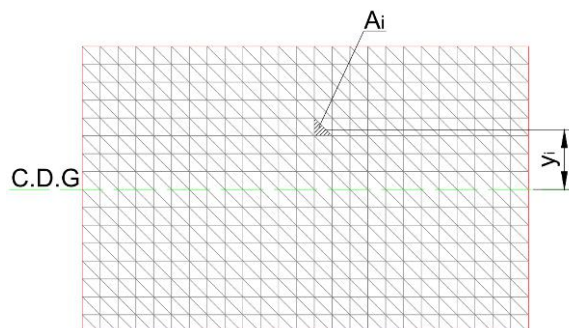


Figura 6-70. Discretización en partículas de una sección para su análisis no lineal en flexo-compresión en las que se puede controlar $\epsilon_{c,i}$

Al tratarse de un problema de placas en el que una porción diferencial de placa queda sometida a dos momentos flectores genéricamente distintos, cada elemento diferencial, entendido de forma tridimensional, puede presentar dos estados de elongación, ϵ_{cx} y ϵ_{cy} , estados de elongación que pueden alterar eventualmente la rigidez transversal del propio elemento diferencial frente a un par de tensiones horizontales y tangenciales idénticas, según se pretende ilustrar en la imagen siguiente.

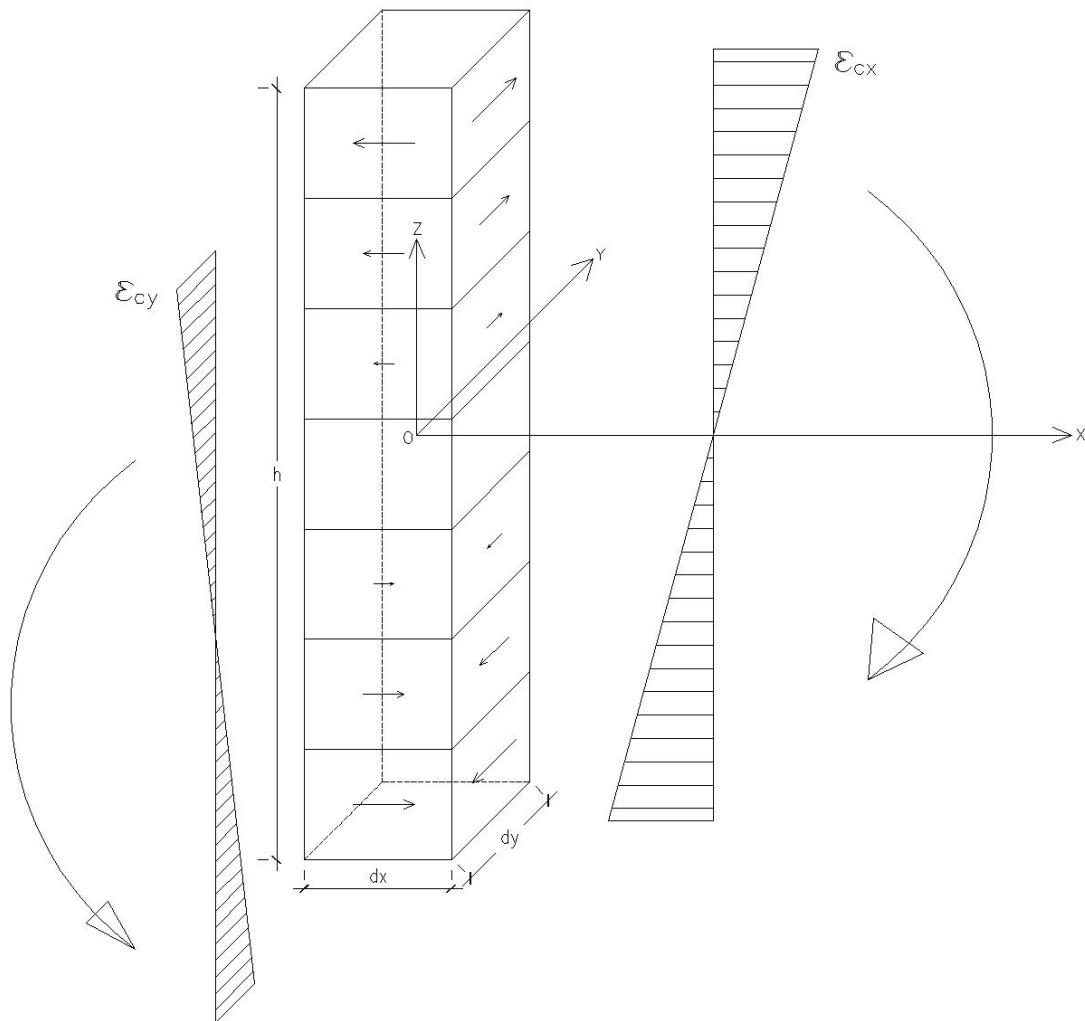


Figura 6-71. Estado general de elongación y de sollicitación tangencial en una placa de hormigón armado en términos diferenciales

A los referidos estados de elongación le corresponden, de entrada, dos valores diferentes del *coeficiente de retención de la rigidez frente a tensiones tangenciales* de cada partícula, identificados aquí como: $\beta_{cx,i}$ y $\beta_{cy,i}$.

Dado que las tensiones tangenciales horizontales deben resultar de igual valor, por el principio de reciprocidad, el coeficiente que regirá el comportamiento de la partícula en cuestión será el mínimo de los dos, en adelante: $\beta_{cmin,i}$.

6.7 Cálculo e incidencia del refuerzo pasivo

6.7.1 Equilibrio del estado límite último

Como se ha visto en el capítulo quinto, el cálculo de las armaduras activas queda referido, de entrada, únicamente al equilibrio de los estados límites de servicio, de cara asegurar ciertas condiciones en la sollicitación normal del hormigón de cada sección transversal; primero, en el instante de tesado (situación de vacío) y, después, en la situación de servicio, ya en plana carga.

La armadura activa así obtenida no se modifica, y el análisis del equilibrio de los estados límites últimos, donde ya se introduce la combinatoria de cargas y los preceptivos coeficientes de mayoración, se orienta a conocer si dicha armadura resulta suficiente o, por el contrario, se requiere de un refuerzo adicional. Este eventual refuerzo adicional queda concebido normalmente a partir de la colocación de armaduras pasivas (barras de acero corrugado).

Existen varias formas simplificadas para el cálculo de los refuerzos pasivos posiblemente necesarios para satisfacer el *estado límite último* de turno, incluso manuales, pero el método propuesto en el apartado 6.4 del presente trabajo con toda generalidad permite su cálculo riguroso a partir del estudio evolutivo de la sección, cuyas etapas básicas quedan recogidas en las siguientes imágenes.

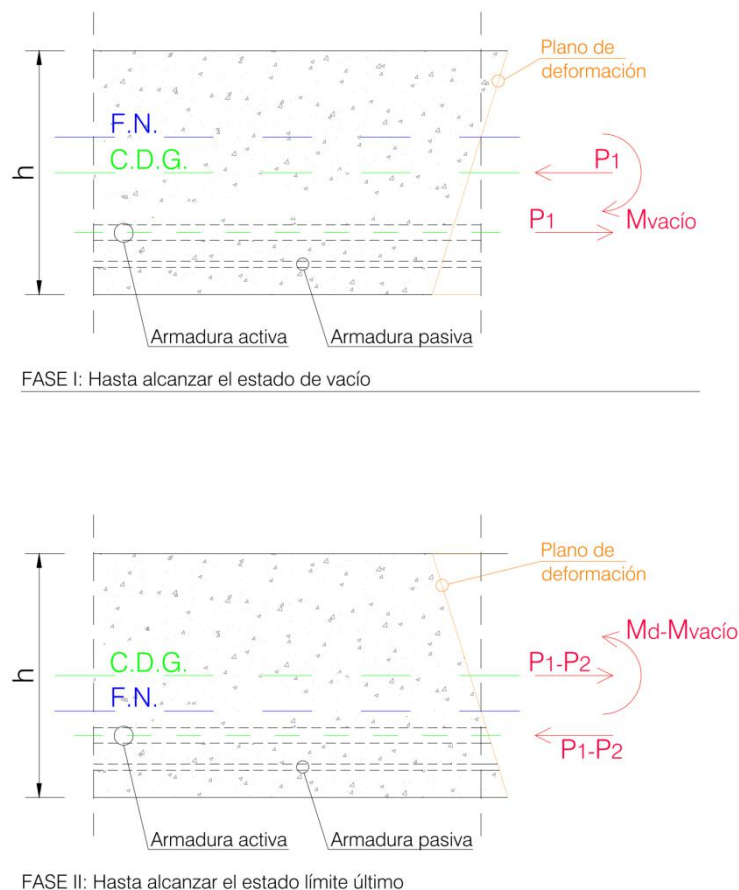


Figura 6-72. Fases de carga de una sección postesada hasta alcanzar el momento flector de diseño, M_d , correspondiente a los estados límites últimos

En la figura anterior la Fase II incluye como momento actuante ya el total de M_d , a diferencia de lo detallado en la figura 6-4, en donde el momento actuante quedaba más abierto.

Cada una de las dos etapas de cálculo supone un análisis no lineal específico de la sección, convenientemente discretizada en partículas bajo los principios expuestos. Ambos análisis pueden quedar organizados como recoge el siguiente diagrama de flujo:

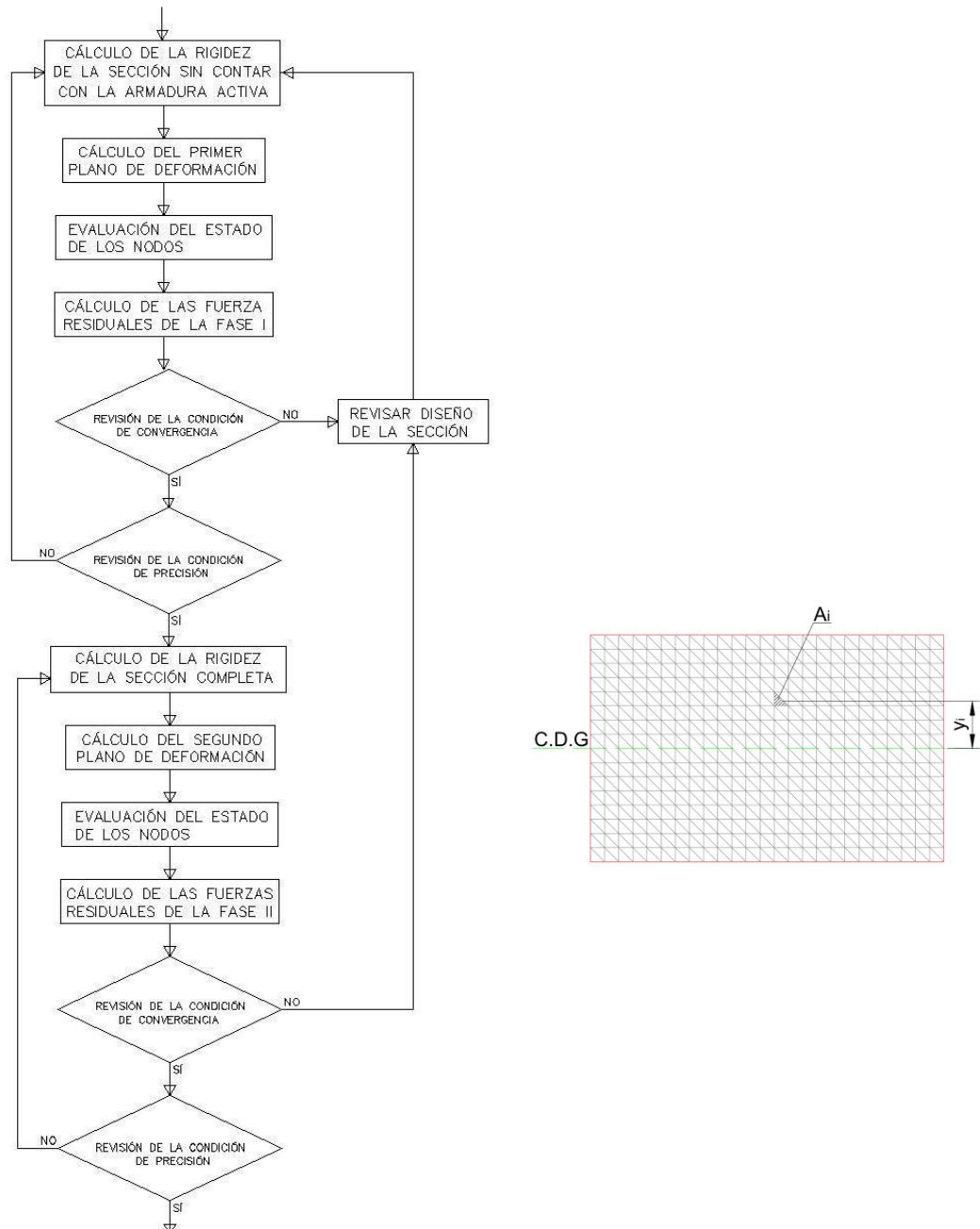


Figura 6-73. Organización adoptada para el análisis evolutivo no lineal de las secciones reforzadas con armaduras activas y pasivas

El modelo anterior ha sido el adoptado en el presente trabajo no sólo para el análisis estricto del estado límite último, sino también para el análisis detallado de la degradación de las secciones reforzadas, incluyendo la determinación de sus relaciones momento-curvatura ($M-\Gamma$), en aquellos casos en los que deliberadamente se dispone menos refuerzo del estrictamente necesario, según se verá con posterioridad.

6.7.2 La presencia de las armaduras pasivas. Afección sobre la relación entre momento y curvatura

El estudio da la evolución de la relación momento-curvatura ($M-\Gamma$) en una sección postesada a medida que se va introduciendo en ella más armadura pasiva, demuestra que, lógicamente, la presencia creciente de refuerzos pasivos va acercando en algo la forma de dicha relación a la de una sección de hormigón armado, aunque se mantienen genéricamente diferencias notables.

En la imagen posterior se muestra las relaciones momento curvatura, obtenidas con el modelo propuesto líneas arriba, para la sección crítica unitaria en la dirección principal, Y, obtenida en el cálculo de la placa de 12 por 12 metros mostrado en el apartado 6.5.1.1, para diferentes cantidades o cuantías de refuerzo pasivo.

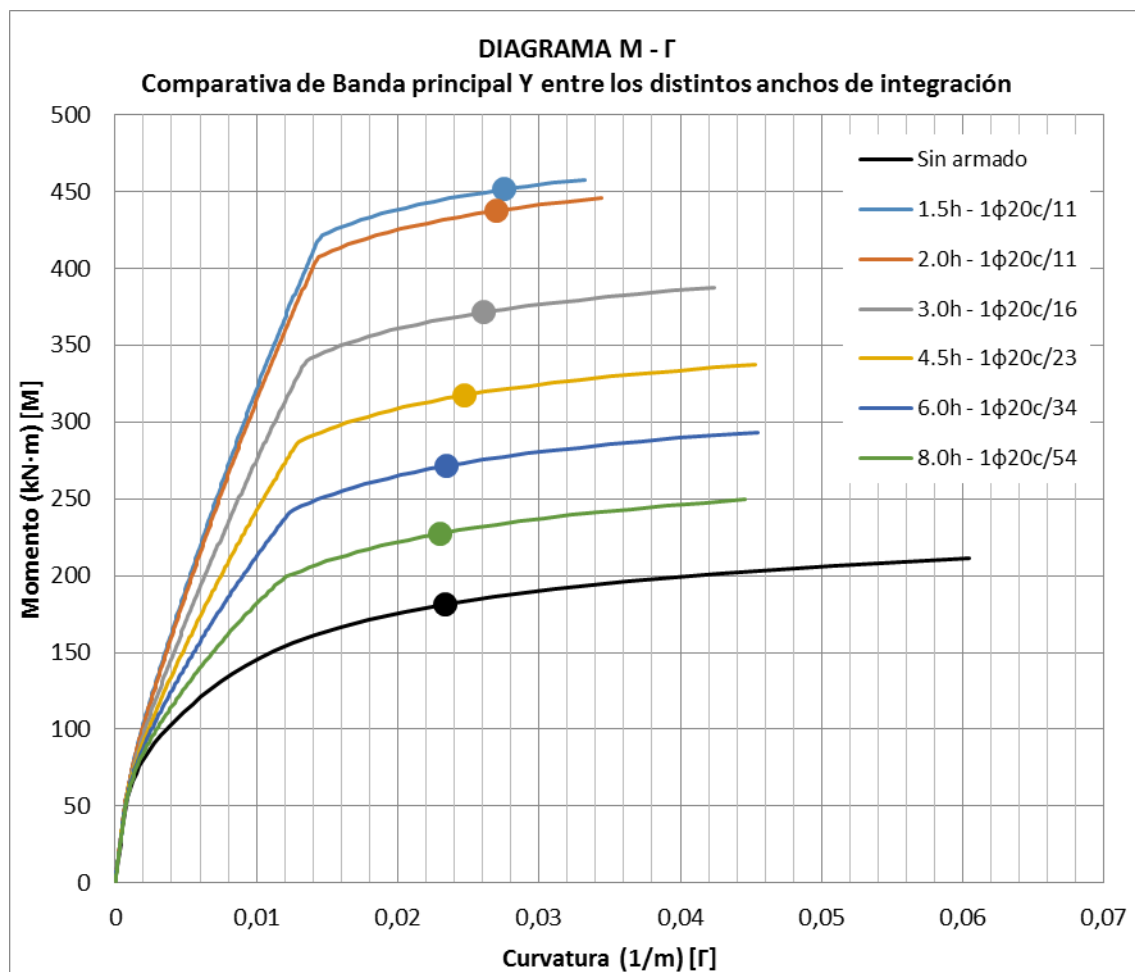


Figura 6-74. Relación ($M-\Gamma$) en una sección postesada de 100x31,5cm en función de la cuantía de armadura pasiva de refuerzo presente en ella

En primera instancia se puede apreciar cómo, obviamente, el aumento del refuerzo incrementa el valor del momento último. Además, el referido aumento de refuerzo provoca un comportamiento progresivamente más escalonado, en el que se va identificando de forma cada vez más clara un primer punto de cesión plástica de la sección que queda directamente relacionado con la plastificación de la armadura pasiva.

Así, a la izquierda de los primeros puntos de cesión, las funciones $M-\Gamma$ pierden curvatura a medida que se incrementa la cantidad armadura pasiva considerada, mientras que a la derecha de los citados puntos las funciones $M-\Gamma$ mantienen íntegras sus curvaturas, regidas ya únicamente por el comportamiento de la propia armadura activa.

Los círculos de color indican en cada caso el punto de cesión plástica de la armadura activa, el cual se da bastante después de la entrada en plastificación de la armadura pasiva, habiéndose incrementado la curvatura, por lo menos, del orden del 75%. Esta es una cuestión clave que, como se irá aclarando, da también sentido en alguna parte a la tesis aquí propuesta.

Resultan también interesantes otros dos fenómenos:

- Los primeros puntos de cesión de las funciones, aparecen siempre en valores de curvatura cercanos: para una misma posición de la armadura pasiva, aunque se cambie su cantidad, una misma curvatura provoca efectos parecidos.
- La mayor presencia de armadura pasiva reduce la ductilidad de cálculo de la sección (al menos, si se entiende ésta como la capacidad de rotación de la sección antes de su fallo). Por tanto, la ductilidad límite viene limitada por la cantidad de refuerzo pasivo.

6.7.3 La insuficiencia de refuerzo en términos de sección

Si lo que se pretende es disponer menos armadura de refuerzo en las zonas críticas, es fácil anticipar una primera y evidente consecuencia mediante la observación de las funciones anteriores: ante una sollicitación dada, la insuficiencia de refuerzo pasivo va a provocar un incremento súbito de la curvatura pero no incontrolado.

La conclusión anterior no por obvia deja de ser menos relevante, ya que de ella también se deduce la conveniencia de que el análisis no lineal de placas de hormigón postesado deba quedar basado en un modelo que tenga en cuenta la progresividad de la degradación de sus secciones, incluso en aquellas secciones que contengan más o menos cantidad de refuerzo pasivo, no resultando por tanto válido un modelo elasto-plástico.



6.8 Conclusiones del capítulo

Las secciones de hormigón postesado, sin presencia de armaduras pasivas, presenta una degradación muy paulatina, debido a dos aspectos fundamentales:

- La fuerza de precompresión provoca que la fibra neutra presente un movimiento gradual, a medida que se aumenta la sollicitación de flexión, hasta que la posición de la mencionada fibra queda más o menos estabilizada.
- Cuando la posición de la fibra neutra ha quedado más o menos estabilizada, el comportamiento mecánico de la armadura activa, cuya propia degradación resulta bastante progresiva, rige la forma de deterioración de la sección para las sollicitaciones mayores.

En consecuencia, la rigidez de una sección de hormigón postesado varía de forma progresiva en función de su nivel de sollicitación, aunque resulta destacable que, por debajo de cierto umbral, hasta que no se produce una mínima fisuración en la zona en tracción de la sección, el comportamiento resulta casi lineal.

La degradación por flexión afecta al equilibrio de los momentos torsores, al "desaparecer" parte de la sección por efecto de la fisuración, aunque en la región fisurada se puede tener en cuenta parte de la contribución del hormigón, en función de su alargamiento longitudinal analizado de forma diferencial en cada una de las direcciones principales del problema.

La presencia de refuerzo pasivo y su eventual incremento provoca que la degradación de las secciones de hormigón postesado pierda progresividad, aunque, ni en el caso de que las cantidades de refuerzo pasivo sean muy elevadas, se reconoce nunca un tramo plástico perfecto en el estudio de las relaciones momento curvatura ($M-\Gamma$).

La plastificación de la armadura pasiva adviene con curvaturas muy inferiores a las requeridas para que la armadura activa alcance el alargamiento de plastificación, lo que acentúa la no linealidad del problema general propuesto, aun permaneciendo la armadura activa en régimen elástico merced a la colocación de refuerzos pasivos.

Como conclusión última cabe decir que, en el presente capítulo, ha quedado demostrado que el análisis no lineal de placas de hormigón postesado debe basarse en un modelo general de cálculo que considere de forma rigurosa la degradación más o menos paulatina de sus secciones críticas, como el que se propone en el siguiente capítulo.



7 ANÁLISIS NO LINEAL DE LOSAS POSTESADAS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

7.1 Organización general del problema

En el capítulo anterior ha quedado acreditada la progresividad con la que evoluciona la rigidez de una sección postesada al someterla a la acción creciente de un momento flector y como, además, la menor o mayor presencia de refuerzos pasivos altera significativamente el detalle de la relación entre momento y curvatura ($M-\Gamma$).

Queda claro, por tanto, que no parece válido adoptar un modelo de análisis elasto-plástico perfecto que suponga una rigidez constante hasta cierto umbral, en el que se pierda completamente la rigidez de la sección de turno de forma súbita, como el seguido en [MOYA, L., 2003] para el caso de placas de hormigón armado. Bien al contrario, conviene en este caso que el modelo general de análisis quede basado en la evolución de la rigidez de las secciones sobre las que se acepta la degradación.

La asunción de la anterior hipótesis complica en buena medida el análisis porque, como se ha visto, cada opción de refuerzo implica una relación particular $M-\Gamma$, empezando por la propia sección post-tesada sin reforzar, la cual ocupa en términos de extensión una parte también muy significativa de cada problema real, según se ha repasado en el capítulo tercero. Por tanto, resulta necesaria una definición previa de las secciones sobre las que se va aceptar la degradación para poder gobernar rigurosamente el comportamiento no lineal de cada problema.

Resulta primeramente necesario el análisis de los estados límites de servicio (E.L.S.) para la determinación de la armadura activa, siguiendo normalmente procedimientos habituales como los recordados en el capítulo quinto, lo que permite ya la definición de las secciones sin refuerzo y las correspondientes relaciones $M-\Gamma$. Posteriormente, deberán fijarse las opciones de refuerzo consideradas como razonables, lo que permitirá, a su vez, fijar las subsiguientes relaciones $M-\Gamma$.

La forma de establecer las diferentes variantes de refuerzo que pueden resultar adecuadas resulta en cierto modo arbitraria, aunque la cuantía de refuerzo pasivo (entendida como la relación entre el área transversal del propio refuerzo pasivo y el área hormigón de la sección bajo análisis), en contraste con las cuantías de refuerzo habituales en problemas equivalentes, da una referencia perfectamente válida para dirimir cual es el grupo más o menos reducido de opciones de refuerzo que tienen sentido en el problema de turno. En relación a esta cuestión, los ejemplos de análisis no lineal abordados en el siguiente capítulo resultan bastante esclarecedores.

Sea como fuere, llegado este punto, empieza a quedar claro que en el análisis no lineal de placas de hormigón post-tesado la respuesta mecánica del problema queda especialmente ligada a la solución material precisa del problema, solución cuya definición debe ser por tanto previa, apoyándose en el principio expuesto en el anterior párrafo o de cualquier otra forma que se considere suficientemente acertada.

La afirmación antepuesta conlleva que no pueda darse un cálculo estricto de refuerzo y que deben ser analizadas de forma explícita varias opciones o cuantías de refuerzo para determinar cuál de ellas resulta la más adecuada bajo criterios mecánicos, económicos, constructivos, etc.



Al respecto de las opciones de refuerzo a considerar cabe aclarar de forma previa que, como se analizará con detalle el capítulo octavo, ciertas alternativas de refuerzo quedan invalidadas tras el cálculo no lineal de la placa de turno al certificarse una degradación o demanda excesiva en las secciones más solicitadas.

Para mayor claridad, se detalla en la imagen adjunta un diagrama de flujo que pretende sintetizar la organización general del problema que aquí se propone.

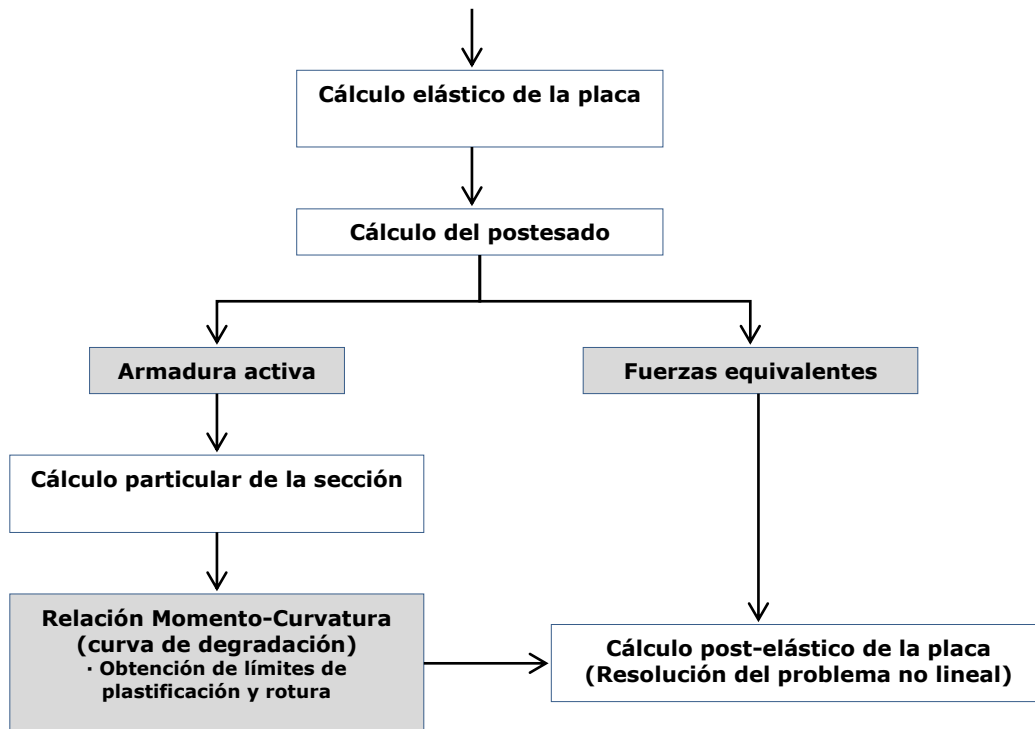


Figura 7-1. Organización general del análisis no lineal de placas post-tesadas

Con respecto al diagrama anterior debe insistirse en que, en base a lo comentado líneas arriba, cada opción de refuerzo implica una relación particular $M-\Gamma$ y, por tanto, el estudio explícito de cada opción de refuerzo conlleva un cálculo no lineal de placa específico o diferenciado.

Conviene destacar asimismo que las acciones para cada opción de refuerzo o para cada problema específico sí son siempre las mismas; en particular las fuerzas equivalentes que se introducen en el modelo computacional de cálculo para incorporar los efectos del post-tesado, ya que nada de lo propuesto implica pérdidas de tensión de la armadura activa que resulten diferentes a las ya incorporadas en el cálculo que define dicha armadura, según lo revisado en el capítulo quinto, aun aceptando la degradación de la sección por incremento de la flexión.

El último aspecto a destacar en la organización general del análisis no lineal de losas postesadas es la estabilidad del problema parcial de cáscara expuesto en el capítulo cuarto, aún después de la degradación.

En lo relativo a esta última cuestión, la clave está en que la forma de degradación aceptada para cada una de las opciones de refuerzo en una determinada sección parte del sostenimiento del esfuerzo axial actuante, correspondiente al valor de la fuerza de tesado a largo plazo, P_2 . Dicho de otra forma, cada relación $M-\Gamma$ se calcula bajo el efecto constante de ese esfuerzo axial, resultando, por tanto, que tan solo se acepta la variación de momento flector, según los principios expuesto en el capítulo sexto.

Además, siempre que las deformaciones de placa no sean excesivas, la parte del problema de cascara queda enteramente desacoplada del propio problema parcial de placa en la resolución de la ecuación general de equilibrio de una determinada estructura, según se ha comentado también en el capítulo cuarto, lo que, en consecuencia, acaba permitiendo inscribir el comportamiento no lineal dentro del problema particular de placa donde se recoge el estudio de la flexión.

7.1.1 Cálculo no lineal de la placa

El comportamiento no lineal de la placa se debe enmarcar genéricamente dentro de un problema de rigidez decreciente, como sucedía con el problema particular de la sección transversal abordado en el capítulo sexto; aunque la pérdida de rigidez global no resulta exactamente paralela a la pérdida de rigidez de sección, el comportamiento general de la placa es, en cierta forma, la "suma" de los comportamientos particulares de cada una de las infinitas secciones en las que se puede descomponer, tanto aquéllas que mantienen su integridad como aquéllas que presentan una degradación sustancial.

Aceptado el concepto expuesto en el párrafo anterior, el método de *Newton-Raphson* vuelve a presentarse como una muy buena opción para la realización del cálculo no lineal de la placa, y éste es el procedimiento adoptado en el trabajo aquí documentado.

Aunque los principios de este método de cálculo iterativo ya han sido repasados en el capítulo precedente, conviene recordar brevemente la mecánica del procedimiento, la cual queda expuesta de forma particular en la imagen adjunta, porque su implementación en el cálculo no lineal de placas post-tesadas mediante el método de los elementos finitos lleva aparejadas otras particularidades.

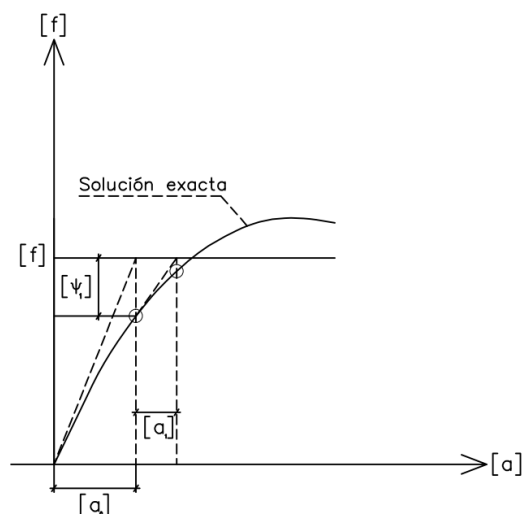


Figura 7-2. Planteamiento conceptual del método de *Newton-Raphson* en el análisis de placas post-tesadas.

En la figura anterior:

$[f]$	es el vector general de cargas
$[k_i]$	es la matriz de rigidez tangente del problema para cada estado de deformación
$[a_i]$	es el vector de corrimientos obtenidos en la iteración i
$[\Psi_i]$	es la fuerza residual tras cada iteración de cálculo

Por tanto, en cada iteración, i , el vector de corrimientos $[a_i]$, se obtiene de la siguiente ecuación general de equilibrio:

$$[\Psi_{i-1}] = [k_i][a_i]$$

En la **primera iteración** $[\Psi_{i-1}]$ coincide con $[f]$ y la fuerza remanente o residual de **cada iteración** $[\Psi_i]$ se obtiene de la resolución de la siguiente ecuación matricial:

$$[\Psi_i] = [\Psi_{i-1}] - [k_{i+1}][a_i]$$

La mayor particularidad que presenta la adopción del método de *Newton-Raphson* al cálculo no lineal de losas post-tesadas, se encuentra en la valoración de la matriz de rigidez tangente en cada iteración i , según se expone en lo que sigue.

7.2 Resolución del problema no lineal específico

Para la resolución del cálculo no lineal por el método de elementos finitos mediante el método de *Newton-Raphson*, resulta necesario identificar cómo pierde rigidez la losa de hormigón post-tesado tras cada iteración de cálculo, para lo que deben fijarse unas condiciones que permitan discutir la degradación de una sección, dichas condiciones responden a los diagramas M- Γ .

Dado que la armadura, tanto la activa como la pasiva, quedan orientadas típicamente en dos direcciones ortogonales, conviene que las referencias generales del problema de elementos finitos coincidan con las direcciones de la armadura, para mayor simplicidad. Así, la discusión de la eventual deterioración de la losa podrá realizarse directamente en base a las referencias generales.

Por otra parte, el cálculo de la matriz de rigidez particular de cada uno de los elementos finitos en la que queda discretizado el problema debe ser calculada en los ejes particulares del propio elemento finito, en base a la expresión general expuesta en el capítulo cuarto, la cual se recuerda aquí por operatividad:

$$K_i' = \int_A [B]^T [\hat{D}'] [B] dA$$

En la expresión anterior $[B]$ es la matriz de deformación del elemento finito y $[\hat{D}']$ su matriz de elasticidad generalizada; todas ellas quedan expresadas en base a las referencias locales de cada elemento finito.



La matriz de elasticidad de placa $[\hat{D}']$ es precisamente la que permitirá gobernar la degradación de la placa en función del nivel de sollicitación, según se detallará en los siguientes apartados. Esta matriz, según lo expuesto en el capítulo cuarto, presenta en problemas ortótropos la siguiente forma:

$$[\hat{D}'] = \frac{t^3}{12} \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} \end{bmatrix}$$

En la matriz $[\hat{D}']$ los ejes x e y definen ahora las direcciones ortótropas en los ejes locales del elemento finito, lo que obliga a transformar dicha matriz a ejes globales para que la discusión de la degradación de la placa pueda hacerse en las direcciones coincidentes con la organización de la armadura. La transformación de ejes se puede realizar normalmente mediante el siguiente producto de matrices:

$$[\hat{D}] = [T_\alpha]^{-1} \cdot [\hat{D}']$$

En donde, siempre en coherencia a lo expuesto en el apartado 4.1.3., $[\hat{D}']$ es la matriz de elasticidad transformada a ejes generales y $[T_\alpha]$ la matriz de transformación que define este cambio de referencias; véase al respecto [DAMKILDE, L., 2008].

Una vez identificadas las condiciones de degradación del elemento finito de turno en ejes generales, se debe representar los términos de la citada degradación en la **matriz de "elasticidad" de placa $[\hat{D}]$** , según se verá enseguida, pasando a ser dicha matriz lo que se podría denominar matriz de elasticidad degradada de placa, la cual quedará referenciada en adelante como $[\hat{D}_{dt}]$.

Y, una vez recogidas las condiciones de deterioración o de daño, cuando así proceda, $[\hat{D}_{dt}]$ debe ser transformada de nuevo a ejes locales para el cálculo de la rigidez real que aporta el elemento finito de turno a la ecuación general de equilibrio que se plantea en cada iteración, en este caso mediante el siguiente producto de matrices:

$$[\hat{D}_{dt}'] = [T_\alpha][\hat{D}_{dt}]$$

En relación a esta cuestión, el diagrama de flujo mostrado en la siguiente página intenta explicar de manera gráfica la adaptación particular del método de **Newton-Raphson** seguida en este trabajo. Más allá de la organización específica del proceso, también se enmarca en rojo las dos operaciones que recogen más que ninguna otra la particularidad del problema mecánico planteado.

Un matiz o aspecto importante a tener en cuenta es que, como el objetivo es la redistribución de los momentos flectores de mayor intensidad, los cuales se dan en signo negativo sobre los soportes, la degradación de la rigidez tan solo será aceptada bajo la acción de momentos flectores negativos.



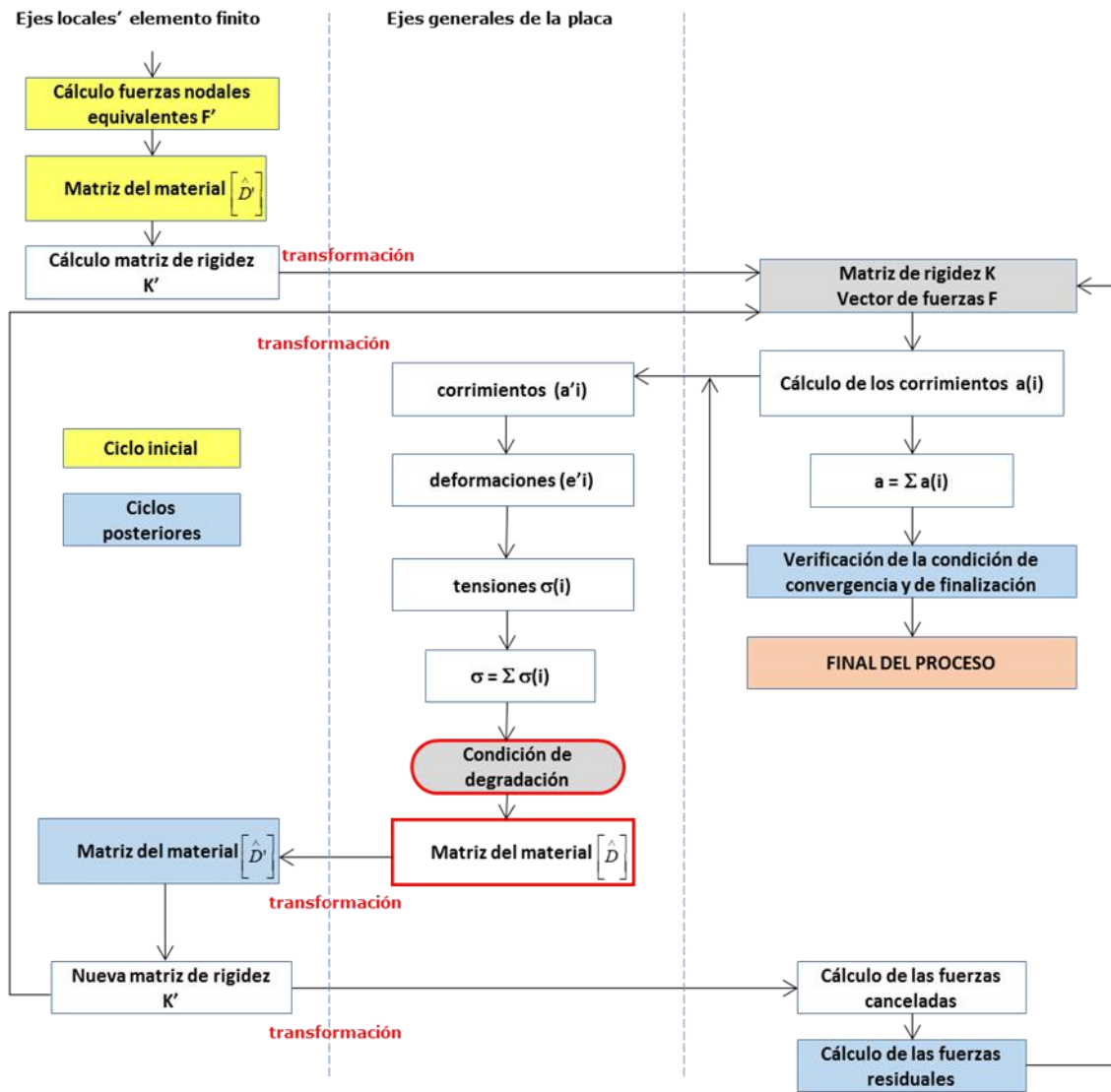


Figura 7-3. Organización del análisis del problema parcial no lineal de placas mediante el método de *Newton-Raphson*

7.3 Rigidez y degradación de la sección de cálculo

La forma de obtención de las funciones M- Γ seguida en el capítulo sexto permite tener perfectamente acotada la rigidez a flexión de la sección, EI_M , alcanzado un determinado momento flector, M, en función de la variación del módulo de elasticidad de cada una de las partículas en que quedaba discretizada la sección, en base a la siguiente expresión:

$$EI_M = \sum_{i=1}^l E_{c,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_{c,i}^2 + \sum_{j=1}^m E_{s,j} \cdot A_{s,j} \cdot y_{s,j}^2 + \sum_{k=1}^n E_{p,k} \cdot A_{p,k} \cdot y_{p,k}^2$$

Los términos que definen la expresión han quedado explicitados en el apartado 6.4.1.2.

De manera que se puede determinar la pérdida relativa de rigidez a flexión, pérdida referenciada en este trabajo como D00 para la dirección X o D11 para la dirección Y, en base a la siguiente relación:

$$D00 = \frac{EI_{M,X}}{EI_{total,X}} ; \quad D11 = \frac{EI_{M,Y}}{EI_{total,Y}}$$

En donde:

- $[EI_{M,X}]$ es la rigidez remanente a flexión en la dirección X
- $[EI_{M,Y}]$ es la rigidez remanente a flexión en la dirección Y
- $[EI_{total,X}]$ es la rigidez total inicial de la sección a flexión en la dirección X antes de su entrada en carga
- $[EI_{total,Y}]$ es la rigidez total inicial de la sección a flexión en la dirección Y antes de su entrada en carga

Las pérdidas relativas de rigidez a flexión también quedan referenciadas en el presente trabajo como coeficientes de degradación a flexión en X o en Y, según la dirección de análisis. Por otra parte, en base a lo expuesto en los apartados 4.1 y 6.6, podría definirse la rigidez a torsión de la sección, G^*_{total} , de la siguiente forma:

$$G^*_{total} = \frac{E_{c,i}}{2 \cdot (1 + \nu)} \sum_{i=1}^l A_{c,i} \cdot y_{c,i}^2$$

Nótese que en el cálculo de rigidez a torsión no se incluye la contribución de las armaduras, porque la verificación del comportamiento tensional de dichas armaduras atiende únicamente al problema de flexión en el campo de las tensiones normales.



Al respecto de lo anterior, cabe comentar que una de las formas más extendidas de adecuar la resistencia de las secciones al momento torsor de placa, por su fácil operativa y por su seguridad, pasa únicamente por incrementar los momentos flectores, según se explica con detalle en la referencia [SHIN, M. 2009]

Además, debe aclararse que, en el caso de placas soportadas sobre pilares dispuestos en retícula ortogonal (caso más extendido), el momento torsor no resulta relevante, ya que sus valores máximos no se dan en las secciones críticas a flexión; en estos casos, bien el contrario, el momento torsor resulta nulo justamente donde los momentos flectores presentan sus máximos.

Por otra parte, también en base a lo expuesto en 6.6, podría definirse la rigidez remanente de una sección a torsión alcanzado un determinado momento flector, M , en función del **coeficiente de retención mínimo de la rigidez frente a tensiones tangenciales** de cada partícula, $\beta_{cmin,i}$, en base a la expresión siguiente:

$$G^*_M = \frac{E_{c,i}}{2 \cdot (1 + \nu)} \sum_{i=1}^l \beta_{cmin,i} \cdot A_{c,i} \cdot y_{c,i}^2$$

Llegados a este punto, resulta necesario aclarar que, por las razones expuestas en 6.6, **para determinar el valor del coeficiente $\beta_{cmin,i}$** deberán tenerse en cuenta los dos posibles momentos flectores de placa actuantes: M_x y M_y . Ello obliga a que se deban definir todas las opciones de refuerzo a considerar en cada una de las direcciones del problema, después las correspondientes curvas $M-\Gamma$ en **X y en Y, y, por último, el valor de $\beta_{cmin,i}$** para cada partícula. Es decir, en rigor, el valor del coeficiente de retención mínimo de la rigidez frente a tensiones tangenciales se corresponde a un estado definido por la acción de los dos momentos flectores de placa (M_x y M_y).

La circunstancia comentada en el párrafo anterior obliga, al menos de entrada, a **calcular todos los posibles valores de $\beta_{cmin,i}$** , en función de las posibles combinaciones de M_x y M_y , hasta que se alcanzan los respectivos momentos últimos, en escalones de carga suficientemente pequeños para representar adecuadamente la degradación de la sección, a la vez que se plantean todas las funciones $M-\Gamma$ derivadas de los refuerzos a considerar. Aunque, como luego se verá, las casuísticas que se plantean en la práctica no conllevan una combinatoria tan extensa.

Aclarado lo anterior, procediendo de forma análoga a la seguida en el caso de la flexión, se puede determinar la pérdida relativa de rigidez a torsión, pérdida relativa referenciada en este trabajo como $D22$ o coeficiente de degradación a torsión, de la siguiente forma:

$$D22 = \frac{G^*_M}{G^*_{total}}$$

De esta forma, se puede representar la evolución de la rigidez de una sección a flexión y a torsión hasta la rotura de esa sección por el incremento de momento flector, a la vez que se define la función momento curvatura.



En este sentido, de forma meramente ilustrativa, se muestra en la siguiente figura la evolución de los coeficientes de degradación correspondientes a la sección de referencia de la banda principal analizada en 6.1.1.1 (Placa de 12x12m), sin la presencia de refuerzos pasivos, suponiendo un solo momento flector actuante y que, por tanto, $\beta_{cmin,i}$ se corresponde en cada partícula con el valor del **coeficiente de retención frente a tensiones tangenciales** de la dirección analizada. Esta suposición no distorsiona mucho el resultado, ni en lo numérico ni, todavía menos, en lo cualitativo porque, como se irá comprobando en adelante, la presencia de la obligada cabeza de compresión para el equilibrio de la flexión, junto a la acción de precompresión propia del postesado, propicia una cierta estabilidad al problema, al haber en la práctica muchas partículas con un valor $\beta_{cmin,i}=1.0$, incluso algunas de las que presentan elongación, según los criterios expuestos en 6.6.

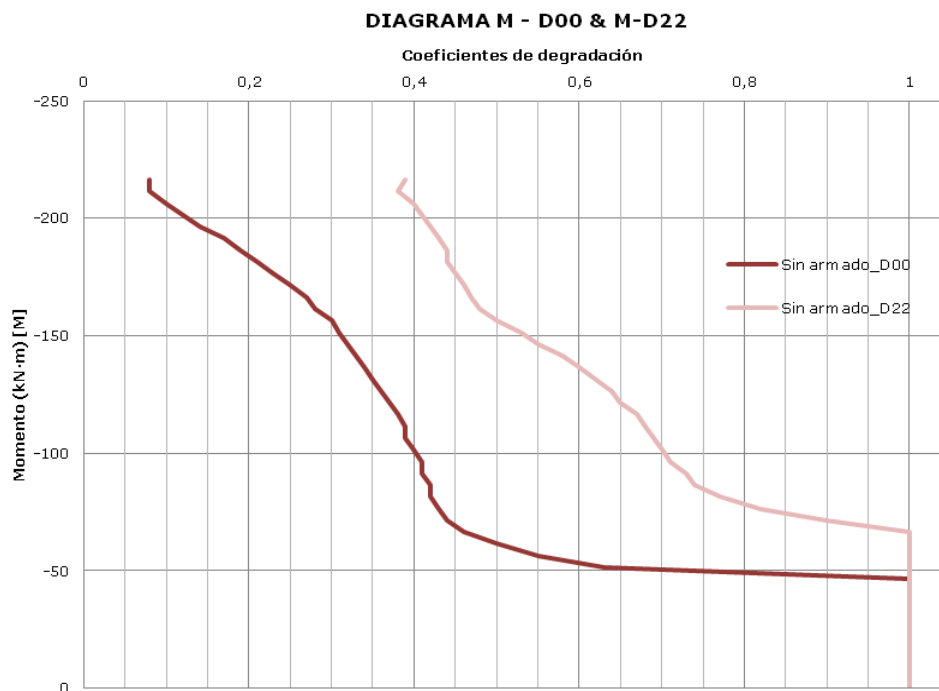


Figura 7-4. Evolución de los coeficientes de rigidez de la sección de referencia de la banda principal del ejemplo de placa de 12x12 metros propuesto en el capítulo sexto

Aunque el ejemplo anterior tan solo pretende ilustrar la evolución de los coeficientes de degradación en una sección postesada, no puede soslayarse que el ejemplo atañe en suficiente medida a un buen número de secciones del problema, concretamente a todas aquellas que van a quedar sin reforzar con armadura pasiva. Además, como se verá más adelante, la evolución de los coeficientes de degradación en secciones reforzadas resulta cualitativamente idéntica.

En este sentido cabe destacar como, cuando se inicia la fisuración en la sección, hay una pérdida de rigidez a flexión relativamente brusca, hasta que la posición de la fibra neutra se acerca al centro de gravedad de la sección, cuando el coeficiente de degradación a flexión D00 empieza a presentar una variación más paulatina. Este comportamiento, aunque no pueda asociarse de forma directa, nos recuerda que, cuando la sección de hormigón postesado fisura, tiene una pérdida rigidez inicialmente bastante súbita, un poco como le sucede a una sección de hormigón armado convencional.

La evolución del coeficiente de degradación a torsión, D_{22} , resulta muy paralela a la evolución de D_{00} , pero podríamos decir que su progresión particular queda amortiguada por la citada contribución de las partículas de hormigón al equilibrio de las tensiones tangenciales aún en estado de fisuración.

Sin que forme parte del contenido de este capítulo, conviene aquí apuntar que, para una misma sollicitación de flexión, la degradación frente a la propia flexión resulta mayor que la degradación frente a la torsión, cuestión que, como se expondrá en capítulos posteriores, resulta bastante relevante en los resultados obtenidos en los primeros ejemplos de aplicación de las formas de análisis propuestas en el presente trabajo. Incluso, cuando se alcanza el momento último y la rigidez a flexión queda anulada o prácticamente anulada, la rigidez a torsión se mantiene en el entorno del 40% de la rigidez inicial.



7.4 La condición de degradación en el cálculo de la placa

7.4.1 Matriz de elasticidad de placa degradada

Como se ha comentado en 7.2, el control de la pérdida de rigidez de la placa se realiza en cada elemento finito a través de su matriz de elasticidad generalizada $[\hat{D}']$ transformada en ejes generales, lo que permite también la determinación de las fuerzas residuales tras cada iteración de cálculo.

Dado que para cada momento flector actuante en un punto de la placa para cada dirección, M_x y M_y , se pueden determinar los coeficientes de degradación D_{00} , D_{11} y D_{22} , pueden afectarse directamente los términos asociados de la matriz de elasticidad generalizada para la obtención de la matriz de elasticidad degradada de placa, $[D_{dt}]$ de la siguiente manera:

$$[D_{dt}] = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} D_{00}E_x & \nu_{xy} \cdot D_{00}E_x & 0 \\ \nu_{yx} \cdot D_{11}E_y & D_{11}E_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{22}(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G \end{bmatrix}; \quad [\hat{D}_{dt}] = \frac{h^3}{12} [D_{dt}]$$

De la forma anterior se corrige específicamente la rigidez ante cada uno de los esfuerzos actuantes, en función de M_x y M_y , pero se debe recordar que el término D_{22} queda definido por el coeficiente $\beta_{\text{cmin},i}$ de cada partícula en la que es discretizado el análisis seccional en cada dirección X e Y.

La forma anterior de la matriz de elasticidad conlleva aparejada una particularidad que obliga a una reflexión aparte: la matriz debe ser simétrica respecto a la diagonal principal o, dicho de otro modo, debe cumplirse la siguiente relación:

$$\frac{D_{11}E_y}{D_{00}E_x} = \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}}$$

A nivel diferencial o, si se quiere, a nivel de cada partícula de sección ν_{xy} y ν_{yx} resultan iguales a ν antes de que se inicie cualquier degradación por incremento de las sollicitaciones actuantes. Por otra parte, de forma parecida a lo que sucede con la determinación de D_{22} , si se da una pérdida de rigidez diferente en cada dirección va a ser la rigidez menor la que acabe gobernando el problema específico asociado. De esta forma, los coeficientes de Poisson, ν_{xy} y ν_{yx} , pueden ser revisados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{si } E_x < E_y; \nu_{xy} &= \nu; \nu_{yx} = \nu \frac{E_x}{E_y} \\ \text{si } E_x > E_y; \nu_{yx} &= \nu; \nu_{xy} = \nu \frac{E_y}{E_x} \end{aligned}$$

7.4.2 Organización numérica de la degradación de la placa

El reflejo de la condición de degradación en el problema general puede quedar sintetizado a través de un proceso con cuatro etapas básicas según se expone en el siguiente diagrama de flujo:



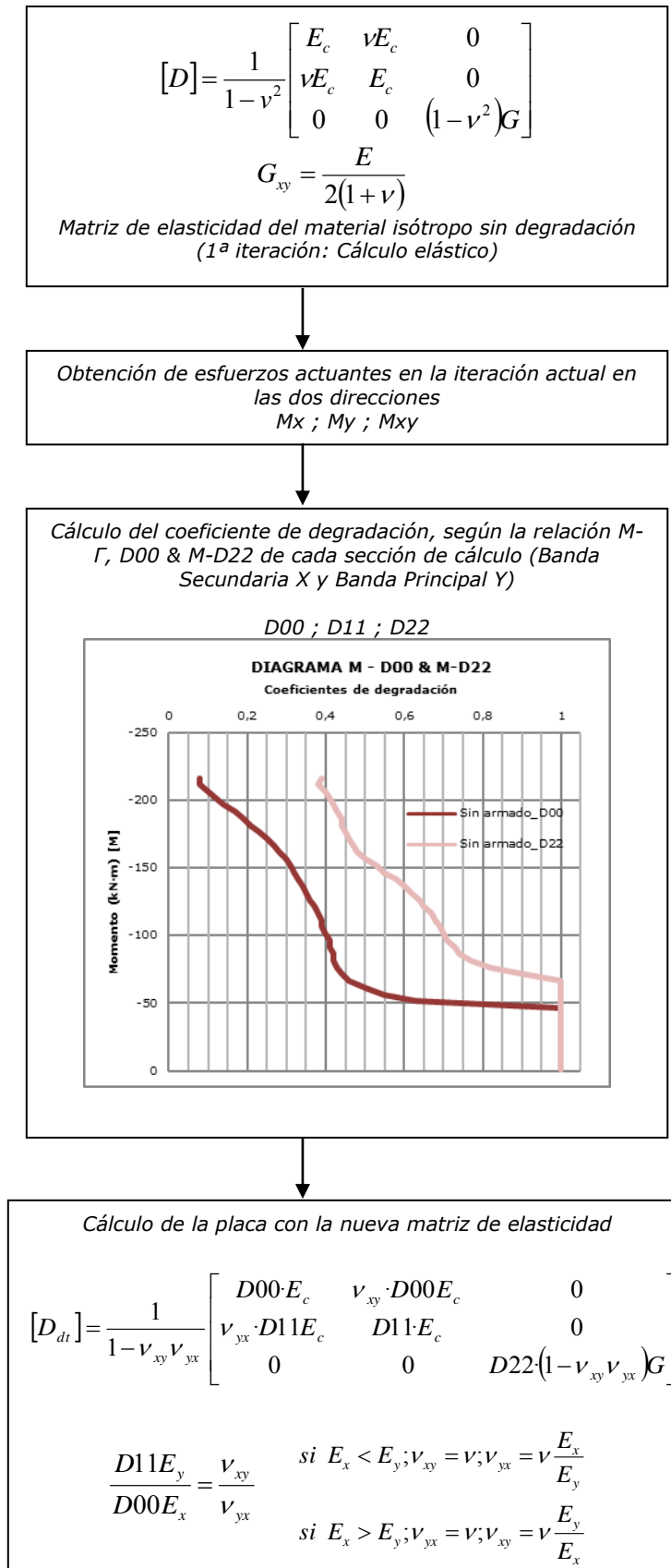


Figura 7-5. Organización del análisis de la degradación de la losa postesada por acción de los momentos flectores de placa, M_x y M_y

7.5 Problemas de contraste del modelo propuesto

En los siguientes apartados se aborda el análisis de problemas sencillos de respuesta conocida siguiendo la metodología presentada, por tanto, mediante el método de los elementos finitos, para contrastar la validez del modelo propuesto desde el punto de vista estrictamente numérico.

En base a lo comentado en 7.1 y 7.2, los problemas de contraste son analizados como problemas únicamente de placa, dado que la parte del problema de cáscara resulta completamente independiente. No obstante, en el siguiente capítulo, ya dentro del estudio de los casos considerados representativos, se vuelve a incorporar el problema de cáscara, primero, a los efectos de la determinación y estudio de las armaduras activas, y, segundo, a los efectos del correcto control del flujo de tensiones.

Se plantea, primero, una viga exenta de un único vano cuya distancia entre apoyos, situados en los extremos, resulta de 10 metros y, segundo, una placa cuadrada de 12 metros de lado soportada tan solo en sus esquinas. Se trata siempre de vigas o losas macizas de hormigón armado de espesor uniforme, en las que se suponen aplicadas las siguientes cargas superficiales, Q :

Losa 10x1m (Espesor 30,0 cm)

· Q 10,00 kN/m²

Losa 12x12m (Espesor 31,5 cm)

· Q 13,88 kN/m²

La oportunidad o precisión de los valores de las cargas reseñadas no resulta demasiado relevante a los efectos de lo que se discute en este apartado, pero su intensidad resulta parecida a la que se podría considerar comúnmente en el análisis profesional de los Estados Límites de Servicio de los problemas propuestos.

Para las constantes elásticas se han adoptado los siguientes valores:

- Modulo de elasticidad longitudinal inicial $E_x = E_y = 27.270 \text{ N/mm}^2$
- Coeficientes de *Poison* iniciales $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,20$

Las mallas de elementos finitos adoptadas resultan suficientemente densas para garantizar la progresividad de la degradación de la placa en cualquiera de las direcciones principales del problema. Asimismo, se ha procurado que, en las zonas donde se va a aceptar la degradación de la placa por flexión, los elementos finitos presenten sus ejes locales coincidentes con los ejes generales del problema, lo que permite una mayor precisión de los resultados a nivel local.

El cálculo de cada caso propuesto se aborda siempre de dos formas:

1er cálculo: **Respuesta teórica (A)**

Cálculo elástico en el que se imponen unas condiciones de rigidez y de contorno que permiten obtener la respuesta teórica directa del problema. Las condiciones de contorno incluyen, cuando proceda, las reacciones propias de la respuesta teórica.

2o cálculo: **Cálculo no lineal (B)**

Cálculo no lineal en el que se siguen fielmente los procedimientos propuestos en los apartados anteriores. En este caso, pues, la respuesta es una respuesta no forzada que depende únicamente de la evolución de la rigidez de las secciones y de la bondad de los procedimientos numéricos propuestos.



7.5.1 Viga de 10x1m con un 50% de degradación

El primero de los problemas de contraste propuestos es el de una viga de 1 metro de ancho y 10 metros de longitud que queda empotrada en sus extremos, en la que se acepta una degradación por flexión que implica la pérdida del 50% de su rigidez a flexión en las zonas de apoyo, donde el momento flector es negativo y máximo en valor absoluto.

La viga ha sido discretizada según refleja la imagen adjunta.

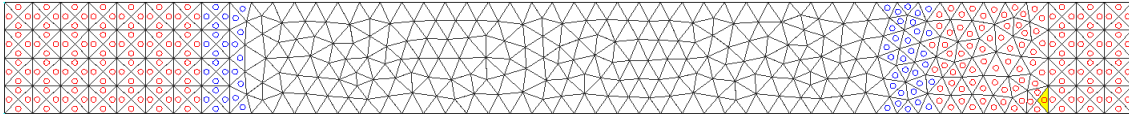


Figura 7-6. Discretización seguida en el primer modelo de contraste vista en planta

En este primer problema los resultados obtenidos en las secciones clave, en cuanto al momento flector y en cuanto a las flechas, d_z , han sido los siguientes:

	Mx (m.kN)		Dz (mm)
	centro placa	soporte	centro placa
(placa continua biempotrada)	41	84	4,20
A. Elástico (2 secciones)	72	53	6,02
B. Degradado $D' = 0.5 D$	72	53	5,99

Tabla 7-1. Resultados numéricos del primer problema de contraste

En los gráficos posteriores puede seguirse, además, primero, la evolución de los momentos flectores, M_x , y, segundo, la función de desplazamientos transversales d_z , obtenidos en una y otra modalidad de cálculo.



Figura 7-7. Primer problema de contraste. Respuesta teórica para M_x (A)



Figura 7-8. Primer problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores M_x (B)



Figura 7-9. Primer problema de contraste. Respuesta teórica para d_z (A)



Figura 7-10. Primer problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores d_z (B)

Comentando primeramente los resultados gráficos, éstos se pueden considerar prácticamente coincidentes, más allá de pequeñas variaciones muy locales en la definición del contorno que delimita un determinado nivel de flexión o de deformación.

En cuanto a los resultados numéricos obtenidos para los momentos flectores, la coincidencia puede ser considerada como plena. Cabe destacar al respecto, que la rigidez en origen en el cálculo no lineal es del 100% y que los momentos flectores, tras la primera iteración de cálculo, son realmente los que figuran en la primera fila de la tabla que contiene los resultados numéricos, correspondientes, pues, a los momentos de empotramiento perfecto. Dicho de otro modo, con esta prueba de contraste se certifica que el modelo numérico planteado admite una pérdida del 35% de los momentos de empotramiento perfecto sin que detecten inestabilidades en los resultados obtenidos.

En lo relativo a la deformación transversal los resultados obtenidos en una y otra modalidad de cálculo no pueden ser considerados como enteramente coincidentes y, en este caso, resulta más riguroso aceptar que se produce un error del 0,5%. En cualquier caso, una diferencia en la deformación de cálculo del 0,5% resulta perfectamente aceptable en el campo profesional, entorno al que, en última instancia, pretende atender este trabajo.

Cabe comentar que la discretización no resulta ni siquiera cualitativamente simétrica porque se ha querido verificar sobre los propios modelos de contraste, en el caso de las vigas, la incidencia de la orientación de los elementos finitos en el resultado local, asunto que se puede comprobar cómo relevante ya en el siguiente problema de contraste.

Los círculos azules presentes en la discretización representada en planta, tanto en este primer problema como en los siguientes, indican los elementos finitos que han visto alterada su rigidez en alguna de las iteraciones, aunque la conserven entera al final del proceso de cálculo.

Los círculos rojos presentes en la discretización, tanto en este primer problema como en los siguientes, indican los elementos finitos que no han podido mantener su rigidez inicial al final del proceso de cálculo.



7.5.2 Viga de 10x1m con un 90% de degradación

El segundo de los problemas de contraste propuestos es el de una viga de 1 metro de ancho y 10 metros de longitud que queda empotrada en sus extremos, en la que se acepta ahora una degradación por flexión que implica la pérdida del 90% de su rigidez a flexión en las zonas de apoyo.

La viga ha sido discretizada según refleja la imagen adjunta.

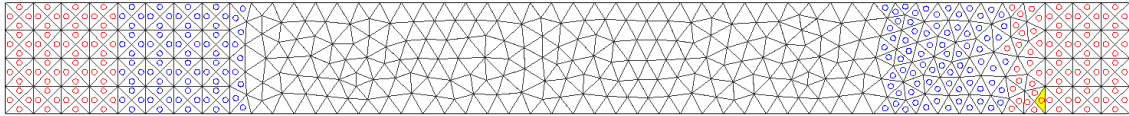


Figura 7-11. Discretización seguida en el segundo modelo de contraste vista en planta

En este segundo problema los resultados obtenidos en las secciones clave, en cuanto al momento flector y en cuanto a las flechas, d_z , han sido los siguientes:

	Mx (m.kN)		Dz (mm)
	centro placa	soporte	centro placa
(placa continua biempotrada)	41	84	4,20
A. Elástico (2 secciones)	79	46	10,98
B. Degradado $D' = 0.1 D$	81	43	10,91

Tabla 7-2. Resultados numéricos de la segunda prueba de contraste

En los gráficos posteriores puede seguirse de nuevo, primero, la evolución de los momentos flectores, M_x , y, segundo, la función de desplazamientos transversales d_z , obtenidos en una y otra modalidad de cálculo.



Figura 7-12. Segundo problema de contraste. Respuesta teórica para M_x (A)



Figura 7-13. Segundo problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores M_x (B)



Figura 7-14. Segundo problema de contraste. Respuesta teórica para d_z (A)



Figura 7-15. Segundo problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores d_z (B)

En cuanto a la distribución de momentos flectores puede considerarse que, a nivel general los resultados son los mismos en cada una de las dos modalidades de cálculo. Sin embargo, llama la atención las anomalías locales identificadas en algunos de los elementos finitos que han visto alterada y recuperada su rigidez, genéricamente marcados con un círculo azul. Esta inestabilidad, apenas se apreciaba cuando la degradación aceptada era del 50%, en el caso anterior, donde con esfuerzo se reconocen una casi imperceptible irregularidad de los resultados en la región que queda a la derecha de la discretización, en circunstancias parecidas.

Es decir, se comprueba como la orientación de los elementos finitos resulta relevante cuando, durante el proceso iterativo, los vaivenes en la degradación de los propios elementos resultan importantes en número o en "cantidad" de rigidez alterada.

En lo referente a la distribución de las deformaciones transversales la estabilidad de los resultados obtenidos en ambas modalidades parece que queda certificada.

En cuanto a los resultados numéricos, ya no se produce una coincidencia plena en los momentos flectores obtenidos, constatándose las siguientes variaciones:

- | | | |
|---|-------------------------|---------|
| - | Mx en el empotramiento | + 2,5 % |
| - | Mx en el centro de vano | - 6,5 % |

Al respecto de la falta de coincidencia en los momentos flectores, cabe destacar dos aspectos: el primero, la discretización no resulta óptima en la zona derecha del modelo (ni simétrica) y, segundo, la degradación aceptada es muy elevada, 90% de la inicial (esta pérdida de rigidez, como también se irá viendo, ya no tiene ningún sentido práctico).

En lo relativo a las deformaciones transversales, d_z , la estabilidad de los resultados numéricos es mucho mayor, ya que apenas se identifica una variación del 0,6% entre cada una de las dos modalidades de cálculo.



7.5.3 Viga de 10x1m con un 100% de degradación

El tercero de los problemas de contraste propuestos es el de una viga de 1 metro de ancho y 10 metros de longitud que queda empotrada en sus extremos, en la que se acepta ahora una degradación por flexión que implica la pérdida del 100% de su rigidez a flexión en las zonas de apoyo. La rigidez a flexión ha sido acotada en verdad al 0,1% de la rigidez original, lo que evita problemas en el tratamiento de la matriz de rigidez general del problema y permite una representación suficientemente precisa de la física del problema.

La viga ha sido discretizada según refleja la imagen adjunta.

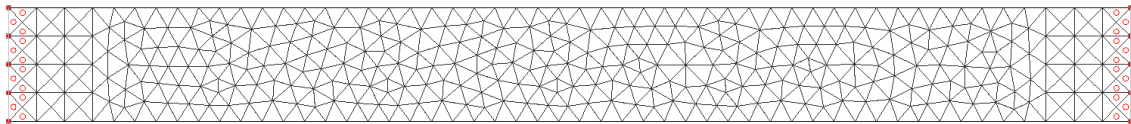


Figura 7-16. Discretización seguida en el tercer modelo de contraste vista en planta

En la discretización anterior puede reconocerse como los elementos finitos que respetan las orientaciones principales se ciñen a una zona más reducida, esto es porque, como se comprobará, al aceptarse una degradación tan intensa, son pocos los elementos finitos afectados por la propia degradación, no habiendo en este caso elementos que recuperen su rigidez inicial.

En este tercer problema los resultados obtenidos en las secciones clave, en cuanto al momento flector y en cuanto a las flechas, d_z , han sido los siguientes:

	Mx (m.kN)		Dz (mm)
	centro placa	soporte	centro placa
(placa continua biempotrada)	41	84	4,20
A. Elástico (2 secciones)	125	0	21,2
B. Degradado $D' = 0.001 D$	119	4	19,6

Tabla 7-3. Resultados numéricos de la tercera prueba de contraste

Nuevamente, puede seguirse en los gráficos posteriores, primero, la evolución de los momentos flectores, M_x , y, segundo, la función de desplazamientos transversales d_z , obtenidos en una y otra modalidad de cálculo.



Figura 7-17. Tercer problema de contraste. Respuesta teórica para M_x (A)



Figura 7-18. Tercer problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores M_x (B)



Figura 7-19. Segundo problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores d_z (A)



Figura 7-20. Tercer problema de contraste. Cálculo no lineal. Valores d_z (B)

La distribución de momentos flectores mantiene la uniformidad en ambos casos, pero parece claro que el cálculo no lineal no ajusta enteramente la respuesta teórica, aunque las diferencias numéricas no son tan significativas.

El comportamiento de la distribución de las deformaciones transversales resulta muy parejo en este caso al de los momentos flectores.

Más allá de las diferencias comentadas en la distribución, afectadas en este caso por la casualidad que supone a veces la definición de las escalas de color, las diferencias realmente constatadas en el caso de los momentos flectores resultan las siguientes:

- M_x en el empotramiento - 5 %
- M_x en el centro de vano + 4 m·KN

Es decir, a pesar de la extrema degradación aceptada los resultados resultan en verdad muy coincidentes.

En lo relativo a las deformaciones transversales, d_z , se reconoce una diferencia de resultados del -0,8%, diferencia que resulta irrelevante en el campo profesional al que se pretende atender aquí.

Cabe insistir en **que la "cantidad" de degradación que**, de alguna u otra forma, se va a demostrar como adecuada en capítulos posteriores queda muy lejos de las deterioraciones tan intensas consideradas en este caso y en el anterior, lo que resta importancia a los pequeños desajustes constatados en estos dos últimos problemas de contraste.

7.5.4 Placa 12x12m con un 100% de degradación

El último de los modelos de contraste se corresponde con el de una placa de planta cuadrada, de 12 metros de lado, soportada por cuatro pilares ubicados en las esquinas del problema (uno por esquina).

En los contornos del problema elástico (A) en el que se busca la respuesta teórica de referencia se permite el giro libre. Mientras que en los contornos del problema planteado no linealmente (B) el giro perpendicular a cada uno de los cuatros contornos queda completamente impedido.

Nuevamente se acepta la degradación plena a flexión en los elementos finitos sometidos a flexión negativa, esta vez analizando el problema en cada una de sus direcciones principales en base a los criterios expuestos en apartados precedentes. Para evitar problema en el tratamiento de la matriz general de rigidez se impone que la rigidez a flexión no pueda descender por debajo del 1% de la rigidez a flexión original.

En lo relativo a la rigidez a torsión se ha aceptado una pérdida de rigidez igual al 50%, en base a los estudios preliminares de la evolución de los coeficientes D00, D11 y D22 antes mostrados.

La discretización adoptada en este caso es la siguiente

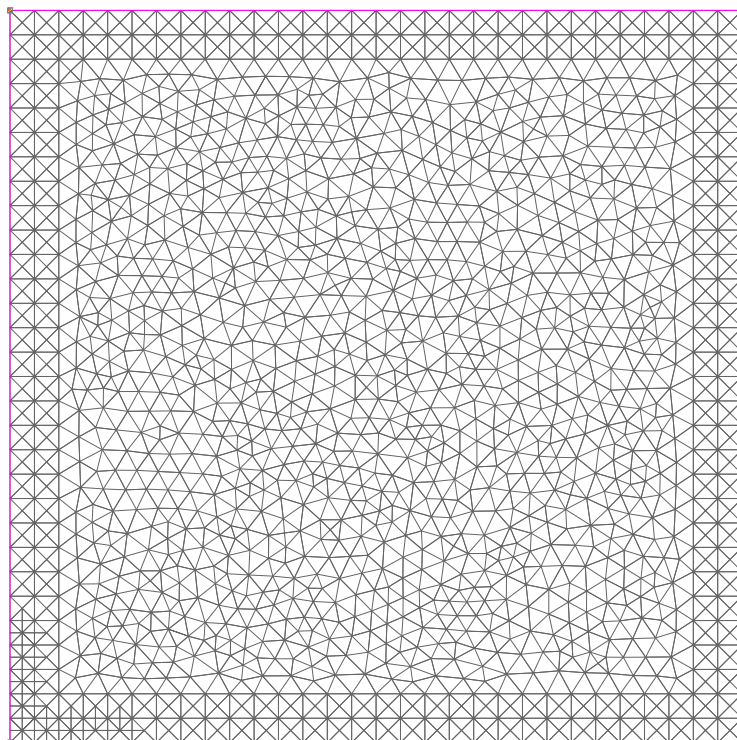


Figura 7-21. Discretización seguida en el cuarto modelo de contraste

Como se verá enseguida, la permanencia de la rigidez a torsión incide en los resultados obtenidos por lo que en este último modelo de contraste se propone un tercer cálculo (C) en el que se supone que la rigidez a torsión resulta nula, lo que numéricamente ha implicado suponer que la rigidez a torsión es igual al 0,1‰ de la rigidez real.

Atendiendo a la propuesto en 7.4 los coeficientes de degradación pésimos quedarían, pues, para cada una de las modalidades de cálculo no lineal de la siguiente forma:

Cálculo no lineal (B)

$$\begin{aligned} D00 &= 0.01 \\ D11 &= 0.01 \\ D22 &= 0,50 \end{aligned}$$

Cálculo no lineal (C)

$$\begin{aligned} D00 &= 0.01 \\ D11 &= 0.01 \\ D22 &= 0,0001 \end{aligned}$$

Cabe aclarar que el cálculo elástico (A) no supone en este caso necesariamente la definición de la respuesta teórica exacta a la que deban converger los cálculos no lineales, pues la tridimensionalidad del problema y la incidencia de la torsión impide que los respectivos modelos físicos sean plenamente equivalentes. Sin embargo, como se verá, la comparación entre las tres formas de cálculo propuestas permite extraer algunas conclusiones relevantes a los efectos del presente trabajo.

En este último problema de contraste los resultados obtenidos en las secciones clave, en cuanto a los momentos flectores, M_x y M_y , en cuanto a los momentos torsores, M_{xy} , y en cuanto a las flechas, d_z , han sido los siguientes:

	Mx (m.kN)		My (m.kN)	
	centro placa	centro arista	centro placa	centro arista
(placa continua giros impedidos)	66	103	66	103
A. Elástico	210	290	210	290
B. Degradado $D' = 0.001 D$	187	278	178	282
C. Degradado $D00=D11=D10=0.01, D22=0.0001$	180	290	180	290

Tabla 7-4. Resumen de los momentos flectores obtenidos en el cuarto problema de contraste

	Dz (mm)
	centro placa
(placa continua giros impedidos)	20,11
A. Elástico	83,46
B. Degradado $D00=D11=D10=0.01, D22=0.5$	73,80
C. Degradado $D00=D11=D10=0.01, D22=0.0001$	78,55

Tabla 7-5. Deformaciones transversales, d_z , obtenidas en el cuarto modelo de contraste

En la serie de imágenes que se muestran en las siguientes páginas se pueden observar las distribuciones de los momentos flectores, M_x y M_x , de momento torsores M_{xy} , y de las deformaciones d_z , obtenidas para cada una de las tres modalidades de cálculo seguidas en este último problema de contraste.



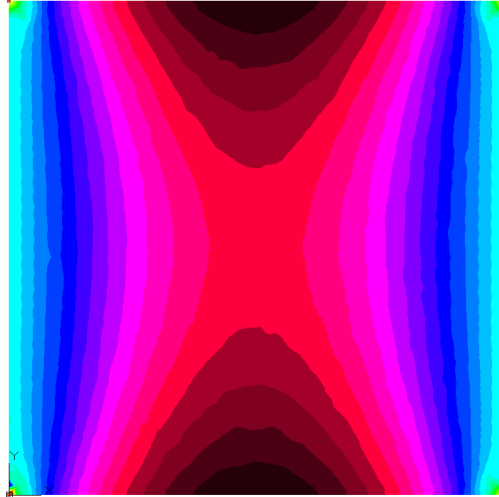


Figura 7-22. Cuarto problema de contraste. Cálculo lineal. Valores de M_x (A)

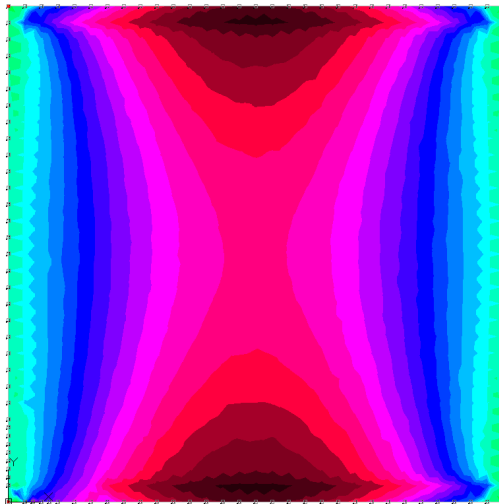


Figura 7-23. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_x (B)

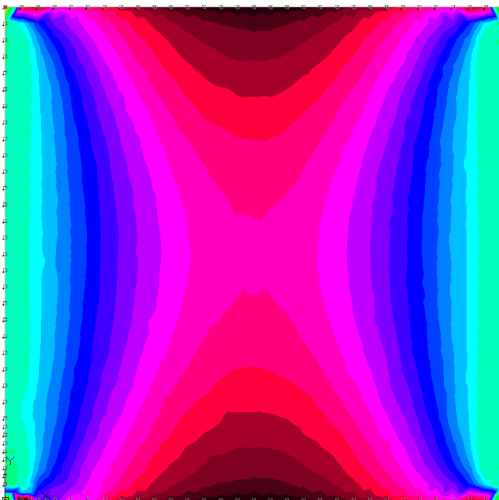


Figura 7-24. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_x (C)

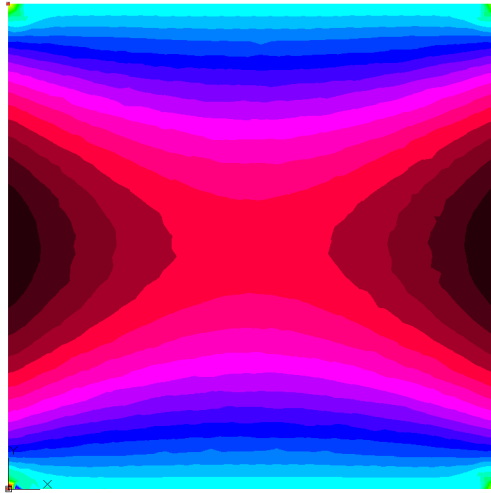


Figura 7-25. Cuarto problema de contraste. Cálculo lineal. Valores de M_y (A)

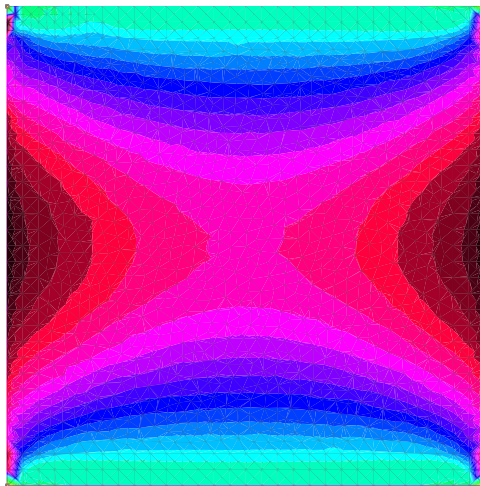


Figura 7-26. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_y (B)

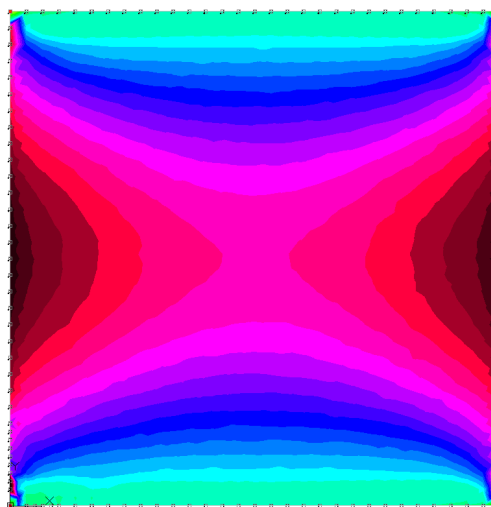


Figura 7-27. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_y (C)

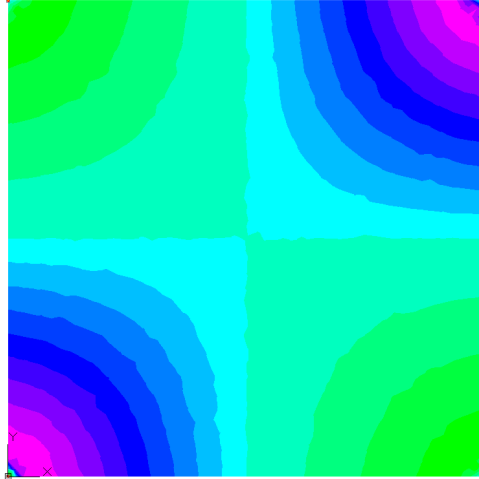


Figura 7-28. Cuarto problema de contraste. Cálculo lineal. Valores de M_{xy} (A)

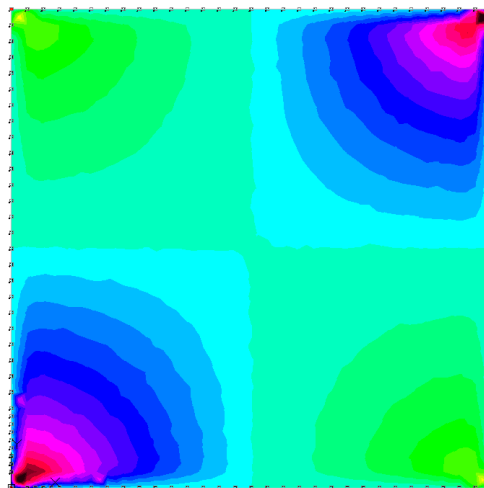


Figura 7-29. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_{xy} (B)

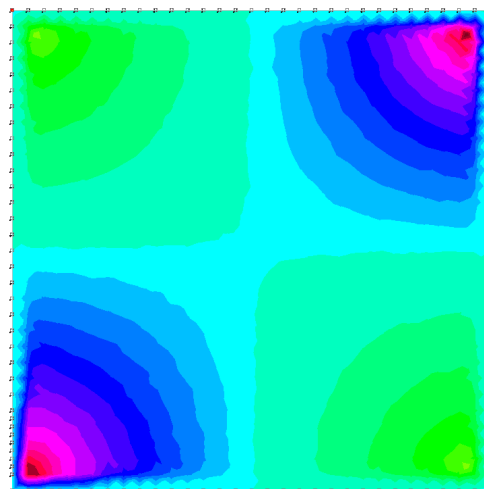


Figura 7-30. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Valores de M_{xy} (C)

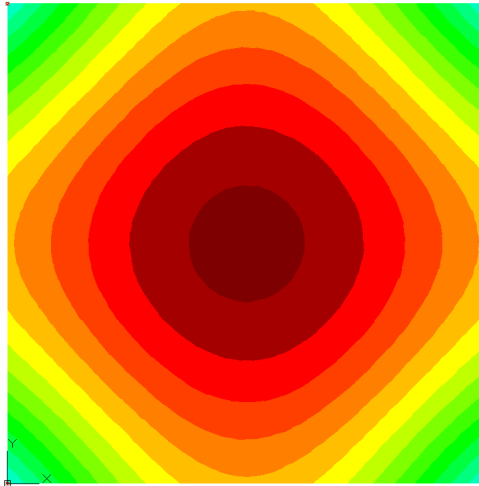


Figura 7-31. Cuarto problema de contraste. Cálculo lineal. Distribución de d_z (A)

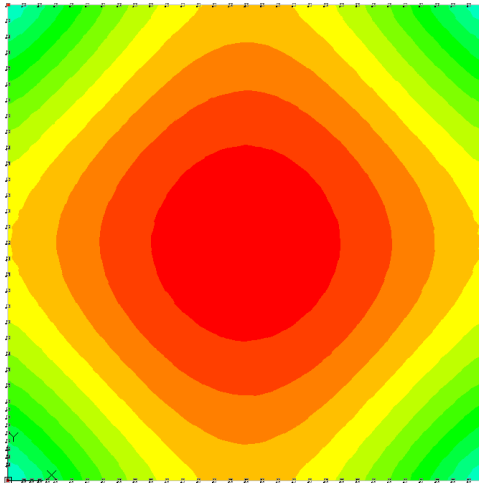


Figura 7-32. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Distribución de d_z (B)

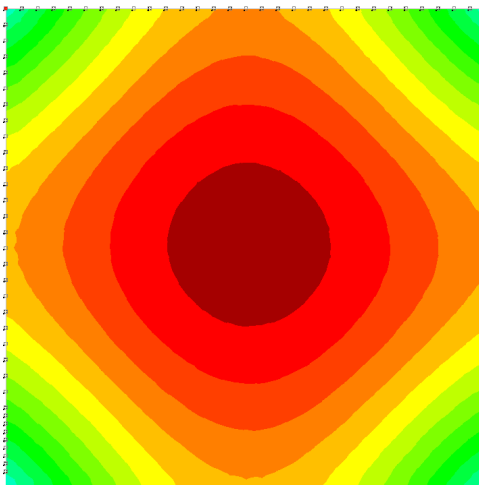


Figura 7-33. Cuarto problema de contraste. Cálculo NO lineal. Distribución de d_z (C)

En cuanto a la variación de momentos, una primera conclusión a sacar es que parece ser que, cuando la degradación a flexión propuesta es muy intensa y no en cambio la degradación a torsión, los resultados de flexión presentan serias inestabilidades donde los gradientes de esfuerzo resultan mayores. En este sentido, cuando la degradación de la rigidez a flexión, aun siendo muy intensa, va acompañada de una degradación de la rigidez a torsión pareja los resultados de momento flector obtenidos resultan mucho más estables. También parece claro que, las variaciones tan súbitas y exageradas de rigidez, no quedan bien resueltas cuando el problema es bidireccional, lo que obliga a matizar el procedimiento propuesto según se comenta en el siguiente apartado.

La distribución de deformaciones transversales resulta mucho más estable en todos los casos.

En lo relativo a los resultados numéricos, los momentos flectores presentan una razonable coincidencia en los bordes de cada lado del problema entre el modelo (B) y el (A) y una coincidencia plena del modelo (C) con el (A). En el centro de la placa el incremento del momento flector positivo que propicia la degradación de los elementos de borde queda amortiguado por el efecto de la torsión, distando todos los valores de momento flector obtenidos una media de un 15% con respecto del modelo (A). Resulta curioso que en el modelo (C), sin apenas rigidez a torsión, no haya un descenso de los momentos torsores con respecto al modelo (B), lo que explica seguramente que los momentos en el centro de la placa resulten parecidos y lo que permite concluir que, en ausencia de rigidez a flexión, la respuesta pasa en buena medida por la torsión a nada que se sostenga esta otra rigidez relativa. El sostenimiento de la rigidez a torsión se da más en los elementos finitos no exactamente coincidentes con el borde del problema, donde se dan los flectores máximos y, en consecuencia, las máximas degradaciones.

En cuanto a los valores precisos de deformación transversal, d_z , obtenidos en el centro de la placa los resultados parecen consecuentes con los resultados obtenidos para cada uno de los momentos, sin que se detecten nuevas incidencias en este sentido.

Cabe destacar que el problema propuesto vuelve a plantear pérdidas de rigidez extremas que no tienen sentido alguno desde una óptica estrictamente profesional, la deformación se ve incrementada por la degradación entre 3 y 4 veces según la opción de cálculo no lineal adoptada, y con este último problema tan solo se pretende comprender mejor las bondades y defectos de la metodología propuesta, a la vez que las primeras consecuencias de la aceptación de la degradación de la rigidez de una placa por acción de la flexión.



7.6 Formas de degradación. Ajuste de los problemas numéricos asociados

En los modelos de contraste antes mostrados no se ha tenido en cuenta todavía la incidencia de la armadura, acotándose la degradación de la rigidez a un tanto por ciento arbitrario de la original de cara a comparar directamente el resultado con modelos elásticos más o menos equivalentes.

En este apartado se aborda de forma preliminar el estudio de un primer caso que permite comprobar que sucede con el modelo de análisis propuesto al tener en cuenta la armadura.

Para ello se propone el estudio de una placa de 12x12 metros soportada sobre cuatro pilares, caso que desarrollará con mayor profundidad en el capítulo siguiente y que ya ha sido abordado en el capítulo sexto para el estudio de las funciones M- Γ , el cual presentaba las siguientes características básicas:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 31,5$ cm
- Peso propio 7,88 kN/m²
- Carga permanente 2,50 kN/m²
- Sobrecarga 3,50 kN/m²

La discretización adoptada para el análisis ha sido la siguiente:

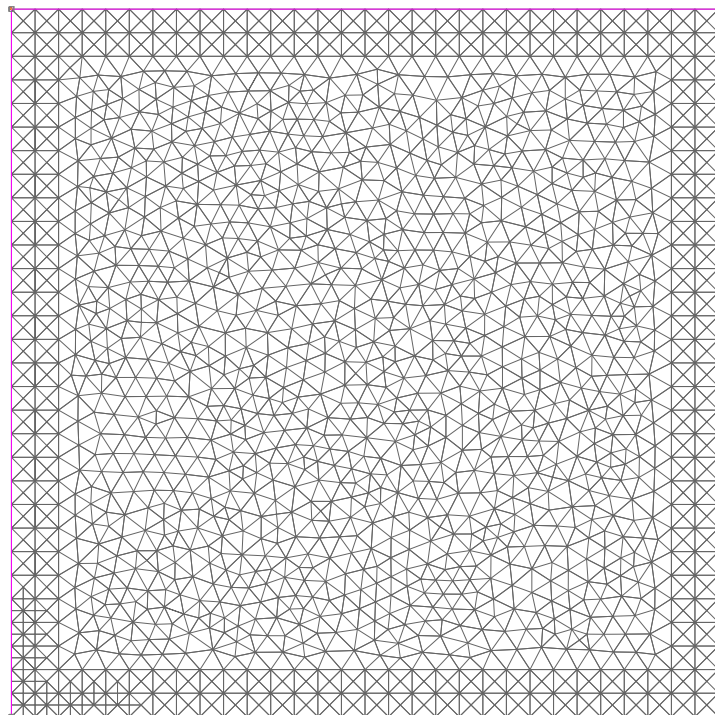


Figura 7-34. Discretización adoptada en el primer modelo de trabajo vista en planta

Conviene recordar que los giros perpendiculares a cada uno de los cuatro contornos quedan perfectamente impedidos con el fin de representar las condiciones de continuidad mecánica propias de un vano interior, como el que aquí se pretende estudiar.

Analizando los Estados Límites de Servicio (ELS) y bajo los preceptos establecidos en el capítulo 5, se ha procedido a la determinación de la armadura activa estrictamente necesaria, cuyo detalle de cálculo y términos de cuantía no resultan relevantes a los efectos de lo que se pretende en este apartado.

Sí que resultan muy relevantes, en cambio, cuales son los momentos de plastificación de la armadura activa, provisionalmente no se contempla la ubicación de refuerzos pasivos, y los momentos de rotura, todos ellos muy parecidos en cada dirección.

Dada la citada similitud entre direcciones se van estudiar únicamente los resultados relativos a los momentos contenidos en el plano y-z, plano en el que se obtienen los siguientes valores de momentos negativos límite:



valores límite del ejemplo	m.kN
límite de plastificación (D00 23%, D22 46%) 	177
límite de rotura (D00 15%, D22 40%) 	213

Tabla 7-6. Momentos de plastificación y de rotura en el plano Y-Z del primer modelo de trabajo

Para el análisis de los Estados Límites Últimos (ELU) se han adoptado los siguientes coeficientes de mayoración de cargas: 1,35 (Peso Propio), 1,35 (Cargas Permanentes), 1,50 (Sobrecarga). En la dirección de referencia los momentos flectores obtenidos en el análisis elástico de los ELU resultan los siguientes:

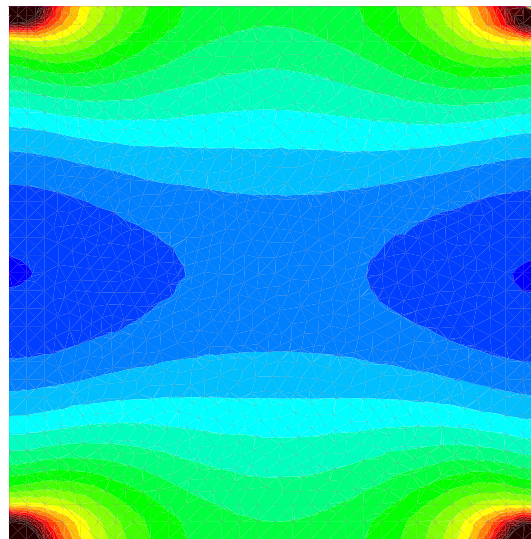


Figura 7-35. Momentos flectores, M_y , en el primer modelo de trabajo

La distribución de momentos flectores es la habitual de una placa, más allá de que el efecto del postesado disminuye notablemente las intensidades por la acción ascendente correctora propiciada por el estiramiento de las armaduras activas de trazado curvo. En lo que sigue, se va a prestar especial atención al detalle de distribución de momentos flectores en la zona cercana al apoyo que queda abajo y a la derecha de la representación en planta.

Concretamente el detalle de distribución de los momentos flectores en la esquina referida resulta para el cálculo elástico y lineal el siguiente.

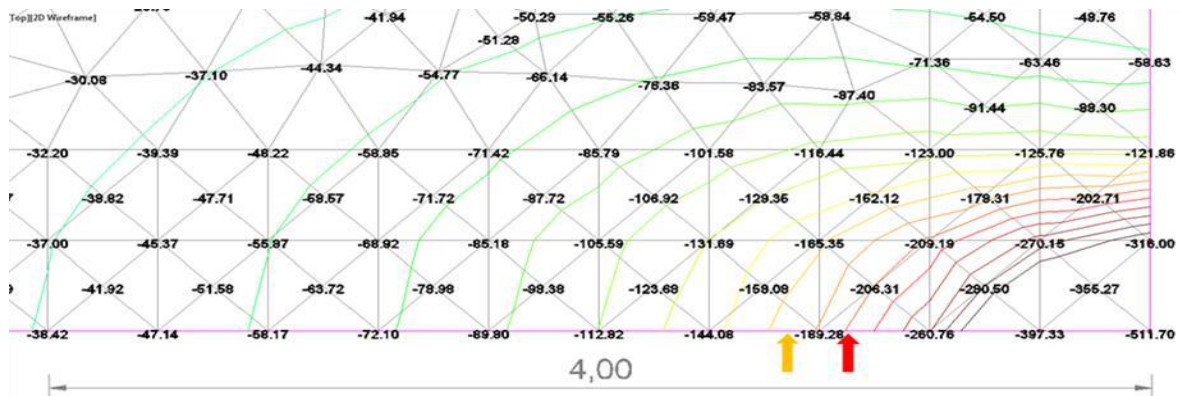


Figura 7-36. Detalle de la evolución de los momentos flectores en un análisis elástico de los ELU

La flecha amarilla indica el punto aproximado del borde inferior del problema donde se sobrepasa el momento de plastificación, y la flecha roja indica el punto sobre el mismo borde en el que se sobrepasa el momento de rotura. Resulta normal que se sobrepasen ambos valores, ya que las placas postesadas requieren de un refuerzo pasivo adicional en estas regiones. Por otra parte, se comprueba cómo, efectivamente, las zonas que requieren refuerzo pasivo no resultan muy extensas en comparación con la dimensión completa del vano.

Siguiendo con el análisis del ejemplo, aún sin armadura de refuerzo pero entrando ya en modalidades de cálculo no lineal, si uno atiende a los cálculos no lineales más habituales en vigas o, incluso, en placas, fijándose por ejemplo en la referencia [MOYA, L., 2003], resulta obligado estudiar primeramente que sucede si se acepta la degradación de la losa únicamente a partir del instante en el que la armadura activa alcanza el alargamiento que provoca su entrada en plastificación. Bajo esta hipótesis la distribución general de momentos flectores resulta la que se muestra en la siguiente página.

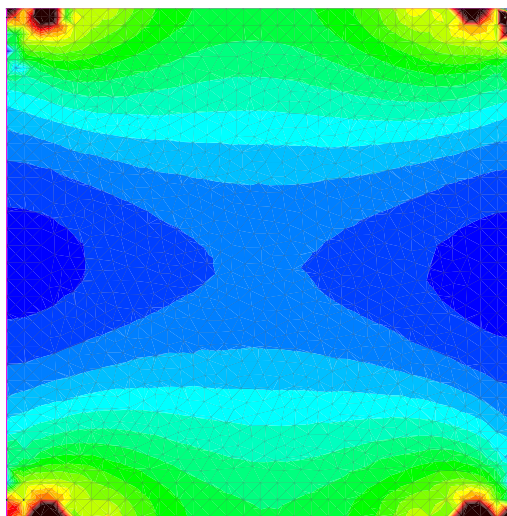


Figura 7-37. Momentos flectores, M_y , obtenidos aceptando la degradación de la losa tan solo cuando se alcanza la plastificación de la armadura

El detalle de la distribución de los momentos flectores en la región de referencia es el siguiente:

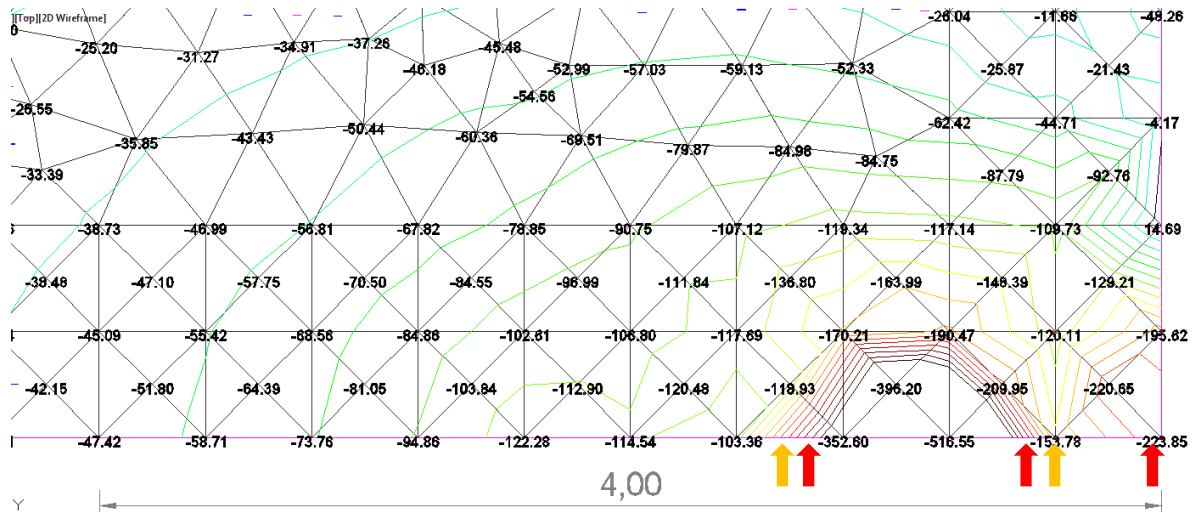


Figura 7-38. Detalle de la evolución de los momentos flectores, M_x , en un análisis no lineal de los ELU, aceptando la degradación de la losa tan solo a partir del momento de plastificación

Como se puede apreciar se produce un resultado extraño o inestabilidad numérica que vuelve a demostrar que resulta muy problemático en un procedimiento no lineal aceptar degradaciones súbitas e intensas. Aunque en el detalle se referencian también los puntos en que sobrepasan los momentos límite, no cabe buscar explicación física alguna en la ubicación de estos umbrales.

Para corregir el problema anterior se realiza una primera prueba en el que se acepta la degradación de las secciones cuando el coeficiente D_{00} , calculado como se ha comentado con anterioridad, resulta igual a inferior a 0,5, por acción de los momentos flectores negativos. Bajo esta hipótesis, la distribución general de los momentos flectores resulta ahora la siguiente:

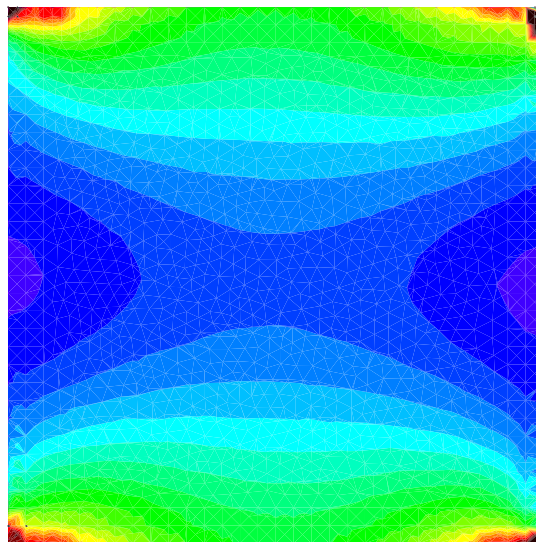


Figura 7-39. Momentos flectores, M_y , obtenidos aceptando la degradación de la losa cuando D_{00} es igual o inferior a 0,5

Y el detalle de la evolución del momento flector en la región de apoyo, resulta de la siguiente forma:

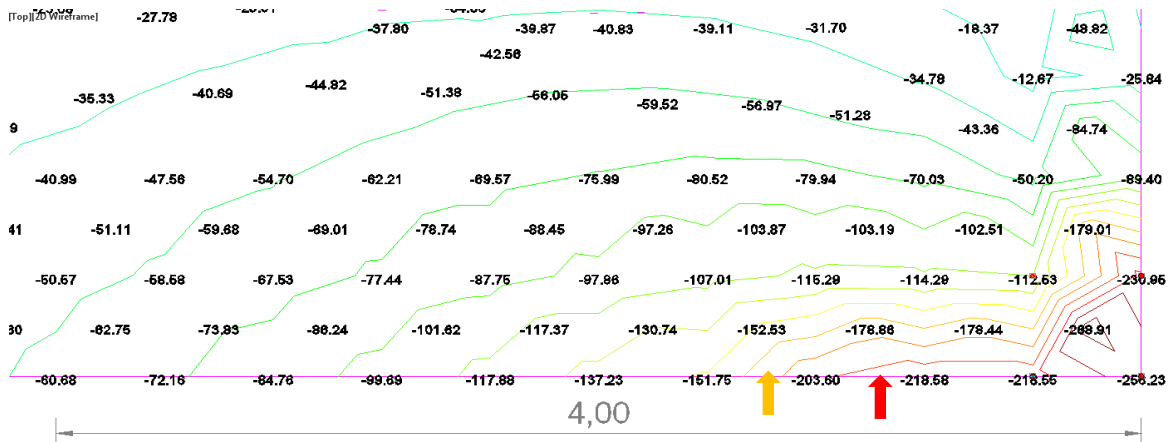


Figura 7-40. Detalle de la evolución de los momentos flectores en un análisis no lineal de los ELU, aceptando la degradación de la losa cuando D00 resulta igual o inferior a 0,5

La primera evidente consecuencia de usar un modelo más gradual degradación, el cual resulta mucho más cercano a lo que describen las propias funciones $M-\Gamma$, es que los resultados presentan una muy buena estabilidad numérica y una aparente coherencia con la física del problema.

Resulta inevitable reseñar que el momento punta de la esquina ha descendido casi a la mitad, a pesar de que siguen sobrepasando los momentos umbral, lo que demuestra la necesidad de considerar una cierta cantidad de refuerzo pasivo.

Por tanto, una primera conclusión importante de este análisis preliminar es que el cálculo no lineal de la placa sin refuerzo permite demostrar una relajación de los momentos flectores que no resulta suficiente para obviar la presencia de refuerzo. Esta relajación se consigue sobre todo en el tramo más cercano al soporte, donde los gradientes de momento flector resultan lógicamente menores que en el cálculo elástico. Esta última circunstancia provoca, a la par, la separación de los puntos del borde donde se sobrepasa el momento plástico y el momento de rotura, lo que resulta interesante desde el punto de vista de la seguridad estructural.

Aceptada la evidente **necesidad de un refuerzo (+1 Φ 20c/20** en este caso), se procede ahora al análisis no lineal del mismo problema, pero teniendo en cuenta la colocación de un refuerzo pasivo suficiente. La presencia del refuerzo pasivo define una nueva función $M-\Gamma$ **para la zona reforzada** inmediata al pilar y un nuevo modelo de degradación que deberá ser tenido también en cuenta en el cálculo no lineal.

La distribución general de los momentos flectores obtenida en un cálculo no lineal, habiendo incluido la incidencia de la armadura pasiva en la región reforzada, mediante el modelo degradación particular de las secciones reforzada, queda ilustrada en la imagen posterior.

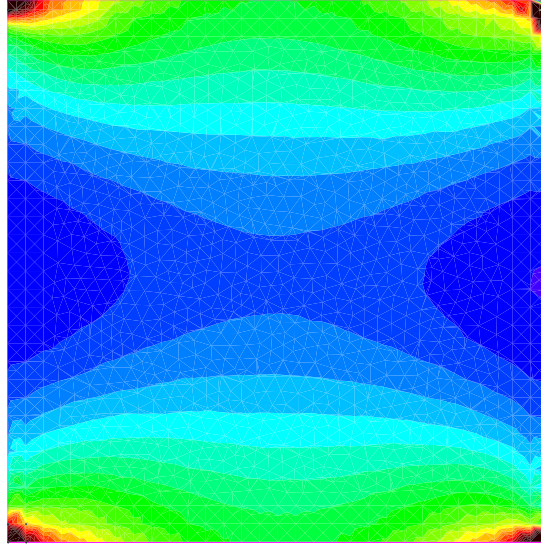


Figura 7-41. Momentos flectores, M_x , obtenidos aceptando la degradación de la losa cuando $D00$ es igual o inferior a 0,5 con presencia de refuerzos pasivos

Y el detalle de la evolución del momento flector en la misma región de apoyo, resulta en este último caso de la siguiente forma:

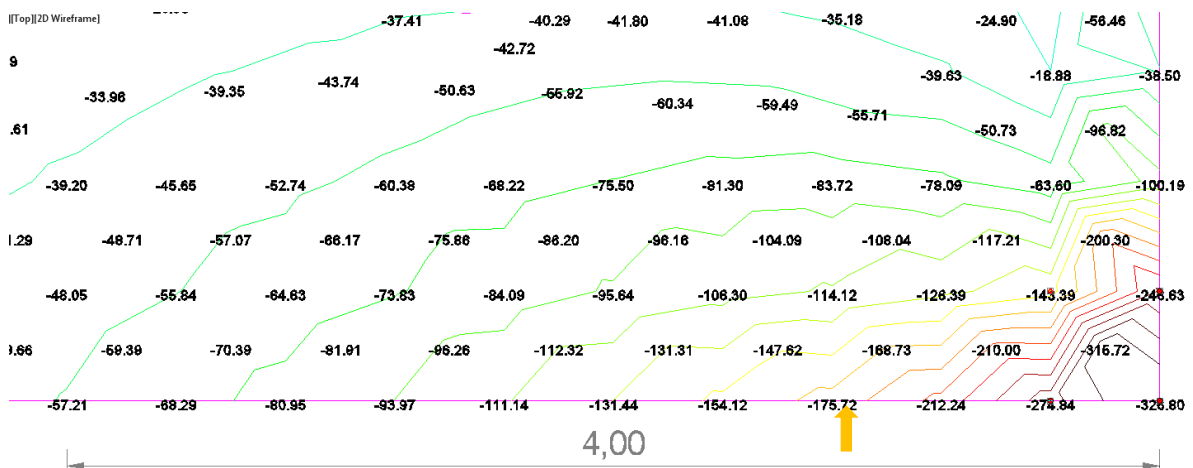


Figura 7-42. Detalle de la evolución de los momentos flectores en un análisis no lineal de los ELU, aceptando la degradación de la losa cuando $D00$ resulta igual o inferior a 0,5 e incluyendo refuerzo pasivo

Como cabía esperar, los resultados siguen siendo muy estables y concordantes con la física del problema.

La relajación del momento máximo es menor que en el cálculo anterior, lo cual también resulta lógico al degradarse menos la sección reforzada, pero el resultado es positivo ya que, justo donde se sobrepasa el momento de plastificación de la losa sin refuerzo pasivo, es donde empieza la ubicación de los refuerzos pasivos.

7.7 Conclusiones del capítulo

Como primera conclusión al presente capítulo cabe comentar que el método de *Newton-Raphson* resulta perfectamente aplicable al análisis no lineal de placas de hormigón postesado mediante el método de los finitos. La clave en su aplicación radica en la evaluación de la degradación de la rigidez, la cual debe hacerse a partir de la matriz de elasticidad generalizada, $[\tilde{D}]$ de cada elemento finito evaluada en ejes generales.

La variación de los términos de rigidez de la citada matriz $[\tilde{D}]$ puede hacerse de forma rigurosa en base al análisis por partículas de la sección de referencia en cada caso, en los términos propuestos en el capítulo sexto. Dicho análisis permite evaluar en primera instancia la pérdida de rigidez a flexión ante cada nivel de sollicitación, lo que equivale en cierta forma a fijar el diagrama momento-curvatura.

La degradación o nivel de daño de las partículas de las secciones de referencia en cada dirección permite, además, fijar cómo se debe afectar la matriz $[D]$ en su término que gobierna el problema de la torsión de placa.

Los resultados obtenidos en los modelos de contraste, en los que se puede anticipar claramente la respuesta teórica, demuestran la bondad inicial del método propuesto por la muy alta coincidencia de los resultados del cálculo no lineal con los resultados teóricos.

No obstante, se demuestra también que degradaciones de las secciones súbitas y/o extremas provocan problemas o inestabilidades numéricas, especialmente en problemas bidimensionales, que aconsejan que las degradaciones aceptadas no resulten demasiado intensas y que dichas degradaciones acontezcan en la placa de turno de forma progresiva.

La requerida progresividad implica que la degradación de las secciones deba ser incorporada en la losa tanto en las zonas con refuerzo pasivo, inmediatas a los soportes, como en las zonas sin refuerzo pasivo, las cuales quedan algo más alejadas de los propios soportes. Cada sección en función de la armadura activa y/o pasiva alojada en su seno tendrá unas curvas de degradación en función de su nivel de sollicitación. Esta última circunstancia provoca que cada problema de placa parta de una condición perfectamente isótropa que en cada región degradada irá deviniendo típicamente en ortótropa, a medida que las iteraciones del procedimiento general de cálculo vayan avanzando.

Los primeros ejemplos de cálculo no lineal abordados en este capítulo demuestran que resulta ineludible la consideración de cierta cantidad de refuerzo pasivo, por lo que el sentido último del cálculo no lineal pasa por el posible ahorro o revisión de la cantidad de refuerzo pasivo utilizado, merced a la relajación de esfuerzos que sí permite demostrar la aceptación de la deterioración de las secciones más sollicitadas.

El estudio de los referidos posibles ahorros (o, visto de otra forma, de las posibles reservas de resistencia de una losa ya reforzada) queda abordado en el siguiente capítulo.





8 ESTUDIO DE CASOS REPRESENTATIVOS

En base al modelo general propuesto en el capítulo anterior, pasa a estudiarse en el presente las consecuencias primeras de su aplicación en tres casos que se han considerado como suficientemente representativos del problema general de las losas postesadas en la edificación a los efectos del trabajo aquí documentado.

Las losas estudiadas responden siempre a vanos interiores a los que se les supone una continuidad perfecta en el perímetro (giro perpendicular a los bordes nulo) y sus diferencias vienen dadas básicamente por la distancia entre los soportes, necesariamente dispuestos en los extremos. Así, estos son los tres casos:

- Losa de 12x12 metros
- Losa de 16x16 metros
- Losa de 12x14 metros

El objetivo es, entonces, el cálculo de los refuerzos pasivos mediante el modelo general propuesto para compararlos, después, con los obtenidos de una forma más canónica.

En el primer caso se busca, además, ajustar ciertos parámetros de la forma de análisis más vinculados a la modelización del problema: simulación de las condiciones de contorno, malla de elementos finitos idónea, etc.

8.1 Caso primero: placa de 12x12 metros

8.1.1 Definición del problema

Los datos fundamentales del problema vuelven a coincidir con los propuestos en el capítulo sexto, para el estudio de las relaciones momento curvatura, en el caso de la placa de 12x12 metros; a saber:

- Espesor de losa → $H = 31,5 \text{ cm}$
- Peso propio $7,88 \text{ kN/m}^2$
- Carga permanente $2,50 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga $3,50 \text{ kN/m}^2$

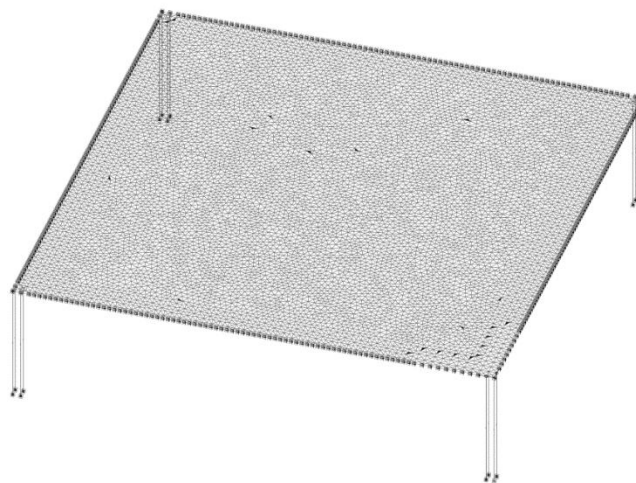


Figura 8-1. Perspectiva del problema de placa de 12x12m incluyendo pilares, según se comenta con posterioridad

Dado que el procedimiento general propuesto no afecta al cálculo de la armadura activa, la cual se calcula en servicio, los resultados del cálculo de la armadura activa son los expuestos en el sexto capítulo, de los cuales se recuerdan resumidamente los siguientes:

Fuerzas de tesado y trazados

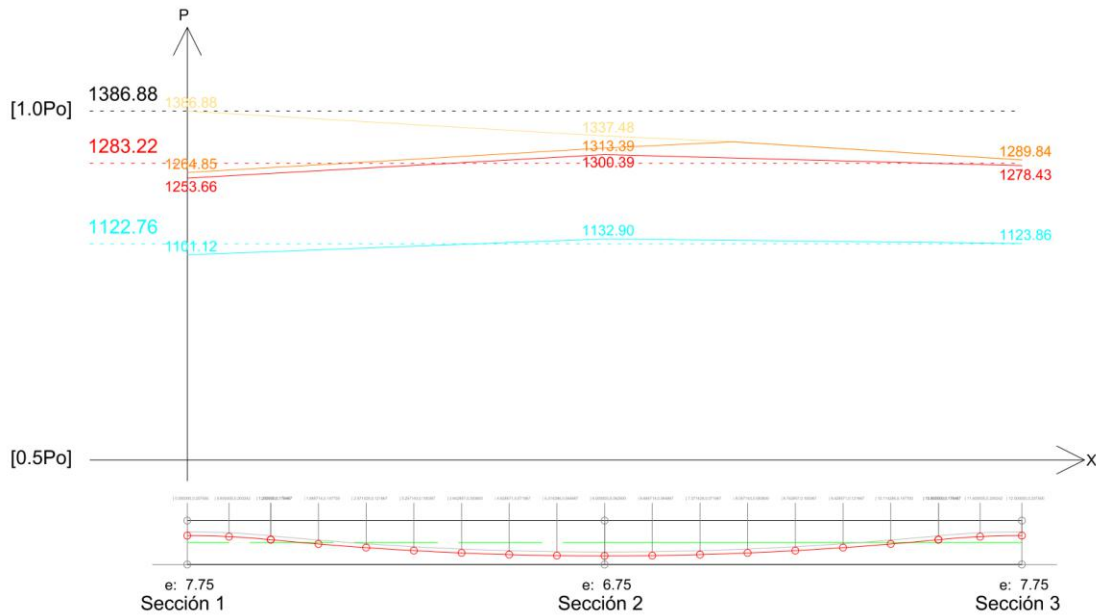


Figura 8-2. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 12x12m

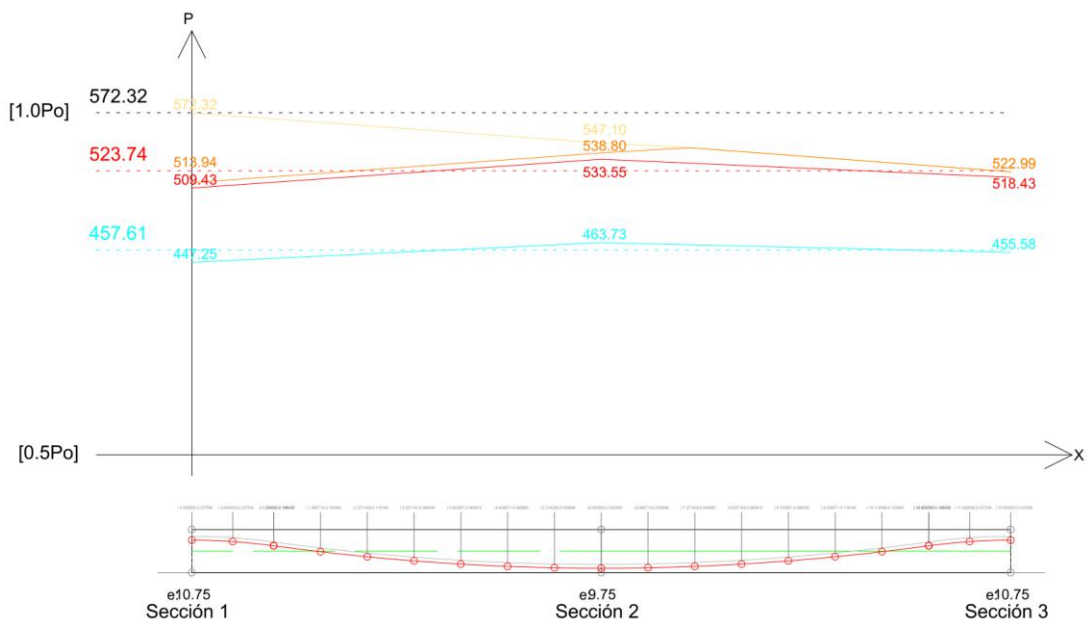


Figura 8-3. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 12x12m



Sistema de fuerzas equivalentes

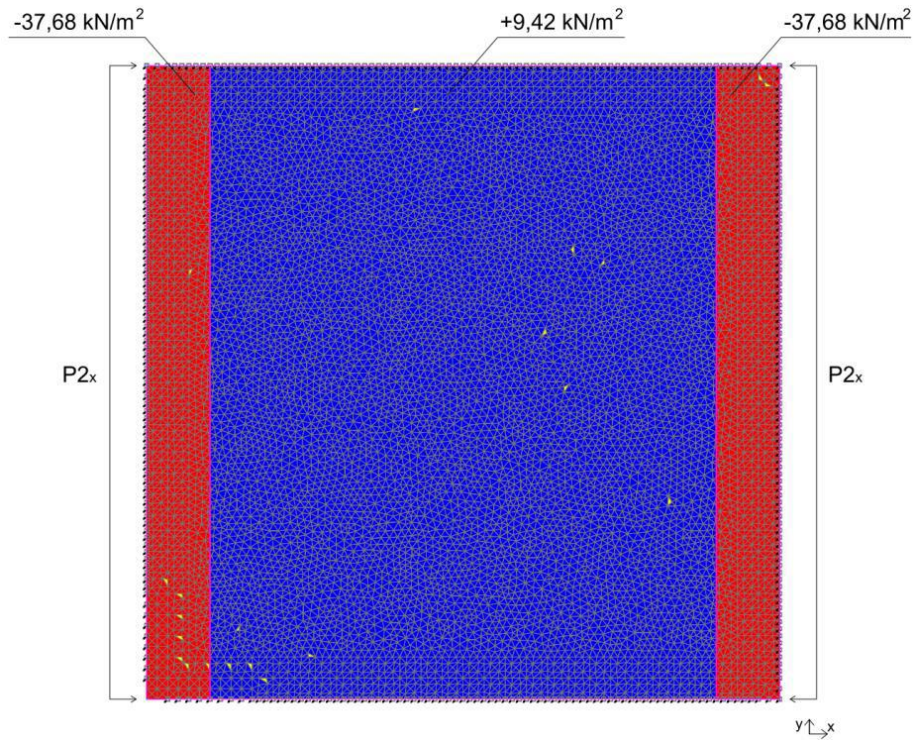


Figura 8-4. Cargas equivalentes en la en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 12x12m

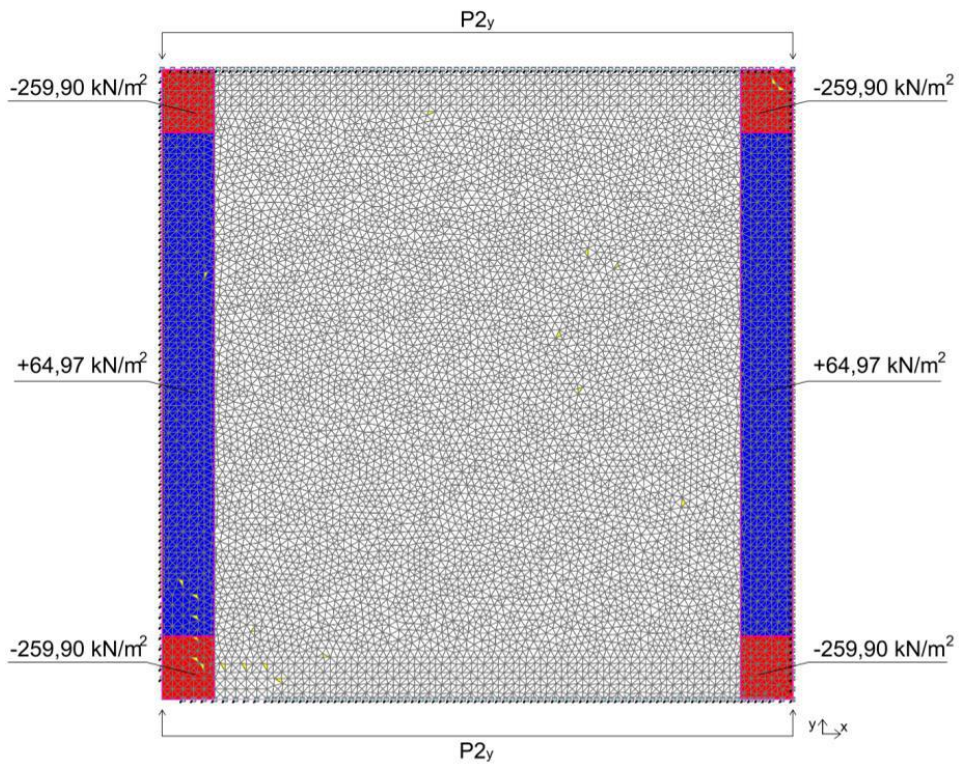


Figura 8-5. Cargas equivalentes en la en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 12x12m

8.1.2 Discretización por el MEF

Uno de los problemas a abordar a la hora de realizar una primera aplicación del procedimiento general propuesto es cómo debe ser la malla de elementos finitos que se va adoptar en el análisis. En lo relativo a esta cuestión se han tomado en consideración dos aspectos específicos:

- El tamaño máximo de los elementos finitos
- La orientación de los elementos finitos

Como es comúnmente sabido, ambas cuestiones pueden tener incidencia en las regiones de placa donde los gradientes de esfuerzos son más acusados, que es justamente donde se dirige la no linealidad del problema.

La realización de diferentes pruebas, que no se exponen aquí por no separarse demasiado del núcleo del problema, ha demostrado como más adecuada la utilización de elementos finitos con lados no mayores a 20cm y que, en las zonas de mayor gradiente, conviene que los elementos triangulares resulten triángulos rectángulos con sus catetos orientados según las direcciones principales del problema.

En verdad, las cuestiones anteriores resultan completamente irrelevantes para la valoración de los resultados generales del problema, tanto de esfuerzos como de deformaciones, lejos de los apoyos, pero, en cambio, resultan fundamentales si lo que se pretende es estudiar con detalle la degradación de la losa junto a los pilares, por insuficiencia inicial de la armadura de refuerzo, en un trabajo de investigación.

En la imagen siguiente se reconoce la malla utilizada en las zonas laterales y de soporte (esquinas).

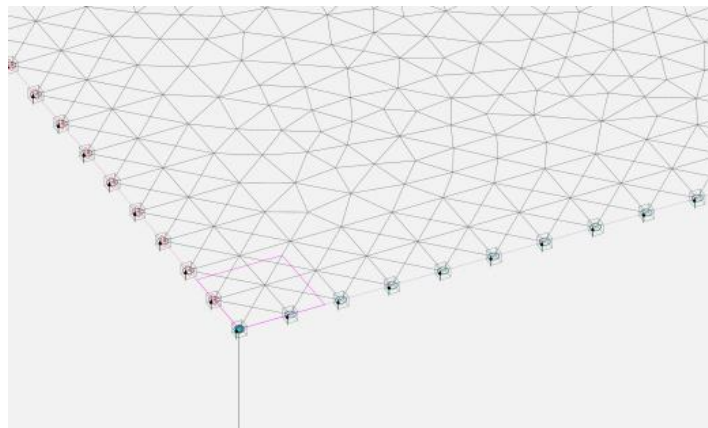


Figura 8-6. Detalle de la discretización del problema de 12x12m en elementos finitos

8.1.2.1 Las condiciones de contorno

Una segunda cuestión con fuerte incidencia es dirimir las condiciones de contorno que se deben adoptar en el análisis; no tanto en el caso más evidente de los perímetros, donde genéricamente se impide el giro de la placa respecto al borde para simular las condiciones de continuidad, pero sí en el caso de las columnas, donde la placa presentará precisamente mayor degradación.

En lo relativo a esta cuestión se han realizado diferentes pruebas de cara a encontrar un modelo que, sin grandes sofisticaciones y sin alterar el sentido del presente trabajo, aproxime la pérdida de gradiente que realmente se da, en el caso de los momentos flectores de placa – M_x y M_y -, sobre la cabeza del soporte.

Por ser ésta una cuestión que permite reconocer mejor la distribución de los esfuerzos en las zonas en discusión, seguidamente se muestran los resultados fundamentales de las pruebas más ilustrativas de cuantas han sido realizadas.

Prueba 1

Respondería a la modelización más utilizada profesionalmente:

En el nodo de esquina:

- Se impiden los giros
- Se impide el descenso

Los resultados obtenidos en el cálculo de M_x y M_y en la zona de soporte, todavía en régimen elástico, son los siguientes:

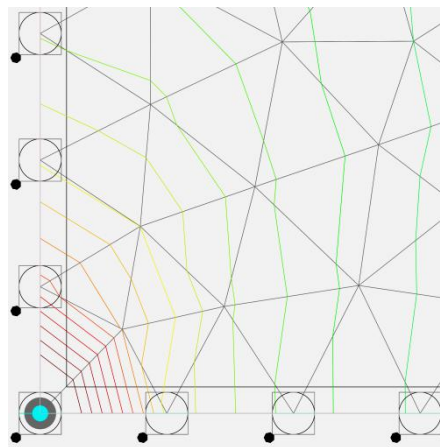


Figura 8-7. Detalle del diagrama M_x en régimen elástico en la Prueba de Contorno 1

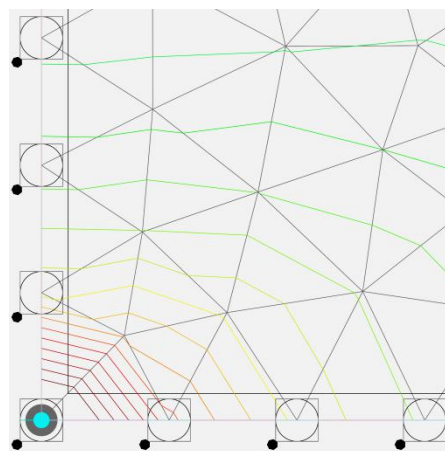


Figura 8-8. Detalle del diagrama M_y en régimen elástico en la prueba de contorno 1

Prueba 2

En el nodo de esquina:

- Se impiden los giros
- Se ubica una columna que simula el descenso por acortamiento elástico del nodo

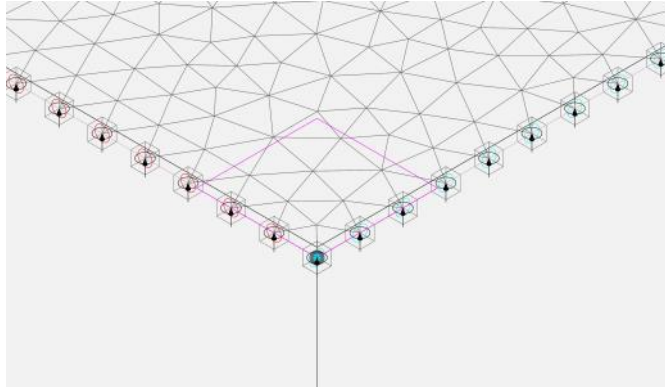


Figura 8-9. Malla triangular con pilar en la esquina para la Prueba de Contorno 2

Los resultados obtenidos en el cálculo de M_x y M_y en la zona de soporte, en régimen elástico, son los siguientes:

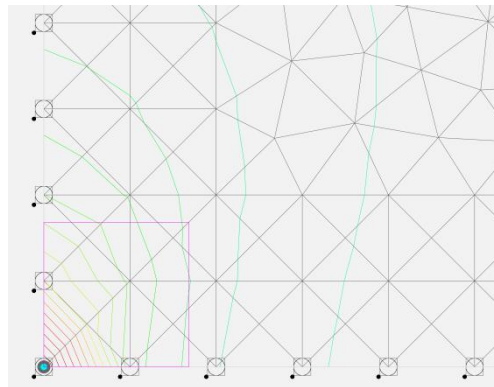


Figura 8-10. Detalle del diagrama M_x en régimen elástico en la Prueba de Contorno 2

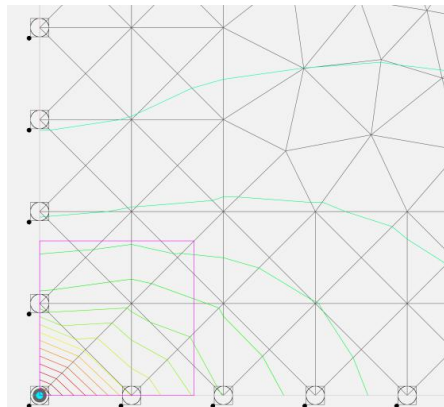


Figura 8-11. Detalle del diagrama M_y en régimen elástico en la Prueba de Contorno 2

Prueba 3

En el nodo de esquina:

- Se impiden los giros
- Se impide el descenso

En los vértices de la columna

- Se impide el descenso

Los resultados obtenidos en el cálculo de M_x y M_y , en régimen elástico, son los siguientes:

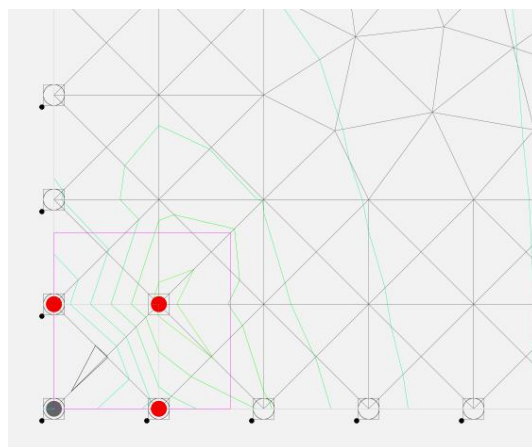


Figura 8-12. Diagrama M_x en régimen elástico en la Prueba de Contorno 3

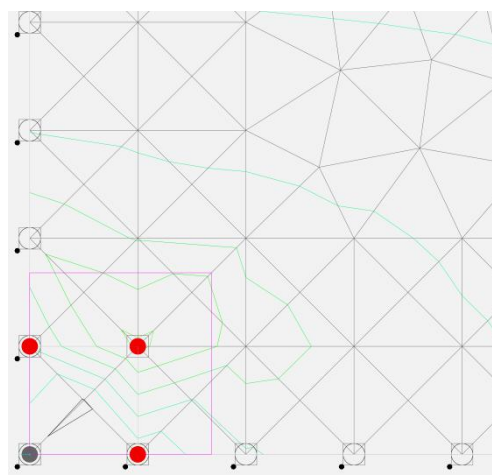


Figura 8-13. Diagrama M_y en régimen elástico en la Prueba de Contorno 3

Prueba 4

En el nodo de esquina:

- Se impiden los giros
- Se ubica una columna de área igual a 1/16 del área total del soporte que simula el descenso por acortamiento elástico de la esquina.

En los vértices de la columna:

- Se vuelve a ubicar una columna de área igual a 1/16 del área total del soporte que simula el descenso por acortamiento elástico de cada vértice.

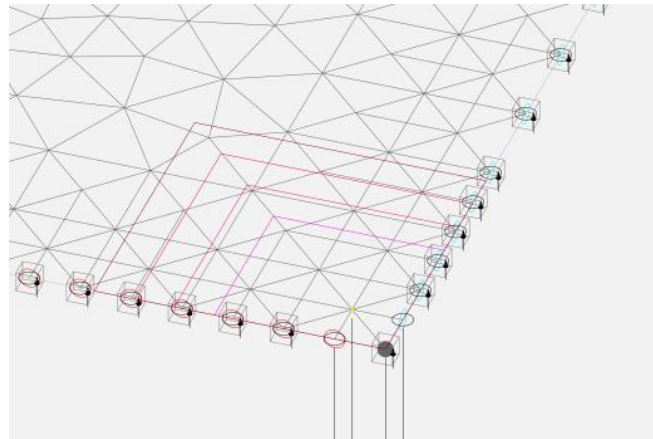


Figura 8-14. Perspectiva de la Prueba de Contorno 4

Los resultados obtenidos en el cálculo de M_x y M_y , en régimen elástico, son los siguientes:

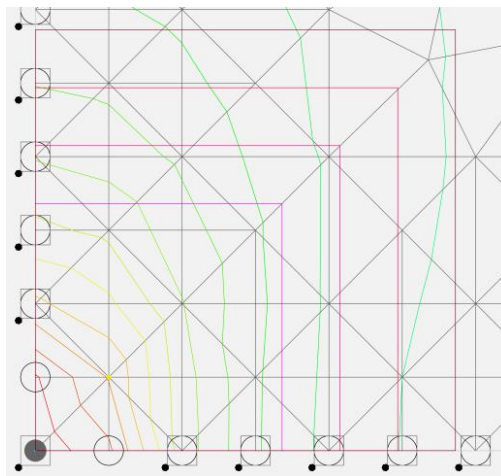


Figura 8-15. Diagrama M_x en régimen elástico en la Prueba de Contorno 4

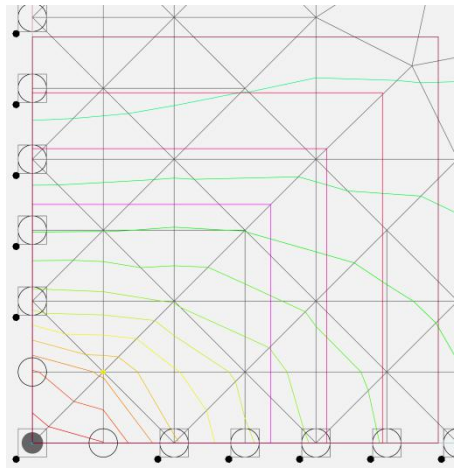


Figura 8-16. Diagrama My en régimen elástico en la Prueba de Contorno 4

Las pruebas 1 y 2, ofrecen resultados muy parejos, resultando que los momentos flectores se incrementan bruscamente justo sobre la cabeza del pilar, lo que va en contra de la física del problema.

La prueba 3 traslada el soporte al vértice interior, creándose un empotramiento por la distancia que separa los puntos fijos, circunstancia que provoca la aparición de pares de fuerzas excesivos.

En la prueba 4, se amortigua el incremento de los momentos flectores de placa sobre la columna, aun produciéndose todavía un incremento algo más suave, y las leyes de esfuerzo de toda la región de soporte presentan un patrón reconocible y, de alguna forma, regular.

Fuera de las zonas de soporte las intensidades de los esfuerzos y su distribución resultan en todos los casos prácticamente las mismas.

La verificación de los diferentes modelos de soporte tratados deja claro, por tanto, que, de los expuestos, es el cuarto modelo el que mejor simula la evolución de los momentos flectores sobre la columna y en sus regiones cercanas y, en definitiva, el que mejor simula la física del problema. Por tanto, los análisis posteriores respetarán esta última forma de imponer las condiciones de contorno, la cual, sin ser complicada, permite una mejor aproximación de los comportamientos locales.

8.1.3 Resultados generales en régimen elástico

En los términos expuestos los resultados principales obtenidos en la parte elástica del problema, la correspondiente al análisis de la situación de servicio, incluyendo los efectos del postesado, son los que se exponen a continuación.

8.1.3.1 Deformaciones

En las imágenes que prosiguen se muestran las deformaciones de placa obtenidas, amplificadas en todos los casos 100 veces.

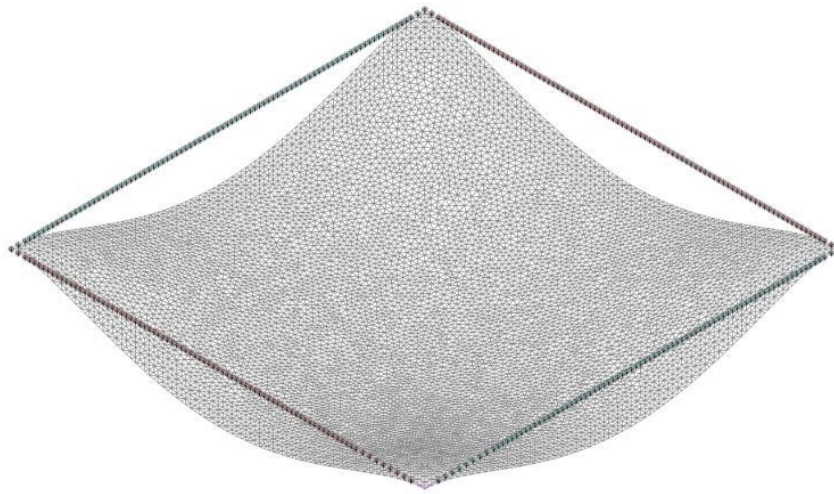


Figura 8-17. Deformación elástica relativa a la aplicación de todas las cargas gravitatorias (Sin incluir el efecto del postesado)

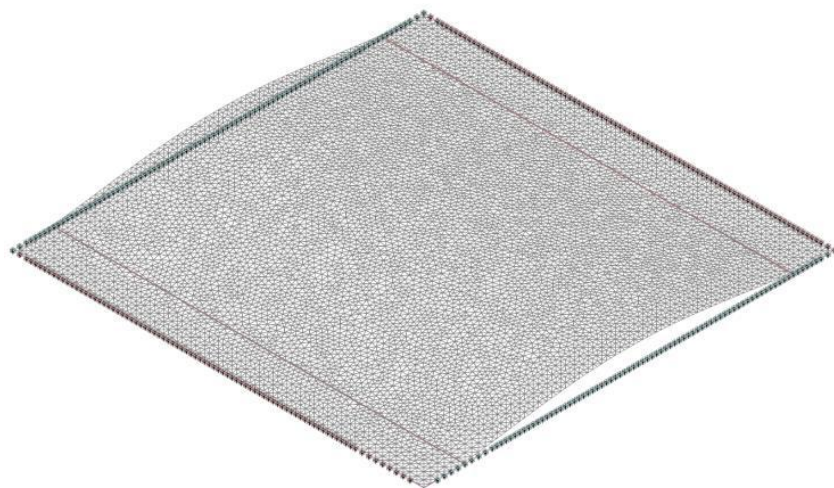


Figura 8-18. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección X (Banda secundaria)

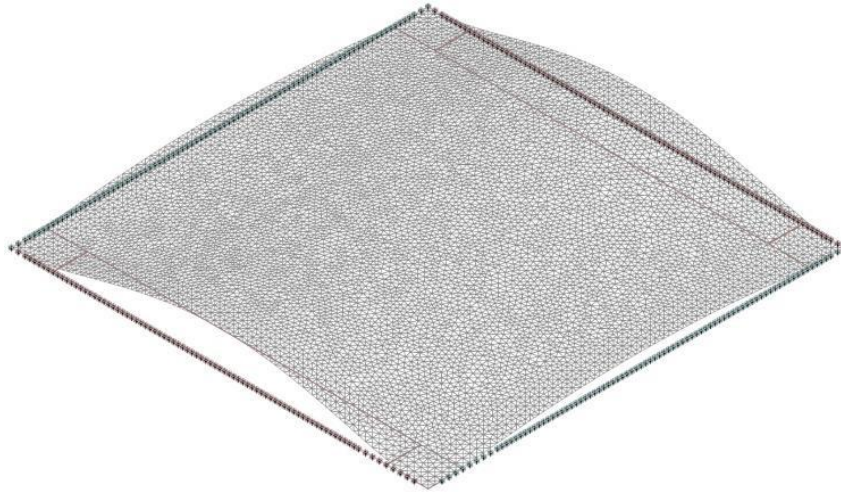


Figura 8-19. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección Y (Banda principal)

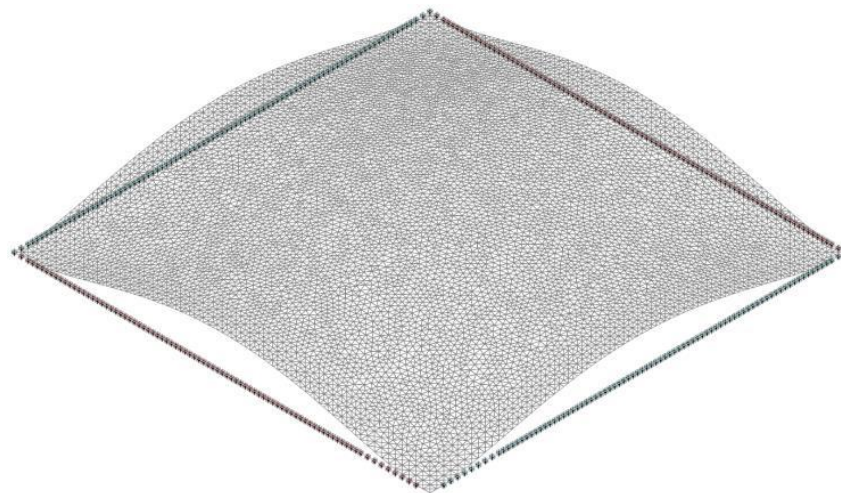


Figura 8-20. Deformación elástica debida a la acción conjunta de las dos bandas de postesado,

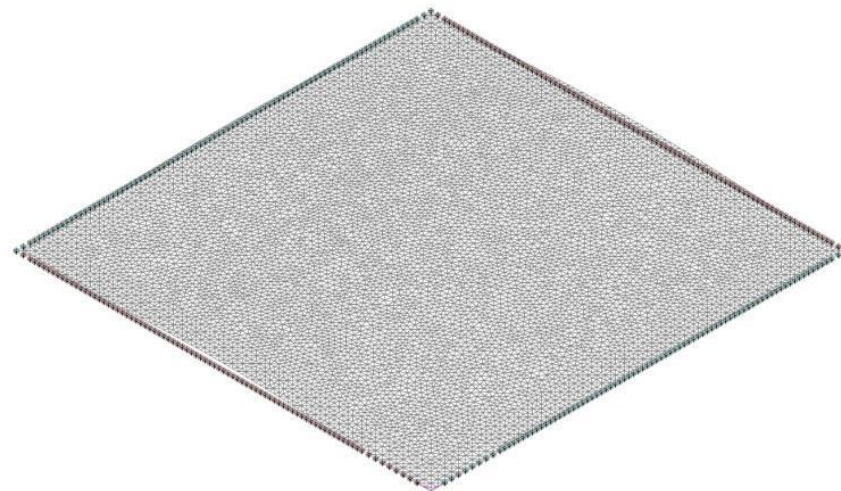


Figura 8-21. Deformación elástica (x100) en situación de vacío (cargas permanentes + postesado)

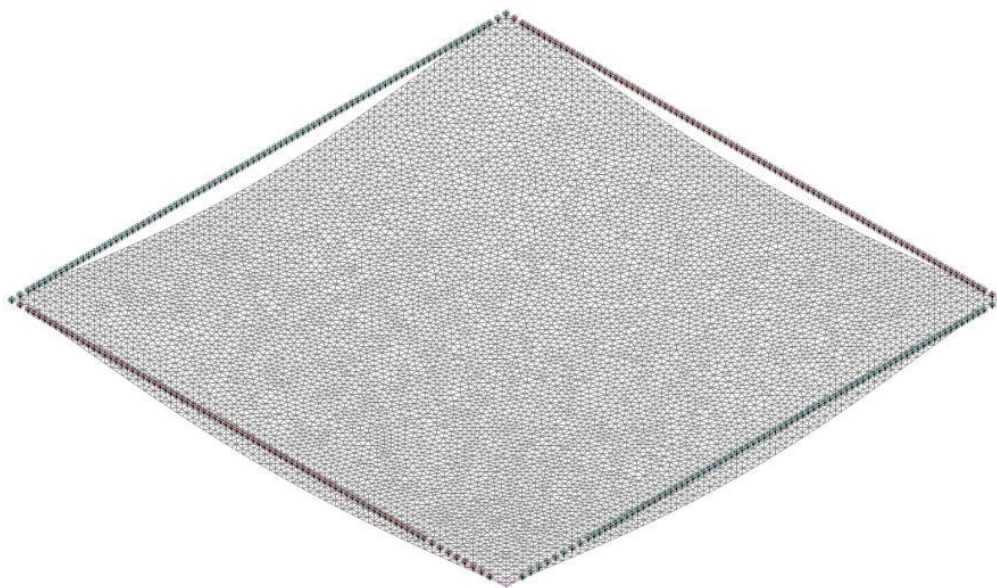


Figura 8-22. Deformación elástica en el Estado Límite de Servicio, teniendo en cuenta todas las acciones gravitatorias inerciales y todas las acciones del postesado (ELS)

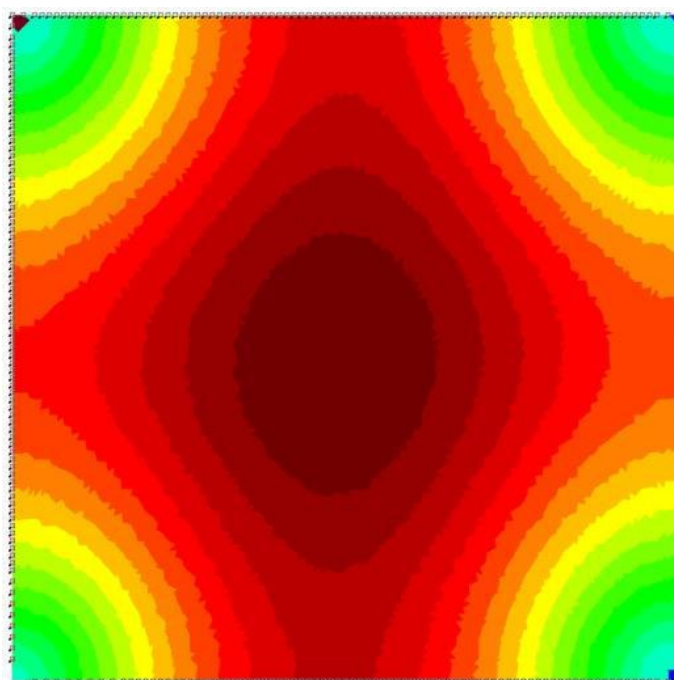


Figura 8-23. Diagrama de niveles de flecha en el ELS

$$f_{\max \text{ inst}} = 6,4 \text{ mm} \rightarrow L/1875$$

8.1.3.2 Esfuerzos

Del análisis de esfuerzos conviene mostrar los resultados en el Estado Límite Último (ELU), estado que responde a la siguiente combinación de cargas:

$$\begin{aligned} &1,35 \cdot (\text{Peso Propio}) + \\ &1,35 \cdot (\text{Cargas Permanentes}) + \\ &1,50 \cdot (\text{Sobrecarga}) + \\ &1,00 \cdot (\text{Postesado}) \end{aligned}$$

Cabe hacer notar que la corrección de los efectos del postesado establecida en la instrucción EHE-08 (0,9 para efectos favorables y 1,10 para efectos desfavorables) ha sido tomada en cuenta directamente en el análisis de las secciones que ha permitido el cálculo de los efectos del propio postesado según ha sido expuesto en el capítulo quinto.

En base a lo anterior los esfuerzos de placa delgada obtenidos – M_x , M_y y M_{xy} – son los que se muestran a continuación.

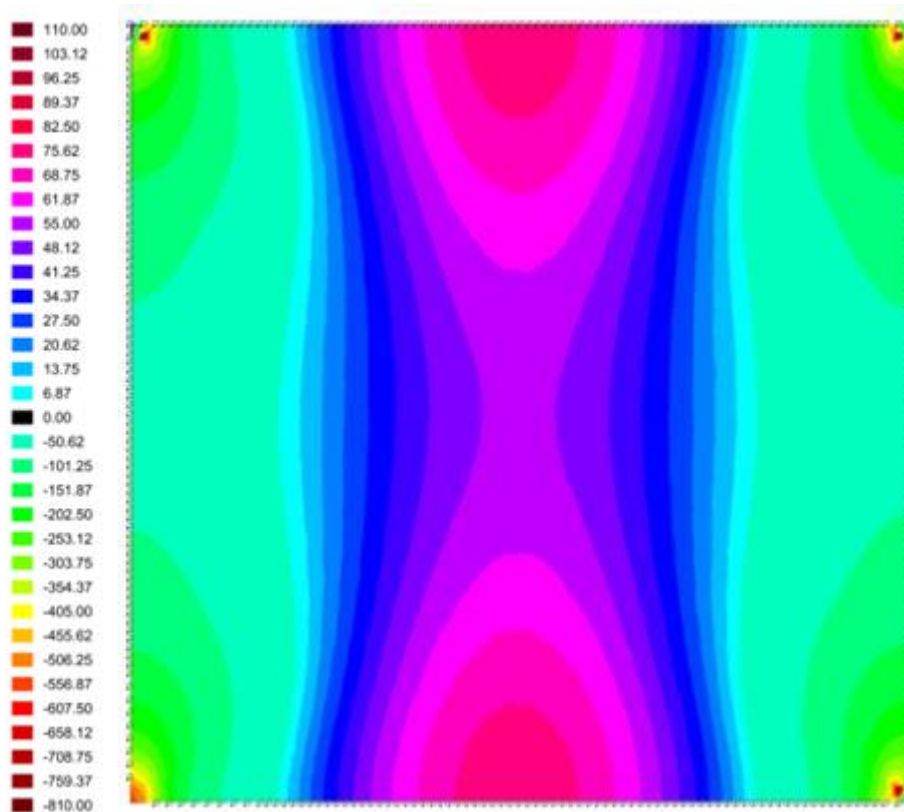


Figura 8-24. Diagrama de Momentos Flectores M_x en los ELU (m·KN/m)

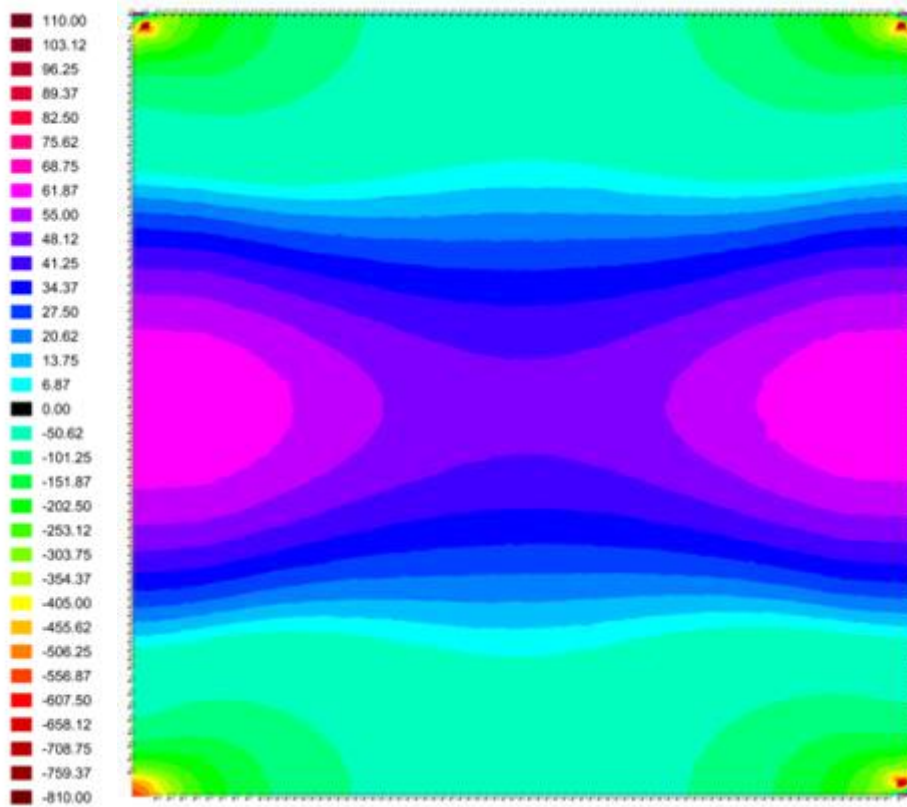


Figura 8-25. Diagrama de Momentos Flectores M_y en los ELU (m·KN/m)

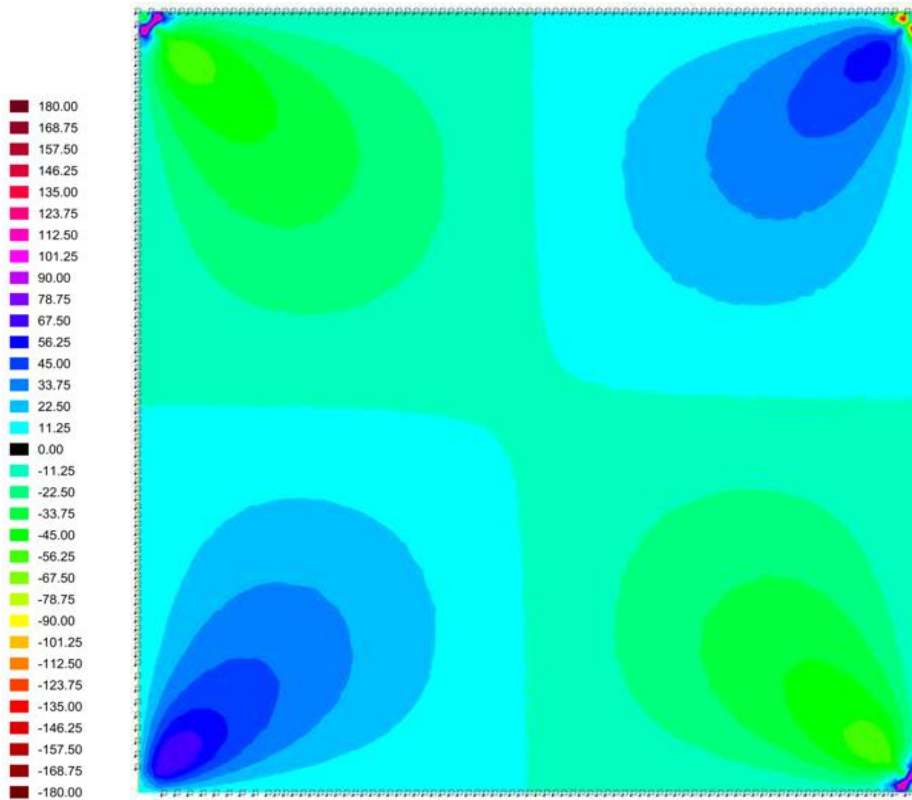


Figura 8-26. Diagrama de Momentos Torsores M_{xy} en los ELU (m·KN/m)

8.1.4 Estudio del refuerzo superior pasivo

8.1.4.1 La sección de referencia. Ancho de integración

En el cálculo de losas postesadas, así como la definición de la sección o secciones de referencia a la hora de analizar los Estados Límite de Servicio, para determinar las armaduras activas, resulta normalmente clara, pues se suele asociar al ancho completo del pórtico virtual al que se puede asimilar el problema - al menos en vanos interiores - la definición de la sección de referencia a la hora de calcular los refuerzos pasivos, ya en el análisis de los Estados Límite Últimos (E.L.U), resulta un tanto más compleja.

Las referencias en lo relativo a esta cuestión en los códigos europeos son escasas, sometiéndose por lo general la definición al criterio del proyectista. Sí cabe destacar al respecto que el *Post-Tensioning Institute*, como se detalla en [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000], recomienda que se dispongan refuerzos pasivos a ambos lados de los soportes, de manera que se cubra un ancho mínimo a cada lado de las caras de los pilares igual o superior a 1,5 veces el canto H de la losa, recomendación que vendría a definir una sección mínima de refuerzo (o de tamaño mínimo) para el estudio de los E.L.U.

En rigor, dada la falta de una definición previa precisa, en cada problema se debe dirimir cual es el ancho relevante en el análisis de los E.L.U., determinando cual es la región adyacente al soporte de turno cuyo momento flector integrado no queda cubierto por la propia armadura activa.

De cara a comprender un poco mejor la incidencia del ancho de integración en el cálculo de armaduras se ha estudiado en este primer caso, los resultados obtenidos para diferentes anchos de integración que cubren una distancia contada desde la cara del soporte que va desde $1,5 \cdot H$ hasta $8,0 \cdot H$, según se pretende ilustrar en la figura siguiente.

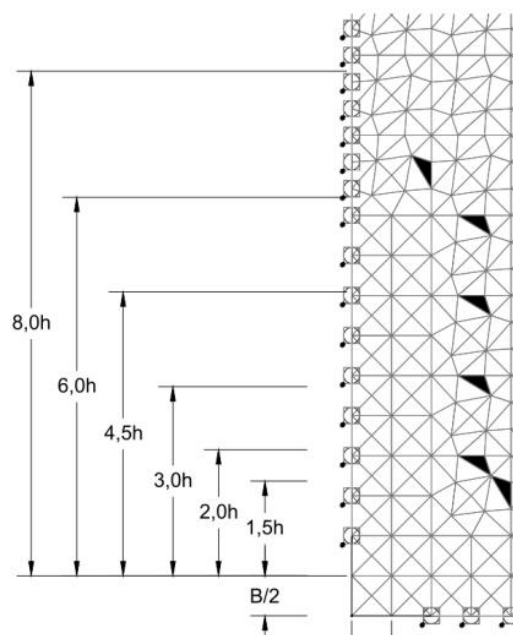


Figura 8-27. Anchos de integración estudiados en el Caso Primero (Placa de 12x12m)

En base a lo anterior, resulta evidente, pues, que se hace necesario discutir la resistencia de las secciones postesadas, primero, sin refuerzo pasivo y, después, con refuerzo pasivo, lo que se ha hecho a partir de secciones unitarias de 1 metro de ancho, en las que se ha repercutido linealmente la armadura activa obtenida en cada dirección y, en el segundo caso, el refuerzo pasivo dispuesto por cada metro de losa, lo que se pretende ilustrar en las dos figuras adyacentes.

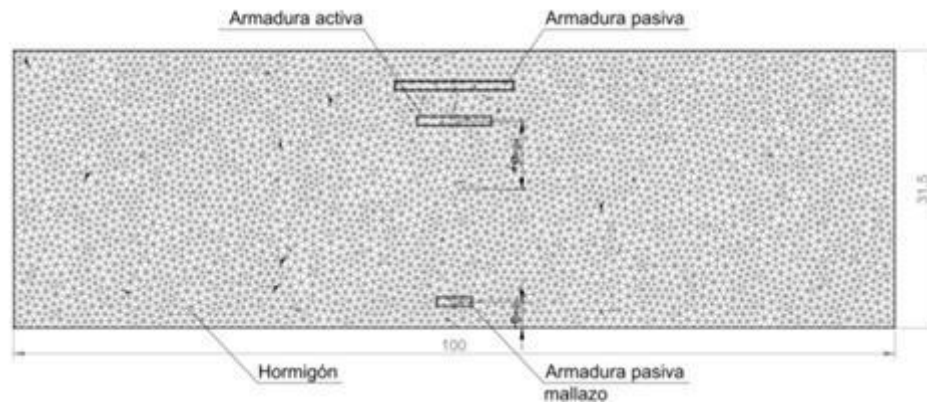


Figura 8-28. Secciones tipo de cálculo por metro lineal en la dirección X (Secundaria)

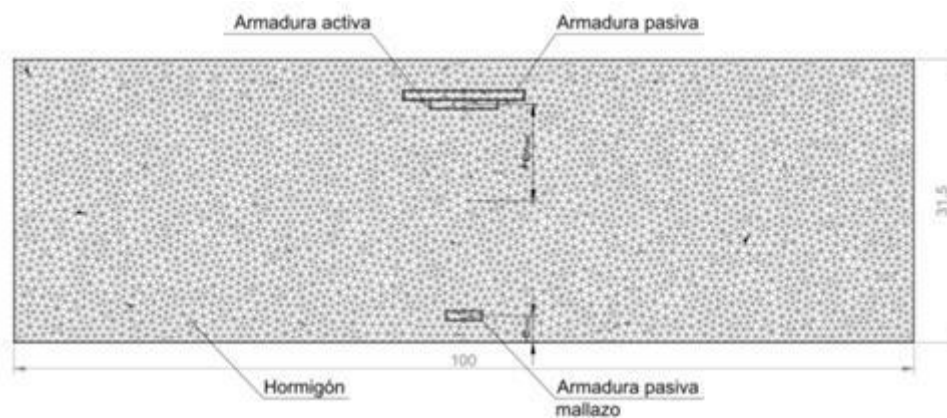


Figura 8-29. Secciones tipo de cálculo por metro lineal en la dirección Y (Principal)

8.1.4.2 Modelo conjunto de degradación. La incidencia de las armaduras pasivas

En el capítulo 6 han quedado fijadas las características básicas de la forma de degradación de una sección postesada, tanto en la ausencia de refuerzos pasivos como en su presencia (en diferentes grados o cuantías).

Otra de las dificultades que plantea el análisis de la degradación de una losa postesada deviene, precisamente, de la coexistencia de tramos sin refuerzo pasivo con tramos reforzados en una misma sección transversal de losa. De tal forma que, en rigor, la degradación de las propiedades de la placa debe atender a ambas formas de deterioro.

Por otra parte, el análisis de un problema no lineal por degradación mecánica exige tener claras previamente las propiedades de degradación del problema, lo que obliga a establecer o proponer un refuerzo pasivo antes de abordar el cálculo de una losa cualesquiera.

En este trabajo, cuyo objetivo último es revisar las cantidades de refuerzos pasivo comúnmente empleados en la práctica profesional, se proponen diferentes niveles de refuerzo, que conllevan, pues, diferentes cálculos no lineales, partiendo de la premisa de que los refuerzos propuestos y analizados resultan siempre inferiores a los que se obtendrían siguiendo los procedimientos habituales.

Sea como fuere, las consideraciones anteriores conllevan un estudio previo de la forma de degradación de las secciones postesadas con o sin refuerzo pasivo, en base al modelo de trabajo que refleja el siguiente diagrama de flujo:

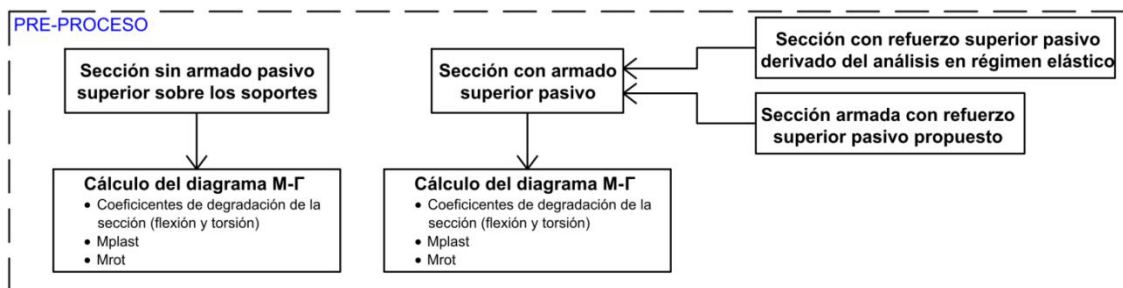


Diagrama 8-1. Organización de la preparación del modelo conjunto de degradación

Es decir, para la mejor comprensión de las consecuencias del análisis no lineal, se propone calcular también no linealmente la placa con los refuerzos obtenidos en cálculo elástico o convencional.

En este primer caso de placa de 12x12 metros, considerando el ancho de refuerzo mínimo antes citado (1,5·H), se obtendrían las siguientes funciones de degradación en el estudio de la relación momento curvatura en una de las dos direcciones:

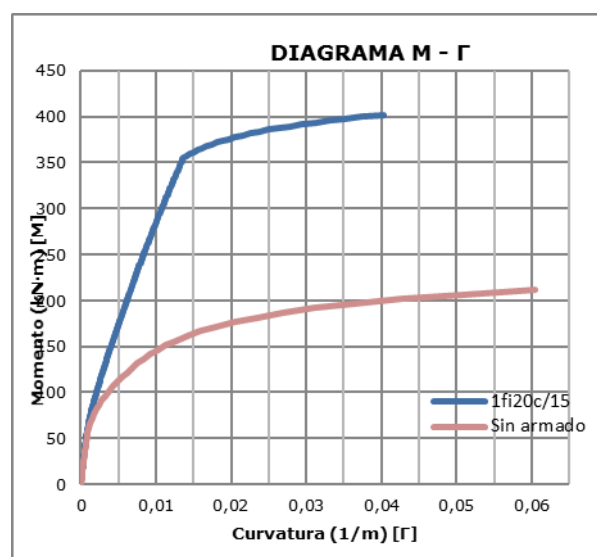


Figura 8-30. Relaciones momento curvatura obtenidas para el problema propuesto en la dirección Y, considerando el ancho de integración mínimo para la determinación de los refuerzos

Según se ha expuesto en el capítulo 7 la evolución de la curvatura de una sección, y su degradación asociada, se refleja en el análisis de la losa por el método de los elementos finitos a través de la afectación de los términos clave de la matriz de elasticidad [D], por los coeficientes expresados en este trabajo como D00, D11 y D22, según sigue:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} D00 \cdot E_x & \min(D00, D11) \cdot \nu_{xy} E_x & 0 \\ \min(D00, D11) \cdot \nu_{yx} E_y & D11 \cdot E_y & 0 \\ 0 & 0 & D22(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

En este primer problema la evolución de la degradación que se obtiene en los dos términos clave de la matriz de elasticidad en una dirección, expresada en términos de coeficiente, tanto para las zonas reforzadas con la armadura pasiva propuesta como para las zonas no reforzadas, presenta la siguiente forma:

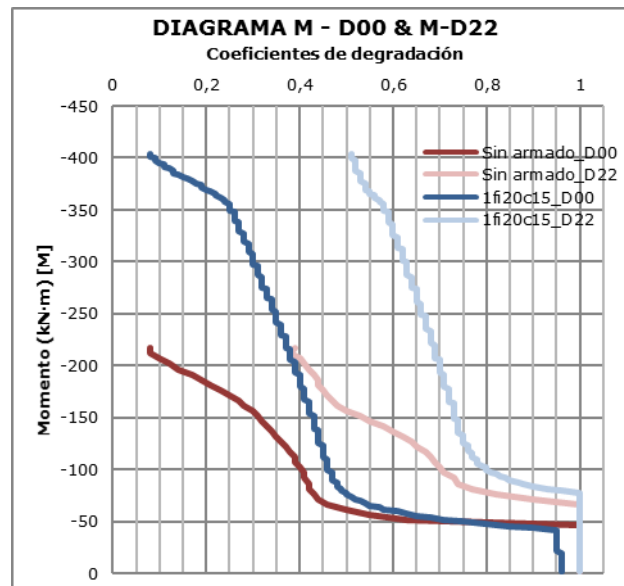


Figura 8-31. Degradación de los términos clave de la matriz de elasticidad [D] en la dirección Y

Los diagramas obtenidos para la dirección complementaria, según también ha quedado expuesto en el citado capítulo séptimo, resultan prácticamente idénticos a los anteriores, al ser la armadura finalmente dispuesta igual en ambas direcciones, al menos en los casos hasta aquí analizados.

La consideración conjunta de las dos situaciones de la sección – con o sin refuerzo – conlleva una relación entre momento y curvatura más compleja, compuesta de ambos comportamientos básicos, de tal forma que, hasta donde aguanta la armadura activa sin la necesidad de refuerzo, la curvatura queda regida por la relación momento-curvatura de la sección sin reforzar y, a partir del lugar en el que se necesita refuerzo (o del lugar en el que se empieza a disponer realmente el refuerzo), la curvatura queda regida por la relación momento-curvatura de la sección reforzada.

De tal forma que en el problema de 12x12 metros se podría considerar un diagrama momento-curvatura tal como el que sigue.



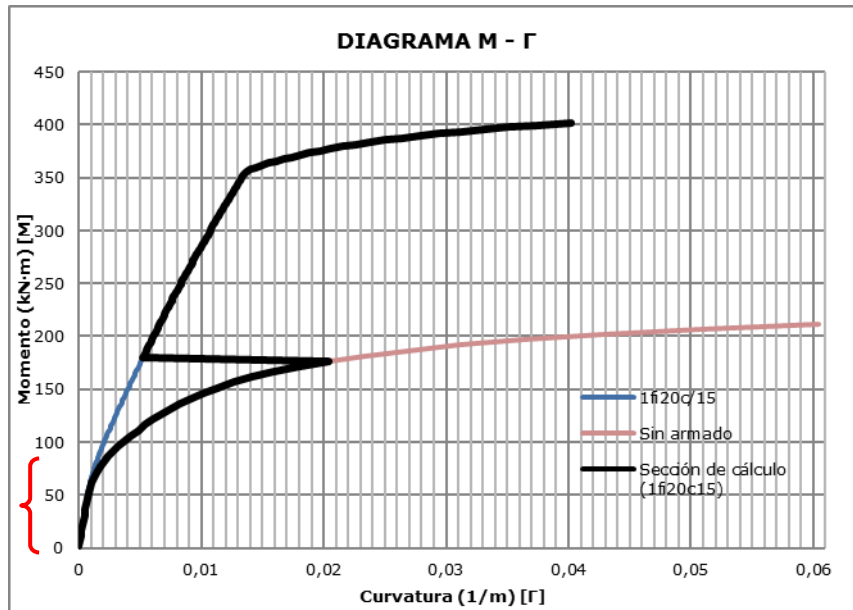


Figura 8-32. Diagrama conjunto momento-curvatura de una sección transversal de losa postesada

En el diagrama anterior se pueden distinguir tres tramos generales:

1^{er} tramo: La función momento curvatura presenta un comportamiento cuasi lineal. Queda señalado por el corchete rojo

2^o tramo: La función momento curvatura presenta fuertes niveles de deformación hasta que adviene la plastificación de la armadura activa

3^{er} tramo: La función momento curvatura pasa a ser la de la sección reforzada hasta que se alcanza el momento último.

De forma paralela, cabe estudiar la degradación de los términos relevantes de la matriz de elasticidad [D] en función de los coeficientes de referencia:

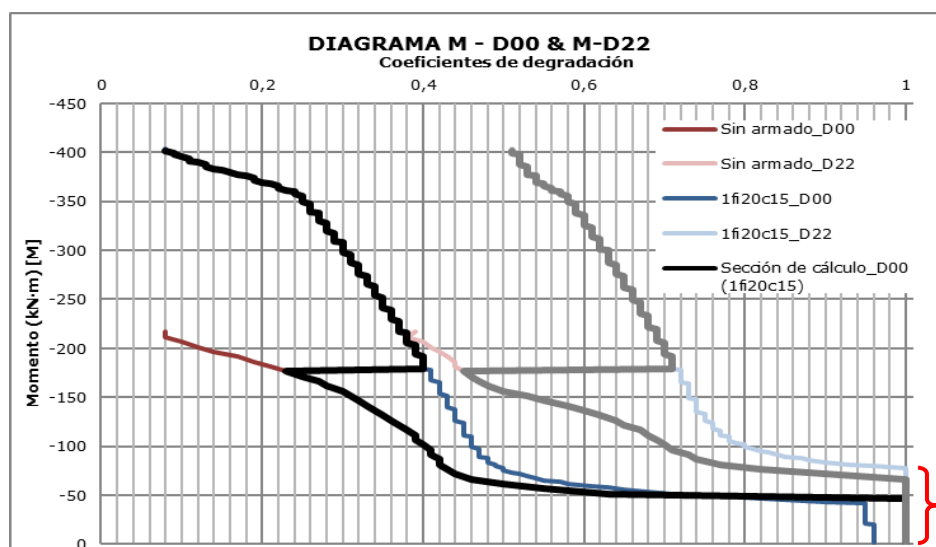


Figura 8-33. Modelo conjunto de degradación de las propiedades de rigidez de la placa

En estas últimas funciones pueden distinguirse tres tramos análogos a los antes citados, sobre los que conviene comentar lo subsiguiente:

1^{er} tramo: No se produce degradación relevante de la placa y esta conserva sus propiedades elásticas. Queda señalado por el corchete rojo

2^o tramo: La degradación de la losa es la propia de la sección postesada sin refuerzo, hasta que adviene la plastificación de la armadura activa

3^{er} tramo: La degradación de la losa es la propia de la sección postesada incluyendo el refuerzo

Nótese que este modelo conjunto degradación nunca es rigurosamente cierto para una sola sección, pues la sección reforzada es más rígida y resistente al inicio de su historia de carga y, por el contrario, la sección no reforzada es menos rígida y resistente al final de su historia de carga. No obstante, la consideración de esta forma de degradación conjunta en un proceso de cálculo iterativo permite obtener la frontera precisa donde debe empezarse el refuerzo pasivo, lo que acaba haciendo cierta la función conjunta, ya que, de esta forma, la sección no reforzada nunca va a rebasar su momento de plastificación ni, por tanto, va haber refuerzo en situaciones donde el momento sea inferior al que soporta la armadura activa por sí sola. De tal suerte, pues, que el proceso general de obtención de esfuerzos de placa respondería al siguiente diagrama de flujo.

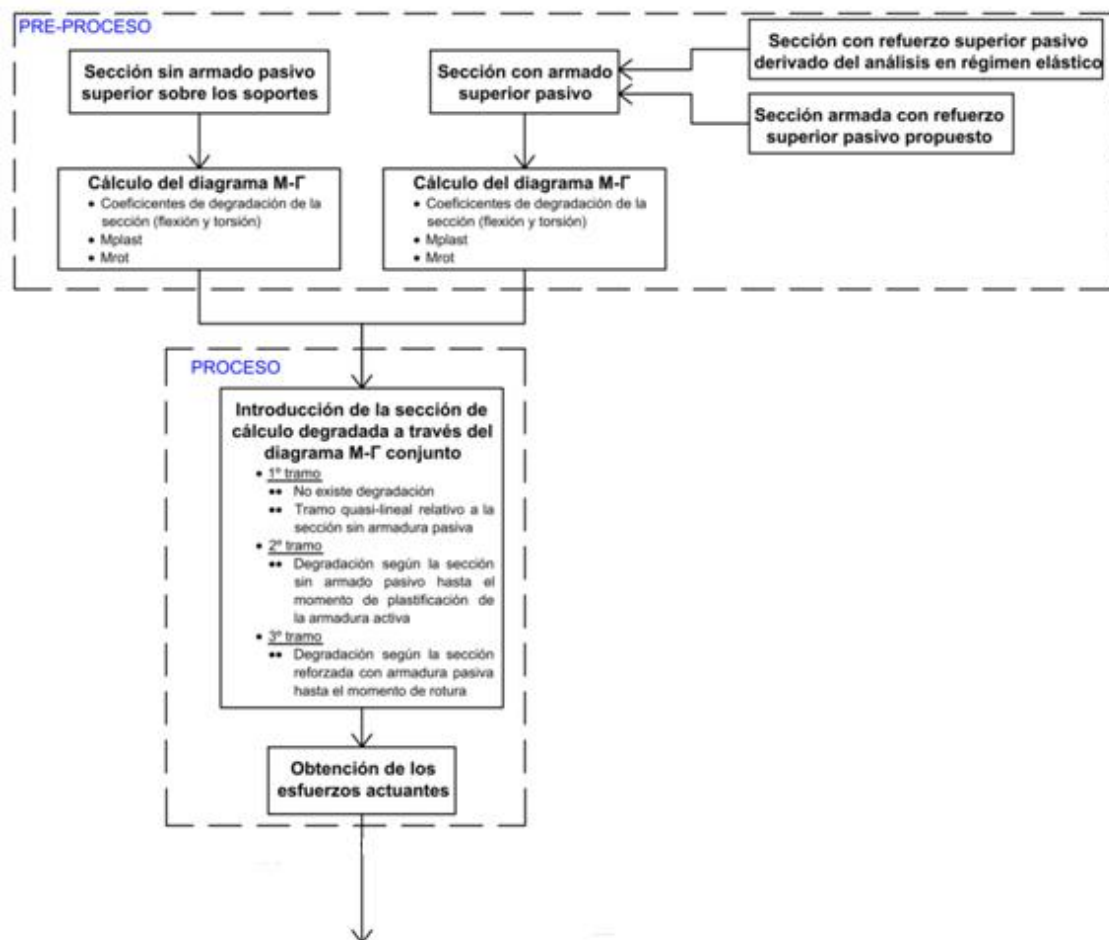


Diagrama 8-2. Organización general del cálculo no lineal de la losa en lo referente a su degradación

8.1.5 Resultados en cálculo no lineal. Comparativa

8.1.5.1 A partir de ámbitos de refuerzo predeterminados

En este apartado se aborda el cálculo no lineal teniendo en cuenta los anchos de integración, de tamaño creciente, propuestos líneas arriba, anchos que parten del mínimo propuesto por el *Post-Tensioning Institute*, según se recoge en [PRICE, R. y REINHARDT, P, 2000].

Primeramente, se calcula de la forma convencional el refuerzo pasivo necesario para un determinado ancho, fijado de forma arbitraria. Este cálculo repetido, para cada caso, permite obtener las distintas funciones momento-curvatura que se muestran a continuación para la dirección Y.

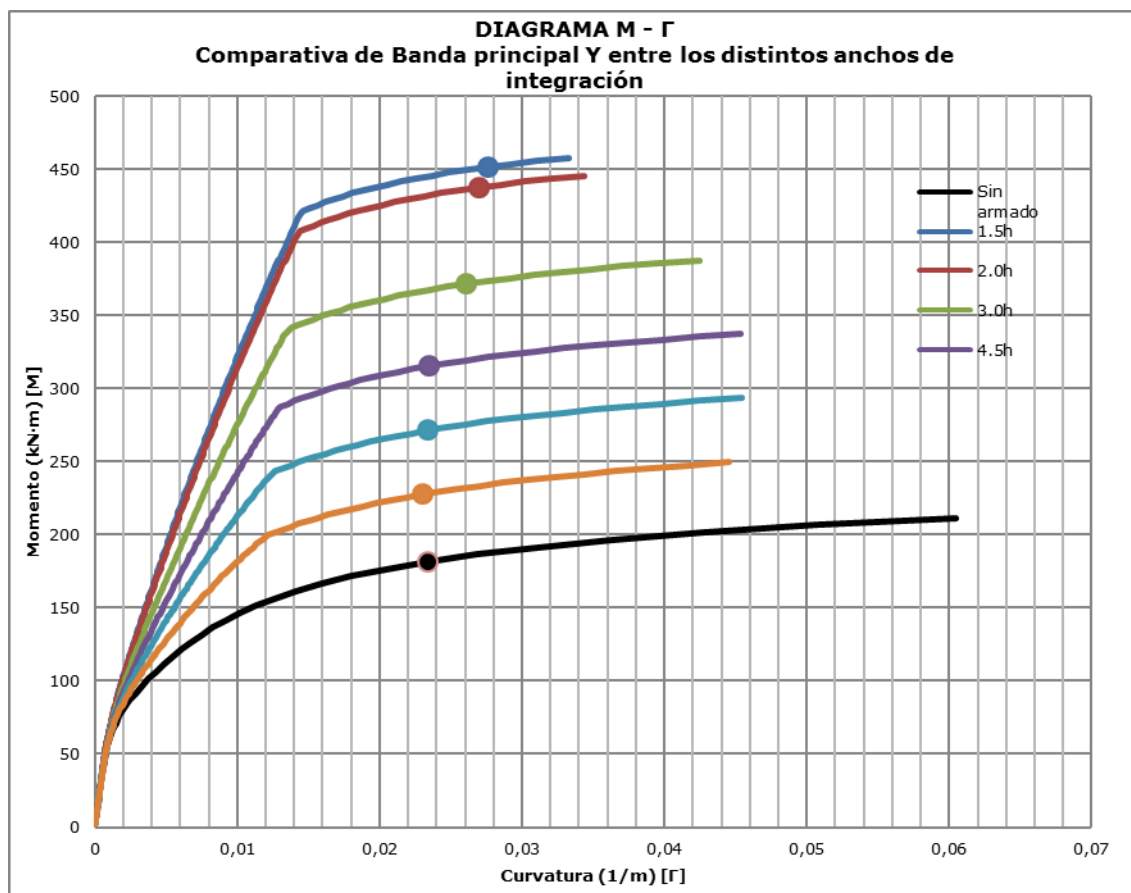


Figura 8-34. Relaciones momento curvatura obtenidas para las secciones reforzadas, en una secuencia de anchos crecientes de carácter "arbitrario"

Como en casos precedentes, en las funciones de la figura 8-34 el punto indica el momento de plastificación de la armadura activa de cada sección en función de su propio refuerzo.

A partir de los momentos o curvaturas anteriores, se obtiene, según se ha detallado, los coeficientes degradación de la matriz de elasticidad [D] que gobiernan la no linealidad del problema en el análisis por el MEF. La evolución de dichos coeficientes resulta en este caso para la dirección reseñada como sigue.

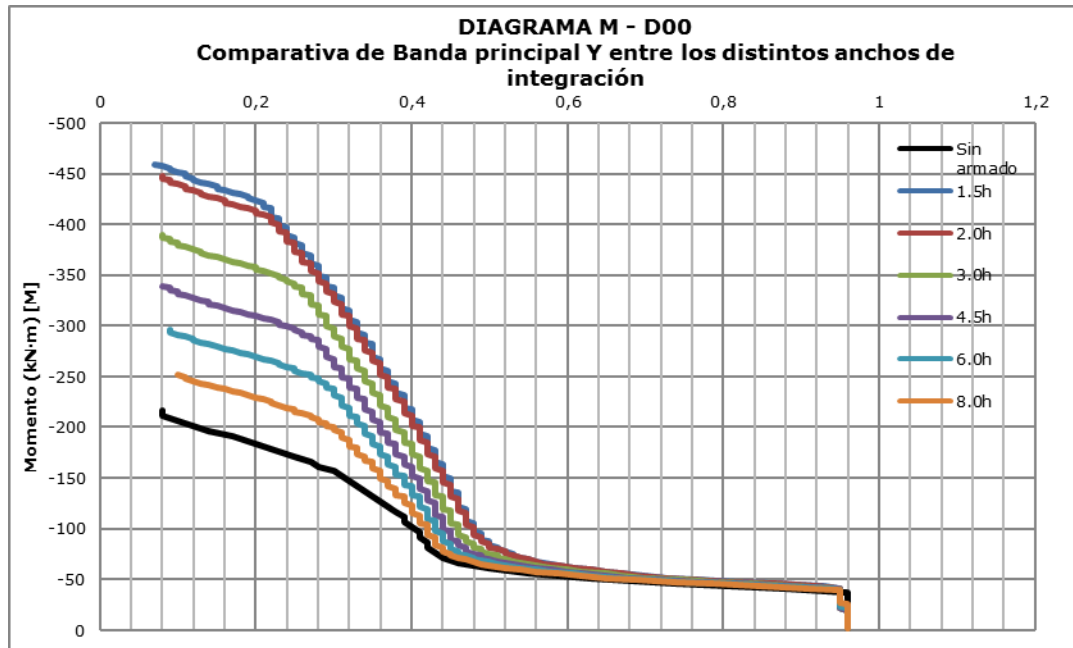


Figura 8-35. Degradación del término D00 en función del momento flector actuante, para diferentes anchos de integración

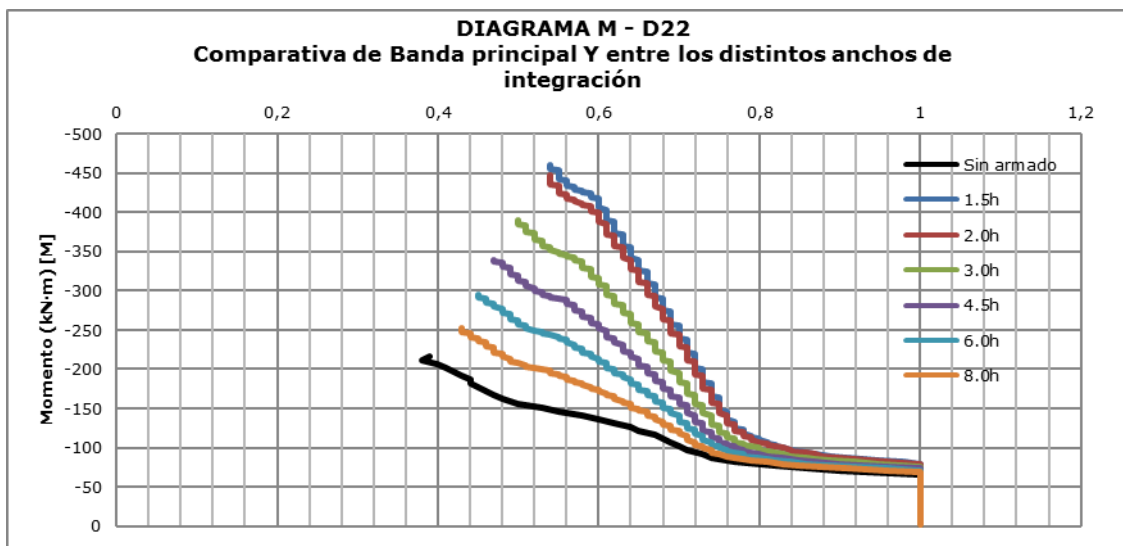


Figura 8-36. Degradación del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes anchos de integración

Como se ha aclarado antes, dado que, a la postre, la cantidad o, mejor dicho, la cuantía de armadura obtenida en cada dirección es prácticamente la misma, las funciones obtenidas para la dirección X pueden considerarse iguales a las anteriores.

Siendo esta la primera vez que se expone en el presente trabajo de forma comparada la incidencia de la mayor presencia de armadura activa en la degradación de la sección frente al momento flector a través del coeficiente D00, **cabe destacar en este punto como el aumento de refuerzo va "linealizando" de alguna forma la degradación de las secciones**, en el sentido de que, para los mayores niveles de refuerzo, pueden reconocerse tres tramos casi rectos en las funciones de degradación.

Conviene destacar asimismo como, en cada caso, a partir de cierto momento flector, cuando se va aproximando la plastificación de la armadura activa, la degradación del coeficiente D00 resulta mucho más pronunciada (pendientes menores), porque ha plastificado previamente toda la armadura pasiva.

Este fenómeno resulta más difícil de distinguir en el caso del análisis de la respuesta frente al momento torsor, respuesta gobernada por el coeficiente D22, pues en este problema parcial incide la parte no fisurada de la sección. La **existencia de una cabeza comprimida "sana"** conlleva también que la degradación de la sección por flexión no implique reducciones de la rigidez a torsión mayores del 60%, resultando que el coeficiente D22 oscila en sus valores mínimos, ya en rotura, entre el 0,40 y el 0,50 de forma aproximada.

En las condiciones descritas, los resultados obtenidos para la dirección secundaria X para cada ancho de integración arbitrario son, primeramente, en régimen elástico, los siguientes:

		RÉGIMEN ELÁSTICO - Cálculo de esfuerzos en régimen elástico - Cálculo de armadura pasiva superior necesaria con degradación de la sección hasta plastificación de la armadura activa				
		Ancho de integración (m)	Mmáx-punta (kN-m)	Minteg (kN-m/ml)	Área armadura necesaria (cm ² /ml)	Armadura dispuesta (cm ²)
BANDA SECUNDARIA X	Sin armado superior pasivo 10.0h + B/2	3.35 (L/3.6)	-575.12	0	0	0.00
	1.5h + B/2	0.6725 (L/17.8)		-442.597	27.46	18.47 6Φ20 1Φ20c/11
	2.0h + B/2	0.83 (L/14.5)		-411.407	23.50	19.51 7Φ20 1Φ20c/11
	3.0h + B/2	1.145 (L/10.5)		-360.112	18.46	21.14 7Φ20 1Φ20c/16
	4.5h + B/2	1.6175 (L/7.4)		-304.394	12.21	19.75 7Φ20 1Φ20c/23
	6.0h + B/2	2.09 (L/5.7)		-264.707	8.60	17.97 6Φ20 1Φ20c/34
	8.0h + B/2	2.72 (L/4.4)		-226.214	3.77	10.25 4Φ20 1Φ20c/68

Tabla 8-1. Armadura obtenida reforzando anchos arbitrarios de tamaño creciente en un análisis elástico en la banda secundaria (X)

Los datos y resultados agrupados por columnas se corresponden con los siguientes conceptos:

- 1ª Columna: *Ancho de integración propuesto en función del canto H de la losa*
- 2ª Columna: *Ancho real de integración expresado en metros y, entre paréntesis, expresado como una fracción de la distancia entre soportes*
- 3ª Columna: *Valor pico o máximo del momento flector calculado en régimen elástico en el nodo de esquina.*
- 4ª Columna: *Momento flector unitario obtenido por la integración de la función de momentos flectores sobre el ancho propuesto.*
- 5ª Columna: *Área de armadura de refuerzo necesaria para soportar el momento propuesto por cada metro lineal*
- 6ª Columna: *Armadura propuesta: en la primera línea queda el área estrictamente necesaria en el ancho considerado, en la segunda línea queda el número y diámetro de armaduras que satisfacen de una forma ajustada el área requerida y, en la última línea, queda la cadencia o ritmo del refuerzo para la armadura consignada*

Los resultados obtenidos ya en el cálculo no lineal para la citada dirección X resultan los siguientes:

RÉGIMEN POST-ELÁSTICO								
- Cálculo de los esfuerzos de la placa según la degradación propia de cada sección armada								
- Comparativa entre el armado necesario derivado del análisis Elástico con el necesario según el estudio en régimen Post-elástico								
Armadura dispuesta (cm2)	Mrot (kN-m/ml)	Mplast (kN-m/ml)	Mmáx-punta (kN-m)	Minteg (kN-m/ml)	Minteg (kN-m/ml) Sin armado superior pasivo	STATUS	Mrot/Mmáx Mplast/Minteg	NOTAS
0.00	-208.58	-178.58	-398.94	-177.766		OK*	0.52 ; 1	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/11 6Φ20 18.85 28.03	-451.58	-451.58	-287.66	-255.628	-335.361 ; -23.78%	OK	1.57 ; 1.77	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/11 7Φ20 21.99 26.50	-439.58	-437.58	-307.32	-257.342	-318.933 ; -19.31%	OK	1.43 ; 1.7	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/16 7Φ20 21.99 19.21	-381.58	-371.58	-279.71	-225.944	-288.513 ; -21.69%	OK	1.36 ; 1.64	
1Φ20c/23 7Φ20 21.99 13.60	-333.58	-319.58	-294.36	-195.855	-254.553 ; -23.06%	OK	1.13 ; 1.63	
	Hasta plastificación	-319.58	-380.58	-210.122	-254.553 ; -17.45%	OK*	0.88 ; 1.52	
1Φ20c/34 6Φ20 18.85 9.02	-291.58	-273.58	-465.43	-198.099	-229.358 ; -13.63%	OK*	0.63 ; 1.38	
	Hasta plastificación	-273.58	-292.74	-176.518	-229.358 ; -23.04%	OK*	1 ; 1.55	
1Φ20c/68 4Φ20 12.57 4.62	-249.58	-229.58	-398.29	-167.202	-200.734 ; -16.7%	OK*	0.63 ; 1.37	
	Hasta plastificación	-229.58	-290.28	-152.38	-200.734 ; -24.09%	OK*	0.86 ; 1.51	

Tabla 8-2. Armadura obtenida reforzando anchos arbitrarios de tamaño creciente en un análisis no lineal en la banda secundaria (X)



Los datos y resultados agrupados por columnas se corresponden, en este segundo caso, con los siguientes conceptos:

- 1ª Columna: *Armadura propuesta: en la primera línea queda la cadencia o ritmo del refuerzo, en la segunda línea queda el número y diámetro de armaduras observado, en la tercera línea queda el área correspondiente a la armadura total dispuesta y, en la fila inferior, el área de armadura de refuerzo por cada metro lineal de sección*
- 2ª Columna: *Momento de rotura para la sección propuesta, considerando el refuerzo consignado, en términos de ancho unitario*
- 3ª Columna: *Momento que provoca plastificación de la armadura activa en términos de ancho unitario.*
- 4ª Columna: *Valor pico o máximo del momento flector calculado en régimen no lineal en el nodo de esquina.*
- 5ª Columna: *Momento flector unitario obtenido por la integración de la función de momentos flectores sobre el ancho propuesto en régimen no lineal*
- 6ª Columna: *Momento flector unitario obtenido por la integración de la función de momentos flectores sobre el ancho propuesto en régimen no lineal y en el caso de que no se dispusiese ningún refuerzo. Tanto por ciento de variación de este momento con respecto al anterior (losa reforzada)*
- 7ª Columna: *Validez de los resultados obtenidos. Se considera aceptable el resultado cuando el Momento de rotura resulta superior al máximo y cuando el Momento de plastificación de la sección resulta mayor al de integración.*
- 8ª Columna: *Relación, en términos de coeficiente, primero, entre el Momento de rotura y el Momento máximo en punta y, segundo, entre el Momento de plastificación y el momento de integración*

Mientras que los resultados obtenidos en el cálculo no lineal para la dirección principal Y, con los mismos criterios de agrupación de datos y resultados son los que se glosan en la siguiente página.



En cálculo elástico:

		RÉGIMEN ELÁSTICO				
		- Cálculo de esfuerzos en régimen elástico				
		- Cálculo de armadura pasiva superior necesaria con degradación de la sección hasta plastificación de la armadura activa				
BANDA PRINCIPAL Y	Sin armado superior pasivo 10.0h + B/2	3.35 (L/3.6)	-571.48	0	0.00	0.00
	1.5h + B/2	0.6725 (L/17.8)		-439.261	27.46	18.47 6Φ20 1Φ20c/11
	2.0h + B/2	0.83 (L/14.5)		-408.159	24.46	20.30 7Φ20 1Φ20c/11
	3.0h + B/2	1.145 (L/10.5)		-357.029	18.46	21.14 7Φ20 1Φ20c/16
	4.5h + B/2	1.6175 (L/7.4)		-300.748	12.60	20.38 7Φ20 1Φ20c/23
	6.0h + B/2	2.09 (L/5.7)		-259.879	8.60	17.97 6Φ20 1Φ20c/34
	8.0h + B/2	2.72 (L/4.4)		-219.695	3.77	10.25 4Φ20 1Φ20c/68

Tabla 8-3. Armadura obtenida reforzando anchos arbitrarios de tamaño creciente en un análisis elástico en la banda principal (Y)

Y en el cálculo no lineal:

RÉGIMEN POST-ELÁSTICO								
- Cálculo de los esfuerzos de la placa según la degradación propia de cada sección armada								
-Comparativa entre el armado necesario derivado del análisis Elástico con el necesario según el estudio en régimen Post-elástico								
0.00	-211.43	-176.43	-412.79	-172.217		OK*	0.51 ; 1.02	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/11 6Φ20 18.85 28.03	-457.43	-453.43	-424.76	-309.022	-340.008 ; -9.11%	OK	1.08 ; 1.47	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/11 7Φ20 21.99 26.50	-445.43	-437.43	-296.91	-248.364	-322.955 ; -23.1%	OK	1.5 ; 1.76	Mi > Mplast no armada Ancho de integración insuficiente
1Φ20c/16 7Φ20 21.99 19.21	-387.43	-371.43	-279.04	-224.306	-291.432 ; -23.03%	OK	1.39 ; 1.66	
1Φ20c/23 7Φ20 21.99 13.60	-337.43	-317.43	-563.52	-203.549	-255.236 ; -20.25%	OK*	0.6 ; 1.56	
	Hasta plastificación	-317.43	-350.02	-210.722	-255.236 ; -17.44%	OK*	0.96 ; 1.51	
1Φ20c/34 6Φ20 18.85 9.02	-293.43	-271.43	-448.85	-195.518	-228.063 ; -14.27%	OK*	0.65 ; 1.39	
	Hasta plastificación	-271.43	-289.22	-174.453	-228.063 ; -23.51%	OK	1.01 ; 1.56	
1Φ20c/68 4Φ20 12.57 4.62	-249.43	-227.43	-302.61	-158.535	-196.969 ; -19.51%	OK*	0.82 ; 1.43	
	Hasta plastificación	-227.43	-310.04	-151.149	-196.969 ; -23.26%	OK*	0.8 ; 1.5	

Tabla 8-4. Armadura obtenida reforzando anchos arbitrarios de tamaño creciente en un análisis no lineal en la banda principal (Y)



Lo primero que debe decirse al respecto de los resultados obtenidos es que éstos no deben interpretarse estrictamente en el sentido de la búsqueda de la solución correcta o adecuada, ya que dicha solución difícilmente va a encontrarse de forma fortuita pero precisa en alguno de los anchos fijados de forma "arbitraria".

El interés mayor de este ejercicio y de los resultados obtenidos, pasa primero por la posibilidad de comparar los esfuerzos obtenidos en régimen elástico con los esfuerzos obtenidos en un análisis no lineal basado en las propiedades de degradación que presenta la losa para cada ancho de refuerzo o para cada nivel de refuerzo obtenido antes en el cálculo elástico. En este sentido sí que resulta interesante destacar ciertos aspectos que se pueden identificar en dicha comparativa, según se hace en lo que sigue.

Un primer aspecto a destacar es que, al trabajar con modelos de degradación que no implican una plastificación perfecta a partir de cierto umbral, los valores de los momentos extremos o *momentos punta* no quedan limitados a un determinado valor, como sucedería en un modelo elasto-plástico perfecto, si no que dichos valores dependen de la respuesta natural de la losa en función de la evolución de su propia degradación.

En relación a los valores obtenidos para los *momentos punta* resultarían inválidas de entrada, en cuanto a su aplicabilidad en el ámbito profesional, todas respuestas en las que dicho *momento punta* resulta mayor que el *momento de rotura* de la sección reforzada, lo cual sucede para anchos de integración mayores a 4,5 veces el espesor de la placa, contados desde la cara interna del soporte. No obstante, el valor del *momento punta* debe ser entendido con cierta prudencia por las propias limitaciones de precisión del MEF y, además, en la esquina del modelo el canto efectivo de la losa es normalmente mayor si ésta queda íntimamente ligada con el correspondiente pilar de hormigón armado, según se representa esquemáticamente en la siguiente figura:

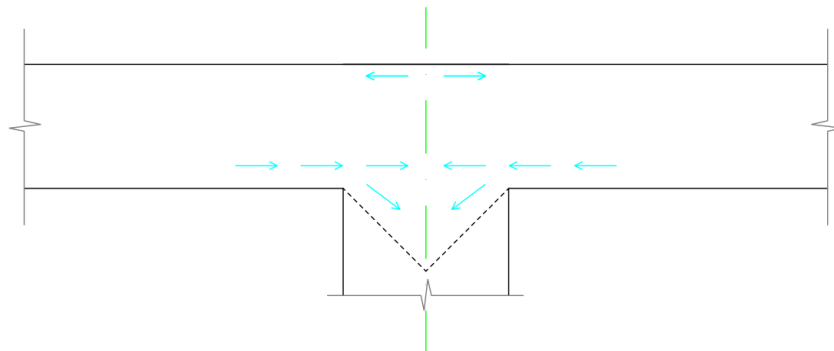


Figura 8-37. Canto efectivo de una losa postesada en el eje de un soporte de hormigón armado al que quede ligada

Por otra parte, es verdad que los resultados de los *momentos punta* obtenidos, cuando el ancho de integración es igual o mayor a 4,5 veces el canto de la placa, no parecen fiables, tampoco desde un punto de vista teórico, pues suponen una variación brusca con respecto al resultado obtenido para un ancho de 3,0 veces el espesor de la placa, variación que no se puede explicar desde la física del problema y sí desde el mal condicionamiento numérico del problema en los susodichos casos.

Este mal condicionamiento numérico está motivado por la degradación extrema de la rigidez a flexión que implica la superación de un cierto valor de momento flector, lo que exagera la no linealidad del problema.

En este sentido se ha realizado una segunda prueba cuando el ancho de integración es igual o mayor a 4,5 veces el espesor de la losa, con el único objeto de conocer mejor el modelo de cálculo propuesto. Esta segunda prueba consiste en no considerar el incremento de la degradación de la losa más allá de la sollicitación que provoca la plastificación de la armadura activa, de tal forma que el problema no entre en un ámbito de no linealidad tan acusada. Esta prueba queda reflejada en la segunda línea – inferior - de resultados de cada ancho de integración en régimen no lineal. Los resultados así obtenidos presentan una estabilidad y coherencia numérica y teórica mucho mayor, lo que confirma que los resultados obtenidos previamente (siguiendo fielmente el modelo degradación propuesto) deben ser descartados en este caso, también desde el punto de vista teórico, cuando el ancho de integración para el cálculo del refuerzo resulta igual o superior a las reseñadas 4,5 veces el espesor de la losa.



8.1.5.2 A partir de cantidades de refuerzo predeterminadas

En este segundo ámbito de análisis la operativa es, pues, la siguiente: se propone un refuerzo pasivo razonable, en el sentido de que resulte proporcionado al problema en cuestión, y se analiza la losa según los criterios expuestos en apartados precedentes en régimen no lineal.

La serie de refuerzo analizada, yendo de mayor a menor cantidad de refuerzo, es ahora la que sigue:

- 1Φ20c/15
- 1Φ20c/20
- 1Φ16c/15
- 1Φ16c/20
- 1Φ12c/15
- 1Φ12c/20

Los diagramas M-Γ obtenidos hasta la rotura de las secciones así reforzadas quedan detallados en la imagen adyacente.

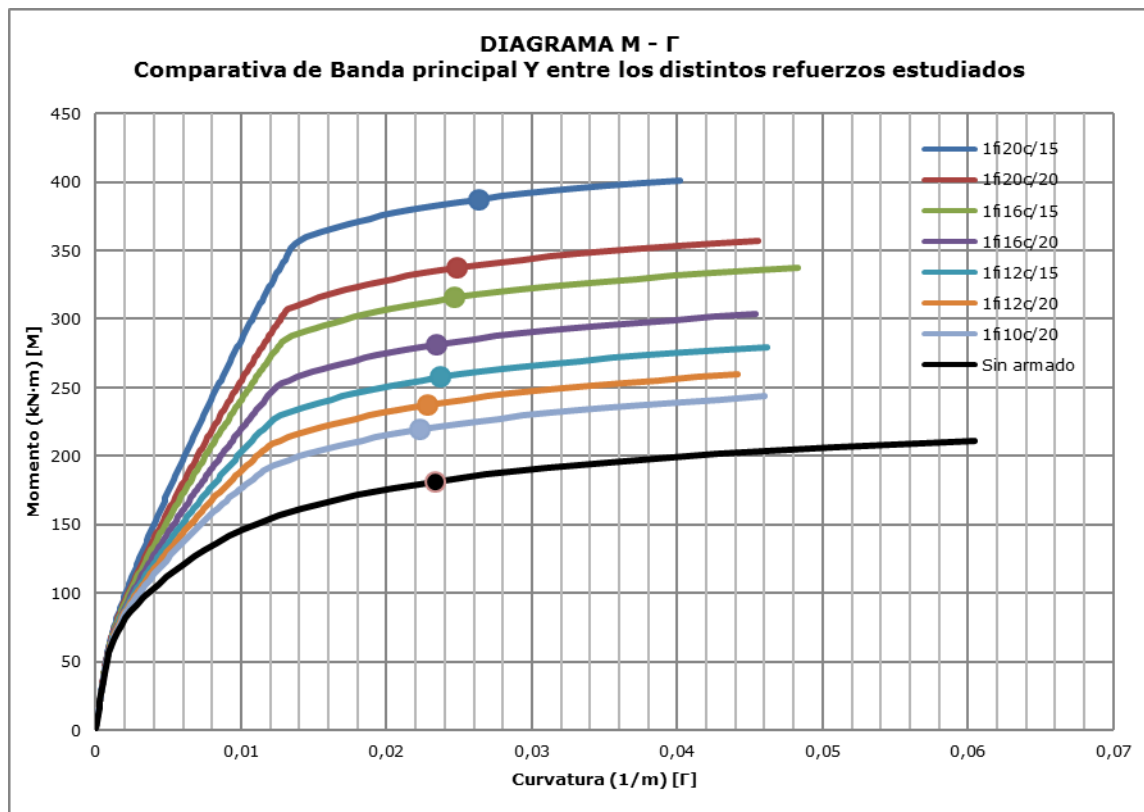


Figura 8-38. Diagramas M-Γ para los diferentes niveles de refuerzo propuestos para el análisis del Caso primero (placa de 12x12m)

Las tendencias y características de estas curvas no suponen ninguna variación y ya han sido ampliamente comentadas con anterioridad, pero sí que cabe destacar que, al limitar el refuerzo máximo, el momento último de la sección más resistente de la serie ahora analizada resulta menor que en el anterior ámbito de análisis, por así decirlo, más teórico, al no coincidir las cantidades de refuerzo. El momento último de la sección menos reforzada sí que resulta algo más parejo al de la sección menos resistente de cuántas quedaron abordadas en el modelo anterior.

Las curvas de degradación del término de flexión - D00 - de la matriz de elasticidad resultan en este caso con la siguiente forma:

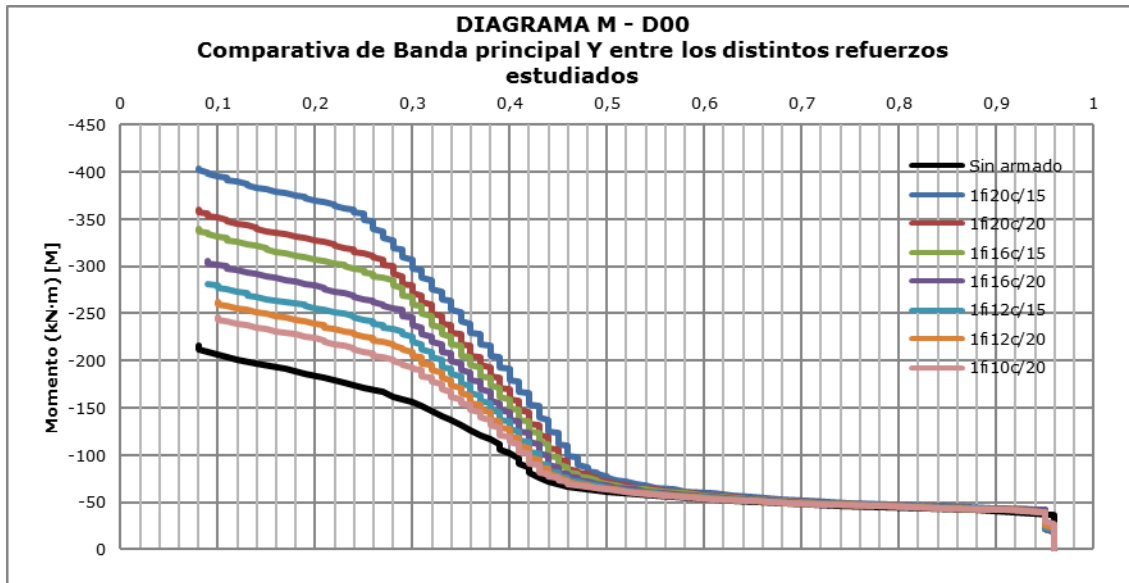


Figura 8-39. Degradación del término D00 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo

Mientras que las curvas de degradación del término de torsión - D22 - de la matriz de elasticidad resultan de la siguiente forma:

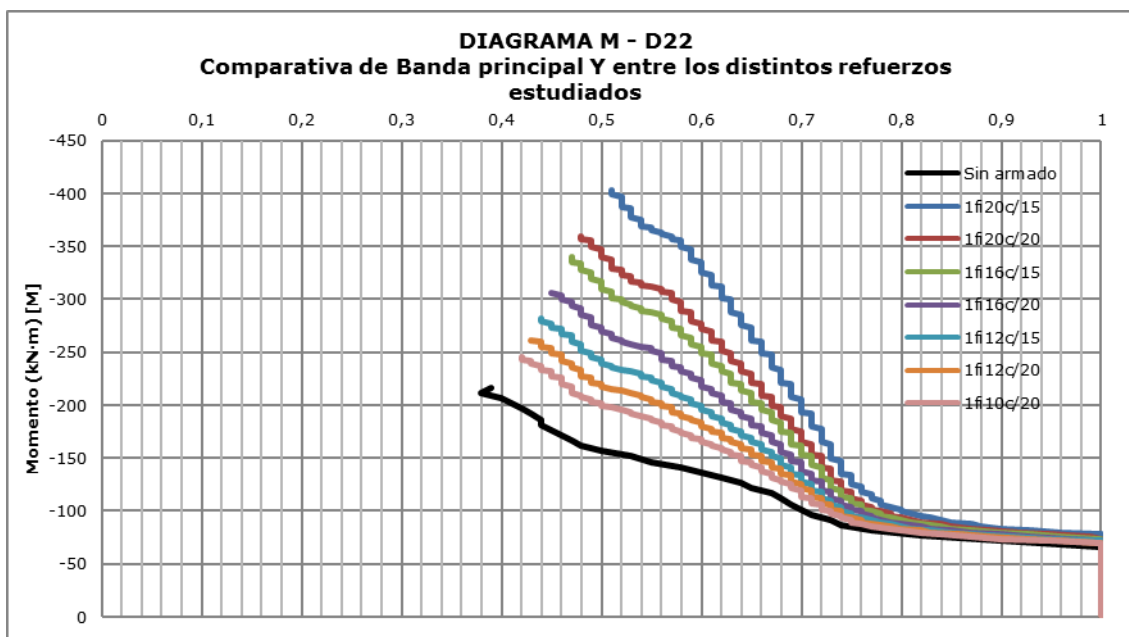


Figura 8-40. Degradación del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo

Más allá de las lógicas diferencias numéricas y de lo comentado líneas arriba, las curvas que definen la degradación de las propiedades elásticas de la placa tampoco suponen hasta aquí, como cabía esperar, ninguna variación conceptual.

En las condiciones comentadas y en base al modelo de análisis propuesto en el apartado 8.1.4.2, el cual observa de forma conjunta la degradación de los tramos reforzados y los no reforzados, se obtienen los resultados que se detallan en las dos tablas adjuntas, una para cada dirección, y que se comentan consecutivamente.

PLACA 12X12m ; h=31.50 cm									
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO SOBRE LOS SOPORTES PROPUESTO									
	Armado propuesto cm ² /ml	Ancho de integración mínimo (cm)	Mrot (kN·m/ml)	Mplast (kN·m/ml)	Mmáx-punta (kN·m/ml)	Minteg (kN·m/ml)	STATUS	Mrot/Mmáx Mplast/Minteg	Armado dispuesto cm ²
BANDA SECUNDARIA X	15.00 1Φ20c/15	105	-395.58	-387.58	-285.25	-226.791	OK	1.39 ; 1.71	7Φ20 21.99
	20.00 20.94	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	20.00 1Φ20c/20	105	-351.58	-339.58	-276.22	-233.48	OK	1.27 ; 1.45	6Φ20 18.85
	20.00 15.71	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	15.00 1Φ16c/15	105	-331.58	-317.58	-272.65	-220.407	OK	1.22 ; 1.44	7Φ16 14.07
	16.00 13.40	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	20.00 1Φ16c/20	105	-301.58	-283.58	-323.29	-226.328	OK*	0.93 ; 1.25	6Φ16
	16.00 10.05	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	Hasta plastificación		-310.21	-234.645	OK*	0.97 ; 1.21	12.06
	15.00 1Φ12c/15	75	-277.58	-259.58	-425.86	-249.191	OK*	0.65 ; 1.04	5Φ12
	12.00 7.54	(L/16 ; 0.2 + 1.75h)	Hasta plastificación		-273.15	-247.965	OK	1.02 ; 1.05	5.65
20.00 1Φ12c/20	85	-259.58	-239.58	-426.87	-319.292	KO	0.61 ; 0.75	5Φ12	
12.00 5.65	(L/14.1 ; 0.2 + 2.06h)	Hasta plastificación		-282.47	-233.905	OK*	0.92 ; 1.02	5.65	
20.00 1Φ10c/20	90	-241.58	-223.58	-345.16	-282.645	KO	0.7 ; 0.79	5Φ10	
10.00 3.93	(L/13.3 ; 0.2 + 2.22h)	Hasta plastificación		-290.09	-229.57	KO	0.83 ; 0.97	3.93	

Tabla 8-5. Resultados del análisis no lineal a partir de refuerzos propuestos en la dirección X

BANDA PRINCIPAL Y	15.00 1Φ20c/15	105	-401.43	-387.43	-288.42	-224.324	OK	1.39 ; 1.73	7Φ20 21.99
	20.00 20.94	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	20.00 1Φ20c/20	105	-357.43	-337.43	-271.83	-231.098	OK	1.31 ; 1.46	6Φ20 18.85
	20.00 15.71	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	15.00 1Φ16c/15	105	-337.43	-315.43	-287.02	-224.715	OK	1.18 ; 1.4	7Φ16 14.07
	16.00 13.40	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)							
	20.00 1Φ16c/20	105	-303.43	-281.43	-521.09	-277.869	OK*	0.58 ; 1.01	6Φ16
	16.00 10.05	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	Hasta plastificación		-281.99	-230.969	OK	1.08 ; 1.22	12.06
	15.00 1Φ12c/15	75	-279.43	-257.43	-425.39	-305.985	KO	0.66 ; 0.84	5Φ12
	12.00 7.54	(L/16 ; 0.2 + 1.75h)	Hasta plastificación		-289.33	-254.083	OK*	0.97 ; 1.01	5.65
20.00 1Φ12c/20	85	-259.43	-237.43	-402.71	-297.583	KO	0.64 ; 0.8	5Φ12	
12.00 5.65	(L/14.1 ; 0.2 + 2.06h)	Hasta plastificación		-311.48	-243.961	KO	0.83 ; 0.97	5.65	
20.00 1Φ10c/20	90	-243.43	-221.43	-362.03	-283.815	KO	0.67 ; 0.78	5Φ10	
10.00 3.93	(L/13.3 ; 0.2 + 2.22h)	Hasta plastificación		-310.91	-235.806	KO	0.78 ; 0.94	3.93	

Tabla 8-6. Resultados del análisis no lineal a partir de refuerzos propuestos en la dirección Y

Los datos y resultados agrupados por columnas se corresponden ahora con los siguientes conceptos:

- 1ª Columna: Refuerzo propuesto
- En la primera línea queda la cadencia o ritmo del refuerzo en cm y la definición profesional común del refuerzo*
- En la segunda línea queda el diámetro de las armaduras del refuerzo en mm y la cuantía de refuerzo en términos de cm² de refuerzo por metro lineal de sección.*
- 2ª Columna: Ancho de refuerzo o de integración
- En la primera línea figura la dimensión de la zona reforzada en cm*
- En la segunda línea consta la relación del ancho de integración con respecto a la luz y el número de cantos de placa al que equivale el ancho, contados a partir de la cara interior del soporte*
- 3ª Columna: *Momento que provoca la rotura de la sección en términos de ancho unitario.*
- 4ª Columna: *Momento que provoca plastificación de la armadura activa en términos de ancho unitario.*
- 5ª Columna: *Valor pico o máximo del momento flector calculado en régimen no lineal en el nodo de esquina.*
- 6ª Columna: *Momento flector unitario obtenido por la integración de la función de momentos flectores sobre el ancho de refuerzo en régimen no lineal*
- 7ª Columna: *Validez de los resultados obtenidos. Se considera aceptable el resultado cuando el Momento de rotura resulta superior al máximo y cuando el Momento de plastificación de la sección resulta mayor al de integración.*
- 8ª Columna: *Relación, en términos de coeficiente, primero, entre el Momento de rotura y el Momento máximo en punta y, segundo, entre el Momento de plastificación y el momento de integración*
- 9ª Columna: *En la primera línea, número y diámetro de las armaduras de refuerzo realmente dispuestas*
- Área de refuerzo realmente dispuesta por cada metro lineal de sección transversal.*

Aclarada la forma de agrupación de la información reflejada en las tablas, lo primero que cabría destacar o recordar con respecto al conjunto de resultados mostrados es que, en este caso, es el propio algoritmo de cálculo o, siendo más preciso, el propio proceso de cálculo el que define cual es la zona reforzada según ha sido explicado antes. En este sentido, el ancho de integración se corresponde con el ámbito donde el refuerzo resulta realmente necesario y, por tanto, no más.



A medida que la cantidad de refuerzo disminuye el *momento punta* disminuye, al perder rigidez la placa en la zona de apoyo. Tendencia que también se reconoce, por los mismos motivos, en la evolución del *momento de integración*. Esta **tendencia se altera en la cuarta opción de refuerzo (1Φ16c/20) si mantiene el algoritmo de cálculo que tiene en cuenta la degradación de la placa hasta sus últimas consecuencias, por el problema numérico que representa la pérdida súbita de resistencia a flexión, ya comentada y analizada antes. De tal suerte que el *momento punta* resulta mayor que el de rotura, si bien es cierto que el *momento de integración* resulta todavía menor que el de plastificación.**

En este sentido, se ha comprobado también en este segundo grupo de análisis que pasa al limitar la degradación de la placa a la obtenida en el instante de plastificación de la armadura activa, comprobación cuyos resultados se muestran en la segunda fila (inferior) de la fila general de cada modalidad de refuerzo. Esta comprobación alternativa no responde, por tanto, a la física del problema, pero permite una mejor comprensión del comportamiento numérico de los algoritmos utilizados, al comprobarse también en esta modalidad de análisis que los momentos punta así calculados resultan menores que los que tienen en cuenta la degradación completa de la placa cuando la cantidad de refuerzo disminuye demasiado.

En cualquier caso, los resultados obtenidos al limitar la degradación de la placa carecen también de interés práctico, pues los momentos máximos punta siguen resultando superiores o demasiado cercanos a los momentos de rotura.

Aunque el criterio del momento punta podría ser considerado como suficientemente limitativo en un análisis no lineal, donde cualquier forma de redistribución de esfuerzos por degradación ya forma parte inherente del proceso de cálculo, cabe comentar que los momentos de integración presentan una mejor evolución, en el sentido de que sólo para las dos opciones de refuerzo menos masivas el momento de integración resulta mayor que el momento de plastificación.

En base a todo lo anterior parece claro que la opción de refuerzo óptimo o, como mínimo, el más prudente sería, tanto para la dirección secundaria como para la principal, la correspondiente a **1Φ16c/20 extendido 105cm a cada lado del pilar**, cuyas características se resumen en la tabla adjunta.

PLACA 12X12m ; h=31.50 cm		
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO CON EL REFUERZO PROPUESTO SOBRE LOS SOPORTES		
	Armado propuesto (cm ²)	Ancho de integración (cm)
Banda X	1Φ16c/15	105
	7Φ16 14.07	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)
Banda Y	1Φ16c/15	105
	7Φ16 14.07	(L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)

Tabla 8-7. Resumen de las características del refuerzo óptimo obtenido en el análisis no lineal



Más allá del interés que alberga en sí mismo el procedimiento de análisis no lineal propuesto, en cuanto permite un conocimiento mejor o algo más profundo del comportamiento de las losas postesadas, resulta fundamental, desde una mirada más práctica del asunto, comparar el refuerzo óptimo obtenido mediante el procedimiento propuesto con el que se han obtenido en el análisis elástico lineal, cuyos resultados quedaron mostrados en el apartado 8.1.5.1.

En el análisis elástico realizado anteriormente, lógicamente, ninguno de los anchos de integración considerados de forma secuencial coincide perfectamente con el correspondiente al refuerzo considerado como óptimo con el algoritmo discutido en este apartado y definido *ad hoc*. En consecuencia, se propone la comparación con el refuerzo obtenido en el cálculo elástico, primero, considerando el ancho mínimo propuesto por el PTI ($0,2 + 1,5H$), como mera operación aclaratoria, y, segundo, con el refuerzo obtenido en el cálculo elástico considerando que el refuerzo se extiende en un ancho de integración lo más cercano posible al obtenido como óptimo en el análisis no lineal, lo que sucedía cuando el ancho de integración se extendía a lo largo de tres veces el canto de la placa, contados desde la cara interior del soporte ($0,2 + 3,0H$).

Para los referidos anchos de integración las características de los refuerzos obtenidos en un cálculo elástico y lineal quedan resumidas en la tabla adjunta.

PLACA 12X12m ; h=31.50 cm		
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO CON EL REFUERZO DERIVADO DEL ANÁLISIS EN RÉGIMEN ELÁSTICO		
	Ancho de integración (cm)	Armado dispuesto (cm ²)
Banda X	1.5h + B/2 67.25 (L/17.8)	1Φ20c/11 6Φ20 18.85
Banda Y	1.5h + B/2 67.25 (L/17.8)	1Φ20c/11 6Φ20 18.85
Banda X	3.0h + B/2 1.145 (L/10.5)	1Φ20c/16 7Φ20 21.99
Banda Y	3.0h + B/2 1.145 (L/10.5)	1Φ20c/16 7Φ20 21.99

Tabla 8-8. Características del refuerzo obtenido en el cálculo elástico lineal con anchos de integración: ($0,2 + 1,5H$) y ($0,2 + 3,0H$)

Al respecto del refuerzo obtenido respetando el ancho mínimo propuesto por el PTI debe aclararse que dicha respuesta no tiene por qué ser una respuesta válida, ya que el estudio se ha abordado para anchos crecientes fijados de forma arbitraria, sin comprobarse luego que el ancho sea realmente válido, en el sentido de que la zona no reforzada resulte apta sin la consideración del refuerzo en cuestión. Es más, viendo el conjunto de resultados, cabe suponer que el ancho realmente necesario en un análisis elástico lineal resulte bastante mayor que el mínimo propuesto por el PTI.



En cualquier caso, en la tabla posterior se compara la cantidad de armadura obtenida en el cálculo elástico para cada uno de los dos anchos detallados con la cantidad de armadura obtenida en el análisis no lineal para la modalidad de refuerzo considerada como óptima.

De dicha comparativa se deduce que el ahorro mínimo de refuerzo es del orden 25% y, si se considera un ancho de integración más creíble, del orden del 35%, lo que supone un ahorro muy significativo en esta pequeña unidad de obra.

AHORRO DE REFUERZO SUPERIOR PASIVO			
	Ancho de integración 1 (cm)	Ancho de integración 2 (cm)	AHORRO (%)
Banda X	PTI 1.5h + B/2 67.25	Propuesto 105 (L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	25.36%
Banda Y	PTI 1.5h + B/2 67.25	Propuesto 105 (L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	25.36%
Banda X	Refuerzo según análisis en régimen elástico 3.0h + B/2 1.145	Propuesto 105 (L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	36.02%
Banda Y	Refuerzo según análisis en régimen elástico 3.0h + B/2 1.145	Propuesto 105 (L/11.4 ; 0.2 + 2.7h)	36.02%

Tabla 8-9. Comparativa de la cantidad de refuerzo obtenido en el cálculo elástico con la cantidad de refuerzo obtenido en un análisis no lineal

Aceptado el interés del refuerzo considerado óptimo ($1\Phi 16c/20$) en el procedimiento no lineal aquí propuesto, aunque sea tan solo por el ahorro directo que implica en la unidad de obra bajo discusión, conviene analizar las primeras consecuencias que la citada degradación implica sobre la mecánica del problema en el análisis de los Estados Límites Últimos (ELU), al asumirse una cierta degradación de la placa. En lo relativo a esta cuestión, conviene recordar que el equilibrio de los Estados Límites de Servicio depende únicamente de la armadura activa, definida al efecto, y que, por tanto, la degradación de la placa no se produce hasta que se han rebasado las condiciones de servicio.

El primer aspecto a analizar es obligadamente la variación del momento flector, en cada dirección, al compararla con la del análisis lineal.

En el conjunto de imágenes que siguen se muestran los momentos flectores M_y (dirección principal) y M_x (dirección secundaria), primero, calculados en régimen lineal y, segundo, en régimen no lineal.

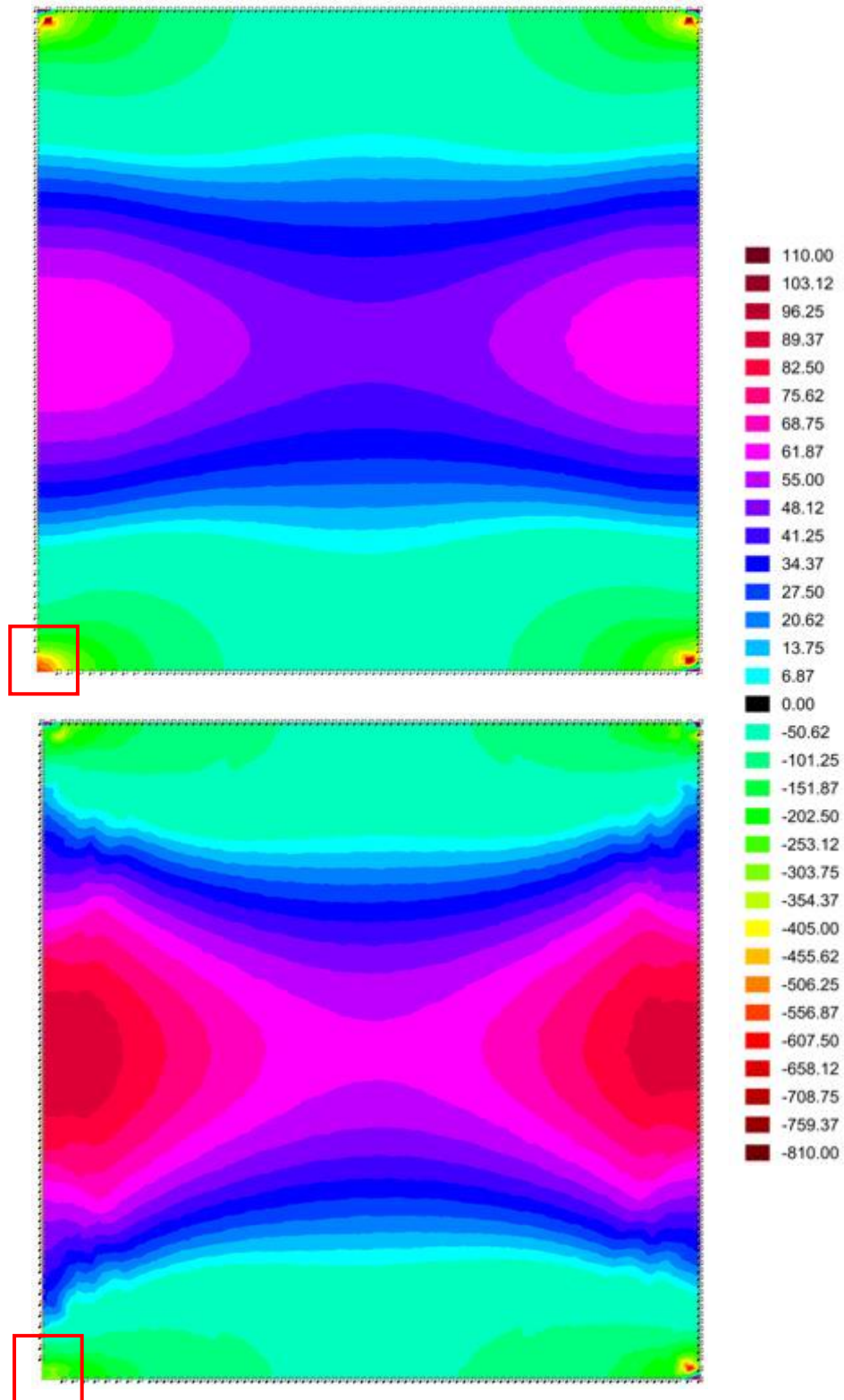


Figura 8-41. Comparativa de los momentos flectores M_y obtenidos en el análisis de los ELU en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$ (m·kN/m)

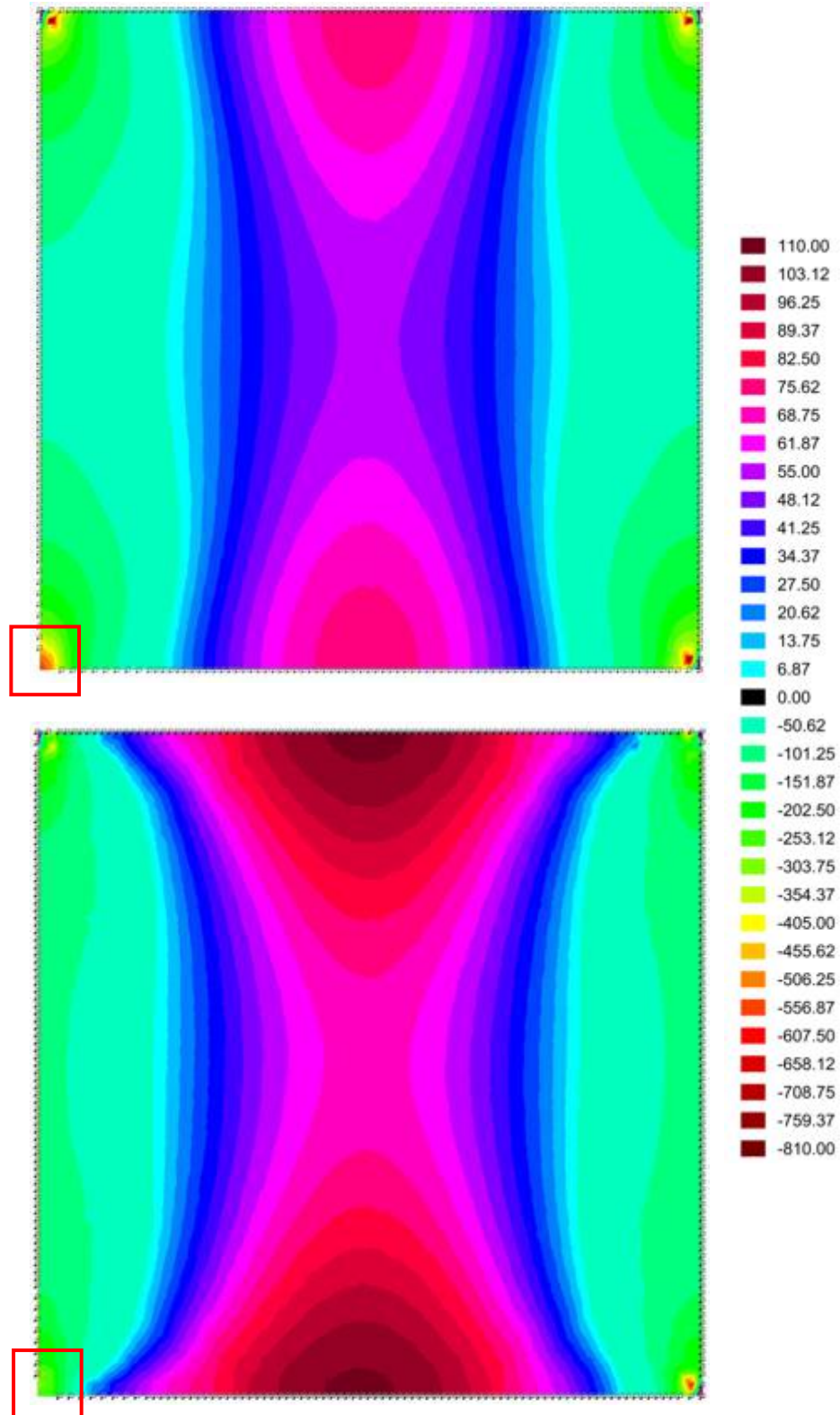


Figura 8-42. Comparativa de los momentos flectores M_x obtenidos en el análisis de los ELU en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16\text{c}/15$ ($\text{m}\cdot\text{kN/m}$)

Queda enmarcada en rojo la esquina considerada de referencia, la inferior izquierda, al haberse representado en dicha esquina las condiciones de contorno de una forma más precisa, según ha sido expuesto en 8.1.2.1. Las condiciones impuestas en el resto de esquinas, aunque no idénticas resultan equivalentes a los efectos del cálculo general de esfuerzos.

Una de las primeras consecuencias esperables u obvias es la bajada inmediata de los momentos punta y la disminución de los gradientes de momento flector constatable en las regiones cercanas a los soportes.

Resulta algo más interesante comprobar que la disminución de la respuesta a momento flector negativo afecta más a la banda de soportes que a la zona central: primero, porque el incremento de momento positivo es del orden de un 30 a un 45% en las bandas soportes, mientras que en las bandas centrales el incremento va del 10 al 12%, y, segundo, porque la posición y geometría de la línea de momento nulo no presenta grandes variaciones fuera de la banda de soportes.

Otro aspecto interesante es que, mientras que el *momento punta*, negativo, pasa a valer del orden de la mitad, el momento flector positivo máximo tan solo se incrementa entre un 30 y un 45%. Una de las claves de este amortiguamiento del incremento positivo, se explica analizando los momentos negativos de integración en la zona de refuerzo, los cuales varían del orden de un 40%, mucho menos, por tanto, que los *momentos punta*.

En verdad, la variación más radical del momento flector negativo se produce junto al soporte, si bien es cierto que, en cierta manera, hay una extensión lateral de los esfuerzos que propicia un incremento de los propios momentos negativos en las bandas centrales.

En cualquier caso, el incremento de momento flector positivo es perfectamente equilibrado por la armadura existente en las respectivas secciones centrales, sin que se requieran, por tanto, refuerzos adicionales.

También cabría destacar un aspecto vinculado a las leves diferencias que presentan las leyes elásticas de M_x y M_y , por la diferente forma de aplicación de las cargas equivalentes de pretensado, dada la desigual distribución de la armadura activa: estas diferencias se ven incrementadas tras el análisis no lineal, cuyos resultados dejan entrever mejor como se distribuye espacialmente la propia armadura activa, acentuando la ortotropía del problema.

Una vez analizada la variación del momento flector resulta también interesante comprobar cómo se ha degradado la respuesta a flexión de la placa al aceptar su comportamiento no lineal, degradación representada en el presente trabajo por los coeficientes D00 y D11, los cuales afectan a la matriz de elasticidad del problema según ha sido expuesto precedentemente.



El valor de los referidos coeficientes al final del análisis no lineal para el refuerzo consignado como óptimo presenta la siguiente distribución:

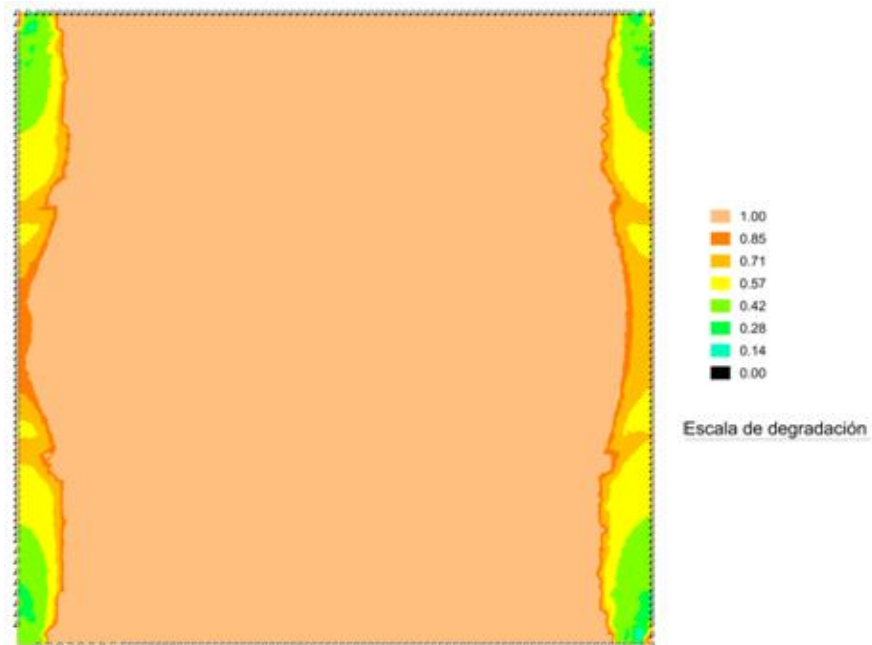


Figura 8-43. Variación de D00 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

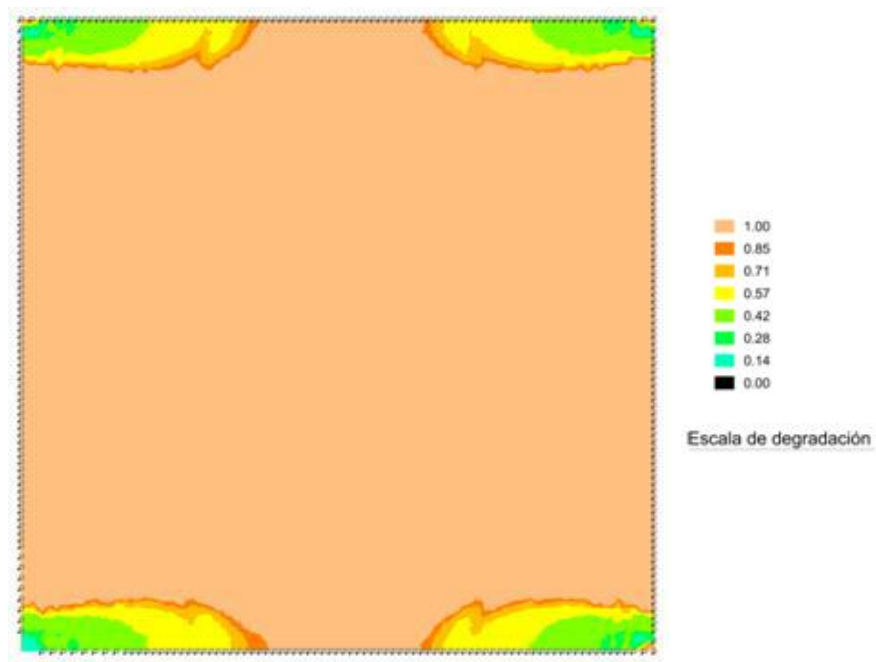


Figura 8-44. Variación de D11 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

En la evolución de los términos D_{00} y D_{11} a lo largo de la placa se debe reconocer primeramente una circunstancia que, de forma más o menos casual, permite no descartar el procedimiento propuesto por la forma o distribución de la degradación: las pérdidas de rigidez más relevantes, si se quiere cuando D_{00} y D_{11} adoptan valores iguales a 0,85 o menores, se ciñen a una distancia mínima en cada una de las dos direcciones de análisis. De forma más precisa, los valores de D_{00} y D_{11} iguales o menores a 0,85 vienen a ocupar unos 85cm, contados desde el borde de la placa en el sentido relevante del esfuerzo; esto representa un 7% de toda la longitud del vano.

La circunstancia destacada en el anterior párrafo es fundamental en el sentido de que las propiedades de degradación de la placa se obtienen a partir de la definición de las secciones sometidas a máximo momento negativo y, aunque la armadura pasiva mantiene su posición en toda su extensión, la armadura activa comienza a descender rápidamente en el entorno de $L/15$.

Lo anterior, interpretado de otra forma, equivale a decir que parece que se forma una charnela de degradación o rótula que se ciñe al borde de la placa, evidentemente de forma más acusada en las proximidades de los pilares y que, por tanto, la mayor parte de la losa mantendría sus propiedades elásticas al alcanzar el Estado Límite Último con el refuerzo consignado.

Con estas últimas reflexiones quedaría analizado de forma previa el comportamiento de la flexión con la placa degradada, pero, aún acotando el asunto a los esfuerzos relevantes del problema de placas delgadas, quedaría por analizar qué pasa con el último de los esfuerzos: el momento torsor. Para ello, se muestran en lo que sigue los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en régimen lineal y no lineal para su mejor comparación.



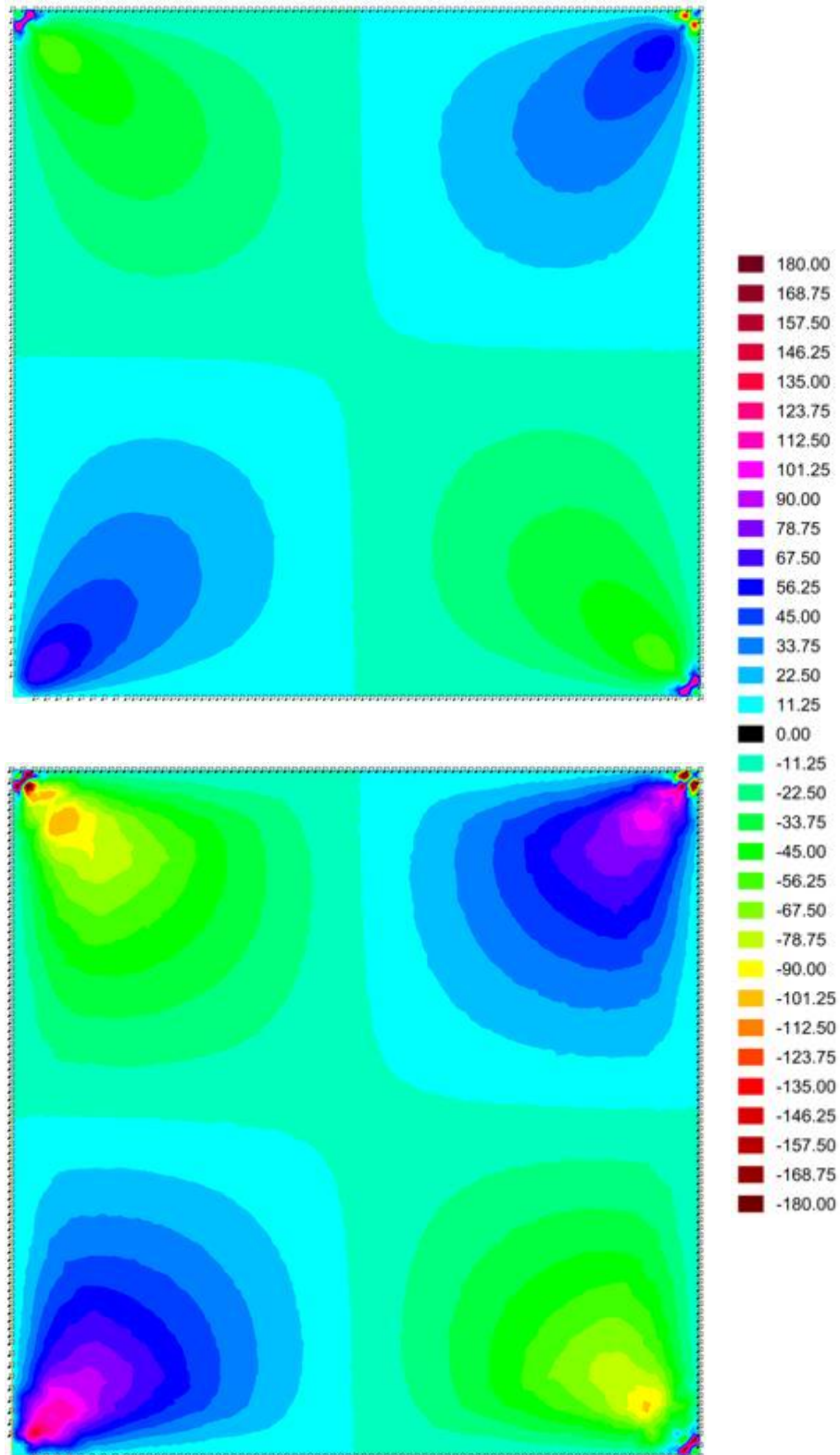


Figura 8-45. Comparativa de los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$ en el Caso primero (Placa de 12×12 m)

En la comparativa propuesta quizás el primer aspecto destacable es que los valores máximos de los momentos torsores, presentes siempre en los ejes diagonales de la placa junto a los soportes, casi se multiplican por dos. La razón de este incremento es dual:

- De un parte, la degradación de la rigidez frente a las tensiones tangenciales, regulada en este trabajo por el coeficiente D22, es significativamente menor que la degradación por flexión.
- De otra parte, se incrementa la demanda de torsión al permitirse una mayor deformación de la placa junto a los soportes al ceder ésta por flexión.

El referido incremento de los momentos torsores máximos implica que la evolución de los propios momentos torsores presente genéricamente mayores gradientes, pero probablemente el segundo aspecto destacable en la comparativa es la variación de la forma o extensión de cada uno de los escalones de momento torsor representados. En lo relativo a esto se identifica como los valores medios del momento torsor se distribuyen en una zona más extensa, cuando se ha aceptado la degradación de la losa, cuya geometría resulta, además, menos redonda o menos asimilable a la forma de una almendra, como sí sucede en el análisis lineal.

En cierta forma se puede decir también que, al aceptar la degradación de la losa el problema del momento torsor se hace más extenso e intenso, lo que ha motivado también la realización de un análisis detallado de la evolución de las tensiones principales del problema, análisis cuyos resultados se exponen más adelante.

También resulta interesante en lo relativo al problema de la torsión ver como evoluciona su coeficiente particular de degradación D22 a lo largo de la losa, lo que se ilustra en la imagen posterior, teniendo ahora en cuenta la bidireccionalidad del problema de las tensiones tangenciales según se expuso en 6.6.

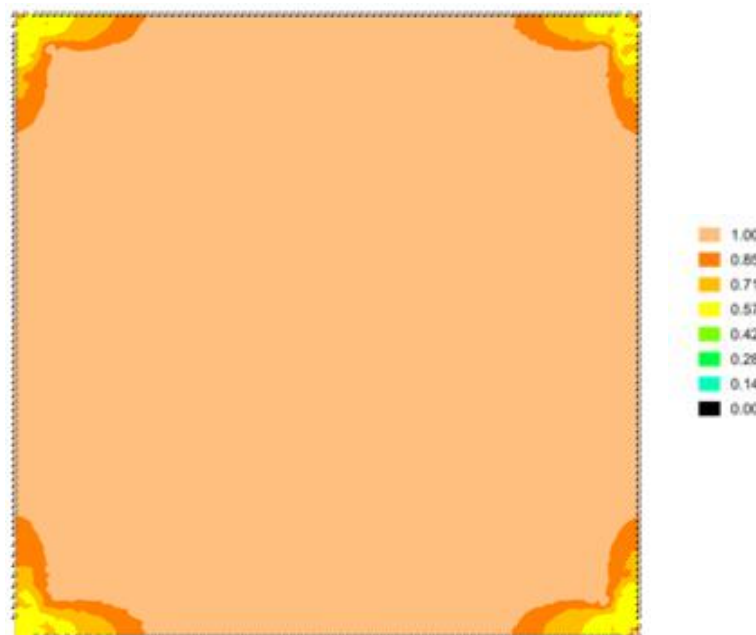


Figura 8-46. Variación de D22 tras el análisis no lineal para un refuerzo de 1 Φ 16c/15 en el Caso primero (Placa de 12x12m)

En la imagen anterior se constata que la degradación por torsión queda también ceñida a las dos charnelas antes referidas, realmente en este caso con una extensión mucho menor a la obtenida en el caso de la degradación por flexión.

Se puede reconocer asimismo que los valores de mayor degradación, correspondientes a D_{22} igual a 0,57, se dan sobre el soporte y en las zonas inmediatas a éste, presentando una razonable simetría sobre el eje diagonal del problema.

Analizados y discutidos hasta aquí todos los esfuerzos relevantes, tanto en régimen lineal como en régimen no lineal, resulta conveniente analizar que pasa nivel diferencial con la evolución de las tensiones normales, para comprender o aproximar mejor el conocimiento de las variaciones acontecidas tras la degradación de la losa, lo que se hace seguidamente.

En primer lugar, se propone el análisis de la evolución de las tensiones normales en la cara superior de la losa y, posteriormente, el análisis de la evolución de las tensiones normales en la cara inferior de la losa.

No se muestra el comportamiento en el plano medio, donde únicamente resulta relevante el esfuerzo axial, debido a que las condiciones de degradación por flexión, en base a las ampliamente discutidas funciones $M-\Gamma$, **han sido siempre estudiadas** bajo la actuación de un esfuerzo axial constante e igual a P_2 para el estudio de los Estados Límites Últimos (ELU). Cabe recordar que esta última consideración permite que la degradación de la losa por flexión sea compatible hasta su agotamiento con el reseñado esfuerzo axial.

Por otra parte, la forma de aplicación de las cargas de postesado en un vano interior, carga axial uniformemente repartida a lo largo de cada contorno, facilita la estabilidad del valor y orientación de las tensiones normales asociadas al postesado y, por tanto, su monotonía.

Sea como fuere, los resultados de tensiones normales en la cara superior de la losa, representados en términos de orientación e intensidad relativa, son para cada una de las modalidades de cálculo, lineal y no lineal, los que se reflejan en la serie de tres parejas de imágenes que prosigue.



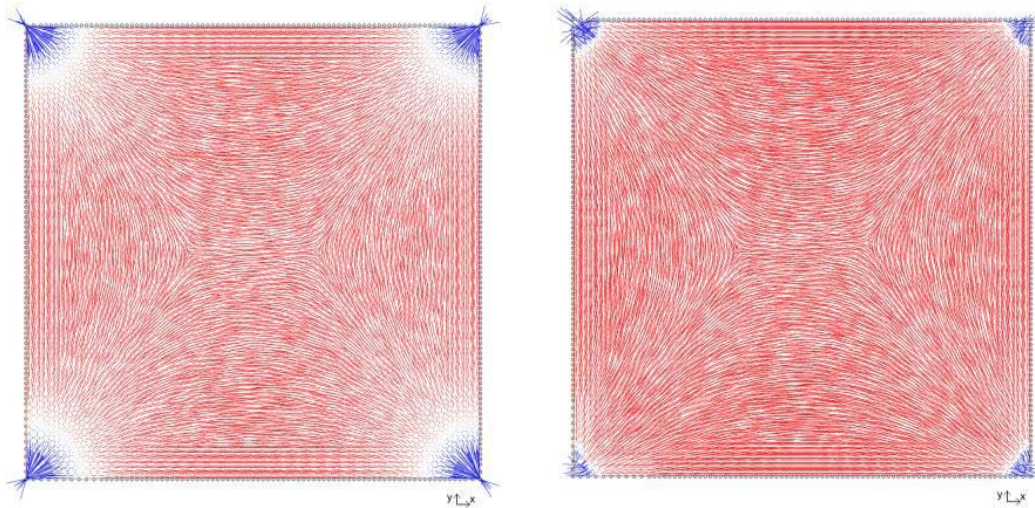


Figura 8-47. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

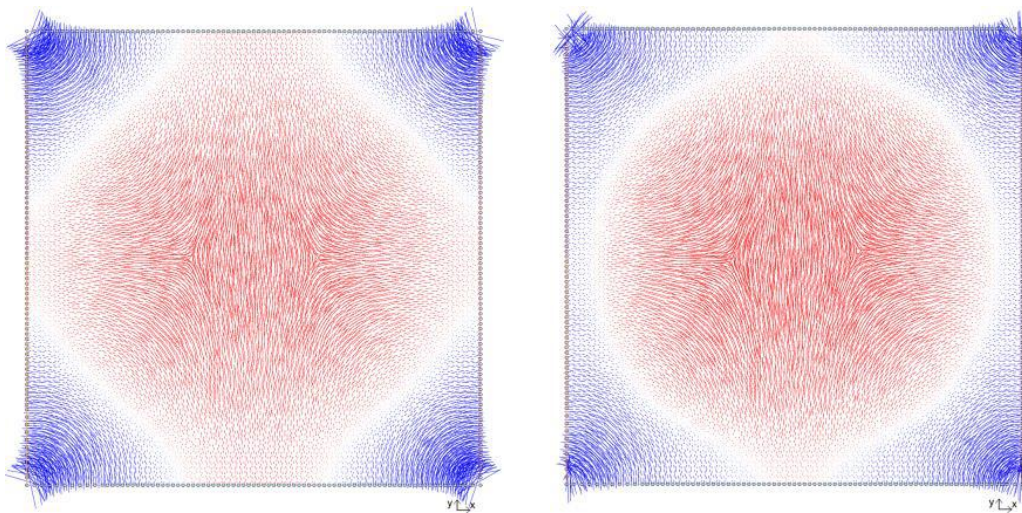


Figura 8-48. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

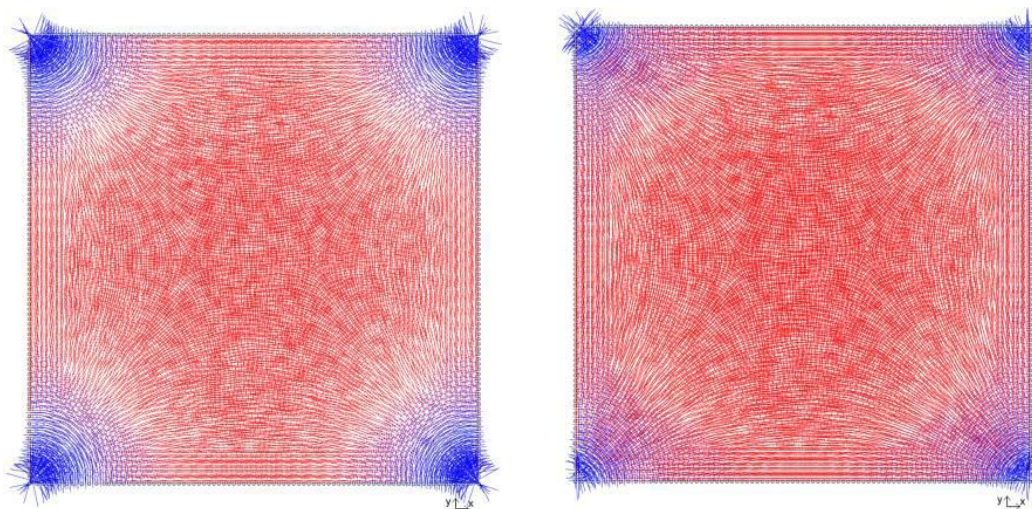


Figura 8-49. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara superior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

Antes de entrar en el comentario de las diferencias entre los resultados obtenidos en cada modalidad de análisis, conviene comentar algunas características o particularidades de los resultados obtenidos en régimen lineal por la presencia de las acciones de pretensado:

- Al resultar las acciones de pretensado de valor muy diferente - en la dirección secundaria P_0 y, por ende, P_2 resultan mayores del doble que en la dirección principal - las tensiones principales presentan una dirección dominante que desencaja ligeramente la posible simetría diagonal del problema.
- Sobre los contornos se identifican zonas de tamaño relevante donde, aún en el análisis de los Estados Límites Últimos (ELU), no se reconocen prácticamente tracciones, a pesar de ser zonas sometidas a la acción de un momento negativo de cierta intensidad.

Aclarado lo anterior, la evolución de **las tensiones mínimas, σ_{11}** , denota de manera bastante fiel dos efectos inherentes a la degradación de la losa frente a la acción excesiva de los momentos flectores por insuficiencia del refuerzo y, en cierta manera, previsible:

- El primero, la relajación del escaso pero intenso paquete de tracción que **corresponde a la tensión σ_{11}** sobre los pilares
- El segundo, un incremento generalizado de la compresión que denota la mayor intensidad generalizada de los vectores representados en color rojo (tensión principal mínima, de mayor compresión cuando la tensión en cuestión se da con este signo).

El análisis de σ_{22} permite reconocer dos efectos paralelos a los arriba apuntados: los valores de las tensiones máximas bajan: tanto cuando se trata de las tracciones máximas, representadas en azul, por relajación, como cuando se trata de compresiones representadas siempre en rojo, por mayor sollicitación.

Resulta menos trivial notar que el campo de tracciones obtenido en el análisis de σ_{22} se hace más extenso, pero menos intenso, de forma que las tracciones, aunque menores van resultando más presentes a lo largo de todo el borde. Tanto es así **que las cuatro franjas diagonales que presentan valores nulos de σ_{22}** frente a los pilares, aunque a una cierta distancia de éstos, pasan a conformar una especie de círculo si se acepta la degradación de la losa.

En la serie de seis imágenes adjuntas en la siguiente página se muestran los resultados de tensiones normales en la cara inferior de la losa, representados en términos de orientación e intensidad relativa, para cada una de las modalidades de cálculo adoptadas (lineal y no lineal).



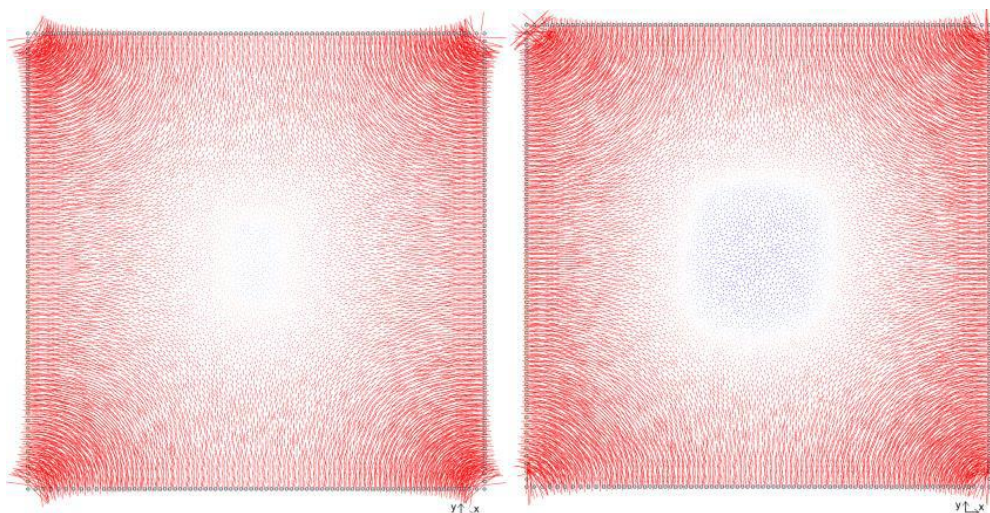


Figura 8-50. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

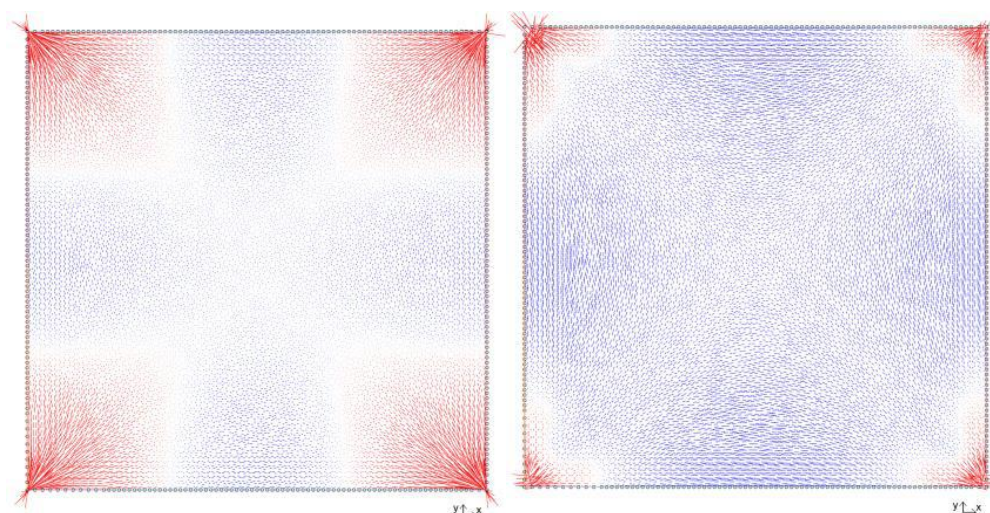


Figura 8-51. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

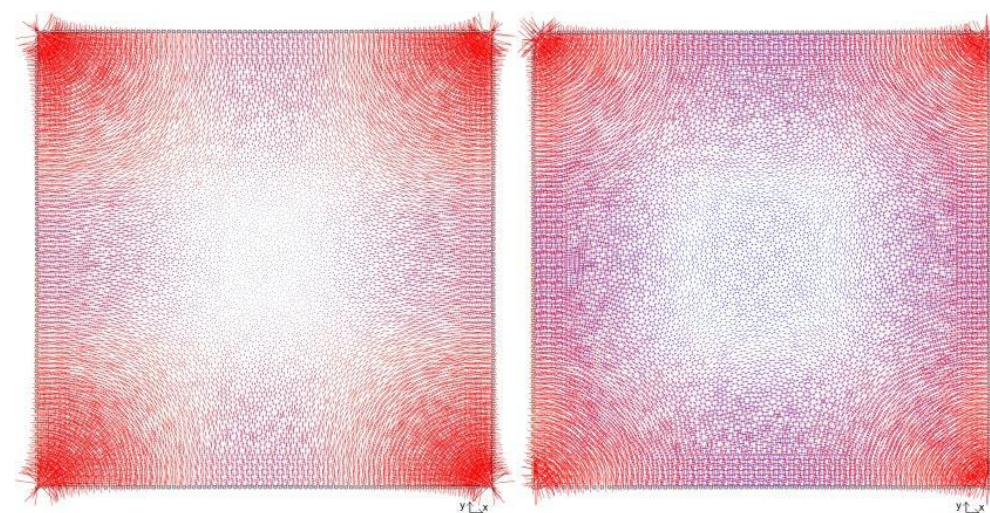


Figura 8-52. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara inferior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

Como sucedía en el análisis de las tensiones principales en la cara superior, antes de entrar en el comentario de las diferencias entre los resultados obtenidos en cada modalidad de análisis en la cara inferior, conviene destacar que la acción de postesado provoca que se pueda reconocer en los resultados obtenidos en régimen **lineal una zona muy amplia donde las tensiones normales máximas σ_{22}** resultan nulas o correspondientes a una tracción escasa, precisamente gracias a la acción de la doble compresión, cuyo objetivo principal es precisamente ése.

En la observación de las tensiones σ_{11} (tensiones mínimas y, en su caso, compresiones mayores) obtenidas en régimen lineal también se identifica una región relativamente amplia con valores nulos, que en este caso hubiera resultado algo mayor en el caso de no existir la acción de postesado.

En cualquier caso, el tránsito del cálculo lineal al no lineal permite reconocer las siguientes diferencias:

- **En la zona de tensiones σ_{11}** nulas puede reconocerse la aparición de una leve tracción, por incremento del momento flector positivo, al aceptar la degradación de la losa.
- **En la zona de tensiones σ_{22}** nulas o escasas, puede reconocerse un incremento sensible de la extensión e intensidad de las tracciones, por incrementos de los momentos flectores positivos, al aceptar la degradación de la losa.
- En la zona de ábaco que, primeramente, presenta un estado claro de bicompresión, **una de las dos compresiones, la correspondiente a σ_{22}** , pasa relajarse, rozando en algunas zonas el cambio al estado de tracción

De las tres diferencias destacadas en relación a lo anterior es quizás ahora la tercera la más interesante, en el sentido que permite confirmar que, aún después de la degradación de la losa, el hormigón de la zona del ábaco presenta un régimen de tensiones adecuado por debajo de la fibra neutra para hacer frente al problema de punzonamiento, al seguir en una dirección fuertemente comprimido y, en la complementaria, ligeramente comprimido o relajado, aspecto que se comentará con más detalle en el capítulo posterior.

Aclaradas las cuestiones relativas a la variación de esfuerzos y de tensiones, aunque el control de flechas en el análisis de los Estados Límites Últimos en la práctica profesional diaria es innecesario, resulta obligado comprobar que pasa con las deformaciones transversales de la placa cuando se asume la degradación de la losa en los términos expuestos, para una mejor comprensión del problema general.

En este sentido, en la página posterior se detallan las deformaciones obtenidas tanto en régimen lineal como en régimen no lineal; primero, mediante la obtención de una imagen deformada en perspectiva (con las deformaciones transversales amplificadas 100 veces) y, segundo, mediante el detalle de la representación gráfica y a color de diferentes escalas de desplazamiento que facilitan la comparación.

La primera y lógica consecuencia es el incremento sustancial de la deformación transversal que, como se aprecia en las figuras, pasa de 13,8 mm a 23,1mm, lo que implica un incremento directo de la deformación del orden del 67%.



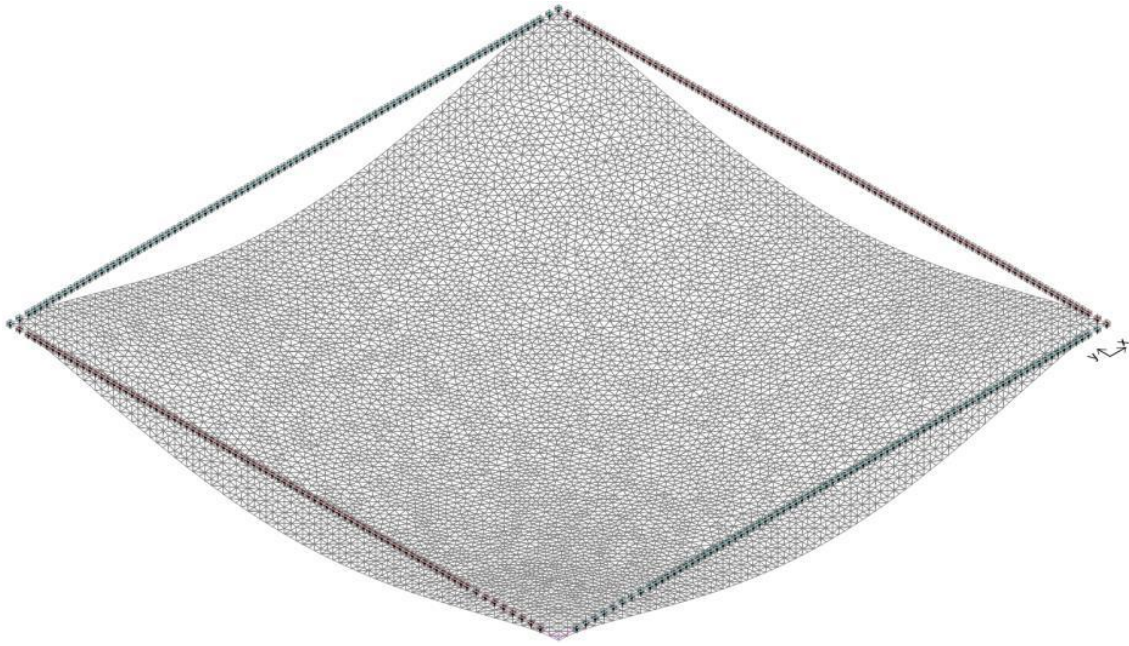


Figura 8-53. Deformación elástica (x100) en ELU
 $f_{\text{máx inst}} = 13,8 \text{ mm} \rightarrow L/869$

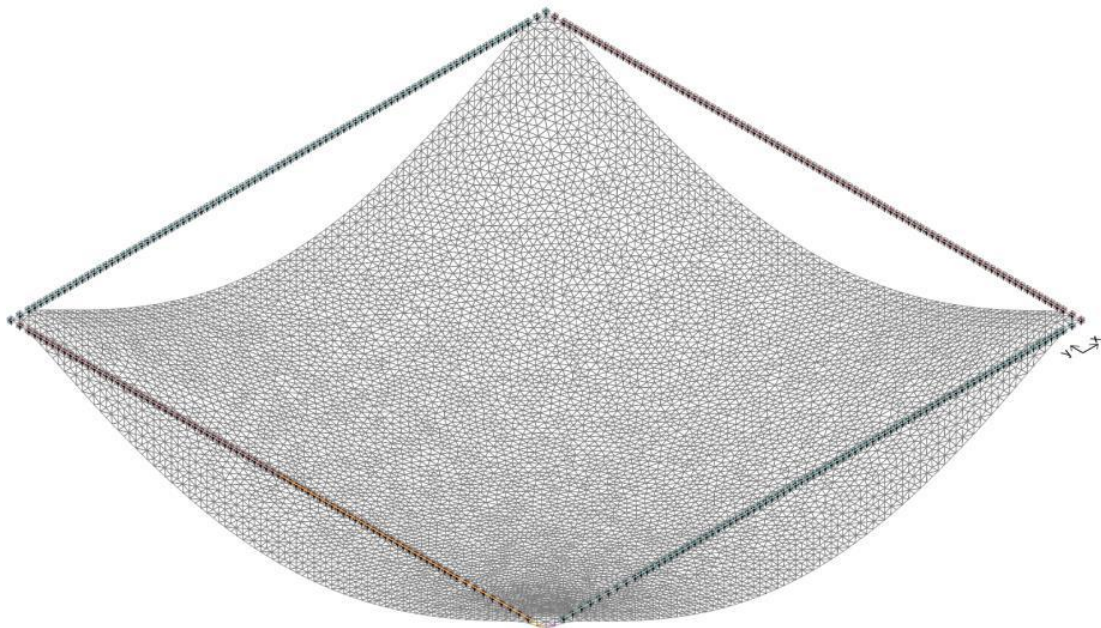


Figura 8-54. Deformada (x100) en ELU en régimen post-elástico
 $f_{\text{máx inst}} = 23,1 \text{ mm} \rightarrow L/519$

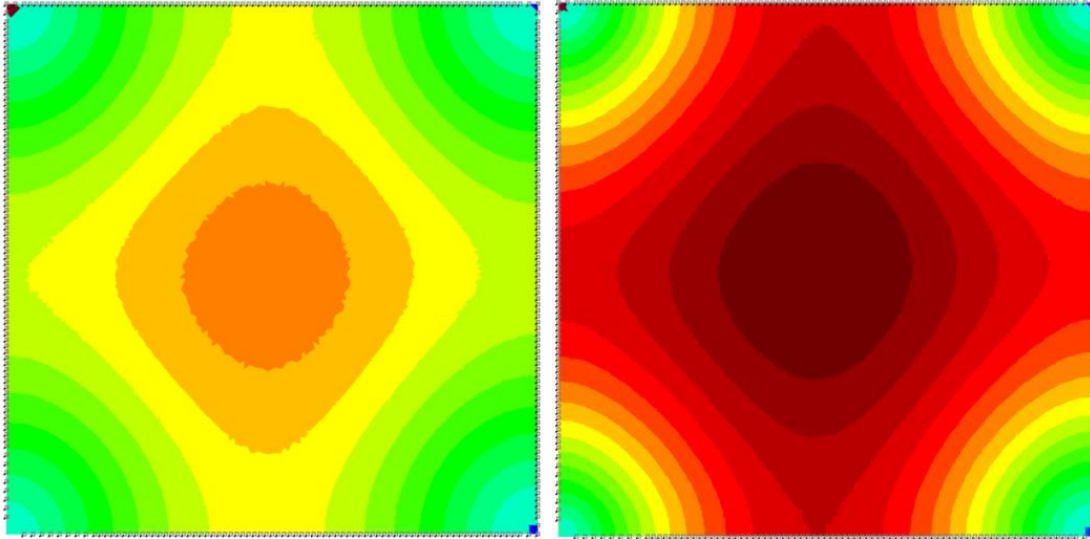


Figura 8-55. Diagrama de flechas en ELU en régimen elástico y en régimen post-elástico en el análisis del Caso primero (Placa de 12x12m)

Dejando de lado el evidente incremento de la deformación, resulta más interesante notar que el incremento de deformación se intuye como mayormente causado por el fuerte incremento de curvatura en las bandas de soportes, lo que resulta coherente con lo constatado a nivel de momentos flectores.

Asimismo, también se puede identificar una pérdida del empotramiento justo junto a los soportes, al girar la losa mucho más rápidamente cuando se permite el comportamiento post-elástico de los materiales.

La representación gráfica y a color de diferentes escalas de desplazamiento refrenda las intuiciones o tendencias reconocibles en las figuras deformadas:

- La variación de deformación transversal presenta mucho más gradiente cuando se admite la degradación de la losa, tanto a lo largo de las bandas soporte como a lo largo de las diagonales principales.
- El incremento relativo de deformación es mayor en las bandas soportes que en el centro de la placa
- La variación de deformación transversal presenta más estabilidad o menos variación de gradiente cuando se comparan las direcciones principales en las bandas centrales

Con respecto a la comparación numérica de los resultados de deformación transversal cabe entender ésta, sobre todo como orientativa, ya que en el análisis lineal no se tienen en cuenta de ninguna forma los efectos de la fisuración y, en cambio, en el caso del análisis no lineal podría decirse que, en cierta manera, los efectos más importantes de la fisuración ya quedan incluidos, al resultar dicha fisuración mucho más relevante en los bordes o charnelas de degradación, ya que las condiciones de degradación se han fijado precisamente a partir de las propiedades de una sección progresivamente más fisurada.

Cuestión aparte es la deformación a largo plazo, en la que el fenómeno de la fluencia va a tener una incidencia distinta por el aumento, aunque leve, generalizado de las tensiones de comprensión, cuyo análisis daría pie en sí mismo a una nueva línea de investigación. Aunque, una vez más, cabe recordar que la cuestión de las flechas no resulta relevante en la práctica profesional en el análisis de los Estados Límites Últimos (ELU).

A modo de último vistazo, se listan en la tabla subsiguiente las variaciones de los esfuerzos máximos y de las deformaciones máximas obtenidas en cada una de las modalidades de análisis.

PLACA 12x12 ; h=31,50 cm Comparativa de esfuerzos									
Análisis en régimen elástico					Análisis en régimen post-elástico				
+Mx_máx (kN·m)	- Mx_máx (kN·m)	+My_máx (kN·m)	- My_máx (kN·m)	f_max [ELU] (mm)	+Mx_máx (kN·m)	- Mx_máx (kN·m)	+My_máx (kN·m)	- My_máx (kN·m)	f_max [ELU] (mm)
50.62	-575.12	43.59	-571.48	13.80	65.59	-272.65	56.47	-287.02	23.10

Tabla 8-10. Resumen de los esfuerzos y deformaciones máximos obtenidos en cada modalidad de análisis en el caso primero (Placa de 12x12m)

8.1.6 Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas

Uno de los aspectos clave que justifica la oportunidad de la forma de análisis propuesto pasa por el hecho de que la plastificación de la armadura pasiva adviene antes de que se alcance el alargamiento de plastificación de la armadura activa. Esta circunstancia puede parecer, en primera instancia, contra natura ya que, al inicio de la historia de carga de las secciones críticas, la armadura activa se encuentra fuertemente estirada y el refuerzo pasivo, en cambio, comprimido.

En este sentido se ha considerado oportuno monitorizar, en cada uno de los tres casos representativos estudiados y en cada una de las dos direcciones principales del problema, cual es el alargamiento y tensión de cada uno de los dos tipos de armadura desde su entrada en carga hasta, prácticamente, su agotamiento. En este seguimiento, por simplicidad, no se ha considerado la evolución de la fuerza de tesado en el tiempo, de manera que se supone que el valor de la compresión responda a P_2 y no a P_1 , lo que es más cierto a mayor edad de la estructura. En cualquier caso, cabe recordar que la diferencia entre ambas fuerzas queda normalmente en el entorno del 15%.

Primeramente, se indica sobre las gráficas tensión-deformación de cada uno de los materiales los momentos flectores clave del proceso: momento en vacío, momento de plastificación de la armadura pasiva y momento de plastificación de la armadura activa.

Luego se lista la evolución del plano de deformación y los alargamientos de armadura asociados, desde la situación de vacío hasta posiciones cercanas al fallo de la sección.



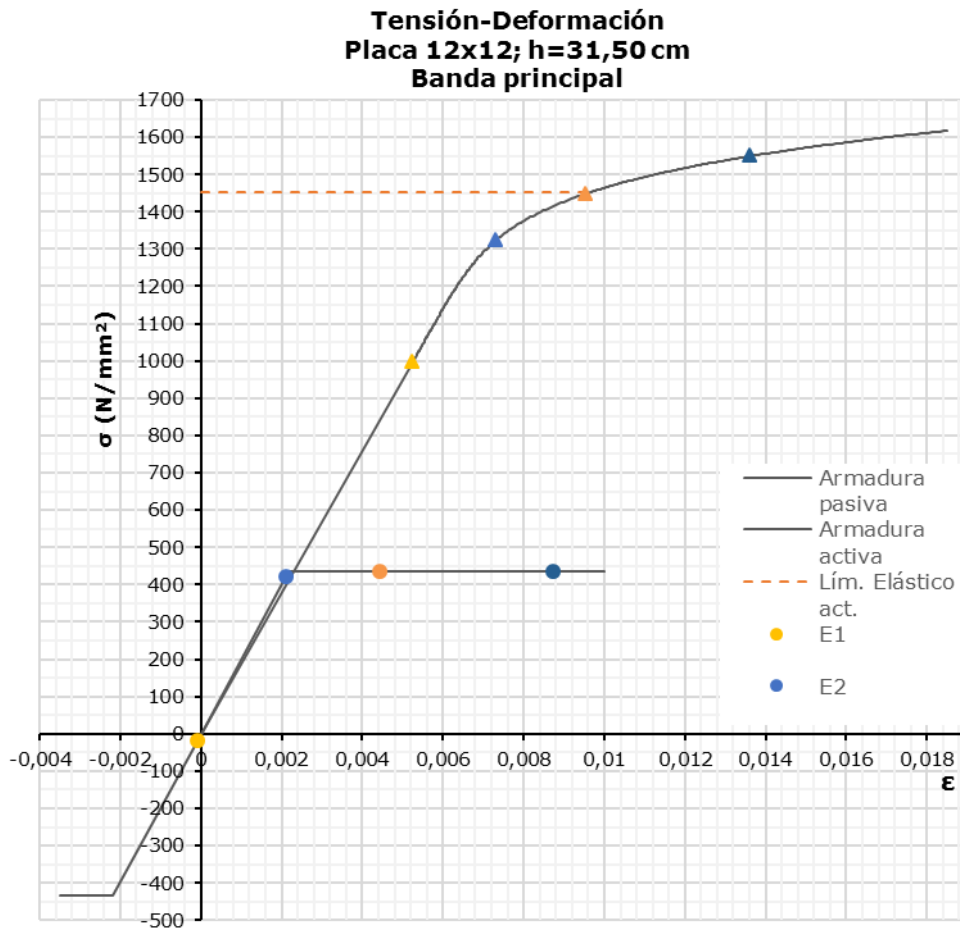


Figura 8-56. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) del caso primero (Placa de 12x12m)

N	Mx	Giro	Epsilon	ϵ máx pasivo	ϵ máx activo	Punto
-743,5	-1,43	-0,00002149	-0,00008822	-0,000086	0,005246	E1
-743,5	-26,43	-0,00037512	-0,00008919	-0,000046	0,005282	
-743,5	-51,43	-0,00075653	-0,00008919	-0,000001	0,005323	
-743,5	-76,43	-0,00142839	-0,00006972	0,000096	0,005414	
-743,5	-101,43	-0,0024398	-0,00001937	0,000264	0,005571	
-743,5	-126,43	-0,00364498	0,00005277	0,000476	0,005772	
-743,5	-151,43	-0,00494693	0,00013642	0,000711	0,005993	
-743,5	-176,43	-0,0063146	0,00022674	0,000961	0,006229	
-743,5	-201,43	-0,00774858	0,00032249	0,001223	0,006477	
-743,5	-226,43	-0,00926129	0,00042372	0,0015	0,006739	
-743,5	-251,43	-0,01086506	0,00053052	0,001794	0,007016	
-743,5	-276,43	-0,01256855	0,00064236	0,002103	0,007309	E2
-743,5	-291,43	-0,0151508	0,00086272	0,002624	0,007804	
-743,5	-311,43	-0,02383087	0,00167091	0,004441	0,009534	E3
-743,5	-331,43	-0,00002136	-0,00008822	0,008732	0,013619	E4

Tabla 8-11. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) del caso primero (Placa de 12x12m)

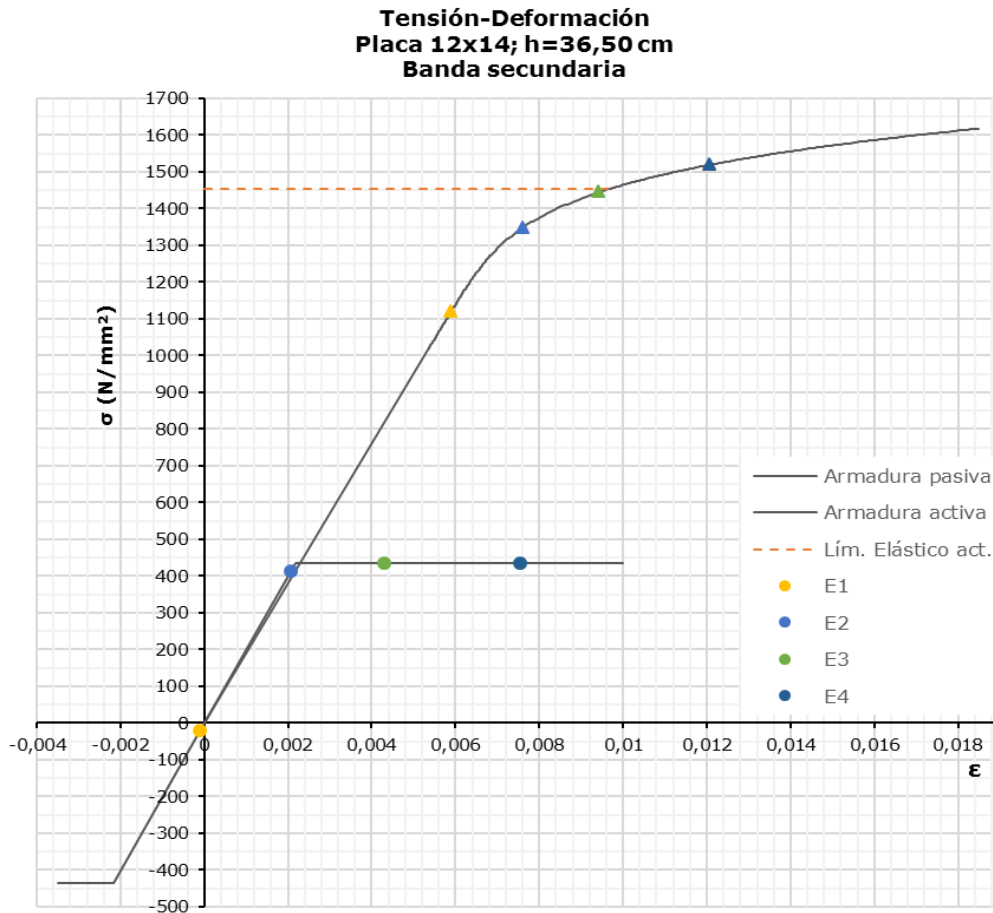


Figura 8-57. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) del caso primero (Placa de 12x12m)

N	Mx	Giro	Epsilon	ε máx pasivo	ε máx activo	Punto
-1149,2	-11,05	-0,00010497	-0,00011863	-0,000104	0,005891	E1
-1149,2	-26,05	-0,0002433	-0,00011908	-0,000085	0,005904	
-1149,2	-56,05	-0,00052066	-0,00012029	-0,000047	0,00593	
-1149,2	-86,05	-0,00081399	-0,00012101	-0,000007	0,005957	
-1149,2	-121,05	-0,00135002	-0,00010821	0,000082	0,006022	
-1149,2	-151,05	-0,00202261	-0,00007773	0,000207	0,006118	
-1149,2	-181,05	-0,00285527	-0,00002955	0,000372	0,006247	
-1149,2	-211,05	-0,00379771	0,00003192	0,000566	0,0064	
-1149,2	-241,05	-0,0048209	0,00010304	0,000781	0,006571	
-1149,2	-271,05	-0,0059101	0,00018132	0,001012	0,006755	
-1149,2	-301,05	-0,00706146	0,00026539	0,001258	0,006951	
-1149,2	-331,05	-0,00827412	0,0003542	0,001517	0,007158	
-1149,2	-361,05	-0,00954936	0,00044676	0,001789	0,007374	
-1149,2	-391,05	-0,01088948	0,00054195	0,002073	0,0076	E2
-1149,2	-406,05	-0,01192394	0,00062693	0,002303	0,007786	
-1149,2	-436,05	-0,02025001	0,00145601	0,004302	0,009424	E3
-1149,2	-461,05	-0,00010486	-0,00011863	0,007547	0,012074	E4

Tabla 8-12. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) del caso primero (Placa de 12x12m)

Como se puede comprobar en las figuras y tablas anteriores, la entrada en plasticidad de la armadura pasiva se produce, efectivamente, antes de que suceda lo mismo con la armadura activa. Las claves que explican este fenómeno son seguramente las tres siguientes:

- Al inicio del proceso la armadura pasiva presenta un acortamiento menor, fruto de la resistencia que opone el hormigón a la fuerza de tesado y fruto de la incidencia de las acciones gravitatorias en vacío.
- El alargamiento de la armadura pasiva, a medida que el momento flector aumenta, es mayor que en el caso de la armadura activa. Esto es debido a que los refuerzos pasivos ocupan posiciones más externas dentro de la sección y, para un mismo giro, se cargan necesariamente más, puesto que la rigidez intrínseca del acero constituyente de las armaduras pasivas en su tramo elástico es prácticamente la misma que la del acero constituyente de las armaduras activas (para iguales alargamientos).
- El alargamiento de plastificación de la armadura activa (0,0095) es mucho mayor que el alargamiento de cesión plástica de la armadura pasiva (0,0021)

En los dos siguientes casos, abordados también como casos representativos, se mantienen estos principios, por lo que, simplemente, se expondrán los resultados de alargamiento y tensión de las diferentes armaduras sin comentarios añadidos.



8.1.7 Resumen del procedimiento de cálculo

Como a lo largo del estudio de este primer caso se han ido aclarando algunas incógnitas asociadas al análisis no lineal de placas de hormigón postesado conviene listar de forma resumida cuales son las etapas básicas que definen finalmente el procedimiento de análisis no lineal que se propone, las cuales ya se aplicarán de forma literal en los dos siguientes problemas abordados. Las etapas básicas son, pues, las siguientes:

- Cálculo elástico y lineal de los esfuerzos y deformaciones de la losa postesada en los Estados Límites de Servicio (E.L.S)
 - Según capítulo 4 *Procedimiento parcial no novedoso*
- Cálculo de la armadura activa necesarios a partir de los (E.L.S)
 - Según capítulo 5 *Procedimiento parcial no novedoso*
- Cálculo convencional (elástico y lineal) de los esfuerzos que permiten definir los refuerzos pasivos necesarios para que la losa el equilibrio los Estados Límites Últimos (E.L.U.) en las secciones críticas
 - Según capítulo 4 *Procedimiento parcial no novedoso*
- Análisis evolutivo no lineal de las secciones críticas para definir los refuerzos pasivos necesarios en los E.L.U. considerando diferentes anchos de integración o de refuerzo.
 - Según capítulo 6 y 8 *Procedimiento parcial algo novedoso*
- Selección y propuesta de la serie de refuerzos alternativos a los obtenidos en las etapas previas buscando una moderación de la cantidad de armadura pasiva empleada.
- Determinación de las funciones momento-curvatura ($M-\Gamma$) para los diferentes refuerzos considerados
 - Según capítulo 6 *Procedimiento parcial algo novedoso*
- Determinación de las propiedades de degradación de la placa teniendo en cuenta la combinatoria de esfuerzos posibles
 - Según capítulos 6 y 7 *Procedimiento parcial novedoso*
- Cálculo no lineal de los esfuerzos de la losa postesada en los E.L.U. para la serie de refuerzos alternativos considerada
 - Según capítulos 4, 7 y 8 *Procedimiento parcial novedoso*
- Análisis de los resultados obtenidos y selección final del refuerzo más adecuado



8.2 Placa de 16x16 metros

Establecido pues el método propuesto con detalle, verificado y ajustado sobre un primer caso suficientemente representativo del problema de las losas postesadas en la edificación, se propone ahora el análisis de un segundo caso, siguiendo ya directamente el procedimiento presentado (Ver el resumen en 8.1.6).

En consecuencia, se pretende que el análisis de este segundo caso no gire en torno al método, si no directamente sobre las consecuencias de su aplicación más extendida al problema de las losas postesadas en la edificación.

Así, en este segundo caso, se plantea el análisis de una placa también cuadrada, pero de mayor luz, a fin de comprobar si, al cambiar la escala del problema, los resultados obtenidos mantienen una misma línea o, al contrario, si se identifican diferencias relevantes.

Para mantener la estructura expositiva seguida en apartados anteriores, se traslada el contenido a la siguiente página.



8.2.1 Definición del problema

Así, en el segundo problema se propone el análisis de una placa de 16x16 metros, soportada sobre cuatro pilares, según se puede reconocer en la imagen posterior.

Las características generales del problema, ya tratado en 6.5, eran las siguientes:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 42,00$ cm
- Peso propio $10,50$ kN/m²
- Carga permanente $2,50$ kN/m²
- Sobrecarga $3,50$ kN/m²

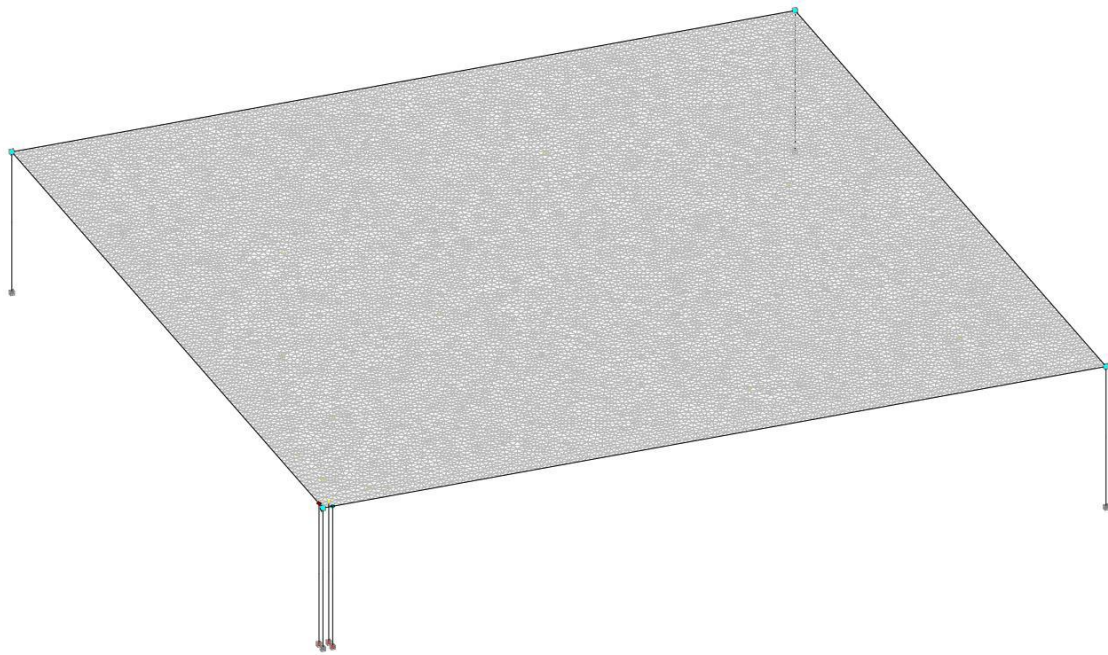


Figura 8-58. Perspectiva del problema de placa de 16x16m

Los soportes presentan una sección de 40x40cm y una altura de 3,00 m.

8.2.2 Condiciones de contorno y características de la malla de elementos finitos adoptada

La malla para discretizar el problema mediante elementos finitos y las condiciones de contorno adoptadas siguen los criterios establecidos en el primer caso.

La perspectiva general del problema, recogida en la figura anterior, permite reconocer someramente la organización geométrica y la finura de la malla de elementos finitos adoptada.

8.2.3 Resultados generales en régimen elástico

8.2.3.1 La armadura activa

Como ya ha quedado suficientemente claro, aunque el método propuesto no afecta al cálculo de la armadura activa, sí que ésta afecta a los resultados en el análisis en régimen no lineal. En este sentido resultarán siempre fundamentales los resultados obtenidos para la armadura activa, los cuales se detallan de nuevo en lo que sigue.

Fuerzas de tesado, evolución en el tiempo de las fuerzas y trazados

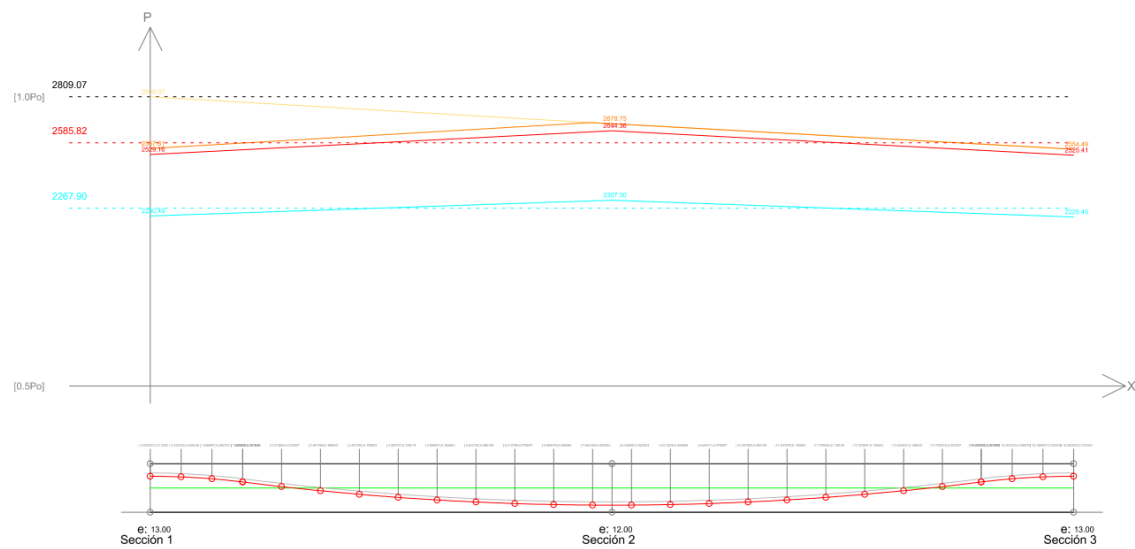


Figura 8-59. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 16x16m

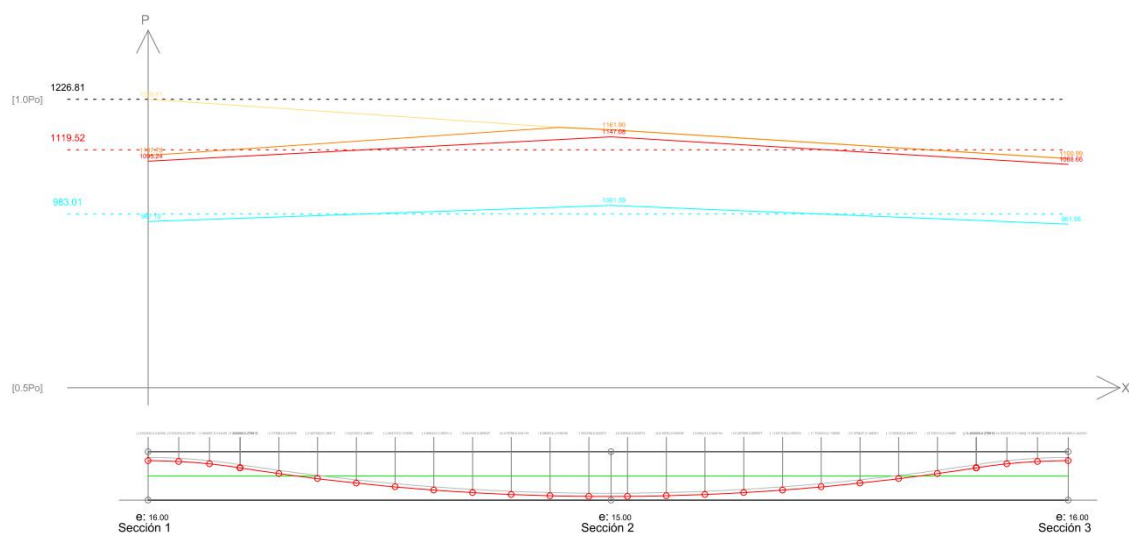


Figura 8-60. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 16x16m

Sistema de fuerzas equivalentes a largo plazo

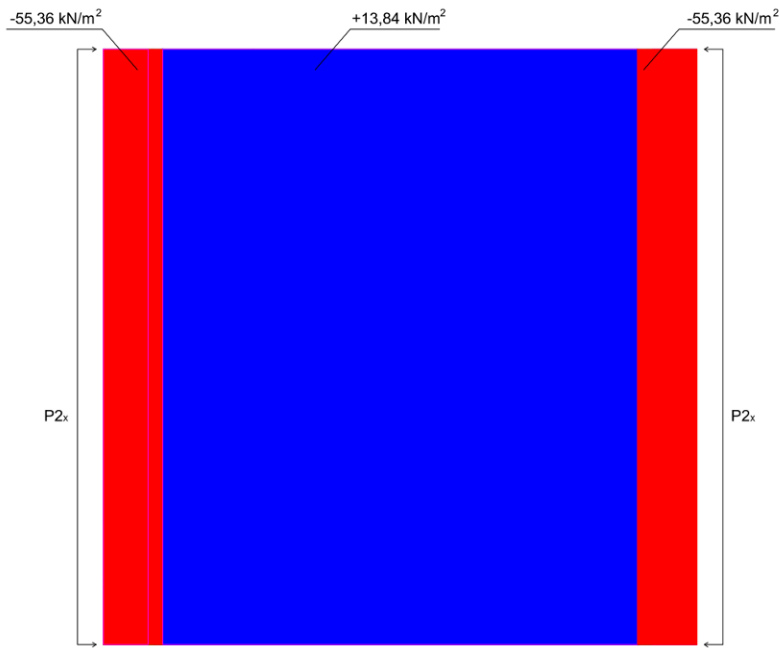


Figura 8-61. Cargas equivalentes en la en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 16x16m

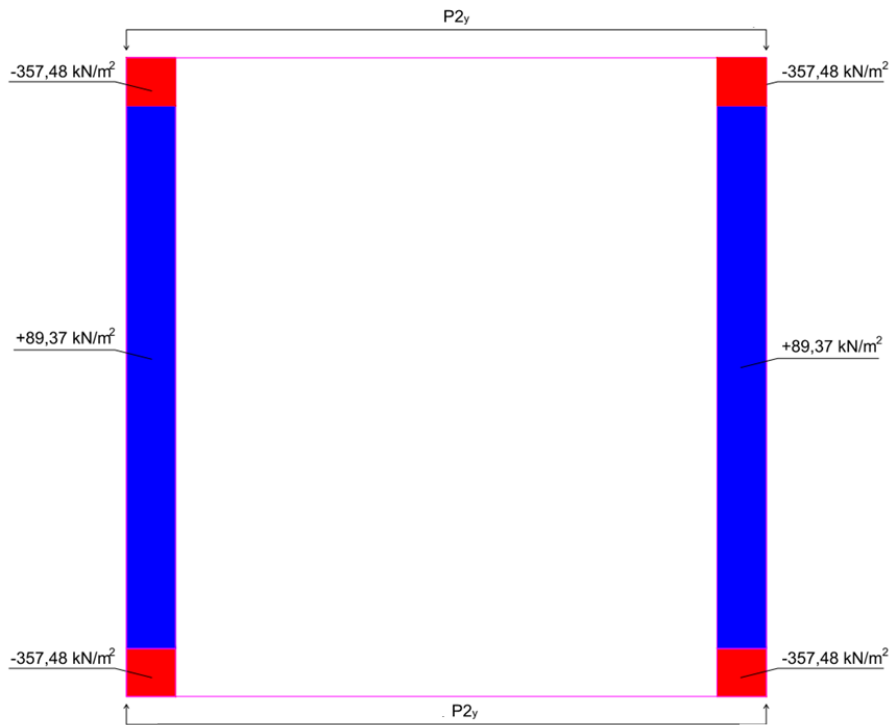


Figura 8-62. Cargas equivalentes en la en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 16x16m

8.2.3.2 Deformaciones

Siguiendo los criterios expositivos del caso primero, en las imágenes que prosiguen se detallan las deformaciones de placa obtenidas amplificándolas en todos los casos 100 veces.

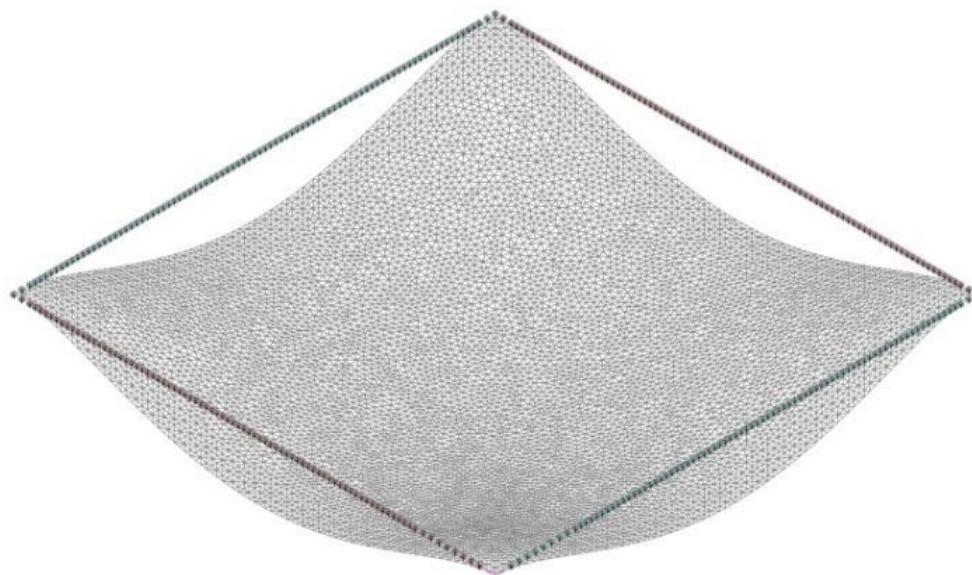


Figura 8-63. Deformación elástica relativa a la aplicación de todas las cargas gravitatorias (Sin incluir el efecto del postesado) en el problema de 16x16m

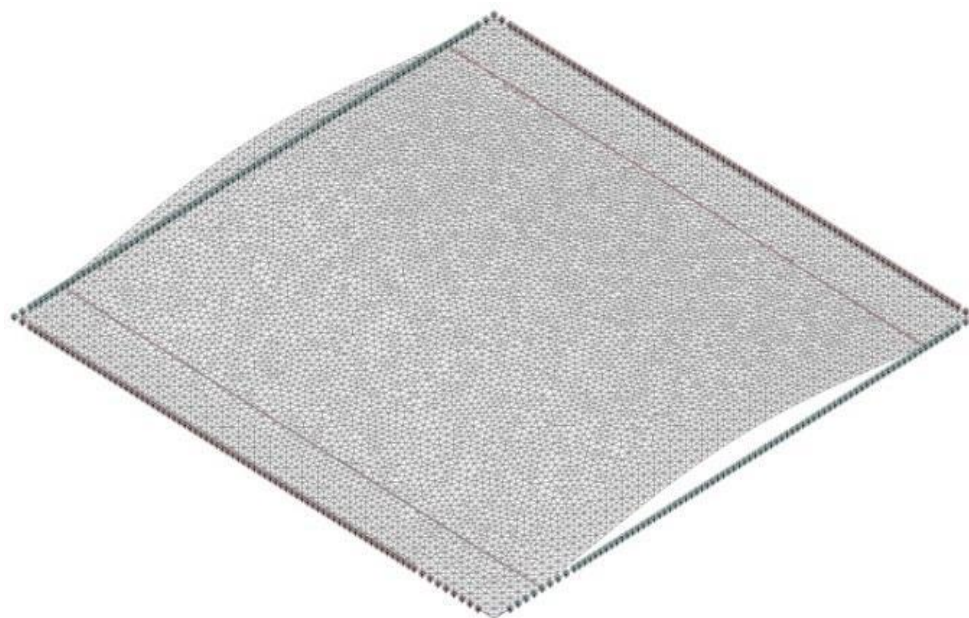


Figura 8-64. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 16x16m

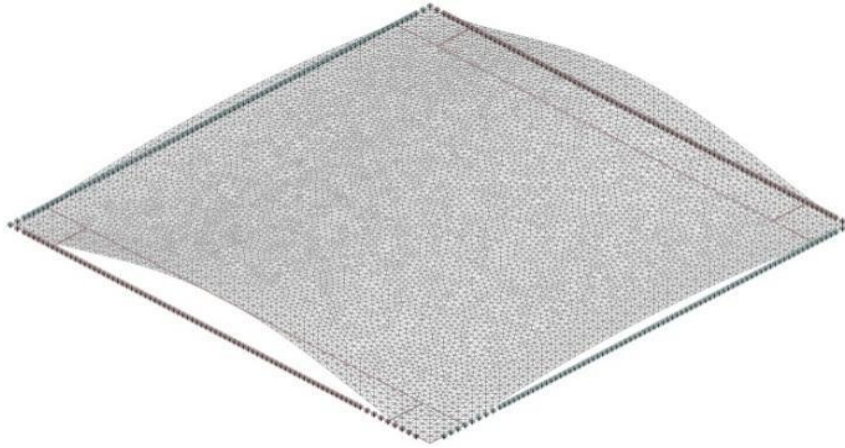


Figura 8-65. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 16x16m

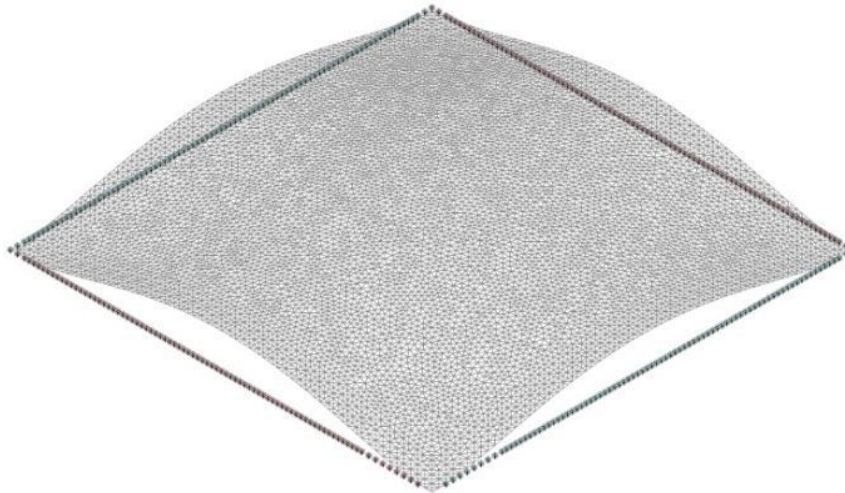


Figura 8-66. Deformación elástica debida a la acción conjunta de las dos bandas de postesado, en el problema de 16x16m

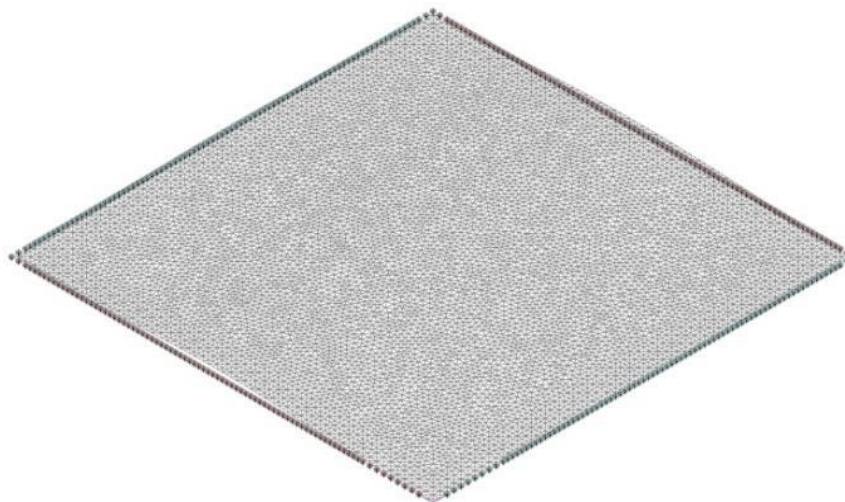


Figura 8-67. Deformación elástica ($\times 100$) en Situación de vacío (cargas permanentes + postesado) en el problema de 16x16m

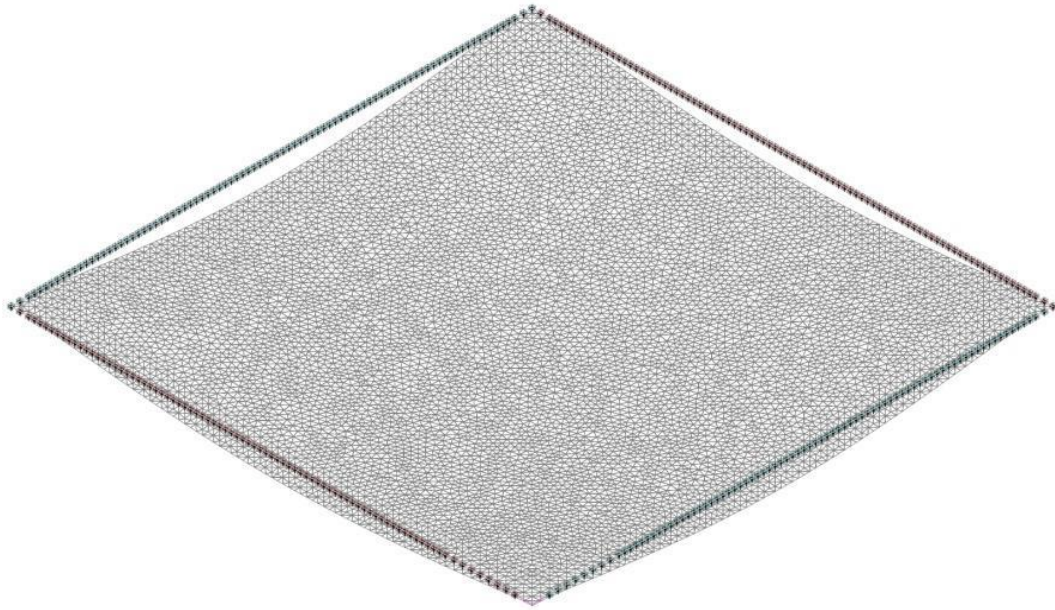


Figura 8-68. Deformación elástica en el Estado Límite de Servicio, teniendo en cuenta todas las acciones gravitatorias inerciales y todas las acciones del postesado (ELS) en el problema de 16x16m

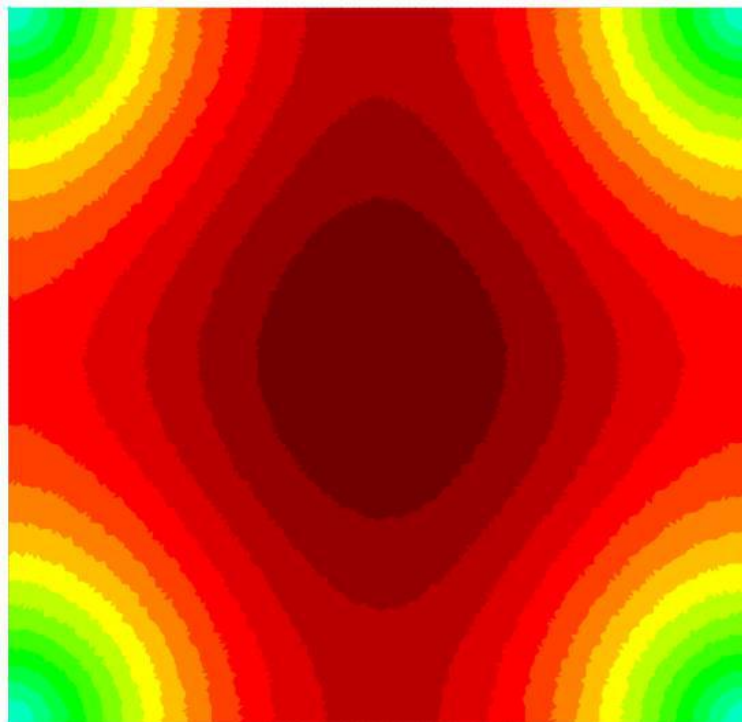


Figura 8-69. Diagrama de niveles de flecha en el ELS en el problema de 16x16m

$$f_{\text{máx inst}} = 6,9 \text{ mm} \rightarrow L/2318$$

8.2.3.3 Esfuerzos

Del análisis de esfuerzos conviene mostrar los resultados en el Estado Límite Último (ELU), estado que responde nuevamente a la siguiente combinación de cargas:

$$\begin{aligned}
 &1,35 \cdot (\text{Peso Propio}) + \\
 &1,35 \cdot (\text{Cargas Permanentes}) + \\
 &1,50 \cdot (\text{Sobrecarga}) + \\
 &1,00 \cdot (\text{Postesado})
 \end{aligned}$$

Recordando que la corrección de los efectos del postesado establecida en la EHE-08 - 0,9 para efectos favorables y 1,10 para efectos desfavorables - se tiene en cuenta directamente en el presente trabajo en el análisis de las secciones que ha permitido el cálculo de los efectos del postesado según ha sido expuesto en el capítulo quinto.

En base a lo anterior los esfuerzos de placa delgada obtenidos - M_x , M_y y M_{xy} - son los que se muestran a continuación.

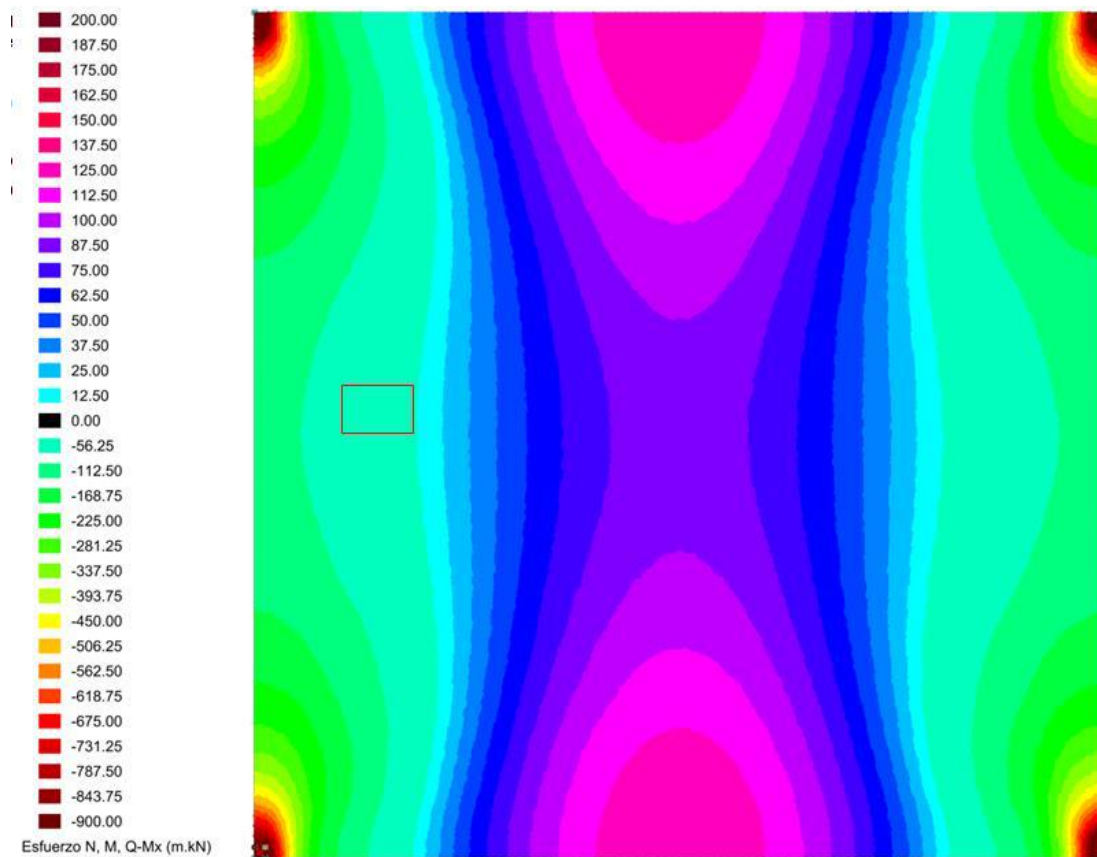


Figura 8-70. Diagrama M_x . Flector actuante en la dirección X. Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 16x16m

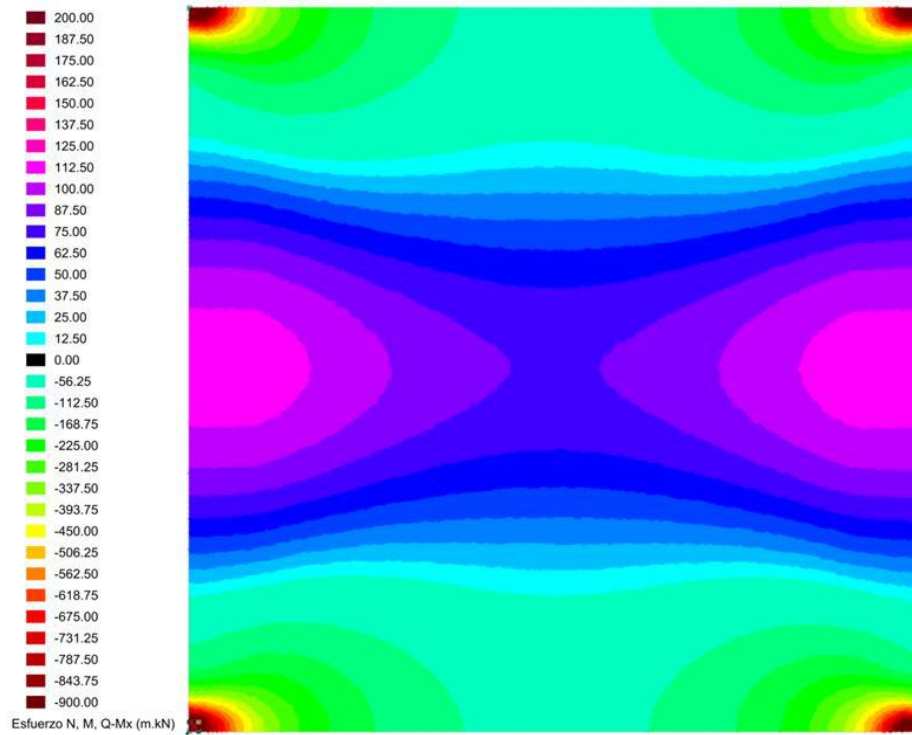


Figura 8-71. Diagrama M_y . Flector actuante en la dirección Y. Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 16x16

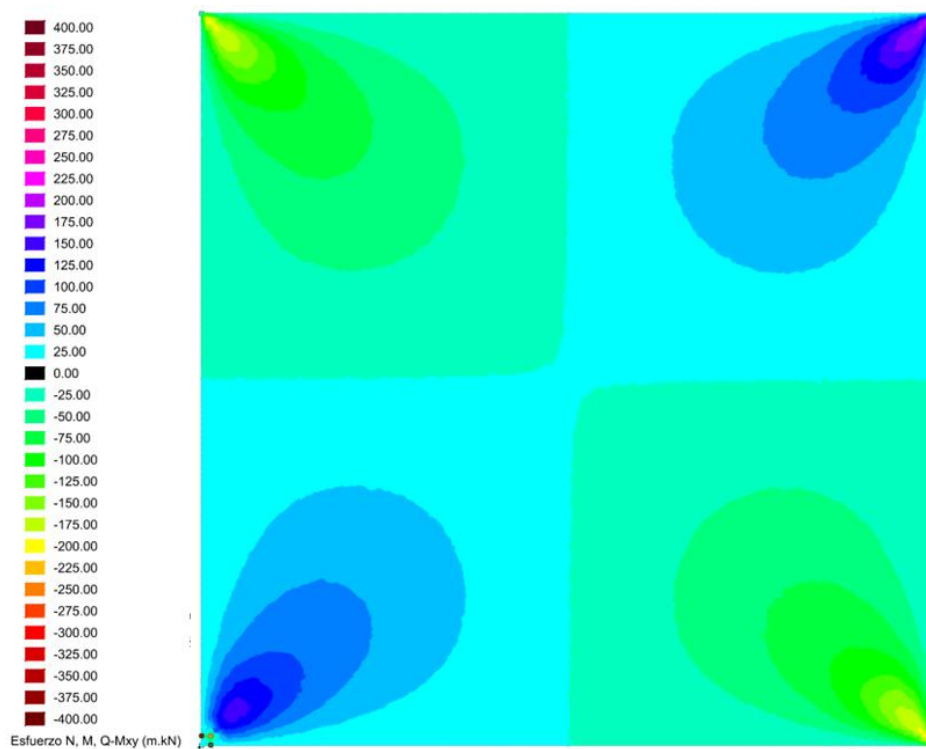


Figura 8-72. Diagrama de momentos torsores, M_{xy} . Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 16x16m

8.2.4 Estudio del refuerzo superior pasivo

Se proponen una serie de refuerzo para el análisis no lineal del problema que se detallan seguidamente, en el sentido de que resulte proporcionado al problema en cuestión, y se analiza la losa según los criterios expuestos en apartados precedentes en régimen no lineal.

La serie de refuerzo analizada, yendo de mayor a menor cantidad de refuerzo, es en este caso para las dos direcciones principales del problema la que sigue:

- 1Φ20c/15
- 1Φ20c/20
- 1Φ16c/15
- 1Φ16c/20
- 1Φ12c/15
- 1Φ12c/20

8.2.4.1 Relaciones Momento-Curvatura (M-Γ)

Consecutivamente se detallan la relación entre momento y curvatura (M-Γ), para las diferentes opciones de refuerzo en cada una de las direcciones principales de cálculo en base a la armadura activa obtenida en el análisis de la situación de servicio:

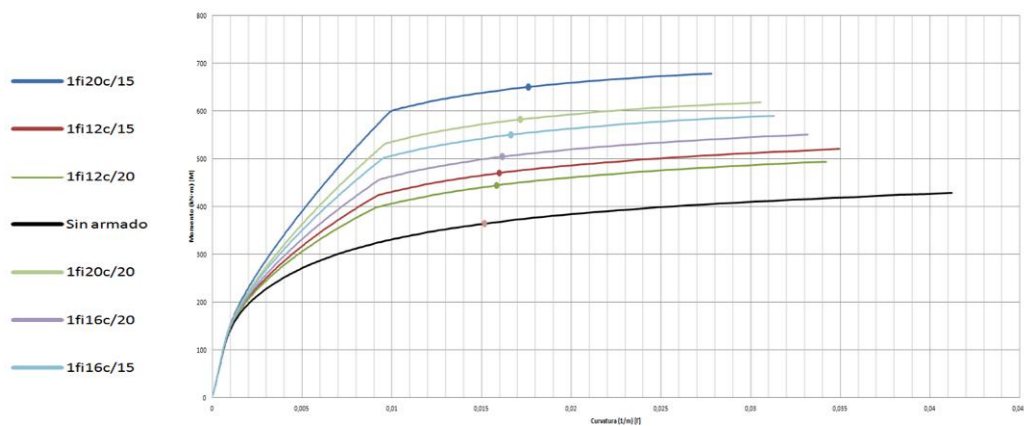


Figura 8-73. Relación M-Γ en la dirección X para diferentes opciones de refuerzo en el problema de 16x16m

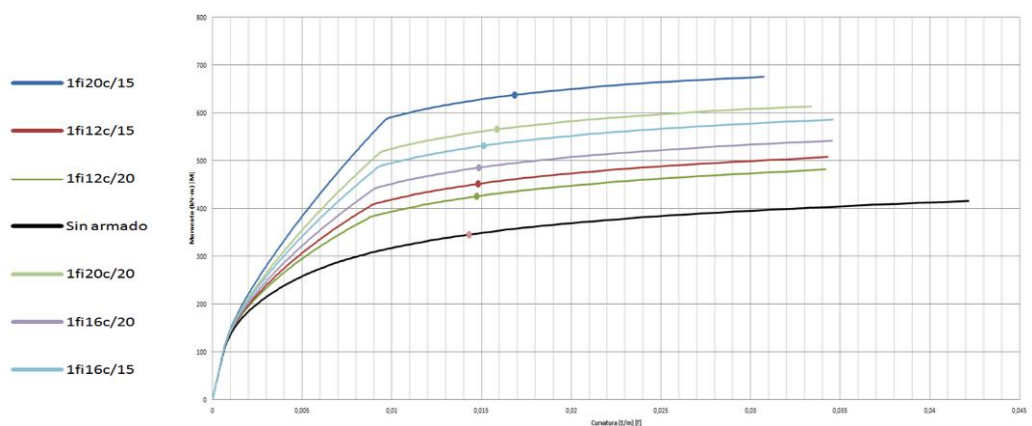


Figura 8-74. Relación M-Γ en la dirección Y para diferentes opciones de refuerzo en el problema de 16x16m

Las curvas de degradación de los términos de flexión - D00, D11 - de la matriz de elasticidad resultan en este caso con la siguiente forma:

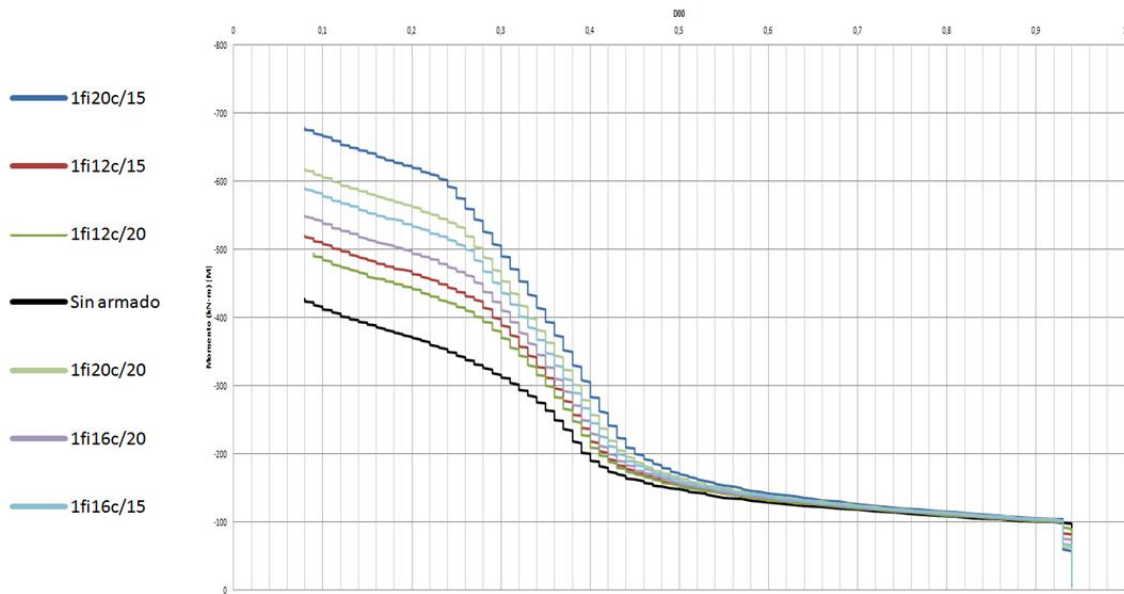


Figura 8-75. Degradación en la dirección X del término D00 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 16x16m

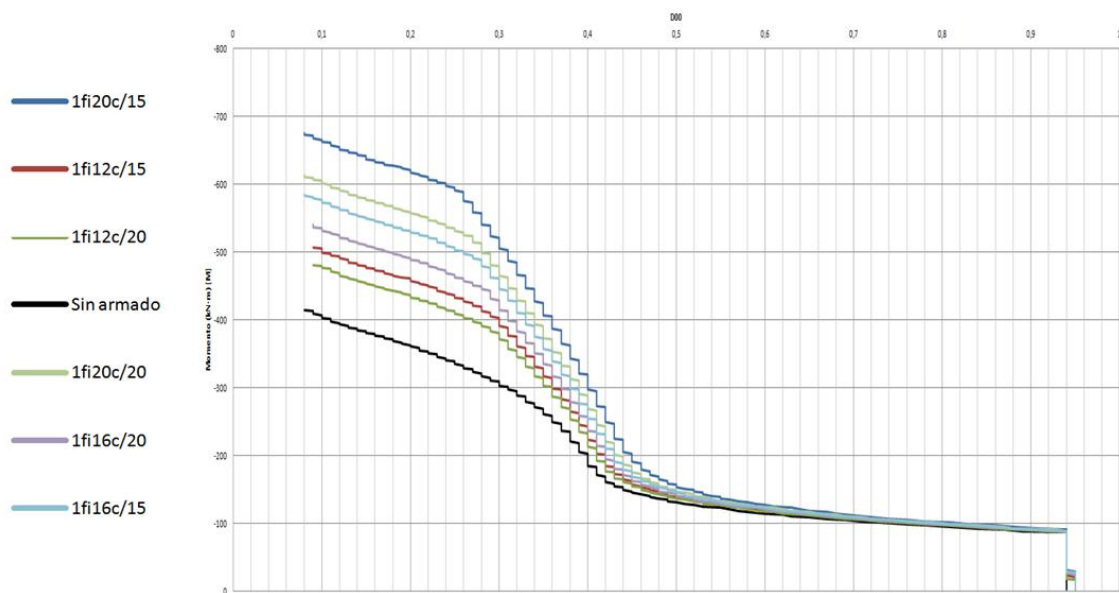


Figura 8-76. Degradación en la dirección Y del término D11 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 16x16m

Mientras que las curvas de degradación del término de torsión - D22 - de la matriz de elasticidad resultan de la siguiente forma:

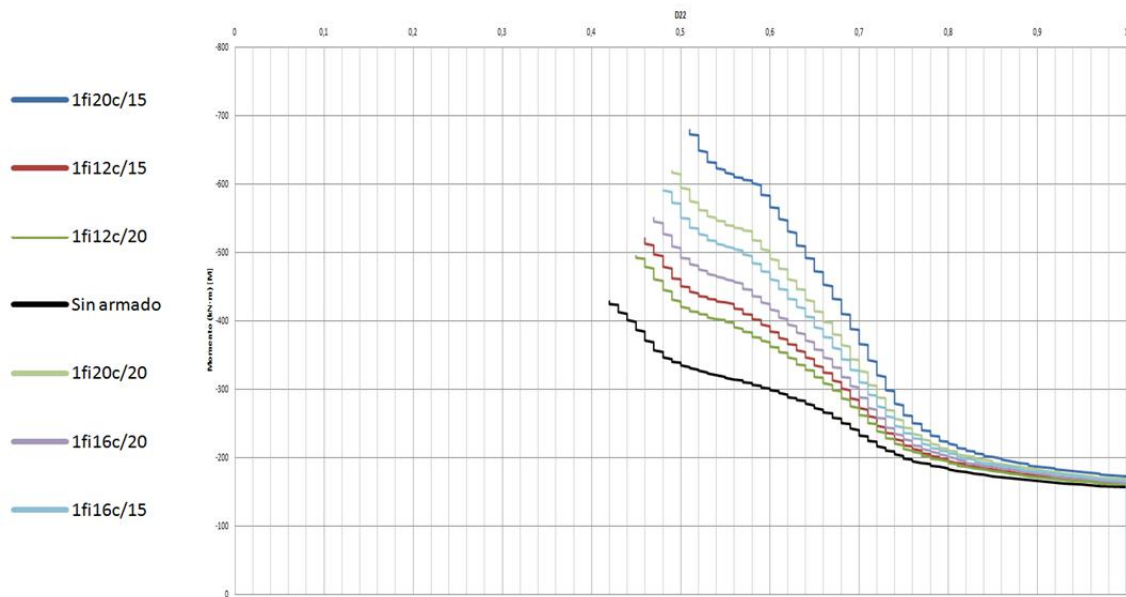


Figura 8-77. Degradación en la dirección X del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 16x16m

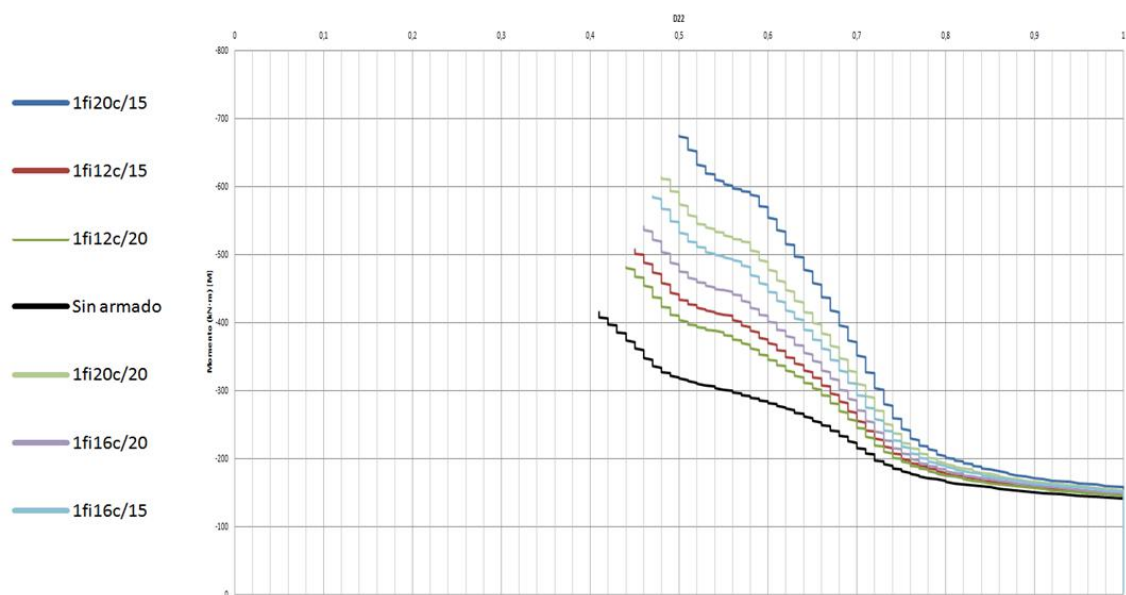


Figura 8-78. Degradación en la dirección Y del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 16x16m

Cabe recordar con respecto al término de degradación D22, que éste debe establecerse realmente como el mínimo de las dos direcciones en función de los momentos flectores, M_x y M_y , actuantes en un punto.

8.2.5 Resultados del estudio de las opciones de refuerzo

8.2.5.1 Resultados derivados del análisis en régimen elástico

En primer lugar, se exponen los resultados de los refuerzos obtenidos del análisis en régimen elástico para los diferentes anchos de integración.

PLACA 16X16m ; h=42.00 cm							
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO SOBRE LOS SOPORTES PARTIENDO DEL REFUERZO SEGÚN EL ANÁLISIS EN RÉGIMEN ELÁSTICO							
RÉGIMEN ELÁSTICO							
- Cálculo de esfuerzos en régimen elástico							
- Cálculo de armadura pasiva superior necesaria con degradación de la sección hasta plastificación de la armadura activa							
	Ancho de integración (m)		Mmáx-punta (kN-m)	Minteg (kN-m/ml)	Área armadura necesaria (cm ² /ml)		Área armadura dispuesta (cm ²)
BANDA SECUNDARIA X	1.5h + B/2	0,83 (L/16,9)	-905,47	-809,67	12,50	1Φ25c/12,5	7Φ25
					25,00	39,27	34,36
	2.0h + B/2	1,04 (L/13,5)		-757,01	15,00	1Φ25c/15	7Φ25
					25,00	32,72	34,36
	3.0h + B/2	1,46 (L/9,6)		663,96	12,50	1Φ20c/12,5	12Φ20
					20,00	25,13	37,70
4.5h + B/2	2,09 (L/6,7)	559,35	20,00	1Φ20c/20	11Φ20		
			20,00	15,71	34,56		
6.0h + B/2	2,72 (L/5,1)	-484,49	20,00	1Φ16c/20	14Φ16		
			16,00	10,05	28,15		
8.0h + B/2	3,56 (L/3,9)	-412,72	20,00	1Φ10c/20	18Φ10		
			10,00	3,93	14,14		
BANDA PRINCIPAL Y	1.5h + B/2	0,83 (L/14,5)	-907,19	-812,04	12,50	1Φ25c/12,5	7Φ25
					25,00	39,27	34,36
	2.0h + B/2	1,04 (L/11,5)		-759,4	15,00	1Φ25c/15	7Φ25
					25,00	32,72	34,36
	3.0h + B/2	1,46 (L/8,2)		-666,37	12,50	1Φ20c/12,5	12Φ20
					20,00	25,13	37,70
4.5h + B/2	2,09 (L/5,7)	-560,88	20,00	1Φ20c/20	11Φ20		
			20,00	15,71	34,56		
6.0h + B/2	2,72 (L/4,4)	-483,85	20,00	1Φ16c/20	14Φ16		
			16,00	10,05	28,15		
8.0h + B/2	3,56 (L/3,4)	-408,6	20,00	1Φ12c/20	18Φ12		
			12,00	5,65	20,36		

Figura 8-79. Resultados derivados del análisis en régimen elástico en el problema de 16x16m

8.2.5.2 Resultados derivados del análisis en régimen post-elástico

Se exponen ahora los resultados de los refuerzos obtenidos del análisis en régimen post-elástico, siguiendo las mismas formas de ordenación que se han seguido en el Caso primero (placa de 12x12).

PLACA 16X16m ; h=42.00 cm										
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO SOBRE LOS SOPORTES PROPUESTO										
Banda	Armado propuesto cm ² /ml	Ancho de integración mínimo (cm)	Mrot (kN·m/ml)	Mplast (kN·m/ml)	Mmáx-punta (kN·m/ml)	Minteg (kN·m/ml)	STATUS	Mrot/Mmáx Mplast/Minteg	Armado dispuesto cm ²	Observaciones
X	15,00 1Φ20c/15 20,00 20,94	135 (L/11,9 ; 0.2 + 2,74h)	-680	-650	-625,59	-432,86	OK	1,09 ; 1,5	9Φ20 28,27	
Y	15,00 1Φ20c/15 20,00 20,94	135 (L/11,9 ; 0.2 + 2,74h)	-675	-633	-617,48	-441,8	OK	1,09 ; 1,43	9Φ20 28,27	
X	20,00 1Φ20c/20 20,00 15,71	130 (L/12,3 ; 0.2 + 2,62h)	-613	-582	-546,98	-414,94	OK	1,12 ; 1,4	7Φ20 21,99	
Y	20,00 1Φ20c/20 20,00 15,71	130 (L/12,3 ; 0.2 + 2,62h)	-618	-618	-548,3	-426	OK	1,13 ; 1,45	7Φ20 21,99	
X	15,00 1Φ16c/15 16,00 13,40	95 (L/16,8 ; 0.2 + 1,79h)	-590	-550	-497,3	-427,74	OK	1,19 ; 1,29	7Φ16 14,07	
Y	15,00 1Φ16c/15 16,00 13,40	95 (L/16,8 ; 0.2 + 1,79h)	-585	-531	-509,05	-441,13	OK	1,15 ; 1,2	7Φ16 14,07	
X	20,00 1Φ16c/20 16,00 10,05	95 (L/16,8 ; 0.2 + 1,79h)	-550	-506	-571,82	-427	OK*	0,96 ; 1,19	5Φ16 10,05	Mrot < Mmáx-punta
Y	20,00 1Φ16c/20 16,00 10,05	95 (L/16,8 ; 0.2 + 1,79h)	-541	-485	-574,75	-430,56	OK*	0,94 ; 1,13	5Φ16 10,05	Mrot < Mmáx-punta
X	15,00 1Φ12c/15 12,00 7,54	110 (L/14,5 ; 0.2 + 2,14h)	-520	-472	-535	-401,67	OK*	0,97 ; 1,18	8Φ12 9,05	Mrot < Mmáx-punta
Y	15,00 1Φ12c/15 12,00 7,54	110 (L/14,5 ; 0.2 + 2,14h)	-507	-451	-539,93	-377,86	OK*	0,94 ; 1,19	8Φ12 9,05	Mrot < Mmáx-punta
X	20,00 1Φ12c/20 12,00 5,65	35 (L/45,7 ; 0.2 + 0,36h)	-494	-446	-543,03	-389,1	OK*	0,91 ; 1,15	2Φ12 2,26	Mrot < Mmáx-punta
Y	20,00 1Φ12c/20 12,00 5,65	160 (L/10 ; 0.2 + 3,33h)	-481	-425	-546,75	-392,48	OK*	0,88 ; 1,08	8Φ12 9,05	Mrot < Mmáx-punta

Figura 8-80. Resultados derivados del análisis en régimen no lineal en el problema de 16x16m

Tras los resultados obtenidos, siguiendo los criterios de selección también expuestos en el primer caso de la placa de 12x12, se determina una opción de refuerzo como la óptima para este nuevo caso. El refuerzo correspondería, pues, a una barra de 16mm diámetro dispuesta cada 15 cm. en un ancho total de 95 cm., lo que se traduce finalmente a disponer 7 barras de diámetro 16 mm.

En este caso los ahorros de refuerzo, si se compara con las zonas de refuerzo equiparables - y, por tanto, más creíbles - estudiadas de la forma convencional, resultan del orden del 50%. Es decir, a mayor tamaño del problema parece que el ahorro puede ser mayor, ya que los ahorros de armadura pasiva obtenidos en el caso primero (Losa de 12x12m), se situaban en el entorno del 35%.

8.2.5.3 Resultados en el comportamiento mecánico. Comparativa

El primer aspecto a analizar es la variación del momento flector, en cada dirección, comparando los momentos flectores obtenidos en el análisis lineal y en el no lineal para la opción de refuerzo "óptima".

En el conjunto de imágenes que siguen se muestran los momentos flectores M_y (dirección secundaria) y M_x (dirección principal), primero, calculados en régimen lineal y, segundo, en régimen no lineal.

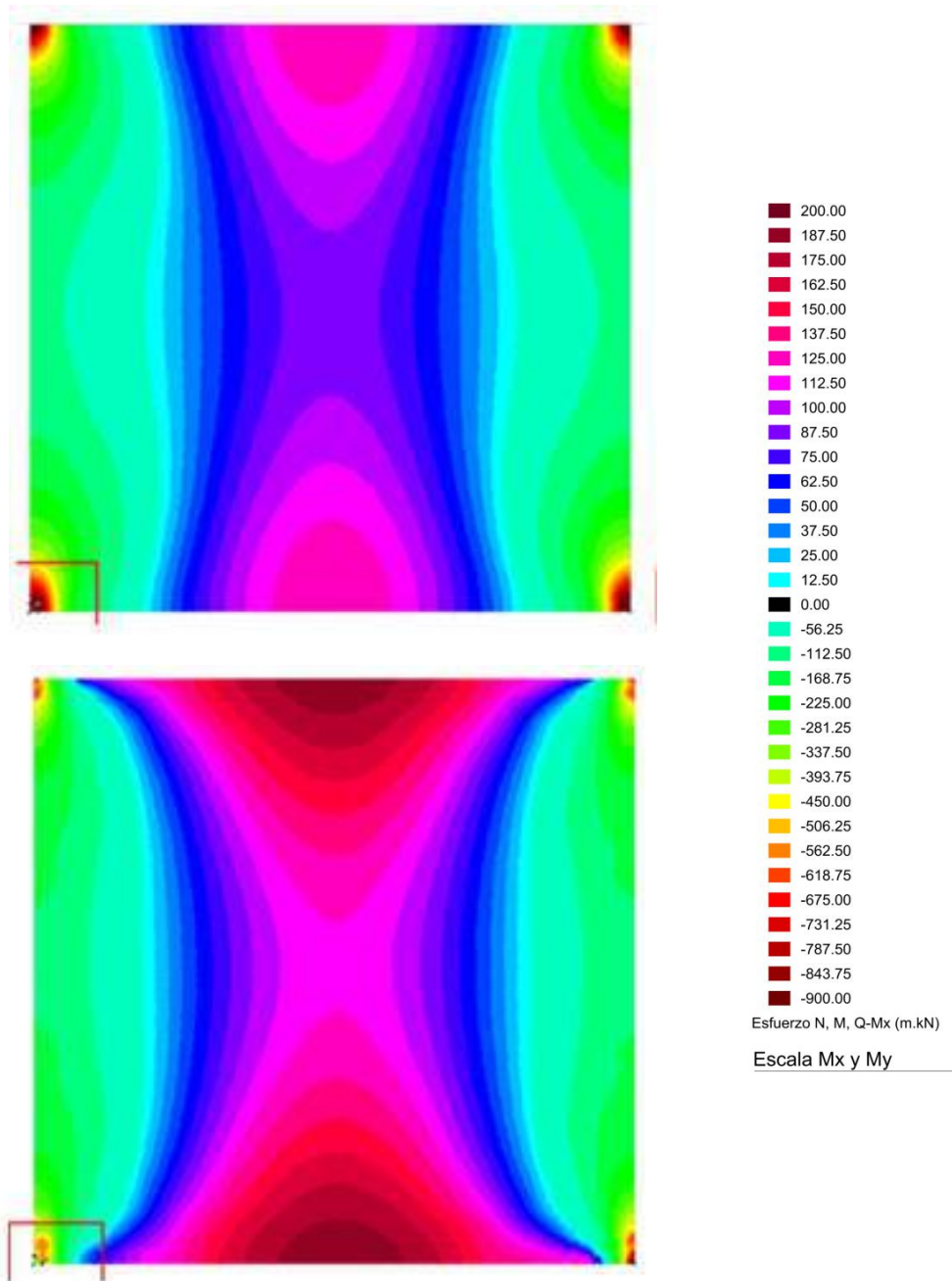


Figura 8-81. Comparativa de los momentos flectores M_x obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$ en el problema de $16 \times 16m$

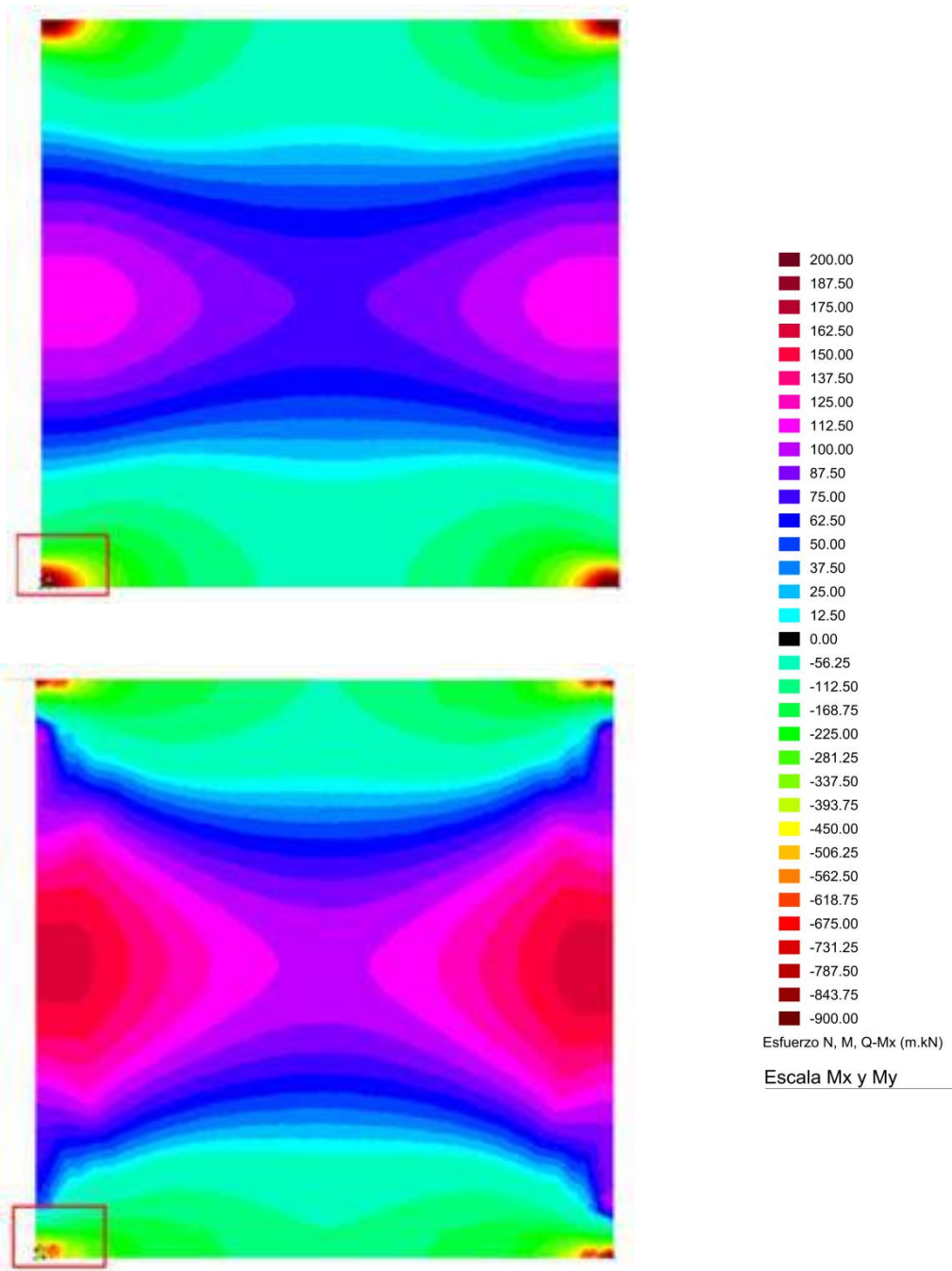


Figura 8-82. Comparativa de los momentos flectores M_y obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$ en el problema de $16 \times 16m$

Nuevamente el incremento de momento positivo es perfectamente equilibrado por la armadura existente en las respectivas secciones centrales, sin que se requieran, por tanto, refuerzos adicionales.

Analizada la variación del momento flector se comprueba ahora cómo se ha degradado la respuesta a flexión de la placa al aceptar su respuesta no lineal, en base a la variación de los coeficientes de degradación D00 y D11, los cuales afectan a la matriz de elasticidad del problema según ha sido expuesto en los apartados 7.3 y 7.4.

El valor de los referidos coeficientes al final del análisis no lineal para el refuerzo consignado ($+1\Phi16c/15$) presenta la siguiente distribución:

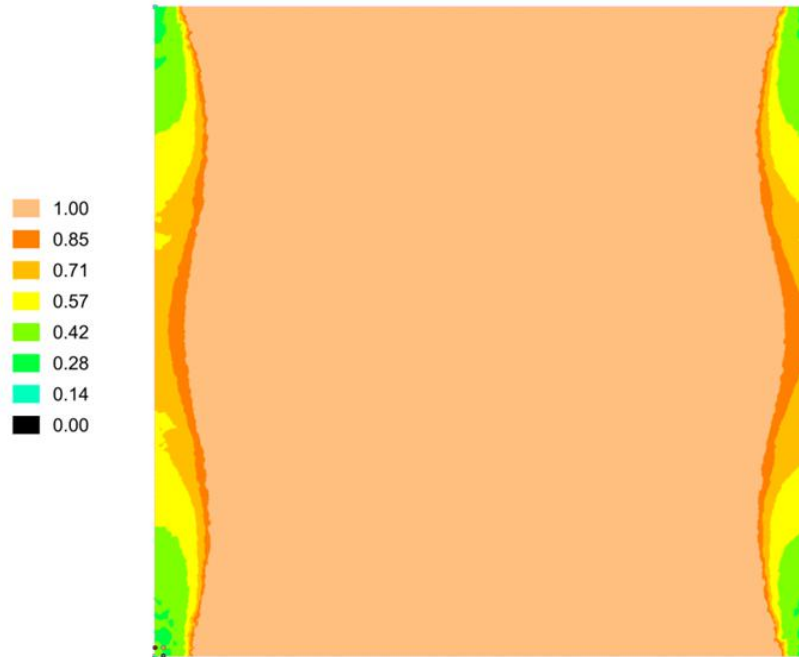


Figura 8-83. Variación de D00 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi16c/15$ en el problema de $16\times16m$

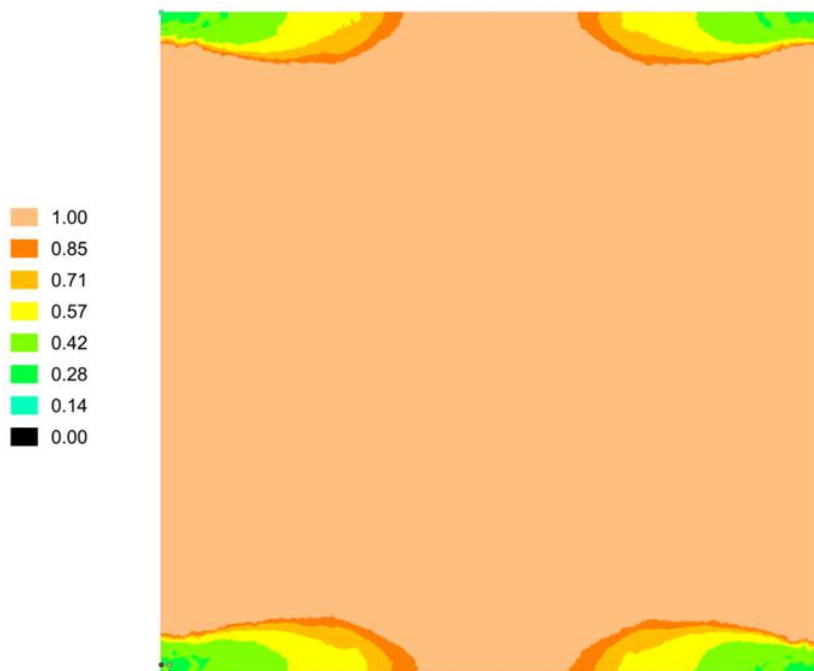


Figura 8-84. Variación de D11 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi16c/15$ en el problema de $16\times16m$

Los descensos más significativos de los coeficientes D00 y D11 siguen las reglas o formas de extensión constatadas en el Caso primero (Losa de $12\times12m$.)

Finalmente se analiza el momento torsor. Para ello, se muestran en lo que sigue los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en régimen lineal y no lineal para su mejor comparación.

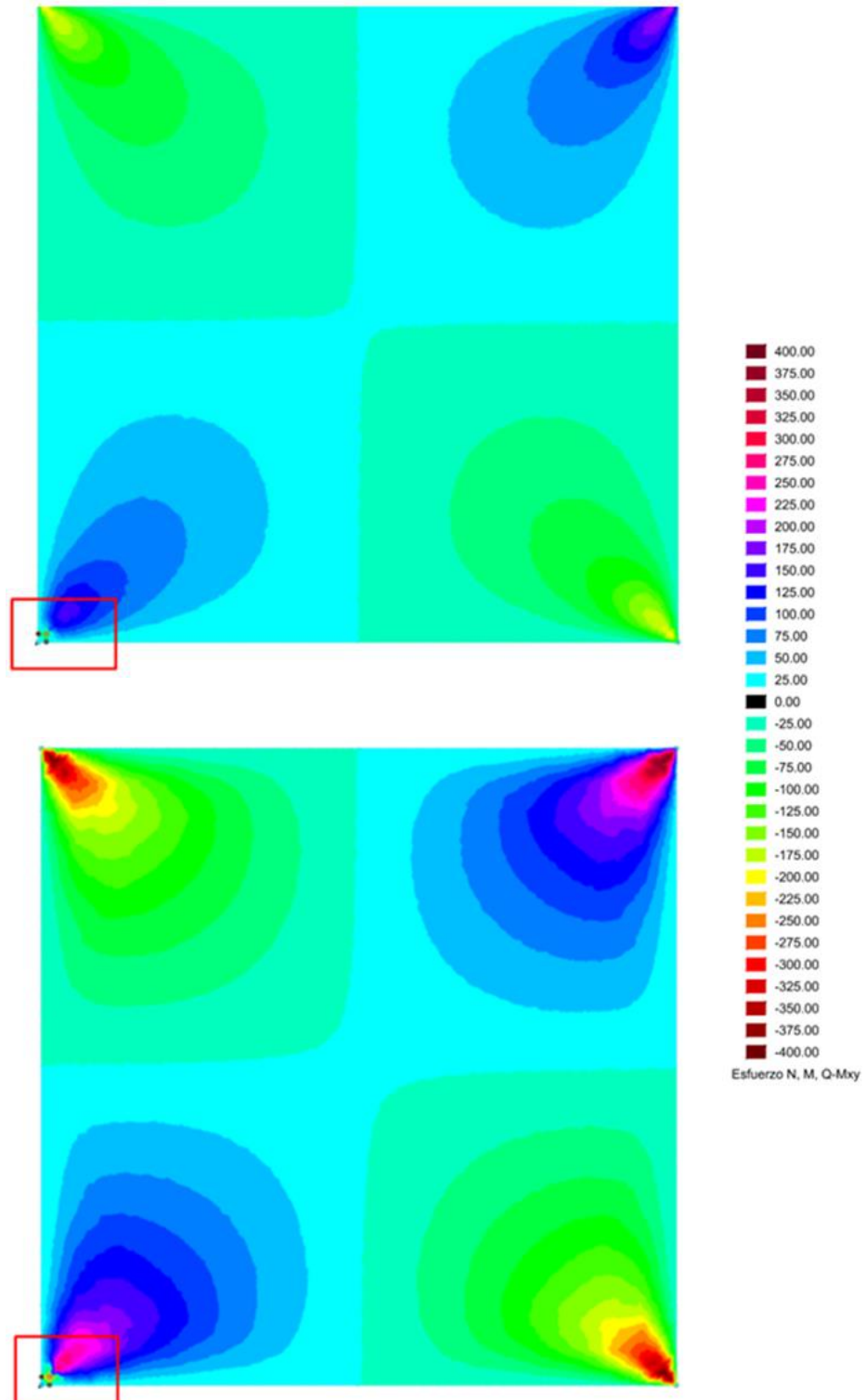


Figura 8-85. Comparativa de los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi16c/15$ en el problema de $16 \times 16m$

Vuelve a resultar interesante en lo relativo al problema de la torsión ver como evoluciona su coeficiente particular de degradación D22 a lo largo de la losa analizada, según se ilustra en la imagen posterior.

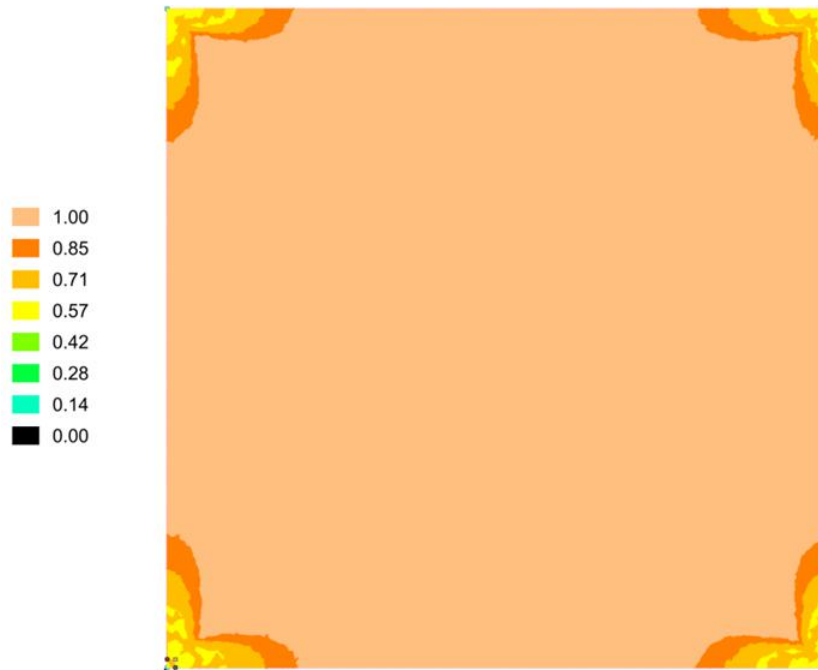


Figura 8-86. Variación de D22 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$ en el problema de $16 \times 16m$

En el caso del coeficiente de degradación D22 las reducciones más significativas se producen en reducidas regiones y ocupando espacios parecidos a los observados en el Caso primero (Losa de $12 \times 12m$).

En las imágenes posteriores, se muestra la variación de los dos modos de análisis; en el caso del análisis no lineal siempre para el refuerzo **de $1\Phi 16c/15$** .

En primer lugar, se propone el análisis de la evolución de las tensiones normales en la cara superior de la losa y, posteriormente, el análisis de la evolución de las tensiones normales en la cara inferior de la losa.

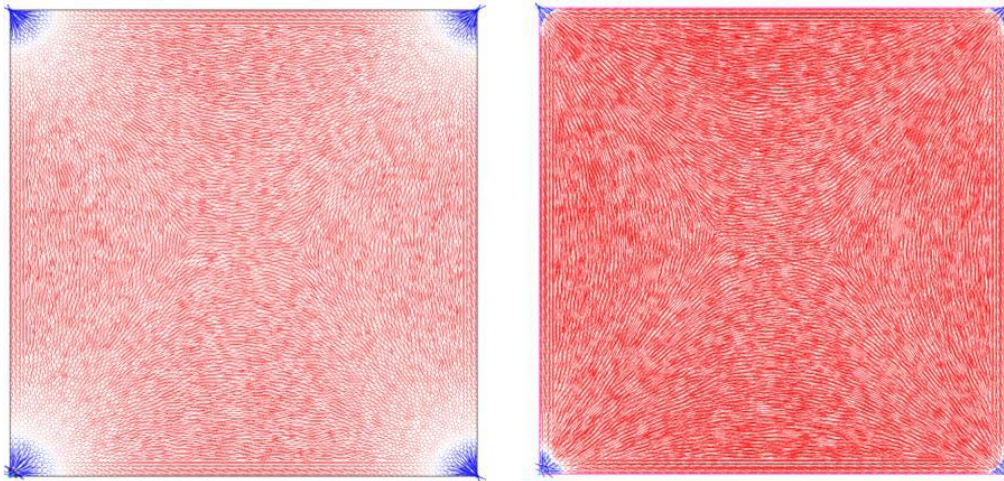


Figura 8-87. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

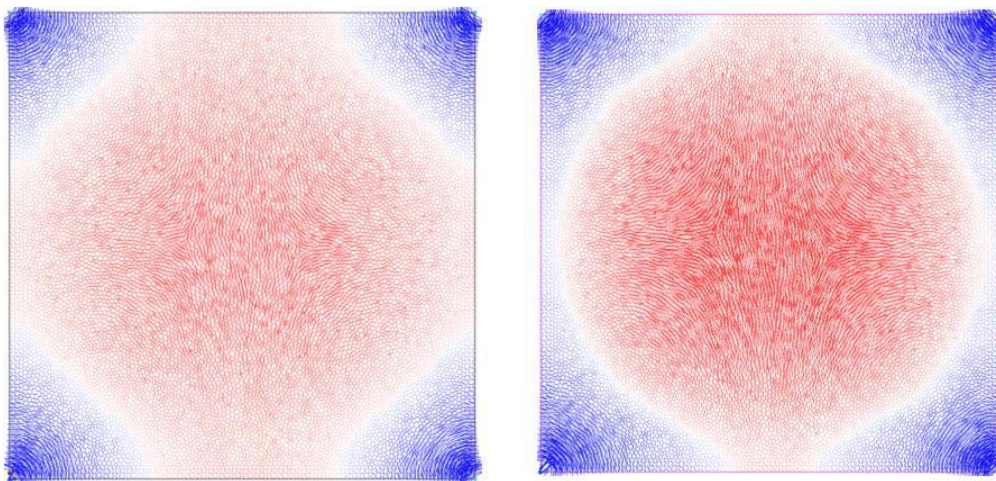


Figura 8-88. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

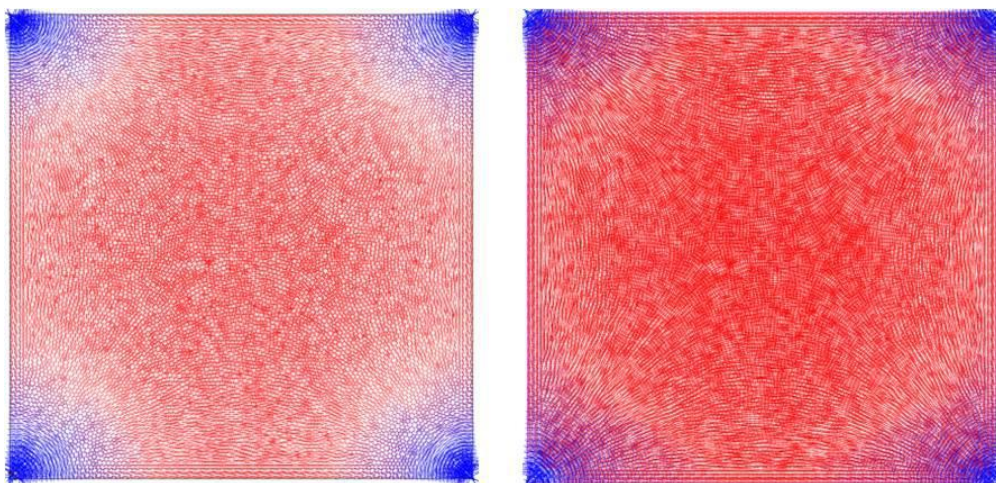


Figura 8-89. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara superior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

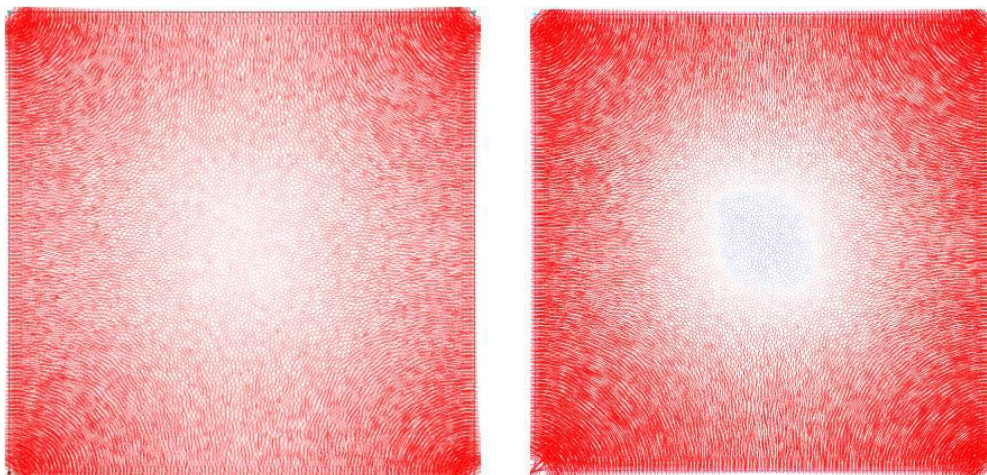


Figura 8-90. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de 1 Φ 16c/15

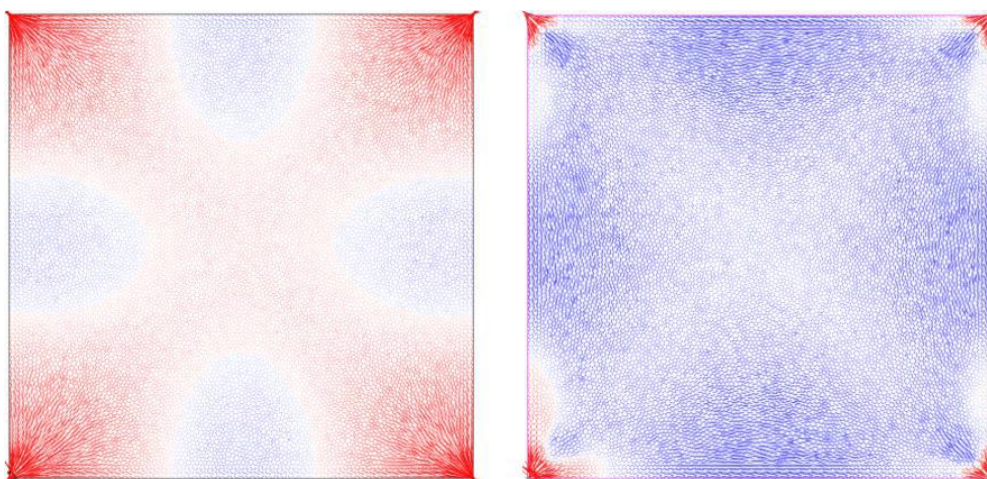


Figura 8-91. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de 1 Φ 16c/15

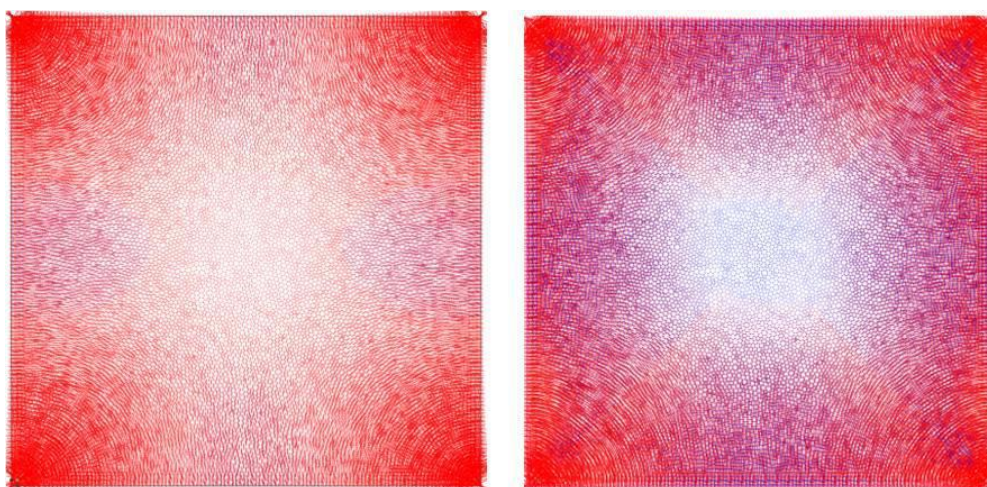


Figura 8-92. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara inferior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de 1 Φ 16c/15

Las variaciones de las tensiones principales siguen, por tanto, el patrón reconocido en el Caso primero (Losa de 12x12 metros).

Se detallan, por último, las deformaciones obtenidas tanto en régimen lineal como en régimen no lineal; primero, mediante la obtención de una imagen deformada en perspectiva (con las deformaciones transversales amplificadas 100 veces) y, segundo, mediante el detalle de la representación gráfica y a color de diferentes escalas de desplazamiento que facilitan la comparación.

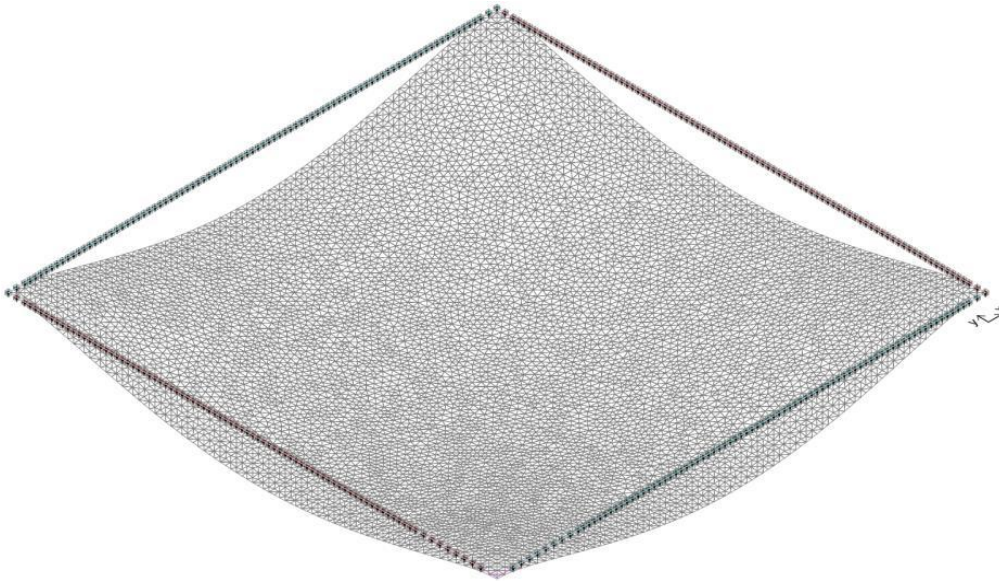


Figura 8-93. Deformación elástica (x100) en ELU

$$f_{\text{máx inst}} = 18,91 \text{ mm} \rightarrow L/846$$

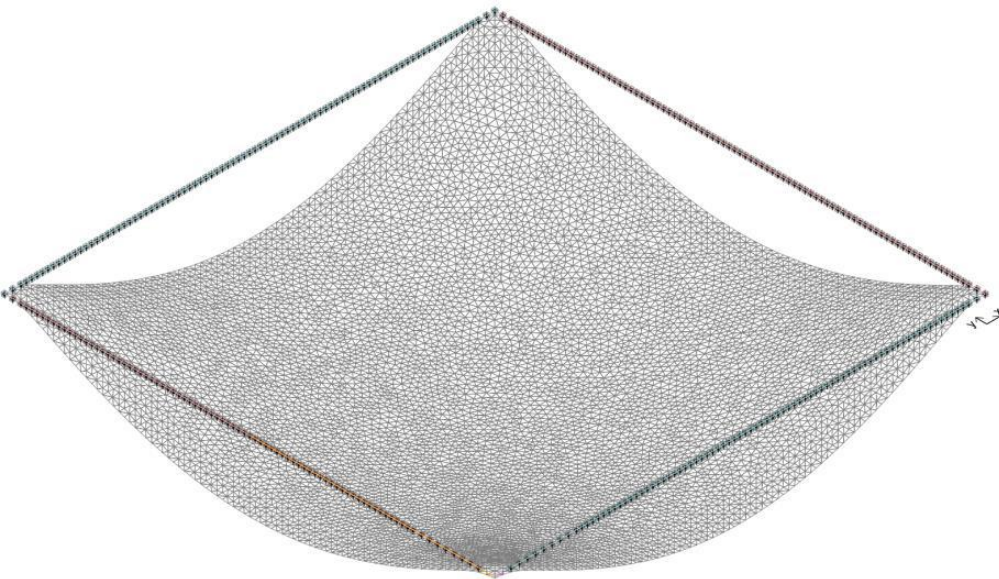


Figura 8-94. Deformada (x100) en ELU en régimen post-elástico

$$f_{\text{máx inst}} = 33,84 \text{ mm} \rightarrow L/472$$

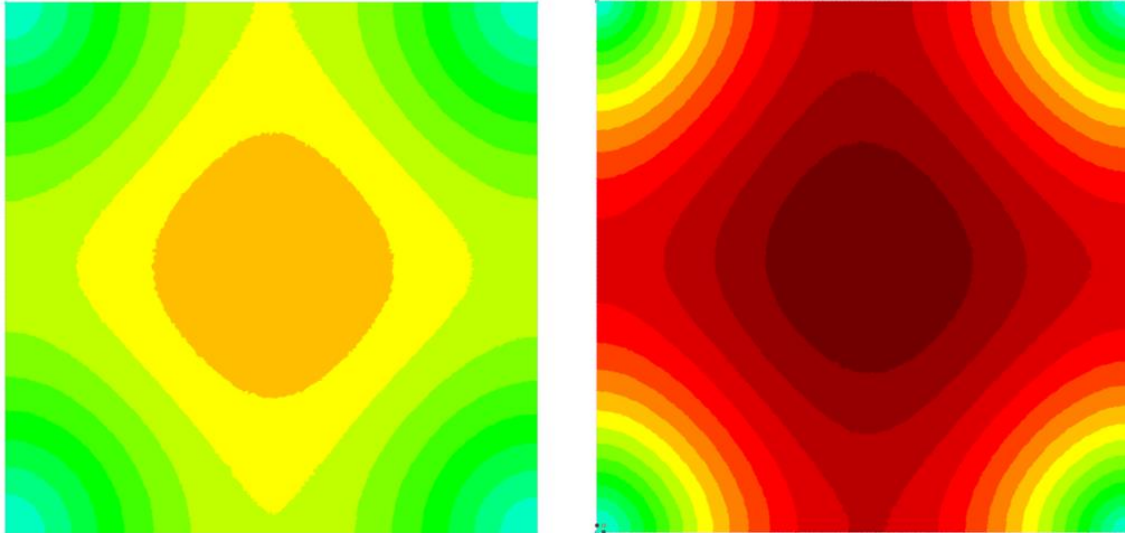


Figura 8-95. Diagrama de flechas en ELU en régimen elástico y en régimen post-elástico

Las variaciones de las deformaciones transversales son cualitativamente iguales a las constatadas en el Caso primero. Sin embargo, cabe destacar que ahora el incremento de flecha es ya cercano al 80%, mientras que antes no alcanzaba el 70%. Si bien es cierto también que el incremento de luz es superior al 33%.

En cualquier caso, las flechas son tan solo relevantes en el análisis se los E.L.S., siempre que las deformaciones máximas obtenidas no obliguen a acoplar el problema parcial de placa y de lámina, según se expuso en el capítulo 4. En este caso al quedar las deformaciones máximas en el caso de la losa degradada en L/472, incluyendo, por tanto, una parte significativa de la deformación post-elástica, no parece que haya el más mínimo problema en este sentido.

8.2.6 Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas

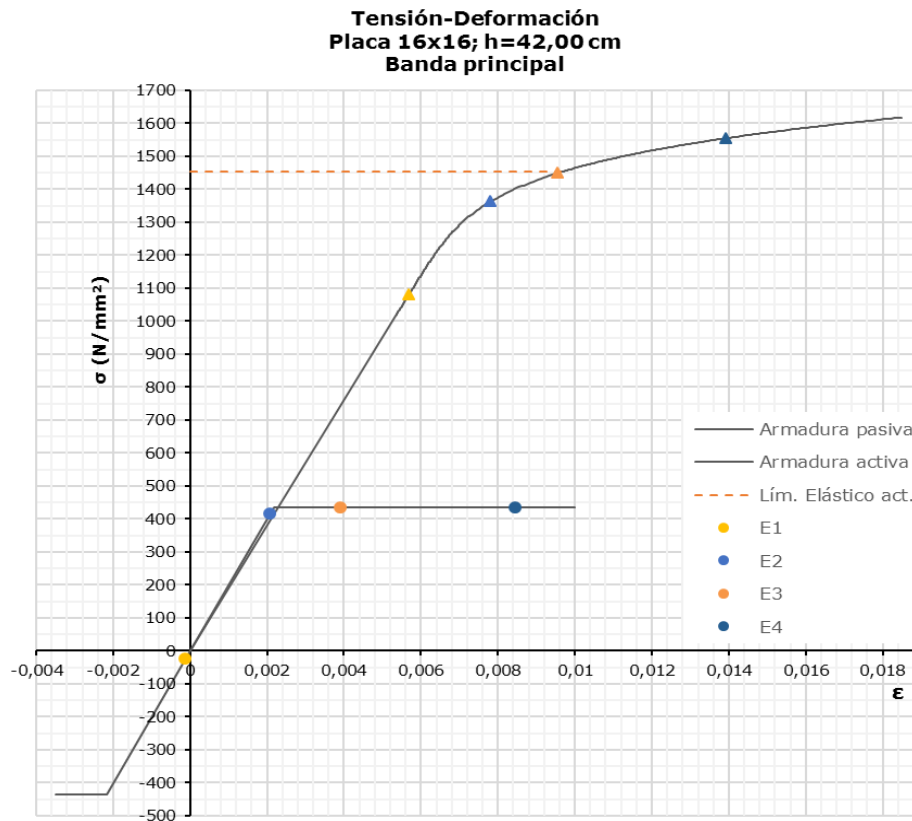


Figura 8-96. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) en el problema de una placa de 16x16m

N	Mx	Giro	Epsilon	ϵ máx pasivo	ϵ máx activo	Punto
-1208,8	12,37	0,00007572	-0,00010891	-0,000122	0,005681	E1
-1208,8	-47,63	-0,00028472	-0,00011036	-0,000062	0,005736	
-1208,8	-82,63	-0,00049577	-0,00011166	-0,000028	0,005769	
-1208,8	-117,63	-0,00074355	-0,00011058	0,000015	0,005809	
-1208,8	-152,63	-0,0011229	-0,00009806	0,000091	0,005882	
-1208,8	-187,63	-0,00165077	-0,00006906	0,000209	0,005995	
-1208,8	-222,63	-0,00230007	-0,00002406	0,000364	0,006143	
-1208,8	-257,63	-0,00303717	0,00003367	0,000546	0,006318	
-1208,8	-292,63	-0,00384109	0,00010116	0,000749	0,006514	
-1208,8	-327,63	-0,00470755	0,00017725	0,000972	0,006728	
-1208,8	-362,63	-0,00563461	0,00026103	0,001212	0,006959	
-1208,8	-402,63	-0,00677233	0,00036587	0,001509	0,007246	
-1208,8	-437,63	-0,00783434	0,0004645	0,001787	0,007514	
-1208,8	-472,63	-0,00895847	0,00056863	0,002081	0,007798	E2
-1208,8	-497,63	-0,01066056	0,00075916	0,002559	0,00826	
-1208,8	-527,63	-0,0152736	0,00132468	0,003903	0,00956	E3
-1208,8	-547,63	-0,02046486	0,00196284	0,005417	0,011025	
-1208,8	-572,63	0,00007579	-0,00010891	0,008439	0,013947	E4

Tabla 8-13. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) del caso de una placa de 16x16m

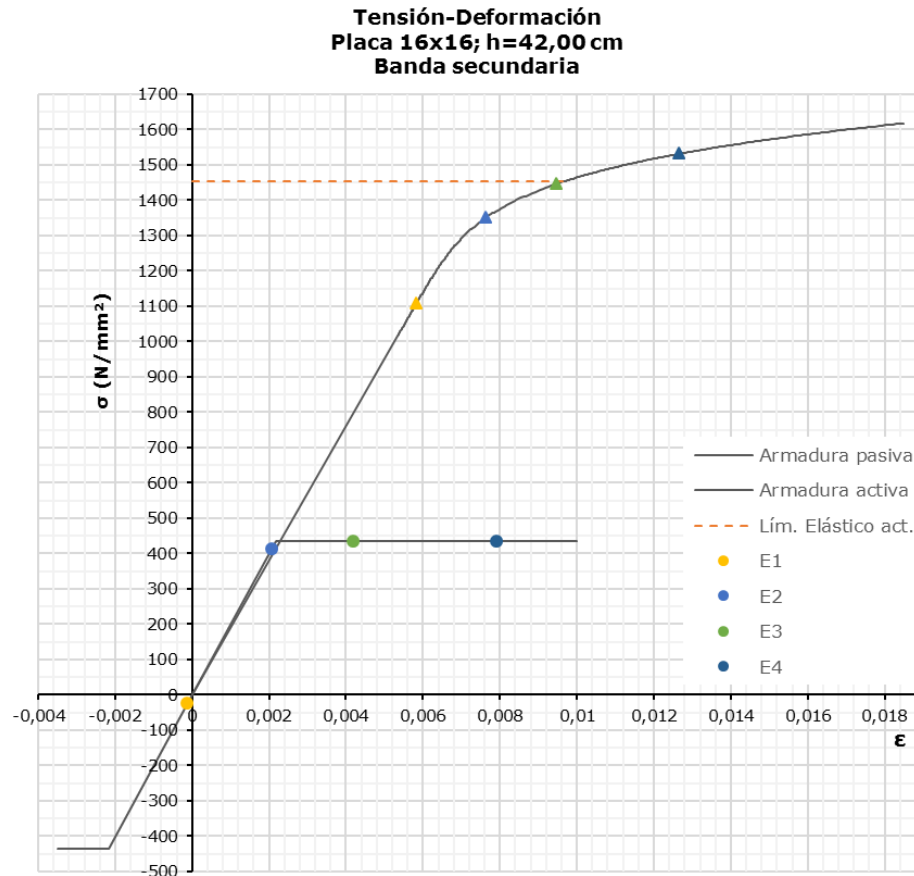


Figura 8-97. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) en el problema de una placa de 16x16m

N	Mx	Giro	Epsilon	ε máx pasivo	ε máx activo	Punto
-1394	-4,35	-0,00002826	-0,00012619	-0,000121	0,005824	E1
-1394	-19,35	-0,00011975	-0,00012652	-0,000106	0,005835	
-1394	-54,35	-0,00033362	-0,00012752	-0,000071	0,005862	
-1394	-89,35	-0,00054813	-0,00012888	-0,000036	0,005888	
-1394	-124,35	-0,00078483	-0,00012904	0,000003	0,005918	
-1394	-159,35	-0,00113381	-0,00012027	0,000071	0,005972	
-1394	-194,35	-0,00162351	-0,00009738	0,000176	0,006058	
-1394	-229,35	-0,0022464	-0,0000586	0,00032	0,006177	
-1394	-264,35	-0,00297448	-0,00000579	0,000496	0,006323	
-1394	-299,35	-0,00378309	0,00005821	0,000697	0,006492	
-1394	-334,35	-0,00465911	0,0001313	0,000917	0,006678	
-1394	-369,35	-0,00560109	0,00021265	0,001158	0,00688	
-1394	-409,35	-0,00675381	0,00031422	0,001454	0,007131	
-1394	-449,35	-0,00798924	0,00042395	0,001773	0,0074	
-1394	-484,35	-0,00913905	0,00052551	0,002068	0,00765	E2
-1394	-514,35	-0,0114195	0,00077264	0,002701	0,008191	
-1394	-544,35	-0,01664534	0,0013801	0,00419	0,009472	E3
-1394	-579,35	-0,00002818	-0,00012619	0,007919	0,012673	E4

Tabla 8-14. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) del caso de una placa de 16x16m

8.3 Placa de 12x14 metros

Después del estudio de los dos primeros casos, correspondientes a losas que presentaban la misma luz en las dos direcciones principales del problema, en el que no se han encontrado grandes diferencias en los resultados, se propone el análisis de un tercer caso, siguiendo también directamente la sistemática propuesta, en el que se pretende ahora buscar una cierta desproporción del problema, más que un nuevo incremento de escala, el cual parece que conduciría a resultados con toda probabilidad parecidos. Esta desproporción complica en buena medida el análisis, al exagerar la ortotropía del problema desde el inicio del proceso.

No obstante, y como se verá, la desproporción no puede ser muy acusada, ya que, si se pretende ceñir el trabajo al campo de las placas, entendidas éstas como losas de espesor uniforme bajo las condiciones expuestas en el capítulo 4, una desproporción mayor implicaría que el postesado en una dirección no fuese necesario, al menos para el equilibrio directo de los momentos flectores.

Nuevamente, para mantener la estructura expositiva seguida en los casos anteriores, se traslada el contenido a la siguiente página.



8.3.1 Definición del problema

Así, en este tercer problema se propone el análisis de una placa de 14 metros en la dirección X y 12 metros en la dirección Y, soportada sobre cuatro pilares, según se puede reconocer en la imagen posterior. Se propone, pues, que la dirección principal se corresponda con de luz menor, como sería más común en la práctica profesional.

Las características generales del problema son, en este caso, las siguientes:

- Espesor de losa $\rightarrow H = 36,50 \text{ cm}$
- Peso propio $9,13 \text{ kN/m}^2$
- Carga permanente $2,50 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga $3,50 \text{ kN/m}^2$

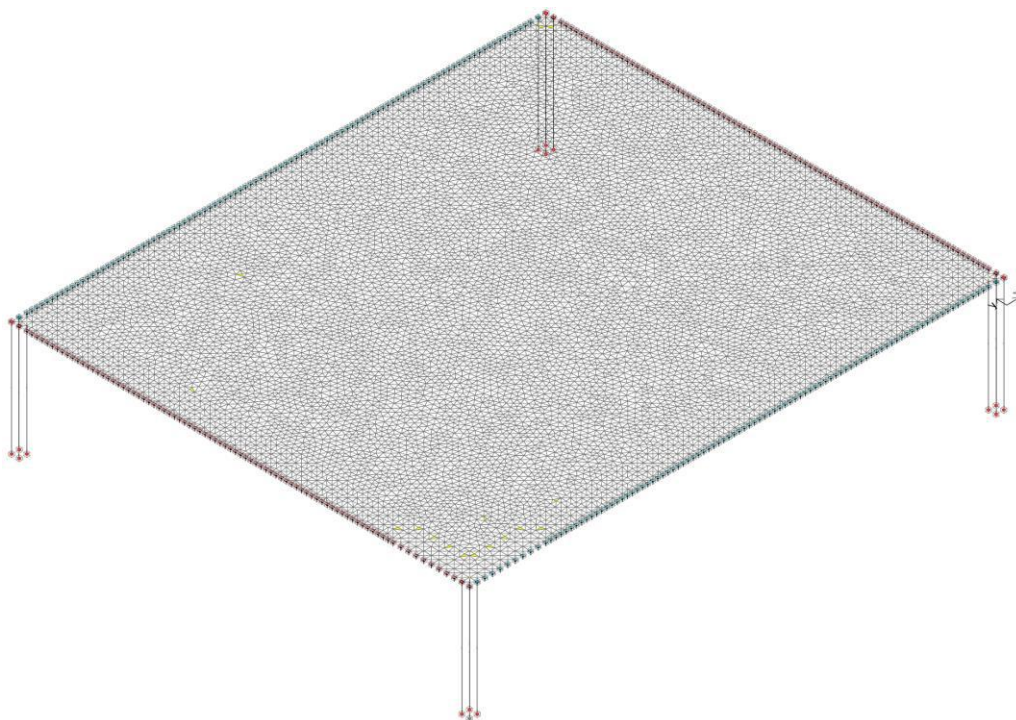


Figura 8-98. Perspectiva del problema de placa de 12x14m

Los soportes presentan una sección de 40x40cm y una altura de 3,00 m.

8.3.2 Condiciones de contorno y características de la malla de elementos finitos adoptada

La malla para discretizar el problema mediante elementos finitos y las condiciones de contorno adoptadas siguen una vez más los criterios antes establecidos. La perspectiva general, recogida en la figura anterior, permite también reconocer la organización geométrica general del problema. Siguiendo los criterios de diseño habituales, se ha hecho coincidir la armadura activa principal con la luz menor del problema.

8.3.3 Resultados generales en régimen elástico

8.3.3.1 La armadura activa

Como ha queda ya ampliamente comentado, la definición de la armadura resulta determinante. En este caso, al no haber sido tratado este problema con anterioridad, se detallan por primera vez en lo que sigue los resultados obtenidos en el cálculo de dicha armadura.

Fuerzas de tesado, evolución en el tiempo de las fuerzas y trazados

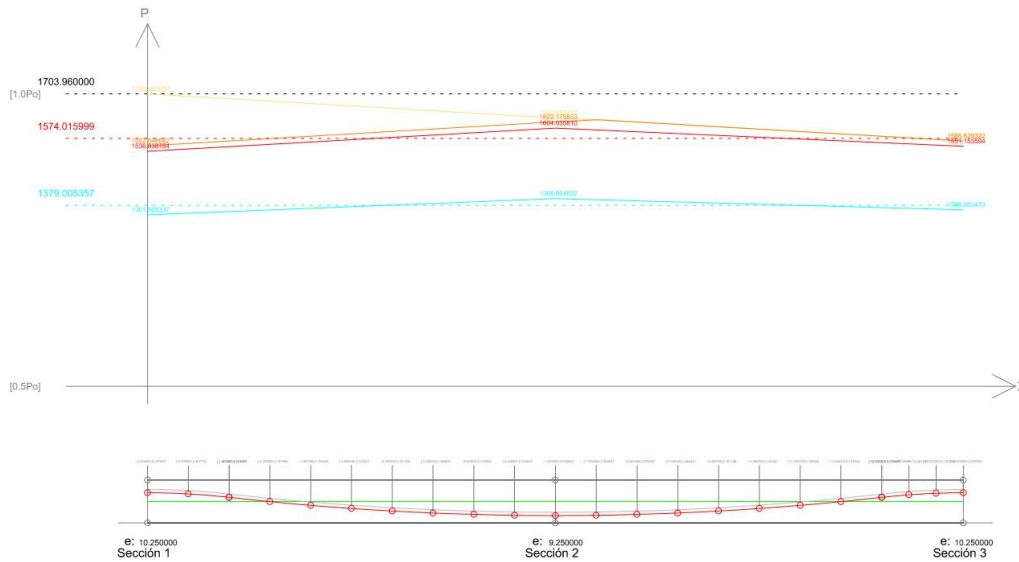


Figura 8-99. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 12x14m

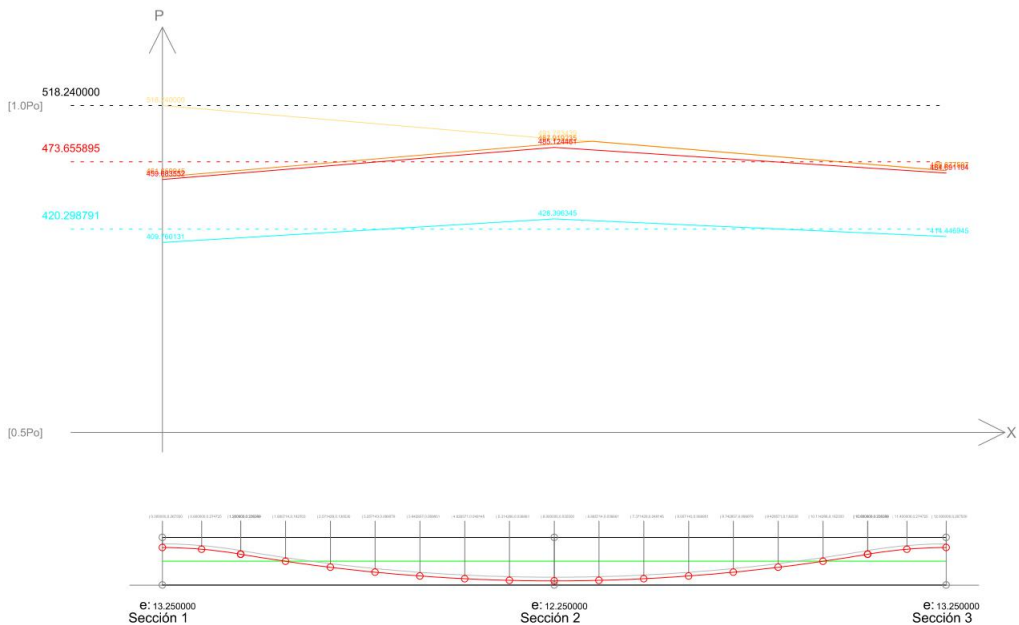


Figura 8-100. Diagrama de pérdidas de tesado y trazado de la armadura activa en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 12x14m

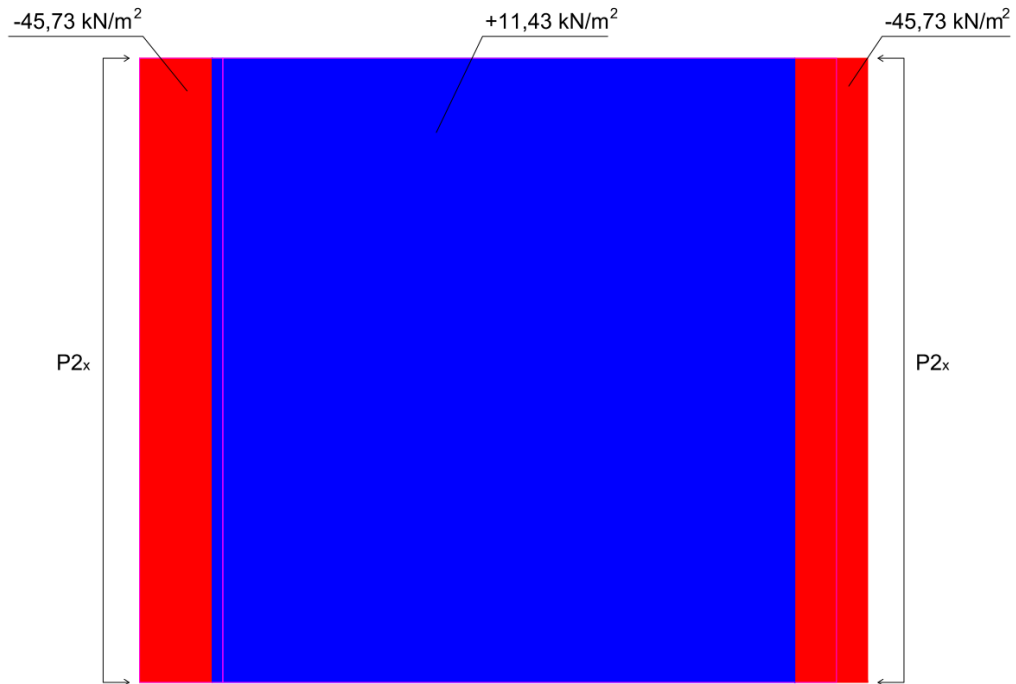
Sistema de fuerzas equivalentes

Figura 8-101. Cargas equivalentes en la en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 12x14m

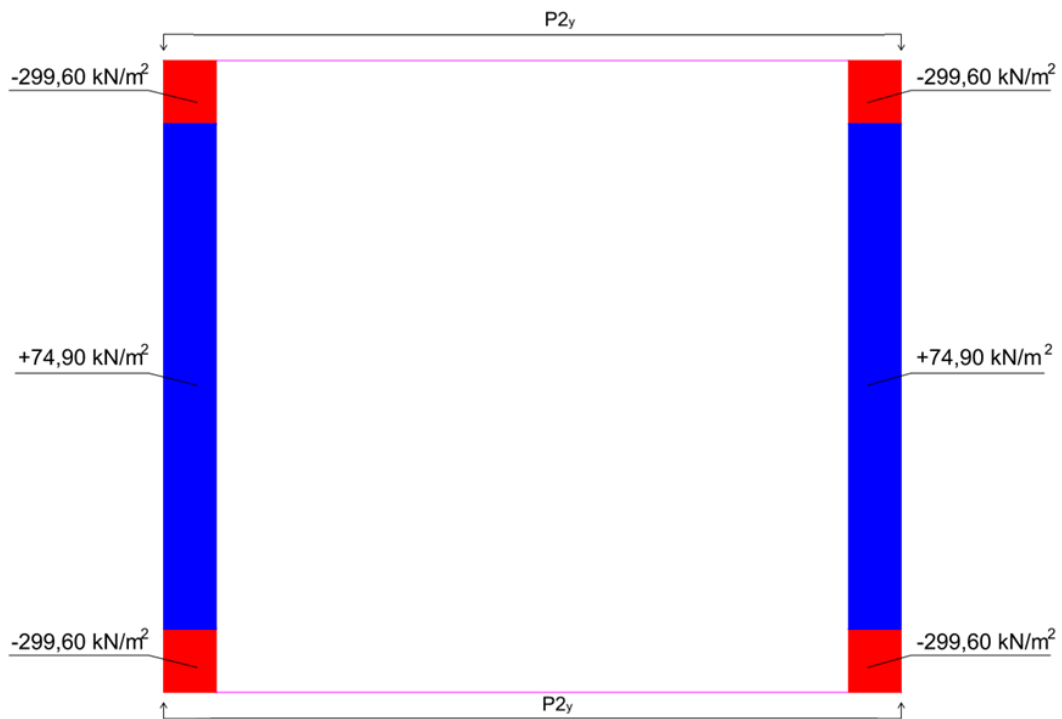


Figura 8-102. Cargas equivalentes en la en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 12x14m

Con respecto a los resultados obtenidos para la armadura activa, debe subrayarse que, aun manteniéndose de alguna forma la envergadura media del problema, los efectos de la descompensación se hacen patentes en el diseño de la armadura activa. Así, en comparación con la placa de 12x12, mientras que la fuerza de tesado en la dirección secundaria se ve incrementada del orden de un 23%, la fuerza de tesado en la dirección principal, donde la relación canto luz resulta más favorable, la fuerza de tesado se ve reducida un 11%.

8.3.3.2 Deformaciones

Análogamente a lo realizado en los casos previos, en las imágenes que prosiguen se detallan las deformaciones de placa obtenidas amplificándolas en todos los casos 100 veces.

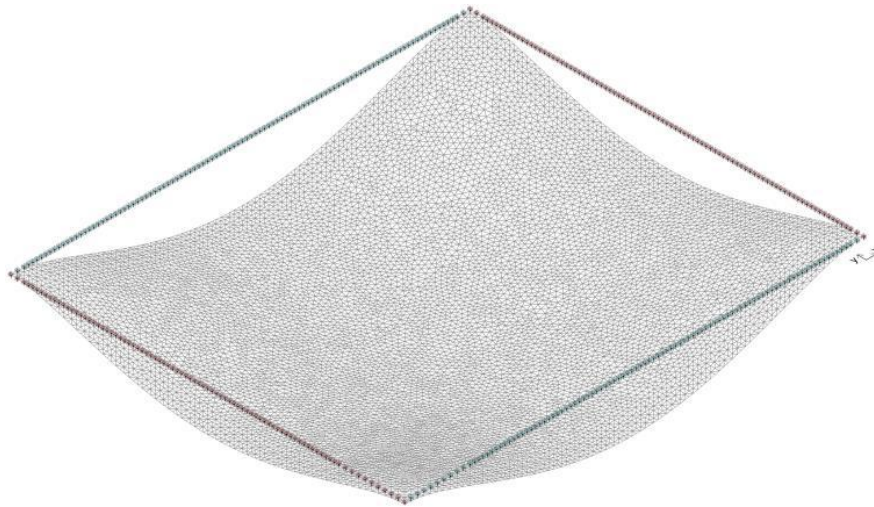


Figura 8-103. Deformación elástica relativa a la aplicación de todas las cargas gravitatorias (Sin incluir el efecto del postesado) en el problema de 12x14m

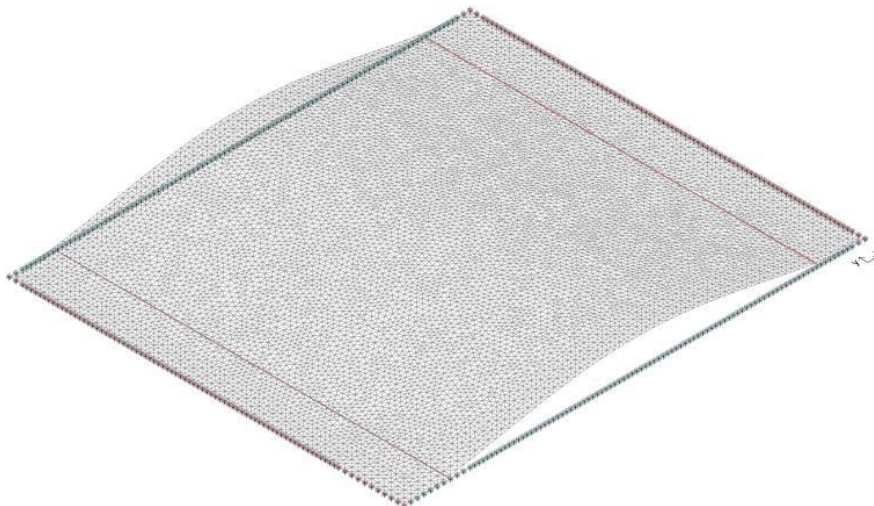


Figura 8-104. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección X (Banda secundaria) en el problema de 12x14m

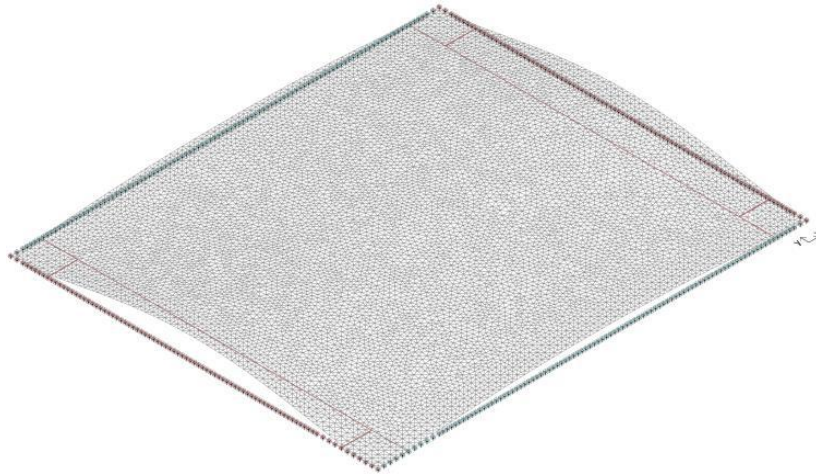


Figura 8-105. Deformación elástica debida a la acción de los cables de postesado en la dirección Y (Banda principal) en el problema de 12x14m

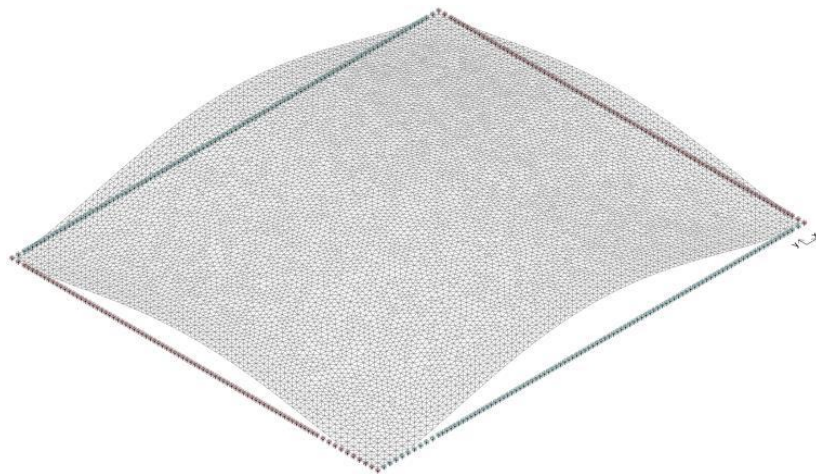


Figura 8-106. Deformación elástica debida a la acción conjunta de las dos bandas de postesado, en el problema de 12x14m

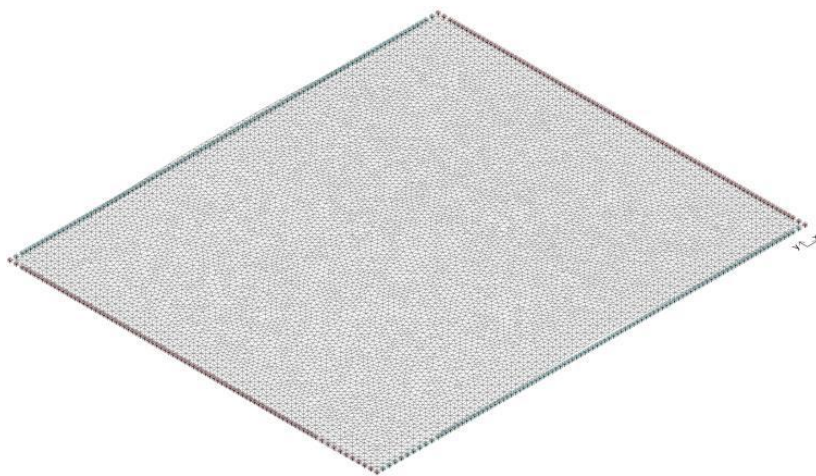


Figura 8-107. Deformación elástica (x100) en Situación de vacío (cargas permanentes + postesado) en el problema de 12x14m

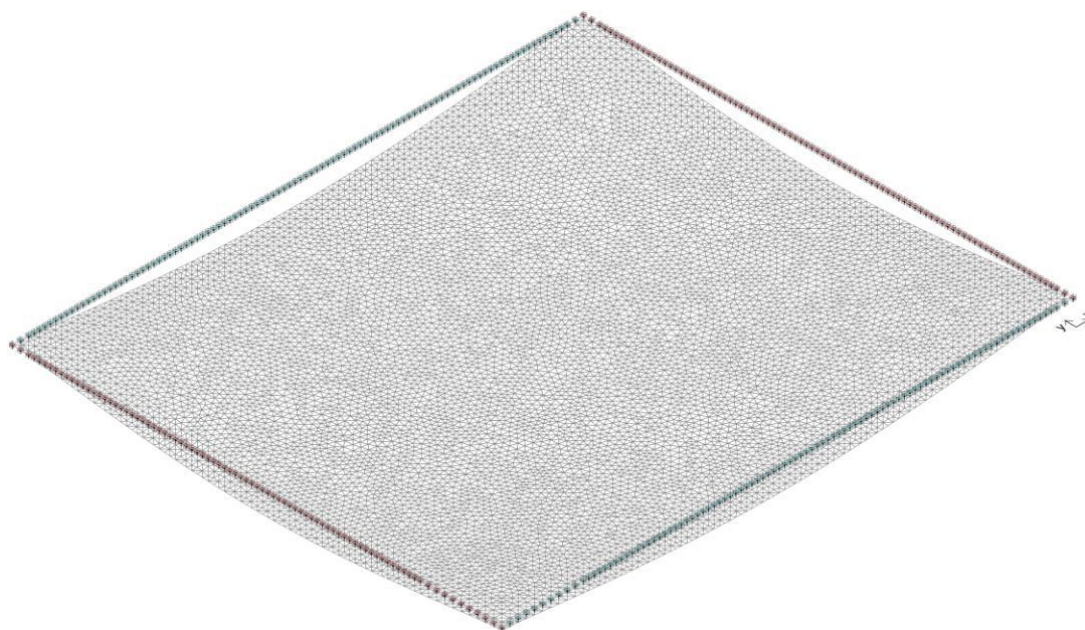


Figura 8-108. Deformación elástica en el Estado Límite de Servicio, teniendo en cuenta todas las acciones gravitatorias inerciales y todas las acciones del postesado (ELS) en el problema de 12x14m

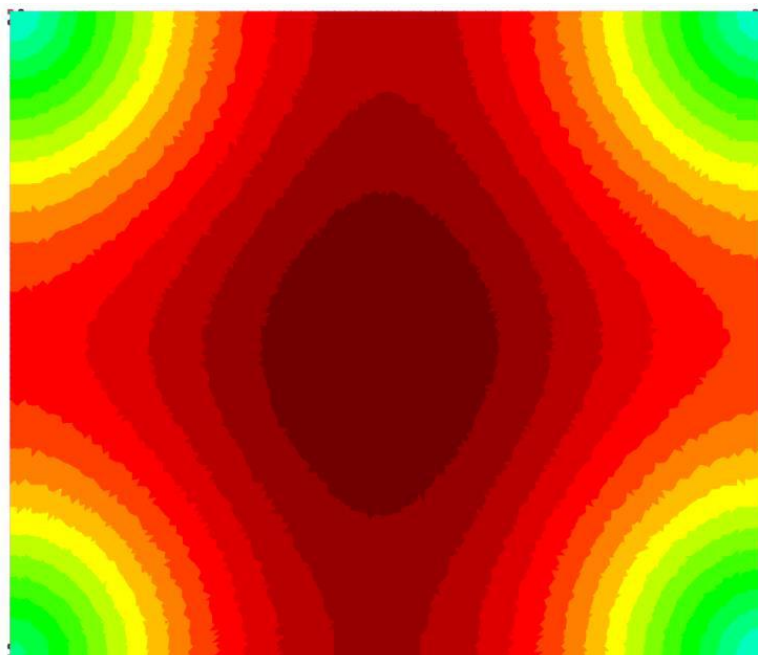


Figura 8-109. Diagrama de niveles de flecha en el ELS en el problema de 16x16m

$$f_{\text{máx inst}} = 6,88 \text{ mm} \rightarrow L_y/1744; L_x/2034$$

8.3.3.3 Esfuerzos

Salvando las correcciones de los efectos del postesado, incluidas según se expone en el capítulo quinto, el análisis de los esfuerzos en el Estado Límite Último (ELU), vuelve a realizarse en base a la siguiente combinación de cargas:

$$\begin{aligned}
 &1,35 \cdot (\text{Peso Propio}) + \\
 &1,35 \cdot (\text{Cargas Permanentes}) + \\
 &1,50 \cdot (\text{Sobrecarga}) + \\
 &1,00 \cdot (\text{Postesado})
 \end{aligned}$$

De esta forma los esfuerzos de placa delgada obtenidos – M_x , M_y y M_{xy} – son los que se muestran a continuación.

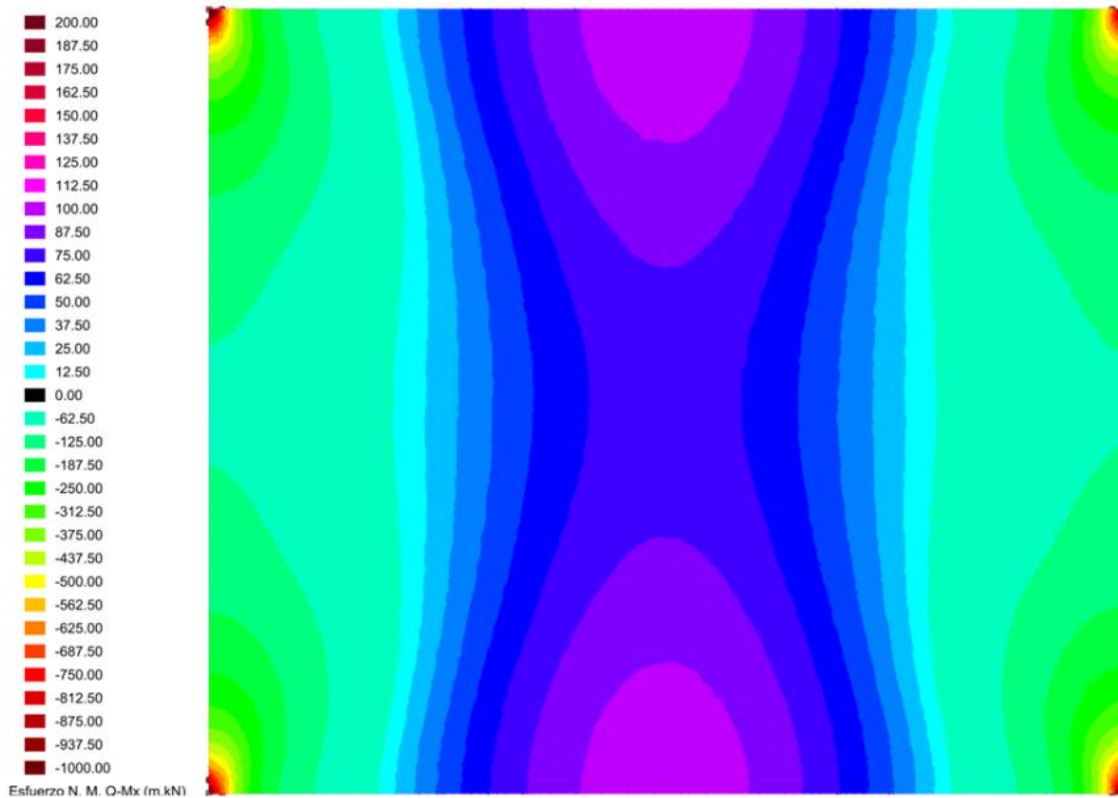


Figura 8-110. Diagrama M_x . Momento flector actuante en la dirección X. Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 12x14m

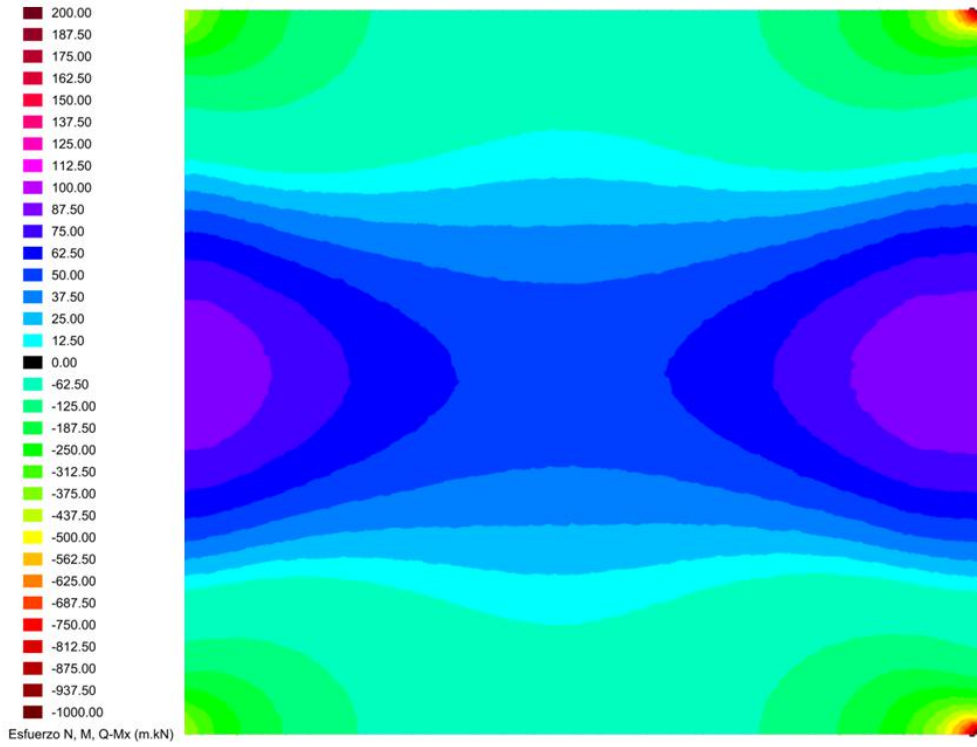


Figura 8-111. Diagrama M_y . Momento flector actuante en la dirección Y. Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 12x14m

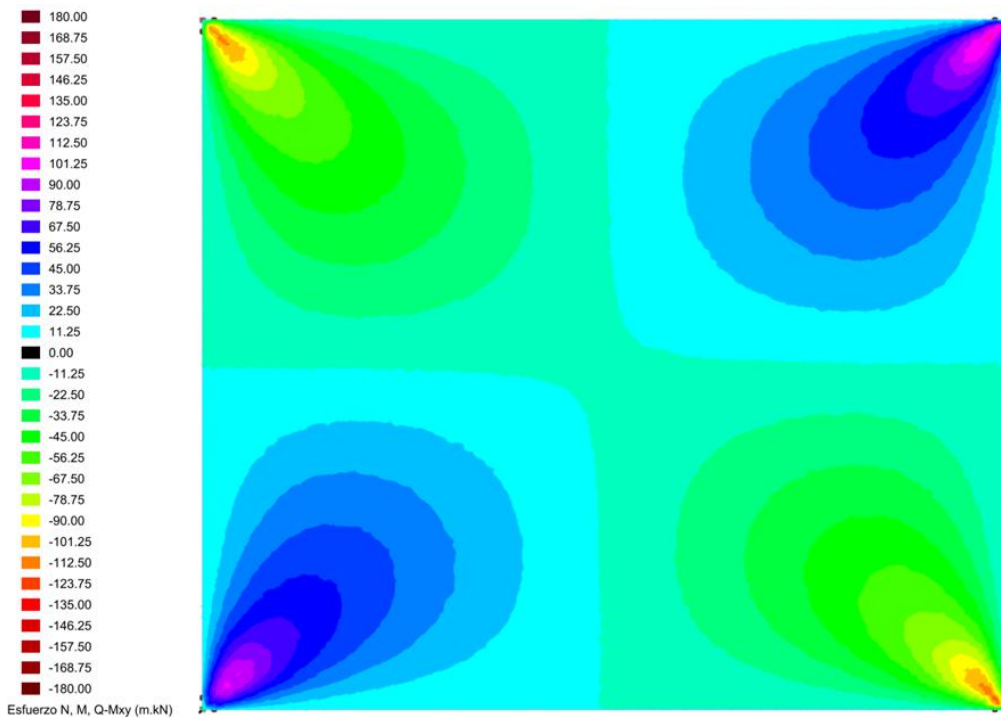


Figura 8-112. Diagrama de Momentos Torsores, M_{xy} . Análisis en régimen elástico (ELU) en el problema de 12x14m

8.3.4 Estudio del refuerzo superior pasivo

Bajo los criterios expuestos en casos precedentes la serie de refuerzo analizada, yendo de mayor a menor cantidad de refuerzo, es en este caso la que sigue:

- 1Φ25c/20
- 1Φ20c/15
- 1Φ20c/20
- 1Φ16c/15
- 1Φ16c/20
- 1Φ12c/15

8.3.4.1 Relaciones Momento-Curvatura (M-Γ)

Seguidamente se detallan la relación entre momento y curvatura, para diferentes opciones de refuerzo en cada una de las direcciones principales de cálculo en base a la armadura activa obtenida en el análisis de la situación de servicio:

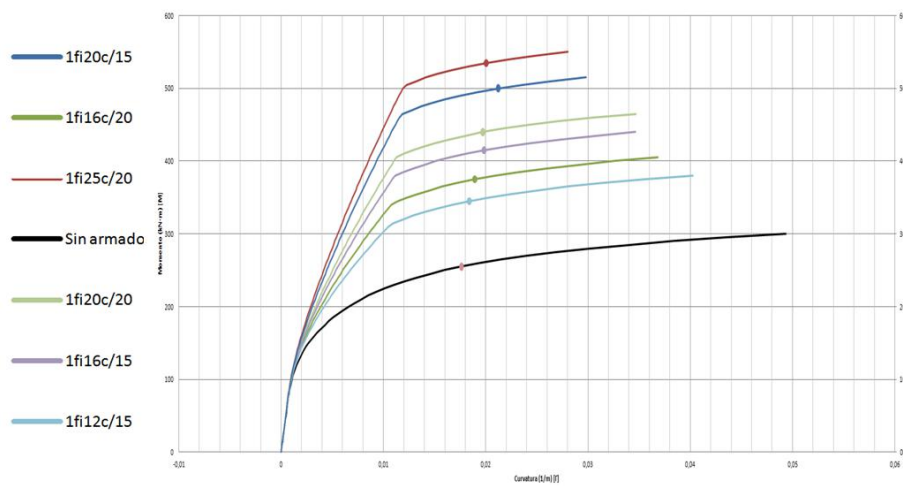


Figura 8-113. Relación M-Γ en la dirección X para diferentes opciones de refuerzo en el problema de 12x14m

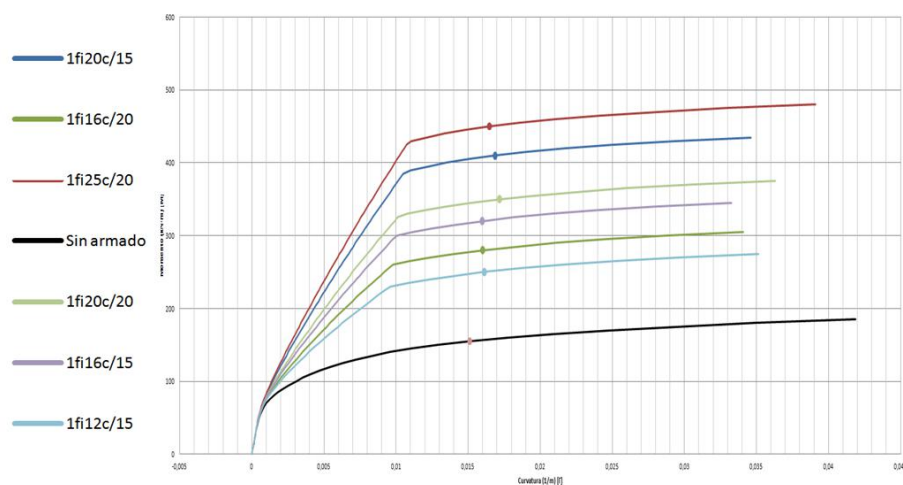


Figura 8-114. Relación M-Γ en la dirección Y para diferentes opciones de refuerzo en el problema de 12x14m

Las curvas de los coeficientes degradación de flexión - D00 y D11 - de la matriz de elasticidad resultan en este caso con la siguiente forma:

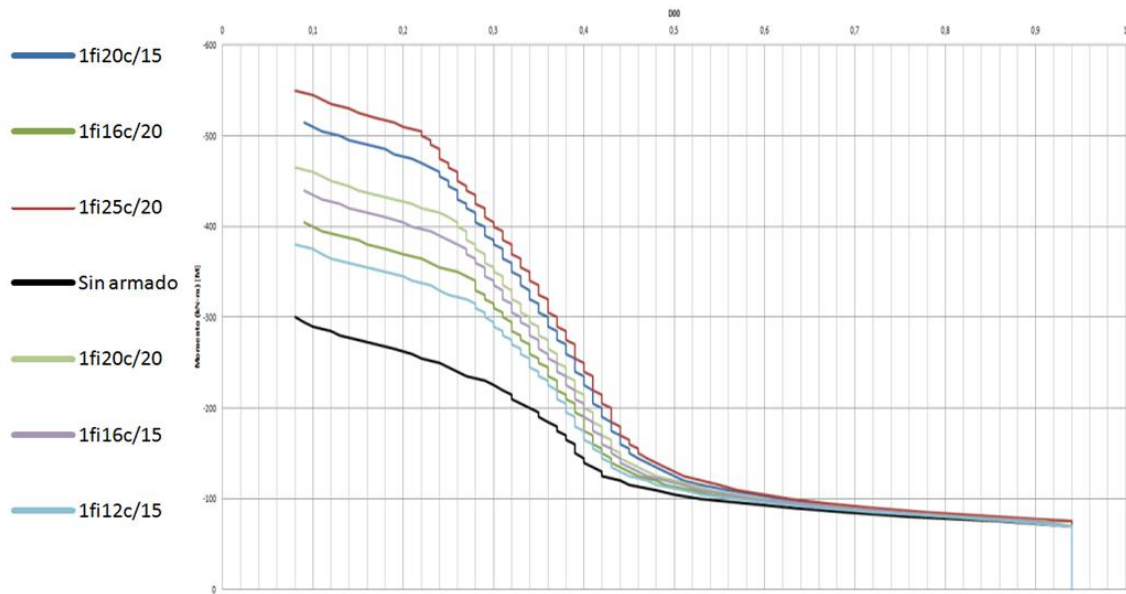


Figura 8-115. Degradación en la dirección X del término D00 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 12x14m

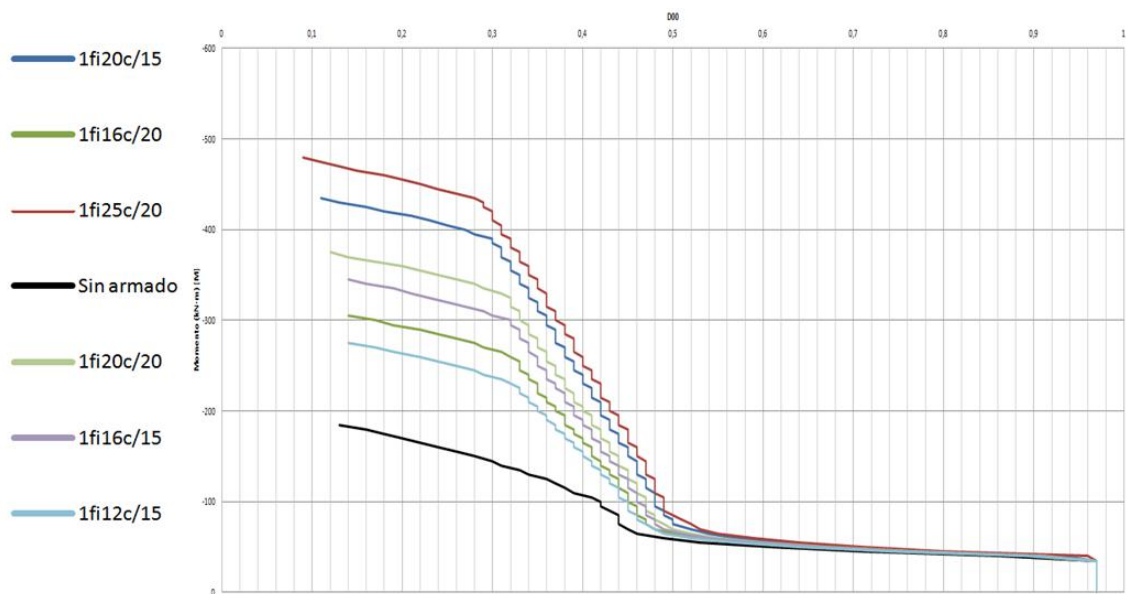


Figura 8-116. Degradación en la dirección Y del término D11 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 12x14m

Mientras que las curvas de degradación del término de torsión - D22 - de la matriz de elasticidad resultan de la siguiente forma:

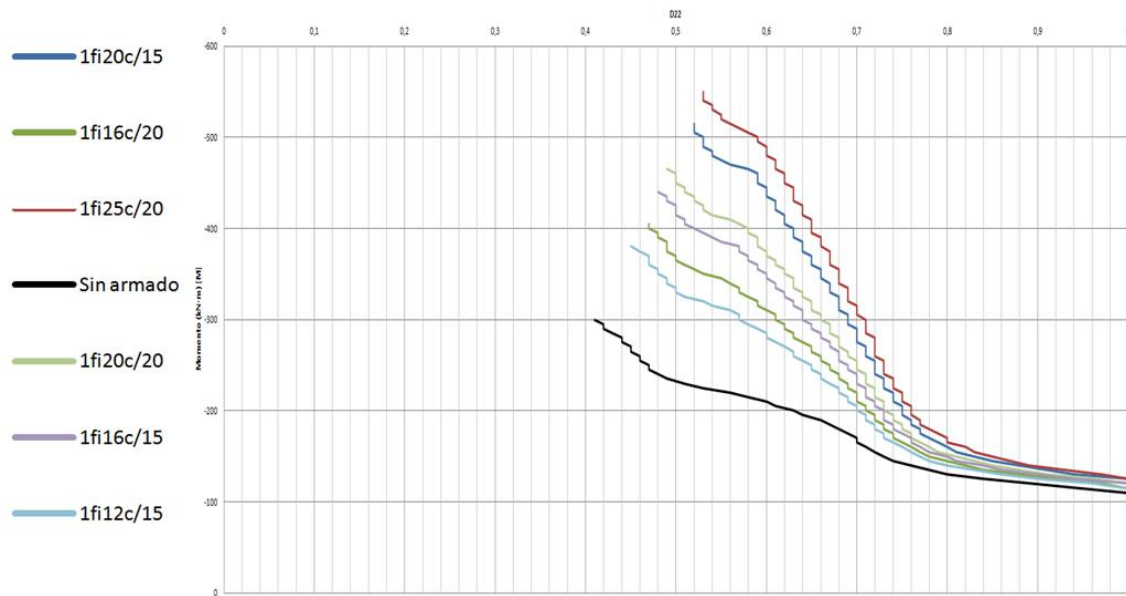


Figura 8-117. Degradación en la dirección X del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 12x14m

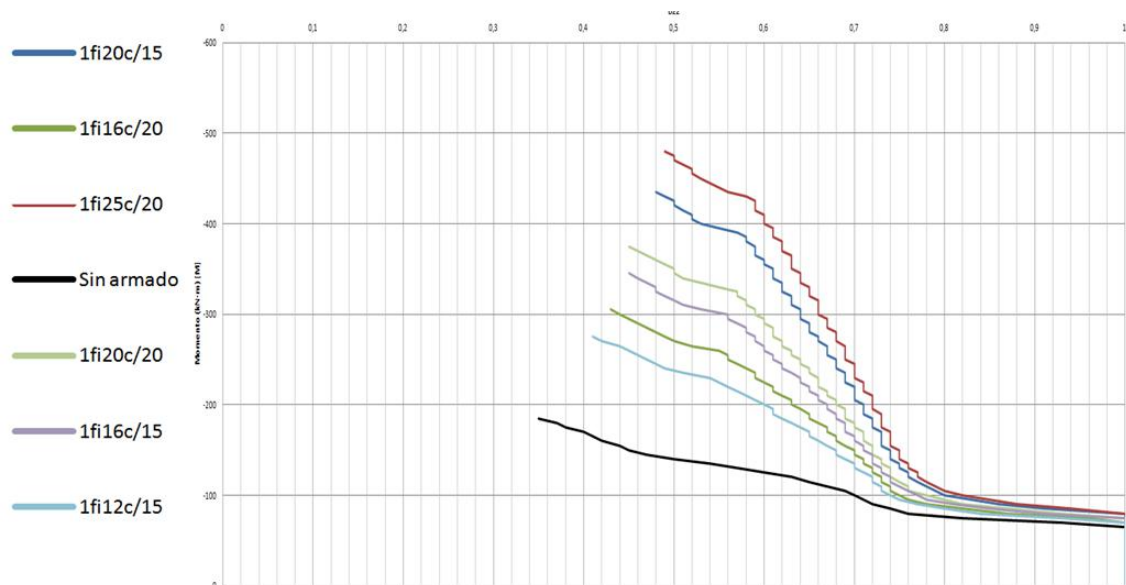


Figura 8-118. Degradación en la dirección Y del término D22 en función del momento flector actuante, para diferentes niveles de refuerzo en el problema de 12x14m

Cabe recordar aquí nuevamente que el coeficiente D22 elegido en cada punto de la placa debe ser el menor de los dos obtenidos en cada dirección, en función del valor de los dos momentos flectores actuantes, M_x y M_y o, si se quiere, en función de las respectivas curvaturas.

8.3.5 Resultados del estudio de las opciones de refuerzo

8.3.5.1 Resultados derivados del análisis en régimen elástico

Se exponen primeramente los resultados de los refuerzos obtenidos del análisis en régimen elástico para los diferentes anchos de integración en la forma seguida en los casos precedentes.

PLACA 12X14m ; h=36.50 cm							
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO SOBRE LOS SOPORTES PARTIENDO DEL REFUERZO SEGÚN EL ANÁLISIS EN RÉGIMEN ELÁSTICO							
RÉGIMEN ELÁSTICO							
- Cálculo de esfuerzos en régimen elástico							
- Cálculo de armadura pasiva superior necesaria con degradación de la sección hasta plastificación de la armadura activa							
	Ancho de integración (m)		Mmáx-punta (kN-m)	Minteg (kN-m/ml)	Área armadura necesaria (cm ² /ml)		Área armadura dispuesta (cm ²)
BANDA SECUNDARIA X	1.5h + B/2	0,7475 (L/18,7)	-973,44	-634,821	15,00	1Φ25c/15	5Φ25
					25,00	32,72	24,54
	2.0h + B/2	0,93 (L/15,1)		-581,286	12,50	1Φ20c/12,5	8Φ20
					20,00	25,13	25,13
	3.0h + B/2	1,295 (L/10,8)		-499,551	15,00	1Φ20c/15	9Φ20
					20,00	20,94	28,27
4.5h + B/2	1,8425 (L/7,6)	-416,275	15,00	1Φ16c/15	13Φ16		
			16,00	13,40	26,14		
6.0h + B/2	2,39 (L/5,9)	-358,734	12,50	1Φ12c/12,5	20Φ12		
8.0h + B/2	3,12 (L/4,5)	-304,151	12,00	9,05	22,62		
			17,50	1Φ12c/17,5	18Φ12		
			12,00	6,46	20,36		
	BANDA PRINCIPAL Y	1.5h + B/2	0,7475 (L/16,1)	-958,92	-620,637	12,00	1Φ25c/12
25,00						40,91	34,36
2.0h + B/2		0,93 (L/12,9)	-567,224		14,00	1Φ25c/14	7Φ25
					25,00	35,06	34,36
3.0h + B/2		1,295 (L/9,3)	-485,515		18,00	1Φ25c/18	8Φ25
					25,00	27,27	39,27
4.5h + B/2	1,8425 (L/6,5)	-401,119	15,00	1Φ20c/15	13Φ20		
			20,00	20,94	40,84		
6.0h + B/2	2,39 (L/5)	-342,068	20,00	1Φ20c/20	12Φ20		
			20,00	15,71	37,70		
8.0h + B/2	3,12 (L/3,8)	-285,554	17,50	1Φ16c/17,5	18Φ16		
			16,00	11,49	36,19		

Figura 8-119. Resultados derivados del análisis en régimen elástico en el problema de 12x14m

8.3.5.2 Resultados derivados del análisis en régimen post-elástico

Se exponen ahora los resultados de los refuerzos obtenidos en el análisis en régimen no lineal, siguiendo nuevamente la misma forma de exposición. No obstante, cabe destacar previamente que, en este caso, la cantidad de armadura correspondiente a cada opción de refuerzo analizada resulta diferente en las direcciones X e Y, debido a la descompensación geométrica del problema.

PLACA 12X14m ; h=36.50 cm											
RESULTADOS DE ARMADO PASIVO SOBRE LOS SOPORTES PROPUESTO											
Banda	Armado propuesto cm2/ml	Ancho de integración mínimo (cm)	Mrot (kN-m/ml)	Mplast (kN-m/ml)	Mmáx-punta (kN-m/ml)	Minteg (kN-m/ml)	STATUS	Mrot/Mmáx Mplast/Minteg	Armado dispuesto cm2	Observaciones	
X	20,00	1Φ25c/20	100	-550	-535	-642,53	-422,57	OK*	0,86 ; 1,27	5Φ25 24,54	Mrot < Mmáx-punta
	25,00	24,54	(L/10 ; 0,2 + 2,19h)								
Y	15,00	1Φ25c/15	185	-565	-545	-587,45	-329	OK*	0,96 ; 1,66	13Φ25 63,81	Mrot < Mmáx-punta
	25,00	32,72	(L/8,1 ; 0,2 + 4,52h)								
X	15,00	1Φ20c/15	100	-500	-515	-580,69	-415	OK*	0,86 ; 1,24	7Φ20 21,99	Mrot < Mmáx-punta
	20,00	20,94	(L/10 ; 0,2 + 2,19h)								
Y	15,00	1Φ25c/15	180	-565	-545	-587,15	-333,27	OK*	0,96 ; 1,64	12Φ25 58,9	Mrot < Mmáx-punta
	25,00	32,72	(L/8,3 ; 0,2 + 4,38h)								
X	20,00	1Φ20c/20	100	-465	-440	-548,91	-389,94	OK*	0,85 ; 1,13	5Φ20 15,71	Mrot < Mmáx-punta
	20,00	15,71	(L/10 ; 0,2 + 2,19h)								
Y	15,00	1Φ20c/15	180	-435	-410	-684,3	-318,15	OK*	0,64 ; 1,29	12Φ20 37,7	Mrot < Mmáx-punta
	20,00	20,94	(L/8,3 ; 0,2 + 4,38h)								
X	15,00	1Φ16c/15	100	-440	-415	-545	-391,16	OK*	0,81 ; 1,06	7Φ16 14,07	Mrot < Mmáx-punta
	16,00	13,40	(L/10 ; 0,2 + 2,19h)								
Y	15,00	1Φ20c/15	180	-435	-410	-678	-318,91	OK*	0,64 ; 1,29	12Φ20 37,7	Mrot < Mmáx-punta
	20,00	20,94	(L/8,3 ; 0,2 + 4,38h)								
X	20,00	1Φ16c/20	100	-405	-375	-590,29	-381,66	KO	0,69 ; 0,98	5Φ16 10,05	Minteg < Mplast
	16,00	10,05	(L/10 ; 0,2 + 2,19h)								
Y	20,00	1Φ20c/20	180	-375	-350	-697,62	-316,21	OK*	0,54 ; 1,11	9Φ20 28,27	Mrot < Mmáx-punta
	20,00	15,71	(L/8,3 ; 0,2 + 4,38h)								
X	15,00	1Φ12c/15	80	-380	-345	-625,92	-413,56	KO	0,61 ; 0,83	6Φ12 6,79	Minteg < Mplast
	12,00	7,54	(L/12,5 ; 0,2 + 1,64h)								
Y	15,00	1Φ16c/15	180	-345	-320	-709,84	-313,54	OK*	0,49 ; 1,02	12Φ16 24,13	Mrot < Mmáx-punta
	16,00	13,40	(L/8,3 ; 0,2 + 4,38h)								

Figura 8-120. Resultados derivados del análisis en régimen post-elástico en el problema de 12x14m

En los resultados obtenidos se observa que en ninguna de las combinaciones de refuerzo se ha conseguido que el momento punta ($M_{\max,punta}$) sea inferior al momento de rotura (M_{rot}) en el vértice del problema. Aun así, teniendo en cuenta que la valoración de esta condición queda basada en el valor concreto de un nodo de contorno de un elemento finito triangular, en el que es más discutible la precisión, y dado el incremento del brazo mecánico que normalmente se da en ese nudo cuando la unión entre losa y pilar es rígida (ver explicación en el apartado 8.1.5.1), se propone escoger un refuerzo para el que la relación entre el momento de plastificación de la zona reforzada y el momento de integración, presente una relación parecida a los casos de refuerzo de los ejemplos anteriores de placas cuadradas que se han considerado como óptimos.

Bajo el criterio anterior, el refuerzo "óptimo" finalmente se correspondería a una barra de 20mm de diámetro dispuesta cada 20 cm, distribuida en un ancho total de 100 cm, para la dirección X, y a una barra de 20mm de diámetro dispuesta cada 15 cm, distribuida en un ancho total de 180 cm, para la dirección Y. Estas cadencias de refuerzo se corresponden con la disposición de 5 barras de diámetro 20 mm en la dirección X, y 12 barras de diámetro 20 mm en la dirección Y.

Si se comparan los resultados con los obtenidos en los anchos de integración más próximos y creíbles en cada dirección en el cálculo convencional, se constata que el ahorro de armadura pasiva en la dirección secundaria (X) queda en el entorno del 40%, mientras que en la dirección primaria (Y) el ahorro es muy escaso. Esto sí que supone una diferencia sustancial con los casos anteriores, aunque resulta lógico: solo se obtiene ahorro en la dirección más solicitada, la cual, al mantenerse la relación canto-luz en toda la placa, es la mayor.



8.3.5.3 Resultados en el comportamiento mecánico. Comparativa

Primeramente, se analiza la variación del momento flector, en cada dirección, al compararla con la del análisis lineal. Así, en el conjunto de imágenes que siguen se muestran los momentos flectores M_y (dirección secundaria) y M_x (dirección principal), como antes, primero, calculados en régimen lineal y, segundo, en régimen no lineal.

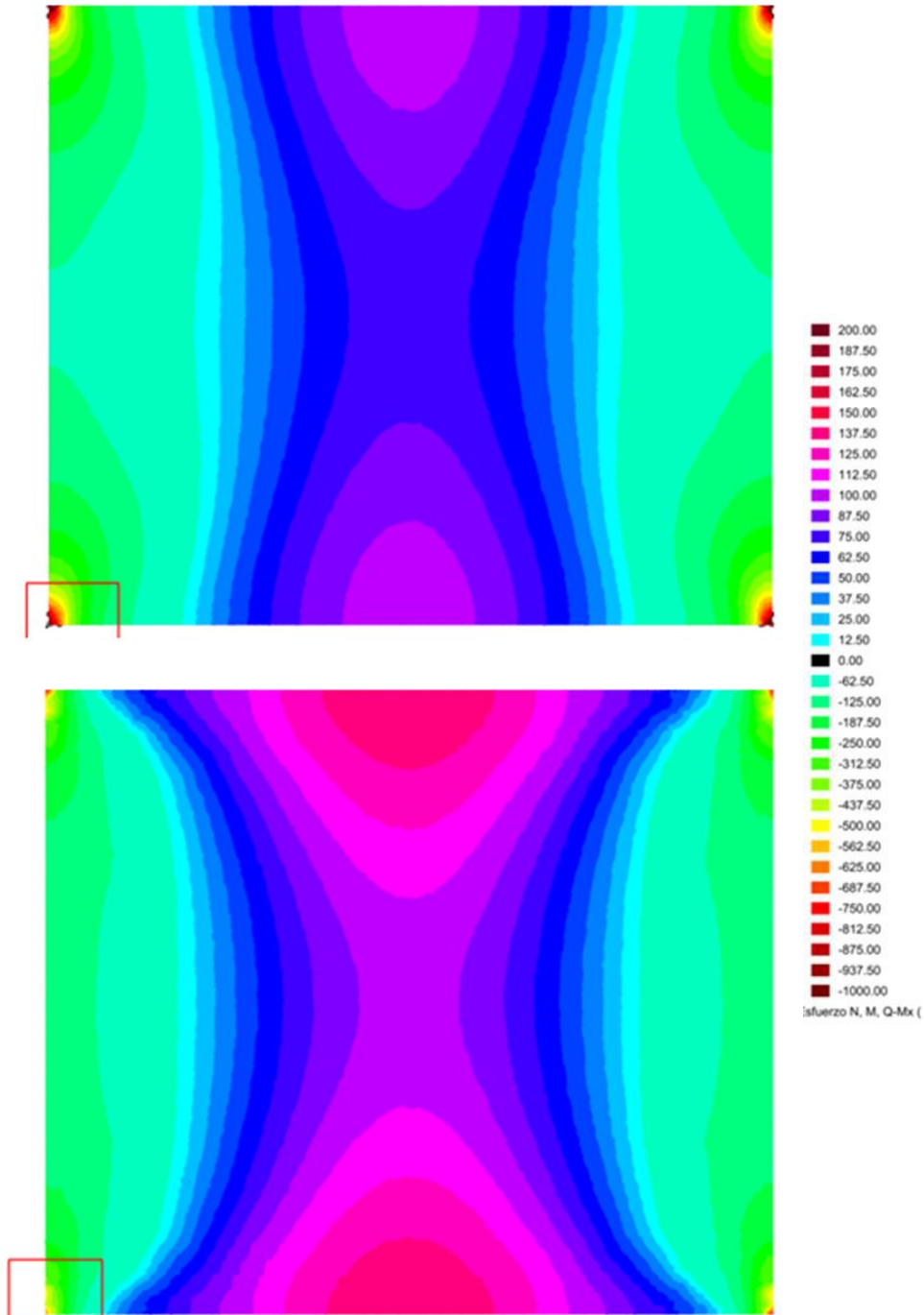


Figura 8-121. Comparativa de los momentos flectores M_x obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de $12 \times 14 \text{m}$

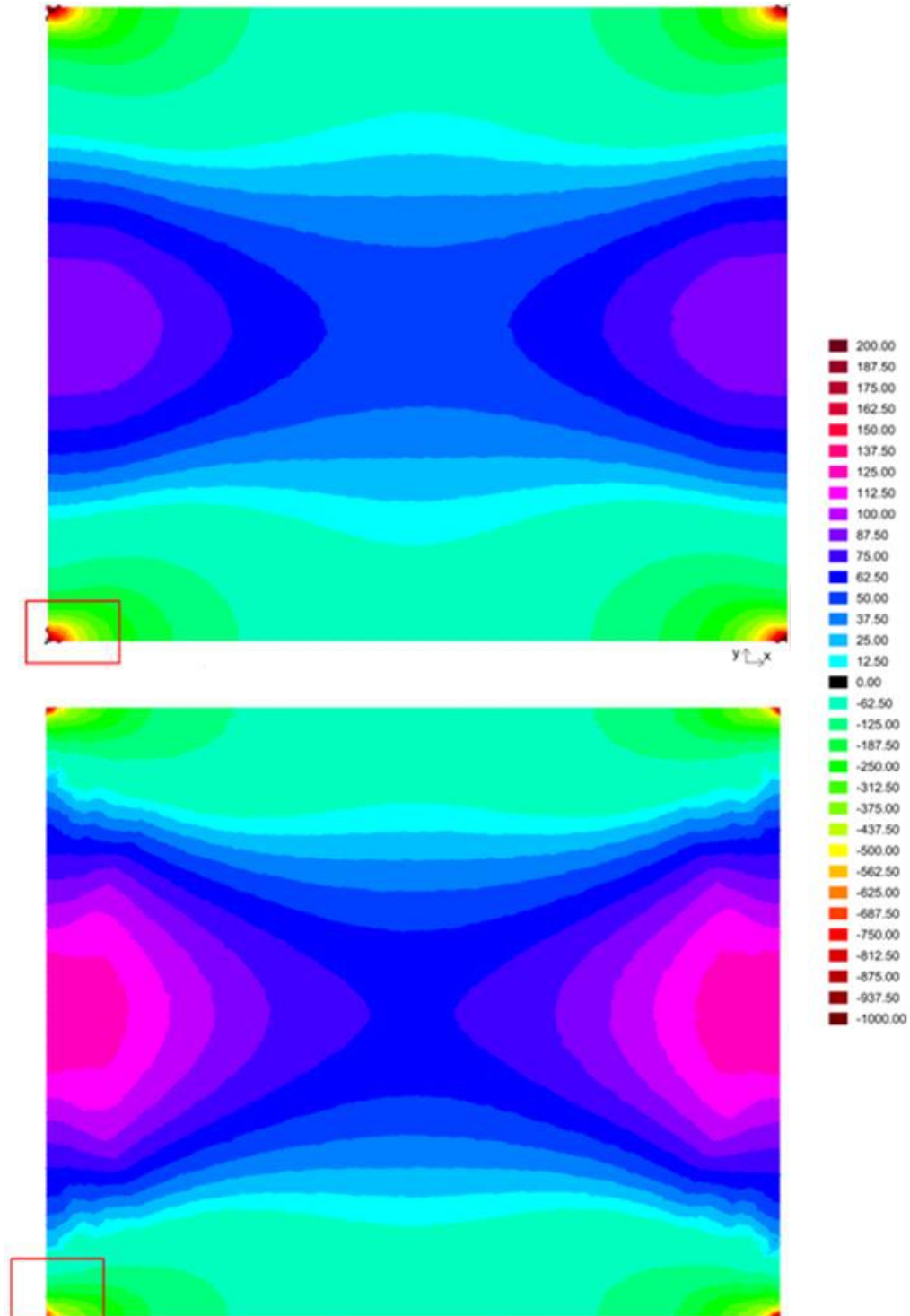


Figura 8-122. Comparativa de los momentos flectores M_y obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de 12x14m

Una vez más, el incremento de momento positivo es perfectamente equilibrado por la armadura existente en las respectivas secciones centrales, sin que se requieran refuerzos adicionales.

En cuanto a los coeficientes de degradación frente a la flexión - D00 y D11 - al final del análisis no lineal para los refuerzos consignados como óptimos se obtiene la siguiente distribución:

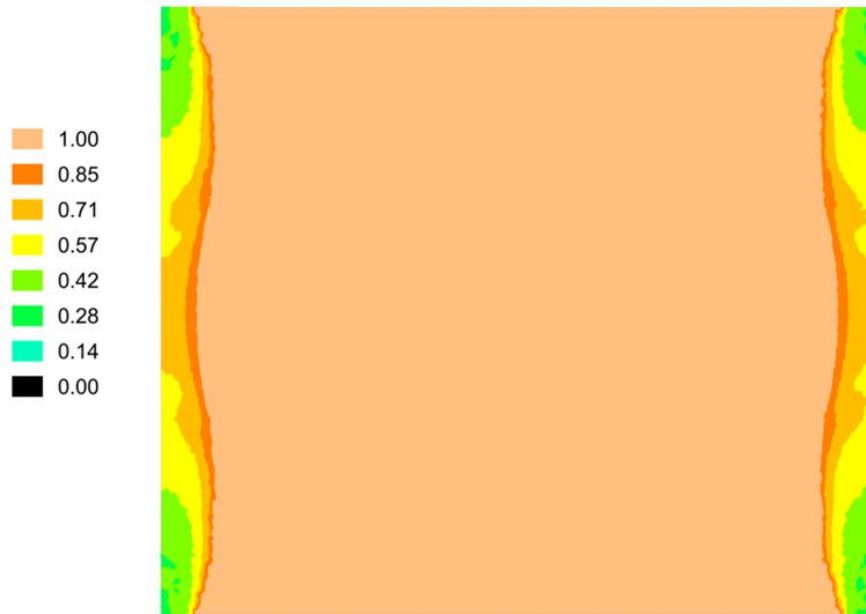


Figura 8-123. Variación de D00 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de $12 \times 14m$

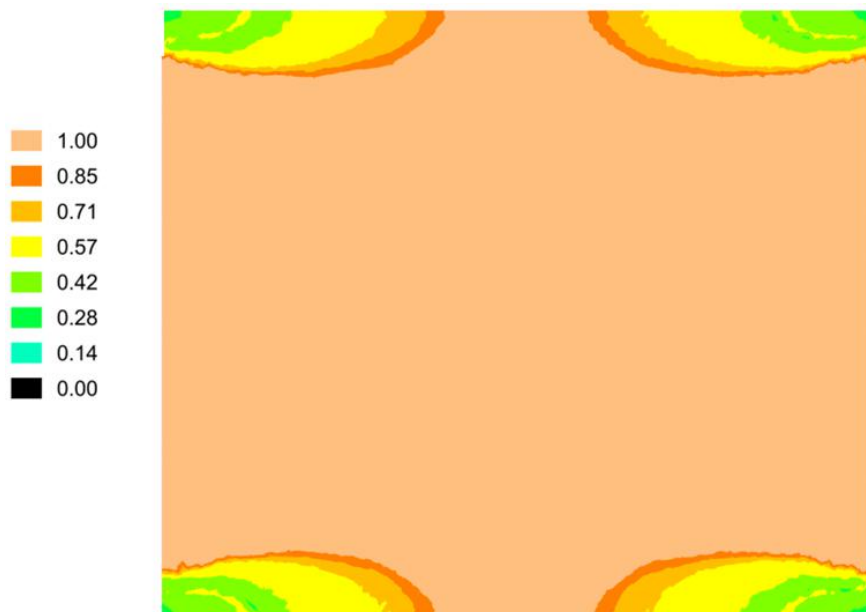


Figura 8-124. Variación de D11 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de $12 \times 14m$

No parecen identificarse diferencias substanciales en cuanto a la evolución de los coeficientes D00 y D11, aunque sí que parece que la charnela sobre la banda principal se hace más clara y que la disminución D11 presenta una distribución algo más en forma de almendra.

En cuanto a la distribución de los momentos torsores, M_{xy} , la variación queda como sigue.

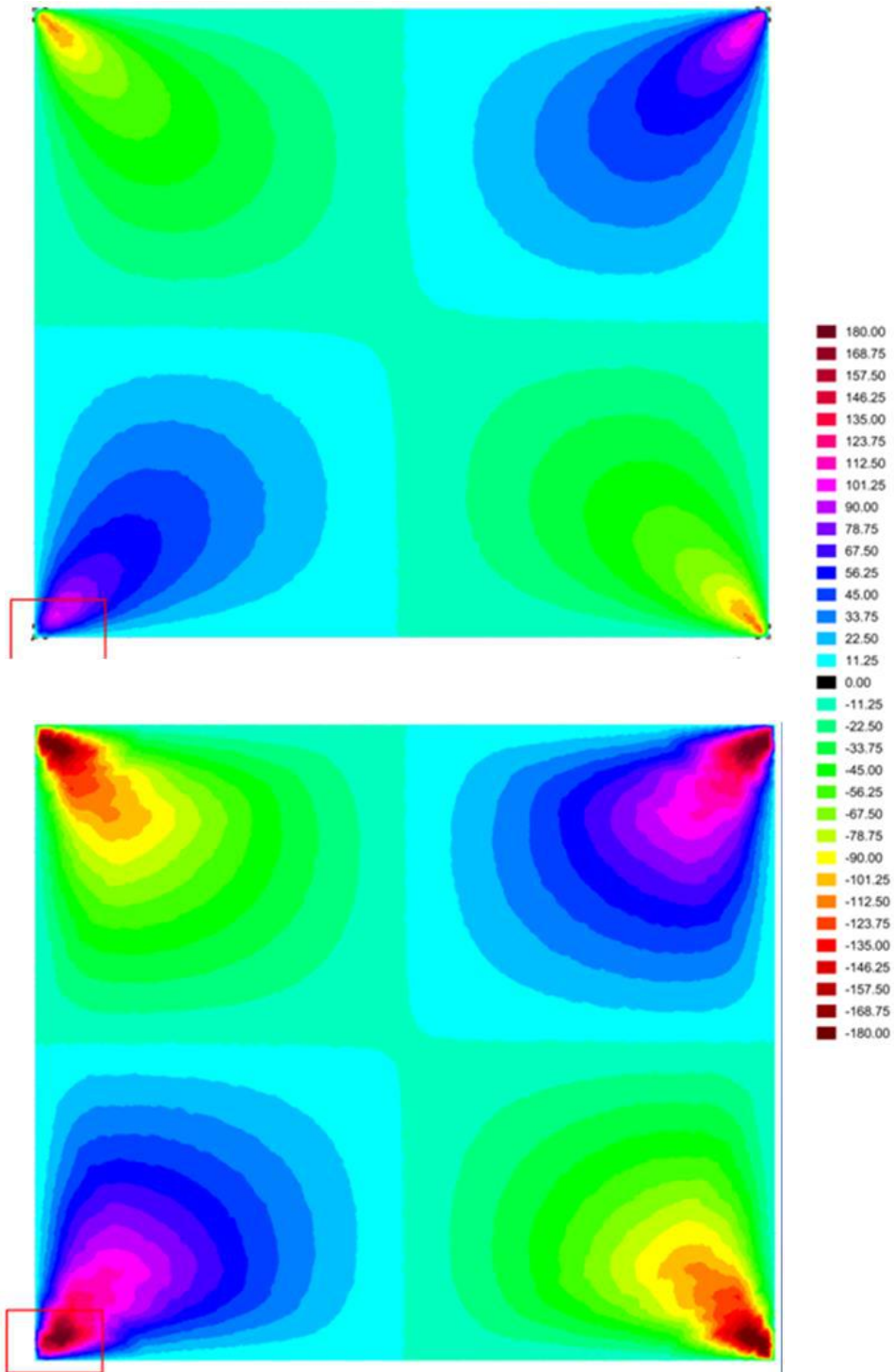


Figura 8-125. Comparativa de los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de $12 \times 14m$

La evolución del coeficiente de degradación D22 del momento torsor queda ilustrada en la siguiente imagen.



Figura 8-126. Variación de D22 tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$ en el problema de $12 \times 14m$

Aunque tampoco se identifican grandes diferencias en todo lo referente a la torsión de placa, se muestran también seguidamente la evolución de las tensiones principales.

Nuevamente se expone primeramente la evolución de las tensiones normales en la cara superior de la losa y, posteriormente, el análisis de la evolución de las tensiones normales en la cara inferior de la losa.

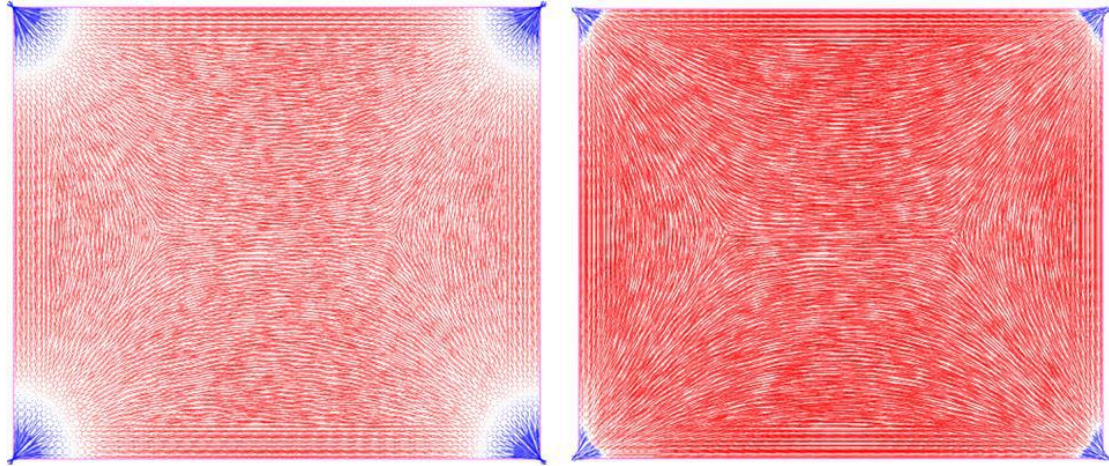


Figura 8-127. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

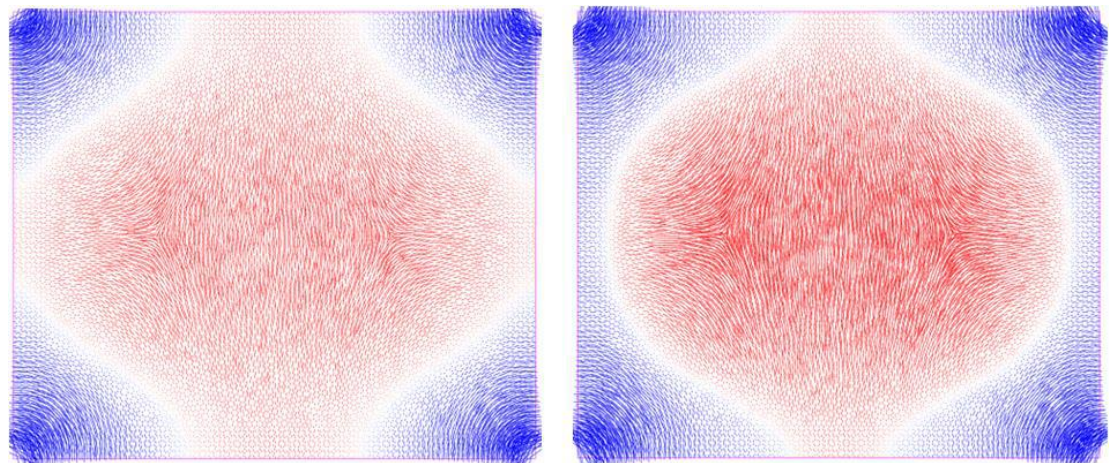


Figura 8-128. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara superior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

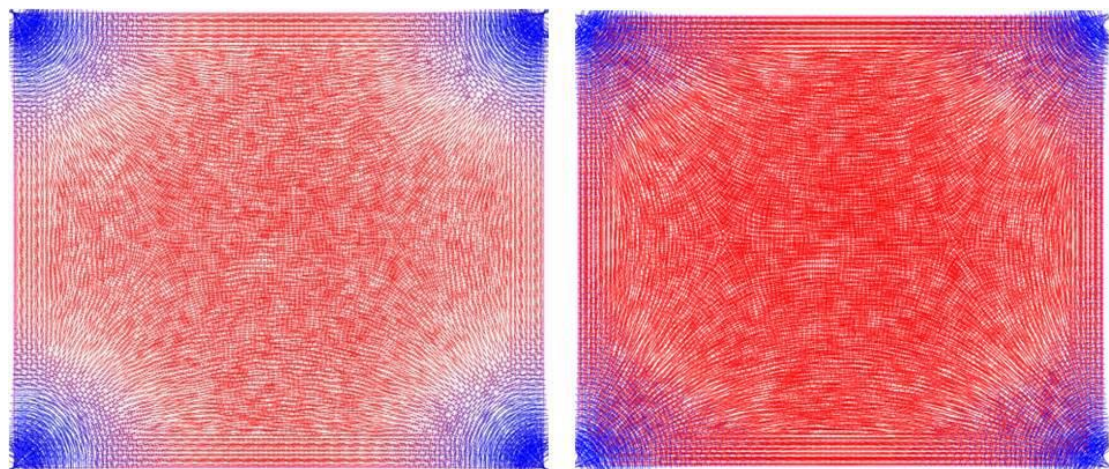


Figura 8-129. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara superior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

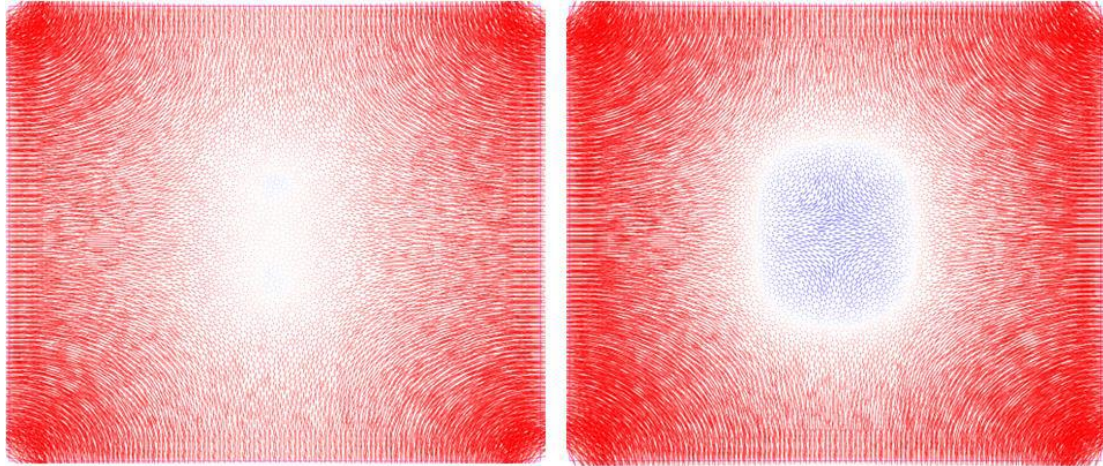


Figura 8-130. Tensiones normales mínimas (máximas compresiones), σ_{11} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

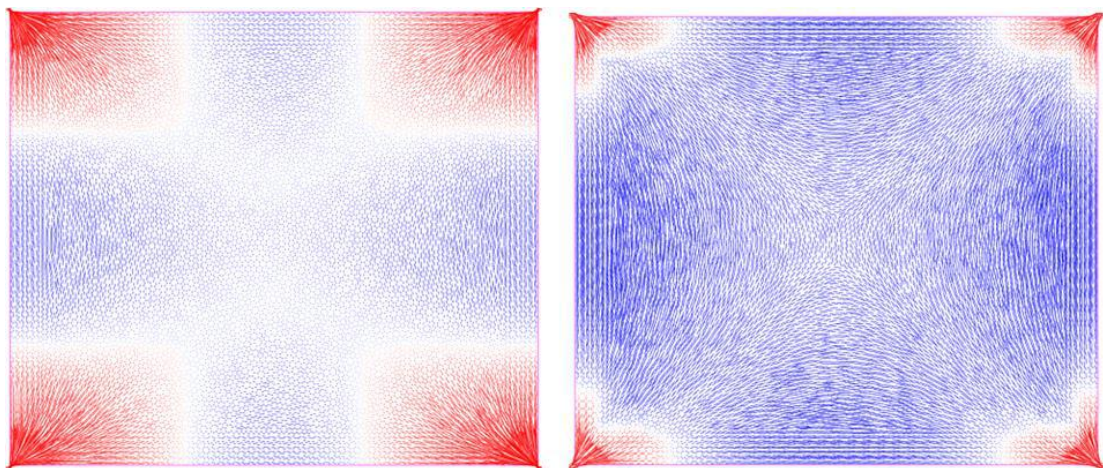


Figura 8-131. Tensiones normales máximas (máximas tracciones), σ_{22} , en la cara inferior calculadas en régimen lineal y tras el análisis no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

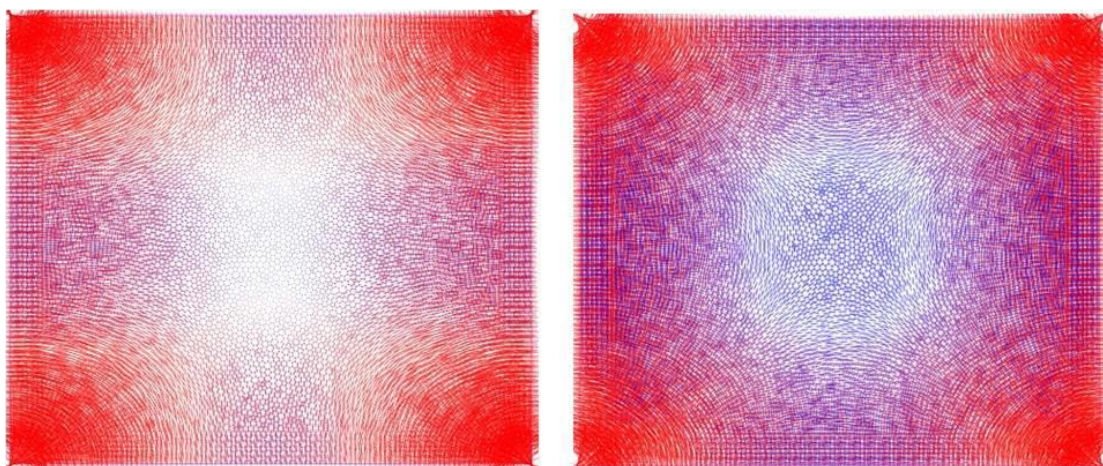


Figura 8-132. Tensiones principales, σ_{22} y σ_{11} , en la cara inferior, representadas de forma conjunta, tanto en régimen lineal y como en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

Por último, se detallan las deformaciones obtenidas tanto en régimen lineal como en régimen no lineal; primero, mediante la obtención de una imagen deformada en perspectiva (con las deformaciones transversales amplificadas 100 veces) y, segundo, mediante el detalle de la representación gráfica y a color de diferentes escalas de desplazamiento que facilitan la comparación.

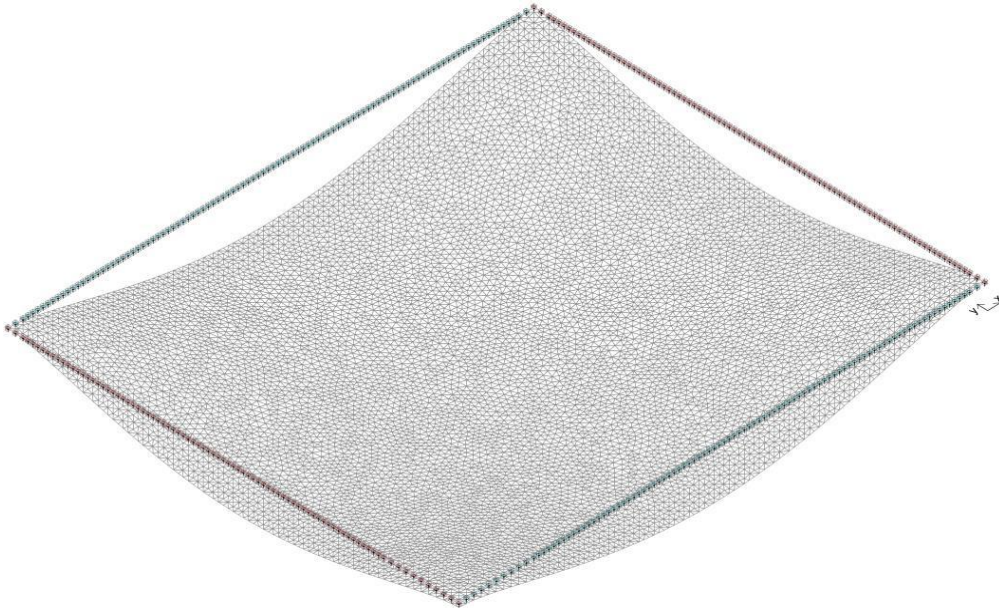


Figura 8-133. Deformación elástica (x100) en ELU

$$f_{\text{máx inst}} = 14,56 \text{ mm} \rightarrow L/824 ; L/961$$

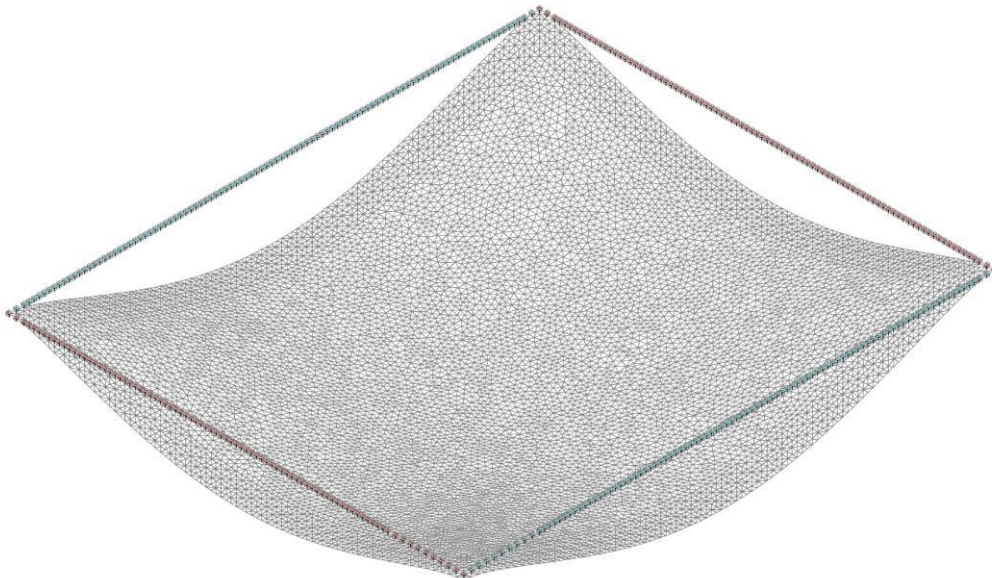


Figura 8-134. Deformada (x100) en ELU en régimen post-elástico para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

$$f_{\text{máx inst}} = 24,76 \text{ mm} \rightarrow L/484 ; L/565$$

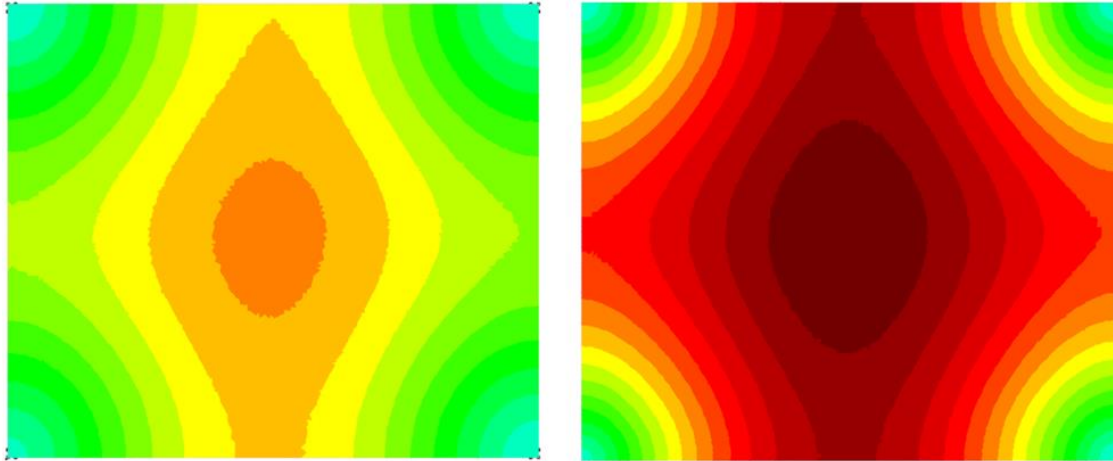


Figura 8-135. Diagrama de flechas en ELU en régimen elástico y en régimen post-elástico para un refuerzo de $1\Phi 20c/20(x)$ y $1\Phi 20c/15(y)$

El incremento de flecha se modera ahora a un 70%, incremento más parecido al del caso primero (placa de 12x12m).

En cualquier caso, el incremento de deformación, según se ha comentado para los casos anteriores, no supone ahora tampoco mayor problema.

8.3.6 Evolución del alargamiento y tensión de las armaduras en las secciones críticas

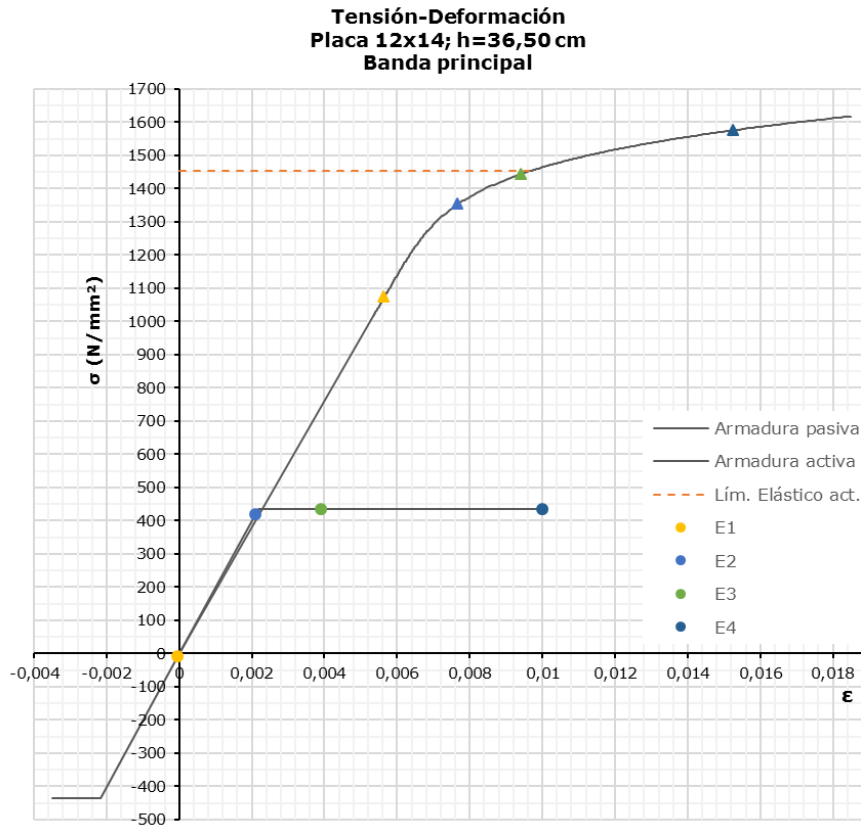


Figura 8-136. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) en el problema de una placa de 12x14m

N	Mx	Giro	Epsilon	ε máx pasivo	ε máx activo	Punto
-600,4	-18,74	-0,00016843	-0,00006054	-0,000037	0,005643	E1
-600,4	-48,74	-0,00044988	-0,0000603	0,000002	0,00568	
-600,4	-73,74	-0,0008573	-0,00004599	0,000073	0,005747	
-600,4	-98,74	-0,00144296	-0,0000117	0,000189	0,005856	
-600,4	-123,74	-0,00211925	0,00003545	0,000331	0,005991	
-600,4	-148,74	-0,00283804	0,00008928	0,000484	0,006138	
-600,4	-173,74	-0,00358262	0,0001469	0,000646	0,006292	
-600,4	-198,74	-0,0043479	0,000207	0,000812	0,006451	
-600,4	-223,74	-0,00513271	0,00026902	0,000984	0,006614	
-600,4	-248,74	-0,00593701	0,00033257	0,001159	0,006782	
-600,4	-273,74	-0,00676153	0,00039744	0,001339	0,006953	
-600,4	-298,74	-0,00760732	0,00046351	0,001523	0,007128	
-600,4	-323,74	-0,0084733	0,0005303	0,00171	0,007307	
-600,4	-348,74	-0,00936043	0,00059762	0,001901	0,007489	
-600,4	-373,74	-0,01026999	0,00066528	0,002095	0,007674	E2
-600,4	-388,74	-0,0113095	0,00076426	0,002339	0,007908	
-600,4	-408,74	-0,0174494	0,00148017	0,00391	0,009417	E3
-600,4	-423,74	-0,02681859	0,00259381	0,006328	0,011741	
-600,4	-438,74	-0,00016834	-0,00006054	0,010001	0,01527	E4

Tabla 8-15. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección principal (Y) del caso de una placa de 12x14m

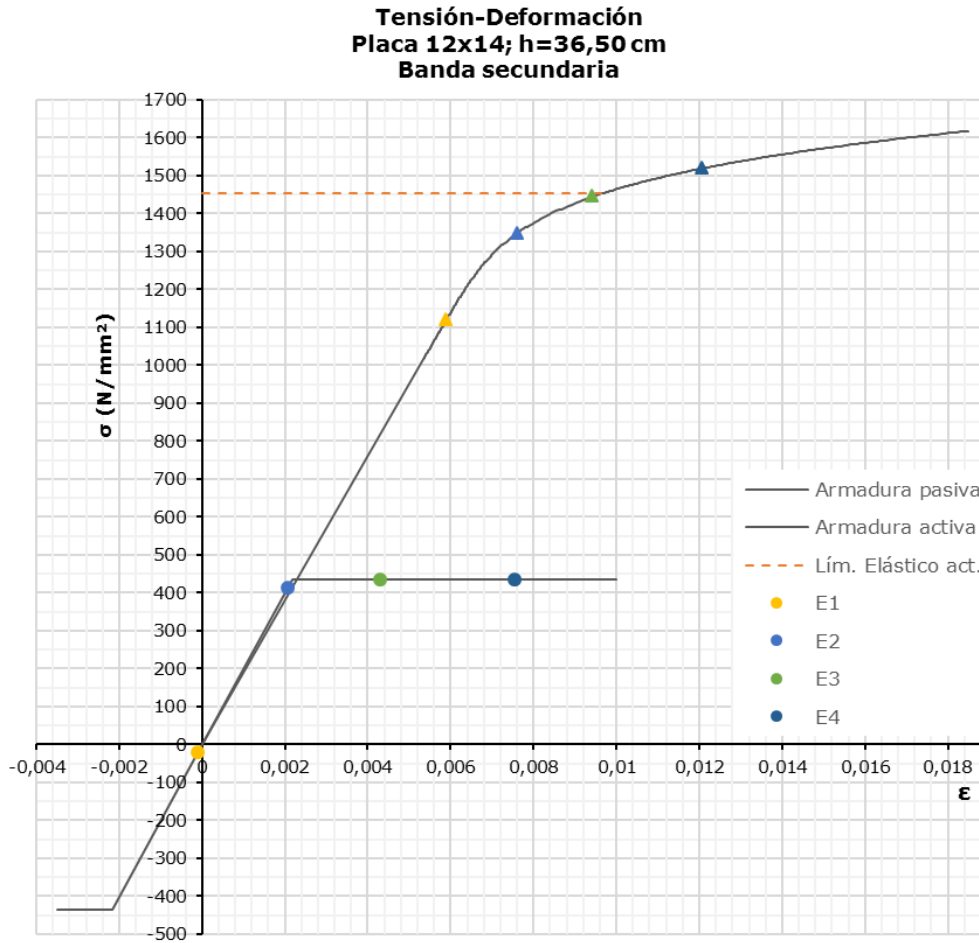


Figura 8-137. Evolución de la tensión y la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) en el problema de una placa de 12x14m

N	Mx	Giro	Epsilon	ε máx pasivo	ε máx activo	Punto
-1149,2	-11,05	-0,00010497	-0,00011863	-0,000104	0,005891	E1
-1149,2	-26,05	-0,0002433	-0,00011908	-0,000085	0,005904	
-1149,2	-56,05	-0,00052066	-0,00012029	-0,000047	0,00593	
-1149,2	-86,05	-0,00081399	-0,00012101	-0,000007	0,005957	
-1149,2	-121,05	-0,00135002	-0,00010821	0,000082	0,006022	
-1149,2	-151,05	-0,00202261	-0,00007773	0,000207	0,006118	
-1149,2	-181,05	-0,00285527	-0,00002955	0,000372	0,006247	
-1149,2	-211,05	-0,00379771	0,00003192	0,000566	0,0064	
-1149,2	-241,05	-0,0048209	0,00010304	0,000781	0,006571	
-1149,2	-271,05	-0,0059101	0,00018132	0,001012	0,006755	
-1149,2	-301,05	-0,00706146	0,00026539	0,001258	0,006951	
-1149,2	-331,05	-0,00827412	0,0003542	0,001517	0,007158	
-1149,2	-361,05	-0,00954936	0,00044676	0,001789	0,007374	
-1149,2	-391,05	-0,01088948	0,00054195	0,002073	0,0076	E2
-1149,2	-406,05	-0,01192394	0,00062693	0,002303	0,007786	
-1149,2	-436,05	-0,02025001	0,00145601	0,004302	0,009424	E3
-1149,2	-461,05	-0,00010486	-0,00011863	0,007547	0,012074	E4

Tabla 8-15. Evolución del plano de deformación de la sección crítica y de la deformación de las armaduras en la dirección secundaria (X) del caso de una placa de 12x14m

8.4 Conclusiones al capítulo

El estudio del primer caso, el correspondiente a la placa de 12x12 metros, ha permitido contrastar la posibilidad y utilidad de establecer unas funciones momento-curvatura (M- Γ) que consideren al tiempo en una sección transversal de losa el comportamiento de dicha sección con y sin refuerzo pasivo. Si el refuerzo pasivo se distribuye adecuadamente, hasta donde es estrictamente necesario, las funciones combinadas (M- Γ) son perfectamente válidas.

De las funciones M- Γ combinadas se desprenden la subsiguientes curvas de degradación combinadas – con y sin refuerzo pasivo – representadas por la evolución de los coeficientes de degradación o de daño definidos en este trabajo como D00, D11 y D22, que afectan a la matriz de elasticidad generalizada [\tilde{D}].

En este sentido, a la hora de abordar el cálculo no lineal, resulta mucho más práctico proponer una armadura de refuerzo que se considere adecuada (y estudiar las consecuencias) que analizar el problema por ámbitos de refuerzo o zonas de integración de esfuerzos.

Abordados tres casos de tamaño y proporciones diferentes, parece claro que la metodología propuesta, aunque con cierta complejidad en el proceso de cálculo, permite acreditar **ahorros** sustanciales en la cantidad de refuerzo pasivo necesario, los cuales se corresponde con el siguiente detalle en números redondos:

- | | |
|---------------------------------|-------------------|
| - Ahorro en la placa de 12x12m: | 35% en X 35% en Y |
| - Ahorro en la placa de 16x16m: | 50% en X 50% en Y |
| - Ahorro en la placa de 12x14m: | 40% en X 0% en Y |

El ahorro pasa por aceptar una degradación sustancial en los bordes de las placas estudiadas frente a la flexión, evidentemente más intensa junto a los soportes, y una degradación también sustancial frente a la acción del momento torsor, en este caso, en una zona mucho más cercana a los soportes. Por suerte, la degradación por torsión se reduce en las diagonales del problema, donde el momento torsor, M_{xy} , resulta máximo.

En cuanto a los esfuerzos se constata un lógico incremento de los momentos flectores positivos, que no resulta relevante en el sentido de que no requiere de la disposición de armadura adicional. En lo relativo a esta cuestión, cabe subrayar que la armadura activa está realmente dimensionada para equilibrar el mayor momento negativo en servicio y que resulta obligada la disposición de una armadura pasiva inferior continua, en ambas direcciones, en cualquier caso. Por otra parte, los incrementos de los momentos flectores positivos son muy moderados, circunstancia que ya se constataba en el modelo de análisis no lineal de losas de hormigón armado propuesto en [MOYA, L., 2003].

Se constata un incremento mucho más notable de los momentos torsores, el cual se comenta en el siguiente capítulo, aunque el estudio de la evolución de las tensiones principales en las superficies inferior y superior de las losas tratadas no hace presagiar grandes problemas en este sentido.

Las flechas en los E.L.U. también presentan incrementos notables, aunque nunca peligrosos, ya que quedan muy lejos de hacer relevantes los efectos de segundo orden. Dejando aparte que, en el ámbito profesional, las flechas a tener en cuenta son las que se obtienen en el análisis de los E.L.S, estados que no quedan afectados por la metodología propuesta.



Conviene destacar también que el estudio detallado de la evolución del alargamiento de los dos tipos de armadura en todos los casos demuestra que la armadura pasiva entra en su rama plástica antes que la armadura activa alcance su límite elástico y el porqué. Esta circunstancia justifica también en alguna medida el análisis no lineal propuesto, porque no es necesario que la armadura activa entre en plasticidad (circunstancia hipotética no muy deseable por la menor ductilidad de este tipo de acero) para que las secciones reforzadas presenten una degradación **notable. De hecho, en ninguna de las soluciones consideradas como "óptimas" se constata la plastificación de la armadura activa.**

Además, en el caso de las secciones no reforzadas, las funciones particulares $M-\Gamma$ acreditan una degradación paulatina pero intensa de la sección mucho antes de que la armadura activa entre plasticidad.

Debe reconocerse la innegable complejidad del método, sobre todo, si pone en ponderación el presumible valor económico de los ahorros acreditados, pero cabe subrayar que esta misma forma de análisis permitiría revisar losas postesadas construidas para que éstas acepten nuevas sobrecargas, por ejemplo, por razón de un cambio de uso o de pavimento, lo que, dependiendo del caso, sí podría justificar la complejidad del procedimiento. Además, dado que no se introduce el factor del tiempo en el procedimiento y al quedar todos los cálculos basados en la fuerza de tesado a largo plazo, los resultados obtenidos son todavía más cercanos a la realidad en edificios acabados que hayan completado, por lo menos, una parte de su vida útil.

Por último, al respecto de la cuestión del paso tiempo, conviene aclarar que la diferencia típica entre la fuerza de tesado a corto plazo (P_1) y la fuerza de tesado a largo plazo (P_2) suele quedar en el entorno del 15% y que, a los cinco años de vida útil de un edificio, ya se ha cubierto una parte de la relajación de la armadura activa, una parte de la fluencia y prácticamente toda la retracción. Además, aunque la armadura activa presenta una elongación mayor cuando el edificio de turno se encuentra recién acabado, es igual de cierto que las secciones críticas presentan una mayor acción correctora (debido a que la propia acción de tesado es mayor) y que, por tanto, las secciones críticas son más resistentes. Sea como fuere, no cabe duda que la introducción de la variable del tiempo abre una línea de investigación interesante en relación a lo aquí estudiado.



9 PROBLEMAS ASOCIADOS A LA DEGRADACIÓN POR FLEXIÓN

El presente capítulo pretende listar los problemas no asociados directamente al análisis estricto de placas delgadas y, por tanto, que quedan fuera del núcleo del presente trabajo, pero que conviene tener mínimamente en cuenta, si se acepta la degradación de una losa por que el refuerzo dispuesto en ella no resulta suficiente para equilibrar en régimen elástico las acciones que la solicitan.

Este capítulo no pretende, pues, el estudio profundo de las consecuencias que más allá del análisis de placas delgadas implica el método o procedimiento propuesto, pero sí recoger con exactitud los aspectos que deberían estudiarse con más detalle para aceptar dicho método en la práctica profesional, apuntándose en algún caso posibles líneas de investigación posterior.

Si bien es cierto que, como se verá enseguida, algunos de los presumibles problemas pueden ser discutidos preliminarmente, aunque con cierto rigor, de una forma fundamentalmente cualitativa.

9.1 El cortante/punzonamiento

9.1.1 La sollicitación

Quizás el primer aspecto a tener en cuenta al aceptar la degradación por flexión sea la posible afectación sobre el equilibrio del punzonamiento, puesto que el deterioro por flexión implica la admisión de una mayor abertura de fisura en las zonas con momento flector más intenso, las cuales son a su vez las zonas con mayor cortante.

Conviene recordar primeramente, al respecto, que los esfuerzos cortantes, Q_x y Q_y , no forman parte de la ecuación general de equilibrio del problema de placas delgadas, según ha sido expuesto en el capítulo cuarto y que, por tanto, el cortante de placa se obtiene a partir de la derivación del momento flector.

En relación a toda esta cuestión, dado que la distribución e intensidad de los momentos flectores varía de forma sustancial al aceptar la susodicha degradación, resulta obligado comprobar cómo quedan afectados los cortantes en el caso modelo (Placa de 12x12m) en ese tránsito, lo que se recoge en las cuatro siguientes imágenes.

De las cuatro imágenes referidas, cabe deducir que, en cuanto a las intensidades máximas de los esfuerzos, las variaciones van en la dirección de moderar esas intensidades máximas.

En lo referente a la distribución de los cortantes sí que resulta llamativo que, en cada dirección analizada, X e Y, el cortante se modera antes cuando se estudia la dirección de análisis desde el soporte. En cambio, hay un cierto alargamiento transversal de la zona que ocupan los cortantes más intensos, lo que cambia un poco la forma de esta especie de bulbos de cortante.

Algo parecido sucede, lógicamente, si se acude directamente al análisis del cortante máximo Q_{11} , cuyos resultados en régimen lineal y no lineal sobre el caso modelo, pueden ser observados en las dos imágenes posteriores (Figura 9-3).



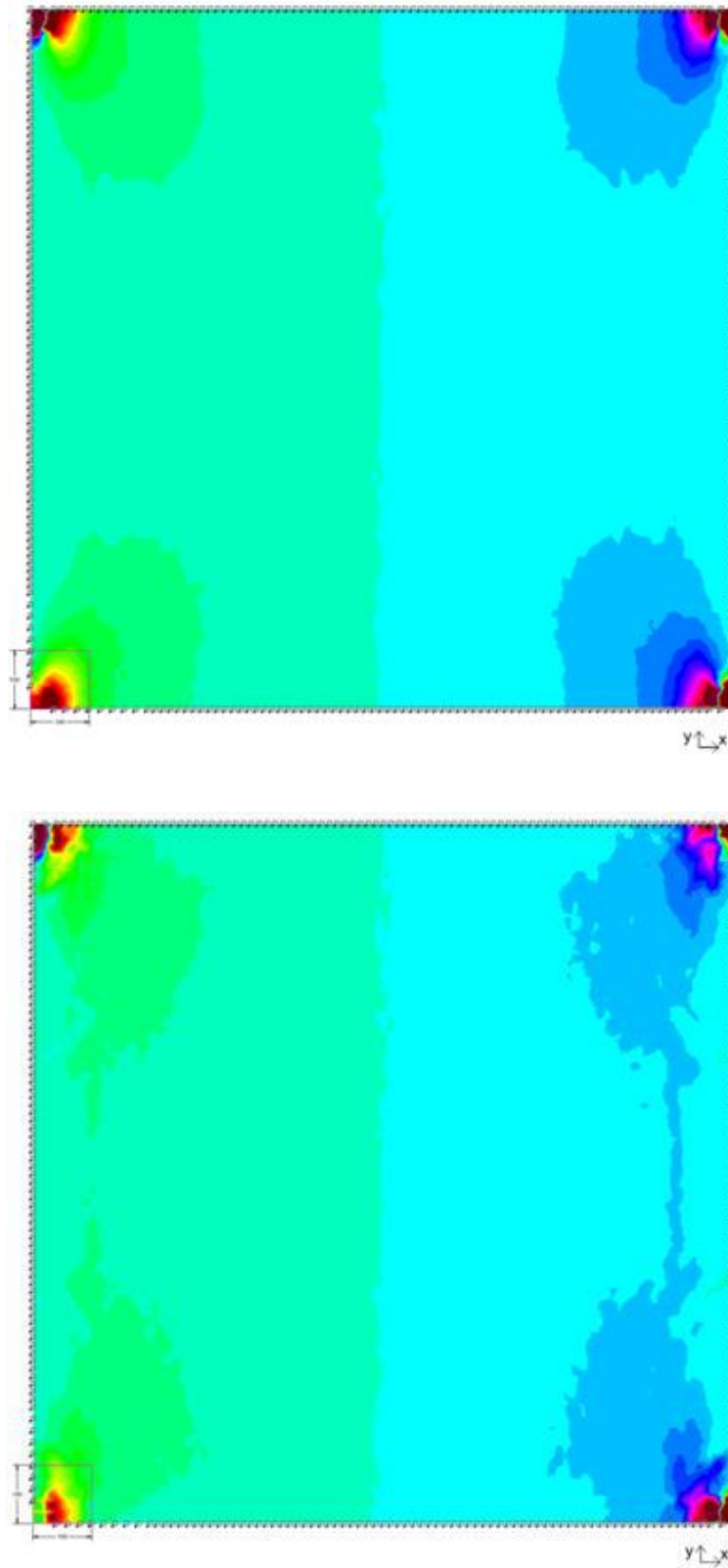


Figura 9-1. Comparativa de los esfuerzos cortantes, Q_x , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$, en el caso modelo (Placa 12x12)

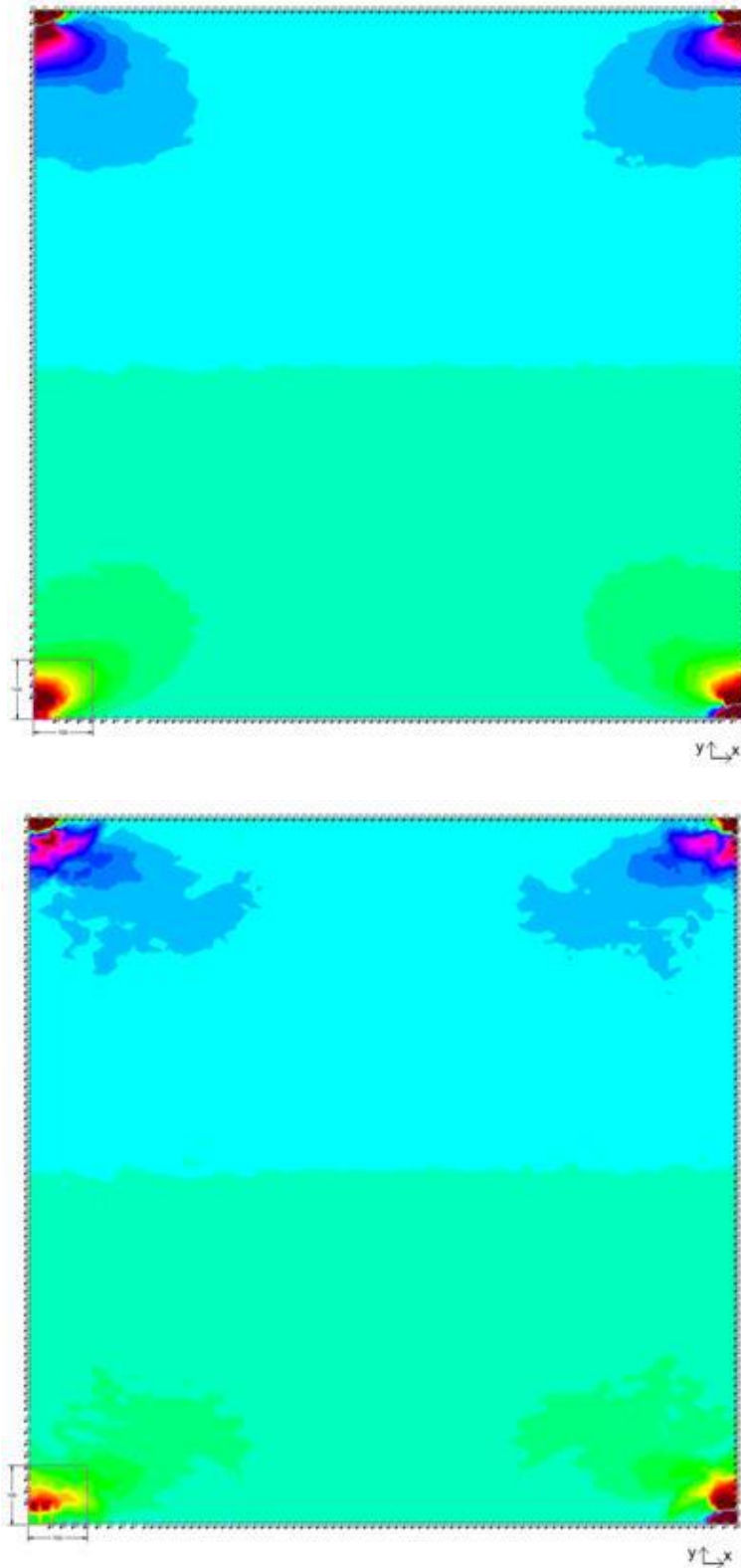


Figura 9-2. Comparativa de los esfuerzos cortantes, Q_y , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$, en el caso modelo (Placa 12×12)

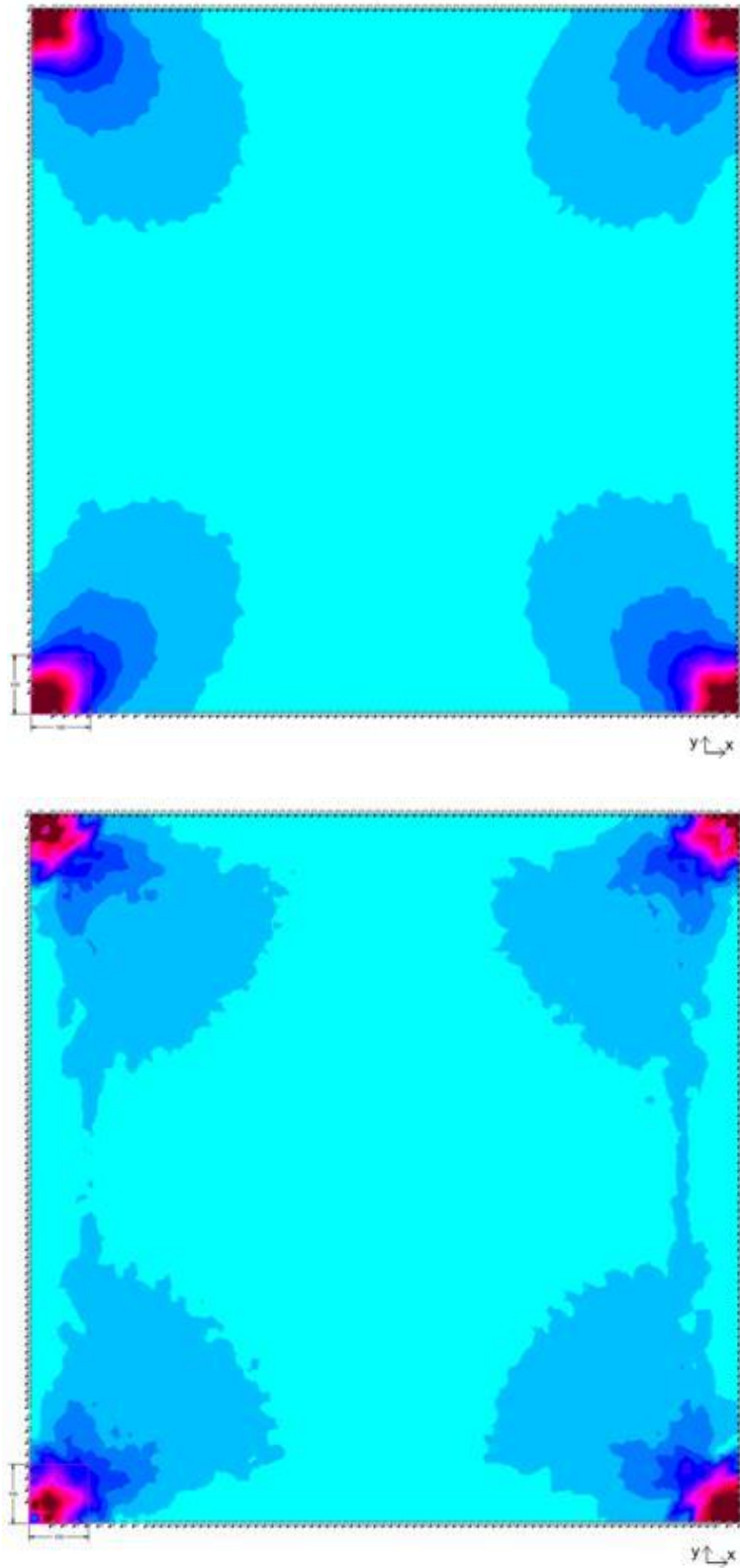


Figura 9-3. Comparativa de los esfuerzos principales, Q_{11} , obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$, en el caso modelo (Placa 12×12)

Queda claro, pues, que la variación de la intensidad del cortante no supone un problema en sí mismo y, por extensión, la solicitación de punzonamiento tampoco.

Cabe decir también que la estabilidad de la intensidad de la solicitación de la placa por punzonamiento, con independencia de la aceptación de su degradación por flexión, resultaba en buena medida obligada, dado que el punzonamiento lo define en última instancia la carga vertical que asume cada soporte, y dicha carga es evidentemente la misma por la simetría del caso modelo.

En lo relativo a la forma del punzonamiento, si bien es cierto que la extensión del cortante varía, dicha variación no parece resultar sustancial, tampoco en cuanto a su distribución, allá donde el problema de punzonamiento es más relevante, que es en la región inminente al soporte, normalmente en el sexto de la luz más cercano a éste, más allá del cambio de forma de los bulbos que definen las líneas de un mismo valor de cortante.

Las diferencias locales del valor de Q_{11} , encima o prácticamente encima de los soportes, responden a que en cada esquina se han observado diferentes pruebas de contorno, según se explicaba en 8.1.2.1., resultando los resultados más creíbles los obtenidos en la esquina inferior izquierda de las diferentes figuras. Resulta curioso que, en la referida esquina, puede reconocerse una relajación sustancial del cortante máximo Q_{11} en el centro del pilar, el cual se corresponde con el vértice del modelo; al degradarse la placa por flexión parece que el apoyo de la placa sobre las esquinas del pilar se hace más relevante

Veamos ahora que sucede con la resistencia a punzonamiento si nos ceñimos al marco normativo propuesto en el apartado 1.3, al principio del presente trabajo.



9.1.2 La resistencia frente al punzonamiento

En lo relativo a la resistencia a punzonamiento, la instrucción EHE-08 distingue entre losas sin armadura punzonamiento y losas que sí incluyen dicho refuerzo específico. En las losas postesadas, debido su apurada relación canto luz, resulta casi obligada la utilización de armaduras de punzonamiento, por lo que las reflexiones y análisis que siguen hacen referencia, de entrada, al segundo de los dos ámbitos de cálculo normativos.

Además, el análisis con armadura de punzonamiento engloba de alguna forma al anterior al tener en cuenta, cuando corresponde, la resistencia natural de la losa sin armadura junto con la resistencia adicional que aporta la armadura en cuestión.

Aceptado lo anterior, la resistencia se discute de forma independiente en tres zonas, según se expone seguidamente, como mero sustento de la discusión que propone este apartado.

9.1.2.1 Zona con armadura transversal de punzonamiento

El valor de la tensión nominal de cálculo, τ_{sd} , ha de ser menor que la resistencia del conjunto formado por el hormigón y la armadura de punzonamiento, en base a la siguiente inecuación:

$$\tau_{sd} \leq 0,75\tau_{rd} + 1,5 \cdot \frac{A_{sw} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen}\alpha}{s u_1}$$

Donde:

- τ_{rd} es la tensión máxima resistente en el perímetro crítico, según se expone enseguida
- A_{sw} es el área total de armadura de punzonamiento en un perímetro concéntrico al soporte
- s es la distancia en dirección radial entre dos perímetros concéntricos de armadura
- $f_{y\alpha,d}$ es la resistencia de cálculo de la armadura de punzonamiento $\leq 400 \text{ N/mm}^2$
- u_1 es el perímetro crítico, definido en el apartado 46.2 de la EHE-08
- α es el ángulo de las armaduras con el eje de la pieza

La tensión nominal de cálculo, se determina sobre el referido perímetro crítico en base a la siguiente expresión:

$$\tau_{sd} = \frac{1,15 F_{sd}}{u_1 d}$$

F_{sd} es el esfuerzo de punzonamiento de cálculo, el cual puede presentar algunos matices con respecto al valor de punzonamiento obtenido en un modelo al uso, en función de los momentos transferidos entre losa y soporte, matices que no resultan relevantes a los efectos de lo que aquí se discute.



El valor "d", como es habitual, representa el canto útil del problema.

En cuanto al segundo término de la parte derecha de la inecuación, el que gobierna la resistencia aportada por la armadura de punzonamiento, resulta evidente que el modelo propuesto no supone ninguna variación, puesto que ninguno de los datos contemplados en este término presenta afectación alguna o diferencia alguna con respecto a un caso ordinario.

El cálculo de la tensión máxima resistente responde a la siguiente expresión:

$$\tau_{rd} = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,1 \cdot \sigma'_{cd} \leq \frac{0,075}{\gamma_c} \xi^{3/2} f_{ck}^{1/2} + 0,1 \cdot \sigma'_{cd}$$

Donde:

ξ es igual a $(1 + \sqrt{200/d})$, siendo d el canto útil en mm.

ρ_l es igual a $\sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$, siendo ρ_x , y ρ_y , la cuantía de la armadura de tracción de la losa, adherente en el caso de la armadura activa, en cada dirección del problema.

f_{ck} es la resistencia característica del hormigón en N/mm²

σ'_{cd} es la tensión axial media, resultando las compresiones positivas

Al resultar las losas un problema bidireccional, el cálculo de la tensión axial media resulta de la siguiente forma:

$$\sigma'_{cd} = \frac{(N_{d,x} / A_x) + (N_{d,y} / A_y)}{2} < 0,30 \cdot f_{cd} \leq 12 \text{ N / mm}^2$$

Las áreas en cada dirección, Ax y Ay, deben quedar en el interior del perímetro crítico, según se define también en el citado apartado 46.2

Examinando cada uno de los aspectos de los que depende la tensión máxima resistente se podría afirmar, en primera instancia, que tampoco hay afección sobre dicha resistencia.

Sin embargo, la afirmación anterior requiere un análisis más cuidado, porque si se atiende **el estado de la armadura longitudinal que define la cuantía, ρ_l** , en los diagramas M- Γ expuestos en el capítulo anterior, al considerar los momentos negativos máximos sobre el soporte, puede constatarse que, para el refuerzo propuesto en cada uno de los casos tratados, la armadura pasiva se encuentra al borde de su entrada en plasticidad o, incluso en algún caso, en plasticidad, lo que invalidaría su contabilización a los efectos del cálculo de la cuantía en cuestión.



Es cierto, por otra parte, que se dan tres efectos aparentemente bastante favorables en lo relativo a la posible afectación de la armadura que define ρ_1 :

- La discusión de esta resistencia máxima, equivalente a la discusión de la resistencia a cortante por tracción del alma, tiene su sentido físico a un canto útil del soporte, donde los momentos flectores ven rebajada notablemente su intensidad y, por ende, donde las armaduras longitudinales conservan su plena integridad.
- Aun considerando el problema sobre los ejes del soporte, el número de armaduras pasivas en "riesgo" de plastificación, si se tiene en cuenta la separación típica entre refuerzos, es una parte del total de armadura pasiva.
- La armadura activa, según se puede también apreciar en los citados diagramas M- Γ , se encuentran todavía a una distancia significativa de plastificar, sea cual sea la sección que se tome como de referencia. Esta circunstancia, dado que la armadura activa aporta una parte muy importante del área de armadura que se computa en el cálculo de ρ_1 , al resultar adherente, mitiga aún más el posible efecto desfavorable del estado de ciertos refuerzos pasivos colocados sobre el soporte de turno.

Teniendo en cuenta, pues, la ponderación de la armadura eventualmente afectada sobre el total, aún situando el plano de análisis sobre el eje del soporte, parece que el valor ρ_1 no puede presentar una caída superior al 15%.

Si se tiene en cuenta que en el cálculo de τ_{rd} la cuantía entra dentro de una raíz cúbica, la pérdida de resistencia del primer término de los dos que definen τ_{rd} sería a penas de un 5%. Cabe destacar aquí que el segundo término, vinculado a la presión normal media, σ'_{cd} , no es nunca nulo en una losa postesada.

Si, además, se tiene en cuenta que, al haber refuerzo específico de punzonamiento, la tensión máxima resistente, τ_{rd} , es una parte de la resistencia total frente a la tensión tangencial nominal, τ_{sd} , parece claro que los posibles efectos de la cuestión relativa a la entrada en plasticidad de algún refuerzo pasivo quedan muy diluidos.

Con independencia de lo anterior, dado que la formulación propuesta por la instrucción de referencia para la comprobación del punzonamiento, es una formulación basada también en ensayos que no responde fielmente a la física del problema, parece prudente hacer una reflexión sobre toda esta cuestión desde la óptica del esfuerzo cortante, cuya formulación resulta mucho más cercana a la física de ese problema específico, la cual se presenta más adelante.

9.1.2.2 Zona exterior a la armadura de punzonamiento

En la zona exterior a la armadura de punzonamiento debe verificarse la siguiente condición:

$$F_{sd} \leq \left(\frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,1 \cdot \sigma'_{cd} \right) U_{n,ef} \cdot d$$

En donde el único dato nuevo resulta $U_{n,ef}$, el cual es un perímetro que cierra la zona reforzada definido en el apartado 46.5 de la instrucción EHE-08.



En este caso, pues, se puede considerar directamente que no hay afectación alguna al tratarse de zonas substancialmente separadas del soporte, en donde las armaduras quedan suficientemente lejos de la plastificación.

9.1.2.3 Zona adyacente al soporte

En las caras del soporte, las cuales definen un nuevo perímetro u_0 , según se describe el apartado 46.4.3 de la citada EHE-08, debe verificarse una última condición:

$$\frac{F_{sd}}{u_0 \cdot d} \leq 0,5 \cdot f_{1cd}$$

En donde f_{1cd} , para los casos habituales en los que la resistencia característica, f_{ck} , es inferior a 60 N/mm², resulta igual $0,60 \cdot f_{ck}$

Como puede apreciarse, ninguno de los términos parece afectado por el procedimiento propuesto.



9.1.3 La resistencia frente al cortante

Como se ha comentado líneas arriba parece oportuno hacer un análisis, aunque sea somero, de la eventual afección del método propuesto sobre la formulación del cortante al recoger esta mejor la física teórica de su problema específico.

Es cierto que los problemas de cortante y de punzonamiento, aunque tienen una raíz común, presentan particularidades que los diferencian y, por ello, su cálculo resulta distinto en ciertos aspectos. Sin embargo, esta entrada a partir del cortante permite en alguna medida un mejor conocimiento de lo que se está proponiendo.

Al respecto, cabe insistir primeramente en un concepto ya expuesto: donde se produce la rotura real por punzonamiento por tracción del alma, según se muestra en la figura adjunta, ninguna de las armaduras se encuentra en régimen plástico.

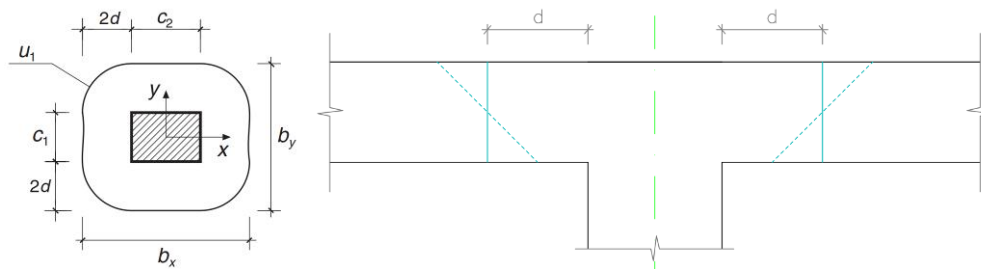


Figura 9-4. Sección crítica a punzonamiento y a cortante

El concepto anterior es muy importante porque, aunque el método propuesto implica necesariamente un mayor nivel de fisuración que en un caso resuelto al uso, al disponerse menos refuerzo pasivo, este incremento de la fisuración no responde a un giro "incontrolado" de la sección por la entrada en plasticidad de la armadura, sino, más bien al contrario, al comportamiento normal o natural de una región fisurada. En este punto resulta también conveniente destacar que todo el cálculo de esfuerzos responde a la rigidez real de la estructura para cada nivel de sollicitación, condición general que permite que la placa de turno degrade mucho antes de que advenga la plastificación, gracias a la naturaleza de las funciones $M-\Gamma$ ya comentada con profundidad.

Aclarado lo anterior, parece razonable, atender a lo que dispone la instrucción de referencia para las piezas con armadura a cortante, las cuales se suponen en fisuración por defecto. Concretamente, se propone la verificación de la siguiente condición:

$$V_{rd} \leq V_{cu} + V_{su}$$

V_{rd} coincide con el esfuerzo cortante de cálculo, V_d , cuando las acciones de pretensado han sido introducidas de forma explícita en el modelo correspondiente de cálculo.

Por mayor simplicidad de este análisis, atendiendo primero al segundo término de la parte derecha de la inequación, V_{su} , la contribución de la armadura transversal, es fácil constatar la independencia de su valor con respecto a lo que aquí se discute:

$$V_{su} \leq z \cdot \text{sen} \alpha (\cot \alpha + \cot \theta) \sum A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha, d}$$

Donde los términos no expuestos hasta aquí resultan los siguientes:



- z brazo mecánico del problema, aproximadamente igual $0,9 \cdot d$
- θ ángulo adoptado para las bielas de compresión en el modelo de celosía de Ritter-Morsch, normalmente 45°
- A_α Área por unidad de longitud de la armadura transversal

Resulta más interesante el término de la contribución del hormigón, V_{cu} , equivalente a la tensión máxima resistente en el caso específico del punzonamiento. Su cálculo obedece a la siguiente fórmula:

$$V_{cu} = \left[\frac{0,15}{\gamma_c} \xi (100 \rho_l f_{cv})^{1/3} + 0,15 \sigma'_{cd} \right] \beta b_0 d$$

En la expresión anterior incide un primer término nuevo a los efectos de este trabajo, b_0 , que define el ancho de la sección en estudio para el caso de las losas, y **un segundo término nuevo, β , sobre el que conviene** realizar una entrada más detallada. **Antes de entrar en la discusión del término β , conviene aclarar que** la expresión anterior no aporta ninguna otra novedad significativa con respecto a lo revisado en el caso del punzonamiento.

β relaciona el ángulo adoptado para las bielas de compresión, θ , con el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, θ_e , en base a las siguientes expresiones:

$$\beta = \frac{2 \cot \theta - 1}{2 \cot \theta_e - 1}; 0,5 \leq \cot \theta \leq \cot \theta_e$$

$$\beta = \frac{\cot \theta - 2}{\cot \theta_e - 2}; \cot \theta_e \leq \cot \theta \leq 2,0$$

El ángulo de referencia de las fisuras puede calcularse genéricamente de la siguiente forma:

$$\theta_e = 29 + 7 \varepsilon_x$$

En donde ε_x es la deformación longitudinal del alma, expresada en tanto por mil, teniendo en cuenta el efecto del cortante, V_{rd} , y del axil, N_d , en base a la siguiente expresión:

$$\varepsilon_x \approx \frac{\frac{M_d}{z} + V_{rd} - 0,5 \cdot N_d - A_p \cdot \sigma_{p0}}{2(E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p)} \cdot 1000 \geq 0$$

Donde los términos no expuestos hasta aquí resultan los siguientes:

- A_p es e área de armadura activa
- E_p es el módulo de elasticidad longitudinal de la armadura activa
- A_s es el área de refuerzo pasivo
- E_s es el módulo de elasticidad longitudinal de la armadura pasiva
- σ_{p0} es la tensión de los tendones de pretensado cuando la deformación del hormigón que lo envuelve es nula



De entrada, en la fórmula última, se identifican dos factores que resultan claramente diferentes a los que resultarían de un análisis convencional:

- M_d : en efecto, el valor del momento flector actuante, M_d , resulta más bajo en el análisis no lineal, lo que modificaría en alguna proporción el valor de la deformación ϵ_x a la baja y, por ende, matizaría el valor del ángulo de referencia de las fisuras, θ_e , a la baja.
- A_s : dado que lo que se propone es disponer menos refuerzo pasivo, lo que **corregiría al alza el valor de la deformación ϵ_x** y, por tanto, matizaría el valor del ángulo de referencia de las fisuras, θ_e , al alza.

Por otra parte, el estudio detallado de la evolución de β en función del incremento de la deformación del alma, ϵ_x , el cual se muestra en la imagen posterior, permite constatar que basta una pequeña variación de dicha deformación para que se produzca una variación sustancial de β .

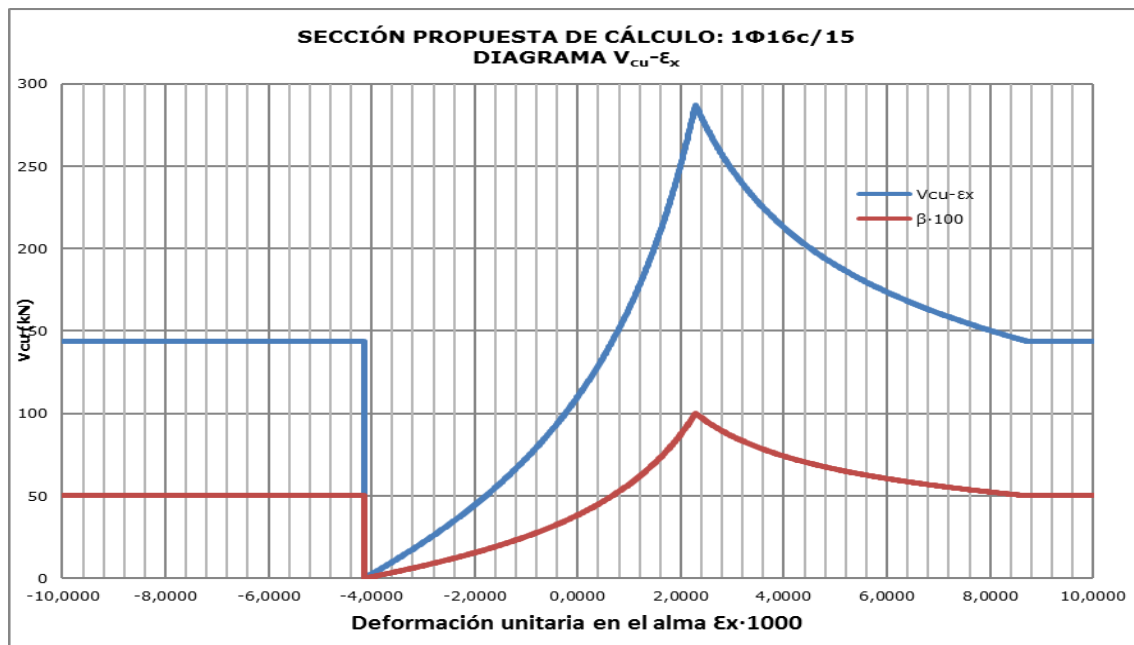


Figura 9-5. Evolución del factor β en función de la deformación unitaria del alma, ϵ_x

Más allá de las reflexiones anteriores de carácter general, si se atiende al caso concreto del problema considerado como modelo en el presente trabajo, el cálculo de β en el análisis lineal resulta para cada dirección el que se muestra en la siguiente página.

En la dirección secundaria

$$M_{x,max} = 575,12 \text{ kN}\cdot\text{m/m};$$

$$V_{rd} = 562,5 \text{ kN/m};$$

$$N_d = 917,6 \text{ kN/m};$$

$$A_{p,x} = 8,4 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00084 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\sigma_{p0} = 1.300 \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow 1.300.000 \text{ kN/m}^2$$

$$A_{s,x} = 19,20 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00192 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\epsilon_x \approx 1,309; \quad \theta_e = 38,16^\circ; \quad \beta = 0,647$$

En la dirección principal

$$M_{y,max} = 571,48 \text{ kN}\cdot\text{m/m};$$

$$V_{rd} = 562,5 \text{ kN/m};$$

$$N_d = 743,5 \text{ kN/m};$$

$$A_{p,y} = 7,46 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,000746 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\sigma_{p0} = 1.300 \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow 1.300.000 \text{ kN/m}^2$$

$$A_{s,y} = 19,20 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00192 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\epsilon_x \approx 1,538; \quad \theta_e = 39,77^\circ; \quad \beta = 0,713$$

Mientras que en el análisis no lineal resulta como sigue:

En la dirección secundaria

$$M_{x,max} = 272,65 \text{ kN}\cdot\text{m/m};$$

$$V_{rd} = 562,5 \text{ kN/m};$$

$$N_d = 917,6 \text{ kN/m};$$

$$A_{p,x} = 8,4 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00084 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\sigma_{p0} = 1.300 \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow 1.300.000 \text{ kN/m}^2$$

$$A_{s,x} = 12,30 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00123 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\epsilon_x \approx 0,191; \quad \theta_e = 30,34^\circ; \quad \beta = 0,414$$

En la dirección principal

$$M_{y,max} = 287,02 \text{ kN}\cdot\text{m/m};$$

$$V_{rd} = 562,5 \text{ kN/m};$$

$$N_d = 743,5 \text{ kN/m};$$

$$A_{p,y} = 7,46 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,000746 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\sigma_{p0} = 1.300 \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow 1.300.000 \text{ kN/m}^2$$

$$A_{s,y} = 12,30 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow 0,00123 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$\epsilon_x \approx 0,547; \quad \theta_e = 32,83^\circ; \quad \beta = 0,476$$



Los resultados anteriores indican de entrada que, si se pudiese entender de forma literal el problema como un problema de cortante, se registran caídas en la contribución del hormigón del orden del 35%. Dichas caídas obligarían a un incremento de la contribución del acero y, por tanto, al subsiguiente incremento de cuantías.

Entrando un poco más en detalle en la razón de esta caída, parece que tiene mucha más incidencia la reducción del momento que la reducción de armadura pasiva. Aunque la expresión no permite razonamientos lineales, cabe destacar al respecto que mientras el momento se ve reducido del orden de la mitad, la armadura pasiva se ve reducida un 35%.

Lo anterior, provoca un alargamiento del alma menor que redundaría en un ángulo de referencia de las fisuras menor, derivando todo ello en las detalladas reducciones **del factor β** .

Debe insistirse, como colofón a esta cuestión, que la aplicación de la formulación de cortante debe ser entendida como un mero ejercicio aproximativo por las particularidades del punzonamiento que han permitido concluir desde hace tiempo una formulación diferenciada. Sin embargo, sí parece que posiblemente debiera estudiarse con más profundidad este aspecto, como un condicionante más para validar la metodología aquí propuesta a efectos profesionales.

Seguramente, dado que la actual formulación del punzonamiento ha quedado muy vinculada a los trabajos con ensayos, sería necesaria una investigación de la misma naturaleza para confirmar que no hay afección alguna, como parece indicar la actual formulación de punzonamiento, en contra de lo que indica el uso meramente aproximativo de la formulación de cortante.



9.2 La torsión

En lo referente a la cuestión del momento torsor de placa, conviene recuperar para la mejor discusión de este asunto, la comparativa mostrada en el capítulo anterior entre los momentos torsores, M_{xy} , obtenidos en el cálculo elástico y los obtenidos en el cálculo no lineal del Caso primero (Placa de 12x12m) aceptando la degradación del ábaco.

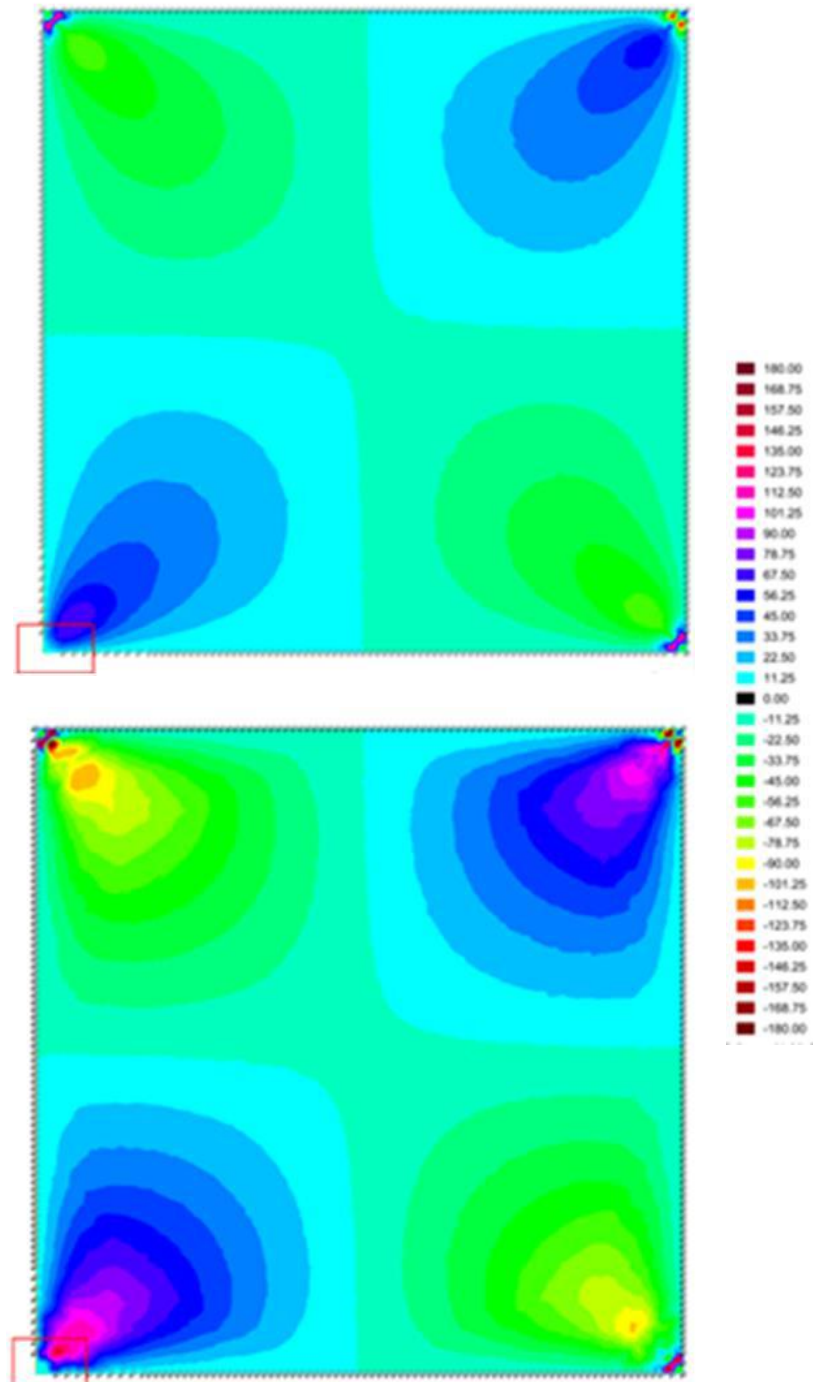


Figura 9-6. Comparativa de los momentos torsores, M_{xy} , en la placa de 12x12m, obtenidos en régimen elástico y en régimen no lineal para un refuerzo de $1\Phi 16c/15$

Dejando de lado las reflexiones cualitativas expuestas en el capítulo octavo, queda claro que la aceptación de la degradación por flexión implica un aumento muy fuerte de la demanda por torsión, concretamente, en el caso modelo, la torsión máxima, ubicada en la diagonal principal del problema, viene a triplicarse.

Al respecto del comentado incremento, un primer problema es que la evaluación de la resistencia de la placa a torsión no viene recogida explícita en la normativa de referencia, EHE-08. Sí que versiones anteriores del Eurocódigo 2 recogían de forma explícita el equilibrio de la torsión de placa, lo que se hacía mediante un incremento ponderado de los momentos flectores, lo que queda particularmente bien explicado en [SHIN, M. 2009].

En cualquier caso, la torsión de placa en los ejes interiores de placas sustentadas sobre pilares en retícula ortogonal resulta nula, o, lo que viene a ser equivalente, donde los momentos torsores resultan pésimos, los momentos flectores no son máximos. Aunque también es cierto que donde los momentos torsores resultan pésimos los momentos flectores resultan todavía elevados.

Por otra parte, el control detallado de las tensiones principales demuestra en los tres casos estudiados que, aunque hay un incremento de la tensión principal de compresión por aumento de la torsión, su intensidad no resulta especialmente elevada.

Aunque las reflexiones anteriores permiten una razonable confianza en la bondad de las soluciones propuestas, de forma prudente, el problema de la torsión y de su equilibrio debería considerarse como un problema sobre el que profundizar, en aras a confirmar si el referido incremento de momentos torsores resulta o no finalmente relevante.



9.3 La deformación transversal

En lo relativo a las deformaciones transversales – flechas - debe recordarse en primer término que la metodología propuesta no afecta al análisis de los Estados Límites de Servicio, ámbito donde se realiza profesionalmente el control de flechas, al quedar los esfuerzos de servicio perfectamente equilibrados por la presencia y actuación de la armadura activa, tal y como sucede siguiendo los procedimientos convencionales.

No obstante, no deja de ser menos cierto que la aceptación de la degradación de la losa en el planteamiento de su equilibrio implica un aumento notable de la deformación cuyos resultados concretos para el caso modelo se recuerdan en las dos imágenes adyacentes.

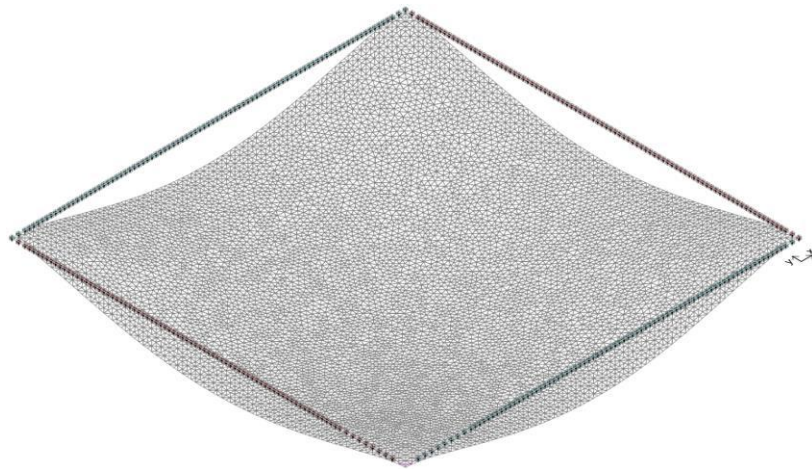


Figura 9-7. Deformación elástica (x100) en ELU en la placa de 12x12m

$$f_{\text{máx inst}} = 13,8 \text{ mm} \rightarrow L/869$$

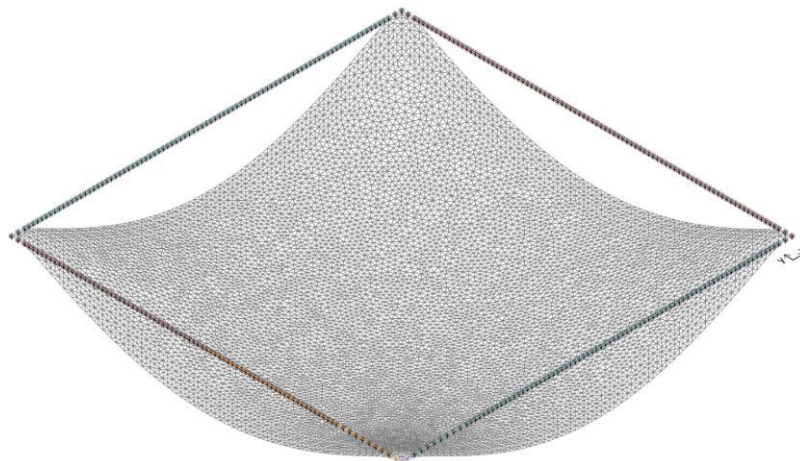


Figura 9-8. Deformada (x100) en ELU en régimen no lineal en la placa de 12x12m considerando un refuerzo pasivo de 1Φ16c/15 en ambas direcciones

$$f_{\text{máx inst}} = 23,1 \text{ mm} \rightarrow L/519$$

El detalle del incremento de la deformación y de las variaciones en la geometría de deformación de la losa entre uno y otro modo de análisis, ya ha sido comentado en el capítulo anterior. Aunque en lo relativo a este detalle cabe recordar que los efectos más relevantes de la fisuración se encuentran incluidos cuando el análisis es no lineal, al incluirse la degradación por flexión.

No es menos cierto que en las zonas de momento positivo pueden presentar algo de fisuración y, por tanto, un ligero incremento de deformación por este motivo, análogamente a lo que sucede con cualquier otro forjado de hormigón.

Cabría asimismo estudiar con detalle los efectos de la fluencia, aunque atendiendo a las formulaciones normativas empleadas habitualmente, no parece que se vislumbren grandes variaciones en este sentido.

Aclarado todo lo anterior, dado que la deformación obtenida en el análisis no lineal, sin incluir los posibles efectos de la pequeña fisuración en las regiones sometidas a momento positivo ni los efectos de la fluencia, se sitúa ya en valores próximos a $L/500$, parece interesante estudiar con más detalle la evolución de la deformación incluyendo los susodichos efectos, primero, para ratificar que el análisis de la placa permanece dentro de la hipótesis de pequeñas deformaciones, según ha sido establecido en el capítulo cuarto y, segundo, por conocer con mayor precisión las consecuencias del camino propuesto.



9.4 Estabilidad lateral en edificaciones

La aceptación de la degradación de la zona de los ábacos obliga a reflexionar mínimamente sobre sus consecuencias en la estabilidad lateral de un edificio al que pudiese pertenecer la placa de turno, máxime si se tiene en cuenta que algunas de las armaduras parecen quedar al final del proceso muy próximas a la entrada en plasticidad o ya dentro de ella.

Sea como fuere, esta reflexión tiene únicamente sentido en construcciones donde la estabilidad lateral dependa total o parcialmente del intercambio de momentos entre la placa y soporte, y que, por tanto, no disponga de mecanismos específicos de equilibrio lateral, como núcleos rígidos o pórticos de arriostramiento, que puedan asumir enteramente el equilibrio lateral de una construcción.

Si bien es cierto que las armaduras postesadas quedan normalmente dimensionadas para el equilibrio estricto de las cargas gravitatorias en los términos comentados, una primera respuesta para no afectar en modo alguno al equilibrio lateral, sería englobar el análisis de las combinaciones de carga que incluyen acciones laterales en los Estados Límites Últimos en el procedimiento general propuesto, lo que, es cierto, implicaría el análisis no lineal de cada una de las combinaciones de carga relevantes. Cabe suponer que los ahorros obtenidos, serán de la misma naturaleza o parecidos a los que se obtienen en el análisis de las cargas gravitatorias, aunque, sin duda cabría un estudio específico de un edificio en altura incluyendo los efectos del viento o del sismo, para conocer las consecuencias económicas en este sentido.

Un segundo camino más agresivo y que incrementaría los ahorros vislumbrados con anterioridad, sería estudiar qué pasa si no se incrementa el refuerzo consignado para las cargas gravitatorias, aun englobando el análisis de las combinaciones de carga que incluyen acciones laterales en los Estados Límites Últimos en el procedimiento general.

De este segundo camino cabe esperar una mayor degradación de la losa, dependiendo la variación de las características de la construcción de turno. Este nuevo nivel de degradación posiblemente haría entrar en comportamiento plástico, cuando menos, a algunos de los refuerzos pasivos a un lado del soporte, ya que, ante una acción lateral, una parte de la placa junto al soporte ve reducida su demanda de flexión mientras que la otra la ve incrementada, según se esboza en el croquis adjunto.

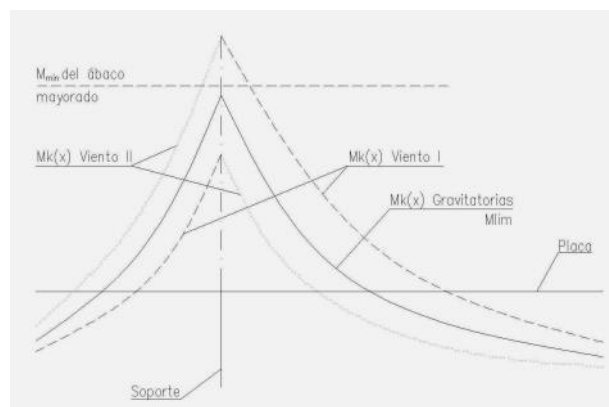


Figura 9-9. Relación cualitativa de los momentos flectores causados por el viento con respecto a los momentos flectores causados por las acciones gravitatorias.

Esta segunda forma de abordar el problema se presenta como posiblemente interesante en el caso de que la acción lateral sea la provocada por un seísmo, en contra de lo que pueda parecer en una primera aproximación. En efecto, de entrada, hay una pérdida de resistencia y de rigidez lateral, ya que el ábaco ha perdido rigidez y resistencia, sobre todo a un lado del soporte ante una primera sacudida o envite, pero también es cierto que el grupo de armaduras que entran en plasticidad a un lado del soporte pueden actuar como amortiguador desde el primer instante de un seísmo, consumiendo energía a través de la deformación plástica, mientras las armaduras del lado contrario tiene un amplio margen de respuesta elástica a la misma sacudida. Esta circunstancia quizás permitiría acreditar una leve mejora en la ductilidad de una tipología estructural no demasiado dúctil de entrada, más allá de la posible necesidad de sistemas específicos de arriostramiento.

Es cierto que todo lo anterior, permite abrir una o varias líneas de investigación a partir de las que valorar rigurosamente tanto las consecuencias sobre la mecánica de las estructuras así proyectadas, como sobre la economía de las soluciones así obtenidas.

En relación a todo lo anterior, también cabe tener en cuenta las posibles consecuencias sobre el análisis del punzonamiento, ya que la plastificación de la armadura de flexión derivaría, como mínimo, en una reducción de la contribución del hormigón, en los términos expuestos anteriormente, y, por tanto, en un incremento del refuerzo transversal de punzonamiento.

En cualquier caso, en lo referente a esta cuestión debe concluirse aclarando que son muchos los casos en que el equilibrio lateral de la construcción de turno no depende del intercambio de momentos entre losa y soporte. De hecho, resulta también algo común que las losas postesadas queden apoyadas sobre elastómeros para maximizar el efecto del pretensado sobre la losa, al impedir que los pilares absorban parte de esta acción o, lo que es lo mismo, reduciendo el valor de los esfuerzos hiperestáticos, según ha sido expuesto en el capítulo 5.



9.5 Conclusiones del capítulo

Más allá del análisis de placas y pensando en la posible aplicabilidad profesional del procedimiento de cálculo propuesto en el presente trabajo, la aceptación de una cierta degradación de los ábacos implica, de alguna u otra forma, consecuencias sobre los siguientes aspectos:

- Equilibrio del punzonamiento
- Incremento de los momentos torsores
- Incremento notable de la deformación transversal de la placa
- Equilibrio lateral de la estructura considerada en su globalidad

En cuanto al equilibrio del punzonamiento la aplicación estricta de la formulación recogida en la instrucción de referencia (EHE-08), demuestra que las reducciones de armadura de pasiva que se arrojan como óptimas, no tienen consecuencias sobre este problema. Sin embargo, el estudio del citado problema desde la óptica del cortante y la naturaleza empírica de la propia formulación normativa para el análisis del punzonamiento, hacen aconsejable un estudio más profundo de esta cuestión, seguramente abordado desde un análisis basado en ensayos. Aunque también podría profundizarse en algo en esta cuestión, desde una óptica meramente analítica, calibrando con cierto rigor la parte de refuerzo longitudinal que se debería descontar en el cálculo normativo del punzonamiento.

Aunque el estudio de la evolución de las tensiones principales en las superficies de las diferentes losas estudiadas no parece apuntar que se den problemas relevantes, el incremento de los momentos torsores parece que hace interesante un estudio más profundo de las posibles consecuencias de este incremento.

Por lo que a las flechas refiere, ha quedado claro que no hay mayor problema en la satisfacción de las condiciones habituales de servicio, puesto que hasta aquí los mecanismos de cálculo y diseño no presentan variación en lo referente a este particular. No obstante, el aumento notable de las deformaciones transversales obtenido en el análisis de los Estados Límites Últimos, hace interesante un estudio detallado de las deformaciones a largo plazo, aunque solo sea por conocer mejor las consecuencias sobre esta cuestión.

Por último, en cuanto al equilibrio lateral de la construcción, cabe diferenciar la cuestión en dos ámbitos de diseño muy desiguales en cuanto a la mecánica estructural: aquellas construcciones en las que la estabilidad lateral no depende del intercambio de momentos entre placa y soporte, y aquellas otras construcciones cuya estabilidad lateral sí depende del referido intercambio de momentos.

En el primer grupo de construcciones de las referidas en el párrafo anterior, no despreciable en cuanto su representatividad, está claro que la metodología propuesta no supone alteración alguna.

En el segundo grupo de construcciones, debería hacerse un estudio detallado de las formas de abordar el equilibrio, ya sea incrementando la cantidad de refuerzo, procediendo de forma parecida a lo que sucede en un proyecto convencional (lo que no implicaría variaciones significativas en lo propuesto), ya sea aceptando una mayor degradación del ábaco cuando actúan las acciones laterales.





10 CONCLUSIONES AL TRABAJO

Las losas de hormigón postesado son entendidas y analizadas normalmente a nivel profesional como la suma de un problema de placa delgada y un problema de cáscara, tal y como se ha revisado en algunos de los capítulos del presente estudio.

Sin considerar los efectos de borde, por su reducida extensión, el problema de placa presenta una monotonía en forjados regulares que no parece permitir demasiadas posibilidades de redistribución de esfuerzos, aun teniendo en cuenta el posible recorrido más o menos dúctil de los tres materiales que constituyen dichos forjados. A lo anterior, debe añadirse que el régimen de tensiones movilizado por este problema parcial queda muy al principio de las posibilidades de los materiales, más allá de las referidas situaciones de borde.

El problema parcial de placa, el cual manifiesta genéricamente unos picos de esfuerzos muy intensos sobre los soportes interiores del forjado que representa, se revela como un problema muy propicio, al menos de entrada, para explorar posibles redistribuciones, intentando considerar el recorrido post-elástico de algunos de los materiales constituyentes o, de una forma más genérica, su comportamiento en estados más avanzados de sollicitación en las regiones más próximas a los citados soportes.

En relación a las posibilidades de redistribución del problema de placa, el estudio detallado de la forma muy particular de agotamiento de una sección post-tesada (con o sin refuerzos pasivos) demuestra que no parece adecuada la asunción directa de un comportamiento elasto-plástico perfecto, como puede hacerse de forma relativamente fácil en el caso de una viga de hormigón armado o, atiendo a la referencia [MOYA, L., 2003], de forma más prudente, en una placa de hormigón armado. Dicho estudio, queda abordado en profundidad en el capítulo sexto y demuestra cómo, teniendo en cuenta que la sección referencial del problema queda conformada típicamente por dos o tres materiales, de naturaleza distinta, y que ésta queda afectada por la propia acción de pretensado (precompresión), la forma de degradación de dicha sección de referencia presenta una complejidad que no admite determinadas simplificaciones de cálculo, al menos en un trabajo en el que se explora por primera vez el carácter y consecuencias de las posibles formas de redistribución de esfuerzos. En lo relativo a la forma de agotamiento de las secciones post-tesadas atendiendo a la evolución de la rigidez de la sección, no son abundantes las referencias, aunque destaca, por ser una de las primeras y también porque permite corroborar algunos de los resultados aquí obtenidos en ese sentido, el trabajo de J.R. Janney, E. Hognestad y D. McHenry [JANNEY, J.R, 1956].

Sea como fuere, la particularidad de cada sección, en cuanto a su geometría y en cuanto a las múltiples posibilidades de refuerzo, tanto activo como pasivo, obliga a que el estudio de la redistribución de esfuerzos de la placa, en base al comportamiento de los materiales constituyentes, pase obligadamente por el estudio específico de la relación entre momento flector y curvatura para cada variante de refuerzo eventualmente considerada.

La conclusión anterior ha conllevado el desarrollo de un módulo particular de software para abordar el presente trabajo, módulo que permite establecer las referidas relaciones momento-curvatura ($M-\Gamma$) con la debida precisión, para correlacionarlas después con el análisis de placas propiamente dicho, teniendo en cuenta la evolución de la sollicitación, la independencia de la armadura activa hasta que acaba la operación de tesado y el comportamiento no lineal de los materiales constituyentes.



El estudio de las relaciones entre momento y curvatura para diferentes formas de refuerzo ha demostrado además que, en contra de lo que sucede en el hormigón armado, cada opción de refuerzo presenta una curva M- Γ de forma diferente. Y, en relación a toda esta cuestión cabe destacar lo siguiente:

- La compresión generada por el pretensado permite que la degradación de la sección de referencia sea paulatina hasta que los refuerzos pasivos entran en régimen plástico, y que no presente, por tanto, cambios bruscos por una fisuración súbita de la sección, como sí sucede en una sección de hormigón armado.
- La presencia de la armadura activa, formada por cables y cuyo diagrama tensión deformación es mucho más curvilíneo que el de una armadura pasiva (formada por barras corrugadas) incide siempre, en menor o mayor medida, en la forma de degradación de la sección, especialmente, suavizándola en el tramo final de sollicitación, pero evitando, a la vez, que se pueda contar con un tramo perfectamente plástico.
- De esta manera, cuando no existe refuerzo pasivo, no se identifica ningún punto notable en la relación momento-curvatura. Por el contrario, cuando se dispone armadura pasiva, aparece un punto notable que indica la plastificación de los refuerzos pasivos y, a medida que se incrementa la cuantía de los propios refuerzos pasivos, la relación momento-curvatura se va aproximando más a la de una sección de hormigón armado, aunque nunca resulta enteramente asimilable.

La conclusión última del estudio de la forma de degradación de las secciones es que tiene sentido o cabe, desde el punto de vista de la mecánica del problema, el análisis no lineal de placas de hormigón postesado para obtener una redistribución de los momentos flectores de placa, pero cabe teniendo en cuenta la forma de degradación más o menos paulatina de las secciones y, por tanto, en base a una o varias opciones de refuerzo concretas o prefijadas para abordar el citado análisis.

Aceptados los condicionantes o conclusiones anteriores, la verificación de la forma no lineal de análisis de placas propuesta en el presente trabajo sobre varios casos representativos permite obtener reducciones en la cantidad de refuerzo pasivo superior sobre los soportes que van del 35% al 50% en los problemas con simetría diagonal (placas cuadradas). Reducciones mayores, como ha sido ampliamente detallado el capítulo octavo, implican problemas directos en el equilibrio general de la placa, primero al obtenerse esfuerzos puntualmente mayores a los resistidos por las secciones y, después, por las inestabilidades numéricas que crea la aceptación de degradaciones demasiado súbitas o intensas. En el caso en que se ha propuesto una losa sin simetría diagonal - placa de 12x14m - tan solo se han confirmado ahorros en la dirección más sollicitada (la mayor), ya que en la dirección favorable casi no se requiere armadura activa, lo que deja a la placa más desprotegida ante la acción de cargas distintas a las presentes en el instante de tesado. Eso sí, los ahorros verificados en la dirección pésima de la referida placa descompensada se sitúan en el entorno del 40%.

Las inestabilidades numéricas constatadas cuando la presencia de refuerzo es muy escasa permiten una de las conclusiones también importantes del trabajo, pues parece claro que, al menos sin aumentar de forma artificial la cantidad de armadura activa empleada, la colocación de una mínima cantidad de refuerzo pasivo en la cara superior de la losa sobre los soportes resulta conveniente tan solo desde la óptica estricta del análisis de placas.



En relación a lo anterior, el papel del refuerzo pasivo se demuestra además como doble, porque, aparte de incrementar la resistencia a flexión, amortigua la pérdida de rigidez frente al referido esfuerzo.

El seguimiento particular de la elongación de las armaduras durante el proceso de agotamiento de las secciones críticas ha permitido constatar que, en contra de lo que puede parecer sin haber analizado con detalle el problema, los refuerzos pasivos entran en plasticidad antes que la armadura activa, circunstancia que redundaba en la oportunidad de los procedimientos no lineales propuestos.

Es cierto que el método, establecido aquí por primera vez, admite posiblemente un reordenamiento para que su proceso sea más claro y sencillo, pero el objetivo último de este trabajo era el de revisar la cantidad de refuerzo pasivo empleada en el diseño y cálculo de losas de edificación postesadas mediante el cálculo no lineal y, en este sentido, se puede dar por cubierto dicho objetivo, habiéndose demostrado que sí parece posible el ahorro, previo estudio más profundo de algunos de los problemas apuntados en el capítulo noveno.

Es cierto también que los ahorros constatados, aunque significativos en términos relativos, afectan a una unidad de obra con un peso económico muy escaso en el proyecto global de una estructura y, por tanto, nada de lo propuesto puede suponer variaciones mínimamente relevantes en el presupuesto global de una obra, más allá de que cualquier ahorro es siempre bienvenido, no solo desde el punto de vista económico, sino también del ambiental, sobre todo si se entiende el problema en su completa generalidad y no como el de la estructura de un edificio en concreto.

Todavía desde una óptica crítica debe reconocerse que, si no se encuentra una simplificación que permita una aplicación más operativa de los principios expuestos, el valor económico de los ahorros obtenidos no justifica la complejidad de los cálculos necesarios para acreditarlos.

En el sentido de lo anterior, parece importante comprobar qué resultados se obtendrían con mallas de elementos finitos menos refinadas o con condiciones de contorno más simplificadas que, en definitiva, resulten más compatibles con la práctica profesional diaria en la que la modelización físico-matemática de los problemas no admite tanto refinamiento.

En cualquier caso y como se apuntaba en el capítulo de introducción, las zonas de ábaco de los forjados de hormigón no unidireccionales son zonas con mucha congestión de armadura, y cualquier avance en la dirección de la reducción de algunos de los refuerzos presentes en esta zona mejora también las condiciones de colocación de armadura y posterior compactación del hormigón, aunque devengan de una simple reducción del diámetro de un tipo de armadura o de la ampliación de las distancias que deben mantener los refuerzos.

Debido a la innegable complejidad que esta forma de análisis presenta para ser incorporada en las mecánicas de trabajo aceptables en la práctica profesional común, un campo en el que podría tener mayor aplicabilidad la metodología propuesta sería el de la reutilización de edificios ejecutados con forjados postesados en los que se pida contemplar un incremento de carga por razón de su nuevo uso. En este caso, el ahorro de refuerzos externos al forjado y de todas las intervenciones asociadas al acceso directo a la estructura, puede justificar la realización de un análisis más sofisticado.



En relación a esta última cuestión cabe destacar que, en las secciones reforzadas, el peso del refuerzo pasivo en la resistencia es bastante relevante, de manera que **la constatación de que su "exceso" ronda entre el 35% y el 50%**, posibilita de una forma rigurosa la consideración de una ampliación substancial de las capacidades de carga de los forjados postesados ya construidos, salvando los aspectos pendientes de estudio ya comentados.

Además, la aplicación del análisis no lineal en los términos expuestos resulta más cercana a la realidad en el caso de edificios acabados y que hayan cubierto una parte de su vida útil, en los que la fuerza efectiva de tesado resulta más parecida a la fuerza de tesado a largo plazo, con la que se suele desarrollar, como se ha hecho aquí, el análisis de los Estado Límites Últimos.

Otra aplicación, de carácter mucho más excepcional, puede encontrarse en el estudio de patologías de forjados postesados que puedan quedar presumiblemente asociadas a un problema de exceso de flexión, ya que el análisis no lineal permite lógicamente una aproximación más cercana al comportamiento real de dichos forjados cuando éstos sufren estados muy avanzados de sollicitación.

Este trabajo ha pretendido suponer, pues, en lo fundamental, un modesto paso en las líneas de ahorro y de mejora de las condiciones de ejecución comentadas, una revisión de las capacidades resistentes de las placas de hormigón postesado a flexión y, a la postre, un pequeño avance hacia un conocimiento más profundo del comportamiento mecánico general de la tipología estructural en cuestión. Si bien, la aceptación de la metodología propuesta en el ámbito profesional debe pasar necesariamente por un estudio más detallado de los problemas apuntados en los capítulos octavo y noveno, dando también pie a la apertura de las correspondientes líneas de investigación.

11 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN Y TRABAJOS ADICIONALES

11.1 Vinculados a la aplicabilidad de la propuesta

Como se ha ido comentando en diferentes momentos a lo largo del presente documento, la aplicabilidad de la metodología propuesta fuera del ámbito académico pasa por el estudio detallado de ciertos aspectos que resultan ajenos al núcleo de la tesis aquí presentada. El conjunto de estos estudios adicionales puede ser agrupado de la siguiente forma:

- Relacionados con el problema numérico específico
- Relacionados con la física del problema

11.1.1 Relacionados con el problema numérico específico

En cuanto a la parte numérica del problema quizás el estudio más perentorio, si lo que se pretende es una aplicación práctica de la metodología, pasaría por el análisis detallado de los resultados obtenidos con mallas de elementos finitos mucho más cercanas a las que se utilizan comúnmente en el ámbito profesional, especialmente en lo referente al tamaño del elemento finito utilizado.

En el mismo sentido, deberían aceptarse en estas mallas unas condiciones de contorno más simples, ya que los pilares han sido representados en las pruebas aquí realizadas de una forma bastante minuciosa, al menos comparada con las formas profesionales al uso.

Cabe aclarar al respecto que, aunque genéricamente los gradientes de los esfuerzos obtenidos en el procedimiento no lineal son menos intensos que los obtenidos en el cálculo elástico, las mallas refinadas sí que han permitido mucha precisión al acotar la extensión y diferente intensidad de la degradación de la rigidez, tanto a flexión como a torsión, por lo que tiene interés comprobar qué pasa al trabajar con cambios de rigidez más groseros, aunque las mallas habituales también incorporan un cierto nivel de refinamiento junto a los soportes.

11.1.2 Relacionados con la física del problema

Con respecto a las líneas de investigación y trabajos adicionales relacionados con la física del problema, es posible considerarlos en dos grupos: por un lado, el que englobaría los estudios que se consideran imprescindibles para una aplicación más real de los principios expuestos y, por otro lado, el que englobaría los estudios que simplemente permitirían un mejor conocimiento de las consecuencias de dicha aplicación.

11.1.2.1 Estrictamente necesarios

De entrada, hay dos aspectos cuyo estudio parece demostrarse como imprescindible antes que ningún otro: primeramente, el problema del punzonamiento y, posteriormente, el problema del momento torsor (aunque en ambas cuestiones se ha constatado una respuesta razonablemente positiva en lo que hasta aquí se ha podido estudiar).



En lo relativo al problema del punzonamiento, aunque, como se ha comentado, no hay un incremento de la sollicitación, cabe estudiar con detalle cómo afecta a la resistencia de la losa frente a dicha sollicitación que los refuerzos pasivos a flexión queden tan próximos a su estado plástico o directamente en estado plástico, al aceptar la degradación de la losa frente al momento flector para reducir la propia presencia de refuerzos.

En lo relativo a la torsión, sí que se registra un aumento notable de la demanda en el análisis no lineal según se ha detallado en el capítulo noveno, por lo que, en este caso, cabe investigar sobre la resistencia de una losa post-tesada frente al momento torsor de placa en las situaciones donde se produce dicho incremento teniendo en cuenta la doble compresión propia de las tipologías postesadas, si bien es cierto que dichas situaciones no coinciden exactamente con las pésimas de flexión en vanos interiores de estructuras regulares.

También parece necesario e interesante introducir la variable del tiempo en el procedimiento propuesto. Esta consideración, aunque resulta algo farragosa, no parece tan compleja, y permitiría calibrar con una mejor precisión la bondad de la propuesta a lo largo de la vida útil del forjado postesado de turno.

Por último, dado que el trabajo aquí presentado, exclusivamente analítico, plantea la superación de algunos de los límites dentro de los que se proyectan o comprueban ahora las losas postesadas, parece obligado contrastar lo propuesto **mediante los correspondientes ensayos de placas y secciones postesadas "reales"**.

11.1.2.2 Convenientes

En este grupo se encuentran bastante más líneas de trabajo porque el número de factores que acaban incidiendo en el proyecto de una losa post-tesada son múltiples, argumento que también funciona a la inversa.

Una primera línea de trabajo, pasaría por el estudio de forjados reales, por tanto, con contornos propiamente dichos, en el que se incorporen los efectos locales de borde, aunque no parece que esta línea de trabajo pueda aportar novedades sustanciales, en el sentido de que lo interesante en un análisis no lineal en el que se propone la degradación por flexión pasa siempre en los soportes interiores.

Otra línea de trabajo pasaría por probar las consecuencias sobre diferentes tipos de hormigón y de acero, tanto sobre la cantidad de material empleado como sobre los matices que pudiesen identificarse en la mecánica del problema.

Un aspecto que podría presentar alguna variación en el análisis de los Estados Límites de Servicio es el ancho de fisura, al reducirse el refuerzo pasivo en un 35% o un 50%, lo que podría ser estudiado de forma particular. Aunque no es de prever novedades significativas en este sentido, porque gran parte de la cuantía en los ábacos es aportada por la armadura activa y, de hecho, el ancho de fisura suele ser controlado en forjados postesados a partir de la variación de la tensión de la armadura activa por acción de las cargas externas.

Otro de los aspectos significativos constatados es el incremento de deformaciones cuando se sobrepasan las sollicitaciones de servicio (capítulo noveno). Aunque las flechas no se controlan profesionalmente en el análisis de los Estados Límites Últimos, parece interesante estudiar qué sucedería con el referido incremento de deformación a largo plazo para un mejor conocimiento del problema.



Atendiendo también a lo expuesto en el capítulo noveno y aún quedando claro que un grupo no reducido de construcciones no se verían afectadas por este problema, tiene indudable interés investigar qué sucede, tanto sobre la cantidad de material empleado como sobre la mecánica general de las estructuras, cuando el intercambio de momentos entre placas y soportes resulta relevante en el equilibrio de las acciones horizontales (típicamente las originadas por el viento y, en los casos que correspondiese, por seísmos).

11.2 Otras líneas de trabajo

Enlazando con la última de las posibilidades apuntadas hasta aquí, una línea de trabajo adicional muy particular que también se presenta como interesante pasaría por el estudio de la estabilidad lateral de las estructuras sometidas a la acción de un seísmo, teniendo en cuenta la pérdida de la rigidez, la pérdida de resistencia y la eventual mejora del amortiguamiento (ductilidad), por la más pronta entrada en plasticidad de ciertas armaduras, durante las vibraciones a las que se ven sometidas estas estructuras.

Una tipología de forjado postesado que puede presentar matices relevantes es la de la losa postesada aligerada interiormente con casetones de poliestireno expandido. En esta tipología, un poco como sucede con los forjados reticulares convencionales, los momentos negativos sobre el ábaco son algo mayores que en la losa maciza equivalente, por la pérdida moderada de rigidez a flexión en las zonas centrales de los vanos, motivada por la propia presencia del aligeramiento. En este sentido, los ahorros que se puedan obtener mediante un análisis no lineal como el que propone la presente tesis quizás pueden resultar algo más sustanciales y, por tanto, interesantes.

De todas formas, la variante de forjado postesado que puede presentar un comportamiento marcadamente diferenciado, al menos de entrada, es aquella en que las armaduras activas no son adherentes, variante más utilizada cuando las luces de la placa son menores a las aquí estudiadas. En este sentido, se presenta como bastante interesante el estudio de esta subtipología, cuyas secciones presentan una mecánica básica suficientemente diferente a las secciones cuya armadura activa sí que resulta adherente.

Enlazando con el trabajo realizado por *Dr. Lluís Moya i Ferrer* [MOYA, L., 2003], quizás cabría investigar la extensión de la metodología propuesta al análisis no lineal de las placas de hormigón armado, en base a dos claves: la primera, la proposición de una armadura concreta de refuerzo en los ábacos, para estudiar los umbrales adecuados de plastificación, los cuales quedaban pendientes de determinar en el referido trabajo, y, la segunda, la toma en consideración de la rama de endurecimiento del refuerzo, ya que, como se ha visto de alguna forma en el presente trabajo, la asunción directa de un comportamiento elasto-plástico perfecto puede minusvalorar la respuesta a flexión de la placa sobre los soportes si la pérdida completa de rigidez de la sección a flexión no es del todo real.

Por último, la línea de trabajo quizás más interesante de este bloque, a juicio del autor del presente trabajo, pasaría por investigar cuales son los aumentos de carga acreditables en los forjados postesados presentes de forma más o menos extendida en nuestro parque edificatorio aplicando la metodología propuesta, ya que ello permitiría anticipar las reservas de carga que pueden presentar los forjados de estos edificios de forma más o menos genérica.





BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Bibliografía y referencias por orden alfabético

- AALAMI, Bijan O. (1989), *Design of Post-Tensioned Floor Slabs*.
En: Concrete International, vol. 11, nº 6
- AALAMI, Bijan O. (1994), *Strength evaluation of existing post-tensioned beams and slabs. Analytical approach*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 4
- AALAMI, Bijan O. (1994), *Unbounded and bonded post-tensioning systems in building construction. A design and performance review*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 5
- AALAMI, Bijan O. (2000), *Layout of post-tensioning and passive reinforcement in floor slabs*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 8
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (2008), *Building Code Requirements for Structural Concrete*.
Farmington Hills, MI
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (2014), *Building Code Requirements for Structural Concrete*.
Farmington Hills, MI
- ARAVINTHAN, T. et al. (2005), *Flexural behavior of two-span continuous prestressed concrete with highly eccentric external tendons*
En: Structural Journal, vol. 102, pp 402-411
- ARROYO, J.C., et al. (2013), *Losas postesadas en edificación*
En: ACIES. Asociación de Consultores Independientes de Estructuras de Edificación
- BAKER, A. L. L. (1949), *A plastic theory of design for ordinary reinforced and prestressed concrete including moment re-distribution in continuous members*, pp 57-66
En: Magazine of concrete research
- BATOZ, J.L. et al. (1980), *A study of tree-node triangular plate bending elements*
En: International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15
- BATOZ, J.L. (1982), *An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending*.
En: International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18
- BELL, J.C. et ELMS, D.G. (1971), *A Finite Element Approach to Post-Elastic Slab Behavior*.
En: Special Publication, vol. 30, pp 325-344
- BOZZO, Luis M. (1994), *Análisis, Diseño y Optimización de Placas Empleando Elementos Finitos Mixtos*
Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería



CALAVERA, J. et GARCÍA, L. (1992), *Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado*
Madrid: INTEMAC

COBO, Alfonso (2010), *Hormigón pretensado*
Madrid: Fundación Escuela de la Edificación

COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN (1991), *Eurocódigo 2. Proyecto de estructuras de hormigón*. Bruselas

CORLEY, W.G., et al. (1971), *Design ultimate load test of 1/10-Scale micro-concrete model of new potomac river crossing, I-266*
En: Research and Development Bulletin – Portland Cement Association

CHAKRABARIT, P.R. (1987), *Ultimate Strength of Corner Panels of Post-Tensioned Flat Plates*
En: Structural Journal

DALMAU, M.R. et VILARDELL J. (2003), *Análisis plástico de estructuras. Introducción*
Barcelona: Edicions UPC

DAMJANIC, F. et OWEN, D.R.J. (1984), *Practical considerations for modelling of postcracking concrete behaviour for finite element analysis of reinforced concrete structures*
Proc., Int. Conf. on Computer Aided Analysis of the Design of Concrete Structures
Pineridge, Swansea, United Kingdom

DAMKILDE, L. (2008), *Continuum Mechanics. Kapitel 2 Orthotropic Materials*
Esbjerg Tekniske Institut.
Aalborg: Aalborg Universitet

ELLEBODY, E. et BAILEY, C. (2008), *Behaviour of unbonded post-tensioned one-way concrete slabs*
En: Advances in Structural Engineering, vol. 11, n1

FELIPPA, C.A., MILTELLO, C. (1991), *Membrane tirangles with corner drilling freedoms II. The ANDES Element*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

FELIPPA, C.A., ALEXANDER, S. (1991), *Membrane Triangles with Drilling Freedoms III. Implementation and Performance Evaluation*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

FELIPPA, C.A. (1998), *Advanced Finite Element Methods for Solids, Plates and Shells (AFEM)*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

FELIPPA, C.A. (2000), *Recent Advances in Finite Element Templates*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

FELIPPA, C.A. (2003), *A Study of Optimal Membrane Triangles with Drilling Freedoms*
Boulder: College of Engineering University of Colorado



GIANLUCA, R. et al. (2012), *An experimental study on the service and ultimate behaviour of post-tensioned composite slabs*

En: International Association for Bridge and Structural Engineering. Seoul congress report, pp. 701-708

HANSON, N. W. et KAAR, P.H (1959), *Flexural bond tests of pre-tensioned prestressed beams*

En: Journal of the American Concrete Institute

HARAJILI, M.H. et KANJ, M.Y. (1992), *Ultimate flexural strength of concrete members prestressed with unbonded tendons*

En: Structural Journal, vol. 88, pp. 663-674

HARAJILI, M. H. (2012), *Tendon stress at ultimate in continuous post-tensioned members: proposed modification of ACI 312, Eq. (18-4) and (18-5)*

En: Structural Journal, vol. 109, pp. 183-192

JANNEY, J.R. et al. (1956), *Ultimate flexural strength of prestressed and conventionally reinforcement reinforced beams*

En: Journal of the American Concrete Institute, vol. 52

JIMÉNEZ, P. et al. (2010) *Hormigón armado*

Barcelona: Editorial Gustavo Gili

KHALFALLAH, S. et GUERDOUH, D. (2014), *Tension stiffening approach in concrete of tensioned members*

En: Internacional Journal of Advanced Structural Engineering

LAM, J. Y. K., Ng, P.L., et KWAN, A.K.H. (2010), *Tension stiffening in concrete beams, Part 2: member analysis*

En: Structures and Buildings

LONG, A.E. et CLELAND, D.J. (1993), *Post-tensioned concrete flat slabs at edge columns*

En: Materials Journal, vol. 90, pp 207-213

LUBLINER, Jacob (1990), *Plasticity Theory*

New York: Macmillian Publishing Company

MANISEKAR, R. et SENTHIL, R. (2006), *Stress at ultimate in unbounded post tensioning tendons for simply supported beams. A state-of-the-art review*

En: Advances in Structural Engineering, vol. 9, n3

MARGARIT, J. et BUXADÉ, C. *Hormigón pretensado. Cálculo clásico y en estados límite.*

Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía 9.27)

MARGARIT, J. et BUXADÉ, C. (1982) *Disseny i càlcul de seccions de formigó armat i sostres sense bigues*

Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía 9.29)



MARÍ A. et al. (2002) *Recomendaciones para el proyecto y construcción de placas macizas de hormigón "in situ" para forjados*
Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya / Grupo CELSA

MINISTERIO DE FOMENTO (2008), *EHE-08. Instrucción del Hormigón Estructural*.
Real Decreto 1247/2008. Madrid

MINISTERIO DE VIVIENDA (2006), *Código Técnico de la Edificación. Documento Básico de Seguridad Estructural. Bases de cálculo*.
Real Decreto 314/2006. Madrid

MINISTERIO DE VIVIENDA (2006), *Código Técnico de la Edificación. Documento Básico de Seguridad Estructural. Acciones en la edificación*.
Real Decreto 314/2006. Madrid

MOYA, Luís. (2003), *Concurso-Oposición para la provisión de plaza de Catedrático de Universidad*.
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya

MOYA, Luís. (1994), *Introducció al mètode dels elements finits*.
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya

OBIOL, A. (1978) *Cálculo de placas por los métodos de rotura*
Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía)

OÑATE, E. et al. (1986), *Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería*
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya

OÑATE, Eugenio. (1995), *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. 2ª ed.
Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

OSSÓ, P. y LIMA, I. (2005). *Forjados con postesado bidireccional en aparcamientos*
En: ACE, Quaderns d'estructures.

OWEN, D.R.J, et al. (2003) *Computational plasticity. Fundamentals and applications*
Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering

PARK R. y GAMBLE W.L. (1995), *Losas de concreto reforzado*.
México: LIMUSA

PRICE, Rusell et REINHARDT, Peter (2000), *Layout Of Post-Tensioning And Passive Reinforcement In Floor Slabs*
En: PTI Technical Notes

REGALADO, F. (1999), *Los forjados de los edificios: pasado, presente y futuro*
Alicante: CYPE INGENIEROS

REVESZ, Stephen (1953), *Factors governing the ultimate bending moment of normal reinforced and prestressed concrete beams, with reference to a proposed plastic theory*, pp 11-26
En: Magazine of concrete research



ROYLANCE, D. (2001) *Transformation of Stresses and Strains*
Cambridge: Department of Materials Science and Engineering Massachusetts
Institute of Technology

SANTACRUZ, A. F. (2005) *Concreto preesforzado: diseño y construcción*
Bogotá: Asociación colombiana de productores de concreto

SHIN M. et al. (2009) *Twisting moments in two-way slabs. Design methods for
torsion in slabs using finite element analysis*
En: Concrete International

TORRES, L.I, LÓPEZ-ALMANSA, F. et BOZZO, L.M. (2004) *Tension-Stiffening Model
for Cracked Flexural Concrete Members*
En: Journal of Structural Engineering

UNIDAD DOCENTE DE HORMIGÓN ESTRUCTURAL. (2003) *Hormigón armado,
pretensado y postesado I*
Madrid: Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de
Estructuras. Universidad Politécnica de Madrid





Bibliografía y referencias por orden cronológico

BAKER, A. L. L. (1949), *A plastic theory of design for ordinary reinforced and prestressed concrete including moment re-distribution in continuous members*, pp 57-66

En: Magazine of concrete research

REVESZ, Stephen (1953), *Factors governing the ultimate bending moment of normal reinforced and prestressed concrete beams, with reference to a proposed plastic theory*, pp 11-26

En: Magazine of concrete research

JANNEY, J.R. et al. (1956), *Ultimate flexural strength of prestressed and conventionally reinforcement reinforced beams*

En: Journal of the American Concrete Institute, vol. 52

HANSON, N. W. et KAAR, P.H (1959), *Flexural bond tests of pre-prensioned prestressed beams*

En: Journal of the American Concrete Institute

BELL, J.C. et ELMS, D.G. (1971), *A Finite Element Approach to Post-Elastic Slab Behavior*.

En: Special Publication, vol. 30, pp 325-344

CORLEY, W.G., et al. (1971), *Design ultimate load test of 1/10-Scale micro-concrete model of new potomac river crossing, I-266*

En: Research and Development Bulletin – Portland Cement Associaton

OBIOL, A. (1978) *Cálculo de placas por los métodos de rotura*

Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía)

BATOZ, J.L. et al. (1980), *A study of tree-node triangular plate bending elements*

En: International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15

BATOZ, J.L. (1982), *An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending*.

En: International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18

MARGARIT, J. et BUXADÉ, C. *Hormigón pretensado. Cálculo clásico y en estados límite*.

Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía 9.27)

MARGARIT, J. et BUXADÉ, C. (1982) *Disseny i càlcul de seccions de formigó armat i sostres sense bigues*

Barcelona: Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (Monografía 9.29)

DAMJANIC, F. et OWEN, D.R.J. (1984), *Practical considerations for modelling of postcracking concrete behaviour for finite element analysis of reinforced concrete structures*

Proc., Int. Conf. on Computer Aided Analysis of the Design of Concrete Structures Pineridge, Swansea, United Kingdom



- OÑATE, E. et al. (1986), *Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería*
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya
- CHAKRABARIT, P.R. (1987), *Ultimate Strength of Corner Panels of Post-Tensioned Flat Plates*
En: Structural Journal
- AALAMI, Bijan O. (1989), *Design of Post-Tensioned Floor Slabs*.
En: Concrete International, vol. 11, nº 6
- LUBLINER, Jacob (1990), *Plasticity Theory*
New York: Macmillian Publishing Company
- COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN (1991), *Eurocódigo 2. Proyecto de estructuras de hormigón*. Bruselas
- FELIPPA, C.A., MILTELLO, C. (1991), *Membrane triangles with corner drilling freedoms II. The ANDES Element*
Boulder: College of Engineering University of Colorado
- FELIPPA, C.A., ALEXANDER, S. (1991), *Membrane Triangles with Drilling Freedoms III. Implementation and Performance Evaluation*
Boulder: College of Engineering University of Colorado
- CALAVERA, J. et GARCÍA, L. (1992), *Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado*
Madrid: INTEMAC
- HARAJILI, M.H. et KANJ, M.Y. (1992), *Ultimate flexural strength of concrete members prestressed with unbonded tendons*
En: Structural Journal, vol. 88, pp. 663-674
- LONG, A.E. et CLELAND, D.J. (1993), *Post-tensioned concrete flat slabs at edge columns*
En: Materials Journal, vol. 90, pp 207-213
- AALAMI, Bijan O. (1994), *Strength evaluation of existing post-tensioned beams and slabs. Analytical approach*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 4
- AALAMI, Bijan O. (1994), *Unbonded and bonded post-tensioning systems in building construction. A design and performance review*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 5
- BOZZO, Luis M. (1994), *Análisis, Diseño y Optimización de Placas Empleando Elementos Finitos Mixtos*
Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
- MOYA, Luís. (1994), *Introducció al mètode dels elements finits*.
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya
- OÑATE, Eugenio. (1995), *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. 2ª ed.
Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería



PARK R. y GAMBLE W.L. (1995), *Losas de concreto reforzado*.
México: LIMUSA

FELIPPA, C.A. (1998), *Advanced Finite Element Methods for Solids, Plates and Shells (AFEM)*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

REGALADO, F. (1999), *Los forjados de los edificios: pasado, presente y futuro*
Alicante: CYPE INGENIEROS

AALAMI, Bijan O. (2000), *Layout of post-tensioning and passive reinforcement in floor slabs*
En: Technical Notes. Post-Tensioning Institute, Issue 8

FELIPPA, C.A. (2000), *Recent Advances in Finite Element Templates*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

PRICE, Rusell et REINHARDT, Peter (2000), *Layout Of Post-Tensioning And Passive Reinforcement In Floor Slabs*
En: PTI Technical Notes

ROYLANCE, D. (2001) *Transformation of Stresses and Strains*
Cambridge: Department of Materials Science and Engineering Massachusetts Institute of Technology

MARÍ A. et al. (2002) *Recomendaciones para el proyecto y construcción de placas macizas de hormigón "in situ" para forjados*
Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya / Grupo CELSA

OWEN, D.R.J, et al. (2003) *Computational plasticity. Fundamentals and applications*
Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering

DALMAU, M.R. et VILARDELL J. (2003), *Análisis plástico de estructuras. Introducción*
Barcelona: Edicions UPC

FELIPPA, C.A. (2003), *A Study of Optimal Membrane Triangles with Drilling Freedoms*
Boulder: College of Engineering University of Colorado

MOYA, Luís. (2003), *Concurso-Oposición para la provisión de plaza de Catedrático de Universidad*.
Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya

UNIDAD DOCENTE DE HORMIGÓN ESTRUCTURAL. (2003) *Hormigón armado, pretensado y postesado I*
Madrid: Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad Politécnica de Madrid

TORRES, L.I, LÓPEZ-ALMANSA, F. et BOZZO, L.M. (2004) *Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members*
En: Journal of Structural Engineering



- ARAVINTHAN, T. et al. (2005), *Flexural behavior of two-span continuous prestressed concrete with highly eccentric external tendons*
En: Structural Journal, vol. 102, pp 402-411
- OSSÓ, P. y LIMA, I. (2005). *Forjados con postesado bidireccional en aparcamientos*
En: ACE, Quaderns d'estructures.
- SANTACRUZ, A. F. (2005) *Concreto preesforzado: diseño y construcción*
Bogotá: Asociación colombiana de productores de concreto
- MANISEKAR, R. et SENTHIL, R. (2006), *Stress at ultimate in unbounded post tensioning tendons for simply supported beams. A state-of-the-art review*
En: Advances in Structural Engineering, vol. 9, n3
- MINISTERIO DE VIVIENDA (2006), *Código Técnico de la Edificación. Documento Básico de Seguridad Estructural. Bases de cálculo.*
Real Decreto 314/2006. Madrid
- MINISTERIO DE VIVIENDA (2006), *Código Técnico de la Edificación. Documento Básico de Seguridad Estructural. Acciones en la edificación.*
Real Decreto 314/2006. Madrid
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (2008), *Building Code Requirements for Structural Concrete.*
Farmington Hills, MI
- DAMKILDE, L. (2008), *Continuum Mechanics. Kapitel 2 Orthotropic Materials*
Esbjerg Tekniske Institut.
Aalborg: Aalborg Universitet
- ELLEBODY, E. et BAILEY, C. (2008), *Behaviour of unbonded post-tensioned one-way concrete slabs*
En: Advances in Structural Engineering, vol. 11, n1
- MINISTERIO DE FOMENTO (2008), *EHE-08. Instrucción del Hormigón Estructural.*
Real Decreto 1247/2008. Madrid
- SHIN M. et al. (2009) *Twisting moments in two-way slabs. Design methods for torsion in slabs using finite element analysis*
En: Concrete International
- COBO, Alfonso (2010), *Hormigón pretensado*
Madrid: Fundación Escuela de la Edificación
- JIMÉNEZ, P. et al. (2010) *Hormigón armado*
Barcelona: Editorial Gustavo Gili
- LAM, J. Y. K., Ng, P.L., et KWAN, A.K.H. (2010), *Tension stiffening in concrete beams, Part 2: member analysis*
En: Structures and Buildings
- GIANLUCA, R. et al. (2012), *An experimental study on the service and ultimate behaviour of post-tensioned composite slabs*
En: International Association for Bridge and Structural Engineering. Seoul congress report, pp. 701-708



HARAJILI, M. H. (2012), *Tendon stress at ultimate in continuous post-tensioned members: proposed modification of ACI 312, Eq. (18-4) and (18-5)*
En: Structural Journal, vol. 109, pp. 183-192

ARROYO, J.C., et al. (2013), *Losas postesadas en edificación*
En: ACIES. Asociación de Consultores Independientes de Estructuras de Edificación

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (2014), *Building Code Requirements for Structural Concrete*.
Farmington Hills, MI

KHALFALLAH, S. et GUERDOUH, D. (2014), *Tension stiffening approach in concrete of tensioned members*
En: Internacional Journal of Advanced Structural Engineering





ANEJOS

Anejo 1. Programación en C++ de las matrices de rigidez de los elementos finitos

A1.1 Matriz de rigidez del elemento de cáscara

```

void CAgeEF_ANDES::x_stiffness_matrix_2D(CAgeMatManager *pMatManager, vector
&x, vector &y, matrix &sm)
{
if (nmid== -1)
    {AfxMessageBox(_T(" *error*CAgePR* material incorrecte"));return;}

long i; long j;

// recupero el material
CAgeMat *pMat;
pMat = pMatManager->aMat[nmid];

// stifness matrix
matrix d(3,3);
pMatManager->matstiff_planestress(pMat,d); // matriu per l'element ANDES

double tt = pMat->xef_t;

sifel_matrix_fillm(0.0,sm);

double nu=pMat->ef_nu;
double hh=tt;

// -- en realitat ja rebo les dades en eixos locals fent que el vector 1-2
correspon al x', però sembla, per l'exemple del pdf, que no és necessari que
estigués així.

double x1=x(0);double x2=x(1);double x3=x(2);
double y1=y(0);double y2=y(1);double y3=y(2);

/*
// PER PROVAR EL CODI RESPECTE AL PDF DEL FELIPPA
x1=0; y1 =0; x2 = 4.08; y2 = -3.44; x3 = 3.4; y3 = 1.14;
x[0]=x1; x[1]=x2; x[2]=x3; y[0]=y1; y[1]=y2; y[2]=y3;
double e = 120.0; hh = 1/8.0;
nu=0.25;
//double e = pMat->ef_e;
//double nu = pMat->ef_nu;
//////// ***** CODI INTACTE
double c;
sifel_matrix_fillm(0.0,d);
c = e/(1.0-nu*nu);
d[0][0] = c;    d[0][1] = c*nu;    d[0][2] = 0.0;
d[1][0] = c*nu; d[1][1] = c;    d[1][2] = 0.0;
d[2][0] = 0.0; d[2][1] = 0.0;    d[2][2] = e/2.0/(1.0+nu);
//////// CODI INTACTE *****
*/

// OPT 3/2 see §5.2 1 2 1 0 1 -1 -1 -1 -2

```



```

// d (elasticitat 3x3)
// h tickness
double alpha_b=3.0/2.0;
double b0=0.5*(1-(4.0*nu*nu));
    if (b0<0.01) b0=0.01; // seria a partir de nu=0.5
double b1=1.0;
double b2=2.0;
double b3=1.0;
double b4=0.0;
double b5=1.0;
double b6=-1.0;
double b7=-1.0;
double b8=-1.0;
double b9=-2.0;
/*
// LST_ret
alpha_b=4.0/3.0;b0=1.0/2.0;b1=2.0/3.0;
b2=-2.0/3.0;b3=0.0;b4=0.0;b5=-4.0/3.0;b6=4.0/3.0;b7=-
2.0/3.0;b8=0.0;b9=2.0/3.0;

// CST
alpha_b=0;b0=0.5;;b1=0;
b2=0;b3=0;b4=0;b5=0;b6=0;b7=0;b8=0;b9=0;

// Allman 3I
alpha_b=1.0;b0=4.0/9.0;b1=1.0/12.0;
b2=5.0/12.0;b3=1.0/2.0;b4=0.0;b5=1.0/3.0;b6=-1.0/3.0;b7=-1.0/12.0;b8=-
1.0/2.0;b9=-5.0/12.0;
*/
//1 4/9 1/12 5/12 1/2 0 1/3 -1/3 -1/12 -1/2 -5/12

double x12=x1-x2; double x23=x2-x3; double x31=x3-x1;
double x21=-x12; double x32=-x23; double x13=-x31;
double y12=y1-y2; double y23=y2-y3; double y31=y3-y1;
double y21=-y12; double y32=-y23; double y13=-y31;
double A=(y21*x13-x21*y13)/2.0;
double A2=2.0*A; double A4=4.0*A;

//////////
// matrius L i Lt
matrix L(9,3);
matrix Lt(3,9);
xx_andes_getMatriusBasica(x,y,L,Lt,alpha_b,hh);
// matrius L i Lt
//////////

//////////
// matrius Complexes
matrix T0u(3,9);
matrix T0u_t(9,3);
matrix Te(3,3);
matrix Te_t(3,3);
xx_andes_getMatriusComplexe(x,y,T0u,T0u_t,Te,Te_t);
// matrius Complexes
//////////

```



```

matrix LperD(9,3);
sifel_matrix_fillm(0.0,LperD);
sifel_matrix_mxm(L, d, LperD);

matrix Kb(9,9);
sifel_matrix_fillm(0.0,Kb);
sifel_matrix_mxm(LperD, Lt, Kb);

double det = (x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1);
det=det/2.0;

for (i=0;i<9;i++)
{
    for (j=0;j<9;j++)
    {
        Kb(i,j)=Kb(i,j)/(hh*A);
    }
}

for (i=0;i<9;i++)
{
    for (j=0;j<9;j++)
    {
        sm(i,j)=Kb(i,j);
    }
}

////////// ARA LA Kh
double LL21=x21*x21+y21*y21;
double LL32=x32*x32+y32*y32;
double LL13=x13*x13+y13*y13;

matrix Q1(3,3);
Q1(0,0)=b1/LL21*A2/3.0;Q1(0,1)=b2/LL21*A2/3.0;Q1(0,2)=b3/LL21*A2/3.0;
Q1(1,0)=b4/LL32*A2/3.0;Q1(1,1)=b5/LL32*A2/3.0;Q1(1,2)=b6/LL32*A2/3.0;
Q1(2,0)=b7/LL13*A2/3.0;Q1(2,1)=b8/LL13*A2/3.0;Q1(2,2)=b9/LL13*A2/3.0;
matrix Q2(3,3);
Q2(0,0)=b9/LL21*A2/3.0;Q2(0,1)=b7/LL21*A2/3.0;Q2(0,2)=b8/LL21*A2/3.0;
Q2(1,0)=b3/LL32*A2/3.0;Q2(1,1)=b1/LL32*A2/3.0;Q2(1,2)=b2/LL32*A2/3.0;
Q2(2,0)=b6/LL13*A2/3.0;Q2(2,1)=b4/LL13*A2/3.0;Q2(2,2)=b5/LL13*A2/3.0;
matrix Q3(3,3);
Q3(0,0)=b5/LL21*A2/3.0;Q3(0,1)=b6/LL21*A2/3.0;Q3(0,2)=b4/LL21*A2/3.0;
Q3(1,0)=b8/LL32*A2/3.0;Q3(1,1)=b9/LL32*A2/3.0;Q3(1,2)=b7/LL32*A2/3.0;
Q3(2,0)=b2/LL13*A2/3.0;Q3(2,1)=b3/LL13*A2/3.0;Q3(2,2)=b1/LL13*A2/3.0;
matrix Q4(3,3);matrix Q5(3,3);matrix Q6(3,3);
for (i=0;i<3;i++)
{
    for (j=0;j<3;j++)
    {
        Q4(i,j)=(Q1(i,j)+Q2(i,j))/2.0;
        Q5(i,j)=(Q2(i,j)+Q3(i,j))/2.0;
        Q6(i,j)=(Q3(i,j)+Q1(i,j))/2.0;
    }
}
matrix EperTe(3,3);
sifel_matrix_mxm(d, Te, EperTe);
matrix Enat(3,3);

```



```

matrix Q4t(3,3);matrix Q5t(3,3);matrix Q6t(3,3);
for (i=0;i<3;i++)
{
    for (j=0;j<3;j++)
    {
        Q4t(i,j)=Q4(j,i);
        Q5t(i,j)=Q5(j,i);
        Q6t(i,j)=Q6(j,i);
    }
}

sifel_matrix_mxm(Te_t, EperTe, Enat);

// ja tinc Enat
matrix Q4t_Enat(3,3);
matrix Q5t_Enat(3,3);
matrix Q6t_Enat(3,3);
matrix Q4t_Enat_Q4(3,3);
matrix Q5t_Enat_Q5(3,3);
matrix Q6t_Enat_Q6(3,3);

sifel_matrix_mxm(Q4t, Enat, Q4t_Enat);
sifel_matrix_mxm(Q5t, Enat, Q5t_Enat);
sifel_matrix_mxm(Q6t, Enat, Q6t_Enat);

sifel_matrix_mxm(Q4t_Enat, Q4, Q4t_Enat_Q4);
sifel_matrix_mxm(Q5t_Enat, Q5, Q5t_Enat_Q5);
sifel_matrix_mxm(Q6t_Enat, Q6, Q6t_Enat_Q6);

matrix K0(3,3);
for (i=0;i<3;i++)
{
    for (j=0;j<3;j++)
    {
        K0(i,j)=(Q4t_Enat_Q4(i,j)+Q5t_Enat_Q5(i,j)+Q6t_Enat_Q6(i,j))*3.0/4.0*b0*hh*A;
    }
}

matrix T0ut_K0(9,3);
sifel_matrix_mxm(T0u_t,K0,T0ut_K0);

matrix Kh(9,9);

sifel_matrix_mxm(T0ut_K0,T0u,Kh);

for (i=0;i<9;i++)
{
    for (j=0;j<9;j++)
    {
        sm(i,j)=sm(i,j)+Kh(i,j);
    }
}
}

```

