

ESTRATÈGIES, DIFICULTATS I ERRORS  
EN ELS APRENENTATGES  
DE LES HABILITATS ESPACIALS.

Núria Gorgorió

maig 1994.





UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Pedagogia Aplicada

TESI DOCTORAL

ESTRATÈGIES, DIFICULTATS I ERRORS  
EN ELS APRENENTATGES  
DE LES HABILITATS ESPACIALS

NÚRIA GORGORIÓ

*J.º B.º*  
*Adalberto Ferrández*

Director: Adalberto Ferrández

Bellaterra, maig del 1994



# Contingut

<b>1</b>	<b>Presentació de la recerca.</b>	<b>7</b>
1.1	Antecedents i motivacions. . . . .	7
1.2	Plantejament del problema. . . . .	11
1.2.1	Problema previ. . . . .	14
1.2.2	Problema principal . . . . .	16
1.3	Importància de la recerca. . . . .	18
1.4	Estructura i organització de la memòria. . . . .	28
<b>2</b>	<b>Revisió de les investigacions prèvies rellevants per la recerca.</b>	<b>35</b>
2.1	Habilitats espacials. . . . .	36
2.1.1	Conceptualització del terme habilitat. . . . .	37
2.1.2	Habilitat o habilitats? . . . . .	39
2.1.3	Les habilitats espacials. . . . .	40
2.1.4	Habilitats espacials i imatgeria. . . . .	47
2.1.5	D'altres habilitats espacials. . . . .	50
2.2	Pautes de comportament i diferències individuals. . . . .	56
2.2.1	Pautes de comportament en l'evolució d'un individu. . . . .	57
2.2.2	Diferències individuals en les pautes de comportament. . . . .	64
2.3	Identificació de grups d'incidència. . . . .	75
2.3.1	Identificació de les variables determinant els grups d'incidència. . . . .	76
2.3.2	Anàlisi de les causes que determinen les diferències de rendiment. . . . .	78
2.3.3	Identificació de diferència de processos en els grups d'incidència . . . . .	83

<b>3</b>	<b>Definicions i hipòtesis del problema previ.</b>	<b>95</b>
3.1	Definicions per al problema previ. . . . .	95
3.1.1	Habilitat. . . . .	96
3.1.2	Habilitats espacials. . . . .	98
3.1.3	Habilitat d'orientació espacial. . . . .	101
3.2	Hipotesis per al problema previ. . . . .	102
3.2.1	Limitacions del problema previ. . . . .	103
3.2.2	Hipòtesis referents al primer objectiu. . . . .	103
3.2.3	Hipòtesis referents al segon objectiu. . . . .	105
3.2.4	Hipòtesis referents al tercer objectiu. . . . .	105
<b>4</b>	<b>Metodologia del problema previ.</b>	<b>107</b>
4.1	Justificació de la metodologia. . . . .	107
4.2	L'instrument del problema previ. . . . .	111
4.2.1	L'instrument considerat globalment. . . . .	111
4.2.2	L'instrument del problema previ. . . . .	117
4.2.3	Validesa de l'instrument. . . . .	125
4.3	Característiques de la mostra i procés de recollida de dades. . . . .	128
4.4	Tractament de dades. . . . .	132
4.4.1	Dades per al primer objectiu. . . . .	132
4.4.2	Dades per al segon objectiu. . . . .	136
4.4.3	Dades per al tercer objectiu. . . . .	138
<b>5</b>	<b>Conclusions del problema previ.</b>	<b>145</b>
5.1	Sumari i conclusions parcials del problema previ. . . . .	145
5.1.1	Sumari i conclusions del primer objectiu. . . . .	146
5.1.2	Sumari i conclusions parcials del segon objectiu. . . . .	149
5.1.3	Sumari i conclusions parcials del tercer objectiu. . . . .	154
5.2	Conclusions del problema previ. . . . .	156
<b>6</b>	<b>Definicions, hipòtesis i propòsits del problema principal.</b>	<b>161</b>
6.1	Definicions pel problema principal. . . . .	161
6.1.1	Les habilitats estudiades. . . . .	161

6.1.2	Caracterització de les activitats. . . . .	164
6.1.3	Les estratègies intervinents. . . . .	165
6.1.4	Processos tipificats. . . . .	170
6.2	Hipòtesis i propòsits del problema principal. . . . .	171
6.2.1	Limitacions del problema principal. . . . .	174
6.2.2	Hipòtesis i propòsits del primer objectiu. . . . .	175
6.2.3	Hipòtesis i propòsits del segon objectiu. . . . .	176
6.2.4	Hipòtesis i propòsits del tercer objectiu. . . . .	178
6.2.5	Hipòtesis i propòsits del quart objectiu. . . . .	179
6.2.6	Hipòtesis i propòsits del cinquè objectiu. . . . .	180
6.2.7	Hipòtesis i propòsits del sisè objectiu. . . . .	184
<b>7</b>	<b>Metodologia del problema principal.</b>	<b>189</b>
7.1	Justificació de la metodologia. . . . .	190
7.2	L'instrument del problema principal. . . . .	195
7.3	Característiques de la mostra i procés de recollida de dades. . . . .	213
7.4	Tractament de dades. . . . .	217
7.5	Validesa i consistència. . . . .	221
7.5.1	Validació de l'instrument. . . . .	221
7.5.2	Validesa del procés de recollida de dades. . . . .	223
7.5.3	Validesa de l'anàlisi de dades i consistència dels resultats. . . . .	223
7.6	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de les activitats. . . . .	224
7.6.1	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat 'carrers'. . . . .	225
7.6.2	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat 'item 18 del qüestionari.' . . . .	250
7.6.3	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat 'item 19 del qüestionari'. . . . .	279
7.6.4	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat 'item 36 del qüestionari.' . . . .	302
7.6.5	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat '1—A.' . . . .	323
7.6.6	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat '2—A.' . . . .	355
7.6.7	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat '3—A.' . . . .	380
7.6.8	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat '1—B.' . . . .	404

7.6.9	Anàlisi de dades, sumari i conclusions de l'activitat '3—B.'	430
<b>8</b>	<b>Conclusions del problema principal.</b>	<b>453</b>
8.1	Sumari i conclusions parcials del problema principal.	453
8.1.1	Sumari i conclusions parcials del primer objectiu.	455
8.1.2	Sumari i conclusions parcials del segon objectiu.	473
8.1.3	Sumari i conclusions parcials del tercer objectiu.	481
8.1.4	Sumari i conclusions parcials del quart objectiu.	494
8.1.5	Sumari i conclusions parcials del cinquè objectiu.	496
8.1.6	Sumari i conclusions parcials del sisè objectiu.	512
8.2	Conclusions del problema principal.	524
8.2.1	En relació a les estratègies.	524
8.2.2	En relació a les dificultats i als errors.	530
8.2.3	En relació a la tipificació de processos de resolució.	536
8.2.4	En relació a les diferències de comportament entre els nois i les noies.	537
8.2.5	En relació a les diferències de comportament entre els diferents grups d'escolarització.	539
<b>9</b>	<b>Sumari, discussió i conclusions generals.</b>	<b>541</b>
9.1	Sumari i discussió.	542
9.1.1	En relació al problema previ.	542
9.1.2	En relació al problema principal.	543
9.1.3	En relació a com el problema principal explica els resultats del problema previ.	558
9.1.4	En relació a l'ensenyament.	559
9.2	Conclusions generals.	564
9.3	Prospectiva.	571
<b>10</b>	<b>Bibliografia general.</b>	<b>575</b>

# Capítol 1

## Presentació de la recerca.

La recerca que presentem, *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials*, s'inscriu en el marc dels estudis que s'ocupen de l'aprenentatge de les Matemàtiques, posant l'èmfasi en les capacitats dels alumnes. En concret, fem un estudi dels processos de resolució d'activitats geomètriques on la transformació és una rotació a l'espai. Analitzem les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes, així com els processos de resolució considerats globalment amb un doble objectiu. D'una banda, caracteritzar les estratègies, les dificultats, els errors i els processos considerats globalment. De l'altra, estudiar si els diversos rendiments dels alumnes venen condicionats per diferències en els processos de resolució, i fer una anàlisi comparativa dels estudiants dels grups de població determinats per les variables sexe i escolarització. Desitgem que la informació aportada per la present recerca pugui ajudar a la millora dels processos d'ensenyament-aprenentatge.

### 1.1 Antecedents i motivacions.

La present recerca pretén respondre alguns dels interrogants plantejats en les conclusions d'un treball<sup>1</sup> anterior, *Avaluació del currículum de Matemàtiques de l'ensenyament obligatori en els aspectes de Geometria de l'espai*.

En el treball esmentat, *Avaluació...*, proposem i justifiquem la necessitat de contemplar la Geometria com una branca important dins del currículum de Matemàtiques, amb l'objectiu, entre d'altres, de ser una aportació rellevant, en l'àmbit

---

<sup>1</sup>Presentat per l'obtenció dels crèdits de recerca, dins el marc del programa de doctorat del departament de Pedagogia Aplicada de la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.



del treball escolar, per al desenvolupament de les habilitats espacials. Proposem i argumentem que la finalitat de la presència de la Geometria en l'ensenyament obligatori, ha de ser *el desenvolupament en l'alumne d'un concepte ben estructurat d'espai*, la qual cosa no vol dir que no hi ha d'haver conceptes geomètrics al currículum, sinó que aquests hi han de ser per ajudar a la consecució del primer objectiu.

En la primera part del treball *Avaluació...*, i a partir de dades teòriques, constatem que la familiarització amb l'espai de tres dimensions amb l'ajut d'activitats geomètriques i el desenvolupament de determinades habilitats espacials, són aspectes negligits en l'ensenyament obligatori, sovint massa preocupat pel treball aritmètic, l'axiomatització prematura i el treball geomètric basat en la descripció, enumeració i classificació de les formes poligonals del pla.

En la segona part, justifiquem com a imprescindible la inclusió dins dels objectius de l'àrea de Matemàtiques de l'ensenyament obligatori, dels tres objectius següents:

- desenvolupar el coneixement de l'espai de tres dimensions i habilitats suficients per a interpretar-lo i representar-lo,
- desenvolupar la capacitat d'abstreure relacions i models geomètrics de la realitat en què vivim i
- desenvolupar les habilitats lògiques suficients que permetin donar coherència les intuïcions espacials dels alumnes.

Argumentem la possibilitat de dur a terme aquests objectius, i els desenvolupem fins a concretar-los en objectius operacionals, en funció de les conductes<sup>2</sup> esperades en diferents àrees de continguts. A partir dels objectius operacionals, elaborem una col·lecció d'activitats —inicialment 146— que és validada i valorada amb la col·laboració de 15 experts externs. A partir de la valoració per experts, fem una selecció d'activitats per elaborar un qüestionari<sup>3</sup> de 42 preguntes de selecció múltiple, que ens permet dur a terme una anàlisi empírica amb una doble finalitat. D'una banda, constatar que les habilitats i objectius proposats no són assolits de manera satisfactòria pels nostres alumnes, i de l'altra, detectar aspectes diferencials pel que fa al rendiment en relació a les habilitats espacials.

El qüestionari conté una primera part de caràcter general, amb preguntes que podríem anomenar de geometria escolar —relacionades amb temes presents en els desenvolupaments curriculars i en els llibres de text—, i una segona part, de

---

<sup>2</sup>Veure annex 1.

<sup>3</sup>Veure annex 7.

contingut estrictament espacial —relacionat amb aspectes no directament presents en el treball escolar.

El qüestionari es va passar a una mostra de 645 alumnes, i l'anàlisi de les dades obtingudes ens va permetre arribar, entre d'altres, a les següents conclusions:

- Els resultats obtinguts, tant pel que fa a la totalitat del qüestionari, com per la part estrictament espacial, són baixos per comparació amb les expectatives establertes.
- Hi ha diferents factors que intervenen en la manifestació de les habilitats espacials:
  - La variable sexe produeix poblacions estadísticament diferents, tant pel que fa a la totalitat del test, com a la part estrictament espacial:
    - \* El grup de nois pertany a una població amb diferent mitjana que el grup de noies, essent la mitjana del primer superior.
  - La variable escolarització produeix poblacions estadísticament diferents, tant pel que fa a la totalitat del test com a la part estrictament espacial:
    - \* El grup d'alumnes de BUP pertany a una població amb mitjana i mediana superiors a les dels alumnes d'FP i d'EGB.
    - \* Els alumnes d'FP i d'EGB pertanyen a poblacions amb iguals mitjana i mediana.
  - La variable mà amb que escriuen produeix poblacions estadísticament diferents en la part espacial del qüestionari:
    - \* Els dretans pertanyen a una població amb mitjana superior als esquerrans.

La interpretació d'aquests resultats ens porta a plantejar nous temes de recerca, en el sentit d'intentar explicar les diferències de rendiment observades entre els diferents grups d'incidència determinats per les variables sexe i escolarització.

En aquest sentit, de les conclusions del treball *Avaluació ...* sorgeix una primera qüestió, de caire general:

*Les diferències de rendiment observades entre els diferents grups d'incidència, són degudes a diferències en els processos de resolució seguits pels individus dels diferents grups?*

pregunta que és l'origen del treball de recerca que presentem.

Davant d'una pregunta tan ambiciosa ens hem vist en la necessitat de limitar-nos el camp de treball.

En primer lloc, són molts i molt diferents els models i les transformacions geomètriques —moviments, reflexions, semblança, projeccions, seccions i desenvolupaments— que es contemplen en el qüestionari, i les activitats que impliquen aquestes transformacions necessiten, per a ser resoltes, habilitats de processament espacial molt diverses.

A més, cal no oblidar que el fet d'analitzar el procés de resolució d'una activitat espacial específica per estudiar l'habilitat de processament espacial implicada, comporta treballar també amb habilitats espacials de caire més ampli, com poden ser l'habilitat d'interpretació i l'habilitat de comunicació d'informació espacial.

Davant la impossibilitat de contemplar tots i cadascun dels aspectes espacials avaluats en el qüestionari, hem hagut de decidir en quin tipus de transformació espacial ens centrem per acotar les habilitats.

Les transformacions a l'espai seleccionades han estat les rotacions a l'espai, essent l'habilitat de processament espacial implicada l'**habilitat d'orientació espacial**. Segons això, hem decidit estudiar, a partir de la resolució de les activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, l'habilitat d'orientació espacial, com a cas particular d'habilitat de processament espacial, juntament amb les habilitats espacials de caire general necessàries per a la resolució de les activitats concretes.

El motiu de l'elecció d'aquest aspecte concret és la constatació que existeix un buit en el treball d'aquests temes, tenint en compte la rellevància, tant teòrica com pràctica, de l'habilitat d'orientació espacial.

Pel que fa a *la rellevància teòrica* d'aquesta qüestió, ha estat decisiu el fet de que l'habilitat de processament espacial amb que ens proposem treballar —l'habilitat d'orientació espacial—, és indiscutiblement una habilitat espacial, siguin quins siguin els corrents teòrics que prenguem en consideració. A més, dins del camp de les habilitats espacials, és un dels aspectes més treballats i ha donat lloc a gran nombre de recerques, moltes de les quals fan referència a aspectes diferencials, especialment en relació a la diferència de rendiment entre sexes. Malgrat això, tot i que hi ha diversos corrents teòrics sobre les causes d'aquesta diferència de rendiment, són pocs els treballs que estudien les estratègies implicades en els processos, i les dificultats i els errors manifestats pels alumnes en la resolució d'aquest tipus d'activitats. Així mateix, es fa difícil trobar treballs que analitzin

la possible diferència d'estratègies manifestades pels individus dels diferents grups considerats, en els processos de resolució d'aquests tipus d'activitats espacials

A més de la importància teòrica del tema, hi ha qüestions de *rellevància pràctica* que han influït en la decisió. D'entrada, és un dels aspectes en que la relació de la Geometria amb el món real és més evident per a tothom, la qual cosa fa que els nostres esforços puguin considerar-se dirigits a facilitar un aprenentatge funcional alhora que significatiu. Del fet que existim en un espai de tres dimensions, esdevé immediata la consideració que l'ensenyament ha de contribuir no només a que l'alumne tingui una experiència concreta de l'espai que li permeti de situar-s'hi i orientar-s'hi, apreciar direccions i moviments, sinó que també ha de fer-lo capaç de crear models dels fenòmens, ja que són moltes les situacions en que ens servim de models geomètrics per a representar conceptes no geomètrics i fins i tot no físics. A més, el treball amb aquest tipus de relacions i moviments espacials, és essencial si pretenem desenvolupar qualsevol sentit de relacions entre diverses variables, i ser capaç de treballar amb diverses variables és fonamental si pretenem fer models dels fenòmens reals.

Considerada la rellevància, tant teòrica com pràctica, dels aspectes relacionats amb l'habilitat d'orientació espacial, la conclusió de que *existeix un buit en el treball escolar d'aquests aspectes* —fruit de l'observació dels alumnes i de la gent del carrer, i de la constatació empírica en el treball anteriorment comentat—, juntament amb la importància donada a les qüestions d'orientació pels experts que varen dur a terme la validació per jutges dels ítems del qüestionari, han influït notablement a l'hora d'aquesta decisió.

Totes aquestes disquisicions no tindrien sentit si no consideréssim que el nostre objectiu és un objectiu raonable. Del fet que les qüestions relacionades amb les rotacions a l'espai aparegudes en el qüestionari esmentat tinguin un índex de dificultat al voltant del 0.5, se'n dedueixen dues coses. En primer lloc, les qüestions a partir de les quals treballarem són suficientment fàcils com per a que puguem obtenir respostes —encara que algunes d'elles incorrectes— de la majoria dels alumnes, fins i tot d'aquells que han manifestat un baix rendiment en el qüestionari. En segon lloc, són prou difícils com per que aparegui un ampli ventall d'estratègies i processos de resolució. Aquestes dues condicions porten a la consideració de que l'objectiu que ens proposem és raonable.

## 1.2 Plantejament del problema.

La pregunta inicialment plantejada com a resultat del treball anterior *Avaluació...* és: Les diferències de rendiment observades entre els grups d'incidència, són degudes a diferències en els processos de resolució manifestats pels individus

dels diferents grups?

Limitar-la a les activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, on l'habilitat espacial implicada es l'orientació espacial, ens porta a establir dues noves qüestions, que són les que donen lloc a la present recerca:

*En les qüestions on l'activitat requereix una rotació a l'espai, es produeixen també diferències de rendiment?*

*En cas de produir-se, les diferències de rendiment observades entre els diferents grups d'incidència en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, són degudes a diferències en els processos de resolució seguits pels individus dels diferents grups?*

En aquesta recerca, l'objecte d'estudi són els processos de resolució d'activitats geomètriques on la transformació és una rotació a l'espai. Analitzem les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes, així com els processos de resolució considerats globalment amb un doble objectiu. D'una banda, caracteritzar les estratègies, les dificultats, els errors i els processos considerats globalment. De l'altra, estudiar si els diversos rendiments dels alumnes venen condicionats per diferències en els processos de resolució, i fer una anàlisi comparativa dels estudiants dels grups de població determinats per les variables sexe i escolarització. Desitgem que la informació aportada per la present recerca pugui ajudar a la millora dels processos d'ensenyament-aprenentatge.

Entenem per processos de resolució, el conjunt de procediments mentals necessaris per a resoldre una determinada activitat —en aquest cas una activitat geomètrica on la transformació és una rotació a l'espai—, que per a ser resolta necessita de l'habilitat d'orientació espacial, i d'altres habilitats espacials generals com poden ser l'habilitat d'interpretació i l'habilitat de comunicació d'informació espacial.

En particular, en relació als processos de resolució, ens interessa analitzar les estratègies, les dificultats i els errors manifestats pels alumnes, tant pel que fa al processament de la resposta en sí, com pel que fa a la interpretació de la informació que els donem i a la comunicació de la seva resposta. Així, ens plantegem una nova pregunta:

*En cas de produir-se, les diferències de rendiment entre els diferents grups d'incidència en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, són degudes a diferències en les estratègies,*



*les dificultats i/o els errors en els processos de resolució seguits pels individus dels diferents grups?*

Respondre aquesta pregunta ens porta a establir els dos **objectius generals** del nostre treball:

- Analitzar les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes, manifestats en els aprenentatges tant de l'habilitat orientació espacial, com de les habilitats espacials de caire general lligades als processos de resolució.
- Associar, quan sigui possible, les tipologies establertes als grups d'incidència determinats per les variables sexe i escolarització.

La consecució d'aquests dos objectius s'enfoca des de dos punts de vista:

- de manera quantitativa, s'identifiquen tipus d'errors manifestats en les activitats del qüestionari on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, i s'associen a grups d'incidència i,
- qualitativament, s'estableix una tipologia de processos de resolució, analitzant estratègies, dificultats i errors, associant-la a grups d'incidència.

Queden plantejats, doncs, dos objectius lligats entre sí que comporten estudiar dos aspectes diferents amb metodologies diverses, i que es poden ordenar cronològicament ja que podem suposar que si els errors manifestats són diferents és degut al fet de que els processos que han portat a les respostes són diferents. La consecució d'aquests dos objectius ens porten a establir el que anomenarem problema previ i problema principal:

**Problema previ.** Identificar tipus d'errors manifestats en les activitats del qüestionari on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai i associar-los, quan sigui possible, a grups d'incidència.

**Problema principal.** Establir una tipologia de processos de resolució, i en particular, analitzar i caracteritzar estratègies, dificultats i errors apareguts en els processos de resolució, i associar-les, quan sigui possible, a grups d'incidència<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>En el *problema principal* considerem únicament els grups determinats per les variables sexe i escolarització. Deixem de banda la variable mà amb que escriuen per dues raons. Per una

Analitzant el procés que ens ha portat al plantejament d'aquests dos problemes, veiem que partim de l'avaluació del rendiment dels alumnes en un test d'habilitats espacials, en el que hem detectat un comportament diferent, a nivell general, segons els grups d'incidència determinats per les variables sexe, escolarització i mà amb que escriuen, i volem determinar si:

- les diferències de rendiment es reproduïxen en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai,
- es poden associar tipus d'errors a grups d'incidència per aquestes activitats, i
- les diferències de rendiment són degudes a processos diferents, en particular a estratègies, dificultats i errors diferents, en la resolució d'aquestes activitats.

### 1.2.1 Problema previ.

D'aquesta manera, en el que anomenem *problema previ*, ens plantegem les següents qüestions:

*Les diferències de rendiment entre grups d'incidència detectades en la totalitat del qüestionari, es reflecteixen en les qüestions on la tasca és una rotació a l'espai? És a dir, les variables sexe i escolarització produeixen poblacions estadísticament diferents en les qüestions on la transformació geomètrica proposada és una rotació?*

*Es poden identificar tipus d'errors manifestats en les qüestions de rotació del qüestionari, i associar-los a grups d'incidència?*

Segons això, plantegem com **objectius del problema previ** els següents:

- 1. Veure si les diferències de rendiment entre grups d'incidència, detectades en la totalitat del qüestionari, es reflecteixen en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.

---

part, perquè no podem controlar, ja que depassa el nostre àmbit d'estudi, de quina manera la mà amb que un alumne escriu respon a les seves característiques cerebrals (lateralització, maduració dels hemisferis cerebrals...) fet que ens impedeix interpretar les actuacions dels individus. Per altra part, l'elecció de la mostra en el *problema principal* fa impossible, donada la relativa poca presència d'esquerrans a les aules, trobar una mostra representativa que correspongui a les tres variables (sexe, escolarització i mà amb que escriuen) que sigui alhora operativa.

- 2. Detectar els tipus d'errors més freqüents en el grup total i per grups d'incidència.
- 3. Associar, quan sigui possible, tipus d'errors a grups d'incidència.

La consecució de cadascun d'aquests objectius, a partir de les dades obtingudes en l'administració del qüestionari, comporta diferents fases en el treball en relació al *problema previ*:

- Establir les definicions dels termes que s'utilitzen i les hipòtesis de treball a partir de la revisió de les recerques anteriors.
- Estudiar si les diferències de rendiment entre grups d'incidència detectades en la totalitat del qüestionari es reproduïxen en les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai:
  - Fer una anàlisi quantitativa comparativa del rendiment dels grups d'incidència en les qüestions de rotacions a l'espai.
    - \* Establir diferències significatives de rendiment en els aspectes relacionats amb rotacions a l'espai.
    - \* Fer un estudi comparatiu de les diferències de rendiment a nivell global amb les diferències de rendiment en les qüestions d'orientació.
- Estudiar quantitativament els tipus d'errors més freqüents en el grup total i en els grups d'incidència.
  - Fer un anàlisi quantitativa dels errors tant a nivell global com a nivell de grups d'incidència.
    - \* Identificar els errors més freqüents globalment.
    - \* Identificar els errors més freqüents per grups d'incidència.
- Estudiar els tipus d'errors en funció dels grups d'incidència.
  - Anàlisi quantitativa comparativa dels errors entre grups d'incidència. Associar errors a grups d'incidència.
    - \* Estudiar la significació de les diferències en la selecció d'opcions.
    - \* Associar, quan sigui possible, tipus d'errors a grups d'incidència.

Tal com l'hem establert, el que hem anomenat *problema previ* deriva dels objectius generals de la recerca al fer-ne un tractament quantitatiu. Tal com s'argumenta més endavant, aquest tipus de metodologia ens limita estrictament a

l'estudi de les respostes per part dels alumnes, sense possibilitat d'interpretar més enllà del directament constatable.

Una altra limitació del problema previ, que es deriva del seu plantejament i de l'instrument utilitzat per a la seva solució, és que no ens permet de separar els aspectes relacionats amb l'habilitat d'orientació espacial, considerada com a cas particular d'habilitat de processament espacial, dels relacionats amb les habilitats espacials de caire general que hi van lligades, ja que treballem únicament amb la resposta final i no amb el procés.

### 1.2.2 Problema principal

En el que anomenem *problema principal*, ens plantegem la següent qüestió:

*Les diferències de rendiment entre grups d'incidència detectades al qüestionari en les qüestions d'orientació, depenen de diferències de comportament en el procés de resolució de l'activitat?*

Aquesta qüestió es concreta en d'altres:

*Es pot establir una tipologia de processos de resolució i, en particular, es poden establir tipologies d'estratègies, dificultats i errors en els processos de resolució d'activitats on la transformació geomètrica proposada és una rotació a l'espai?*

*Es poden associar tipologies de procés a grups d'incidència?, és a dir, els alumnes dels diferents grups d'incidència manifesten processos de resolució diferents? i, en particular, manifesten estratègies, dificultats i errors diferents en la resolució d'activitats on la transformació geomètrica proposada és una rotació a l'espai?*

*De quina manera el comportament dels individus en relació a les estratègies, les dificultats i els errors, depèn de les característiques de l'activitat proposada quan la transformació geomètrica és una rotació a l'espai?*

Segons això, plantegem com **objectius del problema principal** els següents:

- 1. Analitzar i caracteritzar les diferents estratègies utilitzades pels alumnes en activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.

- 2. Analitzar i caracteritzar les dificultats manifestades pels alumnes en activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.
- 3. Analitzar i caracteritzar els errors comesos pels alumnes en activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.
- 4. Caracteritzar globalment els processos de resolució d'activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.
- 5. Comparar les estratègies, les dificultats i els errors observats en el comportament dels nois i les noies en activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.
- 6. Comparar les estratègies, les dificultats i els errors observats en el comportament dels alumnes de BUP, FP i EGB en activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.

La consecució de cadascun d'aquests objectius comporta diferents fases en el treball en relació al *problema principal*:

- Establir les definicions dels termes que s'utilitzen a partir de la revisió de les recerques anteriors.
- Establir les hipòtesis i els propòsits del treball a partir de la revisió de les recerques anteriors.
- Elaborar i validar un conjunt d'activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, i administrar-les a una mostra d'alumnes representants dels diferents grups d'incidència.
- Analitzar qualitativament les estratègies, les dificultats i els errors observats en la resolució d'aquestes activitats per part dels alumnes entrevistats:
  - Caracteritzar les estratègies, les dificultats i els errors.
  - Estudiar de quina manera les estratègies, les dificultats i els errors depenen de les característiques de l'activitat proposada.
- Caracteritzar qualitativament els processos —considerats globalment— observats en la resolució d'aquestes activitats per part dels alumnes entrevistats:
  - Caracteritzar globalment els processos en funció de les estratègies utilitzades.
  - Analitzar-ne la freqüència i diversitat d'aparició.



- Fer una anàlisi comparativa qualitativa de les estratègies, les dificultats i els errors observats en la resolució d'aquestes activitats per part dels alumnes dels diferents grups d'incidència:
  - Caracteritzar les estratègies, les dificultats i els errors manifestats pels alumnes de cadascun dels grups d'incidència.
  - Estudiar de quina manera les diferències en les estratègies, les dificultats i els errors depenen de les característiques de l'activitat proposada.
  - Veure si les diferències en la utilització d'estratègies porten a diferències en els errors.

Tal com l'hem establert, el *problema principal* necessita un tractament qualitatiu. Tal com s'argumenta més endavant, la utilització d'una metodologia qualitativa comporta unes limitacions. En aquest sentit, cal dir que els resultats a que arribem tenen caràcter explicatiu i es poden generalitzar únicament amb el propòsit d'explicar el comportament d'alumnes en condicions paral·leles i en situacions anàlogues.

### 1.3 Importància de la recerca.

En aquesta secció argumentem la importància de la recerca des de dos punts de vista: en primer lloc, justifiquem el valor de les aportacions del present treball des del punt de vista *de l'ensenyament de les Matemàtiques*, i en segon lloc, valorem la seva *rellevància teòrica*.

A l'analitzar *la importància* de la recerca per a *l'ensenyament de les Matemàtiques*, el primer aspecte a tenir en compte és el fet que el pensament espacial és important per a l'aprenentatge de les Matemàtiques.

El pensament espacial no només és important per la pràctica diària, com a interpretació del món real, sinó també com a component del pensament matemàtic. Així, ja el 1978, en el llibre del mestre de la sèrie televisiva anglesa *Leapfrog* de Hemmings i altres (1978), apareixen els paràgrafs següents, citats per Delaney (1979) i, posteriorment, per Dickson i altres (1984), (p. 19):

... the current anxiety about children's acquisition of numerical skills tends to obscure the realisation that most people are more frequently faced with spatial problems than with numerical ones whether in their work as bricklayers or dress designers or draughtsmen or in

their “every day” activities in parking cars or playing tennis or putting up shelves.

... if, as we believe, mathematics like literature offers a way of understanding and appreciating one’s environment the a large part of this appreciation will come about through a spatial awareness and understanding simply because our physical environment is itself spatial.

... a spatial facility is an essential component of mathematical functioning ... Intuitive awareness of spatial properties seems to be at the heart of most mathematical thinking.

Més tard d’altres autors, entre ells Presmeg (1985), fan especial èmfasi en les dificultats que pot generar en alguns alumnes el fet que l’ensenyament de les Matemàtiques estigui basat únicament en processos de raonament lògico-verbals. En aquest sentit, aquesta autora, recorda les advertències fetes anteriorment per Lovell (1961), en el sentit de no sobreestimar els raonaments lògics, i com aquesta tendència pot afectar els alumnes que prefereixen la utilització de processos visuals per a la resolució de problemes matemàtics, (p. 22):

Lovell (1961), on the other hand, felt that logic should not be overestimated; visual imagery is important in mathematics. The position taken in the present study is that the verbal and visual symbolic systems have functions which are different but complementary, ... and that although it may be possible to solve mathematical problems without invoking the visual symbolic system this would be neglecting a potentially powerful mode of processing mathematical information. Indeed, to cause the visualisers in this study to rely solely on the verbal symbolic system, insofar as this could be done, might have deprived the, Samson-like, of their strength.

La importància del pensament visual des del punt de vista de les Matemàtiques, es pot resumir amb la frase de Bishop (1989), p. 8:

Mathematics is a subject which is concerned with objectivizing and representing abstractions from reality, and many of these representations appear to be visual.

La consideració de que el pensament espacial és important en l’aprenentatge de les Matemàtiques, no tindria sentit de cara a la justificació que presentem si les habilitats espacials dels alumnes no es poguessin desenvolupar a través de l’ensenyament formal.

Krutetskii (1976), un dels iniciadors de les recerques en aquest camp, afirma que aquestes habilitats no són ni constants ni inalterables. Podem interpretar les diferències individuals com a reflex dels diferents nivells i tipus d'habilitats, però les habilitats no són un fet predeterminat d'una vegada per totes, sinó que es desenvolupen amb la instrucció, la practica i el domini d'una activitat. Aquest autor afirma que, encara que l'èxit en els estudis, en el domini de la informació, de destreses i hàbits no depèn només de les habilitats, sinó també de la relació de l'alumne amb la matèria, és possible i necessari treballar per al desenvolupament de les habilitats dels alumnes, i aquest fet és especialment important si pensem en els alumnes amb més dificultats en Matemàtiques, (p. 329):

Many pupils who are average or especially incapable in mathematics also do not rely on visual schemes in problem-solving, but it is because they do not know how.

En relació a les implicacions de l'ensenyament formal en el desenvolupament de les habilitats espacials, Bishop (1980a) remarca que els enfocaments donats a l'acte d'ensenyar són un factor determinant a l'hora d'afavorir-les. El mateix autor, en un escrit posterior, Bishop (1983), planteja que les diverses habilitats implicades en l'habilitat espacial, poden millorar-se a través de l'ensenyament.

En relació a les habilitats d'interpretació i de comunicació d'informació espacial, aquest autor afirma que els diferents tipus de convencions són relativament fàcils d'ensenyar i que aquest tipus d'habilitats són millorables emfasitzant els diferents tipus de representacions utilitzades, així com la seva comprensió. Pel que fa a les habilitats de processament, planteja el fet que un ampli ventall d'activitats espacials pot afavorir-ne el desenvolupament. Planteja, com un dels problemes en relació a les habilitats de processament espacial, el fet d'ignorar de quina manera tenen lloc els processos mentals dels alumnes.

Aquest és un dels motius pels quals creiem que el present estudi pot afavorir els esforços per la implementació en els alumnes de les habilitats espacials, en tant en quant aporta nova informació en relació a les estratègies, dificultats i errors i, en general, als processos mentals implicats en la manifestació d'aquestes habilitats.

Donada la importància de les habilitats espacials de cara al pensament matemàtic, i considerant que es possible la seva implementació, són molts els autors que reclamen que es contempli com un dels objectius del currículum escolar el desenvolupament d'aquestes habilitats. Uns dels autors que han fet més èmfasi en aquests aspectes han estat Gaulin i Bishop. Aquest darrer, Bishop (1980b), afirma que cal considerar l'habilitat d'interpretació d'informació figurativa, des d'un punt de vista més seriós del que habitualment es fa. Proposa incloure-la en

tot currículum mínim, encara que no es faci un treball extensiu en Geometria, i assegura que els professors no són prou conscients de les dificultats relacionades amb el desenvolupament d'aquesta habilitat.

Des d'aquest punt de vista, el present treball és important, en tant en quant aporta informació en relació a les dificultats relacionades amb la interpretació i comunicació d'informació espacial.

En el mateix article, i referint-se a l'habilitat de processament visual, aquest autor suggereix que les condicions sota les que el nen aprèn matemàtiques no han d'obstruir el desenvolupament d'aquesta habilitat, desvalorant-la. Afirmar que, possiblement, hi ha molts professors que no manifesten una tendència natural a la utilització d'estratègies de processament visual, per tant, hauran de ser molt més atents per apreciar una manera de processar informació que poden no preferir.

En aquest sentit, són importants els resultats de la present recerca, en tant en quant, estudien les estratègies de processament dels alumnes i com les característiques de l'activitat a la que s'enfronten en condicionen l'aparició.

Acceptada la necessitat del treball escolar de cara la implementació de les habilitats espacials, sorgeix una nova discussió, originada per la qüestió de si el treball en relació a aquests aspectes pot incloure's en el de la Geometria.

Tenint en compte que la Geometria en sí no és una disciplina únivocament definida, no hi ha cap raó per esperar que existeixi consens sobre què ha de ser l'ensenyament de la Geometria a l'escola. Cal acceptar, doncs, que encara hi pugui haver reticències, per part d'alguns professionals de l'ensenyament, a la inclusió en el treball escolar de Geometria dels aspectes relacionats amb les habilitats espacials.

La Geometria és més que una branca de les Matemàtiques, i molt especialment, aquesta consideració cal fer-la si el nostre punt de vista és el de l'educació. Els canvis en l'ensenyament de la Geometria han emfasitzat els aspectes 'matemàtics', insistint en aquells aspectes que l'aproximaven a d'altres branques com poden ser l'àlgebra. Creiem que un dels problemes de l'ensenyament de la Geometria és que s'ha perdut de vista que les seves arrels són essencialment espacials i visuals i que les habilitats espacials són importants per a la descoberta del sentit complet dels teoremes, objectes i relacions que s'hi treballen.

Aquesta interpretació de la Geometria, en sentit ampli, des del punt de vista de l'ensenyament, no és nova, i és àmpliament acceptada per un col·lectiu de professionals i investigadors dins del camp de l'educació matemàtica. Així, ja Longley, el 1930, afirma que l'objectiu del treball de la geometria dels sòlids hauria de ser l'exercitar i desenvolupar la imaginació espacial de l'estudiant, i donar-li, d'una banda, el coneixement de les relacions espacials fonamentals, i de l'altra, la

capacitat de treballar amb elles.

Són molts els investigadors del camp de l'ensenyament de les Matemàtiques —Del Grande (1987), Freudenthal (1973), Hilton i Pedersen (1986), Hershkowitz (1989), Schoenfeld (1986), Usiskin (1987)— que recomanen un curs de geometria visual i intuïtiva abans o com a complement dels cursos de geometria deductiva.

Tal com afirma Usiskin (1987), com a educadors ens cal considerar la Geometria sota quatre punts de vista: com a estudi de la visualització, dibuix i construcció de figures; com estudi del món real, físic; com a vehicle per a representar conceptes, matemàtics o no, l'origen dels quals no és visual o físic, i com a exemple de sistema matemàtic.

Fins i tot, per aquells que no acceptarien fer interpretacions del terme Geometria en sentit ampli, el paper rellevant que les habilitats espacials juguen en els aprenentatges d'aquesta branca de les matemàtiques justifica abastament la necessitat de destinar esforços en el treball escolar per desenvolupar-les.

En aquest sentit, Bishop (1986) fa una revisió de les dificultats que els alumnes tenen en el treball escolar d'idees geomètriques i justifica que la majoria d'elles tenen la seva arrel en la conceptualització que l'alumne fa de l'espai. Afirmar que l'escola elemental s'hauria d'ocupar no només de desenvolupar les idees espacials dels nens, sinó també d'introduir habilitats matemàtiques bàsiques en relació a l'espai com poden ser classificar, descriure o relacionar. A nivell de secundària l'augment dels temes en relació a la geometria porta a una forta necessitat d'habilitats de visualització i coneixement de l'espai. Considerant que la manera d'interpretar l'entorn de tres dimensions és un fet individual que ve condicionat per l'experiència personal, i que aquesta és diferent per cada alumne, cal assegurar que les idees geomètriques que s'ensenyin a l'escola tinguin un punt de partida correcte, no donant per suposades aquestes experiències, sinó incloent activitats espacials apropiades per a la introducció de les idees geomètriques. En el mateix article presenta les activitats per a millorar el coneixement de l'alumne de l'espai, com a primer pas per a eliminar els obstacles que troben els alumnes en l'aprenentatge de la Geometria, afirmant que la causa de les dificultats experimentades pels alumnes, en l'aprenentatge de processos i continguts geomètrics, és la precipitació cap a la formalització, sense fer atenció suficient a les activitats associades a la matematització de l'espai.

En un moment de canvi curricular, en el que hi ha tendència a acceptar la necessitat d'implementar les habilitats espacials, creiem que la nostra recerca pot contribuir a donar idees sobre com es poden desenvolupar aquestes habilitats.

La nostra recerca posa de manifest que els alumnes a més de manifestar dife-

rents nivells en la seva habilitat de processament espacial, tenen també diferents tipus de temperament matemàtic, en tant en quant les estratègies preferides per a la resolució d'una determinada activitat espacial poden ser molt diverses. És una qüestió de gran significació per a l'ensenyament, la consideració de que el temperament matemàtic dels responsables de l'educació —professors, autors de llibres de text, professionals implicats en els dissenys curriculars...— pot interferir amb el temperament matemàtic dels alumnes. En aquest sentit, Presmeg (1985) fa especial referència a la importància de valorar les estratègies de processament visual, (p. 187):

A third possibility is that in most school classrooms the teaching emphasis is on nonvisual methods and that even when visual methods occur, these methods of solution are not valued by teachers; textbooks may also stress an orderly logical progression of mathematical material and formal, nonvisual proofs and examples at the expense of visual methods.

En un moment que de diversos estudis i recerques està començant a sorgir l'evidència que els diferents mètodes d'ensenyament poden modificar les habilitats espacials, és important aportar informació en relació a les estratègies, dificultats i errors dels alumnes en els processos d'aprenentatge d'aquestes habilitats.

La importància de tenir en consideració el temperament matemàtic dels alumnes, és a dir, les preferències en relació a les estratègies de processament, és especialment important en relació als alumnes amb dificultats d'aprenentatge en Matemàtiques. En aquest sentit, Bishop (1980b) afirma que el desenvolupament d'estratègies de processament visual dona més bons resultats amb els alumnes amb poca habilitat de raonament.

A més, tal com afirmen Eisenberg i Dreyfus (1989) i Presmeg (1989), valorar el paper del pensament visual dels alumnes és important, també, des del punt de vista d'afavorir una millor comprensió entre els representants de diverses cultures en grups-classe multiculturals.

Krutetskii (1976) afirma que la naturalesa visual del pensament matemàtic pot ser una dificultat per al bon rendiment en Matemàtiques. Assegura que del fet que per a l'aptitud matemàtica es necessària la capacitat de generalització, estar lligat a la necessitat de treballar amb esquemes mentals visuals pot ser una dificultat quan els esquemes que s'utilitzen no són suficientment generals.

Per als alumnes que prefereixen la utilització d'estratègies de processament visual, a vegades, cal afegir aquesta dificultat les ocasionades per l'èmfasi dels mètodes d'ensenyament, els exàmens, i en definitiva el currículum, en els mètodes

de pensament no visuals, que interfereixen amb els seus. En aquest sentit, Presmeg (1985) analitza el paper important que pot jugar el professor al respecte (p. 257):

... in connection with difficulties experienced by visualisers in learning mathematics, while it is true that many difficulties are inherent in the nature of visual images, these difficulties are exacerbated if the teacher is not aware of the nature of visual thinking sufficiently to realise that these difficulties exist.

Per totes aquestes raons, la possibilitat de que els professionals implicats en l'ensenyament coneguin les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes en relació a les habilitats espacials, pot contribuir a millorar els seus aprenentatges, especialment els d'aquells amb menys aptitud matemàtica.

Tenint en compte els suggeriments fets per Hershkowitz (1990) per a noves recerques, (p. 93):

... there are a few general points an some general areas that require additional research or instruction effort in the future:

...

There is still a need to invest effort in research on the evolution of geometrical concepts, geometrical thinking, and the development of visual abilities.

...

This question of the nature of visual abilities deserves more research.

analitzem, a continuació, la *rellevància teòrica* de la present recerca des de dos punts de vista: d'una banda, per les *innovacions en el plantejament* del problema, i de l'altra, per les *aportacions dels seus resultats*.

Pel que fa al plantejament del problema, cal tenir en compte, d'entrada, que la part principal de la recerca fa èmfasi en els processos cognitius i no únicament en el rendiment.

Des que la recerca de Krutetskii va ser coneguda pels investigadors amb domini de la llengua anglesa, amb l'aparició el 1976 del seu llibre traduït a l'anglès *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, han estat publicades diverses i importants recerques seguint els seus plantejaments. En aquest llibre, l'autor presenta resultats importants diversos, però el que, sense cap mena de

dubtes, ha generat més recerques, entre les quals la present, ha estat la caracterització dels individus, des del punt de vista del seu temperament matemàtic —*mathematical cast of mind*—, en *individus geomètrics, anàlitics i harmònics*.

Aquest autor fa una diferenciació clara entre el tipus de temperament matemàtic de l'alumne i el nivell d'habilitat espacial que aquest pugui manifestar. Malgrat això, la diferenciació proposada per Krutetskii s'ha anat tornant difosa en moltes de les recerques que l'han seguit, en el sentit que alguns dels autors no han dissociat amb prou claredat el nivell d'habilitat espacial d'un individu del tipus preferit de processament, fins a tal punt que, en alguns casos, de la lectura de les recerques es poden interpretar com equivalents els conceptes *habilitat espacial* i *habilitat de processament visual*.

En aquest sentit, creiem que la present recerca pot ajudar a clarificar aquesta confusió ja que proposem intencionadament la utilització del terme *habilitat de processament espacial* —i no visual, entenent-la en el següent sentit:

*Habilitat de processament espacial és l'habilitat necessària per a dur a terme el conjunt d'operacions mentals per a resoldre una activitat espacial. L'habilitat de processament espacial inclou no només l'habilitat per a imaginar els objectes, les relacions i les transformacions espacials, sinó també per a codificar-los de manera verbal o mixta. Inclou també l'habilitat no només per a manipular les imatges mentals dels objectes, les relacions i les transformacions espacials, sinó també per a resoldre les activitats utilitzant estratègies de processament verbal.*

Un altre aspecte important a tenir en compte en el plantejament de la recerca és la consideració que existeixen diferents tipus d'habilitats implicades en la resolució d'activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai. En aquest sentit, en el moment d'establir les definicions dels termes implicats en la recerca, al presentar la interpretació que nosaltres proposem del terme *habilitat*, partim de la proposta de Krutetskii (1976), insistint en la diferenciació dels termes anglesos *ability* i *skill*. Així, interpretem el terme *habilitat* —*ability*— en el sentit de potencialitat, capacitat o aptitud per a dur a terme una determinada activitat, i el terme *habilitat* —*skill*— en el sentit de tècnica o experiència necessària per a dur a terme una activitat correctament.

Segons això, i seguint el model proposat per Krutetskii, l'habilitat d'orientació espacial depèn d'un conjunt de factors que inclouen no només les habilitats —*abilities*— considerades com a característiques individuals dels processos mentals, sinó també les habilitats —*skills*— enteses com a capacitats tècniques que fan possibles aquests processos mentals i la manifestació dels seus resultats. En



el present treball, el nostre objecte d'estudi és el contingut concret observable de l'activitat dels alumnes, i la manifestació del resultat d'aquesta activitat comporta la implicació d'habilitats —*abilities*— i habilitats —*skills*. Des d'aquest punt de vista, en el nostre treball, considerem que l'acompliment d'una activitat espacial depèn no només del nivell d'habilitats de processament espacial de l'individu, sinó també del grau de desenvolupament de les habilitats d'interpretació i de comunicació d'informació espacial.

Un altre dels aspectes importants de la proposta de Krutetskii, prové del seu plantejament del terme habilitat quan afirma que l'habilitat és sempre habilitat en un determinat tipus d'activitat i que, per tant, només es posa de manifest en l'anàlisi d'una activitat específica. Aquest enfocament és un altre dels aspectes sovint oblidats pels investigadors que han seguit la línia de recerca encetada per aquest autor, sovint massa preocupats per arribar a una caracterització dels individus.

En aquest sentit, la nostra recerca és innovadora, en tant en quant recupera la importància de com l'activitat pot condicionar el comportament dels individus. El problema plantejat en el nostre treball no és fer una caracterització d'individus a partir del seu comportament en els processos de resolució d'un seguit d'activitats, sinó que ens interessa analitzar el comportament d'un grup d'individus en un bloc d'activitats. Si bé és cert que estudiem el comportament individual dels alumnes en cadascuna de les activitats, l'objectiu no és analitzar el comportament de cadascun d'ells al llarg de les diverses activitats. El nostre plantejament té com objectiu analitzar el comportament dels individus, com a grup, en cadascuna de les activitats en funció de les característiques d'aquesta, i fer un estudi comparatiu del comportament global dels alumnes entre les diverses activitats, per veure com el tipus d'activitat proposada porta a diferències en les estratègies, dificultats i errors en els processos, i identificar característiques globals dels grups de subjectes.

Un altre aspecte diferenciador de la present recerca respecte els treballs d'altres autors és el contingut de les activitats proposades als estudiants. La majoria de les recerques publicades en relació al tema, tenen com a finalitat l'anàlisi de les estratègies de processament visual en la resolució d'activitats de contingut no geomètric, és a dir, estudien l'habilitat de processament visual entesa com la capacitat de visualitzar i traduir relacions abstractes i informació no figurativa a termes visuals. Per contra, la nostra recerca es centra en les habilitats de processament espacial, i considera la possibilitat d'utilitzar estratègies de processament verbal o visual com a estratègies cognitives en la resolució de problemes amb contingut geomètric i suport figuratiu.

Les recerques que com la present han estudiat les estratègies que apareixen en els processos de resolució d'activitats amb contingut geomètric i suport figuratiu, segueixen el model d'anàlisi proposat per Burden i Coulson (1981). Des d'aquest punt de vista, el present treball aporta noves idees, en tant en quant amplia el model proposat per aquests autors incloent-hi el que anomenem *estratègies de resolució*.

En relació als resultats, considerem que la present recerca aporta noves dades interessants.

Remarquem la constatació feta que per a cadascuna de les activitats on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, les estratègies cognitives manifestades pels alumnes són:

- estratègies de resolució,
- estratègies de processament i
- d'aproximació a la forma dels objectes.

Són també importants els resultats obtinguts en relació a com les característiques de l'activitat condicionen les estratègies utilitzades pels alumnes. Observem que per cada categoria d'estratègies, l'aparició d'un tipus o d'un altre depèn d'una o més de les característiques de l'activitat plantejada. En particular, les activitats provoquen l'aparició d'estratègies cognitives de manera diferent segons l'acció requerida sigui interpretació o construcció. Per tant, l'habilitat d'orientació espacial no només depèn de les potencialitats o capacitats de l'individu, sinó també de les característiques de l'activitat a la que s'enfronta.

És interessant també remarcar que hem arribat a la conclusió que el tipus d'estratègies de processament o d'aproximació utilitzades no porten de manera significativa a diferències entre el nombre de respostes correctes i d'errors des del punt de vista geomètric.

Pel que fa a les habilitats necessàries per a resoldre amb èxit les activitats proposades, remarquem la constatació feta que el grau d'habilitat d'orientació espacial d'un individu depèn no només de la utilització adequada a l'activitat proposada d'estratègies de resolució, de processament i d'aproximació a la forma, sinó també del nivell de l'individu en relació a les habilitats d'interpretació i de comunicació d'informació espacial.

Els resultats aportats pel present treball, en relació a les diferències de comportament entre els individus dels dos sexes, són també aportacions clarificadores,

en tant en quant fan la diferenciació entre el nivell d'habilitat i la preferència per utilitzar un tipus d'estratègia o un altre.

En aquest sentit, observem que, en les activitats on l'acció requerida és interpretació, el tipus de temperament matemàtic dels nois i les noies és diferent, preferint els nois la utilització d'estratègies de processament visual i, les noies, de processament verbal. En aquest tipus d'activitats, el nivell de l'habilitat d'orientació espacial és superior en els nois. La diferència de nivells està lligada a la utilització diferent d'estratègies de processament, portant les estratègies de processament verbal, que són les utilitzades majoritàriament per les noies, a un major nombre d'errors.

En les activitats on l'acció requerida és construcció, el tipus de temperament matemàtic dels nois i les noies no és diferent, però el nivell de l'habilitat d'orientació espacial és superior en els nois. La diferència de nivells està lligada a la utilització de manera diferent, per part dels uns i de les altres, d'estratègies de resolució.

Finalment, en relació a les diferències de comportament entre els individus dels dos sexes, també considerem interessants les diferències observades entre les dificultats i els errors dels nois i les noies.

Creiem que tant les diferències en el plantejament exposades com els resultats aportats, algun dels quals hem anticipat, justifiquen la rellevància del present treball des del punt de vista teòric.

## 1.4 Estructura i organització de la memòria.

En aquesta secció exposem el contingut dels següents capítols de la memòria de recerca.

En el següent capítol, el segon, fem una revisió de la literatura existent, considerant el marc general de les recerques que s'ocupen de les habilitats espacials i que tenen una importància directa per al problema que ens ocupa. Aquest capítol s'ha estructurat en tres grans blocs.

En el primer, s'analitzen les diferents interpretacions del terme habilitat i es presenten les habilitats espacials més importants definides sota els diferents corrents, la relació d'aquestes amb el terme imatgeria —*imagery*—, i es completa la relació amb aquells termes que es poden incloure dins el concepte habilitats espacials.

En el segon apartat, es consideren les teories que estudien les pautes de comportament en els diferents estadis de l'evolució d'un individu, i les diferències entre

individus en relació al seu comportament davant de tasques espacials.

En la darrera secció, es fa una revisió de les recerques que han analitzat les diferències de comportament, en relació a les activitats espacials, entre diferents grups de població, especialment la diferència entre sexes.

En el tercer capítol, presentem les definicions dels termes implicats i plantegem les hipòtesis en relació al *problema previ*.

En la primera secció d'aquest capítol, presentem la conceptualització del terme *habilitat*, i definim els que s'utilitzen al llarg de la recerca: *habilitat d'interpretació d'informació espacial*, *habilitat de comunicació d'informació espacial*, *habilitat de processament espacial* i *habilitat d'orientació espacial*.

En la segona secció, presentem les limitacions del problema previ, i les hipòtesis per aquesta part de la recerca, establint-les en funció dels tres objectius proposats.

En el quart capítol, presentem la metodologia utilitzada per a la resolució del *problema previ*. En la primera secció, justifiquem la utilització d'una metodologia qualitativa.

La segona secció, està organitzada en dos apartats ja que l'instrument utilitzat per a la resolució del *problema previ* és part d'un qüestionari elaborat i validat amb anterioritat. El primer apartat, fa referència a l'instrument considerat globalment, i presenta el procés d'elaboració i validació de tot el qüestionari, i el segon, fa referència concretament a l'instrument del *problema previ*, és a dir, als ítems del qüestionari on la transformació geomètrica proposada és una rotació a l'espai, fent-ne una anàlisi des del punt de vista formal i de validesa.

La tercera secció, presenta les característiques de la mostra i el procés de recollida de dades. I la quarta secció, la darrera d'aquest capítol, presenta el tractament estadístic de les dades.

En el cinquè capítol, exposem les conclusions del *problema previ*. En la primera secció, presentem el sumari i les conclusions parcials dels tres objectius i, en la segona, les conclusions generals del *problema previ*.

En el sisè capítol, presentem les definicions dels termes que intervenen en el *problema principal*, i establim les hipòtesis i propòsits de la part principal de la recerca.

La primera secció del capítol, està estructurada en quatre apartats. En el primer, recordem les definicions de les *habilitats* intervinents, ja proposades en el *problema previ*. En el segon, establim els criteris de caracterització de les activitats: *forma de presentació*, *formulació*, *forma de resposta*, *context*, *acció requerida* i

*requeriment geomètric*. En el tercer apartat, definim les estratègies intervinents i les seves tipologies: *estratègies de resolució, de processament —visual i verbal—, estratègies d'aproximació —global i parcial—, i els recursos auxiliars*. En el darrer apartat de la secció, definim el que entenem per *processos tipificats*.

En la segona secció, plantegem les limitacions del *problema principal*, i establim les hipòtesis i propòsits d'aquesta part de la recerca en funció de cadascun dels sis objectius establerts.

En el setè capítol, presentem, justifiquem i descrivim la metodologia utilitzada per a trobar respostes a les preguntes plantejades en el *problema principal*.

En la primera secció, argumentem els motius de l'elecció d'una metodologia qualitativa per a la resolució de les qüestions que tenim plantejades.

En la segona secció, presentem les activitats proposades als alumnes, descrivim el seu procés d'elaboració, en fem una anàlisi formal i presentem la seva caracterització.

A continuació, en la tercera secció, presentem la mostra i el procés de recollida de dades.

En la quarta secció d'aquest capítol, exposem les diverses etapes en la construcció de l'instrument d'anàlisi de dades i el mateix procés d'anàlisi i justifiquem la utilització de xarxes sistèmiques, tant en la fase de reducció com en la d'exposició de dades.

A continuació, en la cinquena secció, presentem les accions dutes a terme amb la finalitat d'assegurar, a més de la validesa de l'instrument utilitzat per a l'obtenció de les dades, la validesa del procés de recollida de les mateixes, la de l'instrument d'anàlisi i de la pròpia anàlisi, i la consistència dels resultats.

En la darrera secció d'aquest capítol, exposem, per a cada activitat, les dades i presentem el procés d'establiment de resultats.

En el vuitè capítol, exposem les conclusions del *problema principal*. En la primera secció, presentem el sumari i les conclusions parcials dels sis objectius plantejats i, en la segona, les conclusions generals del *problema principal*.

En el novè, i darrer, capítol d'aquesta memòria, fem una discussió dels resultats obtinguts en relació a les recerques prèvies, presentem les conclusions generals del treball i plantegem possibles nous camps de recerca d'interès.

El capítol està organitzat en tres seccions. En la primera secció, presentem un sumari de les conclusions més importants de cadascun dels dos problemes tractats, contrastant-les amb les conclusions de les recerques anteriors a la present, analit-

zem com els resultats obtinguts en el *problema principal* expliquen els resultats del *problema previ* i presentem les implicacions per a l'ensenyament, especialment les destinades a facilitar la superació de les dificultats i errors observats i a millorar el nivell dels alumnes en relació a les habilitats estudiades.

En la segona secció, exposem les conclusions generals de la present recerca. Aquestes conclusions no entren en les particularitats de les del *problema previ* i del *problema principal*, presentades ja en capítols anteriors, sinó que són fruit d'una reflexió general sobre quins són els factors que determinen el nivell d'habilitat d'orientació espacial en un individu, i com els resultats de la present recerca poden influir en els processos d'ensenyament-aprenentatge.

La darrera secció, planteja noves qüestions de recerca relacionades amb les estudiades en aquest treball.

En relació a la bibliografia, cal dir que al final de cadascun dels capítols on es fa referència o es citen obres d'altres autors, apareix la bibliografia referenciada.

Al final de la memòria de recerca, es presenta la bibliografia general que inclou, d'una banda, les obres referenciades a cadascun dels capítols, i de l'altra, aquells treballs que, sense haver estat citats, són de rellevància per a la present recerca i d'altres obres que sense tenir una importància directa pel present treball, aporten informació complementària.

### Referències bibliogràfiques del capítol 1.

Bishop, A.J., (1980a): 'Spatial abilities and mathematics education. A review.' *Educational Studies in Mathematics* 11, pp. 257-269.

Bishop, A.J., (1980b): *Spatial and Mathematical Abilities —A Reconciliation*, Comunicació a Conference on Mathematical Abilities at the University of Georgia, Athens, June 12-14, 1980.

Bishop, A.J., (1983): 'Space and Geometry' en R. Lesh, M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA, pp. 175-203.

Bishop, A.J., (1986): 'What are some obstacles to learning geometry' en R. Morris, (Ed.), *Studies in Mathematical Education. Teaching of Geometry*, UNESCO, Vol. 5, pp. 141-160.

Bishop, A.J., (1989): 'Review of Research on Visualization in Mathematics Education.' *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition 1989, 11(1).

Center for Teaching/Learning Mathematics, pp. 7-16.

Burden, L.D., Coulson, S.A., (1981): *Processing of Spatial Tasks*. M. Ed. Thesis, Monash University, Melbourne.

Del Grande, J., (1987): 'Spatial Perception and Primary Geometry' en M.M. Lindquist i A.P. Shulte, (Eds.), *Learning and Teaching Geometry K-12*, NCTM, Reston, Virginia, pp. 126-135.

Delaney, K.C., (1979): 'A place for Space.' *Mathematics Teaching*, 86, Primary Supplement, XVII.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O., (1984): *Children Learning Mathematics: A teacher's Guide to Recent Research*. Oxford: Holt, Rinehart and Winston.

Eisenberg, T., Dreyfus, T., (1989): 'Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum' *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition 1989, 11(1). Center for Teaching/Learning Mathematics, pp. 1-5.

Freudenthal, H., (1973): *Mathematics as an educational task*. Reidel Publication Company, Dordrecht, Holanda.

Hemmings, R., Last, D., Rodgers, L., Sturges, D., Tahta, D., (1978): *Leapfrog-Teachers' Handbook*, Central Independent Television plc.

Hershkowitz, R., (1989): 'Visualization in Geometry: Two Sides of the Coin.' *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition 1989, 11(1), Center for Teaching/Learning Mathematics, pp. 61-76.

Hershkowitz, R., (1990): 'Psychological aspects of learning geometry' en P. Nesher, J. Kilpatrick, (Eds.) *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education*. ICMI Study Series, Cambridge University Press. pp. 70-95.

Hilton, P., Pedersen, J., (1986): 'A role for untraditional geometry in the curriculum' *Kolloquium Mathematik-Didaktik der Universität Bayreuth*. Israel.

Krutetskii, V.A., (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press, Chicago.

Longley, W.R., (1930): 'The Teaching of Geometry' *Fifth Yearbook*, Teacher's Col-

lege. N.C.T.M.

Lovell, K., (1961): *The growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children*. University of London Press. Londres.

Presmeg, N.C., (1985): *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation*. Unpublished PhD Dissertation. University of Cambridge.

Presmeg N.C., (1989): 'Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms.' *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition 1989, 11(1), Center for Teaching/Learning Mathematics, pp. 17-24.

Schoenfeld, A.H., (1986): 'On having and using geometric knowledge' en J. Herbert, (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J., USA. pp. 225-264.

Usiskin, Z., (1987): 'Resolving the Continuing Dilemma in School Geometry' en M.M. Lindquist i A.P. Shulte, (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, N.C.T.M.





## Capítol 2

# Revisió de les investigacions prèvies rellevants per la recerca.

Tot i que són moltes les recerques en relació a les habilitats espacials, són ben poques les que consideren els aspectes relacionats amb les estratègies, les dificultats i els errors que els alumnes posen de manifest en els aprenentatges d'aquestes habilitats. Tenint en compte aquest fet, al revisar la literatura existent, aquest capítol considera el marc general de les recerques que s'ocupen de les habilitats espacials i que tenen una importància directa per al problema que ens ocupa.

En primer lloc, cal dir que l'estructuració d'aquest capítol en seccions és una mica arbitrària ja que el concepte habilitats implica necessàriament —tal com es podrà veure a continuació en el desenvolupament— diferents models de comportament i diferències individuals. Malgrat això, s'ha estructurat el capítol en tres grans blocs.

En el primer, s'analitzen les diferents interpretacions del terme habilitat, es presenta la discussió habilitat o habilitats, les diverses maneres de considerar-les —com a rendiment en una situació donada o com a procés en l'acompliment d'una tasca— i les habilitats espacials més importants definides sota cadascun d'aquests corrents, la relació de les habilitats espacials amb el terme imatgeria —*imagery*— i es completa la relació amb aquells aspectes que es poden incloure dins el terme habilitats espacials.

En la segona secció, es consideren les teories que estudien les pautes de comportament en els diferents estadis de l'evolució d'un individu, i les diferències entre individus en relació al seu comportament davant d'activitats espacials. En el primer grup, s'analitzen les teories psicològiques del desenvolupament, i les que fan referència a les diferents etapes necessàries per a l'adquisició de determinades

habilitats espacials. En el segon grup, es revisen les teories que s'ocupen de les diferències de comportament dels individus, considerant el tipus de processament preferit o les diferents estratègies utilitzades en la resolució d'activitats espacials.

En la darrera secció, es fa una revisió de les recerques que han analitzat les diferències de rendiment en les tasques espacials entre diferents grups d'incidència, especialment la diferència entre sexes. Aquest estudi es fa considerant aquelles altres variables intervinents que tenen una relació decisiva amb els factors que contribueixen a la manifestació de diferències entre els dos sexes. En primer lloc, es presenta la discussió del millor rendiment per part del sexe masculí, a continuació, s'analitzen les dues grans categories de justificacions existents de la diferència de rendiment —per causes biològiques o per causes de l'entorn— i, finalment, es constata que les poques recerques conegudes en relació a la diferència en els processos —en lloc de la diferència en el rendiment— no permeten identificar cap característica del pensament dels nois o les noies que faci suposar l'existència de diferents processos de pensament en la resolució de tasques espacials.

## 2.1 Habilitats espacials.

Aquesta secció comença analitzant la conceptualització del terme *habilitat*. Partint de la interpretació de Krutetskii, considerem *habilitat* com a *capacitat, potencia-  
litat o aptitud per a dur a terme una activitat*.

Es revisa l'acceptació generalitzada de l'existència de les habilitats espacials —encara que enteses de diverses maneres—, s'estudia la discussió *habilitat* o *habilitats*, i les implicacions que les diverses conceptualitzacions comporten per a la interpretació de les causes de la seva manifestació i per a l'ensenyament.

Es fa una revisió dels diferents factors —habilitats mentals primàries— que estan relacionats amb l'habilitat espacial i que apareixen en les recerques i, amb especial interès, dels coneguts com *orientació espacial* i *visualització* —o d'altres noms més o menys equivalents.

Una vegada revisades les recerques en les que les habilitats espacials es defineixen a partir del rendiment, s'analitzen aquells treballs que s'interessen, no tant pel rendiment, com pels processos mentals i estratègies cognitives utilitzades pels subjectes en la resolució de tasques espacials, entre els quals cal considerar, de manera especial, els treballs de Bishop on defineix les habilitats IFI i VP.

Tenint en compte que, en general, quan es fa referència a habilitats espacials sorgeix immediatament un altre concepte, que hi està invariablement relacionat, que és el d'imatgeria, es revisen diverses recerques relacionades amb aquesta darrera noció.

Per acabar la secció, es presenten d'altres habilitats espacials que, encara que potser han estat menys considerades, no poden pas per això ser oblidades. En aquest sentit, es considera no només la comunicació —gràfica, verbal o manera mixta— de les qüestions relacionades amb els objectes i les relacions espacials, sinó també la comunicació de relacions abstractes a través de medis visuals. A més, es presenten d'altres habilitats, com per exemple l'anomenada percepció estructural de l'espai o percepció espacial, per advertir una vegada més del risc, no negligible, que amb els mateixos o semblants noms podem referir-nos conceptes molt diferents.

### 2.1.1 Conceptualització del terme habilitat.

El terme habilitat espacial —o habilitats espacials— es refereix a un concepte que ha esdevingut ambigu i es fa servir per a referir-se a un ampli camp de comportaments, des dels més globals fins als més específics.

La primera dificultat sorgeix en la conceptualització del terme habilitat. En aquest sentit es de gran ajuda la caracterització de Krutetskii del terme habilitat que ha servit de punt de partida i element clarificador per a moltes recerques posteriors. Krutetskii (1976) caracteritza el concepte habilitat de la següent manera (pp. 66 i 67):

- L'habilitat és sempre habilitat en un determinat tipus d'activitat, per tant, només es posen de manifest en l'anàlisi d'una activitat específica.
- Habilitat és un concepte dinàmic. No només es manifesta i existeix en tant en quant hi ha activitat, sinó que també es desenvolupa en l'activitat.
- Hi ha moments en el desenvolupament individual amb condicions més favorables per al desenvolupament de determinades habilitats i aquestes són provisionals o transitòries.
- El progrés i el rendiment en el desenvolupament d'una activitat depèn d'un conjunt d'habilitats.
- La relativa debilitat d'una habilitat pot ser compensada per una altra habilitat.

A la dificultat d'interpretació del terme habilitat, cal afegir-ne una altra que en la nostra llengua passa desapercebuda: la diferència de matisos entre els termes anglesos *ability* i *skill*. La majoria de recerques en aquest camp ens arriben escrites en llengua anglesa i es té tendència a traduir els termes *ability* i *skill* per *habilitat*, i es pot produir el perill d'oblidar la diferenciació inicial.

L'obra ja esmentada de Krutetskii és, una vegada més, de gran ajuda ja que contribueix a clarificar aquests conceptes. En aquest sentit, tot i que els dos conceptes s'estudiïn a partir de la realització d'una activitat, quan es parla d'habilitats —*ability*— es fa —o s'hauria de fer— referència a les característiques psicològiques de la persona implicada en l'activitat, i parlant d'habilitats —*skills*, es fa referència a les característiques psicològiques de l'activitat de la persona.

En aquest sentit, l'anàlisi de l'habilitat —*ability*— és l'anàlisi d'una activitat, però des del punt de vista de les característiques psicològiques individuals que en permeten la realització (p. 71):

Our starting point was that in an analysis of ability one always has in mind the qualities or traits of the *person* who is performing the activity, but in an analysis of skills or habits, one has in mind the qualities or features of the *activity* the person is carrying out.

... If we analyze the activity from the standpoint of the person's psychological trait that are favorable to its mastery, we will be doing an analysis of ability.

Podríem afirmar que la diferenciació dels dos termes feta per aquest autor, concorda, en certa manera, amb els matisos de la llengua anglesa. En aquest sentit, cal interpretar habilitat —*ability*— en el sentit de potencialitat, capacitat o aptitud per a dur a terme una determinada activitat, i el terme habilitat —*skill*—, en el sentit de tècnica o experiència per a dur a terme una activitat correctament.

A més, referint-se a les activitats matemàtiques, afegeix que el concepte *skill* fa referència al contingut concret de l'activitat, mentre que les categories relacionades amb el concepte *ability* no són accions o elements individualitzats de l'activitat matemàtica.

El mateix autor ens fa veure (p. 75) que encara que les inclouen no es poden reduir les habilitats a característiques individuals dels processos mentals —sensacions, percepcions, pensament, memòria i imaginació—, sinó que cal tenir en compte característiques emocionals, volicionals i factors actitudinals.

Sigui quina sigui la interpretació del terme habilitat, si es revisen els estudis en relació a les habilitats matemàtiques, es pot constatar que el que s'anomena habilitat espacial és sempre present entre les característiques del pensament matemàtic com a constituent diferenciat de les altres habilitats matemàtiques o mentals. Així, Krutetskii (1976) al fer la llista d'aquestes habilitats fruit de la revisió de les hipòtesis existents en el moment hi inclou (p. 88):

9. An ability for spatial concepts, which is directly related to the

presence of a branch of mathematics such as geometry (especially the geometry of space).

D'altra banda, no és només en els estudis dins l'àmbit de l'anàlisi multifactorial o la tradició psicomètrica on es consideren habilitats de caire espacial com a components de l'habilitat matemàtica, sinó que en diferents estudis introspectius dels anys 20, s'identifiquen entre les característiques del pensament de les persones matemàticament dotades, l'habilitat per a la conceptualització espacial i per operar amb formes espacials.

Malgrat això, Krutetskii (1976) no inclou les habilitats relacionades amb l'espai dins de l'estructura de les habilitats matemàtiques. Els considera elements útils, però no imprescindibles, per a fer que un individu sigui capaç matemàticament parlant. El que si determinen aquests aspectes és el que l'autor anomena la naturalesa matemàtica de la ment —*mathematical cast of mind*. Entre aquests elements, hi considera (p. 351):

- 4. L'habilitat per als conceptes espacials.
- 5. L'habilitat per a visualitzar relacions i dependències matemàtiques abstractes.

### 2.1.2 Habilitat o habilitats?

Una vegada analitzada la conceptualització del terme habilitat i constatada l'existència del que s'anomena habilitat espacial, i abans d'entrar en la interpretació que d'aquest terme es fa en les diferents recerques, cal tenir present que si ens referim al terme habilitat espacial, automàticament sorgeix la consideració *habilitat espacial o habilitats espacials*. Hi ha dues tendències clares. D'una banda hi ha autors, entre ells Smith (1964), (1982), que consideren que existeix una principal habilitat espacial subjacent que és l'habilitat de percebre una configuració com un tot, i que consideren que l'utilització del terme *habilitats espacials* implica que hi ha un factor espacial comú a totes elles. D'altra banda, d'altres autors com Bishop (1980b) consideren que la noció d'habilitat espacial com a concepte unitari no és adient per a conceptualitzar els processos intel·lectuals involucrats en l'enorme camp d'activitats espacials existents. A més, aquest autor assenyala que per a l'ensenyant de matemàtiques la forma plural, habilitats, aporta la sensació de ser més ensenyable i menys una característica heretada. Els autors soviètics, entre ells Krutetskii (1976), estan d'acord amb aquest punt de vista. Aquest darrer, tal com es pot observar en les referències esmentades, en els seus escrits fa referència amb consistència a la forma plural, encara que més sovint en relació a les habilitats matemàtiques que a les habilitats espacials.

### 2.1.3 Les habilitats espacials.

Les teories i recerques referents a les habilitats espacials i la seva relació amb l'educació matemàtica, han estat exhaustivament revisades per molts autors — Smith (1964), Lohman (1979a i b), Bishop (1980a i b) i (1983), Clements (1981b) i (1982), i Eliot i Smith (1982). Per això, en aquest treball presentem només una síntesis dels corrents més importants, i remarcuem aquells aspectes d'altres tendències, que encara que potser són menys conegudes —no en tots els casos—, són rellevants per al problema que ens ocupa.

Iniciem l'anàlisi de les diverses maneres d'interpretar el concepte habilitat espacial considerant els corrents psicomètrics en que les habilitats espacials es defineixen a partir del rendiment en diferents tipus de proves, la majoria d'elles tipus test.

Un gran volum de teories en relació a les habilitats espacials considerades dins la tradició psicomètrica, correspon als corrents d'anàlisi factorial que té els seus inicis en els treballs d'investigadors com Spearman (1927) i Thurstone (1938). Aquests autors van intentar clarificar, cadascun a la seva manera i amb mètodes estadístics cada vegada més elaborats, l'estructura de la intel·ligència humana. Els seus mètodes es basaven en l'administració de qüestionaris a grans grups, i els constructes amb els que treballaven eren *factor* i *habilitat*. Segons Spearman la solució de qualsevol tasca requeria l'aplicació d'un factor general —intel·ligència general— i un factor específic.

D'altra banda Thurstone, no partia de la idea d'un factor general, però proposava un conjunt d'habilitats mentals primàries necessàries, combinades de certa manera, per a qualsevol àrea específica. Així Thurstone, en la seva teoria d'anàlisi multifactorial aïlla dotze factors —*habilitats mentals primàries*—, que inclouen, entre d'altres, el factor espacial S —*habilitat d'operar amb relacions geomètriques, de manipular formes*— i perceptual P —*velocitat i precisió de percepció visual*—.

Posteriorment, en les recerques dins d'aquest corrent, sovint factors semblants han rebut noms diferents, i factors diferents, han rebut un mateix nom. Malgrat això, revisant les recerques dins del camp de l'anàlisi factorial, es poden identificar dos factors espacials que apareixen, sota petites modificacions, en el treball de molts autors. Aquests factors són essencialment dos: L'orientació espacial —*Spatial Orientation, SO*—, i la visualització —*Visualization, Vz*.

La característica principal dels tests que defineixen el factor d'orientació espacial sembla ser l'èmfasi en la participació. En aquest sentit, en primer lloc l'observador s'ha d'imaginar en la situació, i després, fer una valoració o prendre

una decisió referent a l'objecte estímul des d'aquesta perspectiva. Sovint aquests tests inclouen una component de discriminació dreta-esquerra. El mateix factor ha estat establert també com l'habilitat per a girar o rotar una figura donada —o una part d'aquesta figura— en un pla —o al voltant d'un eix imaginari— per determinar si correspon a una altra figura en aquest mateix pla.

Lohman (1979a) resumeix els diferents aspectes considerats sota el factor orientació espacial de la següent manera (p. 188):

Spatial Orientation (SO). This factor appears to involve the ability to imagine how a stimulus array will appear from another perspective. In the true spatial orientation test, the subjects must imagine they are reoriented in space, and then make some judgement about the situation. There is often a left-right discrimination component in these tasks, but this discrimination must be made from the imagined perspective. However, the factor is difficult to measure since tests designed to tap it are often solved by mentally rotating the stimulus rather than by orienting an imagined self.

Per altra banda, el factor visualització sembla implicar la manipulació mental d'objectes externs, sense imaginar cap moviment ni la implicació del propi subjecte. Es considerava que representava l'habilitat de manipular imatges visuals. Així, en el document anteriorment esmentat, Lohman (1979a), l'autor resumeix els diversos aspectes considerats sota el factor de visualització de la següent manera (p. 188):

Visualization (Vz)... The tests that load on this factor, in addition to their spatial-figural content, share two important features: (a) all are administered under relatively unspeeded conditions, and (b) most are much more complex than corresponding tests that load on the more peripheral factors.

Anàlogament McGee (1979a) defineix dos tipus d'habilitats espacials (p. 893):

1. Spatial visualization ( $V_z$ ), *visualització espacial*, que suposa

the ability to mentally manipulate, rotate, twist or invert a pictorially presented stimulus object

2. Spatial Orientation (SR-O), *orientació espacial* que suposa

the comprehension of the arrangement of elements within a visual stimulus pattern and the aptitude to remain unconfused by the changing orientations in which a spatial configuration may be presented.



En general, es pot dir que hi ha dos tipus de transformacions espacials que cal dur a terme en els tests que defineixen els factors espacials més importants: el moviment mental i la transformació mental.

Són diverses formes de moviments mentals els següents: reflexió, rotació, plegaments, o simplement imaginar que l'objecte estímul es desplaçat d'una posició a una altra.

El segon tipus de transformació espacial, la transformació mental, pot anomenar-se també construcció. Hi ha dos tipus de construcció: la reproducció (i.e. construcció física) i la combinació (i.e. construcció mental). En el nivell més simple, reproduir significa senzillament copiar correctament un estímul dibuixat. En el nivell següent, el dibuix ha de ser reproduït, no només identificat i la reproducció ha de ser una representació verídica de l'estímul.

En les tasques de construcció mental, per altra banda, l'individu ha de construir realment una imatge mental, normalment reorganitzant l'estímul d'una manera diferent. La construcció mental és una component important de molts tests espacials.

A l'analitzar els diferents tipus de requeriments de les activitats que apareixen en els tests espacials, cal tenir en compte el que Smith (1964) anomena càrrega espacial d'un test (p. 96):

... depends on the degree to which it involves the perception, retention and recognition (or reproduction) of a figure or pattern in its correct proportions. Success in the item must depend *critically* on an ability to retain and recognise (or reproduce) a configuration as an organised whole.

Malgrat la gran acceptació i difusió d'aquestes tendències, cal tenir present que el fet de considerar les habilitats espacials completament definides a partir del rendiment en els anomenats tests espacials comporta diversos perills. En primer lloc, cal tenir en compte que s'han trobat variacions considerables entre tests aparentment semblants pel que fa a diferències en la forma de presentació dels estímuls. Considerant aquestes variacions, els investigadors cal que tinguin present el fet que el rendiment individual en els tests espacials pot quedar confós per diferències en l'habilitat d'extreure informació d'esquemes, dibuixos o fotografies. En aquest sentit, diversos estudis interculturals —Bishop (1979), Derogowski i Dziurawiec (1986)—, han demostrat que la 'lectura' de dibuixos o fotografies és una habilitat apresada que pot interferir en el rendiment en tasques espacials. Una altra problemàtica a afegir al treball a partir de tests, és deguda al fet que els estímuls figuratius en els tests espacials contenen tots les pròpies convencions.

Un altre risc en que poden caure aquestes teories és el d'intentar interpretar situacions a partir dels resultats obtinguts en tests psicomètrics, sense tenir en consideració els processos mentals individuals que porten a aquests resultats.

En un intent de superar els conflictes deguts a les diferents formes dels estímuls presentats en els tests espacials, Wattanawaha (1977) elabora una classificació de tasques espacials basada en la combinació de les característiques dels estímuls i els requeriments que infereix com a necessaris per a la resolució de les tasques. Argumenta que la solució de les tasques espacials implica tenir en consideració quatre característiques independents de la tasca.

- D. Nombre de dimensions de la resolució/presentació: dues o tres dimensions.
- I. Grau d'interiorització exigít: imatgeria estàtica o cinètica.
- P. Tipus de presentació exigít per la resposta: resposta múltiple, dibuix...
- T. Tipus de procés de pensament requerit per la solució de la tasca: les operacions necessàries hi són exposades bé explícitament o implícita.

L'anomenat esquema DIPT de Wattanawaha permet definir de manera operacional conceptes com habilitat espacial i visualització, i són diversos els autors, entre ells Lahrizi (1984), que segueixen aquest model. Malgrat això, cal dir que aquesta classificació de les tasques espacials, encara que potencialment útil, no és necessària per al nostre estudi.

Lahrizi (1984) defineix habilitat de visualització referint-se als criteris de classificació proposats per Wattanawaha per a les proves espacials. Així, defineix l'habilitat de visualització (p. 10) com l'habilitat corresponent al conjunt de proves on  $D=3$  (la prova exigeix un raonament en tres dimensions),  $I=1$  o  $2$  (cal construir una imatge mental i transformar-la o no) i  $T=0$  (la prova explícita l'operació mental requerida).

Tot i que l'esquema DIPT ha facilitat a la seva autora l'elaboració d'una sèrie de tests espacials que, sota el títol *Monash Spatial Thinking Tests*, presenta una col·lecció de tasques espacials molt més rica i equilibrada que els tests tradicionals, els autors que el prenen com a referència hi presenten algunes objeccions. En aquest sentit, Clements (1983) i Lahrizi (1984) presenten la següent crítica al model (Clements 1983, p. 16):

Another criticism of Wattanawaha's approach is that she classifies tasks rather than the responses to tasks by individuals.

Una vegada analitzades les tendències en que les habilitats espacials es defineixen a partir del rendiment en diferents tipus de proves, fem una revisió de les recerques més significatives d'aquells autors que es preocupen, més que pels resultats en les tasques espacials, pels processos mentals i estratègies cognitives utilitzades pels subjectes per a resoldre les proves proposades. Entre aquests autors cal fer esment, de manera molt especial, de Bishop que al llarg de diversos treballs presenta noves maneres d'interpretar les habilitats espacials.

Bishop (1980b) i (1983), partint de l'afirmació de que és impossible establir una definició vertadera d'habilitat espacial, i cercant definicions i descripcions d'habilitats que permetin centrar l'atenció dels ensenyants de matemàtiques en aprenentatges rellevants, presenta dos tipus diferents d'habilitats (p. 16):

The ability for interpreting figural information (IFI). This ability involves understanding the visual representations and spatial vocabulary used in geometric work, graphs, charts and diagrams of all type. Mathematics abounds with such forms and IFI concerns the reading, understanding and interpreting of such information. It is an ability of content and context and relates particularly to the form of the stimulus material.

The ability for visual processing (VP). This ability involves visualization and the translation of abstract relationships and nonfigural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented.

L'habilitat IFI així definida aprofundeix el concepte d'orientació espacial ja esmentat, SR-O, definit per Mc Gee (1979a), incloent-hi diferents tipus de convencions espacials, gràfiques i geomètriques, que no s'utilitzen generalment en els tests SR-O i emfasitzant-ne la interpretació que requereixen. L'habilitat VP està molt relacionada amb el terme visualització espacial ja esmentat,  $V_z$ , definit també per Mc Gee (1979a), però l'estén i l'aprofundeix en tant en quant emfasitza els aspectes relacionats amb el procés per damunt dels relacionats amb la forma de l'estímul.

L'autor, referint-se a IFI, diu que no només hem de considerar les diferències de dimensions, sinó també la diferència en el grau de realisme del seu contingut.

Bishop, en el mateix article, proposa una taula que comprén els diferents tipus d'activitats que es poden proposar en relació a l'habilitat VP, segons les diferents formes dels estímuls presentats i de la resposta demanada. Les activitats haurien

d'incloure de manera creuada diferents tipus de presentació i diferents tipus de resposta que són els següents: paraules i símbols, diagrames i fotografies, i objectes en 3 dimensions. L'autor fa notar també que, en la majoria de tests espacials, la presentació ve donada a través de diagrames i es demana una resposta a través de paraules. Aquesta proposta és de gran utilitat per al nostre estudi.

L'autor planteja la dicotomia existent a l'hora d'estudiar i analitzar aquestes habilitats. En aquest sentit, afirma que mentre que pel que fa a IFI és possible la utilització de tests de grup, pel que fa a VP són necessàries tècniques individuals.

D'altra banda, l'autor ens adverteix que el fet de suposar que l'habilitat VP és una habilitat de naturalesa personal fa necessari tenir present que el llenguatge pot actuar, algunes vegades, com a element enmascarador ja que és difícil separar les limitacions conceptuals de les confusions lingüístiques.

Les habilitats IFI i VP definides per Bishop són potencialment útils per al nostre treball tenint en compte algunes consideracions. En primer lloc, des del nostre punt de vista, aquestes dues habilitats no es poden considerar totalment separades. Així, l'habilitat de processar visualment ens sembla necessària en l'acte de percebre i interpretar un estímul visual i suposem que intervé en major grau com més complexes són els estímuls presentats. D'altra banda, s'ens fa difícil suposar que es pugui produir cap procés visual si abans no té lloc la interpretació de la informació donada.

Una segona consideració fa referència a la definició de l'habilitat VP. L'autor al proposar aquesta habilitat insisteix en el problema sorgit al considerar una habilitat com la visualització dins el context matemàtic que fa no necessaris els estímuls visuals i, per aquest motiu, ens adverteix que caldrà introduir en els tests de visualització estímuls figuratius i no figuratius.

Tenint en compte aquest plantejament, la nostra proposta considera com dues habilitats diferents, encara que estretament lligades, els dos aspectes de l'habilitat VP. D'una banda, considerem l'habilitat de processar visualment objectes i relacions espacials, VP-S, i de l'altra, l'habilitat de resoldre problemes abstractes visualment VP-A, enteses respectivament com el segon i primer punt de la definició de VP de Bishop:

VP-S:

Includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented.

VP-A:

This ability involves visualization and the translation of abstract relationships and nonfigural information into visual terms.

En la nostra proposta, l'element definidor de l'habilitat VP-A és la capacitat de generar i utilitzar imatgeria visual en la solució de problemes enunciats verbalment que requereixen solucions verbals. Tot i que és evident que aquests dos aspectes de VP estan íntimament relacionats tal com ho proposen en els seus treballs diversos autors, en la nostra recerca, i degut al contingut geomètric de les activitats que analitzem, els considerarem aspectes separats.

Un dels autors que presagia aquesta diferenciació és Krutetskii (1976) que dedica part dels problemes de la seva recerca a l'habilitat espacial i escriu (p. 315):

The ability to visualize abstract mathematical relationships and the ability for spatial geometric concepts showed a very high intercorrelation in our experiments. In every instance we observed a correspondence of the one to the other.

i com a nota a peu de pàgina hi afegeix:

Of course, this does not prove the statement that the two indexes are different manifestations of a single property (such as a good development of the first signal system). To clarify this was not part of our task. The question requires thorough study.

Malgrat això, es pot tenir la impressió que l'habilitat espacial queda al marge dels interessos de Krutetskii que es centren en l'ús d'imatgeria visual com a constructe en l'anàlisi que fa dels diferents tipus d'habilitats espacials. Essencialment pel que fa a les qüestions en relació a la nostra recerca, està interessat en els processos cognitius dels nens en la resolució de problemes matemàtics no rutinaris i, especialment, fins a quin punt la imatgeria visual té un paper important en aquests processos.

Al fer aquesta anàlisi de les recerques prèvies, cal tenir present que moltes de les recerques en que s'analitzen els processos cognitius en relació a la visualització estan emmarcades sota l'aspecte que analitza Krutetskii. Així, treballs com els de Suwarsono (1982), Sheckels i Eliot (1983), Presmeg (1985), (1986a i b) i Clements (1988), tot i que són de gran qualitat i interès, ajuden de manera perifèrica en el plantejament i solució del nostre problema, molt més relacionat amb la solució d'activitats directament relacionades amb la geometria de l'espai.

Finalment, voldríem recordar que, posteriorment a la definició de l'habilitat VP establerta per Bishop, que semblava unificar criteris, han aparegut recerques que de nou proposen diferents categories d'habilitats espacials semblants a les establertes per McGee (1979a). Així, Linn i Petersen (1985) i Tartre (1990) consideren tres categories d'habilitats espacials: *percepció espacial*, *orientació espacial* i *visualització espacial*. Seguint les propostes de McGee (1979a), Connor i Serbin (1980), i Kersh i Cook (1979), estaleixen (Tartre 1990, p. 217):

Spatial visualization is distinguished from spatial orientation tasks by identifying what is to be moved; if the task suggests that all or part of a representation be mentally moved or altered, it is considered a spatial visualization task.

Spatial orientation tasks do not require mentally moving an object. Only the perceptual perspective of the person viewing the object is changed or moved.

#### 2.1.4 Habilitats espacials i imatgeria.

Malgrat que tal com hem vist no hi ha una definició universalment acceptada del terme habilitat espacial, les diferents definicions dels factors espacials (e.g.: orientació espacial i visualització espacial) fan servir la noció d'imatgeria. A més, els corrents de recerca que estudien els processos mentals inherents a les habilitats espacials es centren, tal com hem constatat, en l'ús d'imatgeria visual com a constructe en l'anàlisi dels diferents tipus d'habilitats espacials. Per tot això, podem afirmar que, en general, quan es fa referència al concepte habilitats espacials en sorgeix immediatament un altre que hi està invariablement relacionat que és la noció d'imatgeria.

Clements en el seus treballs (1981b) i (1982) fa un repàs dels diversos corrents existents pel que fa a la formulació del terme imatgeria. Ens presenta, en primer lloc, les teories *picture-in-the-mind* que consideren la noció d'imatge mental com a producte final de processos, siguin quins siguin, relacionats amb l'activitat mental corresponent a la percepció d'un objecte absent respecte l'òrgan sensorial. La debilitat d'aquesta teoria radica en el fet de que no s'explica com es pot transformar en la ment la informació verbal en no verbal i a la inversa.

Contraposat a aquest corrent, presenta les teories proposicionals de la imatgeria segons les que el coneixement d'una persona pot representar-se a la memòria per conjunts de proposicions, i el format comú a totes aquestes proposicions és el que permet generar la informació verbal i les imatges mentals. Una vegada més, no

s'explica com es pot transformar en la ment la informació verbal en no verbal i a la inversa.

L'autor posa de manifest la necessitat de separar la qüestió sobre el que és realment una imatge mental de les qüestions referents als diferents efectes que poden tenir les imatges mentals, sigui quina sigui la seva naturalesa (Clements 1982, p. 5):

... then those interested in the effects of imagery, and in whether imagery ability can be trained, should feel less guilty if they conducted research despite their lack of understanding of the imagery construct.

A més, proposa considerar com a acceptables els testimonis dels individus que expressen els processos mentals a través del que en podríem anomenar metàfores, sense pretendre una explicació més adient de les representacions internes d'aquests tipus de successos (Clements 1982, p. 5):

The present writer, for one, has little sympathy with any theory that would discount the testimony of persons who claim to have "rotated an image".

Aquest article dona un cert marge de confiança a tots aquells que, essent profans en el món de la imatgeria, treballen en el camp de les habilitats espacials. L'origen d'aquesta seguretat és l'afirmació del seu autor que malgrat la controvèrsia existent respecte quina és la millor manera de descriure la imatgeria visual, de moment, no hi ha cap raó aparent prou forta per la que els investigadors en educació matemàtica hagin de desconsiderar la tradicional, però simple, teoria *picture-in-the-mind*. A més, cal tenir present que la qüestió sobre el que una imatge mental pugui ser o deixar de ser es pot separar de la qüestió que ens planteja quin tipus d'efectivitat poden tenir les imatges mentals. Referint-se als problemes de la investigació relacionada amb la imatgeria, ens presenta com a principals els associats a l'exteriorització de la imatgeria que comporten greus dificultats a l'hora de decidir la metodologia apropiada.

Tot i que, en general, les recerques referents a la imatgeria visual i les habilitats espacials s'han desenvolupat de manera independent, Liben (1981) fa una revisió de la literatura existent fins al moment que permet unificar conceptes relacionats amb la imatgeria visual i les habilitats espacials i aclarir certes discrepàncies metodològiques.

Per al present treball el model de Liben és interessant en tant en quant presenta les diferents accepcions del terme representació espacial, i ajuda a clarificar la

relació entre comportament espacial i representació espacial ja que la interpretació d'aquests conceptes condiciona en gran manera la metodologia a utilitzar.

En general, el terme comportament espacial —*Spatial Behavior*— fa referència al comportament a l'espai en el sentit d'activitat sensorimotriu dins l'espai, com pot ser la manipulació d'objectes o el propi desplaçament a l'espai. El terme representació espacial —*Spatial Representation*— no té una definició universalment acceptada. Aquest desacord en el que s'entén per representació espacial ha portat a conflictes en la interpretació dels resultats de diferents recerques. Així, alguns investigadors afirmen que, degut al fet que especialment als nens —i en general a gairebé tothom— els resulta molt difícil exterioritzar les seves representacions mentals, l'única possibilitat que tenim per analitzar i estudiar les representacions espacials dels alumnes és treballar a partir dels resultats d'activitats on els nens han de posar de manifest els resultats d'aplicar les seves habilitats espacials. La legitimitat d'aquests estudis resideix en la suposició de que podem inferir la representació espacial a partir del comportament espacial. Aquest tipus de suposicions són criticades obertament per d'altres investigadors.

Possiblement, el problema no radica tant en la relació entre comportament i representació, sinó en el que s'entén per representació. En aquest sentit Liben (1981) afirma (p. 10):

... what at first glance appears to be disagreements concerning the best methods for tapping spatial representation, might actually be disagreements with respect to what one is trying to tap.

Liben proposa la distinció entre tres tipus de *representacions espacials* —*spatial products*, *spatial thought* i *spatial storage*—, i dos tipus de *continguts* de la representació espacial —específic i abstracte—.

- En la categoria dels productes espacials —*Spatial products*— inclou tot el que fa referència als productes externs que d'alguna manera representen l'espai. Qualsevol mena de representació externa de l'espai, independentment del mitjà amb que està feta, és un producte espacial (e.g. plànols esquemàtics, models en miniatura o descripcions verbals).
- Amb el nom de pensament espacial —*Spatial thought*— fa referència al pensament que s'ocupa o té alguna relació amb l'espai. És un tipus de coneixement o informació al que els individus tenen accés, poden manipular i sobre el qual poden reflexionar. Presenta el pensament espacial com a necessari per a respondre el tipus de preguntes a que fan referència els tests estàndard d'habilitat espacial. És molt interessant fer notar que l'autora inclou l'evocació conscient de la imatgeria mental dins l'àmbit del pensament espacial.



- Sota el terme d'emmagatzemament espacial —*Spatial storage*— interpreta qualsevol informació en relació a l'espai, que encara que continguda en la ment, l'individu n'és inconscient. En el moment en que l'individu n'esdevé conscient o s'hi refereix en les seves reflexions, es converteix en pensament espacial. Aquest tipus d'informació és un coneixement tàcit o implícit que guiaria el comportament espacial individual sense que el propi subjecte en fos conscient.

La distinció essencial que proposa entre pensament i emmagatzemament és el coneixement que té l'individu de la pròpia representació i a partir d'aquí afirma (p. 14):

From this perspective, spatial storage may be inferred simply on the basis of activity (e.g., way finding), but spatial thought requires additional evidence (e.g., sketch maps, models, verbal descriptions).

Although it is difficult —perhaps impossible— to distinguish spatial thought and spatial storage definitively, the conceptual distinction remains important for its heuristic value. In particular, it sheds light on the question raised initially concerning the inference of representation from action. Action alone may be appropriate when the type of representation of interest is spatial storage. (...) However, converging operations are needed if the representation of interest is spatial thought.

Més endavant, presenta el tipus de contingut de la representació espacial com a un altre dels factors condicionadors de la metodologia a utilitzar (p. 30):

It is imperative, therefore, to specify what one is trying to measure (e.g., the type content of representation). If for example, one is interested in what people know about the environments they have experienced, field studies in the natural environment are in order. If one is interested in how people can manipulate spatial representations, laboratory tasks (such as mental rotation tasks) may be best.

### **2.1.5 D'altres habilitats espacials.**

A més de les habilitats espacials fins el moment esmentades n'hi ha d'altres, que encara que potser han estat menys considerades, no poden pas per això ser oblidades.

En primer lloc, cal tenir presents els aspectes relacionats amb la comunicació de les qüestions relacionades amb els objectes i les relacions espacials tal com afirma Parzysz (1988) (p. 82):

Two problems come up then, as commonly happens whenever communication is at stake: the problem of coding the message, and that of decoding it

En relació a la codificació i decodificació d'informació en dues dimensions relativa a tres dimensions, cal tenir en compte, d'entrada, que totes elles inclouen les pròpies convencions, entenent aquest terme en el sentit establert per Parzysz (1991) (p. 578):

... the word "convention" being used both for what is really graphical convention (e.g.: the dotted lines representing "hidden" lines) and for what belongs in fact to the geometrical properties of parallel projection (e.g.: the preservation of parallelism).

En relació a la comunicació i interpretació d'informació relativa a objectes, relacions i transformacions espacials, Hershkowitz (1990) afirma que cal considerar-les habilitats importants a tenir en compte en els processos d'aprenentatge de la geometria.

Revisem, en primer lloc, les relatives a la interpretació que, tal com afirma Hershkowitz, tenen un paper decisiu en la nostra societat, (p. 77):

The interpretation of drawings back to 3D real space is very important in our modern world, in which we obtain a great part of the information on our 3D environment via 2D media.

Malgrat aquesta importància, les recerques en aquest camp són menys que les que s'ocupen de l'habilitat de representació. Amb anterioritat ja hem presentat la proposta feta per Bishop (1980b, 1983) de considerar l'habilitat IFI —*interpreting figural information*— com una habilitat necessària per a l'aprenentatge de la geometria.

Els principals corrents d'investigació en relació a les habilitats d'interpretació de representacions planes d'objectes i relacions tridimensionals, expliquen com evolucionen els alumnes respecte la interpretació de representacions en dues dimensions. Estableixen que les representacions són interioritzades de manera molt semblant a com ho són les pròpies estructures tridimensionals —Ben-Chaim, Lappan i Houang

(1988). Dins del mateix àmbit, Burton, Cooper i Leder (1986) en el seu treball en relació a la interpretació, arriben a la conclusió que els ensenyants de matemàtiques en formació prefereixen les descripcions visuals dels objectes tridimensionals a les descripcions verbals dels mateixos.

Tal com afirma Vergnaud (1986) l'aprenentatge de la utilització de les representacions planes d'objectes tridimensionals és més important del que es pensa generalment. En particular, l'estudi de les representacions planes d'objectes en tres dimensions ha atret l'atenció de molts investigadors —Ben-Chaim, Lappan i Houang (1985), Bessot i Eberhard (1986), Bishop (1974, 1978, 1979), Burton, Cooper i Leder (1986), Cooper i Sweller (1989), Gaulin (1985), Mitchelmore (1980a, 1980b, 1983), Mukhopadhyay (1987) i Puchalska i Gaulin (1985).

Bishop (1980b, 1983) hem vist que presenta sota el nom d'IFI l'habilitat d'interpretar la informació figurativa. Però aquest no és l'únic aspecte que cal tenir en compte des del seu punt de vista, sinó que en treballs previs havia proposat la necessitat de considerar la representació com una habilitat a important en el camp de la geometria. Així, en un dels seus primers treballs coneguts, Bishop (1974) presenta dues components del que hauria de ser la geometria. Aquestes dues components són: *Visualizing* —que ja hem analitzat llargament— i *Representing*. Respecte aquesta darrera afirma (p. 177):

... there can be no doubt that the ability to draw and represent objects and ideas in a non-verbal or non-symbolic way is an important ability.

I més endavant presenta aquesta habilitat com a fet no espontani sinó que s'adquireix per aprenentatge (p. 178):

But just because a person has an image of something does not of course mean that he will be able to draw that image.

Bishop (1974) presenta com una de les grans dificultats en l'adquisició d'aquesta habilitat l'aprenentatge de les convencions de cadascuna de les moltes representacions que fem servir. Aquesta dificultat és més gran en el cas de les representacions abstractes —representacions d'idees, de relacions i d'operacions— que en el cas del que ell anomena còpia —representació damunt del paper del que es té al davant. Tenint en compte que l'autor es refereix no només a representar objectes i relacions espacials sinó també a objectes i relacions abstractes, en certa manera, podríem parlar de l'habilitat de produir informació figurativa.

Volem també recordar que Puchalska i Gaulin (1985) consideren que el que s'anomena a vegades *graphicacy* ha de constituir un dels objectius fonamentals

de l'educació, sota la condició de que cal entendre-la no només en el sentit de la definició original de Balchin que citen (p. 2):

la communication d'infomation spatiale qui ne peut pas être véhiculée adéquatement au moyen de mots ou de nombres

sinó de manera més àmplia ja que per aquest autors cal tenir també en consideració la comunicació d'informació no espacial. A més els motius d'aquesta presència no han de ser únicament de caire instrumental, sinó també per a la formació de l'individu.

Així, Puchalska i Gaulin (1985) proposen considerar també com a *graphicacy* (p. 3):

(1) non seulement de la communication d'information spatiale au moyen de représentations graphiques ayant des "degrés d'iconicité" variables, mais aussi de la COMMUNICATION D'INFORMATIONS NON SPATIALES (numériques, logiques, etc.) au moyen de graphiques, de schémas, d'organigrammes, etc. ...

(2) non seulement du rôle des représentations graphiques pour la communication d'information, mais aussi du ROLE INSTRUMENTAL NON SOCIAL qu'elles peuvent jouer DANS LA FORMATION DE CONCEPTS ET D'IMAGES MENTALES, DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ET PLUS GENERALEMENT DANS L'ORGANISATION DE LA PENSEE.

(3) non seulement de l'apprentissage de représentations graphiques (externes), mais aussi et surtout du DEVELOPPEMENT DE REPRESENTATIONS INTERNES CORRESPONDANTES (entre autres d'une certaine capacité de visualisation)

Els autors insisteixen en la importància i la necessitat de donar als alumnes múltiples ocasions en l'ensenyament de les matemàtiques per a explorar diverses representacions gràfiques útils per visualitzar i comunicar informació de caire espacial.

És interessant observar que en un altre treball Gaulin (1985) considera no només les descripcions gràfiques dels fenòmens i les relacions espacials, sinó també les descripcions verbals juntament amb mixtes. Curiosament, la recerca es presenta en un article que porta per títol *The need for empahsizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations*.

Motius anàlegs als argumentats per Gaulin són els proposats per Mitchelmore (1980b), però restringint-se a la representació d'objectes i relacions espacials sense

considerar la d'idees i relacions abstractes. Aquest autor, presenta l'habilitat de representar i interpretar relacions geomètriques com una habilitat important i de gran valor per la seva aplicació pràctica en diversos camps. També, en un altre article, Mitchelmore (1980a), presenta la importància de la representació —aquesta vegada en relació amb la visualització— per als diversos camps de les matemàtiques (p. 83):

in many areas of mathematics it is of great value to be able to visualize and represent three-dimensional configurations and to comprehend the geometrical relations among the various parts of a figure.

Malgrat que de la lectura de l'article es dedueix que representar configuracions en tres dimensions i comprendre les relacions geomètriques entre les diverses parts d'una figura són habilitats diferents, l'autor considera que aquestes habilitats tenen una certa interdependència en el seu desenvolupament venint condicionat el desenvolupament de l'habilitat de representació pel desenvolupament de l'habilitat de percepció (p. 91):

We should therefore expect the growth of representational ability to be highly dependent on spatial-perceptual development but always to lag behind it.

Aquest condicionament no és l'únic, sinó que, tal com afirma l'autor (p. 91), l'estadi de desenvolupament en que podem situar l'esquema fet per un nen d'una figura a l'espai donada depèn no només del seu nivell perceptual, sinó també del problema particular de representació plantejat. També considera i analitza perquè representacions de diferents figures fetes per un mateix individu no donen totes el mateix estadi de desenvolupament, justificant-ho segons la complexitat de la figura.

Un estudi posterior en relació al'habilitat de comunicació d'informació relativa als objectes, les relacions i les transformacions a l'espai és el de Ben-Chaim, Lappan i Houang (1989a). Aquests autors investiguen en els adolescents l'habilitat de comunicar informació visual. En les seves conclusions presenten que els estudiants tenen grans dificultats per comunicar amb èxit informació visual. Els seus resultats en relació als adolescents són comparables als que arriba Mitchelmore (1983) en relació als nens.

En relació a les dificultats d'interpretació i de comunicació utilitzant representacions planes d'objectes en tres dimensions, és interessant l'estudi de Baldy (1988) on l'autor posa de manifest que, per una part important dels individus de la mostra amb que treballa, el pas del dibuix a l'objecte és problemàtic.

Hi ha d'altres habilitats relacionades amb l'espai que han ocupat espais importants en el món de la recerca en aquest camp, però que no estan directament relacionades amb el treball que ens ocupa. D'entre aquestes, ha adquirit certa anomenada en el nostre país la percepció estructural de l'espai —per alguns percepció espacial— definida per Dion, Pallascio i Papillon (1985a) (p. 15):

... , la perception structurale considère plutôt l'intériorisation qualitative d'un modèle spatial par l'analyse et la synthèse de ses propriétés topologiques, projectives affines et métriques.

Aquests autors estableixen una definició operatòria de les diferents etapes de la percepció estructural que són: la visualització, l'estructuració, la transfiguració, la determinació i la classificació. No és intenció d'aquest treball analitzar les definicions d'aquestes etapes, però si insistirem en la interpretació que fan del terme visualització (p. 10):

-la **visualisation**: après avoir observé un objet, sa "visualisation" consiste à pouvoir en mémoriser suffisamment d'images partielles, pour pouvoir reconnaître des objets semblables à celui-ci, c'est-à-dire à isométrie ou homothétie près, parmi un ensemble d'objets de complexité topologique équivalente;

per a fer èmfasi, una vegada, més en que sota un mateix terme es pot fer referència a conceptes molt diferents —n'hi hauria prou amb fer una anàlisi comparativa amb la definició de visualització,  $V_z$  presentada anteriorment— fet que pot portar a desavinences en la interpretació d'una mateixa afirmació.

En aquest mateix ordre de coses, és interessant també considerar la definició de Del Grande (1987) del terme percepció espacial (p. 126):

Spatial perception is the ability to recognize and discriminate stimuli in and from space and to interpret those stimuli by associating them with previous experiences.

Possiblement, aquesta conceptualització del terme percepció espacial no sembla excessivament allunyada de les interpretacions que es poden fer de les diferents habilitats esmentades dins l'apartat dedicat a les habilitats espacials. Malgrat això, les set habilitats que a continuació (p. 127) enumera i descriu com a habilitats de percepció espacial —*Eye motor coordination, Figure-ground perception, Perceptual constancy, Position-in-space perception, Perception of spatial relationships, Visual discrimination i Visual memory*— no han rebut una consideració excessiva, al menys sota aquesta classificació, ni en les recerques analitzades en aquesta secció.

## 2.2 Pautes de comportament i diferències individuals.

En aquesta secció es revisen, d'una banda, les teories que estudien les pautes de comportament en els diferents estadis de l'evolució d'un individu i, de l'altra, les que s'ocupen de les diferències entre individus en relació al seu comportament davant de tasques espacials.

Dins del primer grup es consideren no només les teories psicològiques del desenvolupament que estudien els diferents moments en l'evolució de l'individu cap a l'adquisició del que podríem anomenar *espai* globalment, sinó també les que fan referència a les diferents etapes necessàries per a l'adquisició de determinades habilitats relacionades amb l'espai.

Els corrents de la psicologia del desenvolupament proposen un procés evolutiu des d'un marcat egocentrisme en la percepció de l'espai, passant, més endavant, per l'existència de múltiples punts de vista, fins arribar a tenir la capacitat de conceptualitzar i operar en un espai hipotètic. Després de fer un breu resum d'aquestes teories arribem a la conclusió que, malgrat que el progrés des de l'espai topològic, a través de l'espai projectiu cap a les nocions d'espai euclidi és qüestionable des del punt de vista de la terminologia introduïda, és evident que hi ha acord pel que fa al desenvolupament des de la visió del món espacial purament informal i qualitativa fins a una visió més formalitzada i quantitativa. Així, s'accepta, de manera general, l'evolució en el coneixement espacial des d'una comprensió global i inarticulada cap a un coneixement ric, detallat i formalitzat.

Si el que interessa —com als ensenyants de matemàtiques— no és tant el desenvolupament natural del nen, com l'efecte de les experiències d'aprenentatge en aquest desenvolupament, s'entén perquè la teoria dels nivells de Van Hiele està guanyant per moments popularitat, especialment en relació al currículum escolar de geometria. Per aquest motiu, es revisen les teories que estant-hi relacionades consideren els nivells de Van Hiele com a eines útils per a la descripció dels processos de pensament de l'alumne en les tasques de geometria.

En un altre ordre de coses, però també dins del grup de recerques que consideren l'evolució estructurada a través de diferents estadis, es revisa el treball de Dion, Pallascio i Papillon on estableixen les etapes necessàries per aconseguir el que ells anomenen la percepció estructural i la recerca de Mitchelmore, en relació al desenvolupament de l'habilitat de representació gràfica d'objectes amb tres dimensions, que és interessant en tant en quant aquest desenvolupament està relacionat amb el de la percepció espacial.

El problema plantejat per les diferències individuals en les estratègies de resolució de tasques espacials és un dels més importants pels estudis del pensament espacial. Per aquest motiu, dins del segon grup, es revisen aquelles teories que, seguint, en general, el model proposat per Krutetskii, estudien les diferències de comportament entre individus en relació al tipus de processament preferit a l'hora de resoldre les diferents tasques, i també aquells estudis referits als diferents tipus d'estratègies fetes servir en la resolució de tasques espacials.

Si tenim en compte que, sigui quina sigui la conceptualització que prenem d'habilitat espacial, aquesta està fortament lligada a la idea d'imatgeria, és clar que analitzar diferències individuals en les habilitats espacials comportarà estudiar aquestes diferències a nivell d'utilització d'imatgeria. En aquest sentit, es revisa el treball de Krutetskii que proposa dos aspectes a considerar en les diferències individuals en l'ús de la imatgeria, que són l'habilitat per a servir-se'n i la preferència per a utilitzar-la, identificant l'individu analític, l'individu geomètric i dues variants de l'individu harmònic.

A continuació, es revisen les recerques d'altres autors que segueixen en certa manera la proposta de Krutetskii, centrant les seves recerques no tant en el nivell assolit en l'adquisició d'una determinada habilitat per part de l'individu, sinó en el tipus preferit de processament utilitzat per a la resolució de tasques espacials.

Al final de la secció, es revisa la recerca dels australians Burden i Coulson que és especialment clarificadora dins del camp de l'estudi de les estratègies de resolució de tasques espacials. En el seu treball classifiquen les estratègies utilitzades pels subjectes a partir de tres criteris: la forma de representació, el focus d'atenció i els mitjans auxiliars que utilitza.

Per acabar, es fan dues advertències en relació als estudis que segueixen la proposta *analític-geomètric*. En primer lloc, cal tenir present que la clara distinció que fa Krutetskii, entre la capacitat per a servir-se amb èxit d'un determinat tipus d'estratègies —determinant el nivell de les habilitats— i la preferència per a utilitzar les unes o les altres —determinant el tipus de temperament matemàtic—, ha quedat desdibuixada en els treballs d'altres autors. Una segona advertència fa referència a la utilització amb diferents sentits d'un mateix terme, analític, fet que podria portar a confusions.

### 2.2.1 Pautes de comportament en l'evolució d'un individu.

Inclourem dins d'aquest apartat les teories psicològiques del desenvolupament encara que, més que estudiar habilitats, analitzen els diferents moments en l'evolució del comportament individual. Aquesta inclusió la podem justificar des de dos cri-



teris. En primer lloc, per la forta influència que han tingut aquestes teories en els diversos camps en relació amb l'ensenyament de les matemàtiques. En segon lloc, per que hi ha força relació entre els corrents psicològics de les teories del desenvolupament i els d'anàlisi de factors pel que fa als tipus d'habilitats i processos implicats sota l'àmplia etiqueta d'*habilitats espacials* i com ja hem vist, aquest darrer corrent és a l'origen de tota la recerca existent en relació a les habilitats espacials.

Els corrents de la psicologia del desenvolupament proposen un procés evolutiu des d'un marcat egocentrisme en la percepció de l'espai, passant, més endavant, per l'existència de múltiples punts de vista, fins arribar a tenir la capacitat de conceptualitzar i operar en un espai hipotètic. Afirmen també l'existència d'un creixement que evoluciona des d'un punt de vista de l'espai purament informal i qualitatiu cap a un punt de vista més formalitzat i quantitatiu.

Segons aquestes mateixes teories, hi ha també una altra diferenciació que es produeix en aquest desenvolupament. A l'inici, els nens es refien de les seves percepcions del món immediat d'una manera força absoluta per a la interpretació de l'espai. Més endavant, són capaços de fer servir la seva imaginació per concebre'l i són capaços d'operar amb idees espacials hipotètiques. Un altre aspecte és el creixement en el coneixement espacial des d'una comprensió limitada, global i inarticulada cap a una comprensió rica, detallada i formalitzada.

L'extens treball de Piaget i els seus seguidors és el centre de la tradició de la psicologia del desenvolupament. A més, malgrat l'evidència experimental que qüestiona alguns dels seus resultats, malgrat els arguments en contra estadis i edats, i malgrat crítiques detallades en relació al llenguatge usat en la recerca —Martin (1976b)—, la influència de l'escola de Ginebra ha estat fins fa poc considerable. Per a valorar-ho només cal tenir en compte que a finals dels setanta encara es publicaven llibres que presentaven resultats de recerques que majoritàriament eren dins de la tradició piagetiana —Martin (1976a) i Lesh (1978).

El treball de Piaget i Inhelder en aquest camp és difícil de resumir breument degut a la seva amplitud i la complexitat del constructe teòric subjacent. El seu propi reconeixement d'aquestes dificultats donà lloc a un llibre sumari: "La psychologie de l'enfant" publicat per primera vegada el 1966. El seu treball en relació a les habilitats espacials queda descrit amb exhaustivitat en "La représentation de l'espace chez l'enfant" i, en llibre elaborat juntament amb Szeminska, "La géométrie spontanée de l'enfant" publicats per primera vegada el 1948. Encara que hi ha referències en d'altres treballs, la seva recerca en relació amb la imatgeria visual, el seu desenvolupament i classificació està continguda en el llibre "L'image mentale chez l'enfant" del tres autors publicat inicialment el 1966.

Piaget i Inhelder fan distinció entre el que ells anomenen pensament perceptual i pensament representacional, i entre pensament figuratiu i pensament operatiu. El pensament *perceptual* fa referència a accions sensorimotrius, mentre que el pensament *representacional* és necessari per a la manipulació interna de les imatges mentals i implica l'evocació d'objectes en la seva absència.

L'habilitat perceptual del nen es desenvolupa durant el primer període de la seva vida, fins als dos anys (estadi sensorimotriu), mentre que el poder per reconstruir imatges espacials, comença al voltant dels dos anys d'edat i, en la majoria dels casos, es perfecciona a partir dels set anys en endavant (període de les operacions concretes). Mentre que els tests de *percepció* poden implicar l'habilitat de discriminar objectes diferents presentats visualment, Piaget utilitza en els seus tests de *representació* (imatgeria mental) l'habilitat d'identificar formes al tacte i l'habilitat de reproduir formes fent servir bastonets o dibuixos.

Dins de cadascun d'aquests períodes de desenvolupament distingeix, a més, una progressiva diferenciació de les propietats geomètriques, començant per les propietats que ell anomena *topològiques* (i.e. propietats globals independents de la forma o la mida). Un segon grup de propietats que Piaget afirma que els nens distingeixen, són les que anomena *projectives* que inclouen l'habilitat per a predir com es veurà un objecte des de diferents punts de vista. 'Rectitud' seria una propietat projectiva pel fet que les línies rectes es veuen rectes des de qualsevol punt de vista. El tercer grup de propietats geomètriques són les *Euclídees*, (i.e. aquelles en relació amb mida, distància i direcció) i que porten, per tant a mesurar longituds, àrees, angles... Malgrat que la seqüència anterior està formulada en termes d'habilitats representacionals, Piaget postula que el mateix esquema té lloc amb anterioritat a nivell perceptual.

Pel que fa a les imatges mentals dels nens, aquests autors diferencien el pensament *figuratiu* dels nens més petits, que implica la percepció de models estàtics i la formació d'imatges estàtiques, del pensament *operatiu* dels nens més grans, que s'ocupa de la percepció de models en el moviment de les figures i objectes i també de la manipulació d'imatges.

És interessant fer notar que Piaget i Inhelder presenten dues limitacions de la imatgeria en el pensament matemàtic dels nens i dels adults, en relació, en primer lloc, al caràcter concret i, en segon lloc, al caràcter estàtic de la imatgeria. Sembla ser que per la generalització i l'abstracció necessàries per al domini de les matemàtiques, el visualitzador habitual ha de trobar la manera de d'anar més enllà dels aspectes concrets d'una imatge. Piaget i Inhelder accepten que aquesta limitació pot superar-se, així en la versió anglesa de *L'image mentale chez l'enfant*, (Piaget i Inhelder, 1971, p. 11) trobem:

The minds which are best able to control abstractions are those

which succeed in embodying them in concrete examples or schemes which then serve as symbolic spring-boards without introducing any limitations.

Es podria sintetitzar el procés de desenvolupament del nen, des d'un espai perceptual estàtic, amb una posició de total egocentrisme en la percepció de l'espai, evolucionant a través d'un període en el que es consideren múltiples punts de vista, fins a la consecució d'un espai conceptual dinàmic, moment en que és capaç de conceptualitzar i operar amb l'espai hipotètic. Es produeix també un creixement en l'habilitat d'imaginar i interioritzar accions que el capaciten per a separar-se de les restriccions del món real. Segons això, els nens entre 9 i 11 anys difereixen dels nens més petits en tant en quant disposen d'un sistema cognitiu d'operacions mentals que els capacita per a mantenir la posició relativa de les parts d'una figura, de les figures relacionades entre elles i de configuracions senceres en relació a diferents punts de vista.

Evidentment, Piaget ha contribuït enormement en l'estudi del desenvolupament del pensament espacial. Malgrat això, la seva teoria en relació al pensament espacial és potser un camp més obert a la crítica que d'altres aspectes de la seva teoria. S'han criticat tres aspectes bàsics de la seva teoria, molt ben justificats en Dickson, Brown i Gibson (1984) (p. 15 i seg.), que es poden resumir en els següents:

- L'excessiva separació que fa entre percepció i representació.
- Els seus experiments han donat resultats molt diferents quan s'ha variat la metodologia de manera aparentment trivial.
- Les definicions dels termes que utilitza per descriure el procés de desenvolupament espacial, basant-se en les estructures matemàtiques no són matemàticament acceptables.

Malgrat que, tal com apunta Bishop (1980b), el progrés des de l'espai topològic, a través de l'espai projectiu, cap a les nocions d'espai euclidi és qüestionable des del punt de vista de la terminologia introduïda, és evident que hi ha acord pel que fa al desenvolupament des de la visió del món espacial purament informal i qualitativa fins a una visió més formalitzada i quantitativa. Així, s'accepta de manera general l'evolució en el coneixement espacial des d'una comprensió global i inarticulada cap a un coneixement ric, detallat i formalitzat.

Els psicòlegs del desenvolupament estan essencialment interessats en el desenvolupament natural del nen a través de diferents estadis, mentre que, per altra banda, l'ensenyant de matemàtiques s'ocupa de l'efecte de les experiències

d'aprenentatge en el desenvolupament del nen. És en aquest aspecte on radica la importància del treball dels Van Hiele referent als estadis de desenvolupament en geometria que no han d'interpretar-se com una taxonomia, sinó que tenen com objectiu contribuir a la millora dels processos d'ensenyament.

La teoria dels nivells de Van Hiele està guanyant per moments popularitat, especialment en relació al currículum escolar de geometria i, malgrat que la majoria de treballs publicats en relació als indicadors de caracterització de nivells fan referència a la geometria plana, comença a imposar-se en la geometria de l'espai.

El treball de Burger i Shaugnessy (1986) presenta la descripció dels estadis dels Van Hiele modificada per Hoffer (1981) segons el següent esquema (p. 31):

*Level 0 (Visualization).* The student reasons about basic geometric concepts, such as simple shapes, primarily by means of visual considerations of the concept as a whole without explicit regard to properties of its components.

*Level 1 (Analysis).* The student reasons about geometric concepts by means of an informal analysis of component parts and attributes. Necessary properties of the concept are established.

*Level 2 (Abstraction).* The student logically orders the properties of concepts, forms abstract definitions, and can distinguish between the necessity and sufficiency of a set of properties in determining a concept.

*Level 3 (Deduction).* The student reasons formally within the context of a mathematical system, complete with undefined terms, axioms, an underlying logical system, definitions, and theorems.

*Level 4 (Rigor).* The student can compare systems based on different axioms and can study various geometries in the absence or concrete models.

Els nivells de Van Hiele cal considerar-los com a eines útils per a la descripció dels processos de pensament de l'alumne en les tasques de geometria. La utilitat d'aquests nivells es deguda, essencialment, al fet de que poden ser caracteritzats operativament a partir del comportament de l'alumne a través del que s'anomenen indicadors de nivell resumits en el treball de Burger i Shaugnessy ja esmentat (pp. 43-45). A més, el mètode d'entrevistes pot permetre descobrir nivells predominants de raonament en tasques geomètriques específiques. Aquests autors fan notar, però, que alguns alumnes manifesten diferents nivells de raonament en diverses tasques i ens adverteixen de que cal considerar els nivells com a dinàmics i de tipus molt més continu del que es podria suposar a partir del caràcter discret de les seves descripcions.

La finalitat de l'estudi dels nivells de Van Hiele no és tant la classificació dels alumnes en nivells com a objectiu en si, sinó, les implicacions de caràcter prescriptiu que el coneixement d'aquests nivells pot tenir per a l'ensenyament de la geometria.

En aquest sentit, cal tenir en compte, d'una banda, que el pas d'un nivell a l'altre depèn críticament d'experiències apropiades d'aprenentatge, Wirszup, (1976). I de l'altra, que si l'acte d'ensenyar es produeix en un nivell superior al de l'alumne no és només no efectiu, sinó que pot arribar a ser contraproduent. Així, Hoffer (1983) afirma (p. 206):

One major purpose for distinguishing the levels is to recognize obstacles that are presented to students. If students who are thinking at level  $n - 1$  confront a problem that requires vocabulary, concepts, or thinking at level  $n$ , they are unable to make progress on the problem with expected consequences such as frustration, anxiety, and even anger.

En un altre ordre de coses, però també dins del grup de recerques que consideren l'evolució estructurada a través de diferents estadis, cal considerar el treball de Dion, Pallascio i Papillon (1985b) on estableixen les etapes necessàries per aconseguir el que ells anomenen la percepció estructural (que hem revisat en l'apartat anterior). Aquestes etapes que a través de diferents accions han de dur l'alumne al desenvolupament de la percepció estructural de l'espai són:

- Visualització: Capacitat de reconèixer objectes topològicament equivalents fins a poder-los reconstituir a partir d'algun dels seus elements bàsics (vèrtex, cares, arestes, ...)
- Transfiguració: Capacitat de reconèixer la descripció d'un objecte donat en un altre medi fins a poder fer-ne la descripció en aquest medi.
- Determinació: Capacitat per a reconèixer la possibilitat de realització d'un objecte a partir de la seva descripció que inclou restriccions mètriques fins a poder seleccionar condicions mètriques equivalents.
- Classificació: Capacitat d'organitzar una col·lecció d'objectes en classes d'objectes equivalents segons propietats projectives afins o mètriques.

Referida a un aspecte molt més concret dins el marc de les habilitats espacials, cal considerar la recerca de Mitchelmore, en relació al desenvolupament de

l'habilitat de representació gràfica d'objectes amb tres dimensions. En el seu treball —Mitchelmore (1980a)— proposa un esquema per a classificar els dibuixos de certes figures regulars de l'espai en estadis de desenvolupament, i explica el test realitzat per a la comprovació de la seva generalitat. També considera i analitza perquè representacions de diferents figures fetes per un mateix individu no donen totes el mateix estadi de desenvolupament, justificant-ho segons la complexitat de la figura.

Els estadis que presenta són (p. 85):

- **S-1 Presquemàtic.** Figures representades per una cara simple dibuixades ortogonalment o per una línia exterior general. El concepte d'espai en aquest estadi està dominat per la seva naturalesa simple, tancada. El nen encara no s'ha adonat de les propietats projectives.
- **S-2 Esquemàtic.** El dibuix mostra diferents cares, però, o bé les cares estan dibuixades ortogonalment o inclou les cares amagades. Comença a representar les propietats projectives però encara no ha format un sistema de referència.
- **S-3 Prerealístic.** Els dibuixos aconsegueixen representar l'objecte des d'un únic punt de vista i representar la profunditat. En diferent ordre, i depenent de la complexitat de la figura a representar, aconsegueixen mostrar només les cares visibles, representar les arestes comunes a dues cares amb una sola línia i iniciar un sistema de referència euclidià.
- **S-4 Realístic.** Els eixos paral·lels a l'espai es representen per paral·leles o quasi-paral·leles en el paper. El subjecte ha establert un sistema de referència euclidià en el que pot representar relacions espacials de tres dimensions.

L'estudi dels nivells de desenvolupament de l'habilitat de representació és interessant en tant en quant aquest desenvolupament està relacionat amb el de la percepció espacial, encara que, tal com ens fa notar l'autor, les evolucions no siguin paral·leles (p. 91):

We should therefore expect the growth of representational ability to be highly dependent on spatial-perceptual development but always to lag behind it.

...

The stage of development of a child's schema for a given space figure depends not only on his or her general level of perceptual development but also on the particular representational problems presented at each stage.

En general, en relació a les habilitats d'interpretació i de comunicació d'informació espacial a través de representacions planes, hi ha el convenciment que aquestes poden veure's afectades per diversos factors. Així, Hershkowitz (1990) afirma, (p. 78):

There is much evidence that factors of culture, experience, and familiarity with the conventions of transforming 3D shapes to their 2D representations and viceversa have considerable effects on the drawing and interpretation of 3D shapes.

En el mateix ordre de coses, un estudi anterior, Mukhopadhyay (1987), presenta un exemple de com la cultura i l'experiència afecten aquest tipus d'habilitats. Aquesta autora, afirma que pels alumnes d'un poble aïllat de l'Índia, l'habilitat de representació està lligada a l'aprenentatge dels oficis familiars, com a cas particular dels aspectes culturals i d'experiència.

### **2.2.2 Diferències individuals en les pautes de comportament.**

Encara que la majoria de paradigmes experimentals varen relegar inicialment les diferències individuals al terme dels errors, les diferències individuals en l'actuació en tasques espacials han estat reconegudes, des de finals de la dècada dels setanta, com a prou notables com per què els investigadors es vegin obligats a tenir-les en consideració. A l'inici, fins i tot els que reconeixen la possibilitat de diferències en les estratègies, semblaven considerar-les de poca importància.

Com a primera consideració, cal tenir en compte que la majoria, si no tots, dels tests amb items, poden ésser resolts de més d'una manera i, a més, això és especialment cert per als tests espacials.

En aquest sentit, Lohman (1979a) recull les observacions fetes en les diferents recerques pel que fa a les diferències en l'ús de determinades estratègies. Entre les que descriu és interessant considerar les següents (p. 138):

- Els individus declaren utilitzar diferents mètodes en la solució d'un mateix test.
- En un mateix test, el nombre d'estratègies descrites augmenta amb la dificultat dels items.
- El nombre d'estratègies recollides és més gran en els tests amb complexitat més gran.

- Fins i tot en els tests relativament senzills, d'alta velocitat de resolució, els subjectes declaren utilitzar diferents processos de resolució.
- Hi ha tendència, a mesura que la dificultat de l'item augmenta, a passar d'estratègies de manipulació mental directa a estratègies més 'analítiques' que utilitzen característiques particulars de l'estímul i inferència lògica.

En general, es pot assegurar que el problema de l'estudi de les habilitats és un problema d'anàlisi de diferències individuals tal com afirma Krutetskii (1976) (p. 3):

If everyone possessed the same potential for development in all directions and for the pursuit of any activity, there would be no point in discussing abilities. When one speaks of abilities, we presuppose the presence of certain individual differences in people.

Lohman (1979b) corrobora el que diu Krutetskii quan afirma (p. 111):

The most likely possibility is that some subjects solve complex items on spatial tests using spatial strategies, others use verbal-analytic strategies, while most use both spatial and verbal processes.

Lohman (1979b) presenta les diferències individuals en les estratègies de resolució com un dels problemes més importants tant pels estudis experimentals com pels estudis correlacionals del pensament espacial (p. 16). Presenta el fet que alguns individus resolen problemes de tipus verbal, com poden ser els anagrames, sil·logismes i problemes de sèries de tres termes, fent servir estratègies predominantment espacials, però, malgrat això, és possible elaborar tasques verbals on les estratègies espacials siguin de poca o cap ajuda, per exemple un test de vocabulari. Per altra banda, però, fa notar el fet que és extraordinàriament difícil elaborar tasques espacials que no puguin resoldre's a través d'alguna estratègia no espacial.

Si tenim en compte que sigui quina sigui la conceptualització que prenem d'habilitat espacial aquesta està fortament lligada a la idea d'imatgeria, és clar que analitzar diferències individuals en les habilitats espacials comportarà estudiar aquestes diferències a nivell d'utilització d'imatgeria per part de l'individu.

Entre els diferents individus l'aprenentatge pot donar-se de manera més ràpida o més lenta en funció de la proporció d'imatgeria continguda als estímuls presentats, però el que és interessant és conèixer si les estratègies d'aprenentatge dels diferents individus estan basades en la imatgeria o no.



Krutekskii introdueix la teoria de que hi ha dos aspectes a considerar en les diferències individuals en l'ús de la imatgeria, que són l'habilitat per a servir-se'n i la preferència per a utilitzar-la. A continuació, analitzarem la proposta de Krutekskii i revisarem les recerques de Bishop, Burden, Coulson, Clements, Lahrizi, Lean i Presmeg que segueixen en certa manera la seva proposta. Aquests autors centren les seves recerques no tant en el nivell assolit en l'adquisició d'una determinada habilitat per part de l'individu, sinó en el tipus preferit de processament utilitzat per a la resolució de tasques espacials. Així aquests autors, situen cada individu dins un continu, amb noms més o menys equivalents, que ens permet saber el tipus de processament que utilitza amb més freqüència.

Malgrat això, un aspecte important que no s'ha tingut en compte per la majoria d'autors que han utilitzat el continu visualització per a mesurar la freqüència d'ús d'imatgeria que és que hi pot haver diferències individuals en la qualitat i la mena d'imatgeria usada, independentment de la freqüència d'ús.

La importància de la recerca de Krutekskii rau en el fet de la diferenciació que fa entre *nivell d'habilitats matemàtiques*, i *tipus de temperament matemàtic*. D'una banda, el nivell d'habilitats matemàtiques vindria determinat àmpliament per una component verbal-lògica del pensament. De l'altra, el tipus de temperament vindria determinat àmpliament per una component visual-pictòrica. No és només l'habilitat per a fer servir aquesta component visual pictòrica, sinó també el fet de preferir-ne el seu us, el que determina el tipus de temperament matemàtic d'un individu.

En el seu llibre *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, publicat en anglès per primera vegada el 1976, presenta la classificació dels alumnes en quatre tipus segons la seva capacitat matemàtica. Aquesta agrupació va ser elaborada a partir d'un estudi fet amb individus amb talent matemàtic. Malgrat això, el propi autor suggereix que aquesta classificació pot fer-se extensiva a tots els nivells d'habilitats, essent la força de la component lògica-verbal la que determinaria els nivells.

Així, identifica l'*individu analític* —naturalesa mental analítica o abstracta matemàticament parlant— i l'*individu geomètric* —naturalesa mental geomètrica o pictòrica matemàticament parlant— i dues variants de l'*individu harmònic* —modificacions abstractes o amb imatgeria de la naturalesa mental harmònica.

Considera els dos primers tipus d'individus com a limitats en certa mesura, i afirma que, encara que puguin obtenir bons resultats a l'escola, en alguns aspectes tenen dificultats específiques. Afirma que, encara que hi hagi una forta correlació entre els individus analítics i el rendiment en àlgebra i els tipus geomètrics i el rendiment en geometria, podem trobar manifestacions de naturalesa mental geomètrica

en el treball d'àlgebra i a la inversa.

Defineix l'individu analític *The analytic type* de la següent manera (p. 317):

The thinking of the representatives of this type is characterized by an obvious predominance of a very well developed verbal-logical component over a weak visual-pictorial one. They operate easily with abstract schemes; they have no need for visual supports for visualizing objects or patterns in problem-solving-, even when the mathematical relations given in the problem "suggest" visual concepts.

The representatives of this type are not marked by an ability for visual-pictorial conceptualization, and thus they use a harder and more complicated logical-analytical method of solution when relying on an image would give a much simpler solution. They are very successful at working problems expressed abstractly, but they try to translate problems expressed in concrete visual form onto an abstract level, insofar as possible. They perform operations related to the analysis of concepts more easily than operations related to the analysis of a geometric scheme or drawing.

I ens posa l'exemple de com un individu analític arriba a respondre un problema en el que se li demana que digui quina forma tindrà sense dibuixar-la l'objecte obtingut al fer girar un triangle rectangle que gira al voltant d'un catet.

A continuació, descriu les característiques de l'individu geomètric, *the geometric type* (p. 321):

The thinking of representatives of this type is characterized by a very well developed visual-pictorial component, and we can tentatively speak of its predominance over a well developed verbal-logical component. These pupils feel a need to interpret visually any expression of an abstract mathematical relationship and demonstrate great ingenuity in this regard: in this sense, relatively speaking, figurativeness often replaces logic for them. But if they do not succeed in creating visual supports, in visualizing objects or diagrams to solve problems, then they have difficulty operating with abstract schemes. They persist in trying to operate with visual schemes, images and concepts even when a problem is easily solved by reasoning and the use of visual devices is superfluous or difficult.

...

These pupils are oriented in image-bearing material, and they do operations related to the analysis of diagrams, drawings, and graphs

more easily than operations related to the analysis of concepts and definitions.

I dona un exemple de com un individu geomètric resol un problema que tindria solució algebraica fàcil i ràpida a través d'un elaborat raonament a partir d'una representació gràfica.

Ens diu també que els individus geomètrics tenen un alt grau de desenvolupament en els conceptes espacials i que insisteixen en que no resolen el problema, sinó que veuen el que se'ls demana al problema. A més, en els problemes en que hi ha discrepància entre la formulació verbal i la formulació gràfica, acostumen a refiar-se de la representació i poden arribar a cometre greus errors. A més, per aquest tipus d'individus les qüestions de dependència funcional o fórmules només tenen sentit i són convincents quan poden trobar-hi una interpretació geomètrica.

Els individus harmònics —la majoria dels alumnes dotats matemàticament que Krutetskii analitza en el seu estudi són d'aquest grup— manifesten un equilibri relatiu entre la component verbal-lògica i la component visual-pictòrica totes dues ben desenvolupades, amb la primera predominant. Els individus d'aquest grup manifesten conceptes espacials ben desenvolupats i encara que en certa manera són ingenus en la interpretació visual de les relacions abstractes, les seves imatges i els seus esquemes visuals estan subordinats a l'anàlisi lògica-verbal, i utilitzen tant aproximacions analítiques com geomètriques en la resolució de molts problemes.

Defineix dues variants de l'individu harmònic (p. 327):

We observed the harmonic type in two modifications. Basically, the difference between them comes down to the following. With well developed verbal-logical and visual-pictorial components in equilibrium, an inclination for mental operations without the use of visual-pictorial means distinguishes modification A, whereas an inclination for mental operations with the use of visual-pictorial schemes distinguishes modification B. Therefore we have decided to speak of the *abstract-harmonic* subtype and the *pictorial-harmonic* subtype. Representatives of both subtypes can depict mathematical relationships equally well by visual-pictorial means, but the former feel no need, and do not strive, to do so, whereas the latter do feel a need and often rely on graphic schemes during a solution. This kind of support is of little help to the former, but for the latter it simplifies the solution. If necessary the former can resort to the aid of visual images, and the latter can solve a problem without the support of visual-pictorial models. In analyzing mathematical material the former prefer to start from verbal-logical formulations,

the latter from visual-pictorial features.

El tipus preferit de processament, com a constructe per a estudiar les diferències individuals en relació a les habilitats espacials, ha aparegut de moltes maneres en les recerques referents al tema, moltes de les quals corresponen aproximadament a l'esquema introduït per Krutetskii.

Per exemple Bishop, (1980a) en l'apartat dedicat a les diferències individuals presenta l'oposició *individu analític-individu geomètric* que fa referència al grau amb que un individu fa servir idees més o menys visuals en la resolució de problemes matemàtics. El mateix autor, en una publicació posterior (Bishop, 1983), es refereix també a la contraposició entre individu geomètric i individu analític.

Un altre dels investigadors que treballen en aquesta línia és Clements. Aquest autor en la discussió que fa, Clements (1982), de la hipòtesi *verbalitzador-visualitzador* revisa recerques que segueixen aquesta teoria, i suggereix que els individus poden classificar-se en tres grups en relació a la dimensió visual-verbal, que són:

- *visualizers*, visualitzadors, que normalment fan servir imatgeria o diagrames quan intenten resoldre problemes.
- *verbalizers*, verbalitzadors, que habitualment utilitzen codis verbals
- *mixers* que no tenen tendència ni en un sentit ni en l'altre.

Amb certa reserva en relació al terme verbal que analitzarem més endavant, les tres tipologies definides per Krutetskii —analític, geomètric i harmònic— corresponen aproximadament a les categories dels verbalitzadors, visualitzadors i *mixers*.

En un treball publicat anteriorment juntament amb un altre investigador, Lean i Clements (1981), no només es suggereix l'existència d'un continu verbal-visual, sinó que a més proposen la manera de trobar la posició d'un individu en aquest continu.

En relació a mètodes visuals i no visuals de resolució de problemes matemàtics, són interessants els conceptes nous que aporta Presmeg (1985, 1986a, 1986b) tot i que la seva recerca està basada en la solució de problemes matemàtics en general i no específicament a problemes en relació a tasques espacials. Havent introduït deliberadament de la manera més àmplia possible el terme imatge visual com a esquema mental que representa informació visual o espacial, proposa les següents definicions (1985, p. 90):

A visual method of solution is one which involves visual imagery, with or without a diagram, as an essential part of the method of solution, even if reasoning or algebraic methods are also employed.

A non visual method of solution is one which involves no visual imagery as an essential part of the method of solution.

Aquesta autora parteix de la base de que tots els problemes matemàtics impliquen raonament o lògica en la seva solució. A part d'aquest requisit, la presència o absència d'imatgeria visual com a part essencial determinarà si el mètode és visual o no visual. Així, els mètodes visuals inclouran solucions que continguin construccions, dibuixos, diagrames, taules o gràfics ja siguin sobre paper o en la ment de l'individu.

I a partir d'aquí i seguint el model de Krutetskii, defineix el grau de visualitat matemàtica (1985, p. 91):

*A persons' mathematical visuality is the extent to which that person prefers to use visual methods when attempting mathematical problems which may be solved by both visual and nonvisual methods.*

I defineix a continuació els individus visualitzadors i no visualitzadors, essent respectivament els que prefereixen utilitzar o no mètodes visuals quan resolen problemes matemàtics que es poden resoldre per mètodes visuals i no visuals. Escull com a visualitzadors per al seu treball aquells alumnes que la seva visualitat matemàtica (MV) —*mathematical visuality*— supera la mitja de les MV de la mostra de la qual procedeix.

Són especialment interessants per al nostre treball les observacions que fa respecte les dificultats i estratègies que posen de manifest els visualitzadors en els processos de resolució de problemes. Presmeg (1985) (p. 261):

*An aspect characteristic of the problem solving of many visualisers in the task-based interviews was a difficulty in communicating the concepts of mathematics. Visualisers stumbled over terminology, could not remember key terms; in these straits they typically resorted to gestures or drew diagrams.*

Dins del camp de l'estudi de les estratègies de resolució de tasques espacials, i seguint la proposta visual-verbal és especialment clarificador la recerca dels australians Burden i Coulson. En el seu treball, Burden i Coulson (1981), classifiquen les estratègies utilitzades pels subjectes a partir de tres criteris: la forma de representació (*representational mode*), allò sobre el que el subjecte centra la seva atenció (*processing focus*) i els mitjans auxiliars que utilitza (*processing aids*).

Entre les formes de representació en distingeix tres:

- *Tipus visual* Classifiquen l'estratègia cognitiva utilitzada pel subjecte com a estratègia visual si el subjecte al referir-s'hi recorre a recursos coneguts sota el nom *picture in the mind*. A propòsit d'això els autors precisen (p. 102):

... It is recognised that while the use of the term *picture in the mind* to denote the experienced image is not in accord with most recent writers in the field, it should be noted that the use of this expression does not imply acceptance of the mental photograph view of imagery. However, *picture in the mind* is the unprompted metaphor wick many of the interviewees used as they tried to communicate a description of their internal representation...

- *Tipus verbal* Quan el subjecte no sembla necessitar cap imatge mental al llarg de la resolució d'una prova espacial, es classifica l'estratègia cognitiva utilitzada dins la categoria d'estratègies verbals. Aquests autors prefereixen utilitzar el terme *verbal* en lloc del terme no-visual perquè (p. 104):

... The words were generally capable of visual concrete interpretations. Examples included cube, book, house, bishop's hat, cross, tie and lampshade. They were typically prefaced by *It looks like a* ... It should be recognised that while these sentences appeared in the verbal reports it is unlikely that the internal representations reported by this group of subjects consisted of complete sentences. As in the case *pictures in my mind*, it is more probable that the representations were incomplete word descriptions...

- *Tipus mixte* Classifiquen les estratègies cognitives del subjecte com a mixtes quan recorre als dos tipus descrits anteriorment.

Pel que fa al focus d'atenció, distingeixen dos tipus d'aproximacions:

- *Aproximació global* quan l'estratègia cognitiva fa referència a l'objecte considerat globalment
- *Aproximació parcial* quan l'estratègia considera només una part d'aquest objecte. Els autors precisen (p. 106)

... In some cases these processes could be readily identified with the interactive transformation and serial checking processes outlined by Egan (1979). However, in other cases this part by part focus involved the identification of critical feature or relationship in the stimulus and subsequent concentration on this during the task...

Els mateixos autors fan esment que alguns individus utilitzen els dos tipus d'aproximació associats.

Pel que fa als recursos auxiliars utilitzats, els autors consideren els recursos auxiliars concrets utilitzats per l'individu durant la resolució de les tasques espacials. Els autors precisen (p. 112):

... For example, in response to the Paper Folding items many of the interviewees reported that they counted the number of paper thicknesses in order to determine the number of holes; with Surface Developpement items, some reported that they moved systematically away from x and matched numbers and letters when they came to them (...) it was decided to include these variations with the strategy descriptions.

Una aplicació del mètode proposat per aquests autors la trobem en el treball de Lahrizi (1984), que es basa en aquest sistema de classificació d'estratègies per a estructurar les dades obtingudes durant les entrevistes.

A cadascun dels subjectes entrevistats li associa dos valors que resumeixen les estratègies espacials que ha utilitzat. El primer valor està en funció de les formes de representació de les estratègies, i el segon, en funció dels focus d'atenció. Cadascun d'ells es pot representar per un punt damunt una escala de la següent manera (p. 138):

- ...
- sur une première échelle, au moyen d'un indice VIS-VER décrivant la tendance du sujet à résoudre des épreuves spatiales en utilisant des stratégies plutôt "visuelles" ou plutôt "verbales";
  - sur une seconde échelle, au moyen d'un indice PAR-GLO décrivant la tendance du sujet à résoudre des épreuves spatiales en utilisant des approches plutôt "partielles" ou plutôt "globales".

Per a calcular aquests índex cal calcular, en cada, cas el nombre de manifestacions classificades segons el primer terme menys nombre de manifestacions classificades sota el segon, tenint en compte que pel que fa a tipus de representació no considera les estratègies mixtes.

En l'anàlisi dels resultats afirma que les categories d'estratègies més utilitzades són les de caràcter VIS-PAR i VER-PAR mentre que la categoria VIS-GLO no apareix en absolut.

Pel que fa a l'anàlisi global dels resultats obtinguts, afirma que sembla que les proves espacials que porten a un nombre més gran d'estratègies són aquelles

que requereixen una associació de diverses imatges mentals o també una successió de transformacions. També diu que la freqüència amb que es donen les diverses estratègies en la resolució és molt diversa. A més, afirma que les tasques espacials on el rendiment ha estat baix porten a un nombre més gran d'estratègies.

A l'hora d'explicar els diferents resultats obtinguts en les diferents qüestions dóna diverses raons. D'una banda, el grau d'interiorització necessari per a la resolució d'una tasca pot explicar que en activitats del mateix tipus s'obtinguin diferents resultats. D'altra banda, el diferent grau de complexitat de les imatges i de les transformacions mentals requerides per a resoldre una prova permeten interpretar els diferents resultats obtinguts.

Pel que fa a la relació entre el tipus d'estratègies utilitzades i rendiment manifestat, afirma (p. 189):

... Il semble donc que les sujets ayant eu un faible rendement au test V ont tendance à utiliser des stratégies verbales, tandis que ceux ayant eu un bon rendement ont tendance à utiliser des stratégies visuelles.

Pel que fa a l'anàlisi global de les dificultats trobades pels alumnes, afirma (p. 190):

Il apparaît clairement que les problèmes rencontrés par les sujets sont de trois types: difficultés à interpréter des dessins représentant des formes tridimensionnelles, difficultés à faire de tels dessins et difficultés à effectuer des transformations d'images mentales, principalement des suites de transformations.

Entre les dificultats de caire específic que esmenta, presenta el fet que en alguns casos la dificultat de visualitzar una part amagada de l'objecte és la dificultat de la prova. Contràriament si es demana dibuixar una part directament observable el rendiment és millor. D'altra banda, el fet de que hi hagi una part significativa en una figura facilita el procés requerit. Entre les traves que troben els alumnes en relació al desconeixement de convencions esmenta la dificultat de visualitzar figures planes situades en un pla diferent del del full de paper.

A l'hora de considerar d'una manera global les recerques sobre estratègies que s'emmarquen dins el corrent que podríem anomenar visual-verbal, cal tenir molt presents dues advertències.

En primer lloc, l'origen d'aquesta tendència és la recerca de Krutetskii que té molt en compte la distinció entre l'habilitat d'usar la imatgeria i la preferència per a fer-ho. Cal tenir present que aquest autor presenta les habilitats espacials no



com a elements que determinen si un individu està dotat matemàticament sinó que són elements caracteritzadors de la manera de fer del seu pensament matemàtic (p. 314–315):

The two components (the ability to visualize abstract mathematical relationships and the ability for spatial geometric concepts) are not necessary components in the structure of mathematical abilities. Their presence or absence (more precisely, their strenght or weakness) *does not determine the extent* of mathematical giftedness, but *does determine its type*. A pupil can be mathematically capable with a different correlation between the visual-pictorial and the verbal-logical components, but the given correlation determines what type he belongs to.

Malgrat això, entre d'altres autors del camp de l'educació matemàtica la clara distinció que fa Krutetskii entre la component lògico-verbal determinant del nivell i la component visual-pictòrica determinant el temperament ha quedat desdibuixada.

Una segona advertència fa referència a la utilització amb diferents sentits d'un mateix terme, analític, fet que podria portar a confusions. El terme analític té diferents interpretacions segons els diferents autors que l'utilitzen, tal com afirma Presmeg (1985) (p. 15):

The word “analytic” apparently has different meanings for different researchers; for some, perhaps Lean and Clements (1981), it is equivalent in meaning to “logical, acquired by reason”, or, for some, “algebraic”, “sequential”, “verbal-symbolic” or even “nonvisual”. Thus some writers might object to the analytic-gestalt dichotomy used by Guay et al. (1978), Lawson and Kirby (1981) and Lean (1981). The Concise Oxford Dictionary gives the meaning of “analytical” to be: “pertaining to resolution into simple elements”. It is the antonym to “synthetic”, just as “analysis” is the antonym of “synthesis”. In this sense its use as opposite pole to “gestalt” is justified, since “gestalt” means: “an organised whole in which individual part affects every other, the whole being more than the sum of its parts”. It is the writer's feeling that many researchers use the word “analytic” (as she has sometimes done) for want of a better word. “Ratiocination”, which means, “going through logical processes, reseanoing formally, using syllogisms”, yields an adjective, “ratiocinative”, which might better serve the purpose when describing nonvisual logical thinking —if it were not such a mouthful!

Finalment, i encara que la influència de la cultura en les diferències individuals en els processos mediatitzats visualment té una importància perifèrica per a la nostra recerca, hi ha algun aspecte que ens interessa assenyalar ja que té importància a l'hora d'establir consideracions per a l'ensenyament. Així Bishop (1979) i (1983) observa diferències en la interpretació d'informació figurativa en la seva mostra d'estudiants. Aquest autor afirma que les representacions gràfiques no són de manera automàtica i sota cap aspecte medis de comunicació amb èxit —fet que és de rellevància per al nostre estudi.

De la mateixa manera, hi ha estudis interculturals com el de Deregowski i Dziurewicz (1986) que permeten pensar que la capacitat per diferenciar els dibuixos en perspectiva dels objectes de la realitat que pretenen representar pot caracteritzar-se com un aprenentatge propi de la cultura occidental.

## 2.3 Identificació de grups d'incidència.

En aquesta secció es fa una revisió de les recerques que han estudiat les diferències de rendiment pel que fa a les tasques espacials entre diferents grups d'incidència, interessant-nos no només en aquelles que analitzen les possibles causes d'aquesta diversitat, sinó també en aquelles que intenten identificar una diferència en els processos de pensament entre individus de diferents grups d'incidència.

Des de l'inici de les recerques en relació a les habilitats espacials s'han fet molts estudis sobre les diverses variables que influeixen en el rendiment en aquests tipus de tasques. Són molts i molt variats els diversos factors que s'han estudiat: des de la influència de la cultura o del medi socioeconòmic, fins als continguts curriculars i els recursos materials utilitzats en el procés educatiu. Tot i que alguns d'aquests estudis són molt interessants, són difícilment equiparables entre sí com per a poder-ne fer un estudi crític comparatiu. A més l'àmbit d'aquests treballs depassa amplement el camp de la nostra recerca.

En canvi, els estudis que analitzem en profunditat són aquells que fan referència a la diferència de rendiment entre sexes en relació a les tasques espacials. Cal fer esment que moltes de les variables intervinents que de manera aïllada no considerariem tenen una relació decisiva amb els factors que contribueixen a la manifestació de diferències entre els dos sexes. És des d'aquest punt de vista que les analitzem en aquesta secció.

Aquesta secció s'estructura en tres apartats. En primer lloc, es presenta la discussió del millor rendiment del sexe masculí en els anomenats tests espacials, identificant les característiques que aquests han de tenir per a ser considerats com a tals i per què la diferència de rendiment tingui lloc.

En un segon bloc, es fa una revisió dels treballs que estudien les causes d'aquesta diferència de rendiment, analitzant les dues grans categories d'explicacions existents en relació a les diferències de rendiment entre els sexes en els processos mediatitzats visualment en matemàtiques, les diferències per causes biològiques i les degudes a causes de l'entorn.

Finalment, en el darrer apartat, es constata que la majoria d'estudis fan referència a la diversitat en el rendiment, i que són molt pocs els que investiguen una possible diferència en els processos de resolució per part dels individus dels dos sexes. L'anàlisi de les poques recerques que coneixem que estudien la diferència de processos de resolució no ens permet identificar cap característica del pensament dels nois o les noies que permeti suposar l'existència de diferents processos de resolució de tasques espacials.

### **2.3.1 Identificació de les variables determinant els grups d'incidència.**

El fet que les diferències de rendiment entre els sexes apareixin en un ampli espectre de les tasques, activitats i situacions en relació amb l'espai, dona rellevància tant al seu significat pràctic com teòric. A més, aquesta varietat, al mateix temps, fa complicat i difícil enfrontar-se amb l'explicació de les diferències entre els sexes.

Al començament dels anys trenta sovint els informes de les recerques presentaven una tendència per part dels nois a resoldre millor que les noies la majoria dels tests espacials. En aquells moments, aquest fet no es va considerar com a particularment interessant, ja que se suposava que la diferència era una conseqüència de l'experiència diferenciada resultat dels rols diversos dels sexes, que feia que els nois tinguessin més experiència amb tasques relacionades amb objectes mecànics.

Amb el pas dels anys la quantitat de tests que han posat de manifest un millor rendiment per part del sexe masculí en els tests espacials és impressionant —Eliot i Smith (1982), Fennema (1980), Fennema i Carpenter (1981), Lahrizi (1984), Metzler i Shepard (1974), Pattison i Grieve (1984), Shepard i Metzler (1971), Smith (1982), Tapley i Bryden (1977), Wattanawaha (1977) i Witkin i alt. (1962), en són alguns exemples. Aquest fet és cert fins a tal punt que es fa difícil no arribar a la conclusió de que la superioritat masculina en el rendiment és una característica general dels tests espacials.

Malgrat això, són diverses les investigacions que han suggerit que la qüestió no es tan senzilla. De fet la superioritat masculina en els tests espacials s'ha pogut comprovar que és mínima en els primers nivells d'escolarització, augmentant amb

l'edat. Així, Hall i Hoff (1988) afirmen (p. 395):

The research has indicated that differences are minimal at the primary school level, but more evidence is found that gender differences in mathematical performance begin to emerge at the high level.

També s'ha constatat que aquestes diferències disminueixen en l'edat adulta. Així, Nash (1979) afirma (p. 290):

The exaggerated, cognitive sex-related differences, emergent during adolescence are age bounded and ephemeral rather than heralding the beginning of lifelong, sex-defined differentiation.

A més, existeixen recerques — Van Leeuwen (1978)— que posen de manifest que en alguns grups ètnics no hi ha cap tipus de diferències en aquests aspectes entre els dos sexes.

A més, cal tenir sempre molt present que aquesta diferència de rendiment depèn críticament del que s'entén com a test espacial. En aquest sentit cal dir que hi ha tests, considerats alguna vegada com a espacials, en els que les dones obtenen millor rendiment que els homes. Alguns autors, però, afirmen que els tests en que això passa no són autèntics tests espacials, ja que l'èxit en la resolució de la tasca no depèn críticament la percepció global de l'objecte. En aquest sentit, és molt interessant la lectura de l'estudi de Eliot i Smith (1982) que analitzen el rendiment en relació a les habilitats espacials en funció del sexe i del tipus de transformació geomètrica plantejada en els tests. Aquest autors afirmen (p. 449):

Thus, the magnitude of the sex difference, when in favour of males, gives an indication of the spatial content of the test. On the other hand, when a test does not show a sex difference in favour of males, there is a suspicion that it is not a true spatial test.

Cal fer constar que en aquest treball Eliot i Smith parteixen d'una interpretació en certa manera restringida del que és un test espacial. Així, fan una revisió dels tests espacials existents fins al moment, limitant-se als tests visuals-espacials en els sentit de que es ceneixen als que semblen requerir la percepció i retenció de formes visuals i/o la manipulació mental de formes visuals per a resoldre'ls.

Aquests autors, juntament amb d'altres dins el mateix corrent, afirmen que la càrrega espacial d'un test reflecteix el grau de dependència de l'èxit al resoldre'l de l'habilitat de percebre i retenir una configuració com a tot en la ment. L'essència del factor espacial sembla recaure en l'habilitat per a reconèixer o identificar una configuració sense necessitar estratègies verbals.

Alguns autors afirmen que els tests en que les dones obtenen un millor rendiment es poden resoldre només fixant-se en detalls dels objectes o figures, ja que els estímuls difereixen només en detalls i no en la forma. Afirmen que la direcció de la diferència entre sexes dependria de la importància relativa de la percepció de detalls per comparació a la percepció de la globalitat i la proporció.

Són clarificadores totes aquelles recerques on, a més de constatar el millor rendiment dels nois, s'aclareix quin tipus de proves han estat considerades per a l'estudi d'aquest rendiment. D'entre aquestes, és interessant el treball de Shuard (1982) que en l'anàlisi que fa de les diferències del rendiment en matemàtiques segons el sexe, afirma que està ben establert que els homes tendeixen a resoldre millor que les dones els tests de visualització espacial que inclouen l'habilitat de rotar objectes en la ment i orientar-se ells mateixos o orientar objectes a l'espai.

En aquest mateix ordre de coses, Lahrizi (1984) constata que, en la globalitat del qüestionari que ell presenta, els nois, tant els alumnes com els futurs professors, obtenen resultats significativament millors que les noies exceptuant una prova del tipus *paper folding* on la diferència significativa de resultats s'ha produït de manera inversa.

Dins d'aquest grup cal considerar també el treball de Wattanawaha, (1977), que arriba a la conclusió de que els nois obtenen millor rendiment que les noies en el cas de proves espacials de visualització, però no necessàriament en el cas d'altres tipus de proves espacials.

### **2.3.2 Anàlisi de les causes que determinen les diferències de rendiment.**

Fem a continuació una revisió dels treballs de diversos autors que analitzen les possibles raons per a les diferències de rendiment observades entre els dos sexes en les habilitats espacials.

Hi ha dues grans categories d'explicacions per les diferències de rendiment entre els sexes en els processos mediatitzats visualment en matemàtiques. D'una banda, hi ha un corrent d'investigadors que, davant les evidències dels estudis neurològics, consideren les diferències entre els sexes en relació al rendiment en les tasques espacials degudes a causes biològiques i, per tant, fonamentalment immutables i socialment justificades. Per contrapartida, d'altra banda, hi ha el grup d'investigadors que, no acceptant aquestes evidències, consideren les diferències entre els sexes únicament com producte de la nostra història socials i, per tant, injustes i amb possibilitat de ser canviades.

En la primera categoria han estat suggerides teories que inclouen factors genètics, hormonals i neurològics, que han estat analitzades amb profunditat per Harris (1981). Aquest autor fa una revisió de les recerques que expliquen les diferències de rendiment entre els sexes a través de models neurològics —organització cortical del cervell humà, maduració dels hemisferis cerebrals, lateralització de funcions, maduració cerebral, i diferències anatòmiques i fisiològiques.

Considerant que som profans en aquest tema, recordem només el treball d'alguns autors, com Elliott i Smith (1982) i Shuard (1982) que, dins del camp de la psicologia i en relació a les matemàtiques, justifiquen les diferències de rendiment entre els sexes en l'àmbit de les habilitats espacials per causes únicament biològiques, (Eliot i Smith (1982), p. 449):

The evidence relating sex differences in spatial ability to age shows that these differences are not simply due to the greater mechanical experience of males, as Spearman believed. There is a growing body of evidence that there is a direct relationship between spatial ability and sex hormones.

La segona categoria explica les diferències de rendiment entre els sexes en els processos mediatitzats visualment en matemàtiques per causes de l'entorn. Dins d'aquest apartat considerem un ampli ventall de justificacions que van des de l'educació formal fins les expectatives socials.

Harris (1981) presenta una revisió de les recerques existents en aquest camp, analitzant, en primer lloc, com l'experiència afecta la naturalesa de les representacions mentals dels individus. En aquest sentit, afirma (p. 55):

The life experience of individuals has an effect that makes them different from others without that experience in how they approach spatial situations, perhaps, what spatial information they notice, and how that information is encoded.

...

the nature of a particular spatial environment modulates a person's experience in that environment and how this experience affects the mental representation of that particular environment.

Piaget planteja el paper fonamental que juga l'acció en l'aprenentatge espacial. Piaget afirma que l'imatge mental d'una forma espacial és el resultat de la interiorització de les accions exploratòries del nen. En aquest sentit, les primeres experiències dels nens amb joguines diferents de les de les nenes —fet que ha

estat contrastat, Rheingold i Cook (1975)— portaria a diferències en aquestes experiències.

D'altres recerques suggereixen que les diferències van més enllà del tipus de joguines de que disposen els nens i les nenes, estenent la proposta a les reaccions dels pares davant els tipus de jocs dels nens i les nenes —Fagot (1978), Harper i Sanders (1975)—

D'altres investigacions presenten les diferències de rendiment entre els sexes com degudes a la socialització, en el sentit que la societat prescriu experiències diferents pels homes i les dones, experiències que contribuirien de manera diferent al desenvolupament de la capacitat espacial dels individus dels dos sexes.

Tornant a les recerques en el camp de l'educació matemàtica, cal dir que el corrent d'investigacions que, en relació als processos mediatitzats visualment, justifiquen les diferències de rendiment entre els sexes per causes de l'entorn, inclou les teories d'autors del prestigi de Krutetskii, Bishop o Presmeg. A més, cal dir que alguns investigadors, entre ells Shuard, justifiquen les diferències de rendiment entre els sexes per motius corresponents a les dues categories.

En primer lloc, considerem els resultats de Krutetskii (1976), que tot i que no subscriu les teories que proposen l'existència de característiques qualitatives específiques del pensament matemàtic dels nois i les noies, accepta com a evident que els nois manifesten habilitats matemàtiques i també mecàniques més sovint, justificant aquestes diferències per motius socioculturals (p. 343):

But this actual difference, we believe, should be put down to a difference in tradition, in the upbringing of boys and girls, and to the widespread view of professions as masculine or feminine. The result is that mathematics is often outside the sphere of girls' interests. At least, we have no data available today that would compel us to draw a different conclusion.

Sembla clar que, per a la majoria d'autors dins d'aquesta segona categoria, el tipus d'aprenentatge és una variable a tenir en compte a l'hora d'analitzar les diferències relacionades amb el sexe en els resultats espacials. Per aquest motiu, i referint-nos a les possibles diferències degudes a l'educació formal, cal considerar el tipus d'escolarització rebuda per l'alumne que és important no només per la presència o absència d'uns determinats continguts en el currículum, sinó perquè tal com afirma Mitchelmore (1980b) el currículum és reflex de la societat (p. 212):

A more likely explanation for the observed difference lies in the school mathematics curriculum.

...

It seems more reasonable to suppose that the geometrical content of a country's school curriculum reflects that country's general attitude towards the use of spatial models in thinking, ...

Si considerem la influència del treball escolar en el desenvolupament d'habilitats en els individus, cal tenir present, d'una banda, quins continguts han treballat els alumnes. D'altra banda, no només és important la selecció de continguts, sinó els recursos utilitzats per a treballar-los. En aquest sentit són de gran interès els articles de Bishop (1973) i Marriott (1978). En el primer, l'autor argumenta que la simple manipulació de formes tridimensionals en una situació estructurada d'aprenentatge pot promoure el desenvolupament de les habilitats espacials (p. 43):

... there appears to be a relationship between the earlier use of apparatus and the later ability to think and perform in contexts where spatial relationships are involved. This relationship occurs irrespective of the particular apparatus used.

Aquesta possibilitat comportaria molta responsabilitat per als professors de matemàtiques de l'ensenyament primari i secundari que han d'assegurar que els nois i les noies tenen les mateixes oportunitats de treballar amb material estructural mentre es produeix el seu desenvolupament cognitiu.

Seria fals suposar que els únics factors que intervenen en el desenvolupament de les habilitats que pretenem analitzar són factors relacionats amb l'educació formal o amb causes biològiques; cal no oblidar el medi sociocultural i l'experiència personal tal com afirma Hanna (1989) (p. 230):

... thus it seems reasonable to hypothesize that sex differences at that age. When they exist, are due to out-of-class experiences and psychological processes rather than to biological differences.

Sembla clar que la situació en un medi ric en convencions i codificacions relacionades amb el tema, el contacte amb medis de comunicació visual i amb materials concrets i jocs —especialment jocs compartits— amb objectes físics, afavoreixen aquest desenvolupament. En aquest sentit, Clements (1981b) afirma (p. 2):

... the genetic potential for visual-spatial creations of a high order seems especially likely to be revealed and/or fostered in a child who is:

- (a) kept home from school during the early school years and, perhaps, is relatively isolated from age mates as well;



- (b) if anything, slower than average in language development;
- (c) furnished with and becomes unusually engrossed in playing with concrete physical objects, mechanical models, geometrical puzzles, or, simply, wooden cubes.

A part dels efectes de l'aprenentatge en les diferències relacionades amb el sexe en els resultats espacials i en matemàtiques, cal considerar les influències ambientals que poden ser agrupades dins de tres grans àrees, tal com suggereix Presmeg (1985), (p. 58):

- (1) patterns of socialisation may be produced by child-rearing practices and peer group pressures;
- (2) the expectations of schools and individual teachers may affect pupil's performance;
- (3) the pupil's own motivation may have significant effects on their attainment.

Pel que fa als models de socialització, és evident que el tipus d'experiència viscuda durant la infantesa ve condicionada en gran manera —al menys en societats com la nostra— pel sexe. Aquesta mateixa autora esmenta entre els costums que poden afectar les diferències individuals relacionades amb el sexe, el fet de que els nens obtenen joguines significativament més espacials i científiques per comparació amb les nenes.

En el paràgraf anterior fem l'aclariment *al menys en societats com la nostra* per que la influència del sexe es manifesta diferentment en funció del tipus de societat. En aquest sentit és molt interessant la lectura de l'article de Van Leeuwen (1978), en la que fa notar una tendència cap a diferències més freqüents entre els sexes en societats que manifesten amb intensitat una rígida socialització i conformitat.

En aquest mateix sentit, cal considerar els treballs de Fennema (1985), Fennema, Walberg i Marrett (1985), Eccles (1985) i Maines (1985), que expliquen les diferències de rendiment en l'aprenentatge de les matemàtiques en general, i en particular, en el de les habilitats espacials, a través de diferents models relacionats amb els processos de socialització i la pressió de l'entorn cultural respecte els individus dels diferents sexes.

Cal tenir en compte també com influeixen les expectatives escolars i la motivació en la diferència de rendiment entre els sexes. Malgrat això, i pel que fa a les expectatives escolars, és evident que a l'escolaritat secundària molts més nois que noies escullen matèries tals com dibuix tècnic o ciències físiques fet que s'ha de considerar no només a partir de la relació directa que aquestes matèries puguin tenir amb les habilitats espacials sinó també a partir del missatge implícit que aquest fet comporta. En aquest sentit, Shuard afirma (1982), (p. 281):

In these subjects, not only is mathematics learned and practised in a practical context, but the message is conveyed that mathematics is useful in the technical, scientific and employment worlds, particularly in the traditional worlds of boys' employment and interests.

Tot i que no coneixem cap estudi centrat en el camp concret de la influència de la motivació en la diferent manifestació per part dels nois i les noies d'habilitats espacials, és interessant considerar les aportacions concretes del treball de Presmeg (1985) que afirma (p. 266) que fent una breu revisió de les atribucions causals dels visualitzadors del seu estudi els models trobats estan més relacionats amb l'èxit i la confiança en si mateixos dels alumnes que amb el sexe.

De manera semblant, és rellevant la recerca de Fennema i alt. (1990) que analitza com les expectatives i les opinions dels professors respecte els nois i les noies condicionen els resultats dels uns i de les altres.

L'objectiu de la present recerca no és establir les causes de les diferències de rendiment, sinó analitzar les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes, i fer-ne una comparació entre els dels dos sexes, quan sigui possible. Finalment doncs, per aquest motiu, volem fer constar que les diferències entre els sexes ens interessin en tant en quant poden ajudar a comprendre el perquè dels errors dels alumnes, ja que, tal com afirma Lafortune (1989), el coneixement i la comprensió dels orígens dels errors pot ajudar a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques.

### 2.3.3 Identificació de diferència de processos en els grups d'incidència

Cal fer notar però que les teories analitzades fins al moment fan referència a la diferència de rendiment i no de processos tal com observa també Bishop (1980b), (p. 10):

Unfortunately much of this research tends towards evaluations of mean differences in boys' and girls' scores, and there are very few studies that give us any ideas about the different processes used by boys and girls. It may be the case that sex is not a sufficiently distinguishing variable when the concern is with abilities and processes.

Un dels pocs autors que intentin relacionar la diferència de rendiment amb els processos de resolució és Lohman. Aquest autor en la revisió que fa de les recerques en relació als diferents factors espacials (1979a) i, referint-se a la manca

d'estructura en els resultats de les dones en els diversos factors espacials, justifica la diferència de rendiment obtinguda amb tres arguments (p. 96):

- En primer lloc, afirma que els tests espacials eren massa difícils per les dones per la qual cosa el rendiment quedava determinat per factors diferents de l'habilitat espacial.
- En segon lloc, argumenta que l'alta correlació entre els tests espacials i els tests verbals obtinguda en el cas de les dones pot fer suposar que intenten resoldre els tests espacials a través de tècniques no espacials sinó analítiques.
- Finalment, diu que no només les dones tendeixen a resoldre els tests de manera diferent dels homes sinó que a més són més eclèctiques en les seves estratègies de resolució.

Aquest darrer fet podria ser degut, segons l'autor, a que les dones no tenen mètodes sistemàtics clarament definits per a la resolució dels problemes dels tests espacials i els alumnes que no tenen mètodes ben definits per a la resolució de problemes sempre manifesten habilitats menys diferenciades.

Cal fer notar que Lohman, tot i relacionar la diferència de rendiment amb els processos de resolució, no identifica cap característica del pensament dels nois o les noies que permeti suposar l'existència de diferents processos de resolució de tasques espacials.

En aquest mateix ordre de coses, Krutetskii (1976) resumeix les investigacions anteriors a la seva dient, que a partir de les dades existents es pot dir que els nois sobresurten en l'habilitat per al raonament lògic i les noies sobresurten en precisió, rigor i exactitud. Malgrat això es qüestiona la fiabilitat d'aquestes dades i fins a quin punt aquestes característiques són innates. Pel que fa a la seva pròpia recerca l'autor posa de manifest que no ha constatat cap característica qualitativa específica del pensament matemàtic dels nois o les noies tant a partir de les dades directes de la recerca com a partir de la informació donada pels professors.

Si el que interessa és analitzar si hi ha diferències entre els dos sexes, no només pel que fa al rendiment espacial, sinó, amb més profunditat pel que fa a processos de resolució, és important tenir en compte els resultats parcials de la recerca de Presmeg (1985) pel que fa a la visualitat dels nois i les noies. Aquesta autora escriu (p. 186):

In the qualitative data of this study no overall differences were apparent in the mathematical visuality of boys and girls. ... Indeed, in a wide survey of the problem solving processes of all 54 visualisers,

for each boy who had used visual processing of a particular kind it was possible to find a girl who had used the same kind of processing, ...

Més endavant, (p. 266), afirma que fent una breu revisió de les atribucions causals dels visualitzadors del seu estudi els resultats trobats estan més relacionats amb l'èxit i la confiança en si mateixos dels alumnes que amb el sexe.

Per acabar aquesta revisió volem presentar un altre treball en el mateix sentit, que és especialment interessant, Battista (1990). En aquest article l'autor presenta com a resultats de la seva recerca el fet que els nois i les noies manifesten diferents nivells de visualització espacial i de rendiment en geometria, però no utilitzen estratègies diferents en la solució dels problemes plantejats.

Per a mesurar el nivell de visualització espacial aquest autor utilitza 20 dels 30 ítems del *Purdue spatial Visualization Test* on la tasca proposada és una rotació. El temps de resolució és limitat i més curt que en la versió original per a poder mesurar millor l'habilitat dels alumnes per a transformar imatges mentals visuals considerades globalment, intentant evitar la possibilitat de processar analíticament les relacions entre diferents parts de les figures, fet que requereix més temps.

Mesura el rendiment en geometria en funció de la comprensió de conceptes bàsics i el coneixement de tècniques i principis i l'habilitat per aplicar-los a noves situacions, utilitzant un test on els continguts són diversos i cobreixen tot l'àmbit de la geometria corresponent al nivell d'escolarització dels estudiants.

L'autor classifica les estratègies dels alumnes segons siguin dibuix, visualització sense dibuix, no espacial o cap de les anteriors, definint-les (p. 52):

A student's response was classified as a drawing strategy if the student chose or described a strategy that explicitly stated that a drawing has been used... A student's response was classified as a visualization strategy if the student chose or described a strategy that explicitly stated that visualization had been used but no drawing had been made. A student's response was classified as a non spatial strategy if the student chose or described a strategy that did not explicitly stated that visualization or drawing had been used.

### Referències bibliogràfiques del capítol 2.

Baldy, R., (1988): 'De l'espace du dessin à celui de l'objet. Une activité de mises en correspondance entre des dessins en perspective cavalière et des objets réels.' *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 43-57.

Battista, M.T., (1990): 'Spatial visualization and gender differences in high school geometry.' *Journal for Research in Mathematics Education* **21**, pp. 47-60.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., Houang, R.T., (1985): 'Visualizing rectangular solids made of small cubes: analyzing and effecting students performance.' *Educational Studies in Mathematics* **16**, pp. 389-409.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., Houang, R.T., (1988): 'The Effect of Instruction on Spatial Visualization Skills of Middle School Boys and Girls.' *American Educational Research Journal* **25**, pp. 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., Houang, R.T., (1989a): 'Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and affecting students' performance.' *Educational Studies in Mathematics* **20**, pp. 121-146.

Bishop, A.J., (1973): 'Use of structural apparatus and spatial ability: a possible relationship.' *Research in Education* **9**, pp. 43-49.

Bishop, A.J., (1974): 'Visual Mathematics.' *Proceedings of the ICMI-IDM Regional Conference on the Teaching of Geometry*, IDM, Bielefeld, West Germany, pp. 165-189.

Bishop, A.J., (1979): 'Visualizing and Mathematics in a pre-technological culture.' *Educational Studies in Mathematics* **10**, pp. 136-146.

Bishop, A.J., (1980a): 'Spatial abilities and mathematics education. A review.' *Educational Studies in Mathematics* **11**, pp. 257-269.

Bishop, A.J., (1980b): *Spatial and Mathematical Abilities —A Reconciliation*, Comunicació presentada a Conference on Mathematical Abilities at the University of Georgia, Athens, June 12-14, 1980.

Bishop, A.J., (1983): 'Space and Geometry' en R. Lesh, M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA, pp. 175-203.

Bessot, A., Eberhard, M., (1986): 'Adaptation de la perspective à une situation complexe par des élèves de 9-12 ans.' *European Journal of Psychology of Education* **1**(2), pp. 83-96.

Burden, L.D., Coulson, S.A., (1981): *Processing of Spatial Tasks*. M. Ed. Thesis, Monash University, Melbourne.

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M., (1986): 'Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry.' *Journal for Research in Mathematics Education* 17(1), pp. 31-48.

Burton, L., Cooper, M., Leder, G., (1986): 'Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers in-training.' *Proceedings of the Tenth Conference for the Psychology of Mathematics Education* 1, University of London, Institute of Education, Londres, pp. 81-86.

Clements, K., (1981b): 'Visual imagery and school mathematics. Part I.' *For the Learning of Mathematics*, Nov. 1981, 2(2), pp. 2-9.

Clements, K., (1982): 'Visual imagery and school mathematics. Part II.' *For the Learning of Mathematics*, Març 1982, 2(3), pp. 33-38.

Clements, M.A., (1983): 'The question of how spatial ability is defined, and its relevance to mathematics education.' *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Feb. 1983, 1(1), pp. 8-20.

Clements, M.A., (1988): *Sometimes Visualizing Mathematics is not a Good Idea*. Comunicació a Sixth International Congress on Mathematics Education, Budapest, Jul/Ag. 1988.

Connor, J.M., Serbin, L.A., (1980): *Mathematics, visual-spatial ability, and sex roles*. (Final Report). National Institute of Education (DHEW), Washington DC. (ERIC Document Reproduction Services No. ED 205 305)

Cooper, M., Sweller, J., (1989): 'Secondary school students' representations of solids.' *Journal for Research in Mathematics Education* 20, pp. 202-212.

Del Grande, J., (1987): 'Spatial Perception and Primary Geometry.' en M.M. Lindquist, A.P. Shulte, (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook*. N.C.T.M. Reston, VA, 126-135.

Deregowski, J.B., Dziurawiec, S., (1986): 'Some aspects of comprehension of technical diagrams: An intercultural study.' *Le Travail Humain* 49(1), pp. 443-60.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O., (Eds.), (1984): *Children Learning Mathematics: A teacher's Guide to Recent Research*. Holt, Rinehart and Winston., Oxford.

Dion, D., Pallascio, R., Papillon, V., (1985a): 'Perception structurale d'objets polyedriques.' *Bulletin AMQ*, Oct. 1985, 10-21.

Dion, D., Pallascio, R., Papillon, V., (1985b): 'Typologie des habilités perceptives d'objets polyedriques.' *Séminaires du CIRADE sur la Représentation*, 8 Nov 1985, Centre Interdisciplinaire de Recherches sur l'Apprentissage et le Developement en Education, Université de Québec à Montreal, pp. 107-121.

Eccles, J., (1985): 'Model of students' mathematics enrollment decisions' en E. Fennema, (Ed.), (1985): 'Explaining sex-related differences in mathematics: Theoretical models.' *Educational Studies in Mathematics* 16(3), pp. 311-314.

Eliot, J., Smith, I.M., (1982): *An International Directory of Spatial tests*. NFER-NELSON.

Fagot, B., (1978): 'The influence of sex of child on parental reactions to toddler children.' *Child Development* 49, pp. 459-465.

Fennema, E., (1980): 'Sex-related differences in mathematics achievement: Where and why.' en L.H. Fox, L. Brody, D. Tobin, (Eds.), *Women and the mathematical mystique*. John Hopkins University Press, Baltimore, USA, pp. 76-93.

Fennema, E., (Ed.), (1985): 'Explaining sex-related differences in mathematics: Theoretical models.' *Educational Studies in Mathematics* 16(3), pp. 303-320.

Fennema, E., Carpenter, T.P., (1981): 'Sex-Related Differences in Mathematics: Results from National Assessment.' *Mathematics Teacher* 74, pp. 554-559.

Fennema, E., Peterson, P.L., Carpenter, T.P., Lubinsky, C.A., (1990): 'Teachers' attributions and beliefs about girls, boys, and mathematics.' *Educational Studies in Mathematics* 21, pp. 55-69.

Fennema, E., Walberg, H., Marrett, C., (1985): 'Introduction' en E. Fennema, (Ed.), (1985): 'Explaining sex-related differences in mathematics: Theoretical models.' *Educational Studies in Mathematics* 16(3), pp. 303-304.

Gaulin, C., (1985): 'The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations' en *Proceedings of the Ninth International Con-*

*ference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol II: Plenary Addresses and Invited Papers, pp. 53-71.

Guay, R.B., McDaniel, E.D., Angelo, S., (1978): 'Analytic factors confounding spatial ability measurement' en R.B. Guay, E.D. McDaniel, (Eds.), *Correlates of performance on spatial aptitude tests*, Lafayette, IN: Purdue University (USArmy Research Institute for the Behavioral and Social Sciences). Final Report, pp. 116-128.

Hall, C.W., Hoff, C., (1988): 'Gender Differences in Mathematical Performance.' *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 395-401.

Hanna, G., (1989): 'Mathematics achievement of girls and boys in grade eighth: Results from twenty countries.' *Educational Studies in Mathematics* 20 pp. 225-232.

Harper, L., Sanders, K., (1975): 'Preschool children's use of space: Sex differences in outdoor play.' *Developmental Psychology* 11, p. 119.

Harris, L.J., (1981): 'Sex related variations in spatial skill' en L.S. Liben, A.H. Patterson, N. Newcombe, (Eds.) *Spatial Representation an Behavior Across the Life Span: Theory and Application*, New York, Academic Press. pp. 83-125.

Hershkowitz, R., (1990): 'Psychological aspects of learning geometry' en P. Nesher, J. Kilpatrick, (Eds.) *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education*. ICMI Study Series, Cambridge University Press. pp. 70-95.

Hoffer, A., (1977): *Geometry and Visualization. Mathematics Resource Project*. university of Oregon, Cretaive Publication Inc., Palo Alto.

Hoffer, A., (1981): 'Geometry is more than proof.' *Mathematics Teacher* 74(1), pp.11-18.

Hoffer, A., (1983): 'Van Hiele Based Research.' en R. Lesh, M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA, pp. 205-227.

Kersh, M.E., Cook, K.H., (1979): *Improving mathematics ability, an attitude, a manual*. Seattle: Mathematics Learning Institute, University of Washington.



Krutetskii, V.A., (1976): *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press. Chicago.

Lafortune, L., (Ed.), (1989): *Quelles Différences?* Les éditions du remue-ménage. França.

Lahrizi, H., (1984): *Étude de l'habilité à visualiser des relations géométriques dans trois dimensions chez les élèves et les élèves-professeurs au Maroc*. Thèse. Université Mohamed V. Rabat. Maroc.

Lawson, M.J., Kirby, J.R., (1981): 'Training in Information Processing Algorithms.' *British Journal of Educational Psychology* 51, pp. 321-335.

Lean, G.A., (1981): *An Investigation of the Spatial and mathematical Ability Constructs*. Unp. M. Phil. Thesis, University of Cambridge.

Lean, G.A., Clements, M.A., (1981): 'Spatial ability, visual imagery and mathematical performance.' *Educational Studies in Mathematics* 12(3), pp. 1-33.

Lesh, R., (Ed.), (1978): *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts*. ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio.

Liben, L.S., (1981): 'Spatial representation and behaviour: multiple perspectives' en L.S. Liben, A.H. Patterson i N. Newcombe, (Eds.), *Spatial Representation and Behaviour across the Life Span*, New York, Academic Press, pp. 3-36.

Linn, M.C., Petersen. A.C., (1985): 'Emergence and characterization of gender differences in spatial ability: A meta-analysis.' *Child Development* 56, pp. 1479-1498.

Lohman, D.F., (1979a): 'Spatial Ability: a Review and Reanalysis of the Correlational Literature.' *Technical Report n 8. Aptitude Research Project*. School of Education, Stanford University, October 1979.

Lohman, D.F., (1979b): 'Spatial Ability: Individual Differences in Speed and Level.' *Technical Report n 9. Aptitude Research Project*. School of Education, Stanford University, October 1979.

Maines, D.R., (1985): 'Preliminary notes on a theory of informal barriers for women in mathematics.' en Fennema, E., (Ed.), (1985): 'Explaining sex-related differences in mathematics: Theoretical models.' *Educational Studies in Mathe-*

*matics* 16(3), pp. 314–317.

Marriott, P., (1978): 'Fractions, now you see them, now yo don't' en D. Williams (Ed.), *Learning and applying mathematics*. Australian Association of Mathematics Teachers, Melbourne, Australia.

Martin, L., (Ed.), (1976a): *Space and Geometry*. ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio.

Martin, L., (1976b): 'The Erlanger Program as a model of the child's construction of space' en A. R. Osborne (Ed.) *Models for learning mathematics. Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio. ERIC/SMEAC.

McGee, M.G., (1979a): 'Human Spatial Abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences.' *Psychological Bulletin* 86, pp. 889–918.

Metzler, J., Shepard, R.N., (1974): 'Transformational studies of the internal representation of three-dimensional objects' en R.L. Solso (Ed.) *Theories in cognitive psychology: The Loyola Symposium*. Erlbaum, Ptomac, MD. pp. 147–201.

Mitchelmore, M.C., (1980a): 'Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures.' *Journal for Research in Mathematics Education*, Març 1980, 11, pp. 83–93.

Mitchelmore, M. C., (1980b): 'Three-dimensional geometrical drawing in three cultures.' *Educational Studies in Mathematics* 11, pp. 205–216.

Mitchelmore, M.C., (1983): 'Geometry and spatial learning: Some lessons from a Jamaican experience.' *For the Learning of Mathematics* 3(3). pp. 2–7.

Mukhopadhyay, S., (1987): 'On the drawing of solid stimuli: The scaling of responses of rural indians from specific occupational backgrounds.' Paper presented as a poster at the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Montreal, Montreal, Canada.

Nash , S.C., (1979): 'Sex role as a mediator of intellectual functioning' en M.A. Witting i A. C. Petersen, (Eds.), *Sex-related differences in intellectual functioning: Developmental issues*. Academic Press, New York. ppp. 263–302.

Parzysz, B., (1988): "'Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures.' *Educational Studies in Mathematics* 19(1),

pp.79-92.

Parzysz, B., (1991): 'Representation of space and students' conceptions at high school level.' *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 575-593.

Pattison, P., Grieve, N., (1984): 'Do spatial skills contribute to sex differences in different types of mathematics problems?' *Journal of Educational Psychology* 76, pp. 678-689.

Piaget, J., Inhelder, B., (1948): *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Presses Universitaires de France. Paris.

Piaget, J., Inhelder, B., (1966): *L'image mentale chez l'enfant*. Presses Universitaires de France. Paris.

Piaget, J., Inhelder, B., (1971): *Mental imagery in the Child*. Basic Books, New York, USA.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A., (1948): *La géométrie spontanée de l'enfant*. Presses Universitaires de France. Paris.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A., (1966): *La psychologie de l'enfant*. Presses Universitaires de France. Paris.

Presmeg, N.C., (1985): *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation*. Unpublished PhD Dissertation. University of Cambridge.

Presmeg N.C., (1986a): 'Visualization in high school mathematics.' *For the Learning of Mathematics* 6(3), pp. 43-44.

Presmeg N.C., (1986b): 'Visualisation and mathematical giftedness.' *Educational Studies in Mathematics* 17(3), pp. 297-311.

Puchalska, E., Gaulin, C., (1985): 'Pour une variété d'approches aux représentations graphiques des formes et des relations à trois dimensions.' *Séminaires du CIRADE sur la Représentation*, 8 Nov 1985, Centre Interdisciplinaire de Recherches sur l'Apprentissage et le Développement en Education, Université de Québec à Montréal.

Rheingold, H.L., Cook, K.V., (1975): 'The content of boys' and girls' rooms as an index of parents behavior.' *Child Development* **46**, pp. 459-463.

Sheckels, M.P., Eliot, J., (1983): 'Preference and solution patterns in Mathematics performance.' *Perceptual and Motor Skills* **57**, pp. 811-816.

Shepard, R.N., Metzler, J., (1971): 'Mental rotation of three-dimensional objects.' *Science* **171**, pp. 701-703.

Shuard, H.B., (1982): 'Differences in mathematical performance between boys and girls.' en W.H. Crockroft *Mathematics counts*. Her Majesty's Stationery Office, London.

Smith, I.M., (1964): *Spatial ability: Its educational and social significance*. University of London Press, Londres.

Smith, I.M., (1982): 'Sex Differences in Spatial test Performance.' *An International Directory of Spatial Tests* NFER-NELSON, pp. 448-451.

Spearman, C.E., (1927): *The Abilities of Man: Their Nature and Measurement*. Macmillan, London.

Suwarsono, S., (1982): *Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seventh Grade Students*. Unpubl. Ph. D. Dissertation, Monash University, Melbourne.

Tapley, S.M., Bryden, M.P., (1977): 'An investigation of sex differences in spatial ability: Mental rotation of three-dimensional objects.' *Canadian Journal of Psychology* **31**, pp. 122-130.

Tartre, L.A., (1990): 'Spatial orientation skill and mathematical problem solving.' *Journal for Research in Mathematics Education* **21**(3), pp. 216-229.

Thurstone, L.L., (1938): 'Primary Mental Abilities.' *Psychometric Monographs* **1**, pp. 1-121.

Van Leeuwen, M.S., (1978): 'A cross-cultural examination of psychological differentiation in males and females.' *International Journal of Psychology* **13** pp. 87.

Vergnaud, G., (1986): 'Conceptualisation de l'espace et mathématiques.' *Technologies, Idéologies, Pratiques*, V/4, VI/1, pp. 91-94.

Wattanawaha, N., (1977): *Spatial Ability and Sex Differences in Performance on Spatial Tasks*. M. Ed. Thesis, Monash University, Melbourne.

Wirszup, I., (1976): 'Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry.' J.L. Martin, (Ed.), *Space and Geometry: Papers from a Research Workshop*. ERIC, Columbus, Ohio.

Witkin, H.A., Dyk, R.B., Faterson, G.E., Goodenough, D.R., Karp, S. A., (1962): *Psychological Differentiation*, Willey, New York.

## Capítol 3

# Definicions i hipòtesis del problema previ.

En aquest capítol, presentem les definicions dels termes implicats i plantegem les hipòtesis en relació al *problema previ*.

### 3.1 Definicions per al problema previ.

En aquesta primera secció, presentem la conceptualització del terme habilitat partint del sentit establert per Krutetskii, matisant-ne alguns aspectes. Presentem la diferenciació de les diferents interpretacions del terme habilitat, en relació als matisos de la llengua anglesa. Proposem interpretar el terme habilitat —*ability*— en el sentit de potencialitat, capacitat o aptitud per a dur a terme una determinada activitat, i el terme habilitat —*skill*— en el sentit de tècnica o experiència necessària per a dur a terme una activitat correctament. Expliquem que la nostra proposta de definició no té en consideració, al menys d'entrada, quin tipus de procés cognitiu ha de tenir lloc per a que puguem considerar una habilitat com espacial, i definim els termes que s'utilitzen al llarg de la recerca: *habilitat d'interpretació d'informació espacial*, *habilitat de comunicació d'informació espacial*, *habilitat de processament espacial* i *habilitat d'orientació espacial*. És especialment important tenir present la definició que proposem d'habilitat de processament espacial ja que entenem per *habilitat de processament espacial*, **PE**, l'habilitat necessària per a dur a terme el conjunt d'operacions mentals per a resoldre una activitat espacial. Inclourà no només l'habilitat per a imaginar —evocació conscient de la imatgeria visual— els objectes, les relacions i les transformacions espacials sinó també per a codificar-los de manera verbal o mixta i l'habilitat no només per a manipular les imatges mentals dels objectes, les relacions i les transformacions espacials sinó

també per a resoldre tasques espacials per processos no únicament visuals.

### 3.1.1 Habilitat.

Al llarg de tot el treball interpretarem el terme habilitat en el sentit establert per Krutetskii (1976) matisant-ne alguns aspectes. Partim de la seva proposta de considerar habilitat com a capacitat, potencialitat o aptitud per a dur a terme una activitat. Segons això, habilitat és sempre habilitat en un determinat tipus d'activitat i per tant només es posen de manifest en l'anàlisi d'una activitat específica. A més, habilitat és un concepte dinàmic ja que no només es manifesta i existeix en tant en quant hi ha activitat sinó que també es desenvolupa en l'activitat.

La matisació la introduïm pel que fa a la diferenciació dels termes habilitat —*ability*— i habilitat —*skill*. Tot i que ens sembla difícil operar amb les caracteritzacions d'aquests dos termes proposades per aquest autor, ens adherim a la seva proposta de considerar que l'anàlisi de l'habilitat —*ability*— comporta l'anàlisi d'una activitat des del punt de vista de les característiques psicològiques individuals que en permeten la realització.

En el nostre treball, pel que fa a la diferenciació dels termes cal fer una reflexió respecte els matisos de la llengua anglesa. En aquest sentit interpretarem el terme habilitat —*ability*— en el sentit de potencialitat, capacitat o aptitud per a dur a terme una determinada activitat i el terme habilitat —*skill*— en el sentit de tècnica o experiència necessària per a dur a terme una activitat correctament.

El terme habilitat, tot i que moltes vegades ens hi referirem en singular, té per a nosaltres un sentit plural. En primer lloc, i a l'igual que Krutetskii, quan ens hi referim no les entendrem com a accions o elements individualitzats de l'activitat, sinó de manera global com a tots aquells aspectes que faciliten o afavoreixen la resolució d'una determinada tasca. A més, estenem la proposta d'aquest autor ja que interpretem les habilitats no només des del punt de vista de les característiques individuals dels processos mentals que permeten la resolució de la tasca sinó que en el nostre estudi ens interessa també en certa manera l'anàlisi de les capacitats tècniques que fan possible la manifestació d'aquest resultat.

És per això que tot i que diferenciem els conceptes, creiem que en la nostra recerca no es poden deslligar. Pretenem analitzar els aprenentatges dels alumnes en les tasques espacials i un dels nostres objectes d'estudi és el contingut concret observable del resultat d'una activitat i per a la manifestació d'aquest són necessàries habilitats tècniques. La resolució d'una activitat determinada pot comportar processos que requereixen una mateixa habilitat —*ability*— i diverses habilitats —*skill* per a ésser resoltes.

Intentarem aclarir-ho amb un exemple: Podem proposar a l'alumne que construeixi, expliqui o dibuixi un objecte donat tal com es veuria després de fer-lo girar 180 sobre la seva base. Aquesta activitat la podem proposar partint del propi objecte, d'una representació o d'una descripció del mateix. En aquests exemples l'activitat geomètrica proposada és sempre la mateixa —girar 180 un objecte— i per tant, al menys a priori, els processos mentals implicats poden estudiar-se conjuntament i comparativament; des d'aquest punt de vista podem considerar que hi ha una mateixa habilitat de processament espacial implicada. Per altra part, si l'obtenció de la informació necessària per a la resolució de la tasca pot fer-se a partir de la interpretació de l'objecte, de la representació o de la descripció sembla clar que les habilitats de caire més tècnic implicades seran diferents i el mateix és pot dir segons el tipus de presentació exigida per a la resposta. Segons això semblaria fàcil destriar les habilitats —*ability*— de les habilitats —*skill*— implicades en una determinada tasca. Malgrat aquest fet, a partir de les investigacions i de la pròpia experimentació, tenim constància de que els processos de resolució implicats en una activitat depenen tant del tipus d'informació donada com del tipus de resposta requerida ja que la forma de la informació donada pot condicionar el tipus de processament escollit. Així mateix la interpretació o producció d'informació espacial si no és una lectura directa pot necessitar d'habilitats de processament espacial. En certa manera, podríem dir que l'estudi d'una habilitat —*ability*— concreta ve determinat per les característiques de la tasca a dur a terme, mentre que la modificació de les condicions i formes de l'estímul i de la presentació de la resposta determinen les habilitats —*skill*— implicades. Cal fer notar, a més, que la nostra interpretació del terme habilitat — *skill*— difereix de la d'aquells autors que fan servir el terme per a referir-se a destreses mecàniques que no impliquen cap procés de raonament en la seva aplicació. Per tot això no és tant senzill com sembla estudiar separatament aquests dos aspectes. A més, i des del punt de vista dels aprenentatges, aquest lligam és molt més fort si es té en consideració que el desenvolupament de les unes i les altres es pot afavorir conjuntament.

És en aquest sentit que tot i que considerem habilitat —*ability*— i habilitat —*skill*— com a dos aspectes diferents els dos són objecte d'estudi en el nostre treball. Essencialment ens interessa el primer aspecte i el segon en tant en quant condiciona el primer. Segons això seran objecte d'estudi les habilitats —*ability*— implicades en un tipus concret de tasques espacials i les habilitats —*skill*— en tant en quant les condicionin. És en aquest sentit que és objectiu de la recerca l'estudi de com la presentació de la informació espacial pot condicionar els errors, les dificultats i les estratègies de resolució i el mateix podríem dir per al tipus de representació espacial requerida per a la presentació del resultat de l'activitat. Per raons semblants no és objectiu de la nostra recerca estudiar, per exemple, els diferents estadis en l'evolució de les representacions dels objectes en tres dimensions. Al llarg del



treball anomenarem els dos aspectes indistintament habilitat, especificant a quin aspecte ens referim quan ho creguem necessari.

### 3.1.2 Habilitats espacials.

Igual que molts autors que ens han precedit en aquest tema considerem impossible definir el terme habilitat espacial com a concepte únic ja que és difícil abraçar sota una única conceptualització tots els processos intel·lectuals involucrats en l'enorme camp de tasques espacials existents.

En aquest sentit direm que habilitat espacial, en general, és habilitat per als conceptes espacials i per operar amb formes espacials. Del fet que interpretem el terme habilitat des d'un punt de vista plural entendrem per habilitat espacial el conjunt d'habilitats necessàries per a resoldre tasques espacials.

Una primera observació a tenir en compte és que la nostra proposta de definició no té en consideració, al menys d'entrada, quin tipus de procés cognitiu ha de tenir lloc per a que puguem considerar una habilitat espacial. Seran habilitats espacials aquelles necessàries per a resoldre una tasca espacial; serà en el moment d'estudiar les estratègies, les dificultats i els errors manifestats pels alumnes que ens interessarà estudiar el tipus de processament té lloc per a la resolució d'una mateixa tasca.

A l'hora d'estructurar les diverses tipologies d'habilitats espacials tenim en compte dos tipus de consideracions. En primer lloc la reflexió ja feta de que les habilitats espacials s'estableixen a partir del desenvolupament d'una activitat espacial. En segon lloc, el fet que el progrés i el rendiment en el desenvolupament d'una activitat depèn d'un conjunt d'habilitats, fa que considerem no només les habilitats de processament sinó també les habilitats —de caire en certa manera més tècnic— necessàries per a la interpretació i la comunicació.

En segon lloc, de la lectura dels treballs relacionats amb aquest camp es desprèn que els problemes amb que es troben els alumnes a l'hora de resoldre tasques espacials són de tres tipus: dificultats per a interpretar la informació donada, dificultats a produir informació en relació als objectes les relacions i les transformacions espacials i dificultats per a processar les imatges mentals.

Per aquestes raons, tot i que és difícil d'establir-ne els límits considerarem, a priori, tres tipus diferents d'habilitats espacials:

- Habilitat(s) d'interpretació d'informació espacial: **IIE**.
- Habilitat(s) de comunicació d'informació espacial: **CIE**.
- Habilitat(s) de processament espacial: **PE**.

Direm *habilitat d'interpretació d'informació espacial*, **IIE**, a l'habilitat necessària per a la comprensió no només de les descripcions gràfiques o per models dels fenòmens i les relacions espacials, sinó també de les verbals i les mixtes i del vocabulari espacial utilitzat en el treball geomètric.

L'habilitat d'interpretació d'informació espacial la definim partint del concepte IFI introduït per Bishop (1980b, 1983) restringint-la als aspectes que particularment ens interessin, és a dir considerant-la en relació als processos de resolució de tasques de geometria de l'espai, i oblidant els aspectes de comprensió de la geometrització de relacions abstractes.

A més de limitar-la al camp de les transformacions espacials, la modifica en d'altres aspectes ampliant-ne el camp de contingut ja que no parlem d'interpretació d'informació només figurativa sinó que inclou informacions verbals i mixtes.

Direm *habilitat de comunicació d'informació espacial*, **CIE**, a l'habilitat necessària per a la descripció dels objectes, de les relacions i de les transformacions espacials essent el contingut d'aquesta comunicació figuratiu, verbal o mixt.

Es habilitat no només per a dibuixar o representar objectes, relacions i transformacions espacials, sinó també per a descriure'ls i donar-ne informació a través de mitjans verbals, simbòlics o mixtes. En aquest sentit està molt relacionada amb les reflexions de Gaulin (1985) en que considera no només les descripcions gràfiques dels fenòmens i les relacions espacials sinó també les descripcions verbals juntament amb mixtes. Per contra, l'habilitat definida en aquest treball, exclou les habilitats implicades en la representació gràfica d'idees abstractes.

Aquesta habilitat amplia l'habilitat *graphicacy* definida per Balchin (1972) i també l'habilitat de representació *ability to represent three-dimensional configurations* proposada per Mitchelmore (1980a, 1980b) en tant en quant considera no únicament la comunicació d'informació espacial a través de representacions figuratives, sinó que inclou la comunicació d'informació amb d'altres mitjans com poden ser mots o nombres, aspectes que Balchin considerava inclosos en d'altres habilitats diferents de la *graphicacy*.

L'habilitat de comunicació d'informació espacial així definida, modifica l'habilitat *representing* proposada per Bishop (1974) i l'habilitat *graphicacy* proposada per Puchalska i Gaulin (1985) en dos sentits. Les restringeix en tant que no considera la representació d'idees i relacions abstractes o no espacials i les amplia en tant que el medi de representació no és únicament gràfic sinó també verbal.

Direm *habilitat de processament espacial*, **PE**, a l'habilitat necessària per a dur a terme el conjunt d'operacions mentals per a resoldre una activitat espacial. Inclourà no només l'habilitat per a imaginar —evocació conscient de la imatgeria visual— els objectes, les relacions i les transformacions espacials sinó també per a

codificar-los de manera verbal o mixta. Inclourà també l'habilitat no només per a manipular les imatges mentals dels objectes, les relacions i les transformacions espacials sinó també per a resoldre tasques espacials per processos no únicament visuals.

Definim l'habilitat de processament espacial d'aquesta manera per raons fonamentades: Com a primera consideració cal tenir en compte que la majoria —si no tots— dels tests amb items, poden ésser resolts de més d'una manera i, a més, això és especialment cert per als tests espacials. Partim de la hipòtesi de que per a respondre el tipus de preguntes a que fan referència els tests estàndard d'habilitat espacial les estratègies cognitives utilitzades són molt diverses. Aquesta diversitat inclou des del processament purament visual dels objectes i les relacions espacials, on la imatgeria visual és la base del procés cognitiu, fins a processament no visuals, on la imatgeria no és en absolut imprescindible i es treballa a partir de codis verbals, passant per estratègies mixtes on les imatges visuals estan lligades a codis verbals.

Direm habilitat de processament espacial i no de processament visual ja que ens estem referint a l'habilitat per a resoldre tasques espacials i a priori no ens interessa diferenciar si son resoltes per un processament visual o verbal. Les estratègies de processament utilitzades per a la resolució de les tasques s'estudiarà en el problema principal de la recerca.

De totes les habilitats definides en el camp de les habilitats espacials, amb noms més o menys semblants, la conceptualització més propera a la nostra és la proposada per a l'habilitat VP de Bishop (1980b, 1983). En la revisió de recerques del capítol anterior proposàvem considerar com dues habilitats diferents, encara que estretament lligades, els dos aspectes de l'habilitat VP. D'una banda, l'habilitat de processar visualment objectes i relacions espacials que anomenàvem VP-S i, de l'altra, l'habilitat de resoldre problemes abstractes visualment VP-A, enteses respectivament com el segon i primer punt de la proposta de VP de Bishop. En aquest sentit, la definició d'habilitat de processament espacial modifica el que hem anomenat VP-S en tant que proposem manipular les imatges mentals dels objectes, les relacions i les transformacions espacials, considerant que aquestes imatges mentals no han de ser necessàriament imatges visuals.

En certa manera podríem considerar aquest aspecte de VP com un cas particular de l'habilitat de processament espacial que nosaltres proposem considerant que aquest processament és donés a través d'estratègies visuals.

Tot i que l'habilitat PE és de caire personal mentre que les habilitats IIE i CIE podríem dir que són de caire més cultural, i que l'habilitat PE té a veure amb les característiques de la tasca i les IIE i CIE amb la forma de l'estímul donat i la requerida per a la resposta respectivament, les tres habilitats IIE, CIE i PE així

establertes no es poden considerar totalment separades.

Així l'habilitat de processar espacialment ens sembla necessària en l'acte de percebre i interpretar un estímul visual i suposem que intervé en major grau com més complexes són els estímuls presentats. D'altra banda se'ns fa difícil suposar que es pugui produir cap procés espacial si abans no té lloc la interpretació de la informació donada. A més difícilment podem valorar el resultat del processament espacial sense que d'alguna manera s'ens comuniquin aquest resultats. A més, tot i que les considerem habilitats diferents, creiem que aquestes habilitats tenen una certa interdependència en el seu desenvolupament.

### 3.1.3 Habilitat d'orientació espacial.

Direm *habilitat d'orientació espacial*, OE, a l'habilitat de processament espacial necessària per a resoldre aquelles tasques espacials on la transformació geomètrica sigui una rotació a l'espai. Serà doncs un cas concret d'habilitat de processament espacial on la transformació espacial serà una rotació.

En primer lloc, i amb l'objectiu d'aclarir possibles malentesos, cal diferenciar el concepte que es proposa en aquesta recerca del que es presenta amb el mateix nom en les recerques dins del camp de l'anàlisi factorial. Dins del camp de l'anàlisi factorial es poden identificar diferents factors espacials que apareixen —amb petites modificacions— en el treball de molts autors. Aquests factors són essencialment dos l'orientació espacial i la visualització. Les tasques dels tests considerats vàlids per a mesurar el factor orientació espacial necessiten per a ser resoltes determinar l'aspecte que tindria vist des d'un altre punt de vista l'estímul donat. Sovint aquests tests contenen una component de discriminació dreta-esquerra. En alguns casos, la característica principal dels tests que defineixen el factor d'orientació espacial és el fet de que el propi subjecte ha d'imaginar-se implicat en el procés de resolució, imaginant-se en la situació fent una valoració o prendre una decisió referent a l'objecte estímul des d'aquesta perspectiva. En d'altres, el mateix factor ha estat definit també com l'habilitat per a girar o rotar una figura donada —o una part d'aquesta figura— en un pla —o al voltant d'un eix imaginari— per a determinar si correspon a una altra figura en aquest mateix pla. D'altres l'interpreten com la comprensió global d'un estímul visual i la capacitat de no confondre's davant de les diferents possibles orientacions d'un mateix estímul visual. A aquestes variacions en la definició cal afegir-hi el fet de que els tests elaborats per a mesurar-lo tant es poden resoldre rotant mentalment l'estímul com canviant-se de lloc el subjecte imaginari, o no fent ni una cosa ni l'altra. Per tot això, hem preferit definir l'habilitat d'orientació espacial com l'habilitat per a resoldre les tasques geomètriques en relació a les rotacions sense entrar en la discussió de com té lloc

el procés de resolució. En l'estudi del problema principal i a l'hora d'analitzar les estratègies dels alumnes a l'hora de dur a terme aquest tipus de tasques tornarem a considerar aquests aspectes.

## 3.2 Hipotesis per al problema previ.

En aquesta secció establím les hipòtesis i limitacions del *problema previ*. Recordem, en primer lloc, que hem establert com a *problema previ*:

Identificar tipus d'errors manifestats en les activitats del qüestionari on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai i associar-los, quan sigui possible, a grups d'incidència.

En aquesta part de la recerca, ens plantegem les següents qüestions:

*Les diferències de rendiment entre grups d'incidència detectades en la totalitat del qüestionari, es reflecteixen en les qüestions on la tasca és una rotació a l'espai? És a dir, les variables sexe i escolarització produeixen poblacions estadísticament diferents en les qüestions on la transformació geomètrica proposada és una rotació?*

*Es poden identificar tipus d'errors manifestats en les qüestions de rotació del qüestionari, i associar-los a grups d'incidència?*

Segons això, plantegem com **objectius del problema previ** els següents:

- 1. Veure si les diferències de rendiment entre grups d'incidència, detectades en la totalitat del qüestionari, es reflecteixen en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai.
- 2. Detectar els tipus d'errors més freqüents en el grup total i per grups d'incidència.
- 3. Associar, quan sigui possible, tipus d'errors a grups d'incidència.

### 3.2.1 Limitacions del problema previ.

A l'hora de planterjar-nos l'estudi del problema previ, com a primera consideració cal tenir en compte que la majoria dels tests amb ítems poden ésser resolts de més d'una manera i això és especialment cert per als tests espacials. Així Lohman (1979a) recull el fet que els individus declaren utilitzar diferents mètodes en la solució d'un mateix test.

El mateix autor (Lohman, 1979b) corrobora el que diu Krutetskii (1976) a l'afirmar que el més probable és que alguns individus resolen alguns dels ítems dels tests espacials fent servir estratègies espacials, d'altres estratègies analítico-verbals, mentre que la majoria fan servir

Aquestes reflexions juntament amb el fet que és extraordinàriament difícil elaborar tasques espacials que no puguin resoldre's a través d'alguna estratègia no espacial tal com ens fa notar Lohman (1979b) fa que establim una **primera limitació** per al problema previ:

- Degut al plantejament del problema i de l'instrument utilitzat per a la seva solució es desprèn que en l'estudi del problema previ ens haurem de limitar a l'estudi del rendiment en els aspectes de rotació a l'espai avaluats a través del qüestionari, sense pretendre analitzar les estratègies utilitzades per a la resolució de les tasques.

Una segona limitació sorgeix del fet de que treballem amb el rendiment manifestat pels alumnes en tasques espacials que fa que tinguem present el fet de que el rendiment individual en els tests espacials pot quedar confós per diferències en l'habilitat d'extreure informació d'esquemes, dibuixos o fotografies. Així Bishop (1979, 1983) observa diferències en la interpretació d'informació figurativa i afirma que les representacions gràfiques no són de manera automàtica i sota cap aspecte medís de comunicació amb èxit. Així queda establerta una **segona limitació** per al segon problema:

- No podem separar els aspectes relacionats amb l'habilitat d'orientació espacial considerada com a cas particular d'habilitat de processament espacial dels relacionats amb les habilitats espacials de caire general que hi van lligades ja que treballem únicament amb la resposta final i no amb el procés.

### 3.2.2 Hipòtesis referents al primer objectiu.

Cal recordar que en el moment d'establir les variables que podrien determinar una diferència de rendiment significativa a l'hora d'administrar el qüestionari vàrem

tenir en compte diversos factors: sexe, escolarització i mà amb que escriuen. Algunes d'aquestes variables varen produir grups de població amb rendiments significativament millors que els grups dicotòmics corresponents, d'altres no. La primera qüestió que s'ens planteja ara és determinar si es reproduïen aquestes diferències de rendiment a nivell de les qüestions on la tasca proposada és una rotació a l'espai. Una segona qüestió plantejada és veure si és possible identificar tipus d'errors manifestats en les qüestions de rotació del qüestionari i associar-los a grups d'incidència. A partir d'aquí plantejem les hipòtesis per al problema previ.

El primer objectiu establert pretèn *veure si les diferències de rendiment entre grups d'incidència detectades en la totalitat del qüestionari es reflecteixen en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació*, fet que ens porta a establir les següents hipòtesis:

- Les variables intervinents que donen lloc a diferències de rendiment en la totalitat del qüestionari determinen també diferència de rendiment en les qüestions d'orientació. Hi ha diferències significatives de rendiment en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació entre els grups d'incidència establerts per les diferents variables intervinents.
  - La variable sexe dona lloc a diferències de rendiment en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació.
  - La variable escolarització dona lloc a diferències de rendiment en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació.
  - La mà amb que escriuen dona lloc a diferències de rendiment en les qüestions on la transformació geomètrica és una rotació.
- Les diferències de rendiment entre grups d'incidència constatades a la totalitat del qüestionari es reproduïen en el mateix sentit en les qüestions on l'activitat requereix una rotació.
  - Pel que fa a la variable sexe, els nois responen significativament millor que les noies les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai.
  - Pel que fa a la variable escolaritat, els alumnes de BUP responen significativament millor que els de FP i EGB les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai, essent les respostes d'aquests dos grups equivalents.
  - Pel que fa a la variable mà amb que escriuen, els dretans responen significativament millor que els esquerrans les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai.

### 3.2.3 Hipòtesis referents al segon objectiu.

Com a segon objectiu pretenem *detectar els tipus de errors més freqüents en el grup total i pels grups d'incidència*, fet que ens porta a establir les hipòtesis següents

- Es poden tipificar els errors més freqüents per a les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai.
  - Per a cadascuna de les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai es poden tipificar els errors més freqüents per a la totalitat de la mostra.
  - Per a cadascuna de les qüestions relacionades amb rotacions a l'espai es poden tipificar els errors més freqüents per als diferents grups d'incidència.

### 3.2.4 Hipòtesis referents al tercer objectiu.

El tercer objectiu establert és *associar, quan sigui possible, tipus d'errors a grups d'incidència* a partir del qual establím la següent hipòtesis:

- Es poden associar determinats errors a grups d'incidència.

### Referències bibliogràfiques del capítol 3.

Balchin, W.G.V., (1972): 'Graphicacy.' *Geography* 57(3).

Bishop, A.J., (1974): 'Visual Mathematics.' *Proceedings of the ICMI-IDM Regional Conference on the Teaching of Geometry*, IDM, Bielefeld, Alemanya, pp. 165-189.

Bishop, A.J., (1979): 'Visualizing and Mathematics in a pre-technological culture.' *Educational Studies in Mathematics* 10, pp. 136-146.

Bishop, A.J., (1980b): *Spatial and Mathematical Abilities —A reconciliation*. Comunicació a Conference on Mathematical Abilities at the University of Georgia, Athens, June 12-14, 1980.

Bishop, A.J., (1983): 'Space and Geometry' en R. Lesh, M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA, pp. 175-203.



Gaulin, C., (1985): 'The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations' in *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*. Vol II: Plenary Addresses and Invited Papers, pp. 53-71.

Krutetskii, V. A., (1976): *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press, Chicago.

Lohman, D.F., (1979a): 'Spatial Ability: a Review and Reanalysis of the Correlational Literature.' in *Technical Report n 8. Aptitude Research Project*. School of Education, Stanford University, Oct. 1979.

Lohman, D. F., (1979b): 'Spatial Ability: Individual Differences in Speed and Level' en *Technical Report n. 9, Aptitude Research Project*. School of Education, Stanford University. Oct. 1979.

Mitchelmore, M.C., (1980a): 'Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures.' *Journal for Research in Mathematics Education*, March 1980, **11**, pp. 83-93.

Mitchelmore, M.C., (1980b): 'Three-dimensional geometrical drawing in three cultures.' *Educational Studies in Mathematics* **11**, pp. 205-216.

Puchalska, E., Gaulin, C., (1985): 'Pour une variété d'approches aux représentations graphiques des formes et des relations à trois dimensions.' *Séminaires du CIRADE sur la Représentation*, 8 Nov 1985, Centre Interdisciplinaire de Recherches sur l'Apprentissage et le Développement en Éducation, Université de Québec à Montréal.

## Capítol 4

# Metodologia del problema previ.

En aquest capítol, presentem la metodologia utilitzada per a la resolució del *problema previ*.

En la primera secció, justifiquem la utilització d'una metodologia qualitativa. La segona secció, està organitzada en dos apartats ja que l'instrument utilitzat per a la resolució del *problema previ* és part d'un qüestionari elaborat i validat amb anterioritat. El primer apartat, fa referència a l'instrument considerat globalment, i presenta el procés d'elaboració i validació de tot el qüestionari, i el segon, fa referència concretament a l'instrument del *problema previ*, és a dir, a les qüestions on la transformació geomètrica proposada és una rotació a l'espai fent-ne una anàlisi des del punt de vista formal i de validesa. La tercera secció, presenta les característiques de la mostra i el procés de recollida de dades. I la quarta secció, la darrera d'aquest capítol, presenta el tractament estadístic de les dades.

### 4.1 Justificació de la metodologia.

En aquest apartat, es justifica l'elecció d'un corrent metodològic, entre els diversos existents, per a la resolució del *problema previ*. Aquesta justificació es fa a partir de les recomanacions proposades en les recerques existents sobre quin tipus de metodologia és l'apropiat per a la resolució de les qüestions que tenim plantejades.

Són moltes i molt diverses les opcions a considerar pel que fa a la metodologia de recerca en aquest camp. Per aquest motiu, cal deixar clar, d'entrada, que l'elecció d'una metodologia o d'una altra no respon a una presa de postura teòrica general, sinó a la necessitat de resoldre un problema concret.

Aquest fet és especialment important si tenim en consideració l'advertència que ens fa Bishop (1980a) (p. 266):

... there are several different approaches to research at the mathematics/spatial interface and that it is a rich field for mathematics educators to study, provided that we are constantly aware of the dangers of becoming embedded in one research tradition.

Essencialment, hi ha dues maneres d'enfrontar l'anàlisi d'una habilitat: juntament amb la utilització de tests i diferents mètodes estadístics i matemàtics de processar els resultats, trobem també recursos basats en l'anàlisi, més o menys en profunditat d'exemples individuals, en combinació amb informació biogràfica i anàlisi dels productes d'activitats. Per a la resolució del problema previ optem per situar-nos dins del corrent metodològic primerament esmentat.

Per centrar-nos cal recordar, d'entrada, quin és el problema previ per contraposició al *problema principal*. El *problema principal* plantejat en la recerca pretén, en primer lloc, analitzar les estratègies, les dificultats i els errors dels alumnes manifestats en els aprenentatges, tant de l'habilitat orientació espacial, com de les habilitats espacials de caire general lligades als processos de resolució; seguidament, associar quan sigui possible, les tipologies establertes a grups d'incidència.

El que hem anomenat *problema previ* queda establert de la següent manera: *identificar tipus d'errors manifestats en les activitats del qüestionari on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai i associar-los, quan sigui possible, a grups d'incidència*. i la qüestió fonamental està directament relacionada amb les possibles diferències de rendiment entre grups d'incidència.

Sembla clar que si el que pretenem és comparar diferències de rendiment, caldrà fer rendible i operativa aquesta comparació establint prèviament errors plausibles, i estudiant les respostes dels individus des del punt de vista del paradigma quantitatiu.

Insistim, una vegada més, que la decisió de basar-nos en aquest tipus de metodologia, més que a la situació personal dins del paradigma quantitatiu, respon a qüestions pràctiques i de cap manera implica la renúncia al que és qualitatiu, com es podrà veure en el desenvolupament del *problema principal* de la recerca.

Dins del paradigma quantitatiu, l'instrument per a la resolució del problema previ és un test de resposta múltiple. Encara que la majoria de tests espacials escrits són de resposta múltiple, alguns fan servir mètodes de resposta oberta o requereixen que l'alumne faci dibuixos. La selecció d'una opció entre les d'una resposta múltiple, té avantatges evidents pel que fa a economia en tots els sentits, però cal considerar si aquests avantatges compensen la quantitat d'informació que es pot obtenir per d'altres mètodes. En el treball que ens ocupa creiem que avantatges i inconvenients s'equilibren, tal com argumentem a continuació.

Tot i que podríem haver-nos plantejat la identificació de diferències en els errors

a partir de problemes oberts per a ser resolts pels alumnes, ens hem decidit a treballar a partir d'un qüestionari de resposta múltiple per diverses raons. En primer lloc, partim d'una recerca prèvia basada en l'anàlisi del rendiment en les tasques de geometria espacial que ens ha permès determinar grups d'incidència. L'instrument elaborat per a dur-la a terme contenia, intencionadament, qüestions relacionades amb les tasques d'orientació a l'espai per a ser analitzades des del punt de vista de la recerca actual. A més, el fet d'englobar les qüestions d'orientació a l'espai dins d'un qüestionari més ampli, ha facilitat la selecció de la mostra per a desenvolupar la recerca qualitativa del *problema principal* tal i com s'explica més endavant al presentar la metodologia utilitzada per a la seva resolució.

L'existència prèvia d'un instrument vàlid, juntament amb la necessitat d'una justificació empírica abans d'atacar el problema fonamental de la recerca, ens ha portat a seguir en la línia escollida prèviament, a fi i efecte de rendibilitzar esforços. Des del nostre punt de vista, el plantejament del *problema principal* de la recerca, hauria quedat poc justificat, si abans d'estudiar pautes de comportament i diferències individuals en el desenvolupament de tasques d'orientació espacial, no és verificades empíricament, a més de teòricament, la intuïció que existeixen diferències, com a mínim pel que fa als rendiments en el resultat de les qüestions.

El fet que, a nivell teòric, és acceptat emmarcar una recerca en un paradigma quantitatiu si el que es pretén és mesurar rendiments, fa vàlida la nostra elecció des d'aquest punt de vista. Igualment, han estat donats criteris que justifiquen la nostra elecció per motius de rendibilitat i operativitat pràctica.

Les recerques dels analistes de factors ens han servit com a model per a l'elaboració de l'instrument per a la resolució de les qüestions plantejades al *problema previ*. Les investigacions en aquest camp s'ocupen essencialment de l'anàlisi de factors intel·lectuals i de les seves relacions, dins la tradició psicomètrica, basada en la valoració objectiva i la quantificació de les habilitats intel·lectuals. Els treballs en aquest camp no fan cap referència als individus, i rarament intenten esbrinar com el subjecte arriba a una solució d'un problema particular. Malgrat tot, hi ha hagut, i encara hi ha, molts aspectes que es poden recollir del seu treball. En primer lloc, han produït molts tests que estan a l'abast d'altres investigadors, no només com a tests, sinó també com a exemples d'activitats espacials que poden ser utilitzades en tests com a eines per a elaborar conceptes teòrics, i també, com a activitats per a desenvolupar les habilitats espacials.

És en aquest sentit —utilitzant els tests i tasques que existeixen, i les propostes de classificació d'habilitats que ens proposen—, que els models de qüestionaris espacials existents han estat de gran utilitat per a la resolució del *problema previ*.

De totes maneres, l'elecció d'un instrument i no un altre comporta limitacions

per a la recerca. En aquest sentit, cal dir que els tests no s'han de sobreestimar considerant-los com a mesures operatives automàtiques de la ment. En el nostre treball, els considerem una primera orientació per al coneixement d'individus dels quals no en sabem res més, i ens són útils en tant en quant ens permeten complementar i obtenir observacions objectives i comparables.

A més, els tests que defineixen de manera consistent els principals factors espacials representen només una visió limitada del domini del pensament visual ja que en certa mesura tots requereixen habilitats analítiques de resolució de problemes. Els tests espacials es poden convertir en analítics perquè els individus utilitzen tots els recursos disponibles quan es troben en situació de resoldre un problema. Així, poden servir-se de processos verbals o analítics i processos espacials per a la solució dels ítems dels tests espacials. En altres paraules, els tests espacials mesuren les habilitats de resoldre problemes espacials i no necessàriament habilitats espacials anàlogues.

Tenint en compte aquestes consideracions, queda clarament establerta la primera limitació de la metodologia utilitzada: *Amb els instruments que disposem per a la resolució del problema previ, únicament podem valorar l'habilitat per a resoldre les tasques d'orientació espacial, i no l'habilitat d'orientació espacial.*

En aquest sentit, cal recordar, una vegada més, que hem definit l'habilitat d'orientació espacial com a *l'habilitat de processament espacial necessària per a resoldre activitats espacials on la transformació geomètrica és una rotació a l'espai, entenent per habilitat de processament espacial l'habilitat necessària per a dur a terme el conjunt d'operacions mentals per a resoldre una activitat espacial que inclou no només l'habilitat per imaginar, sinó també per codificar de manera verbal o mixta els objectes, les relacions i les transformacions espacials i per resoldre tasques espacials per processos no únicament visuals.*

En segon lloc, i del fet de que en aquesta primera part de la recerca treballem amb el rendiment manifestat pels alumnes en tasques espacials, cal que tinguem present que el rendiment individual en els tests espacials pot quedar confós per diferències en l'habilitat d'extreure informació d'esquemes, dibuixos o representacions gràfiques. Una altra problemàtica a afegir al treball a partir de tests, és deguda al fet que els estímuls figuratius en els tests espacials contenen tots les pròpies convencions.

Per tot això, la metodologia utilitzada per a la resolució del problema previ comporta una segona limitació: *El rendiment individual pot quedar confós per les diferents capacitats d'extreure informació dels estímuls presentats.* Aquesta limitació queda superada en l'estudi del *problema principal* de la recerca, on la metodologia utilitzada permet observar processos, fet que permet separar les habilitats d'interpretació o comunicació d'informació espacial de les habilitats de

processament espacial.

## 4.2 L'instrument del problema previ.

Recordem que la present recerca pretén respondre alguns dels interrogants plantejats en les conclusions d'una investigació anterior, *Avaluació del currículum de Matemàtiques de l'ensenyament obligatori en els aspectes de geometria de l'espai*<sup>1</sup>.

Aquest fet ens porta a plantejar un estudi previ amb la finalitat d'analitzar si les diferències de rendiment observades entre grups d'incidència, en el treball esmentat, es reflecteixen en les qüestions de rotació a l'espai, i establir, quan sigui possible, una tipologia dels errors manifestats en aquestes tasques. Per aquest motiu, l'instrument del *problema previ* és part del qüestionari elaborat i validat amb anterioritat en el treball *Avaluació ...*, més concretament, aquells ítems del test on la transformació geomètrica és rotació a l'espai. Per aquesta raó, a més d'estudiar aquestes activitats concretes, des del punt de vista formal i de validesa, ens ha semblat necessari emmarcar-les dins de l'instrument considerat globalment.

Així doncs, en aquesta secció considerem dos apartats: el primer fa referència a l'instrument considerat globalment i presenta el procés d'elaboració i validació de tot el qüestionari, i el segon, fa referència concretament a l'instrument del *problema previ*, és a dir, a les qüestions en relació a les tasques de rotació a l'espai des del punt de vista formal i de validesa.

### 4.2.1 L'instrument considerat globalment.

En el treball *Avaluació del currículum de Matemàtiques de l'ensenyament obligatori en els aspectes de Geometria de l'espai* proposàvem i justificàvem la necessitat de contemplar la Geometria com una branca important dins de les Matemàtiques, entenent-la sota quatre aspectes: com a estudi de la visualització, dibuix i construcció de figures, com a estudi del món real físic, com a vehicle per a representar conceptes, matemàtics o no, l'origen dels quals no és visual o físic, i com a exemple de sistema matemàtic. Argumentàvem que el propòsit de la presència de la Geometria en l'ensenyament obligatori ha de ser el desenvolupament en l'alumne d'un concepte ben estructurat d'espai, la qual cosa no vol dir que no hi hagi d'haver conceptes geomètrics al currículum, sinó que aquests hi han de ser per ajudar a la consecució del primer objectiu.

---

<sup>1</sup>Presentat per l'obtenció dels crèdits de recerca, dins el marc del programa de doctorat del departament de Pedagogia Aplicada de la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Consideràvem imprescindible la inclusió dins dels objectius de l'àrea de Matemàtiques de l'ensenyament obligatori el desenvolupament dels tres aspectes següents: El coneixement de l'espai de tres dimensions i habilitats suficients per interpretar-lo i representar-lo; la capacitat d'abstreure relacions i models geomètrics de la realitat en que vivim; i les habilitats lògiques suficients que permetin i facilitin aprenentatges inductius, la introducció als processos deductius, i que serveixin per refinar les primitives intuïcions espacials.

Així mateix, es justificava la necessitat i la possibilitat de dur a terme aquests objectius.

Presentàvem els continguts agrupats en procediments, fets, conceptes i sistemes conceptuals, i actituds, valors i normes, i dins de cada apartat es presentaven en relació al llenguatge, a les transformacions, a la geometrització de models, i en relació a la iniciació als mètodes deductius.

A partir de la relació de continguts i d'objectius generals, en un primer estadi, es varen definir de manera operacional els diferents objectius, considerant no només les qüestions espacials, sinó tot l'àmbit de la Geometria. En un segon procés, es varen definir els objectius operacionals específics de la Geometria de l'espai en tres dimensions. Es definien els objectius en funció de les conductes esperades en les diferents àrees de contingut. Els continguts eren, pel que fa a objectes geomètrics: en una dimensió —la recta—, en dues dimensions —figures al pla— i en tres dimensions —cossos a l'espai; pel que fa a relacions geomètriques: paral·lelisme, incidència, perpendicularitat i semblança i pel que fa a transformacions geomètriques: moviments —translacions i rotacions—, i d'altres tipus de transformacions —reflexions, projeccions...

Els diferents nivells de conducta es definien en funció de la capacitat cognoscitiva requerida per a la realització de les tasques corresponents, i no únicament en funció de la dificultat de la tasca.

Per a cada nivell de conducta es consideraven tres aspectes: *El verbal/lògic (V/L)* —l'aspecte verbal/lògic fa referència per una part a la correcció i precisió en l'ús del llenguatge manifestat per l'alumne en el vocabulari específic, definicions, descripció de relacions, propietats i situacions i, d'altra banda, a la forma dels raonaments, tenint en compte les limitacions que l'anàlisi d'aquestes comporta—, *el visual/figuratiu (V/F)* —dins d'aquest grup es consideren els aspectes que fan referència especialment a producció, anàlisi, interpretació, traducció i manipulació d'informació figurativa— i *el de relació amb el món real (R)* —fa referència als aspectes relacionats amb la geometrització de models. Cal dir que aquests apartats no s'han de considerar com a classes disjunctes i l'única motivació per a aquesta distinció fou de caràcter pragmàtic.

A més, es definien quatre nivells de conducta que, aplicats als continguts,

ens permetien d'establir els objectius d'una manera operativa. Aquests nivells de conducta són una modificació dels proposats per Bloom, Hasting i Madaus (1975, III) per adaptar-los a a les característiques del treball. Els nivells de conducta són: reconeixement, comprensió, aplicació i estructuració.

Cadascun d'aquests nivells de conducta es varen definir <sup>2</sup> en funció de les actuacions i produccions esperades en el subjecte des dels tres aspectes considerats: V/L, V/F i R.

Una vegada establerts continguts i conductes, es definien els objectius operacionals de l'ensenyament de la Geometria en l'escolaritat obligatòria, a través d'una taula d'especificacions <sup>3</sup> indicant conductes i continguts considerats. Aquests objectius es concretaven en uns de més específics en relació amb la Geometria de l'espai, en una segona taula d'especificacions <sup>4</sup> indicant també conductes i continguts considerats.

A partir de la taula d'especificacions s'elaborà una col·lecció, que inicialment consta de 146 ítems, que serveix de base per a la discussió que posteriorment va portar a l'elaboració del qüestionari definitiu. Cadascun dels ítems elaborats correspon al menys a una de les caselles de la taula d'especificacions.

En general, es va procurar que la dificultat de l'ítem no radiqués en el contingut o objecte geomètric al que feia referència, sinó que fos deguda estrictament a la conducta necessària per resoldre'l. Per aquest motiu, la majoria dels ítems feien referència a objectes geomètrics comuns, o molt senzills. A més, cal dir que hem treballat únicament amb objectes polièdrics senzills, i essencialment, amb objectes construïts a partir de cubs. Els objectes no polièdrics han estat deixats de banda per la dificultat que comporta la seva representació plana, i per evitar al màxim les distorsions ocasionades pel procés de reproducció gràfica del test. D'entre els objectes polièdrics amb que hem treballat, la majoria són objectes construïts amb cubs, perquè el cub és possiblement l'objecte tridimensional més treballat a nivell escolar.

Pel que fa als distractors dels ítems, es va procurar en tot moment que, a part de plausibles, ens permetessin de treure conclusions més enllà de l'afirmació de la correcció o incorrecció de les respostes. Per aquest motiu, els distractors han estat trets, en tots els casos en que això ha estat possible, dels errors més comuns que cometien els alumnes. Així, a partir de la pròpia experiència i de les recerques existents en relació al tema, s'han elaborat uns distractors que ens permeten suposar no tant una determinada estratègia de resolució, com un possible tipus d'error.

---

<sup>2</sup>Veure annex 1.

<sup>3</sup>Veure annex 2.

<sup>4</sup>Veure annex 3.



La redacció dels ítems ha estat feta tenint en compte la taula d'especificacions, sobre els continguts esmentats i tenint en compte el que s'ha dit en relació a l'objecte al que fan referència, després d'haver consultat el directori de tests espacials d'Eliot i Smith (1982), es preparen els ítems. La majoria d'ells, són de redacció pròpia per al qüestionari, alguns adaptats dels qüestionaris tradicionals i, d'altres, els que menys, extrets íntegrament de textos espacials existents. Els que han estat extrets d'altres qüestionaris procedeixen d'un dels següents: Ben-Haim, Lappan i Houang (1985), Hoffer (1977), Lahrizi (1984) i Wolfe (1970). En la fitxa de redacció final de cadascun dels ítems s'indica la procedència en el cas que hagin estat extrets d'alguna d'aquestes publicacions, altrament són de creació pròpia per al qüestionari.

Una vegada elaborat el banc d'ítems, es va donar a 15 experts externs perquè actuessin com a jutges per a la seva validació i selecció. A cadascuna d'elles se li va lliurar, juntament amb la col·lecció d'ítems, la taxonomia, els descriptors de conductes i un full per a la validació<sup>5</sup>. Els conceptes sobre els que es demanava l'opinió als jutges eren, per a cada ítem, univocitat, validesa interna i validesa externa.

Pel que fa a la caracterització del grup d'experts que varen actuar com a jutges, hem de dir que es va procurar demanar l'estudi de les qüestions a persones que fossin experts en el tema i el màxim de pluridisciplinars possible. Les 15 persones a qui es va sol·licitar són, o bé pedagogs, o bé matemàtics, i treballen en departaments universitaris de Ciències de l'Educació, de Didàctica de les Matemàtiques o de Matemàtiques, o bé en instituts d'ensenyament secundari que estan en contacte amb el món de la recerca en Didàctica de les Matemàtiques. En tot moment, es va procurar que la distribució fos equilibrada.

A més de la validació per experts, contàrem amb la col·laboració del professor Jaume Sarramona de departament de Ciències de l'Educació de la UAB que va revisar i avaluar el banc d'ítems. Cal dir també que varen estar de gran utilitat els comentaris i suggeriments fets pels professors Justo Arnal del departament de Ciències de l'Educació i Jaume Agudé del departament de Matemàtiques de la UAB; el primer, pel que fa a l'aspecte formal en l'elaboració, revisió i organització dels ítems i, el segon, per la revisió del contingut dels ítems des del punt de vista de correcció i precisió matemàtica.

El procés de validació per jutges, els seus comentaris i la reflexió a que varen portar les seves opinions, tant pel que fa a l'aspecte formal, com de contingut, va ser de gran utilitat a l'hora de la selecció i organització de les preguntes per al qüestionari. A partir d'aquest procés, es va redactar un qüestionari d'anàlisi

---

<sup>5</sup>Veure annex 4.

d'ítems <sup>6</sup> per a la revisió final de cadascun d'ells.

A partir de les valoracions dels jutges, s'elaborà un banc d'ítems i per a cadascun dels ítems una fitxa on es recollia la procedència, la conducta que pretén mesurar, els comentaris dels experts, les valoracions assignades als tres aspectes, univocitat, validesa interna i validesa, la justificació de l'acceptació o anul·lació i el redactat definitiu.

Amb la selecció i modificació feta seguint el procés explicat, s'obtingué un banc d'ítems del qual sorgí una primera proposta de test. Durant el congrés ICME VI (*International Congress on Mathematics Education*) celebrat a Budapest el 1988 es varen comentar els ítems amb els professors C. Gaulin (Universitat Laval, Montréal) i A. J. Bishop (Universitat de Cambridge). Fruit de les converses mantingudes és la decisió de quins ítems havien de formar part del qüestionari definitiu, i també les possibles qüestions a tractar amb els alumnes mitjançant la tècnica d'entrevistes per a la resolució del *problema principal*.

Una vegada seleccionades les qüestions, es redactà una primera versió del test i, a partir d'aquesta, es va procedir a la validació empírica. Aquesta validació va consistir, d'una banda en l'anàlisi de la fiabilitat i de la consistència del qüestionari considerat en la seva globalitat feta en dues etapes prèvies a l'administració definitiva del qüestionari i, d'altra banda, en una comprovació posterior de la validesa que analitzant la fiabilitat i consistència del qüestionari en la seva globalitat, i també els diferents ítems des de l'aspecte de dificultat, entre d'altres.

Pel que fa a la validació prèvia, durant el més de novembre de 1988 es va administrar el qüestionari en la seva primera versió als alumnes de l'Escola de Formació del Professorat d'EGB "Sant Cugat" de la U.A.B. dels grups de 3er i 4rt de vespre de l'especialitat de Primera Etapa i de 3er-A de l'especialitat de Ciències. Es varen calcular els índex de fiabilitat i validesa, i es varen comentar els resultats obtinguts i els possibles elements distorsionadors d'aquests índex amb companys del Departament de Didàctica de les Matemàtiques i amb els professors J. Arnal i A. Ferrández del Departament de Ciències de l'Educació.

Els indicadors utilitzats foren Coeficient  $r$  de Rulon, coeficient de consistència de Spearman-Brown, i índex de fiabilitat de Kuder-Richardson,  $KR-20$ . Els resultats obtinguts pels diferents grups calculats separatament i creuada <sup>7</sup> portàren a revisar i modificar algunes qüestions per a l'obtenció d'una nova versió del qüestionari —que fou la definitiva.

A partir d'aquesta versió, es procedí a una nova validació, aquesta vegada treballant amb una població el màxim de semblant possible a la mostra a qui s'havia d'administrar definitivament. Es treballa amb els grups de 8è d'EGB de

---

<sup>6</sup>Veure annex 5.

<sup>7</sup>Veure annex 6.

l'escola Bellaterra i el grup B de 2on de BUP de l'Institut de Batxillerat de Mollet del Vallès. Els coeficients indicadors de fiabilitat i consistència que es calculen<sup>8</sup> són els mateixos que en el primer procés de validació (Rulon, Spearman-Brown i KR-20). Presentats i discutits els resultats d'aquests indicadors<sup>9</sup> amb el Prof. A. Ferrández, s'accepta aquesta segona versió del test com a consistent i fiable, és fan les modificacions necessàries pel que fa als aspectes formals, i s'obté la versió definitiva del qüestionari.

El qüestionari administrat als alumnes<sup>10</sup> conté 42 ítems tancats de selecció múltiple, cadascun d'ells amb una resposta correcta i tres distractors, i unes qüestions inicials referents a les dades personals.

Juntament amb el qüestionari es donava a l'alumne el full de respostes<sup>11</sup> on s'havia d'anotar les dades personals i donar les respostes a les preguntes del qüestionari, assenyalant amb una creu la resposta correcta.

El qüestionari conté dos grans blocs de preguntes pel que fa al contingut — encara que no es diferenciïn en l'aspecte formal—. El primer bloc, les onze primeres preguntes, fa referència a continguts, ja siguin conceptuals o de procediment, que són explícits en el disseny curricular existent en el moment present. El segon bloc fa referència als objectius que el treball proposava com a necessaris des del punt de vista de la Geometria.

Una vegada administrat el qüestionari, es varen tornar a calcular els índex de validesa per a veure si es mantenien dins d'uns límits acceptables. Els indicadors foren els següents: coeficient de consistència interna de Spearman-Brown, índex de fiabilitat de Kuder-Richardson, KR-20, i índex de fiabilitat de Kuder-Richardson, KR-21. Els resultats obtinguts<sup>12</sup> en tots els casos es mantenen dins els límits acceptables.

Per a cadascun dels ítems del qüestionari es va calcular, entre d'altres, l'índex de dificultat que ens serà d'interès a l'hora d'estudiar les qüestions d'orientació des del punt de vista del *problema previ* de la recerca.

---

<sup>8</sup>Veure annex 6.

<sup>9</sup>Veure annex 6.

<sup>10</sup>Veure annex 7.

<sup>11</sup>Veure annex 8.

<sup>12</sup>Veure annex 6

### 4.2.2 L'instrument del problema previ.

#### Anàlisi formal de les tasques.

L'instrument del problema previ són tres dels ítems del qüestionari ja esmentat, concretament, els números 18, 19 i 36. Primerament, fem una consideració global de les tasques proposades, i a continuació presentem, per a cadascun d'ells, el seu enunciat, descrivint la tasca proposada, els objectius pretesos segons les conductes representades, i justifiquem la selecció dels distractors o de respostes plausibles quan sigui necessari.

Com a primera consideració referent a les tres qüestions, cal dir que en tots els casos, el moviment requerit per a transformar els objectes representats en cadascuna de les figures en els de les opcions de resposta, és una rotació a l'espai, més concretament, un gir que es pot considerar com a composició de girs de  $90^\circ$  al voltant d'un dels eixos de coordenades cartesianes. En tots els casos, menys un, el moviment més senzill per passar d'una figura a l'altra, és o bé, un únic gir de  $90^\circ$  al voltant d'un dels eixos de coordenades, o bé pot descomposar-se en dos d'aquests girs. En un únic cas, el moviment mínim és una composició de tres girs de  $90^\circ$ , però aquest fet no afegeix complicació a la tasca ja que dos d'aquests girs poden compondre-se per a donar un gir de  $180^\circ$ . Així doncs, en totes les qüestions, els moviments mínims necessaris per passar d'una figura a l'altra poden resoldre's en un màxim de dos girs de  $90^\circ$  al voltant d'un dels eixos de coordenades —fet que no implica necessàriament que aquest sigui el procediment utilitzat per l'alumne.

En tots els casos, els objectes a transformar són, o bé, cubs, o bé, composicions de cubs que poden contenir o no parts significatives o diferenciades de les quals cal mantenir la posició relativa en el moviment. Cal fer notar aquí que el fet de parlar de parts significativament diferenciades pot aparentment ser considerat subjectiu. Així, per alguns dels experts que varen validar les qüestions, només tenien parts diferenciades els objectes de l'ítem 36 —les puntuacions de les cares dels daus—, mentre que, per d'altres, els objectes de totes les qüestions contenien parts diferenciades —el fet de que la composició de cubs en contingués un de sobreposat a un altre en un determinat lloc, constituïria ja una part diferenciada. La intenció a l'elaborar les tasques era considerar com a objectes amb parts diferenciades únicament els de l'ítem 36, ja que només aquests contenen marques o senyals explícits dels que cal conservar la posició relativa en els moviments. Des del nostre punt de vista, el fet de que el subjecte al solucionar la tasca consideri o no una part de l'objecte de manera especial per a guiar-se en el procés de solució no ha d'interpretar-se, en aquest moment, com si fos l'objecte real el que tingués una part significativament diferenciada. L'estudi d'aquesta possibilitat entra dins de l'anàlisi d'estratègies utilitzades per a la resolució de la tasca, i forma part del

*problema principal* de la recerca.

En els tres ítems, els objectes han estat representats en el que hem anomenat en el treball anterior *Avaluació ...* codis usuals de representació plana d'objectes en tres dimensions, més concretament, en perspectiva obliqua o perspectiva isomètrica. Tot i que es podria argumentar que el nivell de familiaritat de l'alumne amb aquest tipus de representacions és superior en el cas de la perspectiva obliqua, cal dir que, d'una banda, els objectes representats eren senzills, i de l'altra, en el qüestionari global hi havia dos ítems destinats a verificar el grau de coneixement d'aquest tipus de representacions per part dels individus de la mostra. L'estudi del rendiment en aquest dos ítems, i en el qüestionari en general, ens permet acceptar aquest tipus de representacions com a familiars, al menys pel que fa a la seva interpretació.

Pel que fa a les condicions del requeriment geomètric de les tasques es presenta de dues maneres. En el primer dels tres ítems, demanant un canvi de punt de vista respecte l'objecte i, en els altres dos, demanant un canvi de posició de l'objecte. Des del nostre punt de vista les dues condicions resulten, a priori, equivalents ja que no ens interessa, de moment, estudiar les estratègies utilitzades per l'alumne en el procés de resolució. Degut al fet de que és impossible, en aquest nivell, diferenciar el fet de que l'estratègia de processament impliqui imaginar o no diferents punts de vista dels subjectes o canvis de posicions dels objectes, analitzem els ítems des del punt de vista de la relació geomètrica existent entre els objectes representats a les figures.

A continuació, es presenten cadascun dels ítems, descrivint la tasca proposada, els objectius pretesos segons les conductes representades, i es justifica la selecció dels distractors o de respostes plausibles a través de les subhipòtesis.

### Ítem 18.

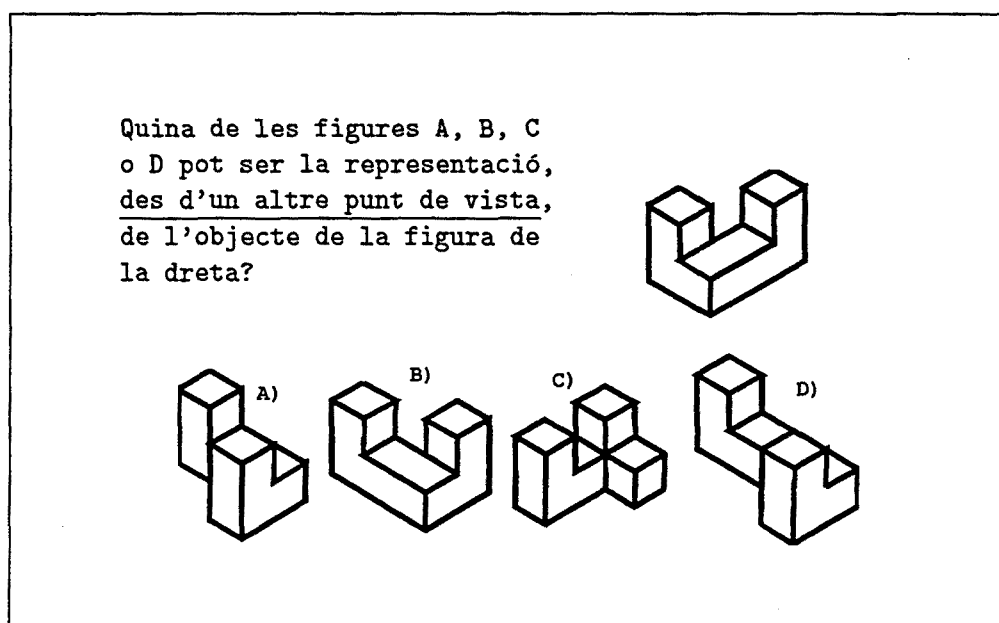
A la pàgina següent es presenta l'enunciat de l'ítem 18 tal com apareix al qüestionari.

L'ítem 18 demana efectuar una rotació de  $90^\circ$ , en sentit contrari a les agulles del rellotge, al voltant d'un eix perpendicular a un pla paral·lel a la cara on es recolza l'objecte.

La conducta representada és la que a la taula anomenàvem C-V/F-2, *Donat un objecte geomètric reconeix la imatge resultant després d'aplicar-li un moviment (gir/translació). D'entre diferents figures pot identificar aquelles que representen un objecte vist des de diferents angles, amb l'enunciat formulat referint-se al segon aspecte.*

Les opcions presentades per a la resposta són:

- **A:** Resposta correcta.
- **B:** La figura representa la imatge especular de l'objecte de la figura donada —és a dir, la simètrica respecte d'un pla.
- **C:** L'objecte representat a la figura no és ni congruent ni combinatorialment equivalent<sup>13</sup> a l'objecte representat inicialment.
- **D:** La figura representa un objecte topològicament equivalent però no congruent a l' objecte representat a la figura donada.



Item 18.

<sup>13</sup>Diem que dos objectes construïts amb cubs són combinatorialment equivalents quan els grafs associats a cadascun dels objectes són topològicament equivalents. El graf associat a un objecte construït amb cubs, és el graf on cada cub ve representat per un punt, i dos punts estan units amb un segment quan els dos cubs corresponents estan en contacte.

Els motius de la selecció dels distractors són els següents:

- **B:** Un dels errors freqüents és la confusió de l'objecte resultant de rotar una figura amb la imatge especular del mateix, no tant pel desconeixement de la simetria, com pel fet que al fer el gir es té en compte la inversió davant/darrera però s'oblida la inversió dreta/esquerra.
- **C:** En alguns casos, molt pocs, l'error consisteix en perdre de vista la configuració global de l'objecte, ja sigui per un error d'estratègia en el procediment com per dificultats en la interpretació.
- **D:** Aquest tipus d'error és freqüent, encara que no tant com el primer, i acostuma a ser degut al fet de que es conserva la globalitat de la figura i s'efectua el canvi de punt de vista correctament però hi ha una dificultat en la comprensió del codi de representació.

### Ítem 19

A la pàgina següent es presenta l'enunciat de l'ítem 19 tal com apareix al qüestionari.

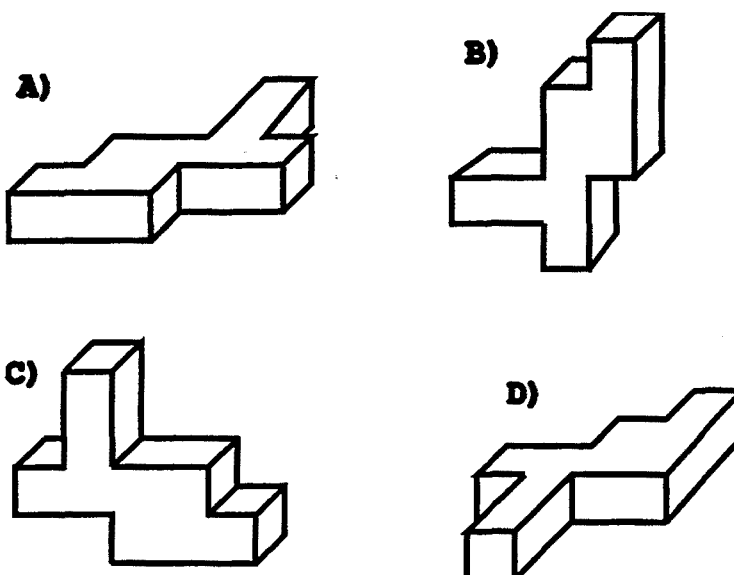
La qüestió demana comparar objectes efectuant diverses rotacions que poden ser descrites com a composició de girs de  $90^\circ$ , al voltant dels eixos de coordenades.

La conducta representada és la que a la taula anomenem C-V/F-2: *Donat un objecte geomètric reconeix la imatge resultant després d'aplicar-li un moviment (gir/translació). D'entre diferents figures pot identificar aquelles que representen un objecte vist des de diferents angles amb l'enunciat formulat referint-se al primer aspecte. És important fer notar que hi ha una diferència essencial d'aquesta tasca amb l'anterior. En el cas anterior, l'opció que implica la figura simètrica no és correcta i, en aquest cas sí. Això és degut al fet que un objecte i el seu simètric no es poden veure mai iguals des de diferents punts de vista, però en canvi si que existeix un moviment a l'espai —gir de  $180^\circ$  al voltant d'un eix— que transforma un objecte en la seva imatge especular si l'objecte donat és simètric respecte un pla.*

Donat que la tasca demana comparar objectes, i és impossible saber a priori de quina manera van escollir els alumnes les opcions a comparar, descriurem les transformacions geomètriques que relacionen cadascuna de les figures amb totes les altres. Així A-B representarà la transformació geomètrica més senzilla que transforma l'objecte de la figura A amb el de la B. L'expressió  $X_{90}$  representarà un gir de  $90^\circ$  al voltant de l'eix de les X en el sentit considerat positiu, i anàlogament  $Y_{90}$  i  $Z_{90}$ . És clar que si la rotació que transforma una figura en una altra es

pot descriure com a la composició  $X_{90}Y_{90}$ , la rotació que transforma la segona en la primera es pot descriure  $X_{-90}Y_{-90}$ <sup>14</sup>, per la qual cosa només relacionarem la meitat de les transformacions possibles, essent fàcilment deduïbles les altres. Cal tenir present que un mateix moviment pot descriure's de més d'una manera com a composició de girs al voltants dels eixos de coordenades.

Entre els objectes següents n'hi ha tres que són iguals però estan col·locats en diferents posicions. N'hi ha un que encara que canviï la seva posició no és igual a cap dels altres tres. Quin és A, B, C o D?



### Item 19.

Els moviments necessaris per a comparar les diferents opcions, utilitzant aquesta nomenclatura, es poden descriure:

<sup>14</sup>Aparentment la rotació inversa a la  $X_{90}Y_{90}$  seria  $Y_{-90}X_{-90}$  però cal recordar que la composició de girs respecte d'eixos ortogonals és commutativa.



- **A-B:** Per a passar de l'objecte de la figura A al de la B són necessaris un mínim de dos girs al voltant dels eixos. Una possible representació del moviment necessari per a la transformació seria  $X_{90}Z_{90}$ .
- **A-C:** El moviment que passa l'objecte de la figura A al de la C és pot considerar, al menys, de dues maneres: com a composició del moviment que transforma la figura A en B amb el moviment que transforma la figura B en C, representant-lo  $X_{90}Z_{90}X_{90}$  o sense considerar la composició, relacionant directament la figura A amb la C. En aquest cas, la transformació és pot descriure  $X_{180}Y_{90}$  i interpretar-la d'aquesta manera comporta, al menys implícitament, interpretar l'objecte de la figura C com a resultat de girar  $90^\circ$  l'objecte simètric del de la figura A.
- **A-D, B-D, C-D:** L'objecte representats a la figura D no és congruent ni tant sols combinatorialment equivalent a cap dels altres, per tant no existeix cap moviment per passar de l'un als altres.
- **B-C:** El moviment que passa l'objecte de la figura B amb el de la C és un únic gir de 90 graus:  $X_{90}$

En la redacció de les opcions s'ha procurat que quedessin reflectits tres graus de dificultat en els canvis per passar d'una figura a l'altra. Els girs són o bé directament un gir de  $90^\circ$  al voltant d'un eix de coordenades, o resultat de compondre dos o tres d'aquests girs. En el cas de tres girs, intervé implícitament l'objecte simètric, fet que a priori havia de facilitar la solució. La interpretació d'aquesta possibilitat entra dins de l'anàlisi d'estratègies utilitzades per a la resolució de l'activitat. L'objecte que correspon a la resposta correcta i que, per tant ha de ser no congruent amb els altres, a més de complir aquesta condició no és ni tant sols combinatorialment equivalent. Ha estat escollit d'un altre tipus topològic a propòsit a fi d'evitar possibles confusions degudes a errors d'interpretació de la representació gràfica.

### Ítem 36

A la pàgina següent es presenta l'enunciat de l'ítem 36 tal com apareix al qüestionari.

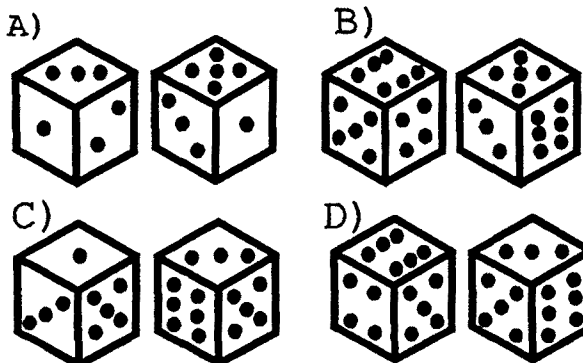
La qüestió demana comparar parelles de daus entre sí per esbrinar si existeix la possibilitat de que siguin la representació d'un mateix dau. Les condicions del requeriment geomètric proposen girar un dels dos daus fins col·locar-lo en la posició de l'altre, fet que implica mantenir la posició relativa de les puntuacions de les

cares. Les diverses rotacions per passar d'un dau a l'altre, poden ser descrites com a composició, com a màxim, de dos girs de  $90^\circ$  al voltant dels eixos de coordenades.

La conducta representada és la que a la taula anomenem A-V/F-2: *En els canvis d'orientació d'un objecte conserva la posició relativa dels seus elements característics.*

De les tres qüestions amb que s'ha treballat és l'única en que realment cal conservar la posició relativa en els canvis d'orientació. El que cal mantenir en la qüestió, tal com ha estat proposada, és la posició relativa de les puntuacions, entenent-la com el lloc que ocupen les unes respecte les altres, i evitant el canvi de posició relativa de la representació simbòlica d'aquestes puntuacions.

Els daus dibuixats a continuació tenen les cares marcades col·locades de diferents maneres. D'entre les següents parelles només n'hi ha una en la que fent girar un dels dos daus es pot posar en la posició de l'altre. Quina és A, B, C o D?



### Item 36.

A l'hora de descriure les diferents opcions, tenint en compte que a priori desconexem el procés dut a terme per l'alumne, considerem fixat el segon dau i descrivim el moviment necessari per posar el primer dau de manera que les cares comunes a tots dos ocupin la mateixa posició, comparant després la tercera cara visible. El moviment que fa correspondre al menys dues de les cares del primer dau

amb dues del segon de cada parella, es descriurà tenint en compte les convencions i consideracions proposades per l'ítem 19.

D'aquesta manera, els canvis entre el primer i segon dau de cada parella es poden descriure:

- **A:** Aplicant el gir  $X_{90}Z_{90}$  al primer dau podem posar les cares que te en comú amb el segon dau en la mateixa posició que les té aquest, però aleshores la tercera cara visible en el primer dau té dos punts mentre que en el segon dau la tercera cara visible té cinc punts, per tant no és la resposta correcta.
- **B:** Aplicant el gir  $Y_{90}Z_{90}$  al primer dau tenim els dos daus en situació per poder-los comparar i aleshores la tercera cara visible en el primer dau té quatre punts, mentre que en el segon en té tres, per tant no és la resposta correcta.
- **C:** Aplicant el gir  $X_{90}$  al primer dau tenim els dos daus en situació per poder-los comparar i ignorem quina és la puntuació de la tercera cara visible del primer dau, però serà, com a mínim, diferent d'u, tres i cinc, per tant pot ser sis i, aleshores, el primer dau pot ser idèntic al segon i aquesta és, per tant, la resposta correcta.
- **D:** Aplicant el gir  $Y_{90}Z_{90}$  al primer dau tenim els dos daus en situació per poder-los comparar i, aleshores, la tercera cara visible en el primer dau té quatre punts, mentre que en el segon en té tres, per tant no és la resposta correcta.

Degut al grau de dificultat d'aquest tipus d'activitat, s'ha preparat de manera que els moviments necessaris per col·locar el primer dau en la posició del segon són equivalents en tots els casos en que la resposta no és correcta. En el cas de l'opció C, un gir de  $90^\circ$  al voltant de l'eix de les  $Y$  és suficient per posar els dos daus en situació de comparació, ja que al ser la resposta correcta la tercera cara ha de quedar indeterminada.

Cal insistir en el fet que al referir-nos a que la tasca requereix conservar la posició relativa de les cares dels daus el que pretenem és que, per a resoldre-la, sigui necessari mantenir la posició relativa de les puntuacions, interpretant-la com el lloc que ocupen les puntuacions les unes respecte les altres. Per aquest motiu, evitem introduir canvis en les orientacions de la representació simbòlica d'aquestes puntuacions.

### 4.2.3 Validesa de l'instrument.

En aquest apartat, analitzem la validesa de les tasques proposades als alumnes en el *problema previ*. Cal tenir present que les qüestions que ara analitzem estan incloses en un instrument més ampli que ja havia estat validat teòricament i empírica tal com s'ha descrit anteriorment. Per aquest motiu, en aquest apartat, ens ocupem únicament de revisar les opinions dels experts referents a aquests ítems, dins del marc de la validació per jutges, i de comentar els valors obtinguts per als índex de dificultat dins dels procés de validació empírica.

En primer lloc, i pel que fa a la validació per experts, es fa necessari comentar els diferents tipus d'anàlisis fetes pels jutges. D'entre les validacions per jutges recollides, tres eren purament quantitatives, és a dir, varen respondre al full de validació exactament tal com se'ls havia demanat omplint la taula de valoracions però sense fer cap tipus de comentari als ítems; tres eren estrictament descriptives, és a dir, varen fer comentaris, en alguns casos molt interessants a cadascun dels ítems, però no varen omplir la taula de valoracions; les altres, són alhora quantitatives i descriptives, és a dir, les valoracions donades a la taula es justifiquen amb el comentari corresponent.

Recordem que els conceptes sobre els que es demanava l'opinió als jutges eren, per a cada ítem, univocitat, validesa interna i validesa externa, definits de la següent manera: *Univocitat*, mesura la relació entre l'enunciat i la significació dels ítems, es valora amb SI quan l'ítem té significat únic i és —o hauria de ser— comprensible, des del punt de vista de l'avaluador, per als alumnes de la mostra; *validesa interna*, mesura l'adequació de l'ítem a la conducta que pretén representar, es valora entre 0 i 3, essent 3 el valor corresponent a l'adequació total, i *validesa externa*, mesura la importància, des del punt de vista de l'avaluador, del fet que els alumnes de la mostra manifestin les habilitats necessàries per a resoldre'l, es valora entre 0 i 10 essent 10 el valor assignat a la màxima importància.

Recordem que, pel que fa a l'acceptació o anul·lació dels ítems del banc d'ítems inicial, i per tant de les tres qüestions que ara ens ocupen, una tasca s'ha acceptat quan s'han donat les següents condicions simultàniament:

- Quan els jutges opinen que és unívoc o bé, quan amb les modificacions suggerides, es pugui aconseguir aquesta univocitat.
- Quan la mitjana de les puntuacions assignades a la validesa interna sigui estrictament superior a 2, i no hi hagi cap puntuació igual a 0 ni dues iguals a 1.
- Pel que fa a la validesa externa, es tindran en compte les opinions i valoracions fetes pels jutges, però, donades les discrepàncies observades pel que

fa a la concordància de criteris, s'accepten aquells ítems on totes les puntuacions pel que fa a validesa externa siguin superiors o iguals a 5.

Quan un ítem complia aquestes condicions s'acceptava sense més condicions i, sense explicitar tot el procés, entrava a formar part del banc d'ítems. Si la determinació d'acceptar o anul·lar un ítem no s'adequava a algun d'aquests criteris s'explicitaven les raons.

Tenint en compte aquestes condicions, podem afirmar que les tres qüestions amb les que treballem en el *problema previ* estan correctament justificades des del punt de vista de validació per experts. A més cal recordar que, a l'hora de seleccionar els ítems destinats al qüestionari d'entre els del banc, varem contar amb l'opinió d'experts de prou categoria com són els professors C. Gaulin (Universitat Laval, Montréal) i A. J. Bishop (Universitat de Cambridge).

També cal recordar que els tres ítems amb que hem treballat són adaptacions de qüestions utilitzades en tests d'altres autors. D'altra banda la validació empírica del qüestionari considerat globalment justifica que les tres qüestions que ara ens ocupem encaixen perfectament dins els objectius globals del qüestionari amb que hem treballat. Aquestes dues condicions, són una raó més per considerar que les tasques proposades als alumnes en el *problema previ* de la recerca estan prou fonamentades des del punt de vista de l'estudi de validesa.

El procés de validació d'aquestes tres qüestions es resumeix en unes fitxes<sup>15</sup> que contenen:

- **Item núm ....**
- **Formulació al banc d'ítems** on es presenta la formulació inicial de l'ítem, és a dir, la forma que tenia al moment de presentar-la als jutges per ser avaluat.
- **Procedència** on s'indica la font d'on s'ha obtingut l'ítem i si s'hi han fet canvis per adaptar-lo als objectius proposats.
- **Comentaris dels jutges** on es fa referència als comentaris fets pels jutges, tant pel que fa a l'aspecte formal com al contingut.
- **Taula de valoracions** en la que s'anoten les puntuacions assignades als tres aspectes, univocitat, validesa interna i validesa externa per cadascun dels jutges.

---

<sup>15</sup>Veure annex 9.

- **Justificació de l'acceptació o anul·lació i modificacions.** Si l'ítem fou acceptat al donar-se simultàniament les tres condicions ja esmentades, no es fa cap comentari i, en cas contrari, s'expliciten els criteris que porten a la seva acceptació. En el cas que es cregui necessari introduir alguna modificació del redactat o dels gràfics es justifica.
- **Redactat definitiu amb les modificacions proposades pels jutges ja siguin per aquest ítem concret o de caràcter general.**
- **Revisió final de l'ítem a través d'un full d'avaluació final, redactat a partir de les consideracions generals formulades pels experts, tant pel que fa a l'aspecte formal com de contingut.**

Després d'analitzar tot el procés de validació per experts, i per acabar l'estudi de la validesa de la tasca, queda pendent fer una reflexió en relació a la validació empírica, més concretament respecte el grau de dificultat de les qüestions amb què hem treballat.

Recordem que l'objectiu final de la nostra recerca és l'estudi de dificultats, errors i estratègies en els aprenentatges de determinades habilitats espacials. Per a la consecució d'aquest objectiu, en el *problema principal* de la recerca treballarem amb tècnica d'entrevistes a partir d'activitats que han de dur a terme els alumnes i, entre aquestes, s'hi inclou la resolució de les tres qüestions del *problema previ*. Per aquest motiu, l'índex de dificultat d'aquestes qüestions és determinant a l'hora de plantejar-nos el treball del *problema principal* ja que treballar amb qüestions excessivament fàcils o difícils ens permetria obtenir ben poca informació.

L'índex de dificultat obtingut empíricament per a cadascun dels ítems és<sup>16</sup>:

- Ítem 18: 0.4244
- Ítem 19: 0.5938
- Ítem 36: 0.4961

Del fet que les qüestions relacionades amb les rotacions a l'espai aparegudes en el qüestionari, amb les que treballarem en el *problema previ* i en el *problema*

---

<sup>16</sup>En la primera versió del qüestionari en l'ítem 19 apareixia una qüestió diferent de la que estudiem en aquest apartat. Aquesta qüestió en la validació empírica de la primera versió va obtenir un índex de dificultat excessivament baix per a ser considerat útil per a la consecució dels objectius proposats. Per aquest motiu, va ser substituït per un altre en la versió definitiva del qüestionari que és el que es presenta i s'estudia en aquesta secció. L'ítem que apareixia en la primera versió i el que el substitueix en el redactat final del qüestionari corresponen a la mateixa conducta. Hem cregut innecessari presentar o fer cap reflexió en relació a l'aparegut en la primera versió ja que no té més importància que aquesta de cara a la nostra recerca.

*principal*, tinguin un índex de dificultat al voltant del 0.5, se'n dedueixen dues coses. Primerament, les qüestions a partir de les quals treballarem en el *problema principal* són suficientment fàcils com per a que puguem obtenir respostes en les entrevistes —encara que algunes d'elles incorrectes— de la majoria dels alumnes, fins i tot, d'aquells que han manifestat un baix rendiment en el qüestionari. En segon lloc, són prou difícils com per a que aparegui un ampli ventall d'estratègies i processos de resolució. Aquestes dues condicions porten a la consideració que, d'aquesta manera, facilitem que l'objectiu que ens proposem en el problema principal de la recerca sigui raonable.

### 4.3 Característiques de la mostra i procés de recollida de dades.

A l'hora d'escollir la mostra d'alumnes a qui es va administrar el qüestionari, es va procurar que es complissin dues condicions. En primer lloc, es va intentar que la mostra fos representativa de la població per la qual pretenem treure les conclusions. Una segona condició, fou que la selecció ens permetés dur a terme tot el procés en un marge de temps raonable. Es per aquest motiu que la població no es va seleccionar de manera estrictament aleatòria, sinó tenint en compte les limitacions materials i temporals del procés. Malgrat aquesta condició d'*operativitat*, cal dir, una vegada més, que no es va oblidar mai la primera condició, la *representativitat*.

Així, el qüestionari fou administrat a 655 alumnes d'ambdós sexes, d'edats compreses entre els 14 i 16 anys —les edats de fet varien dins d'un marge més ampli perquè en el *problema previ* treballam amb grups-classe i no amb individus— de 23 grups de 16 centres diferents d'EGB, FP i BUP. Els centres són, tots menys un, de titularitat pública i estan situats, aproximadament en un 50% a Barcelona i els altres estan repartits en grans poblacions de la seva àrea d'influència: Hospitalet, Badalona, Sant Cugat del Vallès, Ripollet, Sardanyola i Sabadell.

Les taules següents recullen esquemàticament les característiques de la mostra. En la primera, hi trobem la distribució d'alumnes per tipus de centre en relació al sexe. La segona, recull la localització en funció del tipus de centre. La tercera, resumeix la titularitat en funció també del tipus de centre. La quarta taula, sintetitza tot el procés de recollida de dades, presentant, per a cada escola, els grups i el nombre d'alumnes participants a la mostra, la data en que es va administrar el qüestionari, i les característiques administratives importants per a descriure la mostra.

Escola/ sexe	EGB	FP	BUP	TOTAL
HOMES	214	56	61	330
DONES	122	59	92	273
TOTAL	345	115	195	603/ 655

Taula 4.3.1: Distribució d'alumnes<sup>17</sup> per centre segons el sexe.

Escola/ localitat	EGB	FP	BUP	TOTAL
BARNA.	4	3	2	9
ALTRES	4	1	3	8
TOTAL	8	4	5	17

Taula 4.3.2: Localització en funció del tipus de centre<sup>18</sup>.

Escola/ titularitat	EGB	FP	BUP	TOTAL
PUBLICA	Generalitat 5 Aj.Barna. 2	Generalitat 2 Aj.Barna. 1	Generalitat 5	15
PRIVADA	Religiosa 1	Religiosa 1	—	2
TOTAL	8	4	5	17

Taula 4.3.3: Titularitat en funció del tipus de centre<sup>19</sup>.

<sup>17</sup>Els totals segons sexe i tipus d'escolá no coincideixen perquè alguns dels alumnes no varen voler donar el nom —malgrat haver-los garantit l'anonimat— i, per tant, en desconeixem el sexe.

<sup>18</sup>A la taula apareix un total de 17 centres degut al fet que en un d'ells es podien realitzar els estudis d'EGB i FP.

<sup>19</sup>A la taula apareix un total de 17 centres degut al fet de que en el de titularitat religiosa es poden cursar els estudis d'EGB i FP.



Escola	Grup	Als.	Data	Titularitat	Ens.	Lloc
Farigola	8è A i B	58	6/4/89	Generalitat	EGB	El Clot Barcelona
Coves d'en Cimany	8è	17	16/5/89	Generalitat	EGB	Horta Barcelona
Ignasi Iglesias	8è	30	3/3/89	Ajuntament Barcelona	EGB	Sant Andreu Barcelona
Casas	8è	26	28/2/89	Ajuntament Barcelona	EGB	El Clot Barcelona
Pins del Vallès	8è Ai B	58	28/3/89	Generalitat	EGB	Sant Cugat del Vallès
Gorgs	8è Ai B	57	18/4/89	Generalitat	EGB	Sardanyola del Vallès
Catalunya	8è A i B	60	9/3/89	Generalitat	EGB	Barri Centre Sabadell
S. Domènec Savio	8è 2on Ad.I	37 34	10/3/89	Escoles Salesianes	EGB FP	Barri Progrés Badalona
J. Serrat i Bonastre	2on DPol	29	7/2/89	Ajuntament Barcelona	FP	Sant Gervasi Barcelona
Leonardo da Vinci	2on Del 2on B Ad	21 17	1/3/89	Generalitat	FP	Sant Cugat del Vallès
Palau Ausit	2on Del	14	2/3/89	Generalitat	FP	Ripollet
La Sedeta	2on B	37	11/5/89	Generalitat	BUP	Guinardó Barcelona
S. Josep de Calasañç	2on D i C	70	4/5/89	Generalitat	BUP	Guinardó Barcelona
Pau Vila	2on E	31	24/2/89	Generalitat	BUP	Sabadell
Investigador Blanxart	2on C	32	27/2/89	Generalitat	BUP	Terrassa
Santa Eulàlia	2on F	24	23/2/89	Generalitat	BUP	L'Hospitalet de Llobregat

**Taula 4.3.4:** Resum del procés de recollida de dades.

L'administració del qüestionari es va desenvolupar des de mitjans de febrer de 1989 fins a mitjans de maig del mateix any. Aquest període de temps, que podria considerar-se excessivament llarg, ve justificat per dificultats de caire pràctic. D'altra banda, el temps transcorregut entre que es va passar el qüestionari a la primera escola i a la darrera —uns tres mesos— no afecta la validesa de les dades per dos motius. En primer lloc, es pot garantir que no hi va haver contacte entre

les escoles amb la qual cosa s'assegura que es va evitar tota mena de filtracions. En segon lloc, el temps transcorregut no modifica l'anàlisi de les dades recollides ja que el rendiment en el qüestionari no es veu afectat directament per aprenentatges escolars al ser aquest de contingut no acadèmic. Les possibles variacions en el rendiment degudes a la maduració del subjecte no alteren la validesa del procés ja que els canvis deguts a l'evolució dels individus es poden analitzar sota la variable edat.

Una vegada seleccionats els centres on s'havia de passar el qüestionari, i després de posar-se d'acord amb els responsables de cada institució, es va enviar a a cadascun d'ells una carta de presentació on es sol·licitava i s'agraïa la seva col·laboració i es feia una breu presentació del qüestionari.

L'administració del qüestionari fou duta a terme d'una banda personalment i, de l'altra amb l'ajuda dels alumnes de 3er-B de l'especialitat de Ciències de la promoció 88-89 de l'Escola de Mestres Sant Cugat. En el cas de no fer-ho personalment es van donar als enquestadors instruccions precises, oralment i per escrit, i, una vegada administrat el qüestionari als alumnes, es va fer una revisió de tot el procés.

En cada centre, a més de passar el qüestionari als alumnes, es va recollir a través del qüestionari del professor, informació sobre l'escola, les programacions de Matemàtiques i d'altres matèries, i tot altre tipus de material documentat que ens pogués ajudar en el control de les variables intervinents.

A més, durant o immediatament després de l'administració del qüestionari a cadascun dels grups, es va fer un informe que resumia la situació ambiental del procés.

La informació del procés de recollida de dades de cadascun dels centres queda reflectida en unes fitxes<sup>20</sup> que presenten les següents dades: Nom del centre, grups i nombre d'alumnes de cada grup participants, dia i hora d'administració del qüestionari, diferents característiques administratives del centre —titularitat, tipus d'ensenyament, localització, nombre d'alumnes, nombre de grups— i informació sobre si les programacions de Matemàtiques, o d'altres matèries, reflecteixen algun aspecte en relació amb el qüestionari. A més, recullen els comentaris fets pels alumnes després de que se'ls passés el test, obtinguts a través del qüestionari del professor i l'informe fet per l'enquestador.

---

<sup>20</sup>Veure annex 10.