



Universitat Autònoma de Barcelona

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  http://cat.creativecommons.org/?page_id=184

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>



Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Doctorat en EDUCACIÓ

Títol de la Tesi:

**La competencia matemática.
Caracterización de actividades de
aprendizaje y de evaluación en la resolución
de problemas en la enseñanza obligatoria**

Nom i signatura de la Doctoranda: *Juana Maria Villalonga Pons*

Nom i signatura Director: *Dr. Jordi Deulofeu Piquet*

BELLATERRA, juliol de 2017

Dr. Jordi Deulofeu Piquet, titular del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, amb seu a la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FAIG CONSTAR QUE:

La Investigació realitzada sota la direcció del signant per la Llicenciada Juana Maria Villalonga Pons, amb el títol *La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria*, reuneix tots els requeriments científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per la seva Lectura i Defensa pública davant la corresponent Comissió, per la obtenció del Grau de Doctor en Educació per la Universitat Autònoma de Barcelona, per tant considerem procedent autoritzar la seva presentació.

Bellaterra, 7 de juliol de 2017

Signat: *Jordi Deulofeu Piquet*



Universitat Autònoma
de Barcelona

**La competencia matemática.
Caracterización de actividades de
aprendizaje y de evaluación
en la resolución de problemas
en la enseñanza obligatoria**

Tesis doctoral

Juana Maria Villalonga Pons

DIRECTOR DE TESIS: *Jordi Deulofeu Piquet*

PROGRAMA DE DOCTORADO: **Educación**

Departament de Didàctica de la
Matemàtica i les Ciències Experimentals

Bellaterra, julio de 2017

*A mi madre, María
por transmitirme el valor del esfuerzo,
por permitirme la educación que me ha traído hasta aquí.*

*A mi hijo, Gerard
quien con sus casi tres años
ha sabido compartir mi atención con el presente proyecto.*

*A la profesión de docente que tanto añoro,
la que te enseña a aprender a evaluar
para aprender a enseñar*

A todos vosotros, gracias.

A punto de tener que cerrar la redacción de la tesis, siento la necesidad de dirigirme con especial atención a todos los que de algún modo me habéis permitido desarrollarla así como a los que, en algún momento, puede que os dispongáis a hojearla.

Dirigiéndome, en primer lugar y de manera especial, a estos últimos, pido disculpas por aquellas faltas e imprecisiones que, en las páginas que siguen a continuación, podáis encontrar. Me disculpo también por aquellos fragmentos que deberían estar más bien redactados y no haya conseguido aclarar del todo. Cierro la tesis y siento que me queda mucho por aprender, tanto en forma como en contenido. Por todo ello, por esas faltas de distinta tipología que sin pretenderlo ni quererlo puedan surgir a lo largo de su lectura, me disculpo sinceramente. Espero, sin embargo, con el tiempo poder seguir profundizando en el campo que con esta tesis he podido empezar a explorar y trabajar para poder compartirlo de manera cada vez más precisa.

Dicho esto, me remonto a la pregunta que llevó a embarcarme en este proyecto y que, en cierto modo, ha sido su hilo conductor. A partir de ella, aprovecho para agradecer a todos los que me han acompañado de manera significativa en el trayecto que ella desencadenó.

¿Qué puedo explicar yo sobre la evaluación de matemáticas?

Fue Yolanda Guevara quien, a penas conocernos, me incitó a hacerme esta pregunta sobre mi práctica docente en Ciclo Superior de Educación Primaria. Gracias Yolanda por además de confiar siempre en mí, transmitirme este interés en particular, que me ha conducido hasta aquí.

Considerar esta pregunta me hizo reflexionar sobre cómo la evaluación afectaba en el aprendizaje de las matemáticas de mis alumnos. Por ello, fue tan importante la reflexión particular sobre mi práctica como docente como la conjunta sobre ello con mis alumnos de aquel momento. Alumnos con los que había compartido su escolarización de 5º y 6º de Primaria, que estaban a punto de finalizar su la primaria. A ellos debo mi experiencia inicial como maestra, a mi especial interés en cómo aprendían y qué podía hacer yo a través de la evaluación para ayudarles en su aprendizaje. Gracias, a todos vosotros por compartir conmigo lo que fueron mis dos primeros años como maestra y ofrecerme tanto de lo que cuestionarme y aprender sobre educación matemática.

Las reflexiones que surgieron sobre la pregunta, me dieron el placer de conocer a David Barba quien, a su vez, me transmitió el interés por profundizar sobre las competencias básicas y su puesta en práctica en las aulas de primaria. Junto con David, Ana Cerezo, Neus Sanmartí y más tarde Jordi Deulofeu, iniciamos un proyecto en esa dirección pero que nos vimos forzados a parar por la marcha de Ana y una servidora fuera de Catalunya.

David, solo te puedo agradecer todo lo que me has permitido aprender desde ese día en adelante. Gracias por compartir de manera tan altruista todas tus iniciativas, no sólo conmigo sino con toda la comunidad educativa ¡Gracias!

Y gracias también por darme la oportunidad de empezar a trabar con Ana, Neus y Jordi. Y gracias a los tres por compartir vuestros conocimientos conmigo.

De manera especial, Neus, te agradezco por compartir en persona tus hallazgos y conocimientos sobre evaluación de los que tanto creo haber ido aprendiendo. Gracias por estar allí cada vez que lo he necesitado, antes de la tesis y a lo largo de ella.

Y de manera más especial, Jordi, muchas gracias. Muchas gracias por, a raíz de ese proyecto, aceptar en dirigirme esta tesis, por fijar la dirección por la cual conducirla, por el seguimiento realizado, por ayudarme a no desviarme demasiado, y por el acompañamiento proporcionado. Y todo ello, a pesar de unas circunstancias entiendo que no muy habituales. Para mí ha sido un reto, tanto en sí mismo como por la situación en qué se ha ido deviniendo. No sólo la distancia sino una maternidad intercalada han hecho que no siempre fuera lo productiva o constante que hubiera querido ser. Por ello, gracias, Jordi, por tu paciencia, comprensión y acompañamiento.

Y por ello, también, gracias al conjunto de profesores, titulares y compañeros del Departament de la Didàctica de la Matemàtica de i les Ciències Experimentals de la UAB y, por atender mis necesidades personales cuando las he necesitado así como las recomendaciones cuando han surgido dudas sobre como encara algunos aspectos concretos de la tesis.

Gracias, como no, a todos los docentes y a vuestros alumnos en su momento, que aceptasteis en colaborar en el proyecto, por mostrar preocupación especial por la resolución de problemas y su evaluación, en particular. Gracias por permitir desarrollar en vuestras aulas lo que me ha permitido realizar el presente estudio. Gracias por vuestra implicación, profesionalidad, tiempo, dedicación y sinceridad.

La consecuencia más positiva de mi situación personal vinculada a la tesis, ha sido la posibilidad de desarrollar una estancia en el Department of Mathematics and Science Education de Stockholm University bajo la tutela del Profesor Paul Andrews. Bajo la supervisión del Profesor Paul Andrews he podido desarrollar parte del trabajo que aquí presento, aprender técnicas de análisis y dar una mirada complementaria a la globalidad del trabajo desarrollado. Gracias Paul por darme la oportunidad de trabajar contigo, por tu ayuda, por tus observaciones y tus comentarios, por tus consejos, por tu atención, por permitir desarrollar mi inglés. En definitiva, por permitirme aprender. Gracias, de verdad, por todo ello.

Junto al Profesor Andrews, no puedo dejar de agradecer la cálida acogida por parte de todos los profesores, titulares y compañeros del Departamento en cuestión de la Universidad de Estocolmo, por hacerme sentir como una más entre ellos y darme la oportunidad de participar en las distintas actividades que han desarrollado. Gracias por, a pesar de la novedad que supuso mi estancia en el Departamento, permitirme trabajar con vosotros y en vuestras oficinas. Gracias a todos, y gracias en especial, a Eva Norén por estar pendiente de mi y proporcionarme todas las comodidades necesarias, a Judy Sayers por su positivismo y recomendaciones tan enriquecedoras, y a Anna Pansell por su compañerismo.

Finalmente, en el aspecto más académico de este viaje, agradecer a los revisores de las revistas y congresos a las que, con Jordi o Paul hemos presentado algún artículo relacionado

con la tesis. Gracias por ayudarnos con el rigor y la completitud de los mismos y, por consiguiente, de parte importante de la tesis.

Paralelamente a todo este recorrido, no me olvido de Mireia Besalú y de Elisabet Quintana, con quienes comparto mis inquietudes educativas y con quienes reflexionar sobre docencia y matemáticas es siempre un placer, además de estar ahí para compartir cualquier momento. ¡Gracias, chicas!

Y por todo ello, no quiero descuidarme de ninguno de los que, de alguna manera han influenciado mi interés y preocupación por la docencia matemática, por estar pendientes de lo que voy haciendo, por la motivación y las oportunidades que me han dado, además de ser un ejemplo de superación y dedicación docente a seguir. Por ello, muchas gracias a todos, y con cariño especial a Toni, Pep, Carlos, Albert, Pura, Marta, y Anton. Gracias por estar ahí.

M. Rosa Estela, tampoco me olvido de ti. Gracias por abrirme también las puertas a la educación universitaria y al campo de su investigación. Gracias por las oportunidades que siempre me has dado, por tus consejos y por tu incondicional ayuda. ¡Gracias!

Tampoco puedo evitar de agradecer los consejos de los amigos hechos en Uppsala quienes habiendo pasado por sus tesis o las de sus parejas, ha sido complaciente compartir sentimientos parecidos. Como tampoco puedo dejar de hacerlo a mis amigas de siempre, quienes aunque repartidas por el mundo, cuando nos encontramos, podemos compartir nuestros intereses y preocupaciones sobre la educación, en general, así como nuestros caminos estudios o caminos profesionales.

Para ir terminando, no me olvido de mis padres, Juan i María, ni de mi hermana, Maite, quienes a pesar de la distancia, han sido cómplices de los distintos momentos vividos a lo largo de la tesis cuya ayuda ha sido incondicional en todo momento. Tampoco de mi familia política que, en cada viaje a Barcelona, han estado ahí para ayudarme en lo que necesitara.

Finalmente, Jordi-Lluís y Gerard. Gracias, muchas gracias por estar siempre ahí y darme el placer de este desarrollo profesional.

Gracias Jordi-Lluís por animarme de manera incondicional a realizar el presente estudio y gracias por aguantar mis nervios a lo largo de él. Gracias por darme el coraje que más de una vez he necesitado.

Gracias Gerard por aceptar acompañarme a lo largo de este trabajo, por saber convivir durante tus casi tres primeros años de tu vida con este proyecto. Pero más gracias te doy por todas las sonrisas y abrazos que me has dado, y que sólo ellas han sabido apaciguar mis momentos más complicados.

En fin, gracias a todos por permitirme iniciar el desarrollo de este proyecto con el objetivo de poder responder esa pregunta que en su, día, Yolanda me formuló, y con lo que me gustaría contribuir a la educación matemática, en general, y a la de resolución de problemas y a la evaluación, en particular.

Joana Villalonga Pons

Resumen

La resolución de problemas es una competencia fundamental dentro de la competencia matemática que debería ser adquirida por los alumnos durante su escolarización obligatoria. A lo largo de esta década, en Catalunya se ha trabajado para identificar sus intenciones educativas. Sin embargo, resulta complejo determinar cómo trabajarla de manera consecuente en las aulas así como evaluar sus efectos. De esta preocupación surge el interés de la presente tesis, en profundizar cómo se podría mejorar la gestión de la adquisición de la competencia en resolución de problemas en la enseñanza obligatoria.

En base al doble y fundamental papel que toma la regulación en la resolución de problemas dentro de un marco competencial de la educación, se han elaborado e implementado un conjunto de instrumentos para ayudar al desarrollo de la competencia en resolución de problemas en alumnos de 6º de EP y 1º de ESO. Las evidencias sobre las producciones de los alumnos así como las contribuciones de los docentes y los alumnos participantes informan, aunque con matices, del impacto positivo que dichos instrumentos, como actividades de aula, pueden desempeñar en la adquisición de dicha competencia así como de factores influyentes en el proceso de su generación e implementación.

SUMARIO

RESUMEN.....	VII
INTRODUCCIÓN.....	1
MOTIVACIÓN.....	1
CONCRECIÓN.....	4
OBJETIVOS.....	5
1. MARCO TEÓRICO.....	7
1.1 COMPETENCIA MATEMÁTICA.....	7
1.1.1 Competencias básicas.....	7
1.1.2 Competencia Matemática.....	9
1.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	13
1.2.1 La resolución de problemas en el quehacer matemático.....	13
1.2.2 La noción de problema matemático.....	14
1.2.3 El proceso de resolución de un problema.....	18
1.2.4 Factores influyentes en la resolución de un problema.....	20
1.2.5 Características de resolutores de problemas matemáticos.....	24
1.2.6 Características estructurales de los problemas.....	26
1.2.7 El papel de los docentes en la resolución de problemas.....	29
1.3 METACOGNICIÓN, AUTOREGULACIÓN, Y METAVOLICIÓN.....	30
1.3.1 Metacognición.....	31
1.3.2 Autorregulación.....	33
1.3.3 Instrumentos para trabajar la metacognición en la resolución de problemas.....	36
1.4 EL PAPEL DE LA EVALUACIÓN.....	39
1.4.1 La evaluación en un marco educativo competencial.....	39
1.4.2 La evaluación de resolución de problemas.....	43
1.4.3 Instrumentos para una evaluación en un sistema educativo por competencias.....	48
1.4.4 Ejemplos de Instrumentos de evaluación para la resolución de problemas.....	50
1.4.5 Rúbricas.....	50
1.4.6 Bases de Orientación.....	55
1.5 SCAFFOLDING: ANDAMIAJE EDUCATIVO.....	57
1.5.1 El andamiaje educativo.....	57
1.5.2 Estrategias de andamiajes educativos.....	58
1.5.3 Andamiajes educativos y el papel del profesor.....	60
1.5.4 Auto-andamiaje educativo.....	60
1.5.5 Medición de los andamiajes educativos.....	61

2. METODOLOGÍA.....	63
2.1 CONTEXTO Y DISEÑO	63
2.2 PARTICIPANTES	65
2.3 INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN	68
2.3.1 <i>Búsqueda y Análisis de Documentación</i>	69
2.3.2 <i>Diseño y Gestión de Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP): Problemas, Rúbrica de desempeño y Base de Orientación</i>	69
2.3.3 <i>Recopilación de Percepciones de la dinámica generada con los IRP</i>	87
2.4 TIPOLOGÍA DE LOS DATOS.....	88
2.5 MÉTODOS PARA LOS ANÁLISIS DE DATOS	90
2.5.1 <i>Test Exacto de Fisher</i>	90
3. ANÁLISIS Y RESULTADOS I: FORMULACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y GESTIÓN DE COSTUMBRES SOCIOMATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	93
3.1 LA FORMULACIÓN DEL ENUNCIADO COMO TAREA MATEMÁTICA.....	94
3.1.1 <i>Problema 0</i>	95
3.1.2 <i>Problema 1.1 y Problema 1.2</i>	100
3.1.3 <i>Problema 2</i>	105
3.1.4. <i>Problema 3</i>	107
3.1.5 <i>Problema 5</i>	112
3.1.6 <i>Problema 6</i>	117
3.1.7 <i>Discusión y Síntesis</i>	126
3.2 PERCEPCIONES DE LOS ALUMNOS SOBRE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	130
3.2.1 <i>Discusión y Síntesis</i>	133
3.3 APORTACIONES DE LOS DOCENTES A LA PRÁCTICA DESARROLLADA	134
3.3.1 <i>Aportaciones del docente IT6</i>	135
3.3.2 <i>Aportaciones del docente AL1</i>	137
3.3.3 <i>Aportaciones del docente SC1</i>	139
3.3.4 <i>Aportaciones del docente EP6</i>	142
3.3.5 <i>Discusión y Síntesis</i>	144
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS II: GENERACIÓN Y USO DE UNA BASE DE ORIENTACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. FACTORES INVOLUCRADOS EN SU REFINAMIENTO Y CÓMO HAN ACTUADO.....	147
4.1 ACEPTACIÓN DE LA BASE DE ORIENTACIÓN	148
4.1.1 <i>Evidencias de uso de la base de orientación</i>	148
4.1.2 <i>Percepciones de los alumnos sobre la base de orientación</i>	156
4.1.3 <i>Discusión</i>	161
4.2 ADECUACIÓN DE LA BASE DE ORIENTACIÓN	162
4.2.1 <i>Creencias de los alumnos en cuanto a la resolución de problemas</i>	163
4.2.2 <i>Lenguaje utilizado en la base de orientación</i>	170
4.2.3 <i>Estructura general de la base de orientación</i>	173
4.2.4 <i>Concreción de la base de orientación</i>	177
4.2.5 <i>La base de orientación para promover la verbalización del proceso de resolución</i>	188
4.2.6 <i>Percepción visual de la base de orientación</i>	191
4.2.7 <i>Discusión</i>	195
4.3 SÍNTESIS	197

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS III: GENERACIÓN Y USO DE UNA BASE DE ORIENTACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. ARTICULACIÓN DE SUS DIMENSIONES201

5.1. DIMENSIÓN 3 DE LA BO2	203
5.1.1 <i>Gestión de la representación</i>	203
5.1.2 <i>Discusión</i>	208
5.2. DIMENSIÓN 6 DE LA BO2	209
5.2.1 <i>Gestión de procesos estratégicos</i>	211
5.2.2 <i>Verbalización de los procesos estratégicos</i>	221
5.2.3 <i>Discusión</i>	225
5.3. DIMENSIÓN 7 DE LA BO2	227
5.3.1 <i>Gestión del atasco</i>	228
5.3.2 <i>Discusión</i>	232
5.4. DIMENSIÓN 9 DE LA BO2	234
5.4.1. <i>Confeción de Respuestas</i>	235
5.4.2 <i>Discusión</i>	245
5.5 SÍNTESIS	247

6. ANÁLISIS Y RESULTADOS IV: LA BASE DE ORIENTACIÓN COMO AUTO-ANDAMIAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....251

6.1 ANÁLISIS DE UNA BASE DE ORIENTACIÓN COMO AUTO-ANDAMIAJE	251
6.1.1 <i>Discusión</i>	256
6.2 EL PAPEL CLAVE DE DISTINTAS FORMAS DE COMPROBACIÓN COMO PARTE DE UN MECANISMO DE AUTO-ANDAMIAJE	257
6.2.1 <i>Discusión</i>	261
6.3 SÍNTESIS	262

7. CONCLUSIONES I: CONCLUSIONES A LOS OBJETIVOS265

7.1 CONCLUSIONES RELATIVAS AL PRIMER OBJETIVO	266
7.1.1 <i>Qué entender por problema matemático</i>	266
7.1.2 <i>Qué entender por resolver un problema matemático</i>	267
7.1.3 <i>Qué influye en la resolución de un problema</i>	268
7.1.4 <i>La resolución de problemas en un marco competencial de la educación matemática</i>	271
7.1.5 <i>Ausencia de una evaluación reguladora de la resolución de problemas</i>	273
7.1.6 <i>Presentación de problemas</i>	274
7.1.7 <i>Problemas matemáticos verbales presentados por escrito. Particularidades</i>	277
7.2 CONCLUSIONES RELATIVAS AL SEGUNDO OBJETIVO	281
7.2.1 <i>Factores que influyen en la creación y adecuación de una base de orientación</i>	283
7.2.2 <i>Análisis particular de los factores en la creación y refinamientos de las bases de orientación utilizadas</i>	288
7.3 CONCLUSIONES RELATIVAS AL TERCER OBJETIVO.....	294
7.3.1 <i>Efecto del uso de una base de orientación para la resolución de problemas en los alumnos</i> 294	
7.3.2 <i>Efectos en la práctica docente</i>	300
7.3.3 <i>La base de orientación como auto-andamiaje educativo de los alumnos</i>	302

8. CONCLUSIONES II: CONCLUSIONES METODOLÓGICAS Y ORIENTACIONES DIDÁCTICAS305

8.1 CONCLUSIONES METODOLÓGICAS	305
8.1.1 <i>Interacción entre los docentes implicados</i>	305
8.1.2 <i>Contribución a la educación a través de evidencias</i>	306
8.1.3 <i>Pequeñas mediciones cuantitativas en un estudio cualitativo</i>	306
8.1.4 <i>Precisión de términos</i>	307
8.2 ORIENTACIONES DIDÁCTICAS	311
8.2.1 <i>Implicaciones didácticas</i>	311
8.2.2 <i>Sugerencias didácticas</i>	311

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....319

PUBLICACIONES VINCULADAS A LA TESIS.....	319
REFERENCIAS.....	320

ANEXOS.....327

ANEXO 1. LOS PROBLEMAS	329
<i>Problema 0 y sus actualizaciones</i>	329
<i>Problema 1.1 y sus actualizaciones</i>	330
<i>Problema 1.2 y sus actualizaciones</i>	331
<i>Problema 1.3</i>	331
<i>Problema 1.4</i>	331
<i>Problema 2 y sus actualizaciones</i>	332
<i>Problema 3 y sus actualizaciones</i>	332
<i>Problema 4 y sus actualizaciones</i>	333
<i>Problema 5 y sus actualizaciones</i>	334
<i>Problema 6 y sus actualizaciones</i>	334
<i>Problema 7</i>	335
ANEXO 2	337
<i>Recopilación de ítems</i>	337
<i>Rúbrica Rb0</i>	339
<i>Rúbrica Rb1</i>	342
<i>Rúbrica Rb2</i>	345
ANEXO 3	349
<i>Base de Orientación BO1</i>	349
<i>Base de Orientación BO2</i>	350
<i>Base de Orientación BO3</i>	351
ANEXO 4.	353
<i>Registro de seguimiento por alumno</i>	353
<i>Registro de seguimiento grupo-clase y ejemplo de su uso</i>	354

INTRODUCCIÓN

Motivación

La identificación y despliegue de las competencias básicas en los centros educativos catalanes es una prioridad actual. A lo largo de esta década, en Catalunya se está trabajando para la adecuación y la aplicación de las competencias básicas (Departament d'Ensenyament, 2016). El trabajo que se está desarrollando ha permitido reconocer y delimitar lo que se debe entender por competencias básicas en las distintas áreas de conocimiento de los currículos catalanes. Sin embargo es complejo determinar cómo trabajarlas de manera consecuente en las aulas así como evaluar el efecto de sus intenciones en la comunidad educativa.

El hecho de ser competente radica en utilizar de manera efectiva conocimientos, habilidades y actitudes en contextos diferentes (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b). De ello que el objetivo de un currículo por competencias consista en enseñar para aprender y seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida. Entre todas las competencias, se ha observado que hay algunas que son comunes en muchos ámbitos de la vida y que se convierten en útiles para aprender y seguir aprendiendo a lo largo de ella. Éstas son las competencias básicas (Coll, 2007) y entre ellas se encuentra la competencia matemática.

La propuesta de un enfoque por competencias es un concepto instrumental, útil para expresar las intenciones educativas que se persiguen. Al pretender asegurarse que los alumnos toman consciencia de su propio proceso de aprendizaje, un currículo basado en competencias se considera un progreso respecto a enfoques y planteamientos precedentes. Sin embargo, como cualquier otro enfoque educativo, su puesta en práctica comporta también riesgos que no se pueden obviar ni descuidar (Coll, 2007).

Como se ha avanzado, entre las competencias que se consideran básicas de la escolarización catalana se encuentra la competencia matemática, entendida como la habilidad en entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en todo tipo de contextos y situaciones, sean íntegramente matemáticas o extra matemáticas pero en los que las matemáticas pueden tener algún papel (Niss y Niss y Højgaard, 2011). En otras palabras, se trata de la capacidad para pensar matemáticamente y aplicar el razonamiento matemático y herramientas adecuadas para describir, interpretar, representar, comunicar, plantearse, predecir, obtener, y generar distintos fenómenos matemáticos en el contexto que se encuentren (Generalitat de Catalunya, 2009). Como se desprende de esta posible definición, los requisitos que se necesitan para alcanzar esta competencia son diversos y de distinta naturaleza.

Las referencias consultadas a lo largo del trabajo que aquí presentamos, coinciden en que la resolución de problemas es un caracterizador del quehacer matemático (Carrillo y Guevara, 1996). Con ella se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática y por ello la resolución de problemas es considerada como el corazón, el eje central, de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick, 1978; Lester, 1994; Luelmo, 1996; Ponte, 2007; Schoenfeld, 1992). Se entiende entonces que, la resolución de problemas sea considerada una competencia matemática fundamental a desarrollar dentro de la competencia matemática desde edades tempranas.

Des de finales de los años 70, la comunidad investigadora ha trabajado de manera destacada para caracterizar la resolución de problemas, al tanto que estudiar cómo gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes convertirse en mejores resolutores (Ponte, 2007; Luelmo, 1996; Törner, Schoenfeld, y Reiss, 2007). Sin embargo, la noción de problema matemático, a lo largo del tiempo e influenciado por las tendencias de cada momento (Törner et al, 2007), ha sido utilizada de múltiples maneras, desde la realización de ejercicios rutinarios hasta el desarrollo de la actividad matemática profesional (Schoenfeld, 1992). Esta variedad de tareas ha llevado a los educadores de matemáticas a sentirse incómodos con respecto a este concepto (Ponte, 2007).

Con la identificación de la resolución de problemas como una competencia básica, nos cuestionamos por cómo debe entenderse la resolución de problemas y qué debe promover dentro de un currículo de la educación basado en competencias. Se desprende así la necesidad de revisar con interés la noción de problema matemático y cómo tratar el proceso de resolución de problemas en las aulas. Por consiguiente nos interesamos por las habilidades que comprende y pretende desarrollar la resolución de problemas en los alumnos y cómo tratarlos para asegurar un despliegue efectivo de lo que se debe entender por competencia en resolución de problemas. El interés por intentar responder estas cuestiones, es el motivo principal del presente estudio. En particular, el primero de nuestros objetivos (descrito en el apartado Objetivos de este capítulo introductorio) surge del interés por encontrar caracterizadores de la resolución de problemas en un enfoque competencial de las matemáticas en la enseñanza obligatoria.

El gran volumen de referencias sobre la resolución de problemas matemáticos pone de manifiesto que la resolución de problemas es una actividad compleja de llevar a cabo en el aula, tanto para estudiantes de cualquier edad (Mason, Burton y Stacey, 1982; Polya, 1945) como para docentes que intentan crear ambientes de trabajo adecuados (De Corte y Verschaffel, 2003; Schoenfeld, 2013). Se apunta que parte de esta dificultad radica en la habilidad de los estudiantes, como aprendices, para transferir el proceso de resolución de un problema a otras situaciones (Coltman, Petyaeva y Anghileri, 2002). Sin embargo, las evidencias enseñan que una intervención adecuada puede ayudar a tomar conciencia no sólo de encontrar una solución a un problema, sino de los procesos que permiten llegar a ella (Coltman et al., 2002; Sanmartí, 2007). Intervención que, para que sea adecuada y significativa, requiere de un proceso de evaluación, que permita analizar el estado del estudiante de acuerdo con la tarea propuesta. De ello se desprende la necesidad de una evaluación que preste atención en observar y cuestionar los alumnos, tanto para evaluar su comprensión como para comprender sus sentimientos y sus creencias acerca de lo que están trabajando (Lester y Kroll, 1991). Bajo una concepción competencial de la educación, apreciamos que justo esta capacidad de análisis sobre los procesos de resolución y una aplicación adecuada de ellos es, en gran parte, la esencia de una educación en la que se pretende que los alumnos adquieran la competencia en resolución de problemas para que la sigan desarrollando de manera autónoma en ocasiones posteriores.

De acuerdo con todo ello, observamos que desarrollar esta habilidad arriba comentada por parte de los alumnos requiere de un proceso evaluativo doble. Como se desprende del propio objetivo, es necesaria una evaluación del propio estudiante, como resolutor, sobre sus

procesos. Por otro lado, al tratarse de un objetivo educativo, la necesidad de una evaluación que, por ser aprendiz, vaya garantizándole la adquisición de la misma.

Ante ello, se observa que la forma tradicional de evaluar la resolución de problemas, basada únicamente en la evaluación final y, especialmente, calificadora del desempeño de los alumnos por parte de los docentes, no puede realmente revelar lo que los estudiantes aprenden (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013; Sanmartí, 2010). En respuesta a ello, surge, de forma natural, la necesidad de una evaluación reguladora (Lester y Kroll, 1991; Clarke, 1992; Sanmartí, 2010) de la resolución de problemas y, por consiguiente, la determinación de instrumentos que permitan desarrollarla de manera consecuente.

De acuerdo con ello, se distinguen dos finalidades de la evaluación. Por una lado, una de más tradicional, identificada como calificadora, cuyo objetivo fundamentalmente recae en establecer grados de aprendizaje. Por otro, la que pretende actuar como medio para regular los aprendizajes y de ahí que se hable de su función reguladora. A su vez, esta función reguladora puede ser canalizada de dos modos. De manera formativa, cuando las decisiones son tomadas fundamentalmente por el profesorado o formadora, cuando las decisiones son tomadas generalmente por el aprendiz (Sanmartí, 2010).

Entre las referencias a instrumentos específicos que permiten desarrollar una finalidad reguladora de la evaluación, encontramos las rúbricas de desempeño (Rosli et al., 2013; Sanmartí, 2010) con carácter formativo, y las bases de orientación (Sanmartí, 2010) con carácter formador. Sin embargo, las referencias a su implementación para la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria, y especialmente en el caso de las bases de orientación, son escasas.

El interés por caracterizar la competencia en resolución de problemas en un marco competencial de la educación, y ante el papel crucial que aparentemente toma la evaluación en este marco educativo, nos conduce a cuestionarnos por la generación y aplicación de estos instrumentos para la resolución de problemas en las aulas. Concretamente, nos preguntamos cómo se puede elaborar un instrumento con finalidad reguladora para ayudar a desarrollar la competencia de resolución de problemas matemáticos de los alumnos, y qué efectos puede tener su aplicación en el desempeño de los alumnos al resolver un problema. De estas cuestiones surge el segundo y parte del tercer objetivo de la investigación (descrito en el apartado Objetivos de este capítulo introductorio) que, como veremos, ante los resultados obtenidos, se centran en la naturaleza e implementación del instrumento de carácter formador, la base de orientación.

De manera paralela, al indagar entre los instrumentos que pudieran aportar una mejora en la gestión de la adquisición de la competencia en resolución de problemas, encontramos referencias a la metáfora del scaffolding (Wood, Bruner y Ross, 1976), que traducimos al español como andamiaje educativo. Tomado del campo de la construcción, el andamiaje educativo se define como aquel apoyo (temporal) que permite a los alumnos volverse progresivamente independientes, objetivo que identificamos con el que busca una educación por competencias. Con la intención de responder el tercero de los objetivos propuestos (descrito en el apartado Objetivos de este capítulo introductorio), nos interesamos en qué sentido una base de orientación conlleva un andamiaje efectivo de la resolución de problemas.

Por ello, aunque conscientes de su dificultad, indagamos en cómo evaluar la eficacia de una de las bases de orientación construidas como andamiaje educativo.

Concreción

De acuerdo con la definición de competencia básica, en el sistema educativo catalán, las competencias básicas deben trabajarse a lo largo de la escolarización obligatoria con el objetivo que sean adquiridas al finalizar la escolarización obligatoria. Si bien el trabajo con ellas debe iniciarse desde la entrada a la Educación Primaria, con el paso a la Educación Secundaria debe asegurarse su consolidación. En Catalunya, estas etapas se caracterizan, además, por el distinto perfil que comúnmente presentan los docentes implicados. Dejando de lado los docentes novicios que pueden ejercer en cada una de estas etapas, el docente habitual de Educación Primaria, conocido como maestro, responde a un perfil generalista que, a menudo, no sólo trabaja las matemáticas sino también las otras materias curriculares. Por otro lado, el profesor de matemáticas de secundaria tiene una formación específica, aunque no siempre puramente matemática, de modo que imparte solamente las matemáticas o, como mucho, alguna otra relacionada con las ciencias o tecnología. Centramos, por ello, nuestras preguntas de estudio en último curso de Educación Primaria y primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, en aulas de centros catalanes con maestros y profesores, respectivamente, que cuentan con un mínimo de experiencia docente.

El trabajo que se presenta se basa, en su parte fundamental, en el estudio de evidencias, aunque recoge también las percepciones y creencias de los distintos participantes, además de los consejos de los especialistas de los temas tratados. Los datos que se analizan proceden, en su mayor parte, de las producciones de los alumnos en base a los instrumentos para la resolución de problemas generados, seleccionados e implementados, y se complementan con las aportaciones de los distintos participantes en el estudio.

A su vez, se trata de un estudio de carácter cualitativo, aunque, ante la intención de medir la efectividad de uno de los instrumentos generados, la última base de orientación generada como andamiaje educativo, se introduce una herramienta de análisis cuantitativo, el Test Exacto de Fisher. Esta prueba, adecuada especialmente para muestras pequeñas, permite, a su vez, consolidar y ampliar las evidencias analizadas cualitativamente.

Añadir, finalmente, que la finalidad que se pretende con el presente estudio es doble. Por un lado, como acción de investigación, aportar evidencias y argumentaciones significativas a la comunidad investigadora en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente, en la adquisición de la competencia en resolución de problemas. Por otro, compartir los instrumentos elaborados y utilizados para el estudio y su correspondiente análisis con la comunidad educativa, con el propósito que puedan ser adaptadas e implementadas en la práctica docente habitual.

Objetivos

Con todo ello, situamos el estudio en el último curso de Educación Primaria y primer curso de Educación Secundaria del sistema educativo catalán actual, y concretamos los tres objetivos de investigación que nos planteamos de responder con el trabajo:

1. Caracterizar la competencia en resolución de problemas en la enseñanza obligatoria y elaborar una pauta de indicadores de la misma.
2. Elaborar un instrumento con finalidad reguladora de la competencia de resolución de problemas matemáticos de los alumnos y analizar el proceso de su construcción.
3. Aplicar el instrumento con finalidad reguladora para la competencia de resolución de problemas matemáticos desarrollado y analizar los efectos de su utilización.

1. MARCO TEÓRICO

En el currículo catalán vigente, se considera la resolución de problemas como una competencia fundamental dentro de la competencia matemática que, por consiguiente, debe de ser adquirida por todos los alumnos a lo largo de su escolarización obligatoria. Sin embargo, sigue siendo un reto para la comunidad escolar ayudar a los alumnos alcanzar dicha competencia. Interesados por mejorar la gestión de su adquisición cabe, en primer lugar, determinar qué se entiende por competencia matemática y por competencia en resolución de problemas en el sistema escolar actual. Para determinar cómo trabajarla, se hace necesaria una revisión sobre la resolución de problemas matemáticos. Para ello, revisaremos el concepto de problema matemático, lo que supone resolver un problema así como indagar entre los factores que pueden influir en ello.

La revisión sobre la resolución de problemas, así como de la educación basada en competencias, desvelan el papel fundamental que toman los aspectos reguladores en la resolución de problemas en un marco competencial de la educación matemática. Atendiendo este hecho, examinaremos la gestión de la evaluación de la resolución de problemas y buscaremos posibles instrumentos adecuados para ello.

Al indagar entre instrumentos que puedan aportar una mejora en la gestión de la adquisición de la competencia en resolución de problemas y determinar su efectividad, descubrimos el término *scaffolding*, que traducimos en español como andamiaje educativo. Se trata de una metáfora tomada del campo de la construcción entendida en el campo de la educación como aquel apoyo (temporal) que permite a los alumnos volverse progresivamente independientes. El paralelismo entre el objetivo del andamiaje educativo con el que pretende una educación basada en competencias explica la atención que daremos a dicho término.

1.1 Competencia Matemática

1.1.1 Competencias básicas

El objetivo principal de una educación obligatoria basada en un currículo por competencias es que los alumnos adquieran los recursos y habilidades necesarias para entender el mundo en que vivimos y con ello convertirse en personas capaces de intervenir de manera activa i crítica en la sociedad dinámica y plural en la que nos encontramos. Además de saber, saber hacer, saber ser y saber estar, los alumnos deben de aprender a actuar para realizarse a nivel personal y convertirse en personas responsables, autónomas e integradas socialmente, para ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaces de adaptarse a nuevas situaciones, desarrollando así un proceso de aprendizaje permanente a lo largo de toda su vida (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b).

Ser competente (en un determinado ámbito de la vida personal, profesional o social) consiste en disponer y dominar (en el grado justo, en función de las condiciones y circunstancias) la manera en qué utilizar aquellos aspectos esenciales de la vida o recursos personales (habilidades, actitudes, conocimientos y experiencias) que permitan resolver de forma adecuada una tarea en el contexto en cuestión (Coll, 2007; Niss y Højgaard, 2011). En otras palabras, ser competente radica en utilizar de manera efectiva conocimientos, habilidades y actitudes en contextos diferentes (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b).

De todas las competencias, hay unas que son accesibles a todas las personas, son comunes en muchos ámbitos de la vida y se convierten en útiles para seguir aprendiendo a lo largo de ella. Estas competencias son las que las que convierten un aprendiz en un aprendiz competente, las que están en la base de la capacidad para seguir aprendiendo a lo largo de la vida, las que permiten desarrollar las capacidades metacognitivas que hacen posible un aprendizaje autónomo y autodirigido (Coll, 2007). Son éstas las que se designan como competencias básicas (Coll, 2007) y dan sentido y vertebran un currículo de la educación por competencias (Direcció General d'Educació Infantil i Primària, 2013; Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, 2013).

Las competencias que se entienden como básicas en el actual sistema educativo catalán y que, por consiguiente, se espera que los alumnos adquieran a lo largo de la educación obligatoria son (Departament d'Ensenyament, 2016) las ocho que se detallan en la Tabla 1.1:

Competencias básicas

1. Competencia comunicativa, lingüística i audiovisual
 2. Competencia matemática
 3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
 4. Competencia artística i cultural
 5. Competencia digital
 6. Competencia social i ciudadana
 7. Competencia de aprender a aprender
 8. Competencia de autonomía, iniciativa personal y emprendedora
-

Tabla 1.1. Competencias básicas en el currículo de la Enseñanza Obligatoria en Catalunya (Departament Ensenyament, 2016).

Cuando las competencias básicas son el eje vertebral del currículo, no se puede entender una enseñanza sin enseñar a aprender ni dar las herramientas para seguir aprendiendo, de manera autónoma, a lo largo de toda la vida. Por consiguiente, un currículo por competencias significa enseñar para aprender y seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida. Con ello, devenirse “competente” implica hacerse consciente que el proceso de enseñanza y de aprendizaje tiene un recorrido más allá de la escolaridad obligatoria. Para ello son fundamentales tres aspectos: la integración de conocimientos, la funcionalidad de los aprendizajes y la autonomía personal de los alumnos que permite tomar consciencia del propio proceso de aprendizaje (Direcció General d'Educació Infantil i Primària, 2013; Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, 2013).

Por ello, si por competencia básica se entiende la forma en que cualquier persona utiliza sus recursos personales (habilidades, actitudes, conocimientos y experiencias) para actuar de manera activa y responsable en la construcción de su proyecto de vida, tanto a nivel personal como social, es necesario trabajar las competencias básicas a través de experiencias educativas diversas, ordenadas y definidas de manera adecuada, y que integren tareas suficientes y necesarias para que se pueda aprender los elementos que conforman la determinada competencia (Coll, 2007). Por consiguiente, la eficacia en la consecución de las competencias básicas, depende, en particular, de una buena coordinación entre las actividades escolares, la participación del alumnado en el proceso de aprendizaje propio; la complementación del trabajo individual y del trabajo cooperativo; y el uso de determinadas metodologías y recursos didácticos (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b).

Es importante remarcar que el concepto de competencia es un concepto instrumental, útil para concretar las intenciones educativas. Su interés reside en los matices que aporta a la manera de entender los aprendizajes que se aspira a promover mediante la educación escolar. Los enfoques basados en competencias suponen un progreso respecto a enfoques y planteamientos precedentes, pero hay que ser conscientes que presenta también limitaciones importantes y que su puesta en práctica puede comportar riesgos y peligros, a los que conviene prestar especial atención (Coll, 2007).

1.1.2 Competencia Matemática

De acuerdo con la propuesta realizada por la Unión Europea, en el sistema educativo catalán, la competencia matemática se considera una competencia básica (ver Tabla 1.1). Hablar de competencia matemática nos conduce a los trabajos de Mogens Niss, matemático danés director del proyecto KOM (*Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas*) en Dinamarca desarrollado entre los años 2000 y 2002 con la intención de caracterizar el currículo de las matemáticas de su país en términos de competencia matemática; y de Luis Rico y José Luis Lupiáñez, investigadores españoles que reflexionan sobre las competencias matemáticas desde una perspectiva curricular en España.

El objetivo principal del proyecto KOM liderado por Niss consistió en crear un marco para la reforma exhaustiva de la enseñanza de las Matemáticas en Dinamarca, desde la escuela hasta la universidad. El documento que recoge el proyecto fue publicado en danés en octubre de 2002 (Niss y Jensen, 2002). Posteriormente, en 2011, se hizo una traducción en inglés (Niss y Højgaard, 2011) que incluye algunas otras reflexiones a las puramente iniciales. Las citas al proyecto KOM que aparecen en el presente trabajo se referirán a la edición inglesa de 2011 o bien a un resumen del proyecto elaborado por el mismo autor en 2003.

Poseer la competencia matemática significa dominar las matemáticas, en otras palabras, disponer de la capacidad de comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones distintas que tanto formen parte de las propias matemáticas como fuera de ellas, en el que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel determinado (Niss y Højgaard, 2011). En el currículo catalán se establece que la competencia matemática es necesaria en la vida personal, escolar y social y que, esta competencia cobra realidad y sentido en la medida en que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a situaciones cotidianas. De ahí su relevancia y el por qué se trata de una competencia básica, hay que considerarla en todas las áreas del currículo y actividades de aprendizaje de la educación obligatoria.

La competencia matemática implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana; elaborar la información a través de herramientas matemáticas (mapas, gráficos...) para poder interpretar, y poner en práctica procesos de razonamiento que conduzcan a la solución de problemas o la obtención de la información. De ello se desprende como la habilidad de analizar, interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones forma parte de la competencia matemática. Como también, seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la

lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados los razonamientos válidos (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b). Para trabajar, y al mismo tiempo ir adquiriendo la competencia matemática, son necesarios ciertos requisitos previos como una variedad de conocimientos, habilidades y técnicas. Sin embargo, estos requisitos no son suficientes, como el vocabulario, la ortografía y la gramática son requisitos necesarios pero no suficientes para la alfabetización. Estos requisitos, sin embargo, que como acabamos de ver comprenden una variedad de conocimientos procedentes de la experiencia y habilidades técnicas se convierten en herramientas básicas para adquirir y profundizar la competencia matemática (Niss, 2003).

Desde un punto de vista curricular de las matemáticas, Rico y Lupiáñez (2008) conciben el término competencia como el conjunto de aquellos procesos cognitivos que los alumnos son capaces de llevar a cabo a partir de sus conocimientos y destrezas. Con ello, el concepto de competencia matemática se refiere a la riqueza cognitiva que se alcanza por medio de la matemática y expresa los procesos o modos de actuación que tiene lugar por medio de los conocimientos matemáticos y que van más allá de su dominio formal, mostrándose la variedad y desarrollo de procesos al abordar tareas complejas en situaciones abiertas y dando respuesta a problemas no convencionales. A su entender, las competencias expresan expectativas generales sobre el aprendizaje de los alumnos, en tanto que describen aquellos procesos cognitivos cuyo dominio está orientado a la formación en el largo plazo.

Cabe aquí introducir el término expectativas de aprendizaje que, de acuerdo con estos autores, expresa lo que, desde diferentes niveles, se espera que los alumnos alcancen, desarrollen y usen por medio del aprendizaje producido mediante su formación educativa. Así, en el caso de las matemáticas, las expectativas de aprendizaje se sostienen en actuaciones, contenidos y tareas, de manera que las expectativas expresan ciertos usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden desarrollar, observar o inferir a partir de las actuaciones de los alumnos ante determinadas tareas (Rico y Lupiáñez, 2008). De acuerdo con ello, la competencia matemática cubre un nivel de expectativa sobre el aprendizaje de los alumnos que, como en especial los objetivos específicos, posee gran importancia en la labor de los docentes. En este sentido, cabe distinguir entre competencia y objetivos específicos por referirse a dos aspectos claves en el proceso de enseñanza. Si bien en ambos casos las actuaciones de los alumnos ante determinadas tareas permiten observar el grado de consecución de estas expectativas, en el caso de los objetivos específicos esas tareas están vinculadas a un contenido matemático concreto, mientras que en el caso de las competencias las tareas son más abiertas y deben referirse a diferentes situaciones y contextos. Con ello, se concluye que los objetivos específicos se refieren a las expectativas de aprendizaje acerca de cada uno de los temas de matemáticas que conforman los diferentes cursos y etapas educativas mientras que las competencias, expresan finalidades educativas a largo plazo, que han de desarrollarse paulatinamente a lo largo de todos esos cursos y etapas (Rico y Lupiáñez, 2008).

Dentro de la competencia matemática, Niss y Højgaard (2011) distinguen ocho (sub)competencias matemáticas, la combinación y convivencia de los cuales (cada una en la medida que le corresponda) determinan lo que perciben como competencia matemática. Desde su punto de vista, todas ellas tienen algún papel en todos los niveles educativos. Los autores organizan estas ocho competencias matemáticas en dos grupos en función de su

naturaleza. Como se desprende de la Tabla 1.2, un primer grupo está relacionado con la capacidad de formular y responder preguntas sobre y mediante las matemáticas; y el segundo está vinculado con la capacidad de hacer frente y manejar el lenguaje y herramientas matemáticas concretas.

GRUPO 1

Competencias relacionadas con la capacidad de formular y responder preguntas sobre y mediante las matemáticas:

- Pensamiento matemático Dominar diferentes maneras matemáticas de pensar.
 - Trabajo con problemas Formular y resolver problemas matemáticos.
 - Modelización Analizar y construir modelos matemáticos que relacionados con otras áreas.
 - Razonamiento Razonar matemáticamente.
-

GRUPO 2

Competencias relacionadas con la capacidad de hacer frente y manejar el lenguaje y las herramientas matemáticas:

- Representación Manejar diferentes tipos de representaciones de entidades matemáticas.
 - Lenguaje simbólico y formal Capaz de manejar símbolos y lenguaje matemático formal.
 - Comunicación Comunicarse en, de, con y sobre matemáticas.
 - Recursos educativos Utilizar y relacionar materiales y recursos matemáticos (incluyendo TIC)
-

Tabla 1.2. Despliegue de la competencia matemática según Niss y Højgaard (2011)

De este modo, la adquisición de la competencia matemática, se consigue en la medida en que los conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas se aplican de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, procedentes de otros campos del conocimiento y de la vida cotidiana, aumentando así la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, favoreciendo la participación efectiva en la vida social.

En el currículo catalán, se dice que alcanzar la competencia matemática implica:

- pensar matemáticamente
- razonar matemáticamente
- plantear y resolver problemas
- obtener, interpretar y generar información con contenido matemático
- utilizar las técnicas matemáticas básicas, expresiones, procesos y resultados matemáticos
- comunicar el trabajo y los descubrimientos

Para facilitar como abordarlas, se impulsó el desarrollo de la competencia matemática en una serie de competencias matemáticas agrupadas, a su vez, en cuatro dimensiones diferenciadas (Direcció General d'Educació Infantil i Primària, 2013; Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, 2013). Estas dimensiones y las respectivas competencias matemáticas que las determinan, son las que, de acuerdo con la etapa educativa (Primaria y Secundaria) se especifican en la Tabla 1.3:

Dimensión Resolución de problemas

Primaria **Competencia 1.** Traducir un problema a una representación matemática y utilizar conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo.
Competencia 2. Dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas.
Competencia 3. Hacer preguntas y generar problemas de tipo matemático.

Secundaria **Competencia 1.** Traducir un problema en lenguaje matemático o en una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados.
Competencia 2. Utilizar conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolver problemas.
Competencia 3. Mantener una actitud de búsqueda ante un problema ensayando estrategias diversas.
Competencia 4. Generar preguntas de tipo matemático y plantear problemas.

Dimensión Razonamiento y prueba

Primaria **Competencia 4.** Hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas.
Competencia 5. Argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos próximos.

Secundaria **Competencia 5.** Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas.
Competencia 6. Utilizar el razonamiento matemático en entornos no matemáticos.

Dimensión Conexiones

Primaria **Competencia 6.** Establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto.
Competencia 7. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.

Secundaria **Competencia 7.** Usar las relaciones que existen entre las diversas partes de las matemáticas para analizar situaciones y para razonar.
Competencia 8. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones próximas y académicas y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.

Dimensión Comunicación y representación

Primaria **Competencia 8.** Expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible utilizando el lenguaje verbal (oral y escrito).
Competencia 9. Usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación.
Competencia 10. Usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones que ofrecen.

Secundaria **Competencia 9.** Representar un concepto o relación matemática de varias maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático.
Competencia 10. Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los demás.
Competencia 11. Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas.
Competencia 12. Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y

mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

Tabla 1.3. Despliegue de la competencia matemática del currículo en Catalunya (Direcció General d'Educació Infantil i Primària, 2013; Direcció General d'Educació Secundària Obligatoria i Batxillerat, 2013).

La variedad de competencias que influyen, a su vez, en la adquisición de la competencia matemática, justifica que una adquisición efectiva de la misma esté asociada al enfrentamiento de prácticas diversas, situadas en distintos contextos, y que tengan sentido tanto para el alumnado como para el conocimiento matemático que se pretende desarrollar. Por ello se propone la realización de actividades de aprendizaje en un contexto de resolución de problemas, entendida en un sentido amplio, situando así la resolución de problemas como el núcleo de la enseñanza de las matemáticas (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a i 2009b). De manera paralela, para capacitar al alumnado en el uso de todo lo que aprende y para capacitarlos a seguir aprendiendo de forma autónoma a lo largo de toda la vida, es fundamental que aprendan con comprensión. Por ello, es necesario proporcionar en todas las clases de matemáticas oportunidades para que el alumnado aprenda no sólo matemáticas sino también a razonar matemáticamente.

De acuerdo con esta visión competencial de la educación matemática, distinguimos entre, al menos, dos puntos de vista distintos, aunque no necesariamente disjuntos sobre la resolución de problemas. Por un lado, en sentido amplio, como medio a través del cual conocer, aprender y profundizar la propia matemática y, por otro, como una competencia en si misma a través de la cual aprender a pensar y razonar matemáticamente.

1.2 Resolución de problemas

1.2.1 La resolución de problemas en el quehacer matemático

La resolución de problemas es un aspecto caracterizador del quehacer matemático (Carillo y Guevara, 1996). Con ella se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática. Ello explica porqué la resolución de problemas se considere como el corazón, el eje central, de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick, 1978; Lester, 1994; Luelmo, 1996; Ponte, 2007; Schoenfeld, 1992).

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, y de acuerdo con las referencias consultadas, se desprende la necesidad de no sólo enseñar matemáticas para resolver problemas, sino también de enseñar matemáticas a partir y a través de la resolución de problemas (Mason, Burton y Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985, 1992; Vila y Callejo, 2004a). La resolución de problemas da la oportunidad de despertar en los alumnos el gusto por enfrentarse a un reto, involucrarse de manera tenaz, experimentar, indagar buscando la ayuda necesaria, saborear el éxito y adquirir confianza en las propias capacidades. En el proceso de resolución de un problema intervienen varias etapas, procesos y herramientas que, a su vez, pueden hacer entender mejor el problema propuesto como otros, trabajados con anterioridad como futuros, así como su forma de pensar y actuar. En este sentido, la presencia y la importancia de la resolución de problemas en las propuestas curriculares se ha mantenido e, incluso, intensificado (Castro, 2008; Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007).

A lo largo de estos años se ha trabajado de manera destacada para caracterizar la resolución de problemas, al mismo tiempo que estudiar cómo gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje que puedan garantizar a los alumnos convertirse en mejores resolutores (Ponte, 2007; Luelmo, 1996; Törner et al., 2007), deseo complicado si inicialmente no se dispone de una caracterización clara de lo que se debe entender por resolver un problema matemático. Si bien los primeros trabajos se centraron en describir los procesos necesarios para la resolución de problemas, los posteriores se han focalizado en la identificación de aquellas singularidades de quiénes resuelven los problemas que contribuyen a su éxito (Voskoglou, 2008). Los estudios más actuales sitúan la planificación y el monitoreo como factores clave en el éxito de la resolución de problemas así como la influencia de dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones (De Corte, Verschaffel y Op't Eynde, 2000a; Schoenfeld, 1985, 1992 y 2013; Vila y Callejo, 2004a y 2004b). Sin embargo, a pesar de los numerosos trabajos sobre ello, sigue resultando una tarea compleja de orientar y adquirir, tanto para la mayoría de docentes que trabajan para la creación de un ambiente de clase propicio para la adquisición de habilidades para la resolución de problemas (De Corte y Verschaffel, 2003; Schoenfeld, 2013) como para aprendices de todas las edades (Mason et al., 1982; Polya, 1945).

A la vista de los distintos enfoques sobre la resolución de problemas, y ante el objetivo de contribuir en la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, es imprescindible establecer qué se entiende por problema matemático, qué se entiende por resolver un problema y qué factores pueden influir en ello. De otra manera, será complicado abordar las dificultades observadas en dicha práctica.

1.2.2 La noción de problema matemático

La noción de problema matemático, a lo largo del tiempo y bajo las influencias de las tendencias de cada momento (Törner et al, 2007), ha sido utilizada de múltiples maneras, desde la realización de ejercicios rutinarios hasta hacer matemáticas como un profesional (Schoenfeld, 1992). La variedad de tareas que se han identificado como problemas ha llevado a los educadores de matemáticas a sentirse incómodos con respecto a este concepto (Ponte, 2007). Es necesario, entonces, indagar en las distintas concepciones para dar una idea de lo que debemos entender por problema matemático.

Las reflexiones sobre el comportamiento de sus estudiantes más entusiastas así como el suyo propio permitieron a Polya (1945) dar una caracterización de la noción de problema matemático. Su descripción de problema enfatiza los cambios a los que, de manera constante todo resolutor se ve expuesto al intentar resolver un problema. Así lo describe en su obra *Problem Solving: "Tratando de encontrar la solución, podemos cambiar repetidamente nuestro punto de vista, nuestra manera de ver el problema. Tenemos que cambiar nuestra posición una y otra vez. Es probable que nuestra concepción del problema sea bastante incompleta cuando comencemos el trabajo. Nuestra perspectiva es diferente cuando hemos hecho algún progreso, es otra vez diferente cuando casi hemos obtenido una solución"* (Polya, 1945). Junto a ello, destaca las formas y los medios de invención y descubrimiento por los que uno pasa al resolver un problema y sugiere que al resolver un problema uno puede experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento (Polya, 1945). Por otro lado, Polya (1945) hace una distinción entre problemas matemáticos y problemas prácticos (o aplicados). Bajo su punto de vista, los datos, las condiciones, los conceptos y los conocimientos previos necesarios que se

requieren para resolver los problemas aplicados hacen que sean más complejos que los problemas matemáticos puros. Sin embargo, los motivos y procedimientos fundamentales de resolución son compartidos por ambos tipos de problemas. Además de ello, distingue entre problemas de hallar solución y problemas de probar. El objetivo de un problema de hallar solución es encontrar un objeto determinado, lo desconocido del problema. El objetivo de un problema de probar, en cambio, es demostrar de manera concluyente que una afirmación es verdadera, o bien mostrar que es falsa. Finalmente, introduce la idea de problema de rutina, cuando el problema puede resolverse sustituyendo datos especiales en un problema general previamente resuelto o siguiendo paso a paso, sin ningún rastro de originalidad, algún ejemplo ya conocido.

Influenciados por la obra de Polya (1945), Ponte (2007) recupera la definición de Ponte y Abrantes (1982) en la que definen un problema como una cuestión en la que, para resolverla, el resolutor no dispone de ningún proceso rutinario preparado, sino que, contrariamente, estimula su curiosidad y su voluntad de trabajar en ella. Matizan, además, que al resolver un problema, quien pretende enfrentarse a él, está llamado a tener una participación activa. Debe sentirse y actuar como un matemático: ante cada nueva situación, debe pensar por sí mismo, tomar sus propias decisiones y evaluar el trabajo que ha hecho. En este sentido, sugieren que el resolutor debe sentirse envuelto en una actividad similar a la del matemático profesional (Ponte y Abrantes, 1982). De acuerdo con ello, Ponte (2007) enfatiza que la resolución de problemas, como cualquier proceso de investigación, requiere de imaginación y creatividad, así como de capacidades que se encuentran más allá de la simple computación y memorización de definiciones y procedimientos. De acuerdo con la tesis doctoral de Abrantes (1994), señala que estas habilidades están relacionadas con la comunicación, el espíritu crítico, la modelización, el análisis de datos, la deducción lógica y varios procesos metacognitivos. Así mismo, el autor remarca la necesidad de diferenciar entre un problema matemático y un problema de investigación, pues mientras que los problemas matemáticos tienden a ser caracterizados por objetivos y metas bien definidos, las investigaciones son mucho más flexibles en ese sentido, de manera que la primera tarea del estudiante es hacerlas más precisas. En los problemas de investigación, la cuestión a resolver no está completamente formulada de antemano y el resolutor debe previamente trabajar para definir la cuestión matemática a perseguir (Ponte, 2007).

En su libro destinado a los estudiantes y pensado para que pueda considerarse como un manual para el desarrollo del pensamiento matemático, Mason et al. (1982) explican, desde su experiencia, cómo atacar cualquier cuestión matemática de una manera eficaz al tiempo que ir aprendiendo de la propia experiencia. Advierten que para ir resolviendo cuestiones matemáticas se requiere una participación a tres niveles: física, emocional e intelectual. En este sentido, destacan el papel que juegan los sentimientos y emociones del resolutor al intentar resolver un problema y la dificultad en dominarlas. Así mismo, destacan que con la práctica, las instantáneas emocionales disminuyen cada vez más, y la conciencia de sus estados aumenta. De su obra, además, se desprende que una cuestión matemática será realmente un problema cuando ésta genere una situación de atasco a quien pretende resolverlo al tiempo que, de alguna manera, la cuestión a resolver perdura en el sí del resolutor. O, dicho de otro modo, cuando el problema generado avanza en el sí del resolutor.

En orden cronológico, destacamos ahora los hallazgos de Schoenfeld (1983) quien argumenta que un problema es sólo un problema si quien pretende resolverlo no sabe cómo resolverlo. Si la tarea no presenta "sorpresas" a su resolutor, cuando el resolutor puede resolverlo por procedimientos rutinarios o familiares mediante la aplicación de técnicas o algoritmos más o menos complicados o automatizados, no se trata de un problema sino de un ejercicio. Expone que si bien el trabajo con estos ejercicios puede ser interesante para el aprendizaje de ciertos aspectos de la matemática, el trabajo que requieren no se puede considerar como resolver un problema, a menos que estén presentados en un contexto inusual que requiera de un trabajo previo de matematización. Además, añade que un problema no es un problema hasta que uno quiere realmente resolverlo. Cuando uno quiere resolver un problema, emerge un compromiso emocional e intelectual con la resolución, cuyos riesgos y recompensas actúan y acompañan este mismo compromiso (Schoenfeld, 1983).

Abrantes (1989) introduce la idea de "buen problema". Para este autor se trata de un concepto relativo, no sólo porque depende del conocimiento previo que el resolutor tenga, sino también de otras razones de carácter educativo. Por un lado, la necesidad de que el estudiante esté interesado en resolverlo, pues si se elude la dificultad, no existe problema. Por otro, la variedad de problemas y la influencia de la experiencia con ellos. En este mismo trabajo y de acuerdo con Borasi (1986), Abrantes (1989) distingue entre siete tipos diferentes de problemas-ejercicio, que intentemos resumir en la Tabla 1.4:

Ejercicio	Tarea para la que el estudiante dispone de un determinado procedimiento o algoritmo automático que le permite solucionarlo sin generar dudas de cómo proceder.
Problema de palabras	Ejercicio disfrazado en contexto, cuya declaración resulta ser irrelevante con lo que una cierta repetición de los mismos hace que su transformación en ejercicio sea automática
Problema para ecuacionar	Ejercicio disfrazado en contexto que puede ser traducido por una ecuación. En este sentido el enunciado no tiene ningún papel destacado.
Problema para descubrir	Problema que habitualmente se plantea en los concursos u otras iniciativas no curriculares con el fin de despertar la curiosidad y el gusto por las matemáticas. Su resolución requiere casi siempre una comprensión de la manera correcta, una idea brillante. El enunciado contiene toda la información relevante (y no más que eso) y el contexto rara vez necesita ser explorado. Casi siempre tiene una solución única y bien definida.
Problema de la vida real	Se trata de una situación en la que el contexto es la vida real. Se trata de la matematización de situaciones de la vida real adecuadas a los alumnos. Por su forma realista de presentarse, el enunciado no tiene formulación matemática directa y puede implicar conocimientos extra matemáticos relacionados con el contexto. En general, no hay una solución única y las diversas soluciones aceptables pueden no ser exactas, sino aproximadas.
Situación problemática	Se trata de una situación en la que el contexto es la propia matemática. El contexto, al ser en sí mismo problemático, requiere ser explorado. Ello invita a generar preguntas, conjeturas y, por consiguiente, ser probarlas. Implica desarrollar uno o más problemas. No suele tener una solución única. De ellos se desprende otra actividad esencial en los estudiantes, la

	de formular situaciones problemáticas.
Situación inicialmente no problemática	Cuando no se formula ningún problema, ni siquiera implícitamente, pero hay una clara invitación a explorar el contexto en que se presenta.

Tabla 1.4. Tipos de problemas según Borasi (1986) y Abrantes (1989)

De acuerdo con esta clasificación, Abrantes (1989) afirma que los tres últimos tipos de problemas, aún siendo los que conllevan una práctica más interesante, son los más ignorados en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Ponte (2007) destaca la similitud entre las ideas de “situación problemática” y “actividad de investigación”.

En su estudio, Lester, Garofalo, y Kroll (1989) distinguen entre problemas rutinarios y no rutinarios. Por problemas rutinarios conciben ejercicios descritos en palabras, que pueden integrar varios pasos, destinados a proporcionar a los alumnos la práctica de traducir los problemas verbales planteados en contextos del mundo real en expresiones matemáticas. En cuanto a problemas no rutinarios, distingue entre tres tipos: problemas de proceso, entendidos como problemas para los que no existe un algoritmo estándar para extraer o representar la información dada, y, por lo tanto, para ser resuelto es necesario hacer algo más que traducir palabras a una expresión matemática, o aplicar un algoritmo, o realizar cálculos; y problemas con información superflua o insuficiente.

Por su parte, Vila y Callejo (2004a y 2004b) reservan el término problema para designar una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible a quien pretende resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto, debe buscar, investigar, establecer relaciones implicar sus afectos, etc. para afrontar una situación nueva. De ello coinciden con Schonefeld (1992) al dar una caracterización de la idea de problema entendida como herramienta para pensar matemáticamente. Es decir, utilizar los problemas como medio para poner el énfasis en los alumnos, en sus procesos de pensamiento y en los métodos interrogativos; una herramienta para formar sujetos con capacidad autónoma de resolver problemas, críticos y reflexivos, capaces de preguntarse por los hechos, sus interpretaciones y explicaciones, de tener sus propios criterios modificándolos si es preciso y de proponer soluciones (Vila y Callejo, 2004a y 2004b).

Finalmente, recogemos las ideas de Niss y Højgaard (2011), para quienes un problema matemático (formulado) es un tipo muy concreto de pregunta matemática que requiere un proceso de investigación matemática para poderlo resolver. Además, puntualizan que la noción de "problema matemático" no es absoluta, sino que es relativa a la persona que se encara con el problema, ya que lo que puede ser una tarea rutinaria para una persona puede convertirse en una tarea de investigación para otra, y viceversa. Con ello, concluyen que la competencia del trabajo con problemas es la que conlleva saber formular y saber resolver problemas matemáticos, que a su vez describe como: saber presentar (que, a su vez, incluye detectar, formular, delimitar y especificar) diferentes tipos de problemas matemáticos, ya sean puros (contextualizados en la misma matemáticas) o aplicados (contextualizados fuera de las matemáticas), de respuesta abierta o cerrada y saber solucionar estos problemas matemáticos tal como hayan sido formulados (ya sea por uno mismo o por otros) y, si es necesario o

deseable, resolverlos de diferentes maneras. Distinguen, además, entre ser capaz de detectar y formular problemas matemáticos y ser capaz de resolver problemas matemáticos ya formulados, ya que es posible formular problemas matemáticos sin ser capaz de resolverlos. Incluso se puede formular un problema que trabaje con conceptos elementales, sin que sea posible llegar a la solución usando estas ideas elementales. Del mismo modo, es posible ser bueno resolviendo problemas sin ser bueno en encontrarlos o formularlos.

En el sistema educativo catalán se explicita que un problema debe entenderse como una propuesta de enfrentamiento con una situación desconocida que se plantea a través de un conjunto de datos dentro de un contexto, para la que, en principio, no se dispone de una respuesta inmediata sino que requiere reflexionar, tomar decisiones y diseñar estrategias. Un problema siempre debe invitar a la investigación y, en su resolución, debe haber una chispa de descubrimiento que permita experimentar el encanto de lograr la solución (Direcció General d'Educació Infantil i Primària, 2013; Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, 2013).

1.2.3 El proceso de resolución de un problema

Con la intención de que los docentes puedan ayudar a sus alumnos de manera conveniente, Polya (1945) identifica cuatro fases en el proceso de resolución. En primer lugar, entender el problema, en el sentido que se tiene que ver claramente lo que se requiere. En segundo lugar, hay que divisar cómo se conectan los distintos ítems, cómo se vincula lo desconocido con los datos para obtener la idea de la solución, y así trazar un plan. Tercero, se debe aplicar el plan. Finalmente, y cuarto, hay que mirar atrás en la resolución para revisarla, y extraer conocimientos para futuras ocasiones.

Desde una perspectiva basada en lo que siente el aprendiz de resolutor al enfrentarse a un problema y con el objetivo de que aprendan a hacerlo con la experiencia y la propia reflexión, Mason et al. (1982) distingue entre procesos, fases y estados. Los procesos se concretan concretar y generalizar, los que, a su vez, se ven relacionados por los de conjeturar y justificar. Las fases que identifican son tres: abordaje, ataque y revisión. La fase de abordaje es imprescindible en cualquier proceso de resolución porque es cuando uno comienza a enfrentarse a una cuestión. En ella se absorbe la información dada y se averigua lo que la pregunta está preguntando en realidad. El ataque, se inicia cuando uno interioriza la cuestión planteada y se siente la necesidad de trabajarla y finaliza cuando se resuelve el problema, o se abandona. Finalmente, tanto si se llega a una resolución razonablemente satisfactoria como se está a punto de renunciar, es esencial revisar el trabajo. Hay que mirar hacia atrás en lo que ha sucedido con el fin de mejorar y ampliar lo desarrollado. Esta es la fase de revisión. Por último los estados, vinculados a cada una de las fases, que se concretan en: introducirse e involucrarse; reflexionar; persistir y profundizar; y ser escéptico y contemplar.

Al examinar lo que sus estudiantes saben, y hacen al resolver un problema matemático para intentar entender lo qué sucede en el momento en que pretenden resolverlo, Schoenfeld (1985) presenta lo que entiende por estrategia de resolución de problemas, y que representa el comportamiento más sistemático de los buenos resolutores de problemas. Dado un problema, los principales escenarios que conforman dicha estrategia se concretan en analizar la situación descrita; diseñar una solución pasando por un estado de exploración; implementar,

paso a paso, la solución diseñada; y, finalmente, verificar, o testear de manera particular como general, la solución obtenida. Además de ello, es necesaria una lectura inicial de la situación, como se desprende de los gráficos de actividad de resolución en el tiempo de su trabajo posterior (Schoenfeld, 2007).

Callejo (1996) percibe la resolución de un problema como un acto creativo no puramente cognitivo que, de acuerdo con Polya (1945) comporta diversas fases que define como un trabajo consciente de preparación o familiarización con el problema; la incubación de las ideas con las que se ha trabajado en la etapa anterior; la inspiración o iluminación sobre el camino que lleva a la solución; y la verificación del proceso que lleva al resultado buscado. Enfatiza que no tiene mucho sentido proponer un problema para resolverlo en tiempo limitado, puesto que así no se incuba el problema con el problema; además, dado que la inspiración es algo que se puede favorecer pero nunca asegurar, un fracaso aislado no es significativo mientras que un éxito puede ser bastante revelador.

La gestión del atasco

En su propuesta de cómo atacar un problema matemático de manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia, Mason et al. (1982) hacen continua referencia al hecho de quedarse atascado, como algo inevitable que sucede a cualquiera que pretende resolver un problema y que, por ello, no debe esconderse. A pesar de ello, la realidad indica que reconocer el error es una situación poco comprendida y aceptada en las aulas, especialmente por los resolutores no expertos, pues a menudo es motivo de frustración y de abandono (Mason et al., 1982). De hecho, en la escuela el error, como tradicionalmente se conoce el desacierto o confusión durante el desarrollo de un proceso, se tiende a considerar como algo negativo que los alumnos aprenden rápidamente a ocultar para no ser penalizados (Sanmartí, 2007). Sin embargo, el error es el fundamento del desarrollo cultural de la humanidad. Cada individuo construye sus ideas a partir de sus percepciones e interacciones con otros y para llegar a compartir el conocimiento elaborado deben superarse obstáculos de tipología diversa (Sanmartí, 2007). De hecho, se ha comprobado que los alumnos que tienen éxito en la escuela se caracterizan por su capacidad para identificar y corregir sus errores. Luego, como no todos los alumnos desarrollan por sí mismos esta capacidad, el reto del docente es comprender sus causas, porque sólo ayudándoles a reconocerlas será posible aprenderlos a corregir (Sanmartí, 2007).

De acuerdo con Mason et al. (1982), la mejor preparación para hacer frente a una situación de atasco es reconocerlo y aceptarlo. Sólo entonces será posible reflexionar sobre las ideas y momentos clave que puedan ser el principio de un nuevo y útil enfoque. Para ello, al intentar resolver un problema, conviene tomar especial nota de los caminos que no lleven a ninguna parte, presentando cada línea de pensamiento lo más elaborada y completa como sea posible, expresándola con claridad y lógica. Así, en cualquier momento de la resolución, será posible comprobar si se ha omitido algo relevante, si se han deslizado errores, o si es necesario dejar el problema por un tiempo, para retomarlo posteriormente sin perder el trabajo realizado. Descubrir un error o algo inadecuado permite retomar cualquier punto de la resolución. El objetivo es descubrirlo, reflexionar y buscar alternativas (Mason et al., 1982).

En definitiva, el error es útil (Sanmartí, 2007) y atascarse es un estado honorable y positivo, del que se puede aprender mucho (Mason, et al., 1982). Se trata de un buen indicador de los

procesos intelectuales con los que los estudiantes afrontan la realización de una actividad y, por lo tanto, del desarrollo de la misma. Para que se pueda detectar, comprender y favorecer su regulación conviene estimular su expresión (Sanmartí, 2007).

1.2.4 Factores influyentes en la resolución de un problema

Como actividad humana, la resolución de problemas puede entenderse como un ejemplo de comportamiento dirigido a lograr unos objetivos (Schoenfeld, 2007). Se trata de una actividad dinámica, no necesariamente lineal, que requiere la organización y activación de múltiples habilidades y estrategias, y en la que la implicación del resolutor es esencial (Mason et al., 1982; Polya, 1945; Schoenfeld, 2007). Si bien los conocimientos tienen un papel fundamental en el proceso de resolver un problema, este no es el único factor. Como se desprende de lo anterior y como se discute a continuación, a pesar de que el conocimiento es la base de todo comportamiento competente, el papel de cómo éste se organiza y cómo se accede a él no es menos relevante. De acuerdo con Callejo (1996) resolver un problema junto a una base de conocimientos (intuiciones y conocimientos informales sobre el dominio del problema, hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios no algorítmicos, reglas para trabajar en el dominio del problema, estrategias heurísticas) y al control y regulación de dichos conocimientos, intervienen también los afectos (creencias, actitudes y emociones) y las condiciones socioculturales en que se realiza la tarea.

Lester et al. (1989), Schoenfeld (1985, 1992, 2013) y De Corte et al. (2000a), entre otros, han trabajado para sintetizar los factores que influyen en la resolución de un problema (Tabla 1.5). Como se desprende de sus trabajos, en el corazón de la resolución de problemas se encuentra un conocimiento matemático base apropiado, una conciencia y experiencia de estrategias de resolución, cierta competencia autorreguladora y una creencia en cuanto a que no sólo vale la pena resolver el problema, sino también que el resolutor puede resolverlo.

Lester (1989)	Schoenfeld (1985-1992)	De Corte (2000)	Schoenfeld (2013)
			Objetivos
Conocimientos	Conocimientos base que uno posee (recursos) Uso que uno hace de las estrategias de resolución de problemas (estrategias heurísticas)	Conocimientos básicos específicos al dominio Métodos heurísticos	Conocimientos
Control	Autorregulación y control (como un aspecto de la metacognición)	Metaconocimiento Habilidades de autorregulación	Mecanismos de decisión
Afecto Creencias Factores contextuales	Sistema de creencias y sus orígenes en las experiencias matemáticas como estudiantes (creencias, afecto y prácticas)	Creencias	Creencias y orientaciones

Tabla 1.5. Factores influyentes en la resolución de problemas

Como se desprende de la Tabla 1.5, las sugerencias de los distintos autores se pueden agrupar en tres grandes bloques que etiquetamos como: Conocimientos, Toma de decisiones y Sistema de creencias. Además, de los últimos estudios de Schoenfeld (2013), identificamos un cuarto bloque relacionado con los objetivos.

Conocimientos

Lo que uno puede lograr depende fundamentalmente de lo que uno sabe (Schoenfeld, 2013). No es de extrañar, entonces que en la resolución de problemas, donde se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática, el papel del conocimiento sea central. La naturaleza de los distintos conocimientos que entran en juego, y con la intención de profundizar en cada uno ellos, se distinguen dos tipos de conocimientos: los conocimientos base y las heurísticas (Schoenfeld, 1985, 1992; De Corte et al., 2000a).

Por conocimientos base se hace referencia a las estructuras cognitivas del resolutor, a la naturaleza constructiva de la cognición, la arquitectura cognitiva, la memoria y el acceso a ella (Schoenfeld, 1992). En otras palabras, se trata del conocimiento matemático que el resolutor posee y que puede serle útil para trabajar con el problema en cuestión. Ello incluye el conocimiento informal e intuitivo sobre el tema del problema; hechos, símbolos y definiciones; procedimientos algorítmicos y rutinarios; el conocimiento sobre las reglas que constituyen los contenidos de la matemática. Además de ello hay que considerar el conocimiento sobre recursos físicos como herramientas computacionales pues el enfoque que uno puede adoptar frente un problema puede variar sustancialmente dependiendo de ellas (Schoenfeld, 2013). Influirá, entonces, el nivel de especificidad del conocimiento base, su organización y la flexibilidad en acceder a él (Schoenfeld, 1992; De Corte et al., 2000a). Por ello, los conocimientos base son claramente un determinante importante del éxito o fracaso matemático de uno mismo (Schoenfeld, 2013).

Por otro lado, se distinguen los conocimientos relativos a las estrategias matemáticas de resolución de problemas. Así, por estrategias heurísticas (Schoenfeld, 1985) o métodos heurísticos (De Corte et al, 2000a) se refieren al conocimiento sobre estrategias y técnicas que permiten avanzar en el proceso de resolución de un problema, a aquellas reglas básicas para la resolución eficaz de un problema que aunque no la puedan garantizar, aumentan significativamente la probabilidad de encontrar la solución correcta, ya que inducen un enfoque sistemático de la tarea (De Corte et al., 2000a). Ejemplos de ello, y siguiendo el trabajo de Polya (1945), son dibujar figuras o introducir una notación adecuada; recurrir a problemas relacionados; reformular el problema o trabajar hacia atrás; utilizar procedimientos de verificación y prueba.

Toma de decisiones

La manera en que los resolutores de problemas gestionan los recursos de que disponen es un factor fundamental en su éxito o fracaso (Schoenfeld, 1985, 1992). Esta afirmación es una descripción clave para entender el sentido del segundo bloque de factores identificados como influyentes en la resolución de problemas que, a su vez determinan los mecanismos de decisión (Schoenfeld, 2013). La dificultad de conceptualizar los distintos términos que abarca este bloque, como monitoreo, control, metacognición o autorregulación, complica etiquetarlo por lo que, a continuación, intentamos dar una idea de cada uno de estos términos que entran

en juego y sobre las que profundizaremos posteriormente en el tercer apartado de este mismo capítulo (p. 30).

Para Lester et al. (1989), el término control se refiere a la regulación de los procesos cognitivos que uno lleva a cabo durante el proceso de resolución de un problema y por tanto, ligadas a las acciones y toma de decisiones relacionadas con el análisis y exploración de las condiciones del problema, la planificación de los cursos de acción, la selección y organización de las estrategias, el seguimiento de las acciones y el progreso, la comprobación de los resultados y los resultados, la evaluación de los planes y estrategias, la revisión y abandono de los planes y estrategias improductivos, así como reflexionar sobre todas las decisiones tomadas y las acciones tomadas durante el curso del trabajo sobre un problema.

Schoenfeld (1985) considera la planificación, el seguimiento y la evaluación, y la toma de decisiones, como actos metacognitivos conscientes. Utiliza los términos monitoreo y control para referirse a la autorregulación (Schoenfeld, 1985 y 1992), que entiende como uno de los tres grandes ámbitos que para él abarca la metacognición (Schoenfeld, 1992 y 2013) y que percibe como componente principal de la toma de decisiones (Schoenfeld, 2013). En cuanto a la toma de decisiones, destaca dos componentes (Schoenfeld, 2013) en función de la familiaridad de las circunstancias de la situación. Si las circunstancias son familiares, se pueden utilizar varios mecanismos descritos y prefijados (guiones, marcos, esquemas, etc.) que esencialmente dicen qué hacer a continuación. Si las circunstancias varían repentinamente de lo previsible, entonces es posible ofrecer mecanismos que, de algún modo se percibe que pueden modelar la toma de decisiones.

Por su parte, De Corte et al. (2000a) distingue entre metaconocimiento, que implica, por un lado, el conocimiento sobre el funcionamiento cognitivo (conocimiento metacognitivo), y, por otro, el conocimiento sobre la motivación y las emociones que se pueden utilizar para mejorar deliberadamente la eficiencia volitiva (conocimiento metavolicional). Por otro lado, las habilidades de auto-regulación, que abarcan las habilidades relacionadas con la autorregulación de los procesos cognitivos (habilidades metacognitivas o autorregulación cognitiva), por un lado, y de los procesos volitivos (habilidades metavolicionales o autorregulación volitiva), por otro.

Sistema de creencias

Además de lo anterior, no se puede obviar cómo la visión matemática de una persona, el conjunto de particularidades que caracterizan (aunque no necesariamente conscientes) el comportamiento de un individuo sobre sí mismo, sobre el medio en qué se encuentra, sobre el tema y sobre las matemáticas también afecta en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985). De esta observación surge el tercer bloque de factores influyentes en la resolución de problemas, que comprende las creencias, sobre uno mismo en relación con el aprendizaje matemático y la resolución de problemas, sobre el contexto social en el que se desarrollan las actividades matemáticas y sobre matemáticas y aprendizaje matemático y resolución de problemas (De Corte et al., 2000a). Para abarcar tanto las creencias como las orientaciones (incluyendo preferencias, valores, gustos, etc.) que las originan nos referiremos a ellas como Sistema de creencias.

Schoenfeld (1992) describe las creencias como los entendimientos y sentimientos de un individuo que configuran las formas en que la persona conceptualiza y se involucra en el

comportamiento matemático. Las relaciones de las personas con las situaciones matemáticas en las que se encuentran y los efectos de las perspectivas individuales sobre el comportamiento y el rendimiento matemáticos determinan ciertas creencias y afectos en los resolutores (Schoenfeld, 1992). En este sentido, Vila y Callejo (2004a y 2004b) puntualizan que las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida. Después de un largo trabajo sobre ello, estos autores definen las creencias como un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el que tratan, están ligados a situaciones y presentan un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo. Afirman que aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar ante la confrontación experiencias que las pueden desestabilizar.

En sus estudios más recientes, Schoenfeld (2013) hace una distinción entre creencias y orientaciones, entendiendo las orientaciones como un término más amplio que las creencias que incluyen las preferencias, valores, gustos,... que toma parte en el modelaje de las propias creencias. En definitiva, del sistema de creencias de una persona (Vila y Callejo, 2004a y 2004b). En relación a ello, Vila y Callejo (2004a y 2004b) observan y destacan que la estructura de la forma en cómo están organizadas las creencias de cada persona puede explicar el hecho que dos personas con las mismas creencias aborden y desarrollaren de manera diferente la actividad matemática.

Por todo ello, las prácticas, entendidas como intentos de instrucción para fomentar el pensamiento matemático mediante la creación de pequeñas ambientes del trabajo matemático tienen un papel fundamental en la interpretación de los alumnos (Schoenfeld, 1992). Por ello, es importante considerar las creencias de los estudiantes, las creencias de los maestros, y las creencias generales de la sociedad sobre hacer matemáticas. En este sentido, se observa que las creencias y las prácticas forman un binomio difícil de romper (Vila y Callejo, 2004b). Por consiguiente, cabe reflexionar sobre la gestión de la clase, para que las actividades de aprendizaje sean diseñadas de acuerdo con las expectativas de la comunidad matemática, hacer que los estudiantes interactúen (entre sí y con las matemáticas) promoviendo la adquisición del pensamiento matemático.

Reflexión sobre el término creencias

De acuerdo con la definición del término creencias de Vila y Callejo (2004a y 2004b) pensamos que es importante puntualizar algunas ideas sobre el mismo, que describimos a continuación.

- Vila y Callejo (2004a y 2004b) definen el término creencias como un conocimiento subjetivo. Bajo esta definición, cabe distinguir de manera explícita entre dos tipos de conocimientos, los subjetivos, como las creencias, y los objetivos, que corresponden a lo que comúnmente llamamos simplemente conocimientos (y a los que nos referimos en el primer aspecto influyente en la resolución de problemas). Su principal diferencia es que los conocimientos objetivos, a diferencia de los subjetivos, están consensuados por grupos humanos específicos y responden a unos criterios de verdad. En este sentido, pensamos que es adecuada la terminología de Schoenfeld en cuanto a tomar el término entendimiento para referirnos a los conocimientos subjetivos y reservar el término conocimientos por los conocimientos objetivos.
- Por otro lado, no hay que confundir concepciones con creencias que si bien pueden estar relaciones, pues ambos conforman el sistema de creencias, no significan lo mismo. De acuerdo con Vila y Callejo (2004a) las concepciones se refieren a las ideas asociadas a

conceptos matemáticos concretos, mientras que las creencias se refieren a las ideas asociadas a actividades y procesos matemáticas, así como a la forma de proceder en el quehacer matemático.

Objetivos

Del trabajo de Schoenfeld (2013) se desprende el papel que toma el sentido, el motivo para el que se pretende la resolución de un problema, es decir, el objetivo principal del motivo de la resolución, el propósito final. Al tanto que con la resolución de problemas se ponen de manifiesto distintos aspectos de la matemática, no siempre obtener el resultado final puede no ser el objetivo fundamental de la resolución a un problema. Dependiendo del contexto, el objetivo principal puede ser, por ejemplo, resolver el problema para comprender, descubrir o reforzar un determinado aspecto de las matemáticas, o bien una manera de diagnosticar y reelaborar una manera de proceder.

1.2.5 Características de resolutores de problemas matemáticos

Al resolver un problema el resolutor debe seleccionar determinados procesos y encontrar formas de desarrollarlos. Prever los posibles enfoques, las etapas intermedias así como sus posibles resultados permite no sólo escoger el camino más eficaz a seguir sino también fijar el orden de las acciones necesarias para aplicarlo (Sanmartí, 2010). Con ello, se evidencia que la resolución de un problema recae no sólo en los conocimientos de quién lo resuelve sino también de sus objetivos, orientaciones y toma de decisiones (Schoenfeld, 2007). En este sentido, percibimos como las habilidades metacognitivas, especialmente, resultan agentes autorreguladores de su aprendizaje. Sin embargo, las evidencias muestran que dichas habilidades con frecuencia se encuentran ausentes, especialmente en los resolutores menos eficientes (De Corte y Verschaffel, 2003).

Se ha observado que una mayoría de estudiantes manifiestan gran inseguridad al resolver un problema, y que, una vez iniciado tienden a no completar los procesos iniciados (Sanmartí, 2002). De acuerdo con lo anterior, el principal motivo, sitúa la causa en la incapacidad de los estudiantes en planificar la tarea propuesta, puesto que se lanzan a realizar las tareas relacionadas aplicando diferentes maneras de hacer o de razonar, sin suficiente coherencia ni orden, siguiendo procesos algorítmicos vacíos (Sanmartí, 2002). En cambio, cuando dedican más tiempo a pensar y a planificar la estructura de la resolución que no en efectuar los cálculos, acostumbran a resolver mejor los problemas (Sanmartí, 2002). De hecho, se observa que con cierta anticipación de la acción no solo se obtienen mejores resultados sino que la tarea resulta más gratificante (Sanmartí, 2002). Eso responde al perfil de resolutor experto, caracterizado por invertir mayor tiempo en el análisis del problema, con el objetivo de comprender de qué se trata, y en la planificación del proceso de resolución para analizar los distintos caminos de resolución y lo que ellos requieren (Schoenfeld, 2007; De Corte et al., 2000a). Por ello, es necesario ayudar a los estudiantes aprender a planificar, un proceso que implica la generación de sub-objetivos necesarios para resolver problemas complejos (De Corte et al., 2000a).

Otra de las peculiaridades del resolutor experto es su capacidad de reflejar continuamente sobre el estado de su proceso de resolución (Schoenfeld, 2007; De Corte et al., 2000a). En este sentido, se ha observado que los resolutores más eficientes hacen un seguimiento efectivo de

sus progresos y de manera consecuente mantienen o cambian su dirección de trabajo. En cambio, los resolutores menos eficientes, además de elegir rápidamente un camino de solución, como se ha comentado anteriormente, se mantienen en esa idea independientemente de los progresos o no alcanzados (Schoenfeld, 2013).

Así mismo, los alumnos raras veces verbalizan cómo plantean o pretenden resolver un problema (Sanmartí, 2002), lo que complica entender sus elecciones y razonamientos. De hecho, pedir a los alumnos que piensen en voz alta, elaboren informes por escrito de su pensamiento, o trabajen en cooperación, no siempre resulta exitoso. En este sentido parece fundamental la creencia de los estudiantes sobre el comportamiento adecuado en el aula fundamentada por las experiencias anteriores marcan el grado de información que se pueda extraer de estas prácticas (Lester et al., 1989). Parece necesario, entonces, capacitar a los alumnos para que, desde edades tempranas utilicen formas de comunicación con las que describir y argumentar de manera coherente sus actuaciones y objetivos, y así poder actuar e intervenir de manera consecuente (Sanmartí, 2002). En este sentido, no sólo potenciar la actividad de razonar a través del papel de un monitor interno como si se tratara de un agente independiente al resolutor que va aconsejando qué se debe hacer en cada momento, pero que, de hecho, se vigila y se realiza las preguntas por sí mismo, desarrollando así una regulación personal del proceso (Mason et al., 1982) sino el hábito de ir escribiendo es una garantía para recuperar posteriormente el curso de las propias ideas (Mason et al., 1982). Sin embargo, cabe considerar que las primeras producciones de los alumnos acostumbran a ser muy parciales, concretas y poco precisas y que aprender a generalizar, abstraer y precisar requiere un tiempo que no siempre se tiene en cuenta (Sanmartí y Jorba, 1995).

De estas observaciones, y de acuerdo con el estudio comparativo de Lester (1994) y de la recapitulación de Schoenfeld (2007), se desprende que los buenos resolutores de problemas:

- no sólo tienen más conocimientos, sino que su conocimiento comprende esquemas ricos y está mejor conectado.
- tienden a concentrar su atención en las características estructurales de los problemas, mientras que los resolutores más débiles se fijan en características superficiales.
- tienen más consciencia de sus logros y dificultades resolutores de problemas.
- muestran una mejor supervisión y regulación de sus esfuerzos de resolución de problemas.
- tienen interés en la obtención de soluciones "elegantes" a los problemas.

Con ello se constata como los buenos resolutores de problemas además de poseer una cantidad sustancial de conocimientos especializados, son flexibles e ingeniosos. Disponen de distintas maneras de pensar sobre los problemas: son capaces a encontrar enfoques alternativos si se atascan, distintas maneras de salir adelante cuando se encuentran con un obstáculo, utilizar de manera eficiente lo que saben... Además, se caracterizan por una cierta clase de disposición matemática, caracterizada por una voluntad de enfrentarse a desafíos matemáticos difíciles bajo la suposición de que serán capaces de progresar en ellos y la tenacidad de mantener la tarea cuando otros se han dado por vencido (Schoenfeld, 2007).

Ser un buen resolutor de problemas no es una habilidad invariante. Con el acompañamiento adecuado, los estudiantes pueden convertirse en resolutores de problemas más efectivos (Schoenfeld, 2013). Para mejorar la destreza de la resolución de problemas, es necesario que

los alumnos traten de resolver una variedad de tipos de problemas de manera regular y durante un período de tiempo prolongado (Schoenfeld, 1992). Por otro lado, comparar los comportamientos de resolutores expertos y no expertos, nos permite identificar las maneras en que los expertos resuelven problemas y, por tanto, diseñar cómo transmitirlo a los resolutores menos eficaces para que puedan adquirirlas. Así mismo, pretender esta transmisión en un corto período de tiempo puede no dar los resultados deseados, pues como cualquier otro aspecto del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, requiere un tiempo para desarrollarse (Lester et al., 1989).

1.2.6 Características estructurales de los problemas

A lo largo de las investigaciones realizadas sobre la resolución de problemas, se encuentran estudios cuyo interés se centra en la determinación de la dificultad de un problema. De las reflexiones anteriores deducimos como la dificultad de un problema parece estar sujeta a las habilidades del resolutor en relación a las características que lo determinan. Así mismo estos estudios evidencian como los problemas, por diferentes que sean, presenten ciertas similitudes, concretamente en su estructura. Luego, atendiendo a que la naturaleza de problema no es intrínseca al problema en sí mismo, sino que depende de los conocimientos, habilidades y de las creencias, afectos y experiencias anteriores del resolutor que pretende resolverlo, estamos de acuerdo que al escoger o formular un problema, es necesario valorar el tipo de trabajo que puede conllevar o pretende desencadenar entre los alumnos resolutores (Lester et al., 1989). Este análisis, en general complicado porque no siempre se adecúa a lo que las resoluciones de otros pueden dar (Lester et al., 1989), puede ser facilitada si, de antemano se dispone de un marco de análisis de las características a valorar.

Interesados por determinar dónde radica la dificultad de los problemas, Goldin y McClintock (1979) identificaron cuatro aspectos de los problemas que pueden contribuir a ello. Atendiendo a que cada uno de estos aspectos se ven afectados por otros, se refieren a ellos como clases de variables. Así, atendiendo a una relación jerárquica correspondiente a niveles cada vez más complejos de procesamiento por parte del resolutor, distinguen entre variables que describen la sintaxis del problema, variables que caracterizan el contenido matemático del problema y el contexto no matemático (estas dos relacionadas con el planteamiento del problema), variables que describen la estructura del problema y variables que caracterizan. Los procesos heurísticos evocados por el problema (estas dos últimas relacionadas con la representación del problema). A su vez, identifican las dos primeras clases de variables con el planteamiento del problema y las dos últimas con la representación del problema, como se puede observar en la Tabla 1.6.

Clases de Variables de un problema		Efectos sobre las fases de resolución de Polya
Planteamiento del problema		
a. variables de sintaxis	Los variables que describen la disposición y las relaciones entre palabras y símbolos en un problema.	➤ Entender el problema
b. variables de contenido y contexto	El término "contenido" se utiliza aquí para referirse a la sustancia principal de un mensaje, a diferencia de su forma. Así, por contenido, nos referimos a	➤ Entender el problema (y Divisar un plan de

	significados matemáticos y por contexto a significados no matemáticos o incidentales en la declaración del problema.	acción)
Representación del problema		
c. variables de estructura	El término "estructura" se utiliza para referirse a la disposición de las relaciones matemáticas y entre todos los elementos de un problema, y las variables estructurales requieren algún método de análisis para definirlos. El intento de representar la esencia de la estructura del problema a menudo resulta en una simplificación excesiva o una representación incompleta de un problema. Por otro lado, la descripción precisa y el potencial de control de las variables de estructura pueden ser el área más prometedora en la investigación de variables de tareas.	➤ Llevar a cabo el plan (y Divisar un plan de acción y Mirar atrás)
d. variables de comportamiento heurístico	La interpretación usual de los comportamientos heurísticos se centra en la idea de que son procedimientos generales o sugerencias que ayudan a descubrir o desarrollar un plan para resolver un problema. Esta caracterización hace que parezca que los procesos heurísticos son independientes del problema particular que se está resolviendo. No hay duda de que un determinado procedimiento heurístico puede ser ampliamente aplicable a muchos tipos de problemas; Es esta característica de los procesos heurísticos lo que los hace valiosos para la resolución de problemas. Por otra parte, ciertos problemas parecen ser resueltos de manera más eficiente, más rápida, más fácil o más a menudo mediante la aplicación de un determinado proceso heurístico o conjunto de procesos. La estructura de algunos problemas puede dar lugar a comportamientos heurísticos específicos en lugar de otros. Una comprensión de los procesos heurísticos que son específicos de cada problema añade significativamente a nuestra capacidad de describir completamente una tarea problemática y utilizarla en la enseñanza o la investigación.	➤ Llevar a cabo el plan (y Mirar atrás)

Tabla 1.6. Clases de variables de un problema y su efecto en las fases de resolución de Polya según Goldin y McClintock (1984)

Más allá de ello, en este estudio, se analiza como cada uno de estos aspectos descriptores de un problema, afectan en las fases de resolución identificados por Polya, como se recoge en la Tabla 1.6. Con ello se constata la relación entre las habilidades del resolutor y el modo en qué se presenta el problema.

En esta línea, el análisis comparativo de Borasi (1986) utilizado posteriormente por Abrantes (1989) revela que, a pesar de sus muchas diferencias, los problemas muestran la presencia más o menos explícita de cuatro aspectos estructurales: la formulación, el contexto, las soluciones y los métodos de aproximación, como se detalla en la Tabla 1.7.

-
- a. La formulación del problema, entendido como la definición explícita de la tarea a desarrollar
 - b. El contexto del problema, es decir, la situación en la que se plantea el problema
 - c. El conjunto de soluciones que podrían considerarse aceptables para el problema dado
 - d. Los métodos de aproximación que podrían utilizarse para alcanzar la(s) solución(es)
-

Tabla 1.7. Elementos estructurales de un problema matemático según Borasi (1986)

En este sentido, Borasi (1986) destaca la importancia del contexto y la formulación más allá de los métodos de resolución, ya que reformular el problema original y generar preguntas e hipótesis puede constituir un paso importante hacia la solución en casi cualquier problema. En definitiva, destaca la importancia de considerar la variedad de los elementos estructurales ya que los problemas con diferentes características estructurales pueden de hecho implicar expectativas diferentes con respecto a las soluciones posibles, y pueden requerir habilidades y estrategias diferentes (Borasi, 1986).

Esta idea, concuerda con la de Abrantes (1989), quien afirma que, de acuerdo con que para el aprendizaje de las matemáticas sea una experiencia positiva significativa es necesario proporcionar oportunidades a los estudiantes para resolver, explorar, investigar y analizar los problemas en una amplia variedad de situaciones. En definitiva, siguiendo la descripción de las lecciones de resolución de problemas "ideal", se requiere más pensamiento y experimentación (Schoenfeld, 1992).

Ello nos lleva a hablar de Vila y Callejo (2004a) quienes introducen la idea de mejor problema a cuanto más amplio sea el rango de finalidades instructivas que pueda abarcar y mayor riqueza pueda proporcionar. En este sentido, describen las características estructurales de los problemas y exponen la importancia de su funcionalidad educativa, como se recopila en la Tabla 1.8.

Enunciado y/o situación planteada.

Objetivo:

- Evitar asociaciones como "problema de matemáticas – aritmética + enunciado verbal".

Diversidad de tipologías:

- Distintos campos de las matemáticas
 - Distintos formatos de enunciado: verbales, gráficos, icónicos, esquemáticos
 - Ligados a situaciones de manera que el invariante sea también la situación y no la estructura matemática que subyace
 - Diversos propósitos: cálculos de resultados, verificación de ideas, optimización de procesos, obtención de una pauta, toma de decisiones, exploración, construcción
 - Diversas naturalezas de información: exhaustividad de datos, concreción de la situación, existencia o no de información redundante o innecesaria, coherencia interna, precisión de las condiciones o datos, etc.
 - Respuestas abiertas y cerradas.
-

Carácter escolar

Objetivo:

- Evitar que se originen creencias sobre que los problemas sólo son en clase de matemáticas

Tareas accesibles:

- Contextos cotidianos, pero también en la propia matemática en un afán de exploración y de investigación y de ampliar conocimientos.
- Adecuación a sus conocimientos y capacidades

Tareas Ricas:

- Didácticamente:
 - motivadoras
 - captan el interés del alumnado
 - facilitan su implicación
 - se convierten en retos para una mayoría de alumnado
 - se prestan a crear un ambiente de interrogación y razonamiento, de intercambio y discusión
- Epistemológicamente:
 - son relevantes desde la perspectiva curricular
 - permiten establecer conexiones entre distintas áreas de currículo
 - admiten distintos abordajes e incluso distintos procesos de resolución
 - pueden abrir la exploración de campos de problemas
 - admiten optimizaciones y /o generalizaciones de la resolución
 - se prestan a que el propio alumnado reformule, con pequeñas variaciones, las condiciones del problema o el propósito de la situación planteada
 - de forma natural, la propia situación planteada lleve a la necesidad de incorporar, modificar o elaborar nuevos conocimientos, nuevos procedimientos
 - admisión de distintos niveles de respuesta: por el grado de abstracción del lenguaje (experimental, figurativo o simbólico), por la forma en que se justifique el resultado (casos particulares, idea general aplicada a caso particular, demostraciones sin palabras, deducción formal); o por la posibilidad de generalizar la situación (cambiando datos, la condición o la pregunta)

Tabla 1.8. Características de un problema matemático según Vila y Callejo (2004a)

1.2.7 El papel de los docentes en la resolución de problemas

El papel de los docentes en el proceso de aprendizaje de los alumnos es fundamental (Giné y Deulofeu, 2014). La práctica que cada docente desarrolla en el aula determina la naturaleza del entorno de aprendizaje de los alumnos y ese entorno, a su vez, moldea las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, en general, y de la resolución de problemas, en particular (Schoenfeld, 1992). De ahí se puede entender la afirmación que la verdadera resolución de problemas es tan exigente para el docente como para los alumnos (Schoenfeld, 1992).

En la enseñanza de resolución de problemas, el profesor debe mantener el rol de monitor, facilitador y modelo, lo que supone un reto y más aun atendiendo realidades de aula, en las que los estudiantes pueden presentar dificultades con conceptos básicos (Schoenfeld, 1992). Incluso con buenos materiales, grandes fuentes de problemas, conocimientos profundos de heurísticas, entre otros, la tarea de motivar a los alumnos a resolver un problema, como de guiar cómo abordarlo puede resultar desalentadora. Trabajar la resolución de problemas, es una tarea dura para el profesor, tanto a nivel matemático, pedagógico como personal (Schoenfeld, 1992). A nivel matemático porque los maestros deben percibir las implicaciones de los diferentes enfoques de los estudiantes, si pueden ser fructíferos o, si no, qué podría hacerlos así. Pedagógico, pues el maestro debe decidir cuándo y qué sugerencias pueden ayudar a cada uno de los alumnos para proceder con la resolución de un problema a nivel

individual, por parejas, etc. Finalmente, personal, pues el maestro se encontrará a menudo con posición, inusual para los profesores de matemáticas e incómoda para muchos, de no saber, de no tener la respuesta (Schoenfeld, 1992).

Por tanto, al margen del modelo educativo, los conocimientos, las maneras de proceder y también las creencias que cada docente tiene sobre las matemáticas y sobre su proceso de aprendizaje, son factores esenciales para planificar, desarrollar y evaluar los procesos de enseñanza-aprendizaje, a la vez que determinan su actuación profesional (Giné y Deulofeu, 2014).

Estos conocimientos, maneras de proceder y creencias se adquieren durante la escolarización, la formación universitaria inicial, la experiencia docente y, en algunos casos, la formación permanente (Giné y Deulofeu, 2014), ésta, a su vez, se ve condicionada por las culturas en las que se trabaja (Andrews, 2007).

Así mismo, los discutidos enfoques de las formaciones universitarias iniciales de los futuros maestros de primaria y profesores de secundaria en Catalunya como en España (Egido, 2011; INEE, 2012) ponen de manifiesto la necesidad de dar en la formación inicial de maestros de primaria un mayor énfasis en el conocimiento del contenido matemático, y, por el otro, la necesidad de una formación continuada para profesores tanto de educación primaria como especialmente de secundaria en el ámbito didáctico (Giné y Deulofeu, 2014).

Respecto a la experiencia docente, destaca el doble perfil que ésta desencadena en el perfil de los docentes. Según los estudios de Giné y Deulofeu (2014), la experiencia docente aporta recursos didácticos y metodológicos que no se perciben fuera del aula pero, por otro lado, de acuerdo con la influencia cultural que comenta Andrews (2007) también puede quebrar ciertas creencias idealistas sobre la enseñanza-aprendizaje en general, debido a la continuidad del quehacer de una escuela, al acomodo de la rutina de los años o a la falta de formación continuada puede generar una tendencia al instrumentalismo de la actividad matemática y a un modelo de clases rutinarias, especialmente a los profesores de secundaria que no tienen una formación sólida sobre didáctica. Por ello, y de acuerdo con las afirmaciones de Lester (1994) no se puede menospreciar el papel del profesor en cualquier investigación sobre resolución de problemas.

1.3 Metacognición, Autoregulación, y Metavolición

Como se ha argumentado, resolver problemas requiere de aspectos cognitivos –que incluyen tanto conocimiento específico como estructural del dominio– y metacognitivos –al verse implicados, al menos, tanto el conocimiento como la regulación de la cognición– especialmente porque los aspectos cognitivos, por sí mismos, resultan insuficientes para dar coherencia a una respuesta consistente a un problema (Ge, 2010). En este sentido, la metacognición y, en particular, la autorregulación toman un papel imprescindible para la resolución efectiva de cualquier problema matemático (Ge, 2010). Ayudar a resolutores menos eficientes a completar con éxito sus tareas de resolución de problemas requiere previamente conocer cómo éstos se desarrollan a lo largo de un proceso de resolución. Sin embargo, la dificultad en distinguir un aspecto de otro, y ante la referencia a otros como el monitoreo y o el control, o la observada vinculación entre las creencias o afectos con la metacognición (Lester, 1994; Schoenfeld, 1992), han complicado su conceptualización y, por

consiguiente, cómo interpretarlos y canalizarlos. Por ello merece especial interés atender bien sus particularidades.

1.3.1 Metacognición

El interés por el papel de la metacognición en el estudio de la resolución de problemas se remonta a finales de los años setenta - principios de los ochenta. La estrecha relación entre autorregulación y metacognición y las dificultades de conceptualización de dichos términos, han complicado su uso como concepto en el estudio de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994; Holton y Clarke, 2006) e incluso, provocado cierta confusión entre ellos (De Corte et al., 2000a). Entre los obstáculos para definir la metacognición se encuentran conceptualizar los principales aspectos que la caracterizan, establecer la relación entre estos aspectos y distinguir entre cognición y metacognición y, a pesar de esta diversidad, frecuentemente se ha hecho referencia a simplemente dos aspectos de la metacognición: el conocimiento sobre la cognición y la autorregulación de la cognición (Wilson y Clarke, 2004). Ante ello, intentamos abordar aquí el concepto de metacognición.

De manera muy general se dice que la metacognición corresponde cuando la mente media entre el individuo y la cognición, refiriéndose a cuando el pensamiento tiene un propósito y se basa en datos obtenidos de la experiencia (Holton y Clarke, 2006). En este sentido, los objetos del pensamiento intencional son objetos reales (percibidos por el individuo en cuestión) o abstracciones de objetos reales y sus propiedades. Por ello, se dice que la cognición media entre uno y la realidad y los objetos de cognición son objetos reales, ideas y abstracciones de los mismos (Holton y Clarke, 2006). Si por cognición se percibe la forma en que las mentes actúan en el "mundo real", la metacognición correspondería a la forma en que las mentes actúan en su cognición (Holton y Clarke, 2006). De ahí que la metacognición interpretada generalmente como el conocimiento y el control de la cognición (Lester et al., 1989).

De hecho, entendida como la fuerza que conduce comportamientos cognitivos, los primeros estudios sobre la metacognición en la resolución de problemas, apuntaron que el rol de la metacognición en la resolución de problemas concernía a dos aspectos principales (Lester, 1994). El primero, relativo al conocimiento de los propios procesos de pensamiento, o como describe Schoenfeld (1992) el conocimiento declarativo de los individuos sobre sus procesos cognitivos. El segundo, relativo a la regulación y monitoreo, o llamado también control, de la propia actividad durante el proceso de resolución de un problema, es decir, los procedimientos de autorregulación, que incluyen el monitoreo y la toma de decisiones en el momento (Schoenfeld, 1992). En relación a ese segundo aspecto de la metacognición destacamos la variedad de términos utilizadas para referirse a ella: control, monitoreo que en español podríamos entender mejor como supervisión, toma de decisiones y autorregulación. Pensamos que es necesario referirse a este aspecto metacognitivo de una manera concreta, y, en cualquier caso, utilizar luego los matices necesarios.

De acuerdo con ello, etiquetamos este segundo aspecto de la metacognición como autorregulación, entendida a su vez, como el monitoreo (o supervisión) y control de las acciones que uno lleva a cabo para resolver un problema y, por tanto, con influencia directa en la toma de decisiones del momento. En éste las acciones metacognitivas son consideradas

como "fuerzas motrices" en la resolución de problemas, influyendo en el comportamiento cognitivo en todas las fases de la resolución de problemas (Lester, 1994).

Más allá de ello, estudios posteriores reconocieron la metacognición no sólo como una fuerza que impulsaba comportamientos cognitivos, sino que también estaba vinculada a una amplia gama de factores metacognitivos, en particular, creencias y actitudes (Lester, 1994). Ante el papel destacado que toman las creencias y los afectos del resolutor y en los efectos que estos tienen en el pensar del pensamiento y, en consecuencia en el desempeño o rendimiento del resolutor, autores como Schoenfeld (1992) consideran un tercer aspecto metacognitivo basado en las creencias y las intuiciones.

Este tercer aspecto de la metacognición distinguido por Schoenfeld parece ser el menos compartido por otros autores. Holton y Clarke (2006) por ejemplo, entienden por metacognición cualquier acto de pensamiento que actúa sobre un pensamiento cognitivo para ayudar en el proceso de aprendizaje o la resolución de un problema. Así, distinguen entre procesos de metacognición y cuestiones que informan la toma de decisiones metacognitivas.

Por procesos de metacognición, Wilson y Clarke (2004) se refieren a la conciencia que los individuos tienen de su propio pensamiento, la evaluación de ese pensamiento y la regulación de ese pensamiento (es decir, relacionadas con las dos primeras características arriba comentadas). Con ello distinguen tres factores de la metacognición: conciencia, evaluación y regulación. Por cuestiones que informan la toma de decisiones metacognitivas, se refieren a aquellos aspectos que pueden influir en el pensar del pensamiento y, por tanto, en las decisiones que se puedan tomar, como las creencias y la intuición, pero también otros factores como la salud o la comodidad. Estos autores enfatizan que al considerar la metacognición como actos (de metacognición), pueden usar dicha definición para evaluar si un determinado acto de pensamiento es o no de metacognición. Con ello destacan tres aspectos. El primero, que aunque la metacognición funciona para resolver problemas, un acto metacognitivo dado puede no ayudar a resolver un problema particular. El segundo, que el control metacognitivo, la autorregulación, la conciencia y la evaluación operan sobre objetos cognitivos y sólo tienen significado en presencia de una dificultad. Finalmente, recalcan que las creencias, la intuición y el conocimiento de los propios procesos de pensamiento aunque sin duda pueden influir en la metacognición, no pueden ser aspectos metacognitivos en tanto que, por sí mismos, no son actos de pensamiento (Holton y Clarke, 2006).

Sanmartí (2002), por su parte, relaciona el concepto de metacognición con la capacidad de las personas para tomar conciencia de las actividades cognitivas que uno realiza (de su forma de razonar, las ideas que genera o los procedimientos que aplica), con la emisión de juicios sobre la corrección o incoherencias de estos razonamientos, procesos y resultados, y con la toma de decisiones para modificar a éstos o a sus productos.

Distintos estudios han mostrado como las habilidades metacognitivas pueden estar estrechamente ligadas a la capacidad matemática (Schoenfeld, 1992; Holton y Clarke, 2006). De hecho, estos estudios muestran que las habilidades metacognitivas de los alumnos resultan agentes autorreguladores de su aprendizaje en resolución de problemas. Se ha visto que las decisiones metacognitivas pueden afectar a la resolución de problemas, especialmente en los comportamientos estratégicos relacionados con la comprensión y análisis de un problema (Lester et al., 1989). A pesar de ello, es complicado precisar el grado en qué la metacognición

influye en la resolución de problemas (Lester, 1994). Así mismo, los estudios realizados nos informan sobre hechos aceptados por distintos autores que recogemos a continuación (Lester et al., 1989; Lester, 1994; Shoenfeld, 1992):

- La actividad metacognitiva eficaz durante el problema requiere saber no sólo qué y cuándo monitorear, sino también cómo hacerlo. A los estudiantes se les puede enseñar qué y cuándo tomar el control de forma relativamente asequible, pero ayudarles a adquirir las habilidades necesarias con eficacia es una tarea más complicada.
- Los procesos de control y la conciencia de los procesos cognitivos se desarrollan simultáneamente con la comprensión de los conceptos matemáticos. Luego, enseñar a los estudiantes a ser más conscientes de sus conocimientos y mejores monitores de sus acciones de resolución de problemas es más efectivo cuando toma lugar en el contexto habitual de aprender conceptos y habilidades matemáticas específicas (en contraposición en abarcar una unidad especial dedicado al trabajo metacognitivo en sí mismo), durante un período prolongado de tiempo y cuando es proporcionada de manera organizada bajo la dirección del maestro.
- El desarrollo de habilidades metacognitivas apropiadas es difícil y a menudo requiere “desaprender” conductas metacognitivas no convenientes desarrolladas en experiencias anteriores.

1.3.2 Autorregulación

La importancia de la autorregulación, en sí misma, durante la resolución de problemas matemáticos ha sido bien documentada en estudios como los de Schoenfeld (1992) o de De Corte et al. (2000a). Las observaciones de Schoenfeld dan cuenta de la necesidad de control ejecutivo en el trabajo que uno desempeña al resolver un problema (Schoenfeld, 1992). Todo resolutor se ve obligado dar prioridad a determinadas tareas y encontrar formas razonablemente eficientes de secuenciarlas y lograrlas. Ello requiere cierta capacidad en seguir el estado del proceso de resolución que se desempeña. Luego, en cierta manera, se trata de no sólo lo que uno sabe, sino de cómo y cuando lo usa, y sí lo usa (Schoenfeld, 1992).

Una definición emergente en el aprendizaje autoregulado (self-regulated learning), describe la autorregulación como un proceso activo y constructivo mediante el cual los alumnos establecen metas para su aprendizaje, y que luego intentan monitorear, regular y controlar su cognición, motivación y comportamiento, guiados y restringidos por sus metas y las características contextuales de su entorno (Pintrich, 2000). En este sentido, Pintrich (2000) observa que la regulación comprende cuatro fases, entendido como los procesos por los que pasa, y se desarrolla en cuatro áreas de regulación, que el alumno, por sí mismo, puede intentar monitorear, controlar y regular (Tabla 1.9).

Fases de regulación	Áreas de regulación
• previsión, planificación y activación	• cognición
• monitoreo	• motivación / afecto
• control	• comportamiento
• reacción y reflexión	• entorno

Tabla 1.9. Fases y Áreas para un aprendizaje autorregulado (Pintrich, 2000)

De manera muy global, Schoenfeld (1992) se refiere a la autorregulación como la asignación de recursos durante la actividad cognitiva y la resolución de problemas. En otras palabras, la manera en que los resolutores de problemas manejan los recursos a su disposición (Schoenfeld, 2013). Para él, y entrando en detalle, se trata del segundo de los tres aspectos que distingue de la metacognición cuyos componentes principales son el monitoreo (o supervisión) y el control de los progresos que se realizan en el momento y la actuación en respuesta a las evaluaciones del progreso en el momento. De esta caracterización, percibimos la regulación como la evaluación de los progresos y la actuación consecuente con ellos. De ahí que, de manera alternativa, se refiera a la autorregulación como el conjunto del monitoreo y control de los propios procesos.

De Corte et al. (2000a), por su parte, describen la autorregulación de la resolución de problemas, en particular, como del aprendizaje, en general, como una forma de control de la acción que se caracteriza por la regulación integrada de la cognición, la motivación y la emoción. En este sentido, consideran que la autorregulación es una noción que, además de los procesos metacognitivos, abarca también los procesos motivacionales y emocionales, así como los de control y monitoreo (supervisión) del comportamiento. Eso les lleva a hablar de, además de las habilidades metacognitivas los estudiantes, de sus habilidades metacognitivas, entendiéndolo por habilidades metacognitivas las relacionadas con la facultad de decidir y ordenar la propia conducta. De acuerdo con ello, la autorregulación en la resolución de problemas, como en la matemática misma, comprende la autorregulación de procesos de los procesos cognitivos (metacognición) y la autorregulación de los procesos volitivos (metacognición).

Las reflexiones de Schoenfeld (1992) sobre su propia práctica, en la que se perseguía el desarrollo de habilidades ejecutivas o de control (Schoenfeld, 1985), enseñan que, ante una buena autorregulación, los estudiantes se dan la oportunidad de resolver el problema. De otros estudios sobre la autorregulación, concluye que a medida que los alumnos crecen, mejoran en la planificación de las tareas que se les pide realizar y mejor en la toma de juicios correctivos en respuesta a la retroalimentación de sus intentos (Schoenfeld, 1992).

De manera paralela, el análisis de determinadas prácticas ha demostrado la efectividad de algunas de ellas en la fomentación del desarrollo de habilidades de autorregulación en la resolución de problemas (De Corte et al., 2000a; Schoenfeld, 1992). De acuerdo con De Corte et al. (2000a) la efectividad de las mismas depende de la naturaleza de las tareas y problemas que se presentan a los alumnos, los tipos de actividades de instrucción incorporadas en el entorno de aprendizaje y las normas sociomatemáticas que determinan la cultura y el clima de la clase. A pesar de la importancia y la centralidad que la autorregulación ha cobrado actualmente en la matemática escolar, tanto como un objetivo principal de la educación matemática, como una característica crucial del aprendizaje efectivo de las matemáticas, estas prácticas parecen ser aún incipientes y aisladas (Schoenfeld, 1992; De Corte et al., 2000a). De hecho, son muchas las observaciones que demuestran que los estudiantes de diferentes edades muestran graves deficiencias en los diversos aspectos autorreguladores de sus prácticas. Las que, a su vez, se ven afectadas por creencias erróneas e ingenuas sobre las matemáticas, el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas que no son conducentes al desarrollo de las habilidades de autorregulación (De Corte et al., 2000a).

Se evidencia así que el desarrollo de habilidades de autorregulación en la resolución de problemas, en particular, es un objetivo complicado (Schoenfeld, 1992). El desarrollo de dichas habilidades implica un “modificación de la conducta”, pudiendo desaconsejar comportamientos de control inapropiados desarrollados a lo largo de procesos de enseñanza y aprendizaje anteriores. Ciertamente es que dichos cambios pueden ser favorecidos e incluso acelerados pero sea como sea, requieren de un largo período de tiempo, con una atención sostenida a los procesos tanto cognitivos como metacognitivos. Por ello, la tarea de crear un contexto educativo adecuado, y proporcionar los tipos apropiados de monitoreo y orientación, es necesario e imprescindible, aunque desafiante y sutil a la vez (Schoenfeld, 1992).

Las prácticas analizadas por De Corte et al. (2000a) se centraban principalmente en la autorregulación cognitiva de los estudiantes. Aunque con distintos términos, en ellas la adquisición de autorregulación cognitiva fue elaborada en términos de aprendizaje de una estrategia metacognitiva global consistente en un enfoque sistemático de cuatro a cinco pasos para la resolución de problemas. Del análisis de los distintos enfoques, coincide que los primeros pasos que el resolutor desarrolla para resolver el problema son cruciales como componentes de autorregulación. En este sentido, parece que un comportamiento estratégico dirigido a comprender el problema construyendo una buena representación de lo que se trata y, posteriormente, establecer un plan de resolución que implique el uso de estrategias tanto cognitivas como heurísticas son las claves de hecho. De hecho, y como ya se ha comentado, apuntan que las diferencias principales entre resolutores menos y más eficientes se relacionan precisamente con el análisis del problema y la planificación de resoluciones (De Corte et al., 2000a).

De todo ello se concluye que los alumnos no se convierten de manera automática o espontánea en aprendices autorregulados (De Corte et al., 2003). Se trata de un proceso a largo plazo que constituye en sí mismo un importante objetivo de aprendizaje. Por ello debería ser inducido desde una edad temprana (De Corte et al., 2003) y velar por la adquisición de la autorregulación. Es decir, que todo alumno, frente a un nuevo problema que exija aplicar conocimientos aprendidos, fuera capaz de anticipar y planificar las operaciones necesarias para resolverlo (Sanmartí, 2010). Schoenfeld (2013) asegura que con las correctas directrices los estudiantes pueden convertirse en resolutores más eficientes de problemas. Para conseguirlo, como añade el autor, resulta imprescindible disponer de la comprensión de cómo funcionan las cosas (Schoenfeld, 2013). En este sentido, la modelización del profesor es un factor esencial en el logro de la autorregulación e implica un cambio profundo en las creencias y actitudes hacia la enseñanza. En consecuencia, sólo con la inmersión de los alumnos en un nuevo entorno de aprendizaje, será posible fomentar sus habilidades de autorregulación cognitivas (De Corte et al., 2000a).

Por consiguiente, se desprende la necesidad de profundizar en la comprensión de los procesos más cruciales involucrados en la regulación eficaz del aprendizaje, en general, y la resolución de problemas, en particular, y en el seguimiento del desarrollo de los procesos de regulación en los estudiantes de cualquier edad. En este sentido, si bien los primeros estudios parecen haberse centrado en las habilidades metacognitivas, De Corte et al. (2000a) recuerdan también la necesidad de investigar sobre el impacto de las habilidades metacognitivas en el desarrollo de la autorregulación de los alumnos.

1.3.3 Instrumentos para trabajar la metacognición en la resolución de problemas

Los distintos aspectos que intervienen en la metacognición hacen que sea un fenómeno multifacético complejo de abordar. Ante su repercusión en los procesos de aprendizaje de los alumnos, en general, y en la resolución de problemas, en particular, conviene trabajarla en el aula. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la investigación metacognitiva debe centrarse tanto en las características del pensamiento como en las condiciones del aula que contribuyen al comportamiento del alumno (Wilson y Clarke, 2004).

A continuación exponemos algunos métodos educativos procedentes de las referencias consultadas, centrados en trabajar en los alumnos aspectos metacognitivos, en general, y de autorregulación, en particular, en la resolución de problemas.

Técnica multi-método para estudiar la metacognición matemática de los alumnos en la resolución de problemas (Wilson y Clarke, 2004)

Con el objetivo de estudiar la metacognición matemática presente en los alumnos al mismo tiempo que determinar los elementos estructurales y la configuración de un modelo coherente de metacognición en el dominio de la resolución de problemas matemáticos, Wilson y Clarke (2004) desarrollaron un método para ayudar a los alumnos de sexto grado a monitorear la metacognición para la resolución de problemas, de manera que asociaran la actividad metacognitiva con sus objetivos y su gestión.

De acuerdo con su caracterización de la metacognición, en la que identifican tres funciones metacognitivas: conciencia, evaluación y regulación, seleccionaron y distribuyeron de acuerdo con estas tres funciones, catorce acciones metacognitivas, como se presentan en la Tabla 1.10 traducidas al español. Cada una de estas acciones fue escrita en cartas distintas. Los alumnos recibieron estas cartas y otras en blanco donde podían registrar otras acciones metacognitivas en caso de hacerles falta. Los alumnos debían resolver un problema y, después de intentar resolver el problema matemático propuesto, debían secuenciar las tarjetas con el fin de construir una cadena visual de su pensamiento de acuerdo con su proceso de resolución al problema. Las secuencias de cartas revisadas se utilizaron entonces para analizar la naturaleza de la actividad metacognitiva de los alumnos.

Conciencia:

- Pensé en lo que ya sé
- Traté de recordar si alguna vez había hecho un problema como este antes
- Pensé en algo que había hecho en otra ocasión que había sido útil
- Pensé *sé qué hacer*
- Pensé *sé este tipo de problema*

Evaluación:

- Pensé en cómo iba
- Pensé si lo que estaba haciendo era trabajar
- Revisé mi trabajo
- Pensé *¿Está bien?*
- Pensé *no puedo hacerlo*

Regulación

- Hice un plan para resolverlo
 - Pensé en una manera diferente de resolver el problema
-

-
- Pensé en lo que haría después
 - Cambié la forma en que trabajaba
-

Tabla 1.10. Acciones metacognitivas identificadas en el Multi-método de Wilson y Clarke (2004)

Los estudiantes fueron filmados mientras resolvían los problemas y ordenaban las tarjetas de acuerdo con las acciones que pensaban que habían seguido. Posteriormente, los alumnos observaron sus vídeos y, mientras los observaban, podían revisar las secuencias de sus tarjetas. En este sentido, podían agregar, eliminar o cambiar tarjetas. Al ver el vídeo, los alumnos a menudo agregaron tarjetas. En este sentido, el uso del video fue fundamental para cuestiones de validez y fiabilidad de las acciones de los alumnos (Wilson y Clarke, 2004).

De esta investigación, Wilson y Clarke (2004) destacan que se trata de una técnica que puede servir a los maestros como una herramienta para sostener sus conversaciones con los alumnos acerca de su actividad metacognitiva a la vez que puede servir como un recurso para enseñar a los estudiantes a monitorear su propio pensamiento. De forma adaptada, su uso en el aula puede estimular el comportamiento metacognitivo de los alumnos en otras situaciones de resolución de problemas, en particular, y del aprendizaje, en general.

Con el estudio observaron como varios de los alumnos demostraron una impresionante conciencia de sus procesos de pensamiento y, en particular, de su actividad metacognitiva (Wilson y Clarke, 2004). Con ello refuerzan que el aprendizaje se mejora cuando los alumnos son conscientes de sus capacidades de autorregulación y los utilizan para lograr sus objetivos.

Finalmente, con las observaciones del trabajo, ratifican la importancia que cobra el reconocimiento y el trabajo de metacognición para que los alumnos puedan ser conscientes del papel que toma en sus procesos y como deben afrontarla (Wilson y Clarke, 2004).

Preguntas sugerentes (question prompts) para apoyar el autocontrol, la autorregulación y la autorreflexión en la resolución de problemas (Ge, 2010; Ge et al., 2003)

Para Ge (2010) la resolución de problemas implica cuatro procesos principales: representar el problema; desarrollar soluciones; hacer justificaciones y construir argumentos; y monitorear y evaluar los planes y las soluciones de la resolución. Especifica que los procesos de justificación y generación de argumentos, y monitoreo y evaluación pueden ocurrir simultáneamente durante los procesos de representación de problemas y desarrollo de soluciones, y que el proceso de monitoreo y control puede suceder a lo largo de los procesos de solución de problemas (Pintrich, 2000).

El afán por responder las cuestiones de un problema, implica a los resolutores ejercer esfuerzos mentales para trabajar con el problema a través de diversas actividades cognitivas, tales como proporcionar explicaciones, elaborar pensamientos y hacer ajustes a sus estrategias. Ge (2010) supone que estas actividades cognitivas ayudan a los estudiantes a autorregular sus procesos y estrategias de resolución de problemas.

Ante estas suposiciones, Ge (2010) observa que la formulación de preguntas conducentes (question prompts, en inglés) permite a los alumnos tomar conciencia metacognitiva de las situaciones problemáticas y de sus limitados entendimientos. Se trata de una estrategia instructiva eficaz para dirigir a los estudiantes a los aspectos más importantes de un problema,

así como alentar la autoexplicación, la elaboración, la planificación, el monitoreo y la autorreflexión y la evaluación. En Ge et al. (2003) se habla sobre las conclusiones en relación a un conjunto de preguntas establecidas para que pudieran guiar los procesos de resolución de problemas de alumnos de pregrado de un curso introductorio en ciencias de la tecnología y la información. El material consistió en un conjunto de 10 preguntas principales generadas por los profesores del curso. Como se puede ver en la traducción del material que se detalla en la Tabla 1.11, las preguntas se organizaron y categorizaron en los cuatro tipos de habilidades de resolución de problemas consideradas anteriormente expuestas.

Algo sobre lo que pensar . . .

A medida que avances en el problema, lee y piensa en las siguientes preguntas.

Habilidades de resolución	Cuestiones conducentes (question prompts) para la guiar la resolución	
Representación del problema	<i>¿Cómo puedo definir el problema?</i>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuáles son las partes del problema? • ¿Cuáles son los componentes técnicos? • ¿Qué información se necesita para este sistema? ¿Cómo se utilizará el sistema, por quién, y para qué? <ul style="list-style-type: none"> - ¿Quiénes serían los usuarios? - ¿Qué información esperan que los usuarios necesiten? - ¿Qué nivel de conocimiento previo espera que los usuarios tengan? - ¿Cómo interactuaría idealmente un usuario con el sistema propuesto?
Generación o selección de soluciones	<i>¿Qué soluciones necesito generar?</i>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué debe hacer el sistema? • ¿Cómo deben interrelacionarse los diferentes componentes técnicos del sistema propuesto? • ¿Cuáles son los riesgos?
Haciendo justificaciones	<i>¿Cuáles son mis razones o cuál es mi argumento para mi solución propuesta?</i>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo justificarías este diseño específico del sistema? • Por ejemplo, ¿puedo explicar por qué tomé ese enfoque? • ¿Tengo evidencia para apoyar mi solución? • ¿Cuál es mi cadena de razonamientos para apoyar mi solución?
Monitoreo y evaluación	<i>¿Estoy en el buen camino?</i>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿He discutido tanto los componentes técnicos como los problemas con el uso, por ejemplo, la usabilidad y la efectividad? • ¿Hay soluciones alternativas? <ul style="list-style-type: none"> - ¿Cuáles son? - ¿Cómo se comparan con mi sistema propuesto? - ¿Qué argumento puedo hacer o qué evidencia tengo para convencer al gerente de que mi solución es la más viable?

Tabla 1.11. Relación de preguntas conducentes utilizadas por Ge (2003)

Con este estudio Ge (2003) confirma los efectos positivos de estructuras de preguntas conducentes ideadas para ayudar en la resolución de problemas, en particular en las cuatro habilidades de resolución para las que se idearon: la representación de problemas, hacer

justificaciones, desarrollar soluciones, y monitorear y evaluar la resolución. Además de ello, la formulación de las preguntas conducentes resultaron beneficiosas en el desarrollo de la conciencia metacognitiva de los alumnos y sus habilidades de autorregulación. En este sentido, constatan que los alumnos que a quienes se les proporcionaron dichas preguntas, de hecho las usaron como una lista de verificación para supervisar sus procesos de resolución del problema, para confirmar si estaban en el camino correcto y revisar el curso de su acción (Ge, 2010).

Por otra parte, y de acuerdo en otro de sus estudios, Ge (2010) observa que la simple participación de los estudiantes en la revisión de sus informes de resolución de problemas mejora su rendimiento en el tiempo. Comenta que proporcionar a los estudiantes la oportunidad de evaluar y revisar sus resoluciones les da tiempo y espacio para participar en actividades de autorreflexión y autorregulación, lo que a su vez beneficia su experiencia en la solución de problemas (Ge, 2010).

1.4 El papel de la evaluación

1.4.1 La evaluación en un marco educativo competencial

De acuerdo con la visión constructivista que reside en el modelo educativo competencial, cualquier proceso de aprendizaje conlleva una fuerte relación entre los conocimientos adquiridos y los que se adquieren. Los conocimientos previos influyen en nuevas experiencias, las que, a su vez, reorganizan la estructura de conocimiento ya adquirido. En este sentido, el papel de los docentes se centra en facilitar a los alumnos que sean conscientes de este hecho, así como las habilidades que pueden ser útiles en cualquiera de estos procesos.

Bajo esta influencia constructivista del modelo educativo competencial, en la que se entiende que el conocimiento se construye mediante un proceso en el que las ideas pueden evolucionar gracias a situaciones problemáticas que favorecen la explicitación y el contraste de puntos de vista (Callejo, 1996; Sanmartí y Jorba, 1995) entendemos que un proceso de enseñanza no cumple sus objetivos si no promueve un proceso de aprendizaje. Por consiguiente, en un modelo competencial de la educación, insistimos en la inseparabilidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, atendiendo a esta concepción constructivista del aprendizaje, en la que aprender consiste en integrar y relaciones nuevas informaciones con los conocimientos preexistentes dando así aplicabilidad y significado a los conocimientos (Servei d'Ordenació Curricular, 2009a y 2009b), no se puede entender ningún proceso de enseñanza-aprendizaje sin la intervención de un proceso de evaluación. Por ello no tiene sentido hablar de sistemas de enseñanza y aprendizaje sin aceptar que, vinculados a ellos y con influencia directa se encuentra algún tipo de evaluación. Decimos algún tipo porque como veremos, la evaluación se puede presentar en distintos modos de los que cabe reconocer sus finalidades por sus distintas repercusiones en un proceso de enseñanza y aprendizaje. Con ello, pensamos que en un sistema educativo, deberíamos referenciarlos a la terna cíclica, y en este orden, evaluación-enseñanza-aprendizaje, y no simplemente el par enseñanza-aprendizaje.

El papel de la evaluación ha sido reconsiderado a lo largo del tiempo reconociendo la importancia que tiene en cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje (Callejo, 1996). A menudo la evaluación ha sido entendida como sinónimo de prueba concreta y sus resultados

han sido utilizados principalmente para calificar (Lester y Kroll, 1991). Sin embargo, la evaluación comprende una visión mucho más amplia, con implicaciones directas tanto en los métodos y ambientes de enseñanza como en los modos de aprendizaje (Lester y Kroll, 1991). Como expone Sanmartí (2010) por evaluación debe entenderse el proceso de recogida y análisis de información con el objetivo de describir la realidad, emitir juicios de valor y facilitar la toma de decisiones en relación al proceso que se pretende evaluar (Lester y Kroll, 1991; Sanmartí, 2010). Especialmente cuando ésta se refiere a un proceso de aprendizaje y enseñanza, es fundamental comprender que la evaluación no es sinónimo de calificación restringida a la adquisición de conocimientos, o incluso conceptos, de los alumnos. Si bien se trata de una de sus posibles funciones, no es la única. La evaluación asociada un proceso de enseñanza y aprendizaje está sujeta a dos finalidades que, si bien están estrechamente interrelacionadas y deberían de ser coherentes entre sí, no hay que confundir ni restringir a la simple calificación de los resultados de los alumnos. Las funciones identificadas, de acuerdo con las referencias consultadas (Lester y Kroll, 1991; Clarke, 1992; Sanmartí, 2010) y que clarifica Sanmartí (2010) recaen en (a) regular el proceso de enseñanza-aprendizaje y (b) valorar los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En su finalidad reguladora (a), la evaluación actúa como medio para regular los aprendizajes, es decir, está orientada a identificar las dificultades y los errores que surgen a lo largo de un proceso de enseñanza-aprendizaje y encontrar caminos para superarlos. Se observan dos modos de canalizar esta evaluación en función del responsable principal en tomar las decisiones: cuando las decisiones son tomadas fundamentalmente por el profesorado, luego se habla evaluación formativa, o bien cuando las decisiones son tomadas generalmente por el aprendiz, y en tal caso de evaluación formadora. En cambio, cuando la evaluación tiene una finalidad calificadora o acreditativa (b), las decisiones comportan diferenciar grados de aprendizaje y orientar, clasificar o seleccionar. En este caso, la evaluación actúa como medio para comprobar lo aprendido y cuantificar o calificar los resultados de un proceso de enseñanza-aprendizaje para orientar al alumnado en sus estudios futuros, y al profesorado y a las personas que gestionan el sistema educativo en los cambios a introducir, para acreditar aprendizajes, o para clasificar o seleccionar el alumnado.

La segunda finalidad, y concretamente, la relacionada con la valoración de resultados de los alumnos, es seguramente es la más extendida. Las calificaciones pueden motivar el alcance de los alumnos (Lester y Kroll, 1991). Sin embargo, es posible que los alumnos no se desempeñen tan bien cuando van a ser calificados. Por ello se hace necesario asesorar a los estudiantes por adelantado cuando su trabajo va a ser calificado (Lester y Kroll, 1991). En este sentido, surge la idea de la evaluación como anticipación de la acción (Clarke, 1992) además de utilizar un sistema de clasificación de la información que considere el proceso de pensamiento utilizado y no sólo las respuestas. Eso explica la existencia de diversos estudios que apuestan por una revisión a fondo de la concepción y la práctica de la evaluación, señalando que la evaluación formativa conlleva mejoras importantes en los resultados del aprendizaje (Sanmartí, 2010). De hecho, como se justifica a continuación, en un marco de enseñanza y aprendizaje basado en competencias, cuya finalidad es enseñar para aprender y poder seguir aprendiendo por uno mismo a lo largo de la vida, la finalidad reguladora de la evaluación es la que cobra especial sentido.

Ser competente implica no sólo saber algo sino, y ante todo, saberlo aplicar y utilizar de manera conveniente para resolver situaciones complejas. Se trata de la capacidad de actuar en situaciones complejas e imprevisibles aplicando los conocimientos aprendidos (Bolívar, 2009; Rico y Lipuáñez, 2008; Sanmartí 2010), sin dejar de aprender con ello. Atendiendo que las prácticas de evaluación deben recompensar y alentar el tipo de comportamientos que deseamos que los alumnos demuestren (Schoenfeld, 1992) evaluar competencias debe posibilitar comprobar si realmente se ha sabido manejar una habilidad. Luego, evaluar competencias sólo tendrá sentido a través de la propuesta de un conjunto de situaciones que impliquen la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos y exijan resolver con éxito una situación donde éstos sean necesarios, a imagen de las tareas que se propongan habitualmente en clase y que promueven las habilidades de los alumnos en este mismo sentido (Bolívar, 2009; Lester y Kroll, 1991). Por ello es importante utilizar un formato de evaluación consistente con el formato de enseñanza utilizado en el aula (Lester y Kroll, 1991).

Actualmente, es conocida la idoneidad de la aplicación de procesos didácticos que ayudan a los alumnos a aprender un conocimiento desde el punto de vista del aprendizaje competencial. Sin embargo el desarrollo de estas tareas son insuficientes si junto a ellas se realiza sólo una evaluación de los resultados (Sanmartí, 2010). Los estudiantes valoran lo que se evalúa (Lester y Kroll, 1991). Si perciben que simplemente se aprecia lo que se valora en la evaluación final, los alumnos solo percibirán que el resto de conocimientos trabajados no son importantes y, por lo tanto, resultará en vano dedicar esfuerzo en interiorizarlos (Sanmartí, 2010). Por ello, en un proceso de enseñanza y aprendizaje por competencias, se requiere un modelo particular de evaluación que no se limite a constatar la posesión de recursos, sino su puesta en práctica de manera satisfactoria (Rico y Lupiáñez, 2008). Además ante la necesidad de distintos datos para una evaluación eficiente, conviene disponer de distintas técnicas e instrumentos de evaluación (Lester y Kroll, 1991). Un criterio que ayuda a decidir si se debe realizar una determinada actividad de evaluación o no es hacer la pregunta "¿Qué resultará de este modo de evaluación?" Si la respuesta es "Nada", claro está que no se debe llevar a cabo dicha actividad de evaluación (Clarke, 1992). La evaluación debe convertirse en un elemento esencial para aprender. De hecho, se ha observado que los alumnos que son conscientes de su progreso y saben autorregularse, están más preparados para avanzar en los aprendizajes y para seguir aprendiendo (Sanmartí, 2010).

Como ya hemos comentado, para un proceso de enseñanza eficaz es necesario un plan de evaluación bien concebido que se desarrolle simultáneamente de acuerdo con los objetivos y actividades de aprendizaje del docente (Lester y Kroll, 1991). Por ello, y a su vez, es importante que la evaluación permita al profesorado contrastar el grado de consecución por parte del alumnado de los objetivos de las áreas o materias y de las competencias básicas y ajustar, en su caso, los procesos didácticos. En otras palabras, debe permitir decidir y adaptar las estrategias pedagógicas a las características del alumnado a medida que se avanza en los aprendizajes (Sanmartí, 2010). De ahí que la actividad evaluadora se convierta, al mismo tiempo, en una actividad facilitadora del cambio educativo y del desarrollo profesional docente (Carrillo y Guevara, 1996).

La evaluación de los aprendizajes de los alumnos, debe realizarse de forma procesual y continua a través de un proceso cualitativo y explicativo y para ello es necesario diseñar criterios e instrumentos adecuados de evaluación (Carrillo y Guevara, 1996). Ello justifica, la

necesidad e importancia de una función reguladora de la evaluación de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje, especialmente bajo un marco competencial. De manera consecuente, justifica también la búsqueda de estrategias para compartir con los alumnos el proceso evaluador y haciéndolos partícipes y protagonistas de su proceso de aprendizaje, al mismo tiempo que permite compartir con el resto del profesorado y las familias la coherencia de los criterios de evaluación aplicados en las disciplinas o actividades escolares (Sanmartí, 2010). Atendiendo el papel que juega la autorregulación en el procesos de aprendizaje desde un punto de vista constructivista, es necesario ayudar a los alumnos a reflexionar sobre cómo aprenden, en particular porque las estrategias de autoevaluación de los estudiantes prometen desarrollar la metacognición al tiempo que informan la instrucción de los maestros (Clarke, 1992). Por todo ello, en la realización de una actividad es tan importante valorar cómo regular que se ha hecho, así como los procesos aplicados para aprender (Sanmartí, 2010). La evaluación efectiva es un proceso continuo basado en el reconocimiento mutuo del docente y del estudiante de los objetivos, de la experiencia de aprendizaje y los criterios para el éxito. El proceso de reflexionar sobre el aprendizaje es valioso en sí mismo (Clarke, 1992).

De acuerdo con lo observado, esbozamos la Tabla 1.12 en la que intentamos resumir las finalidades observadas de la evaluación y cómo éstas actúan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de acuerdo con los receptores principales de cada una de estas finalidades. Con ello, se confirma como la evaluación es la que liga y da coherencia a los procesos de enseñanza y aprendizaje, mostrando como el proceso educativo está formado por la terna evaluación-enseñanza-aprendizaje.

	Proceso educativo		
	Evaluación	Enseñanza	Aprendizaje
Finalidad evaluativa y Consecuencias	Reguladora: Modelar los procesos de enseñanza y de aprendizaje	Adecuar la gestión	Orientar la regulación
	Acreditativa: Justificar el modelaje	Calificar la gestión desempeñada	Calificar los resultados
Receptores de la evaluación	Docentes y Alumnos	Docentes	Alumnos

Tabla 1.12. Finalidades y Receptores de la evaluación en la enseñanza y el aprendizaje

De acuerdo con todo ello, confirmamos como los procesos evaluativos dan sentido y consistencia a cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje. Observamos como la evaluación actúa como el puente en doble sentido entre la enseñanza y el aprendizaje de manera que el propio aprendizaje se convierta en modo de enseñanza por uno mismo. De ello esbozamos la imagen de la Figura 1.1 en la que pretendemos visualizar la terna evaluación-enseñanza-aprendizaje que más que cíclica, esférica, da sentido a todo proceso educativo cuyo interés recae en el aprendizaje de los alumnos para que puedan aprender y actuar de manera consecuente y autónoma a lo largo de su vida.

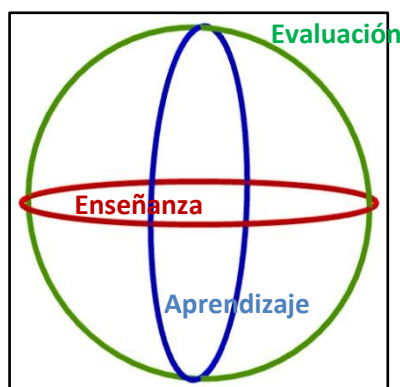


Figura 1.1. Interpretación visual del vínculo observado entre la evaluación, la enseñanza y el aprendizaje

La educación matemática puede ser evaluada bajo las finalidades de evaluación comentada. Y para ello una evaluación de la educación matemática, debe permitir recoger la información necesaria para, al menos, poder tomar decisiones sobre el contenido y los métodos de enseñanza de las matemáticas, tomar decisiones sobre la actividad en el aula, para ayudar a comunicar lo que es importante y calificar (Lester y Kroll, 1991). Claramente, la parte más difícil de evaluar es cómo evaluar el trabajo matemático que pueden desarrollar los alumnos, atendiendo a los diversos tipos de pensamiento y varios tipos de errores que pueden surgir en sus prácticas (Lester y Kroll, 1991).

Si la posesión de una competencia matemática (en cierta medida) consiste en estar preparado y ser capaz de actuar matemáticamente sobre la base del conocimiento y la perspicacia, siendo las acciones relacionadas de naturaleza diversa (físicas, de conducta (incluyendo las lingüísticas) o mentales), una evaluación válida de las competencias matemáticas tiene que estar basada en la identificación de la presencia y el alcance de sus competencias en relación con las actividades matemáticas en la que uno ha participado (Niss y Højgaard, 2011). Debido que cualquier actividad matemática requiere la activación de una o varias competencias matemáticas, se convierte en una tarea esencial identificar -a priori, así como a posteriori- las competencias necesarias y suficientes que se ven involucradas en las actividades matemáticas que se desarrollen, como puede ser la resolución de un problema, puro o aplicado, la lectura de un texto matemático, demostrar un teorema, la investigación de la estructura de una teoría matemática, escribir un texto que contiene componentes matemáticos, una charla de tipo matemático, etc. (Niss y Højgaard, 2011) y, por consiguiente, la identificación de las habilidades necesarias para lograr cada una de ellas. Analicemos el caso de la competencia en resolución de problemas.

1.4.2 La evaluación de resolución de problemas

Atendiendo la importancia de la evaluación en cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje, al pretender que los alumnos aprendan a resolver problemas matemáticos de manera competente, la evaluación del aprendizaje de dicho proceso juega un papel indispensable para la adquisición de la resolución de problemas en sí misma a la vez que, debido su papel en la educación matemática, la evaluación de la capacidad para resolver problemas se convierte en un pilar dentro de la evaluación de las matemáticas de los alumnos (Carrillo y Guevara, 1996). De ello deriva la preocupación que con la forma tradicional de evaluación, basada únicamente en la evaluación final y calificadora, no se pueda realmente revelar lo que los estudiantes

aprenden (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013). Con ello se manifiesta la necesidad de incorporar la finalidad reguladora de la evaluación de la resolución de problemas.

La complejidad de la evaluación en sí misma, añadida a las dificultades observadas que caracterizan la resolución de problemas (apartado 2 del capítulo 1), hacen que la evaluación de la resolución de problemas se trate de una tarea aún más complicada de desempeñar. Por ello, más allá de conocer las características de los alumnos que se pretenden evaluar, del profesorado que evalúa, del propio sistema educativo es fundamental tener en cuenta los factores o aspectos relativos a la tarea que se pretende evaluar (Callejo, 1996). Al proponer un problema, el profesor persigue ciertos objetivos. Como ya hemos comentado, un ingrediente esencial en cualquier proceso de enseñanza eficaz es un plan de evaluación bien concebido que se desarrolla simultáneamente con los objetivos y actividades de enseñanza del docente (Lester y Kroll, 1991). Por consiguiente los propósitos de la evaluación deben de ser consecuentes ellos (Callejo, 1996).

En el proceso de resolución de problemas en un marco educativo donde el profesor promueve el aprendizaje de los alumnos, Callejo (1996) observa la presencia de dos tipos de evaluación según el agente que la conduce. Distingue entre la evaluación que puede realizar el mismo alumno como resolutor de un problema y la evaluación de los aprendizajes de los alumnos por parte del profesor. En el primer caso distingue, a su vez, entre evaluación local, implícita en el proceso de resolución de un problema y que se manifiesta cuando el resolutor reflexiona sobre sus acciones (por ejemplo, respondiendo por sí mismo a preguntas como ¿qué estoy haciendo?, ¿para qué lo estoy haciendo?, ¿a dónde me puede llevar?) y una evaluación global, correspondiente a una revisión general del propio proceso. En cuanto a la evaluación por parte del profesor distingue entre un enfoque del aprendizaje de fases, estrategias, modos de razonamiento, métodos de desbloqueo, etc., independientes del contenido matemático de los problemas y el otro a aprender-enseñar a través de la resolución de problemas, es decir, relativo a un aprendizaje de conceptos, algoritmos, etc., en un contexto de resolución de problemas. De manera resumida se trata de lo que, de acuerdo con la autora, recogemos en la Tabla 1.13.

Agente evaluador	Finalidad
El docente	Enseñar para un aprendizaje de la resolución de problemas en si misma
	Enseñar para aprender matemáticas a través de la resolución de problemas
El alumno como resolutor	Gestionar el propio proceso de resolución
	Revisar el propio proceso de resolución

Tabla 1.13. Finalidad de la evaluación de la resolución de problemas en función del agente evaluador (Callejo, 1996)

Entendiendo que la resolución de problemas es un acto creativo no puramente cognitivo que comporta diversas fases, Callejo (1996) concluye que la evaluación de los aprendizajes de los alumnos en la resolución de problemas no se debe limitar ni a la valoración de los resultados ni a la valoración del punto de llegada de los alumnos, pues debe considerar también los procesos de búsqueda e investigación que se ponen en juego durante el desarrollo de la tarea y los progresos realizados por cada alumno durante un período de instrucción más o menos

largo. Al mismo tiempo, de acuerdo con Sanmartí (2010) la evaluación deber permitir identificar tanto las competencias de los estudiantes como sus dificultades, y motivarles.

Así, para una evaluación centrada en los procesos (y no sólo en los resultados) y en los progresos de los alumnos y alumnas, es decir, si después de un período de instrucción resuelven más problemas y los resuelven mejor, de acuerdo con Lester y Kroll (1991) y Clarke (1992), Callejo (1996) recalca la necesidad de determinar de antemano qué aspectos se van a valorar y utilizar así como disponer adecuados instrumentos de valoración de los procesos y de los progresos del alumnado. Comenta que valorar los procesos y los progresos de los alumnos y alumnas supone un cambio en la concepción tradicional de la evaluación. Resumimos a continuación las sugerencias que da para ello.

Atendiendo que el proceso de resolver un problema conlleva aspectos conceptuales, procedimentales y de actitud, para una evaluación de los procesos por parte del profesor presenta dos tipologías de instrumentos de evaluación (Callejo, 1996), unos basados en la propuesta de pruebas escritas a los alumnos por parte del profesor, entre las que distingue proponer problemas para resolver (PR); proponer cuestiones para reflexionar acerca de los problemas (CR); y cuestionarios sobre actitudes y creencias (CA); y otros basados en la observación directa del profesor. Ello nos recuerda la importancia de evaluar los sistemas de comunicación, en tanto que, atendiendo que la comunicación es la base del proceso de construcción, las ideas se expresan tanto de manera oral, escrita como gestual (Sanmartí y Jorba, 1995).

En la Tabla 1.14 resumimos las sugerencias de Callejo (1996) atendiendo el tipo de actividad, su finalidad y los requisitos o inconvenientes que pueden presentar.

Tipo	Actividad	Finalidad	Requisitos Inconvenientes	
Proponer pruebas escritas	PR Proponer a los alumnos la resolución de varios PR1. Problemas con uno o más apartados que pueden estar asociados a preguntas que ayudan a contestar a la siguiente; diversas cuestiones que se pueden conocer gracias a los datos de la situación; o la consideración de casos particulares y generales sobre la misma.	Valorar no sólo el resultado sino también el proceso.	Analizar las producciones atendiendo diferentes indicadores. Estos indicadores pueden referirse a las etapas del proceso de resolución o a otros aspectos como la claridad, la elegancia, la originalidad o la potencia Los indicadores deben relacionarse estrechamente con aquellos aspectos en los que se ha puesto énfasis en la enseñanza	La repercusión de presentar uno o más apartados: si el enunciado sólo tiene una pregunta no crea en algunos alumnos la ansiedad de querer responderlo todo. Sin embargo, el profesor no sabrá en algunos casos en qué medida el alumno es capaz dar una respuesta parcial a la cuestión propuesta.

		PR2. Problemas particulares, atendiendo a sus características concretas	Saber en qué medida los alumnos son capaces de concebir y aplicar estrategias de resolución	Pedir a los alumnos que entreguen las hojas de borrador o que mientras resuelven el problema vayan registrando sus propias decisiones para poderlas analizar y estudiar.	A menudo las hojas que entregan los alumnos al profesor no permiten conocer hasta qué punto han pensado un plan aunque no hayan sabido llevarlo hasta el final.
	CR	Proponer a los alumnos preguntas sobre un problema pidiendo a los alumnos que elaboren un informe retrospectivo.	Conocer mejor el proceso seguido por el alumno desde su propio punto de vista y valorar las capacidades de argumentar y de justificar los resultados; tomar conciencia, valorar y expresar los propios procesos de pensamiento; para generalizar un resultado o transformar un problema y resolverlo aprovechando un resultado anterior.	Se puede especificar en: 1. la justificación de la solución en forma deductiva; 2. el camino que se ha seguido (atascos, cambios de rumbo, dificultades, ideas) 3. la resolución de otros problemas semejantes y los sentimientos experimentados	Hay que especificar muy claramente qué se espera que sea contestado. Las justificaciones pueden ser parciales. Exige de los alumnos una gran capacidad de observación de sus propios procesos de pensamiento y de expresión.
		Proponer a los alumnos que elaboren un plan de resolución después de haber pensado durante unos cinco minutos sobre un problema	Evaluar la capacidad de los alumnos para identificar y seleccionar estrategias plausibles para resolver problemas	Precisar bien que no se pide por una resolución concreta y completa sino una explicación de lo que se haría. Como ejemplo, las instrucciones que Schoenfeld (1982) dio a sus alumnos: <i>[...] dime lo que harías si tuvieses dos o tres horas para poder trabajar el problema: lo que verías, los procedimientos que considerarías razonables para resolverlo; cómo comenzarías a resolverlo y cómo podrías justificarlo</i>	
	CA	Pedir a los alumnos que respondan a cuestionarios y escalas sobre creencias actitudes.	Dar un papel a las creencias y actitudes de los alumnos en el proceso de evaluación	El formato puede ser diverso: escalas para situarse en una gradación, ítems para pronunciarse sobre el acuerdo o desacuerdo sobre el mismo,...	La información que se recoge es poco fiable, porque los alumnos no siempre son sinceros en sus respuestas, o creen serlo, pero la falta de conocimiento propio se lo impide
Registros de Observación		Observar de manera informal o sistemática las conductas de los alumnos, con ayuda de un registro	Conocer actitudes y hábitos de trabajo de los alumnos que no quedan registrados en su papel, como pueden ser la apertura de enfoque, la flexibilidad o la perseverancia en el proceso	Lleva tiempo, requiere experiencia en evaluación de procesos y hay que planificarla cuidadosamente y en conjunción con otras técnicas	Es difícil evitar la subjetividad del observador. Las actitudes de los alumnos y alumnas no son estables y pueden variar de un día a otro o según el tipo de problema.

Tabla 1.14. Caracterización de instrumentos de evaluación para la resolución de problemas (Callejo, 1996)

De acuerdo a esta caracterización, Callejo (1996) destaca algunos comentarios, que pensamos que son interesantes de considerar.

- En relación al PR1, una propuesta de pautas de análisis del proceso de resolución basadas en la comprensión del enunciado, la comprensión del problema o transformación del enunciado; la búsqueda de varias estrategias de resolución; la selección de una de las estrategias tratando de llegar hasta el final; y la revisión del proceso seguido, permite los dos fines apuntados anteriormente sobre la evaluación: como diagnóstico, si se usa para analizar la resolución de problemas de un determinado alumno durante un intervalo de tiempo más o menos largo, pues permitirá diagnosticar cuáles son sus logros, dificultades y evolución en los aspectos señalado; y como calificación, al dar cierto peso a cada ítem y, si conviene, dentro del mismo dar cierta calificación según el grado de aplicación, pudiendo con ello tant una calificación multi como unidimensional.
- Con el modo de evaluación PR2 es posible, en cierta medida, objetivar la valoración de un problema. Esto es hacerla fiable y no dejarla a la mera impresión del profesor corrector.
- En cuanto al modo CR, destaca que la visión retrospectiva o reflexión sobre el proceso es además un elemento formativo que ayuda a mejorar la capacidad de resolver problemas, ya que se saca todo el partido posible al esfuerzo invertido y a la experiencia para resolver nuevos problemas.

En cuanto a la valoración de los progresos, (Callejo, 1996) sugiere la realización de pruebas, inicial y final, realizando o no evaluaciones intermedias, cuyo nivel de dificultad sea equivalente. Si la prueba propone la resolución de problemas, los aspectos implicados en la misma deben relacionarse con el diseño de la instrucción. Si se ha tratado de favorecer en el alumnado ciertas actitudes hay que tener en cuenta que éstas se modifican muy lentamente y que a corto plazo el cambio es casi inapreciable. Comenta que para que la evaluación sea un elemento constructivo dentro del diseño del proceso educativo es necesario que además de utilizar instrumentos de valoración de los procesos y progresos, ésta vaya acompañada de un clima en el aula que ayude a los alumnos a expresarse con libertad, a desinhibirse, a escribir en sus hojas lo que están pensando, sin miedo a cometer errores o a correr el riesgo de emprender caminos que no saben si les llevarán a la solución.

Callejo (1996) concluye que la evaluación de los procesos y progresos de los estudiantes resulta difícil por la propia recogida y análisis de datos así como por la experiencia y el tiempo que exige al profesor. Si ello supone un cambio en el método de evaluación de los problemas, enfatiza que a la dificultad observada hay que añadirle la influencia de las creencias y concepciones sobre la evaluación tanto de los alumnos como de los profesores son difíciles de cambiar (Callejo, 1996). De hecho, se ha observado que aún teniendo actitudes positivas ante esta tendencia, una mayoría de estos docentes no la aplican de manera favorable, debido a la influencia de su subjetividad (Rosli et al., 2013). Para combatir con ello, es necesario: identificar estas creencias, hacerlas explícitas, proponer estrategias de formación permanente que proporcionen experiencias satisfactorias al profesorado para poder modificar sus concepciones, y crear las condiciones institucionales que hagan posible trabajar la resolución de problemas en el aula (Callejo, 1996).

En la línea de Callejo (1996), y atendiendo los factores que influyen en el proceso de resolver un problema, Carrillo y Guevara (1996) destacan la necesidad de investigar sobre aspectos como la actitud ante los problemas, la confianza en sí mismos, la organización del conocimiento, las características tácticas del proceso (eficacia de la acción) y las características reguladoras del propio proceso de resolución de problemas (control de la acción). Por ello, sugieren el desarrollo de un instrumento global para evaluar la resolución de problemas basado en las características personales de los alumnos, la eficacia de las acciones que desarrollan los alumnos (a las que se refieren como características tácticas del proceso) así como al control que toman sobre sus acciones (que recogen como características reguladoras del proceso) que describen de acuerdo con los ítems que se recogen en la Tabla 1.15. Estos ítems deben de ser adecuados en función de lo que se pretende evaluar, las características de los alumnos y del profesor en cuestión, así como la gestión del aula que se pretende o la clase que se lleva a cabo. En su trabajo, aunque no de manera completa, proporcionan, ejemplos de gradación sobre los ítems considerados.

C1. CARACTERÍSTICAS PERSONALES

- C1.1 Repercusión en su comportamiento del hecho de ser observado.
- C1.2 Actitud ante los problemas cotidianos.
- C1.3 Hábito de enfrentarse a problemas matemáticos
- C1.4 Actitud usual en la resolución de problemas
 - C1.4.1 Predisposición.
 - C1.4.2 Confianza en sí mismo.
- C1.5 Organización del conocimiento. Capacitación matemática para la resolución de problemas.
- C1.6 Papel que concede a la memoria en la resolución de problemas.

C2. CARACTERÍSTICAS TÁCTICAS DEL PROCESO (EFICACIA DE LA ACCIÓN)

- C2.1. Obtención de una representación significativa.
- C2.2. Eficacia y adecuación de la planificación.
- C2.3. Eficacia y adecuación de la ejecución.
- C2.4. Eficacia en el empleo de la revisión.
- C2.5. Nivel de acabado de la solución.

C3. CARACTERÍSTICAS REGULADORAS DEL PROCESO (CONTROL DE LA ACCIÓN)

- C3.1. Importancia otorgada a la obtención de una representación significativa.
- C3.2. Importancia otorgada a la obtención de una buena planificación.
- C3.3. Importancia concedida a la explicitación del estado de la ejecución.
- C3.4. Coherencia y control del proceso. (Incluye el control de progreso hacia las metas establecidas, el tipo de decisiones de control y la importancia otorgada al control del proceso).
- C3.5. Organización temporal.
- C3.6. Conocimiento metacognitivo de tipo general (incluye el conocimiento de estrategias de resolución de problemas y las características que se le supone a un experto en la misma).

Tabla 1.15. Instrumento de evaluación global para evaluar la resolución de problemas propuesto por Carrillo y Guevara (1996)

1.4.3 Instrumentos para una evaluación en un sistema educativo por competencias

Como hemos argumentado, en un currículo basado en competencias, la evaluación tiene una función reguladora de todo el proceso de aprendizaje. Por un lado debe permitir decidir y adaptar las estrategias pedagógicas a las características de los alumnos al mismo tiempo que

constatar su progreso a medida que avanzan en los aprendizajes (Clarke, 1992; Lester et al., 1991; Sanmartí, 2010). Atendiendo además el objetivo que los alumnos aprendan a aprender por sí mismos, se hace imprescindible buscar modos que permitan constatar dicho progreso al mismo tiempo que permitan compartirlo con los alumnos.

Para alcanzar de manera satisfactoria las dos finalidades de la evaluación, cabe disponer de información de distinta naturaleza y por ello será necesario y de gran utilidad disponer de diferentes instrumentos de evaluación y técnicas pedagógicas distintas (Clarke, 1992; Lester y Kroll, 1991; Sanmartí, 2010). Para una evaluación de la educación matemática, Lester y Kroll (1991) identifican la utilidad de algunas de ellas y que comentamos a continuación.

Lester y Kroll (1991) destacan, entre otros, la utilidad de cuatro estrategias para la evaluación de la educación matemática: (1) observar y cuestionar a los alumnos, (2) valorar el trabajo (de matemáticas) de los alumnos, (3) usar la escritura de los alumnos para la evaluación, y (4) valorar el trabajo de los alumnos a través de portafolios individuales. Para valorar los trabajos por escrito de los estudiantes en matemáticas, distingue dos formas: la analítica, que relacionaríamos con la reguladora, y la holística, con la calificadora (Lester y Kroll, 1991). En este sentido, la analítica es la que ofrece ideas sobre el pensamiento de los estudiantes y son más útiles cuando es apropiado dar a los estudiantes retroalimentación sobre su desempeño en categorías claves asociadas con la resolución de problemas matemáticos, cuando es deseable tener información de información sobre las fortalezas y debilidades de los estudiantes, o cuando es importante identificar aspectos específicos de las matemáticas que pueden requerir un tiempo adicional de instrucción. Los métodos de puntuación analítica requieren un tiempo considerable para analizar cuidadosamente el trabajo escrito de cada estudiante. Por otro lado, los métodos holísticos, a diferencia de la puntuación analítica –que produce varias puntuaciones numéricas para cada problema, cada una de ellas asociada con un aspecto diferente del trabajo de resolución de problemas–, produce un solo número asignado de acuerdo con criterios específicos relacionados con los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de un problema particular. La valoración holística es holística porque se centra en la solución total como un todo, ni en la respuesta por sí sola ni por separado sobre diversos aspectos de la solución.

Por otro lado, comentan la posible utilidad de la incorporación de los mapas conceptuales para ver cómo los estudiantes relacionan varias ideas matemáticas así como la posible relevancia de la evaluación de la adquisición de habilidades que si bien en su momento justo se hablaba de ello, estudios recientes desvelan no sólo su posibilidad sino su relevancia, en educación matemática (Rosli et al., 2013) como en otras (Sanmartí, 2010). De hecho, para poder evaluar el grado de desarrollo de una competencia o de alguna de sus componentes, Sanmartí (2010), explica que la tendencia más actual de llevarlo a cabo recae en el hecho de explicitar determinados criterios e indicadores referidos a diferentes niveles de realización de las tareas que se proponen para evaluar. Para ello, la misma Sanmartí (2010) u otros como Fernández (2010) o Espinosa (2013) afirman que una de las propuestas más actuales y que se ve más adecuada para poder organizar esta valoración se concreta en la planificación de matrices de valoración, conocidas también por el nombre de rúbricas (Sanmartí, 2010) e incluso, de manera más específica, rúbricas de desempeño (Rosli et al., 2013).

1.4.4 Ejemplos de Instrumentos de evaluación para la resolución de problemas

De acuerdo con lo anterior, en un sistema educativo basado en competencias, la función reguladora de la evaluación es la que proporciona una intervención significativa de la misma. Sin embargo, de las referencias consultadas se desprende cierta preocupación por la necesidad de cubrir la ausencia de esta función reguladora de la evaluación. Ante ello, pretendemos estudiar dos instrumentos de evaluación identificados como adecuados para actuar en este sentido. Nos referimos a la rúbrica y a la base de orientación.

Observamos como las rúbricas, centradas en los objetivos de aprendizaje, se convierten en instrumentos de carácter formativo que permiten una regulación del aprendizaje. Por otro lado, las bases de orientación, basadas en las acciones necesarias a realizar para desempeñar una tarea, ejemplificando lo que el proceso de enseñanza debe transmitir, se convierten en instrumentos de carácter formador que, a su vez, conllevan una regulación de la enseñanza. A su vez, gracias a la versatilidad de las rúbricas, es fácil conectar su finalidad reguladora de la evaluación con su función calificadora tanto del aprendizaje como de la enseñanza, en cuanto su estructura se transporta a las bases de orientación.

1.4.5 Rúbricas

Las rúbricas se han caracterizado como una herramienta de gran potencialidad didáctica capaz de contribuir significativamente en la mejora de todo proceso educativo en cualquiera de sus tres vertientes (evaluación-enseñanza-aprendizaje), más allá de la evaluación entendida en términos tradicionales (Andrade, 2005; Blanco, 2008; Dornisch y McLoughlin, 2006; Stevens y Levi, 2005). Su uso es concebido como una estrategia de innovación didáctica (Martínez y Raposo, 2011) y ha recibido una especial atención, tanto desde el punto de vista práctico como teórico.

Blanco (2008) justifica el uso de las rúbricas por la versatilidad que presentan como instrumento de evaluación así como su capacidad de ajustarse a las exigencias de una evaluación de competencias multidimensional y polifacética.

En su forma más básica, una rúbrica se puede definir como un instrumento de evaluación que establece las expectativas específicas para realizar una tarea determinada. En la rúbrica se exponen las características específicas de la tarea a realizar, estableciendo una detallada descripción de los distintos niveles que, de manera aceptable, se pueden esperar de su cumplimiento para la realización dicha tarea (Blanco 2008; Moskal, 2000; Stevens y Levi, 2005).

Las rúbricas pueden utilizarse para evaluar una gran variedad de materias, tareas y actividades. Se observa que son útiles para cualquiera de los agentes implicados en el proceso educativo en el cual contribuyen, a la vez que pueden ser aplicadas en varios momentos de dicho proceso (Fernández, 2010). Son útiles tanto en la educación primaria como en los estudios universitarios (Andrade, 2005). En este sentido, la utilización de dónde y cuándo se utiliza una rúbrica depende únicamente del objetivo de aprendizaje y no del nivel o de la materia en la que se incluye (Moskal, 2000).

Se destaca la utilidad de las rúbricas por presentar los objetivos de desempeño, así como de mantenerlos vinculados con los contenidos y actividades que se pretenden; comunicar a los estudiantes los resultados de aprendizaje esperados; proporcionar a los estudiantes información clara, descriptiva y a tiempo sobre el trabajo realizado, identificando lo que se ha alcanzado o lo que falta para mejorar; y, cuando son utilizadas por el propio alumnado, fomentar el desarrollo de competencias metacognitivas como la autorregulación del aprendizaje de los propios estudiantes (Blanco, 2008). Se trata de un instrumento que puede ser útil antes, durante y después de un proceso educativo concreto en múltiples sentidos (Andrade, 2005; Blanco, 2008).

Atendiendo que el objetivo principal de las rúbricas se basa en clarificar lo que se espera del trabajo de los alumnos, de valorar su ejecución a la vez que facilitar una respuesta (Andrade, 2005; Blanco, 2008; Mertler, 2001; Moskal, 2000; Stevens y Levi, 2005), no extraña que las rúbricas sean consideradas como una herramienta fundamental para poder evaluar de manera consecuente la adquisición de competencias o de sus componentes. Así mismo, su efectividad queda restringida al uso que se hace de ellas. Su valor desaparece si se utilizan de manera mecánica o no se relacionan con la aplicación de los procesos necesarios para aprender el objeto de evaluación (Sanmartí, 2010).

En este sentido las rúbricas se convierten tanto en un instrumento para la orientación y el seguimiento de trabajo de los alumnos, como una escala de valoración asociada a la evaluación (Martínez y Raposo, 2011). Bien utilizadas, se convierten en un recurso para la evaluación integral y formativa, un instrumento de orientación o herramienta pedagógica que establece criterios para valorar y evaluar diferentes niveles de desempeño y dominio de competencias (o parte de ellas). La manera de presentar la rúbrica, es decir, el escenario en el que se pone en práctica facilita que los alumnos reconozcan desde el principio los detalles de evaluación por competencias que se desarrolla en el transcurso de la actividad, así como los criterios de evaluación asociados al nivel de consecución de cada tarea. Esto permite a los alumnos ser conscientes de la realidad en la que se encuentran respecto la adquisición de competencias y resultados de aprendizaje, conllevando así una retroalimentación constante orientativa del aprendizaje de los alumnos (Martínez y Raposo, 2011). Retroalimentación que requiere de las capacidades y habilidades adecuadas en el docente para conducir dicha retroalimentación y así conseguir un proceso de enseñanza-aprendizaje eficaz (Espinosa, 2013).

Con ello, el uso de rúbricas, contribuye a la determinación de una evaluación de más alta calidad, de carácter cualitativo y procedimental, pues no sólo son una herramienta de valor extraordinario para el desarrollo de competencias de monitorización, autoevaluación y evaluación entre pares, contribuyendo a un mayor entendimiento del propio proceso de aprendizaje y, en definitiva, a una mayor autonomía y autorregulación del estudiante, además de favorecer una evaluación más sistematizada por parte del docente (Stevens y Levi, 2005). La rúbrica proporciona una guía de trabajo para alumnos y docentes, en el que mediante criterios establecidos previamente, en los que se recogen los elementos relevantes y susceptibles de ser evaluados, permite evaluar las competencias adquiridas, consiguiendo su propósito de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje así como su calidad (Espinosa, 2013).

Sin embargo, tanto la creación, adaptación como aplicación efectiva de las rúbricas puede ser compleja, ardua y dificultosa (Dornisch y McLoughlin, 2006; Espinosa, 2013). Diseñar una buena rúbrica conlleva su tiempo, especialmente de reflexión, presentación y adecuación (Martínez y Raposo, 2011). Para producir o adaptar una rúbrica que resulte un instrumento educativo eficaz es necesario reflexionar profundamente sobre las necesidades de los estudiantes y de los requerimientos que se pretenden conseguir. Al mismo tiempo, la creación de un rúbrica no sólo implica pensar o elegir un determinado formato o una cierta distribución, sino, y sobre todo, cuidar la redacción para que resulten útiles y efectivas al colectivo que las usa (Dornisch y McLoughlin, 2006). Dado que se trata de un proceso laborioso, puede ser recomendable basarse en pautas propuestas por expertos que sistematicen el trabajo en pasos (Blanco, 2008, Mertler, 2001; Moskal, 2000; Stevens y Levi, 2005) y que puedan adaptarse posteriormente. Es importante validar los descriptores de las rúbricas. Una manera de hacerlo es con la participación de otros docentes, de manera que utilicen la rúbrica para evaluar un subconjunto de las respuestas dadas por estudiantes, ya que las diferencias entre la aplicación de la rúbrica bajo el análisis de uno u otro profesor podrá clarificar mejor la rúbrica que se quiere establecer (Moskal y Leydens, 2000). Dentro de esta laboriosidad, una de las ventajas que se observa con el desarrollo de las rúbricas para guiar las evaluaciones de tareas es que permiten no sólo proporcionar retroalimentaciones de las tareas que se realizan, sino que conllevan la reducción o eliminación de la subjetividad o inconsistencia evaluadora que puede perjudicar al alumnado (Dornisch y McLoughlin, 2006).

El hecho de que las rúbricas no sean totalmente explicativas por sí mismas hace que los alumnos puedan necesitar ayuda para entender su uso, familiarizarse con ellas y la utilicen debidamente (Andrade, 2005). El proceso de introducirlas, explicando a los alumnos el sentido y el objetivo de su uso puede ser inicialmente complicado y lento (Espinosa, 2013; Martínez y Raposo, 2011). Incluso, en las prácticas puede no siempre ayudar en la medida deseada en las revisiones individuales o por pares que pueden llevar a cabo los alumnos (Andrade, 2005). Entre los factores que intervienen en este proceso de familiarización se observa la necesidad de romper con barreras pre-establecidas y actitudes negativas a introducir nuevas herramientas de evaluación que, una vez desprendidas de ellas, conduce a una aceptación de su uso como recurso de evaluación a la vez que contribuir en la mejora de resultados académicos en el desarrollo de las tareas de evaluación utilizadas (Martínez y Raposo, 2011).

En conclusión, observamos como en todo cambio educativo, la incorporación de las rúbricas no es algo automático y puede ser complicado tanto en los alumnos como en los docentes. Requiere de cierto proceso de aceptación y familiarización que se ve influenciado por ideas pre-establecidas no siempre abiertas a su incorporación pero que una vez asumidas, su aceptación su repercusión es positiva en los objetivos marcados (Martínez y Raposo, 2011). El proceso de su creación y adaptación es laborioso. Requiere de la descripción precisa de criterios específicos relacionados con las actividades y tareas que pretende ser evaluadas, ofreciendo descripciones de referencia de distintos niveles de adquisición con un lenguaje claro y adecuado (Dornisch y McLoughlin, 2006).

Aceptadas estas dificultades, observamos como las rúbricas pueden ser instrumentos útiles tanto para la evaluación (en sus distintas facetas y finalidades), la enseñanza y el aprendizaje de cualquier ámbito en múltiples modos, tanto en la práctica docente como en los alumnos, como en su conjunto (Dornisch y McLoughlin, 2006; Martínez y Raposo, 2011). Las rúbricas

ayudan al profesorado a precisar sus objetivos de enseñanza y de evaluación, y a ilustrar el desarrollo esperado de habilidades y conocimientos; ayudan a los alumnos al desarrollo de la metacognición y la capacidad de autoevaluación; al mismo tiempo que proporcionan un espacio para la retroalimentación reguladora y acreditativa de la evaluación (Dornisch y McLoughlin, 2006). En definitiva, actúan tanto de guía, como de evaluación de cualquier proceso educativo, debido que permite hacer objetiva cualquier tarea del alumnado reduciendo componentes de subjetividad que pudiera tener el evaluador en el modo tradicional (Dornisch y McLoughlin, 2006; Martínez y Raposo, 2011), al tiempo que permite a los docentes ser más conscientes con las tareas y habilidades a alcanzar y coherentes a la hora de emitir un juicio de valor sobre una determinada calificación, así como asegurar que el alumnado sea siempre evaluado con los mismos criterios (Martínez y Raposo, 2011). En conclusión, se trata de un instrumento educativo que, adecuado a las necesidades, cumple con todas las funcionalidades identificadas de la evaluación: reguladora y acreditativa de los aprendizajes y de la enseñanza.

Clasificación de Rúbricas

Como hemos comentado, cualquier rúbrica debe informar de las acciones a realizar, los posibles niveles de adquisición así como una descripción precisa de dichos niveles. De acuerdo con las referencias consultadas, toda matriz o tabla de doble entrada que estructura una rúbrica debería incluir y especificarlos tres campos siguientes:

- Dimensiones: componentes que constituyen el marco de la evaluación del desarrollo de la actividad que se llevará a cabo.
- Niveles (de desempeño): categorías, en forma de gradación, definen la calidad del trabajo desarrollado.
- Descriptores: breves explicaciones de las evidencias que permitan juzgar o valorar la tarea particular realizada a lo largo de las diferentes dimensiones o criterios establecidos y que están asignados a un nivel de desempeño concreto.

De ahí que, estructuralmente, una rúbrica se conciba como una matriz de doble entrada en la que detalla, por una parte, los criterios de realización relacionados con la evaluación de la competencia (o de algunas de sus componentes) y, por otro, los criterios correspondientes a los diferentes niveles de logro que se concretan en indicadores relacionados de manera específica con la tarea de evaluación (Sanmartí, 2010).

La etiqueta que se adscribe a cada nivel de desempeño, puede variar y su elección depende del contexto del uso de la rúbrica y los objetivos de la evaluación que se pretendan (Blanco, 2008). Pueden ser etiquetados de manera cuantitativa o cualitativa, resultando la clasificación cualitativa más flexible y creativa que la cuantitativa (Mertler, 2001). En una clasificación de cuatro niveles de adquisición, que es bastante común, Nivel 1, Nivel 2 Nivel 3 y Nivel 4 suelen ser las etiquetas a nivel cuantitativo. En el caso del cualitativo, suelen referirse al nivel de: máster, experto, aprendiz y novel. Otros conjuntos de etiquetas por niveles, pueden ser (Blanco, 2008):

- 3 niveles:
 - Avanzado, intermedio e inicial
 - Altamente, parcialmente, no competente

- Niveles alto, medio y bajo de dominio
- 5 niveles: Profesional, adecuado, necesita mejorar, insuficiente o inadecuado.

Además, toda rúbrica debe estar identificada por un título, encargado de especificar explícitamente el objetivo que se pretende con su aplicación ella y al mismo tiempo que ir acompañada de una breve descripción de las instrucciones de su uso (Blanco, 2008; Stevens y Levi, 2005).

Una parte importante de las referencias consultadas distingue entre dos tipos de rúbricas en función de su estructura o concepción formal (Blanco, 2008; Dornisch y McLoughlin, 2006). Como se recoge en la Tabla 1.16, se distingue entre las rúbricas analíticas – en las que se especifican los criterios individuales que se deben evaluar en una tarea y que incluye las descripciones de los criterios de cada nivel de desempeño y, por lo tanto, asociamos a la función reguladora del aprendizaje – y holísticas –que son más usadas cuando hace falta un impresión rápida o general de la tarea a realizar y que se asocian a una evaluación más bien acreditativa o calificativa del aprendizaje, cuyo uso puede quedar limitado y por ello se puedan considerar como un caso particular simplificado de las analíticas (Blanco, 2008).

Rúbricas ANALÍTICAS	Rúbricas HOLÍSTICAS
<p>Acostumbran a utilizarse cuando:</p> <ul style="list-style-type: none"> • es importante evaluar diferentes tareas de una misma actividad. • se pretende un alto grado de retroalimentación, es decir, que los estudiantes reciban respuesta para cada uno de los criterios individuales de valoración. • se quieren establecer perfiles diagnósticos (puntos fuertes y débiles) a nivel individual y / o grupal. • se quieren otorgar pesos diferentes a las diferentes componentes en que se desglosa la actividad a realizar. 	<p>Acostumbran a utilizarse cuando:</p> <ul style="list-style-type: none"> • se pueden admitir errores en alguna parte del proceso sin que afecte de manera definitiva la calidad global de la tarea. • se desea una menor inversión de tiempo, pero que sea compatible con la proporción de cierta información global que recibe el alumno y de una visión general del grupo. • se desea una evaluación de tipo más bien calificativa.

Tabla 1.16. Uso diferencial de las rúbricas (Blanco, 2008)

Independientemente de ello, desde un punto de vista temático, las rúbricas pueden ser de tipo genérico, cuando se centran en una asignación en la que entran en juego diferentes disciplinas, o de tipo específico, cuando se centran en una asignación concreta de un dominio, disciplina o tarea (Blanco, 2008; Dornisch i McLoughlin , 2006).

La elección de uno u otro tipo de rúbrica depende fundamentalmente del uso que se quiera dar a los resultados concretos de la evaluación que se obtienen con su aplicación (Sanmartí, 2010), que se concreta en si se pone un mayor énfasis en los aspectos formativos o en los calificativos. También entran en consideración otros factores como el tiempo requerido, la naturaleza de la tarea a realizar en sí misma o los criterios específicos de desempeño que se quieren considerar (Blanco, 2008; Mertler, 2001; Sanmartí, 2010).

Los niveles de cumplimiento pueden asociarse con las notas tradicionales (Sanmartí, 2010). De hecho, los procesos de calificación que van ligados al uso de rúbricas no están regidos por la

existencia de un único y contrastado algoritmo de conversión que permita trasponer las valoraciones de la rúbrica a las puntuaciones tradicionales de la escuela, como la convencional escala de 10 puntos (Blanco 2008; Mertler, 2001). La conversión de las valoraciones de una rúbrica en calificaciones es un proceso más bien lógico que matemático, pues no hay una única manera a la hora de convertir las valoraciones de una rúbrica en puntuaciones o en descripciones de devolución. La única premisa es que los docentes responsables de dicha conversión encuentren el modo que les permita de manera cómoda asociar el rendimiento de los alumnos (Mertler, 2001). En definitiva, para adoptar uno u otro esquema de calificación es fundamental considerar previamente el significado pedagógico que se quieren otorgar a las puntuaciones que finalmente se emitan, las que además, y en todo caso, deben estar convenientemente explicadas al alumnado antes de ser aplicadas en los procesos formales de evaluación calificativa. Con esta práctica, se vuelve a recalcar la figura del alumnado como protagonista central del proceso de evaluación, agente y no paciente de un proceso que debe estar ligado, en gran medida, al servicio de su proceso de aprendizaje (Blanco, 2008).

Si inicialmente las rúbricas se realizaban de manera manual y eran más bien de aplicación local, la disponibilidad en red que proporciona información, ejemplos, pautas y ayudas para el diseño, desarrollo y uso de rúbricas, así como bancos de rúbricas o generadores de rúbricas actualmente es una realidad. De hecho, las herramientas que permiten elaborar e-rúbricas y módulos adaptados para llevar a cabo este procedimiento en plataformas educativas se encuentra en crecimiento (Blanco, 2008; Dornisch y McLoughlin, 2006; Palacios y Espinosa, 2012) y se pueden encontrar críticas al respecto (Dornisch y McLoughlin, 2006)

En cuanto a la educación matemática, encontramos referencias al uso positivo de las rúbricas. Ejemplo de ello son las propuestas de Danielson (1997) para la evaluación de actividades matemáticas en distintas etapas de la educación obligatoria. En particular, se ha observado como el uso de una rúbrica puede ser un instrumento apropiado para examinar la habilidad de los alumnos para resolver problemas, pues amplía la posibilidad de evaluar el conocimiento y uso por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos que poseen, así como los procedimientos y procesos que aplican y su disposición hacia las matemáticas (Rosli et al, 2013). El uso de una base de orientación para la resolución de problemas rompe con el uso de las evaluaciones tradicionales que sólo se basan en la corrección de la respuesta de los alumnos, ofreciendo información válida y confiable sobre el progreso de los estudiantes, conocimientos y procesos específicos. Luego, en base en la información de la rúbrica, los docentes pueden monitorear de manera más eficaz el aprendizaje de los estudiantes al mismo tiempo que proporcionarles algunas retroalimentaciones para que ellos mismos puedan reestructurar sus conocimientos y maneras de proceder (Rosli et al., 2013).

1.4.6 Bases de Orientación

Como ya hemos comentado, el enfoque competencial de la educación persigue que los alumnos aprendan a aprender. De acuerdo con ello, el objetivo de cualquier proceso de enseñanza basado en competencias es que cada uno de los alumnos sea capaz, cuando se encuentre ante un nuevo problema que exija aplicar los conocimientos aprendidos, de anticipar y planificar las acciones necesarias para resolverlo (Sanmartí, 2010).

Cada persona tiene un sistema personal de aprender que construye progresivamente a lo largo de los años (Jorba y Sanmartí, 2004). En el trabajo de Jorba y Sanmartí (2004) se comenta que es posible enseñar para ayudar a los alumnos en la construcción de este sistema personal de aprender. Para ello es necesario incidir en la autorregulación por parte de los propios alumnos, entendiendo la autorregulación como la representación de las propias capacidades y formas de aprender. Para ello, tres hechos son fundamentales (Jorba y Sanmartí, 2004):

- El conocimiento de los objetivos de aprendizaje y la comprobación de la representación que se hace de ellos
- El dominio de las operaciones de anticipación y planificación de la acción
- La apropiación de los criterios e instrumentos de evaluación

Para lograr este objetivo es necesario planificar actividades de carácter simple y concreto, lo más manipulativas posible y que estén cerca de los intereses y de las vivencias personales de los alumnos. Su objetivo debe de ser doble: situar los alumnos en los contenidos de los que se pretende el estudio y que cada alumno pueda hacerse una primera representación de lo que se quiere conseguir con el ciclo de aprendizaje propuesto (Jorba y Sanmartí, 2004).

De acuerdo con ello, unos instrumentos útiles ideados para evaluar y regular la capacidad de anticipar y planificar son las bases de orientación, llamadas también "guías de navegación" o "cartas de estudio", cuyo objetivo es el de orientar a los alumnos en la tarea que pretenden desempeñar (Sanmartí, 2010). De acuerdo con la autora, una base de orientación se puede entender como aquél instrumento que resume de manera ordenada las acciones a realizar para alcanzar una tarea escolar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por sí mismos las acciones que deben llevar a cabo para resolverla con éxito, participando así en una regulación del aprendizaje del alumno por sí mismo (Sanmartí, 2010).

Para que los alumnos puedan interpretarla como algo más que una colección ordenada de instrucciones al mismo tiempo que la puedan percibir como una herramienta propia y útil, a lo largo del proceso de enseñanza, Sanmartí (2010) recomienda que es conveniente promover su construcción de manera que cada alumno elabore su propia, animando al alumnado para que las bases sean lo más sintéticas posible, ya que esto favorece su almacenamiento en la memoria, pero siempre deben tener sentido para el alumnado. Para mejorar su calidad, es necesario promover su uso y creación mediante la actividad conjunta con el maestro y / o entre el alumnado, propiciada por aquellas situaciones didácticas que favorecen la interacción en el aula. La actividad de verbalizar los procesos de aprendizaje es de ayuda a los aprendices y se ha comprobado que esto les es útil incluso a los más capaces quienes, a pesar de representar mentalmente la planificación de la acción de manera más ágil, creen que no necesitan redactarla, les ayuda a organizar aún mejor su pensamiento y regularlo.

Las bases de orientación resumen el conocimiento que los estudiantes deberán interiorizar para poderlas activar en otro momento que les puedan ser necesarias. Por ello la evaluación de la calidad de estas bases de orientación se convierte en un objetivo prioritario del proceso de aprendizaje (Sanmartí, 2010). Por consiguiente, transportando la estructura de la rúbrica en los mismos, se convierten en instrumentos reguladores (rúbricas) del proceso de enseñanza y del autoaprendizaje por parte de los propios alumnos.

No conocemos ejemplos o referencias específicas al uso de bases de orientación concretas para la resolución de problemas matemáticos, sin embargo sí hemos encontrado referencias al uso de instrumentos o actividades que, centrados en el aspecto metacognitivo de la resolución de problemas, se ha observado que, en particular, han promovido la autorregulación. Ejemplos de ello son los trabajos de Wilson y Clarke (2004) o los trabajos de Ge et al. (2010) que resumimos en el apartado dedicado a la metacognición de este mismo capítulo (apartado 3, capítulo 1).

1.5 Scaffolding: andamiaje educativo

Como señalan las referencias consultadas, la resolución de problemas matemáticos es una actividad complicada de canalizar, tanto para estudiantes de cualquier edad (Mason et al., 1982; Polya, 1945) como para profesores que intentan crear ambientes de clase adecuados (De Corte et al., 2003). Parte de esta dificultad radica en la habilidad de los alumnos para transferir el proceso de resolución de un problema a otras situaciones (Coltman, Petyaeva y Anghileri, 2002). Cuando los niños resuelven un problema sin ser explícitamente conscientes de la relación entre sus acciones y su solución, su habilidad para transferir su proceso de solución a nuevas situaciones es limitada. Sin embargo, se ha observado que una intervención adecuada del adulto puede ayudarlos a tomar conciencia no sólo de la solución obtenida, sino también de los procesos que lo llevaron a obtenerla (Coltman et al., 2002). Así es como se concibe la idea del scaffolding en el contexto educativo, prestada del campo de la construcción, y a la cual, nos referiremos en español como andamiaje educativo.

1.5.1 El andamiaje educativo

En base a las observaciones iniciales de Bruner (1975) con respecto a las maneras en que los padres proporcionan ayuda al aprendizaje de sus hijos, Wood, Bruner y Ross (1976), argumentaron que los adultos con conocimientos pueden ayudar a los niños, como aprendices, a resolver problemas. Para ello, el adulto trata de conciliar las teorías implícitas de los componentes de la tarea, los pasos necesarios para solucionarlo y las capacidades del niño (Stone, 1998). Con ello, se consigue ayudar al aprendiz a realizar tareas que de otro modo no le son posibles. De acuerdo con ello, el andamiaje en la educación se basa en lo que los aprendices ya saben para cerrar la brecha existente entre la competencia actual que puedan presentar y el objetivo de la tarea que, sin ayuda, estaría más allá de sus posibilidades (Bruner, 1985; Greenfield, 1984; Wood, et al., 1976). En este proceso, el adulto actúa como un tutor, cuya eficacia depende tanto del tutor como del tutelado en qué modifiquen su comportamiento para ajustarse a las necesidades y sugerencias del otro (Wood et al., 1976). Reconociendo un proceso de imitación social, Wood et al. (1976) distinguieron seis formas de proveer dicha ayuda, o asistencia: reclutar el interés del niño en la tarea; reducir los grados de libertad de la tarea, en el sentido de simplificar, de manera razonable, el número de acciones necesarias para alcanzar soluciones; mantener la dirección, en el sentido de no perder de vista el objetivo concreto de la tarea; destacar las características cruciales de la tarea; controlar la frustración; y demostrar o “modelar” una tarea, en el sentido de mostrar las rutas, procedimientos o trayectorias de soluciones preferidas cuando el alumno pueda reconocerlas para que éste pueda reproducirlas de manera conveniente.

Desde su conceptualización, el estudio de los andamiajes en el contexto educativo se ha ido ampliando examinando cómo los profesores pueden proporcionar el mejor apoyo (temporal) que permite a los alumnos completar las tareas que de otro modo no podrían completar de forma independiente (Smit, van Eerde, y Bakker, 2013; van de Pol, Volman, y Beishuizen, 2010). En este proceso, mediante el cual el alumno se vuelve poco a poco más funcional por sí mismo (Smit et al., 2013), tanto el profesor como el alumno comparten y construyen un entendimiento común (Stone, 1998, van de Pol et al., 2010). Más recientemente se ha argumentado que los andamiajes educativos pueden ser también proporcionados entre compañeros (andamiaje recíproco o por parejas) y, en última instancia, por los propios alumnos (auto-andamiaje) (Holton y Clarke, 2006). También se ha conceptualizado el término *whole-scaffolding*, entendido como los andamiajes educativos para toda la clase (Smit, et al., 2013).

1.5.2 Estrategias de andamiajes educativos

La provisión de un andamiaje educativo no es una "técnica" que se pueda aplicar en todas las situaciones de la misma manera (van de Pol et al., 2010). Al igual que en el campo de la construcción, donde cada andamio es exclusivo para un edificio específico, el andamiaje educativo puede ser proporcionado a diferentes edades y de diversas maneras, abordando siempre las brechas de conocimientos de los estudiantes como parte de un progreso continuo (Wood et al., 1976). Eso puede explicar las distintas aproximaciones y caracterizaciones del término que se han documentado a lo largo de este tiempo (Bakker, Smit y Wegerif, 2015; Estany y Martínez, 2014, Smit et al., 2013, Stone 1998, van de Pol et al. 2010).

Así mismo, estudios recientes apuntan de manera significativa que el andamiaje educativo efectivo comprende tres componentes (van de Pol et al., 2010) indispensables:

- Contingencia, en cuanto que el apoyo que se proporciona debe de verse adaptado al nivel actual de desempeño del estudiante.
- Desvanecimiento, en el sentido que el estudiante va prescindiendo del apoyo gradualmente con el tiempo.
- Transferencia de responsabilidad, en tanto que el compromiso por el desempeño de una tarea se va asentando gradualmente en el alumno.

La Figura 1.2 reproduce el esquema gráfico proporcionado por van de Pol y sus compañeros (2010) con el que reproducen la intervención de estos tres componentes como un proceso de andamiaje educativo. Como se desprende del gráfico, para que estos tres componentes actúen de manera consecuente, es necesario disponer de estrategias permitan diagnosticar el nivel de desempeño de los estudiantes así como adecuar las estrategias de andamiaje pues, como se ha discutido previamente, no se trata de una técnica única para todos en todo. Para un mejor entendimiento del gráfico, en el pie de la propia Figura 1.2, entre corchetes se incluye la traducción de las palabras en inglés que aparecen en él).

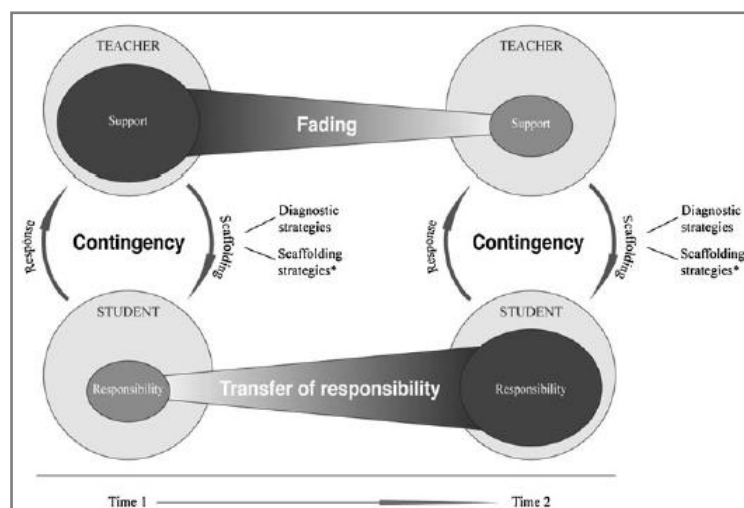


Figura 1.2. Modelo conceptual de andamiaje educativo sugerido por van de Pol et al. (2010). [TEACHER: docente, STUDENT: estudiante, Support: apoyo (asistencia, ayuda...), Responsibility: responsabilidad, Contingency: contingencia, Fading: Desvanecimiento, Transfer of Responsibility: transferencia de responsabilidad, Diagnostic strategies: estrategias de diagnóstico, Scaffolding strategies: estrategias de andamiaje, Scaffolding: Andamiaje educativo]

Además de los componentes principales que caracterizan todo andamiaje educativo, van de Pol et al. (2010) argumentan que, con respecto a sus objetivos, un andamiaje educativo apropiado es capaz no sólo de promover las actividades metacognitivas y cognitivas de los alumnos, sino también, y de modo positivo, el afecto de quien lo recibe. En este sentido, retomando las seis funciones de andamiaje educativo observadas por Wood et al. (1976) argumentan que mantener la dirección hacia los objetivos de la tarea se trata de un apoyo de naturaleza totalmente metacongnitivo; reducir los grados de libertad y destacar las características clave de la tarea están ampliamente relacionadas con actividades cognitivas; mientras que captar el interés del alumno en la tarea así como controlar su frustración son intenciones relacionadas con proporcionar apoyo de tipo afectivo. Con lo que respecta a la sexta y última función identificada por Wood et al. (1976), la demostración o “modelaje”, la caracterizan como el proceso de ofrecer un comportamiento de imitación. De ahí que modelar, sea concebido como un modo de proporcionar andamiaje y no como una intención o finalidad. Junto con ella, distinguen otros cinco modos de proporcionar andamiaje educativo. El primero, la retroalimentación, que consiste en proporcionar información sobre el desempeño del estudiante al propio estudiante. Otros tres modos son dar pistas, dar instrucciones o dar explicaciones. El primero comprende el hecho de proporcionar ideas o sugerencias que permiten seguir adelante en la tarea, pero sin proporcionar toda la solución o instrucciones detalladas. En cambio, cuando la ayuda implica la explicación de qué, cómo o por qué hay que hacer algo, se trataría de dar instrucciones. Finalmente, si se proporciona de facilitar información o aclaraciones más detalladas, se trata de dar explicaciones. El sexto y último modo, cuestionar, se caracteriza por el planteamiento de preguntas o cuestiones que requieren de respuestas lingüísticas y cognitivas activas.

Por consiguiente, en función de los objetivos e intenciones observados para los que se realiza el andamiaje, por un lado; y a partir de los caminos o modos a través de los cuales se ha observado que se puede producir andamiaje educativo, por otro; van de Pol et al. (2010) proponen el marco de estrategias para el andamiaje educativo que se resume en la Tabla 1.17.

Intenciones y objetivos del andamiaje		Modos de andamiaje					
Proporcionar apoyo a actividades metacognitivas de los alumnos	A. Mantenimiento de la dirección	Retro-alimentación	Dar pistas	Dar instrucciones	Dar explicaciones	Modelar	Cuestionar
Proporcionar apoyo a actividad cognitiva de los alumnos	B. Estructuración cognitiva						
	C. Reducción de los grados de libertad						
Proporcionar apoyo al afecto de los alumnos	D. Reclutamiento						
	E. Gestión de contingencias y Control de la frustración						

Tabla 1.17. Marco de estrategias de andamiaje educativo sugerido van de Pol et al. (2010)

De este modo, cualquier combinación de estas intenciones y modos puede determinar una estrategia que proporcione andamiaje educativo.

1.5.3 Andamiajes educativos y el papel del profesor

Los estudios realizados muestran que el andamiaje educativo tiene el potencial de ser un concepto integrador en la educación matemática (Estany y Martínez, 2014).

Como se ha visto, cualquier proceso de andamiaje educativo requiere de la participación activa y sensible del profesor en el aprendizaje de sus alumnos. El andamiaje puede ayudar a los alumnos en distintos aspectos, como la estrategia o elementos que considerar, cómo juzgar la suficiencia del trabajo o cómo usar las herramientas (Belland, 2014). En este sentido, la conciencia y la precisión del juicio del profesor se vuelven cruciales como base para la acción adaptativa, contingente y sensible del agente regulador (Bakker et al., 2015). De ahí que los enfoques del andamiaje educativo orientan a los profesores en su trabajo pues, para cada parte de este proceso, se requieren recursos y herramientas específicas (Bakker et al., 2015). En consecuencia, el andamiaje educativo estructura la enseñanza y el aprendizaje de manera coherente. Tiene un inicio (el diagnóstico), un desarrollo (el enfoque) y un fin (cuando los estudiantes logran una meta de aprendizaje particular) (Bakker et al., 2015).

1.5.4 Auto-andamiaje educativo

La analogía entre el andamiaje en el campo de la construcción y la construcción del conocimiento reside en que el andamiaje educativo permite a los alumnos alcanzar aquellos objetivos de una actividad que no podrían lograr por sí mismos, como el edificio que un constructor tiene que construir o reparar. Al final de ambos procesos el andamiaje no se percibe en el producto final y aún y así, eliminado el andamio, la memoria del proceso permanece, como la casa que se sostiene por sí misma (Holton et al., 2006). En este sentido, el andamiaje educativo permite a los alumnos tomar conciencia de dicho proceso.

El andamiaje puede ser proporcionado a través de diferentes agentes: un libro, una forma, un software... (Holton y Clarke, 2006; Puntambekar y Hübscher, 2005) y se ve enriquecido cuando el docente, como experto, y el alumno, como aprendiz, trabajan conjuntamente (Holton y Clarke, 2006). Para ello, es necesario que el maestro, como tutor, sepa cómo proporcionar a un alumno los elementos necesarios para ayudarlo a construir más conocimientos, como el constructor de determinar cómo montar estructuras para distintos edificios.

De estos paralelismos surge el término de auto-andamiaje, en el que ambos perfiles, tanto el de experto como el de aprendiz residen en el propio estudiante (Holton y Clarke, 2006). De acuerdo con estos autores, el auto-andamiaje se caracteriza por establecer un puente entre lo social y lo personal. En este sentido, el auto-andamiaje puede interpretarse como una forma de conversación interiorizada en la que el estudiante interroga a su yo epistémico. De acuerdo con su definición de metacognición (apartado 3, capítulo 1), estos autores destacan la poca diferencia que hay entre los actos de andamiaje y los actos de metacognición. De hecho, de acuerdo con su definición de metacognición, perciben el auto-andamiaje esencialmente como metacognición, en el sentido que las mentes actúan sobre su cognición y se vuelven tan esenciales como las tareas son más desafiantes, y viceversa (Holton y Clarke, 2006).

En el caso del auto-andamiaje los perfiles de aprendiz y de tutor recaen en el propio aprendiz. Si bien el aprendiz no tendrá el mismo nivel de conocimientos sobre la tarea como un experto, nadie más que el aprendiz sabe mejor lo que sabía (Holton y Clarke, 2006). Por lo tanto, el objetivo principal en este caso será que el aprendiz tome en cuenta cómo usar este conocimiento para “andamiarse” adecuadamente (Holton y Clarke, 2006). Hacer frente a ello supone una reubicación progresiva de la agencia del andamiaje del docente al estudiante. Los docentes, como tutores, deben transferir gradualmente la habilidad de andamiarse a los alumnos para que los alumnos tengan la habilidad de andamiarse por sí mismos. En última instancia, el andamiaje debe ser un acto de enseñanza que apoye la construcción inmediata del conocimiento por el alumno y proporcione la base para el futuro aprendizaje independiente del individuo (Holton y Clarke, 2006). En este sentido, los autores destacan que los andamiajes tanto pueden ser adquiridos de la actividad de andamiaje de otros como inventados por uno mismo (Holton y Clarke, 2006).

1.5.5 Medición de los andamiajes educativos

A lo largo de estos años el concepto del andamiaje educativo no sólo ha ganado popularidad, sino que también se ha considerado un componente relevante de los procesos específicos de enseñanza y aprendizaje (Bakker et al., 2015). La flexibilidad y las múltiples dimensiones de la enseñanza y el aprendizaje que puede cubrir, le dan un carácter muy accesible, pero a la vez conllevan el riesgo de reconocerlo y tratarlo sin la precisión que se merece (Pea, 2004).

Como se ha mencionado, desde que la metáfora del andamiaje fue caracterizada en el campo de la educación, distintos son los estudios y análisis que se han llevado a cabo. Sin embargo, la mayoría de ellos son en gran medida observacionales (Bakker et al., 2015; Smit et al. 2013; Stone, 1998; van de Pol et al., 2010). En general, carecen de análisis sólidos o evaluaciones rigurosas de la eficacia del proceso de andamiaje que describen, en parte porque no se dispone de ningún instrumento de medición generalmente aceptado y que recoja los distintos aspectos reconocidos que influyen en su proceso. En este sentido, la complejidad observada, en tanto que se trata de un proceso adaptativo que requiere de la interacción dinámica en el tiempo parece ser la causa principal que dificulta establecer los instrumentos que permitan llevar a cabo un análisis y evaluación de su impacto de manera lo suficientemente rigurosa y sistemática (Smit et al., 2013, van de Pol et al., 2010). De aquí que el objetivo actual de la investigación del andamiaje en educación recaiga, en gran parte, en la medición de su impacto.

2. METODOLOGÍA

2.1 Contexto y diseño

Para atender las necesidades que presenta la educación, es necesario investigar la realidad educativa a partir de lo que muestra la experiencia. Es indispensable la observación cuidadosa, la recolección sistemática de información a las preguntas de investigación y la acción pedagógica por los resultados que produce, poniendo a prueba los planteamientos teóricos en situaciones prácticas (Páramo y Hederich, 2014).

Interesados por estudiar la realidad sobre cómo desarrollar una evaluación para la resolución de problemas de acuerdo con un marco competencial de la educación, tratamos de interpretar el proceso necesario para definir instrumentos con finalidad reguladora, que aparentemente contribuyen a la educación competencial, para la resolución de problemas matemáticos y las consecuencias de su implementación en los docentes de matemáticas y sus alumnos, como primeros implicados en su uso. Atendiendo el papel destacado que cobra el estudio científico de evidencias, sin desconocer la experiencia del profesor y las características individuales y contextuales de los alumnos, para la toma de decisiones en educación (Hederich, Martínez, y Rincón, 2014; Páramo y Hederich, 2014) y por la naturaleza que caracteriza los objetivos planteados en la presente investigación, recurrimos a una metodología basada en un proceso de investigación y acción, junto con la búsqueda de referencias teóricas y el estudio de evidencias de casos particulares de la implementación de dichos instrumentos. El análisis que desarrollamos es mayoritariamente de tipo cualitativo. Sin embargo, introducimos un pequeño análisis de carácter cuantitativo que permite reforzar y ampliar algunas de las observaciones cualitativas realizadas.

El ciclo de investigación y acción desarrollado consta de tres fases de implementación, más una previa, a modo de prueba piloto. La prueba piloto se realizó al finalizar el curso escolar 2013-2014. En cuanto a las fases de implementación, las dos primeras se realizaron a lo largo del curso escolar 2014-2015 mientras que la tercera fue desarrollada en el curso escolar 2015-2016 coincidiendo con el periodo de la estancia realizada en la Universidad de Estocolmo bajo la supervisión del Profesor Paul Andrews.

Para el desarrollo de este proceso metodológico se ha contado con la participación de 6 docentes de matemáticas en activo procedentes de distintos centros de Catalunya con su respectivo alumnado, y 3 especialistas en los aspectos principales de la investigación. En cuanto a los especialistas, se ha contado con la ayuda de dos especialistas en educación matemática (el tutor de estancia y el director de tesis) y una especialista en temas de evaluación e interesada, especialmente, por la implementación de instrumentos de evaluación reguladora, como en lenguas y ciencias experimentales. En relación a los docentes de matemáticas implicados, avanzar aquí que tanto se encuentran maestros como profesores de matemáticas. Para referirnos a ellos de manera indistinta a su formación, sexo, o las etapas en las que hayan trabajado utilizaremos el término general “docente” o “docentes”. De la misma manera, y por cuestiones de anonimato, mayoritariamente nos referiremos a su alumnado con el término general “alumno” o “alumnos”. Puntualmente, se ha contado también con las aportaciones de otros especialistas en educación matemática, y más concretamente en la resolución de problemas. Estas sugerencias han podido surgir en los seguimientos de tesis o

bien en el trascurso de las participaciones a jornadas o congresos desarrolladas durante la elaboración del proyecto.

El conjunto formado por estos docentes y los expertos en los distintos campos que influyen en mayor grado en la investigación, se ha descrito como grupo de reflexión. De las observaciones procedentes del grupo de reflexión han tomado forma parte de los instrumentos utilizados, especialmente los de aplicación directa en el aula, para la extracción de datos cuyos resultados pretenden realizar alguna aportación significativa en la caracterización de actividades para trabajar la resolución de problemas en un marco curricular competencial, así como sugerir ejemplos concretos de ello, considerando los obstáculos que pueda comportar.

Por tratarse de una investigación de carácter principalmente cualitativa, hemos recurrido a la recogida y utilización de distintas informaciones como descriptores de la realidad de las aulas implicadas (Rodríguez, Gil y García, 1996) y que enumeramos a continuación:

- Una síntesis de documentación relativa a la educación matemática, en general, y la resolución de problemas, en particular, así como la motivación por la propuesta del diseño y uso de instrumentos de evaluación con finalidad reguladora para la resolución de problemas.
- La colección de 10 problemas, y dos instrumentos para una evaluación reguladora de la resolución de problemas a los que llamamos rúbrica de desempeño y base de orientación (Sanmartí, 2010; Rosli, 2013). En tanto que se trata de unas herramientas para trabajar la resolución de problemas, nos referiremos al conjunto de ellas como Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP). Atendiendo la importancia que toma garantizar la adquisición de las competencias básicas al finalizar la Educación Primaria, centramos la determinación de estos instrumentos en el momento de la transición de la Enseñanza Primaria a la Secundaria, y por tanto, para que sean accesibles tanto a Ciclo Superior de Educación Primaria y como Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Para ello se ha contactado con la colaboración de los integrantes del grupo de reflexión y se ha implementado en las aulas de los docentes implicados a lo largo de las distintas fases de implementación.
- Las resoluciones de los alumnos a los problemas trabajados utilizando la base de orientación y las valoraciones mediante la rúbrica de desempeño de las resoluciones de los alumnos a los problemas planteados por parte del correspondiente docente participante en el grupo de reflexión.
- La recogida de percepciones procedentes de los docentes implicados en el grupo de reflexión a la hora de poner en práctica los instrumentos para la resolución de problemas (IRP) en su práctica docente con sus alumnos.
- La recogida de percepciones de los alumnos en relación a la dinámica propuesta y los instrumentos para la resolución de problemas (IRP) diseñados e utilizados.

De acuerdo con ellos y según la metodología establecida, la secuencia metodológica en qué se han correspondido el conjunto de estos instrumentos, queda representado en la Figura 2.1 que sigue a continuación y cuyo ciclo, como hemos comentado, ha contado con 3 fases de implementación.

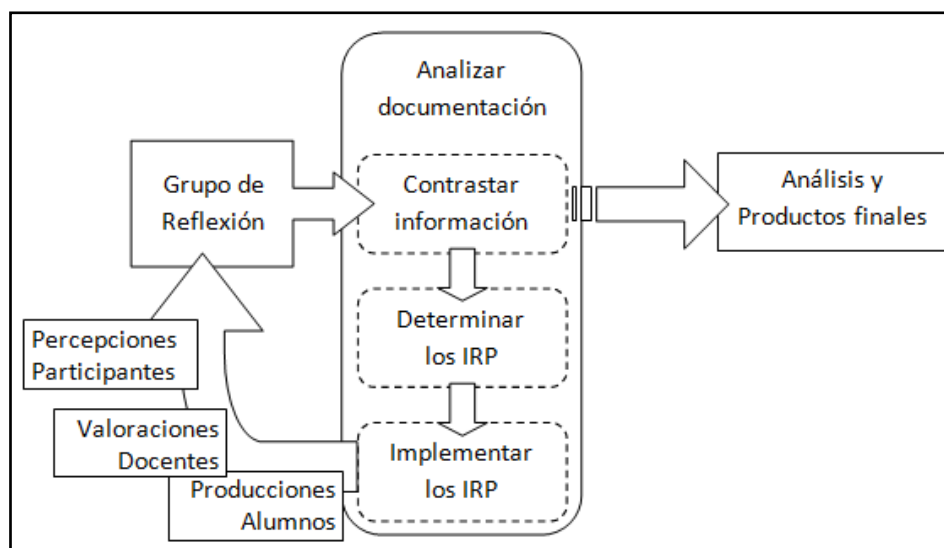


Figura 2.1. Secuencia metodológica aplicada en el estudio

Puntualizar aquí que utilizamos el término percepción como la sensación interior que resulta de una impresión proveniente de una experiencia previa. Y que por tanto, aún estando relacionada, no debe confundirse con las creencias o concepciones, en tanto que no se trata de un conocimiento o entendimiento, sino el conjunto de unas impresiones y observaciones.

2.2 Participantes

Como se acaba de mencionar, para el desarrollo del trabajo que aquí describimos hemos contado con la colaboración de 6 docentes de matemáticas en activo procedentes de distintos centros de Catalunya, con sus respectivos alumnos. Todos ellos han participado en la determinación de los Instrumentos para la Resolución de Problemas utilizados y han hecho posible su implementación tanto en aulas de sexto de Primaria como en primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, según el caso.

De acuerdo con los objetivos planteados en el estudio, tres factores relativos a su situación educativa habitual han determinado la participación de los docentes. Resumimos a continuación estos aspectos, que posteriormente, y de acuerdo con la información que nos facilitaron, se detalla para cada uno de los docentes implicados.

- La etapa y el curso educativo en el que iban a desarrollar su práctica docente: nos centramos en Ciclo Superior de Educación Primaria y primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Concretamente, contamos con tres docentes que desarrollan su labor en sexto y último curso de Educación Primaria y tres docentes que desarrollan su labor en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria.
- La experiencia educativa con qué contaban: todos los docentes implicados contaban con un mínimo de experiencia en educación, aunque en grados muy distintos, comprendidos entre 10 y 35 años de experiencia docente. En cuanto a su perfil, contamos con la participación de un profesor de matemáticas de secundaria, tres maestras de educación primaria, un maestro de primaria que, con la reforma educativa, optó por impartir a los primeros cursos de la educación secundaria y, finalmente, un físico que desarrolla su labor como profesor de matemáticas.
- Gestión de la resolución de problemas: en este sentido, contamos con gestiones diversas, desde el trabajo de problemas vinculados únicamente a un libro de texto a la

resolución de problemas, un modelo mixto en el que la resolución de problemas va más allá de ejercicios esteortipados, hasta encontrarlo como herramienta transversal integrado en las distintas áreas de conocimiento, como motor para el aprendizaje.

Para referirnos a cada uno de los docentes, se ha establecido un código de referencia en el cual las dos primeras letras hacen referencia al centro de procedencia y el número siguiente, al curso en qué impartía las clases. Así SC1 se refiere al docente que trabaja las matemáticas en 1º de la ESO del centro SC.

De los seis docentes implicados, tres impartían matemáticas en 6º de Educación Primaria (IT6, NB6, EP6) y tres en 1º de la ESO (SC1, AL1, PI1), cada uno de ellos con trayectorias diferentes. IT6, NB6 y EP6 son maestros de primaria, siendo EP6 además de ello psicóloga, y SC1 y PI1 son profesores de matemáticas de secundaria. Por otro lado, AL1 es maestro de primaria de formación pero que con la introducción de la LOMCE pasó a ser profesor de matemáticas de primeros cursos de educación secundaria y PI1 es físico.

En cuanto a su experiencia educativa, apreciamos distintos niveles de veteranía. Los docentes más experimentados son AL1, EP6 y SC1 con 35 años de dedicación a la docencia y NB6 con unos 30. IT, cuenta con unos 20 años de experiencia docente y PI1, con unos 15, siendo éstos dos los, aunque sin falta de ella, menos experimentados.

De acuerdo con las particularidades de manera de desempeñar sus clases, la gestión de la resolución de problemas que de manera general desarrollaban en sus aulas es distinta y característica de cada docente y centro de procedencia. Recogemos a continuación la información principal que compartieron con nosotros:

El docente NB6 trabaja en Educación Primaria. De acuerdo con la línea educativa de su centro, sus clases son transversales y de ellas, destacada el trabajo por proyectos, talleres y trabajo libre en los que las matemáticas son contextualizadas y trabajadas de manera vivencial e integrada con otras materias. No utilizan libro de texto y, en caso de recurrir a propuestas de libros, recurre a los libros editados en los años 80. No tienen una sesión concreta asignada a la resolución de problemas, pues se encuentran habitualmente en un ambiente de resolución de problemas. Para la corrección de los problemas, destaca que normalmente lo hacen en voz alta, y que puntualmente puede salir un alumno a la pizarra. Intenta no solucionarlos, sino simplemente conducir su corrección. Si trabajan por parejas, cada pareja hace su problema y después se lo intercambian entre la pareja. Concreta que a la hora de evaluar las matemáticas se encuentra un punto distinguido a la resolución de problemas, diferenciando los procedimientos y las operaciones. Hasta el momento no han trabajado con rúbricas o bases de orientación. Ha participado en la Segunda Implementación con el grupo de 6º de Primaria del cual es tutora y se encarga de trabajar las matemáticas.

IT6, por su parte, comenta que trabajan las matemáticas por sí mismas, sin estar integradas en ningún proyecto interdisciplinar. Disponen de libro de texto pero sin seguirlo al pie de la letra. Más bien se trata de una referencia de trabajo que complementan con materiales específicos y cuadernos de práctica, especialmente porque los problemas que ofrece el libro no los entiende como problemas, pues los considera meros ejercicios. Trabajan la resolución de problemas a lo largo de los temas, no como presentación de los mismos, y normalmente vinculados a ellos, pero sin dedicar una sesión especial a la resolución de problemas. Destaca la necesidad de

presentar, leer y entender los problemas de manera grupal para que luego intenten trabajarlos a nivel individual. Esto concluye en su participación activa en el aula conduciendo la presentación y entendimiento de los problemas. Comenta la importancia que le da a que se haga un dibujo de la situación que presenta el problema. Evalúa las matemáticas como un punto distinguido en la evaluación general de las matemáticas. Para ello, tanto considera el trabajo diario en relación a la resolución de problemas como en los que se pueden poner en pruebas de evaluación. Suele introducir los cursos con temas más bien de numeración y cálculo. Nunca antes habían trabajado con la rúbrica o bases de orientación. Su práctica se ha desempeñado con dos grupos-clase de 6º de Primaria, 6ºA y 6ºB, de 23 alumnos matriculados cada uno. Así mismo, han aprovechado los momentos de grupo flexible para la implementación de los materiales. Caracteriza estos grupos flexibles que los alumnos de los grupos 6ºA y 6ºB no están separados por ser del grupo-clase A o el grupo-clase B, sino que se redistribuyen, independientemente del grupo-clase habitual del que proceden, en tres grupos, de manera que se mezclan alumnos de 6ºA y 6ºB. Con ello las sesiones de trabajo quedan reducidas a 45 minutos, pero en cada sesión hay menos alumnos (de un poco más de la veintena, se pasa a una quincena). Participa en los dos primeros ciclos de implementación con los dos grupos de 6º del centro en los cuales imparte matemáticas y es tutora de uno de ellos. También participó con los dos grupos-clase de 6º de Primaria en la prueba piloto.

A diferencia de los otros docentes, EP6 no es la maestra habitual de matemáticas, u otra material, del grupo de alumnos implicados. De acuerdo con el cambio metodológico que pretenden realizar en el centro, se trata de la maestra de refuerzo que, una vez a la semana, trabaja con los alumnos de Ciclo Superior de Educación Primaria para potenciar el trabajo colaborativo a través de la resolución de problemas. Con ello pretenden dar una visión diferente de la resolución de problemas a los alumnos y resto de docentes. Se trata de la primera vez que los alumnos trabajarán la resolución de problemas de manera alternativa y sistematizada a la habitual y será a lo largo de estas horas que trabajaran los instrumentos de resolución de problemas propuestos. Comenta que en los informes de evaluación de los alumnos hay un ítem destacado para la resolución de problemas, por lo que sí deben realizar una evaluación del desempeño de la resolución de problemas de los alumnos. Aunque no comenta cómo lo determinan explícita que en ella no sólo se tienen en cuenta la resolución de problemas trabajados durante las sesiones de matemáticas, sino también el trabajo relacionado con la resolución de problemas en otras áreas o de situaciones-problemas más generales. EP participa en la 3ª fase del ciclo, con los alumnos del grupo-clase de 6º de Primaria de su centro.

De su clase, AL1 destaca el uso cotidiano de la calculadora y las nuevas tecnologías. De ahí que inicie sus cursos con los números naturales y el trabajo en calculadora. No sigue un libro de texto específico. Recoge materiales que incluyen problemas y los alumnos deben tomar apuntes. Normalmente presenta los problemas proyectándolos con el proyector y a partir de ahí deja que sus alumnos inicien el proceso de resolución e interviene en su proceso de resolución. De esta manera se va realizando la resolución al problema. En sus exámenes incluye algún problema para ser evaluado. Su nota queda integrada en la prueba. De manera alternativa y voluntaria, da la opción de subir nota a sus alumnos presentando la resolución de un conjunto determinado de problemas. De manera general, pide una autoevaluación a sus alumnos del trabajo realizado en cada uno de los temas. Así mismo no ha utilizado hasta el momento rúbricas o bases de orientación. Su práctica se ha desempeñado con dos grupos-

clase de 1º de la ESO de 23 alumnos matriculados cada uno. Participa en el primer y segundo ciclo de la implementación con dos cursos de 1º de la ESO de su centro, y, anteriormente, en la prueba piloto con dos grupos-clase de 1º de la ESO de su centro.

SC1 destaca que sus alumnos deben tomar apuntes y trabajan a partir de un dossier de trabajo elaborado por el Departamento. La resolución de problemas suele ir vinculada al tema que se trabaja en el momento. En su clase no hay una práctica de resolución de problemas individual estricta. Aunque los alumnos trabajan los problemas por sí mismos, se fomenta que puedan intercambiar sus opiniones a medida que los realizan. Por su parte, intenta no intervenir mientras los alumnos trabajan el problema, pues percibe que al hacerlo se pone presión a los alumnos. La corrección de los problemas la suele llevar a cabo de manera grupal, en voz alta mientras va apuntando las ideas que surgen en la pizarra. Destaca mucha falta de autonomía en el proceso y de aceptación del error. Pide a sus alumnos que corrijan en color distinto al utilizado para su desarrollo. En el examen final de trimestre incluye siempre algunos problemas, aunque de momento la resolución de problemas no tiene un peso por sí mismo. Se integra directamente en la nota del examen. Hasta el momento no ha utilizado bases de orientación o rúbricas. Inicia el curso con temas de números y medida. A la semana disponen de una hora para trabajar aspectos complementarios al temario. Se ha utilizado esta hora para la implementación de los IRP. Participa en el primer y segundo ciclo de la implementación con un grupo-clase de 1º de la ESO de su centro y, anteriormente, en la prueba piloto también con otro grupo-clase de 1º de la ESO de su centro.

PI1 organiza sus clases de acuerdo con un libro de texto, que siguen de manera sistemática. Como el resto de contenidos, trabajan los problemas que se presentan en el libro de texto a medida que aparecen y no trabajan otros tipos de problemas fuera de temario o dedican alguna hora al trabajo de problemas. No evalúa la resolución de problema de forma destacada ni dispone de ningún tipo de instrumento para evaluar la resolución de problemas. Su práctica se ha desempeñado en la tercera implementación, con otro grupo-clase de 1º de la ESO.

Añadir, de manera común a todos los docentes participantes, que sus respectivos equipos directivos y compañeros de Departamento de los distintos centros conocían el proyecto y su aplicación y consideración dentro de la dinámica habitual de clases de los docentes implicados. Incluso algunos de sus compañeros han aprovechado el material para trabajarlo en sus aulas pero sin el deseo de participar en él.

2.3 Instrumentos de la investigación

Los instrumentos utilizados para la posterior extracción de datos son de naturaleza diversa. Por un lado destacamos el análisis de documentación que, no sólo ha proporcionado una posición teórica del trabajo, sino que también ha servido para propiciar el diseño de los instrumentos para la resolución de problemas a implementar, al mismo tiempo que ofrecer el marco con el que contrastar las observaciones y reflexiones procedentes tanto del grupo de reflexión como de los alumnos implicados. Si bien se puede destacar un pequeño periodo para la creación, adaptación o aplicación de cada uno de estos instrumentos, en general y debido a la metodología considerada, todos ellos han convivido, complementándose y reelaborándose a lo largo de todo el estudio, aunque más especialmente durante el segundo y tercer año del mismo. Para clarificar su funcionalidad en el estudio, los presentamos agrupados en:

- Búsqueda y Análisis de Documentación.

- Diseño de Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP): Problemas, Base de Orientación y Rúbrica.
- Recopilación de Percepciones: Observaciones y reflexiones de los participantes sobre la dinámica generada con los IRP.

2.3.1 Búsqueda y Análisis de Documentación

La búsqueda y el análisis de la documentación utilizada para el presente estudio han tenido lugar a lo largo del mismo. Se inició en octubre de 2013 y se concluyó en julio de 2016, aunque se pueden destacar momentos más intensos, como al inicio del proyecto, en su mayor parte, y al finalizar cada una de las implementaciones de los IRP.

De acuerdo con el tema principal de estudio, el ámbito de aplicación de los IRP, la realidad diaria de los docentes implicados y sus alumnos, y ante las directrices de los expertos participantes, la documentación consultada ha permitido recoger información relevante sobre la educación matemática, en general, y la resolución de problemas, en particular, así como su concreción en un marco curricular competencial, y más concretamente, el catalán. Al mismo tiempo, se ha situado el sentido de la evaluación en dicho marco competencial, poniendo especial interés en su aplicación en la resolución de problemas, lo que ha desembocado en la propuesta de instrumentos de evaluación reguladora, como las rúbricas y las bases de orientación a tal efecto.

Las fuentes consultadas son de ámbitos y procedencia diversa. Por un lado, destacamos el análisis de los currículos educativos catalanes vigentes en el momento de iniciar la tesis (curso 2013-2014), que nos permiten identificar y fijar el contexto educativo y territorial en que queda enmarcado el estudio que presentamos, y complementados con los actualizados del curso 2015-2016. Por otro lado, el análisis de artículos tanto nacionales como internacionales relacionados con la educación matemática, la resolución de problemas y la evaluación a lo largo de estos últimos 30 años, así como la consulta de fuentes relacionadas con el uso y diseño de rúbricas y bases de orientación, indagando finalmente en la documentación que nos permite caracterizar las bases de orientación como instrumentos que promueven el *self-scaffolding*, que traducimos al español como auto-andamiajes educativos. Finalmente, destacamos la revisión de colecciones de problemas tanto propios como de carácter público, como las de *Els Problemes a l'esprint* (FEEMCAT, SCM y Generalitat de Catalunya, 2000-2017), así como algunas propuestas concretas de rúbricas de desempeño para la educación obligatoria como las de Danielson (1997a, 1997b, 1999).

2.3.2 Diseño y Gestión de Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP): Problemas, Rúbrica de desempeño y Base de Orientación.

De acuerdo con los objetivos principales del estudio, que persiguen contribuir en la mejora de la gestión de la resolución de problemas en las aulas para su mejorar la adquisición de dicha competencia, se convino la generación de un material que pudiera, por un lado, proporcionar información que contribuyera en dicha caracterización que a la vez pudiera servir de ejemplo para la práctica en el aula. Ante las referencias consultadas así como las aportaciones realizadas por los integrantes del grupo de discusión, nos han llevado a la generación de un

conjunto de instrumentos para una evaluación reguladora de la resolución de problemas (IRP) compuesto por:

- La colección de 10 problemas matemáticos, elegidos pensando que pueda promover en los alumnos participantes cierta motivación y conllevarles cierta implicación e investigación matemática.
- La propuesta de dos instrumentos para una función reguladora de la evaluación:
 - Una base de orientación, como instrumento de evaluación formadora, que permita al alumno a reflexionar sobre su proceso de resolución, tanto a nivel local como global.
 - Una rúbrica de desempeño, como instrumento de evaluación formativa, que pretende ser la guía del profesor para valorar la resolución del problema de manera competencial.

Destacar aquí el sentido de “valorar/valoración” como el hecho de asignar a cada alumno una descripción de desempeño por cada una de las acciones llevadas a cabo que llevan a la resolución del problema, el conjunto de las cuales (las descripciones de realización) puedan proporcionar una regularización de su aprendizaje, pudiendo así contribuir en una evaluación de carácter formativo y de acuerdo en un contexto competencial, como el que se busca.

Los procesos de generación e implementación de los IRP están estrechamente ligados a lo largo de todo el periodo de investigación. Siguiendo la secuencia metodológica ejemplificada en la Figura 2.1 a partir de la prueba piloto, se han realizado tres ciclos de aplicación, llevados a cabo entre el junio de 2014 y junio de 2016. Para cada aplicación se han tenido en cuenta las producciones y observaciones de los alumnos, así como las respectivas valoraciones mediante la rúbrica y observaciones de los docentes y especialistas. La Tabla 2.1 resume los distintos ciclos de aplicación, diferenciando los momentos de implementación de los IRP en el aula (I) y los momentos principales de intercambio tanto con el grupo de reflexión, ya sea con los especialistas (E) o los docentes (D), como con los alumnos (A).

2014								2015								2016					
feb	may	jun	jul	sep	oct	nov	dic	ene	feb	abr	may	jun	jul	oct	nov	dic	ene	abr	may	jun	jul
E	E		E				E		E	E			E	E	E	E		E	E	E	
	D		D	D			D		D+A				D+A		D		D+A		D+A		
		I0					I1					I2							I3		

Tabla 2.1. Calendario de Aplicación. En él, E: apreciaciones de los especialistas; D: apreciaciones de los docentes; A: apreciaciones de los alumnos; I: periodo de implementación de los IRP

Selección de los Problemas

Siendo nuestro objetivo final caracterizar actividades que permitan el aprendizaje de la resolución de problemas desde un punto de vista competencial, teniendo en cuenta que las realidades de cada clase donde se pudieran implementar son concretas, más o menos libres a poder aplicar actividades propias, en primer lugar fue necesario establecer las actividades matemáticas que podían resultar un problema matemático y cómo ser trabajado por los alumnos de 6º de Primaria y 1º de la ESO en las clases participantes.

De acuerdo con las fuentes consultadas entendemos por problema matemático cualquier situación desconocida planteada por un conjunto de datos contextualizados que no puede ser resuelta de manera automatizada, sino que requiere un enfrentamiento para el cual no se dispone de una respuesta inmediata, haciéndose así necesaria cierta implicación y proceso de

indagación matemática por parte de quien lo resuelve. Con ello, pues, el primer paso para la creación de posibles instrumentos para la resolución de problemas requería la propuesta de determinadas actividades matemáticas para descifrar su eficacia como problema en los cursos implicados.

Atendiendo las particularidades de los docentes implicados en la prueba piloto, a finales del curso 2013-2014 se propuso un primer problema (Pb0.a0), a modo de prueba inicial. Dicho problema, se presentó a los docentes que iban a formar parte del grupo de reflexión para que lo aplicaran en sus aulas. A pesar que se trataba de los últimos días del curso 2013-2014, se obtuvieron visiones y resoluciones interesantes. Ello hizo que los docentes implicados, además del especialista en resolución de problemas, confirmaran la aceptación del problema, tanto por su presentación, nivel y contenido.

Con la aceptación del problema piloto, y de acuerdo con las explicaciones de los docentes que iban a formar parte del grupo de reflexión en relación a sus manera de gestionar la resolución de problemas, durante el traspaso de curso 2013-2014 a 2014-2015 se seleccionaron y adaptaron siete problemas más, con el objetivo de ser aplicados en el aula para detectar aquellas peculiaridades que podían ayudar a resolver nuestras preguntas de investigación.

La selección de estos siete problemas se hizo de manera conjunta con el grupo de reflexión. La doctoranda sugirió dieciséis problemas, de los cuales, después de la revisión de los docentes y el experto en resolución de problemas, se seleccionaron siete. Los docentes debían descartar aquellos problemas que no vieran adecuados así como aportar las modificaciones que creyeran convenientes. Los problemas debían ofrecer diversidad contextual en la que situarse así en la presentación de los datos, pero a la vez proporcionar un cierto equilibrio en cuanto a los contenidos matemáticos que pudieran requerir sus resoluciones. Era fundamental tener en cuenta los cursos a los que debían aplicarse así como ser conscientes de las herramientas o conocimientos previos de qué podrían disponer los alumnos involucrados.

Atendiendo que el bloque de Numeración y Cálculo debía de estar presenten en las distintas aula desde el inicio de curso, se convino que los problemas propuestos pudieran encajar, en algún sentido, en el bloque de Numeración y Cálculo, aunque además pudieran pudiesen presentar o requerir de otros aspectos relacionados con otros bloques. De esta manera, se aseguraba un cierto equilibrio curricular para todos los alumnos de manera que dispusieran de las herramientas necesarias para afrontar las resoluciones a los problemas, pero, a la vez, para la cual no tuvieran respuesta inmediata o de obtención mecánica y que dicha resolución les aportara un aprendizaje significativo en algún sentido.

Atendiendo la manera generalizada de presentar los problemas por escrito, a pesar de que algunos docentes proyectaran o no el enunciado, todos los alumnos debían tener una copia en papel donde desarrollar la solución del problema en cuestión y, para dar cuenta de la realidad de cada una de las aulas participantes, se acordó tener en cuenta el trabajo tanto individual como por parejas.

Con todo ello las propuestas a problemas seleccionados para esta primera aplicación fueron los problemas identificados como Pb0.a1; Pb1.1.a1; Pb1.2.a1; Pb2.a1; Pb3.a1; Pb4.a1; Pb5.a1 y Pb6.a1, que se describen en el Anexo 1 y cuya información se presenta en la Tabla 2.2.

Problema		Fuente	Contexto	Contenidos matemáticos	Características versión inicial	Datos numéricos	Actualización			
Id	variante						I0	I1	I2	I3
Pb0		Pb.Esprint CS, n.9 18/04/12	Vida cotidiana	Interpretación y elaboración de gráficos a partir del recuento y la medida.	Por escrito con Imagen descriptiva. Preguntas numeradas	Grafía numérica y medidas de longitud	a0	a1		a2
Pb1	Pb1.1	Propia	Matemático	Análisis de las propiedades de los números y las operaciones.	Por escrito con ejemplo numérico. Preguntas numeradas	Grafía numérica		a1	a2	
	Pb1.2							a1	a2	
	Pb1.3								a1	
	Pb1.4									a1
Pb2		Pb.Esprint CS, n.4 17/02/10	Vida cotidiana	Análisis de las propiedades de los números y las operaciones.	Por escrito. Preguntas sin numerar	Grafía numérica		a1	a2	
Pb3		Pb.Esprint CS, n.12 19/04/07	Vida cotidiana	Análisis de las relaciones entre el perímetro y el área de una figura.	Por escrito con imagen representativa. Preguntas numeradas	Grafía numérica y medidas de longitud		a1	a2	
Pb4		Propia	Matemático (Vida cotidiana matemática)	Análisis de las propiedades de los números y las operaciones.	Por escrito. Preguntas numeradas	Grafía numérica y medidas de longitud		a1	a2	
Pb5		Pb.Esprint CS, n.10 7/02/10	Vida cotidiana	Aplicación de modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas.	Por escrito. Preguntas numeradas	Descripción numérica		a1	a2	a2
Pb6		Pb.Esprint CS, n.2 19/02/08	Histórico	Relación de las tablas de doble entrada y diagramas en árbol con la multiplicación.	Por escrito con imagen ilustrativa. Preguntas sin numerar	Grafía numérica		a1	a2	
Pb7		Arnold, V. (2004) <i>Problems for children from 5 to 15</i> . n. 1	Vida cotidiana	Comprensión y uso de los números decimales en la interpretación y aproximación de la medida.	Por escrito con imagen ilustrativa. Preguntas numeradas	Grafía numérica				a1

Tabla 2.2. Cuadro resumen de los problemas aplicados durante el estudio de tesis. En él: Pb. Esprint, CS: *Problemes a l'esprint, Cicle superior de Primària (2000-2017)*. Los enunciados de los problemas se encuentran en el Anexo 1.

Una vez implementados los problemas, y después del consecuente periodo de reflexión, se aplicaron los cambios considerados a los problemas obteniendo así las respectivas versiones y actualizaciones de los mismos Pb1.1.a1, Pb1.2.a2 y Pb1.3.a1 Pb2.a2; Pb3.a2; Pb4.a2; Pb5.a2 y Pb6.a2. Para la tercera implementación, desarrollada durante la estancia, se consideró el problema Pb5.a2, un problema nuevo, Pb7.a1, y las actualizaciones de problemas anteriores Pb0.a2 y Pb1.1.a1. En este caso los problemas fueron seleccionados de acuerdo con la experiencia de las implementaciones previas, pero sin la intervención directa de los docentes participantes.

Comentar que la numeración utilizada para organizar los problemas no es más que la numeración correspondiente en la que fueron seleccionados.

Creación de la Rúbrica de desempeño y la Base de Orientación

En cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje por competencias, se requiere un modelo particular de evaluación que no se limite a constatar la posesión de recursos, si no su puesta en práctica de manera satisfactoria (Rico y Lupiáñez, 2008). Por ello, y siguiendo la directrices de Blanco (2008), Sanmartí (2010) o Rosli et al. (2013), entre otros, se convino la necesidad de diseñar un instrumento de evaluación con finalidad reguladora. De acuerdo con el Marco Teórico (capítulo 1), se optó en primer lugar por el diseño de una rúbrica de desempeño (Rosli et al., 2013) para la resolución de problemas, con el deseo que pudiera permitir una evaluación de acuerdo con un enfoque competencial de la resolución de problemas.

Rúbrica de desempeño:

A lo largo del proyecto se han generado tres Rúbricas de desempeño Rb0, Rb1 y Rb2. Los tres ejemplos se adjuntan en el Anexo 2. Rb0 corresponde a la propuesta de rúbrica que se presentó en la prueba piloto. Se generó de acuerdo con la recopilación de ítems realizada a medida que se construía el Marco Teórico del proyecto (capítulo 1) y fue consensuada durante el periodo de traspaso del curso 2013-2014 al 2014-2015. Se trata de la Tabla A1 detallada en el Anexo 2. De ello surgió la Rb1, que fue la utilizada en la Implementación Primera en el primer trimestre del curso 2014-2015. De las reflexiones extraídas de la Implementación Primera, se redefinió la Rb1 dando paso a la Rb2, que fue la rúbrica de desempeño aplicada en la Implementación Segunda en el 3r trimestre del curso 2014-2015. Por el enfoque de la Implementación Tercera, ya no se adaptó o creó ninguna rúbrica de desempeño para la resolución de problemas.

Las rúbricas se han generado de acuerdo con los procesos de resolución observados previamente en el alumnado de las edades consideradas, la experiencia y percepciones de los docentes implicados, el experto en resolución de problemas, la experta en evaluación y las fuentes sobre resolución de problemas y rúbricas consultadas.

En todos los casos, se trata de una rúbrica analítica, a modo tabla de doble entrada en la que se especifican los criterios que se tienen que evaluar de la resolución del problema, una gradación de los posibles niveles de adquisición mediante descripciones de los criterios que determinan cada nivel de desempeño.

Siguiendo las directrices de la experta en evaluación, se convinieron cuatro niveles de desempeño. De acuerdo con la experta y la fuentes bibliográficas, estos niveles se etiquetaron como nivel 1: aprendiz; nivel 2: intermedio; nivel 3: avanzado; y nivel 4: experto, donde nivel 4 corresponde al nivel que muestra más competencia y nivel 1 el que menos. Si bien es cierto que lo más habitual suelen ser 3 niveles de adquisición, se pensó que la clasificación en 4 permitía una mejor descripción de los distintos perfiles. De otro modo, considerando sólo 3 niveles, se hizo ver que el nivel intermedio podía resultar demasiado ambiguo. Desde un principio se descartó un nivel 0 porque sería el que el alumno no realiza nada en el criterio considerado, a lo que la especialista nos hizo entrever que el alumno no puede partir realmente de 0, pues eso querría decir que el nivel pedido no está ajustado a los conocimientos del alumno en particular. Luego, el hipotético nivel 0 queda siempre incluido en el nivel 1. Esta distribución se ha mantenido en todas las versiones.

En las rúbricas distinguimos entre Dominios que corresponden con las fases identificadas en las que un resolutor se ve envuelto al resolver un problema, y Dimensiones, que correspondiente a los criterios de evaluación (y de aquí que en la Rb0 aún los llamáramos así), determinan los aspectos concretos que, relacionados con las fases, se quiere evaluar. Si bien los dominios han permanecido intactos durante las distintas fases de implementación, las dimensiones o criterios de evaluación y las descripciones de los niveles de desempeño han sido modificadas según las observaciones recibidas después de cada una de las implementaciones y a medida que se profundizaba en el estudio de la referencias bibliográficas. En cuanto a las referencias utilizadas, cabe destacar a Polya (1945), Mason et al. (1982), y los criterios de evaluación publicados por la Generalitat de Catalunya (2013).

En la resolución de un problema, Polya (1945) determina cuatro fases: entender el problema, concebir un plan de acción, llevar a cabo el plan de acción y volver la mirada atrás. De la primera fase deriva nuestro primer dominio Comprender el problema que, probablemente debido a su aparente obviedad, a menudo se pasa por alto cuando es un punto clave en la resolución de todo problema (De Corte et al., 2000a, Mason et al., 1982; Polya, 1945). De la segunda y tercera fase, emerge nuestro segundo dominio Estructurar y desarrollar un plan de acción, cuya finalidad abarca el hecho de encontrar una estrategia de resolución, con todo lo que esta requiera, y así desarrollarla y describirla. La dificultad observada en los alumnos para conceptualmente separar planificación y acción, y bajo las propuestas de Mason et al. (1982), se convino su unión. Finalmente, la visión retrospectiva del proceso, que conlleva la revisión de la tarea realizada y así da nombre al tercer y último dominio de la base de orientación. Con ello, distinguimos tres grandes bloques que identificamos como dominios:

- Comprender el problema
- Estructurar y desarrollar un plan de acción
- Revisar la tarea realizada

En la Tabla 2.3 se presenta la relación de cambios que han sufrido las dimensiones de la rúbrica a lo largo de sus dos implementaciones.

Dominios	Rb0 (Muestra en la prueba piloto)	Rb1 (implementación 1)	Rb2 (Implementación 2)
	Criterios de evaluación de realización	Dimensiones	Dimensiones
Comprender el problema	Identificar, interpretar y relacionar los datos (de cualquier tipología: gráficas, numéricas...) les magnitudes y las unidades que se presentan en el problema.	D1. Identificar, interpretar y relacionar los datos (de cualquier tipología: gráficas, numéricas...) les magnitudes y las unidades que se presentan en el problema	D1. Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide de investigar el problema y las preguntas que hay que responder.
	Expresar (representar, reescribir, explicar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas (usar descripciones o resúmenes propios, esquemas, gráficos, dibujos geométricos,	D2. Expresar (representar, reescribir, explicar...) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (usar descripciones o resúmenes, esquemas, gráficos, dibujos	D2. Identificar, interpretar y relacionar los datos (de cualquier tipología: gráficas, numéricas...), las magnitudes y las unidades que es presenten en el problema.

	expresiones aritméticas...).	geométricos, expresiones aritméticas...).	D3.Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, esquemas, gráficos, diagramas, dibujos, relaciones, descripciones, resúmenes,...) con el uso del material que haga falta, y experimentarla (incluir las pruebas necesarias para entender/confirmar la representación o ejemplificación del problema realizada).
Estructurar y desarrollar un plan de acción	Planificar y aplicar algún proceso de resolución del problema.	D3. Planificar y aplicar algún proceso de resolución del problema.	Per a cada pregunta formulada:
	Buscar, encontrar, organizar estrategias útiles para abordar el problema (simplificar, buscar caso particular para extender, identificar patrón, tantear para realizar una estimación previa, buscar contraejemplo...)	D4. Buscar, encontrar, organizar estrategias para abordar el problema siguiendo la planificación establecida (simplificar, buscar caso particular para extender, identificar patrón, tantear para realizar una estimación previa, buscar contraejemplo...)	D4.Planificar y aplicar alguna estrategia o proceso de resolución del problema a partir de la expresión y experimentación que se ha hecho (simplificar, buscar caso particular para extender, identificar patrón, tantear para hacer estimación previa, buscar contraejemplo...)
	Buscar, encontrar, reconocer, adaptar y utilizar algoritmos o determinados procesos que permitan resolver las diferentes partes del problema (para las que se ha determinado una estrategia).	D5. Buscar, encontrar, reconocer, adaptar y utilizar algoritmos o determinados procesos que permitan resolver las diferentes partes del problema i para las que se ha determinado una estrategia.	D5. Encontrar los datos necesarios (reidentificarlos, si están expuestos directamente en el problema o, si no aparecen de manera explícita, deducirlos con las técnicas necesarias) y los razonamientos o algoritmos que permiten aplicar la estrategia establecida.
	Replantear las partes del problema que puedan no ser bien interpretadas o bien en las que el procedimiento escogido no funciona.		
Entender y expresar adecuadamente los pasos que se han llevado a cabo para resolver el problema.		D6. Aplicar y exponer la estrategia considerada con y relacionando los datos y razonamientos o algoritmos necesarios identificados de manera clara y razonada ¹ .	
		D6. Exponer, seguir y entender	D7. Si hace falta, detectar

¹Permite entrever si el alumno entiende qué está haciendo.

	los pasos que se llevan a cabo para resolver el problema.	las partes del problema que no son bien interpretadas o trabajadas, o en donde los procedimientos escogidos no funcionan, y replantearlos con alguna nueva estrategia y todo aquello que esta requiera (nueva representación/ejemplificación o experimentación del problema, reidentificar los datos, aplicar algoritmos alternativos,...)
Si el problema lo permite, encontrar y explicitar más de una estrategia para resolverlo.	D7. Replantear las partes del problema que puedan no ser bien interpretadas o trabajadas, o donde los procedimientos escogidos no funcionen.	
Explorar la posibilidad que haya más de una solución o comprobar que si no hay ninguna otra posible.	D8. Explorar, encontrar y explicitar más de una estrategia para resolverlo.	
Encontrar, dar y argumentar adecuadamente todas las soluciones posibles a todas las preguntas formuladas.	D9. Explorar y encontrar todas las soluciones posibles o comprobar que sólo hay una.	D8. Explorar y argumentar todas las soluciones posibles, y razonar si se podría hacer de otras maneras.
Comprobar que las soluciones dadas son correctas y tienen sentido en todos sus aspectos (matemáticamente y contextualmente).	D10. Comprobar y argumentar todas las soluciones dadas (si son o no correctas y si tienen sentido en todos sus aspectos, matemáticamente y de contexto).	D9. Exponer la realización de las tareas pedidas y responder la pregunta con coherencia y de manera clara y razonada.

Tabla 2.3. Secuencia de cambios en las dimensiones de la Rúbrica [*se añadió en la última versión Rb2]

Para la recogida de valoraciones de las distintas resoluciones, fueron preparadas dos pautas, una para el seguimiento general de la clase (A4.2 Seguimiento grupo-clase) y en función de cada alumno (A4.1 Seguimiento por alumno). Las propuestas de tablas para dichas recopilaciones se adjuntan en el Anexo 4.

Bases de orientación:

Al generar la Rb1 se convino la simplificación de la misma para que los alumnos pudieran tener a mano lo que se espera que, de manera general, desarrollen al resolver un problema. Con ello generamos los que sería la primera base de orientación para la resolución de problemas. En esta simplificación ciertas descripciones de las dimensiones y se eludieron los niveles de desempeño, pues las dimensiones señalaban simplemente las acciones a realizar. Este proceso, a su vez, intervino en la determinación final de la Rb1.

Las observaciones extraídas de su uso a lo largo de la Implementación Primera conllevó un refinamiento de la misma generándose así una segunda base de orientación (BO2 del Anexo 3) que, a su vez, influyó en la generación de la Rúbrica de Desempeño Rb2. Si bien en la Implementación Primera, nos referimos a ella como rúbrica para los alumnos, en la Implementación Segunda más conscientes que se trataba de un instrumento que resume de manera gráfica y ordenada la acción a realizar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por sí mismos las operaciones que deben llevar a cabo para resolver con éxito los diferentes tipos de tareas escolares (Sanmartí, 2010), ya nos referimos como Base de Orientación propiamente dicha. Posteriormente, durante la estancia en la universidad de Estocolmo, se convino el diseño de otra base de orientación, la BO3 que se presenta en el

Anexo 3. En este caso, la base de orientación no surge ni está asociada a ninguna Rúbrica de Desempeño para el docente, pero cuenta con la experiencia de haber realizado las dos anteriores.

En los tres casos, se han generado de acuerdo con los procesos de resolución observados previamente en el alumnado de las edades consideradas, la experiencia y percepciones de los docentes implicados, los expertos en educación matemática, y las fuentes sobre resolución de problemas, entre las que destacamos De Corte et al. (2000, 2003), Mason (1982) y Polya (1945).

Desde su versión inicial, las bases de orientación generadas se presentan en forma de tabla listada, sin mencionar que los pasos descritos deban mantenerse de forma estricta para resolver el problema. Sin embargo, la linealidad establecida, cuyo orden se sustenta por las fuentes usadas, bibliografía y experiencia de los docentes y expertos implicados, y que describen los pasos de un resolutor experto y conllevan la experiencia de los alumnos de las edades involucradas, se convino para posibilitar un orden de aplicación, evitar dispersiones, y al mismo tiempo establecer de manera clara y precisa la relación entre dominios, dimensiones, y ambos.

Si bien para las dos primeras versiones se mantuvieron las etiquetas de dominios y dimensiones, en la tercera versión, más conscientes que en las dimensiones se describen únicamente acciones, se convino el uso de dimensiones, para señalar las fases o etapas de resolución, y las acciones por lo que antes nos referíamos a dimensiones.

En cuanto a las Bases de Orientación utilizadas en las Implementaciones Primera y Segunda (BO1 y BO2), de acuerdo con las Rúbricas asociadas, constan de 3 niveles de implicación. Si bien la Primera Base de Orientación mantuvo exactamente las propuestas de la Rúbrica asociada:

- Comprendo el problema
- Estructuro y desarrollo un plan de acción
- Reviso

En la Segunda fueron reescritas de acuerdo a las necesidades de los alumnos, como se verá a lo largo del Análisis.

- Comprendo el problema
- Tengo un plan de acción
- Reviso mi tarea

En ambos casos, para cada una de ellas, y de acuerdo con las descripciones de las dimensiones asociadas a ellos en la Rúbrica, se simplificaron las descripciones para establecer las dimensiones para los alumnos. Si bien en la primera versión se distinguieron 10 dimensiones, 2 para el 1º dominio, 3 para el segundo y 5 para el último, en la segunda versión de la base de orientación, cada dominio se desglosó en 3 dimensiones cada uno, habiendo así, un total de 9 dimensiones.

La descripción de las dimensiones se hizo utilizando el presente de indicativo y la primera persona del singular. Con ello se pretende que el resolutor perciba al máximo la proximidad a la persona (ella misma) y al tiempo de resolución (el mismo que su uso).

En cuanto a la Base de Orientación BO3 desarrollada para la Implementación Tercera, fue confeccionada manteniendo las cuatro fases de resolución de problemas de Polya (1945). En este caso, como se puede observar en la Tabla 2.4, se mantuvieron intactas las cuatro fases de Polya. Cada una de ellas, por su parte, comprende tres acciones particulares. Como ya hemos avanzado, la inclusión de cada acción surge de las observaciones anteriores de los comportamientos de resolución de problemas de los alumnos catalanes de estas edades y de las estrategias de resolución de problemas encontradas en la literatura (por ejemplo, De Corte et al., 2003), así como las versiones anteriores de base de orientación, BO1 y BO2. Como en las versiones BO1 y BO2 las acciones son descritas en 1ª persona. Se trabajó para acortarlas sin perder el sentido de las mismas y fueron escritas en pretérito perfecto en lugar de en presente, con la intención de provocar más notoriamente el sentido de retroalimentación al tanto que intentar realzar así el sentido no lineal de la resolución de un problema. A la derecha de las acciones, además, se añadió una columna para que cada alumno pudiera registrar su seguimiento de la misma.

DIMENSIONES	ACCIONES	REGISTRO
Entiendo el problema	A1. He leído lo que se expone dos veces, al menos.	
	A2. Entiendo qué se quiere.	
	A3. He identificado y entendido bien los datos.	
Trazo un plan de acción	A4. He jugado con los datos del quehacer.	
	A5. He preparado una estrategia de resolución.	
	A6. He comprobado que mi estrategia se ajusta a los datos.	
Aplico mi plan de acción	A7. He implementado mi estrategia.	
	A8. He recopilado todas mis acciones de manera que las entiendo.	
	A9. He recopilado todas mis acciones de manera que los otros las entiendan.	
Reviso mi tarea	A10. Cuando me atasco vuelvo al principio.	
	A11. Cuando he terminado, he revisado mis respuestas.	
	A12. He explorado otras respuestas y/o mejores soluciones.	

Tabla 2.4. Tabla de Orientación BO3

Notar aquí que en la BO3 por jugar se entiende el hecho que los alumnos plasmen la información del problema de manera que les ayuda a entenderlo. Que hagan las representaciones gráficas (dibujo, esquema, diagrama...), establezcan relaciones, manipulen y experimenten con lo que crean conveniente y necesarias que les permita expresar y entender el problema (a su manera). Por estrategia se refiere al conjunto de todos los procesos heurísticos y algoritmos que se requieran. Es decir, a todo aquello que se requiera para establecer una estrategia de resolución. Por respuesta, se entiende el conjunto de explicaciones a las cuestiones formuladas de manera argumentada. Por solución se entiende el resultado preciso del proceso de resolución.

Implementación de los Instrumentos para la Resolución de Problemas

Como se ha avanzado, diferenciamos tres fases de implementación de los instrumentos para trabajar la resolución de problemas (IRP), más la prueba piloto:

- I0 Prueba Piloto: los alumnos debían resolver un problema (Pb0.a0) de manera individual y debía valorarse una propuesta de rúbrica inicial (Rb0).
- I1 Implementación Primera: se propuso que los alumnos resolvieran los siete problemas seleccionados para esta ocasión (Pb1.1.a1, Pb1.2.a1, Pb2.a1, Pb3.a1, Pb4.a1, Pb5.a1, Pb6.a1) usando la adaptación de la rúbrica Rb1 como la base de orientación (BO1) y cuyas resoluciones fueran valoradas por los docentes con la rúbrica de desempeño correspondiente (Rb1).
- I2 Implementación Segunda: se propuso que los alumnos resolvieran unos problemas determinados seleccionados en función de las observaciones procedentes de la Implementación Primera (Pb1.1.a2, Pb1.3.a1, Pb2.a2, Pb3.a2, Pb4.a2, Pb5.a2, Pb6.a1), usando la base de orientación propiamente dicha (BO2) como refinamiento de la utilizada en la Implementación Primera y cuyas resoluciones fueran valoradas por los docentes con la rúbrica correspondiente (Rb2).
- I3 Implementación Tercera: se propuso que los alumnos resolvieran cuatro problemas (Pb0.a2, Pb1.4.a1, Pb5.a2 y Pb7.a1) usando la base de orientación desarrollada durante la estancia en la universidad de Estocolmo (BO3).

Introducida la Rúbrica de desempeño, enfatizamos aquí el sentido de valorar como el hecho de asociar cada una de las partes de la resolución de un problema a una de las dimensiones de la rúbrica y, de manera consecuente y, de acuerdo con la descripción del nivel de adquisición establecido en la propuesta de rúbrica, atribuirle una gradación/descripción de realización en función de lo realizado. En este sentido, cada descripción de realización, se ve representada por un número aunque que bien podría ser otro símbolo. Luego, siendo la finalidad primera de dicha rúbrica una evaluación formativa, es decir regular el aprendizaje en la resolución de problemas, dejando en segundo término (y de manera consecuencia) la comprobación de lo aprendido, y todo ello con el uso de un instrumento a modo de prueba, pensamos que más que evaluación, se trata de reunir unas valoraciones cuyo conjunto conllevan una evaluación formativa del alumno valorado. En la Tabla 2.5 se resume el material que se propuso de implementar en cada ciclo de aplicación, así como el la información general relativa a los cursos y grupos-clase implicados en cada caso, y que luego describimos con más detalle para cada una de las implementaciones.

	I0	I1	I2	I3
Temporización	junio 2014	octubre 2014 a febrero 2015	mayo 2015 a junio 2015	abril 2016 a junio 2016
IRP	Problema: - Pb0. a0 Rúbrica : - Rb0 (ejemplo)	Problemas: - Pb1.1.a1 - Pb1.2.a1 - Pb2.a1 - Pb3.a1 - Pb4.a1 - Pb5.a1 - Pb6.a1 Rúbrica: - Rb1 Base Orientación: - BO1	Problemas - Pb1.1.a2 - Pb1.3.a1 - Pb2.a2 - Pb3.a2 - Pb4.a2 - Pb5.a2 - Pb6.a2 Rúbrica - Rb2 Base Orientación: - BO2	Problemas: - Pb0.a2 - Pb1.4.a1 - Pb5.a2 - Pb7.a1 Base Orientación: - BO3

Cursos	6º EP	1º ESO	6º EP	1º ESO	6º EP	1º ESO	6º EP	1º ESO
Docentes		3		3		4		2
	1	2	1	2	2	2	1	1
Grupos-clase		5		5		5		2
	2	3	2	3	3	3	1	1
Número total de alumnos	23;24	20;20;30	24;25	23;23;31	24;25;22	23;23;31	22	28

Tabla 2.5. Tabla-Resumen de los participantes e IRP utilizados en las distintas fases de implementación

I0: Implementación Inicial

En relación al problema: los docentes debían presentar el problema a los alumnos como desearan para que éstos lo resolvieran de manera individual. Así mismo, los docentes debían facilitar el enunciado del problema impreso en una hoja de papel para que en él pudieran desarrollar su resolución, para la que se pidió que no se eliminara nada de lo que se hiciera. En este caso, los alumnos se identificaron con su nombre real. Al ser una prueba inicial, y teniendo en cuenta que la implementación primera no tendría lugar con estos mismo alumnos, sus nombres fueron eliminados de los documentos para así mantener su anonimato.

En relación a la rúbrica: se trataba de conocer qué se entendía por Rúbrica, pues ninguno de los docentes implicados había trabajado con ellas, como se presentaba, cómo se podía aplicar y qué trabajo podía requerir su adecuación y uso.

En la Tabla 2.6 se recogen las fechas en que se trabajó el problema Pb0.a0 en cada una de las aulas implicadas, así como el número de producciones recogidas en cada una de ellas, número que se detalla después de la fecha, entre paréntesis y seguido por una P de producción.

Problema	IT6A	IT6B	AL1B	AL1D	SC1B
Pb0.a0	03/06/2014 (41 P)	06/06/2014 (18 P)	08/06/2014 (16 P)	06/2014 (26 P)	

Tabla 2.6. Prueba Piloto (I0). Fechas de trabajo y número de producciones (P) recibidas.

I1: Implementación Primera

Antes de cualquier implementación, el profesorado implicado, debía tener presentes los problemas seleccionados que, en este caso se corresponden con los problemas Pb1.1.a1, Pb1.2.a1, Pb2.a1, Pb3.a1, Pb4.a1, Pb5.a1 y Pb6.a1 del Anexo 1 que sus alumnos debían resolver, así como la rúbrica para los docentes Rb1 y la base de orientación para el alumnado BO1 que se debían aplicar. En ningún caso se proporcionó ni comentaron propuestas de resolución de los problemas a ninguno de los docentes implicados para no interferir en ningún sentido en su aplicación en el aula y desarrollo de resoluciones de los alumnos. Comentar aquí que tanto en esta implementación como las siguientes, siempre que hablemos de la resolución de un problema, nos referimos a resolver un problema usando la base de orientación proporcionada para tal ocasión; y que al referirnos al trabajo con un problema, nos referimos a su presentación en el aula, momento de resolución por parte de los alumnos y posterior puesta en común, siempre con la base de orientación correspondiente.

La base de orientación:

Previamente a presentar ningún problema, los docentes debían presentar la base de orientación de la manera y con el soporte que se deseara (la habitual en su aula) (pizarra,

proyección...) a sus alumnos para discutirla con ellos. Era imprescindible asegurarse que tanto el vocabulario y las expresiones utilizadas, como el sentido de la misma fuesen entendidos por ellos. En caso de dudas, debían resolverse antes de aplicarla al mismo tiempo que recogerlas para tenerlas presente para su valoración y próxima versión. Para que el alumnado tuviera siempre acceso a la misma durante la resolución de los problemas y la pudiera utilizar a su conveniencia, se debía facilitar una copia impresa a cada uno de los alumnos.

Los problemas:

Atendiendo la dinámica más usual en las aulas participantes en las que los docentes recogen mayoritariamente el trabajo de sus alumnos a través de sus escritos, los alumnos debían presentar la resolución de los problemas por escrito, preferiblemente con bolígrafo y sin eliminar o borrar nada de lo escrito. En caso de modificar algo, debían hacer una marca y, si fuese necesario, un pequeño comentario, pero sin borrar lo anterior. Para la posterior puesta en común en clase de la resolución del problema, se sugería que se utilizase un bolígrafo de otro color, preferiblemente, verde, pues el rojo quedaba restringido al uso de los docentes.

Para mantener el anonimato los alumnos debían identificarse con un pseudónimo de acuerdo con la referencia dada a cada uno de los docentes seguido de su número de lista. De esta manera, los docentes podían utilizar las resoluciones para su seguimiento curricular, en caso de ser su deseo, sin dificultades, al mismo tiempo que se mantenía el anonimato de los alumnos en el proyecto, pues la doctoranda desconocía las listas de clase. Así pues, cada alumno debía identificar sus documentos con la referencia del centro facilitada por la doctoranda, seguido de su curso, clase y número de lista. Así SC1A06 se corresponde con el alumno con el número de lista 6 de la clase 1º de la ESO A del centro SC.

Dentro del período (Octubre 2014 – Febrero 2015) en qué se llevó a cabo esta primera implementación, cada docente podía aplicar cada uno de los problemas propuestos cuando mejor le fuera, atendiendo sus preferencias y programación anual. Simplemente se pedía que cada problema fuera trabajado por separado y en sesiones distintas.

En este sentido, coincidió que todos los docentes aplicaron los problemas en el mismo orden, siguiendo la numeración en qué fueron seleccionados, y en distintas sesiones repartidas semanalmente dentro de su programación anual del curso. Así pues, los problemas fueron trabajados dentro de la programación habitual de matemáticas del curso. Y, tal como se había pedido, cada uno fue trabajado en días y sesiones distintas.

En la Tabla 2.7 se recogen las fechas en que se trabajaron cada uno de los problemas en cada una de las aulas implicadas, así como el número de producciones recogidas en cada una de ellas, número que se detalla después de la fecha, entre paréntesis y seguido por una P de producción.

Problema	IT6A	IT6B	AL1C	AL1D	SC1A
Pb1.1.a1	04/11/2014 (21 P)	04/11/2014 (24 P)	23/10/2014 (20 P)	22/10/2014 (22 P)	28/10/2014 (26 P)
Pb1.2.a1	17/11/2014 (24 P)	17/11/2014 (21 P)	06/11/2014 (22 P)	05/11/2014 (21 P)	04/11/2014 (25 P)
Pb2.a1	17/11/2014 (24 P)	17/11/2014 (22 P)	06/11/2014 (20 P)	05/11/2014 (23 P)	18/11/2014 (29 P)

Pb3.a1	24/11/2014 (24 P)	24/11/2014 (22 P)	11/12/2014 (16 P)	10/12/2014 (22 P)	25/11/2014 (27 P)
Pb4.a1	24/11/2014 (24 P)	24/11/2014 (22 P)	12/12/2014 (18 P)	11/12/2014 (21 P)	02/12/2014 (26 P)
Pb5.a1	15/12/2014 (21 P)	15/12/2014 (23 P)	16/12/2014 (19 P)	12/12/2014 (21 P)	16/12/2014 (31 P)
Pb6.a1	09/01/2015 (23 P)	09/01/2015 (22 P)	13/01/2015 (22 P)	16/12/2014 (20 P)	17/02/2015 (29 P)

Tabla 2.7. Implementación Primera (I1). Fechas de trabajo y número de producciones (P) recibidas.

En las sesiones en las que resolvieron los problemas, los docentes debían empezar recordando la base de orientación, presentando el problema a trabajar para que los alumnos desarrollaran su resolución, y dejando los últimos minutos para hacer una pequeña (pues habitualmente no daba por mucho más tiempo) puesta en común a modo de revisión y conclusiones conjuntas.

Como se ha comentado y se puede deducir de la tabla anterior, los distintos docentes reservaron una de sus horas habituales de docencia para el trabajo con los problemas propuestos. Cabe mencionar aquí que, en cada aula se trabajó manteniendo la variedad de alumnos anteriormente comentada. Así mismo, mientras que los alumnos de los grupos AL1C, AL1D y SC1A trabajaron los problemas compartiendo aula con los alumnos del mismo grupo, los alumnos de los grupos IT6A y IT6B, siguiendo una de las dinámicas de su centro, se encontraban subdivididos en tres subgrupos totalmente heterogéneos, en todos los sentidos, pues mientras un subgrupo hacía matemáticas, otro hacía inglés y el otro catalán.

Teniendo en cuenta las distintas maneras en que los docentes implicados estaban habituados en hacer trabajar los problemas a sus alumnos, se propusieron distintas maneras de presentar, trabajar, y hacer la puesta en común final de los problemas. Con el grupo de reflexión se estableció cómo proceder para cada problema y así se recoge en la Tabla 2.8.

Problema	Modo de trabajo	Modo de presentación	Modo de revisión
Pb1.1.a1	Por parejas o pequeño grupo	Lectura inicial conjunta. Aprovechar para introducir la necesidad o utilidad de estas situaciones o búsquedas.	Intercambio dentro del mismo grupo.
Pb1.2.a1	Por parejas o pequeño grupo	Lectura inicial por parejas/pequeño grupo.	Intercambio dentro del mismo grupo.
Pb2.a1	Individual	Lectura inicial individual.	Uno mismo.
Pb3.a1	Por parejas o pequeño grupo	Lectura inicial por parejas/pequeño grupo.	Uno mismo.
Pb4.a1	Individual	Lectura inicial individual.	Per parejas.
Pb5.a1	Individual	Lectura inicial individual, aunque se puede aprovechar para previamente contextualizar de manera grupal en qué otras situaciones aparecen las matemáticas.	Uno mismo.
Pb6.a1	Individual	Lectura inicial conjunta. Aprovechar para contextualizar la situación y hablar de la mitología/historia que se presenta.	Uno mismo.

Tabla 2.8. Implementación Primera (I1). Manera de aplicar los problemas. [Por pequeño grupo: 3 alumnos].

En caso de trabajos en pareja o pequeño grupo, cada alumno debía anotar en sus documentos con quién había compartido la tarea escribiendo su código de referencia (el pseudónimo). Puntualizar que la revisión conjunta final se debía hacer mediante una puesta en común en el aula, a modo de conclusión/corrección de las resoluciones, una vez resuelto el problema considerado en ese caso. La manera específica de cómo hacerlo (si oralmente, haciendo salir o no algún alumno...) quedaba a la decisión de cada uno de los docentes en función de su práctica habitual, el tiempo que le quedara para ello... para dar cuenta de ello se sugería que se especificara en el registro Seguimiento grupo-clase (Tabla A9) del problema en cuestión. La plantilla de este posible registro se encuentra como Tabla A9 en el apartado 4 de los Anexos. Junto a ella, también se adjuntaba una plantilla para el seguimiento por alumno (Tabla A8), para ser utilizada en caso de necesitarlo.

Ante observaciones relevantes o posibles dificultades con algún aspecto del problema se podía comentar de manera grupal al mismo tiempo que registrarlo para compartirlo con el grupo de reflexión, especialmente con la doctoranda. Cualquier anomalía, observación o complicación, debían de ser recogidas para comentar a través del grupo de reflexión, y, a poder ser, anotadas en el documento de seguimiento (Tabla A9) preparado para tal efecto.

La Rúbrica:

Se sugería que una vez resueltos los problemas, los docentes fueran registrando mediante la plantilla de seguimiento grupo-clase (Tabla A9) la valoración de la resolución de al menos 10 resoluciones de cada problema utilizando la rúbrica (Rb1), a poder ser resoluciones a través de las que se pudieran identificar distintos perfiles de adquisición para las distintas dimensiones y dominios. En este caso, cualquier comentario, corrección, observación que el docente quisiera hacer en la revisión de la resolución de un alumno, se pedía que se realizase con bolígrafo rojo. Además, cualquier observación general debía ser anotada en el registro de Seguimiento del grupo-clase correspondiente.

I2: Implementación Segunda

Como en la implementación anterior, el primer paso fue que el profesorado implicado se familiarizase con los problemas, rúbrica y base de orientación a utilizar. En este caso, los recursos a utilizar no eran nuevos, si no versiones actualizadas a partir de las observaciones obtenidas en su primera implementación (I1). La Rúbrica a utilizar se corresponde con su segunda versión Rb2 y la base de orientación es ya la propiamente dicha OB. Los problemas a aplicar son los que se detallan en la Tabla 2.9, aunque en este caso, no se solicitó que todos los centros aplicaran todas las actualizaciones de los problemas. A diferencia del anterior, sólo se pidió la realización de aquellos problemas las resoluciones de los cuales no dieron mucho juego/información tan relevante como otros/... en su primera implementación. Además, se contó con la colaboración de un nuevo centro. Las condiciones de aplicación aplicadas en esta Implementación Segunda fueran las mismas que las consideradas en la Implementación Primera.

La base de orientación:

En esta segunda implementación, se aplicó la base de orientación propiamente dicha (BO2). Más que nunca, y siguiendo las pautas de la implementación previa, ésta debía ser presentada a los alumnos con anterioridad a ningún problema, para ser analizada conjuntamente con ellos

y así recopilar y esclarecer cualquier duda que pudiera surgir. Una vez asegurados que los alumnos la entendían se debía proporcionar una copia impresa de la misma para que los alumnos la tuvieran siempre presente y la pudieran utilizar a su conveniencia durante la resolución de cada uno de los problemas. En este caso, se enfatizó la necesidad que los docentes recordaran a sus alumnos el uso de la base de orientación durante la resolución del problema.

Los problemas:

Como se ha mencionado, en esta segunda implementación, no se pidió de aplicar todos los problemas actualizados. A cada grupo-clase, se le pidió de trabajar aquellos problemas que o bien no se habían trabajado en la Implementación Primera (para los nuevos participantes) o aquellos cuyas resoluciones no aportaron información significativa o bien se detectó alguna anomalía (ver Tabla 2.9).

Así mismo, la manera de proceder coincide con la expresada para la primera implementación: libertad para los docentes en cuanto al reparto de los problemas en relación a su programación, sugiriendo que éstos fueran trabajados en distintas sesiones. En este caso, aunque las sesiones en qué se trabajaron volvieron a ser sesiones habituales de matemáticas, en el sentido que el trabajo con los problemas fue parte del trabajo del curso, hubo más variación en su reparto en las sesiones. El docente responsable de las aulas AL1C i AL1D mantuvo la dinámica de trabajar los problemas en distintas sesiones en distintas semanas, los docentes responsables de las clases NB6A i SC1A trabajaron problemas el mismo día. Si bien el docente SC1A trabajó dos problemas en una misma sesión, en la clase NB6A se trabajaron más de un problema el mismo día pero en distintas sesiones, hecho posible en su centro, de Educación Primaria, en el cual el mismo profesor está al cargo no sólo de las matemáticas, sino de otras materias y en donde, además, se trabaja más por proyectos. Con lo que respecta a los grupos IT6A e IT6B, comentar que siguieron la misma dinámica de trabajo que en la primera implementación, en la cual los alumnos se encontraban subdivididos en los mismos tres subgrupos.

En la Tabla 2.9 **Tabla 2.6** se recogen las fechas en que se trabajaron cada uno de los problemas en cada una de las aulas implicadas, así como el número de producciones recogidas en cada una de ellas, número que se detalla después de la fecha, entre paréntesis y seguido por una P de producción.

PROBLEMA	IT6A	IT6B	NB6A	AL1C	AL1D	SC1A
Pb1.1.a2	03/06/2015 (23 P)	03/06/2015 (23 P)	16/06/2015 (21 P)	-	-	-
Pb1.3.a1	09/06/2015 (23 P)	09/06/2015 (22 P)	16/06/2015 (22 P)	07/05/2016 (20 P)	06/05/2016 (22 P)	26/05/2015 (24 P)
Pb2.a2	03/06/2015 (21 P)	03/06/2015 (20 P)	-	-	-	-
Pb3.a2	09/06/2015 (23 P)	09/06/2015 (21 P)	17/06/2015 (21 P)	-	19/05/2016 (23 P)	-
Pb4.a2	-	-	16/06/2015 (22 P)	-	-	-
Pb5.a2	-	-	17/06/2015	-	-	-

(22 P)					
Pb6.a2	-	-	16/06/2015 (22 P)	-	25/05/2016 (22 P)

Tabla 2.9. Implementación Segunda (I2). Fechas de trabajo y número de producciones (P) recibidas.

Como en la implementación anterior, se acordó cómo presentar, trabajar y hacer la revisión conjunta final para cada uno de los problemas. En este caso, visto que el trabajo en pequeño grupo se reducía al trabajo por parejas, el tipo de trabajo se redujo al individual y parejas. La Tabla 2.10 que sigue así lo concreta:

Problema	Modo de trabajo	Modo de presentación	Modo de revisión
Pb1.1.a2	Por parejas	Lectura inicial conjunta en el aula, comentando las dudas generales que puedan surgir.	Uno mismo
Pb1.3.a1	Individual	Lectura inicial conjunta en el aula, comentando las dudas generales que puedan surgir.	Por parejas
Pb2.a2	Individual	Lectura inicial individual.	Uno mismo
Pb3.a2	Por parejas	Lectura inicial por parejas.	Uno mismo
Pb4.a2	Individual	Lectura inicial individual.	Por parejas
Pb5.a2	Individual	Lectura inicial conjunta en el aula, comentando las dudas generales que puedan surgir.	Uno mismo
Pb6.a2	Individual	Lectura inicial individual.	Uno mismo

Tabla 2.10. Implementación Segunda (I2). Manera de trabajar los problemas.

La manera de proceder durante la sesión de trabajo se mantuvo como ya se había desarrollado en la implementación anterior. Así, pues, los alumnos tenían que desarrollar sus resoluciones en la hoja en qué se les había facilitado el problema de manera escrita con bolígrafo y sin eliminar nada de sus desarrollos, reservando el bolígrafo de otro color y que no fuera rojo, preferiblemente verde, para la posterior revisión mediante la puesta en común final. En caso de cualquier observación o anomalía general podía ser comentada con los alumnos de manera general y debía ser registrada por los docentes en el documento de seguimiento (Tabla A9) relativo al problema trabajado en ese momento.

La rúbrica:

Para esta segunda implementación se debía utilizar la rúbrica actualizada a partir de lo observado de la Implementación primera (Rb1). Como en el caso anterior, se sugería que una vez resueltos los problemas, para cada uno de ellos los docentes fueran registrando mediante la plantilla para el seguimiento del grupo-clase (Tabla A9) la valoración de al menos 10 resoluciones de manera consecuente con las gradaciones establecidas en la rúbrica (Rb2), a poder ser resoluciones a través de las que se pudieran identificar distintos perfiles para las distintas dimensiones y dominios. En este caso, cualquier comentario, corrección, observación particular que el docente quisiera hacer en la revisión de la resolución de un alumno, se pedía que se realizase con bolígrafo rojo. De nuevo, cualquier observación general, debía ser anotada en el registro de Seguimiento del grupo-clase correspondiente.

I3: Implementación Tercera

Los participantes de esta tercera implementación fueron los alumnos de las aulas de 6º de Primaria EP6A y PI1D quienes fueron invitados a resolver los problemas matemáticos Pb0.a2,

Pb1.4.a1, Pb5.a2 y Pb7.a1, que se presentan en el Anexo 1, de manera individual utilizando la Base de Orientación BO2 del Anexo 3.

Los alumnos debían resolver cada uno de estos cuatro problemas en una sesión de clase habitual. Los problemas no estaban atribuidos a ninguna unidad curricular en particular, por lo que cada docente decidió cuando los alumnos debían trabajarlos. Aunque todos trabajaron los problemas entre marzo y junio del curso escolar 2015-2016, el orden y distancia de trabajo entre los problemas fue propio de cada aula, como se puede ver en la Tabla 2.11. Entre sesión y sesión, los alumnos no utilizaron la BO3 ni tampoco trabajaron en otros problemas matemáticos de este tipo.

En la Tabla 2.11 **Tabla 2.6** se recogen las fechas en que se trabajaron cada uno de los problemas en cada una de las aulas implicadas, así como el número de producciones recogidas en cada una de ellas, número que se detalla después de la fecha, entre paréntesis y seguido por una P de producción.

Problema	EP6A	PI1D
Pb0.a2	15/06/2016 (22 P)	03/06/2016 (21 P)
Pb1.4.a1	-	17/03/2016 (25 P)
Pb5.a2	01/04/2016 (11 P)	-
Pb7.a1	24/04/2016 (11 P)	2016-04-05 (26 P)

Tabla 2.11. Implementación Tercera (I3). Calendario de trabajo desarrollado en los distintos grupos.

Al ser la primera vez que tanto el docente como los alumnos trabajaban la resolución de problemas usando una base de la orientación, antes de resolver cada uno de los problemas y especialmente el primero, el maestro debía presentar cuidadosamente el propósito de la Base de Orientación a utilizar (BO2) y, junto con la clase, discutir y aclarar el significado y propósito de cada uno de sus elementos y con ello asegurar que, en la medida de lo posible, los alumnos entendieran el vocabulario y expresiones de la Base de Orientación y su propósito general. Esto aseguró, en la medida de lo posible, que los estudiantes entienden su vocabulario y su propósito general.

A los alumnos se les dio una copia impresa de la Base de Orientación, que incluía la columna en la que ir registrando su compromiso con las acciones de la base de orientación, así como una copia en papel del problema en la cual desarrollar, de manera individual, su resolución. Así, se invitó a los alumnos a resolver el problema, usando el la Base de Orientación BO2 para guiar su actividad, y registrar las acciones de la BO2 que llevaban a cabo. También se les dijo que el maestro no intervendría en el proceso de resolución de los problemas, sino que, a lo sumo, iría verificando que completaban su seguimiento de la BO2, a medida que trabajaban. Antes de finalizar cada una de las sesiones, se recomendaba dedicar unos minutos a compartir los diferentes enfoques de las resoluciones y cómo se reflejaba en los elementos de la BO2.

En este caso, siendo el objetivo principal de la implementación, poder medir la eficacia de la base de orientación, no se hizo hincapié en la actualización y posterior uso de una Rúbrica de valoración del desarrollo de los alumnos para los docentes.

2.3.3 Recopilación de Percepciones de la dinámica generada con los IRP

Percepciones del Grupo de Reflexión

La tarea desarrollada con el grupo de reflexión se centra esencialmente durante el curso 2014-2015, habiéndose iniciado a finales del curso 2013-2014. Durante este periodo los docentes implicados contribuyeron en los aspectos siguientes:

- indicar su identidad como docente y cómo gestionan la resolución de problemas, así como la realidad de su aula, alumnos y centro
- participar en la selección y adaptación de problemas y propuesta de cómo ser presentados
- presentar los problemas a sus alumnos para éstos los resolvieran utilizando la base de orientación
- aplicar la rúbrica para la valoración de las resoluciones de sus alumnos a los problemas propuestos
- aportar sus percepciones en relación a los IRP diseñados e implementados en sus aulas
- recoger y aportar las percepciones de sus alumnos en cuanto a los IRP diseñados e implementados en sus aulas

Si bien todos los docentes implicados no pudieron contribuir de la misma manera, todos aportaron un mínimo de observaciones, conclusiones y críticas constructivas, que fueron recogidas para ser consideradas en las actualizaciones de los IRP utilizados. Sus percepciones han sido recogidas de distintas formas: mediante encuentros presenciales con la doctoranda, a través de los documentos de registro Seguimiento de grupo-clase propuesto para cada problema (plantilla A4.2), con la presentación de documentos anexados al conjunto de resoluciones de sus alumnos de cada problema, por correo electrónico o a través de los intercambios orales que se fueron realizando.

Percepciones de los alumnos

En las sesiones en qué fueron trabajados los problemas se encontraba sólo el docente implicado en el proyecto. A pesar que los docentes pudieron ir recogiendo algunas de las observaciones de los alumnos en relación a los problemas y cómo éstos se trabajaban, con la intención de recoger más directamente las percepciones de los alumnos participantes en cuanto a ellos, se prepararon algunas preguntas (ver Tabla 2.12) para que los alumnos pudieran responder de forma, aunque personal, anónima. Las preguntas fueron realizadas al finalizar la Implementación Primera en las distintas aulas participantes: IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A. El profesor podía proyectarlas, comentarlas en voz alta o presentadas impresas en una hoja. En cualquier caso, los alumnos debían contestarlas en una hoja de manera escrita. Para mantener su anonimato pero a la vez poder establecer una relación con las resoluciones realizadas, cada alumno tenía que escribir su referencia (su pseudónimo) en la hoja dónde respondía las preguntas. Para poder referenciar cada una de las preguntas y su respuesta, éstas estaban numeradas. Para referirnos a ellas en lo que queda del estudio, anticiparemos con una C (de cuestión) cada uno de los números de las preguntas.

En general

C1. ¿A la hora de responder un problema, qué tienes en cuenta? Y, ¿qué crees que es lo más importante?

C2. ¿Es la primera vez que trabajas con rúbricas?

C3. Ahora que ya has utilizado una rúbrica, crees que utilizarla puede ayudar a resolver problemas? ¿Por qué?

Sobre los problemas trabajados

C4. ¿Recuerdas alguno de los problemas trabajados? ¿Cuáles?

C5. ¿Qué destacarías de estos problemas?

C6. Supongamos que al resolver un problema has notado que lo que se busca es que expongas muy bien tus razonamientos más que no la solución. ¿Eres consciente? ¿Lo has tenido siempre en cuenta

¿Es como siempre has trabajado los problemas?

¿Te ha costado hacerlo? ¿Por qué?

Sobre la rúbrica utilizada

C7. A la hora de resolver los problemas, ¿has tenido la rúbrica a tu lado? ¿La has leído con atención, en algún momento (antes, mientras o al final de la resolución del problema)?

C8. En algún momento de la resolución de los problemas, ¿has utilizado la rúbrica? De qué manera?

C9. Crees que si se sigue la rúbrica, puede ayudar a controlar el proceso de resolución de un problema? ¿Por qué?

C10. Tal como se presenta la rúbrica (aspecto, lenguaje, longitud...) ¿te ha resultado cómoda?

¿Crees que es adecuada para un alumno de 6º de EP o 1º de la ESO?

Por favor, crítica todo lo que creas oportuno y comenta los cambios (lenguaje, formato, etc.) que harías.

C11. Con el fin que la rúbrica resulte útil para resolver los problemas:

¿Crees que falta o sobra algún paso? ¿Cuál/es?

¿Es demasiado larga o corta, en caso afirmativo, cómo la rectificarías?

C12. Añade cualquier otra cosa que creas que tengamos que tener en cuenta.

Tabla 2.12. Preguntas que se realizaron a los alumnos participantes en la Implementación Primera al finalizar dicha implementación

Además de las respuestas a estas preguntas, algunos alumnos de los distintos centros participantes a lo largo de las tres implementaciones (no sólo los implicados en esta primera implementación) han aportado observaciones, algunos incluso, en sus resoluciones. En estos casos, los distintos docentes han compartido las observaciones que han considerado oportunas en cuanto a las percepciones de sus alumnos en los anexos añadidos a las resoluciones o en los intercambios orales que se han mantenido a lo largo de las implementaciones.

2.4 Tipología de los datos

Los instrumentos utilizados a lo largo del estudio nos han proporcionado datos de distinta naturaleza y para distintos fines. Ante a la cantidad de información obtenida ha sido necesario seleccionar parte de los datos, centrándonos en los observablemente más ricos, y distinguir entre datos primarios y datos secundarios, entendiendo por datos primarios aquéllos que han dado información directa y más relacionada con los objetivos marcados y que, como tales, han sido los datos fundamentales de la investigación; y, datos secundarios, aquellos que han proporcionado informaciones complementarias a las anteriores. Nuestro análisis se basa fundamentalmente en las resoluciones de los alumnos a los problemas planteados. Sin embargo, también son de interés los datos extraídos de las percepciones de los alumnos y

docentes, así como las referencias bibliográficas, pues son el punto de partida para el diseño de los IRP. Por ello, no distinguimos aquí de manera general entre datos primarios y secundarios sino que se tratará de una distinción propia de cada uno de los pequeños análisis realizados.

En este sentido, y como se resume en la Tabla 2.13, el análisis se ha desarrollado en cuatro partes. En cada una de ellos se han analizado aspectos distintos, por lo que los datos utilizados son diferentes. En la Tabla 2.13 se avanzan los datos principales utilizados en cada caso, sin embargo, como se ha comentado, en cada una de estas partes se describen los datos utilizados de manera más precisa.

ANÁLISIS	DATOS PRINCIPALES
Análisis I (capítulo 3). Formulación de problemas matemáticos y Gestión de costumbres sociomatemáticas	
Formulación del enunciado como tarea matemática	Las resoluciones de los alumnos que participaron en la Prueba Piloto resolviendo el problema Pb0.a0 Las resoluciones a los problemas Pb1.1.a1 y Pb1.2.a1, Pb2.a1, Pb3.a1, Pb5.a1 y Pb6.a1 de los alumnos que participaron en la Implementación Primera (IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A) resolviendo los problemas
Percepciones de los alumnos sobre los problemas propuestos	Las respuestas a la pregunta C5 del cuestionario para los Alumnos (Tabla 2.12) de los alumnos que participaron en la Implementación Primera (IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A)
Aportaciones de los docentes a la práctica desarrollada	Las observaciones que los docentes han realizado a lo largo del proyecto en cuanto el diseño y uso de los IRP
Análisis II (capítulo 4). Generación y Uso de la Base de Orientación. Factores involucrados	
Aceptación de la base de orientación	Síntesis de documentación Las resoluciones de los alumnos de los grupos IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A al problema Pb5.a1
Adecuación de la base de orientación	Las respuestas de los alumnos IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A a las preguntas C1, C3, C10 y C12 del cuestionario para los Alumnos (Tabla 2.12).
Análisis III (capítulo 5). Generación y Uso de la Base de Orientación. Articulación de sus dimensiones	
Estudio de dimensiones de la BO2: <ul style="list-style-type: none"> • Dimensión 3 • Dimensión 6 • Dimensión 7 • Dimensión 9 	Resoluciones de los alumnos de los grupos IT6A, IT6B, NB6A, AL1C, AL1D, SC1A al problema Pb1.3.a1 utilizando la BO2.
Análisis IV (capítulo 6). La base de orientación como auto-andamiaje de la resolución de problemas	
Base de orientación como auto-andamiaje	Resoluciones del grupo de alumnos EP6A al problema Pb5.2, y el seguimiento respectivo sobre la BO3 utilizada.
El papel clave de distintas formas de comprobación	Resoluciones del grupo de alumnos PI1D a los problemas Pb0.2, Pb1.4 y Pb7.1 y el seguimiento respectivo sobre la BO3 utilizada.

Tabla 2.13. Desglose de los Análisis y los datos principales utilizados en cada caso

2.5 Métodos para los análisis de datos

Como hemos avanzado se trata de un trabajo de carácter cualitativo, basado en el estudio de evidencias. En cada uno de los análisis, además de presentar más profundamente los datos que se han considerado, se describe cómo se ha procedido para el análisis en cuestión. Así mismo, a continuación introducimos brevemente como hemos procedido en cada uno de los casos.

En relación a la síntesis de documentación, como si fuera un estudio de casos, hemos desglosado las ideas recopiladas de las referencias consultadas para atender aquellos aspectos comunes que no podían obviarse y estudiar cómo unificar e incluir los inicialmente no comunes, especialmente cuando se han observado imprescindibles o con conexiones evidentes.

En cuanto a las percepciones de los docentes y alumnos, hemos identificado aquellas reflexiones o respuestas más parecidas y las hemos organizado según sus parentescos, en función de los aspectos a los que daban o no soporte. En los análisis se presentan referenciados de acuerdo con el identificativo del docente o alumno correspondiente, introducidos por un punto y en letra cursiva.

Finalmente, y para el análisis del conjunto de datos con más peso de nuestro estudio, las resoluciones de los alumnos a los problemas propuestos, utilizando la base de orientación correspondiente, hemos recurrido al estudio de casos múltiples. Para ello, y de acuerdo con que dicha selección debe realizarse sobre la base de la potencial información que la rareza, importancia o revelación que cada caso concreto pueda aportar al estudio en su totalidad (Rodríguez et al., 1996), hemos seleccionado aquellos casos que hemos identificado que aportaban aspectos destacados y distintivos entre sí. De acuerdo con ello, en los análisis se explicitan las producciones que se estudian con detalle y se presentan los fragmentos que en particular se analizan como Figuras referenciadas que ilustran la explicación que de ellas se realiza. Los datos originales están en catalán, por lo que debajo de cada figura, entre corchetes, se presenta la traducción en castellano de los textos que pueden aparecer en ellos.

Para el análisis de las resoluciones de los alumnos utilizando la base de orientación, en la Implementación Tercera, en el tercer análisis, junto al estudio cualitativo de casos, hemos introducimos un pequeño análisis de tipo cuantitativo, el Test Exacto de Fisher, con el que podemos dar otra mirada a las evidencias observadas. De acuerdo con Llopis (2013) y Pértega y Pita (2004) hacemos a continuación una pequeña referencia en qué consiste esta prueba.

2.5.1 Test Exacto de Fisher

Definición

El test exacto de Fisher es una prueba de significación estadística para muestras más bien pequeñas, especialmente útil cuando no tiene sentido aplicar el test de la Chi Cuadrado. La prueba pretende examinar el grado de asociación probable (o contingente) entre dos grupos de datos categóricos. Se trata de un contraste de hipótesis cuyo objetivo es probar si los dos grupos que se consideran son o no independientes entre sí. Esta prueba se utiliza, fundamentalmente, en la comparación de dos grupos respecto a una variable dicotómica o en la valoración de la relación entre dos variables cualitativas, ambas dicotómicas. Así mismo, el

Test de Fisher es extensible a variables que presentan más de dos propiedades o cualidades. Otra de las otras particularidades de esta prueba, es la posibilidad de poder calcular el valor de la desviación de la hipótesis nula (H_0) de manera exacta.

Aplicación

El Test exacto de Fisher se basa en la distribución hipergeométrica. Esta distribución es la que sigue una situación en la que hay N posibles observaciones, distribuidas en dos tipos distintos en proporción r y $N-r$ y, al realizar k observaciones sin repetición, pretende ver cuántas de estas k observaciones serán de un tipo o de otro.

A partir de ello, para aplicar el Test exacto de Fisher, es conveniente distribuir las propiedades de las dos variables en una tabla de contingencia. Al organizar los datos de este modo, se puede también percibir como un problema de comparación de proporciones. En este sentido, el Test exacto de Fisher busca, a partir de los datos, qué combinaciones serían más extremas que la observada, entendiendo por extremas detectar cuánto más diferencia entre los porcentajes o más asociación entre los valores de las dos variables de las que se pretende estudiar su relación.

Desarrollo

Veamos cómo se desarrollaría, de manera genérica, en el caso clásico de dos variables dicotómicas, a las que llamamos VF (variable de fila) y VC (variable de columna). Atendiendo que para cada variable se distinguen dos cualidades o propiedades distintas, digámosles VF1 y VF2 para las de la variable de fila y VC1 y VC2 para las de variable de columna, obtendríamos una tabla de tabla de contingencia 2×2 , como la Tabla 2.14 donde los valores a, b, c, d con $a + b + c + d = n$ representan las cantidades observadas correspondientes a cada una de las cualidades distinguidas. De acuerdo con esta distribución, se consideraría la hipótesis nula (H_0) como “la variable de la fila (VF) y la variable de la columna (VC) son independientes”.

		VC		TF
		VC1	VC2	
VF	VF1	a	b	$a+b$
	VF2	c	d	$c+d$
TC		$a+c$	$b+d$	n

Tabla 2.14. Tabla de contingencia T_0 2×2 para una observación de variables dicotómicas VF y VC de características VF1, VF2, y VC1 y VC2, respectivamente.

A partir de este listado, el Test calcula las probabilidades de la observación que tenemos y de las más extremas, mediante la distribución hipergeométrica. Veamos cómo.

Organizados los datos de la observación en una tabla de contingencia, como la Tabla 2.14, hay que buscar qué valores posibles se hubieran podido tener que mostraran aún más diferencias entre los porcentajes o un patrón donde pudiéramos ver mayor relación entre las dos variables dicotómicas VC y VF, respetando las mismas sumas por filas y por columnas que las obtenidas. Para ello, deben construirse las tablas de contingencia extremas, es decir, las tablas en las que se modifican los valores correspondientes a VC1, VC2, VF1 y VF manteniendo los mismos valores de las sumas por filas y por columnas de la observación realizada, y se calcula la suma de sus probabilidades. En hacerlo se percibe, de alguna forma, la posición que ocupa la observación realizada respecto a lo que podríamos ver bajo la hipótesis nula. Entre todo lo que

podríamos ver, si fuera cierta la Hipótesis nula, se valora cuál es la probabilidad de ver lo que observamos más lo más extremo que tendría más posibilidades de verse bajo la Hipótesis alternativa. Esto es el p -valor.

Luego, si p es el valor de la probabilidad que determina la independencia, se concluye lo siguiente:

- $p < 0,05$: se rechaza la H_0 y se asume que las dos variables VC y VF están relacionados
- $p > 0,05$: los datos son consistentes con la H_0 , por lo que no hay evidencia de dependencia

Cálculo del valor de p

Cómo hemos avanzado, la particularidad de este test es que permite calcular de manera exacta el valor de la desviación de la hipótesis nula (H_0) de manera exacta. Veamos cómo hacerlo en el caso ejemplificado de la Tabla 2.14.

De acuerdo con las explicaciones anteriores, y atendiendo que los valores a, b, c, d con $n = a + b + c + d$ representan las cantidades correspondientes a cada una de las características de las variables de nuestra observación,

1. Se calcula el valor de la probabilidad para la tabla de contingencia asociada a la observación realizada da p_{T_0} , como describe la Figura 2.2:

$$p_{T_0} = \frac{(a+b)!(c+b)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!bc!d!}$$

Figura 2.2. Cálculo de la probabilidad asociada a la observación correspondiente a la Tabla de contingencia T_0 .

2. Se crean todas las tablas extremas $T_i, i \geq 1$ que, variando los valores de VF1, VF2, VC1, VC2 mantienen constantes los valores totales de fila TF y de columna TC a la vez.
3. Se calcula el valor la probabilidad para todas las tablas extremas creadas en el paso anterior $p_{T_i}, i \geq 1$ de la misma manera que se ha calculado p_{T_0} .
4. El valor de p asociado al test exacto de Fisher viene determinado por la suma de todas las $p_{T_i}, i \geq 0$ de valor menor o igual a la de la observación realizada (p_{T_0}) y que, por lo tanto, podemos escribir como se presenta en la Figura 2.3:

$$p = \sum_i p_{T_i}, p_{T_i} \leq p_{T_0}$$

Figura 2.3. Cálculo del valor de la probabilidad p

5. Finalmente, como ya tienen integrados los software estadísticos,
 - Si el test es unilateral, es decir, contrastando igualdad versus menor o versus mayor, o estamos contrastando no relación versus relación en un sentido determinado:
 $p - \text{valor} = p$
 - Si el test es bilateral, es decir, que se contrasta igualdad de porcentajes versus diferencia, o no relación versus relación, $p - \text{valor} = 2 \cdot p$

En nuestro estudio hemos utilizado el software de acceso público desarrollado por Kirkman (1996).

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS I: Formulación de problemas matemáticos y gestión de costumbres sociomatemáticas en la resolución de problemas

Seleccionar y formular los problemas a utilizar no fue una tarea fácil ni automática. Entre otros porque, primer lugar, requiere la aceptación de lo que se debe entender por problema matemático. En base al Marco Teórico (apartado 1, capítulo 1), cabe entender un problema matemático como una tarea no familiar ni rutinaria para los alumnos que les brinde la oportunidad de conectar y generar distintos tipos de conocimientos matemáticos así como estrategias de resolución, al mismo tiempo que estimular y potenciar sus procesos de razonamiento, argumentación y justificación, generando, en algún momento, cierto interés en implicarse en ellos para intentar resolverlos. Por ello cabe analizar bien lo que se pretende con las distintas posibilidades que puede ofrecer un problema y reflexionar sobre la manera de formularlo.

De acuerdo con que las prácticas desarrolladas influyen en cómo los alumnos pueden percibir la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992), entendemos que no sólo los contenidos a tratar o las estrategias de resolución que puedan surgir son relevantes en el proceso de resolver un problema, sino que también puede influir en el desempeño de los alumnos la forma en que se presentan los problemas y el modo en que pueda sugerir que se trabajen y se registren o compartan sus procedimientos y conclusiones. Bajo el trabajo de Yackel y Cobb (1996), entendemos que ello responde al concepto de *sociomathematical norms*, en este caso, relacionadas con la resolución de problemas establecidas. Pensamos que podemos traducir esta expresión por costumbres sociomatemáticas (y de aquí el título) en tanto que se refieren a los entendimientos específicos de la conducta matemática que determinan la actividad habitual de los alumnos, que surgen, se regeneran y modifican a través de las interacciones continuas entre los alumnos y el docente responsable en el aula (Yackel y Cobb, 1996) en este caso, para la resolución de problemas.

Los problemas seleccionados están basados en distintos contextos y, de acuerdo con la tradición de las aulas implicadas, se formularon de manera verbal y por escrito en un hoja de papel, en la misma en que posteriormente cada alumno debía escribir su desarrollo. En ningún momento se restringieron las herramientas matemáticas a utilizar para la resolución de los distintos problemas. Para ello, y al margen de la Prueba Piloto, los alumnos disponían de una base de orientación para la resolución. Por otro lado, en la Implementación Primera (I1) e Implementación Segunda (I2) se facilitó una rúbrica de desempeño para que los docentes posteriormente pudieran valorar las producciones de los alumnos. El conjunto de estos instrumentos, los problemas, la rúbrica de desempeño y la base de orientación es lo que, de acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2) del trabajo llamamos Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP)

Atendiendo estas particularidades, y atendiendo que las creencias y las prácticas forman un binomio difícil de romper (Vila y Callejo, 2004b) en este capítulo analizamos el afecto que conllevó la introducción de las IRP en las aulas involucradas que, como se explica en el apartado 2 de la Metodología (capítulo 2) fue una novedad tanto para alumnos como docentes de los distintos centros implicados.

Así, en este primer análisis, analizaremos el efecto de tres factores en particular:

En primer lugar, y correspondiéndose con el primer apartado del presente análisis, las particularidades de los enunciados de los problemas. Como se expone en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), a pesar que todos los enunciados se presentaron a los alumnos de por escrito, cada uno de ellos presentaba ciertas peculiaridades. En concreto, nos fijaremos los efectos de incluir imágenes en enunciados verbales escritos, el modo en qué se presentan distintos apartados y cuestiones a resolver, así como la petición o no explícita de argumentaciones o justificaciones de las respuestas. Para ello, recurriremos a las resoluciones de los alumnos a los problemas considerados en su versión inicial y que se detallan en cada caso.

En un segundo apartado, pretendemos estudiar, la posible o no familiaridad de los alumnos con los problemas propuestos así como el afecto, o impresión que los problemas propuestos pudieron provocar en los alumnos. Al tratarse de las impresiones concretas de los alumnos en cuanto a los problemas propuestos, hablaremos de percepciones. Para ello, ello revisaremos las respuestas de los alumnos implicados en la Implementación Primera, a la cuestión 5 del cuestionario (Tabla 2.12 de la Metodología, capítulo 2) que se invitó a responder al finalizar dicha implementación.

Finalmente, en el tercer apartado, recurrimos a las aportaciones de los docentes implicados en las distintas implementaciones con el objetivo de analizar el efecto que tuvo la implementación de los IRP en su práctica, así como atender sus observaciones sobre la posible mejora de los instrumentos para un uso más eficiente en su práctica docente.

3.1 La formulación del enunciado como tarea matemática

Como se acaba de describir, en las distintas implementaciones realizadas los enunciados de los problemas fueron proporcionados a los alumnos por escrito en una hoja de papel y en la que posteriormente debían desarrollar sus intentos de resolución. A pesar que todos los problemas fueron presentados de manera verbal escrita, como se presenta en la Tabla 2.2 del apartado 3 la Metodología (capítulo 2), cada uno de ellos presenta ciertas peculiaridades no comunes en todos ellos. Algunos de ellos cuentan con la incorporación de una imagen o de un ejemplo, otros presentan los datos numéricos descritos en lugar de usar su símbolo numérico. En algunos las cuestiones a responder aparecen numeradas y las posibles peticiones de justificación, pueden ser o no explícitas y constar como una cuestión o no diferenciada. Aún siendo problemas de naturaleza diversa, en este apartado pretendemos dar cuenta de los posibles efectos de estas peculiaridades de los enunciados.

Para ello nos fijamos en alguna de las peculiaridades distintivas que cada uno de los problemas trabajados presenta en su versión inicial para analizarla de acuerdo con las producciones de los alumnos. Así, desarrollamos el estudio realizando pequeños análisis de cada uno de los problemas que detallamos en el correspondiente apartado. En este sentido, cada uno de las secciones que conforman este primer apartado se corresponde con un problema concreto.

3.1.1 Problema 0

Analizamos la versión inicial del problema 0 utilizada en la Prueba Piloto (I0) que en el Anexo 1 referenciamos como Pb0.a0. En el enunciado del problema se presentan datos numéricos mediante su correspondiente gráfica numérica, se usan medidas de longitud en su formulación abreviada y las cuestiones a responder aparecen numeradas al finalizar la descripción de la situación. Entre las cuestiones a responder, destacamos que las dos primeras piden por algo concreto y la tercera por la justificación de las respuestas anteriores. Entre la explicación de la situación y las cuestiones a responder, se incluye la imagen que presenta la Figura 3.1. Nos interesamos por la consideración y el efecto de dicha imagen en las producciones de los alumnos.

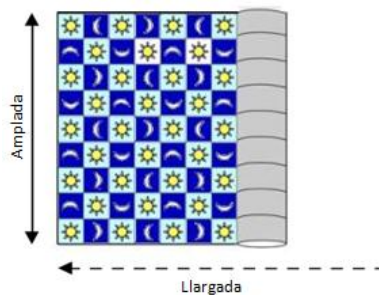


Figura 3.1. Imagen proporcionada en el Problema Pb0.a0

Uso de imágenes y su efecto

Como se observa en la Figura 3.1, y de acuerdo con la descripción del enunciado, la imagen proporcionada corresponde a una representación plana de la alfombra que se describe en el problema, compuesta por cuadrados que, de manera alternada, contienen un sol o una luna. En la imagen la manta se ve enrollada, en parte, por su lado más largo (a lo largo). En ella, se indica lo que se entiende por ancho y por largo, sin especificar las medidas haciéndose explícito qué parte de la alfombra se ve en su totalidad y cuál no por encontrarse enrollada. De esta imagen, y entre otras cosas, se puede deducir de manera visual el número total de cuadrados a lo ancho. Atendiendo que la imagen además de ilustrar la situación en particular, proporciona datos relevantes de manera directa, hablamos de una imagen explicativa.

Para el análisis que aquí pretendemos, revisamos en primer lugar las resoluciones al problema Pb0.a0, realizadas en la Prueba Piloto, que tuvo lugar al final de 3r Trimestre del curso escolar 2013-2014, y en la cual participaron dos grupos de 6º de Primaria del centro IT y tres grupos de 1º de la ESO, dos del centro AL, y uno del centro SC, como se detalla en apartado 2 de la Metodología (capítulo 2). En este caso, los alumnos resolvieron el problema de manera individual, y a diferencia del resto de problemas que se presentan posteriormente, sin utilizar ninguna base de orientación. De los cinco grupos participantes, percibimos que las resoluciones más completas y que proporcionan más información sobre el uso de la imagen proporcionada provienen del grupo de 1º de la ESO del centro SC, por lo que nos centramos en el análisis de las producciones de estos alumnos. Al analizar las resoluciones a la segunda versión de este problema, etiquetado en el Anexo 1 como Pb0.a2 y aplicado en la Implementación Tercera, damos cuenta de resoluciones interesantes que aportan más información sobre el uso de esta imagen. Al tratarse de la misma imagen sin ninguna modificación en respecto a la presentada en la versión inicial del problema, consideraremos, aunque de manera secundaria, las observaciones sobre algunas de las resoluciones de los

alumnos de PI1A realizaron de manera individual teniendo a su disposición la base de orientación BO3.

Intrigados por la consideración de esta imagen lo primero que nos pedimos es si los alumnos la utilizaron y, en este caso, en qué sentido. Para ello, observamos si los alumnos escribieron en ella o bien si elaboraron imágenes alternativas. De manera paralela, al analizar las resoluciones a este problema, nos percatamos de usos específicos que los alumnos dieron a la imagen proporcionada. En este sentido las evidencias de uso de esta imagen permiten distinguir esencialmente dos funciones. Una primera, para ayudar a entender los datos y una segunda, para establecer un plan de resolución. En este sentido la primera función se distingue por el hecho de ayudar a situar y entender los datos proporcionados mientras que la segunda, pretende manipularlos, es decir, ligar, con la ayuda de la imagen proporcionada, la información proporcionada para desenredar el problema presentado. Así podríamos entender que la primera acción va ligada al hecho de comprender la situación que describe el enunciado del problema, y la segunda, a indagar para encontrar y aplicar una estrategia de resolución. Ejemplos de estas situaciones serían, por ejemplo, las que se detallan con la Figura 3.2 y Figura 3.3, respectivamente.

En la Figura 3.2, observamos como el alumno ha añadido, aunque sin las unidades indicadas, las medidas de ambas dimensiones. Además, y de acuerdo con el comentario anterior, ha dejado por escrito el número total de cuadraditos que componen cada una de las columnas de la alfombra.

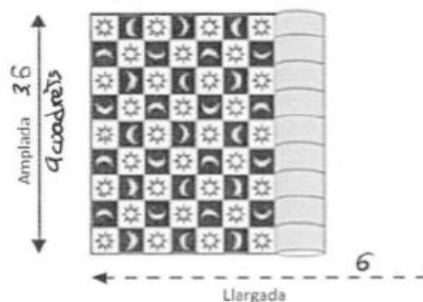


Figura 3.2. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B01. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

En el ejemplo de la Figura 3.3 se han añadido las medidas de ambas dimensiones, en distintas unidades en su nomenclatura abreviada. De acuerdo con la producción del alumno, parece que en primer lugar se situaron las medidas con las unidades del enunciado, en metros (m) y que, posteriormente, fueron transformadas en centímetros (cm). En la medida a lo largo, se observa como la medida en metros fue tachada dejando visible, solamente, la medida en centímetros, como si de esta manera fuera más claro.

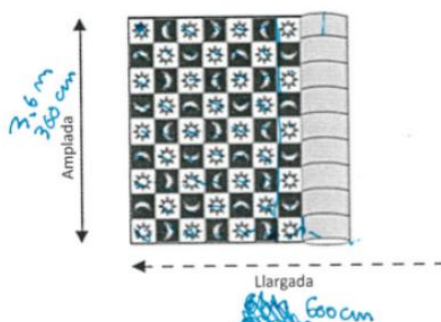


Figura 3.3. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B26. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

Diferente es el caso que sigue a continuación y recoge la Figura 3.4. En este ejemplo, observamos como se ha obviado situar las medidas en la imagen. En cambio, se ha utilizado la representación de la manta para desarrollar una posible secuencia de soles y lunas, tanto a lo ancho, como a lo largo. En este sentido, percibimos como la imagen ha sido utilizada como una herramienta heurística para indagar cómo contabilizar el número de cuadros que puede contener la alfombra, cuestión que plantea de resolver el problema.

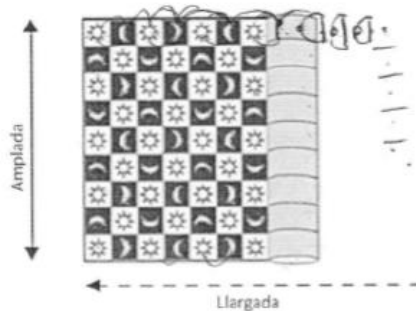


Figura 3.4. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B03. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

Si bien en algunos casos una y otra funcionalidad pueden verse interpuestas y no siempre resulta tarea fácil discernir dichos fines, nos percatamos que la mayoría de los alumnos que han dejado evidencias de utilizar de manera explícita, escribiendo en ella, la imagen proporcionada para su resolución del problema, lo han hecho para una u otra función. En este sentido la Tabla 3.1 explicita el número de resoluciones al problema Pb0.a0, en las que se evidencia un uso explícito de la imagen por hacer anotaciones en ella y en la que distinguimos el uso que le dieron. Así, por una C se marcan los casos en que se percibe que fue para comprender el enunciado y con E, para establecer un plan de resolución. En la columna T se contabilizan el total de casos correspondientes a cada funcionalidad.

Alumnos grupo SC1B (Prueba Piloto)																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	T
C	x					x					x						x	x	x		x		x	x	x	x	11
E			x					x	x			x					x						x		x		7

Tabla 3.1. Evidencias de la utilidad dada a la imagen incluida en el problema Pb0.a0 por los alumnos del grupo SC1B

Las producciones de los alumnos aquí analizadas enseñan como 15 de los 26 alumnos resolutores utilizaron de manera explícita, escribiendo en ella, la imagen proporcionada. De acuerdo con sus anotaciones, observamos como la utilidad que le dieron fue concreta y específica: 11 de ellos la utilizaron para situar y entender los datos que describe el problema y así entender mejor la situación descrita en el enunciado, y 7 como herramienta heurística para abordar la resolución y encontrar respuesta a la pregunta formulada, siendo 3 los casos identificados en que realizaron anotaciones en la imagen para ambas funcionalidades.

Cabe destacar que, en tres de estas resoluciones, Pb0.a0_SC1B08, Pb0.a0_SC1B17, Pb0.a0_SC1B18, además de la evidencia del uso de la imagen proporcionada, se observa la realización y consideración de un dibujo propio y particular. En los tres casos el dibujo se ha realizado, como los propios alumnos han hecho referencia, a modo de esquema o de resumen para recordar bien la situación y poder trabajar y responder la segunda cuestión del problema. En estos casos, esta imagen propia se encuentra en el reverso de la hoja en la que se

presentaba el enunciado del problema. Un ejemplo de ellas es el que se recoge con la Figura 3.5.

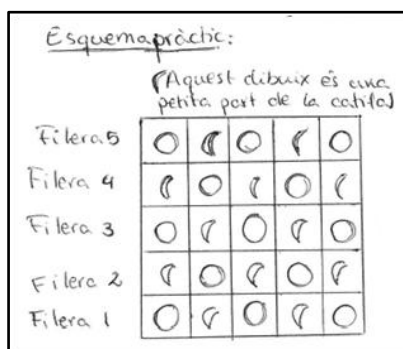


Figura 3.5. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B14. Dibujo propio de la situación. [Esquema pràctic: (Este dibujo es una pequeña parte de la alfombra)]

Al revisar las resoluciones de los otros cuatro grupos participantes en la Prueba Piloto resolviendo el problema Pb0.a0, sólo en la resolución Pb0.a0_AL1D05 del grupo AL1D se realiza también un dibujo propio de la situación del problema, en este caso para desarrollar su resolución.

Como hemos comentado, el recuento que presenta la Tabla 3.1 corresponde a las evidencias explícitas, con anotaciones directas en el dibujo proporcionado. Sin embargo, al analizar las producciones con más profundidad, observamos como el dibujo proporcionado ha sido también utilizado por alumnos que no han hecho anotaciones explícitas en ella. En estos casos, observamos que esencialmente ha servido como herramienta heurística, ya sea correcta o incorrectamente.

Un primer ejemplo es el que se desprende de la Figura 3.6. En este caso no hay evidencias que el alumno escribiera en la imagen proporcionada o realizara una propia. Sin embargo, con su explicación evidencia que para resolver la primera cuestión del problema dio por hecho fundado en la apariencia de la imagen, que no contrastó. De la imagen, preconice que la parte de manta que ve en el dibujo corresponde a media manta. Así, obviando ciertos datos del enunciado, preconice que en el dibujo proporcionado se ve solo media manta a lo largo de lo que deduce que debe multiplicar por dos.

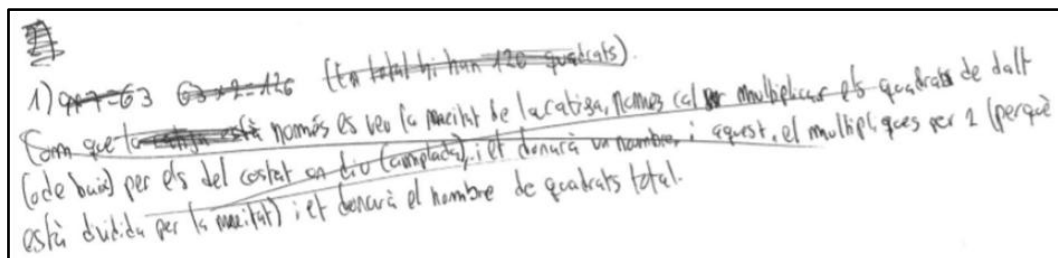


Figura 3.6. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B15. Evidencia de uso de la imagen proporcionada.

[1] $9 \times 7 = 63$ $63 \times 2 = 126$ (En total hay 126 cuadrados). Como la alfombra está sólo se ve la mitad de la alfombra, solo hay que multiplicar los cuadrados de arriba (o de abajo) por los del lado que dice (ancho) y te dará un número y éste, lo multiplicas por 2 (porque está dividido por la mitad) y te dará el número de cuadrados total.]

Si en este primer ejemplo se argumenta la respuesta directamente diciendo que la parte de manta desplegada corresponde a la mitad, y lo concibe un hecho, en el ejemplo que presenta

la Figura 3.7, el alumno, consciente o no de lo que escribe, muestra que se trata una suposición. Así, el alumno resuelve el problema, considerando dicha suposición, en la que la relación que establece es de 2,5.

En la primera pregunta he comptat tots els quadradets que hi havia en la catifa que són 63 i he suposat que la part de la catifa que veig són 2,5 m, i lo que he fet ha sigut: $63 \times 2,5 = 157,5$ he comptat 157,5 quadradets.

Figura 3.7. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B13. Evidencia de uso de la imagen proporcionada. [En la primera pregunta he contado todos los cuadraditos que había en la alfombra que son 63 y he supuesto que la parte de la alfombra que veía son 2,5 m, y, lo que he hecho ha sido: $63 \times 2,5 = 157,5$ y he contado 157,5 cuadraditos.]

Estas suposiciones, incorrectas, no sólo son llevadas a cabo por los alumnos que no han escrito directamente en el dibujo, sino que también las encontramos en aquellos que han trabajado sobre la imagen proporcionada o los suyos propios, como ocurre en los casos de presentan la Figura 3.8 y Figura 3.9 que siguen a continuación.

En la Figura 3.8, como en el caso de la Figura 3.6, se afirma, sin más, que la parte de manta que se observa en la figura corresponde a su mitad a lo largo, con lo que debe de multiplicar por 2 lo que observa en el dibujo.

Sabem que la catifa de amplada ~~3,6 m~~ hi ha 9 quadrats; de llargada 14 (perquè sabem que en un enveny la meitat de la catifa perquè contem els quadrats; no les dos xifres si anememem sabem que és la meitat. Per això he multiplicuem per dos

Figura 3.8. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B17. Evidencia de uso de la imagen proporcionada. [Sabemos que la alfombra de ancho hay 9 cuadrados: de largo 14 (porque sabemos que nos enseña la mitad de la manta porque contamos los cuadrados y las dos cifras se parecen sabemos que es la mitad. Por eso lo multiplicamos por dos)]

En el ejemplo que sigue a continuación (Figura 3.9), aunque la explicación esté tachada, vemos como en el dibujo marca la supuesta mitad y hace una reflexión en función del número de cuadros que faltan por desplegarse, en este caso, también habla de la mitad a lo largo.

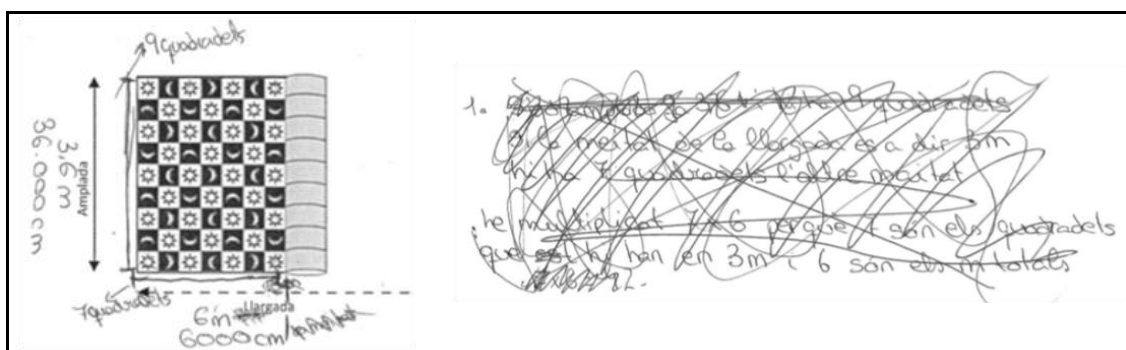


Figura 3.9. Fragmento de la producción Pb0.a0_SC1B23. Evidencia de uso de la imagen proporcionada. [Si el ancho hace 3,6 y hay 9 cuadraditos. Si la mitad del largo, es decir, 3 m, hay 7 cuadraditos en la otra mitad. He multiplicado 7×6 porque son los cuadraditos que hay en 3 m y 6 son los m totales. $7 \times 2 = 42$]

Finalmente, al analizar las producciones de los alumnos PI1D participantes en la Implementación Tercera, observamos como se ha recurrido a la medida del lado de los cuadraditos. La falta de precisión en el medida, pero la casi precisión en que fue impresa la imagen, muestra el por qué tantos alumnos suponen que lo que se ve es la mitad de la manta. Un ejemplo de ello es el caso que presenta la Figura 3.10 en el que se ha marcado que el lado de cada cuadrado es de $\frac{1}{2}$ cm.

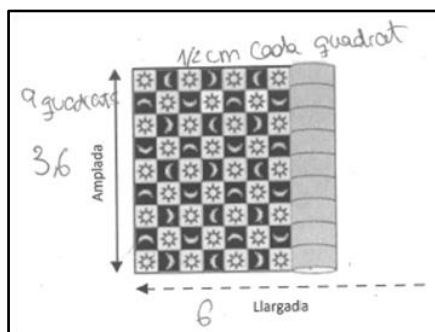


Figura 3.10. Fragmento de la producción Pb0.a2_PI1D01. Evidencia de uso de la imagen proporcionada. [9 cuadrados. $\frac{1}{2}$ cm cada cuadrado]

Finalmente, con el ejemplo de la Figura 3.11 destacamos un uso de la imagen donde se considera de manera satisfactoria la información del enunciado en el dibujo. En este caso, juega con las proporciones, relacionando los 3,6 metros de ancho, hasta donde llegarían los 3,6 m de largo y por tanto, lo que ocupan 9 cuadraditos. De ahí se mide lo que falta para llegar a 6 metros, y, por tanto, el número de cuadros que faltan para completar los metros.

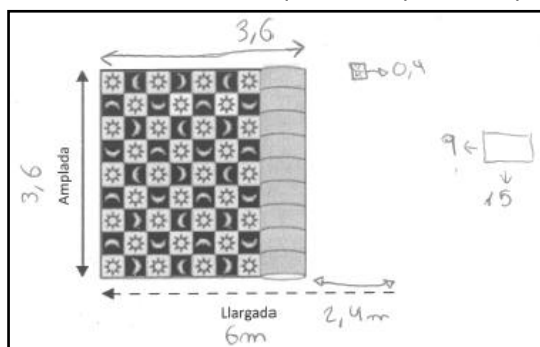


Figura 3.11. Fragmento de la producción Pb0.a2_PI1D11. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

3.1.2 Problema 1.1 y Problema 1.2

Los problemas Pb1.a1 y Pb2.a1 son los dos primeros que los distintos grupos participantes en la Implementación Primera trabajaron. Los datos numéricos que se presentan en ellos aparecen a través de su grafía numérica, en ellos se incluye un ejemplo numérico y las cuestiones a responder aparecen numeradas al finalizar la explicación de la situación. Si bien en el Problema Pb1.1 las dos primeras cuestiones piden por un resultado concreto y la tercera pide por la justificación de los resultados anteriores, en el problema Pb1.2 la petición de las justificaciones de las respuestas se encuentran conjuntamente con la pregunta formulada de manera explícita. Estudiaremos aquí dos hechos. El primero, en relación al hecho de que el enunciado incluya un ejemplo numérico que se concreta en entender que se requieren dos 2 números de 3 cifras distintas cada uno de manera que ninguna de ellas esté repetida, como ilustra la Figura 3.12.

Per exemple, el 368 i el 579.

Figura 3.12. Detalle del ejemplo numérico proporcionado en el Problema Pb1.a1. [Por ejemplo, el 368 y el 579.]

El segundo, el hecho que las cuestiones a responder sean formuladas de manera distinta, en tanto que en el problema Pb1.1 las dos primeras cuestiones piden por un resultado siendo la tercera cuestión la que pide por la justificación de las dos primeras y en el Pb1.2, cada cuestión pregunta por el resultado concreto pidiendo por su justificación.

Para ello revisamos las resoluciones obtenidas a los problemas Pb1.a1 y Pb2.a1 que se trabajaron en el periodo de la Implementación Primera, que tuvo lugar en el 1r Trimestre del curso escolar 2014-2015 y en la que participaron los grupos IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A.

Uso y efecto de ejemplos numéricos

Atendiendo la similitud del ejemplo numérico incluido en ambos problemas Pb1.1.a1 y Pb1.2.aa1, analizaremos aquí las resoluciones al Problema Pb1.1.a1 de los cinco grupos participantes en la Implementación Primera que lo resolvieron: IT6A, IT6B, AL1C, AL1D y SC1A

A partir de las condiciones expuestas en el enunciado: determinación de dos números de tres cifras, cifras a determinar entre seis de dadas, sin ninguna repetida, y teniendo en cuenta el ejemplo numérico concreto que se proporciona para dar a entender esta descripción, observamos tres tipos de faltas relacionadas con la generación de estos números. Estas se concretan en no entender que los números a considerar deben de ser de 3 cifras cada uno, no utilizar las cifras proporcionadas, o bien, que las cifras no pueden repetirse de ninguna manera. Ejemplos de estas evidencias se presentan las figuras que siguen a continuación.

Las Figura 3.13 y Figura 3.14 ejemplifican dos casos en los que no se tuvo en cuenta que los números a operar debían de tener 3 cifras cada uno. Mientras en el primer caso el alumno no se percató del error de interpretación, en el segundo sí lo hizo, por lo que actuó de manera consecuente descartando su primera interpretación.

$$\boxed{6-5=1 \quad 7-6=1 \quad 8-7=1 \quad 9-8=1}$$

Figura 3.13. Fragmento de la producción Pb1.a1_IT6B03. Evidencia de la falta cometida

$$\boxed{\cancel{24-8=2} \quad \cancel{7-6=1} \quad \cancel{25-2=23} \quad \cancel{22-2=20}}$$

Figura 3.14. Fragmento de la producción Pb1.a1_AL1C07. Evidencia de la falta cometida

En cuanto a la Figura 3.15, observamos que presenta un caso en el que las cifras utilizadas para crear los dos números de tres cifras a operar no se corresponden con las dadas en el enunciado. La falta se encuentra en el sustraendo, cuyo valor de unidades es 4, correspondiéndose con el valor de una cifra que no se proporciona en el enunciado. Observamos como la operación ha sido descartada por la cruz que aparece a su derecha.

$$\boxed{\begin{array}{r} 789 \\ -694 \\ \hline 135 \end{array} \quad \times}$$

Figura 3.15. Fragmento de la producción Pb1.a1_AL1D05. Evidencia de la falta cometida

Finalmente, con la Figura 3.16 ejemplificamos un caso de los observados en el que no se tiene en cuenta que las cifras de los dos números de tres cifras no se pueden repetir. Se percibe cómo, a diferencia de las condiciones del enunciado a considerar, la cifra de las centenas del minuendo es 3, coincidiendo con la cifra de las decenas del sustraendo, que también es 3.

$$356 - 536 = 180$$

Figura 3.16. Fragmento de la producción Pb1.a1_AL1C18. Evidencia de la falta cometida

En la Tabla 3.2 se resumen las evidencias de que los alumnos, en algún momento y sin entrar en detalle si se dieron o no cuenta de ello o si posteriormente lo rectificaron, hemos observado que cometieron alguna falta en el momento de crear los números de tres cifras a operar, ya sea por no considerar que fueran de tres cifras, por considerar cifras no especificadas en el enunciado o bien por descuidar la condición de cifras no repetidas. Para ello, con un × se han marcado las producciones en las que se observa que, en algún momento, el alumno perdió de vista que los números a operar debían ser de tres cifras, con C se ha marcado cuando se utilizaron cifras distintas a las dadas y con R los que no tuvieron en cuenta el factor de repetición en cuanto a las cifras de los dos números. Con un ✓ se marca la evidencia de haber entendido la naturaleza de los números a operar, es decir, cómo se pide que deben crearse los números que hay que formar para afrontar el problema. Las casillas en blanco corresponden a producciones inexistentes, debido a la ausencia del alumno resolutor. En la columna #P se presenta el número total de producciones analizadas y en la columna #F el número total de faltas observadas relativas a la creación de los dos números de tres cifras, sin distinguir los tres tipos de faltas especificados.

	Alumnos																															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
IT6A		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓								
IT6B	✓	✓	×	✓	✓	✓	C	✓		✓	R	✓	✓	×	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓							
AL1C	×		C	✓	✓	×	×		✓	✓		✓	C	C	✓	✓	✓	R	✓	R	✓	✓	✓									
AL1D	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	R	✓	✓	✓	✓									
SC1A	×	✓		✓	×	✓	✓	✓	×		R		✓	×		✓	✓		✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
	TOTAL														#P	#F																
	Grupo IT6A														21	1																
	Grupo IT6B														24	6																
	Grupo AL1C														20	8																
	Grupo AL1D														22	2																
	Grupo SC1A														26	6																

Tabla 3.2. Evidencias de las dificultades relacionadas con la creación de dos números de acuerdo con las condiciones descritas en el problema Pb1.1.a1 habiendo un ejemplo concreto

A partir de la Tabla 3.2, contabilizamos 23 resoluciones de las 113 (20,4%) obtenidas al problema, en qué detectamos que los alumnos tuvieron dificultades para entender claramente la naturaleza de los números con qué trabajar. De los tres tipos de falta identificados, la falta más generalizada corresponde a no entender inicialmente que los números a operar deben de ser de tres cifras cada uno. En este sentido, de las faltas marcadas con una × en la Tabla 3.2 se desprende que 14 de ellas (60,8%) fueron debidas a esta situación mientras que, el resto de

ellas, se reparte de manera bastante igualada. Por las marcas C de la Tabla 3.2, observamos que 4 de ellas (17,4%) fueron debidas a utilizar alguna cifra diferente a las seis detalladas en el enunciado y, de acuerdo con las marcas R, y las 5 restantes (21,7%) a no tener en cuenta el factor de repetición. Observamos que la primera falta identificada se presenta en todos los grupos, mientras que las otras fluctúan de un grupo a otro. En cualquier caso, no identificamos ningún patrón asociado al tipo de falta y los cursos implicados. Sin embargo, al comparar el número total de faltas por el número total de producciones constatamos que, aun habiendo un ejemplo concreto de cómo debían ser los números a operar, dos de cada diez alumnos han tenido alguna dificultad en crear los números a utilizar. Más allá de ello, si lo comparamos por el nivel educativo, observamos que estas faltas afectaron a 15,6% de los alumnos de Primaria mientras que afectó a un 23,5% de los alumnos de Secundaria.

Efecto del modo en qué se formulan las cuestiones a responder y sus justificaciones

Como hemos comentado los problemas trabajados en la Implementación Primera Pb1.a1 y Pb1a.2 comparten una misma naturaleza matemática, sin embargo el modo en qué se presentan las cuestiones presenta ciertas peculiaridades. Si bien en el problema Pb1.a1 se pide por resultados concretos y argumentación sobre los mismos en apartados distintos, en el problema Pb2.a1, se pide por cada resultado concreto y su correspondiente argumentación en el mismo apartado. Destacamos también que, en ambos casos la petición de argumentación se realiza de modo interrogativo mediante la pregunta *¿Cómo lo sabes? O ¿Cómo lo has hecho para saberlo?* y sólo en el Problema Pb1.a1 se enfatiza dicha petición con un posterior *Explícalo*. Notamos que el tipo de explicación que se pide en ambos casos es de tipo argumentativo en tanto que solicitan que se explique cómo se ha llegado a la conclusión.

El docente AL1 comenta en distintas ocasiones que sus alumnos presentan muchas dificultades para escribir. De acuerdo con él, las producciones de sus alumnos muestran que sus resoluciones y respuestas son, en general, más bien pobres y poco descriptivas. Interesados por el efecto que puede tener el modo en qué se formulan las cuestiones y sus posibles argumentaciones y atendiendo esta falta de descripción, centramos este análisis concretamente en las resoluciones de los alumnos de los grupos AL1C y AL1D a los problemas Pb1.a1 y Pb1.a2 que, además, fueron los primeros en trabajarse en todos los grupos en la Implementación Primera.

Para dar cuenta de ello, en la Tabla 3.3 comparamos las argumentaciones, independientemente de su profundidad o riqueza matemática, con qué los alumnos de los grupos AL1C y AL1D acompañaron sus respuestas a los dos problemas considerados Pb1.a1, y Pb2a.1, siendo estos dos los primeros a trabajados de la Implementación. Con un 1 se ha identificado si los alumnos argumentaron su respuesta y con 0 cuando no hay evidencias que dieran algún tipo de argumentación al resultado concreto. Las casillas en blanco corresponden a la ausencia de dicha producción. En la columna #P se contabiliza, por cada grupo y problema, el total de producciones analizadas y en la columna #1 se recopila el total de argumentaciones.

	Problema	Alumnos																						Total	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	#P
AL1C	Pb1.a1	0		1	0	1	0	1		1	1		1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	20	12
	Pb2.a1	1	0	1	1	1	0	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	21	18
AL1D	Pb1.a1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21	20	

Pb2.a1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21	19
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Tabla 3.3. Evidencias de justificar las respuestas a los problemas Pb1.1.a1 y Pb2.a1 por parte de los alumnos de los grupos AL1C y AL1D

Dentro de cada grupo, comparamos el número de argumentaciones que los alumnos dieron a cada uno de los dos problemas. Observamos como si bien la proporción de argumentaciones en el grupo AL1D prácticamente se mantuvo de un problema a otro (95,2% en el primer caso, y (90,4%) en el segundo), en el grupo AL1C hubo un cambio significativo del primer al segundo problema. Así si para el problema Pb1.a1 se obtuvieron 12 argumentaciones de las 20 resoluciones (60%), en el problema Pb2.a1 se obtuvieron 18 argumentaciones de 21 resoluciones (85,7%). Al mirarlo por el total de producciones por problema, vemos como 32 de las 41 resoluciones al problema Pb1.a1 (78%) presentan algún tipo de argumentación, mientras que de las 42 resoluciones al Pb2.a1 37 (88%) presentan algún tipo de argumentación.

Con la Figura 3.17 destacamos la resolución del alumno AL1D11 quien, al argumentar las respuestas de los dos primeros apartados del problema Pb1.a1 de manera consecutiva a la respuesta, lo recolocó en el tercer apartado, para así contestarlo de acuerdo con las directrices del enunciado. En este sentido, observamos que los alumnos perciben cada apartado como actos distintos que deben responder por separado. De ahí, la recolocación que indica con las flechas. Por ello, parece más natural que dichas explicaciones se pidan en el mismo apartado de la petición los resultados particulares obtenidos.

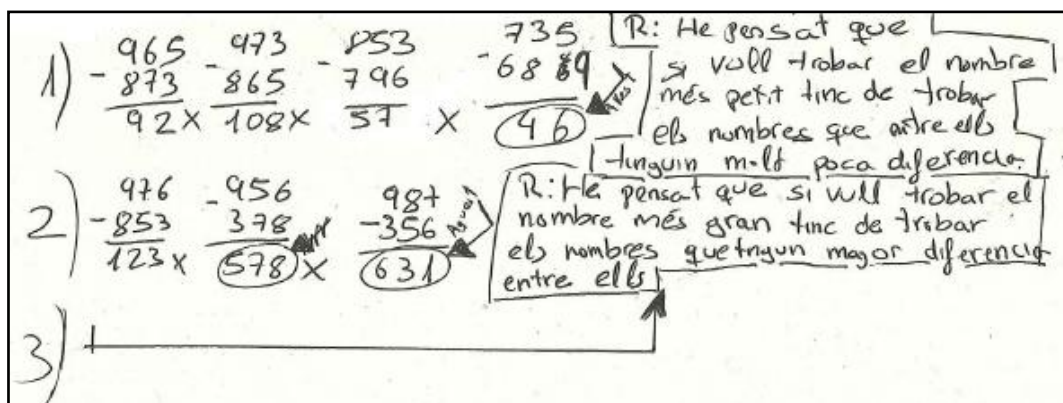


Figura 3.17. Fragmento de la producción Pb1.1_AL1D11. Evidencia de recolocación de las argumentaciones

Al analizar las distintas producciones a los dos problemas, damos cuenta de la dificultad en poder identificar de manera clara la respuesta a la cuestión concreta formulada. Notamos como, en distintos casos, los alumnos no dan una respuesta clara a la pregunta concreta formulada si no que se encuentra integrada en el proceso que han desarrollado y, supuestamente, el final del proceso puede considerarse como la respuesta precisa a la cuestión concreta formulada. A parte, sí que podemos encontrar los intentos de argumentación. Un ejemplo de ello sería el caso que presenta la Figura 3.18, en la que simplemente se hace una operación y se acompaña de una argumentación, pero en ningún caso se hace mención específica a los dos números que se buscan.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

hem ajuntat els nombres que s'assemblen més.

Figura 3.18. Fragmento de la producción Pb1.2_IT6B10. Evidencia de no responder adecuadamente la cuestión concreta formulada

Con el caso de la Figura 3.19 también observamos que, a pesar que los alumnos pueden explicar, más o menos profundamente, como han llegado a determinar los dos números de tres cifras, dan como respuesta concreta el valor de la operación de estos dos números, en lugar de responder explicitando los dos números de tres cifras cuya operación proporciona dicho valor.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 982 \\ + 653 \\ \hline 1640 \end{array}$$

Combinan els nombres i sumen-los.
El més gran

Figura 3.19. Fragmento de la producción Pb1.2_IT6B11. Evidencia de no responder adecuadamente la cuestión concreta formulada

3.1.3 Problema 2

El enunciado inicial de este problema, Pb2.a1, presenta los datos numéricos mediante la correspondiente gráfica numérica y las preguntas se distinguen por un punto introductorio. De este problema nos fijamos en el hecho que las preguntas formuladas no se presentan numeradas. Las resoluciones estudiadas provienen de los dos grupos de 6º de Primaria, que contaban con el docente IT6 y los dos grupos de 1º de la ESO con el docente AL1, que participaron en la Implementación Primera que tuvo lugar en el 1r trimestre del curso escolar 2014-2015.

Efecto de la no numeración de las preguntas formuladas

Al analizar las producciones de los alumnos relativas a este problema, observamos cómo algunos de ellos, numeraban las respuestas, aún no estando numeradas las cuestiones formuladas. Nos interesamos por conocer el efecto de la posible numeración en la formulación de las preguntas, estudiamos y nos preguntamos por el efecto que puede conllevar el hecho que las preguntas sean destacadas por algún símbolo, pero no numeradas a la hora de trabajar y responder al problema. Interesados.

Así, al analizar las producciones de los alumnos, diferenciamos entre aquellos que trabajaron las distintas partes del problema sin separación aparente, como se observa en la Figura 3.20, los que siguiendo la nomenclatura del enunciado, utilizaron alguna marca para separarlos, como se ilustra con el caso de la Figura 3.21 y, finalmente, los que enumeraron los distintos apartados y así se refirieron a ellos, como presenta el caso de la Figura 3.22, en el que se enumeraron con números o el caso de la Figura 3.23 en el que se enumeró utilizando letras.


$80 \div 4 = 20$ $28 \div 2 = 14$ $14 \times 4 = 56$ $28 - 4 = 24$
 $80 - 2 = 40$ $14 \times 2 = 28$ $56 + 28 = 84$
~~80~~: $56 + 24 = 80$ $80 - 56 = 24$

La meitat de 28 és 14, després ho multiplico amb 4×4 hi ha 56. Després e intentat saltar quina em faltava per arribar a 80, i és 24.

56 fotos es podrien posar en un pàgina de 4 fotos, i 24 fotos que hi caben 2.

Pàgines de 4, hi ha 14 i de 2, hi ha 12

Figura 3.20. Fragmento de la producción Pb2.a1_AL1D23. Evidencia de trabajar las cuestiones formuladas sin utilizar separadores



- En quantes pàgines pot posar exactament 4 fotos i en quantes 2? Com ho saps?
- Ho podries explicar d'una altra manera?
- En les mateixes condicions, hi ha cap més altra manera de distribuir les 80 fotos impreses? Per què?

• Em 14 i 14, com a l'esquema (meitat de 2 i meitat de 4) de 4).
 • Si, en 7 i 21 (Depèn de la ~~quantitat~~ de fotos de meites diferents).
 • Si han de ser ~~en~~ petits iguals... Podria ser 28 i 0...

Figura 3.21. Fragmento de la producción Pb2.a1_Pb06.a1.IT6B03. Evidencia de usar símbolos visuales para separar el trabajo realizado de acuerdo a las cuestiones formuladas

- En quantes pàgines pot posar exactament 4 fotos i en quantes 2? Com ho saps?
- Ho podries explicar d'una altra manera?
- En les mateixes condicions, hi ha cap més altra manera de distribuir les 80 fotos impreses? Per què?

1. ~~En~~ Pots posar 12 pàgines amb 4 fotos i 16 pàgines de 2 fotos. Perquè he pensat que la meitat de 28 és 14, si multiploques 14×4

Figura 3.22. Fragmento de la producción Pb2.a1_AL1D17. Evidencia de enumerar, con números, el trabajo realizado de acuerdo a las cuestiones formuladas

- En quantes pàgines pot posar exactament 4 fotos i en quantes 2? Com ho saps?
- Ho podries explicar d'una altra manera?
- En les mateixes condicions, hi ha cap més altra manera de distribuir les 80 fotos impreses? Per què?

a)

14	13	28	Perquè tots son múltiples de 4.
$\times 2$	$\times 4$	$+ 52$	
$\hline 28$	$\hline 52$	$\hline 80$	

Figura 3.23. Fragmento de la producción Pb2.a1_AL1D10. Evidencia de enumerar, con letras, el trabajo realizado de acuerdo a las cuestiones formuladas

Para poder entrever qué puede ayudar a los alumnos a organizar sus resoluciones, en la Tabla 3.4 presentamos el recuento de las producciones relativas al Pb2.a1 de los grupos arriba explicitados distinguiendo aquéllas en las que los alumnos, por su cuenta, numeraron las preguntas y por consiguiente presentaron las respuestas numeradas, de las que no. Con N se han marcado aquellas resoluciones al problema en que, a pesar de que en el enunciado las preguntas no estuvieran específicamente enumeradas, las respuestas han sido enumeradas, con un 0 aquellas resoluciones que presentan sus respuestas sin enumerar, y con un asterisco (*) aquellas resoluciones en las que se han identificado el inicio de la respuesta a cada una de las preguntas, pero sin ser enumeradas. Las casillas en blanco corresponden a resoluciones inexistentes, debido a la ausencia del alumno resolutor. En la columna #P se contabiliza el número de producciones analizadas, en la columna #S el total de producciones en las que se observa que se ha utilizado un símbolo visual para introducir el trabajo de las distintas partes del problema y en la columna #N cuando estas están partes se presentan enumeradas.

	Alumnos																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
IT6A	0	N	0	0	0	0	S	N	N	N	S	N	0	0	0	N	N	N	N	0	N	0	0	0				
IT6B	0	0	S	N	N	0	N	0		0	N	N	0	N	0	N	N	N		N	0	0	0		N			
AL1C	N	N	S	N		S	S	N	S			N	S	S	N	N	0	0	S	0	N	0	N					
AL1D	0	0	N	0	0	0	N	S	N	N	N	N	0	N	N	0	N	S	N	N	S	N	0					
	TOTAL										#P	#S	#N															
	IT6A										24	2	10															
	IT6B										22	1	11															
	AL1C										20	7	9															
	AL1D										23	3	12															
											89	13	42															

Tabla 3.4. Resoluciones al problema Pb2.a1 atendiendo si las preguntas fueron numeradas para responderse

Lo primero que nos llama la atención es que en 24 de las 46 producciones de los alumnos de Primaria (52%) utilizaron alguna marca distintiva para introducir el trabajo de los distintos apartados a trabajar y que en Secundaria, fueran 31 de las 43 producciones en las que se observa una clara distinción entre las distintas partes. No es ello tan sorprendente si tenemos en cuenta que el problema propicia la distinción de las distintas cuestiones a resolver. Así mismo, lo que sorprende es que, en todos los casos, de los alumnos que han distinguido de alguna forma las cuestiones, la mayoría de alumnos han numerado las cuestiones a pesar de originalmente no estarlo. Así, de las resoluciones que presentan las respuestas claramente separadas, 21 de los 24 alumnos (88%) de primaria que hicieron distintivas las partes del problema, están numeradas. Y, en el caso de secundaria son 21 de los 31 (68%), siendo entonces, un total de 42 alumnos de los 89 (42%) participantes quienes enumeraron el trabajo correspondiente a cada una de las cuestiones, sin estar enumeradas en el enunciado.

3.1.4. Problema 3

El enunciado inicial de este problema es el correspondiente al identificado como Pb3.a1 del Anexo 1. En este problema se presentan los datos numéricos a través de su grafía numérica

acompañados de medidas de longitud en su formulación abreviada, se incluye una imagen ilustrativa y las cuestiones a resolver están numeradas al finalizar la descripción de la situación. Siguiendo el estudio del uso de la imagen observado en el Problema 0, nos interesamos por el uso de la imagen que en él se proporciona. Para ello estudiamos y revisaremos las resoluciones obtenidas durante la Implementación Primera, llevada a cabo el 1º trimestre del curso escolar 2014-2015.

Uso de imágenes y su efecto

Motivados por las evidencias de uso de la imagen proporcionada en el Problema Pb0.a0, nos interesamos por determinar en qué sentido influye la imagen que se incluye en este enunciado Pb3.a1. Siguiendo las directrices de la situación descrita en el enunciado, la imagen proporcionada presenta dos mesas vistas en perspectiva, con las mismas características físicas pero cuyas superficies son, en el primer caso, cuadrada y, en el segundo, rectangular, apreciándose que la superficie de la primera mesa esconde, plegada, parte de su posible superficie total y la segunda la misma pero con toda la superficie posible visible, como se presenta en la Figura 3.24. En tanto que aquí la imagen ilustra la situación concreta de la que se habla, pero sin detallar ningún dato, sino solamente mostrar la relación entre ambas mesas, hablamos de una imagen representativa.



Figura 3.24. Imagen proporcionada en el Problema Pb3.a1

Ante las evidencias del uso de la imagen en las resoluciones a problema en cuestión (Pb3.a1), y de acuerdo con las observaciones sobre el uso de la imagen en el problema Pb0.a0, nos preguntamos por dos cuestiones. La primera, si hay evidencias de utilizar la imagen proporcionada o bien si introducen alguna de propia, y en qué modo completan la proporcionada o bien realizan la propia. Por otro lado, la finalidad dentro del proceso de resolución que dan a la imagen utilizada, ya sea la proporcionada, una de propia, o ambas.

Las producciones de los alumnos dan cuenta que tanto se ha utilizado la imagen proporcionada como que han elaborado de propias. En el caso de elaborar sus propias representaciones para describir la situación, observamos que estas tanto pueden ser 2 dimensionales, como el caso de la Figura 3.25, o bien 3 dimensionales, como se observa en la Figura 3.26. Además, en ambas situaciones, se han distinguido dos hechos: el uso de la imagen o la representación de manera cualitativa, es decir, sin el uso de datos numéricos o de medida, como se observa en la Figura 3.25, o bien si a la imagen o a la presentación se ha indicado y/o añadido información de tipo cuantitativo, es decir, datos numéricos de medida, como en el caso de la Figura 3.26, o ambas informaciones, como se presenta en la Figura 3.27.

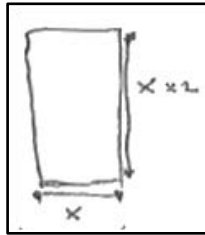


Figura 3.25. Fragmento de la producción Pb3.a1_SC1A14. Representación propia 2D con datos cuantitativos

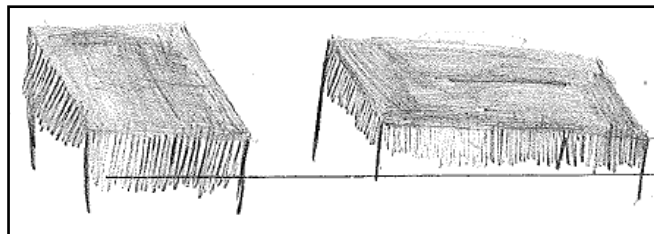


Figura 3.26. Fragmento de la producción Pb3.a1_IT6A09. Representación propia 3D

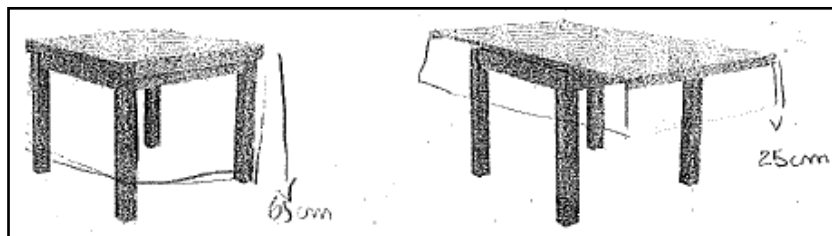


Figura 3.27. Fragmento de la producción Pb3.a1_IT6A15. Uso cualitativo y cuantitativo de la imagen proporcionada

En este sentido, podríamos clasificar el uso de imágenes de la manera siguiente:

- IP: Hay evidencias de utilizar la imagen proporcionada
 - IPL: Cualitativamente
 - IPT: Añadiendo datos cuantitativos (medidas)
- RP: Utiliza representaciones propias (2D o 3D)
 - RPL: Cualitativamente
 - RPT: Indicando datos cuantitativos (medidas)

Detectamos un uso bastante irregular de las imágenes, pero, en este caso, parece predominar la confección de una imagen propia a la proporcionada.

En cuanto a la segunda cuestión, intentamos discernir con qué finalidad pudieron utilizar los alumnos las imágenes, ya sea la proporcionada o bien la que por sí mismos crearon, que aparecen en sus resoluciones. Para ello, analizamos las resoluciones de los grupos con más evidencias de uso de las imágenes de cada nivel educativo (6º de Primaria y 1º de la ESO), que se corresponde con los grupos IT6A, para 6º de Primaria y SC1A, para 1º de la ESO, respectivamente.

Con el análisis del uso de la imagen del Problema 0 (Pb0.0), identificamos dos usos principales de la imagen proporcionada: un primero ligado al hecho de comprender lo que se describe en el problema (C) y un segundo, a indagar para encontrar y aplicar una estrategia de resolución (E), para este problema (Pb3.a1) que fue resuelto con el uso de la base de orientación, las resoluciones a este problema (Pb3.a1) enseñan, además de estas dos funcionalidades, una

tercera que, bajo nuestro punto de vista, va dirigida al hecho de revisar la realización del problema y poder dar la respuesta por parte del mismo resolutor (obviamos aquí las imágenes realizadas en la posible puesta en común posterior a la resolución del problema), como ejemplifican las Figura 3.28 y Figura 3.29 en las que se pueden divisar la tres funciones identificadas.

La Figura 3.28, por ejemplo, enseña las evidencias de haber utilizado la imagen proporcionada para clarificar las condiciones descritas en el enunciado, tanto cualitativamente, al dibujar el mantel en ciertas proporciones, como cuantitativamente, al asociar la longitud que dichos manteles cuelgan de las mesas. Al señalar 40 en la segunda mesa, da cuenta de una confirmación y al poner 10 cm (*puede*) da indicios de utilizar el dibujo como herramienta heurística, al permitirle establecer estimaciones y así divisar alguna estrategia de resolución al problema.

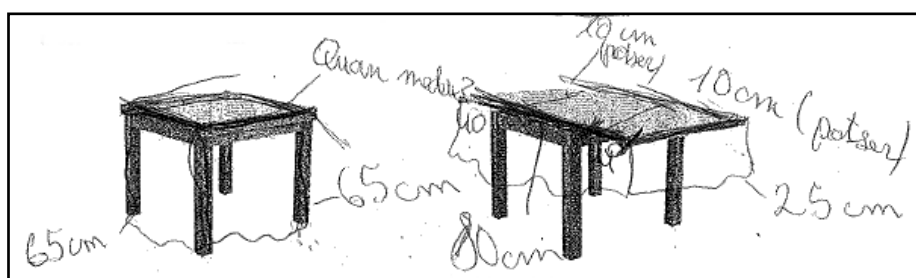


Figura 3.28. Fragmento de la producción Pb3.a1_IT6A18. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

A nuestro entender, el caso de la Figura 3.29, presenta también las tres funcionalidades identificadas en el uso de la figura, en este caso realizada por el propio alumno resolutor. Observamos como con la anotación de 25 y 65 establece las condiciones iniciales, y como utiliza el dibujo para, a medida que encuentra ciertos datos, puntualizarlos en el dibujo, ayudándole así a determinar la estrategia necesaria para avanzar al tiempo que consolidar sus resultados y afianzar sus respuestas a las cuestiones formuladas.

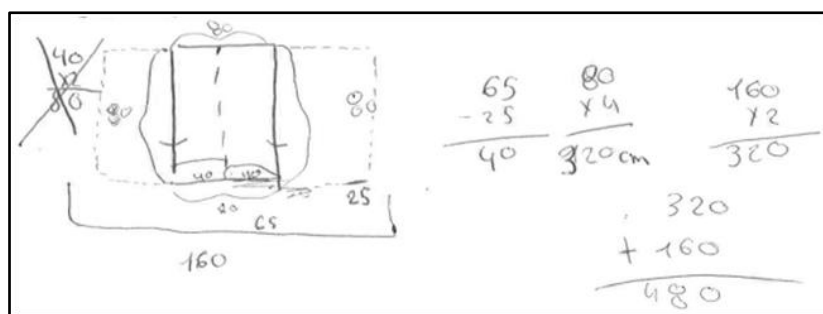


Figura 3.29. Fragmento de la producción Pb3.a1_SC1A27. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

De estas distinciones surge una posible relación entre el uso de la imagen y los tres dominios de la base de orientación utilizada (BO1), que podemos detallar como muestra la Tabla 3.5:

Evidencias de uso de las imágenes	Dominios en la Base de Orientación OBI
Situar y entender el problema: C	1^{er} Dominio: Comprendo el problema
Preparar y aplicar la estrategia: E	2^o Dominio: Estructuro y desarrollo un plan de acción
Revisar y dar la respuesta: R	3^{er} Dominio: Reviso

Tabla 3.5. Relación entre los usos de la imagen para el problema Pb3.a1 y las dimensiones de la Base de Orientación utilizada (BO1) en su Implementación.

Interesados por saber si los alumnos han utilizado las imágenes, proporcionadas o realizadas por sí mismos, preferiblemente con una finalidad o con otra, en la Tabla 3.6 comparamos, de acuerdo con los dos grupos de alumnos analizados más detalladamente (como hemos comentado arriba, el IT6A y SC1A participantes en la Implementación Primera), las evidencias de usar las imágenes en las tres finalidades observadas: (C) Situar y entender el problema, (E): Preparar y aplicar la estrategia, y (R) Revisar y dar la respuesta. Para ello, señalamos con una x las evidencias del uso de la imagen en cada una de estas funciones. Las casillas en blanco se corresponden con aquellas resoluciones que no presentan evidencias de un u otro uso de imágenes o representaciones. Las casillas de fondo gris corresponden a producciones inexistentes, debido a la ausencia del alumno resolutor. En la segunda parte inferior de la se presenta el recuento total de funcionalidades dadas a las imágenes para cada grupo de alumnos analizado.

		Alumnos																																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					
Grupo IT6A																																					
C	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x												
E																			x																		
R			x													x	x		x					x	x												
Grupo SC1A																																					
C	x		x	x	x	x		x	x	x		x		x		x			x				x	x	x	x			x	x	x	x	x				
P										x		x		x										x													
R			x			x		x	x	x						x			x					x	x	x			x	x				x			
															RECuento																						
															IT6A				SC1A																		
															C	E	R			C	E	R															
															21	1	6			21	7	13															

Tabla 3.6. Evidencias observadas en cuanto a la utilidad dada a las imágenes, dada o de creación propia, en el problema Pb3.a1

22 de los 24 alumnos resolutores del grupo IT6A han utilizado algún tipo de representación para abordar el problema. Desde el punto de vista de la funcionalidad que se le ha dado, 21 de los 24 alumnos resolutores han utilizado el soporte gráfico para comprender el problema, 1 para indagar en cómo establecer el plan de acción y 6 para repasar y dar respuesta a las preguntas formuladas. Así mismo dichos usos no son siempre unifuncionales. Observamos que el alumno que utilizó la imagen para establecer el plan de acción, también la utilizo para entender el enunciado del problema. Y de los 6 resolutores que usaron el soporte gráfico para la funcionalidad asignada a la 3ª dimensión, sólo dos de ellos la utilizaron únicamente para tal fin. Los cuatro restantes lo utilizaron únicamente para comprender el problema.

Así, si miramos el estudio desde el punto de vista multifuncional de los soportes gráficos, en 18 de los casos se ha utilizado el soporte gráfico únicamente para una acción y, en 5 de ellos para dos de las acciones identificadas. De los 17 casos de uso único del soporte gráfico, 16 se corresponden a su aplicación para comprender el problema y 2 para la dimensión dedicada a la revisión. De los 5 usos multifuncionales, uno de ellos engloba comprender el problema e

indagar en un plan de acción, y los cuatro restantes en comprender el problema y repasar lo hecho o dar la respuesta.

En cuanto al grupo de 1º de la ESO, observamos como 21 de los 27 alumnos resolutores utilizan el soporte gráfico para comprender el problema, 7 para indagar en un plan de acción y 13 para revisar la tarea realizada e ilustrar sus respuestas. Destacamos aquí que ninguno de los 7 casos en que la imagen fue utilizada para abordar un plan de acción ni de los 13 casos en que observamos que la imagen fue utilizada para dar respuesta, sólo fue utilizado para dicha finalidad. Haciendo un estudio vertical de los datos, tenemos que son 5 las resoluciones en que el soporte gráfico es utilizado para los tres fines identificados (C, E y R), 2 casos son los que el soporte gráfico ha sido utilizado para las dos primeras finalidades: comprender y establecer un plan de acción, y 8 casos son los que se ha utilizado la imagen para situar los datos y dar respuesta.

A nivel comparativo entre niveles educativos, observamos que si bien el uso de imágenes para comprender el problema es parecido (88% en el caso de Primaria, en frente del 75% en el caso de Secundaria) aumenta el uso de la imagen para usos heurísticos o dar respuestas en Secundaria respecto Primaria, pues frente el 5% como uso heurístico o el 27% para dar respuesta en Primaria, en Secundaria se tiene un 33% y 62% respectivamente en sus usos.

3.1.5 Problema 5

La versión inicial de este problema corresponde al problema etiquetado como Pb5.a1 del Anexo 1. Se trata de un problema con más de una solución, en el que los datos numéricos se presentan descritos verbalmente sin la grafía numérica correspondiente. El problema presenta dos apartados, para cada uno de los que se expone una cuestión numerada a responder. Nos interesamos por como los alumnos responden las cuestiones formuladas, atendiendo que ninguna de las dos pide, de manera directa, por un resultado concreto sino por propuestas generales que se puedan obtener y en las que la petición de una explicación no se presenta de manera explícita. Las preguntas son las que se precisan en la Tabla 3.7.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. ¿Cómo puede haber distribuido estas piezas para hacer el borde, la abuela?2. ¿Puedo saber cuántas piezas de otros colores ha utilizado la abuela para terminar la parte interior de la manta? ¿Cómo lo puedo saber? |
|---|

Tabla 3.7. Preguntas a responder del problema Pb5.a1

Para dar respuesta a ello recurrimos a las producciones de los alumnos participantes en la Implementación Primera, que fue cuando se trabajó la versión de este problema, llevada a cabo en el 1r Trimestre del curso 2014-2015 con los dos cursos de 6º de Primaria IT6A e IT6B, y los tres grupos de 1º de la ESO AL1C, AL1D y SC1A.

Como primera observación comentar que, en general, los alumnos mostraron ser conscientes de las dos preguntas y, en sus producciones se puede distinguir al trabajo que realizaron para dar respuesta a la primera pregunta y el que realizaron para dar respuesta a la segunda.

En relación a la primera pregunta, independientemente del modo en que se desarrolla la resolución, observamos, de manera generalizada, poca claridad en separar entre los procesos que permiten llegar a una respuesta y la respuesta en sí misma. En este sentido, encontramos producciones en las que se proporciona de manera directa el dibujo de una configuración

posible de la manta, sin ningún tipo de explicación, ya sea argumentación previa o conclusión final o con pocas o difusas pruebas previas.

Un ejemplo de ello, es la respuesta que presenta la Figura 3.30 en la que se da una configuración formada por 7×7 . Los trazos inferiores que se observan en la figura evidencian retoques de la configuración inicial para obtener una configuración que cumple con las condiciones del enunciado. Dicha respuesta, no dispone de ninguna introducción que introduzca el dibujo como respuesta ni de explicación ni justificación de por qué esta manera de distribuir las piezas es posible.

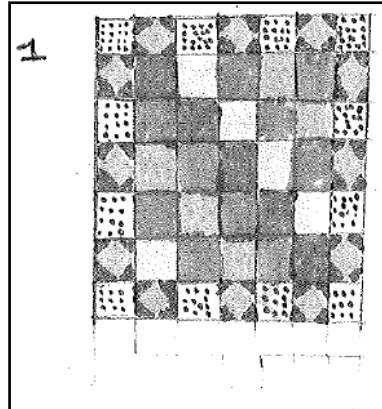


Figura 3.30. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1C07. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

En otros casos, se aprecian pruebas de configuraciones previas a una de final. Estas configuraciones previas pueden aparecer más o menos claramente tachadas y la final, puede aparecer remarcada, de algún modo, o sin remarcar, como se desprende de los ejemplos de las Figura 3.31 o Figura 3.32. La configuración última que se observa, la no tachada o, en algunos casos destacados, puede ir acompañada de alguna nota poco descriptiva. En estos dos ejemplos observamos cómo se encuentra al menos una configuración y al lado se pone el ancho por el largo, pero sin ningún tipo de explicación argumentativa o justificativa alternativa a las configuraciones previas que se han tachado.

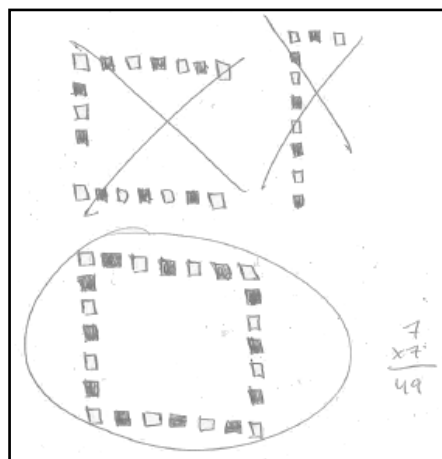


Figura 3.31. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1D02. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

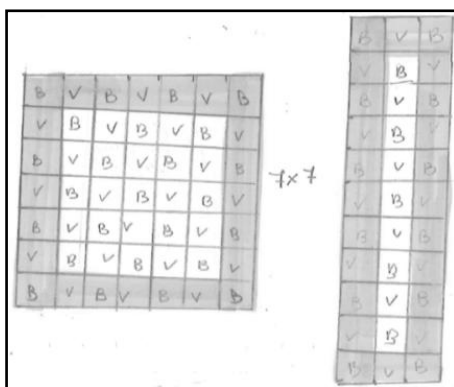


Figura 3.32. Fragmento de la producción Pb5.a1_IT6B01. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

Por otro lado, encontramos respuestas únicamente verbales, sin el apoyo de ningún ejemplo gráfico o explicación matemática, que pueden o no proporcionar más o menos información, como el que el fragmento que ilustra la Figura 3.33.

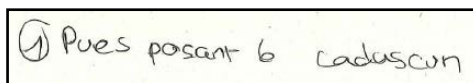


Figura 3.33. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1C12. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

En otros casos donde se contesta de manera verbal, puede apreciarse una configuración a la que se hace referencia, aunque sin hacer mención específica a ella, como el caso de la Figura 3.34 correspondientes a la resolución del alumno AL1D22.

A rectangular box containing the handwritten text: "Pues sen 7 quadrats per 7 quadrats".

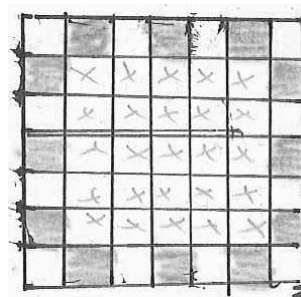


Figura 3.34. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1D22. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

Se hace así notoria cierta ausencia entre separar entre razonamientos y procesos de resolución, y dar una respuesta concreta, así como con la respuesta, justificar correctamente la respuesta que se da. En cierto modo, observamos cómo, llegar el final de un proceso es, para los alumnos, la propia respuesta al problema, dando por respuesta una configuración concreta y no la explicación, argumentación o justificación de cómo ha podido llegar a ella.

Como decimos, las justificaciones que podrían acompañar las respuestas son ausentes, sin embargo no lo son los razonamientos y procesos que permiten llegar a ellas. En este sentido, observamos como los alumnos han hechos pruebas y que, en la mayoría de los casos no las han eliminado, aunque no siempre las han escrito. Entre estas pruebas, más que justificaciones, destacamos que, aunque hay indicios de alguna matematizaciones del proceso de resolución o la conclusión, como se observa en las Figura 3.35 y Figura 3.36, no se ha llegado a una formulación matemática de cómo se puede resolver el problema con formulación matemática.

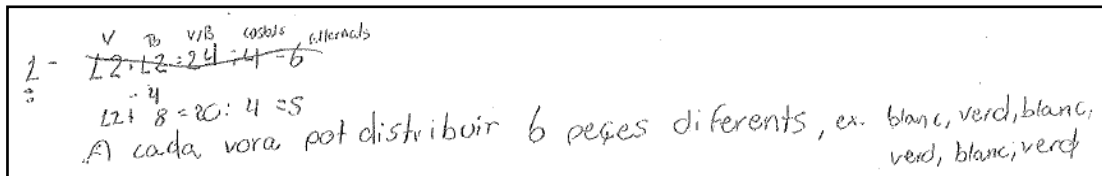


Figura 3.35. Fragmento de la producción AL1C23. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

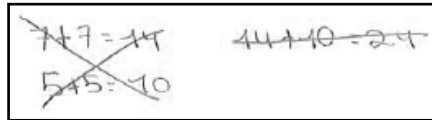


Figura 3.36. Fragmento de la producción SC1A05. Respuesta a la 1ª cuestión formulada

En cuanto a la segunda cuestión, hay distintas apreciaciones de las distintas producciones.

Si bien hemos observado que los alumnos han distinguido las dos partes a trabajar, destacamos el hecho que los alumnos se han servido del trabajo realizado para la primera pregunta, para trabajar la segunda. Recordamos que la cuestión no pide por el número exacto de piezas internas, sino más bien del modo en que éste se puede determinar. Así mismo, encontramos una gran mayoría de producciones en las que la respuesta se concreta en encontrar el número exacto de piezas internas de la configuración de la manta dada en la cuestión previa. Así mismo, éste cómputo generalmente va acompañado de un razonamiento, más o menos correcto, preciso o matemático.

Ejemplos de ello son los que observamos en la Figura 3.37 en la que, refiriéndose a la configuración dada como respuesta a la primera cuestión, afirma que hay 25 piezas internas porque 5x5 es 25. Se trata de una afirmación, pero que no se explica de dónde se obtiene el 5.

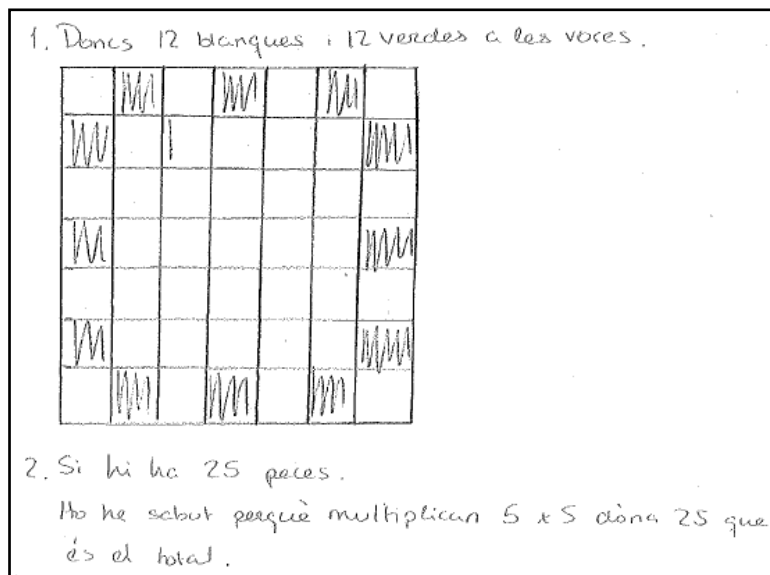


Figura 3.37. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1D17. Respuestas a las cuestiones formuladas. [1. Pues 12 blancas y 12 verdes en los bordes. 2. Si hay 25 piezas. Lo he sabido porque multiplicar 5 x 5 da 25 que es el total.]

En el caso de la Figura 3.38, sí que explicita de donde se obtienen los 5 involucrados, pero no se comenta por qué se seleccionan estos 5.

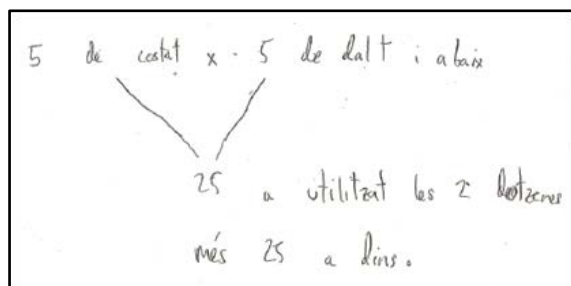


Figura 3.38. Fragmento de la producción AL1D04. Respuestas a las cuestiones formuladas

De manera similar, pero más descriptiva que esquemática, la respuesta de la Figura 3.39 da cuenta de una explicación multiplicativa que, si bien al inicial es general, termina por concretar el total de piezas del caso analizado en particular en el primer apartado, pero sin concretar qué piezas de las parte horizontal o vertical considera.

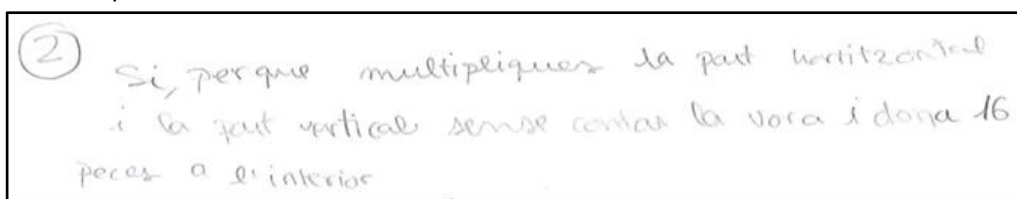


Figura 3.39. Fragmento de la producción Pb5.a1_IT6A11. Respuesta a la 1ª cuestión. [2. Sí, porque multiplicas la parte horizontal y la parte vertical sin contar el borde y da 16 piezas en el interior]

En la misma línea pero con una argumentación más bien gráfica, la respuesta que recoge la Figura 3.40 precisa que en el interior hay 25 piezas.

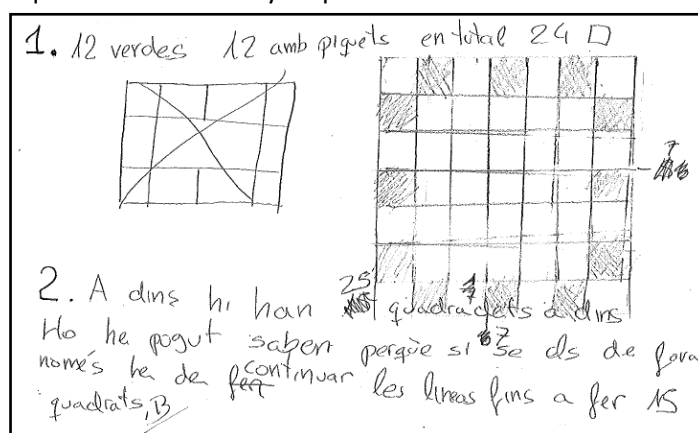


Figura 3.40. Fragmento de la producción Pb5.a1_AL1D11. Respuestas a las cuestiones formuladas. [1. 12 verdes, 12 con puntitos, en total 24□. 2. A dentro hay 25 cuadraditos [a dentro]. Lo he podido saber porque si 7 son los de fuera sólo tengo que ~~hacer~~ continuar las líneas hasta hacer 15* cuadrados, *de la corrección anterior, se percibe que debe de figurar 25].

En este sentido, encontramos respuestas más globales, pero sin referencias a los elementos necesarios para determinarlos, o bien de donde extraerlos. Un ejemplo de ello lo encontramos en el caso de la Figura 3.41.

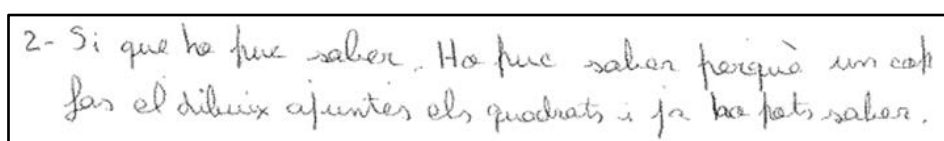


Figura 3.41. Fragmento de la producción Pb5.a1_IT6A23. Respuesta a la 2ª cuestión formulada. [2. Sí que lo puedo saber. Lo puedo saber porque una vez haces el dibujo, juntas los cuadrados y ya lo puedes saber.]

Finalmente, encontramos reflexiones generales asociadas a una cómo proceder de manera general que, finalmente, se aplican al caso considerado en la pregunta 1, dando la respuesta concreta. Así mismo encontramos respuestas matemáticamente más profundas que otras.

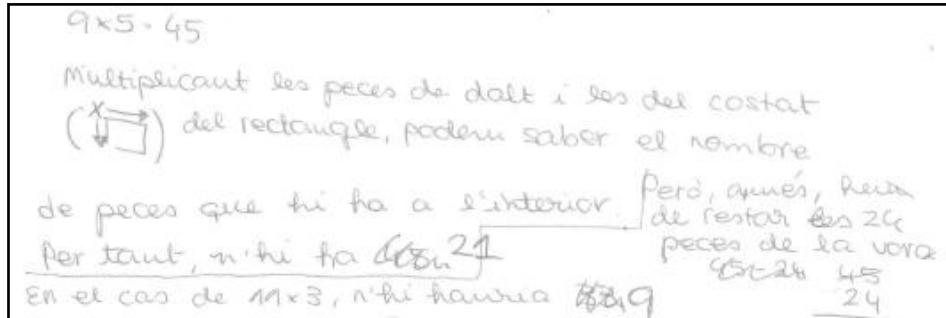


Figura 3.42. Fragmento de la producción Pb5.a1_SC6A28. Respuesta a la 2ª cuestión formulada. [$9 \times 5 = 45$ Multiplicando las piezas de arriba y las de al lado del rectángulo. podemos saber el número de piezas que hay en el interior. Por lo tanto, hay 21. Pero, además hay que restar las 24 piezas del borde. $45 - 24 = 21$ En el caso de 11×3 , habrá 9]

Así mismo, encontramos también respuestas más abiertas y generales que, a pesar que son tipo procedimental son abiertas y poco precisas, sin argumentos de razonamiento y justificativo, que no acaban de precisar a qué elementos aplicar la propuesta de su procedimiento. Las Figura 3.43 y Figura 3.44 son ejemplo de ello.

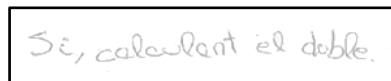


Figura 3.43. Parte del trabajo AL1D03. Respuesta a la 2ª cuestión formulada. [Sí, calculando el doble]

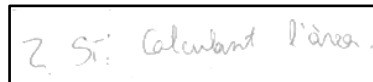


Figura 3.44. Fragmento de la producción AL1D12. Respuesta a la 2ª cuestión formulada. [2. Sí, calculando el área]

Observamos pues, como a pesar de que la cuestión no pide por un resultado concreto, los alumnos tienden a buscar un resultado tangible concreto, más o menos acompañada de una explicación, explicación que podemos distinguir entre argumentación, cuando se trata de la explicación de un proceso que desemboca a una conclusión, y justificativo, cuando intenta dar explicaciones que refuerzan las decisiones.

Observamos, además, que cuando la pregunta no se refuerza con la petición de una explicación, es difícil que los alumnos la proporcionen. Observamos que, si los alumnos llegan a alguna conclusión, tampoco buscan una formulación matemática que lo explique.

Confirmamos así la necesidad de explicitar bien lo que se pretende al cuestionario algo en un problema, y enseñar a los alumnos qué se espera que, de manera general, se trabaje en un problema. Diferenciar entre argumentación y justificación, entre el proceso y la respuesta.

3.1.6 Problema 6

El enunciado de la primera versión de este problema es el que se adjunta en el Anexo 1 con la referencia Pb6.a1. En esta versión del problema se proporcionan datos numéricos mediante la correspondiente gráfica numérica y se incluye una imagen ilustrativa de parte de los elementos

que entran en juego. Hablamos aquí de imagen ilustrativa en tanto que se trata de un ejemplo gráfico y general de la situación que describe el enunciado, sin ningún tipo de precisión de la información proporcionada por el enunciado. Las preguntas son introducidas con parte de la situación a considerar y, aunque sin numerar, separadas por párrafos distintos.

De esta presentación del enunciado del problema nos centramos en dos características. Primera, el hecho que las preguntas formuladas se presentan en párrafos distintos. En segundo lugar, el uso e implicación de la imagen proporcionada. Las resoluciones consideradas provienen de los dos grupos de 6º de Primaria, que contaban con el docente IT6 y los dos grupos de 1º de la ESO con el docente AL1, que participaron en la Implementación Primera que tuvo lugar en el 1r trimestre del curso escolar 2014-2015, coincidiendo así con la muestra observada para el análisis de la enumeración o no de respuestas realizada para el Problema 2.

Efecto de la no numeración de las cuestiones

De manera similar al análisis de resultados de Pb2.a1, en la Tabla 3.8 se ha hecho el recuento de aquellas resoluciones al problema Pb6.a1 distinguiendo aquéllas que presentan las respuestas numeradas a las que no lo están. Se ha identificado con 1 aquellas resoluciones al problema en que, a pesar de que en el enunciado las preguntas no estuvieran específicamente numeradas, se han numerando las respuestas, con un 0 aquellas resoluciones que presentan sus respuestas sin numerar, y con un asterisco (*) aquellas resoluciones en las que se han identificado el inicio de la respuesta a cada una de las preguntas, pero sin ser enumeradas. En la columna #P se contabiliza el número total de producciones analizadas, en la columna #S el total de producciones en las que los apartados se ha utilizado algún distintivo para separar el trabajo relativo a cada sección, pero sin numerarlos, y en la columna #N las producciones en las que el trabajo relativo a cada una de las cuestiones ha sido separado enumerándolos.

Alumnos																									Total			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	#P	#S	#N	
Grupo IT6A																												
	N	N	N	0	0	0	S	N	N	N	N	N	0	S	N	0	N	N	0	N	0	N	N			23	2	14
Grupo IT6B																												
N	N	N	N	N		N			N	N	N	N	N	N	N	N	N	0	N	N	N	N	N	N		22	0	21
Grupo AL1C																												
N	N	N		0	N	N	0	N	0	N	N	0	0	N	N	0	0	0	0	0	N	S	N			22	1	12
Grupo AL1D																												
N	N	0	0	0		N	N	N	N	N	N	0	N	N	N	N	0	0		0	N					20	0	13
																									87	3	60	

Tabla 3.8. Relación de las resoluciones al problema Pb6.a1 atendiendo si las preguntas fueron numeradas para responderse

Por lo que respecta al 6º Primaria, observamos que 37 de las 45 (82,2%) producciones procedentes de Primaria, (IT6A e IT6B) han utilizado algún método para separar claramente el trabajo relativo a cada una de las cuestiones formuladas. En particular, sólo 2 de ellas han separado de alguna manera claramente distintiva, pero sin enumerar; y 35 (77,8%) de ellos las han numerado explícitamente, aún no estándolo en el enunciado.

En relación a las resoluciones de 1º de la ESO, observamos que 26 de las 42 (61,9%) producciones analizadas, han separado sus respuestas, siendo sólo 1 caso en el que esta

separación no ha sido enumerada, y 25 (59,5%) los casos en que se han enumerado, aún no estándolo en el enunciado.

Con ello, observamos una tendencia generalizada separar visualmente el trabajo relativo a cada una de las cuestiones formuladas, siendo más notoria en Primaria que en Secundaria, y que esta tendencia es claramente a numerar las partes, en este sentido, por poco, pero más destacado en Secundaria.

Uso de imágenes y su efecto

Ante las evidencias de uso de los soporte gráficos observadas en las resoluciones a los problemas Pb0.a0 y Pb3.a1, veamos ahora el efecto de la imagen proporcionada en el enunciado de este problema. En este caso, la imagen presenta un ejemplo del animal mitológico que se describe inicialmente en el enunciado de manera generalizada. Como se observa en la Figura 3.45, presenta un ser de 5 cabezas, que es el mínimo de cabezas que dicho animal podía tener. De ahí que nos refiramos a ella como imagen ilustrativa.

Para este análisis recurriremos a las resoluciones al problema correspondientes a la Implementación Primera realizadas por los alumnos de los grupos de 6º de Primaria IT6A e IT6B, y los grupos de 1º de la ESO AL1D y AL1C al problema formulado en su versión inicial (Pb6.a1), ya que fue la primera vez que vieron la imagen proporcionada.



Figura 3.45. Imagen proporcionada en el Problema Pb6.a1

A diferencia de los anteriores, la imagen proporcionada no se corresponde con la situación a partir de la cual surge la cuestión a resolver. El animal de la Figura 3.45 presenta 5 cabezas, el mínimo de cabezas que podían tener estos animales, mientras que el animal sobre el que se crea el problema tiene inicialmente 9 cabezas.

La primera cuestión que surge es ver si los alumnos utilizan o no la imagen proporcionada y, en tal caso, de qué modo. Ante esta cuestión, damos cuenta de que ningún alumno de los grupos de 1º de ESO utilizó la imagen proporcionada. En cambio, dos de los alumnos de 6º de Primaria, aunque no para el mismo fin, sí la utilizaron. Así lo visualizan la Figura 3.46 y la Figura 3.47.

En el primero de ellos (Figura 3.46) vemos como el alumno ha adecuado el número de cabezas que aparece en la ilustración correspondiente de la descripción general del animal mitológico, añadiéndole 4 cabezas más para que el animal disponga del número adecuado de cabezas (9) que se corresponde con la situación de partida particular al problema a resolver. En este caso, pues, ha utilizado la imagen proporcionada para establecer de manera gráfica la situación de partida inicial y, por tanto, situar los datos y comprender la situación del problema.

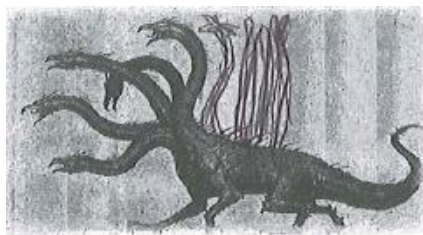


Figura 3.46. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A05. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

En el segundo caso (Figura 3.47), en cambio, se utiliza la imagen proporcionada para apuntar qué sucede al cortar cada una de las cabezas. Así, sin rectificar la situación inicial concreta que afecta el problema, indica de manera numérica/algebraica que, en eliminar una cabeza de las existentes, ésta realmente no desaparece sino que se multiplica por dos. En este caso, pues, se añade parte de la información general para entender mejor la situación descrita.



Figura 3.47. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A23. Evidencia de uso de la imagen proporcionada

En este sentido, notamos como al no ser la imagen proporcionada fiel a la situación concreta a resolver, sólo dos alumnos la han utilizado. Uno para modificar gráficamente la ilustración representada a la concreta y otro para especificar de manera algebraica otra información general, no visible inicialmente en la imagen que debe ser considerada para poder resolver el problema. En ambos casos se trata de un uso de la imagen para entender mejor las condiciones de la situación en la que se contextualiza el problema.

De manera alternativa, son destacables la variedad de representaciones con qué los alumnos han abordado el problema. Un hecho destacable, aunque sutil pero no menos obvio, es que ninguno de los alumnos se ha dejado llevar por la imagen proporcionada y todas las representaciones aquí observadas han partido del número correcto de cabezas establecido para la situación problemática, es decir, de 9, y que para dar respuesta a la primera pregunta, se debe estudiar qué sucede cuando se cortan 3 de ellas. En este sentido, los estudiantes no se han dejado engañar, y las evidencias enseñan que tenían claro que son 3 las cabezas que sufren una modificación. A partir de aquí, las maneras de cómo representarlo han sido variadas y diversas, lo que se merece una atención especial. De ahí nuestro interés en estudiarlas.

En primer lugar destacamos el uso de distintas formas para representar las cabezas del animal mitológico. Observamos el dibujo de simplemente pequeñas líneas verticales, que se podrían interpretar como los cuellos; en forma de círculo, en representación de únicamente la cabeza; o bien, como segmentos con pequeños círculos como extremo (a modo de pequeños alfileres), dando a entender, así, la idea del cuello más la cabeza. En algunas representaciones, además, se distingue la figura del animal en cuestión.

Si bien resulta interesante la elección de la forma para representar de las cabezas, también lo resultan la manera en qué éstas son distribuidas y como se reproduce la situación descrita. En

cuanto a la distribución de las cabezas, destacamos dos formas principales: de forma lineal y de forma circular. A su vez, en ambas representaciones las cabezas pueden presentarse en una sola hilera, o bien, en hileras distintas, en general, según si pertenecen a las nueve cabezas iniciales o al nuevo grupo de cabezas que surgen por la eliminación de las tres primeras. En caso de estar en hileras distintas, destacamos una hilera principal en la que se dibujan las 9 cabezas iniciales y las suplementarias, con las cabezas a añadir, que tanto pueden aparecer de manera superior como inferior a la principal con las nueve cabezas.

Por otro lado, observamos también dos maneras de marcar las cabezas eliminadas. Si bien en todos los casos la marca es clara porque las cabezas aparecen tachadas, el modo de tachar presenta dos formas: mediante una línea oblicua, que, en la mayoría de los casos, va de la parte superior derecha a la inferior izquierda y, en otros pocos al revés, es decir de la parte superior izquierda a la parte inferior derecha, o bien con una cruz. Veamos algunos ejemplos concretos.

Empezamos por algunas de las representaciones en las que las cabezas se han distribuido de manera lineal. En el caso que recoge la Figura 3.48 observamos como las cabezas son representadas por una línea vertical. En una hilera han sido colocadas las nueve cabezas iniciales, tres de las cuales han sido tachadas con una línea oblicua. Diremos que ésta es la hilera principal. Superior a dicha hilera, se identifican, separadas por una línea vertical de mayor longitud, tres grupos de dos cabezas cada uno. Observamos cómo estos tres pares de cabezas no son colocados de manera aleatoria, sino que están sobrepuestos a cada una de las tres cabezas eliminadas del conjunto de nueve.

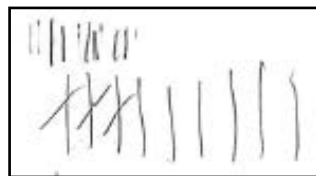


Figura 3.48. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A07. Representación propia de la situación descrita

De manera similar, se ha trabajado en la resolución que presenta la Figura 3.49. Como en el caso anterior, en ella se observan tres cabezas eliminadas de las nueve dispuestas en la hilera principal y, en una hilera superior a ella se distingue un conjunto de seis cabezas. A pesar que es evidente la correspondencia entre las seis nuevas cabezas y las tres eliminadas de la hilera principal, las seis nuevas cabezas no están delimitadas por ninguna marca. El hecho que se utilicen círculos y sin marcas entre ellas, deja entrever claramente la cantidad de cabezas nuevas introducidas. Otra diferencia en relación a la representación anterior es que ahora, las 3 cabezas eliminadas son las 3 últimas, mientras que en el ejemplo anterior, eran las 3 primeras.



Figura 3.49. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A12. Representación propia de la situación descrita

Una combinación de estas dos representaciones se observa en la representación de la Figura 3.50, en la que seguimos observando una representación circular de las cabezas, y colocando las nuevas cabezas en una hilera superior a la principal. Ahora, como en el primer caso, las cabezas afectadas son las primeras de la hilera. A diferencia de los casos anteriores, pero, se

ha sustituido la representación gráfica de las seis nuevas cabezas, por la grafía numérica de la cantidad que debe haber por cabeza eliminada. Así, de cada una de las tres cabezas eliminadas, se sobrepone (y así se indica de manera explícita con una línea identificativa) un número 2.



Figura 3.50. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A02. Representación propia de la situación descrita

La misma idea presenta la Figura 3.51, aunque las cabezas se encuentran dispuestas en tres filas de tres, es decir, formando un cuadrado de lado tres, configuración que permite el hecho de trabajar con un número cuadrado como es el nueve. Observamos que en este caso, se han eliminado las cabezas iniciales de cada una de las filas que conforman el cuadrado de nueve cabezas.

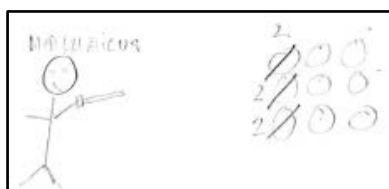


Figura 3.51. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A23. Representación propia de la situación descrita

En el ejemplo de la Figura 3.52, la hilera principal formada por las nueve cabezas iniciales y sus tres eliminadas, es la superior. Ahora, en una hilera inferior, no sólo se han dibujado los dos pares de nuevas cabezas correspondientes a las tres eliminadas (así se evidencia porque debajo de cada una de las tachadas aparecen más ajustadas de dos en dos) sino que se han pretendido añadir las 6 persistentes que no habían sido eliminadas que, en este caso, se encontraban al inicio de la hilera. Así mismo, notamos como el alumno resolutor se ha descontado una de las seis cabezas perennes, lo que ha provocado un recuento erróneo de la cantidad final de cabezas.

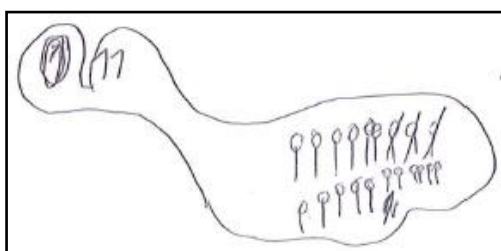


Figura 3.52. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A05. Representación propia de la situación descrita

Como se ha comentado, aún trabajando de manera lineal, no todos los alumnos han trabajado con distintas hileras de representación. Presentamos a continuación ejemplos del uso de más de una hilera hasta una sola.

En la Figura 3.53, se percibe como en una hilera superior se han representado las nueve cabezas iniciales y como tres de ellas han sido tachadas con una línea oblicua. Debajo de las tres tachadas se distinguen dos hileras de tres cabezas cada una, ambas introducidas por el signo de la suma, +. Así, la representación da a entender como, una vez dibujadas las 9 cabezas iniciales, se eliminan tres y para cada una de ellas, se suma, de manera explícita, una y otra cabeza. Con ello resultan seis nuevas cabezas, que son añadidas al final de la hilera principal

superior a continuación de las tres tachadas de las nueve que se habían representado inicialmente.

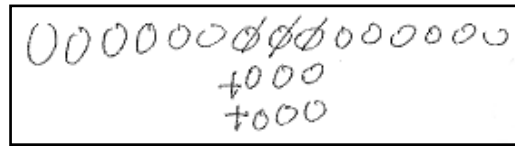


Figura 3.53. Fragmento de la producción Pb6.a1_AL1D18. Representación propia de la situación descrita

En esta nueva representación (Figura 3.54), se distingue una hilera superior formada por nueve cabezas iniciales las tres últimas de las cuales aparecen tachadas por una línea oblicua. En la segunda hilera queda evidente el hecho de añadir 6 cabezas, pues hay dibujadas seis cabezas introducidas por el signo de la suma, +. Así, pues, queda claro que estas seis otras cabezas se suman a las tres eliminadas (y que van acompañadas de la espada que las corta), aunque no queda claro a quien corresponden, pues están añadidas sin más, sin mostrar relación o pertinencia alguna con las cabezas anteriores.



Figura 3.54. Fragmento de la producción Pb6.a1_AL1D16. Representación propia de la situación descrita

De modo parecido a la representación anterior, en la Figura 3.55, se distinguen las seis nuevas cabezas añadidas directamente al final de la hilera principal donde ya estaban dibujadas la nueva cabezas iniciales con las tres últimas tachadas, representando así las tres cabezas eliminadas.

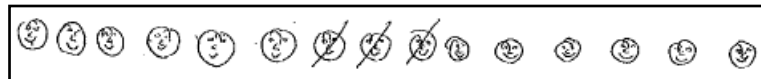


Figura 3.55. Fragmento de la producción Pb6.a1_AL1C02. Representación propia de la situación descrita

Finalmente, analizamos la representación de la Figura 3.56, donde se dibujan las cabezas como pequeños segmentos con un pequeño círculo como extremo y en la que las tres cabezas eliminadas de las nueve existentes se presentan al inicio de la hilera siendo tachadas por un cruz. En este caso, la adición seis nuevas cabezas queda clara, en tanto que se introducen por el signo de la suma a continuación de las nueve ya representadas. Así mismo, con esta representación no queda claro el porqué de 6 cabezas, en tanto que son introducidas directamente por el número 6 seguido de la palabra *cabezas*, y sin evidencia alguna de su relación las tres cabezas tachadas.

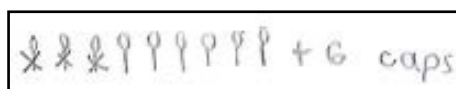


Figura 3.56. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A17. Representación propia de la situación descrita.
[+ 6 cabezas]

Analizados los casos de representaciones lineales, introducimos ahora representaciones en las que las cabezas son distribuidas de manera circular, terminando con ejemplos de representaciones para dar respuesta a la segunda pregunta del problema, donde entran en juego 3 animales y 3 caballeros.

En la representación de la Figura 3.57, se visualizan las nueve cabezas iniciales representadas por segmentos cuyo extremo es un pequeño círculo, distribuidas alrededor de un cuerpo del animal. Tres de ellos aparecen tachados por una única línea oblicua (ahora de la parte superior izquierda a la parte inferior derecha) y, de cada uno de estas tres cabezas se observa una clara bifurcación que da lugar a dos nuevas cabezas como las anteriores. En este caso no hay duda de la relación entre las nuevas cabezas y las eliminadas así como la deducción del número final de ellas.

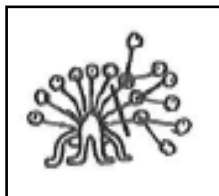


Figura 3.57. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6B03. Representación propia de la situación descrita

Menos afinada es la representación que presenta la Figura 3.58. Como en el caso anterior, las cabezas se identifican como pequeños segmentos cuyos extremos son pequeños círculos, dispuestos alrededor del cuerpo de un animal. En este caso, pero no queda clara la relación entre las cabezas eliminadas y las nuevas. Si bien se distinguen tres cabezas eliminadas, pues están tachadas por una línea oblicua, no es distinguible cuáles son los 3 pares de cabezas surgidas por la eliminación de las 3 primeras.

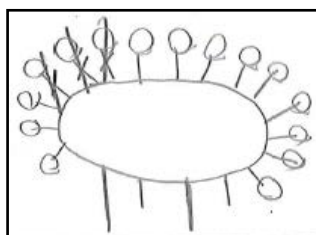


Figura 3.58. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A21. Representación propia de la situación descrita

Con la Figura 3.59, damos cuenta de otro ejemplo de disposición de las cabezas a lo largo del cuerpo del animal. En ella, aunque se marcan las tres cabezas eliminadas mediante una línea oblicua el conjunto de nuevas cabezas, aunque totalmente visibles a la derecha de las iniciales, queda fuera del animal, aunque queda claro que deben ser incorporadas pues son introducidas por el signo de la suma, +.

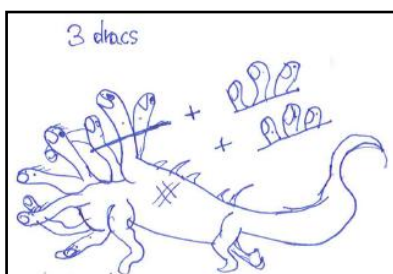


Figura 3.59. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A03. Representación propia de la situación descrita.

[3 dragones]

Con este ejemplo introducimos las representaciones dedicadas a responder la 2ª pregunta del problema. En este caso, el alumno lo evidencia con el texto *3 dragones* que precede la imagen. Da cuenta así que la misma situación ocurre en 3 seres distintos.

De acuerdo en responder esta segunda pregunta, en el caso de la Figura 3.60 se observan tres situaciones similares, en la que distinguimos una distribución circular de las nueve cabezas alrededor de un cuerpo del animal. En este caso, aunque en cada uno de los tres seres se distinguen 3 cabezas tachadas con una misma línea, en ninguno de ellas se visualiza que de ellas surjan otras nuevas. En cambio, lo que no se ha obviado es que el hecho que, aparte del guerrero *Matematicus*, pues en la parte superior de cada ser, se ha dibujado un guerrero.

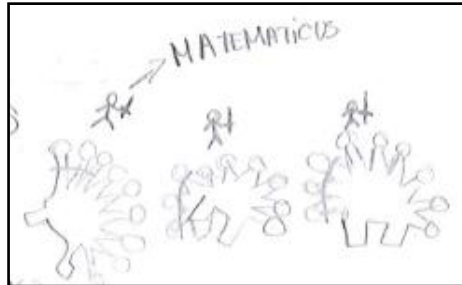


Figura 3.60. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A09. Representación propia de la situación descrita

En el ejemplo de la Figura 3.61, tampoco se han obviado las figuras de los dos nuevos guerreros, como tampoco la representación de tres seres, todos ellos, con la misma situación. Si bien los tres seres se quedan con 12 cabezas y son distinguidas las eliminadas, es difícil distinguir cuáles son las 6 nuevas cabezas de cada uno y la relación que tienen con las tres eliminadas.

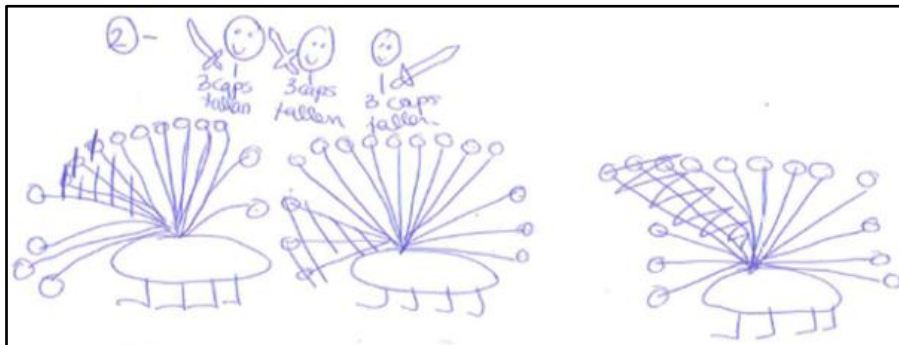


Figura 3.61. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A11. Representación propia de la situación descrita

Finalmente, con el caso de la Figura 3.62 damos con un cuarto caso, caracterizado por contener tres situaciones distintas, pero similares a la vez. Con cada uno de los tres escudos se da cuenta del enfrentamiento de un guerrero con un ser distinto. Enfrenamiento representado por la flecha que sale del escudo hacia cada conjunto de cabezas. De cada conjunto de cabezas, se observan tres de tachadas y a cada una de esas tres tachadas le han hecho corresponder conjuntos de dos círculos tangentes entre sí, lo que evidencia las parejas de dos cabezas, obteniendo así, tres parejas de cabezas para cada ser. Notamos aquí como la distribución de las nueve cabezas inicial se ha hecho por hileras de cuatro, restando una sola.

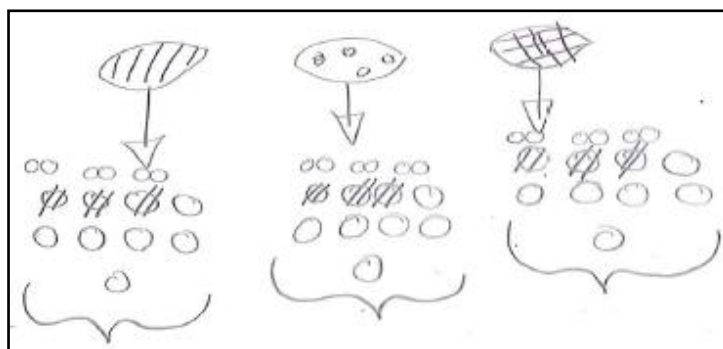


Figura 3.62. Fragmento de la producción Pb6.a1_IT6A13. Representación propia de la situación descrita

Con este análisis observamos cómo proporcionar una imagen relativa al problema pero sin ajustar la imagen a la realidad concreta de la situación a trabajar y sin concretar en ella los datos descritos, propicia a los alumnos resolutores a realizar sus propias creaciones. Aún pudiendo la imagen dirigir parte de las representaciones, es evidente que es lo suficientemente abierto para dejar cierta libertad de expresión a los alumnos para que pueden desarrollar su propuesta de representación. Encontramos así una riqueza en estilos de representación sin restringirse a la representación dada y considerando los datos proporcionados en la descripción del enunciado.

3.1.7 Discusión y Síntesis

Hemos aquí analizado aspectos distintos de los enunciados de los problemas formulados en su versión inicial, y, por tanto, utilizados en la Prueba Piloto, como el problema Pb0.a0, y en la Implementación Primera, como es el caso de los problemas Pb1.a1, Pb1.a2, Pb2.a1, Pb3.a1, Pb5.a1 y Pb6.a1. Todos los problemas se presentaron de manera verbal y por escrito y, al margen de los distintos contextos en que se formulan, el enunciado de cada uno de ellos presentaba características formales específicas no compartidas en todos ellos. Atendiendo la influencia de las prácticas en el desarrollo de la destreza para resolver problemas, analizamos el efecto que puede tener en las producciones de los alumnos las peculiaridades al formular un problema. Para ello hemos recurrido a las producciones de los alumnos a los problemas correspondientes y en cada caso nos hemos centrado en los grupos de alumnos que hemos observado que daban más información al respecto.

Comentar aquí que no hemos incorporado de ninguna característica del enunciado del problema Pb4.a1 en tanto que no hemos observado que pudiera aportar ninguna característica que no estuviera contemplada ya en el resto de problemas.

A continuación, discutimos y sintetizamos las observaciones en relación a cada uno de los aspectos observados.

Uso de imágenes y su efecto en problemas formulados por escrito

Al incluir imágenes en enunciados escritos de problemas, percibimos la necesidad de ser conscientes de los efectos que la integración de dichas imágenes puede comportar en el desarrollo de las resoluciones de los alumnos, como representaciones más o menos detalladas de los mismos (Kribbs y Rogowksy, 2016).

Aunque conscientes de la dificultad en categorizar las imágenes (Kribbs y Rogowksy, 2016), como representaciones de los enunciados de los problemas, de acuerdo con el análisis a los

problemas Pb0.a0, Pb3.a1 y Pb5.a1, advertimos tres tipos distintos de imágenes en función de la información que proporcionan en relación a las condiciones expuestas en enunciado del problema que acompañan. En este sentido, distinguimos entre imagen explicativa, imagen representativa e imagen ilustrativa. Hablamos de imagen explicativa cuando ésta presenta en sí misma toda la información que se describe en el enunciado; imagen representativa, cuando la imagen se ciñe a la situación descrita en el enunciado pero no proporciona en sí misma todos los datos que se presentan en el enunciado; e imagen ilustrativa, cuando se trata de una imagen generalista que simplemente pretende situar el resolutor en el contexto en el cual se presenta el problema, sin ceñirse a las condiciones detalladas.

En cualquiera de los tres casos hemos encontrado evidencias de que los alumnos han utilizado de manera explícita, especialmente escribiendo en ellas, la imagen proporcionada en cada caso. Sin embargo, las evidencias de sus usos son diferentes en cada uno de los casos. Observamos así como el uso de la imagen identificada como explicativa (la del problema Pb0.a0) ha sido más generalizado entre los alumnos, incluso con evidencias explícitas de su uso aunque sin escribir directamente en ella, que en el caso del uso de una imagen ilustrativa (la del problema Pb5.a1), cuyo uso ha sido muy reducido. En cuanto al uso de la imagen explicativa, cabe destacar que incluso distintos alumnos se han basado únicamente en los datos que se podían extraer de ella, dejando de lado otras premisas que se describían en el enunciado. En cuanto al uso de las imágenes ilustrativa, cabe destacar que, los alumnos que la han utilizado directamente, han sido capaces de adecuar el dibujo ilustrativo a las condiciones del enunciado.

En este sentido, observamos como los alumnos han sido críticos en utilizar en mayor o menor consideración la imagen proporcionada en función de la información que, en sí mismas proporcionaban de acuerdo con el enunciado. A partir de ello, han optado por integrarlas, adaptarlas o no considerarlas en su proceso de resolución. Sin embargo, observamos que cuanto más ajustada es la imagen a la descripción del problema, los alumnos presentan cierta tendencia a obviar la descripción y guiarse únicamente por la información que presenta la imagen, sin contrastarla. Mientras que cuando la imagen proporciona menor información, la han adaptado de manera satisfactoria.

Al mismo tiempo el análisis realizado nos ha informado como los alumnos han podido o no elaborar imágenes propias, a pesar de las imágenes proporcionadas. En este sentido, el uso de imágenes propias ha sido en sentido inverso al del uso de las imágenes proporcionadas. Apreciamos un uso muy evidente de imágenes propias en el caso de haber integrado en el enunciado una imagen ilustrativa, como la del problema Pb5.a1, y mucho menos significativa en el caso del problema Pb0.a0, en el que se integra una imagen explicativa. De hecho, en este último caso, observamos que los casos en que los alumnos realizaron un dibujo propio, coincide cuando éstos tuvieron que trabajar en el reverso del papel donde no aparece el dibujo inicial. En cambio, en el caso del problema Pb5.a1 se observa que fue en sustitución de la imagen proporcionada en el enunciado. En este sentido, hemos observado como la introducción de una imagen ilustrativa, no inhibió la capacidad de los alumnos para realizar sus propias producciones, sino ambientar el contexto en el que se sitúa el problema al tanto que dejar libertad a los alumnos para desarrollar sus visiones particulares, modos de representación y estrategias, como bien enseña la variedad de representaciones analizadas.

De este mismo análisis observamos tres funcionalidades de las imágenes en el proceso de resolución de los alumnos que podemos identificar con las tres etapas de resolución de un problema. Independientemente de si las imágenes utilizadas son las proporcionadas por el enunciado o bien las propias de los alumnos, las evidencias enseñan que los alumnos pueden utilizar las imágenes para situar y comprender el problema, como herramienta heurística, o para reafirmar los hallazgos y dar una respuesta.

Al fijarnos en las funcionalidades dadas, en particular, a las imágenes proporcionadas, observamos como la finalidad principal y destacada en los tres tipos de imágenes recae en comprender la situación del problema. Si bien observamos también su funcionalidad como herramienta heurística en los dos primeros tipos de imágenes, su uso para ratificar hallazgos o dar respuesta sólo lo hemos encontrado en el caso de considerar una imagen representativa.

Inclusión de ejemplos en los enunciados formulados por escrito

Del análisis realizado del problema Pb1.1 constatamos como el hecho de introducir un ejemplo concreto de los datos que describe el enunciado no es garantía de que todos los alumnos lo entiendan sin dificultades. El análisis realizado sobre las evidencias escritas por los alumnos, nos informa que al menos una quinta parte de los alumnos avanzó en la resolución del problema sin previamente entender correctamente las condiciones presentadas en el enunciado y ejemplificadas en el ejemplo proporcionado. En este sentido, e independientemente de la percatación de la falta y su posterior o no rectificación, observamos cómo el hecho de avanzar en la resolución sin tener lo suficientemente claras las condiciones iniciales, tuvo más repercusión en los alumnos de Secundaria que en los de Primaria. En cuanto al tipo de falta, de las tres identificadas, observamos que no todas tuvieron la misma repercusión, habiendo una mucho más común (proporcionalmente, tres veces más) que las otras dos que aparecen pero en menor proporción. Aunque se hace complicado generalizar los tres tipos de falta, podríamos decir que la falta más generalizada recae en la condición inicial de los números, que a su vez, hace referencia a su magnitud o dimensión (un número de tres cifras, en el caso particular del Problema Pb1.1 analizado) y que en el problema, a parte del ejemplo, se expresa por escrito. Mientras que las otras dos propiedades, que podríamos relacionar con particularidades de los números ya formados y en cierta manera los vincula (las cifras concretas a utilizar y la no repetición entre las mismas) coincide con la distribución de las 6 cifras que se explicitan con su grafía numérica en el enunciado (al margen del ejemplo).

Así pues, las evidencias dan pie que el error más común coincide con el dato, aunque numérico, descrito en palabras mientras que las faltas realizadas en menor medida corresponden a la distribución de los datos explicitados a través de su grafía numérica.

Distinción entre las cuestiones de un problema formulado por escrito

Los problemas considerados en las distintas implementaciones presenten más de un apartado o cuestión a resolver. Constatamos que es importante considerar el modo en cómo se plasman estas cuestiones cuando el enunciado del problema se da a los alumnos por escrito. En este sentido el análisis de los problemas Pb2.a1 y Pb6.a1 enseña como los alumnos, tanto de Primaria como de Secundaria, tienden no solo a identificar con alguna marca claramente visual el trabajo relativo a cada uno de estos apartados o cuestiones, sino, a preferiblemente y de manera destacada, enumerarlos en la mayoría de casos con números (un pocos han utilizado letras), aunque el enunciado escrito no los identifique de este modo.

En la Tabla 3.9 se resumen los datos utilizados en los dos análisis a los que nos referimos. Para cada uno de los problemas analizados (Pb2.a1 y Pb6.a1) la columna #P se contabiliza el total de producciones analizadas de acuerdo a sus grupos de procedencia, la columna #S contiene el número de producciones en las que los alumnos han separado con alguna marca visual los distintos apartados a trabajar y en la columna #N las producciones en las que los apartados a trabajar están numerados. Además de lo comentado anteriormente, de la Tabla 3.9 se desprende como la enumeración de las cuestiones a trabajar aumentó considerablemente del problema Pb2.a1 (que todos los grupos trabajaron en primer lugar) al problema Pb5.a1 (que todos los grupos trabajaron en segundo lugar) en todos los grupos implicados, de manera destacada en Primaria. A ello cabe añadir que en el problema Pb2.a1 las cuestiones se presentan visualmente identificadas por un punto central ●, en el problema Pb6.a1 no están introducidas por ninguna marca visual.

Grupo	Pb2.a1			Pb6.a1		
	#P	#S	#N	#P	#S	#N
IT6A	24	2	10	23	2	14
IT6B	22	1	11	22	0	21
AL1C	20	7	9	22	1	12
AL1D	23	3	12	20	0	13
	89	13	42	87	3	60

Tabla 3.9. Relación de las resoluciones a los problemas Pb2.a1 y Pb6.a1 atendiendo si las preguntas fueron numeradas para responderse

Atendiendo este hecho, observamos la preferencia de los alumnos en enumerar sus las partes de sus producciones. Ello nos llevar a pensar que enumerar las cuestiones a desarrollar por los alumnos, puede ser una buena práctica para que los alumnos puedan atacar de manera consciente los distintos aspectos del problema así como ayudarles a organizarse en ello.

Modos de cuestionar y solicitar una respuesta

En el Marco Teórico (capítulo 1) ya hemos expuesto la doble finalidad que, como tarea de aprendizaje, la resolución de problemas matemáticos puede promover. Por un lado, propiciar la conexión y descubrimiento de conocimientos y heurísticas matemáticas y, por otro, aprender a pensar matemáticamente y actuar de manera consecuente. De los análisis de las producciones relativas a los Pba1.a1 y Pb1.2.a1, y Pb5.a1 damos cuenta del papel que puede tomar el modo en qué se formulan las cuestiones que se espera que los alumnos contesten. Así, atendiendo que las prácticas influyen en las creencias y afecto de los alumnos (Schoenfeld, 1992; Vila y Callejo, 2004b) Pensamos que es importante adecuar cómo se cuestiona a los alumnos y se pide por argumentaciones sobre lo que desarrollan, especialmente cuando con la resolución de problemas se pretende promover el aprendizaje de pensar matemáticamente y actuar de manera consecuente.

De acuerdo con el análisis realizado con los problemas Pb1.a1 y Pb1.a2 respectivo, observamos que los alumnos se rigen por el orden en que se presentan las cuestiones y tienden a contestarlas de acuerdo a ello, independiente de la naturaleza de las preguntas y aunque estas cuestiones se referían a la explicación de resultados obtenidos anteriormente. Así mismo, notamos una ligera tendencia a presentar las argumentaciones de manera conjunta a la obtención de resultados. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la distinción entre el proceso

y la respuesta a menudo es poco claro y difuso, no solo en cuanto a la proporción de las argumentaciones, sino también a explicitar respuestas precisa adecuadas a las preguntas concretas formuladas.

Del análisis al problema Pb5.a1, en el que en ninguna de las dos cuestiones se pide por ningún resultado concreto y exacto, observamos una tendencia generalizada en proporcionar al menos un resultado preciso y concreto, al margen de si proporcionan también las argumentaciones y explicaciones por las que más bien se pedían. En cuanto a estar argumentaciones, las evidencias muestran que en general son o muy concretas, de manera que no acaban contestando como se pretende, o demasiado abiertas que tampoco permiten ver la adquisición del conocimiento matemático que se pretendía.

Al hablar de argumentaciones, nos surge una cuestión vinculada al hecho de hablar de argumentaciones y justificaciones. En este sentido, pensamos que puede ser de ayuda hacer una distinción entre argumentación y justificación. Por argumentación nos referiremos a la cadena o conjunto de explicaciones que da sentido y acompaña una construcción matemática proporcionando mientras que por justificación, entendemos como la selección y adecuación de aquellas argumentaciones que, retrocediendo en lo realizado, permiten concretar lo que se ha llevado a cabo. En este sentido, observamos como los alumnos, aunque en distintos grados, son conscientes y son capaces de dar argumentaciones, no presentan indicios de saber justificar. Pensamos que ello es importante a la hora de trabajar los problemas con la intención que promueven el pensamiento matemático.

Finalmente, y de acuerdo con los distintos enunciados trabajados a lo largo de las implementaciones y las reflexiones de esta última parte de este apartado, elaboramos el marco que presenta la Tabla 3.10.

		Objeto de la petición				Modo de obtener soluciones
		Solución(es) precisa y concreta				
		Sin solicitar explicación	Solicitar explicaciones			
			Tipología		Situación	
			Argumentar	Justificar	Parte de la misma	Como otra petición
Modo de la petición	Como tarea (modo imperativo)					
	Como pregunta (modo interrogativo)					
Vínculo con la petición	Personal					
	Impersonal					

Tabla 3.10. Modos de cuestionar y solicitar una respuesta de un enunciado

Con este marco (ver Tabla 3.10) pretendemos ilustrar las distintas maneras que hemos observado que, de manera escrita, podemos presentar las cuestiones a los problemas y pensamos puede ayudar a la hora de formular los problemas por escrito con el objetivo que promuevan el pensamiento matemático. En este sentido, nos parece entrever que los

problemas pueden pedir por algún resultado concreto o bien por los modos en qué se llegan a ello. A su vez, podemos distinguir por el tipo de explicación que se pide (aquí distinguimos entre argumentación, cuando se trata que expliquen cómo han llegado a una conclusión, y justificación, entendido más bien como la síntesis de lo trabajado en lo que se seleccionan las argumentaciones realmente convincentes que explican lo obtenido, y por tanto, más referido a una explicación retrospectiva del proceso desarrollado), el modo en qué se pide, la vinculación con el resolutor que se pretende promover así como la independencia, a la hora de presentar la petición de explicación, respecto de las cuestiones más concretas

3.2 Percepciones de los alumnos sobre los problemas propuestos

Del Análisis A1.1 se desprende una aceptación positiva de los problemas por parte de los docentes, al considerarlos como tareas ricas que permiten promover aprendizajes matemáticos significativos y de naturaleza distinta en los alumnos, así como aparentemente provocar cierta motivación en los alumnos hacia ellos. Revisamos aquí la opinión de los alumnos hacia los problemas trabajados, con la intención de completar la visión que éstos puedan merecer y si se pueden percibir como problemas matemáticos para los alumnos de las edades implicadas. Para ello, recurrimos a las opiniones que los alumnos compartieron al responder la cuestión 5 del cuestionario que, de manera informal, se les invitó a contestar al finalizar la Implementación Primera desarrollada a lo largo del Primer Trimestre del curso escolar 2014-2015 y en la que intervinieron los dos grupos de Educación Primaria IT6A y IT6B y los tres grupos de Educación Secundaria AL1C, AL1D y SC1A. La cuestión en particular a la que recurrimos, fue: C5. *¿Qué destacarías de estos problemas?*

Lo primero que nos llama la atención de las respuestas obtenidas, es que alumnos de los distintos grupos participantes destacan cierto atractivo de los problemas. Expresiones como “chulos”, “están bien pensados”, “te distraen un rato” e incluso “divertidos” que aparecen en algunas de sus respuestas son las que nos permiten entender que, en cierto modo, los problemas pudieron captar cierta atención de los alumnos provocándoles cierto grado de motivación en resolverlos:

- *Son chulos.* (C5_AL1C07)
- *A mí hacer problemas no me gusta, pero aquellos son chulos.* (C5_IT6A09)
- *Que las mates (general) no se me dan bien pero los problemas están bien pensados.* (C5_IT6B10)
- *Yo desatacaría que son un poco rebuscados pero son distraídos. [...] la manera cómo están hechos te distraen un rato...* (C5_IT6A23)
- *Eran muy difíciles pero el contenido era divertido 😊!* (C5_IT6A13)

Que les resultaran chulos, divertidos o distraídos, ha sido sinónimo de considerarlos como fáciles. En este sentido, de acuerdo con las diversas respuestas, notamos como los mismos alumnos aprecian que los problemas propuestos les implicó un proceso de reflexión más profundo, del que, según ellos, estaban habituados lo que, percibimos que les lleva a distinguir entre los problemas trabajados para el estudio y los problemas que de manera habitual trabajaban en clase a lo largo del curso, como si los que trabajaban habitualmente en clase les hicieran pensar de otro modo, o en menor grado. Afirmaciones como las que siguen a continuación dan cuenta de ello:

- *Eran un poco raros pero era divertido porque tenías que pensar mucho.* (C5_IT6A07)
- *Eran muy difíciles y muy raros.* (C5_AL1D10)
- *Que no son como los problemas del cole.* (C5_IT6A08)
- *Destacaría que son más complicados que los normales y que te hacen pensar más.* (C5_IT6A07)

A pesar de la dificultad de la que hablan, parece que ello no fue un impedimento para que pudieran salir adelante e incluso sentir que conseguían más de lo que pudieran haber esperado.

- *Que sea el primero que resuelva los problemas nunca ha sucedido pero me he enterado.* (C5_SC1A01)

La dificultad a la que estos alumnos se refieren, percibimos que no se asocia a algo malo, o a un obstáculo insuperable. Contrariamente, se refieren a esta dificultad o complicación como algo positivo que les conduce a pensar más detenidamente:

- *Para mí eran un poco difíciles pero esto me va bien porque así pienso.* (C5_IT6A11)
- *Para bueno, lo que más destaco es que te hacían pensar bastante y para lo malo, que algunos eran un poco difíciles y si te equivocabas en algo, te equivocabas en todo.* (C5_SC1A04)
- *Que los tenías que pensar mucho.* (C5_IT6B16)

De hecho, las reflexiones de algunos de ellos evidencian que si el esfuerzo se tomaba en entender la situación que describía el enunciado, no les resultaban tan complicados. De algún modo, se percataron que si comprendían la situación expuesta, disponían de recursos matemáticos para afrontar la situación expuesta:

- *Había algunos problemas que la primera vez que lo leías, el enunciado no se entendía del todo y (al menos yo) tuve que leerlo más de 3 veces.* (C5_SC1A28)
- *[...] parecen difíciles pero después son fáciles si los entiendes.* (C5_AL1C13 y C5_AL1C17)

Puede que, por ello, algunos los recuerden como problemas trampa:

- *Que eran problemas trampa.* (C5_AL1C09)

Observamos, además, como esta dificultad de la que hablan, es la que, en mayor parte, les hace acordarse de los problemas. Es decir, que se acuerdan de los problemas fundamentalmente por el esfuerzo que les pudo conllevar entenderlos y resolverlos, siendo justamente la esencia del verdadero problema:

- *Los problemas en si costaban bastante. Recuerdo el de la manta porque era difícil.* (C5_IT6A20)

Pues, aunque encontramos referencias a acordarse de problemas en concreto por ser los últimos trabajados

- *Porque eran los últimos (Pb5.a1, Pb6.a1).* (AL1D04 y AL1D15)

o por las imágenes que presentan

- *Me acuerdo porque eran muy difíciles y por las imágenes que había.* (AL1D07)

Las referencias más compartidas a acordarse de un problema son debido a la “dificultad” que recuerdan de resolverlo:

- *Porque era el más difícil (Pb5.a1).* (AL1D06 y AL1D12)
- *El primero que hicimos me llamó la atención porque me resultó difícil.* (SC1A08)

Volviendo a las “rarezas” a las que los alumnos se refieren y que identifican de los problemas propuestos en relación a los que parece que estaban más habituados a trabajar, destacan que no sólo hacían pensar más sino que debían de explicitar sus razonamientos:

- *Destacaría la pregunta que se hace en todos los problemas al final: “Cómo lo has hecho para saber qué te pide en cada caso?”.* (C5_SC1A19)
- *Que nos hacía razonar mucho.* (C5_AL1D16)

Otro de los aspectos que parece les sorprendió, y de manera positiva, es que los problemas pudieran tener más de una solución, lo que parece perciben de muy buen grado en tanto que les permite ir más allá de sus propios resultados y respuestas, al tanto que motivarles a conocer las respuestas y soluciones de sus compañeros:

- *Que a veces hay más soluciones que alguien no ha sabido encontrar y puede ser muy fácil.* (C5_AL1D20)
- *De los problemas me gustó que algunos de ellos no tenían sola un resultado sino más de uno y así no todos los compañeros les salía los mismo y se podía debatir.* (C5_SC1A13)
- *Me gustaba la manera cómo se explicaban porque eran bien explicados y también porque tenían más de un resultado y así podía ver otras maneras de hacerlos.* (C5_SC1A22)

Finalmente, destacan como el hecho de representar la situación, puede ser clave para encontrar el camino a la resolución de problema y que, a pesar que puedan sentir que es un tiempo mal invertido, perciban y acepten que es eficiente.

- *Yo destacaría que siempre hacíamos croquis y va bien, pero pierdes tiempo.* (C5_IT6A0)
- *Me llamó la atención que muchos de los problemas no hacía falta resolverlos haciendo operaciones, quiero decir, que sólo haciendo un dibujo y entendiéndolos ya lo resolvías.* (C5_SC1A06)

3.2.1 Discusión y Síntesis

Hemos aquí analizado las percepciones de los alumnos participantes en la Implementación Primera en cuanto a los problemas propuestos. Recordar que hablamos aquí de percepciones en tanto que nos referimos a las impresiones que los problemas propuestos transmitieron a los alumnos.

De manera general, los alumnos implicados destacan cierto grado de dificultad de los problemas trabajados en tanto que les llevaron a reflexionar más profundamente de lo que, según ellos, estaban acostumbrados a hacer al resolver los problemas que sus docentes les proponen. Trabajar estos problemas les ha conllevado a afirmar que les ha sido necesario

entender lo que ocurre en la situación descrita poder solucionarlo pero que, si son capaces a entender lo que sucede, han dispuesto de recursos matemáticos para intentar resolverlos. En este sentido, podemos afirmar que los problemas propuestos no han resultado tareas rutinarias para los alumnos, en tanto que ha promovido el desarrollo de razonamientos matemáticos en los alumnos fomentando la comprensión y mostrando que, con los recursos de que disponen y su creatividad han podido resolverlos. En este sentido, comprobamos que los alumnos se implicaron con todos ellos, en tanto que las producciones “en blanco” recibidas entre todos los grupos de todos los problemas propuestos son muy escasas. Son muy pocos los casos en que se ha encontrado una hoja de resolución sin ningún intento de trabajar el problema en cuestión.

Este grado de complejidad, o de dificultad a la que se refieren, no la perciben como algo negativo, sino como, como ellos mismos comentan, una manera de potenciar y entrenar su manera de pensar. De acuerdo con que un problema se convierte en un problema cuando la esencia del problema ocupa la mente del resolutor (Mason et al, 1982) notamos como, de manera generalizada, la complicación a la que se ven expuestos los alumnos a un problema es lo que generalmente hace que se acuerden de él.

De acuerdo con que para ellos estos problemas son diferentes a los que están “acostumbrados” a resolver, y que les ha supuesto un esfuerzo trabajarlos podemos afirmar que se tratan de tareas no familiares para los alumnos implicados.

Entre las “rarezas” que observan de los problemas propuestos es que puedan presentar más de una solución o que hay más de una manera de resolverlo, que deban además de pensar más profundamente, exponer detalladamente sus razones o justificaciones, y que el hecho de representar el problema, aunque lleve su tiempo, puede ser una buena manera para entrever cómo resolver al problema. El hecho que hablen de “rarezas” nos hace pensar que los alumnos tienen creencias, en el sentido de Vila y Callejo (2004a y 2004b), sobre la resolución de problemas.

3.3 Aportaciones de los docentes a la práctica desarrollada

Como se menciona en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), a lo largo de las implementaciones los docentes implicados fueron aportando, cada uno en la medida que sentía y podía, sus observaciones en relación a los instrumentos para la resolución de problemas (IRP) generados y utilizados a lo largo de las sesiones correspondientes a las implementaciones en las que estuvieron implicados. En este sentido, recibimos observaciones directas, aunque en distintos grados, de los docentes IT6, AL1, SC1, participantes en la Prueba Piloto, la Implementación Primera y la Implementación Segunda, y del docente EP6, que participó en la Implementación Tercera. A continuación exponemos y analizamos las líneas principales de las aportaciones recibidas por parte de dichos docentes.

Cabe recordar que en la Implementación Primera se hablaba de rúbrica para el alumno y rúbrica para el docente, en lugar de base de orientación y rúbrica, respectivamente. Para evitar dificultades de comprensión, y de acuerdo a como nos hemos referido en el Marco Teórico (capítulo 1), aquí nos referiremos a ellas por base de orientación y rúbrica de desempeño, respectivamente.

3.3.1 Aportaciones del docente IT6

El docente IT6, participó con dos grupos de 6º de Primaria en la Prueba Piloto y con dos grupos de 6º de Primaria en las Implementaciones Primera y Segunda.

De la Prueba Piloto destacó que el problema sugerido (Pb0.a0) supuso algo novedoso para los alumnos, en el sentido que se trataba de un problema diferente a los habitualmente trabajados en clase. A lo largo de la sesión en la que los alumnos tenían que resolverlo de manera individual, observó que los alumnos mostraron interés y se encontraban pensativos inicialmente, pero que se fueron distraendo a lo largo del desarrollo.

Tomó algunas notas relativas a cada una de las sesiones realizadas a lo largo de la Implementación Primera, en la que se utilizó la Base de Orientación BO1 y se proponía aplicar la Rúbrica Rb1 e hizo una pequeña valoración al finalizar la Implementación Segunda, en la que se utilizó la Base de Orientación BO2 y se proponía aplicar la Rúbrica Rb2. La Tabla 3.11 recopila las anotaciones del docente relativas a las sesiones en qué se trabajó cada uno de los problemas a lo largo de la Implementación Primera. Como se ve, sus anotaciones se refieren, básicamente, al comportamiento o actitud de los alumnos observada a lo largo de la sesión:

Sesión	Problema trabajado	Anotaciones tomadas del trabajo de los alumnos
1ª sesión	Pb1.1.a1	<ul style="list-style-type: none"> - Muchas dudas. - No siguen la base de orientación. La hemos leído al inicio.
2ª sesión	Pb1.2.a1	<ul style="list-style-type: none"> - Dificultades en comprender los enunciados!!! - No es grupo clase (24 alumnos). Aprovechamos los turnos de grupos flexibles y así trabajamos con 3 subagrupamientos de 16 alumnos. - Ha funcionado mejor. - Hemos mirado la base de orientación y el problema. - Se veían familiarizados con los documentos. - Hoy tienen un poco más de consideración con la base de orientación, pero están muy pendientes de los resultados. - Corrección: explicamos el procedimiento.
3ª sesión	Pb2.a1	<ul style="list-style-type: none"> - Un alumno ha escrito los pasos a seguir. - Hemos comentado que lo más importante es seguir la base de orientación, que no se preocupen con los resultados. - Utilizan más la base de orientación. - Hay alumnos que no entienden el problema y no salen adelante. - Comento que establezcan pasos.
4ª sesión	Pb3.a1	<ul style="list-style-type: none"> - Hemos leído la base de orientación en voz alta. - Se nota que están familiarizados con la base de orientación. - Les cuesta resolver el problema. Dicen que no tiene solución. - Cuando un alumno ha dado una posible solución, ha dado ideas. - Corregimos en verde. - Apuntamos las ideas. - Comentamos que no se miran suficientemente la base de orientación. - A lo largo de la resolución de los problemas les voy recordando la necesidad de mirar la base de orientación y de seguir los pasos.
5ª sesión	Pb4.a1	<ul style="list-style-type: none"> - Están concentrados. - Mientras trabajan con el problema, no miran la base de orientación.

	- No da tiempo a corregirlo.
6ª sesión Pb5.a1	<ul style="list-style-type: none"> - La doctoranda asiste a la sesión. Las anotaciones son recogidas conjuntamente con el docente. - Se reflexiona sobre la base de orientación. - Los alumnos se sorprenden cuando se habla de la resolución de problemas como un acto de búsqueda y descubrimiento. - Al intentar resolver el problema lo primero que desean es encontrar “la operación”. Les sorprende que “dibujando” puedan hallar resultados. - Los alumnos acaban finalmente realizando los bocetos de las posibles mantas. - De entrada, no entienden el enunciado. Tienen algunas dudas/dificultades para entenderlo y levantan la mano. - Destaca el trabajo del tercer subgrupo de trabajo, en el que han estado más por la labor y han encontrado todas las posibles respuestas. - Los alumnos no se quedan con la copia de la base de orientación. Se les da una copia en cada sesión de resolución y la devuelven al finalizar, junto con el enunciado y resolución del problema.

Tabla 3.11. Anotaciones del docente IT6 sobre sesiones que realizó vinculadas a la Implementación I1

Al finalizar la Implementación Segunda, que tuvo lugar a lo largo del 3r Trimestre del curso 2014-2015, el docente comparte algunas observaciones. Comenta que se trata de un trimestre complicado para los alumnos y que, debido a las tareas extras que surgen, el tiempo de que disponen es escaso y los alumnos se muestran cansados. Desde la Implementación Primera, desarrollada en el 1r Trimestre, los alumnos no habían vuelto a utilizar ni ver ninguna base de orientación. El docente comenta que los alumnos se mostraron motivados para trabajar los problemas no habituales de clase. Han recordado que resolver un problema es un proceso de búsqueda y de descubrimiento. Añade que los alumnos identificaron los problemas actualizados ya trabajados en la Implementación Primera, y que el hecho de reconocerlos menguó su interés en resolverlos. En cuanto al uso de la base de orientación, los alumnos no habían vuelto a utilizar ninguna desde la Implementación Primera. El maestro vuelve a destacar cierta falta de familiarización con ella. Su uso, de nuevo, se restringió, básicamente al inicio y final de las resoluciones, pues a lo largo de la resolución, los alumnos la consultaban poco. Comenta que no surgieron dudas en cuanto al contenido o estructura de la base de orientación y que los alumnos coincidieron que la nueva base de orientación utilizada en esta Segunda Implementación, la BO2, era mejor que la utilizada anteriormente en la Implementación Primera (la BO1). El docente añade que se debería introducir el uso de la base de orientación desde el Ciclo Inicial de Educación Primaria.

La docente se excusa por su parte, por no haber aplicado ninguna de las rúbricas de desempeño sugeridas en cada una de las implementaciones por falta de tiempo

Discusión

De las anotaciones de la docente IT6 confirmamos que en ambas implementaciones los alumnos disponían de una copia de la base de orientación únicamente cuando se encontraban en las sesiones de resolución de los problemas propuestos en el proyecto. Por las anotaciones del docente, la consulta y reflexión sobre la base de orientación se restringía, en mayor parte, a los momentos previos y posteriores a los de resolución de problemas. De manera general, los

alumnos prestaban atención a la base de orientación antes de iniciar el proceso de resolución, y durante la puesta en común posterior, pero, de acuerdo con las observaciones del docente, les costaba consultarla a lo largo del proceso de resolución, a pesar de sus recordatorios. En este sentido, se desprende la constancia del docente en incidir en el uso de la base de orientación. Así mismo, de las anotaciones de la Implementación Primera, se percibe que si bien al principio, el conjunto problema y base de orientación desorientó un poco los alumnos, poco a poco surgía cierta familiarización con ello. En este sentido, el docente destaca el hecho de observar un alumno en particular que se apuntaba los pasos concretos de la base de orientación para seguirlos. Sin embargo, de acuerdo con las anotaciones de la Implementación Segunda, después de un trimestre sin utilizarla, en las sesiones de la Implementación Segunda, el docente tuvo que volver a incidir en el hábito de su uso. En este sentido, el docente insinúa que la base de orientación debería introducirse en los primeros cursos de Educación Primaria. Como se desprende de los comentarios de la docente, los problemas propuestos estimularon los alumnos. De la misma manera se constata que los alumnos se desanimaron al trabajar problemas que identificaron como trabajados con anterioridad. Paralelamente a ello, las anotaciones del docente desvelan como para los alumnos la resolución de problemas se resume en dar con un resultado y su preocupación única por conocer la operación

3.3.2 Aportaciones del docente AL1

El docente AL1 participó en la Prueba Piloto con dos grupos de 1º de la ESO y en las implementaciones Primera y Segunda con otros dos grupos de 1º de la ESO.

De la Prueba Piloto, calificó el problema Pb0 como muy interesante.

Al finalizar cada una de las implementaciones Primera (en la que se utilizó la base de orientación BO1 y se facilitó la rúbrica de desempeño Rb1) y Segunda (en la que se utilizó la base de orientación BO2 y se facilitó la rúbrica de desempeño Rb2) compartió sus observaciones al respecto. En la Tabla 3.12 resumimos sus aportaciones en relación a cada una de las implementaciones que, como se puede observar, recaen en mayor parte, en la reflexión sobre la práctica docente, a nivel particular y también general, y el efecto que ésta puede tener en el proceso de resolver un problema por parte de los alumnos.

Implementación Reflexiones realizadas de la dinámica percibida

– Al finalizar la I1 –

Diciembre 2014 - He intentado aplicar la rúbrica al primer problema y me encuentro que la cosa, al menos a mí, no me funciona. Termino por responder de manera mecánica, no suficientemente cualitativa. Y eso me parece que va en contra del espíritu de la investigación.
De entrada, creo que la cantidad de trabajo es desproporcionada por un profesor de aula si miramos el beneficio que obtendrá. Seguro que desde el punto de vista de una investigación este grado de detalle en el análisis es muy interesante pero no creo que lo sea, ni que sea necesario, en una evaluación diaria en el aula.
La concreción de cada apartado de la rúbrica supera los datos que pretendo analizar. Es decir, los alumnos no han escrito lo suficiente como para entrar en tanto detalle. Quizá tiene que ver con mi estilo de profesor en clase y otro hubiera sido capaz de extraer más provecho. Tengo la sensación de que otro corrector discreparía fácilmente de mis

	<p>valoraciones.</p> <p>Por otra parte, creo que algunos apartados dificultan la valoración. Por ejemplo (D7, 1): "Tiene problemas para detectar si alguna estrategia o algoritmo no funciona, especialmente para los que no es consciente de por qué no funciona. En caso de que sea consciente de que no funciona, no sabe replantearlas. "¿En qué me centro, en sí no es consciente o en la parte de que sí lo es?"</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los chicos y las chicas lo han pasado bien haciendo los problemas, hemos encontrado las soluciones y hemos aprendido cosas. Para mí ya es suficiente.
Enero 2015	<ul style="list-style-type: none"> - No dispongo de suficiente información en la resolución de los problemas de los alumnos para poder aplicar bien la rúbrica del docente. Me pregunto cómo conseguir que los alumnos escriban lo suficiente para poder extraer datos para valorar. - He intentado aplicar la rúbrica del docente pero me ha resultado muy complicado. Me he visto con dicotomías. Noto que debería ser más concreta y afinar más en "si se hace" o "no se hace", pero no dejar margen a duda. - A pesar que durante las sesiones he ido recordando que deben seguir los pasos de la base de orientación, muchos no lo han acabado haciendo. - Noto que el estilo del profesor puede influir. La actitud del docente o la cultura del centro influye en lo que los alumnos hacen. - Todo lo que sea corregir sin el alumno presente sirve de poco. Se debe hablar en la clase. - Se ha insistido que no borren, pero los alumnos tienen una idea interiorizada de "quedar bien". - Sólo una alumna piensa por si misma antes de hacer.
Marzo 2015	<ul style="list-style-type: none"> - Les di la base de orientación impresa y la tenían guardada. La comentamos a fondo el primer día, y el resto de días, les recordé que la tenían y la debían de seguir. Algunos la sacaban pero hay que decir que eran muy pocos.
– Al finalizar la I2–	
Julio 2015	<p>Constato que los alumnos traen consigo tendencias que son difíciles de cambiar. Observo que en lo que hacen los alumnos influye:</p> <ul style="list-style-type: none"> - La tendencia que traen del colegio: si los alumnos no están acostumbrados a desarrollar ideas, al menos con un solo curso, y sólo en determinadas clases, no son capaces o no quieren o están dispuestos a cambiar este hábito. Les cuesta mucho escribir y no quieren escribir a la hora de mates. - La dinámica de centro. El hecho de sólo tener una hora seguida y no poder continuarla en terminar dicha hora si se ve necesario, y el no seguir la misma dinámica con el resto de profesionales del departamento no ayuda. La colaboración o no, igual tendencia o manera de trabajar con todos los docentes influyen en lo que hacen los alumnos. - El dinamismo y la manera de hacer del docente dentro del aula: "No soy capaz a hacer que escriban". - Hemos recordado el problema de la manta de la abuela en distintas ocasiones a lo largo del curso.

Tabla 3.12. Reflexiones del docente AL1 vinculadas a las Implementaciones I1 y I2

Discusión

El docente AL1 muestra su satisfacción por la riqueza matemática que los problemas planteados han permitido desarrollar entre sus alumnos. En especial, destaca la repercusión de los problemas Pb0.a0 y Pb5.a1. Sin embargo, se lamenta por no haber podido aplicar las rúbricas de desempeño. Al finalizar la Implementación Primera, destaca la dificultad con que se encuentra para discernir entre un nivel u otro de desempeño y, por tanto, la necesidad de que estos límites sean más definidos y claros. Siente que el esfuerzo que supone al docente hacerse con la rúbrica es demasiado por el beneficio que cree que podrá sacar de ello. Sin embargo, observa que las resoluciones de sus alumnos son, en general, pobres y que no ofrecen mucha información. Destaca la tendencia que tienen en borrar “para quedar bien” y reconoce que sus alumnos no quieren escribir y que no sabe cómo hacer que lo hagan. Todo ello puede explicar por qué, cómo comenta, las producciones de los alumnos no ofrecen suficiente información para poder aplicar la rúbrica de desempeño. Por otro lado, enfatiza que los alumnos generalmente sólo prestan atención a las correcciones que se realizan con ellos presentes.

En cuanto al uso de la base de orientación, explicita que el primer día de la Implementación se repartió una copia impresa de la base de orientación a utilizar y que ellos la debían guardar para las sesiones sucesivas. Concreta que sólo el primer día del conjunto de sesiones la comentaron. En el resto de sesiones en las que se pretendía trabajar los problemas sugeridos, y sólo en ellas, recordaba a los alumnos que debían sacar la hoja donde tenían impresa la base de orientación y tenerla al lado durante la resolución del problema a trabajar, pero la mayoría de los alumnos no la sacaban de sus carpetas. A pesar que recordara a los alumnos que la utilizaran, muchos de negaban a considerarla.

Al finalizar la Implementación Segunda, comparte una reflexión general sobre la práctica que ha conllevado la implementación de los IRP. Observa que los alumnos presentan tendencias muy arraigadas y que su comportamiento caracterizado por una reticencia a las prácticas que se pretenden introducir con el uso de la base de orientación (como considerar la base de orientación en algún momento de la resolución, escribir sus desarrollos o no borrar sus ideas o procesos intermedios) es debido a las tendencias que traen del colegio antes de empezar la ESO, de las dinámicas generales del centro, la gestión de otros docentes, como la que él habitualmente transmite a sus alumnos. Comenta que, con sólo un curso, los alumnos no cambian sus hábitos.

3.3.3 Aportaciones del docente SC1

El docente SC1, participó en la prueba piloto con un grupo de 1º de la ESO y en la Implementación Primera y la Implementación Segunda con otro grupo de 1º de la ESO. Coincidió con el docente AL1 que el problema piloto Pb0.a0 era muy rico y permitía desarrollar distintos aspectos matemáticos en los alumnos.

Su participación fue muy activa a lo largo de la Implementación Primera y compartió sus impresiones en cuanto al uso de la rúbrica de desempeño (Rb1) como de la base de orientación (BO1). Recogemos en la Tabla 3.13 sus impresiones a lo largo de ésta primera implementación.

Aspecto	Aportaciones realizadas
---------	-------------------------

Al iniciar la Implementación (Octubre 2014)	<ul style="list-style-type: none"> - Ayer inicié el proyecto. Empecé por el primero de la lista (Pb1.a1), pero antes dediqué bastante tiempo a explicar qué era una base de orientación y como la tenían que utilizar. Insistí mucho en qué debían escribir todas las ideas que tenían y las estrategias que probaban. - Puede ser me pasé porque no tuvieron tiempo de terminar el problema del todo. ¡Para mí también es nuevo todo esto! Hasta el próximo martes no puedo continuar, porque lo hago a la hora que tenemos de cálculo mental.
A mediados de la Implementación (Noviembre 14)	<ul style="list-style-type: none"> - En clase han hecho y corregido entre ellos los problemas Pb1.1.a1 y pb1.2.a1. Creo que ha funcionado bien. Mañana harán y corregirán el Pb2.a1. - El problema lo tengo yo. Me cuesta mucho corregir los problemas [con la rúbrica] y valorarlos para cada dimensión. No estoy nada acostumbrado a hacerlo y me paso mucho tiempo y no avanzo mucho. ¡La verdad es que no sé cómo hacerlo! ¿Se podría simplificar de alguna manera?
Hacia el final de la Implementación (Diciembre 2014)	<ul style="list-style-type: none"> - Cuando corregimos los problemas en clase, cada corrector debe poner si se cumple o no la dimensión correspondiente. Es decir, ponen, por ejemplo, D3 SI o D3 NO o en blanco. Todo esto es muy nuevo para mí ... - Sobre el redactado de cada dimensión que tienen los alumnos sí que ya me he formado una opinión para analizarlo mejor.

Tabla 3.13. Aportaciones del docente SC1 vinculadas a la Implementación I1

Sus aportaciones al final de la Implementación Primera tuvieron un papel decisivo en la generación de la segunda base de orientación (BO2). En la Tabla 3.14 que sigue a continuación se resumen sus aportaciones más relevantes en cuanto a las base de orientación (BO1) y rúbrica (Rb1) utilizadas en la Implementación Primera.

Aspecto	Conclusiones generales
La rúbrica para el docente	<ul style="list-style-type: none"> - Para evaluar con la rúbrica he seleccionado 10 alumnos. Aunque muchas veces han coincidido, no siempre han sido los mismos. - No estoy acostumbrado a utilizar rúbricas para evaluar. - Me cuesta aplicar la rúbrica, especialmente en determinar de manera precisa el nivel alcanzado para cada alumno. - El lenguaje de la rúbrica resulta un poco farragoso.
La base de orientación	<ul style="list-style-type: none"> - Valoro muy positivamente que los alumnos puedan disponer de una Base de Orientación. - Las dimensiones de cada dominio, son muy finas. He tenido que ayudar a los alumnos entender cada desglose. - Los alumnos han mostrado dificultades para diferenciar las dimensiones D1 y D2. - Las dimensiones D4 y D5 podrían ir en un solo punto. - Sería bueno que la base de orientación para los alumnos fuera reducida. - Se podría proporcionar una rúbrica general a partir de la cual desglosar las partes más necesarias. - A lo mejor, para claridad a la hora de evaluar con la rúbrica, podría haber una pauta para poder unir o no dimensiones. O bien una clasificación previa de tipos de problemas y con ellos distintas rúbricas. - No sé si la idea general del 2º dominio es suficientemente claro, para los alumnos. Creo que sería más claro “Tengo un plan de acción”.
Gestión de las sesiones y opinión sobre	<ul style="list-style-type: none"> - Noto que me faltó organización en cuanto a la planificación de las sesiones, especialmente las primeras, en las que no tuvimos tiempo suficiente para trabajar como se requería. Así, por ejemplo, la corrección conjunta la

los problemas	tuvimos que posponer a otra sesión. - El problema de la manta de la abuela (Pb5.a1) es el que más ha gustado. - El problema de la Hydra (Pb6.a1) resultó menos complicado de resolver para los alumnos.
---------------	---

Tabla 3.14. Conclusiones del docente SC1 sobre la Implementación I1

Hay que destacar que el docente SC1 fue el único que aplicó las rúbricas de desempeño en cada una de las Implementaciones. En cada uno de los casos, lo hizo con diez de sus alumnos y con ella pudo establecer una asignación entre perfil de resolutor bajo, medio y alto. Un ejemplo de ello se puede observar con el registro que se recoge con la Figura A1 del Anexo 4.

Finalmente, en la Tabla 3.15, destacamos algunas de sus observaciones que confirman como sus alumnos trabajaron la con la base de orientación en las sesiones dedicadas a la resolución de los distintos problemas.

Implementación Primera (Marzo 2015)	- La verdad es que he hecho lo que he podido, teniendo en cuenta que no estoy acostumbrado a trabajar con una rúbrica. - Al principio de los problemas yo los pasé una fotocopia de la base de orientación y la comentamos el primer día. A medida que iban resolviendo problemas las diferentes jornadas, tenían que sacar la rúbrica y tenerla a la vista y presente. - A la hora de corregir, los correctores también la tenían presente y aquí yo tenía que insistir en que la tuvieran en cuenta. Esto no siempre lo conseguí.
Implementación Segunda (Junio 2015)	Pasé los problemas la semana pasada. Ellos tuvieron la base de orientación fotocopiada a la hora de la resolución. Tengo el primer ejercicio corregido por los chicos con los criterios expuestos en la base de orientación y el segundo hecho pero falta ser corregido, de acuerdo con la base de orientación.

Tabla 3.15. Aportaciones del docente SC1 sobre el uso de la base de orientación

Discusión

El docente SC1 hace una reflexión profunda sobre de la base de orientación (BO1) y la rúbrica (Rb1) aplicadas en la Implementación Primera, lo que fue de vital importancia para el refinamiento de la misma. De sus observaciones se extrae que es necesaria cierta organización en la gestión de los instrumentos generados para la resolución de problemas por parte de los docentes. Especialmente, en la distribución del tiempo para trabajar los problemas. De los siete problemas trabajados en la Implementación Primera, destaca que el Pb05.a1 es el que más ha gustado y que el Pb6.a1 ha sido el que ha conllevado menos dificultades a los alumnos. Valora positivamente la introducción del uso de una base de orientación y la rúbrica y realiza aportaciones significativas para una mejor implementación y uso de las mismas.

En este caso, el docente remarca el hecho que, durante la puesta en común y corrección conjunta final, se aseguraba que los alumnos también debían de considerar la base de orientación utilizada durante la resolución. En este caso, no comenta que tuviera tantos problemas que los alumnos utilizaran la base de orientación durante la resolución de los problemas, sino que la tuvieran presente para la puesta en común y corrección posterior. En este sentido, las producciones de los alumnos desvelan que los distintos alumnos, aunque en mayor o menor grado, lo siguieron. De hecho, las evidencias muestran un salto cualitativo en

cuanto a la interpretación de cada una de las acciones indicadas en la base de orientación y su identificación en la producción que debían corregir.

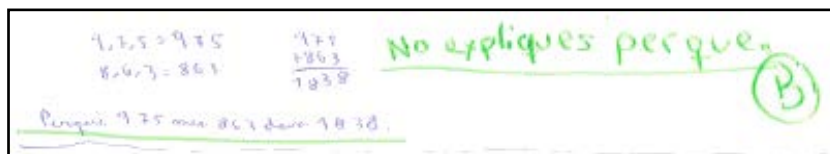


Figura 3.63. Fragmento de la producción SC1A14_Pb1.2.a1. Evidencia de corrección por un alumno de acuerdo con la BO2 [No explikas por qué.]

En este sentido, si bien en la mayoría de producciones realizadas a lo largo de la Implementación Primera, evidencian corrección por parte de los propios alumnos, como se ejemplifica con el fragmento de la Figura 3.63, las evidencias de corrección de las producciones realizadas en la Implementación Segunda explicitan como los alumnos fueron capaces de identificar las distintas acciones de la base de orientación utilizada (BO2) de acuerdo a las producciones de ellos mismos y valorarlas en el transcurso de la puesta en común. Así se puede observar en el fragmento que, a modo de ejemplo, se presenta con la Figura 3.64, en el cual además de marcar cada una de las acciones asociadas a las dimensiones las separa de acuerdo con las etapas.

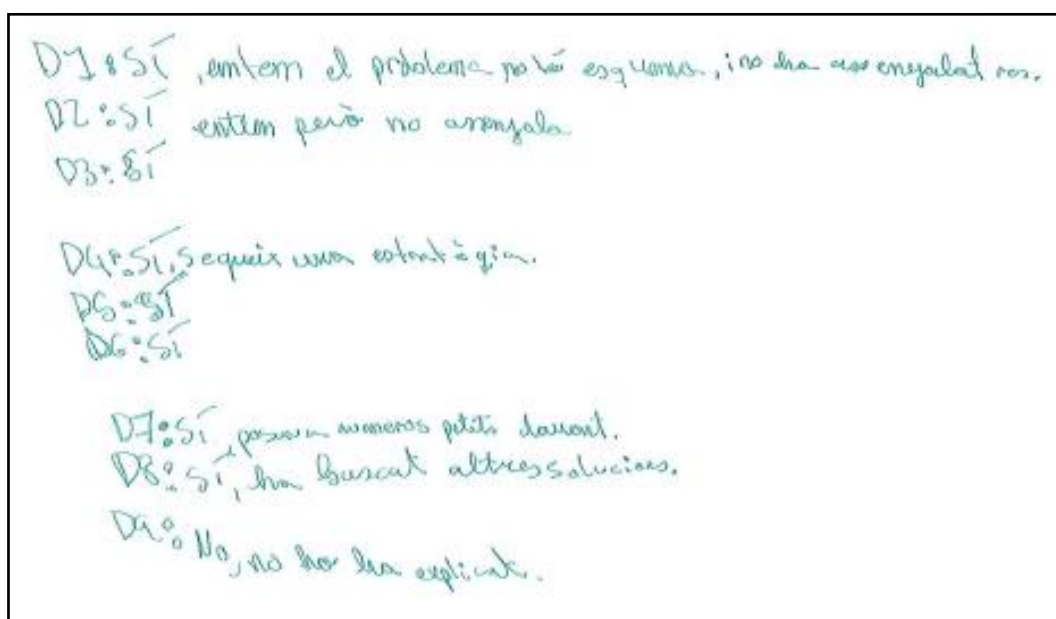


Figura 3.64. Fragmento de la producción SC1A14_Pb1.3.a1. Evidencia de corrección por un alumno [D1: Sí, entiendo el problema, no tiene esquema, y no ha marcado nada. D2: Sí, entiendo pero no señala. D3: Sí. D4: Sí, sigue una estrategia. D5: Sí. D6: Sí. D7: Sí, ponía números pequeños delante. D8: Sí, ha buscado otras soluciones. D9: No, no lo ha explicado]

3.3.4 Aportaciones del docente EP6

Finalmente, la Tabla 3.16 recoge las observaciones del docente EP6, en cuanto al comportamiento observado entre sus alumnos en las tres sesiones que desarrollaron a lo largo de la Implementación Tercera, en la que se utilizó la base de orientación BO3. En este caso se trata de un grupo de 6º de Primaria del cual, en los dos últimos problemas sólo participaron la mitad de los alumnos.

Sesión	Observaciones
1ª sesión: Pb5.a3	<ul style="list-style-type: none"> - Les ha costado de entender (a los alumnos) que “la estrategia de resolución” es lo mismo que ellos hacen en el apartado “resolución del problema” en las tablas que tienen. - A los alumnos les ha costado de entender el tipo de problema. Desde hace un tiempo estamos incorporando problemas donde los datos numéricos no son fácilmente identificables, y eso los descoloca. Por eso a muchos de ellos les ha costado identificar los 3 datos principales. Algunos se han bloqueado y no han avanzado. - Los alumnos tienen bastante incorporada la estructura de la base de orientación, ya que es como trabajamos habitualmente: <ol style="list-style-type: none"> 1. Lectura y explicación 2. Datos 3. Resolución 4. Respuesta - Pero les ha costado de entender que el proceso mental que hacen es el que está en la base de orientación. - El tiempo ha sido muy limitado y, por eso, no se ha podido hacer la corrección por parejas. Se ha hecho corrección general en la pizarra y se han dado cuenta que el problema era fácil. Las complicaciones que hemos comentado han sido: <ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocimiento de los datos 2. No volver a releer 3. No volver a replantear la estrategia 4. Dar por correctos datos que no están (como suponer la manta cuadrada)
2ª sesión: Pb7.a1	<ul style="list-style-type: none"> - He notado que han tenido más conciencia de la base de orientación, iban siguiendo los pasos y si no hacían un paso (ej. explorar + respuestas) incluso me lo decían.
3ª sesión: Pb1.4.a1	<ul style="list-style-type: none"> - En las dos primeras sesiones los alumnos rellenaron la base de orientación al final, una vez resuelto el problema. En esta tercera lo han hecho la mayoría, poco a poco. - Han sido más rápidos y más analíticos. - Se han situado de manera diferente ante el problema. - Han dedicado más tiempo a la primera fase (entenderlo).

Tabla 3.16. Observaciones del docente EP6A vinculadas a la Implementación I3

Discusión

Las observaciones del docente EP6 constatan que los alumnos implicados tenían una idea preconcebida sobre problema matemático, que hace que, ante la propuesta de problemas que presentan aspectos distintos a los esperados o que consideran como habituales, dificulta que se involucren con ellos, manifestando especialmente dificultades para entenderlos. Respecto al primer problema, por ejemplo, notó que los alumnos se inquietaban porque los datos numéricos necesarios, que en este caso aparecen sin números, no eran fácilmente reconocibles. Sin embargo, afirma que en la segunda sesión los alumnos enfocaron el problema de manera diferente. De hecho, después de la tercera sesión, observó que los alumnos habían pasado más tiempo trabajando en el primer dominio (entender el problema) de lo habitual. Del mismo modo, nota que al tiempo que los alumnos usaron la base de orientación (BO3, en este caso) para resolver los problemas, se iban familiarizando con ella y su uso. Después de la primera sesión, afirma que la estructura de la base de orientación no está tan lejos de la forma en que trata de mostrar a los alumnos cómo resolver un problema pero que, sin embargo, se da cuenta de que los alumnos tienen dificultades para entender que

el proceso mental que uno hace para resolver un problema es lo que se especifica en la base de orientación.

Después de la tercera sesión, notó que los alumnos se habían mostrado más seguros en el uso de la base de orientación. Además, agregó que a diferencia de los dos primeros problemas, en qué los alumnos básicamente llenaron el registro de la base de orientación al final del proceso, en la última sesión, la mayoría de ellos iban llenando el registro de la base de orientación a medida que avanzaban en la solución del problema.

Como alguno de los otros docentes, se lamenta por no poder ampliar el tiempo de las sesiones, de manera que no todos los alumnos pudieron trabajar o revisar los problemas en la medida en que lo requería. Sin embargo, dijo que antes de terminar las sesiones pudieron mínimamente reflexionar de manera conjunta sobre el problema y, en las dos primeras sesiones, también pudieron discutir sobre las acciones de la base de orientación, especialmente aquellas que aparentemente requerían más esfuerzo para los alumnos. Reflexionando sobre el primer problema, por ejemplo, destacó la importancia de detectar los datos adecuadamente y evitar condiciones inexistentes, pues la mayoría de los alumnos predeterminaron que la forma de la manta de la abuela era cuadrada.

3.3.5 Discusión y Síntesis

Recibimos observaciones de los tres docentes que estuvieron implicados tanto en la Prueba Piloto, Implementación Primera como en la Implementación Segunda (IT6, AL1 y SC1), y de uno de los docentes que participó en la Implementación Tercera (PI6). Sus observaciones son de distinta naturaleza e informan de distintos hechos, tanto de los instrumentos en sí mismos, como de lo que supuso su implementación.

En primer lugar, y a pesar de las costumbres sociomatemáticas particulares de cada una de las aulas implicadas, destaca la coincidencia en ciertos aspectos del comportamiento de sus alumnos. De acuerdo con sus observaciones, los alumnos mostraron actitudes y hábitos incorporados relacionados con la resolución de problemas reacios a cambiar. De acuerdo con el comentario del docente EP6 *Pero les ha costado de entender que el proceso mental que hacen es el que está en la base de orientación parece que podría estar relacionado con la identificación de sus procesos mentales, en el sentido de que hasta que no son conscientes de las acciones que llevan a cabo, no pueden analizarlas y menos cambiarlos.*

Por un lado, relacionado directamente con la actividad de resolver un problema, de manera general, destaca la preocupación fundamental de los alumnos de dar con un resultado al problema, sin tener en cuenta nada más; reducir sus anotaciones al mínimo; y perder la atención cuando algo, especialmente en las condiciones del problema, no encaja en sus expectativas.

De manera paralela, de manera general, voluntaria o involuntariamente, las observaciones de los docentes informan que los alumnos no se muestran inicialmente dispuestos a cambiar sus hábitos o costumbres, por mucho que se incida en un cambio de actitud. En este sentido, de las observaciones de los docentes, se desprende que para intentar cambiar estos hábitos, no es suficiente que los docentes exijan de manera constante a los alumnos un modo de proceder sino que requiere algo más. Parece necesario mostrarles el interés y utilidad de la sugerencia del cambio. En relación a ello, la experiencia desarrollada enseña que para que los alumnos

puedan concebir la base de orientación como algo útil a considerar, no es suficiente que los docentes recuerden simplemente a los alumnos que saquen la base de orientación de las carpetas, sino que el docente debe mostrar y demostrar que el interés en que la contemplen va más allá de que la saquen de sus carpetas o simplemente la pongan encima de la mesa pues sólo con ello, una mayoría no lo hará. En este sentido, de las observaciones de los docentes observamos como los grupos en qué el docente SC1 incidió en el uso de la base de orientación en la puesta en común y corrección conjunta o bien, el docente PI6 que recordaba que debían marcar las acciones de la base de orientación, por las evidencias en las producciones, en el primer caso, y por las observaciones de la propia docente, en el segundo caso, parece que los alumnos se familiarizaron y tuvieron más consideración de la base de orientación que los grupos. Por su parte el docente AL1 se lamentaba porque sus alumnos no sacaban la base de orientación de la carpeta, sin embargo apunta que no hablaba del uso de la base de orientación más que en el momento de iniciar la sesión, para comentarles que la sacaran de sus carpetas, en el que debían resolver los problemas. De la misma manera, relacionado directamente con el proceso de resolver un problema, parece necesario evidenciar la importancia de las acciones que pueda comprender la base de orientación como dejar por escrito todas las ideas, sean factibles o no. En este sentido, el docente que observó que no conseguía que sus alumnos desarrollaran más sus resoluciones, comenta que con que el hecho que los problemas conllevaron ideas matemáticas interesantes en el aula, sin ir más allá en el pensamiento, para él fue más que suficiente. Se trata de una situación que pensamos que ilustra lo que Vila y Callejo (2004a) recogen en su marco de trabajo sobre que las creencias del profesorado regulan sus decisiones y la planificación, desarrollo y evaluación de los procesos de enseñanza. Estos comportamientos recuerdan las conclusiones de Yackel y Cobb (1996) cuando dicen que el profesor desempeña un papel central en el establecimiento de costumbres para la actividad matemática de los alumnos, en la que destacan la importancia de las creencias y valores matemáticos del maestro y su propio conocimiento y comprensión matemática. Con ello, afirman que el docente juega un papel crítico en el establecimiento de la calidad matemática del entorno del aula (Yackel y Cobb, 1996).

En este sentido, parece que los alumnos no sólo tienen ideas preconcebidas de cómo resolver un problema sino también de lo que es un problema, lo que provoca cierta sorpresa e incluso estancamiento inicial en desarrollar lo que hemos interpretado por verdaderos problemas. Comportamiento que entendemos ejemplifica lo que en el marco de la obra de Vila y Callejo (2004a) recogen con la afirmación de que las experiencias de aprendizaje del alumnado influyen en sus creencias y, a su vez, éstas mediatizan su manera de abordar y realizar actividades matemáticas, de manera que las creencias y las prácticas forman un círculo difícil de romper (Vila y Callejo, 2004a).

Los docentes coinciden en la riqueza matemática de los problemas Pb0 y Pb5 por encima de los otros. Se menciona también, que el problema Pb6 conllevó menos obstáculos que el resto.

En cuanto a la gestión de los problemas, observamos tres hechos importantes. El primero, de acuerdo con el docente IT6 que la propuesta de problemas cuyo enunciado los alumnos puedan reconocer inhibe su interés para intentar resolverlos. Por otro lado, de acuerdo con los docentes de Primaria IT6 y PI6, se observa como las ideas preconcebidas de los alumnos sobre un enunciado pasan fácilmente por delante de sus propios razonamientos posteriores impidiéndoles, dar con una representación adecuada de la situación y, por consiguiente poder

determinar una estrategia de resolución adecuada. En este sentido, se observa dificultad en lidiar con los datos que pueda proporcionar el enunciado especialmente por no poder reconducir sus primeras ideas al enfrentarse al problema. Sin embargo, si son capaces a deshacerse de estas ideas preconcebidas, son capaces a determinar posibles estrategias de resolución.

Los docentes acogen positivamente el uso de la base de orientación para que los alumnos puedan tomarla en consideración al resolver un problema. Hicieron aportaciones significativas en relación a la base de orientación utilizada en la Implementación Primera, y coinciden en que la base de orientación utilizada en la Implementación Segunda es más adecuada. De las aulas en las que parece que la base de orientación fue más utilizada en los alumnos, parece que su uso se centró especialmente en los momentos anterior e inicial, y final y posterior al desarrollo de sus resoluciones, más que a lo largo de los mismos.

Por otro lado, las distintas observaciones de los docentes, nos informan de la necesidad de cierta organización por su parte para implementar los instrumentos para la resolución de problemas (IRP) tanto en su gestión en el aula como para su propia familiarización con ellos, además de la necesidad de sus observaciones para poder adecuar los instrumentos a las necesidades de los alumnos.

De los tres docentes a los que se había sugerido aplicar una rúbrica de desempeño, sólo dos llegaron a intentar aplicarla de los cuales finalmente sólo uno las aplicó de manera conveniente. Estos dos docentes fueron AL1 y SC1, siendo ambos los responsables de los grupos de Secundaria implicados. De ellos, el profesor especialista en matemáticas, SC1, fue el que la pudo aplicar. Entre las dificultades detectadas para poder aplicar la rúbrica de desempeño, destacan la previa familiarización del docente con las distintas dimensiones y descripciones de los niveles de adquisición así como la claridad en la distinción entre los distintos niveles. Por otro lado, la imposibilidad de aplicar una rúbrica de desempeño si las producciones de los alumnos no disponen de un mínimo de información que poder analizar. Sin desarrollo explícito de la resolución, poco va a permitir valorar la rúbrica de desempeño. En este sentido es fundamental que las producciones de los alumnos presenten la suficiente información para poder analizar sus producciones de acuerdo con una rúbrica.

Ante la dificultad observada en los docentes para aplicar las rúbricas y de acuerdo que lo primero que se requieren son producciones la necesidad de que las producciones de los alumnos contentan información suficiente, indica la necesidad de desarrollar las bases de orientación para que los alumnos puedan compartir la información necesaria. De ello, nuestro interés en enfatizar el trabajo con la base de orientación, dejando en un segundo plano el desarrollo y adecuación de las rúbricas de desempeño.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS II: Generación y Uso de una base de orientación para la resolución de problemas matemáticos. Factores involucrados en su refinamiento y cómo han actuado.

Como se expone en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), con la Implementación Primera de la experimentación desarrollada a lo largo del presente trabajo, se introdujo por primera vez el uso de una incipiente base de orientación para la resolución de problemas matemáticos en dos aulas de Educación Primaria y tres aulas de educación secundaria obligatoria. Su aplicación, novedosa tanto para alumnos como docentes, tuvo lugar al trabajar siete problemas matemáticos propuestos para tal experimentación, distribuidos a lo largo del 1r trimestre del curso 2014-2015.

Con esta primera aplicación de una base de orientación en distintas aulas de educación primaria a y secundaria obligatoria surgieron distintas observaciones y matices que provocaron, por un lado, la apuesta por el uso de una base de orientación para la resolución de los problemas y por otro, la necesidad de revisar y refinar la base de orientación inicialmente generada para su mejor adecuación. Así, en este capítulo, pretendemos especificar cuáles fueron los indicios de estas observaciones que empujaron a afianzar el uso de una base de orientación para la resolución de problemas y en qué modo actuaron.

De acuerdo con lo expuesto, en este capítulo trabajaremos con datos obtenidos de la Implementación Primera (I1). De acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), los Instrumentos para la Resolución de Problemas diseñados a implementar en este caso fueron los problemas Pb1.1.a1, Pb1.2.a1, Pb2.a1, Pb3.a1, Pb4.a1, Pb5.a1 y Pb6.a1 que se presentan en el Anexo 1, la rúbrica de desempeño Rb1 del Anexo 2 y la base de orientación BO1 descrita en el Anexo 3. Además de contar con las observaciones que los docentes pudieran compartir y de las reflexiones de los expertos en evaluación y en resolución de problemas, en este caso se diseñó un cuestionario para que los alumnos participantes, al finalizar la implementación, pudieran compartir sus impresiones al respecto (Tabla 2.12, que se describe en el apartado 3 del capítulo 2). Cabe recordar que la base de orientación utilizada en este caso, la BO1, fue la primera de las diseñadas para tal fin y que adaptada para los alumnos como una adecuación de la rúbrica de desempeño Rb1, se refería a ella cómo rúbrica y no como base de orientación. Los grupos de alumnos que intervinieron en esta Implementación Primera fueron los correspondiente a las dos aulas de 6º de Educación Primaria, IT6A e IT6B, bajo la supervisión del maestro IT6 y las tres aulas de de1º de la ESO: AL1C, AL1D, bajo la supervisión del maestro que ejerce en secundaria AL1, y el aula SC1A, bajo la responsabilidad del profesor de matemáticas SC1. En todas ellas, fue la primera vez que se introducía una base de orientación para la resolución de problemas.

Para el análisis que en este capítulo pretendemos, examinaremos con detalle parte de las producciones de los distintos alumnos implicados al resolver los problemas arriba indicados trabajados, las observaciones de los docentes y las percepciones de los alumnos recogidas a través del cuestionario (Tabla 2.12, capítulo 2). Además, tendrá un gran peso el análisis de las referencias bibliográficas relacionadas con el proceso de resolver un problema.

Finalmente, comentar que una pequeña parte del análisis que se describe en este capítulo fue presentado en las *17 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) celebradas en Cartagena* entre el 5 y 8 de julio de 2015 con el título *La base de orientación, una herramienta para ayudar al alumnado a resolver problemas*, y cuyo artículo se recoge en las Actas de las Jornadas. Otro artículo, que resume aspectos del presente análisis (capítulo 4) como del siguiente (capítulo 5) y que hemos titulado *La base de orientación en la resolución de problemas. Reflexiones sobre las evidencias de su uso en el paso de la primaria a la secundaria* ha sido aceptado para ser presentado en el VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) que tendrá lugar en Madrid del 10 al 14 de julio de 2017. Las referencias concretas a estas publicaciones se detallan en la en la página que introduce las Referencias Bibliográficas.

4.1 Aceptación de la base de orientación

Dividimos el presente capítulo en dos partes. En la primera analizaremos las evidencias que nos llevan a considerar que el uso de una base de orientación adecuada puede ser de ayuda para la adquisición de la competencia en resolución de problemas. Para ello analizaremos dos aspectos relacionados directamente con los alumnos. Por un lado, las evidencias del uso de la base de orientación por parte de los alumnos al resolver los problemas. Por otro, las percepciones de los alumnos en cuanto a la base de orientación utilizada y su uso.

En la segunda parte, ante los indicios que la base de orientación puede ser un recurso adecuado para mejorar la adquisición de dicha competencia y, por otro, atendiendo la calificación “adecuada” de la base de orientación para que pueda resultar útil en el aspecto pretendido, analizaremos los aspectos que, ante las evidencias encontradas, pueden influir en la adecuación de una base de orientación con dicho fin para los alumnos que se pretende que utilicen.

4.1.1 Evidencias de uso de la base de orientación

Centramos esta primera parte del análisis en las resoluciones de los alumnos al problema Pb5.a1, en particular por la riqueza matemática que, de acuerdo con los docentes conllevó (apartado 3 del capítulo 3). Como se ha avanzado en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2) Se trata de un problema de búsqueda de configuraciones y patrones que acepta más de una solución, cuyo enunciado presenta los datos numéricos descritos, y que fue propuesto para ser trabajado de manera individual utilizando la base de orientación BO1. Para el análisis recurriremos a fragmentos de las resoluciones de los alumnos al problema en cuestión, Pb5.a1 e intentaremos entrever la implicación del uso de la base de orientación en dicha resolución.

De acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2) no todos los problemas se trabajaron de manera individual. En algunos casos se propuso la resolución por parejas (o pequeños grupo de tres). Para dar cuenta de la consideración que los alumnos pudieron tener de la base de orientación aún trabajando los problemas con algún compañero, posteriormente, y de manera secundaria, recurriremos a algunas de los problemas Pb1.a1 o Pb1.a2 que, de acuerdo con la Metodología (capítulo 2) se debían trabajar por parejas (o pequeños grupos de tres).

La primera de las resoluciones a analizar es la que presenta la Figura 4.1, procedente de un alumno de 6º de primaria. Tal como propone la base de orientación utilizada (BO1) aunque sin concretar cómo hacerlo, un primer paso para intentar afrontar el problema, es detectar y entender los datos que el problema presenta. Vemos cómo, en este caso, con una cruz, se identifican claramente las “docenas”, lo que se corresponde con los datos numéricos que presenta el problema. A priori, no remarca ningún otro dato más, aunque, con el boceto inicial del problema que realiza, se deduce cómo ha detectado el resto de datos. Por un lado, se ve que ha entendido correctamente que todas las piezas son cuadradas y que todas ellas deben de ser del mismo tamaño. En cambio, a partir de su propia e inicial representación del problema, se observa cómo no ha interiorizado correctamente dos aspectos: que en las 4 esquinas debe haber un tipo concreto de pieza y que en el interior las piezas deben de ser diferentes a las exteriores.

M'ha explicat que per fer la vora de la manta ha fet servir una dotzena de peces de fons verd amb un rombe dibuixat i una dotzena de peces de fons blanc amb piquets verds. Les ha posat de manera alternada: una de fons verd, una de fons blanc, ... i de manera que a les quatre cantonades sempre hi ha una peça blanca amb piquets.

1. Com pot haver distribuït aquestes peces per fer la vora, l'àvia? Una vora de fons verd i l'altra blanca. a la part en total hi ha 24 quadrats. També m'ha dit que la part interior de la manta està formada per peces quadrades de la mateixa mida que les de la vora però que, en canvi, són de diversos colors.

2. Puc saber quantes peces d'altres colors ha fet servir l'àvia per acabar la part interior de la manta? Com ho puc saber? Sí, lo puc saber perquè pots anar calculant el mig i les cantonades. No poden ser de 6, així que a un costat he restat un i els altres dos ho he sumat. Fanc servir 19 peces més per el interior.

Tomen de ser imparables.

Figura 4.1. Fragmento de la producción Pb5.a1_IT6B20. Evidencia de uso de la BO1

Así mismo, no tarda en darse cuenta de su error y no sólo eso, sino que además, tal como expone la base de orientación, actúa para entenderlo y rectificarlo. Con ello, además, establece su plan de acción: con su primera representación del problema el alumno se da cuenta de que el reparto de las piezas en los bordes no puede ser de 6 (de aquí podemos atrevernos a deducir que su primera idea es repartir $12+12=24$ piezas en 4 partes iguales –los bordes–, pero cómo comentábamos, a los alumnos les cuesta mucho verbalizar sus pensamientos y aquí tenemos un claro ejemplo) y, con ello, establece su estrategia de resolución que, en este caso y tal como pretendemos, ¡sí verbaliza! (más o menos bien redactado): “Sí, lo puedo saber porque puedes ir calculando el medio y las esquinas. No pueden ser de 6, así que a dos lados he restado uno y los otros dos lo he sumado”. Lo que nos viene a

decir que, fijadas las esquinas, quita una pieza en dos de los bordes paralelos para “dárselas” al par de bordes perpendiculares a ellos.

El alumno responde la pregunta explicando, no sólo cómo puede haberlo distribuido la abuela, sino cómo él lo ha determinado. Además, cabe destacar la conclusión que apunta una vez deducido el patrón: “*Tienen que ser impares*”, como condición necesaria a poder establecer la distribución de las piezas. En este caso, sí lo apunto, dando pie, pues, a la verbalización. Sin embargo, y debido al tiempo, no llega a concretar si puede haber más soluciones o si esta que presenta es la única posible.

Otra resolución de un alumno de primaria es la que presenta la Figura 4.2. Como se observa, en ella también se identifican sin inconvenientes aparentes los datos numéricos, las “docenas”. En este caso, pero, no se marcan en el texto del enunciado, sino que se extraen y se reescriben manera explícita fuera de él. A diferencia del caso anterior, pero, no sólo se identifican claramente los datos numéricos, sino también la forma y el estilo de las piezas, así como la clave de cómo éstas deben distribuirse: de forma alternada fijando las esquinas con un tipo concreto de pieza. Además, desde un principio, y en su representación del problema, el alumno demuestra tener claro que las piezas del interior son totalmente diferentes a las exteriores, por lo que ni se preocupa en representarlas.

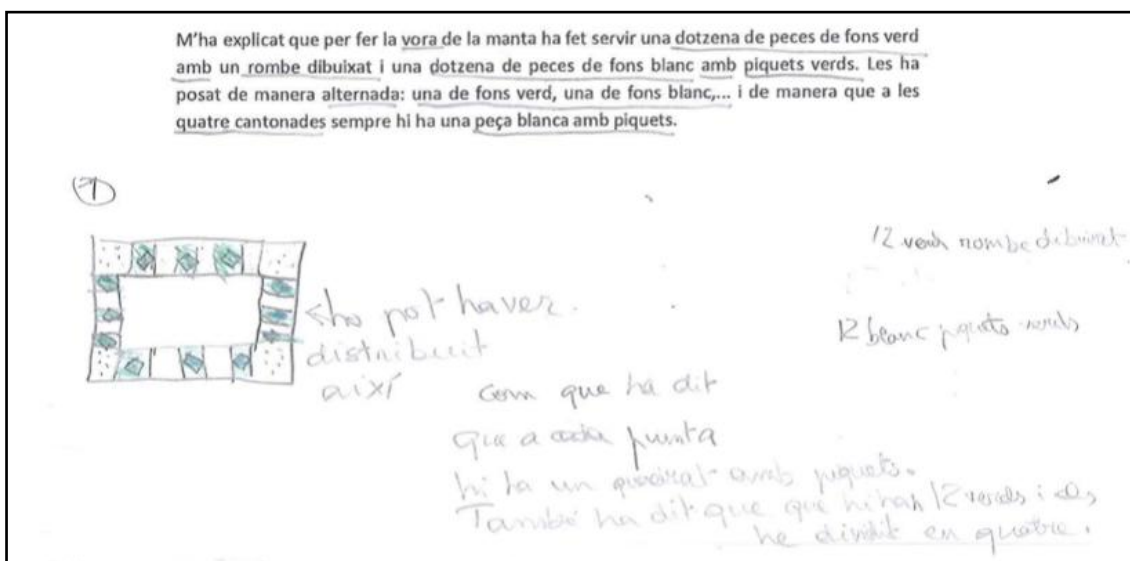


Figura 4.2. Fragmento de la producción Pb05_IT6B25. Evidencia de uso de la BO1

Una vez tiene los datos claros, prepara su plan de acción. Sabe que dispone de 12 piezas verdes sin colocar. Decide que debe repartirlas entre los cuatro lados, lo que le proporciona su estrategia y con la que encuentra una primera manera de repartir las piezas del borde.

Siguiendo los pasos expuestos en la base de orientación, resulta clave tener claros los datos, identificarlos y entenderlos correctamente para poder emprender un adecuado plan de acción.

Analicemos una nueva resolución, ahora procedente de un alumno de 1º de la ESO. Se trata de un ejemplo más completo, y en el que se llegan a responder las dos preguntas. Es la que presentan las figuras Figura 4.3 y Figura 4.4, que siguen a continuación.

En la primera parte de la resolución (Figura 4.3), en primer lugar, se extraen y concretan todos los datos que proporciona el problema: se tiene claro el número de piezas a colocar, así como

su tamaño y distribución, la condición de las equinas, y también que, inicialmente, las piezas interiores poco interesan. Además, para poder expresar el problema, establece un código para identificar dichos datos de manera visual y clara, con los que establece cómo intentará resolver el problema.

Su plan de acción se inicia determinando el número total de piezas que debe colocar: $12+12=24$, y se lanza a buscar alguna combinación que satisfaga la premisa. Parece que su estrategia ha sido empezar por crear un borde (y su paralelo) cuya cantidad de piezas se acerque más a la mitad de piezas de las que en total debe utilizar, teniendo en cuenta que las esquinas deben estar cubiertas por un tipo concreto de pieza. De esta manera, para el borde perpendicular sólo necesita una pieza, además de los dos bordes que ya tiene fijados. Con ello, puede controlar bien el reparto de piezas: 3 para el borde pequeño y el resto de piezas, quitando las esquinas ya colocadas, para los bordes perpendiculares.

A partir de esta situación inicial, ha visto claramente la posibilidad de otras configuraciones. Para ello, ha ido eliminando 2 piezas del par de bordes largos para añadirlos al par de bordes perpendiculares. De esta manera, obtiene un mecanismo para afrontar la estrategia que se había planteado. Además se percató de otra condición fundamental: que el número de piezas de cada par de bordes debe ser un número impar.

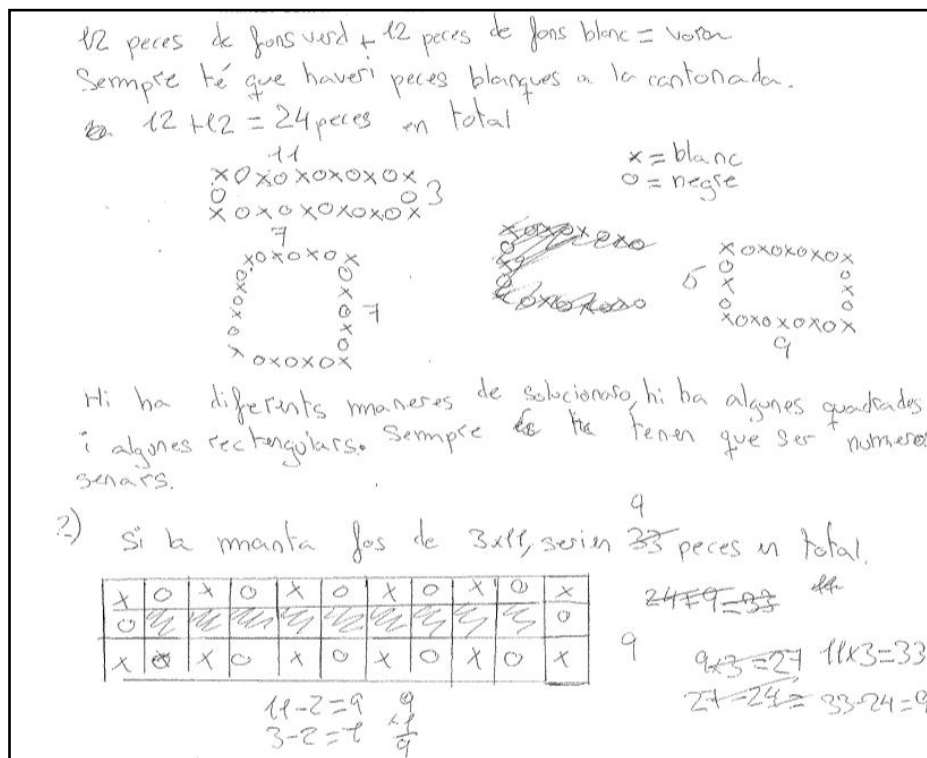


Figura 4.3. Fragmento 1 de la producción Pb05.a1_SC1A24. Evidencia de uso de la BO1

Acabamos de ver cómo, una vez ha encontrado una primera solución, y tal como propone la base de orientación BO1, se ha lanzado a buscar otras posibilidades y, además, las ha encontrado. Durante el proceso ha habido un momento de confusión que, sin embargo, ha sabido detectar y rectificar satisfactoriamente. Ha sido capaz de revisar y corregir su atasco, haciendo caso de la base de orientación.

De esta forma, termina la primera parte del problema dando todas las soluciones posibles, pero no acaba de exponer si podría haber más o por qué estas son las únicas. Simplemente enseña las configuraciones y la forma que tendría la manta, sin ninguna otra explicación.

Para la segunda parte del problema (Figura 4.4), retoma la primera combinación para la manta que había encontrado en la primera parte del problema y la representa. Cabe notar que, como ahora el problema recae en el interior de la manta, ahora sí representa e identifica de manera diferenciada las piezas que deben estar en su interior. Con ello, ratifica que identifica y entiende perfectamente los datos, al mismo tiempo que expresa el problema de la manera que le resulta más fácil y cómoda de interpretar. A partir de ahí, intenta encontrar una estrategia para determinar el número total de piezas interiores, siguiendo así los pasos que propone la base de orientación.

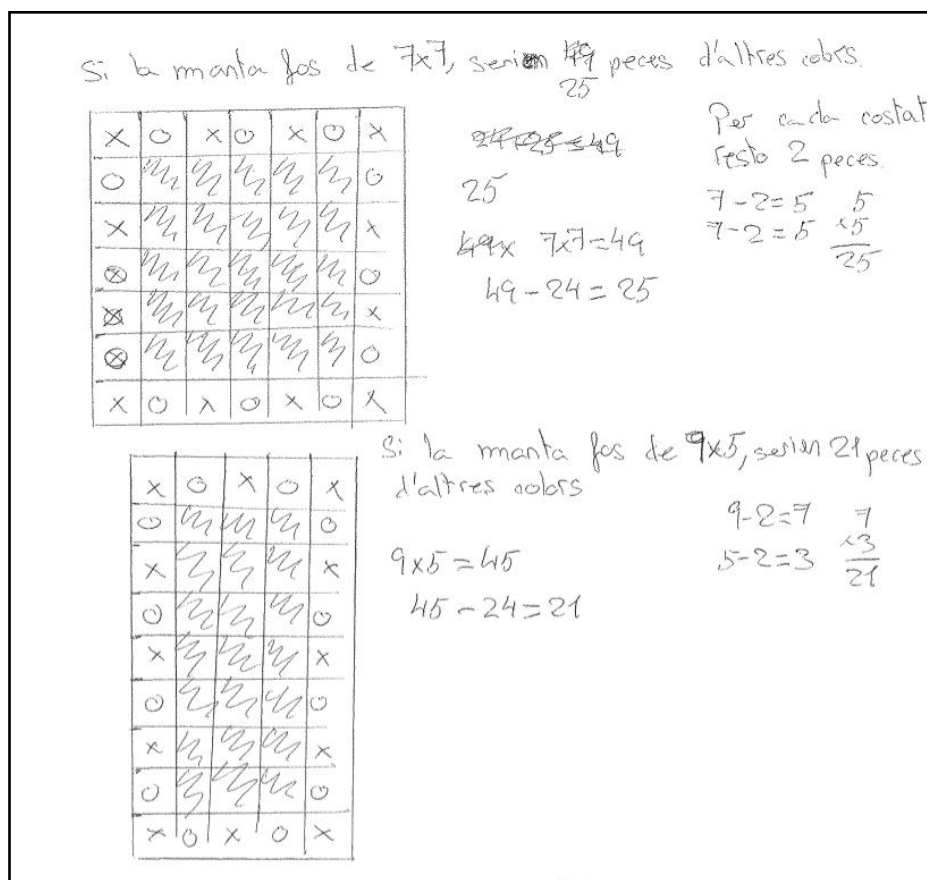


Figura 4.4. Fragmento 2 de la producción Pb05.a1_SC1A24. Evidencia de uso de la BO1

En este caso, pero, parece que, en un primer momento, la pregunta formulada no ha quedado del todo clara y con ello llega a una falsa conclusión, pero de la que posteriormente, como vemos, se da cuenta y rectifica satisfactoriamente. De nuevo, pues, parece que sigue la base de orientación para hacer frente a ello.

Es de notar que, para concluir esta primera idea, aunque errónea, su estrategia consiste en considerar que el rectángulo que representa la manta está compuesto por cuadrados de igual tamaño, con lo que puede multiplicar el número de elementos de ambos bordes o lados, es decir, aplicar el familiar “base por altura”. Cuando detecta, pero, que con esta estrategia no responde realmente la pregunta formulada, sino que da el número total de piezas, intenta descubrir cómo saber el número de piezas interiores. Para ello parece que primero comprueba

que, contando las piezas interiores de su dibujo y sumándolas a las 24 del borde que ya teníamos fijadas, se obtienen las 33 que había deducido anteriormente.

Una vez hecha esta comprobación, parece que ya tiene a punto su estrategia, ordenada, de resolución: calcula el número total de piezas multiplicando el número de cuadros de los bordes perpendiculares entre sí y, al resultado, le resta el número total de piezas que determinan el borde que, como ya conoce del principio, son 24.

Con esto, ya podría contestar la pregunta formulada pero, siguiendo la base de orientación, intenta también determinarlo usando alguna otra estrategia. Y así lo hace. En este caso, ve que restando 2 al número de piezas de cada lado (pues para contar el interior se dejan de tener en cuenta las filas y columnas extremas, los bordes, en definitiva) y multiplicando ambos resultados, obtiene directamente el número de piezas interiores. Una vez lo tiene claro, resuelve la problemática para las otras dos configuraciones de manta que había encontrado anteriormente, aplicando las dos estrategias de resolución que ha determinado estudiando el primer caso.

Comentar que, aunque ha resuelto el problema de maneras distintas, no llega a verbalizar la respuesta ni sus porqués. Este comportamiento nos puede dar indicios que las dimensiones 8, 9 y 10 deberían ser más afinadas para poder alcanzar mejor sus objetivos respectivos.

Añadir aquí que no todas las resoluciones obtenidas en esta Implementación Primera responden a un uso tan evidente de la base de orientación. Encontramos resoluciones menos completas en las que es difícil constatar el grado en qué pudo ser considerada y aplicada.

Un ejemplo es la resolución de la Figura 4.5, correspondiente a un alumno de 1º de la ESO en la que simplemente da una configuración posible para dar respuesta a la primera pregunta y dice que la segunda cuestión planteada se desvela simplemente midiendo el área. Ambas respuestas son poco concretas, además de no poder entrever demasiado como ha llegado a ellas. En ninguna de las dos se entrevé algún tipo de reflexión.

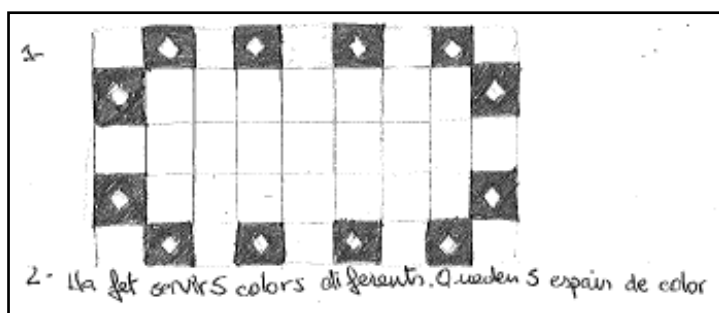


Figura 4.5. Fragmento de la producción Pb05.a1_AL1C02. Dificultad en detectar evidencias de uso de la BO1

Por su parte, la Figura 4.6 enseña la resolución de un alumno de 6º de Primaria. En este caso, como casi todos sus compañeros de curso, señaló en el mismo enunciado los datos del problema. Así mismo, al atacar el problema, no deja muchas evidencias de cómo lo hizo. Da, simplemente, una configuración en la que parece haber encajado la distribución de las piezas laterales y su respuesta no es más profunda que describir en cuantas filas y columnas ha distribuido las piezas. En la segunda respuesta se limita a responder que se puede saber, pero no dice como.

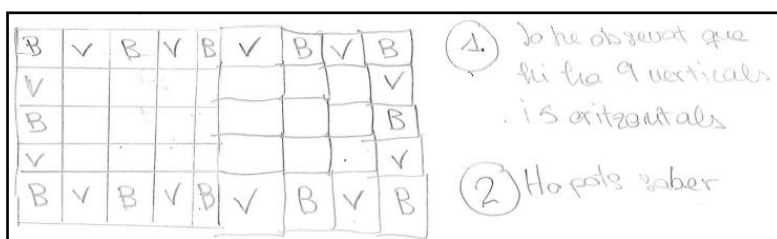


Figura 4.6. Fragmento de la producción Pb05.a1_IT6B05. Dificultad en detectar evidencias de uso de la BO1

Introducimos ahora el análisis de algunas producciones realizadas por parejas o pequeños grupos de tres. Para ello, extraemos algunas de las producciones del grupo SC1 a los problemas que así debían trabajarse, como el Pb1.2.a1 o Pb1.1.a1. Nos centramos en producciones del grupo SC1 por ser el grupo que, tal como se pedía, explicitaron claramente con qué otros compañeros trabajaron el problema en cuestión. En particular, analizaremos una producción al problema Pb1.2.a1 realizada por un pequeño grupo de tres alumnos y, en segundo lugar, estudiaremos la producción de otro alumno, distinto a los tres integrantes de la otra resolución, al problema Pb1.1.a1 que trabajo con un quinto alumno del grupo SC1A. De acuerdo con las observaciones del docente SC1, la distribución de los alumnos en los distintos grupos, fue por como los alumnos están sentados en clase, siendo esta la manera habitual de hacer grupos de trabajo.

El primer caso se corresponde con la producción del alumno SC1A07 a la primera pregunta del problema Pb1.2.a1 (Figura 4.7) que, de acuerdo a las anotaciones en su hoja de resolución, había trabajado el problema con los alumnos SC1A05 y SC1A25 (Figura 4.8).

En la producción del alumno SC1A07 (Figura 4.7) se observa una representación de la situación del problema mediante la indicación de una suma cuyos sumandos y resultado están representados por una X. Aunque se haya utilizado una misma incógnita para codificar sumandos y resultado, ni que la incógnita de los sumandos no conlleve la propiedad de que deben den de ser números de 3 cifras cada uno sin ninguna de ellas repetidas, con el uso de las incógnitas da a entender que tanto los dos sumandos como el resultado son desconocidos. Así mismo, en la representación, sí destaca que el resultado de la suma debe ser el más grande posible. A continuación comparte qué han pensado de hacer para encarar el problema y así lo ponen en práctica. Así lo evidencian las distintas sumas que siguen a dicha reflexión, con lo que también demuestran haber entendido la naturaleza de los números a operar, cosa que no quedaba del todo claro con las X de la representación. Obtenidos los resultados de las sumas, comentan y señalan de manera distinta cuáles no deben considerarse y cuál sí, dando el por qué de su decisión. Al margen de la completitud de sus comentarios se evidencia así la consideración de la base de orientación para dar no sólo resolverlo sino también dar respuesta a la pregunta formulada.

Al analizar la producción de uno de sus compañeros (Figura 4.8), en particular la que presentó el alumno SC1A25, observamos como su producción aun manteniendo un discurso de resolución similar al alumno SC1A07, y por lo tanto, con evidencias de considerar la base de orientación, presenta expresiones y anotaciones propias y distintas.

$$\begin{array}{r} 1-+X \\ X \\ \hline X \end{array}$$
 (la més gran possible)

- Em pensat que podriem ficar els nombres de manera que quedin de més grans a més petits.

$\begin{array}{r} 975 \\ +863 \\ \hline 1838 \end{array}$	$\begin{array}{r} 793 \\ +865 \\ \hline 1658 \end{array}$	$\begin{array}{r} 983 \\ +765 \\ \hline 1748 \end{array}$
---	---	---

Aquesta solució és la correcta perquè és el nombre més gran.

Aquesta és la solució incorrecta perquè són nombres més petits.

Figura 4.7. Fragmento de la producción Pb1.2.a1_SC1A07

$$\begin{array}{r} 1-+X \\ X \\ \hline X \end{array}$$
 (resultat més gran possible)

Hem pensat que podriem agrupar els nombres de manera que ~~hagim de més petits a més grans~~.
 quedin de més grans a més petits.

$\begin{array}{r} 975 \\ +863 \\ \hline 1838 \end{array}$	$\begin{array}{r} 793 \\ +865 \\ \hline 1658 \end{array}$	$\begin{array}{r} 983 \\ +765 \\ \hline 1748 \end{array}$	(B)
---	---	---	-----

Creiem que es ^{incomenta} aquesta perquè és la que dona el resultat més gran. Ho hem fet provant

Aquestes operacions donen un resultat més petit que la

Figura 4.8. Fragmento de la producción Pb1.2.a1_SC1A25

Observemos ahora el caso que presentan la Figura 4.9 y la Figura 4.10. Cada figura ilustra parte de las producciones que dos alumnos del grupo SC1, de acuerdo con sus anotaciones trabajaron conjuntamente para resolver el problema Pb1.1.a1. Como observamos, presentan dos actitudes de resolución completamente diferentes.

En la Figura 4.9 se presenta parte de la producción del alumno SC1A16 al problema Pb1.1.a1. Como se desprende de la propia resolución, y por las distintas anotaciones que hace el alumno, se hace obvia la consideración de la base de orientación, en tanto que el alumno dejó por escrito cuando aplicada una u otra dimensión, asociando así su actividad de manera explícita con las distintas dimensiones y dominios de la BO1.

En cambio, al analizar la producción de su compañero de resolución, el desarrollo de la misma sigue un esquema completamente diferente, como se puede observar en la Figura 4.10. Si bien hay evidencias de ir probando y descartando las acciones que no se adecuan a las condiciones del enunciado, es complicado determinar hasta qué punto avanzó en la resolución

de cada resolutor en la práctica de resolver un problema, resulta de especial interés analizar las percepciones de los alumnos al respecto. En este sentido cabe mencionar que, como ya hemos justificado en la Metodología (capítulo 2) entendemos por percepciones a las impresiones relativas a cómo se ha sucedido o llevado a cabo una actividad matemática, en este caso la resolución de problemas usando una base de orientación, antes de que esta reflexión sea interiorizada y pueda ser considerada como una creencia (en el sentido de Callejo y Vila, 2003; Vila y Callejo, 2004a, 2004b).

Para tener acceso a las consideraciones de los alumnos, después de la experiencia llevada a cabo a lo largo de la Implementación Primera (I1), novedosa para todos los colectivos implicados, ofrecemos la opción al alumnado implicado que reflexionase sobre los problemas propuestos y la base de orientación, tanto en su forma como en su uso para resolver los problemas propuestos. Para ello, como describe en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), se elaboró el cuestionario que presenta la Tabla 2.12.

Conocer directamente las percepciones de los alumnos puede ser de ayuda a la hora de consolidar o rectificar algunas de las reflexiones que pueden surgir del análisis de las evidencias de sus resoluciones y de las reflexiones que pueden surgir de los docentes y expertos, especialmente si el objetivo es decidir la consolidación de dicha herramienta e encaminar una mejor adecuación de la misma.

Para la finalidad que aquí se pretende observar, destaca, la aparente acogida por parte de los alumnos implicados a la propuesta de usar una base de orientación para resolver un problema matemático, por un lado, y, por otro, una aprobación, aunque con matices y sugerencias, de la base de orientación en particular utilizada BO1. En este sentido, de las preguntas que les fueron planteadas, resultan de especial interés son las C3, C10 y C12 que al pedirles si consideraban de ayuda disponer de una base de orientación para resolver un problema así como criticar la base de orientación utilizada en su primera experimentación, la BO1. Por ello, analizamos ahora, las respuestas a estas tres preguntas de dicho cuestionario (Tabla 2.12 del apartado 3 del capítulo 2).

La primera pregunta que analizaremos será la C3 en la que, de acuerdo con tratarse de la Implementa Primera, donde pone rúbrica se refiere a la base de orientación, en particular, la BO1 fue:

C13. Ahora que ya has utilizado una rúbrica, crees que utilizarla puede ayudar a resolver problemas? ¿Por qué?

La sensación general al revisar las respuestas obtenidas es que aún no habiendo utilizado nunca antes una base de orientación, acogen el uso de las bases de orientación para la resolución de problemas, y sin gran sorpresa. Sus respuestas dejan entrever que consideran la base de orientación como una herramienta natural al proceso de resolución del problema que detalla un conjunto de instrucciones que les ayuda a estructurar y ordenar su resolución, además de, como ellos mismos exponen y, de hecho así lo pretende la base de orientación diseñada, les orienta en dicho proceso:

- *Sí, porque por ejemplo tú compras un juguete y sin las instrucciones adecuadas no se puede construir, al igual que un problema, no puedes resolverlo sin las acciones*

adecuadas. (C3_SC1A27)

- *Sí, porque así es más fácil orientarte a la hora de hacer el problema. (C3_SC1A09)*
- *Creo que ha sido una ayuda con el problema tener una base de orientación, porque así te aseguras que has hecho todos los pasos correctamente y en orden. (C3_SC1A23)*
- *Sí, porque te estructura cómo hacerlo. (C3_AL1C03)*
- *Sí, porque te ayuda a organizarte. (C3_AL1C07)*

Al mismo tiempo que, aparentemente, les sirve para darles aquel empujón inicial que no siempre tienen pero que necesitan y que es imprescindible a la hora de enfrentarse al problema:

- *Sí, porque cuando resuelves un problema a veces no sabes por dónde empezar y estás un poco perdido y esta base de orientación te puede ayudar a ver el camino que tienes que seguir para resolver el problema. (C3_AL1D03)*
- *Sí, porque si no sé por dónde empezar, me ayuda a situarme. (C3_SC1A04)*

O bien que les lleva a recordar aquellas herramientas que les pueden facilitar su comprensión, pero que no siempre, de primeras, tienen en cuenta y si alguien no se las recuerda no son capaces de considerar:

- *Yo creo que sí porque yo antes no utilizaba ni croquis ni dibujos pero como aquí lo ponía lo probé y me fue mejor. (C3_IT6A15)*
- *Sí, porque te dice tácticas y también los pasos que tienes que hacer. (C3_IT1D21)*
- *Sí, porque te da buenos consejos. (C3_IT6A17)*
- *Sí, porque te puede dar pistas. (C3_AL1D06)*

Además, confirman que usar la base de orientación les permite volver atrás en su proceso para recordar lo que llevan haciendo siempre que lo necesitan y así percatarse de aquellos aspectos que uno se ha podido olvidar o dejar a medias por el camino:

- *Creo que utilizar la base de orientación es muy práctico para hacer problemas ya que puedes ver los pasos que has hecho y los que no, y así identificar un posible error. (C3_SC1A15)*

Y, con ello, en consecuencia, ser conscientes de lo que hacen en cada momento (lo que, además, favorece el proceso de autoevaluación y su propio aprendizaje) y que, tal como se dan cuenta con esta reflexión, no se puede llevar a cabo si no se escribe lo que se piensa en todo momento:

- *Sí, porque te ayuda a reflexionar sobre lo que has escrito. (C3_SC1A06)*
- *Sí porque te ayuda a analizar y a hacer mejor el problema. (C3_IT6A07)*

Todas estas ideas se ven reforzadas cuando, además, se lleva a cabo una corrección o comentario general final de la clase junto con el docente de la resolución del problema siguiendo también la base de orientación.

Así mismo, se constata que la resolución del problema usando la base de orientación no es un ejercicio de fácil y rápida aplicación, sino que requiere de bastante práctica y familiarización. Así lo confirman comentarios como el que sigue a continuación:

- *Bueno, me cuesta un poco aplicar la base de orientación en los problemas porque es una cosa nueva.* (C3_IT6A16)

Y más complicado se ve su correcta incorporación cuando se empieza a aplicar en un punto del proceso de aprendizaje en el cual se cree (el alumnado) que ya se dispone de unos buenos procedimientos o ideas de trabajo, sean más o menos adecuados, o más o menos parecidos, pero que están suficientemente establecidos y afianzados:

- *No siempre porque puede que ya estés acostumbrado a hacerlo de tu manera y lía un poco.* (C3_SC1A10)
- *No, porque hay gente, como yo, que tienen su manera.* (C3_IT6A10)
- *A mí no me sirve de mucho porque tengo mis pasos. Mis pasos son parecidos a los de la base de orientación pero me lía tanta letra.* (C3_IT6A08)

El hecho de tener un proceso interiorizado, aunque no sea el adecuado, resulta un hecho fundamental para algunos alumnos, a quien, parece, los molesta tener que replantearlo o, simplemente, contrastarlo:

- *Voy a ser sincero, a mí no me ha ayudado demasiado porque con tantos pasos me hago un nudo. Porque yo, es como si tuviera los pasos de la base de orientación pero más resumidos en mi cabeza, y a la hora de hacer el problema es más fácil para mí (seguir sus propios pasos).* (C3_SC1A13)
- *A mí no me ayuda porque yo lo hago de maneras diferentes y me va peor utilizarla.* (C3_SC1A22)

Y, teniendo en cuenta que la finalidad de la base de orientación es ayudar a un alumno resolutor no experto, seguramente, no tendrá mucho sentido su aplicación para un supuesto alumno experto resolutor de problemas:

- *Sí, pero no la he utilizado demasiado porque ya me sabía los pasos para realizar un problema. Pero si a alguien le cuesta mucho (resolver un problema) le puede ayudar.* (C3_IT6B17)

En cualquier caso, y tal como ya hemos ido advirtiendo, un aspecto fundamental para que la base de orientación sea verdaderamente útil y eficaz es que comprenda bien aquellos pasos que realmente puedan ayudar a afrontar el problema en cuestión:

- *Sí que puede ayudar, pero en algunos casos especiales te puede liar un poco si la tienes que seguir al pie de la letra, porque no todos los problemas siguen los mismos pasos.* (C3_SC1A28)
- *Sí, pero depende de qué problema no haría falta seguir todos los pasos pero es importante porque así no te olvidas de hacer ningún paso y puedes hacerlo mejor.* (C3_SC1A25)

En la línea de las respuestas obtenidas a la cuestión C3, las reflexiones realizadas en torno a la cuestión C10, centrada en el uso concreto de la base de orientación BO1 en la Implementación Primera, desvelan indicios de aceptación de la misma para resolver los problemas presentados en dicha Implementación (I1).

Así, aunque, como se verá a continuación, no son inexistentes las críticas a la base de orientación BO1 facilitada, sus aportaciones dan aprobación y viabilidad al uso de la misma. Para ello recurrimos a las respuestas a la pregunta 10 del cuestionario (Tabla 2.12, apartado 2, capítulo 3), que, concretamente dice así:

C10. Tal como se presenta la rúbrica (aspecto, lenguaje, longitud...) ¿te ha resultado cómoda? ¿Crees que es adecuada para un alumno de 6º de EP o 1º de la ESO? Por favor, crítica todo lo que creas oportuno y comentas lo cambios (lenguaje, formato, etc.) qué harías.

Como hemos avanzado, en respuesta a esta cuestión encontramos aquellas que dan soporte a la consideración de una base de orientación. Destacamos el hecho que el soporte es en distintos aspectos y no centrado en uno solo de la base de orientación.

- *Creo que es lo suficiente cómoda y me ha ayudado bastante.* (C10_SC1A15)
- *Sí, me ha ayudado a buscar bien las soluciones entendiendo el problema.* (C10_SC1A08)
- *Sí, porque siempre la tienes.* (C10_AL1C04, C10_AL1C10)
- *Sí, es bastante cómoda.* (C10_IT6B19, C10_IT6B20)

Y con ello, reflexiones en cuanto la consideran apropiada para el trabajo e resolución de problemas matemáticos enfocado para alumnos de Ciclo Superior de Primaria y los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria:

- *Puede que sí, para los que les cuesta realizar los problemas.* (C10_SC1A22)
- *Sí es adecuada para niños de 6º o 1º de ESO.* (C10_AL1D11, C10_SC1A05)
- *Yo creo que para 6º y ESO, sí.* (C10_IT6B10)
- *Creo que es más adecuada para un alumno de 1º de la ESO y 2º de la ESO.* (C10_SC1A09)
- *Creo que es adecuada para 1º de la ESO y 2º de la ESO.* (C10_IT6A14)
- *Para un alumno de 1º de ESO, lo entiende más porque tiene el vocabulario más enriquecido.* (C10_SC1A10)
- *Creo que sí es apropiada porque así cuando pasamos al siguiente curso y los problemas se complican más, nos habrá ayudado a poder hacerlos. Ir paso a paso tiene un serio esfuerzo pero al menos sirve para alguna cosa.* (C10_SC1A08)
- *Me ha gustado porque estaba dividida en pasos (más claro). No me ha gustado que, creo que una rúbrica para alumnos de 6º o 1º de la ESO debe de ser más clara.* (C10_SC1A23)
- *Creo que es necesaria para un niño de 6º o 5º porque aún no se tiene muy claro que se debe hacer para resolver un problema. Cuando se presenta un problema difícil es necesario utilizar para que te ayude a encontrar la respuesta.* (C10_AL1D15)
- *Sí, yo creo que está bien explicada. Yo creo que es para los dos cursos porque tenemos más vocabulario y leemos más rápido. Luego, para un niño de 6º y 1º de la ESO, sí vale.* (C10_IT6B21)
- *Se tendría que utilizar también en 5º (de primaria).* (C12_AL1D15)

Así mismo, como se ha comentado, ya sea con la exposición de motivos o sin ellos, no son

todos los alumnos que dan una aprobación directa al uso de la base de orientación BO1. Al analizar las respuestas que aportan algún motivo, se encuentran, más o menos fundamentadas, razones distintas. Entre ellas, se hallan, aunque en minoría, aquellos motivos que simplemente renuncian, sin intento alguno, al hecho de trabajar de trabajar con ella:

- *No sé si me ha resultado cómoda porque no la he utilizado.* (C10_AI1D05)

Y en mayor medida aquellas razones que son indicativos de haber trabajado con ella. Así, algunos apuntan inconvenientes de la base de orientación BO1 facilitada relacionadas con formato físico del soporte en qué se encuentra la base de orientación:

- *No me ha resultado cómoda porque me ocupaba media mesa.* (C10_IT6B03)
- *Se entiende pero la letra es muy pequeña.* (C10_IT6A11)
- *Podría ser una poco más grande.* (C10_IT6B17)
- *Yo, la hubiese hecho en vertical [...]* (C10_SC1A09)

Argumentos que evidencian la importancia de facilitar a los alumnos el instrumento en cuestión, en este caso la base de orientación, de la manera más práctica posible para que su aplicación resulte lo más natural y cómoda posible. Con ello, pues, resulta relevante valorar la apariencia física del soporte físico en qué se presenta para ser utilizada la base de orientación: proyectada, impresa... y la relación del texto en relación al dicho soporte (tamaño y orientación).

Otras causas que apuntan un cierto obstáculo al ser utilizadas, y que refuerzan observaciones analizadas anteriormente, provienen de los hábitos o conocimientos presentes previamente en los alumnos:

- *A mí no me ha ido demasiado bien, porque esto ya me lo enseñaron en la primaria.* (C10_AL1D11)

Y bien, como se entra en detalle en el próximo apartado, por cómo están descritas las exposiciones de las dimensiones:

- *Yo, [...] hubiera puesto palabras más entendedoras.* (C10_SC1A09)
- *No me ha resultado demasiado cómoda porque había palabras que no se entendían.* (C10_IT6B15)
- *No todo se entendía.* (C10_SC1A02)

4.1.3 Discusión

Las evidencias, tanto de las producciones como de las respuestas a las preguntas formuladas de los alumnos de los distintos grupos nos permiten entrever una aceptación general del uso de una base de orientación para resolver un problema. Al mismo tiempo, observamos que su uso puede ser una práctica con resultados positivos en los resolutores no expertos en cuanto a su aprendizaje de la resolución de problemas.

Las evidencias parecen constatar que el uso de la base de orientación no ha sido influenciado por el nivel educativo en qué se encuentran los alumnos participantes. En cambio sí que parece haber influido el énfasis que los docentes hayan podido realizar en las aulas en cuanto al uso de la base de orientación. Así, encontramos evidencias más claras del uso de la base de

orientación en el centro SC1A, donde se confirmó que después de trabajar los distintos problemas se dedicó un cierto tiempo a revisar las producciones siguiendo la base de orientación, al mismo tiempo que el docente intentó aplicar la rúbrica asociada para valorar algunas de las resoluciones, que en los grupos AL1C o AL1D, donde el seguimiento posterior de las resoluciones no pudo realizarse con el mismo énfasis.

Al analizar las producciones de los problemas que han sido trabajados por parejas o en pequeño grupo (de hasta 3 alumnos cuando ha sido necesario para que ningún alumno se quedara sin pareja) observamos que el hecho de trabajar en este modo no ha inhibido o descartado el uso de la base de orientación para resolver los problemas que así se debían trabajar. Observamos que aún trabajando en pequeño grupo se ha tenido en cuenta la base de orientación para resolver el problema en cuestión como se ha podido hacer en las producciones desarrolladas a nivel individual. Así, dejando al margen el nivel individual de las resoluciones que han podido ser trabajadas de una u otra manera, evidenciamos que la base de orientación tanto ha sido considerada cuando se ha trabajado en pequeño grupo como a nivel individual.

Sin embargo, para que ello sea posible, percibimos que es necesario afinar bien el material utilizado: no sólo el problema en su sentido más competencial, pues debemos percatarnos que realmente se trata de un problema y no de un simple ejercicio para el alumnado sino y, sobre todo, la base de orientación, especialmente en cuanto a la cantidad y distribución de la información que ofrece, el vocabulario que utiliza, a su concreción y, aparentemente, a la forma en la cual se presenta.

En este sentido, las reflexiones de algunos alumnos nos muestran como el cierto manejo que pueden presentar en relación a la resolución de problemas, les puede provocar cierto sentido de reticencia al uso de una base de orientación. Sumado a ello, comentarios como *No, porque hay gente, como yo, que tienen su manera o ya me lo enseñaron en la primaria* pueden generar una actitud reticente a su uso, especialmente cuando su uso conlleva menores o mayores cambios en las “rutinas” de los alumnos que éstos deberían interiorizar, pues por sí solos no han demostrado hacerlo, y más cuando consideran algo adquirido como intocable. Una idea posiblemente errónea si todos ellos consideran que todos los problemas requieren de los mismos pasos estáticos y concretos. En este sentido parece influir más en su uso las creencias que tengan los alumnos que el nivel en sí, en el cuál se encuentren, 6º de Primaria o 1º de la ESO.

Por ello será importante adecuar bien cualquier base de orientación a las necesidades de los alumnos teniendo en cuenta sus creencias y sin perder de vista el objetivo principal que se pretende con ellas. De ahí la importancia en que los alumnos perciban la base de orientación a utilizar como algo suyo y útil, y que puedan participar en su configuración, que irá cambiando según sus necesidades, hasta que puedan ser autónomos en su generación y conducción.

4.2 Adecuación de la base de orientación

Ante los indicios de aceptación del uso de la base de orientación para la resolución de problemas así como del efecto positivo que puede promover, tiene sentido profundizar en los aspectos más concretos identificados que pueden influir en su aceptación, como hemos observado en relación la forma y el formato de la base de orientación BO1 generada para en la

Implementación Primera con el objetivo de encontrar la manera de adecuarla para que su aceptación, tanto en forma como en uso, sea lo más generalizada y factible posible en todos los alumnos. Así, a continuación, se exponen las cuestiones abordadas con el grupo de reflexión formado por los docentes y especialistas con su correspondiente discusión, las cuales fueron fundamentadas y para las que se recurrió tanto a las resoluciones por escrito de los alumnos como de las respuestas a las cuestiones que fueron invitados a reflexionar y compartir. Las cuestiones abordadas se presentan sintetizadas dando respuesta a los puntos que se introducen a continuación:

- Creencias de los alumnos en relación a la Resolución de Problemas
- Lenguaje utilizado en la base de orientación
- Estructura general de la base de orientación
- Concreción de la base de orientación
- La base de orientación para promover la verbalización del proceso de resolución
- Percepción visual de la base de orientación

4.2.1 Creencias de los alumnos en cuanto a la resolución de problemas

Tal como se ha expuesto en el Marco Teórico (apartado 2 del capítulo 1), las dimensiones afectivas de los resolutores tales como sus creencias, actitudes y emociones juegan un papel fundamental en el proceso de resolver un problema. De ello se desprende el peso que tienen en cualquier proceso que lleve a adquirir dicha competencia.

En tanto que las reacciones emocionales se pueden entender como el resultado de discrepancias entre lo que se espera y lo que realmente se experimenta, se hace imprescindible indagar en las creencias y expectativas que les dieron origen. Entendemos así que la comprensión del conjunto de creencias y expectativas de los alumnos se convierte en un primer paso para aprender a tratar con eficacia su efecto en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas. De la misma manera, entrever su predisposición o no al hecho de usar una base de orientación para dicha finalidad y como, aún dispuestos a utilizarla, sus dimensiones afectivas pueden actuar complicando su uso y adecuada aplicación.

Basándonos en los estudios de Callejo y Vila (2003) y Villa y Callejo (2004a, 2004b) concebimos el término creencias como las ideas que presentan (los alumnos) asociadas a actividades y procesos matemáticos y a la forma de proceder en dicho quehacer que, en este caso, centrado en la actividad que supone resolver un problema y cómo proceder para ello. Como ya se ha mencionado en el apartado 2 del apartado Marco Teórico (capítulo 1), de acuerdo con estos autores, se trata de un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan, están ligadas a situaciones y tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo. Así mismo, aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar. Por ello, las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida (Vila y Callejo, 2004b). Cuando se refiere a sistema de creencias, cabe entenderlo como una forma organizada psicológicamente, de todas y cada una de las incontables creencias personales (Vila y Callejo, 2004b).

Así, ante el papel fundamental que juega el sistema de creencias de cualquier resolutor (Callejo y Vila, 2003), se pidió a los alumnos por lo que ellos consideraban cómo más

importante a la hora de resolver problemas matemáticos y qué tenían en cuenta a la hora de hacerlos. Se trata de la cuestión 1, que referenciamos como C1, del cuestionario que se describe en la Tabla 2.12 del apartado 3 del capítulo 2. La pregunta en particular fue:

C1. ¿A la hora de responder un problema, qué tienes en cuenta? Y, ¿qué crees que es lo más importante?

Sus respuestas fueron diversas y con distintos enfoques. Su análisis resulta interesante especialmente por la variedad de respuestas recibidas en cuanto a unas u otras creencias, para entrever cómo éstas pueden afectar a la dinámica que requiere la resolución de un problema y, por tanto, percatarnos qué aspectos considerar y enfatizar en las dimensiones que pueda contener la base de orientación.

Las cuestiones fueron planteadas tras finalizar la Implementación Primera (I1), por tanto, una vez aplicada la base de orientación para la resolución de los siete problemas mencionados. Después haber trabajado con la base de orientación durante un trimestre, cuatro alumnos de los cinco grupos de alumnos participantes, consideró la conclusión final al problema como el único aspecto más relevante en el proceso de resolver un problema.

- *Lo más importante es el resultado* (C1_AL1C12)
- *La solución.* (C1_IT6A02, C1_IT6A19)
- *La respuesta.* (C1_AL1D12)

Con ello se descubre un uso indistinto para las palabras *resultado*, *respuesta* y *solución* para expresar el hecho de dar la solución final al problema. Vinculado a la discusión de vocabulario y expresiones mantenida en el primer apartado de esta sección resulta fundamental esclarecer entre los distintos matices y palabras utilizadas para elementos que en ciertos contextos pueden difundirse lo que conlleva la necesidad de ser entendidos y diferenciados de manera correcta especialmente para las situaciones en que es necesario distinguirlas. Así, estas tres palabras: resultado, solución y respuesta, deberían de concretarse en cuanto al resultado de una operación o algoritmo, la respuesta entendiéndose como la réplica o contestación concreta a lo pedido y solución, como el proceso que permite llegar a la respuesta dada. Así es como se han utilizado dichos términos en la versión de la base de orientación utilizada para la Implementación 3, será luego imprescindible distinguir entre estas ideas.

Otros alumnos hacen referencia al resultado final o a la solución, pero considerando otros aspectos que ligan con el trabajo previo a dar la solución. Así, mencionan que el resultado es importante pero también lo que expone o pide el problema, así como entenderlo. Es interesante destacar aquí que, en estos casos los alumnos no hablan de “la repuesta” o “la solución”, sino de una o la mejor solución, evidenciando así un proceso de reflexión que no se conforma con la primera y posible solución que se pueda encontrar en relación a lo expuesto y pedido.

- *El problema y el resultado, y qué te dice el problema.* (C1_IT6B12)
- *Entenderlo y saber una respuesta.* (C1_SC1A22)
- *Fijarse de que va el problema y encontrar la mejor respuesta que sea posible.* (C1_AL1D20)

Destaca aquí también el orden en qué destacan el hecho de entenderlo o de tener una respuesta. En dos de los casos referencia, en primer lugar, el hecho de entender el problema y luego fijarse en los posibles resultados o respuestas, mientras que en el primero lo comenta al revés.

De hecho, un alumno constata que la solución puede ser importante, pero no tiene porque siempre ser el centro de atención:

- *Los datos, las operaciones, las preguntas y, en algunos casos, la solución.* (C1_IT6B06)

Otra de las fijaciones principales de los alumnos son las operaciones, sin más. En cuatro casos es considerado lo único importante. En dos de ellos se refleja la posibilidad de que se tenga que hacer más de una operación:

- *Las operaciones* (C1_IT6B13)
- *Que las operaciones estén bien.* (C1_IT6B08)

Un tercer alumno refleja el tema de las operaciones refiriéndose a los operadores que distinguen una u otra operación:

- *Los signos* (C1_AL1C22)

Finalmente, la cuarta reflexión desvela la concepción que no sólo todo se reduce a las operaciones sino que simplemente debe reducirse a sola y única operación:

- *La operación* (C1_IT6A05)

Estos cuatro no son los únicos casos en qué la(s) operación(es) se manifiestan como una preocupación relevante. Si bien en estas cuatro expuestas es la única, en la que vienen a continuación resultan un elemento principal de importancia, pero no el principal. Las reflexiones expuestas dan cuenta de que además de las operaciones son también importantes los datos o entender bien los datos. Es curioso el orden que dan a la exposición de un u otro elemento. Ellos puede permitir afinar cómo los alumnos, en su interior, tienen asociadas los distintos elementos e ideas que entran en juego y se necesitan para poder resolver un problema. Así, destaca en primer lugar, la importancia que dan a las operaciones, ligado a los datos. Es de notar que en ambos casos simplemente hacen referencia a una sola operación. Así mismo, si en el primer caso “la operación” precede a los datos, en el segundo dan prevalencia a los datos y a continuación, “la operación”.

- *Que la operación y los datos estén bien.* (C1_IT6B02)
- *Los datos que te dan y la operación que tienes que hacer.* (C1_IT6A04)

Aunque siguiendo con la idea de una sola operación y que la importancia que esta se merece prevalece ante otros elementos, en las siguientes reflexiones se va considerando el hecho de entender el problema como algo, aunque no en primer plano, relevante:

- *Qué tipo de operación tengo que hacer. Entender el problema.* (C1_IT6B07)
- *Saber la operación y entender el problema.* (C1_IT6B05)

En ambos casos es de notar el uso de las expresiones “tener que” y “saber”. En ambos casos aparece que la operación es conocida, de carácter general, como si fuera algo prefijado o surgiera por un indicación o de la nada, sin tener previamente que pasar por un proceso de, al menos, de reflexión o selección. Es pues de notar el uso de las expresiones comentadas en frente de otras como “encontrar”, “determinar” o “buscar”, entre otras.

A diferencia de las referencias anteriores, encontramos también la reflexión que después de entender bien el problema, otro factor relevante recae en las operaciones. Como se ha visto anteriormente para algunos alumnos son fundamentales las operaciones, ya sea de manera única, o bien no único pero en primer plano y, luego otros factores como entender el problema. Del siguiente comentario se desprende, aunque en la misma dirección, una visión en el sentido inverso, es decir si bien dando importancia a las operaciones pero primero habiendo entendido al problema.

- *Entender bien el problema y saber hacer las operaciones.* (C1_IT6A07)

En este caso, cabe notar que la reflexión, así expuesta, no hace referencia directa a las operaciones por si o bien a determinar qué tipo de operaciones realizar, sin más, sino en saberlas hacer, resolver o desarrollar. Así pues, da cuenta más que de el desarrollo de las operaciones que se pueda ver expuesto a realizar, que no a plantearlas... Es decir tener las habilidades para resolverlas.

Finalmente, analizando los distintos matices que van apareciendo en la exposición de las observaciones de los alumnos, encontramos la relevancia a las operaciones pero a diferencia de las anteriores, en las que daban a entender que las operaciones se tienen que saber de antemano o bien a la importancia a cómo afrontar los procesos que requieren, en el siguiente especifica la importancia que recae en el planteamiento que lleva a determinarlas:

- *La solución de las operaciones y el planteamiento.* (C1_IT6A13)

En alguna de las referencias anteriores se ha observado la importancia que para algunos de los alumnos cobran los datos del problema. En este sentido, para nueve de los alumnos, los datos son lo único y más importante para la resolución de un problema. Así lo constatan las aportaciones siguientes:

- *Los datos.* (C1_IT6A08, C1_IT6A09, C1_IT6B15, C1_AL1D17, C1_SC1A19)

Un par de los nueve, además, enfatizan la importancia que requiere encontrarlos y analizarlos:

- *Me parece más importante analizar todos los datos del problema.* (C1_AL1C15)
- *Encontrar todos los datos.* (C1_IT6A17)

Y dos más de ellos enfatizan que no tienen por qué ser todos los datos importantes. En este sentido, diferencian los datos buenos o necesarios, exponiendo, en un caso, el por qué de ello.

- *Los buenos datos.* (C1_IT6B18)
- *Les datos que necesitaremos, para hacer las operaciones, y poder resolver el problema.* (C1_SC1A04)

En la línea de este último comentario, dos alumnos expresan la importancia que para ellos se merecen los datos, pero lo ligan a otros quehaceres necesarios, dando al mismo tiempo sentido al motivo de entender los datos.

- *Los datos y entenderlo.* (C1_IT6A11)
- *Los datos y lo que nos preguntan.* (C1_IT6A14)

Sin duda alguna los datos que se dan en un problema son relevantes para su posterior resolución. Así mismo se evidencia que alumnos restringen la idea de datos a solamente números. En este sentido, cuatro alumnos expresan la importancia que, bajo su concepto, se merecen los números. Si bien tres de ellos lo vinculan a otros quehaceres o ideas, uno les da importancia única y exclusiva.

- *Lo más importante son los números* (C1_AL1C05)
- *Las operaciones y valores (números) con los que se tiene que trabajar.* (C1_AL1D15)
- *Leer el enunciado y mirar los números más importantes.* (C1_AL1D22)
- *Leerlo bien, mirar los números, las operaciones... y entenderlo bien para después resolverlo.* (C1_IT6BA01)

Si bien se han encontrado referencias a la importancia que se merecen los datos, también encontramos referencias a la importancia que se merecen las preguntas o quehaceres que se piden en el problema, ligados o no a los datos. Algunos así lo intentan justificar:

- *Lo que te piden* (C1_SC1A21)
- *La pregunta es lo más importante porque no sería un problema si no se puede resolver.* (C1_IT6B17)!!!
- *La pregunta y los datos.* (C1_IT6B1711)

Pero más que la pregunta sea importante, lo más relevante es entenderla. Así lo muestran el comentario de dos alumnos distintos:

- *Entender lo que te están preguntando.* (C1_SC1A11, C1_SC1A21)

Entre las observaciones anteriores destacan algunas referencias, aunque como característica secundaria, el hecho de entender, más que la pregunta, el problema. En este sentido, se observa una buena cantidad de alumnos que concluyen que lo más importante recae en entender, ya sea de entender todo lo expuesto a considerar, de manera general, la cuestión a resolver o la exposición de la situación conflictiva. En este sentido estas distinciones dan cuenta de la relevancia que puede suponer que los alumnos distinguen entre las distintas partes que puedan presentar el enunciado y qué papel juega cada una de ellas en la resolución de un problema. En los distintos casos, distintos alumnos comparten que para ellos es lo único y principal más importante:

Así, destacamos la única referencia que la importancia en comprender la globalidad de lo expuesto en el problema:

- *La comprensión.* (C1_AL1D03)

Otros casos en que enfatizan la importancia de entender las cuestiones a resolver:

- *Saber lo que te pide.* (C1_IT6A15)
- *Entender qué se tiene que hacer.* (C1_SC1A05)

Y, los otros casos en que destacan la importancia de entender la exposición de la situación conflictiva que conlleva el problema a resolver, y de las cuales extraemos los distintos matices en qué se encuentran:

- *Saber el motivo del problema.* (C1_SC1A27)
- *Entender qué te quiere explicar el problema.* (C1_SC1A12)
- *Entender el problema.* (IT6A21, IT6B07, IT6B14, IT6B19, IT6B20, AL1C10, AL1C14, AL1C19, AL1C21, AL1D07, AL1D11, AL1D18, SC1A01, SC1A07, SC1A09, AL1C17, SC1A23)

Incluso, así algunos lo intentan justificar:

- *Entender el problema porque si no comprendes el problema no lo podrás hacer.* (C1_AL1D05)
- *Entenderlo y saber el problema, porque así puedes solucionarlo más fácilmente.* (C1_SC1A18)

Unos pocos añaden que ligado a ello, es importante resolver bien el problema. En este sentido, se entiende que es el deseo de todos, lo que esta precisa de concreción.

- *Entender y resolver el problema.* (C1_AL1D01, C1_AL1C09, C1_AL1D21, C1_AL1C02)

Y, volviendo a la importancia de los datos, encontramos referencias a la relevancia que, una vez entendido el problema, se deben utilizar bien los datos. Aquí, pues, una nueva idea en relación a los datos que no se refiere a detectarlos, a concretarlos, sino a los que se utilicen, hacerlo de la manera oportuna.

- *Entenderlo y poner bien los datos.* (C1_IT6B10, C1_AL1C03)

Finalmente, se encuentran tres referencias a entender el problema, antes de intentar resolverlo:

- *Entender el problema antes de hacerlo.* (C1_SC1A13, C1_AL1C01)
- *Saber qué tienes que hacer antes de resolver el problema.* (C1_AL1D19)

Si para poder iniciar una posible resolución hay que entender que expone la situación, para tal comprensión es necesario conocer la situación. Si dicha situación viene descrita en un documento, como este es caso, ante nada cabe leer el problema. Así pues, un buen número de alumnos destacan la lectura del problema como lo más importante. Destacamos aquí sus aportaciones diferenciando el énfasis que tal lectura conlleva.

En relación a entender la exposición general del problema:

- *Leerse bien el problema con atención.* (C1_IT6B01)
- *Leerlo bien y entenderlo.* (C1_IT6B16, C1_IT6B21)
- *Entender el problema leyéndolo dos o tres veces.* (C1_AL1C08)
- *Leerlo hasta que sepa lo que quiere decir.* (C1_AL1D13)

Referenciando, de manera específica, las preguntas o quehaceres expuestos en el problema:

- *Leer bien el enunciado para saber lo que te pide.* (C1_AL1D16)

Primeras referencias a:

La generación y gestión de puntos conflictivos durante el proceso de resolución:

- *Leer bien el enunciado, porque si no, a partir de ese pequeño fallo todo lo siguiente puede estar mal.* (C1_IT6A03)

Concreción y precisión a la hora de responder las preguntas formuladas y desarrollar la solución:

- *Leer un par de veces para responder bien.* (C1_AL1C16)
- *Leer con atención y pensar antes de escribir.* (C1_AL1D10)

De hecho, para tres de los alumnos la importancia máxima debe ser cobrada por el proceso de resolución. Cabe aquí destacar los distintos énfasis que cada uno de estos tres alumnos dan a ello. Como se observa, para el primero lo importante es “saber”. El hecho de “saber” vuelve a dar la impresión que es algo que se da por hecho, que es conocido, cuando de hecho resolver el problema recae en poder determinar dicho proceso. El segundo, recalca que lo importante es saber explicar dicho proceso. Aquí se entiende, pues, que, de alguna manera, se da con un proceso que debe de ser expuesto y compartido. Finalmente, el tercero enfatiza que hay que tener en cuenta dicho proceso, como si uno pudiera determinar un proceso pero no seguirlo para resolver el problema. Con ello se entra en una especie de controversia conformada por el hecho de disponer de un proceso que después se pueda exponer, compartir o aplicar como se quiere, se desea o se espera.

- *Saber el procedimiento.* (C1_IT6A16)
- *Explicar el proceso.* (C1_SC1A25)
- *Tener en cuenta el proceso que tienes que hacer durante el problema.* (C1_IT6A23)

De estos tres mismos comentarios se desprende otra reflexión, de nuevo vinculado a la discusión de vocabulario y expresiones. En este sentido, afecta a la necesaria distinción entre procedimiento y proceso, aquí utilizados con la misma finalidad.

Vinculado a los procesos que pueden permitir desarrollar la solución al problema, ligado a la comprensión del problema y de sus preguntas, surgen unas incipientes referencias a la importancia que puede recibir interpretar y reproducir el problema con las propias palabras y expresiones del resolutor. Aquí las referencias:

- *La comprensión del problema y hacer un esquema mental, y pensártelo bien.* (C1_SC1A15)
- *Tener la posibilidad de hacer dibujos, para poder visualizar el problema, como a cada uno le vaya bien.* (C1_SC1A28)
- *Saber interpretar el problema, y ordenarlo.* (C1_SC1A03)

A parte de la importancia principal que las tres reflexiones comparten en cuanto al hecho de representar el problema, cada una de ellas aporta ciertos matices que merecen atención

especial. La primera enfatiza el hecho que debe de realizarse un esquema, pero mental. La segunda, alude a la libertad de que cada resolutor pueda realizar su propia interpretación para visualizar la situación. Finalmente, la tercera observación recalca un cierto orden en la interpretación.

En cuanto al orden, destacan otras dos reflexiones:

- *Hacerlo ordenadamente y tranquilamente.* (C1_SC1A14)
- *Seguir las pautas por orden.* (C1_SC1A10)

La primera, como la previa anterior, da cuenta de la importancia de exponer de manera ordenada lo que uno va realizando y que se desarrolle de manera tranquila, sin alterarse. El segundo comentario, si bien enfoca la necesidad de un cierto orden, toma especial interés especialmente porque si bien pueden seguirse unas pautas (como pueden ser las de la base de orientación) en un cierto orden, debe quedar constancia que dicho orden puede ser reordenado. En este sentido cabe destacar un orden a la hora de trabajar y explicar, pero que dentro de este orden, pueden ser necesarias reorganizaciones internas. De ello se hablará en la sección siguiente.

Siguiendo con las reflexiones que afectan directamente a la atención y la concentración que el propio resolutor debe mantener para el proceso de resolución, destacan estas tres últimas:

- *No te tienes que irritar. También tengo que entenderlo.* (C1_SC1A31)
- *No distraerme mientras hago una operación.* (C1_SC1A17)
- *Hacer las operaciones bien, y repasarlas.* (C1_SC1A24)

En este sentido, se sigue destacando el hecho de mantener la calma y la tranquilidad con cierto orden de aplicación. Evitar distracciones, especialmente cuando se hace una operación, según remarca el estudiante que así lo considera, y por vez primera, surge el hecho de repasar. Con ello pues, detectamos un sólo un alumno que da especial interés a revisar algo de lo hecho, aunque en su descripción (como el caso de la distracción) se refiera solamente a realizar una operación.

4.2.2 Lenguaje utilizado en la base de orientación

Reflexiones sobre el vocabulario, expresiones, y lenguaje, en general, a utilizar, han estado presentes entre el grupo de reflexión desde el momento que se pretendió adoptar la Rúbrica como base de orientación. De hecho, uno de los primeros aspectos que tomaron especial importancia en el momento de diseñarla y que no se han dejado de trabar a lo largo de las distintas implementaciones fue la verbalización y la descripción de las distintas ideas que la confinan. Así, entró en reflexión el lenguaje a utilizar, en tanto que las palabras y expresiones a considerar, como el tiempo, persona y modo verbal. En este sentido los alumnos han mostrado también sus necesidades y opiniones al respecto. Con lo que sigue, intentamos ligar las distintas apreciaciones que han surgido, diferenciando primeramente un aspecto más relacionado con las palabras y expresiones utilizadas y un segundo para los tiempos verbales. Con ello surge también la adecuación de palabras procedentes de otros idiomas.

a) Palabras y expresiones

Con lo que respecta a las palabras y expresiones utilizadas, de las reflexiones de los alumnos,

se desprende una cierta dificultad para entender todas las utilizadas desde un inicio. Así, al concretar la opinión que, desde su punto de vista se merece el lenguaje utilizado, a parte de las confirmaciones de no tener dificultades con él, recibimos las observaciones que así lo describen.

- *Un poco lenguaje alto.* (C10_IT6A16)
- *Estaba bien pero había palabras que no entendía.* (C10_IT6A05)
- *Hay palabras que cuestan.* (C10_SC1A25)
- *Yo creo que el lenguaje tendría que ser un poco menos complejo porque hay alguna palabra que no se entiende.* (C10_AL1D05)
- *El lenguaje en algunos casos es un poco complejo.* (C10_SC1A03)
- *Creo que una rúbrica para alumnos de 6º o 1º de ESO debe de ser más clara y debe utilizar palabras más comunes.* (C10_SC1A23)

De hecho, coincide con las observaciones recogidas por los docentes en cuanto que tanto en el momento de presentar la base de orientación en las respectivas aulas, así como durante algunas sesiones de trabajo en las que algunos de ellos tuvieron que recordar algún vocablo, los docentes compartieron el hecho que diferentes alumnos habían mostrado su desconocimiento en cuanto al significado de algunas palabras utilizadas en la base de orientación BO1. En especial, destacaron las palabras *magnitud*, *estrategia* o *algoritmo* como las que generaron más incierto. Y así se confirma con las observaciones compartidas de los alumnos en sus respuestas a la cuestión C10:

- *Hay palabras que no entiendo (algoritmos)* (C10_SC1A18)
- *No entendí la palabra "magnitudes".* (C10_IT6B17)

En cualquier caso, tal como se describía en las pautas para el profesorado, las dudas debían de ser discutidas, resueltas y consensuadas. En este sentido, las reflexiones de los alumnos constatan que así fue:

- *Sí, bueno no todo pero el profesor lo explicó bien. Es clara y comprensible.* (C10_SC1A01)
- *Yo le añadiría cosas que nosotros entendemos. O sea, es decir, hay palabras que nos las tiene que explicar el profesor.* (C10_SC1A27)

El hecho que las respuestas fueran dadas en pasado, puede dar a entender que finalmente se pudo entender adecuadamente el sentido de las palabras utilizadas.

- *Había palabras que no entendía.* (C10_IT6A21)

En cualquier caso, estas reflexiones evidencian que, de manera general, los alumnos implicados desconocen o no dominan ciertas palabras o expresiones. Luego, resulta imprescindible que el vocabulario usado en la base de orientación sea, no sólo cómodo y ágil, sino también familiar al alumnado. Aquí, pues, entra en hasta qué punto resulta necesario asegurarse que el alumnado domine previamente el vocabulario a emplear, realizando un trabajo previo o simultáneo a la aplicación o estructuración de la base de orientación, o bien si resulta preferible usar expresiones lo más simple posibles, sin ningún otro añadido.

Con ello, se convino que es necesario asegurarse de las definiciones que se aceptan para los

vocablos utilizados, especialmente para éstos, ya que es posible que no siempre los diccionarios o soportes que podamos utilizar en el aula coincidan en sus explicaciones. Así, por ejemplo, para las palabras que comentábamos, encontramos definiciones como las que se exponen en la Tabla 4.1:

	RAE	Wikipedia
Magnitud	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tamaño de un cuerpo. 2. Grandeza, excelencia o importancia de algo. 3. <i>Astr.</i> Medida logarítmica de la intensidad relativa del brillo de los objetos celestes, medida que es mayor cuanto menor es su luminosidad. 4. <i>Fís.</i> Propiedad física que puede ser medida; p. ej., la temperatura, el peso, etc. 	<p><i>Matemáticas.</i> Un conjunto de entes que pueden ser comparados, sumados, y divididos por un número natural. Cada elemento perteneciente a una magnitud, se dice cantidad de la misma (por ejemplo: segmentos métricos, ángulos métricos y triángulos son magnitudes).</p> <p><i>Física.</i> Se dice de cualquier propiedad de un sistema que es susceptible de medición.</p>
Estrategia	<ol style="list-style-type: none"> 1. Arte de dirigir las operaciones militares. 2. Arte, traza para dirigir un asunto. 3. <i>Mat.</i> En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento. 	<p>La disciplina de coordinar las acciones y recursos para conseguir una finalidad.</p> <p><i>Informática.</i> Procedimiento o conjunto de reglas para tomar decisiones optimas en el control de un proceso.</p>
Algoritmo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. 2. Método y notación en las distintas formas del cálculo. 	<p>En matemáticas, [...] es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad.</p>

Tabla 4.1. Distintas definiciones de palabras utilizadas en la base de orientación BO1

De la misma manera debemos vigilar con las interpretaciones y traducciones de expresiones ajenas al idioma utilizado de manera habitual y decidirse por aquellas palabras que den sentido a lo que pretendemos con ellas. Paramos especial atención en las interpretaciones de las palabras utilizadas para dar y explicar la solución a un problema. En la bibliografía consultada presenciamos el uso de solución (p. ej. Polya (1945) pero también resolución (p. ej. Mason et al. (1982)). Y atendiendo los comentarios directos de los alumnos, surgen otras palabras visiblemente arraigadas al vocabulario de nuestros alumnos que utilizan de manera indiferente sin que así sean, como pueden ser las palabras *respuesta* o *resultado* para dar la conclusión a las cuestiones del problema, o *proceso* o *procedimiento*, para referirse a las acciones que permiten llegar a ella. En este sentido, debemos de ser muy conscientes de lo que entendemos por cada uno de estas palabras, especialmente para poder obtener de las resoluciones de los alumnos la máxima información posible.

b) Tiempo verbal

De manera general, se cuestionó el tiempo, modo y persona con qué redactar las dimensiones de la base de orientación. En la base de orientación BO1 utilizada en esta Implementación Primera, las dimensiones se presentan en 1ª persona del singular, en presente y modo indicativo.

Siendo el objetivo que el alumno perciba, en todo momento que es él mismo no sólo el resolutor, sino también el guía de sus procesos, justifican el uso de la 1ª persona del singular. La finalidad es que cada alumno, por sí mismo, con el tiempo pueda lidiar con el control que le permite afrontar la resolución al problema. Luego, es necesario enfatizar que es uno mismo y no cualquiera quien trabaja con la base de orientación.

Por otro lado, el alumno resolutor utiliza la base de orientación al tiempo que desarrolla la resolución al problema actuando como su propio monitor. De aquí surge la propuesta de si las dimensiones deben de ser presentadas como cuestiones, a las que el propio alumno puede someterse, o bien presentarlas como acciones. En este sentido se descarta el modo pregunta por reducir la intención la idea de dejar por escrito la intención de la dimensión a aplicar, cuando justamente gran parte del objetivo de la base de orientación es que las ideas que van surgiendo durante el proceso de resolución queden plasmadas en el papel. Si bien con el modo pregunta el alumno puede sentir una noción más profunda al hecho de cuestionarse y responder la pregunta, el hecho que generalmente los lleva a hacerlo con un simple sí o no, reduce la intención que puedan dejar por escrito la intención de la acción que realmente se pretende que lleve a cabo. De otra manera, si las dimensiones se presentan como acciones a realizar durante el momento de resolución, da a entender que así deben de quedar realizadas o evidentes, y explicadas.

Por otro lado, como el momento de resolución del problema, el de guía para llevarlo a cabo, y el de revisión para así desarrollarlo es simultáneo. Con la finalidad de enfatizar este hecho, el tiempo escogido fue el del presente de indicativo, y así se mantuvo para la Segunda Implementación. Posteriormente, para enfatizar el hecho que el proceso de resolución no es lineal al tiempo que enfatizar el hecho de estar revisando continuamente los procesos de resolución y de guía, se convino el uso del pretérito perfecto, dando así la idea que uno poder regresar a cualquier momento de la resolución al mismo tiempo que estar revisándola o guiando el proceso.

En cualquier caso, es fundamental que las indicaciones que transmitan las dimensiones pretendan que el alumno no olvide que es el mismo quien sigue, revisa y lleva a cabo el proceso de resolución, que ambas acciones coexisten hasta dar con el final de la resolución del problema y que es uno mismo, como resolutor, quien debe tomar total responsabilidad ante ellos en todo momento. En definitiva, lo que se busca es que los alumnos vayan adquiriendo la actitud activa de reflexionar matemáticamente por sí mismos (Mason et al., 1982).

4.2.3 Estructura general de la base de orientación

Ligado al lenguaje utilizado aparece la estructura, condicionada por el volumen, el tipo de información y el modo en qué es preferible que facilite la base de orientación. Ello implica la cantidad de información que la base de orientación debe presentar y cómo ésta debe de ser distribuida de manera más conveniente. Como se ha mencionado en la Metodología (capítulo 2), en la BO1 se distinguen dos conceptos estructurales, los dominios y las dimensiones. En este sentido los dominios pretenden establecer un marco general de actuación, mientras que las dimensiones pretenden concretar cómo abordar cada una de estas partes más generales. Luego, se requiere el análisis de tanto el número de dominios y dimensiones a distinguir, la información que deben proveer, así como las relaciones a establecer entre ellas mismas, en

función del proceso de resolución de un problema. En este sentido, cabe enfatizar que la base de orientación busca ayudar a resolver y a guiar el proceso de resolución, pero sin concretar o precisar en exceso el camino a la búsqueda y a la investigación que dicho proceso requiere.

De acuerdo con lo expuesto en la Metodología (capítulo 2), La base de orientación aplicada en la Implementación Primera (BO1) surge como una adaptación para los alumnos de la Rúbrica inicialmente diseñada para el uso de los docentes (Rb1). Consecuencia de ello, la Base de orientación utilizada en la Implementación Primera, BO1 está basada en las ideas de Polya (1945) complementadas por las observaciones de De Corte et al. (2000a, 2003) y las propuestas de Mason et al. (1982). Además, y consecuentes por cómo fue diseñada la Rúbrica, la base de orientación ha sido generada de acuerdo con los procesos de resolución que, de manera general, fueron observados previamente en los alumnos de las edades consideradas. En este sentido esta base de orientación inicial surge del desglose en las distintas dimensiones descritas y los cuatro niveles de adquisición que se distinguieron en la Rúbrica inicial (R1). Con ello, esta primera versión de la base de orientación (BO1) dispone de diez dimensiones, que entendemos como diez acciones básicas que persiguen guiar el proceso de resolución de un problema matemático que, a su vez, se encuentran distribuidas en los tres bloques distintivos, llamados dominios, establecidos por el análisis que sigue a continuación.

En la resolución de un problema, Polya (1945) determina cuatro fases: entender el problema (*Understanding the problem*), concebir un plan de acción (*Devising a plan*), llevar a cabo el plan de acción (*Carrying out the plan*) y volver la mirada atrás (*Looking back*). De la primera fase deriva nuestro primer dominio *Comprendo el problema* que, aún siendo un punto clave en la resolución de todo problema a menudo se pasa por alto cuando, probablemente debido a su aparente obviedad (De Corte, 2000b, Mason et al., 1982, Polya, 1945). De la segunda y tercera fase, emerge nuestro segundo dominio *Estructuro y Desarrollo un plan de acción*, cuya finalidad abarca el hecho de encontrar una estrategia de resolución, con todo lo que ésta requiera, y así desarrollarla y describirla.

Como se ha comentado en la Metodología (capítulo 2), ante la dificultades observadas que conllevaba la separación de estas dos fases (idear y llevar a cabo el plan de acción) especialmente para ser valoradas por los docentes mediante la Rúbrica, y en la línea del análisis de Mason et al. (1982) en el que se establecen tres fases de trabajo, se convino su unión. La conservación de esta unión fue reforzada por el carácter heurístico que caracteriza la dinámica que enlazan estas dos acciones (idear y aplicar) y que entendemos aún resulta complicado de percibir por separado a los alumnos. Idear conlleva probar y arriesgarse a intentar con el que será el futuro plan de acción que deben llevar a cabo, lo que se convierte en un proceso cíclico que finaliza al decidirse por uno de estos intentos y, a partir de aquí, justificarlo de manera convincente.

Coincide esta dinámica con el proceso cíclico (ver Figura 4.1) que Mason et al. (1982) presenta como conjeturar y que, junto con la justificación convincente, caracteriza su segunda fase de resolución, que denominan de Ataque.

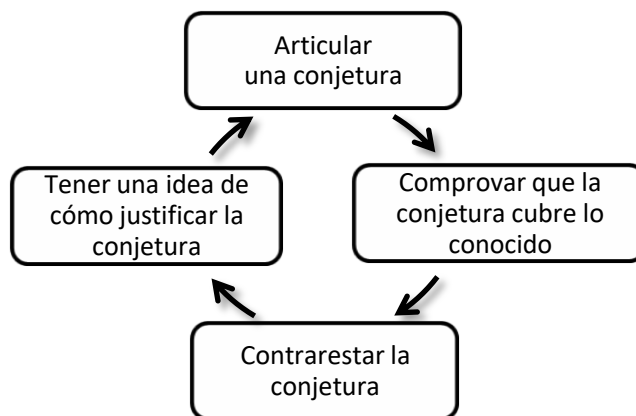


Figura 4.11. Descripción del proceso cíclico de conjeturar propuesto Mason et al. (1982)

Finalmente, se encuentra el tercer bloque dedicado a la Revisión que, siguiendo las fases de Polya y también de Mason, conlleva la visión retrospectiva del proceso de resolución, en la que se sugiere no sólo una revisión del trabajo realizado, sino también una mejora y posible extensión del mismo.

Observamos que, con lo descrito se genera una estructura muy similar a la del texto narrativo, conocida por los alumnos desde pequeños, que comprende las partes de Introducción, en la que se presentan los personajes, el escenario, y demás elementos que conforman la normalidad de la historia; el Nudo, que se inicia cuando aparece un elemento de tensión que rompe con la normalidad planteada en la introducción, los personajes se ven envueltos en el conflicto y actúan en función del objetivo que persiguen; y el Desenlace, donde llegado un punto de tensión determinado, ocurre algún hecho que reordena estos elementos y establece una nueva normalidad, pudiendo ser esta nueva normalidad similar, mejor o peor, o completamente diferente a la previa al conflicto. Lo importante es que el desenlace deja planteado como serán las cosas a partir de ese momento

Estructura argumental	INTRODUCCIÓN	NUDO	DESENLACE
	Se presentan los elementos que conforman la realidad de la historia. Induce hacia el nudo.	Aparece un elemento de tensión que irrumpe con la realidad planteada.	Ocurre algún hecho que reordena los elementos y establece una nueva realidad, similar o diferente; positiva o no.
Dominios de resolución	COMPRENDO	ESTRUCTURO Y DESARROLLO	REVISO

Tabla 4.2. Relación entre la Estructura argumental de un texto narrativo y los dominios de resolución de un problema matemática en la base de orientación utilizada en la Implementación Primera (BO1)

En este sentido, se percibe cierto paralelismo entre los tres dominios de la base de orientación como representantes de las tres fases fundamentales y básicas destacadas para la resolución de un problema y las tres partes básicas del análisis de un texto narrativo. Para así visualizarlo, en la Tabla 4.2, se agrupan cada una de las tres fases de resolución a un problema matemático identificadas, y que identificamos como Dominios, con las partes generales de cualquier estructura argumental. Así, y en este orden, Comprender el problema se correspondería con la Introducción de la estructura argumental; Estructurar y desarrollar un plan de acción con el Nudo; y, finalmente, Revisar con el Desenlace. Esta relación permite entender el proceso de

resolución a un problema matemática como la historia del proceso de descubrimiento de la solución a un problema matemático, a la vez que, como se ha analizado anteriormente, establecer una pauta de análisis de cualquier resolución a problema matemático.

En relación a la nomenclatura para los Dominios de la base de orientación Inicial (BO1), después de la Implementación Primera, el profesor SC1A observó que así como se describía el Dominio 2: “*Estructuro y desarrollo un plan de acción*” resultaba demasiado abstracto, con falta de familiaridad con las palabras utilizadas por lo que se propuso de sintetizar por: “*Tengo un plan de acción*”, haciéndose así más próximo a una acción palpable a los alumnos que da a entender la finalidad buscada/pretendida con esta fase. De hecho esta observación liga con la dificultad de carácter heurístico discutido para generar la base de orientación. Con relación al Dominio 3, pensamos que se podría describir de manera más completa como: “*Reviso mi trabajo*”. Ambas consideraciones fueron consideradas y aplicadas para la actualización de la base de orientación, ya considerada como tal. Así, la base de orientación utilizada en la Implementación Segunda (BO2) consta de tres etapas básicas definidas como Entender el problema, Tener un plan de acción y Revisar el trabajo realizado.

En tanto, de la propia experiencia y de acuerdo con las referencias bibliográficas consultadas, constatamos que al resolver un problema el resolutor necesita ir modificando su mirada al problema una y otra vez, cambiando así de punto de vista (Polya, 1945). En este sentido Mason et al. (1982) más que organizar el proceso de resolución en tres fases, a las que etiquetan como Entrada (*Entry*), Ataque (*Attack*) y Revisión (*Review*), realzan los vínculos que entre ellas surgen como se ve representado en la Figura 4.12.

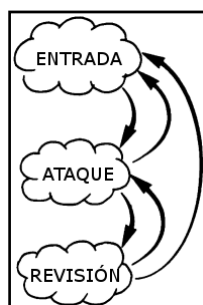


Figura 4.12. Fases de Resolución de un problema matemático y sus vínculos (Mason et al., 1982)

De nuestra experiencia, nos gusta remarcar que más que vínculos se trata de un cierto solapamiento entre ellas. Iniciado un proceso de resolución, al identificarse una de las fases, ésta se ve inmediatamente vinculada con la(s) fase(s) aparecida(s) con anterioridad, de manera que va apareciendo una conexión prácticamente permanente entre ellas. Así mismo, a lo largo del proceso hay momentos en que estas fases se hacen más evidentes, pues aparecen de manera clara por sí solas, y otros momentos puntuales en los que partes de una de las fases inciden directamente en otra fase, siendo estos puntos los evidentes de su vinculación. Con ello, entendemos la resolución de un problema como una acción continua en el tiempo, en la que se pueden distinguir tres etapas que si bien aparecen en cierto orden y a medida que aparecen se ven inmediatamente vinculadas con las anteriores (de hecho podríamos pensar que las absorben), ciertas relaciones pueden resultar más visibles por la compartición o influencia directa de algunas de las acciones que las describen (correspondientes a las dimensiones de la base de orientación). Con ello, el cuadro que ilustra la historia del proceso de resolución en el tiempo podría ser reinterpretado, de manera inicial y general, de la manera

siguiente, en el que la finalización de un problema claramente puede resultar la chispa de un siguiente.

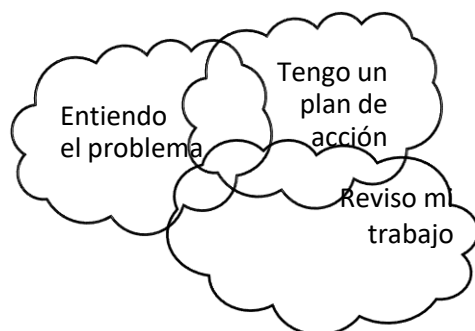


Figura 4.13. Etapas de resolución a un problema matemático: vinculación y continuidad en el tiempo

En este sentido, podemos entender el proceso de resolución de un problema como la coexistencia de tres etapas que si bien aparecen en cierto orden conviven hasta el final del proceso. Las tres etapas deben desprender actividad, en ningún caso algo estático o puntual y, aunque pueden presentar periodos de más o menos inactividad, conforman un todo continuo en el tiempo, dando cuenta de una historia, la de descubrir solución o falta de ella y así explicarlo, a un problema matemático. Así lo pretende ilustrar la Figura 4.13, en la que la actividad se pretende ilustrar mediante la forma no regular de las nubes y la interacción entre ellas con los bordes semiabiertos.

En tanto que los alumnos deben de aprender e identificar las fases de resolución para poder identificar en qué parte de la misma se encuentran y así aplicar las acciones pertinentes (Mason et al, 1982), se corrobora la necesidad que la especificación de dichas etapas aparezca de manera explícita en la Base de orientación a utilizar. Y si tenemos en cuenta el lado afectivo, no tan sólo que aparezcan sino que sean percibidas como una etapa particular por la que pasa el resolutor, o como el objetivo que debe lograr. De ahí, por el hecho de marcar un objetivo o una etapa que los alumnos deben de lograr, se sugiere, referenciar cada una de estas partes como etapas permitiéndole así sentir que forma parte del proceso que está llevando a cabo. Además, como hemos observado deben transmitir la idea de vinculación y continuidad entre sí y en el tiempo, dando pie a las distintas relaciones que pueden surgir entre estas etapas de resolución. Así, con el tiempo, los alumnos pueden ir interiorizando y familiarizándose con ellas en cualquier proceso de resolución de un problema matemático de manera que, con el tiempo, sean capaces de identificarlos y discernir las acciones necesarias para acatarlas.

4.2.4 Concreción de la base de orientación

Como se ha ido mencionando la base de orientación utilizada en la Implementación Primera (BO1), y el fundamento de la cual resultan versiones posteriores, surge de la propuesta de Rúbrica de valoración de las resoluciones de los alumnos para los docentes. Como se ha mencionado en la Metodología (capítulo 2), para la creación de dicha Rúbrica se consideraron fuentes de distinta naturaleza. De ello, surgieron las diez dimensiones que pretenden ser descriptores de los tres dominios (o etapas) observados que conducen la resolución de un problema. En este sentido las dimensiones buscan de ser lo suficientemente descriptivas para facilitar la tarea de valoración que se pretende que los docentes puedan llevar a cabo con la

Rúbrica que configuran. Al tener que adecuarlas para generar una base de orientación asociada para los alumnos, se analizó que las descripciones de las dimensiones debían de seguir siendo descriptivas pero lo más sencillas a la vez; concisas para ayudar el camino de resolución, pero lo suficientemente amplias para promocionar la reflexión y seguir propiciando libertad de actuación independientemente de los problemas; y todo ello teniendo en cuenta las características propias de los alumnos de las edades implicada. En tanto que la selección y adecuación de las dimensiones es un proceso aún abierto, ambiguo y complicado. Luego, resulta interesante analizar con más detalle las referencias bibliográficas que dieron pie a la determinación de las dimensiones consideradas en la incipiente base de orientación (BO1) y como las consideraciones de los alumnos posteriores a su uso, permiten ir las adecuando y perfilando las mismas.

Como es sabido, con la intención de guiar a los docentes en su labor de ayudar a sus estudiantes a aprender a resolver problemas matemáticos, en su obra *How to Solve it*, Polya (1945) organizó el proceso de resolver un problema matemático en cuatro fases: Entender el problema, Divisar un plan de acción, Llevar a cabo el plan de acción y Mirar a atrás (ver Tabla 4.3). Cada una de estas fases surge por la necesidad de agrupar por finalidades un conjunto de preguntas o sugerencias que, por su experiencia, pueden conducir la resolución de un problema matemático. En este sentido Polya (1945) remarca el carácter general y de sentido común del conjunto de sus preguntas o sugerencias como característica principal para que puedan ayudar a cualquier aprendiz de resolutor de problemas: *“Las cuestiones y sugerencias de nuestra lista son generales, al tiempo que son naturales, simples, obvias y proceden simplemente del sentido común. Pero mantienen sentido común en términos generales. Sugieren una conducta determinada, procedente de manera natural a cualquier persona que está seriamente inmersa en su problema y tenga sentido común. La persona que tiene el buen comportamiento no suele expresarlo adecuadamente. Nuestra lista lo pretende.”* En este sentido, como el mismo autor explica, a más sentido común, más fácilmente pueden surgir (directamente al estudiante). Cuantos más generales son, más pueden ayudar discretamente al resolutor aprendiz, en el sentido que indican una dirección general de actuación, pero dejando suficiente espacio para que el estudiante pueda desarrollar sus ideas. En la ver Tabla 4.3 se recogen, asociadas a cada una de las cuatro fases, sus preguntas y sugerencias.

De manera paralela, Polya (1945) habla de buenas y malas preguntas (o sugerencias). Bajo su punto de vista, para que una pregunta pueda considerarse como buena en resolución de problemas, debe ayudar en cuatro aspectos, principalmente: a) ayudar a donde más se necesita ayuda, b) la sugerencia que con ella se ofrece no debe desvelar completamente “el secreto” que esconde el problema, pues debe permanecer para el estudiante que hacer, c) debe de ser instructiva, en el sentido que la sugerencia no debe de ser demasiado concreta o especial, pues el estudiante debe aprender para los problemas en el futuro, y d) el estudiante, más que entender la sugerencia, se debe entender como el profesor llegó a la idea de poner una pregunta tal y cómo podría él, el estudiante, encontrar tal pregunta por él mismo.

PF1. Entender el problema	Plantear el problema por uno mismo de manera fluida e identificar las principales partes: lo desconocido, los datos, la condición.
	PF1.1. Familiarizarse: visualizar el problema en su conjunto.
	PF1.1.C1. <i>¿Qué es lo desconocido? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?</i>

	<p>PF1.1.C2. <i>¿Es posible satisfacer la condición?</i> (siendo su respuesta provisional)</p> <p>PF1.2. Trabajar para una mejor comprensión: Aislar las partes principales del problema (hipótesis y la conclusión). Aclarar los detalles</p> <p>PF1.2.C1. <i>Dibujar una figura. Introducir la notación adecuada.</i></p> <p>PF1.2.C2. <i>Separar las diferentes partes de la condición.</i></p>
PF2. Idear un plan de acción	<p>Cazar la idea útil. Observar el problema desde distintos puntos de vista: enfatizar distintas partes, examinar detalles distintos, examinar los mismos detalles de manera repetitiva pero de maneras diferentes, combinarlos de manera distinta, acercarse a ellos desde distintos puntos.</p> <hr/> <p>PF2.1.C1. <i>¿Lo has visto antes?</i></p> <p>PF2.1.C2. <i>¿Conoces algún problema que esté relacionado?</i></p> <p>PF2.1.C3. <i>Mira lo desconocido y trata de pensar en un problema familiar cuyos datos desconocidos sean similares.</i></p> <p>PF2.1.C4. <i>¿Se trata de un problema relacionado con uno anteriormente resuelto? En tal caso, ¿puedes utilizarlo? ¿Puede servirte su resultado? ¿Puede servirte su método? ¿Puedes introducir algún elemento auxiliar de manera que lo hagas útil?</i></p> <p>PF2.1.C5. <i>¿Podrías reformular el problema? ¿Podrías reformularlo de manera distinta? ¿Has reconsiderado las definiciones?</i></p> <p>PF2.1.C6. <i>Si no puedes resolver el problema propuesto trata de resolver primero algún problema relacionado.</i></p> <p>PF2.1.C7. <i>¿Has utilizado todos los datos? ¿Has utilizado toda la condición?</i></p> <p>PF2.1.C8. <i>¿Qué percibes?</i></p> <p>PF2.1.C9. <i>¿Qué puedes hacer con esta idea (aunque sea incompleta)?</i></p>
PF3. Llevar a cabo el plan de acción	<p>Seguir con paciencia cada paso del plan. Convencerse de la exactitud de cada paso, ya sea de manera intuitiva, formal o de ambos modos. Distinguir “grandes” de “pequeños” pasos. Comprobar primero los grandes pasos, y bajar a los más pequeños eh después.</p> <hr/> <p>Para cada paso:</p> <p>PF3.1.C1. <i>Comprueba cada paso. ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrar que es correcto?</i></p>
PF4. Mirar atrás	<p>Consolidar el conocimiento y desarrollar la capacidad para resolver problemas. Tratar de ver la solución como un todo. Intentar simplificar los detalles y las partes más extensas de la solución. Tratar de mejorar la respuesta para que sea intuitiva y pueda ser incorporada en el propio conocimiento de la manera más natural posible. Examinar el resultado para darle uso en otros problemas.</p> <hr/> <p>PF4.1.C1. <i>¿Puedes comprobar el resultado? ¿Puedes comprobar el argumento?</i></p> <p>PF4.1.C2. <i>¿Puedes derivar la solución de manera diferente? Puedes verla a simple vista?</i></p> <p>PF4.1.C3. <i>¿Puedes utilizar el resultado, o el método, en algún otro problema?</i></p>

Tabla 4.3. Fases de resolución de un problema y las cuestiones que guían su resolución (Polya, 1945)

De Polya concluimos, pues la necesidad que una posible guía para la resolución de problemas esté formada por sugerencias que puedan surgir de manera natural a un ambiente de

resolución de problemas y que no sean demasiado cerradas en cuanto que dejen cierto margen para que el aprendiz pueda divagar entre sus conocimientos. Al tiempo, deben de ser instructivas en el sentido que permitan al estudiante más que entender la pregunta y ver por dónde va la respuesta, entender cómo surge dicha pregunta, cuál es su fundamento, qué provoca su generación, cómo puede ser formulada y qué permite encarar.

En su obra *Thinking Mathamatically*, Mason et al. (1982) buscan ilustrar cómo atacar cualquier proceso matemático con eficacia y aprender de la experiencia. Su análisis se inicia con el estudio del pensamiento matemático, el cual, según su estudio, se basa en dos procesos matemáticos fundamentales: la especialización, entendido como la selección de ejemplos, y la generalización, como la detección de patrones y que puede dar pie a una conjetura, una justificación o bien a plantearse una nueva cuestión. Al adentrarse en cómo hacer frente una cuestión matemática, sugieren que es conveniente distinguir entre tres fases trabajo, a los que llaman Entrada (*Entry*), Ataque (*Attack*) y Revisión (*Review*) (ver Tabla 4.4). En cuanto el pensamiento de quien se encuentra frente la pregunta sigue trabajando por debajo de la consciencia, la cuestión matemática pasa a ser un problema matemático. Luego, a dicha estructura aparece una fase de traspaso entre las dos primeras que traducimos como de prueba y error (*Stuck-Ahá*), que explica la transformación de cuestión en problema. El objetivo de la distinción entre fases de trabajo es que el resolutor aprenda e identifique dichas fases en su propia forma de pensar. Con ello podrá reconocer las acciones apropiadas para abordar cada una de estas fases y, por tanto, la cuestión formulada.

A ello, y atendiendo que al estar resolviendo un problema se suceden cambios de sentimientos que van reflejando el progreso que se va realizando, Mason et al. (1982) enfatizan la importancia de que el resolutor vaya anotando sus pensamientos, sentimientos e ideas a medida que trabaja en la resolución. Sólo así uno puede recuperar, y aprender de lo “vivido” a lo largo del proceso de resolución. Para facilitar esta tarea, Mason et al. (1982) propone, el uso de palabras clave a modo de rótulos. Recopilan, así, un conjunto de palabras que sugieren de ser utilizadas como rótulos para cada uno de estos estados. A este conjunto de palabras, que se presentan recopiladas en la Tabla 4.4, es lo que le llaman RÚBRICA.

Así, si Polya se centró en el (re)conocimiento de “buenas y malas” preguntas que pueden ayudar a un resolutor canalizar su proceso de resolución, en *Thinking Mathematically* se construye un marco estructural para ayudar al pensamiento matemático (ver Tabla 4.4) entorno al conjunto de palabras clave (RÚBRICA). El marco en cuestión pretende dar asistencia continuada al resolutor especialmente cuando éste no tiene con quien compartirlo. Las palabras clave se presentan distribuidas según la fase en que, bajo el punto de vista de los autores, dan guía al proceso de resolución. A medida que el resolutor usa estas palabras, estas más se asocian con las experiencias pasadas del pensamiento, y en consecuencia recordarle las estrategias que funcionaron en el pasado. Señalan aquí los autores que las palabras sugeridas no deben de ser una estructura cerrada y estricta. Solamente una sugerencia de palabras a ejemplo de las que uno mismo puede decidir de utilizar. Cada resolutor debe adaptar las palabras clave según su necesidad. Lo importante es mantenerlas para, con el tiempo recordar el consejo asociado a ellas, pues no se puede memorizar todo un conjunto de sugerencias.

ES	MF1.ENTRADA <ul style="list-style-type: none"> - Se inicia al estar en frente de una cuestión matemática. - Prepara el terreno para un ataque efectivo y por ello es esencial
----	--

	<p>dedicarle un tiempo adecuado.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Incluye tareas como precisar la formulación de la pregunta, decidir exactamente lo que se quiere y preparar el ataque principal, como decidir sobre una notación o un medio de registro de los resultados de específicos. <hr/> <p>MF1.R1. SÉ</p> <ul style="list-style-type: none"> MF1.R1.1. (leer con atención) la pregunta MF1.R1.2. (concentrarse en descubrir) qué está involucrado MF1.R1.3. (determinar) las ideas, habilidades y hechos relevantes MF1.R1.4. (preguntarse) si se conocen preguntas análogas o similares <p>MF1.R2. QUIERO</p> <ul style="list-style-type: none"> MF1.R2.1. clasificar y ordenar la información MF1.R2.2. estar alerta a ambigüedades MF1.R2.3. (concentrarse en) descubrir cuál es la pregunta real <p>MF1.R3. INTRODUCO</p> <ul style="list-style-type: none"> MF1.R3.1. imágenes, diagramas, símbolos MF1.R3.2. representación, notación, organización <hr/> <p>Es necesario destilar la cuestión a tratar para poder reflexionar sobre ella.</p> <hr/> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>ATASCADO (STUCK)!</p> <p>Conviene concretar el motivo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No lo entiendo... • No sé qué hacer en cuanto a... • No veo cómo... • No veo porque... </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>AJÁ (AHA)!</p> <p>Conviene anotar cuando surge una idea:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Intentar... • Puede ser... • Pero porque... </td> </tr> </table> <hr/> <p>- Inicia cuando uno siente que ha interiorizado la pregunta.</p> <p>- Comprende actividades matemáticas complejas y variadas.</p> <p>- Implica probar y formular variedad de planes y conlleva variedad de enfoques. Los procesos se pueden agrupas en conjeturar y justificar de manera convincente. Dos estados muy relacionados son el de STUCK y AHA!</p>	<p>ATASCADO (STUCK)!</p> <p>Conviene concretar el motivo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No lo entiendo... • No sé qué hacer en cuanto a... • No veo cómo... • No veo porque... 	<p>AJÁ (AHA)!</p> <p>Conviene anotar cuando surge una idea:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Intentar... • Puede ser... • Pero porque...
<p>ATASCADO (STUCK)!</p> <p>Conviene concretar el motivo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No lo entiendo... • No sé qué hacer en cuanto a... • No veo cómo... • No veo porque... 	<p>AJÁ (AHA)!</p> <p>Conviene anotar cuando surge una idea:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Intentar... • Puede ser... • Pero porque... 		
<p>GENERALIZACIÓN</p>	<p>Conjeturar</p> <p>MF1.R4. INTENTO</p> <p>MF1.R5. A LO MEJOR</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Proceso cíclico ▪ Especialización sistemática (Especialize systematically) ▪ Analogía <p>Justificar de manera convincente</p> <p>MF1.R6. PERO ¿POR QUÉ...?</p> <ul style="list-style-type: none"> MF1.R6.1. Buscar POR QUÉ MF1.R6.2. Estructurar MF1.R6.3. CONVENCER <ul style="list-style-type: none"> → a si mismo → a un amigo → a un escéptico (enemigo) 		
	<p>MF3.REVISIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tiene lugar cuando se llegar a una resolución razonablemente satisfactoria o cuando está a punto de darse por vencido. 		

	<p>- Implica invertir un tiempo en mirar hacia atrás en lo que ha sucedido con el fin de mejorar y ampliar las habilidades de pensamiento e intentar establecer la resolución en un contexto más general.</p>
	<p>MF3.R1. COMPRUEBO la resolución</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R1.1. cálculos</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R1.2. argumentos</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R1.3. consecuencias de conclusiones</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R1.4. encaje de la resolución con la cuestión</p> <p>MF3.R2. REFLEXIONO sobre las ideas y momentos clave</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R2.1. situaciones clave</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R2.2. implicaciones de las conjeturas y argumentos</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R2.3. si la resolución puede ser más clara</p> <p>MF3.R3. EXTIENDO a un contexto más amplio:</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R3.1. generalizando el resultado a un contexto más amplio</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R3.2. buscando un nuevo camino para la resolución</p> <p style="padding-left: 20px;">MF3.R3.3. alterando algunas de las restricciones</p>

Tabla 4.4. Fases del proceso de resolución de un problema matemático y palabras clave (Mason et al., 1982)

Por otro lado, Mason et al. (1982) sugieren que en ciertas situaciones, por ejemplo al llegar a una situación difícil no sólo escribir la palabra clave, como podría ser ATASCADO, en este caso, sino también el motivo de tal estado. Lo mismo cuando se encuentra una nueva idea, en la que podríamos escribir AJÁ (AHÁ!), por insignificante que parezca la idea o el error detectado. Ello ayuda a superar la dificultad surgida o a recuperar una idea a lo mejor olvidada durante el proceso.

Los autores reconocen la dificultad que supone explicar a alguien cómo uno ha llevado a cabo la resolución a un problema, los momentos de bloqueo que ello supone y más aún tratar de clarificar el proceso de resolución. Así mismo, aseguran que ir anotando lo que uno va realizando facilita posteriores comprobaciones, de posibles errores, omisiones... Además, permite disponer en cualquier momento de lo reflexionado anteriormente, de manera que al dejar aparcado algún razonamiento, idea, etc. no es necesario ir recordándolo continuamente. Simplemente anotarlo y así poder retroceder a la idea cuando sea necesario.

Por tanto, de Mason et al. (1982) concluimos con la necesidad de que el resolutor sea conocedor de las fases en que se puede encontrar y tenga asociadas a cada una de ellas expresiones concretas que le permitan recordar maneras y caminos de llevarla a cabo. Una manera que propone de agilizarlo es utilizando de palabras que resulten clave al resolutor. En cualquier caso, es fundamental escribir cada uno de los estados por los que se van pasando, pues es la manera de entender y aprender de lo hecho, especialmente cuando uno se encuentra solo ante el problema. Por todo ello, es conveniente utilizar siempre las mismas palabras o expresiones para que, con la práctica, los procesos que se vayan vinculando a ellas pueden ser asimilados de manera consecuente. De hecho, para evitar situaciones de bloqueo recomiendan anotar las ideas principales, los momentos clave que una va teniendo así como considerar lo positivo que se puede aprender de la experiencia de resolver un problema concreto (Mason et al., 1982). A pesar que al principio resulta una complicación, a la larga da su provecho. De ahí la importancia de escribir lo que va sucediendo.

Luego, la base de orientación a utilizar debe invitar y reforzar a que el alumno resolutor escriba los distintos pasos de su proceso de resolución, teniendo claro en qué estado del proceso de resolución se encuentra, dando énfasis a la hora de remarcar cuando se equivoca o encuentra ideas principales. Así, siguiendo la estructura de la Rúbrica, y fijados los tres dominios como fases principales de actuación, la base de orientación utilizada en la Implementación Primera (BO1) describe diez acciones que se presentan vinculadas a uno de los tres dominios. En este sentido, cada una de estas dimensiones pretende describir aquellas acciones que dan pie a poder abordar cada una de las tres fases que describe cada uno de los dominios, correspondientes a las 3 grandes etapas generales en qué cualquier resolutor puede verse implicado al resolver un problema. Así, las dos primeras de las diez dimensiones dan pie a ayudar en entender el problema (Dominio 1), las tres siguientes para abordar la Estructura y Desarrollo de un plan de acción (Dominio 2) y las cinco últimas destinadas a encarar la Revisión de lo realizado anteriormente (Dominio 3).

Ante las distintas ideas, y con la finalidad de establecer ciertos vínculos, la Tabla 4.5 pretende relacionar las acciones identificadas en las cuestiones o preguntas de Polya, las palabras clave de Mason y las dimensiones de la base de orientación utilizada en la Implementación Primera (BO1):

ETAPA	POLYA	MASON (RUBRIC)	BO1
Comprender el problema	FAMILIARIZARSE: • Identificar, separar	SÉ QUIERO	D1. Identifico y entiendo
	COMPRENDER MEJOR: • Plantear, dibujar, aclarar	INTRODUZCO	D2. Expreso
Tener un plan de Acción	CAZAR: • Observar, examinar, combinar, repetir, cambiar, acercarse, comparar	STUCK – AHÁ	D3. Planifico cómo
	COMPROBAR: • (re)seguir, convencer, distinguir, verificar	INTENTO A LO MEJOR ¿POR QUÉ? • BUSCO • ESTRUCTURO • CONVENZO	D4 i D5. Busco, recuerdo y diseño
Revisar lo hecho	CONSOLIDAR y DESARROLLAR: • simplificar, mejorar, incorporar, examinar, utilizar, extender, derivar, visualizar	COMPRUEBO REFLEXIONO EXTIENDO	D6. (Re)Sigo y entiendo D7. Detecto y vuelvo D8. Extiendo D9. Me aseguro D10. Respondo y Explico

Tabla 4.5. Palabras clave identificadas para cada etapa de resolución

De las distintas propuestas surgen peculiaridades interesantes de analizar.

En primer lugar, cabe recordar el público a quien, inicialmente van dirigidas las propuestas comentadas. Así, las cuestiones y sugerencias de Polya están dirigidas especialmente a

docentes cuyo objetivo es ayudar a sus alumnos en la resolución de problemas. La intención de Mason et al. (1982) es compartir de manera general cómo desarrollar el pensamiento matemático para abordar cuestiones y problemas matemáticos. Finalmente, nuestra propuesta de base de orientación, que pretende ayudar a los alumnos que se encuentran en el traspaso de la Educación Primaria a la Secundaria en la adquisición de la competencia en resolución de problemas, teniendo en cuenta, en medida de lo posible, su base de partida.

Al analizar la Tabla 4.5 lo primero que llama la atención son, aunque no muy lejanas, las distintas aproximaciones a lo que entendemos la segunda dimensión, relativa al tener el plan de acción. Mientras que para Polya inicialmente se trata de dos fases totalmente distintas: divisar el plan de acción (la caza) y aplicarlo (comprobar) incluyendo cierto proceso de pruebas, para Mason et al. (1982) esta fase viene de la situación de traspaso que identifica como STUCK-AHÁ y que, en parte, la considera como el punto crítico de resolución de un problema, pues es el responsable que una cuestión matemática pueda ser entendida como problema matemático. En este sentido cabe recordar que Polya comparte el conjunto de cuestiones y sugerencias directamente para lo interpreta como problemas, y no cuestiones o ejercicios matemáticos. A ello cabe darle consideración especial el hecho que Mason et al. (1982) comparten un conjunto de palabras que deben anteceder las acciones que indican. Con respecto a nuestra propuesta, recordamos que la dificultad de tipo heurístico que supone la diferenciación entre idear y aplicar de manera convincente a los alumnos implicados, fue motivo por el cual el segundo dominio comporta acciones destinadas a buscar y organizar pero sin otro tipo de distinción y sin más añadidos. Es en la fase estrictamente de revisión, la tercera y última, en que se encuentra una especificación concreta a la detección de estados complicados y revisión recogida en la dimensión (D7), que pretende actuar de manera paralela al STUCK-AHÁ de Mason et al. (1982).

De nuestra propuesta enfatizamos también, a modo de previsión por la conducta observada anteriormente en la dinámica generalizada de los alumnos, la sugerencia explícita que los resolutores deben de responder dejando por escrito, explicando, sus resoluciones. A parte de remarcar las ideas o complicaciones que puedan surgir (Mason et al., 1982) durante el proceso de resolución, en el proceso de aprendizaje de los alumnos, se hace imprescindible promover la verbalización por escrito de sus respuestas y quehaceres, por su propio y auto seguimiento, pero también para permitir su posterior valoración por parte del docente u otros alumnos. Es necesario recordarlos que tanto es necesario ir escribiendo sus ideas y procesos, como, al final, dar respuesta a las preguntas o quehaceres que pide el problema con coherencia a lo pedido y a lo hecho. Así, además de las pinceladas entre las distintas dimensiones en cuanto a sugerir que los alumnos vayan dejando por escrito sus quehaceres, se hace explícito el hecho de responder explicando la respuesta con la décima dimensión, al final de la base de orientación. De este modo, se reincide en la revisión de lo hecho esperando que promueva la completitud de las explicaciones necesarias. Con esta decisión se busca adecuar la base de orientación a la conducta inicial de los alumnos observada con la finalidad que vaya interiorizando dicha dinámica y, así en un nivel posterior poder reordenar o eliminar dicha dimensión.

Por otro lado, a partir de la conjunción de las tres tablas anteriores, percibimos una simbiosis que permite establecer una mirada actualizada en organizar las etapas que determinan el proceso de resolución de un problema, por un lado, y al tanto, y por otro, un marco propiciador y facilitador a la generación de Bases de Orientación. En este sentido,

identificamos una posible subdivisión de cada uno de los estados o fases de resolución en dos subetapas. Al tanto, destacamos un conjunto de palabras vinculadas a cada subdivisión, que pueden dar pie a la dinámica que sugiere cada una de estas subdivisiones. De este modo, se convierten en las palabras que pueden promover la descripción de dimensiones, o bien de ser usada como rotulados, a modo de la RÚBRICA de Mason et al. (1982). En la Tabla 4.6 así se pretende ilustrar. En cualquier caso, cabe notar que estas clasificaciones son meramente a nivel conceptual, para ayudar a organizar la mente a la hora de resolver un problema. Aún siendo una subdivisión no deben perder su carácter de vinculación entre ellos ni de continuidad en el tiempo, simplemente intentar ayudar a identificar y encarar cada una de las fases correspondientes. Esta vinculación queda clara con la distribución de las palabras clave que se encuentran compartiendo distintos etapas y hechos (ver Tabla 4.6) que, en cualquier caso, pretenden también reforzar el hecho que se trata de una acción dinámica en el tiempo de la cual es necesario dejar registro de los pasos efectuados y las conclusiones o reflexiones que han sido necesarias para ello.

Resolver un problema			Descubrir	
ESTAPAS	HECHOS	ACCIONES DE DESARROLLO	ACCIONES DE CONEXIÓN	ACCIONES DE COMPRENSIÓN
Comprender el problema	Familiarizarse: identificar, señalar, separar, entender, aclarar, clarificar		jugar, manipular, hacer pruebas, probar	escribir, anotar,
	Organizar: Expresar, representar, plantear, introducir, profundizar			
Tener un plan de acción	Buscar: Observar, recordar, examinar, combinar, repetir, cambiar, comparar, acercarse, diseñar, apuntar, intentar		Revisar, Repasar	detectar, localizar
	Convencer: estructurar, argumentar, razonar, detallar, documentar			
Validar lo realizado	Interpretar: Comprobar, verificar, refutar, consolidar, completar		Analizar Justificar	volver, reiniciar
	Evaluar: mejorar, simplificar, extender, incorporar, utilizar			

Tabla 4.6. Palabras vinculadas con actividad de resolver un problema, claves en la generación de una base de orientación

Una vez, analizadas las referencias bibliográficas sobre las que se ha generado la propuesta inicial de base de orientación (BO1), intentamos ligar las ideas surgidas de este análisis más bien teórico con las aportaciones de los alumnos una vez finalizada la Implementación Primera, en la cual fue utilizada dicha base de orientación (BO1).

A raíz de las resoluciones analizadas, en las que detectamos alumnos que siguieron adelante con el proceso de resolución aún no habiendo entendido bien la pregunta formulada con esta primera implementación, y con la contrastación teórica de las referencias consultados, se evidencia la necesidad de detallar una acción más en la primera parte que, más allá de entender los datos, conlleve a los alumnos resolutores asegurarse que entiendan lo que pide hacer el problema en cuestión. Así, pues, aparece la necesidad de una especificación relacionada con las dimensiones primera y segunda (d1 y d2) que ayude a los alumnos a percatarse que tienen claras las preguntas a responder al mismo tiempo que deben entender todo aquello que el problema pide de hacer, pues no siempre los alumnos pueden seguir

adelante cuando se encuentran con la dificultad de descifrar lo que pide de hacer el problema. Así lo percatan análisis como las de la Figura 4.4 (Parte 2 de la resolución Pb05.a1_SC1A24) en las que resulta evidente que no se tiene clara la pregunta. Con ello serían 11 dimensiones, cuando para la mayoría de los alumnos las 10 actuales ya supusieron un volumen importante de información a considerar.

- *Es demasiado larga. Creo que sólo debería de poner lo más importantes brevemente.* (C10_IT6B01)
- *Hacerla con estas ideas pero más cortas, porque conozco a gente que no se las lee por pereza.* (C12_IT6B01)

En este sentido entran dos cuestiones, ideas en relación a que les resulta demasiado larga o “pesada de leer”. Por un lado, demasiados pasos a seguir:

- *El formato está bien, pero hay muchos pasos a seguir.* (C10_AL1D17)

O bien, demasiada información en una misma dimensión:

- *Es clara pero resulta pesada de leer.* (C10_AL1C03, C10_AL1C07, C10_AL1C09, C10_AL1C13)

O que algunas ideas les parecen repetitivas:

- *Resulta pesada. Yo sacaría pasos porque hay algunos que se repiten aunque que con distintas palabras* (C10_AL1D12)

Encontrar el equilibrio entre transmitir toda la información mínima necesaria y la conveniencia de los alumnos es complicado, y más hacerlo para todos ellos. Así mismo, en el intento de encontrar un cierto equilibrio general y adecuado, resulta de lo más interesante que al pedir a los alumnos que profundicen un poco más en estas declaraciones, y aquí entre en juego la cuestión 11 (C11), los alumnos se muestran interesados y capaces de compartir el por qué de sus observaciones.

Sus motivos, por un lado, reflejan la existencia de ideas prefijadas y arraigadas:

- *Sí, el de la 10. Creo que sobra un poco porque con una solución ya tienes suficiente.* (C11_IT6B10)
- *Si, no creo que haga falta el paso 8 porque si ya has hecho el problema, y ya tienes la solución no hace falta saber más maneras.* (C11_IT6B17)
- *Tenéis que tener en cuenta que muchas cosas nos las enseñan en primaria.* (C12_AL1D11)
- *Hay muchas cosas que nos las enseñaron a primaria.* (C12_AL1D17)

Por otro, exponen la “molestia” que les causa encontrarse con ideas similares en dimensiones distintas al mismo tiempo que reflejan la falta de percepción de matices en algunas palabras o expresiones, lo que vuelve a la discusión de cómo y en qué momento trabajar los matices, en cuanto al lenguaje utilizado, necesarios para entender y poder seguir la base de orientación. En este sentido, las dimensiones afectadas por estas observaciones son la 4 y 5, por un lado, y las 8, 9 y 10, por otro:

- *Sí, sobra algún paso porque algunos son casi iguales. En concreto el D4 y el D5. (C11_IT6B15)*
- *El D5 creo que no es necesario. (C11_SC1A 03)*
- *Sí. D4 y D5 son muy parecidos. (C11_SC1A07)*
- *Para mí es muy larga y el paso D4 y D5 son muy iguales. Podrían reducirse a uno. (C11_SC1A23)*
- *Sobran los siguientes: D5 y D9. (C11_SC1A17)*
- *Yo creo que los pasos 3 y 4, y los pasos 8 y 9, se podrían ajuntar. (C11_SC1A14)*
- *Yo creo que la D8, D9 y D10 tendría que ser una de sola. Yo creo que está bien, no es demasiado larga ni demasiado corta. (C11_SC1A20)*
- *Las nro. 8, 9 y 10 dicen casi lo mismo. Yo intentaría ajuntarlas, y que es dijera todo en una frase. (C11_SC1A24)*
- *Creo que hay dos pasos que en muchos problemas se pueden ajuntar, que son el D9 y el D10. Hay veces que el D7 no hace falta. (C11_SC1A25)*

Algunos, además, se implican más y proponen intentos de reorganización de las mismas:

- *A lo mejor pondría el paso 4 antes del 3. Y el 9 y el 10 los ajuntaría, poniéndolos antes del 6. (C11_SC1A28)*

Aquí está pues, poder discernir entre qué acciones deben de manera necesaria aparecer y no ser eliminadas, e intentar aún necesitarlo, no repetir las en exceso para evitar una pérdida de atención en seguir la base de orientación. Por otro lado, se ve imprescindible mencionar aquellos aspectos que, aún ellos diciendo que los saben, las evidencias demuestran que siguen teniendo dificultades en aplicarlas..

A partir de las evidencias de uso de la base de orientación y de las observaciones recibidas por parte de los alumnos, se convino por eliminar la inicial dimensión 3: “D3. *Planifico y llevo a cabo cómo resolver el problema*”, ya que, de hecho, se podría interpretar con el objetivo global del Dominio 2: “*Estructuro y llevo a cabo un plan de acción*”. Por otro lado, muchos alumnos han comentado que se podrían unir las dimensiones 4 y 5. Según cómo interpretemos los vocablos *estrategia* y *algoritmo* surge el debate de si realmente deben unirse o no, y, en cualquier caso, cómo debería establecerse para que quedaran claros sus matices y, por lo tanto, sus objetivos finales.

Con lo que respeta a las dimensiones “D8. *Una vez resuelto, razono si se podría hacer de otras maneras.*” y “D9. *Me aseguro de si puede haber otras soluciones o si solamente hay una.*”, especialmente la 9, se ratifica que se trata de una acción que cuesta muchísimo y que no es muy natural. Surge el debate de hasta qué punto se debería(n) trabajar y considerar. Si la idea es transmitir cierta competencialidad, se entiende que la idea de ir más allá, no debe de ser eliminada. Los alumnos deben percatarse de las posibilidades que resolución, del camino no cerrado y de la voluntad de indagar e investigar, sin esperar una respuesta única y cerrada. Así mismo, en un primer intento de traspasar esta frontera, dichas dimensiones se podrían unir y buscar para ellas una explicación más concisa que englobara las dos. Como ya hemos comentado anteriormente, se tratan de dos procesos, en general, poco trabajados y no muy naturales, por lo que se podría plantear hasta qué punto se pueden o deben considerar, realmente.

En cuanto a la dimensión “D10. *Doy todas las soluciones posibles, explicando si son o no correctas y si tienen sentido o no.*”, una vez estudiada la experimentación llevada a cabo, tal como se ha reflexionado en los ejemplos de aplicación, posiblemente debería presentar un redactado más afinado para alcanzar, realmente, el objetivo que se plantea con él. La finalidad de esta dimensión no es salir en la búsqueda de otras soluciones o maneras de encontrarlas (pues de eso se trataba las dimensiones anteriores) sino de argumentar al máximo la respuesta final que se da a la pregunta concreta realizada, en función de los caminos y resultados encontrados. Así, surge una propuesta alternativa a esta dimensión, seguramente más oportuna, que enuncie algo como: “*Respondo las preguntas formuladas razonándolas de la manera más completa posible y que se entiendan.*”

La combinación de estas consideraciones llevaron desembocar en la actualización de la base de orientación utilizada en la base de orientación propiamente dicha (BO1) y utilizada en la Implementación Segunda, que consta nueve dimensiones, haciendo corresponder tres a cada dominio.

4.2.5 La base de orientación para promover la verbalización del proceso de resolución

Como se ha comentado, Mason et al. (1982) proponen la escritura de palabras clave para canalizar la resolución de cualquier cuestión matemática, en particular de cualquier problema matemático. Expresan así la utilidad de ir escribiendo, a modo de rótulos, una palabra identificativa al proceso que se está llevando a cabo y a la fase de la resolución en qué uno se encuentra. Es lo que identifican como RÚBRICA. Además, promueven la utilidad de ir escribiendo las explicaciones, comentarios, observaciones de las ideas que van surgiendo o bien que aparecen fallidas. Con ello, uno puede reflexionar más detenidamente al tanto que recuperar cualquier hecho pasado. Como ellos mismos constatan, aún tratándose de una tarea complicada tiene sus recompensas.

Si a ello le añadimos la intención de poder valorar el trabajo de resolución realizado por un alumno especialmente para ayudarlo en su proceso de aprendizaje, en el caso que los escritos de los alumnos son las fuentes principales para poder valorar su progreso en cuanto al aprendizaje, se hace indispensable contar de sus escritos. En este sentido, si la base de orientación pretende guiar los pasos de un aprendiz de resolutor, se ve necesario enfatizar la necesidad de describir descripciones enteras de los distintos episodios de la resolución. Así pues, en la resolución de un problema hay el proceso interno que uno debe realizar, al tanto que dejarlo por escrito. En este sentido la base de orientación constata una dimensión explícita a ello, la décima. Con lo que sigue, nos referiremos aquí por verbalización a las explicaciones por escrito de los alumnos.

Analizamos en este apartado, pues, en qué sentido podemos constatar una incipiente verbalización en las resoluciones de los alumnos en la primera de la Implementaciones.

Las resoluciones obtenidas en la Implementación Primera, constatan una incipiente e interesante verbalización de los pensamientos de los alumnos. Aunque no se observa una verbalización generalizada de todas las ideas, observaciones o conclusiones, ni en todos los alumnos implicados, si que encontramos distintas resoluciones en las que los alumnos han dejado por escrito parte importante de las explicaciones de lo que han desarrollado. Si bien se

trata de un objetivo no fácil de conseguir, hemos observado que en las aulas en las cuales se hizo más hincapié en el uso de la base de orientación, especialmente en la revisión de sus resoluciones usando la misma base de orientación, como SC1A, la verbalización ha sido más notoria. En cambio, en los grupos donde no se incidió tanto en su uso, la verbalización ha sido más discreta, en algunos casos, incluso insuficiente, especialmente si posteriormente el objetivo principal es poder revisar y valorar la resolución del problema de acuerdo con una Rúbrica asociada a la base de orientación. Así lo constatan la mayor parte de las resoluciones de los grupos AL1C y AL1D en las que, de manera general, las explicaciones verbales son más escasas, en caso de ser existentes. En este sentido, los intentos a dejar explicaciones por escrito no son tan evidentes en cuanto al nivel del cual proceden (que esto podría sí explicar que las que aparecen puedan ser más o menos profundas), sino por el énfasis en el uso la base de orientación que se haya podido hacer en sus aulas. Un ejemplo de comparación se encuentra con las resoluciones al problema de búsqueda de patrones Pb5.a1.

La primera resolución, Figura 4.14, pertenece a un alumno de 1º de la ESO en la clase del cual se hizo bastante hincapié en el uso de base de orientación. Podemos observar como organiza su razonamiento, paso a paso, explicando el por qué de cada una de sus decisiones. Tacha lo que no quiere considerar más allá de ese punto, pero siempre dejando rastro de lo realizado anteriormente y no se observa la realización de otros pasos fuera de el papel proporcionado. Va describiendo lo que cree que se debería hacer a medida que así procede, ilustrándolo y haciendo las operaciones convenientes según sus decisiones.

4 1 1 2 2 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 4 8 8 7

Se va a ver que primer tendrían que agarrar 10 piezas de nigüets i dividirlos colocados en dos grupos de cinco.

$10 \frac{12}{5}$

Después los colocamos dejando espacio en bloques de forma vertical en dos filas. I entre cada espacio colocamos 4 piezas entre ellas...

Después en cada que uno en horizontal entre las dos columnas dejando dos espacios en bloques porque $10 + 2 = 12$.

$10 + 2 = 12$ entre ellas...

I al final colocamos dos piezas negras entre ellas porque $8 + 4 = 12$.

$8 + 4 = 12$ piezas entre ellas...

1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7
 4 8 8 7

Figura 4.14. Fragmento de la producción Pb5.a1_SC1A14

En el siguiente caso, Figura 4.15, procedente de un alumno del mismo grupo que el anterior, aún no habiendo descripciones completas encontramos notas aclaratorias al proceso de resolución. En este sentido, destaca la aclaración sobre el dibujo de que si la manta es 5x9,

ésta debe ser más ancha que estrecha, así como el recordatorio de cómo se encuentra el área de un rectángulo o cuadrado.

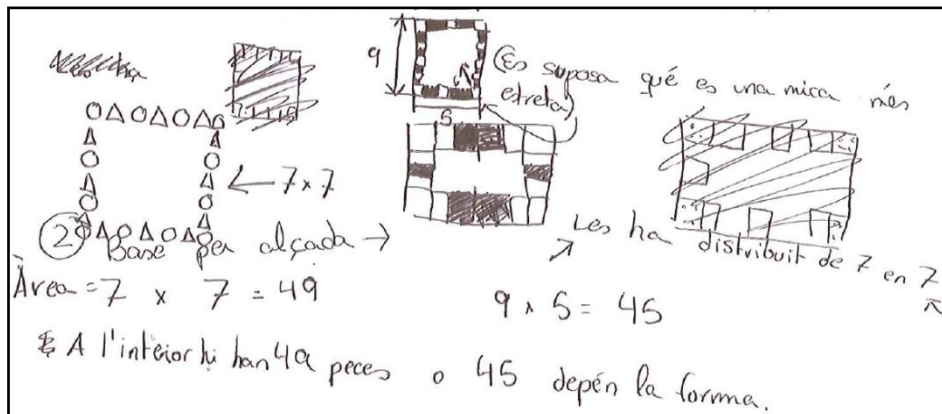


Figura 4.15. Fragmento de la producción Pb5.a1_SC1A17

A diferencia del grupo SC1A en el que nos consta que se hizo bastante hincapié en el uso de la base de orientación, entre los dos grupos AL1C y AL1D detectamos solamente un alumno con algún interés relevante de verbalizar parte de sus respuestas las preguntas formuladas, cuya resolución se puede observar en la Figura 4.16.

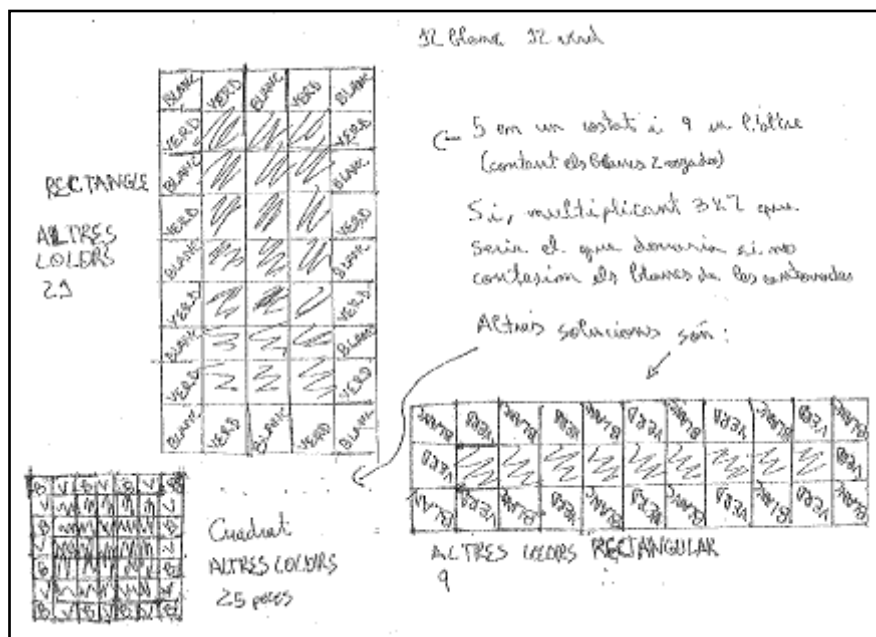


Figura 4.16. Fragmento de la producción Pb5.a1_ALD116

El resto, aún y las evidencias de indagar para encontrar respuesta al problema, no verbalizan la mayor parte de sus intenciones. Un ejemplo bastante evidente es el que presenta la Figura 4.17. En el que sólo se indaga en la búsqueda de un posible patrón que se ajuste a las condiciones del problema, pero sin dar explicación alguna del porqué de su respuesta o de conclusiones a las que haya podido llegar.

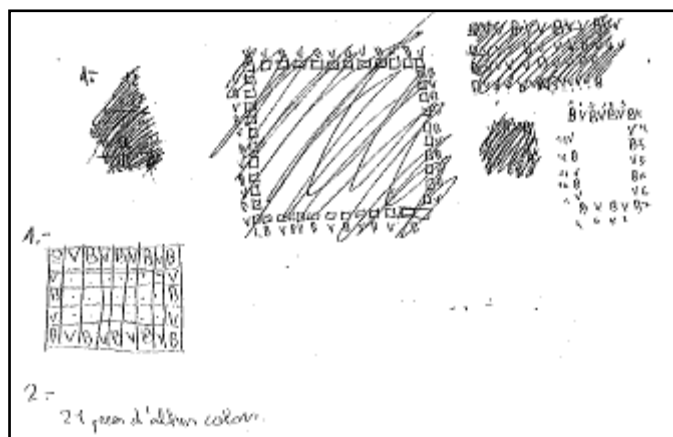


Figura 4.17. Fragmento de la producción Pb5.a1_ALD123

De todos modos, de resoluciones como la que presenta la Figura 4.17, cabe destacar que a pesar que los intentos no válidos son fuertemente tachados, no han sido eliminados, lo que permite un cierto seguimiento de los intentos llevados a cabo, fundamental también para posteriores revisiones, ya sean llevadas a cabo por el propio u otro alumno, o docente. Así, aunque carece de verbalización, la evidencia de los diversos intentos permiten dar cuenta de cómo se ha procedido en cada uno de los intentos realizados y como ha podido ayudar la base de orientación en ellos. Ello confirma la necesidad de que los alumnos, además de verbalizar sus desarrollos, presenten y no eliminen ninguno de los intentos realizados.

Con todo ello, y de acuerdo con la mayor parte de las referencias bibliográficas, después de este primer contacto con el uso de una base de orientación, a pesar de las evidencias en cuanto la base de orientación ha motivado a los alumnos a cierta verbalización de sus ideas, se evidencia aún una falta en los alumnos para exponer de manera completa sus pensamientos. Observamos que los alumnos no están acostumbrados a hacerlo pero que cuando se incide en el uso la misma, como por ejemplo en las correcciones de las resoluciones, las verbalizaciones han sido más evidentes. Con ello se ratifica la necesidad que la misma base de orientación, más que incluso el enunciado del problema pues debe ser una práctica general para todos los problemas y no única para un problema concreto, recuerde y enfatice que se debe escribir cualquier pensamiento, idea o conclusión hasta que los alumnos demuestren tenerlo en cuenta. Es imprescindible que la base de orientación conlleve la escritura de sus razonamientos sin eliminar nada de ellas como de otros procedimientos, ya que de otra forma cualquier tipo de revisión o valoración (tanto por parte del propio alumnado como del profesorado), no tendrá donde acogerse, pues no habrá documentación que poder valorar al mismo tiempo que se interiorice como una práctica inherente a la resolución de problemas. Seguramente, a esta necesidad, será imprescindible un acompañamiento o énfasis inicial en el uso de la base de orientación por parte de los docentes implicados para llegar a una habituación de dicho uso.

4.2.6 Percepción visual de la base de orientación

Las dimensiones que propone la base de orientación son las responsables de recoger aquellas acciones que se han visto convenientes que un alumno resolutor no experto necesita, como mínimo, para encaminar su proceso de resolución. Estas acciones están presentadas como un conjunto de pasos ordenada, ligadas a los dominios correspondientes y recogidos en forma de

tabla listada, donde cada fila contiene una de las dimensiones. Así mismo, tal como se recalcó a profesores y alumnos (quienes, a su vez, son partícipes de su diseño y redacción), dicha presentación no obliga que los pasos descritos deban mantenerse de forma estricta para resolver el problema. Como bien se ha argumentado en el Marco Teórico (capítulo 1), pues aunque el orden que se propone puede ser el que se ha considerado como el más lógico, en la resolución de un problema pueden interferir diferentes etapas y elementos que pueden conllevar ciertas alteraciones. Así mismo, suele ser de ayuda para una persona no experta en resolución de problemas, poderse acoger a una propuesta de pasos ordenados. En este sentido, la linealidad establecida, cuyo orden se sustenta por las fuentes usadas y que describen los pasos de un resolutor experto, se convino para posibilitar un orden de aplicación, evitar dispersiones, y al mismo tiempo establecer de manera clara y precisa la relación entre dominios, dimensiones, y ambos. De hecho, como se puede extraer de ella misma (dimensiones 7 y 8, especialmente), dicho orden puede quedar alterado y ser reconducido en cualquier momento. De aquí la naturaleza cíclica de resolución de un que algunos autores como De Corte et al. (2000b) remarcan. Este orden no necesariamente estricto, en el caso de afrontar la resolución de problemas conlleva ciertas reflexiones.

Entre las reflexiones consideradas destacan preguntas como: si sería preferible que la base de orientación no estuviese ordenada como un listado, en el sentido estricto de la palabra, y fuera más bien como un mapa conceptual? Si se presenta como un conjunto de pasos ordenados, tal como se presenta ahora, ¿deben estar numerados? ¿En algún momento debería haber una nota que indicase que el orden no tiene porque ser estricto?

En este sentido, la numeración, lo mismo que la identificación de dominios y dimensiones es una manera referenciar cada uno de las fases y acciones que se describen tanto en la rúbrica como en la base de orientación entre sí asociadas, al tiempo que poderlas vincular para una posterior revisión de la resolución llevada a cabo.

La numeración no debe ser considerada tanto para un posible orden de su aplicación, sino para poderse referir a ellas de manera sencilla y eficaz, y así poder establecer una cierta relación entre la Rúbrica y la base de orientación asociadas. Verdad es que posiblemente, de cara a los alumnos, no es imprescindible rotular los dominios y las dimensiones en la base de orientación, como tampoco numerarlas, pero cierto es que a las edades implicadas es interesante que aprendan a diferenciar entre ellos: las etapas (los dominios), como los niveles de implicación de la historia, y acciones (las dimensiones), como los hechos que permiten operacionalizar cada una de las fases, que pretendemos diferenciar, así como que puedan disponer de una manera general, fácil y cómoda de referirse a las dimensiones especialmente cuando quieren realizar una revisión de la resolución, conjunta o individual o bien una autoevaluación. Con ello, y a pesar que sólo sea cuestión de nomenclatura interna, las reflexiones de algunos alumnos:

- *Yo no terminé de entender la palabra "DIMENSIONES". (C10_SC1A28)*

condujo a descartar la aparición de los rótulos Dominios y Dimensiones, así como de la numeración de las dimensiones en la actualización de la base de orientación ya considerada como tal utilizada en la Implementación Segunda (BO2). Con ello se pretendió eliminar elementos de distracción y no añadir más ideas de las puramente enfocadas a las acciones

relativas a la guía de la resolución del problema, al mismo tiempo que generar antecedentes que la numeración de las dimensiones es algo estático más que de referencia.

Así mismo, una reflexión posterior, especialmente vinculada al hecho de entender la resolución de un problema como una historia que conlleva la búsqueda y descubrimiento de soluciones a situaciones matemáticamente conflictivas o problemáticas, da cuenta de que si lo que se busca con el uso de la base de orientación es que los alumnos se auto guíen para la finalidad que esta pretende (resolver un problema, en este caso) al tiempo que aprender a organizar/ordenar sus ideas al mismo tiempo que plasmarlas para que puedan ser accesibles por si mismos, surge la reflexión de tampoco tener que eliminar los rotulados en la base de Orientación, pero en caso de usar, que enfatizen más el objetivo que pretendan. Así, en lugar de hablar de Dominios y Dimensiones como se hace en la jerga de la Rúbrica, podrían ser rotulados como Etapas, a vincular con los Dominios de la Rúbrica, y Acciones, con las Dimensiones de la base de orientación, al mismo tiempo que facilitar la referencia a ellas de manera fácil y cómoda como la propuesta en la versión inicial (ya sea numeradas o bien con otra simbología considerada adecuada). En cualquier caso, dicha decisión, forma parte del proceso de familiarización y apropiación de la misma.

En cuanto a la distribución de los dominios y las dimensiones en la tabla listada, aparece también un pequeño debate. Como destacamos,

- *Yo lo que haría es poner a la izquierda todos los pasos y, cada grupo de pasos, a la derecha. Tendría una llave agrupándolos donde escribiría el dominio correspondiente. De esta manera la vista se fijaría más rápidamente con los pasos y no tanto con los dominios. (C10_SC1A28)*

un alumno propone que, en caso de utilizar el formato de tabla listada, las dimensiones aparezcan a la izquierda de los dominios para que la vista se fije más en las dimensiones que en los dominios, se deduce porque empezamos a leer por la izquierda. Su propuesta es tan válida como la utilizada. Aún así, pero, es necesario que los alumnos no sólo interioricen las dimensiones, sino también su vinculación con los dominios pues al fin y al cabo las dimensiones son el desglose de los dominios y deben de interiorizar qué papel juega, dentro de cada etapa, cada una de ellas. Luego es importante que también tengan claro en qué etapa se encuentran. Por su misma razón, poniendo los dominios a la derecha de las dimensiones, dudamos que acabaran leyendo los dominios, ni en su primera lectura. Luego, se convino mantener la misma estructura de a la izquierda los dominios, y a su derecha las dimensiones para enfatizar dentro de cada etapa, las diferentes acciones que permiten desarrollarla.

De manera alternativa al uso de tabla listada, surgió también la idea de mapa conceptual. Dicha propuesta no sólo surgió entre los componentes del grupo de reflexión sino también fue expuesta por un alumno:

- *Que fuera un mapa de conceptos y que fuera más fácil de comprender. (C12_IT6B15)*

Dicha proposición resulta interesante pero requiere de un nivel de comprensión y organización superior y a la vez más individual a la de una tabla listada. Si bien a las edades implicadas se confirma el uso y la comprensión de listas y de tablas, la comprensión de mapas conceptuales que puedan conllevar diversas relaciones queda más difusa. Así mismo, se entrevisté que en el

momento que cada alumno pudiera hacerse la suya propia podría ser factible si al alumno así le resulta. Los múltiples vínculos que podrían surgir entre las distintas dimensiones complicarían aún más su generalización, lectura y puesta en práctica. Las relaciones que podrían surgir supondrían un esfuerzo de lectura mucho mayor que, si bien los alumnos pueden tener ya complicaciones en concentrarse en las dimensiones, más sería que quisieran concretar sus vínculos que, como hemos dicho, no siempre se integran en un mismo orden. Así mismo, aquí se abre un camino a estudiar de cómo serían los grafos (las relaciones) posibles, en función de los problemas, pero en este primer paso, el objetivo de la base de orientación es evitar cierta dispersión para trazar un camino que facilite el descubrimiento a un proceso de resolución y así exponerlo, pues se entiende que se tendría que evitar cualquier complicación extra de lectura a las que se han podido divisar.

Junto a la estructura formal de la base de orientación surge otro factor, el de la visualización y el soporte utilizado para ofrecerla a los alumnos. A partir de sus observaciones, queda claro que el tamaño y apariencia en el soporte en qué se presenta la base de orientación juega un papel clave para acaparar su atención y les abra el interés en utilizarlo.

Como se ha expuesto anteriormente, algunos alumnos se quejaron del tamaño de la letra, e incluso del tamaño de la base de orientación en relación en el papel o bien de su orientación, especialmente los alumnos de los grupos de 6º de Primaria IT6A e IT6B. En este sentido, cabe destacar que no se dieron instrucciones a los docentes de cómo facilitar la base de orientación a los alumnos, más allá que éstos la tuvieran a mano impresa en papel (aparte de otros modos habituales de su dinámica o que consideraran oportunos como podría ser proyectada, escrita en la pizarra, impresa en grande y colgada en la pared, etc) cada vez que se tuviera que comentar o utilizar. Así se facilitó la base de orientación en una tabla de fondo azul claro y con letra del texto negra Calibri 12 pt, en un documento de texto de medidas DIN A4 y orientado en horizontal, pero sin proporcionar instrucciones de cómo imprimirla. En todos los grupos fue impresa en un documento DINA4 y en blanco y negro. Eso supuso que el fondo azulado, en función de la impresión, quedara como un gris más o menos difuminado. En caso de los grupos de 6º de Primaria la base de orientación fue impresa en un documento DIN A4 orientado en vertical, lo que hizo que la letra se redujera considerablemente, al mismo tiempo que la copia se viera más ennegrecida. De ahí comentarios que aparecen entre los alumnos de los grupos de IT6A e IT6B y no en el resto de grupos implicados:

- *Era muy pequeña. No se veía demasiado bien!* (C10_IT6A13)

En este sentido, después de las Implementaciones, posiblemente fuera interesante encajar desde un principio la base de orientación en un documento en vertical. A parte de evitar problemas de impresión, puede que fuera conveniente teniendo en cuenta que los enunciados de los problemas se presentan en documentos en vertical. Alguno de los alumnos así lo comenta, aunque sin proporcionar muchas explicaciones:

- *Yo, la hubiese hecho en vertical [...]* (C10_SC1A09)

Por otro lado, está la idea de presentarla en color o de forma más llamativa, que parece compartida con algunos alumnos:

- *Debería de ser más coloreada y más grande.* (C12_IT6B17)

- *Creo que debe dar otro estilo, con más color, letra diferente, porque así llame más la atención a los alumnos! (C12_SC1A23)*

Pero cierto es que en caso de ser impresa en blanco y negro, la experiencia realizada recomienda no utilizar colores, especialmente por las sombras que pueden aparecer que pueden complicar su lectura debido a su falta de nitidez. En cambio, sí puede ser recomendable en caso de ser expuesta en grande en el aula de manera general o bien proyectarla. El hecho de hacerla más o menos llamativa requiere de un cierto equilibrio entre las edades involucradas y el factor distorsión, en cuanto al objetivo que con ella se pretende, que puede provocar. En este sentido ninguno de los docentes aportó sugerencias relativas a ello, por lo que se entiende que la presentación proporcionada de la misma en cuanto a la vistosidad es indicada para las edades implicadas. De todas formas, se cree conveniente poder adaptar la vistosidad de la base de orientación en función de las edades involucradas, las preferencias del docente y la dinámica de la clase, de manera que todos los implicados se sientan cómodos con ella y, sobre todo y especialmente, no implique factores de distracción en relación al objetivo que busca, que recae en aprender a resolver problemas matemáticos. De todo ello se concluye la importancia de la adecuación y claridad de la estructura donde se presenta la base de orientación y el formato de la letra utilizada.

4.2.7 Discusión

La experimentación ha tenido lugar con alumnos de 6º de Primaria y 1º de la ESO. Hemos observado como los alumnos implicados, por encima de disponer un cierto manejo en la resolución de problemas, presentan ciertas creencias en relación a ello. En este sentido, de las consideraciones compartidas al finalizar la Implementación Primera, descubrimos que para algunos alumnos leer el problema con atención y comprender lo que expone es lo principal para resolver un problema. Otros pocos consideran que entender las cuestiones a responder es lo más importante. Incluso, encontramos algún alumno que comparte la importancia que cobra el hecho de no despistarse durante el proceso de resolución un problema. Así mismo, constatamos como se siguen identificando los números, en concreto y los datos, más en general; la operación, en singular, o, en algunos otros casos, las operaciones, en plural; o el resultado como los aspectos más destacables en la resolución de problemas.

La persistencia de estas últimas creencias nos hace recordar que si desde las edades más tempranas los alumnos asumen la idea de que para resolver un problema hay que considerar únicamente ciertos aspectos, como los tres que comúnmente se identifican por *datos*, *operación* y *resultado* los tres aspectos inexcusablemente básicos y necesarios para resolver cualquier problema será complicado, entre otros, que los alumnos desarrollen o se interesen en algún momento por verbalizar los procesos que llevan a cabo pero que, como hemos visto, resultan imprescindibles para entender cualquier resolución, ya sea por parte de uno mismo o bien de otros, en especial, el profesor. Y de manera consecuente, más complicado será que compartan de manera natural sus reflexiones, observaciones u conclusiones de dichas resoluciones, cuando, en cambio, son los que permiten entender e interiorizar los procesos realizados para poderlos aplicar en otros momentos. Además, atendiendo la dificultad de flexibilidad observada en los alumnos de las edades implicadas para aceptar modificaciones en las tendencias que tienen creadas, difícil es intentar ampliar esta estructura tan afincada para introducir nuevas directrices, y más cuando tienen la creencia de que ya tienen la manera

absoluta de hacer frente a un problema. Por ello, discrepamos de que éstos términos, por sí solos y así expuestos puedan ser considerados en ningún caso suficientes para la adquisición de la competencia en resolución de problemas, si en ningún momento han mostrado cierta flexibilidad o modificación.

En este sentido, analizar el perfil de un resolutor experto y el de las necesidades que pueden presentar los alumnos de las edades implicadas como resolutores, nos ha permitido establecer un marco de resolución general sobre el cual hemos podido adecuar la base de orientación utilizada, en particular, al mismo tiempo que extraer ideas generales para la articulación de otras posibles. Creemos que una base de orientación para la resolución de problemas debe, por un lado, mostrar la integración de unas etapas generales, a la vez amplias y globales de actuación, para cada uno de los cuales, a su vez, se puedan distinguir acciones concretas y precisas que permitan alcanzar el objetivo que pretende cada una de ellas. Así, en función de las necesidades de los alumnos dichas acciones más concretas pueden ser modificadas en cualquier momento. De la misma manera, al tanto que resolver un problema es una actividad que conlleva una dinámica basada en la aplicación de distintas acciones, la base de orientación debe plasmar que se trata de acciones y etapas que están vinculados entre sí.

Así, en relación a la base de orientación utilizada, hemos distinguido tres etapas generales de actuación ligadas entre sí que comprenden el hecho de entender lo descrito en la situación planteada para, a partir de ello, determinar algún plan de acción que, finalmente, debe de ser revisado para que uno mismo y otros puedan también comprender. Con ello toma sentido que los alumnos entiendan el proceso de resolver un problema como la historia de investigar y descubrir el camino que lleva a algún desenlace de una situación problemática, que debe de ser expuesta de manera entendible. De aquí se entiende que, de manera paralela a la cohesión, para poder tener constancia de todo el proceso, resulta imprescindible la narración consecuente de todo el proceso, otro factor de dificultad entre los alumnos que la base de orientación debe de considerar por ello. Por ello, aunque el enunciado pueda pedir por ciertas explicaciones, es fundamental que la base de orientación recuerde de manera explícita por las explicaciones y que éstas no sean nunca eliminadas. Es de vital importancia enfatizar el solapamiento entre las propias etapas, las acciones y los vínculos que surgen entre ellos, pues como en una historia, los elementos presentados en la introducción son los protagonistas del nudo y su acción marca el desenlace de mismo, con ellos confluyen otros elementos que cabe conocer y que dan sentido último a la historia y a sus posibles finales.

Finalmente, comentar que si bien la concreción de las etapas principales de resolución deben ser más estables a lo largo del proceso de aprendizaje, entendemos que las acciones (dimensiones) descriptoras vinculadas a cada uno de las etapas quedan más abiertas y moldeables en función de las necesidades puntuales de los alumnos. Así mismo, el análisis llevado a cabo nos ha permitido identificar conjunto de palabras clave para cada uno de ellas. A nuestro modo de ver, estas palabras recogen las acciones fundamentales básicas cuya vinculación y ejecución permiten la resolución de un problema. Así mismo, pensamos que la disposición final de estas palabras para crear las dimensiones depende de las necesidades de los alumnos y los criterios del profesor.

Hemos observado como aspectos formales como el lenguaje, el tiempo verbal, la concreción de palabras específicas, la densidad y longitud de las dimensiones, y de presentación, como la

impresión en el papel, de la base de orientación, son importantes para su aceptación y aplicación por parte de los alumnos. De aquí, la importancia que cobran estos aspectos a la hora de diseñar y adecuar una base de orientación. Por ello, valorar las opiniones de los alumnos y crear la base de orientación entorno a sus necesidades va a permitir una mejor aceptación de la misma. Así, aunque se observa necesaria la guía del profesor para el diseño principal de la base de orientación, remarcamos la participación de los alumnos para ajustar su forma, visibilidad, vocabulario y apariencia.

Finalmente, vistas las reticencias que las creencias de los alumnos pueden generar ante el uso de una base de orientación para la resolución de problemas, consideramos que dicha práctica debe ser integrada en el proceso de aprendizaje lo antes posible, justo al iniciar el trabajo en resolución de problemas. Como hemos ya comentado, para una aprobación y aceptación de la base de orientación por parte de todos los implicados, docentes y alumnos, es necesaria la implicación de todos ellos para su elaboración. Así, tanto el profesor como los alumnos deben ser partícipes de su adecuación, sin perder de vista su objetivo principal: guiar a un resolutor no experto en su camino para resolver problemas. Por ello, entendemos que la estructura básica de la base de orientación debe ser presentada por el docente considerando las aportaciones de los alumnos para adecuar cada una de los aspectos a considerar.

4.3 Síntesis

Con la experiencia llevada a cabo a lo largo de la Implementación Primera (I1) concluimos que el uso de una base de orientación en la resolución de problemas puede ser una buena herramienta y su uso una práctica satisfactoria para ayudar los alumnos no expertos en la adquisición de la competencia en resolución de problemas.

Con el uso de una base de orientación adecuada a las necesidades de los alumnos cuando estos no son expertos les permite, poco a poco, acceder a una práctica de resolución más visible favoreciendo la verbalización de sus pensamientos: familiarización de conceptos y desarrollos, razonamientos, organización y aplicación de los mismos, con lo cual tienen la posibilidad de rectificar sus errores y, en consecuencia, poder guiar sus propias argumentaciones y resoluciones; a la vez que permite al profesorado ayudar y guiar mucho mejor a sus alumnos en todo este proceso y, así, posibilitar una mejora en la adquisición de dicha competencia (y de todas la que, con ella, entran en juego). Así lo pretende ilustrar la Figura 4.18.

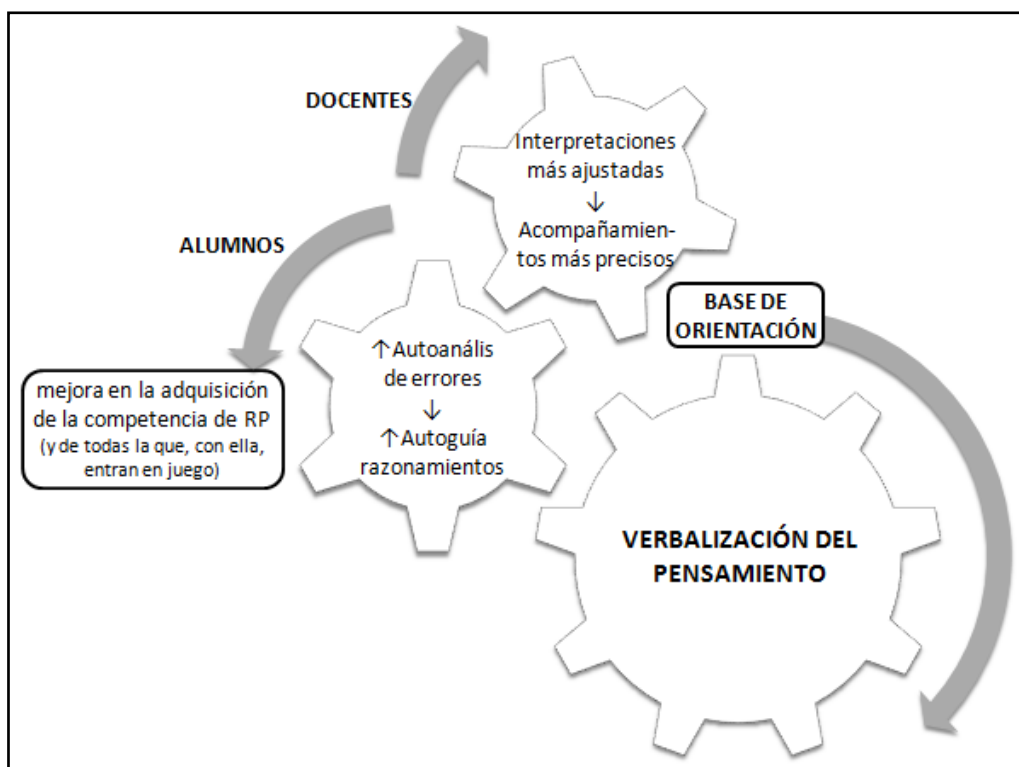


Figura 4.18. Implicaciones en la dinámica de su Implementación

Si bien hemos observado que cuando la finalidad de la resolución de problemas recae en el aprendizaje de la resolución en sí misma, el uso de una base de orientación adecuada puede influir positivamente para lograr un aprendizaje significativo de dicho objetivo, observamos también que la generación y adaptación de una base de orientación a los alumnos que deben utilizarla no es sencilla. Requiere del conocimiento teórico de las acciones vinculadas a la resolución de un problema matemático, de los aspectos que influyen en su práctica como el conocimiento de las dificultades y logros de los alumnos en cuanto a la aplicación de las mismas, de sus prácticas de resolución anteriores, de su poca flexibilidad para aceptar cambios; así como un lenguaje claro y una presentación adecuada. Por ello la base de orientación a considerar debe permitir a los alumnos sentirse cómodos con su uso, lo que conlleva una adecuación constante de la misma en función de las necesidades y logros de los alumnos.

En este sentido, sólo la evaluación constructiva de la misma base de orientación permite la adecuación y completitud necesaria de la misma. Con ello, la base de orientación liga y da coherencia a los tres momentos clave de la actividad de los docentes en relación a sus alumnos, al mismo tiempo que evidencia que en el núcleo del proceso de enseñanza y el aprendizaje usando una base de orientación de manera positiva se encuentra en los alumnos. Así pues, la aplicación de una base de orientación en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas orienta, además de los alumnos, la actividad del profesor, pues guía y vincula los 3 momentos clave de la misma:

1. Planificar: escoger, diseñar o adaptar la base de orientación en particular, y los problemas a utilizar, en función de las necesidades, creencias y logros observados en la práctica de los alumnos y los objetivos que se pretenden lograr.

2. Gestionar: proporcionar los instrumentos para la resolución de problemas a los alumnos, observar cómo los alumnos resuelven el problema utilizando la base de orientación y revisan sus producciones de acuerdo con la base de orientación, y recoger los datos vinculados a ellos.
3. Evaluar: analizar los datos recopilados y adecuar lo que convenga para que se ajusten a los objetivos marcados, y registrar los distintos cambios para posteriores iteraciones.

La Figura 4.19 nos da una idea gráfica de esta dinámica.

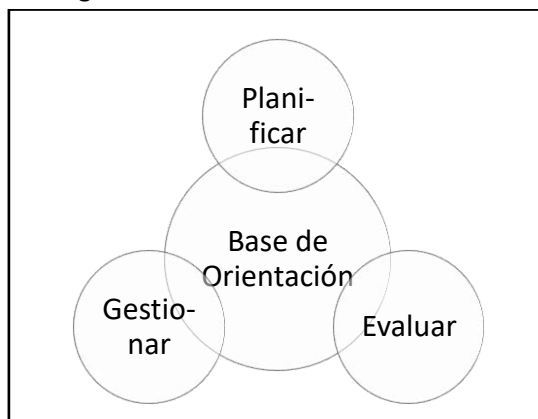


Figura 4.19. Implicaciones de su Implementación en la dinámica de los docentes

Para ellos hemos visto que afinar la base de orientación requiere:

- de una adecuación continua, es fundamental ir adaptando bien el material de trabajo a medida que las necesidades de los alumnos se van modificando.
- de una implementación no automática, pues requiere de un proceso de familiarización y habituación.

de una revisión constructiva que se puede conseguir mediante un proceso de análisis y valoración constante.

La Implementación tuvo lugar en aulas de 6º de Educación Primaria y 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria al trabajar problemas matemáticos de manera individual y por parejas. Las evidencias analizadas no muestran que el uso de la base de orientación esté sujeto a una etapa educativa o curso concreto. Tampoco hemos observado diferencias en relación al uso de la base de orientación en función de si los problemas se habían trabajado de manera individual o por parejas. Sin embargo, si hay evidencias de un mayor o menor uso de la base de orientación en función del énfasis o importancia de su utilidad que muestra y demuestra el docente del instrumento, la base de orientación.

Con el análisis particular de la BO1 utilizada en esta Implementación Primera la importancia de percibir el proceso de resolver un problema como la consecución, no lineal pero continua en el tiempo, de determinadas acciones que para alcanzar un objetivo claro: utilizando conocimientos matemáticos y de manera razonada, hallar respuestas sobre la situación que se presenta. En este sentido, el análisis desarrollado nos ha permitido confirmar el mínimo de tres etapas por las que un resolutor experto transcurre al resolver un problema. A su vez, hemos constatado cómo es posible desplegar estas tres etapas en acciones más concretas.

Ello nos informa de distintos hechos. El primero, que tanto docentes y alumnos deben de tomar consciencia de lo que supone resolver un problema, y así lo perciban. Luego debido a

que la base de orientación se presenta por escrito, cabe afinar bien lo que se pretende transmitir en cada una de las sentencias y rótulos que la describen.

La base de orientación BO1 proviene de la adaptación de una rúbrica de desempeño, Rb1 en la que se habían establecido tres dominios de desempeño. Con el análisis particular de la BO1 utilizada en esta Implementación Primera observamos que los tres dominios considerados en ella recogen las tres etapas mínimas por los que un resolutor experto pasa al resolver un problema y que los alumnos pueden entenderlos. En relación a las dimensiones que se asocian a cada uno de los dominios correspondientes a distintas de las acciones que pueden estar ligadas a la resolución de problemas, y de acuerdo con la adaptación de la misma a los alumnos que deben utilizarla, son las que sufrirán en mayor medida los refinamientos para que pueda adaptarse a las necesidades de los alumnos y los objetivos que se pretende que logren.

No hay una manera concreta de describir estas dimensiones. Sin embargo, observamos algunas particularidades que pueden ser de utilidad a tener que describirlas. Atendiendo la necesidad que la resolver un problema se perciba como un acto continua, la importancia que toma el uso de los verbos en la descripción de las distintas acciones que la base de orientación pueda considerar, especialmente para marcar esta actividad continua. En este sentido, pensamos que la clasificación de verbos en función de la funcionalidad que se ha observado que pueden tener en el proceso de resolver un problema, la Tabla 4.5 puede ser de utilidad a la hora de describir las acciones que deban constituir una base de orientación.

Por otro lado, atendiendo que la base de orientación es un instrumento para el uso los alumnos, cabe evitar en ellas la nomenclatura heredada de las rúbricas para agrupar los etapas y acciones de resolución, como se mantuvieron los rótulos de dominios y dimensiones en la BO1. En cambio, pensamos que en la base de orientación, si bien tiene sentido agrupar los etapas mínimas y las acciones vinculadas, creemos que los rótulos pertinentes para los alumnos serían etapas y acciones de resolución. Sin embargo al ser las etapas un indicativo del nivel de implicación de los alumnos en el proceso de resolver un problema, pensamos que también sería bueno referirse a las etapas como niveles de implicación.

Finalmente, sobre la evaluación particular de la base de orientación utilizada en esta Implementación Primera, la BO1 destacamos la necesidad de adecuar la descripción del 3º dominio, adecuar y sintetizar mejor las distintas dimensiones que la conforman, simplificar el vocabulario utilizado y asegurarse que los alumnos no tengan dificultades para leerla. Por otro lado, se considera positivo el hecho que las acciones se presenten en 1º persona y en presente.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS III: Generación y Uso de una Base de Orientación para la Resolución de Problemas Matemáticos. Articulación de sus Dimensiones

El análisis que presenta este capítulo se basa en datos extraídos de la Implementación Segunda (I2), en la que, de acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), se propusieron los problemas Pb1.1, Pb1.3, Pb2.a2, Pb3.a2, Pb3.a3, Pb4.a2, Pb5.a2, Pb 6.a2, que se detallan en el Anexo 1, y la base de orientación BO2, que se presenta en el Anexo 3. De acuerdo con el mismo apartado de la Metodología (apartado 3 del capítulo 2), y como se puede observar en la Tabla 5.1, la base de orientación BO2 utilizada en esta Implementación Segunda fue estructurada en 3 dominios para cada uno de los cuales se desprenden 3 dimensiones asociadas. Recordamos aquí que los tres dominios considerados se corresponden con las tres etapas mínimas en que, de acuerdo con el Análisis II desarrollado en el capítulo 4, cualquier resolutor experto se ve involucrado al resolver un problema y por dimensiones nos referimos a acciones particulares de la resolución de problemas vinculadas a cada una de ellas. De acuerdo con ello, lo largo de este análisis, mantendremos la designación de dominios y dimensiones tal como se utilizó en el momento de su implementación, la Implementación Segunda (I2).

Expuesta la nomenclatura que utilizaremos, en este capítulo pretendemos apreciar qué papel pueden tomar los dominios y las dimensiones que definen una base de orientación para la resolución de problemas. En otras palabras, nos interesa observar qué puede promover y en qué sentido, considerar ciertos dominios y dimensiones en una base de orientación para la resolución de problemas, en el proceso de resolver un problema y, por consiguiente, en qué medida tienen, o no, tiene razón de ser consideradas.

Para ello, analizaremos el papel específico que toman algunas de las dimensiones de la base de orientación BO2 utilizada en la Implementación Segunda (I2) de acuerdo con las producciones de los alumnos participantes en dicha implementación, al resolver un problema utilizando la base de orientación BO2. El papel sintetizador o de conexión que, en cada caso, apreciaremos que presentan, explica la selección de las dimensiones analizadas.

DOMINIOS	DIMENSIONES
COMPRENDO EL PROBLEMA	D1. Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga.
	D2. Distingo los datos y me aseguro que los entiendo.
	D3. Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario. ANÁLISIS 5.1
TENGO UN PLAN DE ACCIÓN	D4. Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo.
	D5. Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia.

	D6. Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado.	ANÁLISIS 5.2
	D7. Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite).	ANÁLISIS 5.3
REVISOR MI TAREA	D8. Una vez resuelto,	
	<ul style="list-style-type: none"> • investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si sólo hay una, razono porque no hay más. • razono si se podría hacer de otras maneras. 	
	D9. Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono, si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas.	ANÁLISIS 5.4

Tabla 5.1. Situación de los análisis parciales sobre la base de orientación BO2 utilizada en la Implementación Segunda (I2)

Como hemos identificado en la misma Tabla 5.1., en el primer apartado de este capítulo centraremos nuestra atención en la dimensión dedicada a la representación (expresión y las pruebas correspondientes) del problema, que se corresponde con la dimensión 3 de la BO2; en el segundo apartado profundizaremos sobre la dimensión que conlleva plasmar la aplicación de una estrategia (dimensión 6 de la BO2); seguiremos, en el tercer apartado, con el estudio de la dimensión dedicada a la revisión del atasco, entendido como el bloqueo y el error a la hora de resolver el problema (dimensión 7 de la BO2), y, finalmente, en el cuarto apartado, abordaremos la dimensión vinculada a la redacción y revisión de lo que ha realizado a lo largo de la resolución del problema, correspondiente a la dimensión 9 de la BO2).

De acuerdo con lo dicho anteriormente, centramos el análisis en el estudio de las dimensiones 3, 6, y 9 de la BO2 por ser las dimensiones finales de cada uno de los tres dominios que conforman dicha base de orientación y que, como se desprende de cada los respectivos análisis, sintetizan lo que se pretende obtener al finalizar cada una de los tres dominios: entender el problema, en el primer caso; tener un plan de acción, en el segundo; y revisar el trabajo realizado para llegar a una conclusión final. Y, por otro lado, abordamos la séptima dimensión, encargada de la gestión del atasco que, como observaremos, se vincula con todos los dominios y dimensiones de la base de orientación BO2.

De acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), en esta Implementación Segunda participaron tres grupos de Educación Primaria: IT6A e IT6B al cargo del docente IT6, y NB6A, al cargo del docente NB6; y tres de Educación Secundaria: AL1C y AL1D, al cargo del docente AL1 y SC1A, al cargo del docente SC1. Recordamos que IT6 y NB6 son maestros, AL1 maestro que promocionó a secundaria y SC1 profesor de matemáticas. No todos los grupos participantes en trabajaron todos los problemas propuestos. Sin embargo, todos los grupos sí trabajaron el problema Pb1.3.a1 que se presenta en el Anexo 1. Por ello, nos centramos en examinar cómo las dimensiones consideradas aparecen reflejadas en las producciones de los distintos alumnos al trabajar el problema Pb1.3.a1, de manera individual y teniendo a su disposición la base de orientación BO2.

En relación al problema Pb3.1.a1, y de acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), recordar que se trata de un problema contextualizado en la misma matemática que conlleva la experimentación numérica, y según cómo se presente responde a un modo de

recreación matemática. En este sentido, el problema encajaría curricularmente en el bloque de Numeración y Cálculo, bloque curricular que se trabajaba desde el inicio del curso y de manera continua en los distintos grupos implicados. De manera secundaria, se considerarán

De manera complementaria, el análisis podrá verse ampliado con observaciones a fragmentos correspondientes a las producciones de los alumnos relativas al problema Pb6.a2 por la variedad y completitud que puedan añadir a las observaciones de las producciones relativas al problema Pb3.1.a1. De acuerdo con el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2) el problema Pb6.a2 también fue trabajado a nivel individual con el uso de la base de orientación BO2 en esta Implementación Segunda. Se trata de un problema que presenta características de contenido, contexto y enunciado significativamente diferentes al que nos proporciona los datos primarios (Pb3.1.a1), al tanto que fue abordado tanto por un grupo de Primaria como de Secundaria.

Finalmente, mencionar que parte de los resultados que se discuten en este capítulo han sido publicados conjuntamente con el director de tesis. En particular, parte de los resultados relativos al primer apartado del presente capítulo, aparecen publicados en el número 75 de la *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO* del mes de enero de 2017, con el título *Representar problemas usando una base de orientación*. Por otro lado, destacar dos publicaciones relacionadas con el análisis que presenta el apartado 3 de este capítulo. La primera, y menos extenso, se corresponde con el artículo presentado en el *Congrés Català d'Educació Matemàtica C2EM* celebrado en la Universidad de Barcelona, los días 11, 12 y 13 de julio de 2016 y que aparece en sus Actas con el título *(Re)bastir la base d'orientació en la resolució de problemes. Una anàlisi dels entrebancs*. El otro, correspondiente a un análisis más amplio, está aceptado para ser publicado por la revista de Educación Matemática REDIMAT. Las referencias concretas a estas publicaciones se detallan en la en la página que introduce las Referencias Bibliográficas.

5.1. Dimensión 3 de la BO2

Centramos este primer apartado parte del presente análisis en la tercera dimensión *Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario*, integrada en el primer dominio *Comprendo el problema* de la base de orientación BO2 (ver Tabla 5.1), que pretende enfatizar la necesidad de que el propio *resolutor* exprese el contenido del enunciado de la manera que mejor le permita entender la situación planteada y, así, comprobarlo.

5.1.1 Gestión de la representación

Al analizar las resoluciones de los alumnos involucrados usando la base de orientación BO2 al resolver el problema Pb1.3.a1 encontramos distintas representaciones. En tanto que cada una de ellas es distintiva y peculiar, encontramos ciertas similitudes en cuanto a la tipología de los datos considerados y su plasmación, todos ellos interesantes de analizar. En este sentido, sin dejar de prestar atención al lenguaje, y por tanto, a la verbalización y notación utilizada en las representaciones, nos interesamos especialmente por la selección y organización de la información que en ellas se representa así como las inferencias que surgen a través de los distintos lenguajes (matemáticos) utilizados. Desde esta perspectiva, observamos que podemos organizar las distintas representaciones en cuatro grupos de representación,

correspondientes a los que se presentan en la Tabla 5.2 y se ejemplifican, con fragmentos de las resoluciones de los alumnos, a posteriori.

**Representaciones del problema según la información considerada
y sus inferencias**

- a) Colección ordenada de datos numéricos
 - b) Colección ordenada de datos numéricos y no numéricos
 - c) Relación entre datos numéricos
 - d) Relación entre datos numéricos y no numéricos
-

Tabla 5.2. Los cuatro grupos de representaciones identificados

Veamos cada uno de de ellos:

a) Colección ordenada de datos numéricos

En estas dos primeras representaciones del problema, Figura 5.1 y Figura 5.2, simplemente se consideran las 6 cifras con las que crear los dos números de tres cifras. Se trata de un intento de representar el problema, muy limitado, en el cual sólo se recogen los datos numéricos que se expresan mediante los símbolos numéricos. Cabe notar que en ambas se mantiene el orden en qué aparecen las cifras en el enunciado del problema.

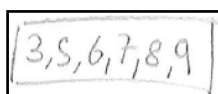


Figura 5.1. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A26

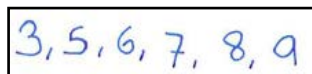


Figura 5.2. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_NB6A03

b) Colección ordenada de datos numéricos y no numéricos

En este segundo caso, Figura 5.3, además de las seis cifras a utilizar, mediante el uso de una flecha se evidencia que a partir de ellas deben de ser consideradas dos operaciones, una suma y un producto. Cabe notar que estas operaciones aparecen expresadas con los símbolos correspondientes y no descritos como se hace en el enunciado. Con ello, aunque sigue faltando información relevante, se expresa de manera notoria uno de los objetivos a alcanzar, las operaciones con las que obtener los máximos valores.

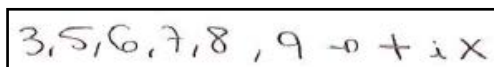
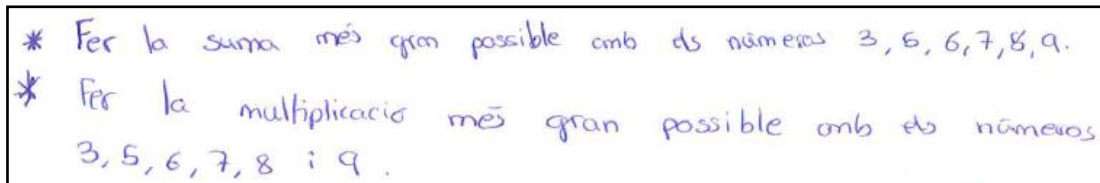


Figura 5.3. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A25

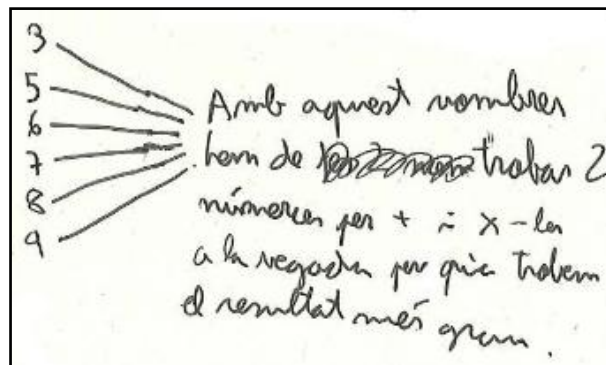
En esta misma línea en la representación de la Figura 5.4, se desglosa la información en función de las operaciones, que ahora se expresan de forma verbal. Hay mayor información explícita, al referirse a las condiciones requeridas, pero se trata de una representación poco afinada que, al no tener en cuenta que las 6 cifras deben cumplir ciertas condiciones, puede fácilmente inducir a error a la hora de componer los dos números de tres cifras.



* Fer la suma més gran possible amb els números 3, 5, 6, 7, 8, 9.
* Fer la multiplicació més gran possible amb els números 3, 5, 6, 7, 8 i 9.

Figura 5.4. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A23. [*Hacer la suma más grande posible con los números 3, 5, 6, 7, 8, 9. *Hacer la multiplicación más grande posible con los números 3, 5, 6, 7, 8 y 9.]

De manera alternativa a la anterior, la representación de la Figura 5.5 presenta las cifras a considerar ordenadas tal como se presentan en el enunciado, es decir, de menor a mayor valor, pero formando una columna. De cada valor se desprende una línea, y su conjunto pretende ilustrar que todas ellas deben de ser reagrupadas para formar dos números con los que realizar dos operaciones con el mayor valor. Cabe observar que en dicha representación se han substituido de manera automática la cantidad de números a definir (dos: 2) y las palabras de suma y multiplicación, por los símbolos correspondientes: + y \times , respectivamente, mientras que el resto de información se expresa de forma verbal.



3
5
6
7
8
9

Amb aquestes nombres hem de trobar 2 números per + i \times - la a la vegada per que trobem el resultat més gran.

Figura 5.5. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1D23. [Con estos números hemos de encontrar 2 números para + y \times a la vez para encontrar el resultado más grande.]

Notamos que estos dos primeros grupos de representación sirven únicamente para aclarar el enunciado, pero no parece que den pautas para organizar el plan de resolución.

c) Relación entre datos numéricos

Con las siguientes evidencias, entramos en otro nivel de expresión y la inclusión de pruebas de lo que el enunciado describe, lo que podría servir para organizar un plan de resolución del problema.

Empezamos observando el intento de representación de la Figura 5.6, muy específico que, aunque descartado, intenta reflejar una propuesta de reparto de las seis cifras. De esta manera se interpreta un intento de aproximación a entender la situación que describe el problema.



Figura 5.6. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_NB6A07

Yendo un poco más allá, en la representación que sigue a continuación, Figura 5.7, visualmente muy significativa, observamos los seis dígitos repartidos, de manera descendente, por parejas de mayor a menor valor. Verticalmente, permite identificar dos números de tres cifras cuyo valor de centenas es mayor que el de decenas, y éste mayor que el de unidades.

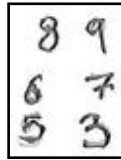


Figura 5.7. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A16

En la línea del anterior, la Figura 5.8 presenta un diagrama que explicita tanto la creación como el proceso de dos números de tres cifras a partir de las 6 dadas.

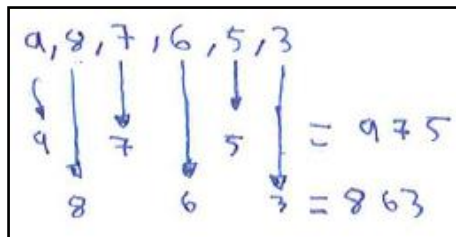


Figura 5.8. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A14

Ligado a estos dos ejemplos, pero en sentido inverso, es el caso de la Figura 5.9 siguiente. En ésta, mediante un esquema ramificado, se parte de la propuesta explícita de la creación de dos números, cada uno de ellos con tres cifras no repetidas de las seis dadas.

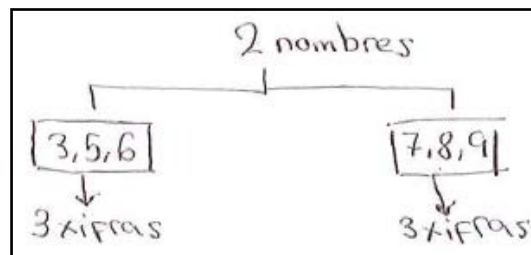


Figura 5.9. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A27 [2 números: - 3, 5, 6 → 3 cifras; - 7, 8, 9 → 3 cifras]

En estas distintas representaciones, a pesar de que sólo se consideran datos numéricos, éstos se relacionan y organizan mediante un esquema en forma de árbol para especificar la creación de dos números de tres cifras cada uno, a diferencia de las anteriores.

d) Relación entre datos numéricos y no numéricos

En este último ejemplo, Figura 5.10 se distribuye la información en dos bloques, a modo de tabla, de igual estructura, uno para representar las condiciones de la suma y otra para el producto. En ambos se recuerda que se debe lograr la operación de mayor valor con dos números de tres cifras cada uno. Sin embargo, en ninguno de ellos se especifican las cifras a considerar o las condiciones que fijan los números que deben operarse. Así mismo, llama la atención que los números estén representados por el signo de la operación que se debe realizar en el otro bloque. Aunque no esté representada toda la información del problema, se trata de una expresión más concisa y completa.

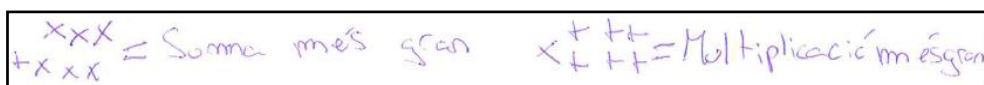


Figura 5.10. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A24. [xxx + xxx = Suma más grande; +++ x +++ = Multiplicación más grande]

Analizados los cuatro tipos de representación observados en función de la información que presentan y sus inferencias, al margen de su completitud o acierto, podemos distinguir una aportación más general en el proceso global de resolución. Así, distinguiríamos un primer grupo de representación, que engloba los dos grupos de representaciones inicialmente observadas, cuya contribución general en el proceso de resolución se resumiría en aclarar la situación expuesta, es decir, el enunciado del problema; y, por otro, el grupo que comprendería las dos últimos grupos arriba observados, cuya contribución iría un paso más allá, dando pie a la búsqueda de un plan de acción. Con ello, podemos completar la Tabla 5.2 anterior por la Tabla 5.3 que sigue a continuación:

Representaciones según la información considerada y sus inferencias	Contribución principal
a) Colección ordenada de datos numéricos	Aclarar el enunciado
b) Colección ordenada de datos numéricos y no numéricos	Aclarar el enunciado
c) Relación entre datos numéricos	Organizar un plan de resolución
d) Relación entre datos numéricos y no numéricos	Organizar un plan de resolución

Tabla 5.3. Naturaleza de las representaciones en función de la información que transmiten y sus inferencias

Comentar aquí que, en tanto que la dimensión 3 que expone de manera explícita “*Expreso el problema para entenderlo mejor [...] y hago pruebas si me es necesario*” entendemos que la misma representación puede conllevar la misma prueba e indicios de procedimiento, como es el caso de la Figura 5.8, o bien que cualquiera de estas representaciones puede ir acompañada, ser consecuencia, o simplemente ser rectificadas por otra de diversas manipulaciones de los datos, en tanto que dicha práctica ayude al alumno a interiorizar la situación que describe el problema, finalidad última de esta dimensión como última del primer dominio.

De manera paralela, hemos evidenciado el uso de distintos lenguajes para exponer la información correspondiente. Hemos observado casos en los que básicamente se han utilizado palabras y gráficas, en otros en los que básicamente símbolos, en otros donde, las palabras del enunciado han sido transformadas en un símbolo, hemos constatado el uso de conectores, etc. Con ello, y aunque pueden aparecer interferencias entre uno y otro modo, podemos distinguir entre un modo de representación de carácter descriptivo, en la que básicamente se aprecia el uso de las palabras, como es el caso que presenta la Figura 5.4, y otra, que podríamos destacar más visual, como evidencian los fragmentos de resoluciones de las Figuras 5.9, que podemos complementar con fragmentos aún más visuales extraídos de las resoluciones del problema Pb6.a2, como el que presentan las Figuras 5.11 y Figura 5.12 siguientes:

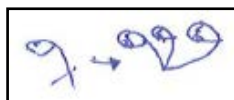


Figura 5.11. Fragmento de la producción Pb1.6.a2_SC1A14

En este sentido, en la Figura 5.11 se observa una representación muy gráfica que ilustra lo que sucede al eliminar una cabeza: la supresión de una cabeza conlleva la generación de tres cabezas, hecho que queda muy claro al dibujar las tres cabezas que surgen de una misma raíz, de un mismo punto común, que asociaríamos como la raíz de la cabeza cortada.

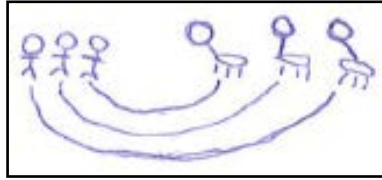


Figura 5.12. Fragmento de la producción Pb1.6.a2_NB6A20

En esta sentido, la representación de la Figura 5.12, ilustra la situación descrita en la segunda parte del problema Pb6.a2, en la que se presenta la correspondencia entre cada uno de los tres héroes y cada una de las tres hidras, tal como se describe en el enunciado.

Vista la variedad de representaciones que pueden ser entendidas como visuales, podríamos diferenciar entre representaciones icónicas, cuando sus elementos principales son dibujos o gráficos, o bien esquemáticas, cuando los elementos principales son conectores y símbolos, de acuerdo con la Tabla 5.4. Así mismo, un lenguaje no excluye al otro. Pueden o no complementarse. En cualquier caso, si que podemos referirnos a un u otro carácter de representación cuando podemos distinguir claramente un uso mayoritario de los elementos principales que los caracterizan.

Lenguaje de representación		Elementos principales
Descriptivo		Palabras, grafías, símbolos
Visual	Esquemático	Conectores, símbolos, grafías
	Icónico	Dibujos, gráficos, mapas

Tabla 5.4. Lenguajes de representación observados

5.1.2 Discusión

Para poder iniciar una propuesta de resolución a un problema, y más aún poder entender el por qué de su enfoque, se hace imprescindible que los alumnos se habitúen a dejar por escrito sus propias representaciones del problema. De otro modo, será complicado comprender, y más aún recuperar en caso de ser necesario, las decisiones que llevan a desarrollar unos u otros procesos, tanto por parte de ellos mismos como del profesor.

En función del contenido que recogen las representaciones identificadas y las inferencias que en ellas se presentan, hemos identificado cuatro grupos de representación. Dos de ellos, caracterizados por la colección de datos, cuya máxima contribución recae en aclarar el enunciado mientras que los otros, que evidencian relación entre los datos, contribuyen en la organización de un posible plan de resolución. En ambos casos, se han distinguido, en mayor medida, aquellas colecciones o relaciones de datos únicamente numéricos, y otra, más minoritaria, las que se tienen en cuenta, además de los numéricos, los no numéricos.

La distinción entre los cuatro grupos de representaciones, permite no sólo un acercamiento a las interpretaciones del problema, sino entrever la profundidad en qué un alumno ha interiorizado la situación descrita en el problema. Percibimos esta agrupación de las representaciones como una gradación que posibilita descifrar los contenidos e ideas de qué dispone el alumno para entender el problema, comprender las aproximaciones al problema realizadas y, en consecuencia, detectar posibles dificultades. Con ello se puede determinar y proporcionar el soporte más adecuado en función de su dificultad.

De manera paralela, en función del lenguaje utilizado hemos observado dos tendencias principales a la hora de dejar por escrito dichas representaciones. Así, hemos identificado plasmaciones de carácter descriptivo, cuando mayoritariamente se usan palabras para expresar la situación del problema, y otros de carácter visual, ya sea a nivel esquemático, cuando intervienen en mayor medida conectores, o icónico, cuando los elementos principales son dibujos o imágenes propiamente dichas.

El estudio confirma la necesidad de considerar la dimensión dedicada a la expresión del problema debido a la dificultad que ésta aún se observa entre los alumnos de las edades comprendidas para este estudio. Aunque se trata de un quehacer fundamental tanto para entender la situación descrita en el problema como para indagar, y posteriormente entender el por qué, de una búsqueda de una estrategia de resolución, al margen de observar distintas formas de representar el problema, apreciamos una falta general de completitud y manipulación en ellas. Si en general se ha observado que se identifican con más facilidad los datos numéricos más explícitos y listarlos, se ha distinguido una mayor dificultad en abstraer y manipular el conjunto de los datos, tanto numéricos como no numéricos.

Con la necesidad de no obviar dicha dimensión, añadimos la necesidad de no concretar en ella un determinado modo o lenguaje representación sino más bien de invitar a utilizar cualquier forma de representación. El objetivo está en que los alumnos sean capaces de realizar representaciones lo más ajustadas posibles, que den pie a organizar procesos de resolución adecuados. Para ello, el modo en que hacerlo debe ser libre para los alumnos. Sin embargo, se ve necesario que los alumnos puedan conocer distintos modos de representación para que, dado el caso, puedan plasmar su representación según mejor les convenga para expresar y organizar lo que se presenta en el problema, al mismo tiempo que se conviertan en críticos de sus representaciones, para aprender a adecuarlos, mejorarlas y completarlas, tanto por escrito como mentalmente, a la realidad del problema para establecer su futuro plan de resolución. Así mismo hacer una representación correcta puede ser no garantía de éxito. Como previenen ciertos estudios, aún siendo el dibujo correcto los alumnos pueden desviarse de una resolución adecuada debido a realizar una mala interpretación del dibujo (Kribbs y Rogowsky, 2016). Por ello, con el uso de la base de orientación se deben proporcionar oportunidades para que los alumnos desarrollen sus habilidades de representación y que les implique reflexionar sobre ellas.

5.2. Dimensión 6 de la BO2

El análisis que se desarrolla en este segundo apartado del análisis se centra en el estudio de la sexta dimensión *Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado*, la tercera de las que confinan y culmina el segundo dominio de la base de orientación BO2. La finalidad principal de dicha dimensión recae en enfatizar la importancia de no sólo haber encontrado los procesos que definen una estrategia de resolución al problema con sus respectivos razonamientos y algoritmos, sino de plasmarlo y detallarlo de manera clara en el soporte donde desarrollar la resolución al problema (en nuestro caso, el papel donde está escrito el problema). Puntualizar aquí que en este contexto, entendemos por estrategia el conjunto de las acciones, como veremos más adelante, procesos y procedimientos, que, en su conjunto, permiten al alumno definir un plan de acción con la intención de dar una respuesta a las preguntas o quehaceres establecidos en el problema. En este sentido recordamos que no

necesariamente debe de por qué tratarse de una estrategia reconocida como tal, sino que se percibe como al conjunto de procesos que establece el alumno para dar respuesta a las cuestiones planteadas. En este sentido, prestaremos nuestra atención en analizar aquellas resoluciones en las que los alumnos demuestran haber indagado en su quehacer para poder explicar la estrategia que les ha permitido determinar un camino para dar respuesta a las cuestiones formuladas en el problema.

El análisis nos permite distinguir entre, por un lado, la naturaleza de los procesos desarrollados que, en su conjunto, permiten al alumno llegar a alguna conclusión sobre la situación que genera el problema y, por otro, su verbalización, es decir como el alumno plasma por escrito las acciones vinculadas al proceso que piensa y desarrolla, o partes del mismo, para afrontar la situación descrita por el problema.

Recordemos que el problema Pb1.3.a1 del cual analizamos las producciones de los alumnos pide por una doble condición numérica a partir de la experimentación con 6 cifras distintas. Se trata de encontrar aquél par de números de tres cifras cada uno, sin ninguna de ellas repetida, que a la vez determinen la suma y el producto de mayor valor. Como en el análisis de la dimensión 3, para completar e ilustrar las explicaciones de nuestro análisis, recurriremos, cuando sea necesario, a las resoluciones del problema Pb6.a2 que, recordamos, está basado en la mitología y conlleva el conteo o combinaciones numéricas.

En tanto que para el análisis de esta dimensión deberemos recurrir y referirnos a los quehaceres de los alumnos en función de la naturaleza que los caracteriza, vemos necesario antes de iniciar dicho estudio, establecer qué entendemos por cada una de las palabras que pretenden definir dichos quehaceres. La primera palabra a distinguir es la de proceso, que entendemos como el conjunto de acciones que se realizan para llegar a un fin. En este sentido observaremos que las acciones que intervienen en un determinado proceso no solo pueden ser diferentes entre sí, sino también de naturaleza distinta. Así, en base a las evidencias encontradas, podemos distinguir entre acciones de carácter mecánico, y otras de carácter creativo e incluso aquellas acciones caracterizadas por sus componentes argumentativos. El modo en qué se ejecutan o transcurren dichas acciones, sean de una u otra naturaleza, es lo que entendemos por procedimiento. En este sentido, podemos interpretar procedimiento como la gestión de las distintas acciones que confinan un proceso. Un proceso puede seguir un procedimiento. Así, cuando esta gestión sigue una estructura concreta, cuando los pasos a considerar mantienen un orden predefinido, preciso y específico será cuando hablemos de algoritmos. En cambio, cuando sean de tipo creativo, inventivo o imaginativo, será cuando hablemos de heurísticas. Con estas consideraciones, entendemos por estrategia el conjunto de todos los procesos, con todo lo que estos requieran, que ha permitido al alumno determinar alguna respuesta a las cuestiones expuestas en el problema. Como se ha mencionado anteriormente, tratamos la estrategia desde el punto de aceptación del resolutor del conjunto de sus procesos que le permiten dar respuesta a las cuestiones formuladas.

Aclarados estos conceptos, empezamos analizando los distintos procesos observados que han permitido a los alumnos dar una respuesta a las cuestiones expuestas en el problema, por tanto, en distinguir entre estrategias, o parte de las mismas, de las observadas en las distintas resoluciones. Posteriormente, estudiaremos como los alumnos acompañan de manera escrita estos procesos, o parte de los mismos y en qué sentido o nivel de profundidad los exponen.

5.2.1 Gestión de procesos estratégicos

Entre los caminos observados que determinen un plan de acción, distinguimos entre aquellos que, en base a las dos condiciones que deben cumplir la suma y el producto de números a determinar, las analizan por separado, considerando primer una de ellas, y después la otra; o bien aquellos que optan por abordarlas a la vez. Independientemente de ello, distinguimos entre aquellos procesos caracterizados por lanzarse a realizar pruebas, ya sea con cierta organización inicial o sin una aparente organización, o bien aquellos en los que se parte de unas ideas concretas que se pretenden desarrollar. En tal caso, se reconoce algún tipo de parentesco o estructura que puede o no ser explicitado, procedente de conocimientos y prácticas anteriores, ayudando a hacer más cercano, concretar y reducir, el campo de resolución del problema. Con ello, intentamos destacar a continuación las evidencias que nos llevan a hablar de cada una de estos procesos que, de manera resumida, recogemos en la Tabla 5.5, y se describen a posteriori.

Procesos estratégicos identificados			Estudio del problema	
Proceso general	Concreciones. Ejemplos			
P. Realizar pruebas (Deductivo)	P.1 Sin organización		Por partes	De manera global
	P.2 Con organización	P.2.1 Descartar posibilidades P.2.2 Hacer un lista ordenada P.2.3 Estudiar casos particulares		
E. Examinar estructuras (Por analogía)	E.1 Usar un modelo	R.1.1 Argumentar de manera directa R.2.1 Recurrir a problemas similares		
	E.2 Sugerir patrones	R.2.1 Buscar regularidades R.2.2 Establecer semejanzas R.2.3 Proponer pautas		
	E.3. Reorganizar relaciones	R.3.1 Utilizar las condiciones del enunciado en otro orden		

Tabla 5.5. Procesos estratégicos de resolución con carácter heurístico identificados

Cabe comentar aquí que estos procesos pueden verse relacionados entre sí, ya que un mismo alumno puede no haber utilizado un único camino para aproximarse a la solución global. Así, en los ejemplos que siguen a continuación, destacamos las ideas que nos permiten hablar de una u otra manera de divisar la solución. A pesar que los matices pueden ser muy sutiles, especialmente porque no siempre los intentos aparecen de manera individual, apreciamos distintos enfoques que son los que nos permiten distinguir entre los distintos grupos mencionados. Cualquier tipo de explicación sobre el proceso estudiado ha sido fundamental para poder entender como el alumno ha considerado su plan.

P. Realizar pruebas

Los primeros procesos que identificamos relacionados con el plan de acción, es probar: entendidos los datos, hacer pruebas con ellos para poder describir alguna estrategia que permita llegar a alguna conclusión. En este sentido diferenciamos dos tipos de emprender este tipo de procesos, unos de manera no organizada, y los otros en que, en alguna medida, se observa cierta organización.

P.1 Realizar pruebas sin organización (aparente)

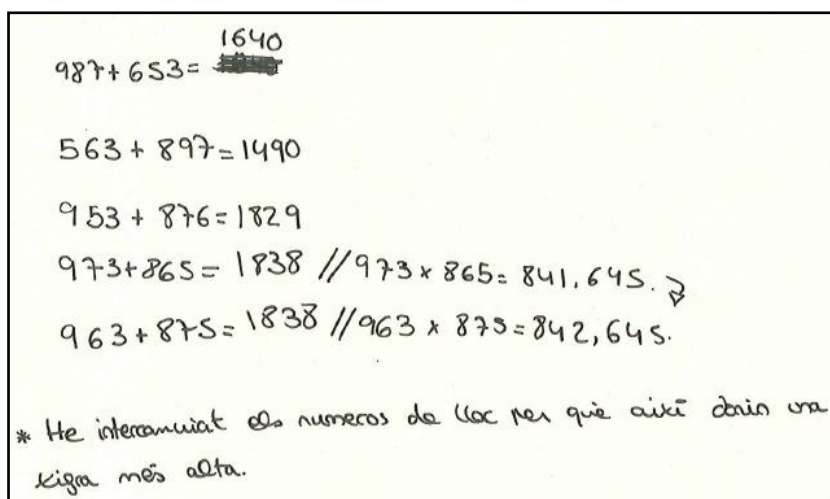
Siguiendo el orden de las restricciones que generan la pregunta del problema, la resolución que muestra la Figura 5.13 se centra en la condición de la suma. Habiendo entendido que los números a operar deben ser de tres cifras, de las seis dadas, sin ninguna de ellas repetida, se lanza a sumar números de tres cifras sin apariencia alguna de que estas puedan o deban mantener algún tipo de relación. En primer lugar, suma dos números de tres cifras cuyas centenas son el 3 y el 5, respectivamente, y hace una prueba con dos números de tres cifras de centenas el 9 y el 3. A partir de aquí, marca una separación y estudia la suma de dos números de tres cifras de centenas el 9 y el 8, respectivamente, para seguir con otra prueba en la que, manteniendo estas dos cifras en las centenas, intercambia el valor de sus decenas. Vemos así como, haciendo pruebas sin ninguna organización aparente predeterminada, llega a una conclusión sobre la primera condición de la pregunta del problema. Y así lo constata la reflexión del alumno en la que sólo comparte que ha llegado a una primera conclusión (pues sólo resuelve parte del problema) probando combinaciones de cifras, sin especificar que le ha llevado a desarrollarlo de tal manera.

Suma → ~~379~~ | ~~975~~ | 965
~~+378~~ | ~~+568~~ | +873
~~757~~ | ~~947~~ | 1838

→ He arribat a aquesta conclusió probant números...

Figura 5.13. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A27. [He llegado a esta conclusión probando números...]

Por otro lado, encontramos también casos en los que a pesar de una aparente falta de organización inicial, a medida que se avanza y aunque el mismo alumno no sea capaz de explicarla, se puede percibir la incorporación de cierto grado de organización. Un ejemplo sería el de la Figura 5.14. Percibimos como el alumno se lanza a sumar dos números de tres cifras, sin ninguna repetida, sin organización aparente. Las centenas de los dos primeros sumandos son 9 y 6, respectivamente; las centenas de los dos sumandos siguientes son 5 y 8. A continuación, encuentra una suma cuyos sumandos tienen centenas 9 y 8, y decenas 5 y 7, que luego rectifica por decenas 7 y 6, respectivamente. En el siguiente intento mantiene los valores de las centenas y unidades, pero intercambia las cifras de las decenas. Al obtener el mismo valor de suma para estas dos últimas, y mayor que los anteriores, compara el valor de sus productos, con lo que da con los valores máximos y se decanta por el último probado, pues de los que tienen igual mayor suma, es el de valor de producto mayor. A pesar que para la discusión del valor del producto, parece haber establecido una cierta organización, su entrada para encontrar un plan de acción ha consistido en realizar pruebas sin ningún tipo de organización aparente, pues varió los valores de las cifras sin relación alguna y no fue hasta la discusión del valor del producto que, en cierta medida, podemos detectar cierto orden.



$$987 + 653 = \del{1640}$$

$$563 + 897 = 1490$$

$$953 + 876 = 1829$$

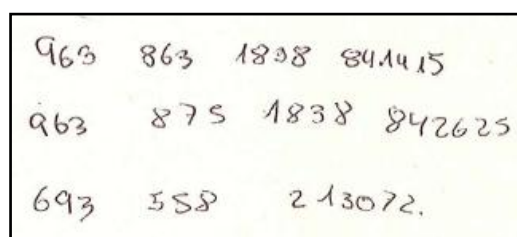
$$973 + 865 = 1838 // 973 \times 865 = 841,645.$$

$$963 + 875 = 1838 // 963 \times 875 = 842,645.$$

* He intercambiado los números de los números de los números que así den una cifra más alta.

Figura 5.14. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C18. [He intercambiado los números de lugar para que así den la cifra más alta.]

El hecho de realizar pruebas sin ningún tipo de organización, previa o final, impide por un lado, volver en cualquier momento al proceso y entender lo que se hizo o porqué, y por tanto, poder ser crítico con las evidencias, y, por otro y de manera consecuente extraer ideas que le puedan servir en adelante. Como hemos visto, en ninguno de los casos se ha podido argumentar por qué se llega a lo observado. En este sentido, esta manera de trabajar se debería concluir con encontrar alguna manera de explicar o reorganizar sus pruebas. Como se puede extraer del proceso que presenta la Figura 5.15 siguiente, cuando proceden por pruebas, los alumnos pueden entrever, de algún modo, si están llegando a una conclusión correcta, pero a menudo, la dificultad que les supone argumentarla, hace que terminen por no compartirla. Con las pruebas sin organización alguna, ha descubierto que en el segundo intento ha encontrado un valor máximo para la suma y el producto. Observa que el producto de la siguiente propuesta es menor, y con ello parece concluir cual es la respuesta, aunque no lo argumenta. Este es, pues el peligro de las pruebas sin organización: la dificultad en releer y entender lo que se ha desempañado y dar el porqué.



$$963 \quad 863 \quad 1838 \quad 841415$$

$$963 \quad 875 \quad 1838 \quad 842625$$

$$693 \quad 558 \quad 213072.$$

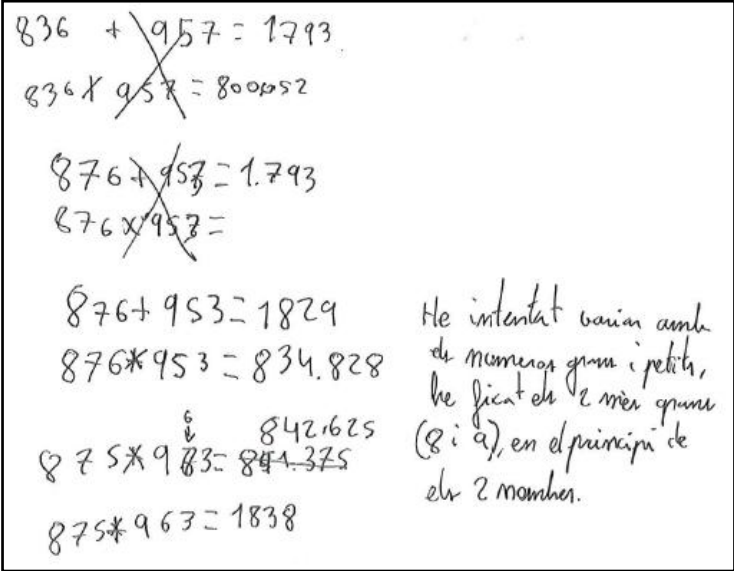
Figura 5.15. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C08

P.2 Realizar pruebas con (cierta) organización

Como acabamos de comentar, hacer pruebas no es una manera totalmente aceptable de entrever como abordar el camino para llegar a alguna conclusión sobre el problema (o parte del mismo). Así mismo, cuando estas pruebas responden a una guía, explican por sí mismas su razón de ser, es más fácil determinar por qué se realizan y qué se busca con ellas. Y, por tanto, además de poder reproducirlas, recuperar una determinada prueba del conjunto puede ser mucho más evidente. Los fragmentos que siguen a continuación, evidencian maneras distintas de enfocar procesos de resolución haciendo pruebas, pero habiendo establecido cierta organización.

P.2.1 Descartar posibilidades

La Figura 5.16 presenta un proceso caracterizado por ir descartando a medida que encuentra las opciones estudiadas. En primer lugar, fija, aunque sin razonar, el 8 y el 9 para las centenas de cada uno de los números que se deben operar, eliminando así otras posibilidades para el valor de centenas. Fijadas las centenas, aborda conjuntamente la suma y el producto, operando primero la suma y después el producto. Encontrado un primer par de valores, va iterando el proceso modificando alguno de los valores de las decenas y centenas por las cifras que ha descartado para las centenas: 7, 6, 5 y 3. Así, en cada iteración encuentra un nuevo par de valores. A medida que va encontrando un valor mayor en la suma o el producto, descarta la pareja anterior. Observamos aquí dos diferencias con el caso anterior: en primer lugar, un primer intento de organización, aunque parcial, pues aunque sin argumentos, aplica cierta distribución de las cifras. Se observa claramente una distribución de los distintos valores que va encontrando ordenados, aunque no con un orden fácilmente explicable porque le permiten ir descartando los valores que se quedan por debajo de otros.

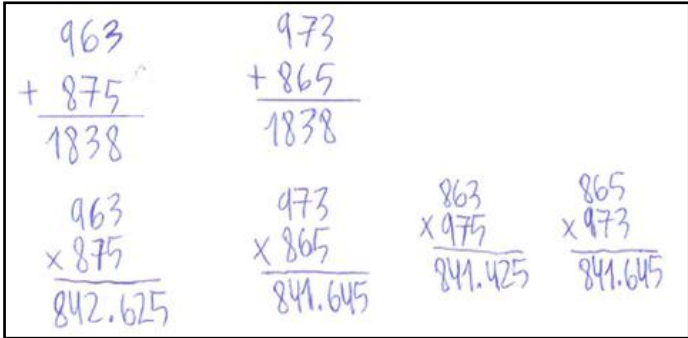


$836 + 957 = 1793$
 ~~$836 \times 957 = 800052$~~
 ~~$876 + 957 = 1793$~~
 ~~$876 \times 957 =$~~
 $876 + 953 = 1829$
 $876 \times 953 = 834.828$
 $875 \times 963 = 842.625$
 ~~$875 \times 963 = 841.375$~~
 $875 \times 963 = 1838$

He intentat variar amb de numeros grans i petits, he fixat els 2 mes grans (8 i 9), en el principi de els 2 nombres.

Figura 5.16. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A18. [He intentado variar con los números grandes y pequeños, y he puesto los dos más grandes (8 y 9) al principio de los dos números.]

Otro ejemplo en este sentido es el que ilustra la Figura 5.17. En este caso se observa que hay distintos números de tres cifras cada uno, sin ninguna repetida, que dan un mismo valor, el mayor para la suma. Descartando los valores de otras posibles sumas, se ciñe a encontrar los valores de los productos de estas sumas. Detectamos así un caso de eliminar posibilidades, pues el resto de productos que podría obtener, aunque puede que de manera intuitiva, los descarta.



$$\begin{array}{r} 963 \\ + 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ \times 875 \\ \hline 842.625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ \times 865 \\ \hline 841.645 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 863 \\ \times 975 \\ \hline 841.425 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 865 \\ \times 973 \\ \hline 841.645 \end{array}$$

Figura 5.17. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A06

Diferenciamos el hecho de descartar posibilidades como hacer pruebas de manera organizada a hacer pruebas de manera no organizada porque al descartar posibilidades, de una u otra manera hay una organización interna en el sentido que se parte desconsiderando casos que podrían haberse también probado pero que, a diferencia de pruebas sin organización, son previamente desestimados.

P.2.2 Hacer una lista ordenada

La Figura 5.18 es un claro ejemplo de atacar el problema haciendo pruebas pero de manera ordenada. Se trata de un caso en el que se aborda el producto y la suma al mismo tiempo, valorando en primer lugar el valor del producto y después de la suma. Fijado el valor de las centenas de los dos números de tres cifras, que comenta que les atribuye los de mayor valor, va intercambiando los posibles valores que pueden tomar las cifras de las decenas y las unidades de los dos números de tres cifras que forma. La atribución de estos valores no es aleatoria, está ordenado según la clasificación ordenada previa que el alumno expone sobre el reparto de las cifras restantes. Así, superponiendo el conjunto de sumandos y factores que obtiene con la prueba de cada iteración, obtiene una lista ordenada según su clasificación inicial, de sumas y productos que va recopilando de manera consecutiva a la derecha del producto y de la suma, respectivamente.

Handwritten work showing calculations for the product and sum of two three-digit numbers, with a list of digit pairs and their corresponding sum and product values.

$$963 \times 875 = \cancel{849060} \quad \cancel{832528} \quad \cancel{834828} \quad 842625$$

$$963 + 875 = \cancel{1844} \quad \cancel{1829} \quad 1838$$

Heu anat probant amb els nombres més grans al principi (9,8) i després els més grans després des (9,8), (6,7) i després els més petits (5,3).

Figura 5.18. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C03. [He ido probando con los números más grandes al principio (9,8) y después los números grandes después del (9,8), (6,7) y después los más pequeños (5,3).]

P.2.3 Estudiar casos particulares

Comentamos el caso de la Figura 5.19 de manera diferente a los anteriores por el énfasis particular que da el alumno a los casos que elige. En este caso no se lanza a realizar operaciones. Como podemos observar inicia su proceso distribuyendo las seis cifras en tres grupos de dos cifras cada uno. Además, afirma que el grupo del 8, 9 debe definir las centenas de los dos números porque son, respectivamente, los responsables de fijar la magnitud de los dos números de tres cifras. Después, lo reproduce con el conjunto de las cifras 6 y 7, y el de 5 y 3. Una vez obtenidos un par números, los suma y los multiplica. Luego, estudia de manera explícita qué sucede al intercambiar las cifras de las decenas, pertenecientes al grupo 6,7, de un número de tres cifras al otro. Observa que, a pesar de que el intercambio realizado mantiene el valor de la suma, cambia el valor del producto. De aquí que hablemos de estudiar casos particulares, pues, organizados los valores, estudia donde conviene, de las dos posiciones posibles, colocar las cifras apareadas.

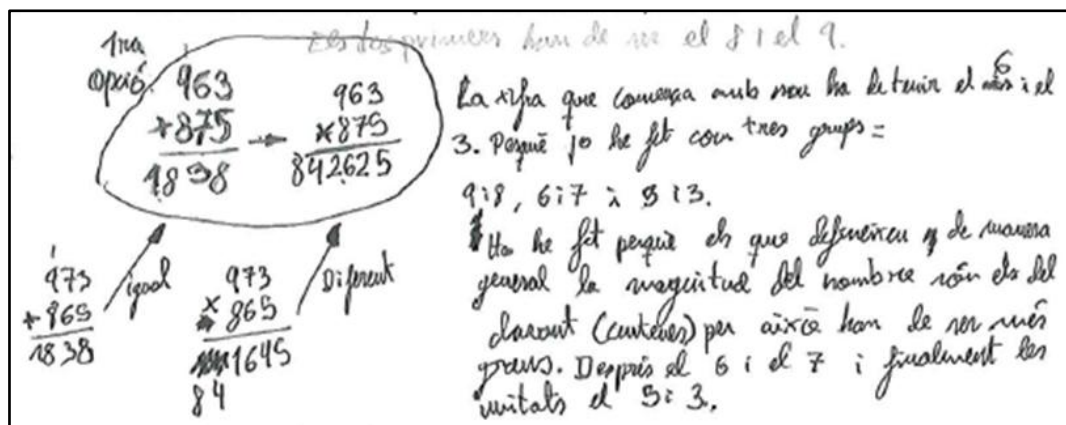


Figura 5.19. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A16. [Los dos primeros tienen que ser el 8 y el 9. La cifra que empieza con nueve tiene que tener el 6 y el 3. Porque yo he hecho como tres grupos = 9 y 8, 6 y 7, y 5 y 3. Lo he hecho porque los que definen de manera general la magnitud del número son los de delante (centenas) por eso tienen que ser los más grandes. Después el 6 y el 7 y finalmente, las unidades, el 5 y el 3.]

E. Examinar estructuras

El conjunto de procesos analizados arriba evidencian la obtención de un plan de acción mediante la realización de pruebas, de alguna manera, organizadas o sin organización alguna. Diferenciamos el siguiente conjunto de intentos de obtener el plan de acción del anterior porque en ellas, se hace explícito, entre o no procesos de prueba para otros fines, el reconocimiento de estructuras o parentescos que, de alguna manera, se pretenden detectar o transmitir en su proceso.

E.1 Usar un modelo

Para entender a qué ejemplos de procesos consideramos en este caso, es necesario en primer lugar definir qué entendemos por modelo. Como modelo consideramos cualquier estructura aceptada por la comunidad matemática que simplifica la realidad a la cual se refiere sin perder su esencialidad, es decir, se trata de una síntesis manteniendo sus características fundamentales. Ante esta consideración, veamos algunos ejemplos que creemos ejemplifican el uso de un modelo matemático como parte del plan de acción.

E.1.1 Argumentar de manera directa

La Figura 5.20 reproduce el intento de un alumno que, a diferencia de los estudiados anteriormente, inicia su plan de acción justificando la generación de los números a considerar, sin antes realizar ninguna operación determinada. Su justificación recae en que, para encontrar números grandes, hay que poner las cifras de más valor lo más a la izquierda posible del número y las cifras de menos valor lo más a la derecha posible. Luego, concluye que, al buscar números de tres cifras, las cifras de valores intermedios deben estar en el centro. Así, es como, con sus palabras, le indica su lógica que debe proceder. En tanto, calcula el valor de la suma que puede obtener y finalmente, siguiendo su lógica, monta las posibles opciones de producto que puede obtener para descartar las que no dan el valor máximo. Así aunque la confirmación final de su respuesta se hace mediante una reducción de casos, inicia y desarrolla la primera parte de su plan de acción utilizando y basándose en las propiedades de los modelos numéricos posicionales, en este caso el que utilizamos más habitualmente, el decimal. Con ello explica que la magnitud del número depende de las posiciones en qué se pueden poner cifras. Así, la cifra que controla la magnitud del número es la que se encuentra

más a la izquierda y que, por tanto, una cifra cuanto más a la izquierda se encuentra, mayor es el valor que representa.

El que he pensat ha sigat en posar el 8 i el 9 avans de cada xifra per que pugi ser el número més gran possible i el 3 i el 5 al final perquè sigui més gran, i el 6 i el 7 en mitj.

$$963 \times 875 = 842.625$$

$$965 \times 873 = 842.445$$

$$973 \times 865 = 841.645$$

$$975 \times 863 = 841.425$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ + 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

He arribat a aquesta conclusió perquè segons la meua lògica per poder tenir el número més gran possible he de anar posant de el número més gran al més petit,

Figura 5.20. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A07. [Lo que he pensado ha sido en poner el 8 y el 9 antes de cada cifras para que pueda ser el número más grande posible y el 3 y el 5 al final, para que sea el más grande, y el 6 y el 7 en medio. [...] He llegado a esta conclusión porque según mi lógica para poder tener el número más grande posible tienes que ir poniendo del número más grande al más pequeño.]

Como se desprende del caso anterior, no es fácil reconocer y menos argumentar el uso de modelos, y menos cuando son modelos que han sido incorporados en el conocimiento de los alumnos de manera casi natural, pero posiblemente sin una justificación que acaben de comprender. Otro claro ejemplo es el que encontramos en la Figura 5.21, en la que se afirma haber dado con los dos números de tres cifras más grandes posibles que permite la combinación de las seis cifras de manera que, al sumarlos y multiplicarlos da el mayor valor posible para ambas operaciones. No se puede negar que así sea, pero ante una afirmación así, y sin ningún otro tipo de referencia, no permite conocer como el alumno ha dado con esta conclusión. En este caso no sólo juega un papel fundamental el sistema posicional decimal, sino también los modelos proporcionados por las propiedades de la suma y del producto con números naturales.

$$963 \times 875 = 842625$$

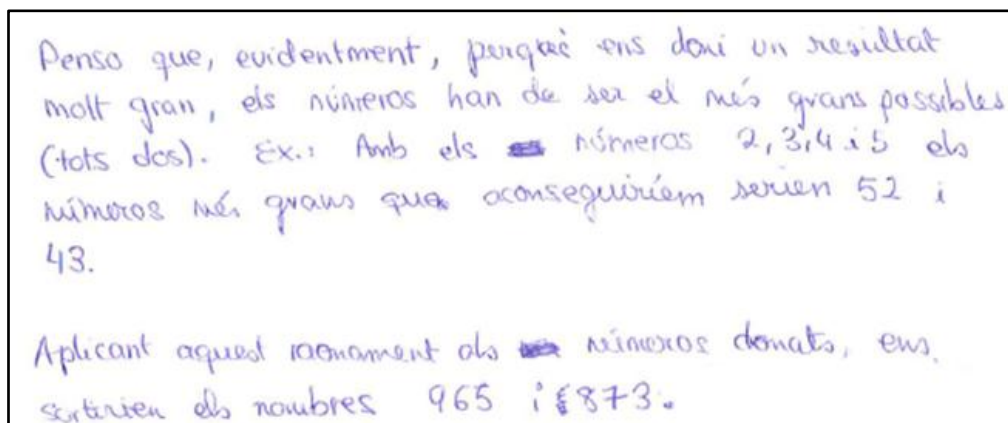
$$963 + 875 = 1838$$

He format els dos números més grans, i els he sumat i multiplicat.

Figura 5.21. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C04. [He formado los dos números más grandes, y los he sumado y multiplicado.]

E.1.2 Recurrir a problemas similares

Atendiendo nuestra concepción de modelo, entendemos que la búsqueda de un patrón puede recaer en recurrir a problemas o situaciones similares o más simples que, en tanto que no se trata de un modelo establecido, permitan guiar, a modo de ejemplo, el razonamiento para encontrar una respuesta. En este sentido, la Figura 5.22 argumenta la creación de los dos números de tres cifras de mayor valor siguiendo el patrón que argumenta para el caso de, dadas cuatro cifras, determinar los dos números de dos cifras cada una de mayor valor.



Penso que, evidentment, perquè ens doni un resultat molt gran, els números han de ser el més grans possibles (tots dos). Ex.: Amb els números 2, 3, 4 i 5 els números més grans que aconseguiríem serien 52 i 43.

Aplicant aquest raonament als números donats, ens sortirien els nombres 965 i 873.

Figura 5.22. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A28. [*Pienso que, evidentemente, para que nos de un resultado muy grande, los números tienen que ser los más grandes posibles (ambos). Ej. Con los números 2, 3, 4 y 5 los números más grandes que conseguiríamos serían 52 y 43. Aplicando este razonamiento a los números dados, nos saldrían los números 965 y 873.*]

E.2 Sugerir patrones

Hablar de patrones conlleva hablar de pautas, de regularidades, de conjuntos de hechos u objetos dispuestos de una manera concreta y predecible. En este sentido, interpretamos por patrón cualquier sucesión de elementos, identificables dentro de un conjunto mayor de datos, que se construye siguiendo una regla. Con ello, entendemos que sugerir patrones conllevaría el interés por determinar las regularidades que pueden permitir entender o explicar la situación de estudio, el problema, descrito. En este sentido, hemos podido diferenciar ejemplos de partes del plan de acción que se centran en buscar regularidades que podrían explicar un comportamiento como el descrito en el problema, e incluso pautas (algorítmicas o no) que establecen las relaciones descritas y, con ello, encontrar una respuesta a la situación problemática.

E.2.1 Buscar regularidades

La Figura 5.23 presenta un abordaje que se centra en el estudio de la suma de las cifras (no repetidas) de cada uno de los dos números de tres cifras que se buscan de formar. Siguiendo el proceso del alumno, fijado que el valor de las cifras deben colocarse de izquierda a derecha de más a menos valor, y manteniendo el valor de la suma de los dos números, el interés recae en la búsqueda de cierto equilibrio entre las cifras que deben definir las centenas, las decenas y las unidades de cada uno de los dos números. Así, como explicita el alumno, busca que la suma de las cifras de ambos números sean lo más próximas posibles. Luego, determinado el valor de la suma de los números, busca repartir las cifras de manera que la suma del valor de las centenas, decenas y unidades de cada número sea el mismo que el del otro. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta que $965+873 = 963+875 = 983+865 = 865+973 = 1838$, estudia que el valor de la suma de los dígitos sea la misma:

- 1ª suma: 965: 9+6+5=20 y 873: 8+7+3=18
 2ª suma: 963: 9+6+3=18 y 875: 8+7+5=20
 3ª suma: 973: 9+7+3=19 y 865: 8+6+5=19
 4ª suma: 865: 8+6+5=19 y 973: 9+7+3=19

Lo diferenciamos de un estudio de casos porque el proceso está enfocado a encontrar una regla, una regularidad, un patrón, entre las cifras que deben formar los números de tres cifras que permita dar respuesta a lo pedido, y no el análisis particular del resultado de cada una de las dos sumas de los dos números involucrados.

Handwritten mathematical work showing four addition problems and a reflection in Catalan. The problems are:

$$\begin{array}{r} 965 \\ + 873 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ + 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 865 \\ + 973 \\ \hline 1838 \end{array}$$

Below the problems, the student has written in Catalan: "He pensat de posarlos de més gran a més petit i intentar que sumen entre ells doni el mateix nombre."

Figura 5.23. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A12. [*He pensado de ponerlos de más grande a más pequeño e intentar que sumarlos entre ellos de el mismo número.*]

E.2.2 Establecer semejanzas

El ejemplo de la Figura 5.24 presenta un caso en el que se presta la atención inicial a la creación de los dos números de tres cifras. Explica cómo repartir las cifras en los dos números, pero ahora, su motivo de distribución se centra en que las cifras de cada número no en tanto de mayor a menor valor, sino que entre ellas estén compensadas. Aquí el argumento recae en una cuestión de paralelismo entre las cifras, de manera que puestas estratégicamente, compensen su relación en cuanto a su valor significativo como cifra. Es decir, intentar dar un valor similar a ambas centenas, a ambas decenas y a ambas unidades. Da con dos propuestas que la dan el mismo valor de la suma. La discusión final, como se ha observado con la Figura 5.17 se ha hecho, partiendo de lo identificado a partir de la suma, por discriminación de casos.

Handwritten mathematical work showing two addition problems and a reflection in Catalan. The problems are:

$$\begin{array}{r} 963 \\ + 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

Below the problems, the student has written in Catalan: "Jo el que he pensat a sigui posar els nombres més grans al principi perquè donen una xifra gran, i després he repartit els nombres de manera que els dos nombres de la suma estiguessin compensats. (per exemple: si el 9 que és el número més gran, no posar un 8 perquè el 8 el necessitem per l'altre nombre de la suma)"

Figura 5.24. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A06. [*Yo lo que he pensado ha sido poner los números más grandes al principio porque dan una cifra grande, y después he repartido los números*

de manera que los dos números de la suma estuvieran compensados (por ejemplo: si el 9 que es el número más grande, no poner un 8 porque el 8 lo necesitamos para el otro número de la suma).]

En esta línea, a través del argumento que se da en la respuesta, aunque parcial al problema, confirmamos que la búsqueda de la solución al problema que se hace en la resolución que presenta la Figura 5.25 recae en el reparto de las cifras para crear, desde su perspectiva, números simétricos o lo más próximo a ellos, de manera que los valores de cada par de centenas, cada par de decenas y cada par de unidades sea lo más próximo posible.

$$\begin{array}{r} 975 \\ + 863 \\ \hline 1838 \end{array}$$

Per la suma es de les més pareguendes i agafat aquests nombres per ser simétrics

Figura 5.25. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1D06. [R: la suma es de las más creídas. He cogido estos números por ser simétricos.]

E.2.3 Proponer pautas

Otro ejemplo consiste en proponer una pauta, geométrica, numérica, algorítmica que describa lo que se presenta en el enunciado. En este sentido se observa el trabajo desarrollado en el fragmento de la Figura 5.26 en relación al problema Pb6.a2, al proponer una pauta algorítmica que, además de optimizar, se ajusta a la realidad descrita en el enunciado. Como podemos observar, el alumno describe algorítmicamente el hecho que de 9 cabezas se cortan 3: $9-3=6$. Sabe que de cada cabeza cortada, aparecen tres cabezas más. Así, al haber cortado 3 cabezas, aparecerán $3+3+3$ cabezas, que añadidas a las 6 que restaban, harán el total. Resulta interesante que el alumno no se queda aquí, sino que observa el hecho que la aparición de las 3 cabezas por cada una de las cortadas se puede concretar como el producto de 3×3 . Así lo hace notorio con el comentario *No vale* a la operación $6+3+3+3$, que rectifica como al sumar 3×3 a las 6 cabezas que quedaban. Con ello, pues, ha establecido una pauta que describe matemáticamente la regularidad del escenario que genera la cuestión a resolver.

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 3 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 3 \\ 3 \\ + 3 \\ \hline 15 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{No val} \\ \begin{array}{r} \times 3 \\ 9 \\ + 6 \\ \hline 15 \end{array} \end{array} \right\}$$

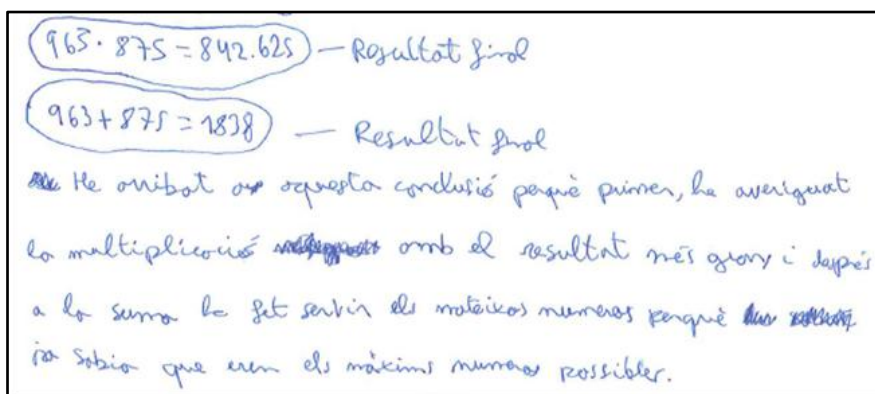
R: Em tendria 15 caps. Ho he sabut, perquè li he restat als 9 caps que tenia, 3 caps tallats i com que un cap tallat és igual a 3 caps nous, i m'hi ha tallat 3, he multiplicat el 3 dos cops i l'hi he sumat el 6.

Figura 5.26. Fragmento de la producción Pb6.a2_NB6A05. [] No vale; R: Tendría 15, de cabezas. Lo he sabido porque le he restado a las 9 cabezas que tenía, 3 cabezas cortadas y como una cabeza cortada es igual a 3 cabezas nuevas, y si le ha cortado 3, he multiplicado el 3 dos veces y lo he sumado al 6.]

E.3 Reorganizar relaciones

E.3.1 Utilizar las condiciones del enunciado en otro orden

En el fragmento de la Figura 5.27 se observa como, por un razonamiento casi directo da con el mayor valor del producto y utiliza el conocimiento que tiene sobre las propiedades del producto para afirmar, de manera directa, el valor del producto mayor y, de ahí tiene que también será el valor mayor de la suma. Así mismo destacamos este proceso porque sus razonamientos se realizan en sentido contrario al que expone inicialmente el problema. De las distintas condiciones que presenta el problema, en especial las vinculadas a las condiciones de las operaciones, se basa desde un principio en la última, el producto. Así, resulta un ejemplo de cómo reorganiza la información del enunciado para dar con la respuesta al problema.



$963 \cdot 875 = 842.625$ — Resultat final
 $963 + 875 = 1838$ — Resultat final
 He arribat a aquesta conclusió perquè primer, he averiguat la multiplicació més gran amb el resultat més gran i després a la suma he fet servir els mateixos números perquè és més fàcil saber que són els màxims números possibles.

Figura 5.27. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A22. [$963 \cdot 875 = 842.625$ – Resultado final. $963 + 875 = 1838$ – Resultado final. He llegado a esta conclusión porque primero, he averiguado la multiplicación con el resultado más grande y después en la suma he utilizado los mismos números porque ya sabía que eran los máximos números posibles.]

5.2.2 Verbalización de los procesos estratégicos

Como hemos ido argumentando, con el uso de la base de orientación se pretende que los alumnos aprendan a reflexionar sobre sus acciones y así las vayan dejando por escrito. Es fundamental llevar a cabo esta práctica a lo largo de todo el proceso de resolución, y más aún al intentar establecer un plan de acción. Solo así se puede, en cualquier momento, recuperar y entender lo que uno va desempañando y con ello, rectificarlo o ratificarlo de manera consecuente. Al mismo tiempo, permite a cualquiera que no sea el resolutor, entender mejor los quehaceres desarrollados. Así, en este análisis nos fijamos en los escritos de los alumnos, en cuanto a sus explicaciones sobre los procesos, o partes del mismo, desarrollados para establecer una estrategia de resolución. Si bien se ha observado que todos los alumnos que trabajaron el problema, de alguna u otra manera, se implicaron en algún intento para encontrar una estrategia, no todos acabaron detallando de manera escrita dichos procesos, o partes de los mismos. Así mismo, lo interesante de todo ello es la variedad de redacción, en cuanto a lo que se explica, en qué nos hemos encontrado. Así, atendiendo a la variedad de redacciones, concretamente a la naturaleza de las acciones que exponen, podemos distinguir tres niveles o grupos de expresión escrita. En tanto que la distinción entre los distintos niveles de redacción en relación a los procesos, o parte de los mismos, afecta a la naturaleza del tipo de información que se da, nos referenciamos a ellos por la naturaleza que los describe comentado al inicio de esta parte.

La Tabla 5.6 recoge estos tres niveles, que se ejemplifican a posteriori.

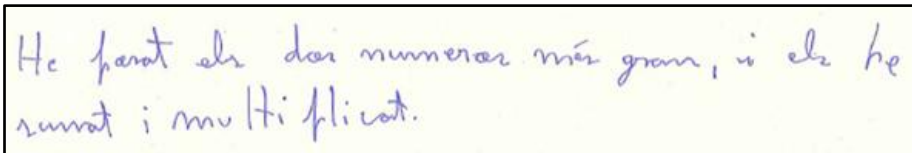
Verbalización de procesos estratégicos, o sus partes

a) Reproductiva	Informa de acciones y procedimientos de carácter mecánico o técnico (algorítmico). No se recurre al significado o sentido de los elementos que actúan en él. Luego, no hay un marco de referencia que le dé sentido concreto.
b) Explicativa	Describe acciones y procedimientos de carácter creativo (heurístico). Se utiliza el significado de los elementos que actúan, evidenciándose así un marco de referencia concreto que da significado al mismo.
c) Argumentativa	Presenta razones para justificar las acciones y procedimientos desempeñados.

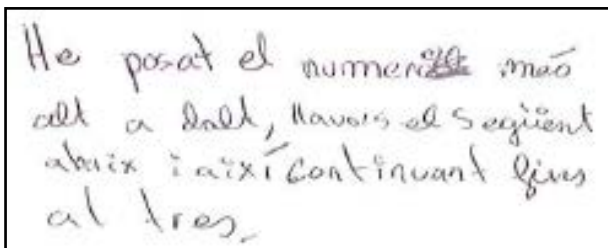
Tabla 5.6. Grupos de verbalización de procesos estratégicos identificados**a) Verbalización Reproductiva**

Los ejemplos de este primer grupo de verbalizaciones se caracterizan por exponer de manera objetiva y neutral las acciones y procedimientos vinculados al proceso que son de carácter algorítmico, técnico o mecánico. Podemos decir que remiten a una acción o procedimiento de manera fija y estructurada, sin marco de trabajo o referencia alguna que permita dar un significado al mismo.

Un caso concreto que ejemplificaría un caso técnico, sería el que presenta la Figura 5.28. En ella vemos como se informa de que los dos números de mayor valor han sido seleccionados y posteriormente, se han sumado y multiplicado, sin exponer ni por qué ni cómo llevar a cabo la acción, sin reflexionar o justificar por qué los números utilizados son los de mayor valor o por qué ello puede ser suficiente.


Figura 5.28. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C04. [*He puesto los dos números más grandes, y los he sumado y multiplicado.*]

En la misma línea, encontramos la exposición que presenta la Figura 5.29, que informa de cómo ha repartido las cifras (a las que se refiere como número) sin reflexión alguna. Dice que pone los números más altos arriba y así sucesivamente hacia el tres (que es la cifra de menor valor). En ningún momento se detalla que quiere decir lo de “poner arriba” o a qué se refiere concretamente al decir “el siguiente abajo y así sucesivamente”. Es decir, aún exponiendo un procedimiento con una estructura cerrada, falta un marco de trabajo donde situar y entender la mecánica que se explicita. En este caso, hablaríamos de una reproducción que remite a un proceso mecánico.


Figura 5.29. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A29. [*He puesto el número más alto arriba, luego el siguiente abajo y así continuamente hasta al tres.*]

b) Verbalización Explicativa

Los casos correspondientes a este grupo, responden a un perfil en el que la explicación invita a descubrir, crear, idear una manera de proceder. Las acciones y los procedimientos son descritos relacionándolos con su significado, estableciendo así un marco de trabajo. En este sentido, se percibe un mínimo de análisis de las acciones y procedimientos que se realizan o se pretenden desarrollar.

El fragmento de la Figura 5.30 enseña la explicación de un alumno que describe como ha distribuido las cifras en dos números de tres cifras cada uno. A diferencia de los casos anteriores, que se caracterizan por exponer unas acciones o procedimientos fijos, en este caso no se hace informando de la posición en la que coloca cada cifra, sino que se intenta relacionar su colocación con el significado o sentido que se pretende dar con ello. Así, no dice que pone las dos cifras de mayor valor en la posición de más a la izquierda (esto sería un caso expositivo) sino que deben corresponderse con las centenas. Es decir, da igual donde colocarlo. Lo importante es el valor que se le da al colocarlos como un tipo de cifras u otro. Con ello, llega a una observación, a que el reparto de cifras que realiza contiene una componente de equivalencia. Esta visión es lo que proporciona el carácter de descubrimiento o creatividad. En cualquier caso, se trata de una explicación de un procedimiento en un marco significativo y que da algún tipo de sentido o permite entrever alguna peculiaridad a lo que se realiza, que es lo que caracteriza este tipo de explicaciones. Ello permite una componente inventiva o creativa, pues va más allá de una descripción mecánica de los hechos, sino a darles una explicación que perdure en el tiempo.

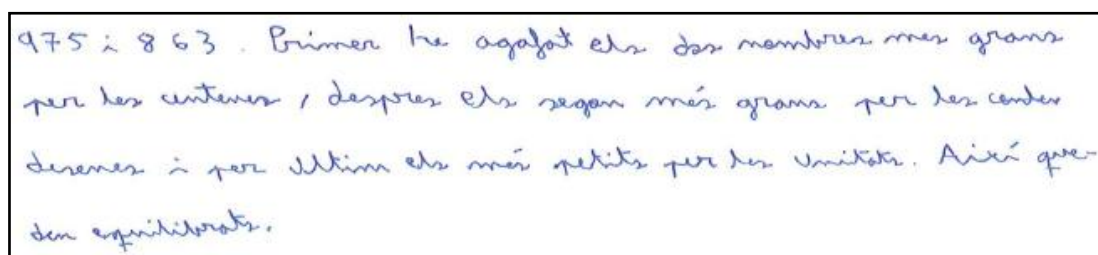


Figura 5.30. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A14. [Primero he cogido los dos números más grandes para las centenas, después los segundos más grandes para las ~~cent~~ decenas y por último los más pequeños para las unidades. Así quedan equivalentes.]

Otro ejemplo en este sentido es el que presenta la Figura 5.31. El alumno describe como colocar las cifras y qué pretende con ello. Dice de disponer las cifras de mayor a menor valor a la vez que éstas cumplan otra condición, que las sumas de las tres cifras de cada número sea lo más parecida, si puede ser igual, a la misma suma del otro número. Con ello, destacamos una finalidad inventiva, creativa en encontrar una explicación de por qué lo quiere así que da sentido a la práctica que lleva a cabo.

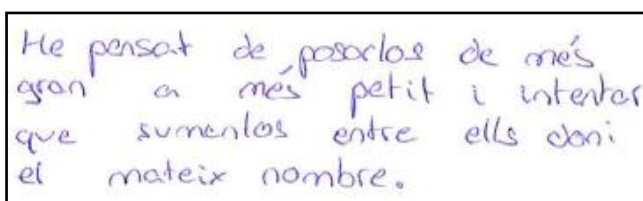


Figura 5.31. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A12. [He pensado de ponerlos de más grande a más pequeño e intentar que en sumarlos entre ellos den el mismo número.]

c) Verbalización Argumentativa

Finalmente, detectamos un tercer nivel de expresión, en el que más allá de explicar las acciones relacionadas con los procedimientos que se llevan a cabo, de algún modo, se intentan justificar (de manera más o menos correcta o adecuada), dando razones del por qué de los procedimientos llevados a cabo. En este caso, se recurre al significado de lo que se está desarrollando, ampliando así el marco de trabajo o referencia que le da sentido.

Aunque es un poco enrevesado y presenta diversas imprecisiones o huecos conceptuales, en el fragmento que recoge la Figura 5.32 el alumno pretende razonar cada uno de los motivos que lo han empujado a definir los números de tres cifras con qué se queda y no otros. En primer lugar pretende explicar como el valor que se ponga en las centenas va a decidir el orden de magnitud del número en cuestión. De ahí su referencia a “predominará” y al final, porque no es interesante que las unidades contengan las cifras de mayor valor. En el segundo párrafo intenta argumentar qué cifras deben ir en segundo lugar, a las decenas. Con “no cambia mucho el resultado, pero es importante” da a entender su idea de que el valor de las decenas no será crucial en el número de tres cifras, pero al operarlo podría cambiar significativamente el orden de magnitud del resultado. Aunque impreciso, pues, detectamos un esfuerzo para intentar explicitar cómo decide construir los números a trabajar, y así lo argumenta.

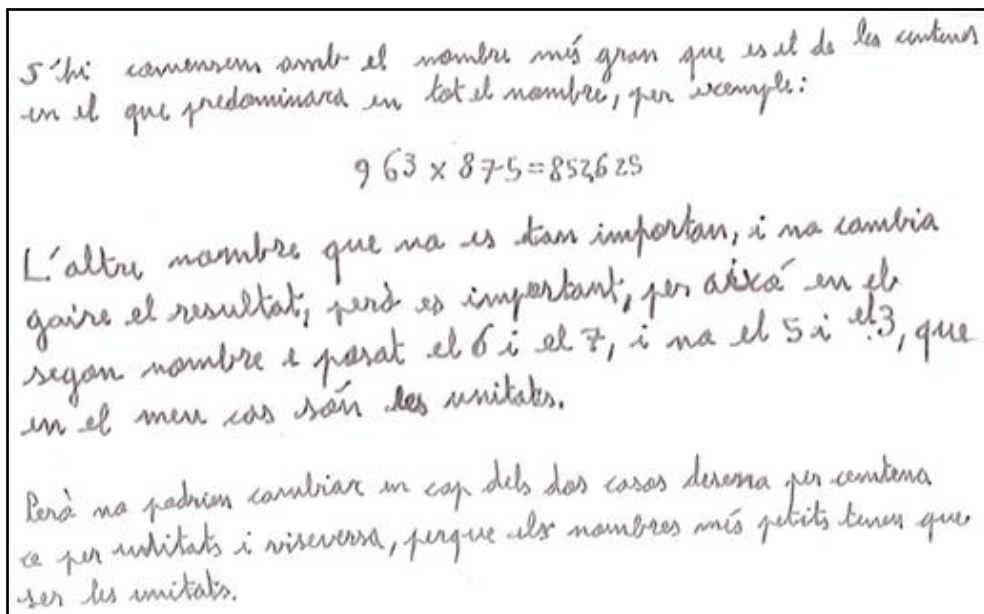


Figura 5.32. Fragmento de la producción Pb01.3.a1_SC1A15. [Si empezamos con el número más grande que es el de las centenas es el que predominará en todo el número, por ejemplo: $963 \times 875 = 856.625$. El otro número que no es tan importante, y no cambia demasiado el resultado, pero es importante, por esto en el segundo número he puesto el 6 y el 7, y no el 5 y el 3, que en mi caso son las unidades. Pero no podemos cambiar en ninguno de los dos casos decena por centena o por unidades y viceversa, porque los números más pequeños tienen que ser las unidades.]

En la misma línea, son los fragmentos de la resolución que se recogen en la Figura 5.33. El alumno empieza verbalizando cómo cree que se pueden obtener la suma y producto de mayor valor y justifica como crear los dos números que, a partir de las cifras dadas, así lo permiten generar. Durante su proceso se da cuenta que, el orden es un factor importante, la cual cosa estudia y justifica. Con ello, ratifica su intuición además de encontrar la respuesta al problema.

Penso que, evidentment, perquè ens doni un resultat molt gran, els números han de ser el més grans possibles (+tots dos).

Aplicant aquest raonament als ~~dos~~ números donats, ens sortirien els nombres 965 i 873. Les primeres xifres que agafem estan clares, 8 i 9. Les següents, han de ser també les més grans que queden (7 i 6, és igual l'ordre) i les últimes, les més baixes (també és igual amb quines altres xifres es trobin, mentre siguin les unitats).

COMPROVACIÓ (suma) | COMPROVACIÓ (multiplicació)

$965 + 873 = 1838$	$965 \times 873 = 842.445$
$975 + 863 = 1838$	$975 \times 863 = 841.425$
$963 + 875 = 1838$	$963 \times 875 = 842.625$
$973 + 865 = 1838$	$973 \times 865 = 841.645$

→ Descartades

Comprovant la teoria de la multiplicació, he vist que, multiplicant, l'ordre sí que importa. A més, he comprovat que la combinació que donaria la suma (en aquest cas, sí que l'ordre no importa) i la multiplicació més gran és 963 \otimes 875.

Figura 5.33. Fragmento de la producción Pb01.3.a1_SC1A28. [Pienso que, evidentemente, para que nos dé un resultado muy grande, los números tienen que ser lo más grandes posibles (los dos). Aplicando este razonamiento a los números dados, nos saldrían los números 965 y 873 → (ejemplo de combinación que explico después). Las primeras cifras que cogemos están claras, 8 y 9. Las siguientes, tienen que ser también las más grandes que nos quedan (7 y 6, es igual el orden) y las últimas, las más bajas (también es igual con qué otras cifras nos encontremos, mientras sean las unidades). COMPROBACIÓN (suma) | COMPROBACIÓN (multiplicación) Comprobando la teoría de la multiplicación, he visto que, multiplicando el orden sí que importa. Además, he comprobado que la combinación que daría la suma (en este caso, sí que el orden no importa) y la multiplicación más grande es 963 \otimes 875.]

5.2.3 Discusión

El análisis de esta sexta dimensión de la base de orientación BO2, en la que se pretende que se exprese la estrategia de resolución principal que se aplica para dar alguna respuesta a las cuestiones formuladas, ha conducido a estudiar dos aspectos distinguidos relacionados con la determinación de una estrategia de resolución. Por un lado, los procesos que la definen y, por otro, el tipo de exposición verbal del mismo.

Para la discusión de ambos, nos hemos visto obligados a distinguir entre palabras como procesos, procedimientos, algoritmos y heurísticos. Así, por el primero entendemos el conjunto de aquellas acciones, distintas entre sí, que se realizan para intentar llegar a un fin. La gestión de las distintas acciones que confinan un proceso serían los procedimientos. Cuando esta gestión está caracterizada por rutinas, es cuando podemos hablar de algoritmos. En cambio, cuando se indaga en cómo realizar dicha gestión, nos estaríamos refiriendo a un

procedimiento heurístico, caracterizado, en parte, por intentar desvelar como establecer dichas conexiones.

Con relación al análisis del primer aspecto, las evidencias de las resoluciones de los alumnos a los problemas considerados nos han permitido distinguir entre dos maneras principales de confeccionar una estrategia: haciendo pruebas, con o sin organización inicial aparente, o bien reconociendo o examinando ciertas estructuras que permiten reducir y aproximar el campo de acción al resolutor. En este sentido distinguimos entre un pensamiento deductivo, en el primer caso, y por analogía, en el segundo.

En cuanto a cómo considerar el conjunto de las condiciones que se proporcionan, hemos observado como a algunos alumnos les resulta más práctico separar las condiciones del problema en distintas partes y, en otras, considerarlo como un todo. Así mismo, constatamos que al trabajar las condiciones de un problema por separado, ha sido poco común que al final el alumno reuniera ambas condiciones en el sentido conjunto que pretende el problema. En este sentido, destacamos que, a pesar que concebimos una estrategia como la combinación de distintos procesos, las evidencias desvelan como si los alumnos se quedaran con solo uno de los distintos procesos que pueden definir su estrategia global. Con ello, observamos que los alumnos sí han ido a la búsqueda de estrategias de resolución pero que, en la mayoría de casos, una vez explicitado uno de los procesos que la definen, ya sea en mayor o menor medida, se quedan únicamente con un proceso y lo asocian a la estrategia global. De ahí, parte de la falta de completitud, profundización o cohesión global que se puede encontrar en sus estrategias.

De las producciones de los alumnos hemos podido identificar distintos procesos estratégicos de carácter heurístico, que hemos podido organizar de acuerdo con la Tabla 5.5. Así hemos distinguido entre aquellos procesos que recurren a la realización de pruebas, aparentemente organizadas o no, o bien a los que buscan alguna estructura que les permita reducir o acercarse el campo de resolución. Como se ha comentado, estos procesos no son en ningún son excluyente. Entendemos que la distinción entre unos y otros procesos permite una mejor comprensión, y más que ello, organización y mantenimiento de un objetivo concreto de la estrategia global con qué se pretende encontrar una respuesta a las cuestiones, tanto por parte del alumno como del profesor. Por este motivo se observa la necesidad que los alumnos, como los docentes, descubran y comprendan procesos y reflexionen sobre los mismos.

Entre los procesos que hemos distinguido como estratégicos para la resolución de un problema, destacamos el de realización de pruebas, especialmente cuando éstas no siguen aparentemente un orden. Enfatizamos este caso porque las evidencias enseñan que, en cierta manera, aunque las pruebas se inician sin organización aparente, a medida que el alumno sigue con sus pruebas se puede percibir que, en su quehacer, aunque no sea de manera consciente, se detecta el surgimiento de cierta organización aunque el mismo no lo sepa explicar ni se percate de ello para plasmarlo en su resolución. En este sentido, el trabajo está en que el alumno pueda discernir estas “normas” interiores para, al menos, saber explicar el porqué de su proceder.

Para discernir y comprender los procesos de resolución de los alumnos ha sido imprescindible poder recurrir a sus reflexiones, aclaraciones y observaciones sobre los mismos. De otro modo, no habría sido posible descifrar el por qué de sus decisiones. En este sentido, la compartición

de sus pensamientos, las evidencias enseñan la implicación, aunque parcial, de los alumnos con la dimensión aquí estudiada. Decimos parcial porque, como antes, la compartición de sus observaciones y reflexiones no es generalizada ni total. Observamos como los alumnos destacan ciertos aspectos de sus ideas, aparentemente las que más los sorprenden, pero les cuesta compartir aquello que no saben muy bien cómo expresar o que bien no saben interpretar.

Como acabamos de comentar, las resoluciones a los problemas con la base de orientación BO2 evidencian la compartición de reflexiones que, sin ellos, no sería posible discernir los procesos que el alumno ha llevado a cabo. Así mismo se observa que estas aclaraciones no siempre han sido suficientemente explícitas o completas, como, tampoco, un determinado orden o estructura en escribirlos. Como se verá en el último análisis de esta sección, si hablamos de un espacio de resolución de problema en función de la base de orientación, dichas explicaciones se pueden ver distribuías entre lo que sería el espacio del desarrollo del plan de acción, y el de la revisión, especialmente, para dar la respuesta final.

El análisis de las verbalizaciones que acompañan las estrategias, no han permitido distinguir tres niveles de explicación, en función del tipo de acción que describen (Tabla 5.6). Así, destacamos un primer nivel, de carácter reproductivo, que informa de acciones y procedimientos de carácter algorítmico, técnico o mecánico; un segundo que identificamos como explicativo, que se correspondería cuando se utiliza el significado de los elementos que entran en juego describiendo así acciones y procedimientos con una finalidad inventiva y, por tanto, heurística. Y, finalmente, un tercero de carácter argumentativo, que justifica las acciones y procedimientos que se realizan.

Ratificamos así la importancia de acompañar las distintas partes de una estrategia de sus aclaraciones, observaciones y reflexiones verbalmente, especialmente para conocer y comprender el por qué de las mismas. En este sentido, la gradación del discurso es importante porque uno u otro nivel permite profundizar más en las acciones, tanto algorítmicas o heurísticas, que se puedan llevar a cabo.

5.3. Dimensión 7 de la BO2

El tercer y último dominio de la base de orientación BO2 está dedicado expresa la acción de revisar lo que uno ha ido o va desarrollando para dar respuesta a las cuestiones formuladas. Con ello se pretende que el resolutor no experto adquiera el control necesario, y aprenda a detectar los puntos dónde se bloquea o comete un error, al mismo tiempo que le permita centrarse en encontrar una alternativa y así, con el tiempo, hacerse con dicha dinámica. El análisis de este proceso mediante evidencias de su puesta en práctica, debería no sólo poder discernir cuáles son las dificultades más comunes en el alumnado y su destreza en reconducirlas, sino también exponer cómo permite a los docentes adecuar sus propuestas y desarrollo de actividades. En base a ello, el análisis que presentamos en este apartado se centra en explorar cómo la dimensión dedicada al atasco, se ve reflejada en las resoluciones de los alumnos. De las diferentes resoluciones al problema Pb1.3.a1 usando la base de orientación BO2, han surgido interesantes evidencias en relación a la dimensión dedicada al atasco, caracterizada en la base de orientación BO2 como *Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite)*, encargada de

ayudar a gestionar los momentos de atasco del resolutor al resolver el problema. Los diferentes matices referidos a un estado de atasco y el interés en que el alumnado se familiarice con ellos, explica por qué en la dimensión el término atascarse se presenta explícitamente como el hecho de equivocarse, de cometer un error, o bien de bloquearse, cuando aparece un momento de confusión.

5.3.1 Gestión del atasco

Para dar cuenta de ello, ejemplificamos con partes de las mismas resoluciones, los diferentes tipos de evidencias de atasco (bloqueo o error) encontrados. Concretamente, se han buscado aquellos fragmentos de las resoluciones donde se ha observado que el resolutor debió parar puntualmente su desarrollo, ya sea debido a un momento de confusión (situación de bloqueo) o por haber realizado algo de manera incorrecta (error). En definitiva, se ha tratado de discernir cómo actuaron los resolutores en encontrarse ante una situación de atasco, teniendo en cuenta que disponían de la ayuda de la base de orientación. De las sugerencias de Mason et al. (2010) y de las observaciones de Sanmartí (2010), podemos avanzar que el hecho de que el estudiante evidencie que se da cuenta de un estado de atasco da sentido a la dimensión estudiada y, con ello, al uso y aceptación de la base de orientación. Una vez reconocido el bloqueo o el error, la atención recae en cómo se actúa ante ello. En este sentido, el objetivo final persigue que, con la base de orientación, el alumno no sólo sea capaz de detectar una situación de atasco, sino de esforzarse en reconducirlo de manera satisfactoria. De acuerdo con lo expuesto, identificamos las seis situaciones que se exponen en la Tabla 5.7 siguiente.

Situaciones de atasco	Descripción
a) Falta de comprensión	Percatarse de no entender la situación descrita del problema, alguna de sus partes o de los datos que presenta.
b) Representaciones inadecuadas	Advertir que la representación (expresión o pruebas) realizada de la situación descrita del problema no se corresponde con lo expuesto en dicha situación.
c) Estrategia inadecuada	Notar que la estrategia utilizada no es adecuada para la finalidad que se pretende resolver.
d) Datos o razonamientos inapropiados	Apreciar que se consideran datos o razonamientos no adecuados para aplicar una estrategia.
e) Errores de aplicación	Reparar que se cometen errores de aplicación.
f) Explicaciones imprecisas	Percibir que la exposición de las descripciones (explicaciones, conclusiones...) son confusas, impropias o que contienen partes incorrectas o inadecuadas, ya sean de lengua (expresión escrita) o de carácter matemático.

Tabla 5.7. Situaciones de atasco identificadas

Para describir los seis tipos de atasco identificados, presentamos y analizamos aquellos fragmentos de las distintas resoluciones más representativos para cada tipo definido. Por cuestiones de espacio, nos limitamos a comentar no más de dos ejemplos por cada tipo.

a) Falta de comprensión

En cada una de las dos resoluciones que siguen a continuación, la evidencia más clara de que la situación descrita por el enunciado no es entendida inicialmente, es que ambos alumnos lo

manifiestan por escrito. En el primer caso (Figura 5.34) el alumno hace el esfuerzo de describir qué le conduce al bloqueo. Exponer su confusión y pautar lo que cree que entiende le ayuda a enfocar correctamente el problema. En el segundo (Figura 5.35), en lugar de describir el motivo del bloqueo, propone inicialmente una operación combinada de suma y multiplicación con tres números de una cifra (de las seis dadas) cada uno, y se percató que no concuerda con lo descrito en el enunciado; esto le lleva a rectificar y concluir que las cifras deben ser unidas para formar números de tres cifras y cumplir las condiciones requeridas en dos operaciones distintas. Con ello se evidencia que el hecho de expresar por escrito un estado de confusión, y además describir los motivos de ello, o bien de revisar la manera en qué se manipulan los datos del problema, son claves para poder, primero, detectar, aceptar y entender el estado de atasco, y a continuación poder proseguir con la resolución del problema.

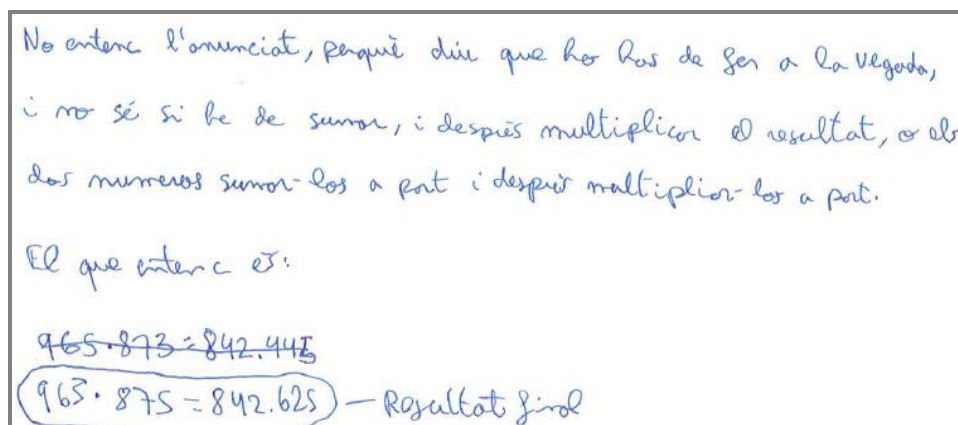


Figura 5.34. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A22. [No entiendo el enunciado, porque dice que lo tienes que hacer a la vez, y no sé si se tiene que sumar, y después multiplicar el resultado, o los dos números sumarlos a parte y después multiplicarlos a parte. Lo que entiendo es: $965 \cdot 873 = 842.445$
 $963 \cdot 875 = 842.625$ -Resultado final]

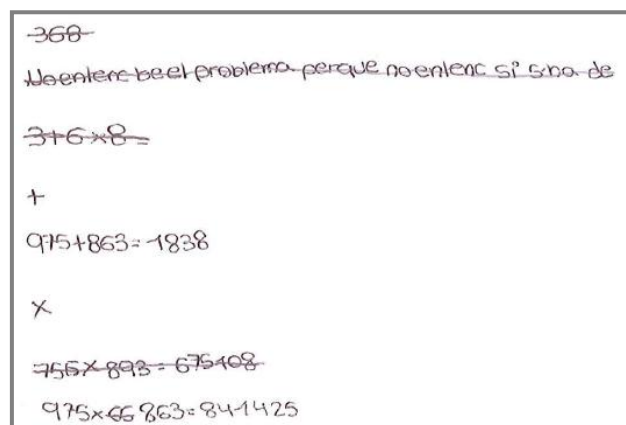


Figura 5.35. Fragmento de la producción Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A05. [No entiendo bien el problema porque no entiendo si se tiene que $3+6 \times 8 =$]

b) Representaciones inadecuadas

En el fragmento de resolución que sigue a continuación (Figura 5.36) vemos como se parte de un número erróneo de cabezas, 7, que se rectifica con una nueva representación al tanto que anotando que el primer intento de resolución no se debe considerar. El hecho de continuar trabajando en su representación del problema le permitió percatarse de que había considerado inicialmente menos cabezas de las que presenta el problema. El hecho de hacer explícito que el primer intento no es válido, permite no recaer en un uso de datos erróneos.

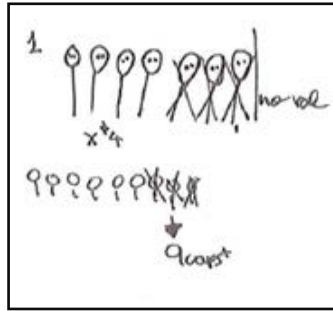


Figura 5.36. Fragmento de la producción Pb6.2_NB6A11. [/No vale; 9 cabezas+]

c) Estrategia inadecuada

A continuación se exponen dos partes de una misma resolución. El primer fragmento (Figura 5.37) evidencia la anulación de una primera estrategia de resolución, mientras que el segundo (Figura 5.38), que corresponde al mismo alumno, presenta una estrategia alternativa a la primera que, ahora sí, es correcta. Si bien la representación del problema está encaminada desde un principio (con los dos números escritos antes de explicitar su primera estrategia da cuenta de que necesita dos números de tres cifras con ninguna de ellas repetida), el alumno se percata de que la estrategia descrita inicialmente no proporciona lo que está buscando, pues los números anotados 987 y 653, son dos números de tres cifras no repetidas, pero no son los que dan la suma y producto máximo. De ahí la modificación de su estrategia inicial a una segunda en la que propone que los dos números de tres cifras más grandes posibles serán los obtenidos al distribuir los dos valores mayores en las centenas, los segundos mayores en las decenas y los últimos en las unidades. Esta estrategia se encamina hacia la obtención de la suma y el producto máximo.

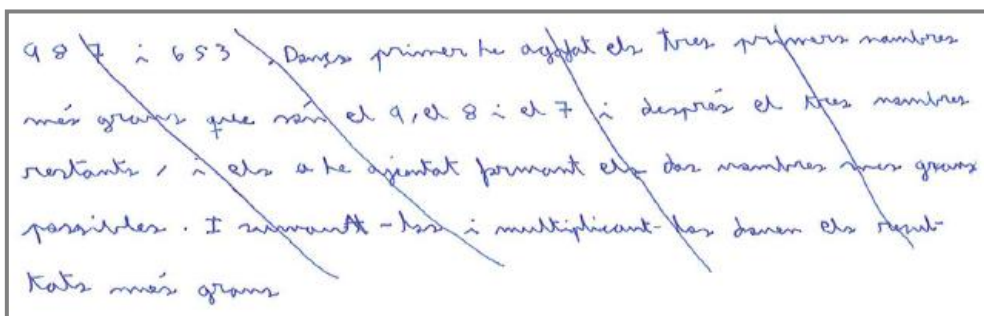


Figura 5.37. Parte 1 de la resolución Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A14. [987 y 653. Pues primero he cogido los tres primeros números más grandes que son el 9, el 8 y el 7 y después los tres números restantes, y los he juntado formando los dos números más grandes posibles. Y sumándolos y multiplicándolos dan los resultados más grandes.]

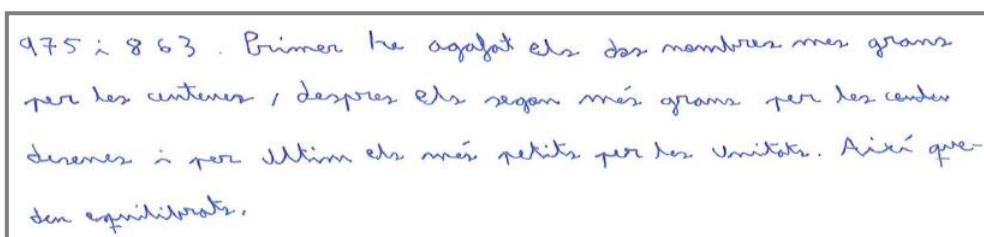


Figura 5.38. Parte 2 de la resolución Pb1.3.a1_SC1A14. [975 i 863. Primero he seleccionado los dos números más grandes para las centenas, después los segundos más grandes para las decenas y por último los más pequeños para las unidades. Así quedan equilibrados.]

Constatamos, pues, que explicitar la estrategia a utilizar, permite volver a ella y no sólo detectar la parte equivocada del razonamiento, sino también rehacerla sin repetir el mismo error o abandonar el intento.

d) Datos o razonamientos inapropiados

No siempre todos los datos aparentes son relevantes para resolver un problema. Hay que saber descifrarlos y utilizarlos de manera conveniente. Así lo percatan los dos ejemplos aquí se presentan a continuación. En ambos casos, observamos cómo el alumno en cuestión rectifica la selección de unos datos que no son relevantes para la tarea que se disponen a desarrollar.

En el primer ejemplo (Figura 5.39), el resolutor explicita que debe trabajar con 6 cifras. Este dato, a pesar que le puede ayudar a comprobar que tiene ese número de cifras qué manipular, no le proporciona información significativa para distribuir las 6 cifras en 2 números de 3 cifras cada uno, y menos para determinar la suma y el producto de mayor valor. De ahí se entiende que acabe tachando dicha información.

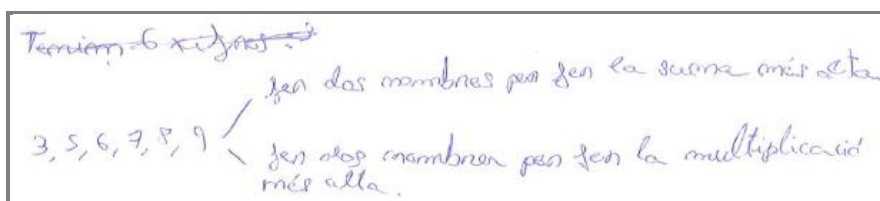


Figura 5.39. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A13. [~~Tenemos 6 cifras;~~
3, 5, 6, 7, 8, 9 / hacer dos números para hacer la suma más alta
hacer dos números para hacer la multiplicación más alta]

En el segundo ejemplo (Figura 5.40), vemos un alumno que enfatiza aquellos datos del enunciado que cree relevantes para la resolución subrayándolos en el mismo enunciado. En un primer intento, selecciona los dos números que se habían dado como ejemplo, se da cuenta de que dichos números no satisfacen las condiciones necesarias para resolver el problema y acaba descartándolos. En este sentido, se confirma la necesidad de recordar que no sólo hay que identificar y entender los datos, en general, sino también saber concretar los realmente útiles.

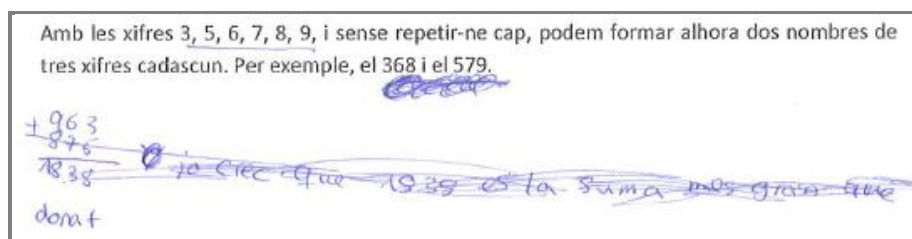


Figura 5.40. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A30

e) Errores de aplicación

Un claro ejemplo de error de aplicación se observa en el caso que presenta la Figura 5.41 errónea de un cálculo. Por ello conviene recordar la necesidad de revisar las operaciones y la manipulación de los datos en general. Con la revisión e interpretación de los mismos puedan detectarse y corregirse.

$$963 \times 875 = 841.625$$

Figura 5.41. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C16

f) Explicaciones imprecisas

Al describir un texto son diversas las imprecisiones que pueden surgir. No es de extrañar, pues, que éstas aparezcan también en la redacción de ideas, razonamientos, o conclusiones sobre un problema. En este sentido, los ejemplos expuestos desvelan correcciones en dos sentidos. Por un lado, en la concreción de lo que textualmente se quiere explicar y, por tanto, relacionados con aspectos de la lengua en general, como muestran las Figura 5.42 y Figura 5.43, donde se obvian o anticipan palabras que son clave para la explicación. Por otro, de contexto matemático, ya sea en la precisión de palabras clave, como se ve en la Figura 5.44, donde inicialmente se utiliza el término decenas en lugar de centenas, o bien al utilizar los símbolos adecuados, como se puede apreciar en las Figura 5.45, dónde, a pesar de multiplicar, previamente se había indicado una suma. En este sentido, la revisión de los escritos conlleva un asentamiento, adecuación e interpretación del lenguaje, matemático o no, utilizado.

i. Precisión de las explicaciones y argumentaciones

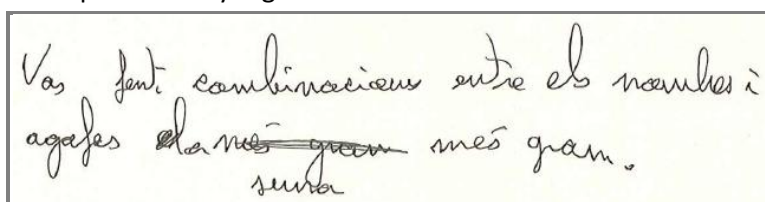


Figura 5.42. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C05.

[Vas haciendo combinaciones entre los números y coges el más grande la suma más grande.]

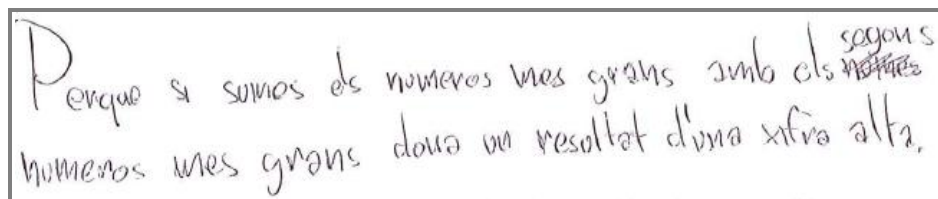


Figura 5.43. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_NB6A09.

[Porque si sumas los números más grandes con los ~~números~~ segundos números más grandes da un resultado de una cifra alta.]

ii. Términos y símbolos matemáticos

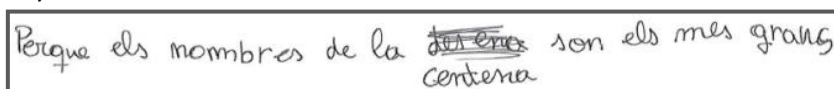


Figura 5.44. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_NB6A01.

[Porque los números de la ~~decena~~ centena son los más grandes.]

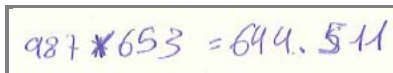


Figura 5.45. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C19

5.3.2 Discusión

De acuerdo con Mason et al. (1982) y Sanmartí (2010), las situaciones de desacierto o confusión se conciben, en general, como algo negativo que se aprenden a ocultar. Siendo éstos un punto clave en cualquier proceso de aprendizaje, y más especialmente en la adquisición de la competencia en resolución de problemas, resulta necesario identificarlos y reconocerlos. En este sentido hemos percibido como en la mayoría de los casos analizados, el hecho de utilizar la base de orientación durante la resolución del problema ha permitido a los alumnos

identificar la situación personal de atasco en qué se encontraban, al tiempo que eran capaces de revisar su estado, propiciando la búsqueda de una alternativa que, de manera generalizada, ha supuesto una resolución satisfactoria del problema.

De manera paralela, las evidencias obtenidas confirman la necesidad de que cualquier idea o acción que conlleva resolver un problema debe ser escrita y, en ningún caso, eliminada del discurso de la resolución. De no hacerlo se complica la recuperación de cualquier tipo de atasco, entenderlo y, más aún, tener opción a rectificarlo. En este sentido, las evidencias encontradas muestran como, ante cualquier atasco, el hecho de evidenciar el conflicto emergente ha dado pie a su posible rectificación por parte del mismo resolutor, confirmando así que éste ha reconocido y aceptado su puntual estado. Y, de manera consecuente, que cualquier lector de la resolución pueda también dar cuenta de ello.

Con ello desvelamos la necesidad de que, hasta que los alumnos así lo interioricen, la base de orientación destinada a guiar la resolución de un problema, debe contemplar una dimensión específica para la revisión del tradicional *error* o del temido *bloqueo*, al tiempo que promover que los alumnos dejen por escrito todas sus ideas y propuestas, sin borrar los intentos que consideren inoportunos. Sólo así será posible una posterior lectura de la resolución, y consecuentemente poder interpretar y entender los procedimientos y decisiones llevados a cabo. Será entonces cuando se podrán identificar y reconocer situaciones de dificultad. Esta dinámica es la que, finalmente, permitirá al alumno que resuelve el problema con la base de orientación, no sólo identificar y reconocer situaciones de atasco, sino encontrar una alternativa, generalmente satisfactoria, en lugar de abandonar la resolución del problema. Al mismo tiempo, esta forma de trabajo permite al docente, identificar y (re)conocer con más profundidad las carencias y necesidades de cada alumno y actuar de manera consecuente.

El análisis de los diferentes momentos de error o bloqueo, ha conllevado el reconocimiento de seis situaciones distintas de atasco (ver Tabla 5.7) en las que los alumnos, como resolutores de los problemas, se pueden ver involucrados.

De ello surgen correspondencias ineludibles entre los seis tipos de atasco descritos (a, b, c, d, e, f en la Tabla 5.7) y el conjunto de dominios y de dimensiones que conforman la base de orientación. Si bien una primera lectura evidenció estrechos vínculos entre cada uno de los tipos de atasco con uno de los tres dominios de la base de orientación, una segunda lectura permitió precisar su relación con cada una de las dimensiones de la base de orientación. En este sentido, observamos un estrecho vínculo entre los dos primeros tipos de atasco (a y b) con el dominio dedicado al entender el problema; los tres siguientes tipos de atasco (c, d y e) con el dominio dedicado al plan de acción y; el sexto tipo de atasco (f) con el dominio dedicado a la revisión. Al profundizar, observamos como el primer tipo de atasco (a) afecta las dos primeras dimensiones de la base de orientación, y el segundo (b) la tercera dimensión. Los tipos de atasco c), d) y e) afectan directamente las dimensiones 4, 5 y 6, respectivamente, mientras que el atasco responsable de explicaciones se vincula con la novena dimensión.

Esta correspondencia, ver Figura 5.46, se convierte en una herramienta que contribuye a entender y a clasificar las dificultades emergentes al resolver un problema y, en consecuencia, guiar la adaptación del material de trabajo (los problemas, la base de orientación y su puesta en práctica en el aula) según la tipología de atasco identificado en cada uno de los alumnos.

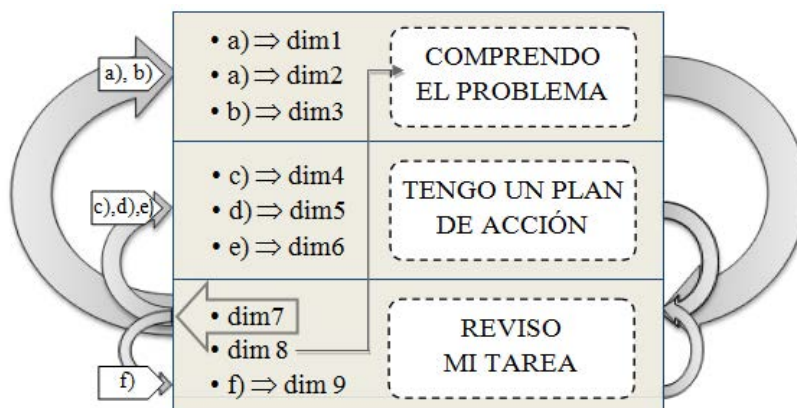


Figura 5.46. Relación entre las situaciones de atasco identificadas y los dominios y las dimensiones de la base de orientación, donde a), b), c) d), d) y f) corresponden con los distintos tipos de error descritos en la Tabla 5.7

En este sentido, la identificación de las seis situaciones de atasco (Tabla 5.7) se convierte en el punto de partida para posibles ampliaciones de la base de orientación considerada, especialmente para profundizar el reconocimiento de la naturaleza y el enfrentamiento a los posibles obstáculos. En otras palabras, la clasificación obtenida se convierte en sí misma una particular base de orientación dedicada a guiar y organizar específicamente el enfrentamiento a las situaciones de atasco cuando aún no se ha interiorizado esta dimensión específica dedicada a los obstáculos, proporcionando así completitud a la base de orientación inicial.

Por otro lado, dichas relaciones confirman la naturaleza cíclica del proceso de resolver un problema (De Corte et al., 2000b), característica no siempre evidente en la comunidad escolar. De hecho, a nuestro modo de ver, el mayor grado de esta articulación recae justo en la detección de un estado cualquiera de atasco. Cada tipo de obstáculo requiere una detección y revisión particular y, por tanto, una rectificación o corrección muy específica del proceso identificado. Se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación.

Con todo ello, concluimos con la importancia de promover la revisión del atasco en toda base de orientación, ya que, a través de una adecuada reflexión, permite al profesorado el continuo acompañamiento de sus alumnos en el proceso de aprendizaje para la adquisición de la competencia de resolución de problemas. Si bien con la base de orientación se promueve que el alumno deje por escrito una situación de atasco cuando este se produce, también la lectura de cómo éste organiza y usa los datos y expone sus desarrollos, da al docente una información muy valiosa para poder evaluar y, en consecuencia, (re)diseñar y (re)adaptar el material de trabajo, tanto los problemas como la base de orientación a utilizar, realzando así las carencias identificadas, de acuerdo con Sanmartí (2007). Dos herramientas para tal efecto son: la clasificación de situaciones de atasco (Tabla 5.7), y los vínculos constatados entre el hecho de la revisión del error y las dimensiones establecidas en la base de orientación (Tabla 5.1).

5.4. Dimensión 9 de la BO2

Cuando uno llega a una resolución razonablemente satisfactoria o cuando está a punto de renunciar, es esencial revisar su trabajo. Es un momento para mirar hacia atrás lo que ha sucedido para mejorar y ampliar sus habilidades de pensamiento (Mason et al., 1982). En base a esta afirmación de Mason et al. (1982), y ante una falta de razonamiento observada en las

respuestas de las producciones obtenidas en la Implementación Primera, surge la tercera y última dimensión vinculada al tercer y último dominio que define la base de orientación BO2, en la que se hace explícita la petición de argumentar las decisiones tomadas. Así, caracterizamos la Dimensión 9 como *Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo y que respondo de manera razonada y que se entiende relacionándolo, si hace falta, con el resto de cuestiones y quehaceres*, en la que no solo se pide de responder de manera razonada sino revisar, previamente, el proceso que permite dar una respuesta al problema. A nuestro entender es imprescindible que, en cuanto el alumno se vea obligado a dar por finalizada su tarea, sepa reorganizar y reorganice las ideas trabajadas, al mismo tiempo que sintetizar sus descubrimientos y así plasmarlo en su respuesta o, en su falta de ella, en sus observaciones finales. Ello no sólo le puede ayudar a reafirmar lo trabajado durante el problema, sino interiorizarlo y así mejorar la competencia en resolución de problemas.

5.4.1. Confección de Respuestas

En los análisis de las dimensiones 3, 6 y 7 arriba realizados, hemos evidenciado que los alumnos han sido capaces de un cierto nivel de reflexión y de así compartirlo de manera escrita. Así mismo, notamos aún ciertas dificultades a la hora de expresar, en este caso por escrito, los procesos, conocimientos e ideas que han transcurrido a lo largo de su resolución de manera lo suficientemente completa o adecuada. En este sentido, si bien encontramos evidencias de aclaraciones, rectificaciones y ratificaciones de explicaciones, como se puede observar a continuación, que confirman que en parte los alumnos si fueron revisando su trabajo, se observan aún distintos vacíos y dificultades a la hora de sintetizar los procesos que han llevado a cabo a lo largo de la resolución para dar una respuesta con las razones suficientes. Con ello, pues, parece que la práctica de revisión queda restringida a ciertos aspectos, puede que a los que llaman más la atención de los alumnos, o los que ven realmente claros, pero sin llevarles a cuestionar si pueden ir un poco más allá. Ello nos permite pensar que aunque el intento de revisión se ha inmerso, queda aún trabajo para que sea una práctica generalizada en todo el proceso de resolución, y no restringido a ciertos momentos o procesos, especialmente para poder dar argumentos convincentes de la solución encontrada.

Atendiendo a las dos partes de la dimensión a estudiar, analicemos en primer lugar el hecho de releer el problema y *explicarlo todo* que, como hemos introducido y como veremos a continuación, este *todo* se restringe a explicaciones concretas. Con ello nos referimos a que, en general, los alumnos no puntualizan todo lo que uno quisiera, sino sólo ciertos aspectos, puede que los que les hayan sorprendido más durante el proceso de resolución.

Si retomamos el problema Pb1.3.a1, principal de este análisis, en el cual se pide por dos números de tres cifras no repetidas cada uno que proporcionen al mismo tiempo la suma y producto de mayor valor, encontramos, por ejemplo, distintas observaciones en relación al hecho que fijadas las cifras de las centenas, decenas y unidades de ambos números, intercambiar las centenas, las decenas o las unidades de ambos números no altera el resultado final de la suma pero en cambio, sí altera el resultado de los distintos productos. Encontramos ideas, observaciones, reflexiones, afirmaciones sobre dicho hecho, pero sin llegar a justificar el porqué. En este sentido, sí detectamos la exposición de previsiones, observaciones, reflexiones, afirmaciones, conclusiones sobre las peculiaridades que conllevan ciertos hechos o características de la situación descrita por el problema pero, en general, sin llegar a justificar o

explicar de manera profunda su por qué. Veamos algunas de estas evidencias de haber “ido para atrás” en la resolución para contribuir a una mejora de las explicaciones.

Una claro ejemplo de ello es el que presenta la Figura 5.47, en la que se da inicialmente una distribución de las cifras que puede dar la suma y el producto de mayor valor pero al proceder, el alumno intuye que la combinación inicialmente dada puede no ser la única, por lo que en su explicación añade una nota para ratificar que, en algún momento hace el estudio para comprobar si su suposición era cierta o debe modificarla. De ahí que la nota especifique que se trata de un ejemplo de lo que más adelante ha intentando estudiar.

Aplicant aquest raonament als números donats, ens sortiren els nombres 965 i 873. Les primeres (exemple de combinació que explico després)

Figura 5.47. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A28. [Aplicando este razonamiento a los números dados, nos salen los números 965 y 873 → (ejemplo de combinación que explico después) Las primeras...]

En relación a la condición de la suma, la Figura 5.48 presenta un fragmento en el que el alumno pretende sintetizar el hecho de que fijadas las cifras de cada uno de los números de tres cifras, al intercambiar las cifras de las centenas de un número por el otro, o la cifras de las decenas por las decenas del otro, o lo mismo en las unidades, el valor de cada una de estas sumas no va a variar.

Si canviem l'ordre dels nombres de la suma el resultat no canvia.

Figura 5.48. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A04. [Si cambias de orden los números de la suma el resultado no cambia.]

EL fragmento de la Figura 5.49 de nuevo de centra en un primer estudio sobre la suma. Encontrada una combinación de suma que da el mayor valor, observa que, fijada la distribución hay cuatro casos que le darían el mismo máximo valor para ella.

Hi ha 4 canvis possibles de nombres.

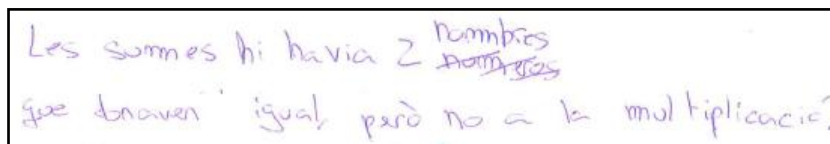
Figura 5.49. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A25. [Hay 4 cambios posibles de números.]

En un intento de relacionar la suma y el producto, en la Figura 5.50 se pretende explicar que, para una suma dada, el hecho de intercambiar las cifras de las mismas posiciones no alteran el valor de la suma final, pero que en cambio, los valores de los productos correspondientes a las sumas de igual valor, no mantienen el mismo valor. En su caso concreto, parece que la prueba que hizo el valor de la primera suma fue menor que el de la segunda.

Si canviem alguns números a la suma la multiplicació surt més gran.

Figura 5.50. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A29. [Si cambias algunos números a la suma la multiplicación sale más grande.]

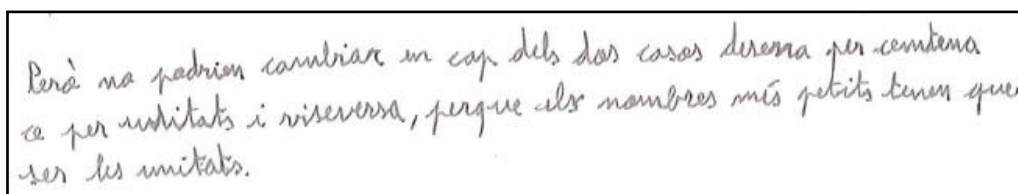
En esta línea se encuentra la afirmación de la Figura 5.51, en la que se precisa que ha encontrado dos combinaciones posibles que le dan la suma de mayor valor pero que dicho hallazgo no se mantiene para el producto.



Les sumes hi havia 2 nombres
que donaven igual però no a la multiplicació.

Figura 5.51. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A24. [Las sumas, había 2 números que daban igual, pero no en la multiplicación.]

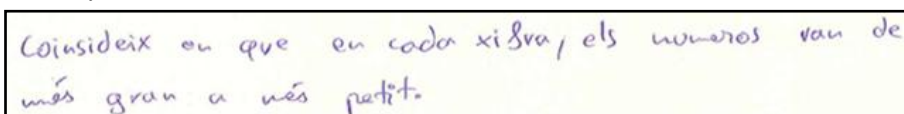
Si bien las observaciones realizadas en las evidencias ya estudiadas hacen referencia a las propiedades de las operaciones, encontramos también conclusiones y observaciones basadas en las propiedades de los números, y más concretamente, en el sistema posicional decimal. En parte, podríamos decir que si las conclusiones anteriores eran sobre una visión vertical del número, la siguiente sería de tipo horizontal. En el proceso de creación de números para que tengan un cierto valor, por el ejemplo el mayor posible, en el caso de la Figura 5.52 se afirma que no se pueden intercambiar las cifras que se pongan para centenas, decenas o unidades entre ellas. Cambios como éstos no mantendrían el valor que se está buscando, en este caso, el de máximo valor.



Però no podríem canviar en cap dels dos casos desena per centena
o per unitats i viceversa, perquè els nombres més petits tenen que
ser les unitats.

Figura 5.52. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A15. [Pero no podríamos cambiar en ninguno de los dos casos decena por centena o por unidades y viceversa, porque los números más pequeños tienen que ser las unidades.]

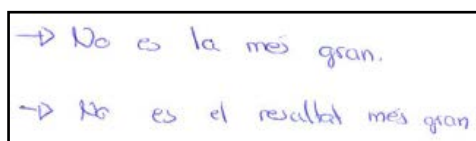
Si para algunos colocar las cifras en orden decreciente, en cuanto a su valor, era la primera condición para afrontar el problema, para otros ha sido un descubrimiento. Así lo ejemplifica el fragmento procedente de una de las respuestas al problema, que ilustra la Figura 5.53, cuando escribe que es una coincidencia que en los números que dan respuesta al problema, las cifras aparecen de mayor a menor valor.



Coincideix en que en cada xifra, els nombres van de
més gran a més petit.

Figura 5.53. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C17. [Coincide en que en cada cifra, los números son de más grande a más pequeño]

Encontramos también referencias a aclaraciones sobre los procesos o resultados parciales que se van desarrollando. Así, por ejemplo, la Figura 5.54 enseña el seguimiento de un alumno en relación a su indagación para encontrar la operación de máximo valor, en la que al lado de cada resultado especifica si se trata de un valor máximo o no.



→ No es la més gran.
→ No es el resultat més gran.

Figura 5.54. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A23. [→ No es la más grande.; → No es el resultado más grande]

También observamos anotaciones que refuerzan el control del atasco. Así, la Figura 5.55 que sigue a continuación enseña el caso en que un alumno explica que ha duplicado de manera innecesaria una operación, lo recoge como que ha cometido un error. Más que error, es una manera de tener presente que esa operación no aporta significado alguno para el proceso de resolución.

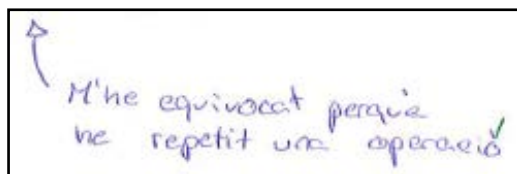


Figura 5.55. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A12. [*Me he equivocado porque he repetido una operación.*]

Otras aclaraciones hacen referencia a concreciones sobre el motivo de ciertas acciones o procedimientos, es decir, haciendo referencia a la *matematización* de la situación, o partes de la misma, descrita en el problema, como es el caso que presenta la Figura 5.56. Este caso lo ejemplificamos con un fragmento de una resolución al problema Pb6.a2, en el que se pide por discutir las cabezas que quedan a una hydra después de quitarle tres, si al cortarle una aparecen tres más. En este fragmento vemos como el alumno hace explícito el significado de su operación.

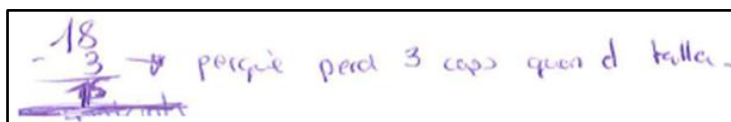


Figura 5.56. Fragmento de la producción Pb6.a2_SC1A23. [$18-3=15 \rightarrow$ porque pierde 3 cabezas cuando lo corta.]

Finalmente, destacamos interesantes revisiones de procedimientos que conllevan una optimización del mismo. Así, por ejemplo, la Figura 5.57, enseña un caso en el que, trabajando con el problema Pb6.a2 el alumno observa que el hecho de sumar tres veces 3 se puede resumir como el producto 3×3 y así lo rectifica. Aún siendo correcto, anota que la suma de los tres 3 al seis no vale para dar a entender que lo que desea que sea considerado sea la suma del 6 al producto de 3×3 . Se trata pues de un caso en el que, sin duda alguna, el alumno ha sido capaz de mejorar su quehacer por sí mismo, gracias a la revisión y reflexión de su trabajo.

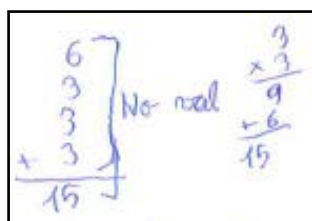


Figura 5.57. Fragmento de la producción Pb6.a2_NB6A06. [$6+3+3+3=15$ No vale]

Con estos ejemplos, se confirma la utilidad y necesidad de enfatizar las revisiones de lo que se ha ido desarrollando. Como hemos observado es vital para los alumnos, en el sentido que puedan por ellos mismos conectar lo que saben con lo van desarrollando a medida que intentan resolver una situación problemática. Y por ello es tan necesario que aprendan a responder el problema de manera concisa, dando la solución y su correspondiente razonamiento. Además de la mirada atrás, comporta un trabajo de síntesis de todo lo que han desarrollado. En cuanto a este último requisito, las evidencias enseñan que esta segunda

finalidad debe de seguir trabajándose de manera persistente. Si bien es cierto que con el uso de la base de orientación observamos que la mayoría de alumnos han hecho un intento de responder dando una solución y razones para confirmarla, en dichos argumentos se detecta en general falta de completitud, profundidad o conexiones.

En tanto que el uso de la base de orientación pretende, en primer lugar, proporcionar al alumno aquel soporte o guía que aún no posee que le ayuda a confrontar el problema, de manera que pueda trabajarlo y extraer conclusiones de él (y, en segunda instancia, que este trabajo y las conclusiones extraídas lleven a respuestas correctas), el análisis que sigue se centra, más que en discutir el grado de corrección de una u otra de las respuestas de los alumnos que se presentan, en como los alumnos dan por resuelto el problema. Es decir, como ellos entienden que el problema queda respondido. Veremos que entre las resoluciones de los alumnos no hay una manera única para dar respuesta al problema. Por un lado puede ser discutible, o no, si ciertos modos de dar por respondido, son realmente respuestas. Así mismo, esta variedad enriquece tanto a los problemas, como el pensamiento de los alumnos y a sus procesos de resolución, pues da pie a discutir con ellos sobre sus propias prácticas. Así mismo, pero, detectamos una falta de completitud en la mayoría de ellas, pues a pesar de la variedad observada en cómo han dado sus respuestas, en todas ellas se encuentra a faltar algo relevante para las justificaciones pertinentes. Será interesante pues, divisar qué es necesario en cada caso o qué casos deben de ser reconsiderados en las prácticas de los alumnos para que, de una u otra forma, dichas faltas vayan disminuyendo.

Para el análisis que pretendemos desarrollar, y ante las evidencias encontradas, el hecho de dar respuesta queda distribuido entre dos hechos: dar solución a lo pedido, que surge de los procesos llevados a cabo que conllevan una conclusión final sobre el problema, y su argumentación, que correspondería a una síntesis de los razonamientos y argumentos en que se basan los procesos. Así, entendemos por respuesta al conjunto de las soluciones concretas a las preguntas formuladas junto con la síntesis que justifica dichas soluciones. Con ello, cabe recordar que la hoja donde desarrollar el problema simplemente contenía el enunciado del problema, estando el resto de hoja en blanco, sin ningún espacio predeterminado para la solución. Por otro lado,

Las evidencias obtenidas nos desvelan que los alumnos pueden responder un problema haciendo explícita o no la aportación de su respuesta. Así, encontramos casos en los que la respuesta, o bien la solución o las argumentaciones correspondientes, no se hacen explícitas como respuesta, sino que se quedan, de laguna manera, recogidas entre el plan de acción. Otras, la misma respuesta contienen el plan de acción. Para intentar clasificar un poco estas ideas, ilustramos distintos casos con fragmentos de las resoluciones de los alumnos.

La Figura 5.58 presenta un caso de respuesta en la que tanto la solución a la pregunta como su razonamiento se introducen conjuntamente de forma explícita. Además que el identificativo "R:" precede tanto a la solución como a los argumentos, la solución concreta se identifica por la exposición concreta del texto *Los dos números son el 963 y el 875S*, y el argumento por estar introducido por la palabra *conclusión*.

R: Els dos nombres són el 936 i el 875, he arribat a aquesta conclusió perquè he posat els dos nombres més grans a les dècimes i els altres 4 els he anat provant per quin lloc els podria posar i que en les dos operacions donés els dos nombres més grans.

Figura 5.58. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_NB6A05. [Los dos números son el 936 y el 875, he llegado a esta conclusión porque he puesto los dos números más grandes a la dècimas (debería decir: decenas) y los otros 4 los he ido probando en qué lugar los podría poner y que en las dos operaciones dará los dos números más grandes.]

En el caso de la Figura 5.59 que sigue a continuación, el conjunto de la respuesta, solución y razones, se encuentran por separado. El razonamiento de la respuesta se detecta por la palabra clave *conclusión* que se utiliza en fragmento que se presenta en la esquina inferior derecha. La conclusión a la cual se refiere, es decir, la solución a la pregunta, se observa por estar remarcada. Con un cuadrado de vértices redondeados, se han encuadrado la propuesta de los dos números que dan, por un lado, la suma de mayor valor, y el producto de mayor valor, por otro.

975
+863

1838

963
+875

1838

973
+865

1838

873
+965

1838

975
x863

5850
6741
7704

841425

He arribat a aquesta conclusió perquè he buscat les multiplicacions que donen el resultat més gran.

Figura 5.59. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1D15. [He llegado a esta conclusión porque he buscado las multiplicaciones que dan el resultado más grande.]

De nuevo, argumentos y soluciones se dan por separado en la respuesta que presenta el fragmento de la Figura 5.60. La solución, en este caso, se percibe de manera implícita al descartar las pruebas que inician su plan de acción pero que no corresponden a la pregunta formulada. El argumento se divide por estar situada al final del proceso que ha dado pie al plan de acción, a continuación de las combinaciones de números que se dan como solución. Notemos que en ninguna de las dos partes se menciona de manera explícita que la respuesta en sí debe hacer referencia a los dos números, no a las operaciones que confirman dichos números. En cierto modo, se evidencia que entiende lo que se pide pero no lo suficiente para poder dar, al menos la solución, de manera consecuente con la pregunta.

$$\begin{array}{r} 975 \\ + 863 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ + 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 975 \\ \times 863 \\ \hline 2925 \\ + 5850 \\ \hline 7900 \\ \hline 841425 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ \times 875 \\ \hline 4815 \\ + 6741 \\ \hline 7704 \\ \hline 842625 \end{array}$$

La veritat no ho sé... ho he fet per intuició

Figura 5.60. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1D09. [*La verdad no lo sé. Lo he hecho por intuición*]

A diferencia del caso anterior, la Figura 5.61 presenta un caso en que la solución se refuerza de manera explícita. Así, se percibe la solución no sólo por provenir de los únicos procedimientos no tachados que confinan el plan de acción, sino porque la conclusión a la cual se llega se integra de manera explícita en el argumento que se da, que se encuentra al finalizar el plan de acción. A pesar que el argumento es flojo, en este caso si se da la solución de manera consecuente a la pregunta formulada, es decir, mencionando explícitamente dos números y dos operaciones.

$$\begin{array}{r} 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ + 865 \\ \hline 1838 \end{array}$$

$$973 \times 865 = 841645$$

Els números més grans són 973 i 865 perquè són els números més grans.

Figura 5.61. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1D01. [*Los números más grandes son 973 y 865 porque son los números más grandes.*]

En la respuesta que presenta la Figura 5.62, se percibe el razonamiento al final del proceso del plan de acción, si más, y la solución por ser el último caso que estudia y en la respuesta dice "he llegado", haciendo entender que se ha parado cuando ha percibido que era el último caso a considerar que le daba la solución. Notemos que, como un caso anterior, encuentra los números que cumplen con todas las condiciones pero no expone la solución de manera consecuente con la pregunta, pues no se de encontrar los valores de las dos operaciones, sino de los números que las determinan.

$863 + 975 = 1838$ $863 \times 975 = 841.425$
 $873 + 965 = 1838$ $873 \times 965 = 842.445$
 $963 + 875 = 1838$ $963 \times 875 = 842.625$
 He arribat posant els números en ordre més grans i així he conseguit la resposta.

Figura 5.62. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_AL1C12. [He llegado poniendo los números en orden más grandes y así he conseguido la respuesta.]

El caso siguiente, Figura 5.63, presenta una respuesta en la que la solución se introduce de manera explícita y directa usando la palabra *Solución*: pero los razonamientos de la misma, se quedan entre el plan de acción: a medida que va desarrollando va compartiendo sus impresiones que, independientemente de su completitud, se consideran argumentaciones finales. En cuanto a la solución, notamos como, de nuevo, no se da de manera consecuente con la pregunta concreta formulada. Se contesta con la referencia al valor del producto cuando se pide encontrar dos números de tres cifras cada uno.

Jo crec que els dos nombres més grans s'han de repartir.
 $973 + 865 = 1838$
 $973 \times 865 = 841.645$
 Posem els números més grans al principi, perquè així tenen més valor.
 $963 + 875 = 1838$
 $963 \times 875 = 842.625$
 Solució: 963×875 és més gran

Figura 5.63. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A03. [Yo creo que los dos números más grandes se tienen que repartir $973+865=1838$. Ponemos los números más grandes al principio porque así tienen más valor. $963+875=1838$]

En el caso de la Figura 5.64, tanto la solución como la argumentación que dan pie a la respuesta se encuentran al final del proceso que define el plan de acción. Como podemos observar el razonamiento final deja que desear teniendo en cuenta que el alumno había hecho algunas reflexiones iniciales que, aún habiéndolas compartido, no las considera para su respuesta. Evidenciamos así como parte de las reflexiones, conocimientos, etc. que entraron en juego en su manera de proceder y que da pie a su solución, son despreciadas en su razonamiento final como respuesta.

Creo que el 9 i el 8 sempre tenen que ser el primer número.

963 +875 ----- 1838	973 +865 ----- 1838	963 x875 ----- 842625	973 x865 ----- 841645	965 x873 ----- 842445
------------------------------	------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

El 963 i el 875 donen la suma i la multiplicació més gran.
Ho he descobert provant.

Figura 5.64. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A24. [Creo que el 9 y el 8 siempre tienen que ser el primer número. El 963 y el 875 dan la suma y la multiplicación más grande. Lo he descubierto probando.]

En ejemplos anteriores hemos visto como, aún trabajando tanto la condición de la suma como del producto al mismo tiempo, a pesar de encontrar la solución correcta y de dar algún razonamiento parcial no incorrecto, algunos alumnos no daban la solución de acuerdo con la pregunta. Se limitaban enseñar que habían encontrado el máximo valor para la suma y para el producto, invirtiendo así, y en cierto modo, la cuestión planteada.

El caso que presenta la Figura 5.65 es diferente en el sentido que se tratan las condiciones de suma y de producto por separado. Para cada una de ellas se da una respuesta parcial: se encuentra una posible solución a cada situación y en ambas se hace un cierto razonamiento al final del plan de acción. Además, las soluciones de cada parte son destacadas por una línea en forma de rama. Encontradas las respuestas parciales, no llega a dar una respuesta común al conjunto del problema. De nuevo, a pesar que ha entendido qué deben cumplir los números que su buscan, la conexión entre ellos desaparece.

Suma

975 +863 ----- 1838	963 +875 ----- 1838	983 +765 ----- 1748
------------------------------	------------------------------	------------------------------

Son la suma més gran que donen perquè he provat i hi ha dos que m'ha donat igual.

Multiplicació

x 963 875 ----- 842625	x 965 873 ----- 842445	x 987 653 ----- 644511
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

es la multiplicació que m'ha donat més alta

Figura 5.65. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A30. [Suma 1838,1838>Son la suma más grande que dan porque he probado y hay dos que dan igual. Multiplicación 842625 es la multiplicación que me ha dado más alta]

Evidenciamos así que, a pesar de la sugerencia explícita petición de la base de orientación BO2 que recuerda que las respuestas deben de intentarse relacionar todo lo posible, es aún una dificultad notoria entre los alumnos. Así mismo, pero, analizando el comportamiento de un mismo alumno no siempre ha sido igual su comportamiento en cuanto a la relación de los casos. Lo ejemplificamos comparando las respuestas al problema principal de este análisis, Pb1.3.a1, y al secundario, Pb6.a2 de dos de los alumnos. Siguiendo el orden en que los alumnos trabajaron los problemas en sus respectivas aulas, nos fijamos en las resoluciones de los alumnos SC1A07 y SC1A28, primero al problema, Pb1.3.a1, y después al problema que trabajaron más adelante, el Pb6.a2.

En el fragmento de la Figura 5.66 se percibe el razonamiento porque se encuentra al final de lo que determina su plan de acción y más precisamente, porque utiliza la palabra clave *conclusión*. Así mismo no notamos que de llegue a dar una solución concisa al problema. Dentro del proceso de resolución se detecta una suma, la de mayor valor, y una discusión sobre 4 posibles productos, pero de la que no se llega a discernir cual o cuales se corresponden a lo buscado, o como se interpreta la suma ante estos productos. Con ello que evidencia cierta dificultad en conectar ambas condiciones y dar la solución de manera consecuente con la pregunta formulada y relacionando con todas las condiciones, o al menos, las máximas posibles.

The image shows a student's handwritten work. On the left, there is a vertical addition: 963 plus 875 equals 1838. To the right, there are four multiplication problems: 963 x 875 = 842.625, 973 x 865 = 841.645, 975 x 863 = 841.425, and 965 x 873 = 842.445. Below these calculations, the student has written a conclusion in Spanish: 'He arribat a aquesta conclusió perquè segons la meua lògica per poder tenir el número més gran possible he de anar passant de el número més gran al més petit,'.

Figura 5.66. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A07. [He llegado a esta conclusión porque según mi lógica para poder tener números más grandes posibles tienes que ir poniendo del número más grande al más pequeño.]

De manera similar, en caso que presenta la Figura 5.67, después de la extensa argumentación, que en este caso queda englobada en el plan de acción, da la su solución. La solución se se introduce por el texto *Resultados*: y hace más bien referencia a los valores máximos que pueden tomar la suma y el producto, que a los números que los generan, siendo esto último el foco de la cuestión a contestar. De hecho, con el uso de la palabra “Resultados:” queda cierta ambigüedad en lo que finalmente quiere responder, pues con la palabra “Resultados” cobra sentido mencionar los valores de las operaciones. En tal caso, pero, faltaría luego especificar la solución consecuente a la pregunta. De nuevo cierta dispersión en el discurso de la respuesta, así como falta de cierta cohesión se hace evidente. Al tanto, este hecho permite diferenciar entre Resultado y Solución. Asignaríamos como resultado a los valores obtenidos por un algoritmo o procedimiento, y solución a un proceso general.

Comprovant la teoria de la multiplicació, he vist que, multiplicant, l'ordre sí que importa. A més, he comprovat que la combinació que donaria la suma (en aquest cas, sí que l'ordre no importa) i la multiplicació més gran és $963 \otimes \oplus 875$. Els resultats són:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \\ 963 + 875 = 1838 \\ 6 \quad 7 \\ 963 \times 875 = 842.625 \end{array}$$

Figura 5.67. Fragmento de la producción Pb1.3.a1_SC1A28. [Comprobando la teoría de la multiplicación, he visto que, multiplicando, el orden sí importa. Además, he comprobado que la combinación que daría la suma (en este caso, sí que el orden no importa) y la multiplicación más grande es 963×875 . Los resultados son: $963+875=1838$; $963 \times 875=842.625$]

En cambio, ambos alumnos sí conectaron correctamente todas las condiciones del problema Pb6.a2 y con ello utilizaron lo concluido en el primer apartado del problema (al que se refieren como problema 1, en el primer caso; y enunciado 1, en el segundo) para resolver la 2ª parte (problema 2, en el primer caso; y enunciado 2, en el segundo.) del problema y así lo argumentaron, como se observa a través de las Figura 5.68 y Figura 5.69.

Com que les dades són les mateixes que les de l'enunciat 1, s'han de multiplicar $\times 3$ els caps de l'enunciat 1.

$$15 \times 3 = 45$$

Figura 5.68. Fragmento de la producción Pb6.a2_SC1A28. [Como los datos son los mismos que los del enunciado 1, se tiene que multiplicar $\times 3$ las cabezas del enunciado 1. $15 \times 3 = 45$]

He de multiplicar el mateix que al primer problema i multiplicar-lo per 3

$$15 \cdot 3 = 45$$

Cada dragó té 15 caps i entre tots en tenen 45 caps

Figura 5.69. Fragmento de la producción Pb6.a2_SC1A07. [Tengo que hacer lo mismo que en el primer problema y multiplicarlo por 3. $15 \cdot 3 = 45$. Cada dragón tiene 15 cabezas y entre todos tienen 45 cabezas.]

5.4.2 Discusión

Entre los objetivos de la base orientación considerada BO2 (Tabla 5.1) se encuentra que los alumnos sean capaces de reflexionar sobre lo que van desarrollando al tanto que lo vayan conectando con sus conocimientos previos para formar de futuros. Para ello, es necesario que aprendan a extraer sus ideas, analizar las consecuencias, relacionar los elementos que van apareciendo. Para poder acceder a ellos, es necesario escribirlos de la manera más concisa,

pero completa, posible. En este sentido lo pretenden el tercer dominio de la base de orientación BO2, en general, y su última dimensión, cuya acción aquí que hemos estado examinando.

Abarcar el objetivo que aquí se pretende, y en base de las evidencias obtenidas, nos ha llevado a reflexionar e identificar lo que debemos entender como Respuesta a un problema matemático. En este sentido, entendemos por resolución al proceso general que uno desarrolla para encontrar alguna conclusión global sobre el problema en cuestión junto con las explicaciones pertinentes. En tanto, la respuesta al problema consistiría en dos: a dar la conclusión final a la que se llega, y ordenar las razones por las cuales se ha llegado a tal conclusión. Así, la solución haría referencia a las conclusiones, y las razones a la síntesis de los argumentos que lo justifican.

El análisis de esta última dimensión de la base de orientación BO2, informa inicialmente de dos hechos principales. El primero, que los alumnos sí han demostrado cierta implicación en dejar por escrito observaciones, relaciones, o comentarios relevantes, optimizaciones de sus procedimientos, o conclusiones parciales sobre los quehaceres que han ido desarrollando. Así, han demostrado ir releendo sus producciones y se han preocupado por un mínimo de explicación, aunque no toda, si parcialmente.

Por otro, que los alumnos, de manera general, se han involucrado en dar respuesta, con sus dos componentes solución y argumentos, a las preguntas formuladas, de manera que casos como los que enseña la Figura 5.70, en los que no hay ningún tipo de argumentación para dar respuesta al problema planteado, han sido minoritarios en todos los grupos participantes.

Handwritten mathematical work showing several calculations:

- ~~935×870~~
- ~~987×853~~
- ~~$987 \times 653 - 644.511$~~
- $975 \times 863 = 841.425$ (circled)
- $975 + 863 = 1.838$ (circled)
- $935 + 876 = 1811$

Figura 5.70. Fragmento de la producción Pb6.a2_AL1D07

Como se ha observado, la manera de dar la respuesta es poco unificada, en general porque se observa una falta de distinción, entre los alumnos, entre lo que serían el dominio de tener el plan de acción y la revisión. En general, se observa como si, o bien detallan sus procesos en el plan de acción o bien en lo que identifican como respuesta, pero raras veces en ambos. Este hecho nos ha hecho diferenciar entre distintas maneras de introducir las partes de la respuesta (la solución y las razones). Evidenciamos, pues, una falta de síntesis verdadera en el sentido de hacer explícitas las acciones matemáticas y verbales relacionadas con el plan de acción, y, después, realmente llevar a cabo una síntesis de lo realizado, referenciando de manera clara la solución a la cuestión formulada y el sumen de las razones que así lo constatan.

Las evidencias nos hacen pensar que esta distinción es muy difusa en los alumnos y que en parte, esto explica la falta de completitud, precisión de argumentación y conexión en la mayoría de respuestas, especialmente cuando los problemas como el Pb1.3.a1 requieren de

definiciones matemáticas un poco más profundas. Dicha falta de completitud es más notoria en las respuestas al problema Pb1.3.a1 que al Pb6.a2, en este sentido.

En relación a ello, destacamos la observación de dos comportamientos: por un lado, aquellos que básicamente verbalizan sus ideas u observaciones a lo largo del plan de acción, a la hora de dar la respuesta global, no sintetizan los argumentos que han ido mínimamente verbalizando, obviando así relaciones interesantes. Por otro lado, notamos que al pretender argumentar las respuestas de manera explícita al finalizar el proceso de resolución, en general, se desprecian gran parte de las distintas ideas que han transcurrido, para quedarse en las mínimas o en una conclusión superficial que no conlleva una conclusión final lo suficientemente interesante para un aprendizaje significativo en todo su conjunto. En general, sólo una de las ideas que han ayudado en el proceso es comentada. De esta manera la argumentación de la respuesta queda difusa. En cuanto a dar las soluciones, hemos visto como también pueden darse de manera explícita, o implícita durante el proceso. A veces, incluso, se dan resultados correctos pero que no responden concretamente a la cuestión formulada. En este sentido es necesario que tanto argumentos como solución estén siempre presentes en una respuesta pues el conjunto de ambos, aunque no necesariamente juntas, pero si bien identificados permite la rectificación de la misma.

Concluimos así que, a pesar que el enunciado del problema pueda solicitar por una argumentación, la base de orientación debe de seguir enfatizando el hecho de responder a las cuestiones formuladas, entendiendo responder como el conjunto de dar una solución y una argumentación, de manera clara y distinguida, verificando que se ajustan a las condiciones y peticiones de las cuestiones planteadas. En tanto será necesario que dicha revisión y respuesta conlleve a una síntesis global del proceso realizado. A lo largo del plan de acción se debería explicar todo. Al dar respuesta, se debería dar una síntesis de ello referenciando lo más relevante y concluyente. Sintetizar las ideas más relevantes trabajadas y observadas a lo largo del proceso de resolución, darían un mejor entendimiento del problema, de su por qué y de cómo utilizar lo trabajado en futuras ocasiones.

Como hemos comentado anteriormente, en función del alumno, del problema o de la situación planteada, se comparten las explicaciones del problema al final, a modo de respuesta, otros durante el proceso de resolución. No todas las ideas que se recogen durante el proceso se sintetizan al final.

5.5 Síntesis

Hemos aquí analizado el papel específico que toman algunas de las dimensiones de la base de orientación BO2 utilizada en la Implementación Segunda (I2) de acuerdo con las producciones de los alumnos participantes en dicha implementación principalmente, al resolver el problema Pb3.a1 y de manera complementaria, el problema Pb6.a2. En ambos casos, los alumnos resolvieron los problemas de manera individual y disponían de la base de orientación BO2.

Las dimensiones analizadas han sido la tercera, sexta y novena de la base de orientación BO2 de acuerdo al papel sintetizador que toman en relación a los dominios a los que aparecen asociados, y la dimensión séptima por el papel de conexión con el resto de dimensiones y, por tanto, dominios.

De manera general, observamos que el uso de una base de orientación en la resolución de un problema permite tanto a docentes como alumnos tener claros los puntos clave de la resolución. Eso permite, para cada uno de estos puntos (dominios, y sobre todo dimensiones) clasificar y entender mejor los micro procesos llevados a cabo. El alumno puede conocer exactamente en qué punto y sentido tiene más dificultades. Con el tiempo, le permite analizar mejor sus desarrollos y así hacerles frente. El profesor puede entender mejor lo que desempeña el alumno y, de manera consecuente, adaptar el material de trabajo (el problema y la base de orientación).

En este sentido confirmamos la importancia de las tres dimensiones analizadas con detalle, en particular, y de los tres dominios que representan, en general y, en consecuencia de ser el esqueleto imprescindible de cualquier base de orientación para la resolución de problemas.

Al mismo tiempo, identificamos la dimensión dedicada a la revisión del error como el foco del proceso de resolver un problema. La naturaleza no lineal y más bien cíclica de la que hablan algunos autores queda completamente confirmada con esta dimensión. Con ello queda justificada que se trata de una dimensión imprescindible en cualquier base de orientación dedicada a la resolución de problemas.

Finalmente, para un seguimiento posible de todo ello, es imprescindible que el alumno que acostumbre a detallar sus procesos mentales por escrito. De otra forma difícil será recuperar cualquier a de ellos, tanto por parte del alumno como del profesor.

El análisis de cada una de las dimensiones informa de particularidades de las dimensiones que percibimos como útiles para posibles adecuaciones de la base de orientación de acuerdo a las necesidades de los alumnos, a la vez que proporcionar un marco a los docentes con el que poder emitir juicios evaluativos de las producciones de los alumnos. Resumimos a continuación de estas particularidades y los instrumentos que permiten identificarlos.

5.1 Análisis de la D3 de la BO2

Gestión de la representación	<ul style="list-style-type: none"> • Tabla 5.3 <ul style="list-style-type: none"> – Distingue la naturaleza de las representaciones en función de la información que transmiten y sus inferencias – Permite emitir juicios de valor de las producciones de acuerdo a su adecuación, riqueza y completitud y adecuar la base de orientación en función de la adecuación, riqueza y completitud y adecuación que se persigue. • Tabla 5.4 <ul style="list-style-type: none"> – Presenta distintos lenguajes de representación que pueden aparecer en las representaciones. – Informa de la importancia que los alumnos dispongan de libertad de expresión al mismo tiempo que puedan conocer distintos tipos de representación
------------------------------	--

5.2 Análisis de la D6 de la BO2

Gestión de procesos estratégicos	<ul style="list-style-type: none"> • Tabla 5.5 <ul style="list-style-type: none"> – Distingue entre distintos procesos estratégicos de carácter heurístico para la resolución de problemas – Permite interpretar los distintos procesos que se aplican en un
----------------------------------	--

	<p>proceso de resolución.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Permite observar que los alumnos presentan dificultades para conectar los procesos que aplican y que tienen tendencia a explicar generalmente a lo sumo uno de los que suelen aplicar.
Verbalización de los procesos estratégicos	<ul style="list-style-type: none"> • Tabla 5.6. <ul style="list-style-type: none"> – Distingue tres niveles de verbalización de los procesos estratégicos desarrollados. – Permite emitir juicios de valor de las producciones de acuerdo al conocimiento que expresan sobre los procesos que desarrollan. y adecuar la base de orientación en función de la adecuación, riqueza y completitud y adecuación que se persigue con estas explicaciones.
5.3 Análisis de la D7 de la BO2	
Gestión del atasco (error y bloqueo)	<ul style="list-style-type: none"> • Tabla 5.7 <ul style="list-style-type: none"> – Describe seis situaciones de atasco. – Permite identificar el motivo de las situaciones de atasco facilita su reconducción. • Figura 5.46. <ul style="list-style-type: none"> – Relaciona las situaciones de atasco con los dominios y las dimensiones de la base de orientación lo que permite adecuarla con la propuesta de cómo reconducir cada tipo de atasco. – Transmite la naturaleza no lineal pero cíclica, con distintos ciclos, de resolver un problema.
5.4 Análisis de la D9 de la BO2	
Confección de la Respuesta	<p>Sin una referencia común a los términos con que a menudo intervienen en este aspecto, se obstaculiza que los alumnos puedan responder de forma completa. Por ello cabe una conceptualización común de los términos implicados.</p> <ul style="list-style-type: none"> – <i>Resolución</i>: al proceso general que uno desarrolla para encontrar alguna conclusión global sobre el problema en cuestión junto con las explicaciones pertinentes. Conlleva todas las acciones desarrolladas, abandonadas, parciales o completas que se han desempeñado para poder dar una respuesta a la cuestión formulada. – <i>Solución</i>: resultado preciso del proceso de resolución. Si para la resolución se han introducido aspectos que finalmente no contribuyen a la explicación de la respuesta, la solución sólo contendría los aspectos que influyen directamente a dar respuesta a la cuestión formulada. – <i>Resultado</i>: lo que se obtiene al final de un procedimiento concreto. – <i>Respuesta</i>: el conjunto de las explicaciones a las cuestiones formulada de manera argumentada. Debido a una falta de completitud y de síntesis en las respuestas se confunde con la solución, cuando no siempre puede ser así. Entendemos que la respuesta es la manera de clausurar las distintas soluciones encontradas y dar sentido global a las mismas, de manera completa, resaltando los aspectos relevantes detectados y empaquetando el conjunto de lo trabajado para posteriores ocasiones, a la vez que permite al resolutor afianzar lo trabajado y adquirido a lo largo del proceso de resolución.

Tabla 5.8. Cuadro resumen de características asociadas a las dimensiones D3, D6, D7 y D9 de la BO2 analizadas que permiten precisarlas al mismo tiempo que evaluar las habilidades de los alumnos

6. ANÁLISIS Y RESULTADOS IV: La base de orientación como auto-andamiaje de la resolución de problemas

El trabajo que soporta este capítulo fue desarrollado durante la estancia de la doctoranda en el Departamento de Educación Matemática y de Ciencias bajo la supervisión del tutor de la estancia dicha universidad, el Profesor Paul Andrews. El capítulo presenta dos apartados, cada uno de ellos correspondiente a uno de los dos análisis realizados. Los resultados procedentes del primer análisis fueron presentados con el artículo titulado *Self-scaffolding students' problem solving: Testing an orientation basis* en el CERME10 (*The 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, celebrado en Dublín entre el 1 y 5 de Febrero de 2017). En cuanto a los resultados del segundo apartado, fueron presentados con el artículo *Supporting students' mathematical problem solving: The key role of different forms of checking as part of a self-scaffolding mechanism* en el NORMA 17 (*The 8th Nordic Conference on Mathematics Education*) celebrado en Estocolmo entre el 30 de mayo y 2 de junio de 2017. En ambos casos los artículos serán incluidos en las Actas correspondientes. Las referencias concretas a estos dos artículos se detallan en la página que introduce las Referencias Bibliográficas.

El trabajo que se desarrolla con este cuarto análisis del trabajo, discute el desarrollo y la implementación de una tercera propuesta de base de orientación, que fue desarrollada durante la estancia de la doctoranda en la universidad de Estocolmo con el tutor de la misma y que se presenta en el Anexo 3 como BO3. El objetivo del doble análisis que aquí se presenta se centra realizar una evaluación inicial de la eficacia del uso de una base de orientación, en este caso a la que nos referimos como BO3, como andamiaje educativo para la resolución de problemas matemáticos. En el proceso, nos percatamos de otros hechos que desvían nuestro interés, aportando resultados interesantes sobre la gestión de diferentes aspectos de la comprobación como parte fundamental del auto-andamiaje.

Finalmente, recordar que los Instrumentos para la Resolución de Problemas utilizados en este caso, así como los datos extraídos, pertenecen a la Implementación Tercera (I3). De acuerdo con ello, y como se describe en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2) dichos instrumentos se concretan en los problemas Pb0.a2, Pb1.4.a1, Pb5.a2 y Pb7.a1 (Anexo 1) y la Base de Orientación BO3 (Anexo 3). En este caso, la base de orientación BO3 está estructurada en 4 dominios –correspondientes a las cuatro fases de resolución de Polya (1945)– cada una de las cuales está dirigida a través de tres acciones. Ello explica que, en este caso nos refiramos a dimensiones y acciones de la base de orientación. De acuerdo con la estructura de la base de orientación BO3, y tal como se expone en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), los alumnos debían marcar aquellas acciones que considerasen que iban aplicando o habían aplicado al resolver el problema.

6.1 Análisis de una base de orientación como auto-andamiaje

Para analizar si el uso de una base de orientación puede desempeñar el papel de auto-andamiaje consideramos los datos que derivan de la utilización de la Base de Orientación BO3 por parte de los 22 alumnos del grupo de 6º de Primaria EP6A al resolver el problema matemático Pb5.a3 planteado en la Implementación Tercera (I3). Seleccionamos las

producciones de este grupo por ser de 6º de Primaria donde, por lo comentado anteriormente, vemos fundamental el papel de una base de orientación como síntesis de las acciones que se espera que los alumnos adquieran en la educación obligatoria y, por tanto adquieran a lo largo de la educación primaria y afiancen en la secundaria, y por ser las primeras de un grupo entero de 6º curso a las que tuvimos acceso. En cuanto al docente involucrado, recordamos se trata del EP6, un maestro de escuela primaria generalista con experimentado. De acuerdo con ello, y siendo fieles su perfil docente, nos referiremos a él como maestro.

En la Tabla 6.1 se muestran los datos correspondientes a los 22 alumnos del grupo EP6A al utilizar la Base de Orientación BO3 mientras trabajaban en el problema. Un • corresponde a las marcas de la Base de Orientación hechas por cada uno de los alumnos al indicar que se habían involucrado con una acción de la BO3. Una cruz × indica que el alumno escribió un comentario específico relacionado con algún elemento de la BO3. El total de las acciones de la BO3 en qué cada alumno marcó haberse involucrado se recogen en las casillas de la fila #A. EL problema en cuestión, (Pb5.a2 del Anexo 1) invita a contestar dos preguntas. Así, las casillas por alumno de la fila #C contienen un 2 si el alumno dio alguna respuesta correcta a ambas preguntas, un 1 si sólo contestó correctamente una de las preguntas y un 0 cuando ninguna de las dos preguntas fue respondida de manera asequible.

	Alumnos																					
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
A1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A3	•	•	•	×	•	•	•	×	•	•	•	×	•	•	×	•	•	•	•	•	•	•
A4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	×	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A5	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	*	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A7	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A8	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A9	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A10	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A11	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A12	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
#A	5	7	12	11	9	12	5	4	12	10	12	11	3	12	4	12	12	3	1	12	0	12
#C	0	2	2	1	1	2	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2	2	1	0	2	0	2

Tabla 6.1. Seguimiento de la BO3 por cada alumno y la completitud del problema

En la Tabla 6.1 se puede observar que sólo un alumno, el alumno 21, no se vió involucrado con la base de orientación BO3 en tanto que no marcó ninguna de sus acciones, mientras que todos los demás lo hicieron en grados variables.

Nueve alumnos obtuvieron soluciones correctas para ambas partes del problema, otros cinco pudieron solucionar sólo una parte y los ocho restantes, incluyendo el que no completó ninguna acción de la BO3, no alcanzaron ninguna respuesta correcta a ninguna de las dos preguntas el problema.

Cuatro alumnos hicieron notaciones en la misma BO3 explicitando alguna dificultad con respecto a la comprensión de ciertas acciones de la BO3. En este sentido, observamos como

cuatro explicitaron que tuvieron dificultades para entender la acción “A3, *He identificado y entendido bien los datos*”. La otra única acción que, por los comentarios explícitos de los alumnos, causó incertidumbre fue la “A6, *He comprobado que mi estrategia se ajusta a los datos*”. De acuerdo con que una base de orientación debe de ser necesariamente adaptativa (Sanmarti, 2010), entendemos que estas dos cuestiones deberían ser reflexionadas en una siguiente iteración de su desarrollo. En estos casos, es destacable el hecho observado que incluso cuando los alumnos se enfrentaron con una incertidumbre, cada uno de estos alumnos fue capaz de continuar el proceso de solución del problema hasta el paso siguiente.

El alumno 12, el único que encontró complicadas dos acciones de la BO3, completó 11 de las acciones de la BO3 pero no completó ninguna parte del problema. Desde la perspectiva del desarrollo de la BO3, es también importante destacar que el alumno 9 completó todas las acciones de la Base de Orientación, pero no logró resolver ninguna de las dos partes. Lo que, en vistas de entender mejor lo que sucedió, podría haber sido conveniente un análisis particular y más profundo para determinar la naturaleza de las dificultades encontradas para poder completar correctamente la tarea.

Como es común de las intervenciones en el aula, y de acuerdo con el hecho ya mencionado que el impacto de los andamios es una tarea complicada de evaluar (van de Pol et al., 2010), sentimos que no es sencillo obtener pruebas consistentes de la eficacia y solvencia del uso de una base de orientación en el conjunto de los alumnos que la integran.

Interesados por analizar la eficacia que pueda presentar el uso de una base de orientación (como la BO3) como auto-andamiaje de la resolución de problemas, pensamos que es interesante comparar el número de acciones de la BO3 que los alumnos dicen haberse involucrado con el número de cuestiones resueltas de manera satisfactoria, como se muestra en la Tabla 6.2.

		C: Número de preguntas con respuesta satisfactoria		
		0	1	2
A: Número de acciones de la BO3 en qué se involucraron	0–6	5	3	0
	7–12	3	2	9

Tabla 6.2. Relación entre el número de acciones de la BO3 en qué se involucraron y las preguntas que respondieron correctamente

Las cantidades de Tabla 6.2 son demasiado pequeñas para justificar el cálculo de una Chi cuadrado aunque, en caso de aplicarlo, éste da los valores de $\chi^2=8,71$, $p=0,0128$). Sin embargo, sí que, por el volumen de la muestra que tenemos, tienen sentido aplicar el test exacto Fisher. Al aplicar el test exacto de Fisher sobre estos mismos datos, obtenemos un p-valor de $p=0.008$, lo que indica que tales cifras no sólo son extremadamente improbables debido al azar, sino que los alumnos que no se implicaron en la BO3 tendieron a no completar el problema. Más concretamente, los valores de la Tabla 6.2 muestran que los alumnos que completaron seis o menos actividades de la BO3 no completaron satisfactoriamente las dos preguntas del problema y que, los alumnos que completaron ambas cuestiones siempre completaron siete o más actividades de la BO3. De hecho, observamos que los alumnos que completaron las dos cuestiones del problema siempre se habían involucrado con las 12 actividades de la BO3.

Si nos miramos los datos a nivel de las cuatro fases o estados generales en qué se basa la base de orientación BO3, y no como acciones individuales, los datos ofrecen más información interesante. En este sentido, los datos de la Tabla 6.1 muestran que a medida que se va hacia abajo de la BO3, el número de alumnos que completan cada dimensión se hace más pequeño. Como es de esperar, por ser el primero de las cuatro dimensiones, la mayoría de alumnos se vieron involucrados con la primera, *Entiendo el problema*. Así, detectamos como 21 alumnos iniciaron sus tres acciones vinculadas aunque luego, sólo 19 (90.5%) de ellos llegaron a completar las tres. Con respecto al segundo, 17 comenzaron con la primera acción, de los cuales 12 (70,6%) completaron los tres. El tercer estado, "*Aplico mi plan de acción*", fue iniciado por 13 alumnos (uno más que completó la segunda dimensión), de los cuales 9 (69%) lo completaron. Por último, de los 12 alumnos que iniciaron el estado final, "*Reviso mi tarea*", 11 lo completaron (91,7%).

Estos datos nos informan de dos hechos que consideramos relevantes en cuanto a la implicación de los alumnos en cada uno de los estados de resolución establecidos en la BO3. El primero es que los alumnos que comienzan a trabajar en un estado, se puede esperar que lo completen. El segundo es que una vez que se alcanza el estado final, parece ser garantía para que los alumnos puedan completar el problema. En otras palabras, un examen a fondo de los cuatro estados puede también informar de los futuros desarrollos de la BO3. Hemos aquí observado como el primer y último estado, con altas tasas de finalización, parecen menos problemáticas, en comparación con la media de los dos estados intermedios.

Al analizar los datos cualitativamente, damos cuenta que los intentos de resolución de los alumnos muestran que los alumnos consideraron la base de orientación BO3 como algo importante a tener en cuenta. Las evidencias enseñan que los alumnos pudieron conectar las acciones de la BO3 con su propia actividad de resolución y no confirmaron sus acciones hasta después de haberlas completado.

En este sentido, la Figura 6.1 muestra la solución del alumno 1 y su registro de la BO3. El dibujo del cuadrado realizado por el alumno confirma que éste había leído el problema y había entendido lo que la primera pregunta requería. Las operaciones aritméticas realizadas y su nota, "*a cada lado hay 6 cuadrados*", indican no sólo que había identificado y comprendido los datos requeridos, sino que también había jugado con ellos, lo que le permitió preparar una estrategia para la primera parte del problema. En resumen, observamos que la resolución del alumno se corresponde con las acciones de la BO3 que marcó como completadas.

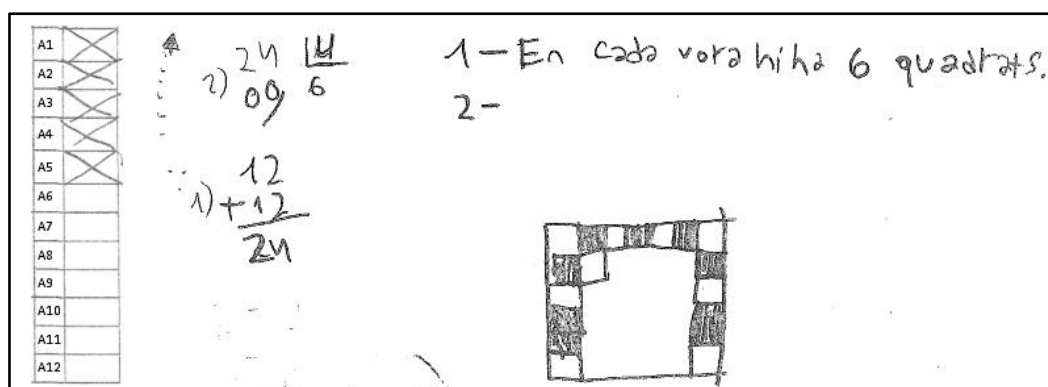


Figura 6.1. Fragmento de la producción Pb5.a3_EP6A01 y el correspondiente registro de BO3. [1 – En cada borde hay 6 cuadros]

Incluso cuando no se hubo completado ninguna acción de la base de orientación BO3, se observamos cómo ésta pudo haber influido en los intentos de resolución. De acuerdo con el fragmento de la Figura 6.2 observamos cómo el único alumno que no pudo completar ninguna acción de la BO3, el alumno 21, trató de abordar el primer estado de la BO3.

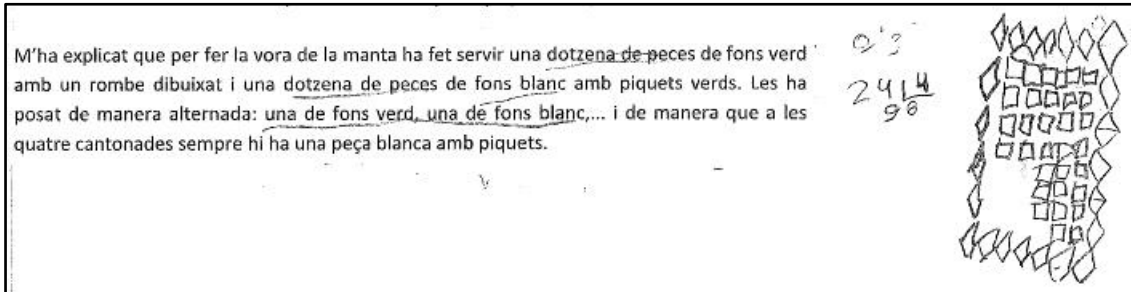


Figura 6.2. Fragmento de la producción Pb5.a2_EP6A21, correspondiente al alumno que no confirmó ninguna acción de la BO3

Además, como ya se ha reflejado en la Tabla 6.1, observamos que los alumnos intentaron comunicarse con la BO3, particularmente cuando estaban inseguros sobre las intenciones de las acciones explicitadas. En este sentido La Figura 6.3 muestra, con el subrayado de la palabra, en catalán, *quefer* (correspondiente a *quehacer*, en español), la incertidumbre en cuanto a su significado y, con el símbolo de interrogación, esencialmente una invitación para que alguien lo pudiera explicar.

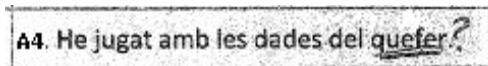


Figura 6.3. Las dudas del alumno EP6A10 en relación al de la cuarta acción de la BO3 [A4. He jugado con los datos del *quehacer*?]

En la misma línea, otros alumnos anotaron en el registro de su BO3 de manera indicativa de duda o simplemente un deseo de comentar sobre su respuesta, tanto cognitiva como afectivamente. La Figura 6.4 muestra los comentarios que dos alumnos incluyeron en el registro de su BO3 junto a las marcas con las que indicaron que habían completado las diversas acciones a las que se refieren. Como se puede leer en español en el pie de la imagen, los tres comentarios son similares en su intención, al expresar el gran esfuerzo que les ha supuesto llevarla a cabo, pero que sin embargo parece que fueron capaces de lidiar en tanto que marcaron al menos la acción siguiente.

	08	12
A1.	✓	✓
A2.	✓	✓
A3.	Si pero me ha costat	Si pero me ha costat.
A4.	✓	✓
A5.		✓
A6.		Regular per que me ha costat
A7.		✓

Figura 6.4. Parte de los registros de la BO3 de los alumnos EP6A08 y EP6A12 que enseñan sus dudas en cuanto a las acciones A3, y A3 y A6, respectivamente. [(A3,08). Sí, pero me ha costado.;(A3,12). Sí, pero me ha costado.; (D6,A12). Regular, porque me ha costado]

6.1.1 Discusión

Hemos aquí analizado la implementación y el uso por parte de alumnos de 6º de Primaria de una base de orientación diseñada para el auto-andamiaje en la resolución de problemas, cuyo papel se centra, por tanto, en asistir la transición de los estudiantes hasta ser capaces de asistir por sí mismos sus acciones matemáticas de resolución de problemas. En base a las fuentes bibliográficas consultadas, las cuatro dimensiones en qué hemos estructurado la base de orientación BO3, y las respectivas acciones en qué las hemos desglosado, sugieren que el uso de la base de orientación tiene un papel que desempeñar en el sentido expuesto. En primer lugar, observamos como las cuatro dimensiones y la manera en qué se operacionalizan a través de las tres acciones vinculadas, hacen reales para los alumnos las acciones que guían la resolución de problemas (Holton y Clarke, 2006).

Aceptando la base de orientación como un instrumento que promueve el andamiaje educativo, las evidencias observadas en nuestra experiencia apoyan hallazgos anteriores en cuanto a que el andamiaje educativo puede tener un impacto beneficioso en la cognición, la metacognición y el afecto (van de Pol et al., 2010).

En cuanto a los tres componentes que caracterizan el andamiaje educativo, ser contingente, promover su atenuación y fomentar la transferencia de responsabilidad (van de Pol et al., 2010), los resultados son variables. En cuanto a la contingencia, el hecho que los estudiantes fueron capaces de conectar las acciones de BO3 con su propia actividad y aquellos que se encontraron con alguna complicación por lo general persistieron hasta al menos el siguiente paso, nos permiten argumentar que fue tratado positivamente. Por otro lado, las evidencias nos enseñan que los alumnos tomaron el BO3 en serio, lo que indica un apoyo inicial para la atenuación y la transferencia de responsabilidad. Sin embargo, debió a la naturaleza de estas características, pensamos que un estudio longitudinal nos podría informar mejor sobre ellas.

La estructura de la BO3 en las distintas dimensiones y las formas en que los alumnos han considerado las acciones vinculadas apuntan hacia un ciclo productivo de refinamiento de la misma base de orientación BO3. A pesar de su aparente linealidad, basada en los comportamientos de un resolutor experto de problemas, el compromiso de los alumnos con la dimensión final de la base de orientación BO3 confirma no sólo la naturaleza cíclica de la resolución de problemas sino más especialmente en el papel de la BO3 en ayudar a los alumnos a percatarse de ello.

Finalmente, comentar que la BO3, diseñada como instrumento de retroalimentación contingente, que proporciona pequeñas pistas, centrada en facilitar el desvanecimiento y la transferencia de responsabilidades (van de Pol et al., 2010), comprende breves declaraciones escritas en primera persona. Nuestra opinión es que esto ayuda a los alumnos a entender los requisitos que son necesarios para la resolución de problemas como ayudarles en anticipar posibles acciones.

El trabajo aquí explicado corresponde a una primera iteración del uso de la base de orientación BO3. Posteriormente a este problema, una parte de estos alumnos (la mitad: 11) tuvieron la oportunidad de resolver dos problemas más, el Pb1.4 y Pb7.1, usando la misma base de orientación BO3. Al finalizar dichos trabajos, como se detalla en el apartado 3 del Análisis I (capítulo 3), el maestro comentó que los alumnos se veían cada vez más familiarizados y

seguros con el uso de la BO3. Siendo el objetivo principal medir el impacto de la BO3 como auto-andamiaje, estas afirmaciones nos dan más razones para pensar que el siguiente paso para obtener información apropiada sobre ello sería realizar un análisis longitudinal de las resoluciones de los alumnos usando la BO3.

6.2 El papel clave de distintas formas de comprobación como parte de un mecanismo de auto-andamiaje

En base a los resultados obtenidos en relación al primer análisis de uso de la BO3, que se describen en el apartado que precede el presente, surgió la necesidad de llevar a cabo un análisis longitudinal de las respuestas de los alumnos a distintos problemas utilizando la base de orientación BO3. De acuerdo con ello, nos dispusimos a comparar y contrastar las respuestas de alumnos a tres de los problemas propuestos para la Implementación Tercera (I3) de acuerdo con el uso que hicieron de la base de orientación BO3, con el fin de abordar las inferencias procedentes del uso de la BO3 por parte de los alumnos con respecto a su desarrollo matemático como resolutores de problemas.

En tanto que sólo la mitad del grupo de 6º de Primaria EP6A considerado en el análisis anterior pudieron continuar con la resolución de otros de los problemas propuestos usando la base de orientación BO3, para este análisis consideraremos las producciones de los alumnos del grupo de 1º de la ESO PI1D, principalmente por dos motivos. El primero, por la participación del conjunto de los alumnos de la clase y, segundo, por la regularidad temporal que se mantuvo para trabajar en cada uno de los problemas. Al mismo tiempo, resulta igualmente interesante en cuanto al curso en qué se encuentran los alumnos, pues como ya se ha mencionado anteriormente, en este primer curso de secundaria es cuando se supone que han adquirido un nivel mínimo de formación en resolución de problemas. En este caso, al referirnos únicamente a un grupo de alumnos de educación secundaria, siendo fieles al perfil del docente implicado, nos referiremos a él como profesor que, de acuerdo con el apartado 2 de la Metodología (capítulo 2) aún siendo especialista, su especialidad es la física y no puramente las matemáticas.

El trabajo que desarrollaron los 28 alumnos del grupo PI1D se desarrolló a lo largo del período de marzo a junio del curso escolar 2015-2016. Los alumnos resolvieron en tres sesiones distintas los tres problemas matemáticos Pb1.a4, Pb7 y Pb0.a2 (el profesor no tuvo tiempo de incluir el cuarto que se había propuesto), en este orden, usando la base de orientación BO3. Como ya se ha comentado en apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), el profesor decidió el orden en qué fueran trabajados, y entre sesión y sesión los alumnos no trabajaron problemas de este tipo ni usaron ninguna base de orientación.

Siendo el papel de la BO3 apoyar la transición de los estudiantes para que puedan andamiar sus propias acciones matemáticas de resolución de problemas, nos preguntamos por qué se puede deducir del uso que hacen los estudiantes del OB con respecto a su desarrollo como resolutores de problemas matemáticos. Para ello, a continuación, comparamos y contrastamos las respuestas de los estudiantes a los tres problemas referenciados y el uso que hicieron de la base de orientación BO3.

En la Tabla 6.3 se muestra una selección de los datos correspondientes a los alumnos implicados al utilizar la Base de Orientación BO3 al trabajar en cada uno de los problemas.

En cuanto al uso de la base de orientación BO3, recopilamos solamente las marcas de los alumnos a dos de las doce acciones vinculadas puesto que estas dos son las que, como veremos luego, son las que intervienen de manera directa en el análisis que pretendemos llevar a cabo. Nos referimos concretamente las acciones A6 y A11 de la base de orientación BO3 utilizada, ambas relacionadas con la comprobación de distintos aspectos de la resolución que, como veremos más adelante, parecen importantes para determinar un éxito posterior. Con respecto a las marcas que aparecen ligadas a estas dos acciones, A6 y A11, el punto central • se corresponde con las marcas que los alumnos hicieron para indicar que habían considerado dicha acción.

En la fila #A de la Tabla 6.3 se muestra el número total de acciones de la BO3 que los alumnos marcaron como aplicadas y en la fila #C se muestra el número de respuestas correctas al problema considerado. En tanto que cada problema invita a contestar dos preguntas, como en el caso analizado en apartado anterior, se usa un 2 cuando el alumno dio alguna respuesta correcta a ambas preguntas, un 1 si sólo contestó correctamente una de las preguntas y un 0 cuando ninguna de las dos preguntas fue respondida de manera asequible. Así, por ejemplo, se puede observar que el alumno 4 resolvió correctamente las dos partes del problema 3 y que aplicó las doce acciones de la BO3, incluyendo las dos acciones de la BO3 dedicadas a la comprobación, la A6 y la A11. Sin embargo, el mismo alumno no pudo resolver ninguna parte del problema P1.4, y aplicó sólo 4 acciones de la BO3, entre las cuales no fueron consideradas ninguna de las acciones de comprobación A6 o A11.

		Alumnos																															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28				
Pb1.4.a1																																	
A6		•	•	•		•	•	•	•			•	•	•		•	•				•	•			•			•	•				
A11		•	•	•			•	•	•	•			•	•			•	•			•	•	•	•		•	•		•				
#A		9	10	9	4	5	8	7	8	9		8	10	8		8	11			8	9	9	10	3	5	11	6	4	11	8			
#C		1	0	0	0	0	0	2	0	1		1	2	2		0	2			0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0			
Pb7.a1																																	
A6		•	•		•		•	•						•		•			•			•			•			•					
A11		•	•		•		•	•	•	•			•	•			•	•			•			•			•		•				
#A		8	9	4	10	3	7	8	6	5	8	0	9	10		3	10	9	6	11			10	4	7	11	4	2	11	0			
#C		0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1		0	2	0	0	2			2	0	2	2	0	0	0	0			
Pb0.a2																																	
A6		•	•	•	•											•	•																
A11		•	•	•	•											•	•	•		•	•	•	•		•				•				
#A		8	12	7	12						9		4	7	5					8	9	12	6	6	9	10	10	0	6	0	3		7
#C		0	0	0	2						2		0	1	0					0	0	1	0	1	0	1	2	0	0	0	1		0

Tabla 6.3. Implicación de los alumnos en resolver los problemas P1.4, P7.1 y P0.2 usando la BO3

Un recuento de la fila #C de los distintos problemas la Tabla 6.3 da 13 resoluciones correctas, 15 resoluciones parcialmente correctas y 44 de fallidas. Podemos observar que ningún alumno completó con éxito los tres problemas propuestos y que las 28 resoluciones satisfactorias, total o parcialmente, identificadas se distribuyen en 17 alumnos. Notamos como todos los alumnos que intentaron resolver los tres problemas, excepto dos de ellos, fracasaron en resolver alguno de ellos. Por otro lado, al margen de sólo dos excepciones (los alumnos 4 y 7),

no se detecta que del primer al tercer problema algún alumno se involucrara en un mayor número de acciones de la base de orientación BO3. De hecho, la mayoría de los alumnos muestran un uso bastante variable de la BO3. Así mismos, observamos que cuando los alumnos resolvieron las dos partes del problema con éxito, se involucraron con siete o más acciones de la base de orientación BO3.

Como se ha mencionado el presentar la Tabla 6.3 un primer análisis informal de los datos nos hizo entrever que las dos acciones de la BO3 ligadas con la comprobación, A6 y A11, parecían ser indicadores de resolución de problemas con éxito. Para confirmar esta idea, relacionamos el número de respuestas satisfactorias, totales y parciales, y no satisfactorias, de los alumnos de acuerdo con el número de acciones marcadas de la base de orientación BO3 para los tres problemas, tanto de manera individual como sumativa. De ello surge la Tabla 6.4.

		Pb1.4.a1			Pb7.a1			Pb0.a2			Los 3 problemas		
		Número de acciones A6 y A11 marcadas											
		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Número de soluciones correctes	0	3	4	5	9	4	6	5	4	4	17	12	15
	1	0	3	6	0	0	1	2	1	2	2	4	9
	2	0	1	3	1	1	4	0	0	3	1	2	10
Probabilidad Exacta de Fisher											p = 0.045		

Tabla 6.4. Relación entre la consideración de las acciones de comprobación (A6 y A11) de la BO3 y el éxito de resolución de los alumnos

La probabilidad del Test Exacto de Fisher sobre los datos sumativos relativos a los 3 problemas de la Tabla 6.4, da un valor de $p=0.045$, lo que sugiere que es improbable que la distribución de frecuencias se deba al azar. De hecho, se puede ver con toda claridad que los alumnos que completaron las acciones de comprobación (A6 y A11) de la BO3 fueron más propensos a resolver los problemas que los alumnos que no lo hicieron. Dicho esto, no podemos perder de vista las 15 ocasiones en las que los alumnos confirmaron la aplicación de dichas acciones pero fallaron completamente en encontrar solución al problema.

Como se muestra en la Tabla 6.3, la mayoría de los intentos de resolución a los tres problemas, 44 en total, terminaron con respuestas no correctas, lo que nos conduce a indagar con más detalle el por qué de ello. De ahí que en los análisis parciales que siguen a continuación, nos fijemos solamente en estos 44 casos.

En la Tabla 6.5 se comparan el número de acciones de la BO3 en las que los alumnos marcaron en haberse involucrado (el total de las marcadas en sus registro de la base de orientación BO3) e, independientemente que las respuestas fueran incorrectas, el hecho de si los alumnos habían finalizado su intento de resolución, es decir si habían llegado a responder ambas preguntas del problema (lo que en la Tabla 6.5 marcamos con F), o no (que en la Tabla 6.5 marcamos como N).

		Pb1.4.a1	Pb7.a1	Pb0.a2	Los 3 problemas				
		F (Intento Finalizado) / N (Intento no finalizado)							
		F	N	F	N	F	N		
Número de OB- acciones marcadas	0–6	4	0	6	5	2	4	12	9
	7–12	8	0	8	0	6	1	22	1
Probabilidad Exacta de Fisher								p = 0.003	

Tabla 6.5. Relación entre las acciones de la BO3 en qué se involucraron y la finalización/completitud de los alumnos que no obtuvieron respuestas correctas

En cuanto a los intentos de resoluciones no finalizados, los datos numéricos de la Tabla 6.5 dicen que los alumnos que completaron seis o un número menor de acciones de la BO3 fue nueve veces más probable que los que completaron siete o más acciones de la BO3. Por otro lado, nos informa de que los alumnos que completaron siete o más acciones de la BO3 casi siempre llegaron a finalizar el problema, dando así respuesta a las dos preguntas formuladas. En resumen, aun cuando sus resoluciones no son correctas, vemos que los alumnos que completaron siete o más acciones de la BO3 tuvieron considerablemente más probabilidades de completar un intento de solución que los alumnos que no lo hicieron.

Siguiendo recopilando información sobre los 44 casos de resoluciones fallidas, en la Tabla 6.6 se compara el número de acciones de la base de orientación BO3 que los alumnos marcaron como aplicadas y el grado en qué se articularon las acciones de comprobación de la base de orientación BO3, A6 y A11.

		Pb1.4.a1	Pb7.a1	Pb0.a2	Los 3 problemas								
		Número de acciones A6 y A11 marcadas											
		0	1	2	0	1	2	0	1	2			
Número de acciones de la BO marcadas	0–6	3	1	0	9	2	0	5	1	0	17	4	0
	7–12	0	3	5	0	2	6	0	3	4	0	8	15
Probabilidad Exacta de Fisher										p < 10⁻⁹			

Tabla 6.6. Relación entre las acciones de la BO3 en qué se involucraron y su compromiso con las acciones de comprobación A6 y a11 de la BO3 de los alumnos que no obtuvieron respuestas correctas

En este caso, si bien los resultados a nivel individual de cada uno de los problemas apunta una relación bastante fuerte entre estas ellas, a nivel sumativo, las cifras de la Tabla 6.6 indican con toda claridad, un nivel de probabilidad en el que la presencia del azar se presenta como una imposibilidad, se desprende que incluso cuando sus soluciones son incorrectas, los alumnos que completaron las acciones de comprobación de la BO3, A6 y A11, fueron altamente propensos a completar la mayoría de las acciones del BO3. En cambio, los alumnos que no completaron estas dos acciones de comprobación, casi nunca completaron más de seis de las acciones de la base de orientación BO3. En otras palabras, observamos cómo las dos acciones de comprobación de la BO3, "A6. He comprobado que la estrategia que se ajuste a los datos" y "A11. Cuando he terminado he comprobado mi respuesta" parecen fuertes indicadores de un mayor compromiso de los alumnos con la base de orientación, incluso para los alumnos que no obtuvieron respuestas correctas a un problema.

Pensamos que es importante analizar la segunda fila de la Tabla 6.6, correspondiente a aquellos alumnos que no pudieron proporcionar resoluciones correctas a los problemas propuestos, pero completaron siete o más acciones de la base de orientación BO3. En este sentido, un estudio cualitativo de sus resoluciones revela que la aplicación de las acciones, A6 y A11 de la BO3 que hicieron en estos casos fue, en general, poco profunda.

Con lo que a ello concierne, los ejemplos de la Figura 6.5y la Figura 6.6 muestran las respuestas del alumno 3 a las dos partes del problema Pb1.4.a1. Observamos que a pesar que tanto las multiplicaciones como las razones que para ellas da el alumno son correctas, el alumno no ha considerado todas las condiciones del problema, pues llevan a determinar una multiplicación que involucra a dos números de dos dígitos. Nuestro argumento es que si el alumno hubiera llevado a cabo las acciones A6 y A11 de la base de orientación BO3 más profundamente, habría dado cuenta de que su resolución no se adecuaba a las condiciones del problema y, por tanto, de su mal o incompleta interpretación de las mismas.

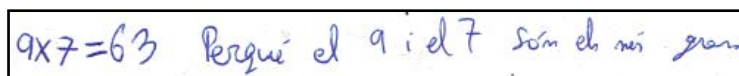


Figura 6.5. Parte 1 de la resolución Pb1.4.a1_PI1D03. [$9 \times 7 = 63$, 9 y 7 Porque son los más grandes.]

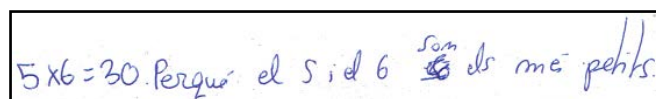


Figura 6.6. Parte 2 de la resolución Pb1.4.a1_PI1D03. [$5 \times 6 = 30$, 5 y 6 Porque son los más pequeños.]

6.2.1 Discusión

Con este segundo análisis hemos descrito las consecuencias observadas del uso de la base de orientación BO3, diseñada para el auto-andamiaje en la resolución de problemas, para resolver tres problemas matemáticos por alumnos de 1er curso de la ESO. El objetivo inicial pretendía centrarse en el análisis de los cambios, a nivel longitudinal, del comportamiento de los alumnos, tanto en términos de su competencia en la resolución de los tres problemas como del uso de la base de orientación, en este caso, la BO3. Sin embargo, los resultados obtenidos no han sido fáciles de interpretar.

Las evidencias muestran que la mayoría de los alumnos utilizó la BO3 de manera variada en cada uno de los problemas. Sólo dos alumnos muestran un uso de la BO3 cada vez mayor. El resto de alumnos, aparte del 21, quien en los tres casos siempre marcó 10 acciones de la BO3, parecen haber usado la BO3 al azar, aludiendo al menos cuatro posibilidades relacionadas con la posible influencia de prácticas de resolución de problemas desarrolladas con anterioridad (Schoenfeld, 1992). En primer lugar, al hecho que los distintos alumnos puedan responder de manera diferente a los distintos tipos de cuestiones. En segundo lugar, que los problemas planteados se encontrasen muy al borde de la competencia actual de los alumnos implicados. En tercer lugar, y de manera relacionada, que la mayoría de los alumnos permanecieran como resolutores de problemas poco sofisticados a lo largo de la intervención. Esta opción liga con la investigación de Sriraman (2003) en la que se observa que los alumnos de alto rendimiento pueden necesitar hasta dos semanas para resolver un problema hasta convertirse en resolutores de problemas competentes, independientes y seguros de sí mismos. Finalmente, y en cuarto lugar, de acuerdo con que a través de las primeras actividades de aprendizaje no se puede esperar que los alumnos puedan captar las intenciones del enseñante al proponerles

unas determinadas metas (Jorba y Sanmarti, 2004), que tres problemas sean demasiado pocos para que los alumnos internalicen el uso de una base de orientación como medio de andamiaje educativo de su actividad en resolución de problemas. En consecuencia, dichas cuestiones deberán ser tomadas en cuenta en futuros trabajos en esta dirección.

El resto del análisis que finalmente hemos llevado a cabo se desvía de nuestro objetivo original, al vislumbrar que dos de las acciones de la base de orientación BO3, precisamente las relacionadas con la comprobación, A6. *He comprobado que la estrategia que se ajusta a los datos* y A11. *Cuando he terminado he comprobado mi respuesta* parecían tener un impacto mayor que las otras acciones de la base de orientación. En este sentido, centrándonos en los alumnos que no obtuvieron resoluciones correctas, observamos como la importancia de comprobar surge como un indicador del número de acciones de la base de orientación abordadas y la probabilidad de que los alumnos completen el problema, aunque de forma incorrecta. Ello confirma investigaciones anteriores sobre la importancia de invertir tiempo en leer e interpretar una cuestión antes de planear una estrategia de resolución (de Corte, et al., 2000a). Sin embargo, los argumentos escritos de estos alumnos, como se ejemplifica en los comentarios de la Figura 6.5 y Figura 6.6 correspondientes al alumno 3, indican la existencia de obstáculos en interpretar correctamente las condiciones expuestas en los problemas. Este hecho consueña con un estudio holandés, también relacionado con alumnos de alto rendimiento, en el que se dan cuenta de que aun habiendo revisado sus respuestas de acuerdo con las tareas planteadas, los alumnos seguían interpretándolas de manera inadecuada (Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou, 2009). Por ello, pensamos que futuros trabajos en esta dirección deberán centrarse en formas de alentar a los alumnos para comprobar con mayor eficacia tanto su interpretación de las expectativas de trabajo como sus resultados.

6.3 Síntesis

Con estos dos últimos trabajos hemos descrito el desarrollo, implementación y primeros intentos de medir la eficacia de una base de orientación, en este caso la BO3 (ver BO3 en Anexo 3) como auto-andamiaje de la resolución de problemas en alumnos de 6º de Educación Primaria y 1º de la ESO. Con el objetivo de poder responder a la pregunta de si, y en qué medida, la base de orientación apoya el comportamiento de auto-andamiaje en la resolución de problemas matemáticos, nos hemos apoyado, además de en las evidencias de su uso, en el Test Exacto de Fisher el cual nos ha proporcionado información relevante sobre el uso de la BO3. El conjunto de la BO3 con el Test permite una visión más clara de las necesidades de los alumnos.

El impacto de cualquier tipo de andamiaje educativo es complicado de evaluar (van de Pol et al., 2010) y, como hemos visto, su consideración y eficacia puede depender de la naturaleza de las tareas que se presenten a los alumnos. Sin embargo, aunque no podemos dar una respuesta totalmente afirmativa, nuestra sensación es que los análisis realizados nos permiten dar una tentativa de respuesta afirmativa en cuanto a que el uso de una base de orientación se puede considerar como un sistema de auto-andamiaje en la resolución de problemas en las edades involucradas, entre otras cosas porque los datos son consistentes en que una condición necesaria aunque no suficiente para una solución totalmente satisfactoria es la realización de siete o más acciones de base de orientación. Más significativamente, los datos obtenidos muestran que las posibilidades de finalizar una tarea correctamente, tanto para los alumnos

exitosos como los que no, se mejoran si los alumnos contemplan las dos acciones de comprobación de la Base de Orientación utilizada (BO3). Sin embargo, como se ha evidenciado anteriormente, se detecta una insuficiencia en los comportamientos de comprobación en distintos alumnos, por lo que este aspecto no podrá descuidarse en posibles futuros trabajos.

Cabe mencionar, también que dos de los tres problemas trabajados, Pb7.a1 y Pb0.a2, están formulados en un contexto de la vida cotidiana. A diferencia de lo que encontramos en otros estudios (Coltman et al., 2002), observamos que las resoluciones de los alumnos a estos dos problemas no fueron visiblemente diferentes a las resoluciones que desarrollaron para el problema P1.4, que no está contextualizado en este sentido. Entendemos que este aspecto, junto con el objetivo de introducir el uso de la base de orientación en alumnos de edades más tempranas como un instrumento para la resolución de problemas no esporádico serían futuras líneas de trabajo del proyecto aquí iniciado.

Finalmente, de acuerdo con que una base de orientación debe de ser necesariamente adaptativa (Sanmarti, 2010), concluimos que en un próximo ciclo de implementación de la BO3 en alumnos de las edades implicadas en este trabajo, sería necesario afinar mejor la descripción de tres de sus acciones: “A4. *He jugado con los datos del quehacer*” con el objetivo que fueran mejor interpretadas. Así, a falta de una revisión general de la misma, apuntamos una posible redefinición de la acción 4 como “*He jugado con los datos necesarios*” y “A11. *(Cuando he terminado,) he comprobado que mis respuestas se ajustan a las condiciones del problema*”.

7. CONCLUSIONES I: Conclusiones a los Objetivos

Desde los inicios de los años 80, la resolución de problemas se percibe como uno de los núcleos de la educación matemática. A lo largo de estos más de 30 años se ha trabajado de manera destacada para caracterizar la resolución de problemas al mismo tiempo que estudiar cómo gestionar los procesos educativos que pretenden mejorar las destrezas de resolución de problemas matemáticos en los alumnos de todas las edades. Ello ha supuesto la confluencia de distintas visiones y definiciones sobre problema matemático que, a lo largo de todos estos años, ha influenciado la gestión educativa de la resolución de problemas matemáticos en todas sus etapas.

Atendiendo las características de una educación basada en competencias, en la que se persigue que los alumnos tomen consciencia del proceso de enseñanza para seguir aprendiendo de manera autónoma, es vital el papel regulador y transversal que toma la evaluación en cualquiera de los procesos involucrados. Al analizar el papel de la resolución de problemas en este marco educativo, se percibe que la forma tradicional de evaluar de la resolución de problemas, basada únicamente en una visión final y calificadora de la misma, resulta insuficiente por centrarse solamente en el aprendizaje pero sin realmente poder revelar lo que los alumnos aprenden o guiarlos correctamente para que aprendan de su aprendizaje. Con ello surge la necesidad de incorporar instrumentos que puedan garantizar, más allá de una evaluación calificadora, una evaluación reguladora de todo el proceso educativo sobre la resolución de problemas, en particular del aprendizaje por parte de los alumnos como de la gestión de su enseñanza.

De acuerdo con estas dos cuestiones, y bajo la concepción competencial actual de la educación, presentamos en este capítulo las conclusiones relativas a la resolución de problemas en dicho marco educativo y el desarrollo e incorporación de un instrumento de evaluación reguladora para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas en distintos grupos de alumnos de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Secundaria Obligatoria a la que, de acuerdo con Sanmartí (2010) llamamos base de orientación.

Exponemos a continuación las conclusiones relativas a los tres objetivos planteados para la investigación:

- O1. *Caracterizar la competencia en resolución de problemas en la enseñanza obligatoria y elaborar una pauta de indicadores de la misma.*
- O2. *Elaborar un instrumento con finalidad reguladora de la competencia de resolución de problemas matemáticos de los alumnos y analizar el proceso de su construcción.*
- O3. *Aplicar el instrumento con finalidad reguladora para la competencia de resolución de problemas matemáticos desarrollado y analizar los efectos de su utilización.*

7.1 Conclusiones relativas al Primer Objetivo

O1. *Caracterizar la competencia en resolución de problemas en la enseñanza obligatoria y elaborar una pauta de indicadores de la misma.*

7.1.1 Qué entender por problema matemático

En base a las referencias bibliográficas consultadas a lo largo del estudio y de acuerdo a la experiencia desarrollada en cuatro aulas de 6º de Educación Primaria y cuatro aulas de 1º de la ESO de distintos centros educativos de Barcelona, entendemos que, por problema matemático podemos referirnos a toda situación desconocida en la que se plantean algunas cuestiones para las que, quien se decide a encontrar alguna respuesta a ellas, no dispone de ninguna respuesta inmediata ni proceso matemático directo o rutinario para encontrarla. Al contrario, requiere de procesos de indagación que le implican conectar sus conocimientos matemáticos para afrontar los obstáculos que se presentan a lo largo de dicho proceso. Con ello, a su vez, se fomenta la consolidación y formación de conocimientos y otras cuestiones.

Entendemos aquí por conectar el hecho de usar y encajar los saberes que uno dispone, que, de acuerdo con el Marco Teórico (capítulo 1), hacen referencia tanto a conocimientos conceptuales de las matemáticas, heurísticas o recursos materiales o técnicos que permiten trabajar aspectos matemáticos, como podría ser el uso de un transportador de ángulos o una calculadora. Además de estos conocimientos, pueden verse involucrados otros de naturaleza no matemática, generalmente procedentes del contexto en qué se presenta la situación. Tanto los contextos como la información que se proporciona pueden ser de distinta naturaleza y dados a través de modos distintos.

La persona que se enfrenta a dicha situación, debe de sentirse implicada y de algún modo atraída en el proceso de encontrar alguna respuesta a la situación planteada, adquiriendo una participación activa que le conlleve reflexionar, actuar de manera consecuente y valorar la tarea que desarrolla por sí mismo. Ello ayudará a querer superar los obstáculos que presenten a lo largo del proceso. En este sentido, percibimos que uno se sentirá involucrado en esta tarea cuando se perciba a sí mismo como un “investigador” que debe de hallar alguna conclusión a las cuestiones planteadas en la situación expuesta al tanto que le pueda dar alguna satisfacción, ya sea adquiriendo nuevos conocimientos como dando utilidad a cualquiera de ellos.

Como cualquier trabajo de investigación es necesario dejar constancia del proceso desarrollado, de manera ordenada y precisa, destacando aquellos factores más relevantes, para el propio entendimiento, el de otros y para ser considerado en otras situaciones. Surge así la necesidad de que el resolutor, no sólo debe de resolver una situación, sino darla a conocer al mismo tiempo que destacar las producciones o descubrimientos intermedias que dan pie a las conclusiones finales. De la misma manera, es importante dar cuenta de los obstáculos con los que se ha encontrado y reflejar cómo han sido reconducidos.

De ello se desprende la distinción entre problema propiamente dicho, cuando, aún teniendo los conocimientos necesarios, se desconoce cómo resolver la tarea, y un ejercicio, cuando la tarea puede resolverse de manera automática o rutinaria. Por otro lado, también se desprende

que la noción de problema matemático no es absoluta, sino relativa a las habilidades matemáticas de la persona que se enfrenta a la situación expuesta.

7.1.2 Qué entender por resolver un problema matemático

De acuerdo con el Análisis II (capítulo 4) y en base a lo anterior, entendemos que resolver un problema matemático es un proceso propio de quien lo resuelve, creativo y no lineal de indagación matemática que requiere de la activación y la relación de distintos tipos de conocimientos matemáticos (básicos, heurísticos y sobre recursos) para dar respuesta a una cuestión planteada contribuyendo, a su vez, al fomento de otros conocimientos y cuestiones. Este proceso conlleva la activación de distintas acciones que, de acuerdo con su finalidad, permite identificar ciertas etapas por las que cualquier resolutor eficiente pasa. Si bien estas etapas son identificables por las acciones que los resolutores desarrollan y son perceptibles cuando emergen, conviven interrelacionándose hasta el final del proceso, mostrando con ello la naturaleza no lineal y más bien cíclica que caracteriza dicho proceso.

De acuerdo con el Análisis II (capítulo 4), identificamos tres etapas mínimas y básicas en el proceso de resolver cualquier problema matemático: Comprender el problema, Tener un plan de acción y Revisar lo que uno ha hecho; en los que, por consiguiente, cualquier resolutor se ve involucrado a lo largo de dicho proceso. En este sentido, se puede establecer un paralelismo entre el proceso de resolver un problema y el discurso de un texto narrativo o con la estructura de las sesiones matemáticas en 3 actos sugeridas por Meyer (2013), caracterizados por tener una Introducción, que en nuestro caso identificaríamos con Comprender la situación conflictiva; un Desarrollo, que equivaldría a Escoger un camino para desenredar la situación y, finalmente; el Final o la Discusión, que se corresponde con Hacer una revisión del desarrollo de acuerdo con las condiciones expuestas. Como no tiene sentido revisar una tarea sin haberla hecho, ni resolver una situación que no hemos intentado entender, estas etapas aparecen de manera paulatina y consecutiva en el tiempo, conviviendo e interrelacionándose hasta el final de proceso que generan. Enfatizar con ello que estas etapas no discurren disjuntas, sino al contrario, conectadas e interrelacionadas formando un continuo en el tiempo, pues unas no tienen sentido sin las otras. En este sentido, clarificamos que la identificación de las tres etapas se trata de una nomenclatura formal que permite canalizar el camino hacia un objetivo, dar respuesta coherente a las cuestiones formuladas. Atendiendo el orden consecutivo en qué estas etapas aparecen, podríamos referirnos a ellas como los niveles de implicación en las que un resolutor se ve inmerso al resolver un problema.

Estas etapas han sido identificadas de acuerdo con una finalidad principal de las acciones de resolución observadas en el desempeño de resolutores expertos y, en particular, la posibilidad de ser interpretadas por resolutores menos eficientes. Las acciones vinculadas a la resolución de problemas son diversas y variadas. Sin embargo, de acuerdo con los Análisis II, (capítulo 4), Análisis III (capítulo 5) y Análisis IV (capítulo 6) es posible afinar en sus finalidades, encontrar puntos comunes y, con ello, determinar subniveles de implicación. De esta manera es posible ir desgranando las etapas en acciones y viceversa. De acuerdo con ello, dentro de cada etapa, hemos identificado dos subniveles de implicación permitiendo una gradación más precisa de cada una de las etapas generales por las que hemos observado que pasa un resolutor, y con ello, a la vez, precisar las acciones mínimas que comprende cada etapa. Como se desprende de la Tabla 7.1, estos subniveles de implicación se resumen en familiarizarse con la situación y

recomponer la información necesaria para entender mejor la situación, buscar maneras para atacar la situación y convencer de que alguna permite llegar a alguna conclusión sobre las cuestiones planteadas e interpretar y evaluar el proceso desarrollado.

Etapas o Niveles de implicación	Subniveles de implicación
Comprender el problema	<ul style="list-style-type: none"> • Familiarizarse con la situación y condiciones expuestas en el enunciado • Extraer la información del enunciado y recomponer la necesaria para entender mejor la situación
Tener un plan de acción	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar la redefinición del enunciado para buscar maneras con las que atacar la situación problemática • Convencer que alguna de las maneras permite llegar a alguna conclusión sobre la situación expuesta
Validar lo realizado	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar los resultados y con ellos dar una respuesta coherente y consistente • Evaluar, en el sentido de sintetizar, completar y mejorar, las soluciones encontradas

Tabla 7.1. Etapas y acciones mínimas del proceso de resolución de un problema matemático

La cohesión y convivencia entre las distintas etapas que definen el proceso de resolución, de acuerdo con nuestros Análisis III (capítulo 5) y Análisis IV (capítulo 6) se explica fundamentalmente por la presencia de momentos de atasco, ya sean generados por situaciones de confusión (entendidas como bloqueo) o por haber realizado algo de manera incorrecta (aludiendo al error) y, por consiguiente, con las acciones vinculadas a la revisión constante y la comprobación. El hecho de detectar, analizar y rectificar estos momentos hace necesario retroceder en el proceso de resolución y revisar de acuerdo con lo realizado con anterioridad. Por ello, a las tres etapas de resolución, cabe destacar los estados de atasco que se ha encontrado el resolutor a lo largo del proceso de resolución. En este sentido, el atasco se convierte en caracterizador fundamental del proceso de resolver un problema.

La gestión de todos estos momentos requiere de ciertas habilidades que, de acuerdo con el Análisis III desarrollado en el capítulo 5 podemos resumir en: pensamiento creativo, pensamiento crítico, comunicación asertiva y flexibilidad.

7.1.3 Qué influye en la resolución de un problema

Como se ha mostrado en el apartado 3 del Marco Teórico (capítulo 1), a lo largo de estos 30 años se han justificado distintos marcos para examinar los factores que influyen en la resolución de problemas e incluso en qué medida unos factores influyen en otros. De nuestros distintos análisis (capítulo 3, capítulo 4, capítulo 5 y capítulo 6) ratificamos el papel fundamental que toman los distintos conocimientos matemáticos (básicos, heurísticos y sobre los recursos matemáticos) al resolver un problema, la importancia de no perder de vista los objetivos y sub-objetivos a alcanzar, el control que se ejerce sobre el propio proceso de resolución y la toma de decisiones, así como la influencia del aspecto afectivo generado por los sistemas de creencias de los alumnos en cuanto a sus capacidades matemáticas, en general, como para resolver problemas, en particular; como también su visión general de la resolución

de problemas, tanto en general como del problema en particular con el que se enfrentan en cada situación. Junto a todo ello, no se puede obviar el papel que parece tomar la gestión del aula, a través de las dinámicas que se promueven y las costumbres sociomatemáticas establecidas en ellas, como determinante de los distintos factores influyentes de la resolución de problemas que acabamos de identificar.

De acuerdo con las resoluciones analizadas, en particular de los Análisis II (capítulo 4) y Análisis III (capítulo 5), observamos como los alumnos de los distintos grupos participantes enfrascados en resolver un problema pusieron en juego distintos conocimientos matemáticos, tanto básicos, como heurísticos o sobre el uso recursos matemáticos que al utilizarlos de manera, más o menos, conveniente, les permitieron llegar a determinadas conclusiones sobre el problema, así como determinar otros conocimientos. Ello nos permite encontrar particularidades en las producciones de los alumnos tanto a nivel particular como grupal.

Con el Análisis II (capítulo 5) se manifiesta que los alumnos presentan creencias sobre la resolución de problemas y las matemáticas en general que influyen en su práctica de resolver un problema. En particular, muestran tener creencias sobre lo que consideran más importante para resolver un problema y dar respuesta a las cuestiones formuladas. Sus creencias son variadas, aunque, de acuerdo con sus expresiones, entre ellas destacan el valor que los alumnos dan a la solución o el resultado, entendido como la respuesta concreta y específica a una pregunta cerrada, encontrar o poner bien los datos y, en particular los números, conocer o saber la operación o las operaciones. En un segundo plano, encontramos referencias a leer o comprender lo que expone o pregunta el problema y, finalmente, y aunque en menor grado, encontramos también algunas referencias a la importancia de explicar el proceso, la posibilidad de hacer esquemas mentales o dibujos, ordenar las ideas, no distraerse y repasar.

En este sentido, el Análisis I (capítulo 3) informa como aquellos alumnos que presentan una destacada preocupación para dar únicamente con un resultado concreto al problema, sin valorar las acciones que desarrollan o reduciendo la posible resolución a una sola operación, hace que pierdan el rumbo de sus resoluciones y reduzcan sus anotaciones.

Incluso, del mismo análisis (capítulo 3) se desprende que, ante una propuesta de un problema que no encaja con las expectativas o las creencias sobre lo que interpretan por problema, provoca en los alumnos cierta tensión obstaculizando la puesta en práctica de cualquiera de sus habilidades de resolución y con ello pierdan la atención necesaria para conducir sus esfuerzos al objetivo deseado, confirmando con ello una de las principales conclusiones de Vila (2001).

Por otro lado, observamos cómo las percepciones de los alumnos sobre un problema en particular afectan también en el desempeño de sus posibles resoluciones. El Análisis I (capítulo 3) muestra como los alumnos pueden crearse por sí mismos ideas preconcebidas de los enunciados y cómo éstas prevalecen a sus propios razonamientos posteriores, impidiéndoles dar con una representación adecuada de la situación o poder determinar una estrategia de resolución conveniente. Al contrario, como los propios alumnos que así lo reconocieron, cuando fueron conscientes de lo el problema expresaba, fueron capaces de resolver el conflicto mostrando disponer de conocimientos suficientes para atacar el problema. En este sentido, se observa dificultad de los alumnos en lidiar con las condiciones expuestas en el

enunciado especialmente por no saber reconducir sus ideas preconcebidas al enfrentarse al problema.

Destaca también la tendencia generalizada de grupos de alumnos, bajo la supervisión de docentes concretos, en escribir lo mínimo, parece ser por la creencia de la mayoría de estos alumnos que en la clase de matemáticas no se escribe. En otros, donde parece que pierden el interés cuando se les propone de resolver un problema y los alumnos lo identifican con alguno parecido ya trabajado.

Percibimos que los alumnos pueden presentar dificultades para precisar lo que la situación cuestiona, y debido a ello tener dificultades para continuar con la resolución; desviarse fácilmente del proceso de resolución que han iniciado, y una vez desviados, les resulta muy complicado volver a ello; o bien desarrollar procesos no necesariamente incorrectos, pero sin percatarse de su conexión o falta de ella, o bien que llegados a alguna idea, responden el problema sin cuestionarse si su respuesta es coherente con las condiciones o cuestiones formuladas, o intentando conectar las distintas respuestas en caso de requerir más de una. Observamos que, si los alumnos no describen las acciones que desarrollan, no pueden reconducir las dificultades con las que se van encontrando. De alguna manera, se manifiesta así la pérdida del objetivo que persiguen al pretender resolver el problema.

De acuerdo con las conclusiones del apartado 7.1.3 anterior, trabajar con los conocimientos matemáticos con el objetivo de dar una respuesta a las cuestiones formuladas implica el desarrollo de determinadas acciones. Estas acciones, más o menos generales, están sujetas a las decisiones del propio resolutor. De ello consideramos la toma de decisiones como factor clave en la resolución de problemas, pues de ellas dependen los caminos que se van abordando para determinar alguna conclusión sobre un problema. En este sentido, del Análisis I (capítulo 3), Análisis II (capítulo 4) y Análisis IV (capítulo 6) se desprende una falta de reflexión y de control suficiente en distintos alumnos sobre sus acciones como en la voluntad o la creencia de cambiar el rumbo de ellas debido a la facilidad en qué se posicionan cuando, por ejemplo, piensan que disponen de maneras propias e intocables de proceder. De hecho, nuestras observaciones muestran que, si bien los problemas pueden pedir de manera explícita estas reflexiones o bien los docentes pueden explicitar por ellas en determinados momentos, ello es insuficiente para desarrollar una actitud reflexiva permanente del proceso que desarrollan y con ello dar coherencia en sus explicaciones; en definitiva que les ayude a regularse en el proceso que desencadenan. De acuerdo con el Análisis I (capítulo 3) es necesario que los alumnos perciban la utilidad e importancia de dichas peticiones particulares o generales sobre la resolución de problemas, como argumentar sus respuestas e ir anotando sus acciones, para integrarla en sus acciones de resolución. De acuerdo con el mismo análisis, parece que el docente y las normas sociomatemáticas del aula tienen un papel importante en este sentido.

De todo ello, podemos concretar varias conclusiones. En primer lugar, y de acuerdo con los factores influyentes, podemos concluir que la resolución de problemas requiere de habilidades relacionadas con el autoconocimiento, la toma de decisiones y el manejo de emociones y sentimientos.

En segundo lugar, que los conocimientos de qué uno dispone condicionan la percepción de los objetivos y como, a su vez, estos dos aspectos influyen en las decisiones que uno puede tomar.

Por su parte, el sistema de creencias actúa en la toma de decisiones, ya sea directa o indirectamente, teniendo efectos también en la percepción de los objetivos y los conocimientos.

A su vez, observamos como la gestión de cada aula en particular por parte del docente correspondiente influye de manera directa y notoria en estos cuatro factores influyentes en la resolución de problemas de los alumnos del grupo en cuestión. Con la propuesta de unas u otras dinámicas, en particular problemas y otros instrumentos para la resolución de problemas, se observa cómo se promueve una mayor o menor conexión de conocimientos. De manera paralela, las costumbres sociomatemáticas que perviven en las aulas parecen influenciar muy directamente las creencias de los alumnos, en especial modelando las actitudes de resolución que presentan los alumnos. Como veremos en las conclusiones relativas a los objetivos 2 y 3, encontramos instrumentos útiles para la resolución de problemas que mediante la exposición de objetivos y sub-objetivos, ayudan a alumnos a regular y controlar sus acciones, y, con, ello la toma de decisiones.

Con todo ello podemos establecer el cuadro de relaciones de la Figura 7.1, con el que se resume la influencia observada de cada uno de estos factores en la resolución de problemas.

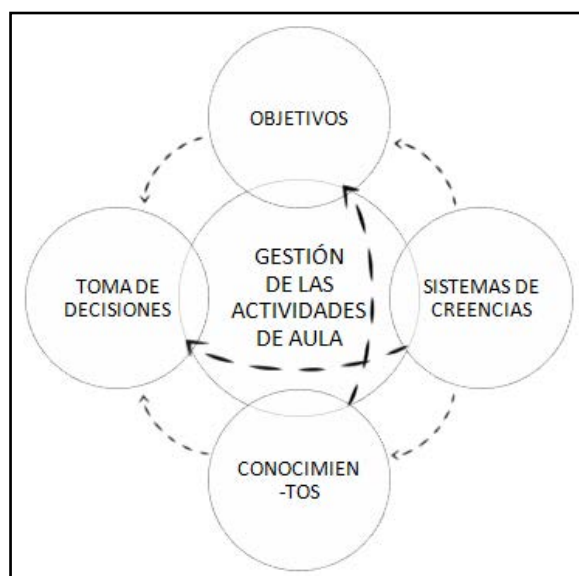


Figura 7.1. Factores influyentes en la resolución de problemas

Por otro lado, ante la actuación directa de los factores en la toma de decisiones y la dificultad observada de los alumnos en dominarla, se evidencia la necesidad de un fuerte sistema de decisiones que pueda hacer frente a influencias procedentes del resto de factores que, de acuerdo con las conclusiones a los objetivos 2 y 3 se observa que es posible aprenderlos a dominar a través de la propuesta de instrumentos adecuados para ello, junto con problemas matemáticos convenientes.

7.1.4 La resolución de problemas en un marco competencial de la educación matemática

En base a las conclusiones anteriores del presente capítulo (apartados 1.1, 1.2 y 1.3, capítulo 7) observamos cómo resolver un problema requiere del uso y conexión entre conocimientos

matemáticos básicos, heurísticos y sobre recursos. Además de ello, requiere que el resolutor se sienta motivado para resolverlo e implica el manejo de habilidades de pensamiento creativo, pensamiento crítico, comunicación asertiva, flexibilidad, autoconocimiento, toma de decisiones, así como de emociones y sentimientos.

Paralelamente, observamos que la resolución de problemas, como actividad de aula, comporta tres funciones fundamentales que, aunque no necesariamente disjuntas, cabe identificar:

- la resolución de problemas matemáticos como medio para atraer matemáticamente a los alumnos
- la resolución de problemas matemáticos como medio para dar utilidad a sus conocimientos matemáticos a la vez que descubrir de nuevos
- la resolución de problemas matemáticos como fin en sí mismo para aprender a pensar matemáticamente y actuar (lo que también conlleva comunicar) de manera consecuente

De acuerdo con un marco educativo competencial, en el que se pretende que los alumnos sigan aprendiendo de manera autónoma en contextos diversos, percibimos que considerar la funcionalidad de la resolución de problemas como medio para atraer la atención de los alumnos, así como para dar utilidad a sus conocimientos matemáticos a la vez que descubrir de nuevos entendemos que son el modo adecuado para desarrollar el interés y la aplicabilidad matemática en cualquier ámbito, e incluso influir en el manejo de emociones y sentimientos.

Sin embargo, del Análisis I (capítulo 3) y Análisis IV (capítulo 6), en particular, se desprende que los alumnos pueden realizar acciones vinculadas con la resolución de problemas pero no siempre tomando consciencia de ello siendo entonces cuando no pueden analizarlas y menos reconducirlas, en caso de ser necesario. Por ello, si el objetivo es que los alumnos se vayan convirtiendo en resolutores más eficientes, conviene que, además de sentirse motivados para resolver un problema y sentir el gusto de conectar, descubrir o generar conocimientos, aprendan a ser conscientes del proceso que supone resolver un problema, de las acciones que puede conllevar, así como la importancia de sus decisiones y dominar sus creencias para tenerlos presente en futuras ocasiones. En definitiva, de manera que puedan tomar consciencia de sus propios procesos de resolución y potenciar su aprendizaje de manera significativa.

En otras palabras, es necesario que aprendan a pensar matemáticamente para actuar (y comunicar) de manera consecuente. En este sentido, percibimos que justo el objetivo de la competencia en resolución de problemas recae en que los alumnos tomen consciencia de los distintos aspectos que entran en juego al resolver problemas matemáticos y con ello convertirse en mejores resolutores, en el sentido de alcanzar, con el tiempo, resolver por sí mismos problemas más complejos y de manera más eficiente. De hecho, con la práctica los alumnos pueden volverse mejores resolutores, pero para ello necesitan aprender a regular sus acciones, lo que es un proceso largo y costoso (De Corte, 2000a; Schoenfeld, 2007).

Como hemos observado en el Análisis 1 (capítulo 3) la gestión que desempeñan los docentes para promover un aprendizaje de la resolución de problemas influye en cómo los alumnos la perciben, trabajan los problemas y comunican sus resoluciones. Las creencias se construyen en el tiempo (Vila y Callejo, 2004b) y no sólo eso sino que, como ya hemos comentado, los hábitos y costumbres de los alumnos, generados por sus creencias, no son fáciles de cambiar, en parte

porque los alumnos no siempre los alumnos se muestran dispuestos a hacerlo. Por ello, la gestión por parte de los docentes se convierte en un punto clave para un aprendizaje significativo de la resolución de problemas.

Por consiguiente, para desarrollar la competencia en resolución de problemas, la experiencia desarrollada nos informa, que más allá de que los docentes proporcionen problemas que conlleven distintas características en cualquiera de sus facetas, es necesario proveer a los alumnos de maneras que les ayuden en la regulación de sus acciones.

En este sentido, observamos cómo no es suficiente que la cuestión del problema invite a razonar o argumentar sobre las resoluciones, sino asegurarse que los alumnos dispongan de instrumentos específicos que les permitan reflexionar sobre su práctica al mismo tiempo que mantener claros los objetivos y tomar consciencia de sus acciones de resolución más que la conexión de conocimientos o promover su motivación. En definitiva, instrumentos para asegurar un evaluación reguladora y, en particular, formadora (Sanmtarí, 2010) tanto local como global (Callejo, 1996) de la resolución de problemas. De hecho, como veremos en las conclusiones del objetivo 2 ello es posible y además proporciona a los docentes información para poder decidir el tipo de problemas y cómo trabajarlos.

Por consiguiente corroboramos que cuando el objetivo principal de la resolución de problemas es mejorar la capacidad de resolución de problemas, además de sugerir la resolución de problemas diversos, conviene que los alumnos dispongan de instrumentos que les ayuden a regular sus acciones.

7.1.5 Ausencia de una evaluación reguladora de la resolución de problemas

De acuerdo con el apartado 4 del Marco Teórico (capítulo 1) la efectividad de cualquier proceso de enseñanza–aprendizaje queda sujeta a la intervención de procesos evaluativos. En un marco competencial de la educación, se remarca que una evaluación calificadora de la resolución de problemas es insuficiente para garantizar una enseñanza eficaz y un aprendizaje significativo de ella. De acuerdo con ello, se remarca la necesidad de una evaluación reguladora del conjunto del proceso educativo de la resolución de problemas y la utilización de distintos recursos evaluativos para obtener la suficiente información.

Todos los docentes implicados en nuestro proyecto trabajaban en base al currículo actual catalán basado en una educación competencial. Sin embargo, las reflexiones de los docentes recopilados en el apartado 2 de la Metodología (capítulo 2) sobre el modo cómo habitualmente evalúan y qué evalúan de la resolución de problemas en sus alumnos manifiestan una falta de conocimiento de las dos finalidades de la evaluación identificadas. De acuerdo con el apartado 4 del Marco Teórico (capítulo 1), recordamos que se trata de las funciones referenciamos como acreditativa y reguladora, ésta, a su vez, formativa y formadora; la falta de recursos y criterios formales que permitan una evaluación reguladora consistente, al mismo tiempo que cierta falta de reconocimiento en cuanto a las distintas finalidades de la resolución de problemas. Constatamos así como la falta de instrumentos reguladores para asegurar un aprendizaje competencial son pobres en la enseñanza como en el aprendizaje.

Las reflexiones de los docentes muestran como entre sus métodos de evaluación destacan la observación y los informes o pruebas por escrito por parte del profesor. Los métodos de observación son más presentes en Primaria mientras que las pruebas por escrito, en Secundaria. Sin embargo los aspectos que, en particular, evalúan parecen reducirse a una evaluación calificadora o, si son un intento de evaluación reguladora, los criterios que utilizan son poco claros o quedan sin determinar. En este sentido, todos los docentes implicados reconocen que, aunque están interesados, no disponen de ningún instrumento que les permita desarrollar una evaluación reguladora como pueden ser la rúbrica o una base de orientación.

Al referirse a la observación, se refieren básicamente a cuando un alumno sale a la pizarra para reproducir o copiar la resolución que en primer lugar ha escrito en su libreta, o bien cuando, en voz alta, después de que hayan resuelto el problema, los alumnos, con más o menos directrices del docente, van compartiendo sus resoluciones pudiendo ser éstas escritas en la pizarra o no. Al referirse a producciones por escrito, los docentes se refieren a problemas integrados en una prueba final en la que también se incluyen otras tareas matemáticas. En particular, uno de los profesores de secundaria, añade que al finalizar cada tema, pide a los alumnos que se autoevalúen, de manera global, mediante una nota. Este mismo profesor comenta que de manera voluntaria y, por lo tanto, en horario no escolar, los alumnos pueden trabajar problemas fuera de los que trabajan en la clase, que supuestamente son más laboriosos. En cualquier caso, pero, los docentes no hacen referencia a ningún criterio específico de lo que se fijan para evaluarlos. Lo que sí observa este profesor es que una evaluación sin la implicación directa de los alumnos, de poco sirve porque los alumnos no vuelven a una tarea hecha por muy comentada que esté del profesor.

En este sentido, parece que la evaluación de la resolución de problemas en las aulas implicadas, al final, recae básicamente en determinar si los alumnos son capaces de encontrar alguna solución a los problemas propuestos, pero sin dar más importancia al proceso o a las habilidades relacionadas con ello, que les ha permitido llegar a ella. O bien, si intentar recurrir a ello, no disponen de indicadores que les permitan saber qué y cómo pueden o deben evaluar en cada caso. Se refuerza así la necesidad que los docentes puedan disponer de instrumentos más sólidos para una evaluación reguladora del aprendizaje de la resolución de problemas por parte de los alumnos que pueda ser una base para el proceso de enseñanza y aprendizaje, implicando en ello los propios alumnos al mismo tiempo que poder identificar mejor las distintas finalidades de la resolución de problemas para enfocar esta evaluación de acuerdo con ello.

7.1.6 Presentación de problemas

Acabamos de observar como las prácticas de aula modelan los factores influyentes en la resolución de problemas. Atendiendo que los alumnos muestran actitudes y hábitos incorporados, relacionados con la resolución de problemas, reacios a cambiar pensamos que es imprescindible que los docentes además de ser conscientes de ello, así como de lo que comporta resolver y de los aspectos que se ven involucrados en ello, con la gestión de las actividades deben ayudar a los alumnos a reconocer sus acciones mediante su propuesta de actividades y sus propias actitudes. Por consiguiente, de acuerdo con el Análisis 1 (capítulo 3) es necesario que los docentes puedan disponer de tiempo para escoger y adecuar bien los problemas a trabajar así como gestionar trabajarlos y analizarlos.

Atendiendo los motivos que condujeron a seleccionar los problemas trabajados en la experimentación, de acuerdo con las preferencias de los docentes involucrados y las realidades o costumbres sociomatemáticas de cada aula, constatamos que es fundamental tener clara la finalidad con la que se proponen, cómo se pretenden gestionar en el aula, qué acciones se esperan que desarrollen los alumnos y cómo evaluar sus tareas. De acuerdo con ello es importante considerar la situación en qué se plantea el problema y la variedad de soluciones que pueda tener, así como cómo formular la cuestión y las tareas que se pretende que sean desarrolladas de manera explícita y se pretenden evaluar. Intentamos aquí detallar estas propiedades de presentación y trabajo de los problemas.

a) Los propósitos de aprendizaje del problema

Por el hecho de tratarse de problemas, siempre tienen que invitar a la reflexión, pero en función del aspecto que se quiera potenciar, de acuerdo con la distinción anterior, diferenciamos entre:

- Resolución de problemas como medio para atraer el interés y la implicación matemática de los alumnos
- Resolución de problemas como medio para integrar y manipular conocimientos matemáticos:
 - Introducir o descubrir contenidos
 - Afianzar, relacionar y sintetizar contenidos
- Resolución de problemas como medio para tomar consciencia del propio proceso de resolución, aprender a pensar matemáticamente y actuar de manera consecuente.

b) La gestión del trabajo de los problemas

- Según la periodicidad de trabajo en problemas:
 - Ambiente habitual de resolución de problemas.
 - Ambientes periódicos de resolución de problemas.
 - Ambientes puntuales de resolución de problemas.
 - Momentos aislados dedicados a la resolución de problemas.
- Según la intervención del docente:
 - Inexistente, Puntual o Continua
 - Al iniciar la resolución, durante el proceso de resolución, al finalizar la resolución.
- Según la relación entre los alumnos involucrados:
 - Individual
 - Por parejas
 - En pequeño grupo (3 o 4 alumnos)
 - En gran grupo
- Según la relación con los contenidos matemáticos:
 - Con vinculación de contenidos al resto de contenidos matemáticos que se estén trabajando en torno al proponer el problema.
 - Sin vinculación directa al resto de contenidos que se puedan estar trabajando en torno al proponer el problema.
- Según el modo de evaluación:

- Con finalidad acreditativa o reguladora, ésta segunda a través de sistemas formativos o formadores pudiendo ser éstos últimos, y de acuerdo con Callejo (1996), locales o globales.
- El momento en qué tiene lugar: durante o después del proceso de resolución, de manera individual o colectiva, con o sin presencia del alumno
- A través de la observación, o pruebas o informes orales o escritos.
- De manera continua o puntual; integrada en un momento único de resolución de problemas o en otros de más generales en los que tienen cabida otras tareas matemáticas.

c) La formulación del problema:

- Contexto de la situación o relación con otras áreas y materias.
 - Científico y, en particular, Matemático
 - Histórico
 - Social
- Disponibilidad de recursos materiales:
 - de registro
 - manipulativos
 - dispositivos digitales o tecnológicos
- Lenguaje y soportes visuales utilizados
 - Verbales
 - Gráficos
 - Icónicos
 - esquemáticos
- Naturaleza de la información (datos y condiciones)
 - condiciones o no redundantes,
 - condiciones concretas o generales
 - datos más o menos precisos
 - exposición de los datos
- Propuesta de las tareas o cuestiones a responder
 - Petición explícita de ciertas tareas o no
 - Cuestiones con respuestas abiertas o cerradas
- Organización del enunciado y las cuestiones a resolver
 - Preguntas incluidas o no en la descripción de la situación
 - Preguntas enumeradas o sin enumerar

De estas tres propiedades, nos lleva a hablar del grado de accesibilidad de un problema, como un indicador de la riqueza de un problema. Así, en cuanto al grado de implicación que puede generar, de acuerdo con el grado de accesibilidad, interés genere y en función de los propósitos educativos que permita cubrir los propósitos, más rico será. Y, añadimos que un buen problema para un alumno será aquel que le permita trabajar de manera consciente los propósitos mencionados.

d) El grado de accesibilidad de un problema

- Grado de conocimientos mínimos para abordar cada etapa de resolución del problema
- Variedad en procesos de resolución que permite

- Gradación en el nivel de profundidad de respuesta: grado de abstracción del lenguaje con que se trate, como se justifica el resultado, generalizaciones
- Distintas soluciones
- Contexto más o menos intrínseco a la situación.
- Aplicabilidad en otras áreas o materias
- Independencia de los contenidos que se estén tratando en la clase
- Cumple con los dos objetivos de aprendizaje
- Permite ser trabajado en cualquier ambiente de trabajo

7.1.7 Problemas matemáticos verbales presentados por escrito. Particularidades

Para el desempeño de este estudio, se han implementado distintos problemas, todos ellos por escrito con palabras, aunque con pequeñas particularidades propias de cada enunciado, con el deseo de que resultaran ejemplos de problemas matemáticos que permitan desarrollar las habilidades de resolución, además de ofrecer la oportunidad de conectar y generar nuevos conocimientos matemáticos, así como captar la atención de los alumnos implicados.

De acuerdo con el Análisis I (capítulo 3) los problemas propuestos parecen haber promovido cierto interés entre los alumnos así como el desarrollo y conexión de distintos conocimientos matemáticos significativos y de naturaleza distinta. El número de producciones recibidos “en blanco” es escaso, por lo que constatamos que los alumnos, en menor o mayor medida, se interesaron por ellos e intentaron resolverlos. Las producciones muestran la conexión de distintos conocimientos matemáticos en los diversos alumnos. En relación a ello, los docentes destacan, en particular, la riqueza matemática y de resolución que promovieron los problemas Pb5 y Pb0. Por otro lado, y aunque, algún docente hiciera el comentario que el problema Pb6 no requirió tanto esfuerzo por parte de los alumnos (Análisis I, capítulo 3), las producciones de los alumnos en relación a este problema proporcionan información relevante, especialmente, sobre las representaciones propias de los alumnos. De la misma manera, con el análisis de las producciones de los alumnos a los problemas Pb1.1, Pb1.2, Pb1.3 y Pb1.4 se pone de manifiesto la cantidad de conocimientos sobre numeración, en particular, que los alumnos trabajaron.

De hecho, las producciones recibidas en blanco son muy escasas en los distintos casos, como se desprende de se desprende del Análisis I (capítulo 3) y Análisis IV (capítulo 6). Más allá de ello, de acuerdo con el Análisis I (capítulo 3) los propios alumnos (participantes en la Implementación Primera) destacan cierto atractivo de los problemas al mismo tiempo que aceptan que les generaron cierto grado de dificultad. Sin embargo, los alumnos etiquetan esta dificultad no como algo negativo sino que comentan que les propició reflexionar más profundamente de lo que estaban habituados. Del mismo análisis (capítulo 3) concluimos, además, que los problemas proporcionados resultaron problemas no rutinarios ni con los que los alumnos estén familiarizados, en tanto que han promovido el desarrollo de razonamientos matemáticos en los alumnos fomentando la comprensión y mostrando que, con los recursos de que disponen y su creatividad podían resolverlos. Además, no encontramos evidencias que los distintos contextos en que se presentaron los problemas influyera de manera significativa en la implicación de los alumnos al resolverlos, como se destaca en el Análisis IV (capítulo 6).

Como ya hemos mencionado, del Análisis I (capítulo 3) se desprende que los alumnos tienen ideas preconcebidas sobre qué entender por problema y cómo resolverlos. Ello genera cierta sorpresa e incluso estancamiento inicial cuando se les proponen problemas que no encajan en sus creencias. Sin embargo, los alumnos han llegado a reflexionar sobre la práctica de resolver los problemas propuestos. En este sentido, los propios alumnos admiten que parte del esfuerzo para resolver un problema se centra en reflexionar sobre lo que describe el problema. Una vez entendida la situación, observan que disponen de recursos suficientes para resolverlos, lo que parece les llega a estimular.

Entre las peculiaridades que les sorprendieron, destacan el hecho de poder encontrar más de una solución, que tuvieron que pensar más profundamente, exponer detalladamente sus razones o justificaciones, y que el hecho de representar el problema, aunque llevara su tiempo, pudiera ser una buena manera para entrever cómo resolver al problema. Con ello se confirma la buena práctica que los alumnos trabajen problemas con distintas particularidades.

Sin embargo, de acuerdo con los distintos análisis realizados, en particular el Análisis IV (capítulo 6), no es evidente que las pequeñas y esporádicas prácticas realizadas fueran suficientes para que los alumnos modificaran sus hábitos de resolución, y menos cuando la dinámica del cambio se realizó de manera esporádica y no constante. Lo que concuerda con Jorba y Sanmartí (2004) cuando afirman que es erróneo creer que con las primeras actividades los alumnos habrán captado las intenciones propuestas. Sin embargo, las reflexiones de los alumnos dan cuenta que la introducción de los cambios les ha provocado cierta reflexión sobre los mismos que, si bien no todos muestran aún responder de manera competente, sí muestran tenerlas presente. En este sentido, corroboramos la afirmación de Sfard (2008) en la que parece que el aprendizaje va asociado a los cambios duraderos que sufre el discurso matemático, que en este caso asociamos a la práctica de resolver problemas matemáticos en un ámbito competencial.

De acuerdo con que las prácticas desarrolladas influyen en cómo los alumnos pueden percibir la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992), constatamos que no sólo los contenidos a tratar o las estrategias de resolución que puedan surgir son relevantes en el proceso de resolver un problema, sino también la forma en que se presentan pueden influir en el desempeño de los alumnos. A parte de observar en qué modo puede influir la formulación de los problemas, del Análisis 1 (capítulo 3) extraemos pequeños marcos de referencia con los que clasificar dichas peculiaridades de los enunciados verbales que se formulan por escrito.

Aunque conscientes de la dificultad en categorizar las imágenes (Kribbs y Rogowksy, 2016), distinguimos entre tres tipos de imágenes en función de la información que proporcionan de acuerdo con la que proporciona el enunciado del problema:

- imagen explicativa cuando ésta presenta en sí misma toda la información que se describe en el enunciado
- imagen representativa, cuando la imagen se ciñe a la situación descrita en el enunciado pero no proporciona en sí misma todos los datos que se presentan en el enunciado
- imagen ilustrativa, cuando se trata de una imagen generalista que simplemente pretende situar el resolutor en el contexto en el cual se presenta el problema, sin ceñirse a las condiciones detalladas

De acuerdo con el Análisis 1 (capítulo 3), constatamos como los alumnos presentan cierto criterio en cuanto al uso de las imágenes que se proporcionan en función de la información que éstas desprenden por sí mismas en relación a las descritas en el enunciado. Este análisis les permite decidirse por utilizar la imagen proporcionada o bien elaborar una propia, En este sentido, dan gran utilidad a las imágenes explicativas, mientras que sustituyen el uso de la imagen ilustrativa por una de propia. En cuanto al uso de la imagen explicativa, cabe destacar que incluso distintos alumnos se han basado únicamente en los datos que se podían extraer de ella, dejando de lado otras premisas que se describían en el enunciado. En cuanto al uso de la imagen ilustrativa, cabe destacar que, los alumnos que la han utilizado directamente, han sido capaces de adecuar el dibujo ilustrativo a las condiciones del enunciado.

Observamos tres funcionalidades de las imágenes en el proceso de resolución de los alumnos que podemos asociar a las tres etapas mínimas de resolución identificadas. Independientemente de si las imágenes utilizadas son las proporcionadas por el enunciado o bien las propias de los alumnos, las evidencias enseñan que los alumnos pueden utilizar las imágenes para situar y comprender el problema, como herramienta heurística, o para reafirmar los hallazgos y dar una respuesta, siendo el primer uso el más común entre los alumnos.

En cuanto a la inclusión de ejemplos, el mismo análisis (capítulo 3) nos informa que proporcionarlos no es garantía para que los alumnos interpreten mejor los enunciados verbales. En cuanto a los resultados obtenidos a las faltas cometidas, se observa que las faltas cometidas aun habiendo el ejemplo fueron más comunes en Secundaria que en Primaria. Aunque se hace complicado generalizar los tres tipos de falta asociadas al ejemplo, parece que la más común coincide con el aspecto del ejemplo que se expresa por escrito.

Destacamos la preferencia de los alumnos en enumerar las partes de sus producciones de acuerdo con las cuestiones o tareas explícitas planteadas. Ello nos llevar a pensar que enumerar las cuestiones a desarrollar por los alumnos, puede ser una buena práctica para que los alumnos puedan atacar de manera consciente los distintos aspectos del problema así como ayudarles a organizarse en ello.

Observamos que los alumnos se rigen por el orden en que se presentan las cuestiones y tienden a contestarlas de acuerdo a ello, independiente de la naturaleza de las preguntas y aunque estas cuestiones se referían a la explicación de resultados obtenidos anteriormente. Así mismo, notamos una ligera tendencia a presentar las argumentaciones de manera conjunta a la obtención de resultados. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la distinción entre el proceso y la respuesta a menudo es poco claro y difuso, no solo en cuanto a la proporción de las argumentaciones, sino también a explicitar respuestas precisa adecuadas a las preguntas concretas formuladas.

Al hablar de argumentaciones, nos surge una cuestión vinculada al hecho de hablar de argumentaciones y justificaciones. En este sentido, pensamos que puede ser de ayuda hacer una distinción entre argumentación y justificación. Por argumentación nos referiremos a la cadena o conjunto de explicaciones que da sentido y acompaña una construcción matemática proporcionando mientras que por justificación, entendemos como la selección y adecuación de aquellas argumentaciones que, retrocediendo en lo realizado, permiten concretar lo que se ha llevado a cabo. En este sentido, observamos como los alumnos, aunque en distintos grados,

son conscientes y son capaces de dar argumentaciones, no presentan indicios de saber justificar. Pensamos que ello es importante a la hora de trabajar los problemas con la intención que promueven el pensamiento matemático.

A la hora de formular las cuestiones y pedir por explicaciones, del Análisis I (capítulo 3) observamos distintos modos en qué presentar las cuestiones que se pretende que los alumnos respondan resolviendo el problema, y que, de acuerdo con la Tabla 3.10, recuperamos de nuevo en la Tabla 7.2.

		Objeto de la petición				Modo de obtener soluciones
		Solución(es) precisa y concreta				
Modo de la petición	Sin solicitar explicación	Solicitar explicaciones				
		Tipología		Situación		
		Argumentar	Justificar	Parte de la misma	Como otra petición	
Modo de la petición	Como tarea (modo imperativo)					
	Como pregunta (modo interrogativo)					
Vínculo con la petición	Personal					
	Impersonal					

Tabla 7.2. Modos de cuestionar y solicitar una respuesta

7.2 Conclusiones relativas al Segundo Objetivo

O2. Elaborar un instrumento con finalidad reguladora de la competencia de resolución de problemas matemáticos de los alumnos y analizar el proceso de su construcción.

De acuerdo con la Metodología (capítulo 2), a lo largo de proyecto se ha trabajado para la creación y uso de dos instrumentos con intención reguladora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, además de seleccionar y adecuar un conjunto de problemas matemáticos con los que ponerlos en práctica. De acuerdo con Sanmartí (2010) identificamos estos instrumentos como rúbrica de desempeño para la resolución de problemas matemáticos y base de orientación para la resolución de problemas. Mientras que el primero de ellos pretende ser un instrumento para el uso de los docentes y, por tanto, con finalidad formativa; el segundo, elaborado para el uso por parte de los alumnos, pretende ser un instrumento con carácter formador.

Paralelamente a la selección y adecuación de los problemas matemáticos a trabajar, el proyecto se inició con el diseño de una rúbrica de desempeño para ser aplicada por parte de los docentes implicados. Pretendía ser un instrumento con el cual los docentes pudieran evaluar las producciones de los alumnos a los problemas propuestos de acuerdo con unos criterios de realización asociados a las etapas de resolución. Al desear que esta evaluación tuviera repercusión directa en el proceder de los alumnos, y atendiendo la novedad que ello suponía en las distintas aulas y participantes, de acuerdo con las referencias bibliográficas y guiados por la especialista en evaluación, percibimos que los alumnos debían de ser conscientes de ellos y por tanto, debían ser conocedores de manera directa de la misma y de su intención. Por ello, se convino una adaptación de la rúbrica para el conocimiento de los alumnos, en la que, por ello, no aparecían los distintos niveles de adquisición, y las dimensiones de la rúbrica de desempeño aparecían simplificadas y como acciones vinculadas a los estados.

Al implementar la rúbrica adaptada, analizamos las producciones de los alumnos de acuerdo con ella como también las percepciones de los alumnos al trabajar con ella. La valoración que se hizo sobre ello, como se verá, absorbió parte importante de nuestro interés, convirtiéndose en el principal. De aquí que la mayor parte del trabajo realizado a lo largo del proyecto se haya centrado en este aspecto, en la adecuación y uso de esta inicial rúbrica para alumnos, que a su vez, pensamos que era un tema menos abordado. En este sentido, queda en un segundo plano, y en cualquier caso para futuros estudios, el análisis del uso de la rúbrica de desempeño. Asimismo, a pesar que no hemos podido realizar en un análisis profundo del uso que los docentes implicados dieron a la rúbrica de desempeño a lo largo de la Implementación Primera y Segunda, del Análisis 1 (Capítulo 3) se desprenden conclusiones relevantes a considerar.

Estas conclusiones se centran en las dificultades de aplicación en qué se encontraron los docentes, a pesar de encontrarla un instrumento útil para la intención marcada. Al quererla implementar, destacan los obstáculos generados por el tiempo que sentían que requerían para familiarizarse con el instrumento y del que, en cambio, no disponían. Por otro lado, las dificultades de aplicación en función de la especificidad de las dimensiones que presenta, por un lado, como de la dificultad de aplicarla cuando las producciones de los alumnos no son lo suficientemente ricas, en el sentido que no encuentran ellas la suficiente información para

poder asociar las producciones de los alumnos con las dimensiones establecidas en ella. Si bien estos resultados son informales, el hecho que docentes observaran una falta de información en las producciones de sus alumnos que les impedía aplicar las rúbricas de desempeño, estimuló aún más nuestro interés en seguir trazando una base de orientación para la resolución de problemas y con ello centrar el estudio en las consecuencias de su uso como fundamento para afinar, posteriormente, la rúbrica de desempeño y con ello poder ser utilizada por los docentes. En este sentido concluimos con la necesidad de disponer, en primer lugar, de un instrumento de carácter formador para posteriormente, y sobre el cual, poder elaborar un instrumento con carácter formativo y con ambos, completar el aspecto regulador de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas en un marco competencial de la educación. Por ello, volcamos la relevancia de trabajar más a fondo y en primer lugar la generación de una base de orientación y su uso.

De acuerdo a nuestro objetivo, y atendiendo estas observaciones previas, fijamos nuestra atención en el proceso de creación de una base de orientación para la resolución de problemas matemáticos, con la intención que devenga un instrumento regulador y formador del proceso de aprendizaje de la competencia de resolución de problemas.

Como se desprende de la Metodología (capítulo 2) del trabajo, a lo largo de nuestro estudio hemos elaborado y puesto en práctica tres bases de orientación: la BO1, la BO2 y la BO3 que se detallan en el Anexo 3. La creación de la primera surge de la adaptación de la rúbrica de desempeño Rb1, mientras que las otras dos surgen como refinamientos de las anteriores. En este sentido, la BO2 surge como una reestructuración refinada de la BO1 y, la BO3, atendiendo la experiencia previa, pretende explotar más detalladamente algunas de las características analizadas en las anteriores y que, de acuerdo con su implementación, observamos que sería conveniente adecuar. Con ello, constatamos como el proceso de construcción de las bases de orientación utilizadas surge de un proceso de refinamientos constantes del que si bien podemos identificar un momento de inicio, no es posible identificar un final. De nuestra experiencia, concluimos que es justamente esta continua adaptación del instrumento la esencia de la base de orientación que, ante su finalidad formadora, requiere de ser adaptado a las destrezas, de distinta naturaleza, de quien las utiliza.

El momento inicial de su construcción es claro. Como hemos avanzado, la elaboración de la base de orientación deviene del conjunto de acciones vinculadas a los estados de resolución de un problema matemático que se pretendían evaluar de las producciones escritas de los alumnos al resolver un problema matemático a través de una rúbrica de desempeño. En este sentido, la base de orientación para la resolución de problemas matemáticos, fue diseñada en base unos objetivos de realización y etapas relacionadas con el proceso de resolver un problema, seleccionadas y descritas de acuerdo con las dificultades observadas en los alumnos para reconocerlas y ejecutarlas. En la base de orientación, fueron adaptadas como las acciones necesarias para afrontar cada una de las etapas de la resolución a un problema. En este sentido, cada una de las etapas marca un objetivo a lograr en el proceso de resolución.

El análisis de las producciones de los alumnos, así como las observaciones de los docentes y alumnos implicados han contribuido al refinamiento de dicho instrumento, al mismo tiempo que identificar aquellos aspectos que son imprescindibles a considerar en ella.

Trabajar por competencias implica aprender del aprendizaje. Como hemos justificado en las conclusiones relativas al primer objetivo (apartado 1 del presente capítulo), la competencia en resolución de problemas conlleva la habilidad de pensar matemáticamente y actuar (y comunicar) de manera consecuente la que, a su vez, conlleva de otras más particulares. Resolver un problema, como hemos visto, implica la activación de distintas acciones, acciones dirigidas a ciertos objetivos (o sub-objetivos, como la consecución de cada una de las etapas de resolución) que quedan determinadas por los conocimientos del resolutor, su toma de decisiones y su sistema de creencias. Así, la destreza del resolutor queda determinada por la consecución de las acciones que desarrolla al resolver un problema y de la consciencia que toma de ellas. Atendiendo la finalidad reguladora de la base de orientación, el objetivo final de la base de orientación para la resolución de problemas es ayudar a los alumnos a ser conscientes del proceso de resolución de un problema de manera que les permite identificar los momentos en qué se pueden encontrar y cómo poder conducirlos, mejorando así sus destrezas relacionadas con la resolución de problemas y, con ello, aprender a pensar matemáticamente y actuar cada vez mejor de acuerdo con ello. En definitiva, volverse mejores resolutores de problemas. Se justifica así, que si la base de orientación actúa en la dirección indicada, se trata de un instrumento que permite desarrollar la funcionalidad de la resolución de problemas en sí misma y por tanto, mejorar la competencia matemática.

La elaboración del instrumento así como el proceso de refinamiento, no es sencillo ni fácil de evaluar. Como se desprende de lo anterior, requiere del conocimiento de lo que se pretende con su integración en la resolución de problemas y cómo se pretende implementar; el conocimiento teórico de las acciones vinculadas a la resolución de un problema matemático y de los aspectos que influyen en su práctica; del conocimiento de las dificultades y logros de los alumnos en cuanto a la aplicación de las mismas así como de sus particularidades como aprendices; al mismo tiempo que resultar cómo y entendible a los alumnos. Al mismo tiempo, requiere de un análisis reflexivo y constante para poder ser adecuado en cada momento. Análisis que, como se desprende del trabajo podemos conducir mediante la observación y estudio de las evidencias de las producciones de los alumnos en base a la base de orientación o bien, utilizando instrumentos cuantitativos como el test de Fisher que, como se desprende del Análisis IV (capítulo 6), nos permite una estimación sobre el desarrollo general de los alumnos en su conjunto.

Resumimos a continuación los factores que, de modo general hemos observado que influyen en la generación de una base de orientación, para luego pasar al análisis concreto de lo que se extrae de los distintos refinamientos de las bases de orientación utilizadas a lo largo del estudio.

7.2.1 Factores que influyen en la creación y adecuación de una base de orientación

De acuerdo con la misma Metodología (capítulo 2) y el Análisis II (capítulo 4), detectamos cinco factores claves en la elaboración de una base de orientación y posteriores refinamientos. Se trata de los factores que presentamos en la Tabla 7.3 y se describen a continuación.

-
- a) conocimientos sobre la resolución de problemas
 - b) el grado de desempeño de la resolución de problemas de los alumnos
 - c) los objetivos de aprendizaje a regular
-

-
- d) la gestión de la resolución de problemas utilizando la base de orientación
 - e) las particularidades de la base de orientación
-

Tabla 7.3. Factores influyentes en la generación de una base de orientación para la resolución de problemas.

a) Conocimientos sobre la resolución de problemas

Al generar un instrumento de carácter formador para la competencia en resolución de problemas matemáticos, resulta imprescindible conocer los aspectos relacionados con el proceso de resolver un problema que, con el uso de dicho instrumento, se pretende que quien lo utiliza los afiance y los desarrolle de manera adecuada para finalizar la resolución de manera positiva.

Atendiendo nuestro interés en una base de orientación para que los alumnos afiancen el proceso de resolver un problema, es imprescindible reconocer previamente las etapas de resolución por los que pasa cualquier resolutor, para que actúen como sub-objetivos a lograr; así como las acciones vinculadas a ellas, con las que poder mantener la dirección hacia los objetivos así como organizar su quehacer y su toma de decisiones. De la misma manera, cabe considerar los sentimientos que pueden surgir en los alumnos y cómo poderlos reconducir. Desde este punto de vista, los objetivos de aprendizaje están determinados por las acciones vinculadas a la resolución del problema, de los vínculos que pueda haber entre ellas y de cómo éstas se pueden percibir. Para ello, de acuerdo con el apartado anterior y los análisis realizados observamos que los aspectos generales a considerar para crear una base de orientación se centran en:

- naturaleza continua, aunque no lineal, que conlleva el análisis de una situación desconocida, y problemática, para hallar respuestas consecuentes y consistentes a ella
- establecer las etapas de resolución que se encuentra un resolutor al resolver un problema e identificar de manera coherente y consistente las acciones vinculadas a ellos
- las acciones deben promover:
 - conexión entre los conocimientos y las condiciones de la situación descrita para afrontar cada una de las acciones de resolución
 - reflexión sobre las acciones desarrolladas y validarlas (entendido como evaluarlas y reconducirlas, en caso de ser necesario).
 - comunicación de todos los procesos y cada uno de los pasos vinculados a ellos ideados

b) El grado de desempeño (o destreza) de los alumnos

Para generar un instrumento de carácter formador para los alumnos, resulta imprescindible conocer los conocimientos de qué disponen y cómo los utilizan, de otro modo será complicado que los alumnos puedan utilizar el instrumento de manera útil y aún menos, eficaz. Al hablar del grado de desempeño para la resolución de problemas nos referimos a:

- los conocimientos, las capacidades y disposición de los alumnos en cuanto a la resolución de problemas matemáticos
- las creencias de los alumnos en cuanto al proceso de resolución de un problema matemático
- el modo en qué los alumnos utilizan estos conocimientos y creencias y su flexibilidad en aceptar y adaptarse a distintos modos de trabajo o de estudio

De acuerdo con las producciones analizadas a lo largo del trabajo, observamos como los alumnos pueden disponer de distintos tipos de conocimientos para resolver los problemas propuestos pero, en cambio, mostrar carencias significativas en cómo tratar, secuenciar y validar dichos conocimientos. A ello hay que añadir que, de acuerdo con las referencias consultadas, y como se desprende el Análisis A2.1 y constatan docentes implicados como el profesor AL1, los alumnos tienen ideas preconcebidas de lo que implica resolver un problema, y de cómo creen ellos que abordan los problemas, incluso de manera prefijada. Estas creencias, generadas especialmente por su entorno y por la práctica desarrollada con anterioridad puede afectar la consideración inicial del uso de una base de orientación, por lo que deben de ser tomados en cuenta al generarlas. A todo ello cabe considerar la flexibilidad que puedan mostrar los alumnos a los cambios metodológicos que se desarrollan en el aula. Como se ve en el Análisis A2.1 los alumnos no siempre se muestran dispuestos a estos cambios y, una vez dispuestos, éstos no son automáticos.

c) Los objetivos de aprendizaje a regular

De acuerdo con los aspectos identificados con la resolución de problemas y las dificultades observadas en los alumnos, cabe seleccionar y adecuar aquellos aspectos que necesariamente deben definir la base de orientación. De la misma manera que al proponer un problema es importante que las cuestiones del problema y las tareas que se pretenden que sean desarrolladas se expongan de manera clara y concreta, todas aquellas acciones que queremos que los alumnos desarrollen con la práctica de resolver problemas deben de ser los descriptores de la base de orientación, pues los alumnos deben percibir que acciones pueden ser útiles al resolver un problema, como bien aquéllas que pueden devenir más o menos comunes así como aprender a identificarlas y seleccionarlas. Por ello, si bien puede ser importante que el problema invite a contestar de manera razonada, como ya hemos comentado en las conclusiones relativas al primer objetivo, ello resulta insuficiente para que los alumnos las compartan. Por ello es importante que los razonamientos se conciban como parte inherente a la resolución de problemas y, por ello, dicha práctica deba de contemplarse como una acción de la base de orientación. Al plasmar todas las acciones vinculadas a la resolución de problemas que queremos que sean adquiridas por los alumnos deben de incorporarse en la base de orientación, contribuirá a que los alumnos tengan claras las acciones vinculadas al proceso a tener presentes en los procesos de resolución, se familiaricen con ellos, aprendan a organizarlos y, gracias a detallarlos por escrito, puedan retomar cualquier momento de sus desarrollos.

d) La gestión de la resolución de problemas usando la base de orientación

Al generar un instrumento educativo, cabe considerar en qué situaciones se va a utilizar. La resolución de problemas se puede desempeñar en distintos ambientes de trabajo. El modo en qué se pretenda articular la resolución de problemas en el aula determinará, en parte, la construcción (además de cómo aplicarla) de la base de orientación. Por ello, cabe considerar:

- La selección de los problemas a trabajar con la base de orientación
- La gestión de la resolución de problemas en el aula usando la base de orientación
- El análisis de las producciones de los alumnos considerando la base de orientación

Como extraemos de los distintos análisis, no todos los problemas permiten trabajar todas las acciones vinculadas a la resolución de problemas de la misma manera ni en la misma intensidad, como no todos los alumnos tendrán las mismas dificultades en las mismas acciones

en todos los problemas. En cualquier caso, los problemas a trabajar deben posibilitar las acciones vinculadas a la resolución que se pretendan potenciar. Por ello, la base de orientación a utilizar debe considerar dichas acciones, además de las otras mínimas que se consideren necesarias, y, en la medida que sean necesarias, desglosarlas de manera conveniente, de manera que tengan el nivel de precisión suficiente para su aplicación real, y no resulten demasiado precisas que no permitan desarrollar la creatividad de los alumnos ni demasiado generales que no se puedan aplicar.

De la misma manera, las producciones de los alumnos se pueden recoger de distintos modos, por ejemplo por escrito (como en el caso de nuestro estudio) o mediante la observación. Al generar una base de orientación para la resolución de problemas cabe tener en cuenta cómo se pretenderá que se trabajen los problemas y se vayan a percibir las acciones vinculadas: si van a ser trabajados de a nivel de clase, en pequeño grupos, por parejas o de manera individual, el papel que pueda o no desempeñar el docente en el proceso de resolución de los alumnos, así como los otros recursos, además de la base de orientación que los alumnos podrán recurrir para resolver los problemas o para recopilar sus acciones. Luego, como en el punto anterior, destacamos la importancia de poder adaptar las distintas acciones, o sus descripciones, en función de las necesidades que se puedan detectar en cada momento. Si bien se parte de una base de orientación inicial, del Análisis III (capítulo 5) observamos como un mismo análisis de las producciones de los alumnos permite refinamientos de una determinada acción que, en caso de ser necesario, puede complementar una base de orientación inicial.

De la misma manera, se debe considerar como se van a revisar las producciones de los alumnos, en el aula, de manera grupal o individual, y/o posteriormente revisados por el profesor y el acceso al seguimiento de los mismos que podrán tener los alumnos. Como extraemos de la práctica del grupo SC1A la reflexión grupal al finalizar las sesiones siguiendo la base de orientación permite una implicación mayor de los alumnos en el uso de la base de orientación al mismo tiempo que adecuarla de acuerdo con los alumnos dándoles ellos una implicación mayor.

e) Los descriptores del instrumento

La base de orientación debe permitir a los alumnos sentirse cómodos con ella y con su uso. Como hemos observado, los alumnos muestran de ser reacios a los cambios por lo que es importante encontrar el equilibrio entre sus preferencias o creencias y las necesidades educativas del instrumento para que su formato sea percibido e integrado de manera significativa. Al tratarse de un instrumento que presentamos por escrito, al crearlo entran en juego cuestiones relacionadas con su apariencia y que observamos pueden influir en la apropiación de las acciones que describe y que se pretende sean aplicadas y desarrolladas. Especialmente con el Análisis II (capítulo IV) y Análisis III (capítulo 6) observamos como los aspectos que se detallan a continuación tienen relevancia destacada a la hora de diseñar una base de orientación.

- el lenguaje (vocabulario, expresiones, modo y tiempo verbal) utilizado
- la percepción visual del instrumento
- la organización, desglose, relación y sentido global de las etapas y acciones de resolución descritas.

De ello, concluimos como el conocimiento teórico sobre la resolución de problemas, los objetivos de aprendizaje, el modo de articular la tarea y los descriptores que determinan su forma y descripciones, influyen en la creación de una base de orientación para la resolución de problemas. De hecho, están estrechamente relacionados entre sí. No es posible generar una base de orientación adecuada sin un mínimo conocimiento de las condiciones iniciales de los alumnos. Teniendo una idea inicial de sus condiciones cobra sentido marcar unos objetivos de aprendizaje, una meta donde deseamos que los alumnos puedan llegar para continuar por sí mismos. Teniendo en cuenta las condiciones de los alumnos y los objetivos marcados se determina el modo en qué trabajar y obtener la información del trabajo de los alumnos. Con ello, finalmente, es posible ajustar los aspectos formales que pueda tener la base de orientación.

La Figura 7.2, resume, en este sentido, el vínculo entre los distintos aspectos para la creación de una base de orientación para la resolución de problemas comentados y cómo, describimos a continuación, parecen actuar unos sobre otros.

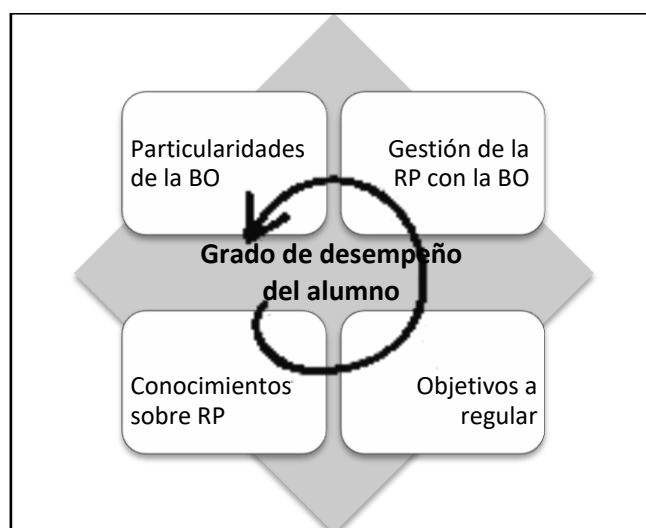


Figura 7.2. Factores que influyen en la creación de una base de orientación para la resolución de problemas

La dependencia de los cuatro factores descritos para la generación de una base de orientación explica que, cada posible alteración de los mismos afecta en la estructura final de la base de orientación y, por consiguiente el grado de desempeño de los alumnos que, a su vez, es el principal indicador para la adecuación de la base de orientación. De ello concluimos que la construcción de una base de orientación no es un proceso cerrado. Al contrario, se trata un proceso continuo en el tiempo condicionado por, especialmente el grado de desempeño que muestran encontrarse los alumnos en cada momento que, aun habiendo unos objetivos generales o finales de aprendizaje, permiten enfatizar cuales reforzar en cada momento. Además de ello, cabe considerar el modo de trabajo de la resolución de problemas que se plantee y los aspectos formales que definen la base de orientación a utilizar que, a su vez, deben de contemplar por los estados de los alumnos en cuestión.

En este sentido, constatamos como la base de orientación se elabora en base a unos conocimientos sobre la resolución de problemas, de acuerdo con unos objetivos de aprendizaje considerando unos determinados criterios de ejecución y forma, fijados sobre los conocimientos y creencias de los alumnos que deben utilizarla, pretendiendo facilitar a los

alumnos la gestión de las acciones que permiten desarrollar la resolución a un problema, con la intención de actuar sobre de sus creencias, proporcionándoles cierta seguridad y confianza para poder regular sus propios procesos de resolución y con ellos abordar los problemas cada vez, de manera más eficiente al tiempo que ir cobrando consciencia de ello.

Con todo ello es imprescindible que la base de orientación mantenga claro su objetivo final, el de acompañar al alumno en su aprendizaje para devenirse en un resolutor de problemas matemáticos autónomo. En definitiva, el objetivo final que se debe contemplar en la base de orientación para la resolución de es que los alumnos aprendan a regular por si mismos las acciones vinculadas a resolver problemas matemáticos lo que, a la vez, conduce a aprender a pensar matemáticamente. Se trata de promover la autorregulación de las acciones que conllevan la resolución de un problema y con ello gestionar las habilidades que con ellas se ponen en juego, para aprender a pensar matemáticamente, y, con el tiempo, poder resolver más problemas y hacerlo de manera más eficiente. Ello significa aprender a gestionar las capacidades para poder modelar, adecuar, optimizar y generar al tiempo que se aprende desarrollando las capacidades involucradas.

7.2.2 Análisis particular de los factores en la creación y refinamientos de las bases de orientación utilizadas

De acuerdo con nuestros análisis, resumimos aquí los aspectos observados que han permitido que la base de orientación transmita sentido global a la resolución de problemas a través de las acciones que las estructuran.

La base de orientación debe de estar construida en base a las etapas mínimas de resolución identificadas para la resolución de un problema y debe evidenciar la conexión que hay entre ellas. Si bien estas etapas inician de manera sucesiva y consecuente, hemos observado como conviven mientras se pretende resolver el problema. Estas etapas, en tanto que aparecen de manera sucesiva al enfrascarse con la resolución de un problema, en la base de orientación se pueden entender como niveles de implicación y que, de acuerdo con el apartado anterior, resumimos como: Entender la situación descrita, Determinar un plan de acción que permita dar con alguna conclusión sobre ella y Validar la tarea realizada dando respuestas coherentes.

De acuerdo con nuestros análisis, especialmente como se constata en el Análisis IV (capítulo 6), observamos que es posible hacer ejecutables los niveles de implicación del proceso resolución mediante la descripción de acciones concretas procedentes de cómo los resolutores expertos desarrollan sus resoluciones, de manera que los alumnos sean capaces de no sólo entenderlas, sino reconocerlas en su práctica y llevarlos a cabo. En este sentido, que no pierdan de vista que resolver un problema es una actividad continua en el tiempo, que se despliega gracias a la implicación y activación en diversas acciones. Por ello es importante que en la base de orientación se categoricen los enunciados de manera más significativa para los alumnos. Por ello, concluimos que es más natural, en la base de orientación, hablar de etapas o niveles de implicación, en lugar de dimensiones y dominios como utilizamos en la BO1, palabras del campo de evaluación que no son significativos en la dinámica de resolver un problema. Por ello, de aquí en adelante hablaremos de etapas o niveles de implicación y de acciones independientemente de la base de orientación utilizada en cada caso.

De acuerdo con que las necesidades de cada resolutor son distintas, no observamos que pueda haber una base de orientación para la resolución de problemas común y general que pueda ser utilizada de la misma manera para todos los resolutores no eficientes y en todos los problemas. Como tampoco somos capaces a identificar unas acciones o descripciones correspondientes únicas para conducir cada una de las etapas de resolución. Sin embargo, de acuerdo con el Análisis II (capítulo 4), y como volvemos a recopilar en la Tabla 7.4, identificamos un conjunto de palabras con cada una de las etapas o niveles de implicación que permiten caracterizar las acciones de resolución que, de acuerdo a las conclusiones 7.1 hemos vinculado a los subniveles de implicación. En este sentido, estos términos se presentan clasificados según las acciones que pueden describir para hacer efectiva cada uno de los niveles o sub-niveles de implicación, para relacionarlas o comunicarlas.

Resolver un problema			Descubrir	
ETAPAS o NIVELES DE IMPLICACIÓN	SUBNIVELES DE IMPLICACIÓN	ACCIONES DE DESARROLLO	ACCIONES DE CONEXIÓN	ACCIONES DE COMPRENSIÓN
Comprender el problema	Familiarizarse: identificar, señalar, separar, entender, aclarar, clarificar		jugar, manipular, hacer pruebas, probar	escribir, anotar,
	Organizar:	Expresar, representar, plantear, introducir, profundizar		
Tener un plan de acción	Buscar: Observar, recordar, examinar, combinar, repetir, cambiar, comparar, acercarse, diseñar, apuntar, intentar		Revisar, Repasar	detectar, localizar
	Convencer:	estructurar, argumentar, razonar, detallar, documentar		
Validar lo realizado	Interpretar: Comprobar, verificar, refutar, consolidar, completar		Analizar Justificar	volver, reiniciar
	Evaluar:	mejorar, simplificar, extender, incorporar, utilizar		

Tabla 7.4. Palabras vinculadas con la actividad de resolver un problema, claves en la generación de una base de orientación

Los distintos niveles de implicación así como las acciones a realizar, pueden aparecer más o menos desglosados en la base de orientación en función de las necesidades observadas en el grado de desempeño de los alumnos. En este sentido, en las bases de orientación BO1 y BO2 se identificaron 3 etapas, mientras que en la BO3 la etapa central fue desglosada en dos, manteniendo mostrando, con ello, las cuatro fases de resolución de Polya (1945). En este sentido del Análisis IV (capítulo 6) se confirma que a medida que se va hacia abajo en la base de orientación, el número de alumnos que completan cada etapa se hace más pequeño. En este sentido se observa que, la primera etapa es en la que más alumnos se involucran siguiendo el orden natural de un proceso de resolución, aunque, como sucede en las otras etapas, no todos los alumnos, muestran implicarse con todas las acciones asociadas a ella.

Es fundamental que el grado de precisión de las acciones sea adecuado, no sólo para que la base de orientación sea tomada en serio por los alumnos sino para que la puedan aplicar y puedan desarrollar las acciones de manera coherente y consecuente. Así lo enseña, por ejemplo, el Análisis III (capítulo 5) en el que se trata la acción general de representar la situación del problema sin concretar el modo de hacerlo. La generalidad utilizada muestra como los alumnos han podido desarrollar representaciones propias, dejando libre su

creatividad. Sin embargo se observa una falta de profundidad por lo que es necesario describir las acciones que puedan ayudar a completarlos. Por consiguiente se confirma la necesidad que cualquier base de orientación ligada a la resolución de problemas considere alguna acción dedicada a la expresión del problema, invitando a utilizar cualquier forma de representación pero que implique a los alumnos analizar más profundamente los datos y sus relaciones.

Como se ha justificado, resolver un problema es un proceso no lineal, de carácter cíclico en sí mismo. Por ello es necesario que la base de orientación transmita este sentido. Del Análisis III (capítulo 5) se desprende que considerar una acción dedicada a la revisión del error es una garantía de ello. Con Figura 5.46 del citado análisis (capítulo 5) se muestra como el trato del error que se dio en la base de orientación BO2, al establecer una relación directa con las otras acciones consideradas y, por consiguiente estados, se confirmó de manera evidente la naturaleza cíclica del proceso de resolución de un problema y que es necesario que la base de orientación transmita para que los alumnos así lo perciban.

Los distintos análisis realizados nos han permitido identificar acciones vinculadas a la resolución de problemas que resultan más costosas para los alumnos. En este sentido, las dificultades observadas en los resolutores menos eficientes, confirman la necesidad de que una base de orientación para la resolución de problemas incite la inversión de tiempo en una mayor comprensión del sentido global del problema, la representación de la situación del problema, estimular la descripción de las ideas que llevan a elegir cada decisión de manera más consistente, potenciar la aceptación y reconducción del atasco, comprobar las distintas acciones desarrolladas especialmente de acuerdo con las condiciones del enunciado y explicitar una respuesta y distintiva de los razonamientos propios de los procesos estratégicos desarrollados de manera coherente.

Del Análisis III (capítulo 5) se desprende que, hasta que los alumnos no lo interioricen, la base de orientación destinada a guiar la resolución de un problema, debe contemplar, al menos, un punto distinguido para la revisión del atasco (entendida como el hecho de equivocarse o bloquearse durante la resolución del problema con el objetivo que los alumnos acepten los errores como algo natural e inherente a la resolución de problemas, y se impliquen reconducirlos, pues sin bloqueo no hay problema y sin su reconducción no hay aprendizaje (Mason et al., 1982; Sanmartí, 2007).

Como mínimo para ello, es necesario, que los alumnos registren las ideas que tienen y desarrollos que llevan a cabo. El trato del error requiere poder volver atrás en el proceso. Si no se deja por escrito, es imposible recuperarlo y sin ello no es posible reconducirlo ni evitar cometer el mismo error. De la misma manera resolver un problema no es solo dar con alguna solución, sino ser capaz de explicar cómo se ha llegado a ella. Por tanto, de resumir y ligar todo aquello que finalmente puede justificar lo que uno ha ideado y observado. Por ello, al resolver un problema es imprescindible describir lo que uno va haciendo, al mismo tiempo que explicar, finalmente, lo que justifica lo que se responde. La dificultad observada en los alumnos para describir y diferenciar estas dos ideas, apuntan a la necesidad de ser contempladas de manera explícita y separada en una base de orientación, de acuerdo con el Análisis III (Capítulo 5), en las que se observan intentos interesantes de verbalización pero con falta de profundización y distinción entre formar parte del desarrollo o justificación final.

Como hemos avanzado, del Análisis III (capítulo 5) se constata que el trato del error, a su vez, refleja el sentido no lineal de resolver un problema y que se hace imprescindible para que los alumnos acepten el hecho de no encontrar una respuesta de forma inmediata.

Relacionado con ello, el Análisis IV (capítulo 6) concluye con la necesidad de trabajar y matizar bien las acciones vinculadas con la comprobación (o verificación), pues aún siendo explícitas, se observa gran dificultad de los alumnos en aplicarlas adecuadamente. De acuerdo con dicho análisis (capítulo 6) Se observa como los alumnos pueden aplicarlas pero de manera ineficiente. Así, por ejemplo, habiendo revisado que la estrategia seguida encaja con los datos del problema o revisadas las respuestas de acuerdo con las tareas planteadas, siguen malinterpretando las condiciones del enunciado. De ahí el énfasis en que en la base de orientación contemple el hecho de tomar en tiempo en comprender la situación que se expone además de desplegar bien las acciones necesarias para lograr una comprobación eficiente.

En este sentido, para la descripción de las acciones hemos observado como el uso de un lenguaje claro y preciso, al mismo tiempo que utilizar estructuras gramaticales sencillas parece ser clave para que la base de orientación no sólo sea entendida por los alumnos, sino para que les resulte útil lo largo de su proceso de resolución y puedan aplicar y desarrollar las acciones que se describen de manera coherente y consecuente. En este sentido, el Análisis III (capítulo 5) y el Análisis IV (capítulo 6) enseñan como los alumnos señalaban e incluso criticaban de manera constructiva aquellas palabras o expresiones que no entendían.

También es importante la persona y el tiempo verbal utilizado para implicar a los alumnos en el estado de resolución. De los análisis Análisis II (capítulo 4) y Análisis IV (capítulo 6), se concluye que el uso de la 1ª persona y la descripción de las acciones en tiempo presente de indicativo o pretérito perfecto compuesto consiguen mantener la atención de los alumnos. En este sentido, puede que el uso del pretérito perfecto compuesto transmita una idea no tan lineal de la resolución del problema.

En cuanto a la percepción visual del instrumento, en la que se presenta la base de orientación como una tabla en la que describen las acciones vinculadas a los niveles de implicación, de acuerdo con el Análisis III (capítulo 5) observamos como los alumnos involucrados tienen suficientemente conocimiento para utilizar tablas y que, de acuerdo con el Análisis IV (capítulo 6) no inhibe el modelo cíclico que se pretende, al mismo tiempo, desarrollar. Del Análisis IV (capítulo 6), constatamos además como dicha estructura permite a los alumnos reseguir sus acciones y señalarlas a medida que las aplican, lo que al final, permite una reflexión más profunda sobre los posibles obstáculos.

Como hemos comentado, la base de orientación debe de contener todas las acciones que los docentes pretendan que los alumnos interioricen. Sin embargo, como se desprende del Análisis II (capítulo 5), todas las acciones que describe la base de orientación deben de ser las mínimas necesarias, pues en exceso inhibiría el pensamiento de los alumnos, y lo más directas concisas posible, evitando redundancias y repeticiones, para que puedan acceder a ellas y así interiorizarlas de manera significativa. Así lo constatan el Análisis I (capítulo 3) de acuerdo con las observaciones de los alumnos a la BO1 en las que un exceso de redundancia o repeticiones les molestaba especialmente. Hay que recordar que, en caso de ser necesario, la base de orientación se puede simplificar o ensanchar.

En otras palabras, es necesario que la base de orientación se construya de manera que permita la ampliación o simplificación de las acciones que la comprenden de la manera más natural posible, sin alterar el hilo conductor de la misma, tanto en forma como en descripciones. Debe permitir destacar o incorporar aquellos aspectos que se puedan ver necesarios en cada alumno, a la vez que unificar o retirar aquellos que se vayan alcanzando con el tiempo, de manera que no suponga un cambio radical en el quehacer de los alumnos.

En relación a ello, en el Análisis III (capítulo 5) se reconocen 6 situaciones de atasco, entendido como el tradicional error o el temido bloqueo, que, como se recupera en la Tabla 7.5, se convierte en un punto de partida para posibles ampliaciones de la base de orientación considerada, especialmente para profundizar el reconocimiento de la naturaleza y el enfrentamiento a los posibles obstáculos.

Situaciones de atasco	Descripción
g) Falta de comprensión	Percatarse de no entender la situación descrita del problema, alguna de sus partes o de los datos que presenta.
h) Representaciones inadecuadas	Advertir que la representación (expresión o pruebas) realizada de la situación descrita del problema no se corresponde con lo expuesto en dicha situación.
i) Estrategia inadecuada	Notar que la estrategia utilizada no es adecuada para la finalidad que se pretende resolver.
j) Datos o razonamientos inapropiados	Apreciar que se consideran datos o razonamientos no adecuados para aplicar una estrategia.
k) Errores de aplicación	Reparar que se cometen errores de aplicación.
l) Explicaciones imprecisas	Percibir que la exposición de las descripciones (explicaciones, conclusiones...) son confusas, impropias o que contienen partes incorrectas o inadecuadas, ya sean de lengua (expresión escrita) o de carácter matemático.

Tabla 7.5. Situaciones de atasco identificadas

En otras palabras, la relación de atascos obtenida se convierte en sí misma una particular base de orientación dedicada a guiar y organizar específicamente el enfrentamiento a las situaciones de atasco cuando aún no se ha interiorizado esta dimensión específica dedicada a los obstáculos, proporcionando así completitud a la base de orientación inicial, que podrían recordarse como muestra la Tabla 7.6.

¿Dónde me atasco?
a) En entender la situación
b) En representar la situación
c) En buscar alguna estrategia
d) En detectar los datos o razonamientos
e) En las acciones para desarrollar la estrategia
f) En las explicaciones sobre lo que hago

Tabla 7.6. Reconducción de situaciones de atasco

Finalmente, y en cuanto a la consecución de las bases de orientación elaboradas y utilizadas remarcar que la primera de ellas BO1 fue clave para la elaboración de las siguientes BO2 y BO3, como la BO2 para la BO3. Cada una de ellas aportó aspectos relevantes para la

consecución de la siguiente. Con la BO1 pudimos entrever las distintas etapas y acciones vinculadas con la resolución de problemas. Con la BO2 pudimos reorganizar y afinar dichas acciones de acuerdo con las tres etapas mínimas observadas que los alumnos podían entender. Finalmente, con la BO3 intentamos desplegar la segunda etapa en dos, de acuerdo con las fases intermedias de Polya, con una doble pero relacionada intención: promover más acentuadamente el registro de las propias argumentaciones al mismo tiempo que estudiar como desplegar dichas etapas en acciones operacionables para los alumnos. Al mismo tiempo se pretendió involucrar más los alumnos con la reflexión de sus acciones y por ello el uso de la BO3 se introdujo de manera que los alumnos fueran marcando las acciones que, de acuerdo con su práctica, aplicaban o pensaban que habían aplicado.

7.3 Conclusiones relativas al Tercer Objetivo

O3. *Aplicar el instrumento con finalidad reguladora para la competencia de resolución de problemas matemáticos desarrollado y analizar los efectos de su utilización.*

Como hemos argumentado en el apartado anterior de este capítulo (apartado 2, capítulo 7) con el proyecto que con este trabajo presentamos se han desarrollado dos clases de instrumentos con finalidad reguladora para trabajar la competencia de resolución de problemas en alumnos de 6º curso de Educación Primaria y 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria, uno con intención formativa, la rúbrica de desempeño, y otro con intención formadora, la base de orientación (Sanmartí, 2010). Sin embargo, la observada necesidad de disponer de un instrumento con finalidad formadora sobre el cual poder construir el formativo, y ante los indicios de su aceptación positiva tanto entre alumnos como docentes, condujo nuestro interés a la generación y uso del instrumento con intenciones formadoras, en este caso, la base de orientación para la resolución de problemas matemáticos.

La generación de dicho instrumento ha ido ligada a un proceso reiterado de su utilización, de manera que las observaciones extraídas en cada una de las implementaciones ha permitido adecuar algunos de sus aspectos que pudieran resultar poco afinados, ausentes o repetitivos, dando lugar a nueva versión de la base de orientación. De ello tratan las conclusiones relativas al segundo objetivo del estudio descritas en el apartado anterior de este capítulo (apartado 2, capítulo 7). De manera paralela, los análisis de las distintas versiones y de sus implementaciones, han permitido analizar los efectos que puede conllevar la utilización de una base de orientación para la resolución de problemas por parte tanto de los alumnos, a quienes va dirigido inicialmente el instrumento, como de los docentes implicados que, como conductores de su aprendizaje, gestionan su utilización. Si bien parte de estos efectos se afectan mutuamente, intentamos en este apartado de las conclusiones distinguir entre los, en mayor medida, tienen consecuencias en el uso por parte de los alumnos de los que parece que recaen en la práctica de los docentes. Finalmente, aunque conscientes de su dificultad, presentamos los resultados a un primer intento de medir el impacto de la última de las bases de orientación implementadas, la base de orientación BO3, como auto-andamiaje de la resolución de problemas.

7.3.1 Efecto del uso de una base de orientación para la resolución de problemas en los alumnos

En el Análisis I (capítulo 3) concluimos que cuando la finalidad de la resolución de problemas recae en el aprendizaje de la resolución en sí misma, el uso de una base de orientación adecuada puede ser una práctica satisfactoria para ayudar a los alumnos en la adquisición de dicha competencia. Decimos puede, porque como se concluye de manera destacada en los dos apartados anteriores de este capítulo (apartado 1 y apartado 2, capítulo 7), es necesario afinar bien el material utilizado, tanto para que pueda ser considerado por los alumnos, como para que estimule en ellos las habilidades que se pretende. Así, no sólo cabe seleccionar y adecuar los problemas con los que se quiere trabajar la base de orientación, en tanto que no se traten de simples ejercicios para los alumnos, sino y, sobre todo, la base de orientación, en cuanto que les sea accesible, cubra distintas de sus necesidades y la perciban como un instrumento útil al mismo tiempo que éste estimule su quehacer. Con todo ello, las evidencias analizadas de las diferentes implementaciones muestran como los alumnos, aunque con matices,

consideraron positivo el uso de una base de orientación, se implicaron con su uso y participaron en su adecuación. Observamos, con ello, como la implementación de una base de orientación para la resolución de problemas puede influir en aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos de los alumnos en cuanto a la tarea que esta pretende que los alumnos desempeñen, la de resolver un problema matemático. De los distintos análisis, como veremos ahora, el uso de la base de orientación toma un papel incidente, y entendemos que positivo, en todas ellas.

Las percepciones de los alumnos participantes en la Implementación Primera recogidas en el Análisis II (capítulo 4) sobre la base de orientación BO1 y de su uso, así como de las evidencias de su uso estudiadas en este mismo análisis, muestran que los alumnos se interesaron por la base de orientación sugerida y se mostraron interesados en su adecuación. Aunque con matices, se desprende una aprobación de la base de orientación en particular utilizada, la BO1 en las edades implicadas, así como una incipiente acogida por parte de los alumnos implicados a la propuesta de usar una base de orientación para resolver un problema matemático. De aquí nuestro interés en analizar qué pudo conllevar su uso así como enfocar parte importante de nuestro trabajo en la adecuación de la misma de acuerdo con las observaciones sobre ella y su uso recibidas.

En cuanto a los matices a los que nos referimos, distinguimos entre los que afectan directamente a la aceptación del uso de una base de orientación como un instrumento para la resolución de problemas, y de aquellos que van ligados a la adecuación de aspectos particulares de la base de orientación utilizada. En este apartado hablaremos de los primeros, en tanto que los segundos se han tratado en el apartado anterior del presente capítulo (apartado 2, capítulo 7).

Observamos que, en gran medida, la aceptación del uso de una base de orientación como un instrumento para la resolución de problemas va ligada al sistema de creencias de los alumnos y las costumbres sociomatemáticas del aula en la que se encuentran los alumnos. El uso de una base de orientación introduce un cambio en distintos aspectos del aula. Por un lado ciertos cambios metodológicos, por tratarse en sí mismo de un nuevo instrumento para la resolución de problemas. Por otro, y más relacionado con las costumbre sociomatemáticas, que consigo lleva asociado propuestas de cómo actuar en frente de un problema matemático. En este sentido, los Análisis I (capítulo 3), Análisis II (capítulo 4) y Análisis III (capítulo 5) dan cuenta como las prácticas anteriores, las costumbres sociomatemáticas del aula y las creencias de los alumnos juegan un papel importante en la consideración de la base de orientación y puesta en práctica de las acciones que propone.

En particular, del Análisis I (capítulo 3) y Análisis II (capítulo 4) observamos que para que los alumnos puedan considerar la base de orientación como algo útil no es suficiente que los docentes recuerden a los alumnos que deban usarla, sino que deben hacer efectiva su utilidad en la práctica de resolver, mostrando y demostrando la necesidad y utilidad de las acciones que conlleva. Si bien en todas las aulas se debía introducir la base de orientación leyéndola y comentándola conjuntamente docente y alumnos, el énfasis que pudieran darle en las distintas sesiones quedó en mayor parte a disposición del docente. En este sentido hemos observado como las producciones de los alumnos del grupo en qué el docente incidió en la puesta en común considerando la base de orientación, o bien en los que se introdujo la base

de orientación de manera que los alumnos debían ir marcando las acciones que consideraban ir aplicando han mostrado una implementación más efectiva de la base de orientación, en tanto que por ejemplo, sus producciones son más ricas, al aportar más datos correspondientes a las acciones que la propia base de orientación propone de llevar a cabo. Estas necesidades recuerdan las conclusiones de Yackel y Cobb (1996) cuando dicen que el profesor desempeña un papel central en el establecimiento de costumbres para la actividad matemática de los alumnos. Con ello, observamos como el docente juega un papel crítico en la gestión adecuada de los recursos utilizados en el aula para que promuevan la adquisición efectiva de actitudes y habilidades matemáticas para la resolución de problemas.

Por otro lado, de acuerdo con el Análisis II (capítulo 4) las evidencias parecen constatar que la consideración y uso de la base de orientación no ha sido influenciada por el nivel educativo en qué se encuentran los alumnos participantes o por el modo de trabajo de los problemas, sino, como ya hemos discutido, del énfasis que los docentes hayan podido realizar en las aulas en cuanto al uso de la misma. En este sentido, si bien hemos observado que la adecuación es fundamental para los alumnos de cualquiera de las edades implicadas para que puedan comprender las acciones que comprende, no se observa que la consideración o el uso de la base de orientación hayan incrementado o disminuido por el hecho de cursar un curso u otro. De la misma manera, no hemos encontrado evidencias que el hecho de trabajar los problemas con la base de orientación de manera individual o por parejas inhiba o potencie el uso de la base de orientación para resolver los problemas. En este sentido, hemos observado que aún trabajando en pequeño grupo se ha tenido en cuenta la base de orientación para resolver el problema en cuestión en la misma profundidad como se observa en las producciones desarrolladas a nivel individual.

De manera paralela tampoco parece que el contexto de los problemas fuera motivo de más o menos implicación en cuanto a la consideración de la base de orientación. Los problemas estudiados más a fondo han sido los Pb0 (en sus dos versiones Pb0.a0 y Pb0.a2), Pb1.3.a1 y Pb1.4.a1, Pb6 (en sus dos versiones Pb6.a1 y Pb6.a2) y Pb7.a1. Como se describe en el apartado 3 de la Metodología (capítulo 2), los problemas Pb0.2, Pb6.1 y Pb7.1, están formulados en un contexto de la vida cotidiana, mientras que los problemas Pb1.3 y Pb1.4 están contextualizados en la misma matemática. Observamos que la riqueza, en cuanto a la información que presentan las producciones de los alumnos a cualquiera de estos problemas no es visiblemente diferente.

A pesar de la reticencia que algunos alumnos presentaron en utilizar la base de orientación, de las tres Implementaciones, pero especialmente de la Segunda y la Tercera, donde las acciones de la base de orientación habían sido refinadas, se confirma que los alumnos que consideraron la base de orientación en cada caso, fueron capaces de entenderla, organizada en formato tabla y más que ello, que las acciones descritas les permitieran entender, identificar y ser conscientes de las etapas de resolución por los que pasa un resolutor de problemas matemáticos y cómo estos se pueden operacionalizar. Además de ello, del Análisis III (capítulo 5), especialmente, se observa la creatividad en sus producciones usando la base de orientación, en tanto que se aprecian resoluciones distintas en todas sus facetas, y más que distintas, observamos la conjunción de distintos conocimientos y procedimientos para llegar a un mismo fin. Al mismo tiempo, se pueden identificar distintos niveles de realización y de verbalización de dichas acciones. Con ello observamos como las bases de orientación utilizadas

no inhibieron ni apagaron la creatividad de los alumnos. Así nos lo enseñan los análisis parciales del capítulo 5 en cuanto a tres de las dimensiones particulares de la Base de Orientación BO2 utilizada en la Implementación Segunda y recogemos a continuación.

Con el análisis de la dimensión tercera de la BO2, dedicada a la representación, observamos como los alumnos fueron capaces de redefinir el enunciado del problema para entenderlo mejor, mediante estructuras y lenguajes diversos. La base de orientación utilizada en este caso (BO2) recuerda la necesidad de representar, pero observamos cómo cada alumno se enfrentó a dicha acción en función de sus conocimientos y orientaciones. Con ello, se manifiestan distintas maneras de representación en función de un lenguaje más bien descriptivo o visual, comprendiendo este segundo aspectos esquemáticos o icónicos. Del estudio se desprende además, como las representaciones de los alumnos se centran en determinados aspectos del enunciado, obviando de otros, en distintos casos.

Lo mismo se desprende del análisis realizado sobre la sexta dimensión de la base de orientación BO2, dedicada a la descripción de los procesos de resolución. En este sentido, de acuerdo con el análisis realizado, encontramos variedad en los modos en qué los alumnos intentaron encaminar una estrategia de resolución. En este sentido, se distinguen pruebas inicialmente organizadas o no organizadas, que nos permiten hablar de procesos de resolución basadas en la deducción; o el intento de examinar estructuras, que podríamos generalizar como en la búsqueda de analogías. Dentro de éste grupo hemos podido distinguir entre procesos basados en usar un modelo, sugerir patrones o reorganizar relaciones. A su vez, el análisis permite identificar distintas aproximaciones de argumentar los procesos desarrollados. En este aspecto, se distinguen explicaciones de tipo reproductivo, cuando se limitan a explicar la mecánica que se lleva a cabo; explicativos, cuando describen lo que se pretende con las acciones; o argumentativos, cuando intentan razonar el porqué de lo que se está realizando.

En cuanto a dar una respuesta precisa a las cuestiones formuladas del problema, como objeto de análisis se observa que los alumnos involucrados en el uso de la base de orientación, presentaron intentos de argumentación pero que a menudo estos fueron parciales o poco claros. Por ello, y de cara a intentar estimular la comprobación, pensamos que hace falta un énfasis importante en este aspecto de la base de orientación. En este sentido detectamos una falta de precisión o de completitud en la necesidad de disponer de una respuesta clara a las cuestiones formuladas que, a su vez, debe conllevar, de manera natural, la justificación coherente de la misma.

Con ello, corroboramos como las distintas acciones que presenta cada una de las bases de orientación pueden potenciar el uso de los conocimientos para fines concretos, y estimular la conexión entre ellos, al mismo tiempo que no ser impedimento para la creación, sino lo contrario en tanto que deja la libertad suficiente para que se pueda desarrollar una acción de resolución concreta en función de los conocimientos que para ello se dispongan.

En este sentido, de acuerdo con el Análisis I (capítulo 3) observamos como una base de orientación adecuada estimula a los alumnos que la utilizan a verbalizar sus pensamientos, hecho imprescindible si lo que queremos es que los propios alumnos puedan reflexionar sobre su práctica. Con ello no se dice que la base de orientación, por si sola, estimule a un alumno a resolver un problema pero sí que, delante de una situación problemática que logre involucrar al alumno, la base de orientación consigue allanar el camino al alumno para que este pueda

exponer sus procesos lo más ampliamente posible al mismo tiempo que reflexionar sobre ellos para situaciones posteriores. En este sentido, cabe recordar que los alumnos se mostraron interesados por los problemas pues, según sus propias palabras, aunque eran difíciles eran “chulos” y distraídos, porque hacían pensar. Con ello, concluimos que trabajar problemas ricos y atractivos para los alumnos, junto con el soporte del uso de una base de orientación, permite a los alumnos sentirse motivados a resolver, al mismo tiempo que ayudados para comunicar y compartir los procesos que van desarrollando y con ello reflexionar sobre su práctica.

Del Análisis III (capítulo 5) se desprende como el uso de una base de orientación, parece no sólo ayudar en el desarrollo de la capacidad para detectar una situación de bloqueo (entendida como el hecho de equivocarse o atascarse durante la resolución del problema), sino de aceptarlo y esforzarse en corregirlo. Como se discute en tal análisis la contribución del uso de la base de orientación a que los alumnos no abandonen y sigan con otros intentos muestra como se enfrentan a las situaciones de bloqueo. Así mismo, con el Análisis IV (capítulo 6), observamos como la gestión de las comprobaciones es complicada pues, aun observando que los alumnos las han podido llevar a cabo, no siempre lo han hecho de manera adecuada o satisfactoria.

El Análisis IV (capítulo 6) muestra, en particular, como alumnos, a pesar de haber aplicado dichas acciones, siguieron mal interpretando algunos factores impidiéndoles darse cuenta que la comprobación es incorrecta y, por tanto, que conlleva a algún error, en estos casos, como vemos, vinculadas dificultades de comprensión. Esta dificultad de comprensión se ve relacionada también con la falta de completitud, de acuerdo con el Análisis III (capítulo 5), observada en las representaciones de las producciones de los alumnos, independientemente de si se quedaban en una representación para entender mejor el problema o de preparación para una estrategia. Dificultad que parece compartida con incluso alumnos de alto rendimiento, quienes aun habiendo revisado sus respuestas de acuerdo con las tareas planteadas, pueden seguir mal interpretándolas (Elia et al., 2009), a lo que, a su vez, constatamos con los resultados del Análisis III (capítulo 5), en cuanto que los alumnos que aun habiendo razonado relativamente bien el proceso de resolución del problema, no respondieron concretamente o de acuerdo a la cuestión formulada en el problema. Con ello volvemos a la idea que las ideas preconcebidas de los alumnos prevalecen por encima de sus razonamientos. Así mismo observamos cómo este comportamiento tampoco es generalizado en un mismo alumno. Hemos observado como un mismo alumno, aunque siempre contestara las cuestiones formuladas (respondiendo así a las acciones de la base de orientación) podría hacerlo de manera más o menos profunda en función de un u otro problema. Con ello, parece fundamental centrarse en que los alumnos puedan comprobar con mayor eficacia tanto su interpretación de las expectativas de trabajo como sus resultados. En este sentido, pensamos que la petición de una respuesta retrospectiva en cuanto al trabajo desarrollado por el alumno observada en las producciones analizadas en el Análisis III (capítulo 5), podría ser de ayuda.

Como constatamos en dicho análisis, si bien los alumnos fueron capaces de desarrollar ciertas estrategias, reconducirlas y, en parte, verbalizarlas, en las resoluciones, se observa, aun habiendo respuesta y evidencias de miradas retrospectivas, una falta de síntesis global y retrospectiva de las ideas fundamentales o clave trabajadas. El énfasis en que se desarrollara esta práctica, pensamos que permitiría reflejar lo que se entiende en cada momento, comprobarlo a la vez que conlleva incidir en la necesidad al tanto que resumir la acción

desarrollada y aprender del proceso. En este sentido, parece que la base de orientación debería incidir más en este punto, probablemente no lo suficientemente desarrollado en las implementadas. Con todo ello ratificamos la importancia que cobran las acciones relacionadas con la comprobación y la detección, aceptación y reconducción del error en aprendizaje del alumno y que el uso de una base de orientación permite analizar y desarrollar.

Es importante que los alumnos perciban bien el sentido de la base de orientación, en tanto que pretende ser un soporte de trabajo para no perder de vista el objetivo a lograr, así como organizar la tarea a desempeñar, y no un conjunto cerrado de reglas estrictas. En este sentido parece que la organización de la base de orientación en los estados por los que pasa un resolutor experto con la presentación de acciones concretas lo permite. Valoramos positivamente el hecho de introducir las bases de orientación de manera conjunta en el aula, discutiéndolas y analizándolas y complementándolas conjuntamente docentes y alumnos. En este sentido, comentarios como *“Sí, pero depende de qué problema no haría falta seguir todos los pasos pero es importante porque así no te olvidas de hacer ningún paso y puedes hacerlo mejor. (C3_SC1A25)”* procedente de uno de los alumnos del grupo SC1A de la Implementación Primera sobre el uso de la base de orientación confirman esta percepción.

De acuerdo con el Análisis II (capítulo 4), considerar la base de la orientación permitió a los alumnos reflexionar sobre, no sólo el uso de la misma, sino sobre el proceso que, en particular, supone resolver un problema matemático, de las etapas en qué se pueden encontrar como resolutores y de las acciones que va desarrollando, y así compararlo con su práctica que reconocen como habitual. Cualquier tipo de aportación en este sentido por parte de los alumnos, pensamos que demuestra un intento en considerarla, entenderla, en reflexionar sobre su uso, y en un primer paso para integrarla en su práctica. De nuevo recordamos que en base a las producciones de los alumnos del aula SC1A, donde el docente, más que incidir en el uso de la misma, le dio funcionalidad más allá que durante el proceso de resolución, dándole importancia por ejemplo, en los momentos de revisión conjunta hizo que los alumnos tuvieran más consciencia de la base de orientación, la utilizaran de manera más natural y fueran capaces de reconocer cada uno de los pasos que desempeñaban al resolver un problema, cuando el mismo profesor había hecho explícito previamente, la falta de autonomía de estos alumnos. Esta práctica permite a los alumnos darse cuenta de las acciones llevadas o no a cabo y la implicación de haberlas o no desarrollado. Con ello concluimos que la implementación de la base de orientación es una práctica de aula que conlleva la reflexión, por parte de los propios alumnos, de su utilización.

En la misma línea, valoramos positivamente el hecho de introducir el uso de la base de orientación de manera que los alumnos tengan que marcar las acciones que creen ir aplicando. Además de asegurar la implicación de los alumnos con ella, observamos que potencia su familiarización con las acciones. En este sentido, la base de orientación tiene una utilidad retrospectiva, en tanto que proporciona una retroalimentación a la propia práctica y reflexión de la misma. De hecho, como constata el docente EP6 la introducción de la base de orientación permitió a los alumnos percatarse del proceso mental que uno debe de hacer para resolver un problema, lo que valora muy positivamente.

7.3.2 Efectos en la práctica docente

En primer lugar, cabe destacar la buena acogida por parte de los docentes implicados de la introducción de una base de orientación para que los alumnos puedan desarrollar su competencia en resolución de problemas e hicieron aportaciones significativas en relación a las bases de orientación utilizadas.

De acuerdo con Murata (2011) percibimos la enseñanza como un proceso interactivo en el que los conocimientos de los alumnos y su aprendizaje se integran gracias a la mediación eficaz del docente. En este sentido, se entiende la enseñanza como un proceso interactivo en el que los docentes pueden facilitar su aprendizaje tejiendo conjuntamente las ideas que emergen. Para ello los docentes necesitan conocer cómo los alumnos comúnmente piensan y expresan su pensamiento.

En este sentido percibimos como la base de orientación se convierte en un instrumento que permite establecer esta comunicación necesaria e imprescindible entre alumnos y docente. De los distintos análisis concluimos como la base de orientación, construida como un instrumento con finalidad formadora para la resolución de problemas matemáticos de los alumnos, además de contribuir a ello, se convierte en un instrumento de carácter formativo y formador para los propios docentes, además de dar sentido y coherencia a cualquier proceso de enseñanza de la resolución de problemas.

Como ya hemos argumentado una base de orientación adecuada promueve la verbalización de las acciones del proceso de resolución de los alumnos. Con la verbalización de sus pensamientos, los alumnos pueden reflexionar sobre sus propios procesos de resolución siguiendo la base de orientación, pero también los docentes quienes, al disponer de resoluciones más que de soluciones desarrolladas en base a una base de base de orientación concreta, permite y facilita a los docentes entender y atender mejor tanto las necesidades como los logros de los alumnos. Posibilita a los docentes identificar mejor los conocimientos que utilizan, la manera en qué los utilizan así como cada una de las acciones de resolución que desarrollan. Al disponer de esta información, cobra sentido la revisión de las resoluciones de acuerdo con la base de orientación utilizada permitiendo una evaluación de los progresos de los alumnos de manera competente al mismo tiempo que adaptar el material utilizado a sus necesidades.

De hecho, especialmente del Análisis III (capítulo 5), observamos que las revisiones de las resoluciones de los alumnos de acuerdo con la base de orientación se convierten en un factor clave en este sentido para enriquecer y perfeccionar el acompañamiento de resolver un problema. Como nos enseñan los análisis parciales del Análisis III (capítulo 5), permite por un lado, afinar con las acciones a realizar y poder complementarlas en caso de ser necesario, así como estudiar el grado de completitud del desempeño de resolución de los alumnos. En este sentido, observamos cómo sólo la evaluación constructiva de la misma base de orientación de acuerdo con las necesidades y logros de los alumnos permite la adecuación y completitud necesaria de la misma.

La implementación de una base de orientación ha revelado como su aceptación va vinculada a prácticas anteriores, las costumbres sociomatemáticas del aula, las creencias de los alumnos y la poca flexibilidad que, en general, que los alumnos muestran en aceptar cambios

metodológicos. Por ello la base de orientación a utilizar debe permitir a los alumnos sentirse cómodos con su uso. Ligado a ello, destacamos la relevancia que toma el interés que los docentes implicados puedan mostrar, así como el uso que le dan en el aula. En este sentido, de acuerdo con las observaciones de los docentes recogidas en el Análisis I (capítulo 3) que le pueda dar el docente al instrumento así como el interés que el docente muestre hacia su utilización, serán factores positivos en la práctica con el mismo instrumento por parte de los alumnos, especialmente atendiendo los obstáculos que general pueden provocar los cambios entre los alumnos y más cuando estos puedan mostrar creencias procedentes de prácticas anteriores. Con ello se remarca que un uso satisfactorio de una base de orientación va asociada a un uso continuo de la misma y desde edades tempranas.

Con ello, podemos concluir que la implementación efectiva de una base de orientación requiere de:

- un uso constante y significativo del instrumento en el aula
- tiempo, no se trata de un proceso automático, pues requiere de un de familiarización y habituación.
- la implicación del docente
 - una revisión constructiva que se puede conseguir mediante un proceso de análisis y valoración constante.
 - una adecuación continua de la misma, es fundamental ir adaptando bien el material de trabajo a medida que las necesidades de los alumnos se van modificando.

En definitiva, como se desprende de Análisis II (capítulo 4), y se pretende ilustrar con la Figura 4.19 observamos como la base de orientación, además de actuar como un instrumento formador de la actividad de los alumnos, liga y da coherencia a las tres acciones básicas que entendemos determinan la actividad, cíclica, de los docentes y que gira en torno a planificar, gestionar y evaluar:

- Planificar: escoger, diseñar o adaptar la base de orientación, en particular, y los problemas a utilizar, en función de las necesidades, creencias y logros observados en la práctica de los alumnos y los objetivos que se pretenden lograr.
- Gestionar: observar cómo los alumnos resuelven el problema utilizando la base de orientación y revisan sus producciones de acuerdo con la base de orientación, y recoger los datos vinculados a ellos.
- Evaluar: analizar los datos recopilados y adecuar lo que convenga para que se ajusten a los objetivos marcados, y registrar los distintos cambios para posteriores iteraciones.

Volviendo al interés por la generación de un instrumento regulador de la resolución de problemas con carácter formativo, pensamos que los análisis de las dimensiones 3 y 6 de la base de orientación BO2 que se realizan en el capítulo 5 proporcionan instrumentos que pueden facilitar la comprensión y posterior evaluación, en su sentido más amplio, de las producciones de los alumnos, al mismo tiempo que, y en consecuencia, permitir refinamientos particulares de las bases de orientación utilizadas. Estos instrumentos, todos ellos descritos en el Análisis III (capítulo 5) son la Tabla 5.3 que presenta distintos niveles de implicación en cuanto a la representación del enunciado del problema, la Tabla 5.4 que describe distintos tipos de representación, la Tabla 5.6 que proporciona tres niveles de verbalización de las

argumentaciones de los alumnos, y la Tabla 5.5 que presenta distintos procesos estratégicos de carácter heurístico identificados agrupados por su naturaleza.

7.3.3 La base de orientación como auto-andamiaje educativo de los alumnos

Con la experimentación desarrollada en la Implementación Tercera, pretendimos medir la eficacia de la base de orientación BO3 como auto-andamiaje de la resolución de problemas matemáticos para los alumnos. La pregunta se concentraba en poder responder a sí, y en qué medida, la base de orientación en cuestión soporta un comportamiento de auto-andamiaje en la resolución de problemas matemáticos de los alumnos. Como cualquier dinámica de aula observamos que medir el grado de implicación de los alumnos en el uso de la base de orientación es complejo. Sin embargo, tratamos de abordarlo. Para ello, como se ha avanzado en la Metodología del trabajo (capítulo 2), además de los análisis cualitativos, introdujimos pequeños análisis cuantitativos a través del Test Exacto de Fisher, que nos han permitido precisar y a la vez ampliar las observaciones cualitativas realizadas.

A diferencia de las dos primeras Implementaciones, en la Implementación Tercera, se propuso que los alumnos marcaran de manera explícita en el papel donde tenían la base de orientación descrita (en este caso la BO3) las acciones de la base de orientación que creyeran haber aplicado. Como ya hemos avanzado, con ello se pretendía garantizar que los alumnos se involucraran con ella más de lo que anteriormente habíamos observado con solo leerla.

Introducir el uso de la base de orientación de este modo permitió establecer una correspondencia directa entre las acciones marcadas y las evidencias de las acciones en las resoluciones de los alumnos. En este sentido, confirmamos que los alumnos se tomaron en serio la base de orientación e intentaron aplicarla, en tanto que las acciones marcadas son observables en sus producciones. Esta relación se convierte, así, en un indicador de la toma de responsabilidad permitiendo, con ello, cierto desvanecimiento directo de la guía específica del profesor.

Además, la base de orientación responde de manera contingente a las necesidades de los alumnos en tanto que éstos fueron capaces de conectar las acciones de la base de orientación con su propia actividad y aquellos que se encontraron con dificultades que además hicieron explícitas, persistieron hasta al menos la acción siguiente de la base de orientación. En este sentido, observamos como la base de orientación es un instrumento que establece acciones vinculadas a la resolución de problemas basadas en la dinámica de expertos que, distribuidas en las distintas etapas de resolución permite a los alumnos centrarse en el logro de pequeños objetivos y con ello no perder de vista el objetivo final que se pretende. Estas acciones, cuyo orden de aplicación puede ser alterado, actúan como guía al mismo tiempo que sirven de retroalimentación y reflexión de la propia actividad. En este sentido, observamos como la base de orientación está construida en base a las estrategias identificadas con el andamiaje educativo (van de Pol et al., 2010)

Finalmente, de acuerdo con el Análisis IV (capítulo 6), en particular, observamos como la base de orientación actúa en aspectos tanto cognitivos como metacognitivos, así como en el afecto de los alumnos en relación a la resolución de problemas matemáticos. Cognitivos porque les recuerda la importancia no sólo de ciertas acciones, sino sobre todo de recopilarlas, lo que permite a los alumnos utilizar sus conocimientos (básicos, heurísticos y sobre recursos) que

disponen, conectarlos con las condiciones del problema, y así, no sólo volver a ello cuando sea necesario, sino también establecer nuevos conocimientos y caminos; metacognitivos porque induce a que los alumnos no sólo se cuestionan sobre el proceso que se lleva a cabo al resolver un problema en general, sino el que ellos mismos desempeñan siendo conscientes del mismo y de sus propias decisiones; finalmente, afectivos, porque les incita y así les permite verbalizar las dificultades, especialmente, que se encuentran pero también las sensaciones que les surgen de la práctica que desempeñan.

De todo ello, y de acuerdo con la caracterización de van de Pol (2010), percibimos que la base de orientación BO3 se trata de un instrumento que responde y promueve las características propias de lo que se entiende por andamiaje educativo en los alumnos.

Sin embargo, como se desprende del segundo apartado del mismo análisis (apartado 2, capítulo 6) un primer análisis longitudinal de su uso, no nos ha proporcionado ninguna regularidad que nos permita afianzarlo. Distintas explicaciones relacionadas con la naturaleza de los problemas presentados a los alumnos de acuerdo con las que los alumnos participantes podrían estar acostumbrados a desempeñar con anterioridad, de sus creencias particulares así como de las costumbres sociomatemáticas del aula participante, podrían tener alguna explicación al respecto y que requiere de ser considerado en posteriores estudios. Con ello, además, constatamos la dificultad de medir el impacto de cualquier modo de andamiaje (van de Pol et al., 2010).

A pesar de ello, este estudio longitudinal que se presenta en el capítulo 6, informa de un hecho relevante sobre el papel destacado que toman las acciones de comprobación en un uso efectivo de la base de orientación. En este sentido, centrándonos en los alumnos que no obtuvieron resoluciones correctas, observamos como la importancia de comprobar surge como un indicador del número de acciones de la base de orientación abordadas y la probabilidad de que los alumnos completen el problema, aunque de forma incorrecta. Es decir, que dichas acciones proporcionen a los alumnos la autonomía para continuar con la resolución a pesar de sus dificultades, aunque no de manera efectiva, lo que debería requiere de un análisis más profundo para ser reconducido.

En este sentido, este estudio longitudinal confirma el hallazgo obtenido en el primer análisis realizado en este sentido (apartado 1, capítulo 6) coincidiendo en que una condición necesaria aunque no suficiente para una llegar a una solución totalmente satisfactoria de un problema es la realización de siete o más acciones de base de orientación, en este caso la BO3. Más significativamente, con este análisis longitudinal se observa que las posibilidades de finalizar una tarea correctamente, tanto para los alumnos exitosos como los que no, se mejoran si los alumnos contemplan las dos acciones de comprobación de la base de orientación utilizada (BO3).

Con todo ello, aunque no podemos dar una respuesta contundente en cuanto a la efectividad de la base de orientación como auto-andamiaje, tanto las evidencias como los intentos de medir su impacto nos conducen a pensar que la base de orientación utilizada en este caso sí actúa en este sentido.

8. CONCLUSIONES II: Conclusiones Metodológicas y Orientaciones Didácticas

Paralelamente a las conclusiones relativas a los objetivos marcados, de los análisis realizados surgen otras conclusiones vinculadas a aspectos metodológicos. A su vez, y en base a los dos grupos de conclusiones comentados, emerge un tercer grupo de conclusiones que entendemos presentan cierto carácter didáctico. Distinguimos, entonces, entre aquellas conclusiones secundarias que se desprenden de manera directa de aspectos metodológicos propios del trabajo y las que, a modo de síntesis tanto de las conclusiones metodológicas como de las propias del trabajo, presentan cierto carácter didáctico. En este capítulo presentamos dichas conclusiones, refiriéndonos a ellas como conclusiones metodológicas y orientaciones didácticas, respectivamente.

8.1 Conclusiones Metodológicas

Recogemos en este primer apartado del capítulo las conclusiones secundarias vinculadas a aspectos metodológicos del trabajo realizado. Presentamos el conjunto de estas conclusiones en cuatro apartados distintos, en su orden de aparición de acuerdo con los procesos metodológicos aplicados. En el primero exponemos conclusiones derivadas de la relación e interacción entre los docentes implicados a lo largo del trabajo. En el segundo, observamos vínculos con la educación basada en evidencias y, en el tercero, presentamos conclusiones sobre cómo pueden afectar pequeños estudios cuantitativos dentro de estudios cualitativos. Finalmente, en el cuarto apartado, recogemos aquellos términos que han surgido a raíz y a lo largo del trabajo, con los que nos hemos visto con la necesidad de precisar, y la realización del trabajo, a su vez, nos ha permitido concretar.

8.1.1 Interacción entre los docentes implicados

Como se desprende de la Metodología (capítulo 2), si bien los docentes hicieron aportaciones constructivas en relación a los problemas o la creación o uso de la base de orientación, la intención inicial de que los docentes pudieran compartir sus opiniones en encuentros conjuntos a lo largo de la experimentación, no pudo desarrollarse. Los distintos horarios que rigen la actividad docente de maestros y profesores, así como la distancia entre los centros, más allá de los distintos momentos en que los docentes aplicaron los problemas, complicó los posibles encuentros presenciales entre ellos. Pensamos que también pudo influir en ello el hecho que los docentes estén habituados a desempeñar sus tareas docentes, especialmente la gestión del aula, generalmente de manera individual.

De ello concluimos la dificultad de que los docentes puedan disponer de tiempo suficiente para reunirse y compartir experiencias, especialmente cuando proceden de distintos centros, factor que pensamos que sería clave cuando, además, como constatan los profesores de educación secundaria, los alumnos de primer curso proceden de distintos centros de primaria, en cada uno de los cuales se han seguido prácticas y metodologías distintas.

8.1.2 Contribución a la educación a través de evidencias

De las Conclusiones relativas al tercer objetivo (capítulo 7.3.2) observamos como las acciones sobre las que está diseñada una base de orientación actúan como indicadores para los docentes con los que analizar la práctica de sus alumnos y con ello, readecuar la base de orientación, o recurrir a otra propuesta, y mantener un seguimiento coherente que posibilite evaluarlos. De ello se desprende que la base de orientación facilita a los docentes parámetros medibles como soporte para tomar decisiones, hacer diagnósticos, y adaptar el propio instrumento.

De acuerdo con ello, pensamos que el uso eficiente de una base de orientación por parte de los docentes se convierte en una instrumento para la llamada educación basada en evidencias (Páramo y Hederich, 2014), en la que se sostiene que los cambios efectivos tienen lugar cuando están basados en la realidad que observa el docente en su práctica diaria y de acuerdo con los parámetros marcados, puede ajustar su práctica o los recursos utilizados a las necesidades de la educación. El análisis de los datos obtenidos y las conclusiones tomadas en base al análisis, pueden ayudar a los profesores a incorporar innovaciones educativas basadas en evidencias positivas.

8.1.3 Pequeñas mediciones cuantitativas en un estudio cualitativo

En el Análisis III (capítulo 5) como el Análisis IV (capítulo 5) se realiza un análisis cualitativo del uso de la base de orientación. Para ello se estudian las producciones de los alumnos buscando evidencias del uso de la misma. Con ello se han determinado gradaciones que permiten evaluar el grado de adquisición o desempeño de los alumnos al mismo tiempo que parecen garantizar que el uso de una base de orientación adecuada puede tener un papel positivo en la adquisición de la competencia en resolución de problemas matemáticos. Así mismo, los distintos factores que influyen en la determinación y uso de una base de orientación, destacando con ello su grado de adaptabilidad, hacen difícil establecer un marco que pueda medir su efectividad en cuanto a los objetivos, en general, marcadas en su uso.

En la Implementación Tercera los alumnos participantes marcaron las acciones de resolución que creían haber aplicado. Ello nos dio pie a poder medir el grado de completitud de sus respuestas a las preguntas formuladas, de acuerdo con las acciones de la base de orientación en las que, según los alumnos, ellos mismos se habían considerado. En el intento de poder relacionar estas dos variables, en el Análisis IV (capítulo 6) se introdujo, como instrumento de análisis, el Test Exacto de Fisher (Fisher Exact Test), una prueba de significación categórica cuyo objetivo es examinar el grado de asociación entre dos grupos de variables categóricas. Los resultados obtenidos con ello permiten reforzar las evidencias observadas cualitativamente de las producciones de los alumnos. Podemos concluir que en investigaciones de carácter cualitativo se pueden también realizar pequeños análisis cuantitativos, independientemente del tamaño de la muestra, pues justamente, el Test Exacto de Fisher, se utiliza para muestras pequeñas, cuando el Test de la Chi Cuadrado no puede dar información significativa.

8.1.4 Precisión de términos

A lo largo del trabajo se han precisado el significado de distintos vocablos, no porque estos carecieran de significado, sino por las distintas acepciones que, debido a traducciones y adaptaciones de las mismas o bien por la inexistencia de traducciones lo suficientemente precisas implica recurrir a descripciones complementarias, o por las tendencias actuales de cada momento, los significados que un mismo término ha podido cobrar de acuerdo con un autor u otro pueden ser distintos y variados. En este sentido, concluimos que el desarrollo del propio trabajo nos ha permitido concretar el sentido en qué hemos utilizado cada una de estos términos y, con ellos, ser capaces de distinguir los matices propios de cada una.

Antes de precisar estos términos, del conjunto de estas precisiones, concluimos también que la falta de precisión y unificación de términos complica las ideas o precisiones a las que uno se quiere referir. Con el objetivo de mejorar la práctica docente, entendemos que entre la comunidad investigadora sería deseable una unificación de significados y vocablos, a la vez que trabajar para hacerlos más perceptibles en la práctica docente para que los docentes puedan utilizarlos de manera adecuada al mismo tiempo que transmitir correctamente su significado a los alumnos para que éstos, a su vez, puedan tomar consciencia de los mismos y entender como les puede afectar, especialmente cuando están relacionados con su práctica como alumnos.

Recogemos aquí el conjunto de términos que a lo largo del trabajo y con el trabajo desarrollado hemos observado la necesidad de precisar su significado, concretando el sentido que, con el trabajo, hemos pretendido concretar.

Términos *Solución, resolución, resultado, respuesta:*

Del Análisis II (capítulo 4), especialmente, observamos como los alumnos utilizan, en la mayoría de casos, de manera poco precisa, e incluso, como sinónimos los términos solución, resolución, resultado o respuesta. Entendemos que esta confusión, o mezcla de conceptos viene generada por las distintas prácticas que a lo largo de estos años se ha dado a la idea de problema. Ante la diferencia ya discutida entre problema y ejercicio, y de acuerdo en que los alumnos deben de adquirir la competencia en resolución de problemas y por tanto tomar consciencia de las distintas acciones que ello conlleva, es necesario contribuir a la utilización de las palabras y sentidos más precisos, no sólo para que la comunidad utilice unos mismo términos y de manera más precisa, sino para contribuir en la práctica que se pretende que adquieran los alumnos y así puedan aprender ser más precisos en sus acciones, al mismo tiempo que ellos puedan expresarse correctamente en cada caso. Como hemos observado, siendo conscientes de lo que se espera al resolver un problema, pueden atacarlo y proporcionar la información relativa de manera más detallada. Así, desde nuestro punto de vista, y de acuerdo con el trabajo realizado, entendemos:

- *Resolución*: proceso por el cual se llega a una conclusión sobre una cuestión de la que no se tenía respuesta inmediata. Conlleva todas las acciones desarrolladas, abandonadas, parciales o completas que se han desempeñado para poder dar una respuesta a la cuestión formulada.
- *Solución*: resultado preciso del proceso de resolución. Si para la resolución se han introducido aspectos que finalmente no contribuyen a la explicación de la respuesta, la

solución sólo contendría los aspectos que influyen directamente a dar respuesta a la cuestión formulada.

- *Resultado*: lo que se obtiene al final de un procedimiento concreto.
- *Respuesta*: el conjunto de las explicaciones a las cuestiones formulada de manera argumentada. Debido a una falta de completitud y de síntesis en las respuestas se confunde con la solución, cuando no siempre es así. Entendemos que la respuesta es la manera de clausurar las distintas soluciones encontradas y dar sentido global a las mismas, de manera completa, resaltando los aspectos relevantes detectados y empaquetando el conjunto de lo trabajado para posteriores ocasiones, a la vez que permite al resolutor afianzar lo trabajado y adquirido a lo largo del proceso de resolución.

Término Resolutor:

A lo largo del trabajo nos hemos tenido que referir a la persona quien se enfrenta a la resolución de un problema para dar respuesta a las cuestiones formuladas en él. Ante la falta de un vocablo reconocido por la lengua española que se ajustara a este sentido y de acuerdo con las apreciaciones de los términos solución y resolución arriba presentado, hemos introducido y utilizado el término *resolutor* con el sentido que la palabra *solver*, en inglés, toma en las referencias de habla inglesa consultadas.

Términos proceso, procedimiento, estrategia, algorítmico, heurístico

De acuerdo con las etapas mínimas identificadas en el proceso de resolver un problema (Conclusiones relativas al 1r Objetivo, capítulo 7 apartado 1), etiquetamos la segunda etapa de resolución como “Tener un plan de acción”. En ella a menudo hablamos del hecho de buscar una estrategia y aplicarla. Queremos aquí enfatizar que el término estrategia tiene muchas acepciones que se utiliza en distintos contextos y propósitos. Puede que, por ello, esta no sea la palabra más precisa que se pudiera utilizar, pero observamos como el uso de este término fue significativo para los alumnos participantes. En este sentido, aunque somos conscientes que no todos los autores preocupados por la resolución de problemas la utilizan en este sentido, queremos aquí destacar que fijamos esta palabra para el tratamiento de lo que un resolutor desarrolla en esta etapa central y concreta de la resolución de un problema. Como se desprende del Análisis II (capítulo 4) su conceptualización queda sujeta por la combinación de otros términos que, de acuerdo con el dicho análisis, nos lleva a distinguir entre proceso y procedimiento y que interpretamos como se presenta a continuación:

Por *proceso* entendemos el conjunto de acciones que se realizan para llegar a un fin y se reconducen a medida que se avanza. Estas acciones están organizadas e interrelacionadas entre ellas y se gestionan según una finalidad. Por ello, los procesos son dinámicos. Observamos que las acciones que intervienen en un determinado proceso pueden ser diferentes entre sí, y de naturaleza distinta. En base a las evidencias encontradas, podemos distinguir entre acciones de carácter mecánico, otras de carácter creativo, e incluso aquellas acciones caracterizadas por sus componentes argumentativos.

En cambio, por *procedimiento* entendemos el modo en qué se ejecutan o transcurren un conjunto de pasos para ejecutar una tarea. En este sentido, los procedimientos se corresponden a secuencias de pasos que se implementan y no sufren grandes cambios.

Un proceso puede seguir un procedimiento. En este sentido percibimos el proceso como el quehacer para llegar al objetivo y el procedimiento como la forma en que éste se lleva a término. Aquí el *procedimiento* se entiende como la gestión de las distintas acciones que confinan el proceso.

Luego, hablamos de procesos heurísticos cuando las acciones se conectan de manera creativa, y de procesos algorítmicos cuando se conectan siguiendo un procedimiento específico, mecánico o técnico.

Con estas consideraciones, entendemos por estrategia el conjunto de los procesos, con todo lo que estos requieran, que una vez interpretado el problema, permiten dar alguna respuesta a las cuestiones expuestas.

Términos relacionados con la definición de *competencia*.

Al hablar de competencia, surgen de manera natural, términos como capacidad, habilidad, destreza o desempeño. Ante los distintos paralelismos que presentan, creemos interesante de clarificar en qué sentido las percibimos y como las hemos pretendido utilizar y referenciar a lo largo del trabajo.

En primer lugar, distinguimos entre *capacidad* y *habilidad*. Percibimos el término *capacidad* como una cualidad de las personas, como las posibilidades que uno tiene para realizar una acción, las haya llevado a cabo o no. En cambio, reservamos el término *habilidad* para referirnos a la capacidad y la disposición de la persona para hacer algo. Entendemos que la *habilidad* comprende, más allá de disponer de una cualidad que permite a uno hacer algo, percibir cómo esta cualidad está organizada en uno mismo y conocer cómo actúa. En este sentido, podríamos interpretarla como la astucia de uno para llevar a cabo una actividad, es decir, saber cómo.

Por *destreza*, entendemos la desenvoltura, la maña o el arte de uno para hacer algo. Es llevar a cabo, uno mismo con los instrumentos que requiera, una actividad para la que se es hábil. Con ello observamos que, a diferencia de la habilidad, que se posee, la destreza se adquiere con la práctica y el esfuerzo. Por consiguiente, podemos interpretar el término *destreza* como el uso de la habilidad que uno tiene para hacer correctamente una actividad. En definitiva, se trata del uso de las habilidades.

A lo largo del trabajo utilizamos también el término *desempeño*, en este caso como resultado de realizar las funciones o las acciones que corresponden a una actividad general. La percibimos como a la práctica de realizar una función concreta. Lo asociamos al hecho de actuar, trabajar y dedicarse a una actividad, cumplir o desarrollar práctica. De acuerdo con la apreciación del término destreza, podemos entender el desempeño como las acciones que permiten desarrollar una destreza.

Términos relacionados con la evaluación

Finalmente, debemos remarcar las múltiples finalidades de la evaluación y, por ello, la necesidad de especificar siempre en qué sentido se percibe la misma. De la misma manera, los alumnos deben de ser conscientes de los distintos tipos de evaluación y la finalidad que se pretenden con ellas. De acuerdo con Sanmartí (2010), apreciamos la necesidad de diferenciar entre Evaluación inicial y Evaluación final; entre Evaluación calificadora y Evaluación

reguladora (Evaluación formativa, y Evaluación formadora). Es a esta última a la que contribuye el uso de la base de orientación y que, como se desprende de las conclusiones relativas al tercer objetivo, constatamos que al pretender una adquisición de la competencia en resolución de problemas, debe permanecer de manera continua, constante y cíclica en cualquier momento del proceso de enseñanza-aprendizaje, al tiempo que debe ser introducida desde las edades más tempranas.

La Tabla 8.1 nos permite observar como la evaluación formadora, conecta y da sentido global al resto de evaluaciones.

Evaluación	Cuando	Objetivos	Finalidad
Evaluación inicial	Previo al proceso de enseñanza-aprendizaje	Determinar el estado inicial de los alumnos en cuanto al estudio a desarrollar	Función formativa
Evaluación calificadora	En determinados momentos de la escolaridad	Certificar la adquisición de determinados conocimientos y competencias	Función principalmente comparativa y selectiva, pero también orientadora.
Evaluación formativa	Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje	identificar las dificultades y progresos de aprendizaje de los estudiantes, para poder adaptar el proceso didáctico del profesorado a las necesidades de aprendizaje del alumnado	Función reguladora del aprendizaje y de la enseñanza.
Evaluación final	Posterior al proceso de enseñanza-aprendizaje	Identificar si los alumnos han adquirido de manera significativa los objetivos del estudio a desarrollar	Función formativa, si sirve para los alumnos tomar conciencia de sus éxitos o para regular futuros procesos de enseñanza de los mismos contenidos Función calificadora
Evaluación formadora	A lo largo de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje	Promover que los alumnos se apropien de los objetivos de aprendizaje y de los criterios de evaluación, y que anticipen y planifiquen adecuadamente sus acciones.	Autorregulación del aprendizaje, cuya finalidad es que los alumnos sean más autónomos aprendiendo

Tabla 8.1. Tabla-Resumen de los tipos de evaluación y sus relaciones de acuerdo con Sanmartí (2010).

8.2 Orientaciones Didácticas

En este segundo apartado presentamos las conclusiones arriba mencionadas, procedentes tanto de aspectos metodológico como de las relativas a los objetivos marcados que, a nuestro entender, presentan cierto carácter didáctico. Bajo el paraguas de Orientaciones Didácticas, distinguimos entre implicaciones didácticas, para referirnos aquellas que están vinculadas con la formación docente sobre la resolución de problemas, y las orientaciones didácticas que percibimos como aquellas conclusiones que pueden contribuir a la gestión didáctica sobre la resolución de problemas por parte de los docentes en el aula.

8.2.1 Implicaciones didácticas

De acuerdo con las primeras de las conclusiones metodológicas pensamos que sería enriquecedor para la práctica de los docentes, y en consecuencia para el aprendizaje por parte de los alumnos, el encuentro entre docentes de distintos niveles, especialmente de etapas educativas, y de distintos centros para compartir sus experiencias y juntos determinar las dificultades de los alumnos así como los instrumentos que permiten conducir los obstáculos observados, como parece que una selección de problemas adecuada con el uso de instrumentos de evaluación reguladora, en particular formadora, parecen potenciar.

El intercambio entre docentes, a su vez, podría asegurar un vocabulario común y consistente, además de un consenso en cuanto a lo que se espera que los alumnos adquieran mediante la resolución de problemas y cómo estos pueden ser evaluados. De un intento de ello, surgen nuestros instrumentos que, en este sentido, pensamos que recogen la aceptación de distintos docentes, con perfiles diferentes, que desempeñan prácticas docentes distintas en distintos niveles y etapas educativas.

En este sentido, los instrumentos diseñados para este estudio se han elaborado sobre la práctica docente y han sido enriquecidos por las aportaciones de los expertos en las materias así como las referencias bibliográficas consultadas. La metodología y los instrumentos aplicados para el análisis han sido aplicados sobre las producciones de los alumnos y considerados de acuerdo con las referencias bibliográficas consultadas. Las observaciones obtenidas y descritas a lo largo de las distintas conclusiones (capítulo 7 y capítulo 8) nos informan no sólo de implicaciones teóricas sino indicios de cómo actuar sobre ellas puede significar en la práctica docente. En este sentido concluimos como entender las implicaciones teóricas de las observaciones y actuar sobre ellas enriquece, más allá de la investigación educativa, la práctica docente.

8.2.2 Sugerencias didácticas

De las distintas conclusiones obtenidas en cuanto, por un lado, la concepción de problema matemático, del proceso que conlleva resolver un problema matemático y de lo que se debe tener en cuenta la hora de proponerlos a los alumnos y, por otro, la construcción y uso de una base de orientación como un instrumento regulador de la resolución de problemas, extraemos algunas conclusiones que pensamos que pueden ser interesantes de compartir con la comunidad docente de cara a su práctica en el aula. En este sentido, intentamos contribuir con tres aspectos. El primero, el papel que observamos interesante que los docentes tomen para

un proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas efectivo. En segundo lugar, la ayuda que puede suponer a los docentes registrar las particularidades de cómo se presentan y se trabajan los problemas en el aula para poder evaluar su impacto en los alumnos. Finalmente, y en base a los ciclos de refinamiento de la base de orientación, concluimos con la propuesta de un instrumento para una evaluación reguladora de carácter formativo de la resolución de problemas.

El papel del docente en la Resolución de Problemas

Dentro de un sistema educativo basado en competencias, entendemos el papel del docente como un agente provocador, moderador y regulador de situaciones que emanen conocimientos de diverso tipo, que permitan a sus alumnos adquirirlos, en el sentido de conocerlos, saberlos interpretar, y, de manera conveniente, saberlos utilizar y saberlos comunicar.

Por consiguiente, concluimos que los docentes deben velar para que los alumnos, con el tiempo, puedan enfrentarse a situaciones problemáticas que puedan resolver con procesos matemáticos cada vez más complejos y de manera más eficiente. Que puedan llegar al final de las cuestiones de los problemas, habiendo indagado entre los recursos y mecanismos necesarios y, a poder ser, obteniendo respuestas no solo correctas sino también completas y bien argumentadas. Entendiendo que eso se consigue con el tiempo, es necesario que los alumnos puedan interiorizar la esencia de este proceso, para ello es fundamental que los alumnos vayan siendo conscientes de sus procesos, para que, en un momento determinado, puedan reconocer dónde acogerse. El papel del docente debe velar porque los alumnos adquieran por sí mismos la manera de generalizar estos procesos, sin vinculación a uno de particular y, al mismo tiempo puedan particularizar ciertos aspectos necesarios para profundizar en cada problema en particular. Para ello deben de ayudar a los alumnos, en la medida que estos necesiten, a darse cuenta de ciertas peculiaridades de la naturaleza de los problemas para que puedan aprender a gestionarlo y que, con el tiempo, se degraden las dificultades que les pueden generar. Entre estas peculiaridades, destacamos las siguientes:

- La naturaleza dinámica y no lineal de resolución de un problema
- La resolución de problemas en sus distintas finalidades
- La implicación que tiene la resolución de un problema para otros campos como para la propia matemática
- Los conocimientos que proporciona la resolución a un problema
- Los factores que influyen en la resolución de problemas
- La importancia que supone la toma de decisiones
- La repercusión de las experiencias anteriores

Por ello es recomendable que los docentes proporcionen herramientas distintas y suficientes para su gestión y para facilitar la adquisición por parte del alumno. Para esta gestión concluimos que es fundamental el conocimiento teórico sobre la resolución de los problemas del docente, de los factores que influyen en él, así como el nivel de adquisición de cada uno de los alumnos. Sólo con ello se pueden recoger, generar o adaptar detectar las herramientas indicadas para la resolución de problemas, así como las necesarias para ayudar a asentar los procesos de toma de decisiones.

Concluimos que, en el aprendizaje y resolución de problemas es fundamental tratar de formar un sistema de regularización fuerte, independiente de las situaciones problemas y los contextos en qué se pueden situar, pues son diversos y no vinculados entre sí. Luego, es necesaria una base sólida en la gestión de uno mismo para hacer frente a ello. En este sentido, observamos como el papel de gestor es fundamental. En consecuencia, si inicialmente este papel puede recaer en cierta medida en el docente, éste debe de ser transmitido al aprendiz.

Para ello, y de la experiencia realizada, constatamos la necesidad que al pretender que los alumnos se vuelvan mejores resoutores de problemas, en la dinámica de la clase que se desarrolle deben de distinguirse tres momentos diferenciados: cuando se presenta la tarea a realizar, el momento de trabajo y, sobretodo, la reflexión, en la que deben surgir las resoluciones, soluciones, y en la que es fundamental dar importancia a la reflexión y revisión del trabajo realizado.

El docente debe proporcionar los recursos necesarios para fomentar esta práctica. La base de orientación es un intento de hacerlo y que parece tiene un impacto positivo en este sentido. Así mismo valorar su eficacia y cuál es la mejor forma de implementarlo es aún complejo.

A ello hay que sumarle que los alumnos valoran lo que los docentes valoran, luego es importante que los docentes consideren el uso de dicha herramienta de la misma manera que se desea que hagan los alumnos. Así lo enseñan las evidencias en que las aulas en que los docentes hicieron más hincapié en el uso de la base de orientación son en los que encontramos respuestas más ricas, profundas y completas.

Ficha-registro de problemas

De las conclusiones al Objetivo 1 (capítulo 7.1), surge la importancia de asegurar la generación de buenos problemas, en el sentido que sean ricos al tanto que permitan trabajar los problemas matemáticos desde los puntos de vista observados, como medio de implicación, como medio de adquisición de conocimientos y como fin en si mismo para aprender a pensar y actuar de manera consecuente. Para dar cuenta de ello, y tomando la idea de Vila y Callejo (2004a), animamos a la realización de fichas de problemas que puedan sintetizar los aspectos generales discutidos a fin de tener un registro de aquellos problemas que pueden tener repercusiones más positivas en el aprendizaje de la resolución de problemas. Nuestro punto de vista es completar estas fichas de acuerdo con la gestión que se ha hecho con ellos en el aula como con particularidades de las producciones de los alumnos, permitiendo así analizar más profundamente la riqueza surgida en resolverlos.

De acuerdo con los aspectos relacionados con la presentación de problemas descritos en el apartado 1 de las Conclusiones (capítulo 7) y la Tabla 7.2 del mismo apartado de las Conclusiones (capítulo 7), establecemos el ejemplo de registro de la Tabla 8.2, que completamos de acuerdo con las producciones de los alumnos al resolver el problema Pb1.1_a1.

PROBLEMA Pb1.1_a1

Enunciado original	Con las cifras 3, 5, 6, 7, 8, 9, y sin repetir ninguna, podemos formar la vez dos números de tres cifras diferentes cada uno. Por ejemplo, el 368 y el 579. Entonces, nos preguntamos: a) ¿Cuáles deberían ser estos dos números porque en restarles den la
---------------------------	--

diferencia más pequeña posible?
 b) ¿Cuáles deberían ser estos dos números para que den la mayor diferencia posible?
 Responde las preguntas y explica cómo lo hecho por saberlo, en cada caso.

Propósitos de implicación matemática (problema como motivación)	Promover la exploración numérica Promover ambiente de reto y de recreación
Propósitos de contenido (problema como medio)	Analizar propiedades numéricas y de operaciones Sintetizar propiedades numéricas y de operaciones Descubrir relaciones numéricas
Propósitos competenciales (problema como fin) SABER ACTUAR	Tomar decisiones, crear, verificar, justificar, argumentar, obtener relaciones.
Nivel Educativo	1º de la ESO

FORMULACIÓN

Presentación de las informaciones	Por escrito. Enunciado verbal con ejemplo numérico. Datos numéricos a través de su grafía numérica	Petición de tareas	Formulación de dos preguntas enumeradas a partir de unas mismas condiciones. De manera imperativa y personal, se recuerda de manera separada la necesidad de argumentar por escrito las respuestas a ambas preguntas.
Contexto	Matemático	Recursos matemáticos	Sin precisar

ACCESIBILIDAD

Contexto	Problemática vinculada al contexto	Recursos matemáticos utilizables	Ábaco, Calculadora
Conocimientos conceptuales SABER	Concepto de y distinción entre número entre cifra, dígito y valor, sistemas de numeración (posicional decimal), números enteros y sus propiedades, Propiedades de las operaciones básicas	Conocimientos procedimentales SABER HACER	Algoritmos de la resta Técnicas de comparación Técnicas de uso de la calculadora y el ábaco
Conocimientos procesales SABER APLICAR	Estimar, ordenar, combinar, comparar, listar, trabajar con calculadora, introducir lenguaje algebraico, establecer relaciones y equivalencias	Resolución	Admite distintas estrategias de resolución
Solución	Única	Respuesta	Admite generalizaciones
Variante del problema	Con las cifras 5, 6, 7 y 9 podemos formar la vez dos números de dos cifras cada uno, de modo que no tengan ninguna cifra repetida. Por ejemplo, el 67 y el 59. ¿Cuáles son estos dos números si, al multiplicarlos: a) queremos obtener la multiplicación más grande posible? Explica cómo has llegado a esta conclusión.		

b) queremos obtener la multiplicación más pequeña posible? Explica cómo has llegado a esta conclusión.

GESTION EN EL AULA			
Vinculación con la programación de aula	Integrado en una programación temática. Problema ajeno al tema principal de estudio del momento	Intervención del docente o instrumentos de regulación	Sin intervención del docente Con uso de una BO.
Modo de trabajo	Lectura conjunta Desarrollo individual	Modo de corrección	Puesta en común de manera grupal. Corrección por parejas a partir de la puesta en común.
IMPLICACIÓN OBSERVADA			
Modos de representación	Verbales y esquemáticas	Estrategias utilizadas	Construcción de números con propiedades predefinidas Pruebas organizadas y sin organizar

Tabla 8.2. Propuesta ficha de registro de problema

Instrumento formativo para una evaluación reguladora de la Resolución de Problemas

Del Marco Teórico (capítulo 1) extraemos como la eficacia de cualquier proceso educativo está sujeta a la intervención efectiva de procesos evaluativos. Como se justifica en el mismo capítulo, es importante disponer de distintos modos de evaluación, especialmente cuando se pretende una evaluación consecuente con un enfoque competencial de la educación.

Los análisis que hemos realizado nos han permitido identificar distintos aspectos que influyen en el desempeño de los alumnos como resolutores más allá de sus conocimientos, estrategias heurísticas o recursos matemáticos. De las conclusiones al Primer Objetivo (apartado 1, capítulo 7), se desprende la necesidad de un sistema regulador eficiente para hacer frente a los factores que influyen en la resolución de problemas.

A lo largo del presente trabajo nos hemos centrado en una finalidad concreta de la evaluación de la resolución de problemas: la reguladora y, en concreto, formadora. De las conclusiones relativas al Tercer Objetivo (apartado 3, capítulo 7) hemos observado que una base de orientación, estructurada en las etapas mínimas de resolución, a su vez desglosadas en acciones propias de la resolución de problemas, contribuye en los alumnos menos eficientes como resolutores a adquirir la competencia en resolución de problemas. Además hemos observado que un uso eficiente de la misma por parte de los docentes, conduce la actividad docente por parte del docente.

Como argumentamos en las conclusiones al segundo objetivo, aunque iniciamos el proyecto con la generación de una rúbrica de desempeño, como un instrumento para una evaluación reguladora de carácter formativo, desviamos nuestra atención a la base de orientación, como instrumento formador, con la intención de, en un futuro, recuperar el trabajo con la rúbrica de desempeño.

De las conclusiones obtenidas a los distintos objetivos, extraemos ciertos aspectos que observamos nos pueden encaminar en objetivo de elaborar una rúbrica de desempeño para gestionar la adquisición de la competencia matemática de la resolución de problemas en los alumnos. Compartimos a continuación, estos aspectos para, al final, esbozar las posibles dimensiones en las que podría basarse una rúbrica de desempeño para la competencia matemática en resolución de problemas.

De las conclusiones relativas a los objetivos primero y tercero, observamos que para una evaluación reguladora del desempeño de los alumnos de la resolución de problemas resulta imprescindible para el docente:

- Conocer el grado de los conocimientos de los alumnos
- Conocer la actitud de los alumnos ante un problema
- Reconocer la habilidad de creación de los alumnos
- Conocer en qué medida los alumnos son capaces de implicarse con el problema
- Entender la toma de decisiones de los alumnos
- Conocer como los alumnos expresan sus pensamientos

De acuerdo con las etapas y sub-etapas (o niveles de implicación) identificadas en el proceso de resolver un problema matemático (ver Tabla 7.1), pensamos que se debería poder dar una valoración en cuanto el alumno:

- Interpreta las condiciones expuestas en el enunciado por sí mismas
- Interpreta, en su conjunto, la situación expuesta en el problema, es decir, cómo reorganiza la información proporcionada en el enunciado
- Examina posibles vías de resolución
- Convince cómo una de las vías puede dar respuesta a la cuestión planteada
- Interpreta los resultados obtenidos para dar una respuesta coherente
- Evalúa, en el sentido de completar y mejorar, la solución inicialmente dada

Más que ello, y si el objetivo es acompañar el aprendizaje de los alumnos como aprendices al resolver problemas, hay que tener en cuenta el comportamiento de los alumnos ante el proceso, en su conjunto, de resolución. De acuerdo con ello, vemos necesario de valorar de los alumnos su:

- Implicación y compromiso a lo largo del proceso de resolución
- Flexibilidad en cuanto a la identificación y corrección de momentos de atasco
- Verbalización en cuanto al modo en qué da sus explicaciones
- Coherencia a lo largo de todo el proceso entre las acciones llevadas a cabo
- Creatividad que caracteriza su proceso de resolución
- Precisión y completitud de sus acciones
- Generalización y abstracción de sus conclusiones

De todo ello, concluimos que un instrumento que podría contribuir a una evaluación reguladora del aprendizaje de los alumnos de carácter formativo para la resolución de problemas podría ser una rúbrica de desempeño basada en las dimensiones que presenta la Tabla 8.3:

¿Qué interpreta, y cómo, del enunciado?

- Qué datos utiliza
 - Cómo utiliza los datos
 - Cómo codifica los datos
 - Cómo relaciona los datos
-

¿Establece, y cómo, una vía de resolución?

- ¿Cómo examina posibles vías de resolución?
 - Hace pruebas sin estructura
 - Hace deducciones
 - Busca analogías
 - ¿Cómo convence de una vía?
 - Lenguaje que utiliza: matemático, verbal
 - Tipo de verbalización: Argumenta, explica o reproduce
-

¿Evalúa, y cómo, la solución?

- Comprueba las estrategias y las soluciones de acuerdo con las condiciones del enunciado.
 - Sintetiza las conclusiones o las acciones llevadas a cabo de acuerdo a la cuestión formulada. Informe retrospectivo
 - Examina otras soluciones o mejores respuestas
-

¿Es flexible a lo largo del proceso?

- Coherencia entre los lenguajes y formas de representación utilizados
 - Reconoce y reconduce los momentos de atasco
-

¿Se implica en el proceso de resolución?

- Coherencia y cohesión entre las distintas acciones
 - Las inferencias entre estados son claros
 - Destaca hallazgos o puntos clave a lo largo del proceso
-

Tabla 8.3. Propuesta base para la creación de una rúbrica de desempeño para la competencia en resolución de problemas matemáticos.

Somos conscientes que el conjunto de implicaciones didácticas expuestas sobre la resolución de problemas, su gestión y la importancia de su evaluación, exigen una atención y dedicación importante por parte del profesorado. Esperamos haber sido capaces, con nuestra investigación, de aportar algunos elementos útiles, tanto en términos de producto, como especialmente de reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Publicaciones vinculadas a la tesis

Villalonga Pons, J., Deulofeu, J. (2015). *La base de orientación, una herramienta para ayudar al alumnado a resolver problemas*. En FESPM, SEMRM (Eds.) *Actas JAEM 2015*. Cartagena, España. Recuperado de <http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n68.pdf> [junio 2017].

Villalonga Pons, J., Deulofeu, J. (2016). *(Re)bastir la base d'orientació en la resolució de problemes. Una anàlisi dels entrebancs*. En FEEMCAT (Eds.) *Actes del C2EM. Barcelona, Catalunya*. Recuperado de <http://c2em.feemcat.org/esdeveniments/rebastir-la-base-dorientacio-en-la-resolucio-de-problemes-una-analisi-dels-entrebancs/> [junio 2017].

Villalonga Pons, J., Deulofeu, J. (2017). Representar problemas usando una base de orientación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 59-65.

Villalonga Pons, J., Andrews, P. (2017). Self-scaffolding students' problem solving: Testing an orientation basis. En CERME10. Dublín, Irlanda. Recuperado de https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0016.pdf [junio 2017].

Villalonga Pons, J., Andrews, P. (2017). Supporting students' mathematical problem solving: The key role of different forms of checking as part of a self-scaffolding mechanism. En NORMA 17. Stockholm, Suecia. Recuperado de <http://www.mnd.su.se/om-oss/evenemang/norma-17/programme/paper-session-2/villalonga-pons-and-andrews> [junio 2017].

Villalonga Pons, J., Deulofeu, J. (2017). La Base de Orientación en la Resolución de Problemas: "cuando me Bloqueo o me Equivoco". *Journal of Research in Mathematics Education, REDIMAT* (ACEPTADO).

Villalonga Pons, J., Deulofeu, J. (2017). *La base de orientación en la resolución de problemas. Reflexiones sobre las evidencias de su uso en el paso de la primaria a la secundaria*. En FISEM, FESPM, SMPM). VIII CIBEM, Madrid, España (ACEPTADO: http://www.cibem.org/images/site/Programa_CIBEM_2017_Madrid.pdf, 16 recuperado [junio 2017]).

Referencias

- [1] Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7–10 y 35.
- [2] Andrade, H.G. (2005) Teaching with rubrics: The good, the bad, and the ugly. *College Teaching*, 53(1), 27–31.
- [3] Andrews, P. (2007). The curricular importance of mathematics: A comparison of English and Hungarian teachers' espoused beliefs. *Journal of Curriculum Studies*, 39(3), 317–338.
- [4] Arnold, V. I. (2004). *Problems for children from 5 to 15* Recuperado de https://imaginary.org/sites/default/files/taskbook_arnold_en_0.pdf [mayo 2017].
- [5] Bakker, A., Smit, J., Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM Mathematics Education*, 47, 1047–1065.
- [6] Belland, B. R. (2014). Scaffolding: Definition, Current Debates, and Future Directions. En J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, M. J. Bishop, (Eds.) *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*, 505–518. New York: Springer Science+Business Media.
- [7] Blanco, A. (2008). Las rúbricas un instrumento útil en la evaluación de competencias. En L. Prieto, L., Blanco, A., Morales, P. (Coords.) *La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje: estrategias útiles para el profesorado*. Barcelona, España: Octaedro Editorial.
- [8] Bolívar, A. (2009). Evaluar competencias no tiene sentido si no se trabajan de modo congruente en clase. *Ideal en clase*. Recuperado de <http://en-clase.ideal.es/2009/06/10/levaluar-competencias-no-tiene-sentido-si-no-se-trabajan-de-modo-congruente-en-claser/> [mayo 2017].
- [9] Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), 125–141.
- [10] Bruner, J. S. (1975). The ontogenesis of speech acts. *Journal of Child Language*, 2(1), 1–19.
- [11] Bruner, J. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective. En J. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, (21–34). Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 53–63.
- [13] Callejo, M. L., Vila, A. (2003). Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 173-194.
- [14] Carrillo, J., Guevara, F. (1996). Un instrumento para evaluar la resolución de problemas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 65–81.
- [15] Castro, E. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España*. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (113–140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- [16] Clarke, D. J. (1992). Activating Assessment alternatives in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 39(6), 24–29.
- [17] Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de Innovación Educativa*, 161, 34–39.
- [18] Coltman, P., Petyaeva, D., Anghileri, J. (2002). Scaffolding learning through meaningful tasks and adult interaction. *Early Years*, 22(1), 39–49.

- [19] Danielson, C. (1997a). A Collection of Performance Tasks and Rubrics: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye on Education Inc.
- [20] Danielson, C. (1997b). A Collection of Performance Tasks and Rubrics: Upper Elementary School Mathematics. Larchmont, NY: Eye on Education Inc.
- [21] Danielson, C., Hansen, P. (1999). A Collection of Performance Tasks and Rubrics: Primary School Mathematics. Larchmont, NY: Eye on Education Inc.
- [22] De Corte, E., Verschaffel, L., Op't Eynde, P. (2000a). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics learning. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation*, (687–726). San Diego: Academic Press.
- [23] De Corte, E., Verschaffel, L., Greer, B. (2000b). Connecting mathematics problem solving to the real world. En A., Rogerson (Ed.). *Proceedings of the ICME in the 21st Century: Mathematics for Living* (66–73). Amman, Jordan: The Hong Kong Institute of Education.
- [24] De Corte, E., Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autoregulación en la solución de problemas matemáticos. *Pensamiento Educativo*, 32, 286–305.
- [25] Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2016). *Un currículum competencial per a l'educació primària. Un pas més cap a l'assoliment de les competències bàsiques*. Recuperado de http://ateneu.xtec.cat/wiki/form/wikiexport/media/cursos/curriculum/inf_pri/cape/info_primaria_29_6.pdf [mayo 2017].
- [26] Direcció General d'Educació Infantil i Primària. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària*. Catalunya: Servei de Comunicació i Publicacions. Recuperado de <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/primaria/prim-matematic.pdf> [mayo 2017]
- [27] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. Catalunya: Servei de Comunicació i Publicacions. Recuperado de <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf> [mayo 2017]
- [28] Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. *Desplegament del currículum a l'educació primària*. Recuperado de http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0078/ba660da6-65cf-4a60-ad02-d70b78c13bb4/desplegament_pri.pdf [mayo 2017].
- [29] Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. *Desplegament del currículum a l'educació secundària obligatòria (ESO)*. Recuperado de http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0081/c2c17d15-7c0a-492e-9f21-9f024ae4e141/desplegament_c_eso.pdf [mayo 2017]
- [30] Dornisch, M. M.; McLoughlin, A. S. (2006). Limitations of web-based rubric resources: Addressing the challenges. *Practical Assessment Research & Evaluation*, 11(3). Recuperado de <http://pareonline.net/getvn.asp?v=11&n=3> [mayo 2017].
- [31] Egido, I. (2011). Cambios y dilemas en la formación del profesorado (1961–2011). Cincuenta años de historia de España en perspectiva europea. *Tendencias pedagógicas*, 18, 33–50.

- [32] Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 605–618.
- [33] Espinosa, M. T. (2013). Evaluación de competencias mediante rúbrica. Importancia de las matemáticas en la evaluación de competencias genéricas. *Historia y Comunicación Social*, 18, 243–255.
- [34] Estany, A., Martínez, S. (2004). “Scaffolding” and “affordance” as integrative concepts in the cognitive sciences. *Philosophical Psychology*, 27(1), 98–111.
- [35] FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2017). *Problemes a l’esprint*. Recuperado de <http://www.cangur.org/esprint/> [mayo 2017].
- [36] Fernández, A. (2010). La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, 8(1), 11–34.
- [37] Ge, X. (2010). Scaffold Ill-Structured Problem Solving Processes through Fostering Self-Regulation — A Web-Based Cognitive Support System. Cognitive and Metacognitive Educational Systems: Papers from the AAAI Fall Symposium (FS-10-01).
- [38] Ge, X., Land, S. M. (2003). Scaffolding students’ problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development*, 51(1), 21–38.
- [39] Giné de Lera, C., Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 28, 48, 191–208.
- [40] Goldin, G. A., McClintock, C. E., (1984) Task Variables in Mathematical Problem Solving. Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED178366.pdf> [mayo 2017].
- [41] Greenfield, P. M. (1984). A theory of the teacher in the learning activities of everyday life. En B. Rogoff, J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in social context* (117–138). Cambridge: Harvard University Press.
- [42] Hederich, C., Martínez, J., Rincón, L. (2014). Hacia una educación basada en la evidencia. *Revista Colombiana de Educación*, 66, 19–54.
- [43] Jorba, J., Sanmartí, N. (2004). La función pedagógica de la evaluación. En A. Parcerisa, M. Rovira (Eds.) *Evaluación como ayuda al aprendizaje*, (21–44). Barcelona, España: GRAÓ
- [44] Kilpatrick, J. (1978). Research on Problem Solving in Mathematics, *School Science and Mathematics* 78(3), 189–192.
- [45] Kirkman, T.W. (1996) Exact $r \times c$ Contingency Table: How many rows? columns?. *Statistics to Use*. Recuperado de http://www.physics.csbsju.edu/stats/exact_NROW_NCOLUMN_form.html [mayo 2017].
- [46] Kribbs, E. E., Rogowsky, B. A. (2016). A review of the effects of visual-spatial representations and heuristics on word problem solving in middle school mathematics. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1), 65–74.
- [47] Lester, F. K., Garofalo, J., Kroll, D. L. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report*. Washington: Indiana: Univ., Bloomington. Mathematics Education Development Center. National Science Foundation.

- [48] Lester, F. K., Kroll, D. L. (1991). Evaluation: A new vision. *The Mathematics Teacher*, 84(4), 276–284.
- [49] Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.
- [50] Llopis, J. (2013). Test exacto de Fisher. *La estadística: una orquesta hecha instrumento*. Recuperado de <https://estadisticaorquestainstrumento.wordpress.com/2013/01/21/test-exacto-de-fisher/> [mayo 2017].
- [51] Luelmo, M. J. (1996). La resolución de problemas en el aula de matemáticas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 5–6.
- [52] Holton, D., Clarke, D. (2006). Scaffolding and metacognition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(2), 127–143.
- [53] Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2012) *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- [54] Martínez, M. E., Raposo, M. (2011). La evaluación del estudiante a través de la rúbrica. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266875866_LA_EVALUACION_DEL_ESTUDIANTE_A_TRAVES_DE_LA_RUBRICA [mayo 2017].
- [55] Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley.
- [56] Meyer, D. (2013). Teaching With Three-Act Tasks. *dy/dan*. Recuperado de <http://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-one/> [junio 2017].
- [57] Mertler, C. A. (2001). Designing scoring rubrics for your classroom. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(25). <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=25> [mayo 2017].
- [58] Moskal, B. M. (2000). Scoring rubrics: what, when and how? *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(3). <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=3> [mayo 2017].
- [59] Moskal, B. M.; Leydens, J. A. (2000). Scoring rubric development: validity and reliability. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(10). <http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=10> [mayo 2017].
- [60] Niss, M. (2003). *Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM project*. Recuperado de <https://www.yumpu.com/en/document/view/6319496/mathematical-competencies-and-the-learning-of-mathematics> [mayo 2017].
- [61] Niss, M., Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, IMFUFA tekst 485/2011. Roskilde, Denmark: Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.
- [62] Páramo, P., Hederich, C. (2014). Educación basada en la evidencia. *Revista Colombiana de Educación*, 66, 13–16.
- [63] Pea, R. (2004), The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(3), 423–451.
- [64] Pérttega, S., Pita, S. (2004). Asociación de variables cualitativas: El test exacto de Fisher y el test de McNemar. *Cadernos de atención primaria*, 11(5), 304–308.
- [65] Pintrich, P. R. 2000. The Role of Goal Orientation in Self-Regulated Learning. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation*, (451–502). San Diego: Academic Press.
- [66] Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

- [67] Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 39, 419–430.
- [68] Puntambekar, S., Hübscher, R. (2005). Tools for Scaffolding Students in a Complex Learning Environment: What Have We Gained and What Have We Missed? *Educational Psychologist*, 40(1), 1–12.
- [69] Rico, L.; Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- [70] Rodríguez, G., Gil, J., García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada, España: Ediciones Aljibe.
- [71] Rosli, R., Goldsby, D., Capraro, M. M. (2013). Assessing Students' Mathematical Problem-Solving and Problem-Posing Skills. *Asian Social Science*, 9(16), 54–60.
- [72] Sanmartí, N., Jorba, J. (1995). Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos. *ALAMBIQUE Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 4, 59–77.
- [73] Sanmartí, N. (2002) *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria*. Barcelona, España: Síntesis Educación.
- [74] Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender. 10 ideas clave*. Barcelona, España: Graó.
- [75] Sanmartí, N. (2010). Avaluar per aprendre. *L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Recuperado de http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0024/fc53024f-626e-423b-877a-932148c56075/avaluar_per_aprendre.pdf [mayo 2016].
- [76] Schoenfeld, A. H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving (A review of sorts). *For the Learning of Mathematics*, 3(3), 40–47.
- [77] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- [78] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (334–370). New York: MacMillan.
- [79] Schoenfeld, A. H. (2007). What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? *Assessing Mathematical Proficiency MSRI Publications*, 53, 59–73.
- [80] Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1y2), 9–34.
- [81] Servei d'Ordenació Curricular. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. (2009a). *Currículum educació primària*. Catalunya: Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions.
- [82] Servei d'Ordenació Curricular. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. (2009b). *Currículum educació secundària obligatòria*. Catalunya: Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions.
- [83] Smit, J., van Eerde, H. A. A., Bakker, A. (2013). A conceptualisation of whole-class scaffolding. *British Educational Research Journal*, 39(5), 817–834.
- [84] Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem-solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151–165.
- [85] Stevens, D. D.; Levi, A. (2005). *Introduction to Rubrics. An Assessment Tool to Save Grading Time, Convey Effective Feedback, and Promote Student Learning*. Virginia, Canada: Stylus Publishing, LLC.

- [86] Stone, C. (1998). The metaphor of scaffolding: Its utility for the field of learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 31(4), 344–364.
- [87] Törner, G., Schoenfeld, A. H., Reiss, K. M. (2007). *Problem solving around the world: summing up the state of the art*. *ZDM Mathematics Education*, 39, 353.
- [88] Van de Pol, J., Volman, M., Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review*, 22(3), 271–296.
- [89] Vila, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques. Identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes* (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona). Recuperado de <http://www.tdx.cat/handle/10803/4687> [mayo 2017].
- [90] Vila, A., Callejo, M. L. (2004a). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid, España: Narcea, s.a. de ediciones.
- [91] Vila, A., Callejo, M. L. (2004b). Identificación y representación de sistemas de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un caso. *LA GACETA DE LA RSME*, 7(2), 469–488.
- [92] Voskoglou, M. Gr. (2008). Problem solving in mathematics education: recent trends and development. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche)*, 18, 22–28.
- [93] Wilson, J., Clarke, D. (2004) Towards the Modelling of Mathematical Metacognition *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 25–48.
- [94] Wood, D., Bruner, J., Ross, S. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89–100.
- [95] Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

ANEXOS

En esta última parte, se adjuntan los Instrumentos para la Resolución de Problemas (IRP) confeccionados y propuestos a lo largo del proyecto para ser utilizados en cada una de las distintas implementaciones en qué se ha basado el trabajo, así como las plantillas de registro facilitadas a los docentes para recoger los datos extraídos de la aplicación de las rúbricas correspondientes, en caso de haberlas utilizado.

Así, se recopilan:

- En el Anexo 1, los distintos enunciados de los 10 problemas trabajados a lo largo del proyecto.
- En el Anexo 2, las tres rúbricas de desempeño confeccionadas a lo largo del proyecto y la tabla a partir de la que se creó la primera de ellas.
- En el Anexo 3, las tres bases de orientación generadas a lo largo del proyecto y utilizadas en cada una de las tres implementaciones.
- En el Anexo 4, las plantillas de registro, por alumno y por problema, proporcionadas a los docentes para recoger sus valoraciones en caso de aplicar las rúbricas de desempeño.

Comentar que todos estos instrumentos se adjuntan en el idioma en qué fueron confeccionadas y aplicados, el catalán, sin traducir al castellano.

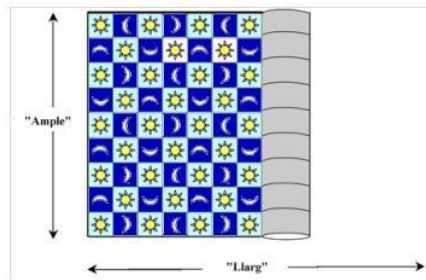
Anexo 1. Los problemas

En este primer Anexo se incluyen los enunciados, en sus distintas actualizaciones, de los problemas propuestos a lo largo del proyecto.

Problema 0 y sus actualizaciones

Pb0.a0

Hem comprat una catifa molt gran de 6 m de llarg i de 3,6 m d'ample. La catifa està formada, tal com es pot veure a la figura, de petits quadrats que contenen el dibuix d'un sol o d'una lluna.

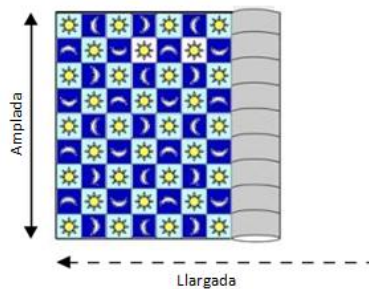


1. Quan la catifa estigui desplegada del tot, quants quadradets hi haurà en total?
2. Quants quadradets contindran un sol i quants una lluna?
3. Explica com l'has fet.

Figura A1. Pb0.a0 – Enunciado inicial del problema Pb0 propuesto en la Prueba Piloto

Pb0.a1

L'Arnau ha comprat una catifa molt gran de 6 m de llarg i de 3,6 m d'ample. La catifa està formada, tal com es pot veure a la figura, de petits quadrats que contenen el dibuix d'un Sol o d'una Lluna.

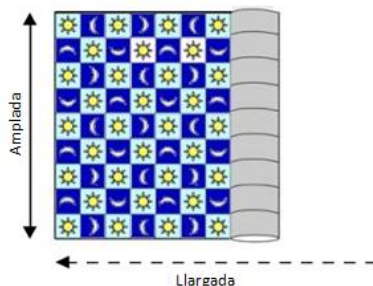


1. Quan la catifa estigui desplegada del tot, quants quadradets hi haurà en total?
2. De tots aquests quadradets, quants contindran un Sol i quants una Lluna?
3. Explica com ho has fet per saber cada una de les coses que es demanen.
4. Se t'acut alguna altra manera de poder determinar el que es demana en el problema? Si és així, explica-ho.

Figura A2.Pb0.a1 – Primera actualització del enunciat del problema Pb0

Pb0.a2

L'Arnau ha comprat una catifa molt gran de 6 m de llarg i de 3,6 m d'ample. La catifa, tal com es pot veure amb la part desplegada que mostra la imatge, està formada de petits quadrats que contenen el dibuix d'un Sol o d'una Lluna.



1. Quan la catifa estigui desplegada del tot, quants quadradets hi haurà en total? Explica com ho has fet per saber-ho.
2. De tots aquests quadradets, es pot saber quants contindran un Sol i quants una Lluna? Raona per què sí o per què no i, en cas que es pugui, explica què s'ha de fer per esbrinar-ho.

Figura A3.Pb0.a2 – Segunda actualización del problema Pb0 propuesta en la Implementación Tercera

Problema 1.1 y sus actualizaciones**Pb1.1.a1**

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres diferents cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Aleshores, ens demanem:

1. Quins haurien de ser aquests dos nombres perquè en restar-los donin la diferència més petita possible?
2. I quins haurien de ser aquests dos nombres perquè donin la diferència més gran possible?
3. Com ho saps, en cada cas? Explica-ho.

Figura A4. Pb1.1.a1 – Enunciado inicial del problema Pb1.1 propuesto en la Implementación Primera

Pb1.1.a2

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres diferents cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Restem els dos nombres que hem format d'aquesta manera, i ens demanem:

1. Quins han de ser aquests dos nombres perquè, en restar-los, donin la diferència més petita possible? Explica com has arribat a aquesta conclusió.
2. I, quins haurien de ser aquests dos nombres perquè, en restar-los, donin la diferència més gran possible? Explica com ho has deduït.

Figura A5. Pb1.1.a2 – Actualización del problema Pb1 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 1.2 y sus actualizaciones**Pb 1.2.a1**

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Aleshores, ens demanem:

1. Quins haurien de ser aquests dos nombres perquè en sumar-los donin la suma més gran possible? Com ho saps?
2. I quins haurien de ser aquestes dos nombres perquè donin la suma més petita possible? Com ho has fet per saber-ho?
3. Hi pot haver altres possibilitats, usant només aquestes xifres? Per què?
4. I sabries dir quins han de ser aquests dos nombres si volem obtenir la suma i la multiplicació més grans possible a la vegada? Explica com ho els has trobat.

Figura A6. Pb1.2.a1 – Enunciado inicial del problema Pb1.2 propuesto en la Implementación Primera

Pb 1.2.a2

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Sumem els dos nombres que hem format, i ens demanem:

1. Quins han de ser aquests dos nombres perquè, en sumar-los, donin la suma més gran possible? Explica com has arribat a aquesta conclusió.
2. I quins han de ser aquests dos nombres perquè, en sumar-los, donin la suma més petita possible? Explica com ho has deduït.

Figura A7. Pb1.2.a2 – Actualización del enunciado Pb1 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 1.3**Pb 1.3.a1**

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Quins són aquests dos nombres si volem obtenir la suma i la multiplicació més grans possibles a la vegada? Com has arribat a aquesta conclusió? Explica-ho.

Figura A8. Pb1.3.a1 – Enunciado inicial del problema Pb1.3 propuesto en la Implementación Segunda

Problema 1.4**Pb 1.4.a1**

Amb les xifres 5, 6, 7 i 9 podem formar alhora dos nombres de dues xifres cadascun, de manera que no tinguin cap xifra repetida. Per exemple, el 67 i el 59.

Quins són aquests dos nombres si, en multiplicar-los:

- a) volem obtenir la multiplicació més gran possible? Explica com has arribat a aquesta conclusió.
- b) volem obtenir la multiplicació més petita possible? Explica com has arribat a aquesta conclusió.

Figura A9. Pb1.4.a1 – Enunciado inicial del problema Pb1.4 propuesto en la Implementación Tercera

Problema 2 y sus actualizaciones

Pb2.a1

La meva tieta ha imprès les fotos que més li han agradat de totes les que va fer durant les vacances. Al final, n'ha imprès 80 però de dues mides diferents. Per això, a l'àlbum on les ha d'enganxar, en algunes pàgines només hi pot posar 2 fotos i en altres pàgines n'hi pot posar exactament 4. Fent-ho d'aquesta manera, al final, ocupa 28 pàgines de l'àlbum.

- En quantes pàgines pot posar exactament 4 fotos i en quantes 2? Com ho saps?
- Ho podries explicar d'una altra manera?
- En les mateixes condicions, hi ha cap més altra manera de distribuir les 80 fotos impreses? Per què?

Figura A10. Pb2.a1 – Enunciado inicial del problema Pb2 propuesto en la Implementación Primera

Pb2.a2

La meva tieta ha imprès les fotos que més li han agradat de totes les que va fer durant les vacances. Al final, n'ha imprès 80 de dues mides diferents. Per això, a l'àlbum on les ha d'enganxar, en algunes pàgines només hi pot posar 2 fotos i en altres pàgines n'hi pot posar exactament 4. Fent-ho d'aquesta manera, al final, ocupa 28 pàgines de l'àlbum. En quantes pàgines ha posat exactament 4 fotos i en quantes 2? Com ho has sabut? Explica-ho.

Figura A11. Pb2.a2 – Actualización del problema Pb2 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 3 y sus actualizaciones

Pb3.a1

En el menjador de casa hi ha una taula quadrada que es pot allargar (en una direcció). Quan s'allarga es converteix en una taula rectangular que és el doble de llarg que d'ample, tal com mostra la imatge de sota.



<http://www.lesburrades.com/ca/mobles/20/taula-de-menjador-quadrada-extensible-linia-recta>

Quan posem les tovalles que tenim per a la taula allargada, pengen 25 cm. per cada un dels quatre costats de la taula estirada. Ara bé, si posem les mateixes tovalles a la taula quan és quadrada, llavors les tovalles pengen més per cadascun dels dos costats per on s'estén la taula. Ho hem mesurat, i resulta que aleshores, en aquests dos costats les tovalles pengen 65 cm.

1. Quin deu ser el perímetre de la taula quan és quadrada?
2. I quines seran les mides (llarg i ample) i, en conseqüència, el perímetre de la taula quan està totalment estirada?
3. Aleshores, quan ocupa més superfície la taula, quan és quadrada o rectangular?
4. Com ho has fet per saber el que es demana en cada cas?

Figura A12. Pb3.a1 – Enunciado inicial del problema Pb3 propuesto en la Implementación Primera

Pb3.a2

A la saleta de casa hi ha una taula petita i quadrada, però que es pot allargar (en una direcció). Quan s'allarga es converteix en una taula petita i rectangular que és el doble de llarg que d'ample, tal com mostra la imatge de sota.



<http://www.lesburrades.com/ca/mobles/20/taula-de-menjador-quadrada-extensible-linia-recta>

Sé que quan posem les tovalles que tenim per a la taula quan està allargada, pengen 15 cm per cada un dels quatre costats de la taula estirada. Ara bé, si posem les mateixes tovalles a la taula quan és quadrada, aleshores les tovalles pengen 65 cm per cadascun dels dos costats per on es pot estendre la taula.

Com que a la saleta tinc problemes d'espai, em demano:

1. Quines deuen ser les mides (llarg i ample) d'aquesta taula petita quan és quadrada, i quan és rectangular? Com ho puc saber? Explica-ho.
2. Quan ocupa més superfície la taula: quan és quadrada o rectangular? Per què? Raona-ho.

Figura A13. Pb3.a2 – Actualización del problema Pb3 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 4 y sus actualizaciones

Pb4.a1

El meu germà estava una mica angoixat perquè la seva mestra li ha dit que s'ha d'aprendre de memòria les taules de multiplicar, de la del 2 fins a la del 9 (la taula de l'1 i la del 10, ja se les sap). Per animar-lo una mica li he dit que, al cap i a la fi, no són tantes les multiplicacions que s'ha d'aprendre, sinó que n'hi ha prou en que en recordi unes quantes.

1. Per què creus que li he dit això?
2. Si el meu germanet em fa cas, quantes multiplicacions diferents caldrà que recordi només per saber totes les taules del 2 al 9?
3. Com li podria explicar al meu germanet per què entengués que recordant només aquestes multiplicacions ja en tindrà prou?

Figura A14. Pb4.a1 – Enunciado inicial del problema Pb2 propuesto en la Implementación Primera

Pb4.a2

El meu germà està una mica angoixat perquè la seva mestra li ha dit que s'ha d'aprendre de memòria totes les taules de multiplicar, de la del 2 fins a la del 9 (la taula de l'1 i la del 10, ja se les sap). Per animar-lo una mica li he dit que, de fet, però, no són tantes les multiplicacions que s'ha d'aprendre, sinó que n'hi ha prou que en recordi unes quantes.

1. Té sentit el que li he dit? Per què? Argumenta-ho.
2. Quantes multiplicacions diferents cal que aprengui, doncs, el meu germanet? Per què? Raona-ho.

Figura A15. Pb4.a2 – Actualización del problema Pb4 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 5 y sus actualizaciones

Pb5.a1

La meva àvia és una especialista del ganxet i li encanta fer mantes. Encara no he vist l'última que ha muntat, però m'ha dit que l'ha fet enganxant peces quadrades de la mateixa mida, però de diferents estils.

M'ha explicat que per fer la vora de la manta ha fet servir una dotzena de peces de fons verd amb un rombe dibuixat i una dotzena de peces de fons blanc amb piquets verds. Les ha posat de manera alternada: una de fons verd, una de fons blanc,... i de manera que a les quatre cantonades sempre hi ha una peça blanca amb piquets.

1. Com pot haver distribuït aquestes peces per fer la vora, l'àvia?

També m'ha dit que la part interior de la manta està formada per peces quadrades de la mateixa mida que les de la vora però que, en canvi, són de diversos colors.

2. Puc saber quantes peces d'altres colors ha fet servir l'àvia per acabar la part interior de la manta? Com ho puc saber?

Figura A16. Pb5.a1 – Enunciado inicial del problema Pb5 propuesto en la Implementación Primera

Pb5.a2

La meva àvia és una especialista del ganxet i li encanta fer mantes. Encara no he vist l'última que ha muntat, però m'ha dit que l'ha fet enganxant peces quadrades de la mateixa mida, però de diferents estils.

M'ha explicat que per fer la vora de la manta ha fet servir una dotzena de peces de fons verd amb un rombe dibuixat i una dotzena de peces de fons blanc amb piquets verds. Les ha posat de manera alternada: una de fons verd, una de fons blanc,... i de manera que a les quatre cantonades sempre hi ha una peça blanca amb piquets.

També m'ha dit que la part interior de la manta està formada per peces quadrades de la mateixa mida que les de la vora però que, en canvi, són de diversos colors.

1. Com pot haver distribuït les peces per fer la vora, l'àvia? Explica com ho has sabut.
2. Em demano quantes peces d'altres colors ha fet servir l'àvia per acabar la part interior de la manta. Explica com ho puc saber.

Figura A17. Pb5.a2 – Actualización del problema Pb5 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 6 y sus actualizaciones

Pb6.a1

En la mitología grega, una *Hydra* era un despietat monstre aquàtic amb forma de serp i d'alè verinós que podia tenir entre 5 i 100 caps, o inclús més. A més, cada vegada que un heroi li tallava un cap, li creixien dos caps nous.



http://1.bp.blogspot.com/-TqXHIADLxMI/T6Qbrq_7Pri/AAAAAAAAASM/2YLwUjRf3I/s1600/Hydra_ss.jpg

(continua en la pàgina siguiente)

El primer cop que l'heroi *Matematicus* es va enfrontar amb una *Hydra* va tallar-li tres caps amb la seva espasa màgica. Si la *Hydra* tenia inicialment nou caps, quants en va tenir, en total, després? Explica com ho has pogut saber.

Més endavant, l'heroi *Matematicus* va lluitar junt amb dos herois més contra tres dracs que inicialment tenien nou caps cadascun. Si cada un dels herois va aconseguir tallar tres caps, quants caps van tenir, al final, entre els tres dracs? Explica com ho has deduït.

Figura A18. Pb6.a1 – Enunciado inicial del problema Pb6 propuesto en la Implementación Primera

Pb6.a2

En la mitologia grega, una *Hydra* era un despietat monstre aquàtic amb forma de serp i d'alè verinós que podia tenir entre 5 i 100 caps, o inclús més. A més, cada vegada que un heroi li tallava un cap, li creixien tres caps nous.



http://1.bp.blogspot.com/-TqXHIADLxMI/T6Qbrq_7Pri/AAAAAAAAASM/_2YLwJURf3I/s1600/Hydra_ss.jpg

1. El primer cop que l'heroi *Matematicus* es va enfrontar amb una *Hydra* va tallar-li tres caps amb la seva espasa màgica. Si la *Hydra* tenia inicialment nou caps, quants en va tenir, en total, després? Explica com ho has sabut.
2. Més endavant, l'heroi *Matematicus* va lluitar junt amb dos herois més contra tres dracs que inicialment tenien nou caps cadascun. Si cada un dels herois va aconseguir tallar tres caps, quants caps van tenir, al final, entre els tres dracs? Explica com ho has deduït.

Figura A19. Pb6.a2 – Actualización del enunciado Pb6 propuesta en la Implementación Segunda

Problema 7

Pb7.a1

L'Agnès i en Jan volen comprar un mateix USB de 32 Gb, però cap dels dos té prou diners per adquirir-lo per si sol/a. A l'Arlet li fan falta onze euros i a en Jan li manca un euro, per a poder-lo comprar.

Si ajunten els diners que tenen entre tots dos per a comprar plegats un d'aquests USB i compartir-lo, encara no tenen prou diners.

1. Podem saber quant costa un d'aquests USB? Explica per què i, en cas afirmatiu, digues quin és el seu preu i com ho has fet per a determinar-lo.
2. Aleshores, saps quants euros té l'Arlet? I en Jan? Explica per què i argumenta per què tenen aquestes quantitats i no unes altres.



<https://goo.gl/WhQigB>

Figura A20. Pb7.a1 – Enunciado inicial del problema Pb7 propuesto en la Implementación Tercera

Anexo 2

En este segundo Anexo se presentan las rúbricas Rb0, Rb1 y Rb2 creadas para la Prueba Piloto, Implementación Primera e Implementación Segunda, respectivamente así como la Tabla inicial en la que se recogieron los ítems con los que se creó la primera de las rúbricas de desempeño.

Recopilación de ítems

En esta tabla se recogen los ítems y descripciones de niveles a partir de las que se diseñó, a modo de prueba, la primera de las rúbricas, la Rb0.

Resolució de Problemes	Classificació segons el grau d'assoliment		
	1r nivell (inicial)	2n nivell (intermedi)	3r nivell (expert)
Ítems de la competència			
Identifica les dades i les unitats implicades en la situació.	Sí.	Sí.	Sí.
Explica el problema amb les seves paraules.	Sí, però tenir algunes dificultats.	Sí.	Sí.
Representa el problema mitjançant estructures concretes (esquemes, gràfics, dibuixos geomètrics, expressions aritmètiques...).	És capaç de seguir l'esquema gràfic proposat, però no gaire més.	Sí. Ho acaba gràficament, seguint l'exemple. Inclús pot fer una altra representació gràfica. Es pot ajudar d'expressions aritmètiques.	Sí. Segurament, no li cal acabar el dibuix, i directament pot representar-lo mitjançant expressions aritmètiques.
Interpreta i utilitza correctament les magnituds i les unitats.	No sempre.	Generalment, Sí.	Sí.
Usa el tempteig per fer una estimació prèvia de la solució.	Generalment, no.	Potser.	Segurament, però pot dependre del tipus de problema.
Simplifica la situació problema a d'altres coneguts.	Li costa molt.	Ho intenta. De vegades, necessita alguna ajuda.	Sí. Ho té força interioritzat.
Identifica patrons o pautes que poden ajudar en la resolució.	Li costa molt.	Sí. No sempre, però, sap desglossar-ho bé o els sap portar a terme.	Sí. Ho té força interioritzat.
Usa estratègies / algorismes coneguts per aconseguir resultats.	Potser si, però en tal cas no tenen per què ser els necessaris o els correctes.	Sí. Normalment són adequats i els resol més o menys bé.	Sí. Són els adequats i els sol resoldre bé.

Tria adequadament l'estratègia més eficaç.	En general, li costa trobar alguna estratègia. Més encara, l'eficaç.	A vegades.	Generalment, Sí.
Incorpora o adapta altres estratègies o algorismes.	No.	Li pot costar. Requereix d'explicacions o d'ajuda del mestre o companys.	Generalment, Sí.
Replanteja el problema si l'estratègia no li funciona.	Ho intenta, però no sempre s'en surt. Es sol travar. Li costa molt entendre on deixa d'entendre el problema.	Normalment, Sí. A vegades, però, es cansa o no ho veu clar. A vegades, necessita una pista per on seguir.	Sí.
Si el problema ho permet, troba més d'una estratègia per resoldre'l.	No, amb una en té de sobres.	En general, No.	Si el problema li agrada o el motiva prou, Sí.
Dóna totes les solucions al problema plantejat.	No sempre.	Normalment, Sí.	Sí.
Expressa correctament les solucions que dóna.	Li costa.	Normalment, Sí.	Sí.
Explora la possibilitat que hi hagi més d'una solució.	En general, No. Ja es sent molt content quan n'ha trobat una.	No sempre, però, si cal, fet un incís sol notar quan n'hi ha més d'una.	Generalment, Sí.
Comprova si les solucions trobades compleixen les condicions de l'enunciat.	No sempre. Li costa aplicar-ho.	Normalment, Sí, encara que li costa fer-ho.	Sí, sovint ho fa encara que sigui mentalment.
Es planteja si les solucions obtingudes matemàticament són raonables	En general, No. Ja es sent molt content quan ja ha trobat una possible solució.	No sempre, però, si cal, fet un incís sol notar que ho ha de fer.	Generalment, Sí.
Explica de manera clara i ordenada si les solucions trobades són raonables o no.	Li costa molt, si ho fa.	Li costa una mica explicar-ho clarament. No sempre ho veu del tot clar.	Generalment, Sí.
Relaciona les respostes a les preguntes formulades, si n'hi ha més d'una.	Normalment, No.	Depèn de la relació de les preguntes	Sí.

Tabla A1. Relación de ítems a partir de los que se generó la rúbrica piloto, presentada en la Prueba Piloto

Rúbrica Rb0

Rúbrica de desempeñu inicial, confeccionada a modo de prueba para la Prueba Piloto.

Resolució de Problemas		Classificació segons el grau d'assoliment			
Dominis	Criteris d'avaluació de realització	4t nivell (expert)	3r nivell (avançat)	2n nivell (intermedi)	1r nivell (aprenent)
Comprendre el problema	Identificar, interpretar i relacionar les dades (de qualsevol tipologia: gràfiques, numèriques...) les magnituds i les unitats que es presenten en el problema.	Identifica totes les dades, magnituds i unitats que apareixen en el problema i les interpreta i relaciona correctament.	Identifica totes les dades, magnituds i unitats que apareixen en el problema. Pot tenir algunes dificultats per interpretar-les o relacionar-les del tot correctament.	Pot tenir algunes dificultats a l'hora d'identificar determinades dades, magnituds o unitats que apareixen en el problema. Té dificultats per interpretar-les o relacionar-les correctament.	Té dificultats a l'hora d'identificar totes les dades, magnituds i unitats que apareixen en el problema. Té dificultats per interpretar-les i relacionar-les correctament.
	Expressar (representar, reescriure, explicar) la situació plantejada en el problema mitjançant estructures concretes (usar descripcions o resums propis, esquemes, gràfics, dibuixos geomètrics, expressions aritmètiques...).	No té cap dificultat per representar apropiadament mitjançant estructures concretes el que presenta el problema. En general, tendeixen a la simplicitat.	Té clara la situació plantejada en el problema i mentalment sap reproduir-la. No sempre li és fàcil, però, expressar-ho prou coherentment i de manera prou autònoma fora de la seva ment.	Té idees de com expressar-ho, però no sempre sap prou bé com procedir per expressar-ho de manera apropiada. No té unes estructures clares de representació.	Té dificultats per entendre prou bé la situació i mostra una manca d'autonomia i/o de recursos per poder-ho expressar.
Estructurar i desenvolupar un pla d'acció	Planificar i aplicar algun procés de resolució del problema.	Planifica i aplica els processos de resolució que li calguin de manera coherent, i tenint en compte la representació que n'hagi fet anteriorment.	Planifica i aplica els processos de resolució que li calguin però no sempre de manera coherent o segons la representació que hagi estructurat anteriorment.	Aplica algun procés de resolució del problema però li costa planificar-lo i portar-lo a terme de manera ordenada, sobretot.	Li costa planificar i aplicar els processos de resolució. Té dificultats per determinar i estructurar els processos de resolució.

	Buscar, trobar, organitzar estratègies útils per abordar el problema (simplificar, buscar cas particular per estendre, identificar patró, temptejar per fer estimació prèvia, buscar contraexemple...)	Busca i organitza adequadament estratègies que li permetin resoldre el problema. Si no en troba de referència, les dissenya o determina per si mateix.	Busca estratègies que li permetin resoldre el problema i, en general, les organitza. Si no en troba, però, en general li costa determinar-les o dissenyar-les.	Busca estratègies que li permetin resoldre el problema. Té dificultats per organitzar-les de manera convenient. Si no en troba, no en sap determinar o dissenyar.	Té dificultats per identificar estratègies que li puguin servir. Si se li proporcionen estratègies, li costa organitzar-les de manera convenient.
	Buscar, trobar, reconèixer, adaptar i utilitzar algorismes o determinats processos que permetin resoldre les diferents parts del problema (per les quals s'ha determinat una estratègia).	Busca, reconeix, adapta i utilitza convenientment els diferents algorismes o processos que permeten resoldre les diferents parts del problema.	Busca, troba, reconeix i utilitza algorismes i processos de resolució però pot tenir algunes dificultats per adaptar convenientment els algorismes o processos més adequats.	Busca i reconeix algorismes i processos però no sempre són els més indicats per a resoldre el problema. Tant si els acaba trobant com si se'ls recomana, pot tenir dificultats per adaptar-los. A l'hora d'aplicar-los els utilitza correctament.	Busca algorismes o processos de resolució però té dificultats per reconèixer-les, trobar-ne d'adequades i, adaptar-les. Si se li proporcionen i es comenten, en principi els usa correctament.
	Replantejar les parts del problema que puguin no ser ben interpretades o bé en les que el procediment escollit no funciona.	Detecta quan alguna estratègia o algorisme no funciona, veu per què i la rectifica replantejant les parts que calguin.	Detecta quan alguna estratègia o algorisme no funciona i en general, veu el per què, però no sempre li és fàcil replantejar-les convenientment.	Entreveu quan alguna estratègia o algorisme no funciona, però no sempre per què. Intenta replantejar-les però no sempre se'n surt.	No sempre veu quan alguna estratègia o algorisme no funciona, perquè no és conscient de per què no funciona. En cas que sigui conscient que no funciona, li costa molt replantejar-lo. Inclús pot no replantejar-lo.
	Entendre i expressar adequadament els passos que ha portat a terme per resoldre el problema.	No presenta cap dificultat per entendre i expressar de manera clara, precisa i coherent els passos que ha portat a terme en la resolució del problema.	Entén els passos que ha portat a terme però no sempre ho sap expressar de forma prou clara o coherent.	En general, entén els passos que ha portat a terme però li costa expressar-ho de forma clara i coherent, en general perquè no els té prou clars.	No li és fàcil entendre els passos que ha portat a terme. Té moltes dificultats per seguir i explicar els passos realitzats.

Revisar	Si el problema ho permet, trobar i explicitar més d'una estratègia per resoldre'l.	Veu que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema, les identifica i les exposa.	Veu que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema però no sempre les sap determinar i exposar prou adequadament.	Sap que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema, però tampoc les busca. Si les troba o li són indicades, li costa entendre-les.	No pensa que hi pugui haver altres maneres d'abordar el problema. Si li són indicades, sovint no les entén fàcilment.
	Explorar la possibilitat que hi hagi més d'una solució o comprovar que no n'hi ha cap més de possible.	S'assegura que la solució trobada és única o bé que n'hi pot haver d'altres i, en tots dos casos, ho raona.	No sempre s'assegura que la solució trobada és única o que n'hi pugui haver d'altres. Si es fa un incís, segurament s'ho mira.	Trobada una solució, pot buscar si n'hi ha més de possibles. No comprova que no n'hi hagi cap més.	Trobada una solució, no en busca més ni comprova que sigui única.
	Trobar, donar i argumentar adequadament totes les solucions possibles a totes les preguntes formulades.	Troba, dóna i argumenta de manera adequada i coherent totes les solucions possibles a totes les preguntes formulades	Troba i dóna totes les solucions possibles a totes les preguntes formulades però no sempre les argumenta com correspon.	Li costa argumentar acuradament les respostes que dóna. Pot no donar totes les solucions que troba, com també descuidar-se de trobar alguna solució.	En general, no troba ni dóna totes les solucions possibles a totes les preguntes. Li costa argumentar les respostes que proporciona.
	Comprovar que les solucions donades són correctes i tenen sentit en tot els seus aspectes (matemàticament i contextualment).	Es planteja i comprova que les solucions donades tinguin sentit matemàtic i contextual envers el problema plantejat, i així ho exposa. Si troba alguna incoherència, l'argumenta.	Comprova que les solucions donades tinguin algun sentit, però no sempre en tots. Si troba alguna incoherència, l'exposarà. Encara no té prou interioritzat que s'ho ha de plantejar sempre.	No es planteja si les solucions donades tenen sentit. Pot comprovar si numèricament són possibles però sense tenir en compte els altres aspectes.	No comprova les solucions en cap sentit. No es planteja que s'hagi de qüestionar, aquest aspecte.

Tabla A2. Rb0 – Modelo de rúbrica propuesta en la Prueba Piloto

Rúbrica Rb1

Rúbrica de desempeñu confeccionada para ser utilizada por los docentes en la Implementación Primera.

Resolució de Problemes		Nivells. Graus d'assoliment			
Dominis	Dimensions	4t nivell (expert)	3r nivell (avançat)	2n nivell (intermedi)	1r nivell (novell)
Comprendre el problema	D1. Identificar, interpretar i relacionar les dades (de qualsevol tipologia: gràfiques, numèriques...), les magnituds i les unitats que es presenten en el problema.	Identifica totes les dades, magnituds i unitats i les interpreta i relaciona correctament.	Identifica totes les dades, magnituds i unitats. Presenta algunes dificultats per interpretar-les o relacionar-les del tot correctament.	Presenta algunes dificultats a l'hora d'identificar determinades dades, magnituds o unitats. Té dificultats per interpretar-les o relacionar-les correctament.	Té dificultats a l'hora d'identificar totes les dades, magnituds i unitats i més encara per interpretar-les i relacionar-les correctament.
	D2. Expressar (representar, reescriure, explicar...) la situació plantejada en el problema mitjançant estructures concretes pròpies (usar descripcions o resums, esquemes, gràfics, dibuixos geomètrics, expressions aritmètiques...).	No té dificultats per representar apropiadament mitjançant estructures concretes el que presenta el problema. En general, tendeix a la simplicitat.	Té clara la situació plantejada en el problema i mentalment sap reproduir-la. No sempre li és fàcil, però, expressar-ho prou coherentment o de manera prou autònoma fora de la seva ment.	Té idees de com expressar-ho, però no sempre sap prou bé com procedir per expressar-ho de manera apropiada. No sap plasmar prou bé el problema o bé no té unes estructures clares de representació.	Té dificultats per entendre la situació plantejada i mostra una manca d'autonomia i/o de recursos per poder-ho expressar.
Estructurar i desenvolupar un pla d'acció	D3. Planificar i aplicar algun procés de resolució del problema.	Planifica i aplica processos de resolució útils de manera coherent, i tenint en compte la representació que n'ha fet anteriorment.	Planifica i aplica els processos de resolució útils però no sempre de manera coherent o segons la representació que ha fet anteriorment.	Aplica algun procés de resolució del problema. Li costa planificar-los i/o portar-los a terme de manera ordenada o coherent.	Té dificultats per determinar i estructurar processos de resolució.

	D4. Buscar, trobar, organitzar estratègies per abordar el problema seguint la planificació establerta (simplificar, buscar cas particular per estendre, identificar patró, temptejar per fer estimació prèvia, buscar contraexemple...)	Troba i organitza adequadament estratègies que li permeten resoldre el problema. Si no en troba de referència, les dissenya .	Busca estratègies que li permeten resoldre el problema i, en general, les organitza. Si no en troba, li costa dissenyar-ne.	Busca estratègies però no sempre en troba que li permeten resoldre el problema. Té dificultats per organitzar-les de manera convenient. Si no en troba, no en sap dissenyar.	Té dificultats per identificar estratègies que puguin servir. Si se n'hi proporcionen, té dificultats per organitzar-les de manera convenient.
	D5. Buscar, trobar, reconèixer, adaptar, utilitzar algorismes o determinats processos que permeten resoldre les diferents parts del problema i per les quals s'ha determinat una estratègia.	Busca, reconeix, adapta i aplica convenientment algorismes o processos que permeten resoldre les diferents parts del problema.	Busca, troba, reconeix i utilitza algorismes i processos de resolució però presenta algunes dificultats a l'hora d'adaptar-los convenientment..	Busca i reconeix algorismes i processos de resolució però no sempre són els més indicats. Tant si n'acaba trobant d'adequats com si se'ls recomana, té dificultats per adaptar-los. A l'hora d'aplicar-los, els utilitza correctament.	Busca algorismes o processos de resolució però té dificultats per reconèixer-ne, trobar-ne d'adequats així com, adaptar-los. Si se li proporcionen i es comenten, els usa correctament.
Revisar	D6. Exposar, seguir i entendre² adequadament els passos que es porten a terme per resoldre el problema.	No mostra dificultats per exposar/seguir ¹ i entendre de manera clara, precisa i coherent els passos portats a terme en la resolució del problema.	No exposa/seguieix de forma prou clara, concisa o coherent els passos portats a terme. Li pot costar entendre prou bé algun pas dels portats a terme.	Té dificultats per expressar/seguir de forma clara, concisa i coherent els passos portats a terme. Té alguna dificultat per entendre'n algun.	Li és difícil entendre els passos que s'han portat a terme. Té moltes dificultats per exposar/seguir-los.

² Queda subjecte al tipus de correcció que es realitza, per això és important que les correccions es facin en color diferent al que s'usa per a desenvolupar el problema.

- Si es fa autocorrecció a partir de la correcció conjunta a l'aula: es dedueix de com l'alumne s'assenyala les alternatives o apreciacions a sobre del propi treball realitzat.
- Si es fa correcció per parells: per a cada alumne, cal considerar, per un costat, l'exposició del seu propi treball i de la crítica que rep per part del company corrector i, per altre costat, el seguiment i correcció que en fa del treball del seu company.
- Si la correcció és feta pel docent: només es pot valorar l'aspecte d'exposar i, en tot cas, valorar el seguiment pel discurs que ha fet l'alumne, així com les correccions que s'hagi anat fent a mesura que resolva el problema.

"Entendre" queda subjecte a la valoració del que es pot extreure de l'exposició i el seguiment dels diferents passos problema en cadascuna de les situacions esmentades.

<p>D7.Replantejar les parts del problema que puguin no ser ben interpretades o treballades, o on els procediments escollits no funcionen.</p>	<p>Detecta quan alguna estratègia o algorisme no funciona, veu per què i ho rectifica replantejant les parts que ho necessiten.</p>	<p>Detecta quan alguna estratègia o algorisme no funciona i en general, veu el per què. No sempre, però, li és fàcil replantejar-les convenientment.</p>	<p>Entreveu quan alguna estratègia o algorisme no funciona, però no però se'n surt si intenta replantejar-les.</p>	<p>Té problemes per detectar alguna estratègia o algorisme no funciona, especialment per què no és conscient. En cas que sigui conscient que no funciona, no sap replantejar-les.</p>
<p>D8.Explorar, trobar i explicitar més d'una estratègia per resoldre'l.</p>	<p>Veu que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema, les identifica i les exposa adequadament.</p>	<p>És conscient que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema però no sempre les sap determinar i/o exposar adequadament. Si li són indicades, les entén.</p>	<p>Pot saber que hi ha altres maneres d'abordar el problema, però no les busca. Si les troba o li són indicades, li costa entendre-les.</p>	<p>No pensa que hi pot haver altres maneres d'abordar el problema. Si li són indicades, té força problemes per entendre-les o no les entén.</p>
<p>D9.Explorar i trobar totes les solucions possibles o comprovar que només n'hi ha una.</p>	<p>S'assegura que la solució trobada és única o bé que n'hi pot haver d'altres i, en tots dos casos, ho raona de manera adequada i coherent.</p>	<p>No sempre s'assegura que la solució trobada és única o que n'hi pugui haver d'altres. Si es fa un incís, ho fa. Argumenta de manera adequada i coherent el que exposa.</p>	<p>Trobada una solució, no sempre busca si n'hi ha més de possibles o que no n'hi hagi cap més. Li costa argumentar acuradament les respostes que dóna</p>	<p>No busca que hi pugui haver més solucions o que la resposta sigui única. Té dificultats per argumentar les respostes que proporciona.</p>
<p>D10. Comprovar i argumentar totes les solucions donades (si són o no correctes i si tenen sentit en tot els seus aspectes, matemàticament i de context).</p>	<p>Es planteja i comprova que les solucions donades tenen sentit matemàtic i contextual, i així ho exposa. Si troba incoherències les argumenta adequadament.</p>	<p>Comprova i argumenta les solucions donades, però no sempre en tots els sentits o de manera prou adequada. Si troba alguna incoherència, d'alguna manera, l'exposa.</p>	<p>No es planteja si les solucions donades tenen sentit. Pot comprovar si numèricament són possibles però sense tenir en compte altres aspectes. Té dificultats per argumentar correctament.</p>	<p>No comprova les solucions en cap sentit i té dificultats o no argumenta les respostes que dóna. No es planteja que s'hagi de qüestionar, aquest aspecte.</p>

Tabla A3. Rb1 – Rúbrica propuesta en la Implementación Primera

Rúbrica Rb2

Rúbrica de desempeñu confeccionada de acuerdo con la base de orientación BO2, propuesta en la Implementación Segunda.

Resolució de Problemes		Nivells. Graus d'assoliment			
Dominis	Dimensions	4t nivell (expert)	3r nivell (avançat)	2n nivell (intermedi)	1r nivell (novell)
Comprende el problema	D1. Identificar, interpretar i relacionar les tasques que demana d'investigar el problema i les preguntes que cal respondre.	<p>Identifica i respon totes les preguntes formulades i totes les tasques que hi estan relacionades.</p> <p>Les conclusions tenen sentit, matemàtic i contextual (són coherents amb les preguntes i tasques plantejades). Es fan paleses les connexions, relacions i vincles existents entre les diferents tasques i conclusions exposades.</p>	<p>No respon totes les preguntes formulades o no exposa totes les tasques que hi estan relacionades.</p> <p>Les conclusions tenen sentit, matemàtic i contextual (són coherents amb les preguntes i tasques plantejades). Es fan paleses les connexions, relacions i vincles existents entre les diferents tasques i conclusions exposades.</p>	<p>Identifica i respon totes les preguntes formulades i exposa totes les tasques que hi estan relacionades.</p> <p>Les conclusions no tenen sentit, matemàtic i contextual (no són coherents amb les preguntes i tasques plantejades) O no es fan paleses les connexions, relacions i vincles existents entre les diferents tasques i conclusions exposades.</p>	<p>No respon totes les preguntes formulades o no exposa totes les tasques que hi estan relacionades.</p> <p>Les conclusions no tenen sentit, matemàtic i contextual (no són coherents amb les preguntes i tasques plantejades) O no es fan paleses les connexions, relacions i vincles existents entre les diferents tasques i conclusions exposades.</p>
	D2. Identificar, interpretar i relacionar les dades (de qualsevol tipologia: gràfiques, numèriques...), les magnituds i les unitats que es presenten en el problema.	<p>Identifica totes les dades, magnituds i unitats que presenta el problema i les exposa i relaciona adequadament en l'expressió i experimentació del problema Durant el procés de resolució del problema les utilitza sempre correctament.</p>	<p>Identifica totes les dades, magnituds i unitats que presenta el problema i les exposa i relaciona en l'expressió i experimentació del problema del problema. Durant el procés de resolució del problema no les utilitza correctament.</p>	<p>Identifica totes les dades, magnituds i unitats que presenta el problema. En l'expressió i experimentació del problema no les relaciona correctament. Durant el procés de resolució del problema no les utilitza correctament.</p>	<p>No identifica totes les dades, magnituds i unitats que presenta el problema. Les dades que presenta en l'expressió i experimentació del problema o bé son incorrectes, o bé se n'usen d'externes o bé se n'obvien.</p>

	D3.Expressar (representar o exemplificar) la situació plantejada en el problema mitjançant estructures concretes pròpies (dibuixos, esquemes, gràfics, diagrames, dibuixos, relacions, descripcions, resums,...) amb l'ús del material que faci falta, i experimentar-la (incloure les proves necessàries per a entendre/confirmar la representació o exemplificació del problema realitzada).	Expressa la situació plantejada en el problema i, si és necessari, experimenta amb ella. Manifesta ben clarament quines són les dades i les seves relacions, i quins són els aspectes desconeguts que es demanen de resoldre. En general, tendeix a la simplicitat.	Expressa la situació plantejada en el problema i, si és necessari, experimenta amb ella. Queden paleses les dades i els aspectes desconeguts que es demanen de resoldre, i de manera que es poden intuir/deduir/interpretar les seves relacions.	Expressa la situació plantejada en el problema i, tot i ser necessari, no experimenta, o no ho fa suficientment, amb ella. Queden paleses les dades. Es poden o no manifestar els aspectes desconeguts que es demanen de resoldre. No queden clares ni es poden deduir les relacions.	L'expressió de la situació del problema, si s'arriba a manifestar, és totalment arbitrària o incorrecta.
Per a cada pregunta formulada:					
Estructurar i desenvolupar un pla d'acció	D4.Planificar i aplicar alguna estratègia o procés de resolució del problema a partir de la l'expressió i experimentació que se n'ha fet (simplificar, buscar cas particular per estendre, identificar patró, temptejar per fer estimació prèvia, buscar contraexemple...)	D'acord amb la representació i experimentació realitzada, explicita una estratègia de resolució adequada que justifica i exposa correctament de forma matemàtica.	D'acord amb la representació i experimentació realitzada, explicita una estratègia de resolució adequada, però que no acaba de justificar o exposar de forma matemàtica.	Explicita una estratègia de resolució però que no acaba de ser adequada.	Si explicita una estratègia de resolució, és totalment aleatòria o allunyada d'una de correcta.

	<p>D5. Trobar les dades necessàries (reidentificar-les, si estan exposades directament en el problema o, si no apareixen de manera explícita, deduir-les amb les tècniques necessàries) i els raonaments o algorismes que permeten aplicar l'estratègia establerta.</p>	<p>D'acord amb la representació i experimentació del problema i l'estratègia establerta, utilitza algorismes o raonaments de tipus matemàtic i selecciona o recalcula correctament les dades que realment són només necessàries.</p>	<p>D'acord amb la representació i experimentació del problema i l'estratègia establerta, O bé utilitza raonaments de tipus no matemàtic i selecciona o recalcula correctament les dades que realment són només necessàries. O bé utilitza algorismes i raonaments de tipus matemàtic però no selecciona o recalcula correctament les dades que realment són només necessàries.</p>	<p>Selecciona o recalcula correctament les dades que realment són només necessàries però utilitza raonaments o algorismes no adequats.</p>	<p>No selecciona o recalcula correctament les dades que realment són només necessàries ni utilitza raonaments o algorismes adequats.</p>
	<p>D6. Aplicar i exposar l'estratègia considerada amb i relacionant les dades i raonaments o algorismes necessaris identificats de manera clara i raonada³.</p>	<p>Aplica convenientment els algorismes o raonaments seleccionats amb les dades correctes, i els exposa de manera concisa, clara i ordenada.</p>	<p>Aplica convenientment els algorismes o raonaments seleccionats amb les dades correctes, però no ho exposa de manera prou concisa, clara i ordenada, o obvia alguns passos.</p>	<p>Aplica convenientment els algorismes o processos seleccionats però no amb les dades correctes o bé l'exposició és massa desordenada o incompleta.</p>	<p>L'aplicació dels algorismes o processos seleccionats és errònia o impossible de seguir, independentment de les dades utilitzades.</p>

³Permet entreveure si l'alumne/a entén què està fent.

Revisar la tasca realitzada	D7. Si cal, detectar les parts del problema que no són ben interpretades o treballades, o a on els procediments escollits no funcionen, i replantejar-les amb alguna nova estratègia i tot allò que aquesta requereixi (nova representació/exemplificació o experimentació del problema, reidentificar les dades, aplicar algorismes alternatius,....)	S'adona quan: no interpreta correctament alguna part del problema, quan utilitza un procediment no idoni o quan no utilitza el procediment correctament. En tots els casos, és capaç de rectificar-ho: trobar i aplicar una nova estratègia amb tot el que aquesta requereixi.	S'adona quan no interpreta correctament alguna part del problema però no és capaç a trobar una alternativa. S'adona quan utilitza un procediment no idoni o quan no utilitza el procediment de forma correcta. En ambdós casos és capaç de resoldre l'entrebanc.	S'adona quan no interpreta correctament alguna part del problema però no és capaç a trobar una alternativa. No s'adona quan utilitza un procediment no idoni o quan no utilitza el procediment de forma correcta, pel que no té necessitat de trobar-hi alternativa. En aquests casos, o bé no escriu res o bé el que escriu és arbitrari.	No s'adona quan no interpreta correctament alguna part del problema, quan utilitza un procediment no idoni, ni quan no utilitza el procediment de forma correcta. En tots els casos, o bé no escriu res o el que escriu és totalment arbitrari.
	D8. Explorar i argumentar totes les solucions possibles, i raonar si es podria fer d'altres maneres.	Troba una solució correcta. Confirma que aquesta solució és única o explora l'existència d'altres possibles solucions. Investiga altres maneres de resoldre-ho.	Troba una solució correcta. O bé, confirma la seva unicitat o explora altres possibles solucions. O bé, investiga altres maneres de resoldre el problema.	Troba una solució, correcta o no. No confirma la seva unicitat o explora altres possibles solucions. No investiga altres maneres de resoldre el problema.	En cas que doni una solució, no confirma la seva unicitat ni explora l'existència d'altres possibles solucions. Tampoc investiga altres maneres de resoldre-ho.
	D9. Exposar la realització de les tasques demanades i respondre la pregunta amb coherència i de manera entenedora i raonada.	No es troba a faltar l'exposició de cap raonament. L'exposició de cada un dels raonaments i conclusions realitzats és completa, clara i entenedora, i coherent amb el demanat.	No es troba a faltar l'exposició de cap raonament. L'exposició dels raonaments i conclusions realitzats no és sempre completa o coherent amb el demanat, o prou clara o entenedora.	Es troba a faltar l'exposició d'algun raonament. O L'exposició dels raonaments i conclusions realitzats no és sempre completa o coherent amb el demanat, o prou clara o entenedora.	Manca l'exposició de raonaments. L'exposició dels raonaments i conclusions realitzats no és completa o coherent amb el demanat, o prou clara o entenedora.

Tabla A4. Rb2 – Base de Orientación propuesta en la Implementación Segunda

Anexo 3

En este tercer Anexo se presentan las bases de orientación BO1, BO2 y BO3 confeccionadas para la Implementación Primera, Implementación Segunda e Implementación Tercera, respectivamente.

Base de Orientación BO1

Aquí se detalla la primera de las bases de orientación confeccionadas y utilizada en la Implementación Primera. Surge como una adaptación para los alumnos de la rúbrica de desempeño Rb1. En dicha implementación se refirió a ella como rúbrica para los alumnos.

Rúbrica Alumnes. Resolució de Problemes	
Domini	Dimensions
Comprendo el problema	D1. Identifico i entenc les dades, les magnituds i les unitats que apareixen en el problema.
	D2. Expresso (penso i reescric) el problema d'alguna manera (resum, esquema, gràfic, dibuix...) que m'ajuda a entendre'l el millor possible.
Estructuro i desenvolupo un pla d'acció	D3. Planifico i porto a terme com resoldre el problema.
	D4. Busco (recordo, dissenyo...) i aplico estratègies que em poden ajudar a resoldre el problema seguint la planificació que he fixat.
	D5. Busco (recordo, dissenyo...) i aplico algorismes i mecanismes per abordar les diferents estratègies.
Reviso	D6. Reviso el fet. Puc seguir els diferents passos de resolució, estan ben explicats i els puc entendre. ⁴
	D7. Si no me'n surto, detecto on m'equivoco o on em perdo i torno a plantejar i a treballar aquestes parts .
	D8. Una volta resolt, raono si es podria fer d'altres maneres.
	D9. M'asseguro si hi pot haver més solucions o si només n'hi ha una.
	D10. Dono totes les solucions possibles, explicant si són o no correctes i si tenen sentit o no.

Tabla A5. BO1 – Base de Orientación utilizada en la Implementación Primera

⁴ Ho faig de manera constant, per assegurar-me que ho entenc i ho pot entendre qualsevol altre.

Base de Orientació BO2

Segunda de las bases de orientación, utilizada en la Implementación Segunda. Surge del refinamiento de la base de orientación BO1 de acuerdo con las observaciones procedentes de la Implementación Primera. En esta implementación ya se habló de base de orientación.

Base d'Orientació. Resolució de Problemes	
Dominis	Dimensions
Comprenc el problema	Assenyalo les preguntes que he de respondre i entenc tot allò que se'm demana que faci.
	Assenyalo les dades i m'asseguro que les entenc.
	Expresso el problema per entendre'l millor fent un dibuix, esquema, diagrama... (el que em sembli més adequat) i faig proves si m'és necessari.
Per a cada pregunta formulada:	
Tinc un pla d'acció	Penso alguna estratègia de resolució a partir de la representació i les proves o exemples que he fet, i tracto d'aplicar-la.
	Trobo les dades i els raonaments i/o algorismes que necessito per aplicar l'estratègia.
	Aplico l'estratègia i l'escric de manera que s'entengui tot allò que he pensat.
Reviso la meva tasca	Si no me'n surto, detecto on em bloquejo o m'equivoco i aplico una nova estratègia (amb tot el que necessiti).
	Una vegada resolt, <ul style="list-style-type: none"> • investigo si hi ha altres solucions i les trobo. Si només n'hi ha una, raono per què no n'hi ha més. • raono si es podria fer d'altres maneres.
	Rellegeixo què he fet, i m'asseguro que ho explico tot i que responc de manera raonada i que s'entén relacionant-ho, si cal, amb la resta de preguntes i tasques demanades.

Tabla A6. BO2 – Base de Orientación utilizada en la Implementación Segunda

Base de Orientació BO3

Tercera de las bases de orientación confeccionadas. Se trata de la base de orientación confeccionada con el tutor de la estancia y en la que se pidió a los alumnos que, en la columna de la derecha, registraran las acciones que creían haber aplicado o iban aplicando.

Resolució de problemes		
Dimensions	Accions	SEGUIMENT
Entenc el problema	D1. He llegit el que s'exposa dos cops, almenys.	
	D2. Entenc què es vol.	
	D3. He identificat i entès les dades.	
Traço un pla d'acció	D4. He jugat ⁵ amb les dades del quefer.	
	D5. He preparat una estratègia de resolució.	
	D6. He comprovat que la meva estratègia encaixa bé amb les dades.	
Aplico el meu pla d'acció	D7. He implementat la meva estratègia ⁶ .	
	D8. He recopilat totes les meves accions de manera que les entenc.	
	D9. He recopilat totes les meves accions de manera que els altres les entenguin.	
Reviso la meva tasca	D10. Quan m'encallo torno al principi.	
	D11. Quan he acabat, he comprovat les meves respostes.	
	D12. He explorat altres respostes ⁷ i/o millors solucions ⁸ .	

Tabla A7. BO3 – Base de Orientación utilizada en la Implementación Tercera

IMPORTANT:

- La BO pretén ser una guia d'ajuda a l'hora d'intentar resoldre un problema.
- S'ha de tenir al costat i seguir al màxim possible quan es vol resoldre o corregir un problema.
- S'ha de llegir i entendre bé tot el que exposa. Cal demanar tot el que no s'entengui sobre ella.

⁵ Per **jugat** s'entén que es realitzin les representacions gràfiques (dibuix, esquema, diagrama ...), estableixin les relacions, portin a terme les manipulacions i experimentacions que creguin necessàries que els permeti d'expressar i entendre el problema (a la seva manera).

⁶ S'entén que es refereix a l'estratègia, en si, i a tot el que aquesta comporti.

⁷ Per **resposta**, s'entén el conjunt d'explicacions a les qüestions formulades de manera argumentada.

⁸ Per **solució**, s'entén el resultat precís del procés de resolució.

Anexo 4.

Registro de seguimiento por alumno

Se trata de una propuesta de plantilla para recoger las valoraciones de los docentes al desempeño de un alumno al resolver distintos problemas, de acuerdo a las dimensiones de una rúbrica de desempeño. En este caso, el registro está preparado para la aplicación de la rúbrica Rb2 que consta de 9 dimensiones.

ALUMNE/A: _____

DATA APLICACIÓ	PROBLEMA	Competències. Dimensions.								
		D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9

Observacions

Tabla A8. Plantilla de seguimiento propuesta para un registro del desempeño de distintos problemas para un mismo alumno de acuerdo con las dimensiones de la rúbrica de desempeño Rb2.

Registro de seguimiento grupo-clase y ejemplo de su uso

Se trata de una propuesta de plantilla para recoger las valoraciones de los docentes al desempeño de distintos alumnos al resolver mismo problema, de acuerdo a las dimensiones de una rúbrica de desempeño. En este caso, el registro está preparado para la aplicación de la rúbrica Rb2 al constar de 9 dimensiones.

PROBLEMA:	DATA APLICACIÓ:	DURADA (aprox.):							
CENTRE:	CURS:	GRUP-CLASSE:							
CORRECIÓ/POSADA EN COMÚ:							DATA:		
⁹ Competències. Dimensions									
ALUMNAT (perfil B, M, A):	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9

Observacions envers...

Problema aplicat	BO	Rúbrica	Altres aspectes

Tabla A9. Plantilla de seguimiento propuesta para un registro del desempeño de los alumnos a un problema concreto de acuerdo con las dimensiones de la rúbrica Rb2

⁹ S'avalua cada dimensió segons la gradació establerta en la Rúbrica associada a la BO usada per l'alumnat. Es poden afegir els comentaris que es creguin pertinents.

PROBLEMA: 01.3		DATA APLICACIÓ: 25/5/15		DURADA (aprox):						
CENTRE: Secretari Coloma		CURS: 1r ESO		GRUP-CLASSE: A						
RÚBRICA APLICADA:										DATA:
POSADA EN COMÚ:										
ALUMNAT:	Competències. Dimensións									
	D 01	D 02	D 03	D 04	D 05	D 06	D 07	D 08	D 09	D 10
01										
02										
07	Peuple Mitja	2	3	2	3	3	2	2	2	2
08										
09	Peuple BAIX	3	2	1	2	2	3	2	2	2
10										
07	Peuple Mitja	2	3	2	3	3	2	2	2	2
08										
09	Peuple BAIX	3	2	1	2	2	3	2	2	2
10										
15	Peuple MITJA	4	4	2	3	3	3	3	2	3
16	Peuple ALT	4	4	4	4	4	4	4	4	4
17										
18	Peuple BAIX	3	3	3	3	2	2	3	2	2
19										
20										
21										
22	Peuple MITJA	3	4	3	2	2	2	2	2	2
23										
24										
25	Peuple ALT	4	4	4	4	3	3	4	3	3
26	Peuple BAIX	4	3	3	3	2	3	3	3	3
27										
28	Peuple ALT	4	4	4	4	4	4	4	4	4
29	Peuple Mitja	4	4	3	4	3	3	3	2	3
30										

Figura A21. Ejemplo de uso de la plantilla que presenta la Tabla A9, contener el seguimiento de 10 alumnos del grupo SC1A en relación al problema Pb1.3.a1

