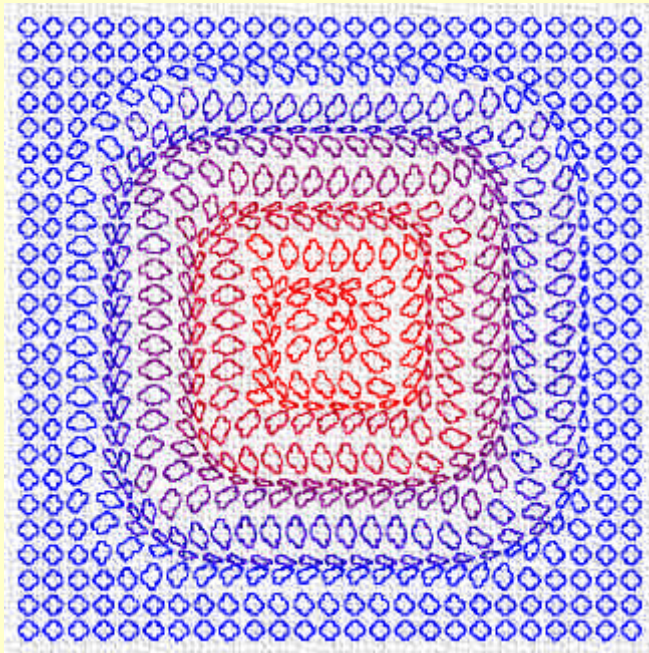


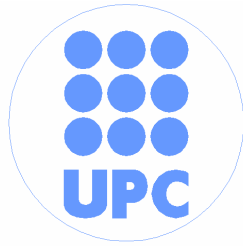
**Modelització de corbes i superfícies
amb aplicacions al
Disseny Geomètric Assistit per Ordinador
i a l'Arquitectura**

**Del disseny descompassat al disseny sense compàs:
Un nou llenguatge comú entre la ment i l'eina.**

(Tesi Doctoral)



Amadeo Monreal Pujadas



**Modelització de corbes i superfícies
amb aplicacions al
Disseny Geomètric Assistit per Ordinador
i a l'Arquitectura**

**Del disseny descompassat al disseny sense compàs:
Un nou llenguatge comú entre la ment i l'eina.**

Memòria presentada per Amadeo Monreal Pujadas per optar al grau de Doctor dins del programa 48, de doctorat en Matemàtica Aplicada, organitzat pel Departament de Matemàtica Aplicada III dins de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Director: Joan Jacas Moral.

Barcelona, 2001.

*A tots aquells als qui no aconsegueixo retornar
ni una petita part del que em donen
... i al record del meu avi.*

LLIBRE DELS MORTS

*Mira que passes sense saviesa
pel vell camí fressat tan sols un cop,
i que la veu de sobte cridarà
el secret nom que porta en tu la mort.
No tornaràs. Recorda, no t'apartis,
mentre fas via, del que tan senzill
és d'estimar: aquest blat i la casa,
el blanc senyal de barca dins el mar,
el lent or de l'hivern ajaçat a les vinyes,
l'ombra d'un arbre damunt l'ample camp.
Oh, sobretot estima la sagrada
vida de l'arbre i la remor del vent
a les branques que s'alcen ver la llum!*

Salvador Espriu. El caminant i el mur.

Agraïments i retrets

En el qüestionable cas de que ens trobem realment davant d'una tesi, cal deixar clar que

- Tot el mèrit de que hagi trigat tant a acabar-se i de que, una mica més, no s'hagués acabat mai, amb el conseqüent estalvi de murga pels qui ara se l'hauran de llegir, és exclusivament meu. He fet el que he pogut.
- En canvi, la culpa de que no hagi trigat més i, fins i tot, de que, per fi, s'hagi acabat està molt més repartida:
 - En primer lloc, la tenen tots els companys de la Secció de Matemàtiques i Informàtica de les ETSA de Barcelona i del Vallés, que no han parat d'insistir, especialment els catedràtics Claudi Alsina, que ironitzava la tardança referint-se a la *Magna Opus*, i Joan Jacas, el meu sofert director i malgrat tot amic, i el professor Jordi Recasens, que em va suggerir l'idea clau pel capítol 3.
 - També correspon a diversos professors de l'Escola d'Arquitectura els quals (no sé com s'han assabentat) cada vegada que hem veien, enlloc de "hola!" em deixaven anar un "com va la tesi, ja l'acabes?" Tota una pressió difícil de suportar per gaire temps.
 - L'amic Francisco Muñoz Salinas i demás companys del Centre de Realitat Virtual de la Ciutat també s'han encaparrat en voler-me ajudar, tot produint imatges realistes i boniques de la catedral i l'estadi de futbol que il·lustren el Capítol 6.
 - La nostra secretària Rosa Navarro tampoc se'n lliura. Amb la seva aclaparadora eficàcia en tot, però en aquest cas en informatitzar el text, no ha deixat cap opció al meu ben intencionat esforç per ajornar-la indefinidament.

- Els meus pares i germans també m'han fet la guerra psicològica, insistint que volien veure la tesi acabada abans que no es morissin. Quina bestiesa!
- Finalment, àdhuc, a la pròpia llar, la meua dona Rosa i el meu fill Pau s'hi han afegit, utilitzant com a estratagema l'argument de les moltes hores que no estava amb ells darrera de la maleïda tesi. Fins i tot han arribat a insinuar que era una excusa per fer-me fonedís! Com poden pensar una cosa així!

Es pot entendre, doncs, que jo tot sol davant d'aquest mar d'adversitats i en tant desigual batalla havia de sucumbir i acabar acabant aquest treball. Ho sento.

índex

Índex

Índex.

• *Ara vostè
està aquí.*

Introducció.	1
(Presentació)	3
I.1. Els dos nivells d'un procés creatiu.	5
I.2. El disseny com a procés creatiu i les matemàtiques com a recurs en tots dos nivells. Història d'una cooperació.	8
I.2.1. Disseny i matemàtiques fins l'aparició de la informàtica.	8
I.2.2. Disseny i matemàtiques a partir de l'aparició de la informàtica.	20
I.3. Crítica a la situació actual i tesi.	29
I.4. Preliminars. Estat de l'art.	33
I.5. Figures.	41

Part I. Aportacions a les eines d'execució. 57

Capítol 1. Formulacions globals de splines.	61
1.1. Introducció: Funcions interpoladores.	62
1.1.1. Resum d'interpolació per splines.	63
1.2. Formulació global dels splines a partir de la funció valor absolut. ..	68
1.2.1. Construcció de funcions globals contínues lineals a trossos.	68
1.2.2. Primitives globals de $ x - x_i $	71
1.2.3. Funcions interpoladores globals equivalents a splines quadràtics.	72
1.2.4. Funcions interpoladores globals equivalents a splines cúbics (versió $ x $).	73
1.2.5. Relació entre els coeficients de la funció global i els polinomis constituents del spline per trossos.	75
1.2.6. Formulació quan no es considera la extrapolació.	78
1.3. Formulació global dels splines usant funcions potencials truncades.	80
1.3.1. Construcció global de $(x - x_i)_+^k$	80
1.3.2. Funcions interpoladores globals equivalents a splines cúbics (versió $(t)_+^3$).	81
1.4. Formulació global dels splines cúbics usant funcions-base.	83
1.4.1. Funcions interpoladores globals equivalents a splines cúbics (versió funcions-base).	83
1.5. Discussió.	84
1.6. Els splines com a espai vectorial. Canvis de base.	85
1.6.1. Definició.	85
1.6.2. Relació entre B_2^n i B_3^n	85
1.7. Una aplicació: Parametrització de polígons.	87
1.7.1. Corbes poligonals.	87

1.7.2. Polígons. Piràmides i prismes.....	88
1.8. Figures.	89
Capítol 2. Interpolació per combinació de funcions interpoladores locals.	97
2.1. Introducció: Panoràmica comparativa d'uns quants mètodes existents.	98
2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.	101
2.2.1. Formulació de splines cúbics sobre cinc nodes. Condicions de frontera.	103
2.2.2. Particions de la unitat.	106
2.3. Mètode resultant.	114
2.3.1. Parametrització.	115
2.3.2. Splines cúbics locals.	116
2.3.3. Corba oberta.	116
2.3.4. Corba tancada.	117
2.3.5. Corba a trossos.	118
2.4. Resum d'avantatges i inconvenients.	120
2.5. Figures.	123
Capítol 3. Modelització de corbes i superfícies mitjançant control difús.	135
3.1. Introducció: Raonament aproximat basat en regles. Control difús.	137
3.1.1. Conceptes i notació.	137
3.1.2. Definicions.	141
3.1.3. Modelització del control difús.	143
3.2. Aplicació al modelatge de corbes i superfícies. Regles aplicades a cada node. Funció resultant.	145
3.2.1. El model.	145
3.2.2. Observacions.	147
3.2.3. Solucions.	148
3.3. Exemples.	150
3.4. Corbes i superfícies de Bézier.	151
3.5. Figures.	159

Part II. Aportacions a les eines de concepció.	173
Capítol 4. Proposta d'una gramàtica matemàtica per al disseny.	177
4.1. Metodologia.	179
4.2. Estratègia.	185
Capítol 5. Un primer “joc” d'elements per començar a dotar de continguts la gramàtica.	189
5.1. Lletres.	191
5.1.1. Lletres simples.	191
5.1.2. Lletres compostes.	192
5.2. Paraules.	198
5.3. Verbs.	205
5.3.1. Verbs genètics per mutació.	206
5.3.2. Verbs quirúrgics.	214
5.3.3. Verbs ambientals.	222
5.3.4. Verbs dinàmics.	232
5.3.5. Verbs genètics per encreuament.	234
5.3.6. Verbs compostos.	239
5.4. Figures.	249
Capítol 6. Exemples d'aplicació al disseny i l'arquitectura.	281
6.1. Motius basats en corbes planes. Sanefes i “flors”.	283
6.1.1. Sanefes.	283
6.1.2. Nous motius a partir de transformacions de les sanefes. ...	288
6.2. Endomorfismes del pla. Trames.	291
6.2.1. Descripció teòrica.	291
6.2.2. Exemples.	292
6.3. Un estadi de futbol.	296

6.3.1. Grades isòptiques i ultra-isòptiques.	296
6.3.2. Parametrització d'una grada esglaonada.	306
6.3.3. Superel·lipses i contorn d'un camp de futbol.	307
6.3.4. Disseny d'un estadi de futbol.	313
6.4. Arcs, voltes, naus.	324
6.4.1. Catàleg d'arcs.	325
6.4.2. Periodificació, extrusió i encreuament de naus.	329
6.4.3. Solució del problema de la reforma del Gran Bazaar.	333
6.4.4. Disseny d'una catedral gòtica.	336
6.5. Figures.	347

Resum, perspectives i conclusions. 479

Resum.	482
Perspectives.	485
Part I.	485
Part II.	487
Temes paral·lels.	491
Qüestió pendent global.	494
Conclusions.	495

Apèndix. 497

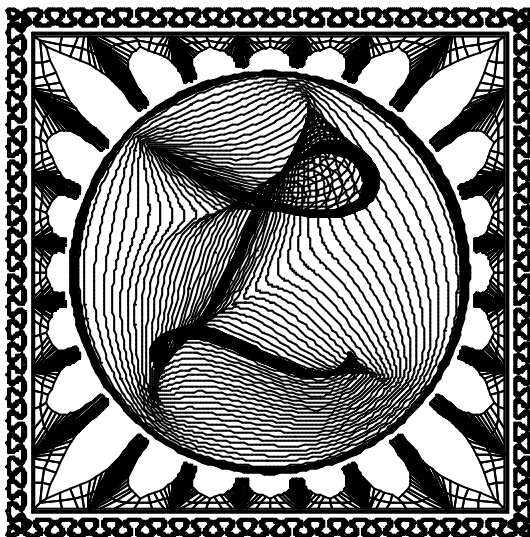
Programes del capítol 2.	500
interpcf.lsp	500
Programes del capítol 3.	521
difusos_c-s.m	521
bezier_c-s.m	523
Programes del capítol 5.	525
gramatic.lsp	525
cap5-3.lsp	535

arruga2.m	540
Programes del capítol 6.	542
cap6.lsp	542
sanefes.lsp	544
flors.m	545
hyperest.m	546
bazaar.m	550
catedral.lsp	552
catedral.m	557

Bibliografia.	563
----------------------------	------------

introducció

Introducció



a present memòria té el propòsit, en primer lloc, d'evidenciar que el disseny que involucra grafisme es pot analitzar com articulats en dos nivells, fases o etapes, un de concepció, de caire intel·lectual i un altre d'execució, de caire manual o físic, ambdós en interrelació dialèctica al llarg de la història, i, en segon lloc, de fer aportacions, des de les matemàtiques, a ambdós nivells. Les matemàtiques han estat sempre presents com a vehicle per aquest diàleg, com mostrarem, però el que volem fer

notar és que, a partir del naixement de la informàtica i, en particular, del software gràfic, aquesta col·laboració s'ha actualitzat de manera descompensada (val a dir, **descompassada**): mentre ha aparegut una nova teoria, el Disseny Geomètric Assistit per Ordinador (sigles en anglès C.A.G.D.) per donar cobertura matemàtica a la vessant executiva del disseny informatitzat, no s'ha actualitzat el referent matemàtic teòric per guiar la ment en la tasca de concepció per tal de poder explotar totes les noves possibilitats que ofereix la nova eina; aquest referent segueix sent eminentment euclidià.

En síntesi, la *tesi* que es proposa és la de que falta tot un corpus de teoria matemàtica que permeti al dissenyador codificar la seva creativitat en un format que sigui capaç d'explotar tota la potencialitat de la eina informàtica gràfica, de la mateixa manera que la geometria euclidiana permetia codificar satisfactòriament el disseny que era possible amb la regla i el compàs.

D'acord amb això, la introducció s'ocupa de desenvolupar i argumentar aquest punt de vista. Aquesta tasca servirà, simultàniament, per establir el marc o context en el que es situa aquesta memòria, així com l'estat de l'art del que parteix. Un cop establertes les dues etapes del disseny i argumentada la carència teòrica en el nivell de concepció, l'objectiu serà aportar maquinària matemàtica per les dues etapes. En coherència amb aquesta dualitat, el cos de la memòria té dues parts. La Part I recull aportacions pel C.A.G.D., és a dir, per la fase d'execució, la més comú en la recerca actual, consistents principalment en nous mètodes de generació de corbes i superfícies a partir de dades de disseny proporcionades per l'usuari. La Part II ofereix una proposta, entre les possibles, de corpus teòric per cobrir el buit que es senyala en la fase de concepció, consistent en una mena de codi o gramàtica construït sobre un alfabet de funcions matemàtiques. Val a dir que es proposa un **disseny descompassat**, o sigui, **sense el compàs**, en el sentit de superar la mentalitat ancorada en la regla i el compàs (no eliminant-la sinó incloent-la, de manera similar a com el neocòrtex envolta el còrtex i creix a partir d'ell). S'adjuntaran exemples en tots els casos. Tant per raons personals i professionals com pel fet de ser un terreny menys llaurat des del punt de vista de fonaments teòrics, la guia subconscient del discurs així com els exemples estaran més enfocats cap l'àmbit del disseny arquitectònic que cap d'altres més habituals, com ara el disseny industrial.

Pel seu contingut, es tracta d'una memòria interdisciplinària ja que conté reflexions, desenvolupaments i exemples que afecten com a mínim a la psicologia del disseny, al propi disseny, a la història de l'art, a la informàtica i, evidentment, a les matemàtiques. Fins i tot, però, les matemàtiques que hi apareixen són tractades amb una mentalitat més de dissenyador o d'enginyer que de matemàtic pur (o purista). En altres paraules, no és una tesi de teoremes sinó de producció (seria millor dir fabricació?) de mètodes per fer coses. Sí té una part teòrica, però és extra-matemàtica: és la que estableix el mapa dels nivells del disseny i hi ubica les diferents eines matemàtiques que s'han utilitzat, s'estan utilitzant o proposem que s'utilitzin també a partir d'ara. Per tant admetem que és una memòria una mica atípica, però, en qualsevol cas, és una memòria que desenvolupa matemàtiques per resoldre problemes de disseny gràfic i, per tant aplicats, per la qual cosa creiem que s'acomoda sense forçament dins el camp de Matemàtica Aplicada en el que està inscrita.

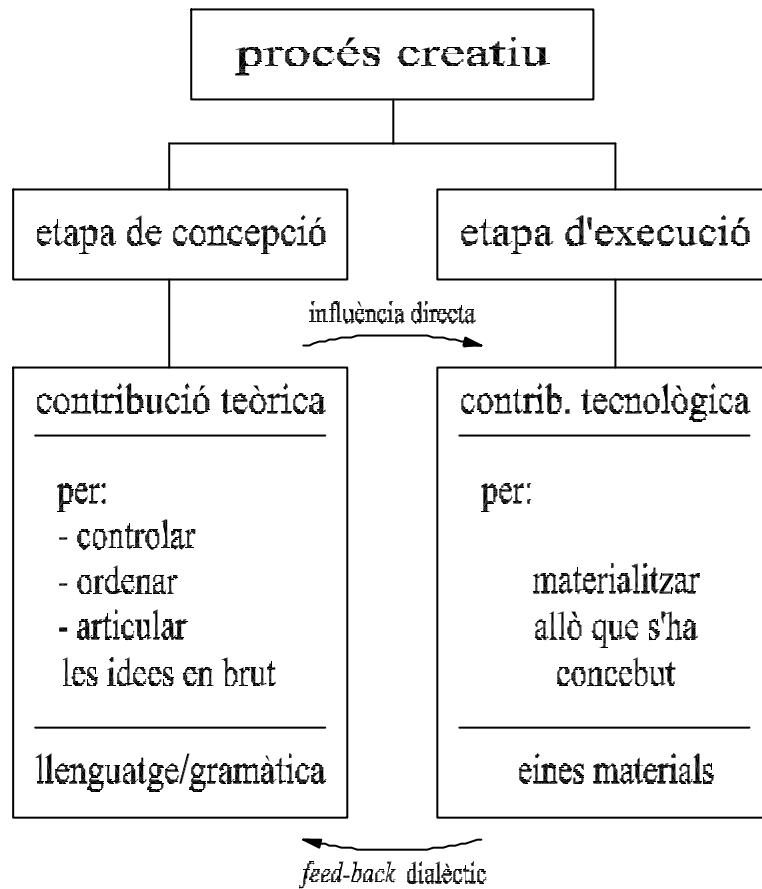
I.1. Els dos nivells d'un procés creatiu.

I.1. Els dos nivells d'un procés creatiu.

Tota realitat admet ser estudiada des de diferents òptiques segons l'aspecte de ella que interressi en cada cas. A efectes de la reflexió que aquí ens ocupa, podem considerar, de manera intencionadament simplificadora, que un procés creatiu es pot descomposar en dos nivells, etapes o fases: Una etapa de concepció, etapa mental, introspectiva, en la que el subjecte pensa sobre allò que vol fer i com ho vol fer i fins i tot com ho pot fer, i una etapa d'execució, de materialització d'allò que ha estat concebut; és un nivell més físic o manual. Idealment les dues fases es succeeixen nítidament en el temps; en la pràctica solen barrejar-se més. Així, a unes primeres idees sobre el que es vol fer solen succeir unes primeres proves o esbossos que influeixen o reconduïxen el procés mental, etc.

Si el procés creatiu és prou complex, com sol ser el cas, el creador necessita alguna ajuda externa en ambdues etapes:

- En la etapa de concepció es necessita una aportació teòrica, la cultura acumulada, y més concretament, uns elements que regulin, controlin o disciplinin el flux d'idees en brut. De la nostra ment brollen idees i conceptes en forma de sensacions imprecises; cal algun llenguatge que permeti precisar i fixar aquestes idees abans que no s'esvaeixin. Això és particularment conegut en el llenguatge verbal. Fins i tot hi ha qui diu que només podem pensar allò que podem verbalitzar. Poder és exagerat, però sí que crec que allò que no es pot verbalitzar perquè el llenguatge no ho incorpora, es fa present fugaçment i després fàcilment es submergeix cap els laberints del subconscient, s'esvaeix sense que acabem de saber amb claredat què ens ha passat pel cap. Però, igual que el llenguatge ens permet comunicar-nos amb nosaltres mateixos, és particularment imprescindible per comunicar-nos amb els altres, contemporanis o futurs. De la mateixa manera, tots els processos creatius necessiten un llenguatge o un codi per governar les idees en brut i per comunicar-les. Per exemple, en la música s'utilitzen les escales musicals com un alfabet i les regles de l'harmonia, el contrapunt, els compassos, etc. com una sintaxi. El codi dóna seguretat al creador, li permet tenir el control sobre el procés creatiu, saber el que està fent i poder-ho comunicar. Sense codi s'experimenta una mena de vertigen degut a la pèrdua de control; el que es fa apareix com arbitrari, gratuït, tant podria ser això com una altra cosa. De manera similar al pas de la informació analògica a la digital en el que es perden possibilitats i matisos a canvi de fixar millor la informació, tota codificació estableix un límits al que pot ser codificat i per tant comunicat, però és justament aquesta limitació la que fa possible la comunicació. En definitiva, sense un codi o un llenguatge, la creativitat queda perillosament a la deriva en la ment del creador i es fa incomunicable a la resta de la Humanitat. En aquest sentit, el bagatge cultural, els estils artístics es poden considerar com unes "macros" del llenguatge, com una col·lecció de signes empaquetats d'una determinada manera.



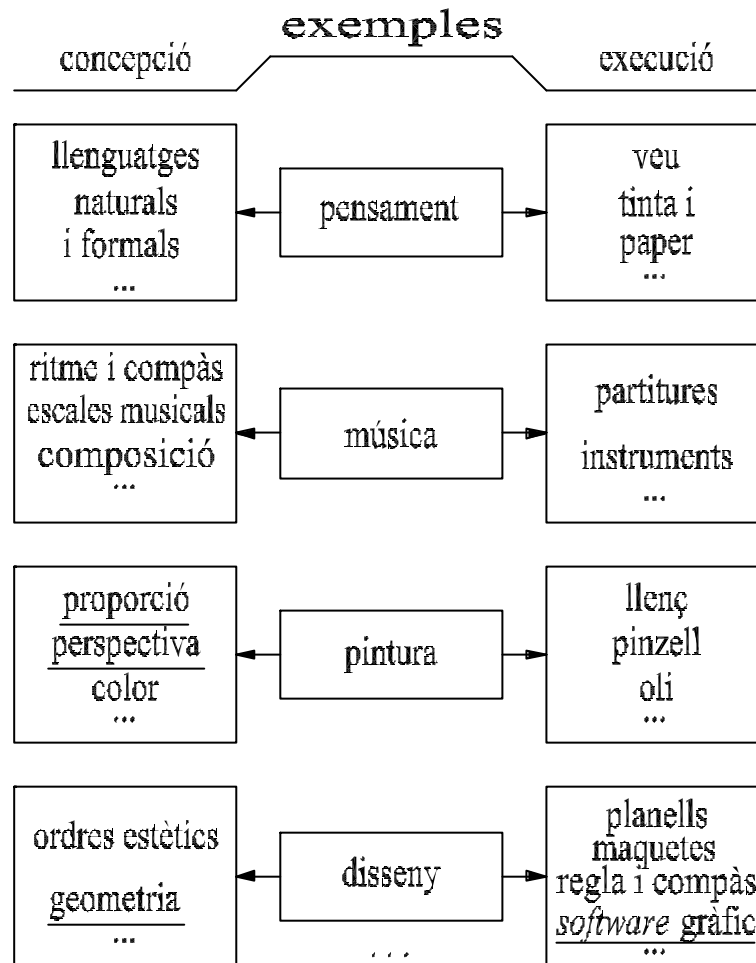
esq. I.e1

L'artista innovador és aquell que és capaç d'idear noves combinacions dels signes o fins i tot d'ampliar el repertori del codi, encara que d'una manera encaixable en el codi, sinó es fa incompreensible.

- En la etapa d'execució, el cos i les mans solen ser insuficients i es necessita una aportació tecnològica, eines que actuïn com vehicles de concreció de les idees concebudes. No es pot pintar sense pintures i pinzells; la música usant només les cordes vocals o el xiulet es fa estreta aviat, és molt més ric disposar d'instruments; dibuixar els plànols d'una casa amb el dit sobre la sorra no sembla que tingui molt futur, etc.

En l'esquema I.e1 es mostra un esquema de les dues etapes i en el I.e2 un amb diferents exemples dels recursos teòrics i tecnològics que ajuden en les dues etapes per diferents tipus de processos creatius, subratllant allà on l'exemple és el disseny i els recursos són matemàtics, atès que serà el que interessarà posteriorment.

I.1. Els dos nivells d'un procés creatiu.



esq. I.e2

És important recalcar que aquestes dues etapes interactuen de forma dialèctica. És evident que allò que es concep i que s'ha de executar (materialitzar) influencia les eines que seran utilitzades o, fins i tot, el tipus d'eines que es fabricaran: els coneixements i hàbits teòrics condicionen el tipus d'eines que podem concebre i dissenyar. Però també el repertori de recursos tècnics, d'eines, disponibles també acaben, a la llarga, condicionant allò que concepem. Si les eines han tingut èxit durant molt de temps, acaben generant uns hàbits mentals en les successives generacions de creadors i acaben acomodant un estil de pensament en la ment durant la fase de concepció i marcant la ruta per on evoluciona el codi: sense adonar-se, s'acaba concepent i codificant en funció de les eines amb les que es materialitzarà la creació, probablement perquè és més còmode i barato que canviar d'eines.

I.2. El disseny com a procés creatiu i les matemàtiques com a recurs en tots dos nivells. Història d'una cooperació.

És el moment de concretar la reflexió de l'apartat anterior en el procés creatiu que ens interessa, que és el disseny que involucra grafisme. És a dir, el disseny que avui en dia s'executa majoritàriament mitjançant alguna aplicació de software gràfic corrent sobre algun tipus d'ordinador i usant la matemàtica, ja sigui com a recurs teòric o com a eina executiva. Cal explicitar que en aquest cas considerarem la fase de concepció com aquella en què es pensa el disseny i la d'execució com aquella en què es materialitza gràficament sobre un suport pla, perquè ens interessa estudiar la relació entre el que es pot concebre i el que es pot expressar amb un dibuix. En el cas, per exemple, d'un disseny arquitectònic, la execució seria la elaboració de la part gràfica del projecte. Per tant aquí hi ha de fet una tercera fase o etapa, que és la de la materialització física del projecte: la construcció de la casa, la fabricació del motlle, la impressió de la il·lustració, etc. Aquesta tercera etapa també requereix les seves eines, les quals també aporten el seu *feed-back* a la fase de concepció, però no la tractarem especialment en aquest treball. Distingirem dos períodes: fins l'aparició de la informàtica gràfica i a partir d'aquí.

I.2.1. Disseny i matemàtiques fins l'aparició de la informàtica.

A efectes del que volem ressaltar d'aquest tema, podem organitzar aquest llarg període en tres etapes marcades per les corresponents fites separadores:

I.2.1.1) De la prehistòria a la Grècia clàssica. L'alba de la geometria. Encara que no hem cercat (si és que existeixen), documents històrics que ho avalin, creiem plausible proposar la teoria segons la qual, de la mateixa manera que la economia d'intercanvi d'unitats d'algun tipus (caps de bestiar, sacs de cereals, etc.) s'admet com el provocador del naixement dels nombres enters i el repartiment d'unitats (terres, teles, herències, etc.) com el dels racionals, probablement, problemes com el traçat de camins, de tanques, l'alineament de pedres o l'ús de troncs més o menys rectes com a pilars o bigues estan en l'origen del concepte de línia recta. Igualment, la invenció de la roda o la distribució natural d'un grup de persones (un consell d'ancians, per exemple) que han de debatre sobre un tema o la observació dels astres o la pròpia regularitat cíclica de molts processos (la roda del temps) menaren al concepte de cercle. Tanmateix, un nadó, quan comença a gatejar, si veu una joguina que l'interessa, hi va en línia recta; la noció de distància porta a la de equidistància i aquesta a la de circumferència. És a dir, sembla que aquests dos conceptes, recta i circumferència, són primigenis, estan en la base de la nostra estructura cognitiva, són apriorístics en un sentit kantianà.

Junt amb el caire altament intuïtiu d'aquests dos conceptes, es donà la circumstància de que era molt fàcil concebre i materialitzar eines reals que permetien traçar amb una qualitat raonable aquestes dues figures, per exemple, amb varetes i cordills, que durant segles devien ser les úniques disponibles apart del dibuix a ma alçada. Aquesta doble facilitat mental i manual fa que la concepció i la execució es reforcin una a l'altra i, sens dubte, és la responsable de l'enorme èxit que la recta i la circumferència han tingut en el disseny i, fins i tot, en la geometria de tots els temps, dominant aclaparadorament per sobre de qualsevol altra forma.

Un cop assimilats aquests dos conceptes primordials la seva combinació per donar formes més complexes és inevitable. Tant la forma quadrada com la circular es troben en les plantes de edificacions i construccions rituals molt antigues (figura I.1). La invenció del torn fa que la ceràmica estigui constituïda majoritàriament per figures de revolució, mentre que la seva decoració conté motius geomètrics que combinen segments rectes i arcs de circumferència entre d'altres figures més sofisticades (figura I.2).

D'una manera simultània a aquesta producció, a força de pràctica, s'anaven descobrint regularitats i propietats i definint conceptes nous relatius a aquests objectes geomètrics: punt mig, radi, tangent, angle, perpendicularitat... "les medianes de tots els triangles que he dibuixat es tallen sempre en un punt!, oi que és curiós?, passarà sempre?, perquè serà?" es devia preguntar algun mesopotàmic o egipci espavilat.

Sens dubte, la creixent sofisticació en el disseny, en la construcció, en els repartiments de terres, especialment en Egipte, on el Nil cada any esborrava les fites, portà a la necessitat d'una teoria en la que assentar-se com en un sòl ferm. Però una teoria basada en casuístiques i exemples particulars, com la que es va desenvolupar llavors, no solament és insuficient sinó que també és perillosa, especialment en geometria: quantes vegades un particular dibuix esquemàtic porta a creure que s'ha "descobert" una "propietat" força fascinant que després un altre dibuix fet pel aixafaguitarres de torn demostra que era falsa? En (Gardner 85) es descriuen algunes curioses fal·làcies geomètriques que il·lustren el que diem (figura I.3). Forçosament els Elements de Euclides van néixer com a resposta a tota aquesta problemàtica.

I.2.1.2) Els Elements d'Euclides i l'allargada ombra de Plató. De la mateixa manera que un individu humà evoluciona d'un aprenentatge purament senso-motriu i empíric a un de més abstracte, en el cas de la espècie humana (almenys a Occident) l'abstracció arribà amb la cultura grega. En el cas de la geometria, Thales i Pitàgores entre d'altres, van superar la casuística egípcia cap a propietats generals d'objectes idealitzats. Plató va establir, de manera gairebé indeleble per generacions i generacions, la divisió dual entre el món de les idees i el de les seves concrecions materials. A partir

d'aleshores, respecte les dues figures primigènies, estava clar que hi havia rectes i cercles ideals i perfectes, dibuixats per regles i compassos ideals i exactes, i “segments” i “rodones” materials i aproximades, dibuixades per regles i compassos materials i imperfectes. Els matemàtics i geòmetres es referirien per sempre als primers; respecte els segons, mirarien cap a un altre banda per no patir la seva imperfecció. A més, a força de ser les figures més innates, la recta i la circumferència van assolir el status de ser les formes més perfectes entre totes les formes ideals i van ser elevades a un nivell místic.

Cal recordar que hi ha tota una tradició esotèrica en relació als nombres i la geometria que ve de l'antiguitat, travessa tota la Edat Mitja i penetra profundament dins de la modernitat (Luca Pacioli, Le Corbusier) que creu veure “senyals” i prodigis amagats on no hi ha més que propietats lògiques i sovint força elementals (Bonell 94). Aquesta tradició, que també té una forta implantació en les filosofies orientals, ha contribuït a reforçar l'aura mítica o màgica de la circumferència, els triangles, quadrats, pentàgons, etc. Precisament, figures que es poden dibuixar amb regla i compàs.

Influït per aquest context cultural i per la citada necessitat d'escapar a la casuística i als perills de la intuïció, i condensant tota la experiència acumulada, Euclides (o qui sigui el que aquest nom encarna), en el segle III aC., va proposar per primer cop un sistema axiomàtic per fonamentar tota la geometria. Els seus cinc postulats són cèlebres i han representat veritats indiscutibles durant més de dos mil anys (del cinquè no es discutia la seva veritat sinó la seva necessitat com a postulat independent). Si ens fixem en el seu enunciat (Heath 56; Efimov 84), veiem que no fan altra cosa que referir-se a rectes i circumferències ideals i postular la existència ideal de regles i compassos perfectes per al seu traçat, ideal per suposat. En fer això, Euclides consagra de manera definitiva la recta i la circumferència com les figures més perfectes i el regle i el compàs com les úniques eines legítimes, nobles. D'entrada, els tres primers, més que postulats sobre geometria, semblen postulats sobre el que pot ser dibuixat en relació a la geometria. Està clar que aquests conceptes, a més, estan reforçats per un aura mística, metafísica, fins i tot moral, degut al seu origen platònic. Això és especialment evident en el tercer postulat, que diu que es pot traçar un cercle amb centre i radi arbitraris. De no tenir el prejudici de la perfecció superior de la circumferència i del compàs (encara que sigui de cordill) sobre la el·lipse (ja coneguda pels hel·lenístics) i el sistema de cordill i dues agulles per dibuixar-la (tant “perfecte” a la pràctica com el compàs real), hagués pogut enunciar el tercer postulat de manera més general dient que es pot traçar una el·lipse amb dos focus arbitraris i suma de distàncies arbitrària. Aquest postulat inclouria l'altra com a cas particular, quan els dos focus coincideixin, i legitimaria a dibuixar, amb exactitud platònica, tant cercles com el·lipses. Amb l'enunciat que va donar Euclides, de les el·lipses només es poden obtenir “exactament” tants punts com es vulgui, però el seu traçat amb una línia contínua va quedar condemnat per sempre a ser una construcció imperfecte, aproximada, des del punt de vista ideal. Una elecció així no és innòcua i

condiciona la pròpia capacitat cognitiva per generacions. A la història tenim un cas molt conegut que il·lustra las conseqüències d'aquesta fixació a favor de la recta i la circumferència. En efecte, si la circumferència és perfecte i els polígons de 3, 4 i 5 costats hi són inscriptibles exactament amb regle i compàs, llavors la esfera i els sòlids platònics (els cinc políedres regulars) també ho són i, amb el cristianisme, acaben sent-ho en sentit de reflex de la perfecció divina i celestial enfront de la imperfecció terrenal. La conseqüència gairebé novel·lesca de la fixació mental per aquestes figures enfront de la naturalesa inferior d'altres com ara l'el·lipse, que, com hem dit, va quedar fora del tercer postulat d'Euclides, el tenim en el cas de Kepler, el qual va perdre no pocs anys de la seva vida obsessionat en aconseguir mirar el que a priori volia veure (els planetes en òrbites circulars concèntriques amb el Sol i encaixades en políedres regulars) fins que, esgotat però exemplarment honest, es va atrevir a veure el que realment havia estat mirant tot aquell temps (òrbites el·líptiques amb el Sol en un dels focus). Quan temps s'hagués estalviat sense el pes d'un prejudici tant arrelat? Si un científic tenaç i obsessionat per la veritat com Kepler va quedar molt temps bloquejat per aquest prejudici, com no havia de condicionar al geomètres i dissenyadors durant segles?

L'èxit, indiscutible sens dubte, dels Elements d'Euclides com a sistema rigorós i superador dels perills de la intuïció va fer, doncs, que també s'absorbissin per part del subconscient dels geomètres i dissenyadors posteriors els seus prejudicis platònics. D'aquí, per una banda, el reforç de l'ús del regle i el compàs i els seus derivats (paral·lex, escaire, etc.) com a úniques eines vàlides per fer construccions "exactes" i, per altra banda, el propi concepte de "construcció exacte", que portà a la feixuga tasca, no tancada fins el segle XIX, d'interrogar-se sobre els problemes resolubles amb regle i compàs, de les figures construïbles, etc.. La quadratura del cercle és el més famós, però tant delirant i bizantí com aquest és el dels polígons regulars inscriptibles dins d'una circumferència, quan a partir d'uns 60 costats no hi ha qui distingeixi el polígon de la pròpia circumferència; sinó, que li preguntin a un usuari d'una aplicació de CAD si se'n adona, quan demana una circumferència, de que a la pantalla se li presenta, en realitat, un polígon (tant regular com ho permeti la resolució de la pantalla!). Tot això, a més, sabent, però no volent fer-hi esment, que a la pràctica, les eines i les persones són imperfectes i que tota construcció amb regla i compàs va acumulant errors en cada pas, fins fer, no ja inexacte, sinó del tot inviable qualsevol construcció teòricament exacte només que requereixi un nombre moderadament elevat de passos. Només cal recordar el difícil que resulta completar de manera acceptable la inscripció d'un pentàgon regular en una circumferència. S'ha de reconèixer que es fa de manera més fàcil i amb menys error usant una de les eines "grolleres": el transbordador d'angles. Aquesta inutilitat pràctica de tanta teoria subtil era molt pròpia dels aristòcrates d'Atenes, però poder no hauria d'haver llastrat tant a tota la cultura occidental posterior. Ni tant sols el geni aplicat d'Arquimedes se'n va adonar.

En aquest punt, crec interessant plantejar una altra observació que podria

encetar un debat amb connotacions psicoanalítiques i tot. El càlcul infinitesimal i el seu descendent, el càlcul numèric, tenen el seu origen proper, no en l'idealisme contemplatiu, diletant, dels platònics, sinó en la voluntat d'actuar sobre la natura dels racionalistes del XVII i del XVIII i, en darrera instància, en la mentalitat aplicada d'Arquimedes. Degut a això, sens dubte, accepten com a cosa natural, de què no hi ha que avergonyir-se, que els càlculs sovint no es poden portar al límit i, per tant, es cometen errors. Com que això s'accepta sense complexes, aquestes disciplines, al descriure els seus mètodes, incorporen, junt amb la descripció de l'algorisme, la corresponent fórmula d'acotació de l'error comès. Com saber, sinó, si l'aproximació feta en el càlcul es prou bona per l'objectiu **pràctic** per al qual s'ha fet aquest càlcul? En canvi, la geometria euclidiana tracta amb filigranes precioses molts temes: els de constructibilitat, el de les paral·leles, geometries sobre cossos diferents del dels nombres real, etc., etc. Però enlloc hem trobat una referència al càlcul d'errors en construccions amb regla i compàs **reals**. Si algun particular ho ha estudiat, no ha tingut gaire ressò. No sembla que hi hagi cap dificultat epistemològica per elaborar una tal teoria. Per exemple, es concebible fitar l'error comès al determinar la posició del punt d'intersecció de dues línies en funció del gruix del llapis i de l'angle d'incidència, etc. De fet, en física bé que hi ha una teoria respecte els errors en la lectura d'aparells de mesura. Si es pot fitar l'error al mesurar, també es pot fitar al traçar. Perquè no es fa? La meua opinió és que, com hem dit, la geometria euclidiana sí prové de l'idealisme platònic i per tant es nega, poder inconscientment, a reconèixer com a tema d'interès la imperfecció del món real i, quan un defecte no es vol acceptar, no hi ha voluntat de curar-lo o, si no té cura, almenys de pal·liar -lo, que no és altra cosa una teoria de control de l'error. En canvi, per un delineant o un dissenyador moderns, treballant amb regla i compàs, hagués estat molt més útil una teoria d'errors en el dibuix lineal o la geometria descriptiva que saber que el polígon de $2^{2^4} + 1 = 65537$ costats és teòricament inscriptible exactament en una circumferència amb regla i compàs i que, a més, hi ha un mètode per realitzar tal construcció, que al pobre Hermes de Lingen li va costar 10 anys de treball. No oblidem que un geni com Gauss també es va aficionar a això i, a part d'obtenir el teorema decisiu sobre el tema, va explicitar el mètode per construir el polígon de $2^{2^2} + 1 = 17$ costats. Segur que, amb el nombre de passos que té, ningú es capaç de dibuixar bé aquest polígon amb regla i compàs, degut als errors acumulats. L'única manera de que l'error sigui tant petit que no es noti, és executant pas a pas aquest mètode **...amb un programa de CAD!** ja que, aquest, **al treballar en coma flotant i prou decimals**, pot reduir l'error molts ordres de magnitud. Paradoxalment, un mètode groller, imperfecte de naixement, des del punt de vista teòric i purista, és més exacte a la pràctica que el mètode teòricament perfecte per excel·lència.

Tots aquests comentaris només pretenen ser una reflexió sobre la relativitat de certes idees que sovint s'accepten com òbvies sense més. Cal que quedi clar que no són essencialment una crítica; però, si admetessin una interpretació com a crítica, no es

tractaria d'una crítica cap a Plató o cap a Euclides, que ja van fer prou i cadascun d'ells va deixar un món millor que el que havien trobat; les seves aportacions van representar salts qualitius immensos respecte als estats de coneixements i de maduresa dels conceptes anteriors a ells. Si hi ha una crítica, és cap a les generacions i generacions de deixebles que, enlluernats per la brillantor i l'èxit dels mestres, no van gosar ni pensar que es podia superar la seva obra, quan proposar-se aquesta superació és la primera obligació del bon deixeble. Sol passar que quan un avanç és "massa" gran i brusc, mor d'èxit i bloqueja per molt temps les possibilitats d'evolució posterior. Aquest ha estat sens dubte el cas de la geometria.

El fet és que des de la seva aparició, els Elements d'Euclides han estat el referent teòric més important per tota la geometria i en particular per una de les seves aplicacions més importants: el disseny gràfic (Efímov 84; Knorr 75 i 86; Pedoe 79). Als Elements se li van anar afegint nous desenvolupaments i sistematitzacions que culminarien amb el Programa de Erlangen de F. Klein junt amb les teories sobre proporcions (nombre d'or, Modulor, etc.) (Ghyka 77 i 78; Le Corbusier 79; Weyl 74) i dintre d'aquest àmbit estan tots els estudis sobre rectes, triangles, plans, còniques, quàdriques, la geometria descriptiva, etc. (Puig Adam 56; Santaló 66). També els axiomes van ser "endregats" i millorats per Hilbert, el qual segueix edificant tota la geometria sobre els conceptes primordials de punt, recta i pla, junt amb axiomes d'incidència i d'ordre. A tot aquest corpus teòric l'anomenarem genèricament a partir d'aquí com **geometria euclidiana**, per distingir-lo d'altres àrees de la matemàtica que poden tenir connexió o intersecció amb ella però que no hi pertanyen, com ara el càlcul, l'àlgebra, la geometria diferencial, la topologia, etc. Més tard, com a única superació fonamental dels mestres dins del marc per ells establert, sorgirien les modernes geometries no euclidianes, introduïdes per Lobatchevski; no obstant, no sembla que de moment tinguin gaire aplicació en el camp del disseny; com a molt, a vegades serveixen per suggerir algun motiu decoratiu, que de totes formes es resol, com a dibuix, amb mitjans euclidians.

Un exemple significatiu de fins a quin punt està arrelada la idea de que la geometria euclidiana cobreix tota sola les necessitats teòriques del disseny ens el dona el alhora brillant matemàtic i arquitecte Pere Pi Calleja, el qual estava convençut de que el paper del Càlcul en la Arquitectura (assignatura de la que va ser catedràtic) es reduïa al àmbit del càlcul d'estructures i d'instal·lacions, mai al del disseny (suposem que per tranquil·litat de més d'un col·lega d'algun altre departament de la Escola d'Arquitectura).

També eren coneguts des de fa segles, o es van anar introduint al llarg del temps, tot un seguit d'objectes geomètrics, com per exemple, espirals, èmniscates, cicloides, cissoïdes, trisectrius, etc. (figura I.4, a i b), algunes de les quals també es podien observar a la natura (closques de cargols, banyes, flors, etc.) (Cook 79), apart de les citades seccions còniques i les superfícies que ara coneixem com les quàdriques.

En general, eren objectes introduïts a partir de consideracions de cinemàtica, de dinàmica, o com a llocs geomètrics, etc. De fet apareixen més en contextos de geometria diferencial que de geometria euclidiana o de disseny (Do Carmo 72; Lawrence 72). Resulta també sorprenent trobar en la natura, en el cràter creat per l'impacte d'un gros meteorit, una vora amb forma de "superel·lipse" (un tipus de corba que tractarem en el paràgraf 6.3.3) (figura I.5.a), i que aquesta forma també s'hagi usat intuïtivament en obres humanes molt antigues (figura I.5.b).

Respecte les eines, totes mecàniques i manuals en aquest període, és clar, per tot el que hem dit, que el domini absolut correspon a la parella regla-compàs, que anirien perfeccionant-se. Més tard es van anar desenvolupant noves eines com ara el regle amb marques d'unitats de mesura, l'escaire, el cartabò, el transbordador d'angles, el paral·lel, així com d'altres més curioses com les que dibuixen còniques, copien a escala, etc. (Ibarrola 45; Klein 56; Kostovski 80; Smogorzhevski 81) (figura I.6). Però aquestes darreres eines (les "curioses"), des del punt de vista pràctic, tenien el defecte invers a la qualitat de la regla i el compàs: tant les corbes que dibuixaven com elles mateixes com a eines eren molt menys intuïtives i més cares i rares de trobar; mentre que, des del punt de vista ideològic (i aquí també s'inclouen la regla amb marques i el transbordador), patien l'estigma de quedar fora de les construccions exactes, segons el criteri canonitzat pels Elements. Probablement, com també passa ara, el fet de ser eines "modernes" contribuïa a posar-les en desavantatge davant la solera i prestigi de les clàssiques. Eren, i algunes encara són, usades per necessitats pràctiques però amb cert sentiment de culpa, com aquell que menja peus de porc amb els dits mentre pensa que hauria de fer-ho amb forquilla i ganivet. Per tant, aquestes eines i les corbes que permetien dibuixar resultaren sempre menys populars i molt menys emprades en el disseny.

I.2.1.3) De Descartes i el mètode a l'aritmètica en coma flotant i la lògica binària. Malgrat que els comentaris anteriors arriben pràcticament fins a l'actualitat, paral·lelament a la branca central de la evolució de la geometria euclidiana i a partir del segle XVII, es va produir una novetat important, en part relacionada amb les altres corbes i superfícies no construïbles amb regla i compàs que ja hem comentat. El filòsof R. Descartes, no preocupat centralment en la geometria sinó com un mer exercici per il·lustrar el mètode científic que volia proposar per estudiar tota la realitat del món, va proposar introduir en el pla i en l'espai els famosos eixos perpendiculars, de manera que, per projecció de cada punt sobre els eixos i amb l'ajut d'unitats de mesura, es podien associar **biunívocament** parelles ordenades de nombres reals als punts del pla (ternes, en el cas de l'espai); són les cèlebres coordenades cartesianes. Això introdueix un canvi metodològic i epistemològic molt important, que a més revolucionà no sols la geometria, sinó varies branques de la matemàtica. El que va fer va ser construir un pont de doble direcció entre el món dels nombres i el de les figures sensibles. Si, en el pla, a

cada punt li corresponen dos nombres concrets, es clar que a un subconjunt del pla (una corba) li correspondrà una llei de relació entre els dos nombres, una fórmula d'algun tipus (anàlogament per les superfícies a l'espai). A la inversa, a una relació entre nombres li correspondrà una determinada figura en el pla o l'espai.

Per l'àlgebra, el càlcul, les ciències experimentals, etc., això permetia visualitzar les relacions entre nombres i entendre coses d'aquestes relacions d'una manera cognitivament no equivalent a l'alfanumèrica. Probablement, hagués costat bastant més elaborar un concepte com el de derivada sense el suport intuïtiu de les gràfiques de les funcions; relacionar derivada segona amb concavitat i convexitat només és possible si es disposa del paradigma gràfic, etc. En aquesta direcció, el pont cartesià va ser ràpidament explotat.

Per part dels geòmetres, la possibilitat d'associar equacions a les corbes i superfícies significava disposar, de sobte, de tota la potència del càlcul i l'àlgebra per resoldre problemes geomètrics, alguns difícils d'abordar amb el sistema purament axiomàtic, i, encara més, per imaginar nous problemes invisibles al model anterior, suggerits per la pròpia lògica dels nombres. Sense anar més lluny, cada funció entre nombres proporcionava a la geometria una nova corba: la seva gràfica. D'aquí van néixer aviat la geometria algebraica i la diferencial. De manera semblada al cas del Elements d'Euclides, l'èxit d'aquest mitjà tant potent de vegades ha fet oblidar que una cosa són les corbes i superfícies, que viuen en el món sensible, perceptible pels nostres sentits, i una altra són els nombres i les equacions, que viuen en un món abstracte, mental. Si s'oblida això, es pot confondre fi (la corba) i mitjà (la seva equació). Des de la introducció de les coordenades cartesianes, les corbes de la figura I.4 es dibuixen acompanyades dels corresponents eixos (fig. I.4(c)) i es classifiquen d'acord amb el tipus d'equació que verifiquen. Així, les de la figura I.4(a)-1, s'anomenen cúbiques, perquè les coordenades dels seus punts verifiquen una equació polinòmica de tercer grau. Pel mateix motiu, les de la figura I.4(a)-2 s'anomenen quàrtiques, les de la figura I.4(b)-1 són també algebraiques de grau més alt que 4 i les de la figura I.4(b)-2 són transcendents perquè no verifiquen cap equació polinòmica a coeficients racionals. Per això se'ls hi diu "quàdriques" a les quàdriques. Si mentre es treballa així es té clar que és un recurs metodològic per augmentar la potència de plantejament i resolució de problemes, tot va bé. Si s'oblida això i es pensa que la equació representa la veritable naturalesa d'una corba que s'havia definit abans en termes geomètrics, cometem un error epistemològic, com ja va denunciar Leibnitz (Martínez 91). Un exemple: l'espiral d'Arquímedes és una corba que augmenta la seva distància a un pol de manera lineal amb una potència de l'angle (normalment la potència 1), a mesura que va girant. En un sistema de coordenades cartesianes, la **seva equació** és transcendent. És **ella mateixa** una corba transcendent, com suggereix la classificació de la figura I.4(b)? El sistema de coordenades cartesianes no és l'únic possible per relacionar punts i nombres; només que el substituïm pel sistema de coordenades polars, l'equació passa a ser polinòmica

(lineal, pel cas d'exponent 1). És a dir la relació entre figures i equacions és contingent, dependent del tipus de pont (del tipus de sistema de coordenades) que s'estableixi. És com ser nombre cap-i-cua o no: depèn de la base de numeració.

Mentre la proposta de Descartes revolucionava varies branques de les matemàtiques, la seva influència en el món del disseny va quedar molt esmorteïda degut una vegada més a la falta d'eines efectives per a dibuixar amb precisió la majoria de les figures. Si abans no es podien dibuixar amb regla i compàs, ara tampoc, per molt que vinguin amb una equació penjant del coll. Una cosa és estudiar propietats d'una corba, tangències, curvatures, vèrtexs, inflexions, punts dobles, etc. i una altra molt diferent, dibuixar-la acuradament. Com a molt, es podia marcar una col·lecció de punts per mitjà de la equació i de les coordenades i després unir-los a pols, procediment bastant poc apreciat des de la mentalitat euclidiana. Amb el temps van anar apareixent diverses eines noves, com ara plantilles de corbes, varetes elàstiques (*splines* materials), que es poden fer passar per agulles, o tires de material flexible, que poden doblegar-se, per produir formes arbitràries; encara que de fet són eines, **les considerarem incloses dins del dibuix “a pols” o a “ma alçada”** atès que, tant amb varetes o tires, com a pols, es produeixen corbes de **filiació completament desconeguda**.

En definitiva, el cas és que, fins l'aparició de l'ordinador, els delineants i dissenyadors gràfics en general han usat d'una manera aclaparadorament majoritària *només* eines que permeten dibuixar *només* segments rectes i arcs de circumferència. Com a molt, per alguna altra família de corbes cèlebres, com ara les espirals, hi ha descrits procediments per aproximar-les amb regla i compàs (figura I.7). Aquest esforç d'aproximació s'ha donat especialment per a dibuixar el·lipses i altres còniques perquè, sinó, ni es poden dibuixar perspectives, però només es podia fer trobant uns quants punts de pas i després, o s'aproximava amb compàs traçant un oval, o s'havia de procurar que no tremolés el pols! (figura I.8). Cal subratllar que, versemblantment, per les el·lipses, el procés deu haver anat així: primer dissenyo una circumferència, que és el que sé fer, però al fer la perspectiva no queda més remei que dibuixar una el·lipse; ara bé, si ja he fet la despesa d'aprendre a dibuixar el·lipses i ja les hi he perdut la por, ja les puc incorporar al repertori de formes pels futurs dissenys. En suma: en general, la dificultat per dibuixar-les, ha fet que moltes corbes conegudes teòricament, com les que hem citat abans (figura I.4), hagin intervingut de manera marginal en el disseny.

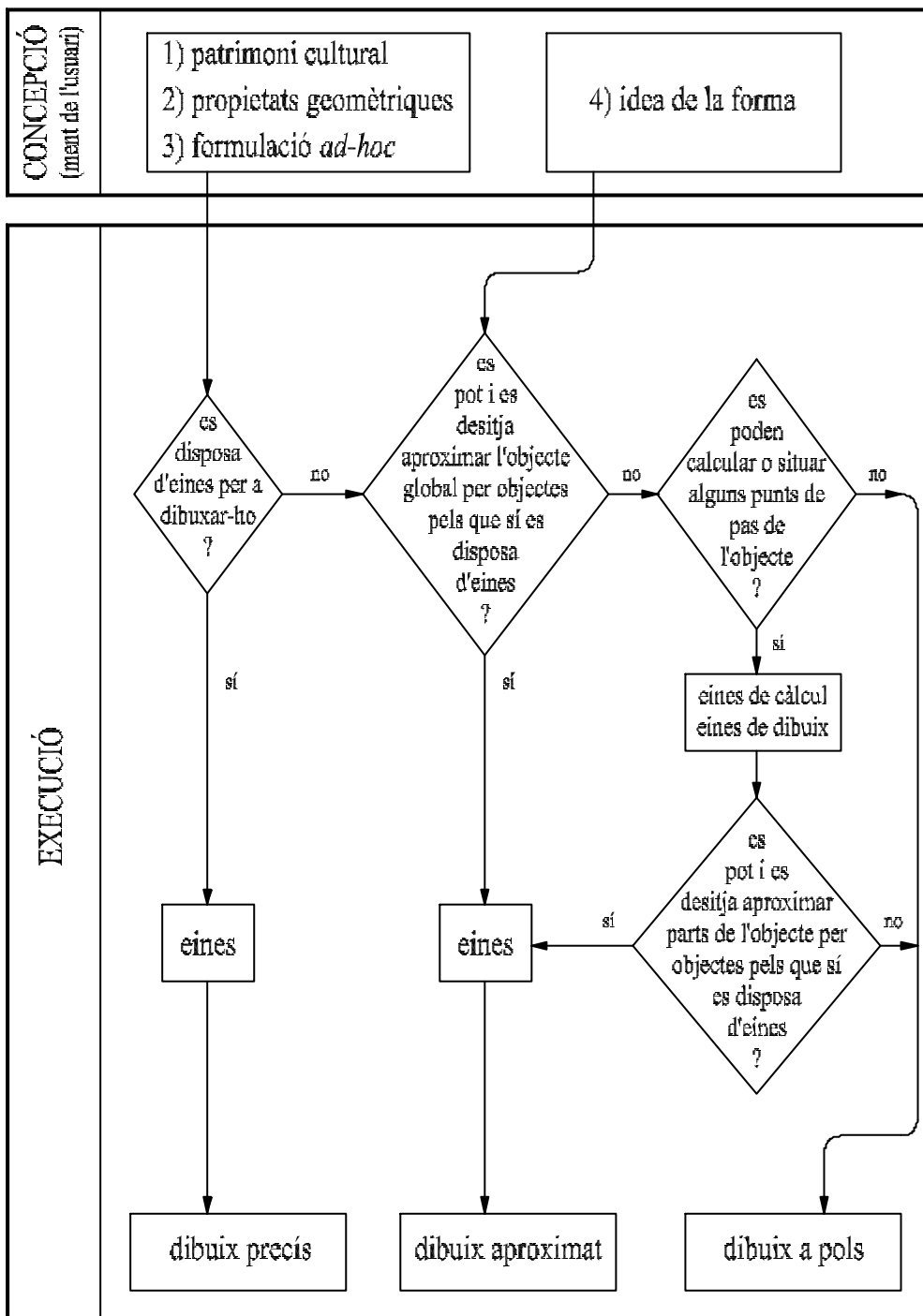
De fet és un cercle viciós: si no tinc eines per dibuixar una corba, tendeixo a no usar-la, però si no la uso, no la conec prou, no la controlo prou, i mai m'acabo de decidir a usar-la, etc.

Aquesta situació ens dona un bon exemple del *feed-back* dialèctic des de les eines de execució cap el marc teòric que comentàvem en l'esquema I.e1. Si es mira a la llum d'aquest punt de vista, es fa evident que la geometria euclidiana és, essencialment, el corpus que proporciona un fonament, un suport teòric al disseny basat en el regla i el

compàs. La geometria euclidiana és el llenguatge, el codi, del regle i el compàs, és la geometria del regle i el compàs. De la mateixa manera que la termodinàmica és la teoria que dona suport a la màquina de vapor i després al motor d'explosió. Com hem comentat abans, l'èxit d'aquestes eines ha fet que els dissenyadors s'acostumessin a concebre els seus dissenys usant com a repertori formal pràcticament només segments rectes i arcs de circumferència. És típic (de fet, gairebé sempre) veure dissenys on qualsevol corba, presumptament més complicada, està constituïda per arcs de circumferència que es van empalmant tangencialment (procediment avalat per la teoria euclidiana), tot mostrant les acotacions de centre i radi de cada arc, junt amb els punts de junció (figura I.9). També hem dit que fins i tot hi ha teories sobre com aproximar el·lipses, espirals, etc. per arcs de circumferència empalmats; tal teoria no s'hagués desenvolupant si s'hagués disposat d'una eina còmoda, fiable i consagrada per l'idealisme imperant que dibuixés aquelles corbes. Ja hem parlat també de les tones de matèria gris dedicades a estudiar els problemes resolubles i les configuracions construïbles amb regle i compàs. Si els grecs haguessin disposat des del principi (abans de Plató) d'ordinadors, s'haguessin plantejat tot això? És cert que també van estudiar corbes que servien per trisecar angles, quadrar cercles, duplicar cubs, etc., alguna de les quals està en la figura I.4, però, en no ser elles mateixes construïbles amb regle i compàs, certament no van tenir massa èxit dins del disseny...Aquesta fixació queda reforçada pel fet que, a més, en la citada tercera fase, la de fabricació d'allò que s'ha dissenyat, les eines corresponents permetien fer fàcilment tot allò que sigui recte (o reglat!) o circular però a tothom (paletes, torners, etc.) se li posaven i se li posen encara els pels de punta quan algú pretenia sortir d'aquest camí planer.

Així doncs, la geometria euclidiana proporciona un llenguatge pel dissenyador euclidià (el del regle i el compàs). En efecte, essent conscientment simplificador, per afavorir la claredat de la exposició, el llenguatge euclidià té un abecedari amb només dues lletres o signes: el segment recte i l'arc de circumferència, en correspondència bijectiva amb el conjunt principal d'eines de dibuix: el regle i el compàs. Tot el corpus teòric de la geometria euclidiana representa una gramàtica que regula la formació de les infinites combinacions formals d'aquests dos signes, diu quines combinacions són sintàcticament correctes i quines no, etc. Una configuració feta amb regle i compàs (pràcticament tot el que s'ha fet fins la segona meitat del segle XX) és pot interpretar com una frase d'aquest llenguatge (figura I.10).

Enllaçant això amb la anterior idea (secció I.1) de que un estil és una "macro" del llenguatge formal bàsic, en el cas de superfícies arquitectòniques, tenim un exemple molt interessant en Gaudí, qui va acabar elaborant un codi d'alt nivell (en el sentit informàtic de la expressió) que tenia com elements bàsics les quàdriques reglades. Amb ell va construir tota una gramàtica de formes els resultats de la qual són ben coneguts i apreciats universalment (Alsina 98; Bonet 00; Nocito 97; Gómez 97; Burry 97) (figura I.11). La pròpia elecció de les quàdriques reglades com a signes elementals del



esq. 1.e3

super-codi també és un espectacular exemple de *feed-back*, no ja des de les eines de dibuix, sinó des de les eines i tècniques disponibles a peu d'obra, que ell coneixia prou bé: al ser reglades es pot construir fàcilment per filades, com en el cas pla; al ser

I.2. El disseny com a procés creatiu i les matemàtiques com a recurs...

guerxades, es disposa de tanta riquesa formal com en el disseny lliure, però ara controlat des del codi.

Tot el dibuix tècnic i la geometria descriptiva no fan més que aplicar la geometria euclidiana al disseny. Queda clar que qui volia dedicar-se a això, delineants, arquitectes, enginyers, etc. havia i encara ha d'aprendre forçosament aquest llenguatge de la mateixa manera que qui vol fer música ha d'aprendre solfeig i després harmonia, etc. Ningú no pretén que pel sol fet de tenir una taula, un paral·lel, un compàs i un "rotting" hom ja sap usar aquestes eines i pot dissenyar, igual que comprar un piano no converteix automàticament en un virtuós; el més probable és que converteixi en un veí capaç de fer exhaurir les existències de taps per les orelles de tot el barri.

Per acabar aquest apartat, adjuntem i comentem l'esquema I.e3 per fixar la nostra idea del "mapa" d'un procés de disseny en aquest període.

La concepció de la forma es produeix en la ment del dissenyador i pot venir donada per una de les següents quatre vies: 1) a partir del patrimoni cultural col·lectiu (serien les corbes i superfícies amb "nom"), 2) per propietats geomètriques o físiques (lloc geomètric, moviment segons una llei, corba que minimitza quelcom, etc.), 3) per una formulació matemàtica *ad-hoc* (per exemple, les gràfiques de funcions, a partir de la introducció de les coordenades cartesianes i posteriorment del càlcul) o 4) simplement per la noció intuïtiva de la forma que es desitja (serien les corbes i superfícies "a sentiment"). Les tres primeres vies tenen moltes interseccions entre elles i tenen també en comú que, si es vol, es pot arribar a disposar d'una formulació matemàtica que les representi. Podríem dir que són corbes amb **filiació matemàtica**, a diferència de les de la via 4. En quan a la execució, sempre manual, sobre la taula, seguiria el diagrama de flux que es veu en l'esquema. Les vies 1, 2 i 3 permeten preguntar-se si es disposa d'alguna eina per realitzar el dibuix; en cas afirmatiu es pot fer un dibuix precís de l'objecte. En cas negatiu, cal preguntar-se si es pot aproximar el dibuix per objectes pels que sí es disposi d'eines (cas, per exemple, de les el·lipses aproximades per ovals) i si realment es desitja fer-ho així (molts delineants dibuixen les el·lipses a pols); en cas afirmatiu, es pot dibuixar amb precisió un objecte aproximat. Finalment, si les respostes són ambdues negatives, cal realitzar el dibuix a pols; tindrem un dibuix aproximat. En el cas de no tenir eines pel dibuix precís de l'objecte exacte, pot succeir que es tinguin eines de càlcul i de dibuix per, almenys, situar uns quants punts exactes de la figura. A partir d'aquests punts, segueix presentant-se la opció de completar la figura dibuixant precisament, amb eines, una aproximació a trossos de l'objecte o fer-ho a pols.

En resum, la aportació de les matemàtiques al binomi concepció-execució consisteix, quasi exclusivament, en la geometria euclidiana per organitzar el pensament que concep, mentre que en la etapa d'execució, en ser manual, pràcticament és inexistent; a tot estirar, algun càlcul per situar punts, o les matemàtiques implícites en el disseny d'alguna eina. La geometria involucrada en la part manual, com ara el traçat d'una tangent a una circumferència, correspon, de fet, a la etapa de concepció, que és

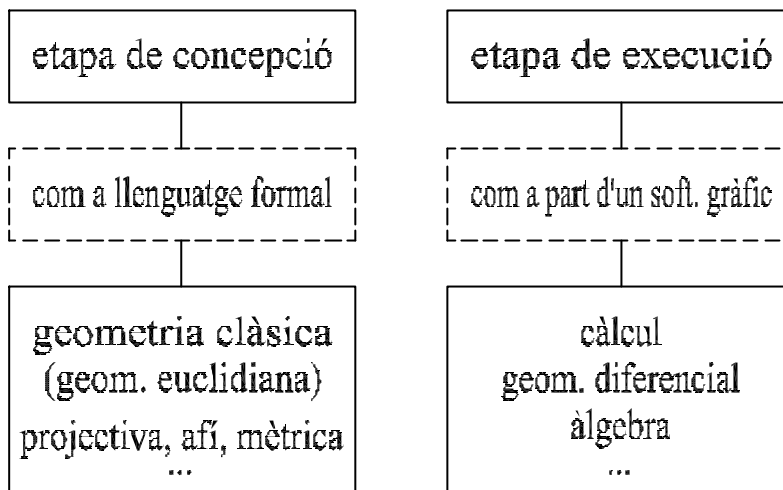
quan s'ha pensat en aquesta tangència, comptant, conscientment o inconscientment, amb que es podria executar després.

I.2.2. Disseny i matemàtiques a partir de l'aparició de la informàtica.

Hom està temptat d'afirmar, com és el costum, que la informàtica ha representat una revolució en el món del disseny. Això és cert només en part. Creiem que, efectivament, la informàtica presenta unes possibilitats que estan ja revolucionant el disseny, però que aquesta revolució encara no s'ha completat. D'entrada, com en tots els àmbits, l'ordinador és una eina que s'introdueix per ajudar a executar, no a pensar. En el cas gràfic, substitueix el regle, el compàs, el paral·lex, etc. no la creativitat; aquesta segueix estant a cura del dissenyador, ara convertit en usuari d'un ordinador equipat amb el pertinent software gràfic. Com a conseqüència d'això, la revolució s'ha produït en la fase d'execució, és a dir, de dibuix del que ha estat concebut.

Com és de sobra conegut, l'ordinador només “sap” fer aritmètica amb el zero i l'u. Amb això i molt enginy se l'ensenyava a calcular, a fer operacions matemàtiques complexes. Però, com arriba aleshores a poder produir dibuixos? No és poden instal·lar un regle i un compàs al seu interior! La única solució (coneguda) és identificar els punts del pla i de l'espai per les seves coordenades (nombres, en definitiva) respecte d'algun sistema de referència. Si tenim en compte que una corba o superfície no és més que un subconjunt de punts del pla o de l'espai, qualsevol intent de distingir, marcar, etc., els seus punts respecte de la resta de punts passarà per tenir alguna “màquina” que permeti, o bé “construir” directament els nombres que representen les coordenades dels punts de l'objecte o, alternativament, comprovar, testar, a partir de les coordenades de qualsevol punt, si pertany a l'objecte o no. Fins a la actualitat, en tots els programes gràfics, aquesta “màquina” es basa, d'una manera o altra, en la teoria de funcions matemàtiques, explotant el fet, no per més conegut menys màgic, de que, introduint un sistema de coordenades, podem establir un pont entre el món abstracte dels nombres i les funcions entre nombres i el món sensible de les formes; el gran invent de Descartes comentat en paràgraf anterior. Cada sistema de coordenades permet definir una injecció des d'un cert domini del conjunt de “funcions en una o dues variables reals sobre \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 ” cap al conjunt de “corbes i superfícies del pla o de l'espai”, ja sigui per **la gràfica de la funció, en el cas explícit** (no paramètric), **pel subconjunt de nivell zero, en el cas implícit o per la imatge, en el cas paramètric** (Jacas 00). La representació gràfica va néixer pensada “des de les funcions cap als dibuixos”, per visualitzar, més qualitativament que quantitativament, les relacions funcionals que vinculaven certes magnituds amb altres (càrrega sobre una biga i deformació, preu de la benzina i inflació); aquí l'objectiu és la funció, la “representació gràfica de funcions” és un mitjà. Explotava un sentit de recorregut del pont entre figures i nombres. El que fa la informàtica gràfica és explotar les possibilitats de l'altre sentit de recorregut: ara el que interessa és l'objecte gràfic i la funció és un mitjà per obtenir-lo. Quasi es pot parlar de

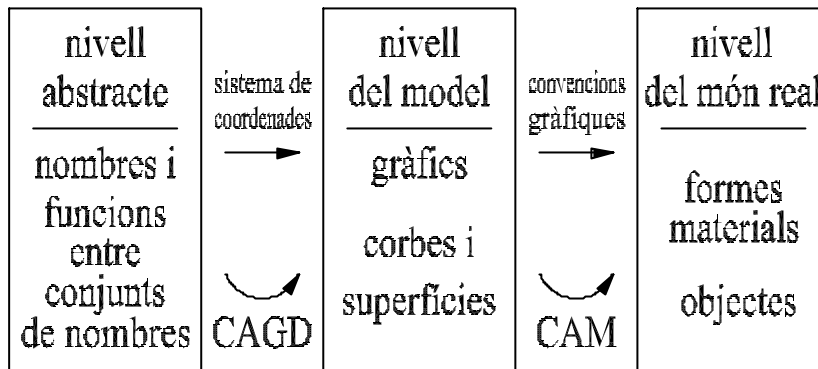
aportació actual de les matemàtiques al disseny



esq. I.e4

“representació funcional de gràfiques”. D’aquesta manera, es pot rescatar **per al disseny** la potent eina cartesiana, que, com hem comentat, no s’havia pogut aprofitar abans per manca d’eines. Ara l’ordinador no sols és una eina que sí pot treure partit d’aquesta relació entre figures i funcions sinó que aquest procediment **és l’únic conegut** perquè l’ordinador pugui servir per dissenyar! El que nosaltres creiem, com veurem, és que no s’ha anat prou lluny en l’aprofitament d’aquest recurs. Com a comentari marginal, no deixa de ser curiós que Descartes, per un costat, inventés el pont, els sistemes de coordenades i, per un altre, conjecturés que la glàndula pineal era el nexce de comunicació entre l’ànima i el cos: resulta que són els sistemes de coordenades els que fan de glàndula pineal entre la abstracció matemàtica i la realitat observable dels gràfics!

Així, ara, amb la informàtica, en algun lloc entre la concepció de l’objecte i la seva modelització interna hi haurà una o varies funcions (implícites, explícites, paramètriques ...) que relacionaran les seves propietats geomètriques amb les coordenades dels seus punts. Per exemple, per molt que l’usuari marqui “físicament” en la pantalla el centre d’una circumferència i faci el gest d’obrir un compàs virtual per marcar-ne el radi, el centre només existeix com les coordenades d’un punt, el radi, com un nombre real i la circumferència com una formulació matemàtica, possiblement, les seves equacions paramètriques. El mateix passa quan marca dos punts en la pantalla per traçar un segment recte (figura I.12). Quan s’hagin de fer transformacions (interseccions, girs, escalats, etc.) sobre els objectes o simplement s’hagin de visualitzar,



esq. I.e5

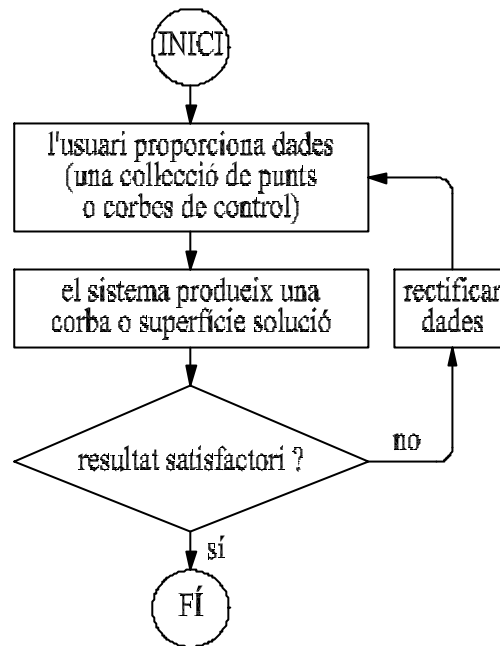
s'usarà la seva formulació per calcular-ne tants punts com calgui, als quals se'ls aplicarà l'acció pertinent. Així, quan es traci la tangent des d'un punt a la circumferència, internament no es traçarà cap arc capaç, sinó que es resoldrà un sistema no lineal de equacions, o bé, quan s'ha de fer un gir, s'aplica una matriu, etc., encara que l'usuari no se'n adona i pot seguir amb la il·lusió de que tot és com abans. Això és important, perquè, malgrat que permet treballar com si fos amb regle i compàs, aquí ja s'ha produït un divorci entre la manera de pensar i treballar de l'usuari, els seus hàbits mentals, que l'ordinador li permet mantenir, i la autèntica manera com treballa, internament, l'ordinador. L'ordinador queda forçat a mantenir una mena de doble personalitat. A més, si es resol un sistema de equacions, com en el cas de les interseccions, les solucions seran nombres en coma flotant, és a dir, aproximats; si s'ha de dibuixar una corba, en realitat es dibuixa una poligonal, amb tants vèrtexs com calgui perquè "no es noti" (esquema I.e4). On queda tot allò de "problema resoluble amb regle i compàs", l'ideal platònic de solució exacta, etc.? Aquí hi ha tot un canvi epistemològic que s'amaga degut a la política, creiem que no del tot encertada de "tot ha de ser com si res no hagués canviat, l'usuari no té perquè saber com funciona internament l'ordinador, no té que ser un expert en informàtica, tot comoditats, que no s'atabali, bla, bla, bla ...". Creiem que això està en la línia postmoderna, *ligh*t, del mínim esforç, mínima preocupació, màxim entreteniment en tot, que caracteritza aquest canvi de mil·lenni i que prové de l'afany de màxim benefici en vendes.

Hem parlat de modelització interna. En efecte, l'ordinador no pot guardar el dibuix com a tal en el seu interior; el que elabora i emmagatzema, a partir de les dades del usuari, és un model intern de l'objecte, principalment en termes, com hem vist, de funcions matemàtiques, model que, **pel programa és l'objecte en sí**. Posteriorment, només per monitoritzar el procés o per presentar el resultat en un suport permanent, caldrà dibuixar l'objecte. Aquí cal recordar que, en una fase posterior, la informàtica, a través del C.A.M., pot procedir a fabricar materialment l'objecte dissenyat, de manera

que, un cop l'objecte ha estat concebut, el procés pot ser completament automàtic fins tenir-lo acabat. El model intern i la seva monitorització en pantalla no són l'objecte mateix ni una fotografia (tampoc ens referim aquí a les tècniques de *rendering*, que no tenen a veure amb el disseny sinó amb la seva visualització "realista") sinó una representació codificada segons les convencions gràfiques a l'ús (per exemple, es solen usar línies per indicar el contorn d'un objecte, quan en la realitat no sol haver tal línia). Aquestes convencions gràfiques són les que usa el C.A.M. per dirigir la màquina-eina en la fabricació de la peça dissenyada. Els tres nivells en què actua la informàtica com a eina d'execució (nivell abstracte de funcions matemàtiques, nivell gràfic de model intern monitoritzable, nivell material d'objecte fabricat) queden esquematitzats en l'esquema I.e5. Nosaltres ens interessem pels dos primers nivells, com ja hem dit.

Ara, encara que obvi, és molt important evidenciar que, ja que l'ordinador usa funcions matemàtiques per representar i modelitzar els objectes, tant li és representar un segment recte o un arc de circumferència o un pedaç de esfera, com qualsevol altre corba o superfície, amb tal de que algú l'indiqui la funció que la representa; l'únic problema pot ser de cost computacional, si la fórmula involucra funcions molt costoses d'avaluar, però, en tot cas és qüestió de deixar que faci. Ara es pot representar tant exactament (és a dir, exactament en la fórmula però sempre aproximadament en la visualització, encara que sense que "es noti" a la vista) una circumferència, com una espiral, la gràfica de la funció sinus, etc. Totes les aplicacions gràfiques venen proveïdes d'un cert repertori de formulacions de corbes i superfícies conegudes (repertori variable encara que quasi sempre escàs), de manera que no cal que l'usuari en conegui la formulació, només cal que les invoqui, com invoca l'arc de circumferència. Per les que no incorporen, solen oferir un llenguatge de programació sobre la pròpia aplicació (LISP, C, etc.) que permet introduir la formulació de la corba o superfície desitjada, junt amb instruccions sobre el seu dibuix. Però llavors cal que l'usuari en conegui la dita formulació. També es pot programar per tal de produir corbes o superfícies que siguin solució de problemes en termes d'equacions diferencials, variacionals, etc. usant, si cal, mètodes numèrics (Runge-Kutta, elements finits,...).

Amb això hem recuperat en versió informàtica, ampliant-les de manera quantitativament no discreta, les antigues eines. D'acord amb les vies de l'esquema I.e3, ara podem produir, amb la mateixa exactitud, tots els objectes de les vies 1, 2 i 3, però queda per modelitzar una cosa del sistema antic: la via 4, és a dir, els objectes concebuts directament per la noció de la forma que volem i que porten a dibuixar-los "a sentiment", o a fer-ne models amb sorra o guix, sense cap coneixement d'una possible formulació matemàtica. Són objectes que podríem anomenar subjectius o arbitraris. Com simula això un programa informàtic? Les aplicacions gràfiques solen incorporar una funció "esbós" que permet produir una corba (una polilínia) per mitjà del moviment directe del "ratolí". Però la qualitat de tal corba sol ser pitjor que el dibuix amb el pitjors dels polsos, per tant, cal trobar un altre recurs per produir corbes i superfícies a



esq. I.e6

sentiment però de certa qualitat (suavitat, nombre d'inflexions, acotació de l'objecte, etc.). Recordis que, per tenir un model intern d'un objecte amb el qual operar, l'aplicació necessita una formulació matemàtica. Si aquesta no és coneguda, l'aplicació, a partir del suggeriment de la forma junt amb certes especificacions de qualitat (informacions que aporta l'usuari), li haurà d'assignar d'ofici una formulació, de manera similar a com l'Estat assigna d'ofici uns pares adoptius als nens abandonats dels que no se'n coneixen els pares biològics. Quins mètodes hi ha per aquesta tasca? Afirmem que totes les tècniques i mètodes involucrats dins del C.A.G.D. (corbes i superfícies de Bézier, B-splines, N.U.R.B.S., pedaços de Coons, etc.), de les que un bon tractament es pot trobar en (Farin 90), essencialment el que fan és proporcionar alternatives, amb diferents avantatges i inconvenients en cada cas, per modelitzar el disseny a sentiment, és a dir, modelitzen la antiga "ma alçada". Això és així perquè tant en el dibuix a ma alçada com en l'ús d'un mètode de C.A.G.D. es produeix un objecte pensat exclusivament a partir de la seva forma, no a partir d'una formulació matemàtica o per ser un cert lloc geomètric, seguir alguna llei cinemàtica, minimitzar algun funcional, etc. Cert que, per exemple els *splines* cúbics naturals minimitzen una integral relacionada amb la curvatura, però aquesta minimització no és la causa de la corba: el suggeriment de la forma per mitjà de punts de pas està abans, la minimització intervé com una qualitat tècnica del resultat, no com la seva causa. Tant en el dibuix a ma alçada com en l'ús d'un mètode de C.A.G.D. el dissenyador ignora, o pot ignorar perfectament, la

existència d'una formulació matemàtica de l'objecte que està dissenyant. En el cas informàtic, la forma queda decidida per les dades, gràfiques, que entra l'usuari; després cada mètode utilitza un repertori prefixat i tancat de funcions-base, generalment polinòmiques o racionals, que combina amb els *inputs* per produir la dita formulació d'ofici; de fet, el procés sol ser interactiu i després d'un primer resultat, l'usuari pot refer les dades d'entrada per anar ajustant la forma desitjada, de la mateixa manera que amb el llapis també es va ajustant el esbós fins la forma final; veure el procés en el diagrama de l'esquema I.e6. Però les funcions-base són independents del particular objecte, és a dir, de la forma, igual que una caixa acústica és independent del particular instrument que reproduïx, només són un recurs tècnic intern que garanteix la qualitat de la corba o superfície resultant, però no diuen res de la seva filiació geomètrica o algebraica original.

Una ressenya sobre aquests mètodes es recull en l'apartat de l'estat de l'art, per no trencar aquí el fil del discurs. Però sí farem aquí una reflexió respecte les funcions que usen, essencialment polinomis o quocient de polinomis. L'origen del ús de polinomis cal situar-lo en les tècniques d'interpolació de funcions desenvolupades per Lagrange i Newton i és degut a que són les funcions més fàcils de avaluar i manipular; de fet, per avaluar altres funcions es solen utilitzar també els polinomis. La seva aplicabilitat queda avalada pel teorema d'aproximació de Stone-Weierstrass. Un cop apareguts els ordinadors, la necessitat de minimitzar el cost computacional va reforçar la tendència a involucrar exclusivament polinomis en els mètodes de generació de corbes i superfícies. Però els ordinadors cada dia tenen més memòria i més velocitat de càlcul, alhora que l'algorísmica ha optimitzat molt la implementació i els procediments d'avaluació de les demés funcions, com ara les trigonomètriques, exponencial i logaritme, etc., i la perspectiva és que la millora seguirà. Per tant, poder ja no és tant imperiós aferrar-se als polinomis. Nosaltres veiem la qüestió de la següent manera: si es tracta de produir una formulació per una corba arbitrària, només concebuda en termes morfològics, està bé usar polinomis o quocient de polinomis, perquè són "barats" i valen per aproximar qualsevol cosa; però és tal el costum d'usar-los que es tendeix a aplicar-los a problemes pels que no són la millor solució. Per exemple, es pot trobar en llibres la manera de produir amb tres arcs de corbes N.U.R.B.S. una circumferència completa (Farin 90; veure també Fiorot 97; Akkiraju 98; Fang 98). Això és com forçar-se a pintar amb el peu o la boca tenint mans! Que no és millor, més natural, la parametrització $x(t) = x_0 + r \cos(t)$, $y(t) = y_0 + r \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$? Algun programa no incorpora aquestes funcions? Quants milisegons de diferència hi haurà en el temps d'avaluació? I aquí encara les dues vies són matemàticament correctes, però ... com modelitzar una espiral o una epicloide per mitjà de quocients de polinomis? i una graderia o qualsevol objecte amb moltes arestes i trams plans? Nosaltres disposem d'una parametrització explícita, controlable per paràmetres i bastant senzilla d'una grada ultra-isòptica (concepte que definirem a (6.3.1)) tan llarga com es vulgui. Aproximar a

trossos una circumferència complerta o varies voltes d'esprial per arcs de corbes racionals és un recurs tant migrat com ho era abans aproximar una el·lipse per arcs de circumferència formant un oval. Sols que abans estava justificat perquè les eines no donaven per més i ara sí donen per més. És cert que modelitzar tots els objectes per una mateixa família de fórmules (NURBS, per exemple) facilita un tractament unificat de les operacions posteriors, com ara retallats, interseccions, etc. però no deixa de semblar una mica artificial i, en certa forma, representa una concessió a la comoditat metodològica.

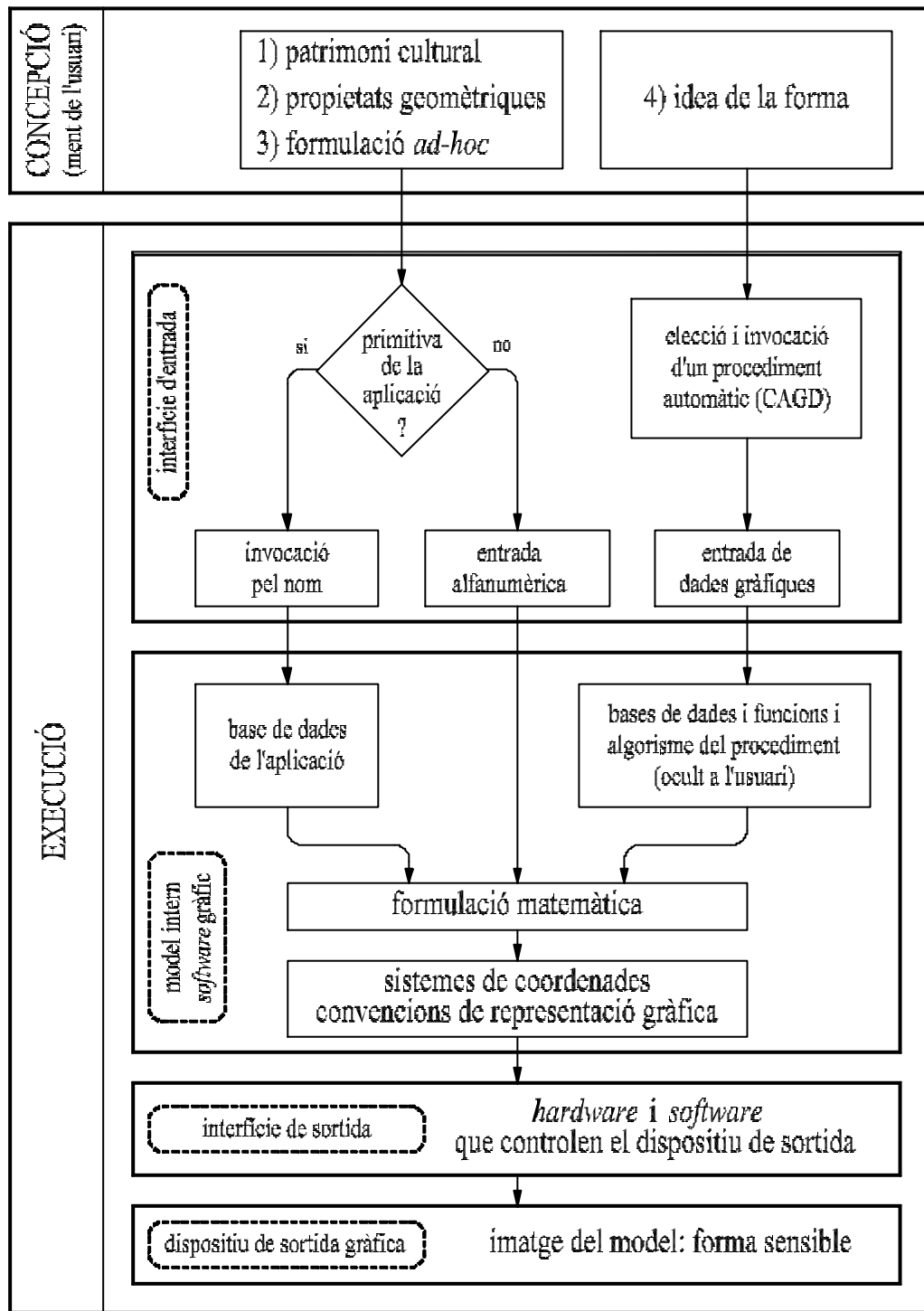
En definitiva, el repertori de mètodes del C.A.G.D. són la aportació genuïnament nova de la informàtica al disseny, però no s'ha de confondre el repertori nou amb l'únic repertori disponible. En resum, **si l'objecte no té filiació matemàtica coneguda, doni-se-li una basada en polinomis, però si en té, o, amb una mica d'esforç, se li'n pot dotar d'una, utilitzi's.**

Tot el que hem desenvolupant des que ha començat aquest apartat es refereix a la fase d'execució del disseny. Hi ha hagut un canvi de les eines manuals a la gran eina electrònica i les matemàtiques han passant a ser una peça essencial en el funcionament d'aquesta eina. Les matemàtiques abans quasi no intervenien en la fase d'execució i ara són el combustible algorísmic que la fa possible. Però falta repassar com ha quedat la aportació de les matemàtiques a la fase de concepció. Aquí és on creiem que la revolució mencionada al principi d'aquest apartat no s'ha acomplert. El dissenyador, llevat de que disposa d'una "ma alçada virtual" molt més fiable, segueix concebut en termes del llenguatge euclidià. No hi ha més que veure l'estructura dels menús de les aplicacions i l'aspecte dels plànols que fan els delineants informatitzats, amb les seves acotacions de centres i radis d'arcs de circumferència, per veure que és així. El codi organitzador i "verbalitzador" del flux d'idees en brut segueix sent l'euclidià, tot i que ara això ja no està justificat per la manca d'eines de dibuix o per la manca d'eines per la fabricació (disposem del C.A.M.). En l'apartat següent argumentarem perquè creiem que aquesta situació no és satisfactòria i analitzarem quines són per nosaltres les seves causes.

L'esquema I.e7 reflecteix el nou "mapa" d'un procés de disseny en l'actualitat, tot resumint el que hem comentat.

La fase mental de concepció està pràcticament igual, sols que ara, al seure's per pensar, el dissenyador sap que ho tindrà més fàcil per produir, si vol, corbes i superfícies de fórmula coneguda qualsevol així com de fórmula desconeguda i disseny a sentiment. El que és més complex que abans és la fase executiva. Aquí l'ordinador el podem pensar descompost conceptualment en el interfície d'entrada, el nucli del software gràfic que conté el model intern de l'objecte, el interfície de sortida i el dispositiu de sortida per la visualització. Alternativament, pot haver un interfície de sortida cap un mòdul de C.A.M. El text de les caselles fa autoexplicatiu l'esquema.

I.2. El disseny com a procés creatiu i les matemàtiques com a recurs...



esq. I.e7

Cal mencionar, finalment, que la introducció de la informàtica també permet abordar, amb possibilitats d'èxit, tasques que abans es podien tractar només de manera

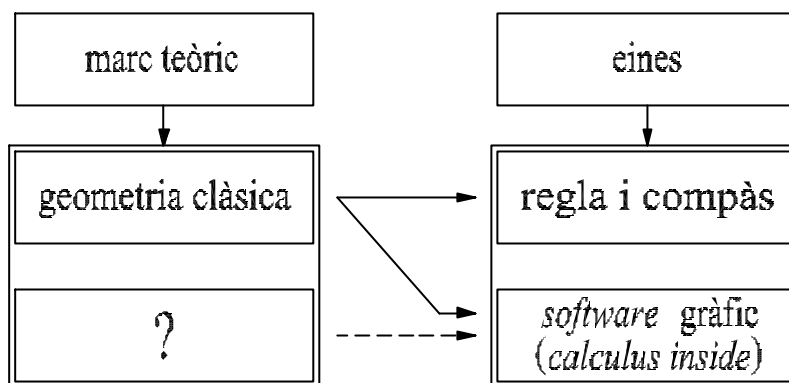
molt simplificada. Estem pensant, entre d'altres qüestions, en la gestió i resolució de les diverses restriccions i lligadures entre els diferents paràmetres de disseny que s'aborda dins la disciplina que podem anomenar genèricament com disseny paramètric (Monedero 00). Aquesta disciplina no actua pròpiament a l'etapa de concepció, almenys la de la concepció dels grans trets de les formes que es volen dissenyar, però sí intervenen, abans de la de execució, per acabar de concretar les mides finals de cada part dins del tot. Així doncs, podríem dir que el disseny paramètric es situa a mig camí entre les etapes de concepció i la d'execució, permeten resoldre càlculs anteriorment impossibles de fer amb paper i bolígraf.

I.3. Crítica a la situació actual i tesi.

Cap el final de l'apartat anterior hem afirmat: "El codi organitzador i "verbalitzador" del flux d'idees en brut segueix sent l'euclidià, tot i que ara això ja no està justificat per la manca d'eines de dibuix o per la manca d'eines per la fabricació (disposem del C.A.M.)". Doncs bé, creiem que el que ho justifica és el desconeixement d'altres possibles codis que s'adeqüin a la nova eina com el codi euclidià s'adequava a les velles. Si es manté la concepció euclidiana és per la por a perdre el control del disseny si se'n surt. I si algú se'n surt, produeix objectes tan arbitraris, tan d'origen i propietats desconegudes, que llavors la feina és dels que l'han de portar a terme ... i dels que l'han de finançar! (pensis en el museu Guggenheim de Bilbao, o en la Pedrera, per exemple). Qualsevol pot usar lliurement un *B-spline* igual que abans podia usar una vareta flexible sense cap criteri, només cal invocar la ordre "*B-spline*" del menú i donar uns quants punts de la mateixa manera que podem prémer arbitràriament les tecles d'un piano sense saber res de música. Però si volem dissenyar o compondre música necessitem, com ja hem dit, un marc conceptual, un codi que organitzi les idees i de moment, a nivell gràfic aquest codi és l'euclidià. Això no és tant estrany: sempre les revolucions a nivell conceptual han anat darrera dels canvis tecnològics. Un exemple d'això ens el proporciona el cinema. En els primers temps del cinema, els directors seguien concebut les escenes i els actors seguien actuant com si es tractés del teatre. La nova tecnologia els oferia unes possibilitats tècniques, per exemple, pels primers plans, per canviar el punt de vista, per canviar la distància focal, etc., que modificaven les possibilitats expressives però que encara no sabien com explotar. Usaven una eina amb recursos nous, o millor dit, propis, amb mentalitat antiga. La nova tecnologia requeria, exigia, una mentalitat nova, un llenguatge propi, que s'havien d'anar descobrint poc a poc. El llenguatge, els codis del cinema no són, no poden ser els mateixos que els del teatre. De la mateixa manera, no sembla raonable esperar que el llenguatge de la taula amb paral·lel sigui el mateix que el del despatx amb ratolí, ordinador, impressora, etc. Sens dubte degut als pocs anys des de la introducció del ordinador com a eina pel grafisme, els dissenyadors actuals es comporten encara com els directors de cine pioners, és a dir, aferrant-se al llenguatge antic, mentre no en surti un de nou.

Ja ho hem dit, l'ordinador no usa regle i compàs sinó funcions matemàtiques, sobre tot equacions paramètriques de corbes i superfícies. Si disposa de la fórmula corresponent, tracta amb la mateixa naturalitat i indiferència un segment recte, un arc de circumferència, una estrofoide recta, una clotoide, ... o una corba de Bézier, i la visualització final sempre és aproximada, encara que sigui amb tanta aproximació com es vulgui, degut al càlcul en coma flotant d'un nombre finit de punts de l'objecte que s'uneixen després per segments rectes. També és el càlcul en coma flotant el que permet trobar interseccions, tangències; tanmateix, ara tots els polígons regulars són construïbles en la mateixa mesura, altre cop la que permet el càlcul, etc. Els ideals

platònics respecte la geometria ja no inspiren els algorismes d'una aplicació gràfica, però, per una mena de pudor, aquesta fa com si es seguissin mantenint de cara a l'usuari, que té la il·lusió de que encara està treballant euclidianament. Així, l'ús de funcions és només com a eina amagada al cor del software, no cal que l'usuari sàpiga que una circumferència es traça gràcies a funcions i menys que les conegui; per traçar *splines* o altres corbes de forma lliure, només ha d'invocar-les i jugar a posar i moure punts, no cal que conegui les funcions polinòmiques o racionals que fan possible la corba ni les subtils tècniques per preservar les propietats de suavitat, etc. Malgrat l'ús intern de funcions, les interfícies, els menús, el tipus d'accions que s'ofereixen, segueixen tenint una mentalitat euclidiana, una tendència a organitzar les idees com si encara es treballés amb regle i compàs. Fent un paral·lelisme, podríem dir que l'ordinador és com un gran restaurant modern que vol presumir de qualitat, millor dit, de la idea de qualitat que tenen els clients (que, segons la moda, està associada amb els mètodes artesanals i antics). Tant és així, que, per millor reflectir la política d'aparentar que encara s'és euclidià proposem que en lloc de noms com PepeCAD o d'altres tant avorrits, les aplicacions triïn títols com "El dibuix de l'avi" o "Dibuix d'abans", o coses per l'estil. Creiem, en canvi, que, lluny de ser un defecte, l'abandó, o millor dit, la superació, dels ideals geomètrics de Plató i Euclides en favor del tractament calculístic-funcional és, apart d'inevitable per les pròpies exigències de la tecnologia informàtica, una millora substancial, al proporcionar una eina molt poderosa, que permet fer moltes més coses que les antigues sense que es deixi de poder fer res que no es pogués fer abans i això no s'ha d'amagar sinó que s'ha de potenciar. Però potenciar-ho no consisteix en fer creure que el summum de la nova eina és fer *splines* o N.U.R.B.S., perquè això no introdueix cap canvi en la mentalitat de l'usuari ni en la seva forma d'enfocar el disseny, només evita els exercicis per tenir un bon pols. En definitiva, ens trobem davant de la situació esquizoide de que, en matèria gràfica, **l'ordinador és internament funcional mentre que és externament euclidià** (recordar l'esquema Le4). De l'ordinador s'aprofita només la seva força bruta perquè calculi i dibuixi més ràpid els dissenys de sempre, però no s'aprofita la nova frontera d'objectes que ara permet concebre perquè ara són possibles; obre tot un nou món de possibilitats formals que de moment es menysprea. És com tenir un tren d'alta velocitat corrent sobre rails vells, no s'aprofita tota la seva potencialitat. És com tenir un negoci de transport de peix i comprar un poderós camió frigorífic, ara que hi ha autovies i autopistes, per després portar el negoci amb la mateixa mentalitat que quan es tenia un carretó tirat per una mula i una mica de gel i les carreteres eren camins de carro. No s'exploten totes les possibilitats que ofereix perquè falta el llenguatge conceptual natural a aquestes possibilitats, a aquesta nova tecnologia. La geometria euclidiana no és un llenguatge prou potent per treure tot el profit a la informàtica gràfica, de la mateixa manera que el FORTRAN 77, en particular les seves rutines d'input-output, bastaven per pantalles alfanumèriques però és un llenguatge inapropiat per programar interfícies que treguin tot el profit de les actuals pantalles gràfiques. En conclusió, la nostra tesi és que, tal com es



esq. I.e8

reflecteix en l'esquema I.e8, mentre hi ha dos tipus d'eines, només hi ha un tipus de marc teòric, l'euclidià, que va néixer per cobrir l'ús del regle i el compàs i que ara cobreix també, com pot, l'ús de l'ordinador; afirmem que en la columna de marcs teòrics, en el nivell de concepció, efectivament i ha una casella que roman buida esperant ser omplerta amb un llenguatge que doni resposta al nou recurs tecnològic, en el nivell d'execució; afirmem que, ja que el que és natural a l'ordinador és el llenguatge calculístic-funcional, el nou marc teòric s'haurà de basar en el món de les funcions matemàtiques i afirmem que, mentre aspirin a ser invisibles a l'usuari, tots els mètodes inclosos en el C.A.G.D. només representen aportacions a la columna d'eines d'execució, dins l'expressió "calculi interior" (esquema I.e8). Cal subratllar que un tal nou marc teòric ha de contenir com a subconjunt tota la geometria euclidiana; es tracta d'una superació per la via d'expandir, no d'un "cop d'estat" que renegui del passat. El que es pot fer de manera natural dins d'un marc euclidià no cal forçar-ho a ser fet en un altre marc; això seria esnobisme.

El nostre manifest final és: El disseny i les matemàtiques s'ha articulats durant segles dins la placidesa euclidiana. La informàtica ha volgut entrar discretament, sense pertorbar aquella relació, només com una eina que permetia fer el mateix de sempre però més ràpid i amb més comoditat. Però ha arribat l'hora de que la informàtica perdi la timidesa i digui el que sap fer si s'utilitza amb la seva pròpia lògica i de que el disseny i les matemàtiques es treguin el son de les orelles i acceptin la nova complexitat que la nova eina permet, perquè aquest augment de complexitat no significa altra cosa que un augment en la riquesa del que podem atrevir-nos a pensar i produir.

D'acord amb aquest plantejament, la Part I d'aquesta memòria recull aportacions en la línia més convencional dels mètodes de C.A.G.D., és a dir dins de la tasca que les matemàtiques desenvolupen per modelitzar la màlçada dins de la fase de execució, mentre que la Part II recull el repte de proposar un principi de llenguatge

matemàtic-funcional per omplir la casella, per nosaltres existent i buida, de l'esquema I.e8, un llenguatge adient a les potencialitats de la informàtica gràfica, dins de la fase de concepció.

I.4. Preliminars. Estat de l'art.

Per ser conseqüents amb els criteris exposats fins aquí, un repàs als antecedents d'aquesta memòria hauria d'incloure, per la banda de la fase de concepció, un recordatori dels temes de geometria que a I.2.1. hem agrupat convencionalment sota la denominació de geometria euclidiana, la única, segons hem argumentat, que alimenta aquesta fase; mentre que per la fase d'execució, hauríem de parlar dels algorismes matemàtics que el software gràfic sol incorporar per modelitzar primer i visualitzar després en un dispositiu de sortida els objectes gràfics (corbes, superfícies i sòlids). No obstant, creiem que aquest lloc no és apropiat per recordar alguns d'aquests tòpics. La geometria euclidiana és prou universal com per resultar pretensions o perogrullesc resumir-la aquí; al propi apartat I.2.1 ja hem inclòs referències on consultar el que calgui. De la mateixa manera, la formulació i propietats de les corbes i superfícies ja catalogades també és un tema prou comú i també hem citat llavors referències oportunes. En definitiva, creiem que l'únic bloc temàtic que es pot considerar, no com un precedent massa genèric ni com un tema col·lateral, sinó com l'precedent genuí de les qüestions que s'aborden en aquest treball, és el que es refereix al naixement i desenvolupament d'aquelles tècniques agrupades sota la denominació ja citada de C.A.G.D que tenen a veure amb el **disseny o modelització de corbes i superfícies**. Al·ludim només a una part de l'univers del C.A.G.D. perquè dins o a prop d'ell hi ha branques que s'aparten de les qüestions que tractem aquí. Per exemple, una alternativa al disseny geomètric és la tècnica de modelatge de sòlids, que arrenca d'un repertori de volums elementals que són combinats mitjançant operacions booleanes fins produir la forma desitjada (Farouki 85). Tampoc tractem objectes fractals (Foley-Van Dam 96, pàgina 1020). Altres problemes que cauen fóra del nostre marc són els que segueixen a la generació de l'objecte: moviments, manipulació (interseccions, allargaments, etc.), visualització (ocultació, *rendering*), etc. Tanmateix, com que els objectes en els que pensem són estàtics, aquí tampoc estudiem temes relacionats amb l'interessant problema de l'animació. En qualsevol cas totes aquestes qüestions es poden trobar extensament tractades en textos com (Faux-Pratt 85; Rogers 85; Foley-Van Dam 96; Hearn-Baker 97, etc.) i en els diferents números de revistes especialitzades com ara Computer Aided Geometric Design, Computer Aided Design, Computers & Graphics, IEEE Computer Graphics and Applications, Automation in Construction, etc.

Segons el nostre criteri, com hem dit, la part del C.A.G.D. dedicada a modelització de corbes i superfícies només agrupa algorismes, mètodes, tècniques que, cadascuna amb diferents propietats, avantatges i inconvenients, serveixen en última instància per reproduir dins de la tecnologia informàtica la primera etapa de la elaboració dels dissenys que abans s'iniciaven a ma alçada o a sentit o amb un *spline* material (i que seguien per un model de guix sobre el que prendre mides, etc., fins arribar al motlle final). És a dir, només una part del mapa estructurat que hem

proposat (esquema I.e7). Però, segons ens consta, la aparició de la informàtica només ha provocat, essencialment, esforços de recerca (a nivell teòric) en aquesta línia. Per tant d'ella partim i, de fet, a ella dediquem la Part I.

D'acord amb això, centrarem la descripció de l'estat de l'art en fer una ressenya de l'origen, evolució i estat actual del la part del món del C.A.G.D. que ens afecta.

Aquest camp neix en l'àmbit de la construcció de motlles per fabricar peces de tot tipus, per exemple (o especialment), dins de les indústries automobilística, aeronàutica i naval. Amb la creixent potència i rapidesa dels ordinadors, junt amb l'aparició d'entorns gràfics i controladors de màquines-eina, es va veure la possibilitat de substituir avantatjosament el treball artesanal d'un operari, manipulant un torn o una fresa a partir d'un disseny realitzat per mitjà de tècniques clàssiques de dibuix tècnic i geometria descriptiva, per una màquina-eina controlada numèricament per un ordinador mitjançant una estructura de C.A.D.-C.A.M., sigles angleses de Disseny Assistit per Ordinador – Manufactura Assistida per Ordinador. Però llavors és l'ordinador qui ha de “dir” a la màquina quina forma s'ha de produir. Això va comportar la necessitat de construir un model matemàtic, en forma compatible amb l'ordinador, de la corba o superfície proporcionada pel dissenyador.

Aviat es veié que una de les tècniques més profitoses era la de produir una representació funcional-paramètrica de la corba o superfície, de manera que les coordenades (x, y, z) fossin funcions d'un o dos paràmetres respectivament, variant dins d'interval adients; eventualment funcions paramètriques definides a trossos fins completar tota la peça.

En altres paraules, en aquest tipus de representació:

- les corbes són imatges, en el pla o l'espai, d'un domini D de la recta. En el nostre cas, D sempre serà un interval, o sigui, ens referim a imatges d'aplicacions del tipus

$$\vec{\Phi}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k, \text{ amb } k = 2 \text{ ó } 3.$$

- les superfícies són imatges, en l'espai, d'un domini D del pla. En el nostre cas, D sempre serà un rectangle, o sigui, en referim a imatges d'aplicacions del tipus

$$\vec{J}: [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Veure figura I.13. Es pot trobar una exposició elemental d'aquests temes a (Jacas 00).

Així doncs, es parteix d'un disseny previ, d'una *forma*, en principi tant arbitrària com es vulgui, provenint ja sigui d'un model físic (cas estudiat per Coons) o d'un disseny de C.A.D. (relacionat amb Bézier), de la que s'escullen tants punts significatius com calgui, i es requereix construir una corba o superfície parametritzada, la imatge de la qual, en el pla o en l'espai, reproduïx satisfactòriament la forma primitivament dissenyada.

Les corbes o superfícies parametritzades estaven ben estudiades en l'àmbit de la geometria diferencial, però en el sentit que va des de la parametrització cap a la forma i no a l'inrevés, mentre que l'ajust de funcions a uns valors donats pertanyia tradicionalment al món de la interpolació clàssica, dins del càlcul numèric, on el que es volia era aproximar-se a una funció subjacent de la que es sabien només els valors donats (cas de les taules trigonomètriques, de logaritmes, de la campana de Gauss, etc.). Però la seva síntesi i adaptació al món del C.A.D., així com el desenvolupament de noves tècniques específiques, estava per fer. Aquesta tasca es va convertir en una nova disciplina, el ja citat C.A.G.D., que es pot considerar establerta a partir de la conferència de la Universitat de Utah, en 1.974 (Barnhill 74). Un altre problema propi del C.A.G.D., provenint, per exemple, de l'Arquitectura o de la Geologia i d'altres ciències naturals, és el d'ajustar una superfície, com ara una façana d'un edifici o el relleu d'una muntanya, a un conjunt de dades obtingudes per amidament: és el problema d'interpolació de dades disperses. Aquest problema mena a mètodes de triangulació del domini.

Els antecedents del C.A.G.D. podríem trobar-los en la interpolació polinomial de Lagrange i Newton, encara que llavors amb altres objectius, com ja hem mencionat, i els seus orígens poden situar-se en els treballs independents de P. De Casteljaou (1.959), no publicats més que en informes tècnics per la seva empresa, Citroën (de Casteljaou 63), i, una mica més tard, 1.962, de P. Bézier per Renault (Bézier, 66, 67, 68). Ambdós construeixen funcions polinòmiques de grau n , a partir de $n + 1$ punts, del pla o de l'espai, anomenats *punts de control*, $\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n$, que determinen una poligonal, anomenada *polígon de control*, de manera que la polinomial passa per \vec{b}_0 i per \vec{b}_n i és tangent al polígon de control en ells, passant "a prop" dels demés punts de control, que influeixen la corba a distància. La corba, paramètrica i polinòmica, admet una formulació recursiva, deguda a de Casteljaou, a partir de dos punts (segment recte) i pujant cap a n , i una de explícita, usant els polinomis de Bernstein, que també apareixen en el context de la aproximació de funcions per polinomis, dins la demostració de teorema de Stone-Weierstrass (Bernstein 12). En aquest cas, la formulació consisteix en una combinació lineal dels punts de control, on els coeficients són justament els polinomis de Bernstein del grau corresponent. Quan el nombre de punts creix excessivament, el polinomi arriba a un grau inadmissible, tant per la dificultat de càlcul com per la seva inestabilitat. Llavors es poden encadenar successius polinomis de grau moderat, formant una corba de Bézier composta. Jugant adientment amb els polígons

de control de cada fragment es pot aconseguir un grau adient de continuïtat en els punts d'unió. Un cas particular, quan tots els fragments són del mateix grau, diguem-ne n , i la polinòmica a trossos té continuïtat C^{n-1} , el constitueixen les corbes anomenades, per analogia amb les varetes flexibles usades en el disseny de vaixells, *splines* (“traçadores”), les més populars de les quals són les cúbiques ($n = 3$), ja usades anteriorment en càlcul numèric, en versió funcional i sense referència a polígons de control, i introduïdes en el camp del C.A.G.D. per J. Ferguson (Ferguson, 1964). També foren estudiades per C. De Boor i W. Gordon per la mateixa època per qüestions relacionades amb aproximació (de Boor 62).

Cal precisar que hi ha dues maneres d'apropar-se al disseny d'una corba. Per una banda està el disseny de corbes de *forma lliure*, en què es construeix el polígon de control i es van ajustant els seus punts perquè la corba resultant s'aproximi progressivament a la forma desitjada. Per l'altra banda està el cas de les corbes d'*interpolació*, en què es desitja que la corba passi efectivament per uns punts de disseny prèviament establerts. En el primer cas, els *splines* en forma de Bézier s'adeqüen perfectament. En el segon es poden calcular els *splines* directament, sense polígon de control o es poden calcular els punts de control \vec{b}_i convenients i usar la forma de Bézier. En el cas cúbic, que és el més útil, en ambdues situacions cal fixar dos paràmetres que inicialment queden lliures (normalment s'especifiquen dues condicions en els extrems) i s'arriba a un sistema lineal d'equacions aproximadament del mateix ordre que el nombre total de punts. Una millora pràctica dels *splines* va ser la introducció per de Boor (de Boor 72) dels *B-splines* i la seva associació amb les corbes de Bézier per Gordon i Riesenfeld (Gordon-Riesenfeld 74). Consisteixen en construir els *splines* a partir d'una base d'ells (d'aquí la “B”), com combinació lineal. Aquesta base està formada per *splines* no negatius que avaluen diferent de zero només entre uns pocs punts i que formen una partició de la unitat. Això permet el *control local* de la corba en el cas de forma lliure: un cop formulada la corba, si es varia un dels punts de control, només cal ajustar els coeficients dels elements de la base involucrats. Respecte a la fórmula resultant, acaba sent també, com en el cas explícit de Bézier, una combinació lineal dels punts de control on els coeficients són polinomis del mateix grau que en el cas de Bézier, però no són els de Bernstein sinó un altre tipus que es formulen de manera recurrent a partir d'uns inicials de grau zero. Si en el cas de les corbes de Bézier cada tram es podia parametritzar amb el paràmetre variant dins de l'interval $[0, 1]$, aquí la parametrització de cada tram és correlativa i la longitud relativa de l'interval del paràmetre que correspon a cada tram de corba juga un paper important (en el cas dels *B-splines* no uniformes). També es pot variar el pes d'un punt (o sigui, la seva influència sobre la corba) repetint-lo més d'un cop, al preu d'augmentar el grau dels polinomis.

Els B-splines mencionats fins aquí són de tipus *no-racionals* (els coeficients dels punts són polinomis en el paràmetre). Una generalització molt profitosa, introduïda per Coons (Coons 67) van ser els B-splines *racionals*. La idea consisteix en construir un B-spline no racional (o sigui, polinòmic) en l'espai projectiu, amb coordenades homogènies, i passar a coordenades afins per intersecció amb l'hiperplà $x_4 = 1$, això és, dividint les tres primeres coordenades per la quarta, amb què ara els coeficients són quocients de polinomis, és a dir, funcions racionals. Això permet introduir uns coeficients sobre cada punt de control, que fan el paper de pesos, la variació dels quals deforma la corba resultant: l'efecte pràctic és que augmentant el pes d'un punt de control la corba s'acosta a ell, disminuint-lo, se'n allunya. Podem dir que el resultat és que podem variar de manera continua (no a salts) la influència o la "força de gravetat" que cada punt exerceix sobre la corba. D'aquesta manera es guanya una major llibertat en el disseny. La versió més usada d'aquest tipus de formulació la constitueixen el N.U.R.B.S. (Non Uniform Rational B-Splines) (Piegl 91). La denominació de no uniformes, com ja hem comentat, prové de que els valors del paràmetre per als que s'atenyen els nodes (punts frontera en el domini de cada element de la base dels B-splines) no estan equiespaiats.

Una altre ampliació del repertori va ser la relaxació en la exigència de continuïtat paramètrica, C^k , en els punts d'unió entre dos trams d'una corba formulada a trossos per passar a demanar només continuïtat geomètrica, G^k , (Farin 90): a efectes de disseny, no importa que en els punts d'unió entre trams el vector tangent, el normal, etc. siguin continus, cosa que depèn de la particular parametrització triada en cada interval, sinó que el que importa que sigui continu és la recta tangent, la curvatura, etc. En aquest terreny, una variant dels B-splines en un altre direcció és la proposada per B. Barsky en 1.981 (Barsky 81, 88), amb la introducció dels *beta-splines*, en la que s'incorporen dos paràmetres, un de *tensió* i un de *biaix*, que permeten un millor modelatge de la corba des del polígon de control, encara que al preu de perdre altres propietats, com ara el control local. Degut a la pèrdua de continuïtat paramètrica, els beta-splines tampoc són adients per animació, realitat virtual, etc., perquè porten a discontinuïtats no realistes en la velocitat amb que es mou un objecte o amb que es fa un *travelling*.

Fins aquí ens hem centrat en el cas de corbes. Pel que fa a superfícies, moltes qüestions es redueixen a adequar el que s'ha dit per corbes al cas de parametritzacions amb dues variables; en tot cas, hi ha hagut diverses generalitzacions des del cas de corbes. Per cada tipus de corbes que hem comentat es pot passar al corresponent cas de superfícies si es disposa d'una malla bidimensional de punts de control, sense més que canviar els coeficients en les combinacions lineals de les corbes en una de les direccions, que fins ara eren constants, per funcions de la mateixa família (Bézier, B-spline, etc.) que depenguin de l'altre paràmetre, amb què s'obté una superfície dependent de dos paràmetres formulada per un doble sumatori. Així podem parlar de

superfícies de Bézier, superfícies B-spline, N.U.R.B.S., etc. Aquest tipus de superfícies, que venen controlades per una malla rectangular de punts, van ser introduïdes per de Casteljau (Casteljau 63) i Ferguson (Ferguson 64) i s'anomenen superfícies de producte tensorial, perquè operativament es formulen matricialment en el mateix format que un producte escalar. Per cada tipus, també hi ha versió triangular (Powell-Sabin *splines*, etc.), sovint preferible, per exemple quan es tracta de produir la geometria d'un objecte de cara al seu tractament amb elements finits o quan es tracta de produir una superfície a partir d'un núvol desestructurat de punts. Per altra banda, S. Coons va introduir en 1964 els anomenats Coons *patches* (Coons 67), que són pedaços de superfície que es generen a partir de quatre corbes limítrofes que formen la frontera del pedaç. Es pot dir que la superfície interpola les corbes frontera. Una generalització d'aquests pedaços deguda a Gordon a finals dels seixanta (Gordon 69) permet imposar condicions en la manera que el pedaç arriba a cada punt de cada corba limítrofa, són condicions sobre les derivades parcials del pedaç en la direcció transversal a la corba. Això permet "enganxar" pedaços amb suavitat controlable i per tant ens possibilita a usar no quatre corbes sinó tota una malla de corbes a interpolar. Aquestes superfícies s'anomenen transcendents atès que, per a la seva generació no es parteix d'un conjunt finit de punts sinó de corbes.

Al tractar amb superfícies, apareixen nous problemes que no es tenien en el cas de corbes, com ara el control de les derivades de diferents ordres transversals a la unió de dos pedaços, el control del vector normal a la superfície, el problema del "twist" relacionat amb les derivades parcials segones creuades, etc. Tanmateix, el problema de resoldre interseccions entre superfícies és molt més greu que en el cas de corbes.

Fins aquí, els que serien els temes consolidats dins de la literatura, els que "ja estan en els llibres de text". A partir d'aquí han anat apareixent variacions, refinaments, solucions millors, etc. dins d'aquests mateixos mètodes i conceptes. També han aparegut d'altres de similars. Entre ells (es poden trobar seguint les revistes citades abans):

- Ús d'altres tipus de funcions per produir corbes i superfícies, com ara espirals hodògrafes pitagòriques (Walton 96 i 98; Farouki 97), quaternions (Miura 00), A-splines (Paluszny 98; Chandrajit 99; Guoliang 01), etc.
- Corbes i superfícies a partir de dades disperses (Lee 00; Lai 96; Guo 97; Chang 97; Costantini 99; Mann 99; Cotrina 00; Floater 01).
- Corbes i superfícies per combinació (*Blending*) (Costantini 96; Wenz 96; Hui 99; Szilvási-Nagy 00; Mitchell 00; Srinivas 96; Pratt 97).

Al mateix tems, s'han anat perfilant i guanyant un lloc dins de la literatura certs temes no inclosos en la llista anterior, com ara:

- Models procedimentals (Foley 96, pàgina 1018).

I.4. Preliminars. Estat de l'art.

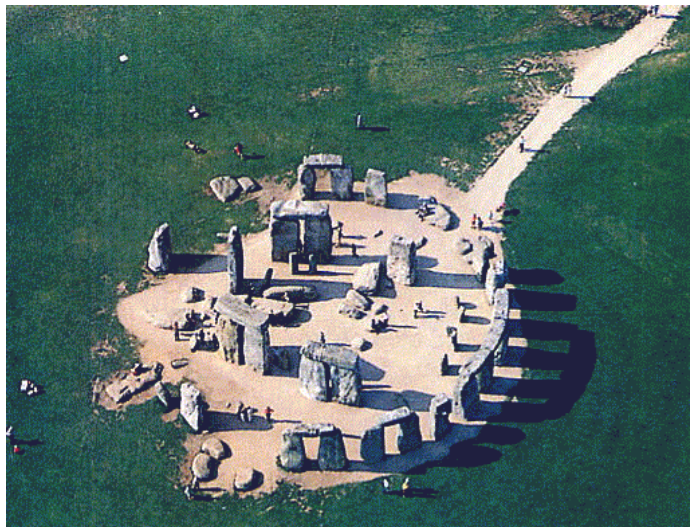
- Disseny paramètric (Anderl 96; Lee 96; Sreenivasa 96; Monedero 00; Hoffmann 01).
- Semàntiques, gramàtiques i llenguatges geomètrics (Foley 96, pàgina 1027; Hearn, pàgina 387; Srinivasan 99).

Atès que tota aquesta informació no té una repercussió important en el que segueix, ja que cada capítol incorpora els fonaments necessaris per la seva autocomprensió, i que les referències ofertes permeten, si cal, estirar el fil de cada tema, no creiem convenient allargar més aquesta exposició de l'estat de l'art i, per tant, entrem ja sense més dilació en la primera part d'aquesta memòria, la dedicada a proporcionar eines per la fase de execució.

Figures de la Introducció



(a) Casa Rincañada, temple anasazi (Nuevo Mexico).



(b) Stonehenge (Inglaterra).

fig. I.1. Ús de formes quadrades i circulars en construccions prehistòriques.



fig. I.2. Ceràmica grega del període geomètric.

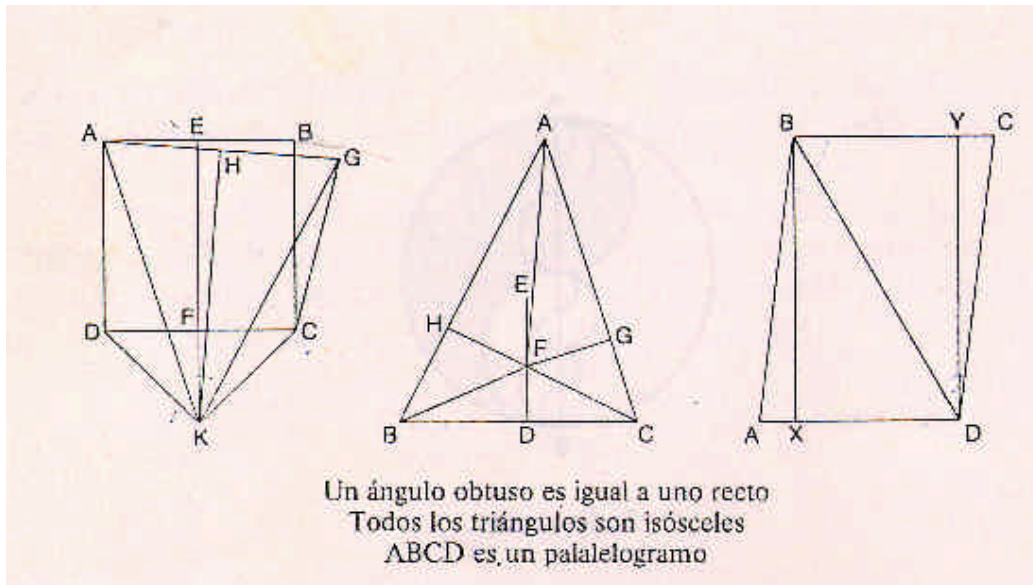


fig. I.3. Exemples de falacies geomètriques.

I.5. Figures.

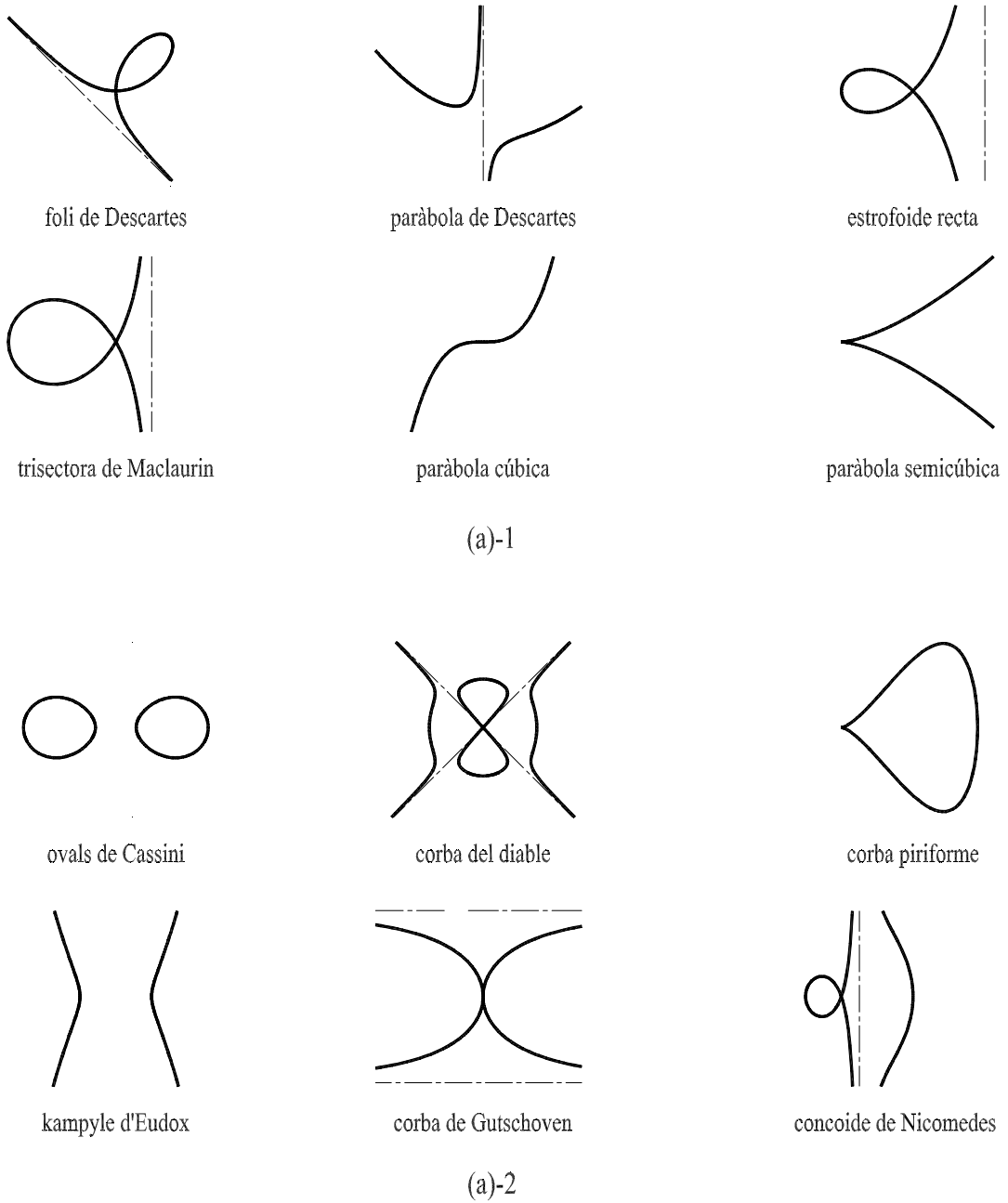
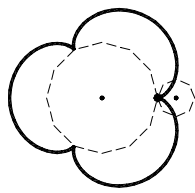
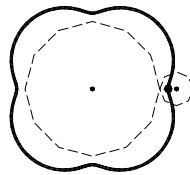


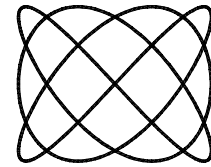
fig. I.4. Exemples de corbes clàssiques (a).



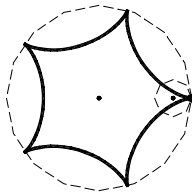
epicicloide



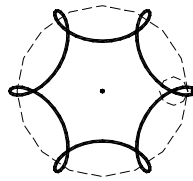
epitrocoide



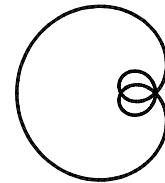
corba de Bowditch



hipocicloide

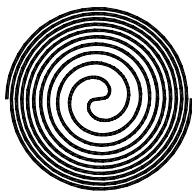


hipotrocoide

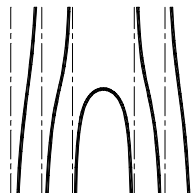


nefroide de Freeth

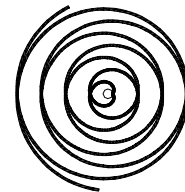
(b)-1



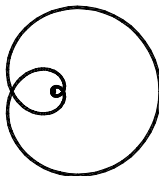
espiral arquimediana ($m = 2$)



quadratriu d'Hippias



involuta d'un cercle



espiral de Poincot (1)



espiral de Poincot (2)

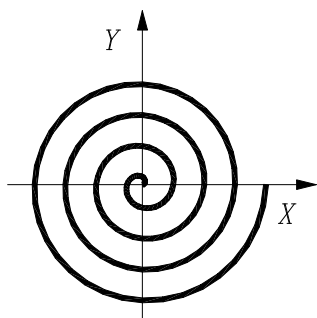


trocoide

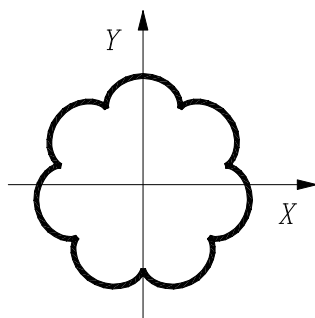
(b)-2

fig. I.4. Exemples de corbes clàssiques (b).

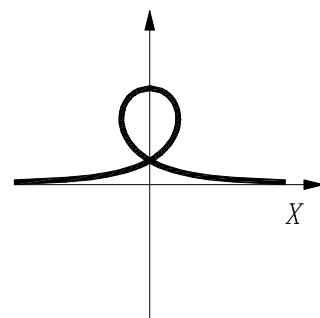
I.5. Figures.



Espiral d'Arquimedes



Epicloide



Trisectriu de MacLaurin

fig. I.4(c). Exemples de corbes clàssiques, amb eixos de coordenades cartesianes.



(a) en la natura: Cràter provocat per un meteorit en Arizona (EE.UU.)



(b) en obres humanes prehistòriques: Poblat celta del monte Santa Tegra a Guarda (Galiza).

fig. I.5. Presència de formes superel·líptiques.

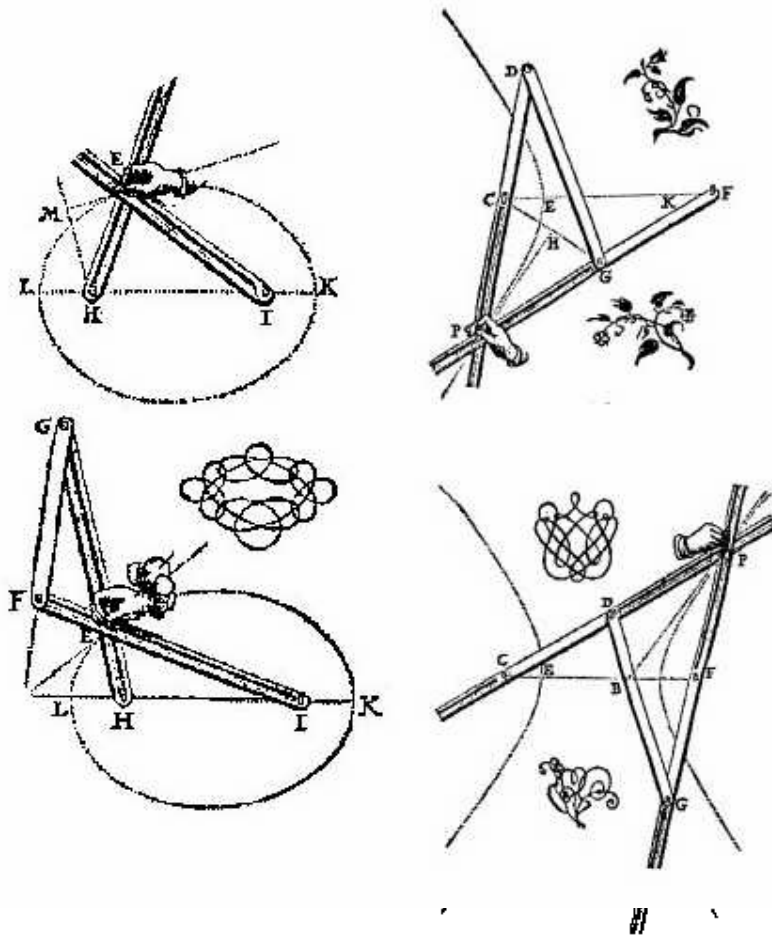


fig. I.6. Eines per dibuixar còniques.

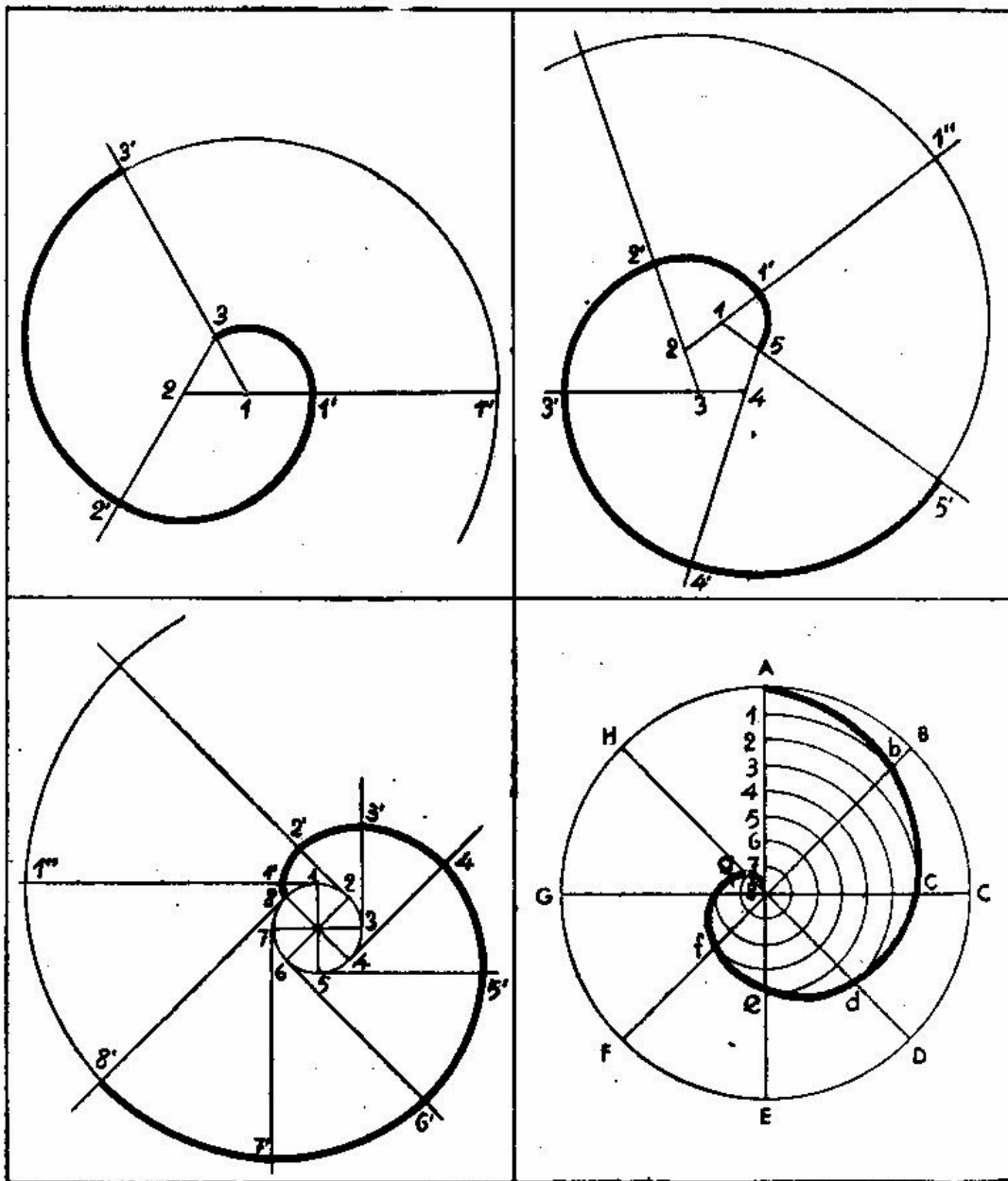


fig. I.7. Espirals aproximades per arcs de circumferència.

I.5. Figures.

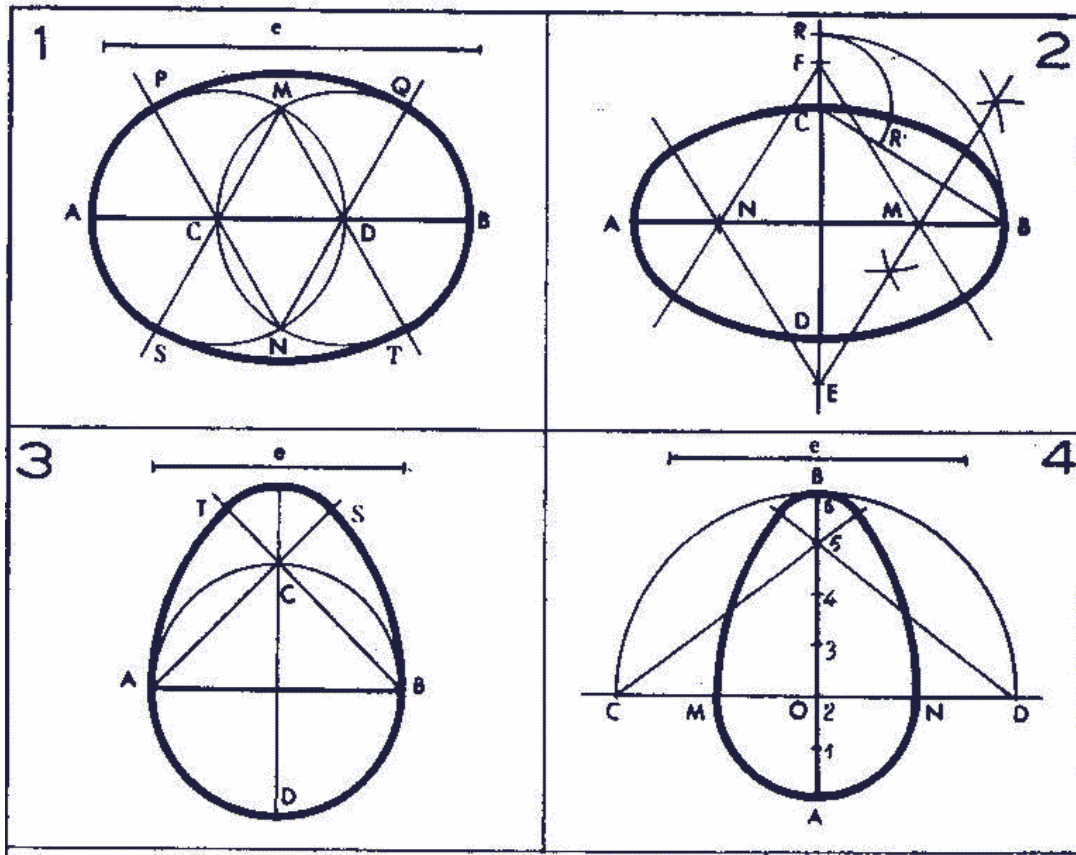


fig. I.8. El·lipses i altres figures aproximades per òvals.

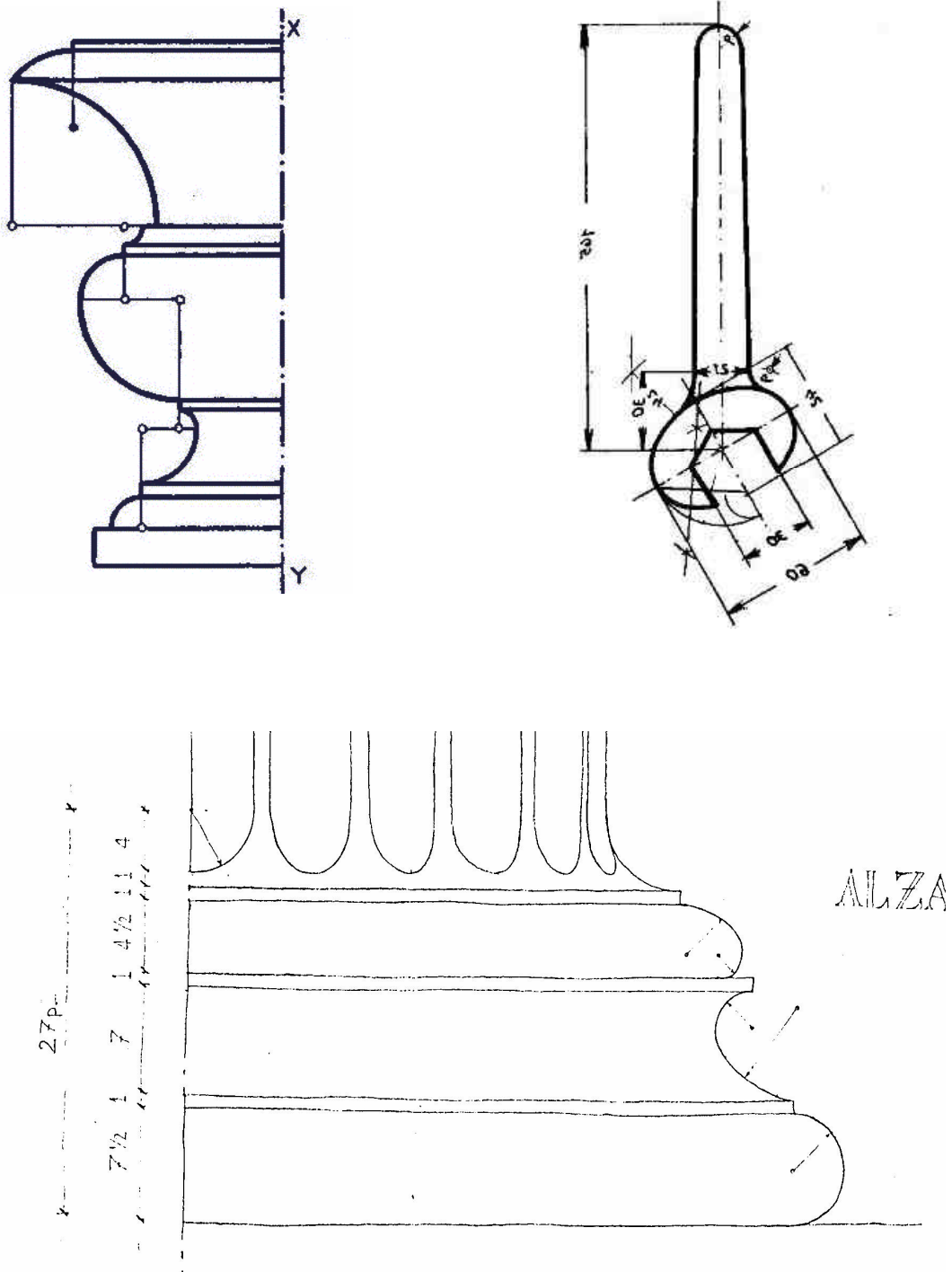


fig. I.9. Figures corbes dissenyades empalmant arcs de circumferència.

I.5. Figures.

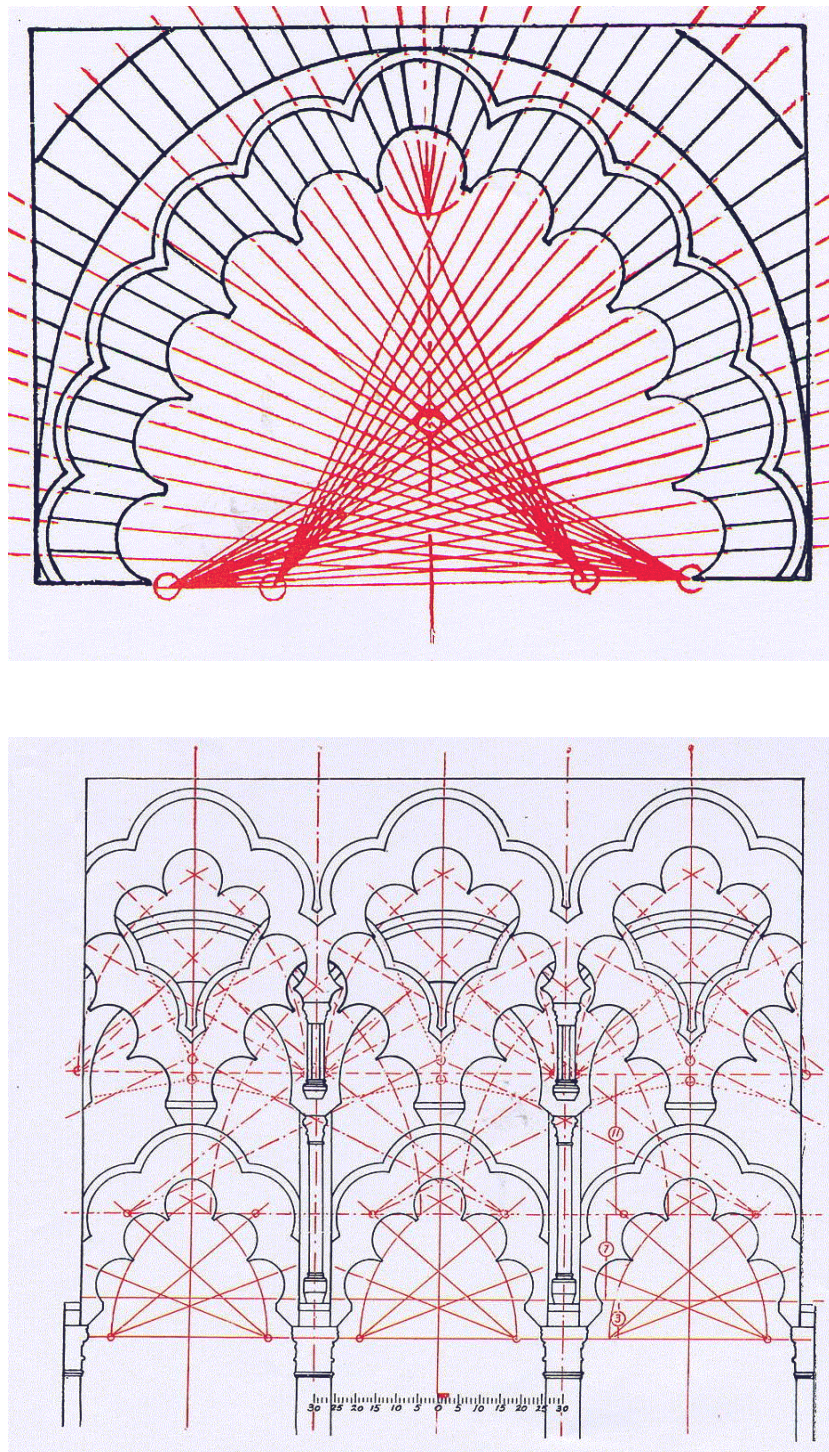


fig. I.10. Dos anàlisis geomètrics de la mesquita de Córdoba.

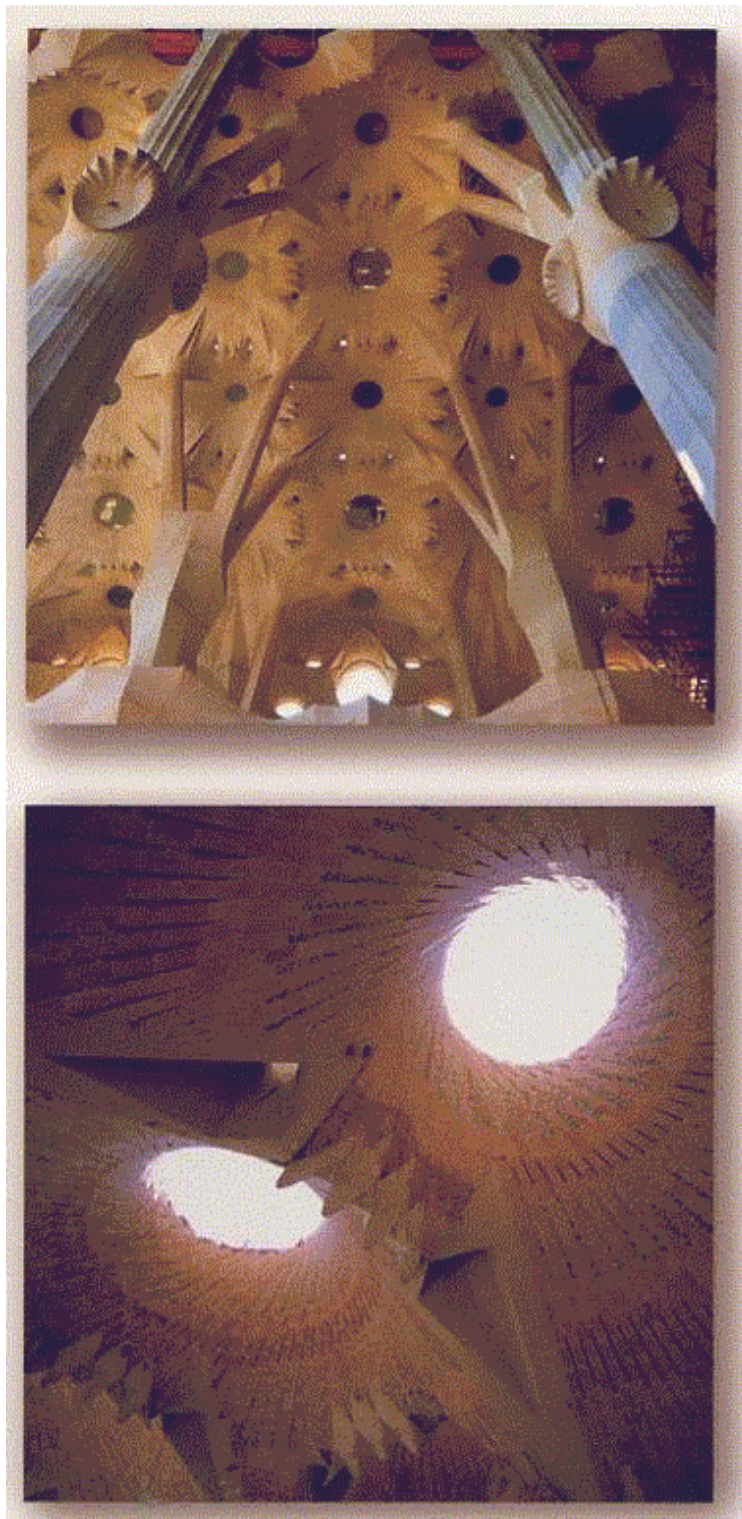
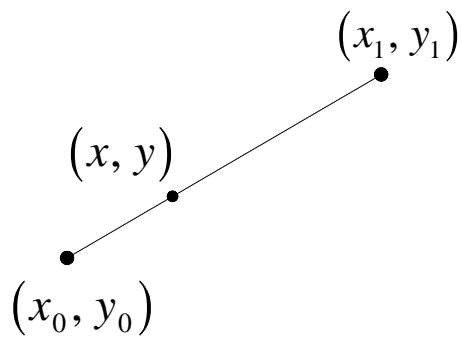


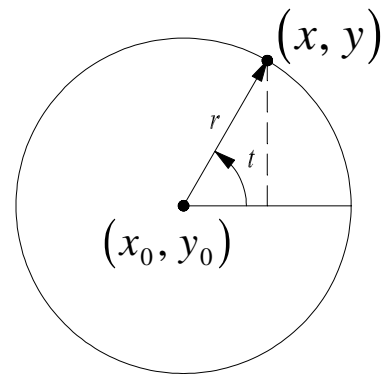
fig. I.11. Articulació de paraboloides i hiperboloides a la Sagrada Família.

I.5. Figures.



$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + t x_1 \\ y(t) = (1-t)y_0 + t y_1 \end{cases}$$
$$t \in [0, 1]$$

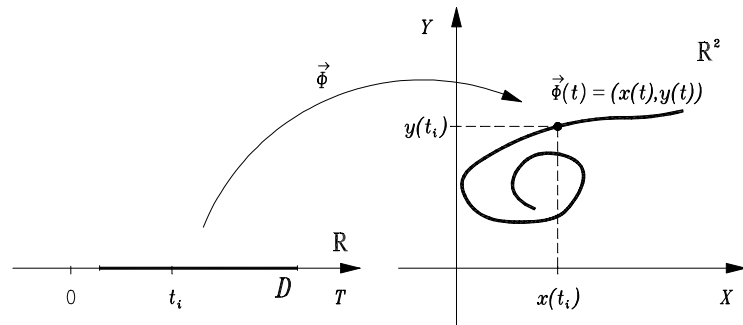
el regle virtual



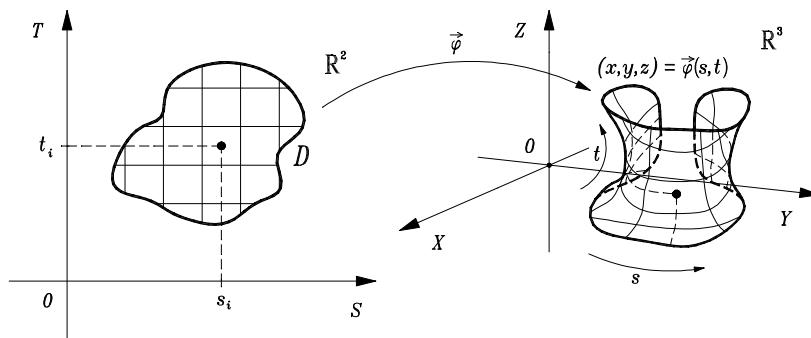
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos(t) \\ y(t) = y_0 + r \sin(t) \end{cases}$$
$$t \in [0, 2\pi)$$

el compàs virtual

fig. I.12. Versió cibernètica de les eines tradicionals.



(a) corba parametrizada.



(b) superfície parametrizada.

fig. I.13. Definició matemàtica de les corbes i superfícies parametrizades.

part I

Part I

Aportacions a les eines d'execució

Tal com s'ha establert a la introducció, la primera part recull la nostra aportació de maquinària matemàtica per nodrir el software gràfic en la seva oferta de mètodes per modelitzar el disseny a sentiment. El material que aquí es presenta correspon, en el temps, a la producció del primer període d'aquest treball, quan la noció de les dues etapes del procés de disseny encara no se'ns havia fet palesa i, per tant, no teníem una idea precisa d'on s'ubica cada tema i cada mètode. Es va desenvolupar en el context dels mètodes de C.A.G.D. i el nostre propòsit, sensibles a la problemàtica que envolta aquests mètodes, era cercar alternatives que fossin millors respecte les qualitats que es solen desitjar i/o que fossin menys deficientes respecte els defectes que es solen rebutjar. Respecte això, cada capítol conté els detalls que calen. Es pot considerar, en conseqüència, com la part de contingut més tradicional, si s'entén que aquesta memòria versa sobre el desenvolupament de tècniques matemàtiques d'aplicació a la modelització geomètrica mitjançant l'ordinador. De totes maneres, com es comentarà en el Capítol 4, mentre es treballava en els continguts d'aquesta part, ja bullien idees i es feien experiments relacionats amb el que acabaria conformant la Part II, cosa que es pot notar en l'estil en que es tracten aquests temes més estàndard, especialment en el Capítol 1.

Està organitzada en tres capítols que responen a diferents maneres de desenvolupar el mencionat propòsit. Amb més precisió, els dos primers es poden veure, a posteriori, com pertanyents a un mateix projecte: el primer serveix de material previ pel segon. No obstant, el primer capítol no va néixer així, sinó que respon a una preocupació probablement bastant personal, que es justifica amb més detall en el Capítol 4, i que consisteix en preferir formulacions globals per expressar les funcions. D'acord amb això, aquest capítol no desenvolupa cap nou mètode sinó que es dedica a oferir, no una, sinó tres formulacions globals alternatives pels *splines* interpoladors, en la

seva versió funcional (no paramètrica), i amb l'èmfasi posat en els cúbics. A més s'explicita la estructura d'espai vectorial de que gaudeixen tots els *splines* de grau tres (per concreció) que es defineixen sobre un mateix conjunt de nodes, la qual cosa facilita el pas d'una formulació a l'altra, pas que queda reduït a un cavi de base; finalment es dona una aplicació a l'obtenció de parametritzacions globals per polígons i, consegüentment, de piràmides i prismes. La tasca d'obtenir formulacions globals resulta profitosa ja que, junt amb l'estructura d'espai vectorial, és aprofitada en el Capítol 2 per desenvolupar unes funcions interpoladores, pensades per quan hi han molts nodes, basades en combinar funcions que interpolin cadascuna només un nombre petit i fixat de punts de control: es recobreix la corba amb aquesta mena de "rajoles" unidimensionals (els splines "petits") i després es fa una "fusió" (*blending*) d'elles per obtenir una corba global que interpoli tots els punts. L'objectiu és aconseguir funcions amb prestacions formals i tècniques molt properes a les dels splines cúbics però sense els seus dos defectes principals: el gran volum de càlcul inicial i la falta de control local si s'ha de modificar algun punt de control, fet que porta a haver de calcular-ho tot de nou.

Allunyat d'aquests dos primers, el tercer capítol neix d'una idea completament diferent, suggerida per un col·lega del departament: la d'aplicar tècniques de control basades en regles difuses, provinents del món de la lògica difusa, a la modelització de corbes i superfícies mitjançant punts de control, amb el que s'enceta una nova via per desenvolupar nous tipus de corbes i superfícies de disseny, alhora que permet donar una nova semàntica al fet d'ajustar una corba o una superfície a un conjunt de dades. També es poden reinterpretar dins d'aquest enfoc alguns dels mètodes ja coneguts; aquí ho fem amb les corbes i superfícies de Bézier.

Capítol 1

Formulacions globals de *splines*

En aquest primer capítol ens remuntem als *splines* interpoladors en la seva versió clàssica, més propera de moment a la problemàtica d'interpolar valors d'una funció que a la del disseny, com a matèria prima que, després de tractada, serà recuperada pel nostre enfocament dins del CAGD com a funcions components de corbes paramètriques. Per tant, aquí es tractaran en la versió no paramètrica (funcional) sense usar cap polígon de control. L'objectiu és proporcionar, i després comparar, tres formulacions dels *splines* com **funcions globals** sobre \mathbb{R} que coincideixen en cada tram amb el polinomi corresponent a un *spline* interpolador definit a trossos, que és la formulació tradicional. A més, es lliguen totes les formulacions sota una estructura comú d'espai vectorial que permetrà relacionar-les, deixant les coses preparades per una aplicació concreta al disseny que s'abordarà en el proper capítol. Addicionalment, es dóna una aplicació a la parametrització de polígons, piràmides i prismes.

1.1. Introducció: Funcions interpoladores.

Un problema típic d'interpolació consisteix en, donada una col·lecció de nodes $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ amb valors associats y_0, y_1, \dots, y_n , buscar una funció $y = f(x)$ tal que $f(x_i) = y_i$ ($i = 0, \dots, n$) i que verifiqui certes condicions de continuïtat global junt amb certes condicions de frontera.

Hi ha una extensa bibliografia que aborda i resol aquest tipus de problemes (Bojamov 93; Farin 90; Nonweiler 84; Faux 85; Dahlquis 74; Goodman 98; Juhász 98; Paluszny 98; Bajaj 99). Les diferents solucions donades van des dels polinomis de Lagrange, seguint pels d'Hermite global, Bessel, fins els *splines*, *B-splines*, NURBS, *A-splines*, etc. Cadascun d'aquests mètodes té avantatges i inconvenients. Per exemple els polinomis de Lagrange o d'Hermite són globals però el seu grau sol ser tant alt que els fa inestables i difícils de manipular; d'altres s'ajusten millor però necessiten ser definits *per trossos*, la qual cosa fa que siguin incòmodes d'utilitzar en treballs teòrics, o requereixen resoldre grans sistemes d'equacions.

En aquest segon grup estan les funcions *spline*, formades, per cada tram $[x_{i-1}, x_i]$, per un polinomi de grau k de manera que globalment s'obtingui una funció C^{k-1} . Cada polinomi té $k + 1$ graus de llibertat que s'usen per imposar que la funció passi pels punts (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) i que les seves successives derivades fins l'ordre $k - 1$ siguin contínues en els nodes corresponents a polinomis adjacents. Si el nombre de condicions és inferior al de graus de llibertat, s'imposen condicions sobre les successives derivades en els nodes extrems x_0 i x_n .

Els més populars, per les seves avantatges teòriques i pràctiques, són els *splines* cúbics ($k = 3$), on per cada tram $[x_{i-1}, x_i]$ es construeix un polinomi $\pi_i(x)$ de grau tres. Per tant, es tenen quatre graus de llibertat per cada π_i , corresponents als quatre coeficients del polinomi; com que hi ha n trams, es tenen n polinomis i $4n$ graus de llibertat o incògnites.

Imposant que $\pi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ i $\pi_i(x_i) = y_i$ $i = 1, \dots, n$ es tenen $2n$ condicions o equacions. Fent que $\pi'_i(x_{i-1}) = \pi'_{i-1}(x_{i-1})$ i $\pi''_i(x_{i-1}) = \pi''_{i-1}(x_{i-1})$ $i = 2, \dots, n$ es tenen $2n - 2$ condicions més. Les dues condicions que falten es poden aconseguir imposant, per exemple, un valor y'_0 per $\pi'_1(x_0)$ i un valor y'_n per $\pi'_n(x_n)$ o bé fent que $\pi'_1(x_0) = \pi'_n(x_n) = 0$ (cas dels *splines* cúbics anomenats *naturals*). Formulant cada $\pi_i(x)$ en termes de $m_{i-1} = \pi''_i(x_{i-1})$ i $m_i = \pi''_i(x_i)$ s'arriba a un sistema lineal d'equacions en les incògnites m_i que resol el problema obtenint una funció $\pi(x)$ definida per trossos amb continuïtat global C^2 . Donat un punt $x \in (a, b)$, per trobar $\pi(x)$ cal trobar en quin tram $[x_{i-1}, x_i]$ es troba x i aplicar-li el polinomi $\pi_i(x)$. Similars procediments s'utilitzen en *splines* d'altres graus encara que els més utilitzats són els cúbics i els quadràtics junt amb els lineals.

1.1. Introducció: Funcions interpoladores.

Des del punt de vista pràctic, no hi ha dificultats sèries en computar tot això però des del punt de vista teòric, de cara a manipulacions formals o analítiques, sempre és incòmode i matemàticament insatisfactori treballar amb funcions definides per trossos. Apart de la pèrdua d'una visió compacte i sintètica de la funció, contínuament s'ha d'estar controlant en quin tram s'està per saber quina particular definició té $\pi(x)$ en aquell tram i sempre s'han de fer consideracions apart dels nodes degut al canvi de definició que en ells es produeix. Per això és interessant disposar *alternativament* d'una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida **globalment** (o sigui, amb una única fórmula) que coincideixi, per cada x , amb el *spline* tradicional.

Això s'aborda en aquest capítol. Per completesa s'inclouen aquí els aspectes essencials de càlcul dels *splines* tradicionals.

1.1.1. Resum d'interpolació per *splines*.

(Un estudi més detallat es pot trobar, per exemple, a (Bojanov 93; Nonweiler 84; Faux 85).

Notació: Al llarg d'aquest capítol $\pi(x)$ designarà el *spline* tradicional definit per trossos; $\pi_i(x)$, la definició polinòmica de $\pi(x)$ sobre el tram $[x_{i-1}, x_i]$ i $f(x)$ la funció global equivalent a $\pi(x)$.

En tots els cassos es tenen $n + 1$ nodes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i $n + 1$ valors y_0, y_1, \dots, y_n de manera que les solucions buscades han de ser funcions de $[a, b]$ a \mathbb{R} , la gràfica de les quals passa pels punts (x_i, y_i) de \mathbb{R}^2 .

Quan els valors de les ordenades a interpolar siguin, diguem-ne, $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$, designarem

$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1} & i = 1, \dots, n \\ \hat{\delta}_{i-1,i} &= \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{h_i} & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Com que $\hat{\delta}_{i-1,i}$ (la primera diferència dividida) correspon a la pendent de la recta que passa per (x_{i-1}, δ_{i-1}) , (x_i, δ_i) , a vegades denotarem $p_i = \hat{\delta}_{i-1,i}$.

En el cas cúbic denotarem $m_i = \pi''(x_i)$. Així, segons les ocasions, δ_i pot ser y_i , $\pi'(x_i)$ o m_i , o successives derivades de π a x_i .

Donada $g(x)$, $\int^{(k)} g(x) dx$ designarà la família de funcions resultant d'integrar indefinidament k vegades la funció $g(x)$.

1.1.1.1) $k = 1$. Funcions contínues lineals a trossos.

En cada tram $[x_{i-1}, x_i]$ es busca un polinomi de grau 1, és a dir una recta, que passi per (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) . Per tant, en aquest cas

$$\pi(x) = y_{i-1} + \hat{y}_{i-1,i}(x - x_{i-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

Si es vol extrapolar fora de $[a, b]$ i atès que no hi ha cap requeriment de derivabilitat, es pot estendre la poligonal amb una recta de pendent p_0 per tot $x \in (-\infty, x_0]$ i una de pendent p_{n+1} per tot $x \in [x_n, +\infty)$. Per tant es pot afegir

$$\begin{aligned}\pi_0(x) &= y_0 + p_0(x - x_0) && \text{per } x \leq x_0 \\ \pi_{n+1}(x) &= y_n + p_{n+1}(x - x_n) && \text{per } x \geq x_n\end{aligned}$$

i es té una funció C^0 lineal a trossos que interpola els punts (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$.

1.1.1.2) $k = 2$. *Splines quadràtics.*

En cada tram es busca un polinomi de grau 2 (una paràbola) tal que

$$\begin{aligned}\pi_i(x_{i-1}) &= y_{i-1}, & \pi_i(x_i) &= y_i & i &= 1, \dots, n \\ \pi'_i(x_{i-1}) &= \pi'_{i-1}(x_{i-1}), & i &= 2, \dots, n\end{aligned}$$

Aquest és un sistema indeterminat de $3n - 1$ equacions i $3n$ incògnites. Per l'equació que falta, el procediment més usual consisteix en assignar un valor y'_0 per $\pi'_1(x_0)$.

Es convenient reescriure cada $\pi_i(x)$ d'una manera especialment preparada per resoldre aquest sistema. Cada $\pi_i(x)$ s'escriurà de la següent forma:

$$\pi_i(x) = \frac{1}{h_i} [(x - x_{i-1})y_i - (x - x_i)y_{i-1} + \mu_i(x - x_{i-1})(x - x_i)] \quad i = 1, \dots, n$$

llavors $\pi_i(x)$ és de grau dos i

$$\pi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \pi_i(x_i) = y_i.$$

Triant el valor del paràmetre μ_i per tal d'assegurar la continuïtat C^1 , s'obté que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \hat{y}_{0,1} - y'_0 \\ \mu_i &= \hat{y}_{i-1,i} - \hat{y}_{i-2,i-1} - \mu_{i-1} \quad i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

Aquesta relació recurrent permet calcular tots els μ_i , quedant totalment determinats els $\pi_i(x)$ i per tant el *spline* quadràtic $\pi(x)$.

En aquest cas, en cada node $\pi'(x_i) = \hat{y}_{i-1,i} + \mu_i = \hat{y}_{i,i+1} - \mu_{i+1}$.

1.1. Introducció: Funcions interpoladores.

Per extrapolar, es pot optar per mantenir com a $\pi_0(x)$ la continuació del propi $\pi_1(x)$ i com $\pi_{n+1}(x)$ la continuació de $\pi_n(x)$ o bé prolongar amb rectes que “empalmin” amb suavitat C^1 , definint

$$\begin{aligned}\pi_0(x) &= y_0 + y'_0(x - x_0) & x < x_0 \\ \pi_{n+1}(x) &= y_n + \pi'(x_n)(x - x_n) & x \geq x_n\end{aligned}$$

Cal dir que els *splines* quadràtics presenten certs inconvenients que no tractarem aquí. Per un comentari al respecte veure (Nonweiler 85).

1.1.1.3) $k = 3$ *Splines* cúbics.

En cada tram es busca un polinomi de grau 3 tal que

$$\begin{aligned}\pi_i(x_{i-1}) &= y_{i-1}, & \pi_i(x_i) &= y_i & i = 1, \dots, n \\ \pi'_i(x_{i-1}) &= \pi'_{i-1}(x_{i-1}) & i &= 2, \dots, n \\ \pi''_i(x_{i-1}) &= \pi''_{i-1}(x_{i-1}) & i &= 2, \dots, n\end{aligned}$$

Es tenen per tant $4n - 2$ equacions i $4n$ incògnites. Falten dues equacions perquè el sistema sigui determinat. Hi ha moltes formes de cubrir les dues condicions que falten, entre elles:

1.1.1.3.a) Assignar

$$\begin{aligned}\pi'_1(x_0) &= y'_0 \\ \pi'_n(x_n) &= y'_n\end{aligned}$$

amb y'_0, y'_n donats des de fora del mètode.

1.1.1.3.b) (*Splines* cúbics naturals). Imposar

$$\begin{aligned}\pi''_1(x_0) &= 0 \\ \pi''_n(x_n) &= 0\end{aligned}$$

i extrapolar amb rectes fora de $[a, b]$, o sigui

$$\begin{aligned}\pi''(x) &= 0 & \text{per } x < x_0 \\ \pi''(x) &= 0 & \text{per } x \geq x_n.\end{aligned}$$

1.1.1.3.c) (*Splines* periódics). Si $y_n = y_0$ el *spline* pot admetre una extensió periódica de període $(b - a)$. Per això cal imposar

$$\begin{aligned}\pi_1'(x_0) &= \pi_n'(x_n) \\ \pi_1''(x_0) &= \pi_n''(x_n)\end{aligned}$$

1.1.1.3.d) (Que usarem més endavant). Assignar

$$\begin{aligned}\pi_1'(x_0) &= y_0' \\ \pi_1''(x_0) &= y_0''\end{aligned}$$

amb y_0', y_0'' donats des de fora.

1.1.1.3.e) (Similars a les anteriors). Assignar

$$\begin{aligned}\pi_n'(x_n) &= y_n' \\ \pi_n''(x_n) &= y_n''\end{aligned}$$

En primer lloc, cal formular adientment cada polinomi $\pi_i(x)$:

$$\begin{aligned}\pi_i(x) &= \frac{1}{h_i} [(x - x_{i-1})y_i - (x - x_i)y_{i-1} + \\ &+ \frac{1}{6} (x - x_{i-1})(x - x_i) ((h_i + x_i - x)m_{i-1} + (h_i + x - x_{i-1})m_i)]\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

$i = 1, \dots, n$.

D'aquesta forma

$$\pi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \pi_i(x_i) = y_i$$

i

$$\pi_i''(x_{i-1}) = m_{i-1}, \quad \pi_i''(x_i) = m_i$$

així queda assegurada la continuïtat de la derivada segona en cada node interior. Els polinomis queden determinats en conèixer els $n + 1$ valors m_i i aquests, al seu temps, queden determinats a l'imposar *la continuïtat de la derivada primera*, juntament amb les dues condicions de frontera.

1.1. Introducció: Funcions interpoladores.

Si aquestes condicions són, per exemple, del tipus 1.1.1.3.a), s'arriba al següent sistema lineal de $n + 1$ equacions i $n + 1$ incògnites.

$$\begin{cases} (2m_0 + m_1)h_1 = 6(\hat{y}_{0,1} - y'_0) \\ h_i m_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})m_i + h_{i+1}m_{i+1} = 6(\hat{y}_{i,i+1} - \hat{y}_{i-1,i}) \\ \quad i = 1, 2, \dots, (n-1) \\ (m_{n-1} + 2m_n)h_n = 6(y'_n - \hat{y}_{n-1,n}) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

i d'aquí s'obtenen els valors m_i , $i = 0, \dots, n$. L'existència i unicitat de la solució queda garantida pel fet de que la matriu del sistema és tridiagonal amb la propietat de dominància diagonal.

Si les condicions són del tipus 1.1.1.3.b, $m_0 = m_n = 0$ i no s'imposa cap condició sobre $\pi'_1(x_0)$ ni sobre $\pi'_n(x_n)$. En aquest cas queden $n - 1$ incògnites i desapareixen la primera i la darrera equacions del sistema anterior. Amb les altres condicions de frontera s'arriba a sistemes molt similars on només varia com a molt la primera i la darrera equacions.

Cal remarcar que el tipus de *splines* cúbics obtinguts en qualsevol dels casos esmentats té la propietat de minimitzar el funcional $\int_{x_0}^{x_n} (y''(x))^2 dx$ entre totes les funcions $y(x)$ que interpolen els punts $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ i compleixen les condicions de frontera imposades en cada cas. Aquest fet, si es pensa la corba interpolant com un cable elàstic que passa pels punts donats, equival aproximadament a minimitzar l'energia elàstica de deformació. Tanmateix, si només s'obliga al cable a passar per aquests punts i no "es força" el pendent als extrems, més enllà de x_0 o de x_n el cable seguirà en línia recta, fet modelitzat en el cas 1.1.1.3.b i d'aquí la denominació de *splines* cúbics *naturals*.

En aquesta breu exposició es veu que els *splines* lineals, quadràtics i cúbics són pensats, definits i construïts per trossos. En els següents apartats es construeixen funcions amb definició global que coincideixen en cada interval amb els *splines* definits a trossos.

1.2. Formulació global dels *splines* a partir de la funció valor absolut.

En aquest apartat es resol primer la construcció d'una funció poligonal global usant la funció valor absolut i per successives integracions s'arriba a funcions globals equivalents a *splines* del grau que sigui.

Com a punt de partida cal notar que derivant $k - 1$ vegades un *spline* interpolador, de grau k en cada tram, s'obté un altre *spline* interpolador, de grau 1 en cada tram (veure Faux 85; Schoenberg 53), que interpola els valors de la derivada $(k - 1)$ -éssima en els mateixos nodes. Recíprocament, integrant $k - 1$ vegades un *spline* lineal s'obté una família de *splines* de grau k (no un, degut als coeficients d'integració que apareixen). Utilitzant convenientment aquestes dues idees es pot relacionar el *spline* per trossos de grau k amb el seu derivat poligonal, reconstruir aquest globalment i retornar per integració al grau k , calculant finalment els coeficients d'integració que apareixen.

Encara que en la construcció de la funció global lineal intervenen factors del tipus $|x - x_i|$, això no representa una "traïció" a la filosofia de globalitat que inspira aquest capítol, perquè la funció $|x|$, malgrat que usualment es defineix per cassos, en realitat pot ser formulada com $\sqrt{x^2}$. Això, a més, permet trobar primitives de $|x|$ formulades globalment en lloc de per cassos.

En aquesta secció s'arriba amb detall fins el cas cúbic, estudiant la relació entre la funció global obtinguda i els coeficients dels polinomis constituents del *spline* cúbic corresponent. Cada cas s'estudia considerant la extrapolació. A la fi de la secció es comenta com es modifiquen les expressions si no es té en compte la extrapolació.

En ulteriors seccions ometrem la extrapolació per no recarregar massa la notació. En tot cas el seu tractament seria anàleg.

1.2.1. Construcció de funcions globals contínues lineals a trossos.

Donats x_0, \dots, x_n i y_0, \dots, y_n es vol construir una funció global $y = f(x)$ que coincideixi amb la definida a 1.1.1.1. Cal observar que al passar de x_{i-1} a x_i , el salt de f ha de ser $(y_i - y_{i-1})$ i el pendent d'aquest tram recte de f ha de ser $\hat{y}_{i-1,i}$. Si es construeixen funcions globals del tipus (figura 1.2.1)

$$\varphi_{\alpha,\beta;\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha < \beta)$$

tals que

$$\varphi_{\alpha,\beta;\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \cdot \alpha \\ \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \cdot (x - \alpha) & \text{per } \alpha < x < \beta \\ \gamma & \text{per } \beta \cdot x \end{cases}$$

1.2. Formulació global dels *splines*...

llavors la funció $\varphi_i(x)$ definida com $\varphi_i(x) = \varphi_{x_{i-1}, x_i; (y_i - y_{i-1})}(x)$ té precisament el salt $(y_i - y_{i-1})$ entre x_{i-1} i x_i . Prenent la funció $f_1(x) = y_0 + \varphi_1(x)$, aleshores $f_1(x) = y_0$ per $x \cdot x_0$, $f_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$ per $x \geq x_1$ i entre x_0 i x_1 és un segment recte (figura 1.2.2).

Si $f_2(x) = y_0 + \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, aleshores per $x \cdot x_1$, $f_2(x) = f_1(x)$; però ara $f_2(x) = y_1 + (y_2 - y_1) = y_2$ per $x \geq x_2$ (figura 1.2.3). Iterant aquest procés es pot definir

$$f_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x),$$

que val y_0 per $x \cdot x_0$, y_n per $x \geq x_n$, $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ i tal que entre (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i) és un segment rectilini

Si a més es consideren les dues funcions

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_0(x - x_0) & \text{per } x \cdot x_0 \\ 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \cdot x_0 \\ p_{n+1}(x - x_n) & \text{per } x > x_n \end{cases}$$

es pot definir finalment

$$f(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i(x) \quad (1.2.2)$$

que és la forma general d'una funció global lineal a trossos que interpola els punts (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ (Figura 1.2.4)

Ara només resta construir globalment

$$\varphi_{\alpha, \beta; \gamma}(x) \quad , \quad \varphi_0(x) \quad \text{i} \quad \varphi_{n+1}(x)$$

i fer $\varphi_i(x) = \varphi_{x_{i-1}, x_i; (y_i - y_{i-1})}(x)$, $i = 1, \dots, n$.

1.2.1.1) Construcció global de $\varphi_{\alpha, \beta; \gamma}(x)$.

Si es considera la funció $|x - \alpha| - |x - \beta| = \sqrt{(x - \alpha)^2} - \sqrt{(x - \beta)^2}$ (figura 1.2.5), és fàcil veure que

$$|x - \alpha| - |x - \beta| = \begin{cases} \alpha - \beta = -(\beta - \alpha) & \text{per } x \cdot \alpha \\ 2x - (\alpha + \beta) & \text{per } \alpha < x < \beta \\ \beta - \alpha & \text{per } x \cdot \beta \end{cases}$$

N'hi ha prou en sumar $(\beta - \alpha)$, dividir per $2(\beta - \alpha)$ i multiplicar per γ per tal d'obtenir la funció buscada. En efecte

$$\varphi_{\alpha, \beta; \gamma}(x) = \frac{\gamma}{2(\beta - \alpha)} (|x - \alpha| - |x - \beta| + (\beta - \alpha))$$

per tant

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \frac{y_i - y_{i-1}}{2(x_i - x_{i-1})} (|x - x_{i-1}| - |x - x_i| + (x_i - x_{i-1})) \quad \text{o sigui} \\ \varphi_i(x) &= \frac{\hat{y}_{i-1,i}}{2} (|x - x_{i-1}| - |x - x_i| + (x_i - x_{i-1}))\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

1.2.1.2) Construcció global de $\varphi_0(x)$.

Si es considera la funció $(x - x_0) - |x - x_0| = (x - x_0) - \sqrt{(x - x_0)^2}$ (figura 1.2.6), aquesta val

$$\begin{aligned}2(x - x_0) &\quad \text{per } x \leq x_0 \\ 0 &\quad \text{per } x > x_0\end{aligned}$$

Per tant, només s'ha de definir

$$\varphi_0(x) = \frac{p_0}{2} ((x - x_0) - |x - x_0|) \quad (1.2.4)$$

1.2.1.3) Construcció global de $\varphi_{n+1}(x)$.

En aquest cas si es parteix de $(x - x_n) + |x - x_n| = (x - x_n) + \sqrt{(x - x_n)^2}$ que val (figura 1.2.7)

$$\begin{aligned}0 &\quad \text{per } x \leq x_n \\ 2(x - x_n) &\quad \text{per } x > x_n\end{aligned}$$

aleshores

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{p_{n+1}}{2} ((x - x_n) + |x - x_n|) \quad (1.2.5)$$

1.2.1.4) Càlcul explícit de la funció global, lineal a trossos.

Tornant a $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= y_0 + \varphi_0(x) + \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \right) + \varphi_{n+1}(x) = \\ &= y_0 + \frac{p_0}{2} ((x - x_0) - |x - x_0|) + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\hat{y}_{i-1,i}}{2} (|x - x_{i-1}| - |x - x_i| + (x_i - x_{i-1})) \right) + \\ &+ \frac{p_{n+1}}{2} ((x - x_n) + |x - x_n|)\end{aligned}$$

tenint en compte que $\hat{y}_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) = y_i - y_{i-1}$, prenent $p_i = \hat{y}_{i-1,i}$ per $i = 1, \dots, n$ i reagrupant termes s'obté

$$f(x) = \frac{((y_0 - p_0x_0) + (y_n - p_{n+1}x_n))}{2} + \frac{(p_0 + p_{n+1})}{2}x + \sum_{i=0}^n \frac{(p_{i+1} - p_i)}{2}|x - x_i| \quad (1.2.6)$$

Si

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2}((y_0 - p_0x_0) + (y_n - p_{n+1}x_n)) \\ c_3 &= \frac{1}{2}(p_0 + p_{n+1}) \\ a_i &= \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_i), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

la forma general de qualsevol poligonal amb nodes x_0, \dots, x_n és:

$$f(x) = (c_2 + c_3x) + \sum_{i=0}^n a_i|x - x_i| \quad (1.2.8)$$

o sigui, tota poligonal s'obté com un polinomi de grau 1 més una combinació lineal de les funcions $|x - x_i|$, $i = 0, \dots, n$.

Aquestes funcions són C^o i polinòmiques de grau 1 entre cada dos nodes. Per tant, és clar que integrant-les $k - 1$ vegades s'obtidran corbes C^{k-1} polinòmiques de grau k entre cada dos nodes, que és el que són precisament les restants famílies de *splines*. El que passa és que si es vol un *spline* de grau k , que interpoli els valors y_0, \dots, y_n , la seva derivada $(k - 1)$ -éssima serà una poligonal que interpolarà els valors $y_0^{(k-1)}, \dots, y_n^{(k-1)}$ del *spline*. Per tant, per resoldre el problema via integració d'una poligonal global s'han de relacionar aquests dos conjunts de valors. En qualsevol cas, l'èxit de l'operació depèn de poder trobar, seguint la filosofia de la formulació global, primitives globals de les funcions $|x - x_i|$. Això és el que es fa a continuació.

1.2.2. Primitives globals de $|x - x_i|$.

1.2.2.1) **Lema 1.** $\int |x| dx = \frac{1}{2}x|x| + C$.

Demostració. Immediata prenent $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\int |x| dx = \int \sqrt{x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2} + C = \frac{1}{2}x|x| + C. \quad \blacksquare$$

1.2.2.2) **Lema 2.**

$$\int^{(k)} |x| dx = \frac{1}{(k+1)!}x^k|x| + \mathcal{P}_{k-1}(x)$$

on $\mathcal{P}_{k-1}(x)$ és un polinomi de grau $k - 1$.

Demostració. Immediata per inducció i utilitzant el lema 1.

Així doncs,

$$\int^k |x - x_i| dx = \frac{1}{(k + 1)!} (x - x_i)^k |x - x_i| + \mathcal{P}_{k-1}(x). \quad \blacksquare \quad (1.2.9)$$

1.2.3. Funcions interpoladores globals equivalents a *splines* quadràtics.

Al paràgraf 1.1.1.2) s'ha vist com trobar els polinomis $\pi_i(x)$ de grau dos pel procediment de calcular els coeficients μ_i . Aquí calculem els μ_i d'igual manera per obtenir el *spline* quadràtic $\pi(x)$.

Si ara es deriva aquest, s'obté una poligonal que interpola els punts (x_0, y'_0) ,
 $(x_i, \pi'(x_i)) = (x_i, \pi'_i(x_i)) = (x_i, (\hat{y}_{i-1,i} + \mu_i))$, $i = 1, \dots, n$.

Ara només s'ha de construir una funció global $f'(x)$ que interpoli aquests punts i trobar una primitiva $f(x)$.

Si es vol que $f(x)$ extrapoli segons trams rectes, n'hi ha prou en prendre $p_0 = p_{n+1} = 0$, així $f'(x)$ serà constant fora de $[a, b]$, (figura 1.2.8).

Si es vol que $f(x)$ extrapoli estenent la paràbola $\pi_1(x)$ per $x < a$ i la $\pi_n(x)$ per $x > b$, n'hi ha prou en prendre

$$p_0 = \frac{\pi'_1(x_1) - \pi'_1(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad p_{n+1} = \frac{\pi'_n(x_n) - \pi'_n(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

llavors la poligonal $f'(x)$ presentarà rectes en els trams $(-\infty, x_1]$ i $[x_{n-1}, +\infty)$ (figura 1.2.9)

Així, de la fórmula (1.2.8),

$$f'(x) = c_2 + c_3 x + \sum_{i=0}^n a_i |x - x_i|, \quad \text{on } c_2 \text{ i } c_3 \text{ i els } a_i \text{ estan definits com a (1.2.7)}$$

però recordant que ara els valors a interpolar són $y'_0, (\hat{y}_{0,1} + \mu_1), \dots, (\hat{y}_{n-1,n} + \mu_n)$ a partir dels quals s'han de calcular els p_i , $i = 1, \dots, n$.

Per tant,

$$f(x) = (c_1 + c_2 x + \frac{c_3}{2} x^2) + \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{2} (x - x_i) |x - x_i| \quad (1.2.10)$$

Per determinar c_1 n'hi ha prou en imposar que $f(x_0) = y_0$.

1.2. Formulació global dels *splines*...

Així doncs, la forma general de qualsevol funció global equivalent a un *spline* quadràtic és la d'un polinomi de grau dos més una combinació lineal de les funcions $(x - x_i)|x - x_i|$ $i = 0, \dots, n$.

Cal observar que si bé es podria escriure directament una funció general d'aquest tipus i imposar que verifiqués totes les condicions esmentades, això conduiria a la resolució d'un sistema d'equacions més costós de computar.

1.2.4. Funcions interpoladores globals equivalents a *splines* cúbics (versió $|x|$) .

A l'apartat 1.2.2 s'ha vist com trobar els polinomis $\pi_i(x)$ de grau tres pel procediment de calcular, mitjançant un sistema lineal d'equacions, els valors m_i , $i = 0, \dots, n$ de les derivades segones. Aquí s'utilitzen aquests valors per obtenir el *spline* cúbic $\pi(x)$.

Si es deriva $\pi(x)$ dues vegades s'obté una poligonal que interpola els punts (x_i, m_i) , $i = 0, \dots, n$. Ara només s'ha de construir una funció poligonal global $f''(x)$ que interpoli aquests punts i integrar-la dues vegades.

En el cas de *splines* cúbics naturals, cal prendre, com s'ha vist a 1.1.1.3.b), $m_0 = m_n = 0$ i si es vol que $f(x)$ sigui recta per $x < x_0$ i $x > x_n$ cal prendre $p_n = p_{n+1} = 0$.

En el cas de fixar y'_0 i y'_n es pot extrapolar igualment amb $p_0 = p_{n+1} = 0$, llavors $f''(x)$ serà constant fora de $[a, b]$ i $f(x)$ presentarà fora de $[a, b]$ paràboles que empalmaran amb continuïtat C^2 en els extrems. Altrament, si es pren $p_0 = \hat{m}_{0,1}$, $p_{n+1} = \hat{m}_{n-1,n}$, llavors s'utilitza $\pi_1(x)$ i $\pi_n(x)$ per extrapolar amb polinomis de grau 3.

Qualsevol altra tria de p_n i p_{n+1} donarà altres tipus d'extrapolació que no afectaran a l'interior de $[a, b]$.

En qualsevol cas, integrant dues vegades s'obté $f(x)$ amb dues constants d'integració que es calculen imposant que $f(x_0) = y_0$ i $f(x_n) = y_n$.

Si es suposa que, pel sistema descrit a 1.1.1.3), ja s'han calculat els valors m_0, m_1, \dots, m_n de les derivades segones en els nodes x_0, x_1, \dots, x_n , i s'ha triat p_0 i p_{n+1} d'acord amb el tipus d'extrapolació desitjada, llavors, segons hem vist a (1.2.6)

$$f''(x) = \frac{((m_0 - p_0 x_0) + (m_n - p_{n+1} x_n))}{2} + \frac{(p_0 + p_{n+1})}{2} x + \sum_{i=0}^n \frac{(p_{i+1} - p_i)}{2} |x - x_i| \quad (1.2.11)$$

essent aquí $p_i = \hat{m}_{i-1,i}$ per $i = 1, \dots, n$.

Aleshores, integrant dues vegades, $f(x)$ necessàriament serà de la

forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \sum_{i=0}^n a_i(x - x_i)^2|x - x_i|$$

per c_j 's i a_i 's adients que **aquí no són** els de (1.2.8). Notar que $(x - x_i)^2 = |x - x_i|^2$ i per tant $(x - x_i)^2|x - x_i| = |x - x_i|^3$, així doncs

$$f(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) + \sum_{i=0}^n a_i|x - x_i|^3 \quad (1.2.12)$$

Cal veure com són els coeficients c_j 's i a_i 's.

Integrant dues vegades $f''(x)$ (veure (1.2.11))

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + \frac{((m_0 - p_0x_0) + (m_n - p_{n+1}x_n))}{4}x^2 + \\ &+ \frac{(p_0 + p_{n+1})}{12}x^3 + \sum_{i=0}^n \frac{(p_{i+1} - p_i)}{12}|x - x_i|^3 \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(m_0 - p_0x_0 + m_n - p_{n+1}x_n)}{4} \\ c_3 &= \frac{(p_0 + p_{n+1})}{12} \\ a_0 &= \frac{\hat{m}_{0,1} - p_0}{12} \\ a_i &= \frac{\hat{m}_{i,i+1} - \hat{m}_{i-1,i}}{12} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ a_n &= \frac{p_{n+1} - \hat{m}_{n+1,n}}{12} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

i, per trobar c_0 i c_1 , s'imposa, per exemple, que

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_n) = y_n,$$

així es té un sistema de dues equacions i dues incògnites, c_0 i c_1 , que té la següent matriu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & x_0 & y_0 - \frac{(m_0 - p_0x_0 + m_n - p_{n+1}x_n)}{4}x_0^2 - \frac{(p_0 + p_{n+1})}{12}x_0^3 + \sum_{i=1}^n \frac{(p_{i+1} - p_i)}{12}(x_i - x_0)^3 \\ 1 & x_n & y_n - \frac{(m_0 - p_0x_0 + m_n - p_{n+1}x_n)}{4}x_n^2 - \frac{(p_0 + p_{n+1})}{12}x_n^3 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(p_{i+1} - p_i)}{12}(x_n - x_i)^3 \end{array} \right) \quad (1.2.14)$$

1.2. Formulació global dels *splines*...

Com que $\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = (x_n - x_0) \neq 0$, el sistema és compatible determinat i queda totalment determinada la funció global $f(x)$.

1.2.4.1) Generalitzacions.

Aquest procediment es pot estendre a *splines* de grau k : derivant-los $k - 1$ vegades es té una poligonal que interpola el valor de les derivades $(k - 1)$ -éssimes en els nodes, que es poden calcular resolent el corresponent problema amb un *spline* $\pi(x)$. Construïnt globalment la poligonal i integrant altre cop $k - 1$ vegades es té que un *spline* de grau k definit a tot \mathbb{R} , es pot reconstruir per mitjà d'una funció global que té la forma general

$$f(x) = \mathcal{P}_k(x) + \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{k!} (x - x_i)^{k-1} |x - x_i|$$

on $\mathcal{P}_k(x)$ és un polinomi de grau k .

Notar que aquestes funcions són globals com els polinomis de Lagrange però, a diferència d'aquests, no presenten inestabilitat. És més, el grau de les funcions que intervenen està prefixat per l'usuari i *no augmenta a l'augmentar el nombre de nodes*. Cada node afegit només afegeix un nou sumand. En canvi, com passa amb els *splines*-cúbics, en general, un nou node fa recalcular tots els coeficients.

Es interessant també veure la relació entre aquestes funcions globals i cadascun dels polinomis $\pi_i(x)$, de cada tram, del *spline* equivalent. Com exemple, es tractarà el cas particular dels *splines* cúbics.

1.2.5. Relació entre els coeficients de la funció global i els dels polinomis constituents del *spline* per trossos.

Per fer aquest estudi, és millor reescriure els polinomis $\pi_i(x)$ en la forma monomial i no en la (1.1.1) destinada a facilitar el càlcul. Així doncs, sigui

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \sum_{i=0}^n a_i |x - x_i|^3$$

la solució global i sigui $\pi(x)$ el *spline* cúbic corresponent, que per cada tram $[x_{i-1}, x_i]$ ve donat per un polinomi de grau 3, $\pi_i(x)$, que es pot escriure com

$$\pi_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + c_{i,3}x^3,$$

$i = 0, 1, \dots, n, n + 1$, per incloure la zona d'extrapolació.

S'ha de complir que

$$f(x)|_{x < x_0} = \pi_0(x)$$

$$\begin{aligned} f(x)|_{x_{i+1}, x_i} &= \pi_0(x) \\ f(x)|_{x \geq x_n} &= \pi_{n+1}(x) \end{aligned}$$

1.2.5.1) Coefficients de $\pi_i(x)$ en termes dels de $f(x)$.

Notar que

$$\begin{aligned} \text{Si } x < x_0, |x - x_i| &= -(x - x_i) \quad i = 0, \dots, n \\ \text{Si } x_{i-1} < x < x_i, \begin{cases} |x - x_j| = (x - x_j), & j = 0, \dots, i-1 \\ |x - x_j| = -(x - x_j), & j = i, \dots, n \end{cases} \\ \text{Si } x > x_n, |x - x_i| &= (x - x_i) \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

llavors

$$\begin{aligned} f(x)|_{(x_{i-1}, x_i)} &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \sum_{j=0}^{i-1} a_j(x - x_j)^3 - \sum_{j=i}^n a_j(x - x_j)^3 = \\ &= \pi_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + c_{i,2}x^2 + c_{i,3}x^3 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

per tant, desenvolupant i reagrupant resulta

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= c_0 - \sum_{j=0}^{i-1} a_j x_j^3 + \sum_{j=i}^n a_j x_j^3 \\ c_{i,1} &= c_1 + 3 \sum_{j=0}^{i-1} a_j x_j^2 - 3 \sum_{j=i}^n a_j x_j^2 \\ c_{i,2} &= c_2 - 3 \sum_{j=0}^{i-1} a_j x_j + 3 \sum_{j=i}^n a_j x_j \\ c_{i,3} &= c_3 + \sum_{j=0}^{i-1} a_j - \sum_{j=i}^n a_j \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

A més, es pot donar una formulació recurrent dels $\pi_i(x)$:

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 - \sum_{i=0}^n a_i(x - x_i)^3 \quad (x < x_0) \\ \pi_{i+1}(x) &= \pi_i(x) + 2a_i(x - x_i)^3 \quad (x_i \cdot x < x_{i+1}), \\ & \quad i = 0, \dots, n-1 \\ \pi_{n+1}(x) &= \pi_n(x) + 2a_n(x - x_n)^3 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \\ & \quad + \sum_{i=0}^n a_i(x - x_i)^3 \quad (x_n \cdot x) \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

1.2. Formulació global dels *splines*...

Aquesta recurrència serà utilitzada en la secció 1.3.

1.2.5.2) Coeficients de $f(x)$ en termes dels $\pi_i(x)$.

De la relació (1.2.17) es té que

$$\pi_{i+1}(x) - \pi_i(x) = 2a_i(x - x_i)^3.$$

Per tant,

$$a_i = \frac{\pi_{i+1}(x) - \pi_i(x)}{2(x - x_i)^3} \quad i = 0, \dots, n$$

Això, en particular, vol dir que el polinomi $(\pi_{i+1}(x) - \pi_i(x))$ és divisible per $(x - x_i)^3$. En efecte, com que $\pi_{i+1}^{(k)}(x_i) = \pi_i^{(k)}(x_i)$ per $k = 0, 1, 2$, vol dir que x_i és arrel de $(\pi_{i+1}(x) - \pi_i(x))$ i de les seves primera i segona derivades i per tant $(x - x_i)^3$ és un factor de $(\pi_{i+1}(x) - \pi_i(x))$, el qual és un polinomi de fins a grau 3, per ser diferència de cúbiques. Per força, doncs, el quocient ha de ser un nombre. Per tant, per calcular efectivament a_i , només cal dividir els coeficients del mateix terme de cada polinomi, per exemple els de x^3 :

$$a_i = \frac{c_{i+1,3} - c_{i,3}}{2} \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.2.18)$$

Amb aquest procés s'obtenen tots els a_i 's de f a partir dels π_i 's. Fet això, donat $\pi_0(x) = c_{0,0} + c_{0,1}x + c_{0,2}x^2 + c_{0,3}x^3$, considerant que $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = \pi_0(x) + \sum_{i=0}^n a_i(x - x_i)^3$ (per (6.1.3)), desenvolupant i reagrupant, s'obté

$$\begin{aligned} c_0 &= c_{0,0} - \sum_{i=0}^n a_i x_i^3 \\ c_1 &= c_{0,1} + 3 \sum_{i=0}^n a_i x_i^2 \\ c_2 &= c_{0,2} - 3 \sum_{i=0}^n a_i x_i \\ c_3 &= c_{0,3} + 3 \sum_{i=0}^n a_i \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Aquesta relació proporciona, a més, una via alternativa pel càlcul de $f(x)$ un cop conegut el *spline* $\pi(x)$ que pot ser útil per a generalitzacions a *splines* de grau més alt que tres.

1.2.6. Formulació quan no es considera la extrapolació.

En el cas que només interesi la formulació global del spline dins de l'interval $[a, b]$ es poden simplificar en dos termes les anteriors fórmules.

Com que tots els splines provenen d'integrar una poligonal adient, n'hi haurà prou en ajustar la expressió del cas lineal. Si recordem les notacions de 1.2.1, podem prendre aquí $p_0 = p_{n+1} = 0$. Llavors (1.2.8) es converteix en

$$f(x) = c_2 + \sum_{i=0}^n a_i |x - x_i| \quad (1.2.20)$$

amb

$$c_2 = \frac{y_0 + y_n}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}\hat{y}_{0,1} \quad (1.2.21)$$

$$a_n = -\frac{1}{2}p_n = -\frac{1}{2}\hat{y}_{n-1,n}$$

i, per $i = 1, \dots, n - 1$, a_i queda com a (1.2.7).

Podem veure que (1.2.8) quedava determinat per $n + 3$ coeficients i ara, després de suprimir dues condicions, (1.2.20) depen de $n + 2$. De fet, al no considerar més que l'interval $[a, b]$, es pot simplificar (1.2.20) perquè només depengui de $n + 1$ coeficients. En efecte, podem reescriure (1.2.20) com

$$f(x) = c_2 + a_0|x - x_0| + a_n|x - x_n| + \sum_{i=1}^{n-1} a_i|x - x_i|$$

però, tenint presents les restriccions dels valors absoluts a l'interval $[a, b]$, i operant, s'arriba a que

$$\begin{aligned} a_0|x - x_0| + a_n|x - x_n| \Big|_{[a,b]} &\equiv (a_n - a_0)|x - x_n| + \\ &+ (a_n x_n - a_0 x_0) \Big|_{[a,b]} \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

així, si definim

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 &= c_1 + (a_n x_n - a_0 x_0) \\ \tilde{a}_i &= a_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n - 1 \\ \tilde{a}_n &= (a_n - a_0) \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

1.2. Formulació global dels *splines*...

(1.2.8) es converteix en

$$f(x) = \tilde{c}_2 + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i |x - x_{i-1}| \quad (1.2.24)$$

que és la forma general de qualsevol poligonal amb nodes x_0, \dots, x_n restringida a $[a, b]$.

Quan es tracti d'interpolat per splines quadràtics, cúbics, etc., tal com hem vist a 1.2.3 i 1.2.4, els coeficients c_2 i a_i de (1.2.20), ja s'hauran calculat d'acord amb els corresponents requeriments de cada cas; a partir d'aquests coeficients, segons (1.2.23) es calculen els \tilde{c}_2 i \tilde{a}_i i tenim que, respectivament, per un cas quadràtic, (1.2.10) es converteix en

$$f(x) = (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 x) + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{a}_i}{2} (x - x_i) |x - x_i|. \quad (1.2.25)$$

mentre que, pel cas cúbic, (1.2.12) tindrà la forma

$$f(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \frac{\tilde{c}_2}{2} x^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{a}_i}{6} |x - x_i|^3 \quad (1.2.26)$$

i, pel cas general, un spline de grau k serà del tipus

$$f(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{a}_i}{k!} (x - x_i)^{k-1} |x - x_i|$$

on $P_{k-1}(x)$ és un polinomi de grau $k - 1$.

1.3. Formulació global dels *splines* usant les funcions potencials truncades.

En aquest apartat donarem una formulació global alternativa a la 1.2 que, en aquest contexte, es pot obtenir d'aquella per reordenació dels termes, però que també està ja presentada a (Schoenberg 53; Faux 85). El que aportem aquí és una formulació global de les funcions potencials truncades. A més, aquesta formulació serà útil quan es tracti l'estructura d'espai vectorial.

La funció potència k -éssima truncada de x es denota com $(x)_+^k$ i es defineix per $k \geq 1$ com

$$(x)_+^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

d'aquí és immediat definir

$$(x - x_i)_+^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_i \\ (x - x_i)^k & \text{si } x \geq x_i \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Veure figura 1.3.1.

Si repasem la formulació recurrent (1.2.17) veiem que en el *spline* $\pi(x)$, cada polinomi $\pi_{i+1}(x)$ s'obté del $\pi_i(x)$ del tram anterior afegint-li un múltiple de la funció $(x - x_i)_+^3$.

De fet, tot l'apartat 1.2 s'hagués pogut desenvolupar amb el mateix tipus de discurs, construint el cas poligonal no a partir de les funcions $\varphi_i(x)$ sino de les funcions $(x - x_i)_+^1$. Simplement s'haurien de controlar d'una altra forma (menys explícita) els salts de la poligonal entre dos nodes. Observar que la funció $\varphi_{n+1}(x)$ no es més que $p_{n+1} \cdot (x - x_n)_+^1$. El subsegüent procés de successives integracions es seguiria de manera anàloga.

1.3.1. Construcció global de $(x - x_i)_+^k$.

Usant el raonament de 1.2.1.3 és immediat veure que

$$(x - x_i)_+^1 = \frac{(x - x_i) + |x - x_i|}{2}$$

Com que $(x - x_i)_+^k$ és, llevat de coeficients, la primitiva $(k - 1)$ -éssima de $(x - x_i)_+^1$ amb tots els coeficients d'integració nuls, usant 1.2.2.2 obtenim ràpidament que

$$(x - x_i)_+^k = \frac{(x - x_i)^k + (x - x_i)^{k-1}|x - x_i|}{2} \quad (1.3.3)$$

1.3. Formulació global dels *splines*...

Amb això, i d'acord amb (Faux 85), si no tenim en compte la extrapolació, qualsevol *spline* de grau k es pot expressar com

$$f(x) = \mathcal{P}_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (x - x_i)_+^k \quad (1.3.4)$$

on $\mathcal{P}_{k-1}(x)$ és un polinomi de grau $k - 1$ i α_i són coeficients adients que es poden obtenir de manera anàloga als a_i del apartat 1.2 per integració del cas poligonal.

De totes maneres, pel treball posterior convé arreglar una mica tot això.

Donat el seu interès particular, ho farem només pel cas cúbic; els altres es poden fer anàlogament i no tindria interès anar repetint varies vegades els mateixos pasos.

Notació. Atès que treballem el cas funcional i per tradició, hem estat usant la lletra x per designar la variable i la y pels valors de la funció. A partir d'aquí i en atenció a la futura utilització en corbes paramètriques, usarem la lletra t per designar la variable i les lletres x, y, z per les coordenades de la corba paramètrica.

El problema ara es pot enunciar així:

Problema 1. Donada una col·lecció de nodes $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ i uns valors x_0, x_1, \dots, x_n construir amb formulació global una funció $x = f(t)$ que interpoli els punts (t_i, x_i) , $i = 0, \dots, n$ i que coincideixi en cada tram $[t_{i-1}, t_i]$ amb el *spline* cúbic $\pi(t)$ que verifica el mateix, amb les condicions de frontera que s'hagin escollit.

1.3.2. Funcions interpoladores globals equivalents a *splines* cúbics (versió $(t)_+^3$).

Malgrat que podriem treballar directament amb les funcions $(t - t_i)_+^3$, és millor usar una versió normalitzada d'aquestes, les funcions

$$g_i(t) = \frac{(t - t_{i-1})_+^3}{(t_i - t_{i-1})^3} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3.5)$$

que verifiquen

$$\begin{aligned} g_i(t) &= 0 \text{ si } t < t_{i-1} \\ g_i(t_i) &= 1 \end{aligned}$$

Veure figura 1.3.2.

Així mateix el polinomi $\mathcal{P}_2(t)$ de (1.3.4) l'expressarem en termes de $\frac{(t-t_0)^2}{2}$, $(t-t_0)$, 1.

Tot això, només implica un canvi en els coeficients fàcil de computar.

Llavors, si un *spline* cúbic admet una representació con (1.3.4) també admet la següent

$$f(t) = c_2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + c_1(t-t_0) + c_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot g_i(t) \quad (1.3.6)$$

Per calcular els coeficients de (1.3.6) no cal més que seguir el procediment de l'apartat 1.2 (calcular els m_i , derivar dos cops i tornar a integrar). No ho farem perquè no aporta res de nou i perquè aviat tractarem això d'una altra manera. El que sí es pot comentar és que, amb aquesta construcció, derivant un, dos i tres cops i evaluant a t_0 és immediat veure que $c_2 = f''(t_0) = x_0''$, $c_1 = f'(t_0) = x_0'$, $c_0 = f(t_0) = x_0$.

1.4. Formulació global dels *splines* cúbics usant funcions-base.

A les seccions 1.2 i 1.3 hem vist dues formulacions globals molt similars dels *splines* que tenen l'avantatge d'expressar-se com combinació lineal de funcions molt senzilles (la de 1.2 més que la de 1.3) però tenen l'inconvenient de que els coeficients són costosos de calcular.

Aquí es tracta d'introduir una altra col·lecció de funcions tals que els coeficients de la combinació lineal siguin tant immediats com en la interpolació de Lagrange encara que la formulació d'aquestes funcions sigui complicada.

1.4.1. Funcions interpoladores globals equivalents a *splines* cúbics (versió funcions-base).

En primer lloc cal remarcar que, d'acord amb 1.1 i 1.1.1.3, en el sistema lineal que porta a la resolució del *spline*, queden dues condicions per cubrir i hem vist que això es pot fer de moltes maneres. Donat que el sistema es compatible determinat, qualsevol elecció de les dues equacions que falten es correspon amb una elecció de $f'(t_0)$ i de $f''(t_0)$, o sigui que, per unificar, podem reduir qualsevol elecció de les dues condicions addicionals a la elecció de dos valors adients x'_0 i x''_0 i a imposar condicions del tipus 1.1.1.3.d):

$$\begin{cases} f'(t_0) = x'_0 \\ f''(t_0) = x''_0 \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Altra cosa és que sigui fàcil o no calcular x'_0 i x''_0 a partir de la elecció d'un altre parell de condicions addicionals, però teòricament és possible.

Amb aquesta normalització i sense explicitar de moment la seva formulació introduïm el següent conjunt de funcions de classe C^2

$$\begin{cases} \gamma_{0''} & \text{tal que } \gamma_{0''}(t_0) = 1, \gamma'_{0''}(t_0) = 0, \gamma_{0''}(t_i) = 0, i = 0, \dots, n \\ \gamma_{0'} & \text{tal que } \gamma_{0'}(t_0) = 0, \gamma'_{0'}(t_0) = 1, \gamma_{0'}(t_i) = 0, i = 0, \dots, n \\ \gamma_i & \text{tal que } \gamma_i(t_0) = 0, \gamma'_i(t_0) = 0, \gamma_i(t_j) = \delta_{ij}, i, j = 0, \dots, n \end{cases} \quad (1.4.2)$$

tals funcions existeixen, perquè al menys existeix un *spline* cúbic per cada una d'elles que compleix tots els requisits.

Ara, donat el problema 1 i la elecció de condicions de frontera (1.4.1) la solució és immediata (per unicitat):

$$f(t) = x''_0 \cdot \gamma_{0''}(t) + x'_0 \cdot \gamma_{0'}(t) + \sum_{i=0}^n x_i \cdot \gamma_i(t) \quad (1.4.3)$$

On les funcions γ es poden construir cadascuna com a *splines* cúbics amb formulació global seguint els procediments de 1.2 ó 1.3.

1.5. Discussió.

Fins aquí hem vist tres procediments alternatius per a construir els *splines* interpoladors amb formulació global, cadascun d'elles amb avantatges i inconvenients que comentem aquí breument respecte als *splines* cúbics.

- El mètode vist a 1.2 té l'avantatge d'usar un polinomi de grau 2 (si no tenim en compte la extrapolació) més una funció de tipus $|t - t_i|^3$ per a cada node. Així, l'estructura de la fórmula és molt senzilla i la manipulació teòrica molt fàcil. A més, en el cas poligonal, que és el punt de partida per als altres, en cada tram només hi ha que computar directament el salt respecte el tram anterior. Té l'inconvenient de que els coeficients són farragosos de calcular i a més les funcions $|t - t_i|^3$ no s'anulen més que a t_i pel que afecten a distància en els dos sentits de la recta real.
- El mètode vist a 1.3 també usa un polinomi de grau 2 més la funció $g_i(t)$ que no són ja tant senzilles com a 1.2 però encara es poden tractar. A canvi de complicar una mica les funcions, guanyem que les funcions $g_i(t)$ només afecten en un sentit (cap a $t > t_{i-1}$). Si les condicions de frontera es donen les dues a t_0 , llavors la funció es pot calcular sense haver de resoldre un sistema lineal. Sinó, els coeficients també són pessats de calcular.
- El mètode vist a 1.4 dóna una manera trivial de construir la funció donades les dades $x''_0, x'_0, x_i, i = 0, \dots, n$ però les funcions base involucrades semblen prohibitives, de manera que aquest darrer mètode de moment només és teòric. En el capítol 2 veurem una manera de rescatar-lo per aplicacions viables. De moment donarem un marc teòric on encabir els tres mètodes.

1.6. Els *splines* com a espai vectorial. Canvis de base.

Es tracta d'oferir un marc que permeti relacionar les diferents representacions dels *splines* de manera que poguem aprofitar les avantatges de cada una d'elles.

1.6.1. Definició. Donats $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $n + 1$ nodes reals, sigui

$$S = \left\{ \varphi : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R} \ / \ \varphi \text{ és de classe } C^2[t_0, t_n] \ \text{ i} \right. \\ \left. \varphi \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \ i = 1, \dots, n \ \text{ coincideix amb un polinomi de grau 3} \right\}$$

S és el conjunt de tots els *splines* cúbics que es poden construir amb els nodes t_0, \dots, t_n .

Hem vist que fixat x_0, \dots, x_n i forçant a la gràfica a passar per (t_i, x_i) $i = 0, \dots, n$, queden dos graus de llibertat. Hem comentat que, per sistematitzar-ho, podem fixar els dos graus de llibertat en el extrem t_0 : fixem doncs x'_0 i x''_0 . Llavors el *spline* existeix i queda determinat de manera única.

Si el que es vol es un *spline* amb valors x'_0 i x'_n ó $x''_0 = x''_n = 0$, etc. hi han valors adients i únics de x'_0 i x''_0 que ho permeten.

És immediat veure que S és un espai vectorial de dimensió $n + 3$ sobre \mathbb{R} ($n + 1$ pels x_i més x'_0 i x''_0) amb element neutre la funció idènticament nul·la.

Amb aquest enfoc les col·leccions de funcions

$$\begin{aligned} B_1^n &= \{t^2, t, 1, |t - t_{i-1}|^3, i = 1, \dots, n\} \\ B_2^n &= \left\{ \frac{(t - t_0)^2}{2}, (t - t_0), 1, g_i(t), i = 1, \dots, n \right\} \\ B_3^n &= \{ \gamma_0'', \gamma_0', \gamma_i, i = 1, \dots, n \} \end{aligned}$$

no són més que tres bases diferents del mateix espai formades per funcions globals, per tant, donades les coordenades d'un *spline* en una base, podem conèixer les que té en una altra base si podem relacionar les dues bases. Aquí ens interessa fer-ho amb B_2^n i B_3^n per les seves aplicacions en el capítol 2.

A la figura 1.6.1 es poden observar les gràfiques de les funcions que formen la base B_3^n , per $n = 4$ i nodes equiespaiats.

1.6.2. Relació entre B_2^n i B_3^n .

Hem vist que els elements de B_2^n tenen una formulació asequible però les coordenades d'un *spline* en aquesta base són difícils de calcular. Al contrari, els elements de B_3^n són molt complicats, però les coodenades d'un *spline*

en aquesta base són les pròpies dades del problema (un cop pasades de les condicions de frontera a condicions “inicials”). En particular, les coordenades dels elements de B_2^n són immediates en termes de B_3^n , només cal avaluar:

$$\begin{aligned}
 \frac{(t-t_0)^2}{2} &= 1\gamma_{0''} + 0\gamma_{0'} + 0\gamma_0 + \frac{(t_1-t_0)^2}{2}\gamma_1 + \frac{(t_2-t_0)^2}{2}\gamma_2 + \dots + \frac{(t_n-t_0)^2}{2}\gamma_n \\
 t-t_0 &= 0\gamma_{0''} + 1\gamma_{0'} + 0\gamma_0 + (t_1-t_0)\gamma_1 + (t_2-t_0)\gamma_2 + \dots + (t_n-t_0)\gamma_n \\
 1 &= 0\gamma_{0''} + 0\gamma_{0'} + 1\gamma_0 + 1\gamma_1 + 1\gamma_2 + \dots + 1\gamma_n \\
 g_1(t) &= 0\gamma_{0''} + 0\gamma_{0'} + 0\gamma_0 + 1\gamma_1 + g_1(t_2)\gamma_2 + \dots + g_1(t_n)\gamma_n \\
 &\dots \\
 g_{n-1}(t) &= 0 + 0\dots + 1\gamma_{n-1} + g_{n-1}(t_n)\gamma_n \\
 g_n(t) &= 0 + 0\dots + 0 + 1\gamma_n
 \end{aligned} \tag{1.6.2.1}$$

Si recordem (1.3.5) i denotem $g_{jk} = g_j(t_k)$, $j = 1, \dots, n-1$, $k = 2, \dots, n$ i $h_i = (t_i - t_0)$, llavors la matriu que conté els elements de la base B_2^n en termes de la B_3^n és

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1^2/2 & h_1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2^2/2 & h_2 & 1 & g_{12} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ h_3^2/2 & h_3 & 1 & g_{13} & g_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ h_n^2/2 & h_n & 1 & g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6.2.2}$$

La inversa M^{-1} conté llavors els elements de la base B_3^n en termes de la B_2^n . Passant per alt de moment la dificultat d’invertir aquesta matriu **si n és gran**, encara que sigui triangular, això ens permet calcular els coeficients d’un *spline* segons la base B_2^n , que és la “fàcil”, aplicant M^{-1} a les coordenades del *spline* segons B_3^n que són les “fàciles”.

L’inconvenient obvi, és que si n és gran i arbitrari, les funcions g_i i sobre tot les γ_i es tornen inestables, la matriu M es torna costosa d’invertir i sobre tot, costa trobar quins valors s’han de donar a x'_0 i x''_0 si s’ha fet una altra tria de condicions de frontera. Com que n depen del nombre de nodes i això depen dels interessos del usuari que vol dissenyar una corba, **de moment** aquest plantejament no passa de ser teòric. Al capítol 2 el recuperarem, com hem dit.

1.7. Una aplicació: Parametrització de polígons.

Acabarem aquest primer capítol veient una aplicació del que s'ha exposat.

En concret utilitzarem el apartat 1.2 en versió no extrapoladora, per parametritzar amb funcions globals corbes poligonals en general i polígons en particular.

1.7.1. Corbes poligonals.

Sigui una corba poligonal \vec{p} donada per la seqüència ordenada de vèrtexs $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ amb $\vec{P}_i = (x_i, y_i)$ (figura 1.7.1). La corba ha de ser un segment recte entre cada dos vèrtexs. Paramètricament, la corba serà una aplicació

$$\begin{aligned} \vec{p} : [t_0, t_n] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

On $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ són els valors del paràmetre al passar pels vèrtexs: $\vec{p}(t_i) = \vec{P}_i$. A falta de cap restricció podem prendre les funcions corresponents $x(t)$ i $y(t)$ com funcions poligonals, és a dir, *splines* de grau 1 interpolant x_0, x_1, \dots, x_n i y_0, y_1, \dots, y_n respectivament, i també podem considerar un increment de “temps” unitari al passar d'un vèrtex al següent, o sigui, prenem $t_i = i$ (figura 1.7.2).

Amb els resultats de 1.2.1.4 i amb la notació addicional

$$\begin{aligned} x_{-1} &= x_0, & y_{-1} &= y_0 \\ x_{n+1} &= x_n, & y_{n+1} &= y_n \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Tenim que, per $x(t)$,

$$c_2 = \frac{x_0 + x_n}{2}, \quad c_3 = 0, \quad a_i = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{2}$$

i pel cas de $y(t)$

$$d_2 = \frac{y_0 + y_n}{2}, \quad d_3 = 0, \quad b_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2}$$

així

$$\begin{cases} x(t) = c_2 + \sum_{i=0}^n a_i |t - i| \\ y(t) = d_2 + \sum_{i=0}^n b_i |t - i| \end{cases} \quad t \in [0, n] \tag{1.7.2}$$

Nota: Aquesta formulació per coordenades es pot reagrupar per donar una expressió vectorial de la poligonal:

$$\vec{p}(t) = \frac{\vec{P}_0 + \vec{P}_n}{2} + \sum_{i=0}^n \frac{(\vec{P}_{i-1} - 2\vec{P}_i + \vec{P}_{i+1}))}{2} |t - i|, \quad t \in [0, n]$$

on $\vec{P}_{i-1} = \vec{P}_0$ i $\vec{P}_{n+1} = \vec{P}_n$.

1.7.2. Polígons. Piràmides i prismes.

Un polígon és un cas particular de corba poligonal amb $\vec{P}_n = \vec{P}_0$ per tant, aquí

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \sum_{i=0}^n a_i |t - i| \\ y(t) = y_0 + \sum_{i=0}^n b_i |t - i| \end{cases} \quad t \in [0, n] \quad (1.7.3)$$

En el cas d'un polígon regular de n costats inscrit en una circumferència de radi 1 amb un vèrtex al punt $(1, 0)$ (figura 1.7.3(a)), tenim un polígon en el que els vèrtexs són $\vec{P}_i = (\cos \frac{2\pi}{n} i, \sin \frac{2\pi}{n} i)$. Es calcula com a (1.7.3) tenint en compte aquests valors de x_i i y_i alhora de calcular a_i i b_i .

Si la circumferència circumscriu és de radi r , girada respecte l'anterior un angle α i amb el centre traslladat al punt (c_x, c_y) llavors els vèrtexs del polígon regular són

$$\vec{P}_i = \left(\left(c_x + r \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{n} i + \alpha \right) \right), \left(c_y + r \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{n} i + \alpha \right) \right) \right)$$

i es segueix com a (1.7.3).

Observar que un cop parametrizat un polígon, prenent aquest com a directriu en el pla $z = 0$ i prenent un punt $\vec{V} = (x_0, y_0, z_0)$ com a vèrtex, és immediat parametritzar una piràmide qualsevol (figura 1.7.3(b)).

Canviant el vèrtex \vec{V} per una direcció \vec{v} es parametriza també un prisma qualsevol.

Figures del Capítol 1

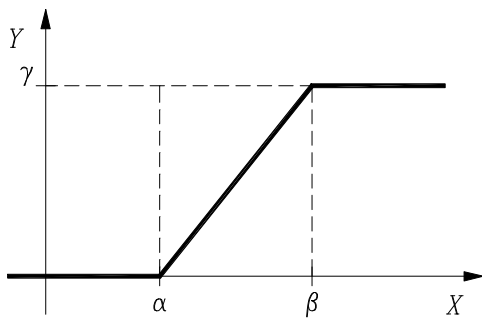


fig. 1.2.1.

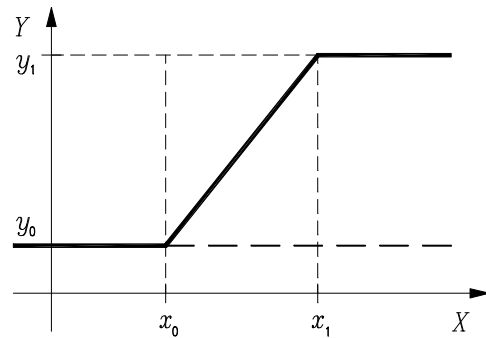


fig. 1.2.2.

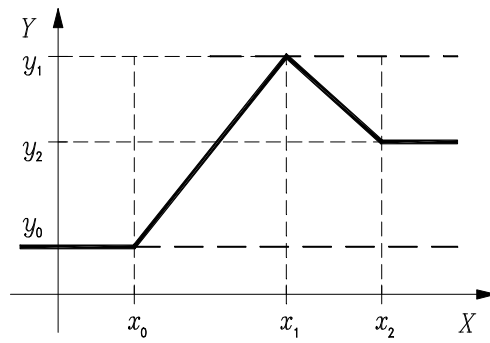


fig. 1.2.3.

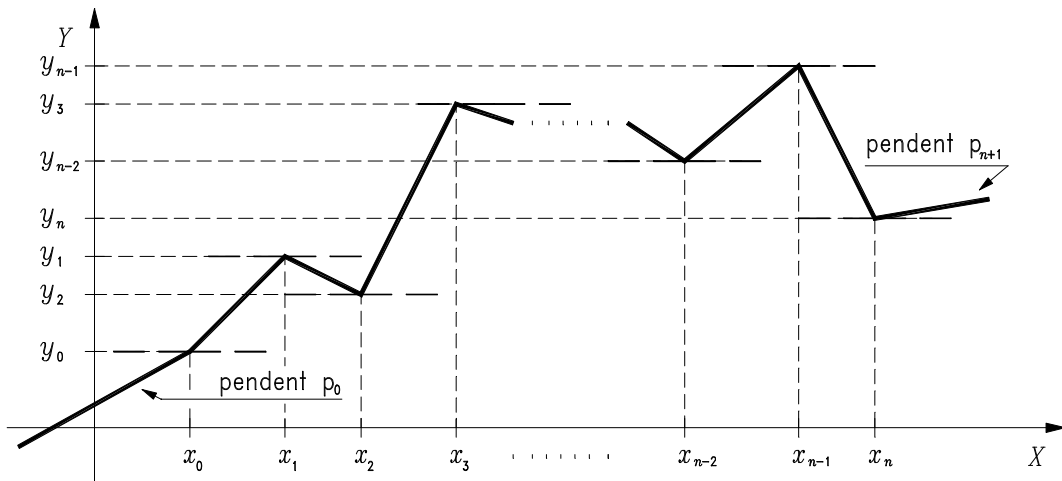


fig. 1.2.4.

1.8. Figures.

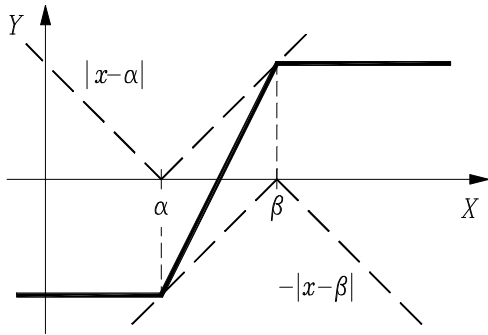


fig. 1.2.5.

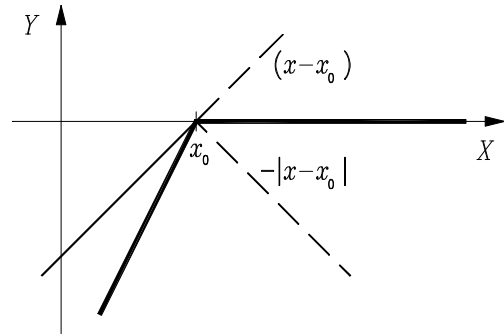


fig. 1.2.6.

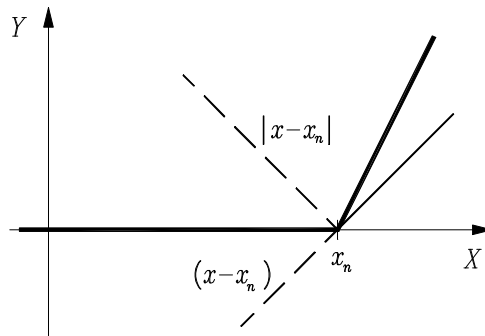


fig. 1.2.7.

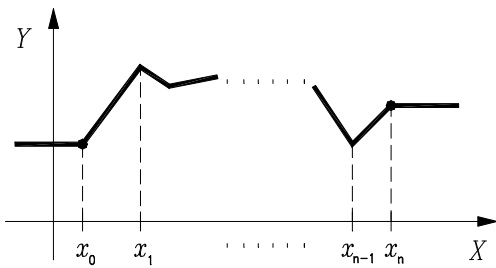


fig. 1.2.8.

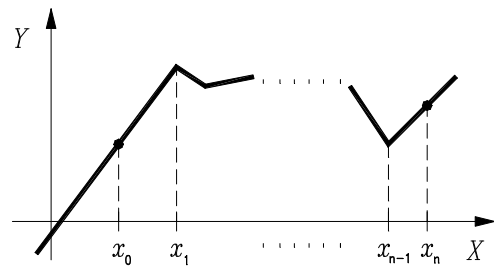


fig. 1.2.9.

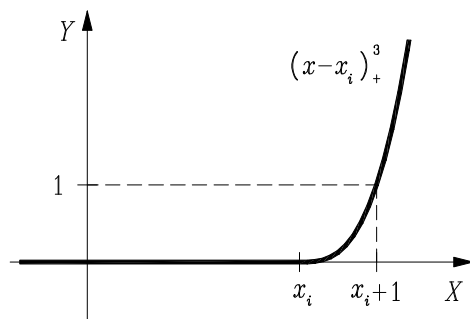


fig. 1.3.1.

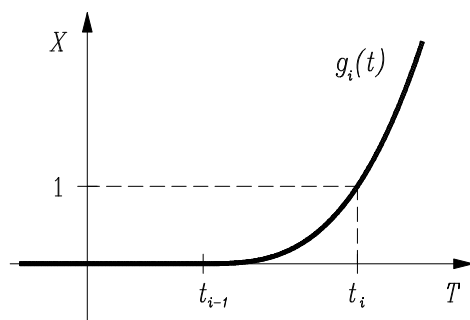


fig. 1.3.2.

1.8. Figures.

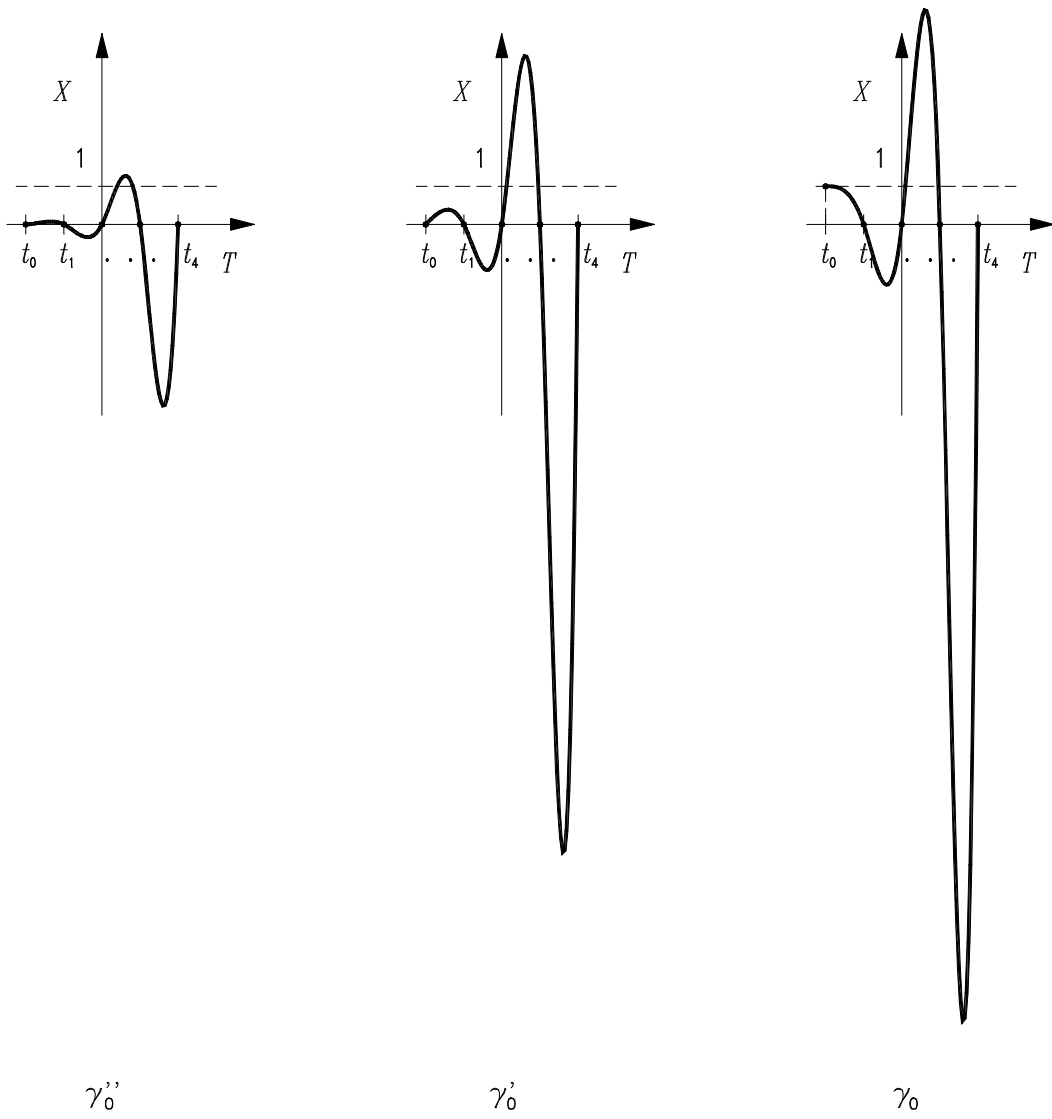


fig. 1.6.1(a).

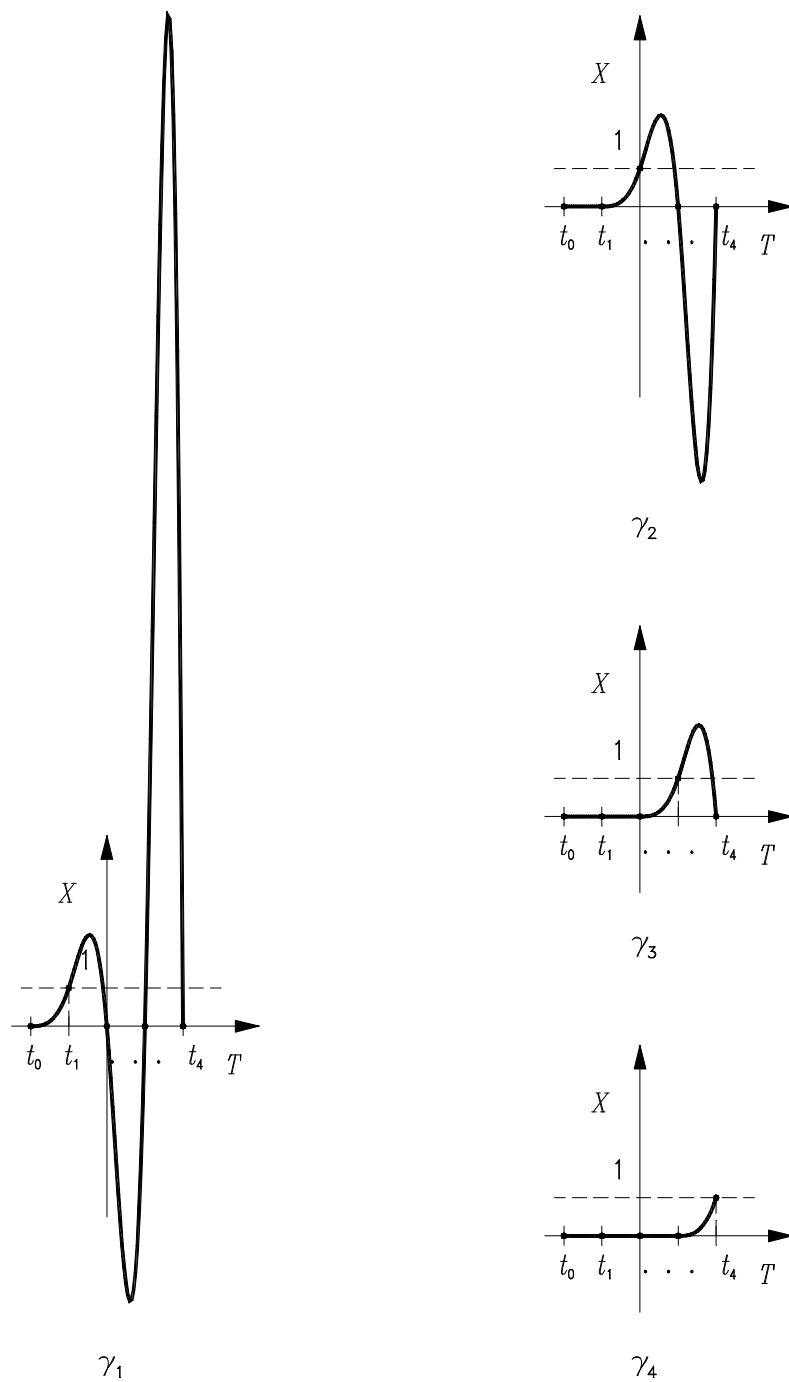


fig. 1.6.1(b).

1.8. Figures.

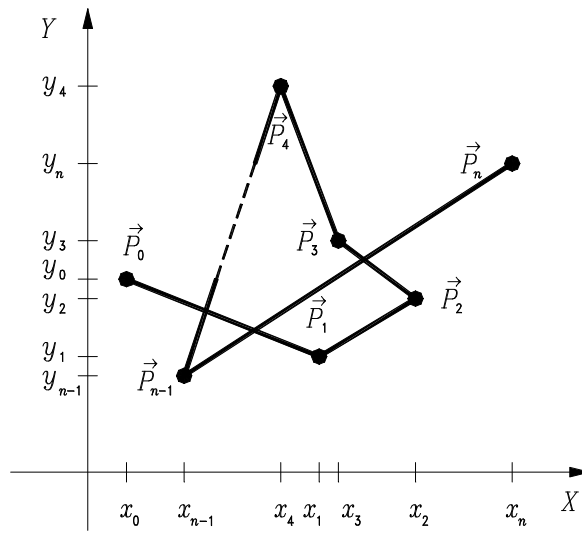


fig. 1.7.1.

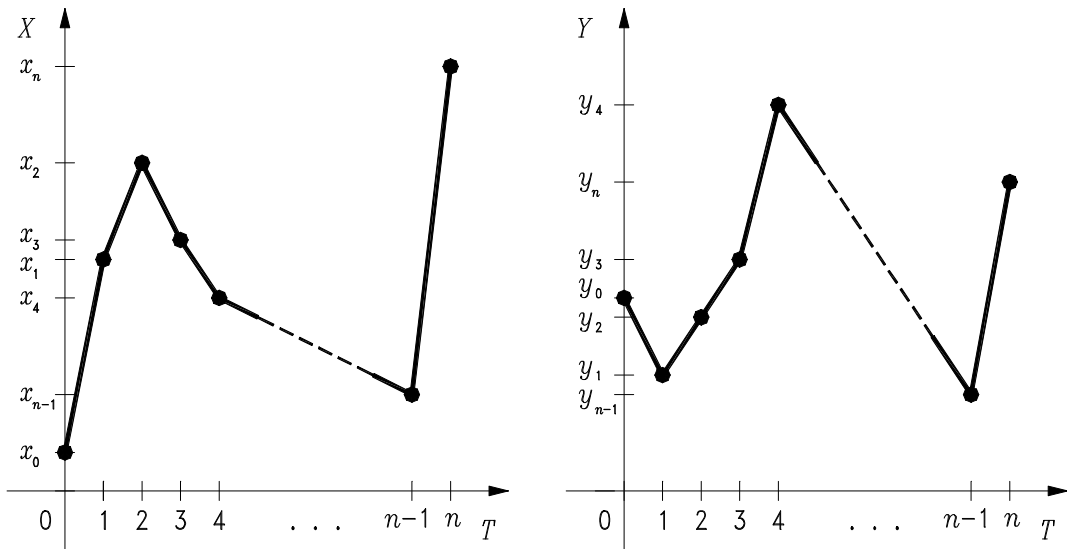


fig. 1.7.2.

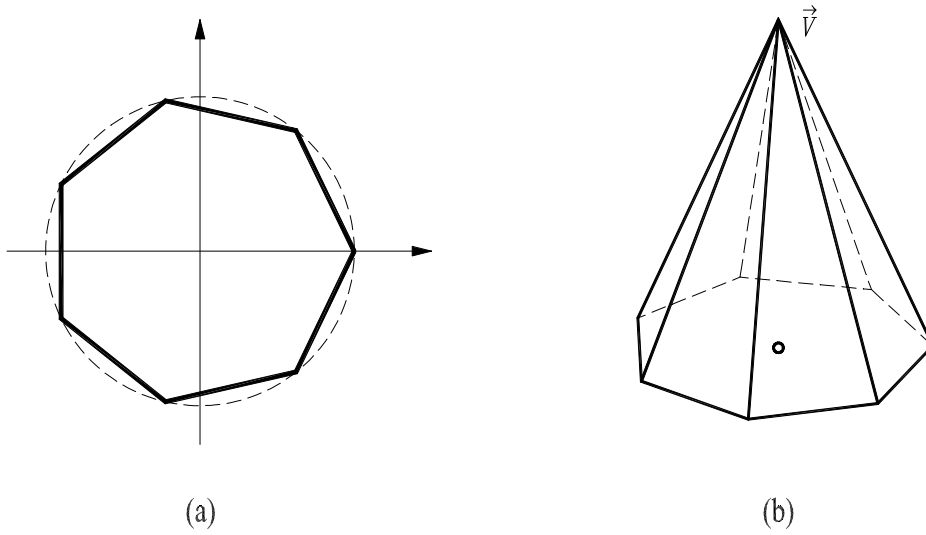


fig. 1.7.3.

Capítol 2

Interpolació per combinació de funcions interpoladores locals

L'objectiu d'aquest segon capítol és proposar un nou mètode genèric per produir funcions interpoladores que reuneixi els avantatges dels diferents mètodes existents, evitant en la mesura del possible els seus inconvenients o la introducció de nous. Per això, primer s'exposarà un resum comparatiu d'alguns dels mètodes interpoladors més populars sense entrar en detalls, ja que hi ha una extensa bibliografia al respecte (Farin 90; Bojanov 93; Hosaka 92; Foley 96; Nonweiler 84; Faux 85; Dahlgren 74); només es pretén copsar les virtuts i defectes que ostenten i poder així tenir un marc en el que entendre i avaluar les del mètode que aquí es proposa.

Després, es desenvolupa el mètode genèric basat en la combinació o ponderació per trams de funcions interpoladores locals i, finalment, es construeix detalladament una proposta de concreció d'aquest mètode genèric tot escollint unes funcions de ponderació o particions de la unitat concretes i unes funcions interpoladores locals concretes, que aprofiten el treball realitzat en el capítol 1.

No és nova la idea d'obtenir corbes i superfícies a partir de la combinació d'altres anteriors (Costantini 96; Wenz 96; Walton 98; Hui 99; Szilvasi-Nagy 00; Mitchell 00). Aquí proposem una manera alternativa de fer-ho, a partir d'un tractament diferent dels *splines* cúbics tradicionals.

2.1. Introducció: Panoràmica comparativa d'uns quants mètodes existents.

Per tal de posar en escena el tipus de qualitats desitjables en una corba interpoladora i el tipus de dificultats que apareixen recordarem sinòpticament les idees directrius d'alguns dels mètodes d'interpolació existents. En primer lloc, cal recordar que pràcticament tots parteixen de l'ús de polinomis o de quocient de polinomis (en l'argot, no-racionals o racionals, respectivament) i es divideixen aquests entre els de formulació global i els definits a trossos.

Entre els de formulació global recordem els clàssics mètodes de Lagrange i de Newton.

Com és sabut, tant el mètode de Lagrange com el de Newton, donats $n + 1$ punts (t_i, x_i) , $i = 0, \dots, n$, $t_{i-1} < t_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, construeixen l'únic polinomi de grau n que interpola aquests punts. La única diferència és el procediment de càlcul i la formulació aparent del polinomi.

El de Lagrange ho fa construint $n + 1$ polinomis de grau n $l_i(t)$ tals que $l_i(t_j) = \delta_{ij}$, llavors el polinomi interpolador és

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot l_i(t)$$

(Semblant als γ_i de 1.4)

En canvi el mètode de Newton construeix el polinomi de mena progressiva, com una suma d'un polinomi de grau zero que interpola el primer punt més un polinomi de grau 1 que rectifica l'anterior per passar pel segon punt també més un de grau dos per interpolar el tercer punt, etc., o sigui

$$p_n(t) = d_0 + d_1(t - t_0) + d_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + d_n(t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{n-1})$$

la imposició de que $p_n(t_i) = x_i$ porta a un sistema lineal de $n + 1$ equacions i $n + 1$ incògnites en les d_i 's que és triangular inferior i es pot resoldre simplement construint una taula (aquí intervenen els mètodes de Neville, Aitken, etc.).

El mètode de Lagrange té l'avantatge de que els valors x_i apareixen explicitats i podem jugar a variar-los per dissenyar la forma de la corba. En canvi s'han d'avaluar cada cop $n + 1$ polinomis de grau n i si s'afegeix un nou punt s'ha de recalculer tot.

El mètode de Newton no permet el joc amb les x_i 's però és fàcil d'avaluar mitjançant el mètode de Horner i si s'afegeix un nou punt només hi ha que afegir un nou terme i això vol dir calcular una nova fila de la taula anterior, aprofitant tots els càlculs ja fets.

El polinomi interpolador global en qualsevol cas té l'avantatge de ser C^∞ però el seu grau creix amb el nombre de punts i per tant, el cost de

2.1. Introducció: Panoràmica comparativa...

computació, i es torna inestable com algorisme. Així mateix, el que passa en un punt afecta a tota la corba (no hi ha control local) i presenta el síndrome de Runge-Meray que consisteix en oscilacions indesitjables entre els punts d'interpolació.

Alguns d'aquests problemes es poden solucionar utilitzant interpolació d'Hermite global, que imposa valors a les derivades en els nodes, però duplica el grau dels polinomis.

L'altre gran estratègia és la d'utilitzar interpolació polinòmica a trossos. Entre cada dos nodes es col·loca un polinomi diferent exigint ara condicions de continuïtat en els empalmes. Entre ells podem citar el mètode de Bessel, el d'Hermite a trossos i el dels *splines*.

El mètode de Bessel a grans trossos consisteix en construir per cada node i una paràbola que interpoli (t_{i-1}, x_{i-1}) , (t_i, x_i) i (t_{i+1}, x_{i+1}) . (Per evitar dispersar idees no tractaré el cas dels nodes extrems que tenen tractaments similars però no idèntics) i un cop això es treu informació sobre x' , x'' , etc. en el node i -èssim de les corresponents de la paràbola.

Llavors si utilitzem un polinomi de grau 1 entre cada dos nodes tenim una poligonal i continuïtat C^0 . S'imposa sols el pas pels punts i prou. Si es vol continuïtat C^1 , s'imposa a cada node la derivada x' provinent de la paràbola i -èssima; això dona 4 condicions per cada polinomi i per tant polinomis de grau 3. Si es vol continuïtat C^2 es tenen dues condicions més, és a dir, polinomi de grau 5, etc.

Com avantatges aquest mètode té menor cost computacional tant per construir com per avaluar, permet modificacions locals molts fàcils d'introduir i no oscila tant com el polinomi interpolador encara que això pot dependre de la posició relativa dels punts i de l'eventual parametrització triada. Com a defectes, la baixa continuïtat amb relació al grau dels polinomis que intervinguen i que la forma en cada tram depèn de massa pocs punts veïns.

El mètode d'Hermite polinomial a trossos és similar al de Bessel amb la diferència de que és l'usuari el que proporciona el valor de les derivades successives en cada node. El mètode usa una base de polinomis de manera que en cada tram el polinomi resultat s'obté com a combinació lineal dels de la base on els coeficients són directament les dades, de manera similar al cas de Lagrange però només amb dos nodes.

Els més usats són de grau tres, amb continuïtat C^1 en els nodes. Té les mateixes avantatges i inconvenients que el de Bessel, llevat que hi ha una mica més de llibertat en el disseny de la corba i que les dades sobre les derivades, al venir donades per l'usuari, no cal calcular-les, cosa que permet un petit estalvi de computació.

Per la seva part, el mètode dels *splines*, que ja hem descrit a 1.1 presenta com a avantatge que aconseguix més continuïtat que Bessel amb

el mateix grau de polinomis utilitzats (C^{k-1} per grau k , enlloc de C^{k-2}), les oscil·lacions i la estabilitat es tant bona en general com en el cas de Bessel.

Aquí cada punt té influència en tota la corba, és a dir, una modificació en un dels punts de interpolació canvia tot el *spline*, encara que la variació és despreciable en punts allunyats al modificat i decreix molt ràpidament. També s'ha de recalculer tot. El efecte a distància té avantatges i inconvenients. Per un costat la forma del *spline* no pateix d'excés de localitat i per altra banda no podem modificar res sense canviar-ho tot. L'ideal és que la forma a l'entorn de cada node depengui d'uns quants veïns a cada costat però tampoc de molts que estiguin, a més, gaire allunyats. Una altra propietat dels *splines* cúbics és que minimitza el funcional $\int_{t_0}^{t_n} (\varphi''(t))^2 dt$ entre tots els $\varphi(t)$ que interpolen els mateixos punts amb les mateixes condicions de frontera. Aquest funcional dóna un valor aproximat a l'energia elàstica de deformació.

En quant a inconvenients està l'excessiu volum de càlcul en resoldre el sistema lineal, quan el nombre de punts es gaire alt, i la impossibilitat de reformes locals un cop el *spline* ha estat construït.

Una variant que permet el control local (un canvi en un punt només varia la forma i fa recalculer un entorn d'aquest punt) el representen els *B-splines* en versió interpoladora, els quals construeixen una base de *splines* (un per node) cada un dels quals es diferent de zero només en uns quants nodes (depenent del grau) de manera que la corba final és una combinació lineal d'aquest. Però l'avantatge dels *B-splines* respecte els *splines* és **només** alhora de fer reformes en la corba, no alhora de construir-la per primer cop, ja que els coeficients de la primera combinació lineal també s'han de calcular a través d'un sistema d'equacions lineals del mateix ordre que el número de punts.

Així, entre les propietats que serveixen per testejar un mètode interpolador, podem citar el grau de continuïtat de la solució, el volum de càlcul (cost computacional) l'estabilitat com algorisme, l'estabilitat formal (síndrome de Runge-Meray o no), l'efecte local o global de cada punt al construir la corba i la reformabilitat local o no *a posteriori*. En els següents dos apartats proposem un nou mètode que representa un compromís entre aquestes qualitats de manera que el resultat porti una millora general respecte els mètodes citats (els no citats segueixen tenint avantatges i inconvenients en la mateixa línia que els que hem comentat). Al final es presentarà una taula comparativa dels diferents mètodes comentats, inclòs el nostre.

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

De cara a aconseguir mètodes que tinguin bones prestacions en els diferents apartats estudiats proposo un esquema de mètode o mètode genèric que podriem anomenar “composició de funcions interpoladores locals per mitjà de funcions de trànsit”. Es pot pensar com que enlloc d'interpoliar punts directament, s'interpolen funcions les quals interpolen punts. L'esquema és el següent.

Per cada node i , construïm una funció f_i de classe C^k (la continuïtat desitjada) que interpoli m nodes a dreta i esquerra del i -èssim (als extrems es repeteix la f_0, f_1, \dots, f_m i la $f_{n-m}, \dots, f_{n-1}, f_n$). La forma que aquesta f_i té a l'entorn del node i recull informació dels nodes veïns, però no dels remots. Es tracta de que la funció interpoladora global sigui tant més semblada a f_i quant més a prop de t_i estigui la variable t . Per això, donat el tram $[t_{i-1}, t_i]$, es tracta de **combinar** la f_{i-1} i la f_i (fer la transició d'una a l'altra) de manera que es passi de 100% f_{i-1} per $t = t_{i-1}$ fins 100% f_i per $t = t_i$ (tot conservant la continuïtat C^k).

Això s'aconsegueix construint unes particions de la unitat $s_i(t)$ tals que

$$\begin{aligned} s_i(t_i) &= 1, & s_i(t) &\equiv 0 \text{ per } t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}), & i &= 1, \dots, n-1 \\ s_0(t) &\equiv 1 & \forall t < t_0, & s_0(t) &\equiv 0 \forall t \geq t_1 & \\ s_n(t) &= 1 & \forall t \geq t_n, & s_n(t) &\equiv 0 \forall t < t_{n-1} & \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\sum_{i=0}^n s_i(t) \equiv 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.2.2)$$

i que tinguin la continuïtat suficient per atansar la continuïtat C^k (figura 2.2.1). Llavors la funció interpoladora desitjada serà

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \cdot s_i(t) \quad (2.2.3)$$

Les diferents formes d'escollir les $f_i(t)$ i les $s_i(t)$ decidint abans els valors de k i m fan que aquest no sigui un sol mètode sinó una família de mètodes.

Avantatges d'aquest sistema:

- Un cop fixat m cada funció f_i interpola un nombre fixat $(2m + 1)$ de nodes, el que permet la seva automatització i el mateix passa amb les s_i : en els dos casos poden estar ja formulades, quedant en funció dels valors t_i i x_i com a paràmetres. Això redueix el volum de càlcul per la

construcció de la funció interpoladora, pràcticament no s'ha de fer cap càlcul, nomès introduir els paràmetres t_i ; un cop introduïts els punts la corba es pot començar a traçar immediatament.

- En cada tram $[t_{i-1}, t_i]$ només dues s_i són diferents de zero, per tant,

$$\begin{aligned} \varphi(t) \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} &= f_{i-1}(t)s_{i-1}(t) + f_i(t)s_i(t) = & (2.2.4) \\ &= f_{i-1}(t) \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} s_{i-1}(t) \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} + f_i(t) \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} s_i(t) \Big|_{[t_{i-1}, t_i]}. \end{aligned}$$

Això fa que el volum de càlcul al dibuixar la corba sigui menor que en el cas de Lagrange i Newton, i una mica superior al de Bessel i *splines*, atès que aquí intervenen quatre funcions, encara que només compta la seva definició a l'interval $[t_{i-1}, t_i]$ (figura 2.2.2).

- En quant a la localitat-globalitat, aquesta es pot modular jugant amb la m , per quant, encara que en cada tram només intervenen dos funcions f_i , aquestes ja porten implícitament en la seva forma la informació dels nodes veïns. Els nodes prou remots no tenen cap influència, la qual cosa és interessant ja que en tot cas, convé que la tinguin despreciable, i el fet que la tinguin nul·la permet la reformabilitat local de la corba un cop construïda ja que la forma del tram $[t_{i-1}, t_i]$ només depèn del que passa amb l'interval $[t_{i-1-m}, t_{i+m}]$ que són els nodes que intervenen en determinar f_{i-1} i f_i . Així si, per exemple, movem el punt (t_i, x_i) això canvia la forma de f_{i-m} fins f_{i+m} per tant només hem de reconstruir des de el tram $[t_{i-m-1}, t_{i-m}]$ fins al $[t_{i+m}, t_{i+m+1}]$, la resta queda invariant. Anàlogament, es poden suprimir o afegir nous punts intermitjos i també va bé per aconseguir la periodicitat de $\varphi(t)$ necessària per a construir corbes tancades en el cas paramètric.

Vist això, entre totes les formes de triar les f_i i les s_i , es tracta de oferir una proposta concreta de mètode d'aquest tipus, tenint però present que poden haver moltes altres opcions.

Atès que la continuïtat de la curvatura dóna resultats prou satisfactoris en procesos de disseny i que l'informació de dos nodes veïns a cada costat del node i -éssim ja sol ser suficients en la majoria de cassos, proposem fixar $k = 2$, $m = 2$ i triar així com a f_i un *spline cúbic natural* sobre els nodes $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ (atenció apart tindran els nodes extrems). Al fixar cinc nodes per cada *spline* podrem aprofitar les idees sobre representació global de *splines* vistes al capítol 1.

També, degut a l'efecte local de cada f_i , usant *splines* cúbics, podrem fixar *dues* condicions de frontera a cada *extrem* de la corba global, enlloc de dues en total, amb la qual cosa augmenta la versatilitat del mètode.

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

Per les funcions de trànsit s_i proposem unes funcions racionals que formen part d'una família obtinguda per iteració contínua.

2.2.1. Formulació de *splines* cúbics sobre cinc nodes. Condiicions de frontera.

Al apartat 1.6 hem vist un procediment per explicitar un *spline* cúbic jugant amb dues bases de *splines* i la matriu de canvi de base. El problema que presentava és que si el nombre de nodes era gran i, sobre tot, arbitrari, llavors el procediment era molt pitjor que el càlcul directe del *spline* segons 1.2. Però si **fixem** el número de nodes a cinc ($n = 4$), la matriu M es 7×7 i M^{-1} es pot calcular **explícitament en funció** de h_i i g_{jk} els quals estan **en funció** de t_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = j + 1, \dots, 4$). Concretament, recordant les notacions de 1.3, 1.4, 1.5 i 1.6 i les figures 1.6.1 tenim

$$\begin{pmatrix} x_0'' \\ x_0' \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1^2/2 & h_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_2^2/2 & h_2 & 1 & g_{12} & 1 & 0 & 0 \\ h_3^2/2 & h_3 & 1 & g_{13} & g_{23} & 1 & 0 \\ h_4^2/2 & h_4 & 1 & g_{14} & g_{24} & g_{34} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

Si $M^{-1} = (a_{ij})$ $i, j = 1, \dots, 7$ resulta que el *spline* queda

$$\begin{aligned} f(t) &= x_0'' \cdot \gamma_0''(t) + x_0' \cdot \gamma_0'(t) + \sum_{i=0}^4 x_i \cdot \gamma_i(t) \\ &= \underbrace{x_0''}_{c_2} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \underbrace{x_0'}_{c_1} (t-t_0) + \underbrace{x_0}_{c_0} + \\ &+ \underbrace{(x_0'' a_{41} + x_0' a_{42} + x_0 a_{43} + x_1)}_{b_1} g_1(t) \\ &+ \underbrace{(x_0'' a_{51} + x_0' a_{52} + x_0 a_{53} + x_1 a_{54} + x_2)}_{b_2} g_2(t) \\ &+ \underbrace{(x_0'' a_{61} + x_0' a_{62} + x_0 a_{63} + x_1 a_{64} + x_2 a_{65} + x_3)}_{b_3} g_3(t) \\ &+ \underbrace{(x_0'' a_{71} + x_0' a_{72} + x_0 a_{73} + x_1 a_{74} + x_2 a_{75} + x_3 a_{76} + x_4)}_{b_4} g_4(t) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Els valors dels a_{ij} són els següents:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= 0 \text{ si } j > i \\
 a_{ii} &= 1 \forall i = 1, \dots, 7 \\
 a_{21} &= a_{31} = a_{32} = 0 \\
 a_{i1} &= - \left(\frac{h_i^2}{2} + \sum_{j=1}^{i-4} a_{j+3,1} g_{j,i-3} \right) \quad (i \geq 4) \\
 a_{i2} &= - \left(h_i + \sum_{j=1}^{i-4} a_{j+3,2} g_{j,i-3} \right) \quad (i \geq 4) \\
 a_{43} &= -1 \\
 a_{53} &= g_{12} + a_{43} \\
 a_{63} &= g_{13} - a_{53} g_{23} + a_{43} \\
 a_{73} &= g_{14} - a_{63} g_{34} - a_{53} g_{24} + a_{43} \\
 a_{54} &= -g_{13} \\
 a_{64} &= -(g_{13} + a_{54} \cdot g_{23}) \\
 a_{74} &= -(g_{14} + a_{54} \cdot g_{24} \cdot g_{34}) \\
 a_{65} &= -g_{23} \\
 a_{75} &= -(g_{24} + a_{65} g_{34}) \\
 a_{76} &= -g_{34}
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Respecte les condicions de frontera, cal resoldre les de t_0 que no es donguin, en funció de les que es donguin a t_4 de manera explícita i *a priori* en funció de les dades. Per exemple, si es donen condicions naturals $x_0'' = x_4'' = 0$, es resol $f''(t_4) = 0$ amb x_0' com incògnita, però no cal resoldre la equació cada vegada, sino que podem tenir una fórmula emmagatzemada que dongui ja la x_0' aïllada en funció de totes les dades que, un cop substituïdes pel valor concret que tinguin, resol el problema. Això es pot fer obviamt perquè m és **baix i fixat**.

En definitiva, cal passar a condicions tipus 1.1.1.3d) qualsevol de les altres. Les equacions que lliguen en general les quatre condicions de frontera són

$$\begin{cases} f'(t_4) = x_4' \\ f''(t_4) = x_4'' \end{cases}$$

la qual cosa, desenvolupant (2.2.6), porta a equacions del tipus

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_0'' + \alpha_{12} x_0' + \beta_1 = x_4' \\ \alpha_{21} x_0'' + \alpha_{22} x_0' + \beta_2 = x_4'' \end{cases}$$

on els coeficients α i β només depenen del punts donats per l'usuari i de la parametrització. En cada cas, dues de les condicions de frontera seran dades i les altres dues, incògnites. Només cal resoldre el corresponent sistema lineal de dues equacions i dues incògnites.

Veiem les expressions específiques que surten pels diferents tipus de condicions de fontera vistos al capítol 1.

Condicions tipus 1.1.1.3.a) Dades x_0' i x_4' . Incògnita x_0'' , equació

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

$f'(t_4) = x'_4$. Resultat

$$x''_0 = \frac{\left[\begin{aligned} &(x'_4 - x'_0) - \left[(x'_0 a_{42} + x_0 a_{43} + x_1) \cdot g'_1(t_4) \right. \\ &+ (x'_0 a_{52} + x_0 a_{53} + x_1 \cdot a_{54} + x_2) \cdot g''_2(t_4) \\ &+ (x'_0 \cdot a_{62} + x_0 \cdot a_{63} + x_1 \cdot a_{64} + x_2 \cdot a_{65} + x_3) \cdot g'_3(t_4) \\ &+ (x'_0 \cdot a_{72} + x_3 \cdot a_{73} + x_1 a_{74} + x_2 \cdot a_{75} + x_3 a_{76} + x_4) \cdot g'_4(t_4) \\ &\left. \right] }{((t_4 - t_0) + a_{41} \cdot g'_1(t_4) + a_{51} \cdot g'_2(t_4) + a_{61} g'_3(t_4) + a_{71} \cdot g'_4(t_4))} \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

on $g'_i(t) = \frac{3(t - t_{i-1})_+^2}{(t_i - t_{i-1})^3}$.

Condicions tipus 1.1.1.3.b) Dades $x''_0 = x''_4 = 0$. Incògnita x'_0 . Equació $f''(t_4) = 0$. Resultat:

$$x'_0 = \frac{\left[\begin{aligned} &- \left[(x_0 \cdot a_{43} + x_1) \cdot g''_1(t_4) \right. \\ &+ (x_0 \cdot a_{53} + x_1 \cdot a_{54} + x_2) \cdot g''_2(t_4) \\ &+ (x_0 \cdot a_{63} + x_1 \cdot a_{64} + x_2 \cdot a_{65} + x_3) \cdot g''_3(t_4) + \\ &+ (x_0 \cdot a_{73} + x_1 \cdot a_{74} + x_2 a_{75} + x_3 \cdot a_{76} + x_4) \cdot g''_4(t_4) \\ &\left. \right] }{(a_{42} \cdot g'_1(t_4) + a_{52} \cdot g'_2(t_4) + a_{62} g'_3(t_4) + a_{72} \cdot g'_4(t_4))} \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

on $g''_i(t) = \frac{6(t - t_{i-1})_+}{(t_i - t_{i-1})^3}$.

Condicions tipus 1.1.1.3.c) Dades $x'_0 = x'_4$, $x''_0 = x''_4$. Incògnita x'_0 i x''_0 . Equació $f'(t_4) = x'_0$, $f''(t_4) = x''_0$. Resultat

$$x''_0 = \frac{\begin{vmatrix} -\beta_1 & \alpha_{12} \\ -\beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x'_0 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\beta_1 \\ \alpha_{21} & -\beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} \quad (2.2.10)$$

on

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= (t_4 - t_0) + \sum_{i=1}^4 a_{i+3,1} \cdot g'_i(t_4) & \alpha_{22} &= \sum_{i=1}^4 a_{i+3,2} \cdot g''_i(t_4) \\
 \alpha_{12} &= \sum_{i=1}^4 a_{i+3,2} \cdot g'_i(t_4) & \beta_1 &= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=0}^i x_j \cdot a_{i+3,j+3} \right) \cdot g'_i(t_4) \\
 \alpha_{21} &= \sum_{i=1}^4 a_{i+3,1} \cdot g''_i(t_4) & \beta_2 &= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=0}^i c_j \cdot a_{i+3,j+3} \right) \cdot g''_i(t_4)
 \end{aligned}$$

Condicions tipus 1.1.1.3.e) Dades x'_4 i x''_4 . Incògnita x'_0 i x''_0 . Equacions $f'(t_4) = x'_4$, $f''(t_4) = x''_4$. Resultat

$$\begin{aligned}
 x''_0 &= \frac{\begin{vmatrix} -\beta'_1 & \alpha'_{12} \\ -\beta'_2 & \alpha'_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix}} \\
 x'_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_{11} & -\beta'_1 \\ \alpha'_{21} & -\beta'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix}} \quad (2.2.11)
 \end{aligned}$$

on, respecte el cas 1.1.1.3.c)

$$\begin{aligned}
 \alpha'_{11} &= \alpha_{11} \\
 \alpha'_{12} &= \alpha_{12} + 1 \\
 \alpha'_{21} &= \alpha_{21} + 1 \\
 \alpha'_{22} &= \alpha_{22} \\
 \beta'_1 &= \beta_1 - x'_4 \\
 \beta'_2 &= \beta_2 - x''_4
 \end{aligned}$$

Així mateix, de manera similar i més senzilla, es formula tot això pels casos $n = 1, 2$, ó 3 . A part d'aquestes, en la proposta de programa que s'adjunta en l'Apèndix, s'han hagut de contemplar altres combinacions de condicions de frontera proveïdes per l'usuari que porten a càlculs molt similars i que no detallarem aquí.

2.2.2. Particions de la unitat.

La funció interpoladora global $\varphi(t)$ definida a les fórmules (2.2.3) resulta per cada valor de t , d'una combinació lineal de les funcions f_i . Els pesos varien amb t i han de verificar (2.2.1) i (2.2.2) de manera que representen

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

una partició de la unitat vinculada a la seqüència de nodes t_i . A més, han de tenir continuïtat suficient per que la funció $\vec{\varphi}(t)$ sigui de classe C^k . Com que la parametrització no té perquè ser uniforme (no cal que $|t_i - t_{i-1}|$ sigui constant), exigirem, apart de que

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} s_i(t) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} s_i(t) = 1$$

també que

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} s_i^{(j)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} s_i^{(j)}(t) = 0, \quad j = 1, \dots, h \quad (2.2.12)$$

Veure fig. 2.2.3.

Per construcció, en cada tram $[t_{i-1}, t_i]$ només s_{i-1} i s_i són diferents de zero, per tant,

$$\begin{aligned} s_{i-1}(t_i) &= s_{i+1}(t_i) = 1 - s_i(t_i) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_i^-} s_{i-1}^{(j)}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} s_{i+1}^{(j)}(t) = - \lim_{t \rightarrow t_i} s_i^{(j)}(t) = 0, \quad j = 1, \dots, h \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

O sigui, cal que les derivades de s_i s'anulin a t_{i-1} , t_i i t_{i+1} fins un ordre h a decidir i relacionat amb la k . Això permetrà "empalmar-les" sense problemes amb continuïtat regulable.

Donat que a l'interior de cada tram (t_{i-1}, t_i) les funcions f_i són de classe C^∞ (són *splines* i per tant tenen definició polinòmica a cada tram), convé que cada s_i sigui també C^∞ a cada (t_{i-1}, t_i) . Llavors només haurérem d'estudiar la continuïtat en els nodes t_i . En aquest sentit, la següent proposició mostra que només cal que $h = k - 1$ per garantir la continuïtat C^k per $\varphi(t)$.

Proposició 2.2.2.1. Amb les definicions donades, $\varphi(t)$ és almenys de classe C^k en el node t_i si en ell ho són les funcions f_{i-1}, f_i, f_{i+1} i les derivades de s_{i-1}, s_i, s_{i+1} s'anul·len fins l'ordre $k - 1$.

Demostració. Per la fórmula 2.2.4, a l'entorn de t_i només intervenen f_{i-1}, f_i, f_{i+1} que són de classe C^k per elecció i s_{i-1}, s_i, s_{i+1} .

Per la fórmula de Leibnitz:

$$(f \cdot s)^{(h)} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \cdot f^{(j)} \cdot s^{(h-j)}$$

Per no recarregar la notació entendrem les derivades evaluades en els nodes com els límits laterals corresponents sempre que coincideixin.

Llavors, per $h \cdot k - 1$

$$(f_i \cdot s_i)^h(t_{i\pm 1}) = f^h \cdot s_i(t_{i\pm 1}) + \sum_{j=0}^{h-1} \binom{h}{j} f^j \cdot s_i^{h-j}(t_{i\pm 1}) = 0$$

$$(f_i \cdot s_i)^h(t_i) = f^h(t_i)$$

Per tant,

$$\varphi^h(t_i) = (f_{i-1}s_{i-1} + f_i s_i + f_{i+1}s_{i+1})^h(t_i) = f^h(t_i)$$

Sense problemes de definició.

Per $h = k$,

$$(f_i \cdot s_i)^k = f_i^k \cdot s_i + f_i \cdot s_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} f_i^j s_i^{k-j};$$

com que $s_{i+1}(t) \Big|_{t < t_i} \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^-} \varphi^k(t) &= \sum_{m=-1}^0 \lim_{t \rightarrow t_i^-} \left(f_{i+m}^k s_{i+m} + f_{i+m} s_{i+m}^k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} f_{i+m}^j s_{i+m}^{k-j} \right) (t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} \left(f_{i-1} s_{i-1}^k + f_i s_i^k + f_i^k \right) (t) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f_i^k(t) \end{aligned}$$

ja que f_{i-1} i f_i interpolen (és a dir, $f_{i-1}(t_i) = f_i(t_i)$) i $s_{i-1} = 1 - s_i$ per la fórmula (2.2.13).

Anàlogament

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \varphi^k(t) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f_i^k(t) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f_i^k(t) = f_i^k(t_i)$$

i tenim garantida la continuïtat de classe C^k amb unes funcions s_i que poden ser només de classe C^{k-1} en els nodes. Si els nodes no són equiespaiats en general la continuïtat C^k serà estricta. ■

En particular, podem obtenir $\varphi(t)$ de classe C^2 usant *splines* cúbics per les f_i i unes funcions s_i de classe C^1 en cada node, sempre que siguin C^∞ a l'interior de cada tram. Només cal proposar-se unes.

La motivació per les s_i que anem a proposar prové del següent procés de raonament.

La funció $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ representa una bijecció de l'interval $[-1, 1]$ sobre ell mateix amb $\{-1, 0, 1\}$ com a punts fixos i amb les derivades primeres

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

nules a $\{-1, 1\}$. Si la iterem un cop s'anul·len també les derivades segones a $\{-1, 1\}$, etc.

Després, una transformació afí oportuna en la x i la y pot portar aquesta gràfica al rectangle $[t_{i-1}, t_i] \times [0, 1]$ i una altra pot portar la seva oposta al $[t_i, t_{i+1}] \times [0, 1]$ i es pot estendre a \mathbb{R} assignant zero a $\mathbb{R} \setminus [t_{i-1}, t_{i+1}]$. La gràfica resultant és del tipus de la de la figura 2.2.3. Així tenim funcions C^1, C^2 , etc., segons el nombre d'iteracions, que tenen les característiques que desitgem per les s_i . Però el cost computacional es va incrementant al augmentar aquestes iteracions i de fet volem una funció amb aquestes qualitats, però no cal que provinguí del sinus. Això porta a buscar en la teoria de la iteració (Targonski 81) on hi trobem que les iteracions "discretes" d'una funció, en condicions adients, es poden submergir en una família d'iteracions contínues a través de funcions generadores.

Treballant en aquesta línia, hem arribat a les funcions

$$\bar{s}_r(t) = \frac{(1+t)^r - (1-t)^r}{(1+t)^r + (1-t)^r} \quad t \in [-1, 1], r \in (0, \infty) \quad (2.2.14)$$

Veure fig. 2.2.4.

Proposició 2.2.2.2. Propietats immediates de \bar{s}_r que no cal demostrar

- i) $\forall r > 0$, $\bar{s}_r(t)$ és una bijecció de l'interval $[-1, 1]$ entre ell mateix amb $\{-1, 0, 1\}$ com a punts fixos.
- ii) $\bar{s}_r(-t) = -\bar{s}_r(t) \quad \forall r$
- iii)

$$\bar{s}_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0 \quad \forall t \in (-1, 1)$$

$$\bar{s}_1(t) = t$$

$$\bar{s}_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} -1 \quad \forall t \in [-1, 0)$$

$$\bar{s}_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 1 \quad \forall t \in (0, 1]$$

A més, \bar{s} verifica la següent propietat que s'adequa als requeriments (2.2.12).

Proposició 2.2.2.3. $\forall r = m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, \bar{s}_m és una funció racional que verifica

$$\bar{s}_m^i(-1) = \bar{s}_m^i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \bar{s}_m(t) &= \frac{(1+t)^m - (1-t)^m}{(1+t)^m + (1-t)^m} = \frac{(1+t)^m - (2 - (1+t))^m}{(1+t)^m + (2 - (1+t))^m} = \\ &= - \frac{\left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} (-1)^i \cdot 2^{m-i} \cdot (1+t)^i \right) + ((-1)^m - 1)(1+t)^m}{\left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} (-1)^i \cdot 2^{m-i} (1+t)^i \right) + ((-1)^m + 1)(1+t)^m} = \\ &= -1 + \frac{(1+t)^m}{2^{m-1}} + \dots \text{potències de } (1+t) \text{ d'exponent més gran que } m. \end{aligned}$$

Derivant i avaluant per $t = -1$ surt immediatament. Com \bar{s}_m és senar (propietat 2.2.2.1.ii) el mateix succeeix per $t = 1$. ■

Així es disposa d'una família de funcions, regulada per un paràmetre, que permet fer una transició, amb continuïtat a escollir segons r , de la recta $x = -1$ per $t < -1$ a la recta $x = 1$ per $t > 1$ (fig. 2.2.5).

Per translació i canvi d'escala, la funció

$$x(t) = \frac{1 + \bar{s}_i(2t - 1)}{2} = \frac{t^r}{t^r + (1-t)^r}$$

fa el mateix tipus de bijecció creixent dins el quadrat $[0,1]$. El canvi $t \rightarrow \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$ porta a

$$x(t) = \frac{(t - t_{i-1})^r}{(t - t_{i-1})^r + (t_i - t)^r}, \quad \text{gràfica bijectiva creixent entre } [t_{i-1}, t_i] \text{ i } [0, 1]$$

i el canvi $t \rightarrow \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}$ porta a

$$x(t) = \frac{(t_{i+1} - t)^r}{(t - t_i)^r + (t_{i+1} - t)^r}, \quad \text{gràfica bijectiva decreixent entre } [t_i, t_{i+1}] \text{ i } [0, 1].$$

Veure figura 2.2.6.

La combinació òbvia de les dues gràfiques donarà la funció s_i buscada pels nodes interiors, mentre que la primera sola servirà per t_n i la segona sola, per t_0 .

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

Amb això podem donar una definició per cassos de les funcions s_i un cop escollit el grau de continuïtat, és a dir, fixat r :

$$\begin{aligned}
 s_0(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t \cdot t_0 \\ \frac{(t_1-t)^r}{(t-t_0)^r+(t_1-t)^r} & \text{si } t_0 < t < t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 \cdot t \end{cases} \\
 s_i(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}) \\ \frac{(t-t_{i-1})^r}{(t-t_{i-1})^r+(t_i-t)^r} & \text{si } t_{i-1} < t < t_i \\ \frac{(t_{i+1}-t)^r}{(t-t_i)^r+(t_{i+1}-t)^r} & \text{si } t_i \cdot t < t_{i+1} \end{cases} \quad (2.2.15) \\
 s_n(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \cdot t_{n-1} \\ \frac{(t-t_{n-1})^r}{(t-t_{n-1})^r+(t_n-t)^r} & \text{si } t_{n-1} < t < t_n \\ 1 & \text{si } t_n \cdot t \end{cases}
 \end{aligned}$$

A efectes computacionals, aquesta formulació pot ser la més adient, però també es pot donar una formulació global quan convingui, en la línia del capítol 1.

En efecte. Siguin

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(t) &= 1 - \varphi_{t_0, t_1, 1}(t) \\
 \sigma_i(t) &= \varphi_{t_{i-1}, t_{i+1}, 1}(t) - \varphi_{t_i, t_{i+1}, 1}(t) \quad i = 1, \dots, n-1 \\
 \sigma_n(t) &= \varphi_{t_{n-1}, t_n, 1}(t)
 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

on φ és la de la definició (1.2.3).

Les seves gràfiques es veuen a la figura 2.2.7.

Llavors les funcions s_i de 2.2.1 que proposem en la seva formulació global són, un cop triat r , (fig. 2.2.8)

$$s_i(t) = \frac{1 + \bar{s}_r(2\sigma_i(t) - 1)}{2} = \frac{(\sigma_i(t))^r}{(\sigma_i(t))^r + (1 - \sigma_i(t))^r} \quad (2.2.17)$$

Per l'anul·lació simultànea, com a pas al límit, de les derivades fins ordre $m-1$ a cada costat de cada node, aquestes funcions són de classe C^{m-1} per cada $r = m$.

En cada tram $[t_{i-1}, t_i]$ només dues d'aquestes funcions són no nul·les i per la qualitat de senar que tenia la $\bar{s}_r(t)$ original és immediat veure que sumen 1 en tot l'interval. Com hem vist a la proposició 2.2.2.1, perquè $\varphi(t)$ sigui de classe C^k , n'hi ha prou en fer $r = k$.

Resumint: Per construir funcions interpoladores amb continuïtat C^k proposem triar un *spline* de grau $k+1$ per cada node t_i que interpoli diversos

nodes a banda i banda d'aquest t_i i funcions de trànsit d'un node al següent del tipus s_i amb $r = k$.

Com hem dit, d'entre aquesta família, proposem triar continuïtat fins la derivada segona i cinc nodes per cada *spline*. El següent apartat desenvolupa el mètode concret corresponent, però abans inclourem aquí, per tal de tenir agrupats els resultats, una generalització de les funcions $\bar{s}_r(t)$ i unes propietats d'aquesta generalització que seran d'utilitat en la segona part.

Per simple reescalat i translació (transformacions afins, doncs) de les \bar{s}_r , podem definir les següents funcions definides sobre un interval $[t_0, t_1]$:

$$\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(r) = \frac{b(t - t_0)^r + a(t_1 - t)^r}{(t - t_0)^r + (t_1 - t)^r} \quad (2.2.18)$$

(veure fig. 2.2.9 per dos exemples amb $r = 1/3$ i $r = 3$ respectivament).

Aquestes funcions verifiquen les següents propietats que no cal demostrar perquè són heretades de les de la proposició 2.2.2.2.

Proposició 2.2.2.4.

- i) $\forall r > 0$, $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}$ és una bijecció entre l'interval $[t_0, t_1]$ i el $[a, b]$ amb $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t_0) = a$, $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) = \frac{a + b}{2}$, $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t_1) = b$. D'aquí la notació, ja que són funcions de transició, amb suavitat regulada per r .
- ii) La gràfica de $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}$ té simetria puntual respecte el punt $\left(\frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{a + b}{2}\right)$.
- iii) $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \frac{a + b}{2}, \forall t \in (t_0, t_1)$

La gràfica de $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, 1}$ és una recta entre (t_0, a) i (t_1, b) .

$$\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} a, \forall t \in \left[t_0, \frac{t_0 + t_1}{2}\right)$$

$$\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} b, \forall t \in \left(\frac{t_0 + t_1}{2}, t_1\right]$$

Aquestes funcions també hereten de la manera natural les propietats de derivació en els extrems enunciades en la proposició 2.2.2.3. A més a més, com que *tran* és bijectiva entre dos intervals, té inversa. La següent propietat i el seu corol·lari seran d'utilitat en els exemples d'aplicació del capítol 6.

Proposició 2.2.2.5 (Composició de funcions de tipus *tran*). Considerem

2.2. Proposta d'un nou mètode genèric.

$\text{tran}_{t_0, t_1, u_0, u_1, p} : [t_0, t_1] \rightarrow [u_0, u_1]$ i $\text{tran}_{u_0, u_1, a, b, q} : [u_0, u_1] \rightarrow [a, b]$. Llavors la funció composta verifica

$$\text{tran}_{u_0, u_1, a, b, q}(\text{tran}_{t_0, t_1, u_0, u_1, p}(t)) = \text{tran}_{t_0, t_1, a, b, pq}(t).$$

Per demostrar-ho només cal fer el càlcul obvi. És a dir, al compondre dues funcions d'aquesta família, el resultat és una altra funció de la mateixa família amb els exponents multiplicats. Aquest resultat porta una conseqüència interessant:

Corol·lari 2.2.2.6. La inversa de $\text{tran}_{t_0, t_1, a, b, r}(t)$ és la funció $\text{tran}_{a, b, t_0, t_1, (1/r)}(t)$.

2.3. Mètode resultant.

Per concretar una proposta operativa, alhora que un exemple, anem a desenvolupar fins el nivell de programa executable un cas d'entre la família presentada a 2.2.1 i 2.2.2 per resoldre el següent problema:

Problema 2. Donats $n + 1$ punts del pla $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$, $\vec{P}_i = (x_i, y_i)$, construir $n + 1$ valors d'un paràmetre t ; $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ i una corba paramètrica

$$\vec{\varphi} : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{tal que} \quad \vec{\varphi}(t_i) = \vec{P}_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Si l'usuari ho desitja, després de donar el punt \vec{P}_{n-1} pot indicar que vol "corba tancada" i llavors s'assigna $\vec{P}_n = \vec{P}_0$. Sinó, es considera corba oberta, encara que $\vec{P}_0 = \vec{P}_n$ i l'usuari haurà d'afegir com a dades certes condicions de frontera que també haurà de complir $\vec{\varphi}(t)$, condicions del tipus fixar alguns o tots d'entre els valors $\vec{\varphi}'(t_0)$, $\vec{\varphi}''(t_0)$, $\vec{\varphi}'(t_n)$, $\vec{\varphi}''(t_n)$.

Al acabar, s'ofereix la possibilitat de dibuixar segments que representen aquests quatre vectors, tant si els ha proveït l'usuari, com si els ha calculat el programa.

La manera d'entrar aquesta dada dependrà del particular entorn gràfic utilitzat, però en general serà o bé amb un *mouse* o un digitalitzador marcant els punts sobre la pantalla, o bé entrant les coordenades per teclat dins d'una tanda de petició de "primer punt", "següent punt", ... La manera de indicar "corba tancada" pot ser retornant un caràcter com ara "c" a la petició de "següent punt". La corba oberta s'indica entrant *Return* sense rés més a la última petició de següent punt. En el cas de "corba oberta" també es podran indicar els vectors tangent i derivada segona per pantalla o teclat.

Suposada resolta la part de triar els valors t_i del paràmetre (que comentarem aviat) reduïrem aquest problema a dos problemes paralels de tipus funcinal que són els següents.

Donats $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ i $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Construir dues funcions

$$\begin{aligned} x &= x(t) \quad \text{tal que} \quad x(t_i) = x_i \\ y &= y(t) \quad \text{tal que} \quad y(t_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

junt amb condicions de frontera corresponents a les components x i y , respectivament de les dades entrades.

El problema es pot estendre a l'espai, afegint una nova funció

$$z(t) \quad \text{tal que} \quad z(t_i) = z_i \quad \text{si} \quad \vec{P}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$$

2.3. Mètode resultant.

Desenvoluparem el mètode només per la construcció de $x(t)$, ja que $y(t)$ o $z(t)$ es resolten anàlogament.

D'acord al que s'ha dit i segons la fórmula (2.2.3), construïrem, per $n > 4$ (per $n = 4$ el trançament és similar però especial)

$$x(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \cdot s_i(t)$$

on cada f_i serà un spline cúbic local del tipus (2.2.6) interpolant cinc nodes el més centrats possibles a l'entorn del node t_i i cada s_i serà del tipus (2.2.15) o (2.2.17), segons calgui formulació a trossos o global, triant $r = 2$ per les funcions $\vec{s}_r(t)$ definides a (2.2.14), o sigui, per tenir continuïtat de classe C^2 .

Per desenvolupar el mètode, primer es resol el problema de la parametrització, després el de la formulació de cada f_i , amb les seves condicions de frontera particular per cada i , després la formulació de cada s_i i finalment la seva combinació, en un esquema de programa del qual, en el Apèndix es recull una versió en llenguatge AutoLISP.

2.3.1. Parametrització.

Es tracta de decidir, a partir dels punts $\vec{P}_i = (x_i, y_i)$ $i = 0, \dots, n$ donats per l'usuari, els valors t_i per els quals $\vec{\varphi}(t_i) = \vec{P}_i$. Com que es pot pensar en el paràmetre t com si fos el temps, tenim que $t_{i+1} - t_i$ serà el temps invertit en passar del punt \vec{P}_i al \vec{P}_{i+1} . Llavors la millor opció és imposar que la velocitat sigui constant. Però això equival a parametritzar $\vec{\varphi}(t)$ per l'arc i això implica conèixer la corba abans de construir-la. Es podria plantejar algun procediment iteratiu que tendís a la parametrització per l'arc però el seu cost seria prohibitiu. Llavors, a partir dels comentaris i recomanacions de (Farin 90, apartat 9.4), hem decidit oferir tres opcions a triar per l'usuari.

2.3.1.1) Parametrització uniforme. Assignar $t_i = i$, $i = 0, \dots, n$, molt còmoda, invariant per transformacions afins de les dades, i adient si els nodes estan "raonablement" equispaiats. Si no, pot produir pics i llaços degut a les fortes acceleracions que es produeixen.

2.3.1.2) Parametrització per la longitud de la corda. Assignar $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + d(\vec{P}_i, \vec{P}_{i+1}) = t_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. Pren la distància entre punts com una aproximació de la longitud de l'arc entre ells. No produeix pics ni llaços però pot donar lloc a corbes amb revolts massa exagerats.

2.3.1.3) Parametrització centrípeta. Assignar $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + \sqrt[4]{d(\vec{P}_i, \vec{P}_{i+1})} = t_i + \sqrt[4]{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. És una parametrització heurística que pretén suavitzar les variacions en la força centrípeta.

N'hi ha d'altres, però cap d'aquestes ni de les altres és la millor en un sentit objectiu. La opció entre unes i altres depen de les dades concretes i de criteris heurístics basats en la experiència del pròpi usuari. Amb aquesta oferta cubrim bastantes possibilitats i sempre es pot ampliar en posteriors versions. Poder, en general, els resultats més acceptables s'obtenen amb la parametrització centrípeta, que és la que s'ofereix per defecte.

En qualsevol cas, un cop calculats els valors t_i i guardats en un vector, designarem $h_i = t_i - t_0$ tal com es defineix a (1.6.2.2).

A la figura 2.3.1 es poden veure tres corbes amb el mateix conjunt de punts i condicions de frontera naturals als dos extrems, però amb diferent tipus de parametrització.

2.3.2. Splines cúbics locals.

Abans de formular la funció f_i , el programa haurà de distingir si l'usuari vol una corba tancada o oberta i en aquest segon cas elaborar de manera separada els cassos de només dos, tres, quatre o cinc punts, atès que la formulació general per les f_i 's que hem triat val de fet només a partir de cinc punts ($n = 4$) però el propi cas de cinc punts, és encara especial. Obviament, abans de tot, s'ha de separar el cas amb cap o només un punt, que no donen lloc a cap corba i en qué cal provocar la finalització del progrma sense fer res. Estudiem ara els cassos en que l'usuari vol una corba oberta amb $n = 1, 2, 3, 4$ i el general, amb $n > 4$.

Després veurem el cas de corba tancada ($\vec{P}_n = \vec{P}_0$), en el que, com veurem, no cal distingir si $n \cdot 4$ o $n > 4$.

2.3.3. Corba oberta.

En aquest cas se li ha de demanar a l'usuari que dongui condicions de frontera. Com hem comentat a la fi de la introducció de 2.2, en aquest mètode es poden fixar **dues condicions de frontera a cada extrem**. Per tant, cal que l'usuari proveeixi com a "inputs" els següents vectors

$$\begin{aligned}
 \vec{\varphi}'_0 &= (x'_0, y'_0) && \text{pel valor de } \vec{\varphi}'(t_0) \\
 \vec{\varphi}''_0 &= (x''_0, y''_0) && \text{pel valor de } \vec{\varphi}''(t_0) \\
 \vec{\varphi}'_n &= (x'_n, y'_n) && \text{pel valor de } \vec{\varphi}'(t_n) \\
 \vec{\varphi}''_n &= (x''_n, y''_n) && \text{pel valor de } \vec{\varphi}''(t_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1}$$

Com hem comentat, pel cas $n > 4$, els *splines* locals f_0 , f_1 i f_2 són el mateix, interpolant, en el cas de $x(t)$, els valors x_0 fins x_4 . Per aquests tres *splines* imposarem x'_0 i x''_0 directament com a condicions de frontera per $t = t_0$. Anàlogament f_{n-2} , f_{n-1} i f_n són el mateix interpolant de x_{n-4} fins x_n . Els imposem x'_n i x''_n per $t = t_n$ segons (2.2.11). En aquests dos cassos, el que passi a l'altre extrem no influeix degut a que allà les funcions de pés

2.3. Mètode resultant.

s_i ja hauràn anul·lat aquestes f_i . A la resta dels *splines* que no tenen cap extrem ni a \vec{P}_0 ni a \vec{P}_n imposen condicions de frontera naturals (condicions 1.1.1.3b).

Pels casos $n \cdot 4$ el tractament ha de ser especial. La solució adoptada, de cara a preservar la possibilitat de triar dos condicions de frontera a cada extrem, consisteix en construir dos *splines* f_0 i f_n que interpolin els $n + 1$ punts, un amb les condicions de frontera x'_0 i x''_0 i l'altre amb les x'_n i x''_n . Llavors la funció interpoladora serà

$$x(t) = f_0 \cdot s_0(t) + f_n \cdot s_n(t)$$

on $s_0(t)$ és del tipus 2.2.15 però fent la transició entre t_0 i t_n enlloc de t_0 i t_1 , o sigui

$$s_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t_0 \\ \frac{(t_n - t)^2}{(t - t_0)^2 + (t_n - t)^2} & \text{si } t_0 < t < t_n \\ 0 & \text{si } t_n = t \end{cases} \quad (2.3.2)$$

i $s_n(t) = 1 - s_0(t)$.

Les funcions f_0 i f_n es construeixen com al paràgraf 2.2.1. però amb les adequacions oportunes en quant el nombre de nodes i càlcul dels coeficients a partir d'invertir la matriu corresponent.

Valor per defecte. És convenient oferir a l'usuari uns valors per defecte respecte a les condicions de frontera.

Així, contestant amb *Return* les dues condicions de frontera d'un extrem, s'entenen condicions de frontera naturals en aquest extrem (sense condicions respecte el vector tangent). Qualsevol altre combinació de *Returns* sense dades, deixarà algun extrem amb alguna condició sense fixar. La condició que falti es converteix en derivada segona nul·la a l'altre extrem del mateix f_i . Per exemple, si falta una condició a t_0 s'imposa $x''(t_4) = 0$. Si falta una a t_n , s'imposa $x''(t_{n-4}) = 0$, si falten les dues a t_0 , s'enten $x''(t_0) = x''(t_4) = 0$, etc.

A la figura 2.3.2. es poden veure tres corbes amb el mateix conjunt de punts que les de la figura 2.3.1 i parametrització centrípeta com en la 2.3.1(c), variant les condicions de frontera proveïdes per l'usuari, les quals es poden veure traçades en línia contínua. En línia discontinua es veuen les condicions no proporcionades per l'usuari, que han estat calculades pel programa.

2.3.4. Corba tancada.

En aquest cas, donada la propietat de control local que té aquest mètode, s'ha optat per contruir totes les f_i 's com *splines* cúbics naturals sobre cinc nodes, centrats cadascun en el node i -éssim (no es repeteixen les primeres ni les darreres).

Per aconseguir la periodicitat s'afegeix $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_{-2} = x_{n-2}$ i es defineix

$$t_{n+1} = t_n + h_1, t_{n+2} = t_n + h_2, t_{-1} = h_{n-1} - h_n, t_{-2} = h_{n-2} - h_n \quad (2.3.3)$$

D'aquesta manera, f_0 i f_n són exactament iguals, una centrada a t_0 i l'altra a t_n , per tant es preservarà la continuïtat desitjada. A més, es pot donar una definició escursada de cada f_i , atès que el tram $(t_{i-1}, t_i]$ és el tercer del f_{i-1} i el segon de f_i i així, les últimes potències truncades (fórmula 1.3.5) són nul·les.

La figura 2.3.3 mostra la corba tancada que resulta amb la mateixa col·lecció de punts que la de les corbes de les dues figures anteriors.

La manera de que l'usuari manifesti que vol una corba tancada es fer que acabi la seqüència d'entrada de punts amb un còdig tipus caràcter (per exemple la lletra "c"), enlloc de amb un *Return* en blanc. Així, s'enten que el darrer punt entrat és el \vec{P}_{n-1} i es defineix $\vec{P}_n = \vec{P}_0$. Es rebutja, per ambigüetat, considerar tancada la corba si l'últim punt entrat és igual a \vec{P}_0 i segueix *Return* en blanc, en aquest cas es tracta com a corba oberta i es demanaran condicions de frontera. Notis que, si s'han entrat 0 o 1 punts, el programa acaba sense fer res, perquè ja s'ha filtrat abans. Si s'entren dos punts i després "c", tenim \vec{P}_0 i \vec{P}_1 i després el programa defineix $\vec{P}_2 = \vec{P}_0$, així, en corbes tancades $n \geq 2$ i té sentit la definició (2.3.3).

Es pot veure que, un cop construïda la corba en general, si canviem el punt \vec{P}_i , això afecta només els splines lineals f_{i-2} fins f_{i+2} i per tant només cal recalcular i redibuixar des de \vec{P}_{i-3} fins \vec{P}_{i+3} . Això es pot apreciar en la figura 2.3.4, on, a partir de la col·lecció de punts i de la corba tancada de la figura 2.3.3, s'ha alterat la posició d'un dels nodes. es pot observar que aquesta alteració només repercuteix en tres trams de la corba a cada banda del punt modificat.

En l'Apèndix, com ja s'ha comentat, es recull el llistat d'una proposta de programa. En ella, junt amb els comentaris es poden seguir els detalls de codificació algorítmica del mètode.

2.3.5. Corba a trossos.

Encara que no és el tipus d'ús pel que ha estat concebut aquest mètode, hi ha una manera addicional d'aprofitar el programa: usar-lo per construir corbes interpoladores a trossos on cada tros sigui una corba de la família que hem presentat. Es tracta d'aprofitar el cas de corba entre dos punts (o sigui, quan $n = 1$) per emular la interpolació de Hermite a trossos (Foley 96, Hosaka 92) fins a la versió quíntica (polinomis de grau 5 i continuïtat C^2).

2.3. Mètode resultant.

Donat el Problema 2 amb què comença aquesta secció 2.3, si es construeix cada tram de $\vec{\varphi}(t)$ usant una corba de les de la família pel cas de dos punts, es poden imposar **a cada punt** 1,2 o 3 condicions: el punt de pas, el vector tangent i/o el vector derivada segona. També es pot triar que aquestes condicions siguin comunes als dos trams concurrents en cada punt o no. Amb tot això, es pot seleccionar a cada punt continuïtat C^0 , C^1 o C^2 respectivament. La figura 2.3.5 en mostra un exemple, on estan dibuixades les condicions que s'han imposat en cada punt. En aquest cas, no cal distingir entre corba oberta i tancada.

2.4. Resum d'avantatges i inconvenients.

Un cop desenvolupat el mètode, es pot confrontar amb els criteris per testejar un mètode interpolador que hem citat al apartat 2.1.

Grau de continuïtat assolit. Graduable en triar el grau dels splines locals f_i i l'exponent r de les funcions s_i . En el cas proposat la continuïtat és C^2 , com en els splines cúbics.

Volum de càlcul. Atès que les funcions s_i són racionals, cada factor $f_i \cdot s_i$ és un quocient entre un polinomi de grau cinc (f_i , de grau 3, més el numerador de s_i , de grau 2) i un de grau 2 (denominador de s_i). Llavors la construcció de cada tram és més lenta que en un *spline* cúbic clàssic. Apart s'han de calcular els coeficients b_i de cada f_i , així com les condicions de frontera no donades. Però en canvi, no cal resoldre un sistema $(n \pm 1) \times (n \pm 1)$ d'equacions abans de començar a dibuixar, com en el cas dels *splines*. Especialment les fórmules de càlcul de les condicions de frontera i dels b_i estan ja explicitades en funció de les dades.

Estabilitat del algorisme. Molt bona, atès que s'utilitzen polinomis de graus tres i dos sobre intervals en general curts. Les funcions g_i que s'usen de base per construir les f_i es tornen inestables quan el nombre de punts que interpola cada f_i creix, però fins a cinc punts, que és el cas que proposem, la estabilitat és suficient amb escriure.

Estabilitat formal de la corba. Donada la manera de construir la corba, aquesta s'assembla molt al corresponent *spline* clàssic interpolant els mateixos punts amb les mateixes condicions de frontera, per tant té una estabilitat formal anàloga. Al poder triar més condicions de frontera que en els *splines* usuals, pot haver oscil·lacions no desitjades en els extrems si l'usuari no és experimentat, al imposar tangents i curvatures poc naturals, però això es pot corregir rectificat les dades de frontera.

Efecte local o global de cada punt. Com hem dit, cada punt \vec{P}_i afecta a la corba estrictament des de \vec{P}_{i-3} fins a \vec{P}_{i+3} o sigui sis trams, la qual cosa és un bastant bon compromís entre local i massa global.

Reformabilitat local. El problema dels *splines* clàssics, com hem dit, és que malgrat que l'efecte de cada punt desapareix asimptòticament al allunyar-nos d'ells, a efectes de càlcul afecta a tota la corba.

Aquí la reformabilitat local coincideix exactament amb l'efecte de cada punt, o sigui, novament \vec{P}_i , només cal refer la corba entre \vec{P}_{i-3} i \vec{P}_{i+3} , amb la qual cosa és comparable amb els B-*splines* en versió interpoladora.

2.4. Resum d'avantatges i inconvenients.

Precisió lineal. Amb condicions de frontera naturals, la corba té precisió lineal, és a dir, si $\vec{P}_0, \dots, \vec{P}_n$ estan, de fet, alineats i ordenats, el que s'obté és el segment recte de \vec{P}_0 a \vec{P}_n .

També cal recordar la major llibertat en triar condicions de frontera (dues a cada extrem) amb el que es supera a tots els altres mètodes.

Com tots els altres mètodes interpoladors, aquest tampoc pot gaudir de la propietat de quedar dins de la envolupant convexa dels \vec{P}_i ni de la de la variació disminuent, que vol dir que qualsevol recta talla a la corba com a molt en tants punts com a la poligonal dels \vec{P}_i . Tanmateix, pel fer de construir cada component per separat, no és invariant sota transformacions afins de les dades.

Per resumir i acabar aquest apartat adjuntem un quadre comparatiu on es puntua el mètode entre 0 i 1 respecte les principals propietats desitjables junt amb els altres mètodes que hem comentat. Cal remarcar que les puntuacions són totalment subjectives i heurístiques, només representem la nostra opinió, però té l'interès de la sinòpsis, és a dir, d'una manera molt esquemàtica, i per tant molt fàcil de seguir, es condensa la nostra valoració del mètode que proposem en relació als altres mètodes existents.

	Contin.	Volum càcul	Estab. algorisme	Oscil. de solució	Local.-global.	Reform. local a post.
Lagrange	1	0.2	0.2	0.1	0 massa global	0
Newton	1	0.5	0.4	0.1	0 massa global	0.3
Bessel	0.3	0.8	0.9	0.8	0.3 massa local	0.9
Hermite	0.3	0.9	0.9	0.7	0.3 massa local	0.9
Splines cubics	0.6	0.2	0.7	0.8	0.7 massa global	0
Mètode proposat	0.6	0.6	0.8	0.8	0.7 massa local però graduable	0.8

Figures del Capítol 2

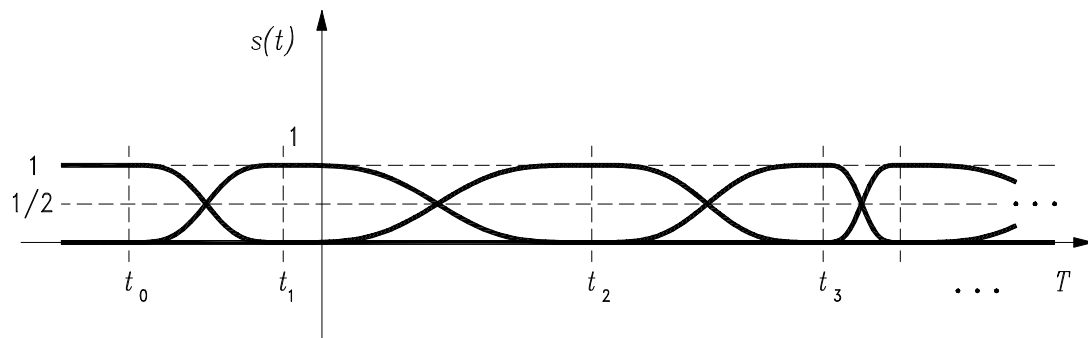
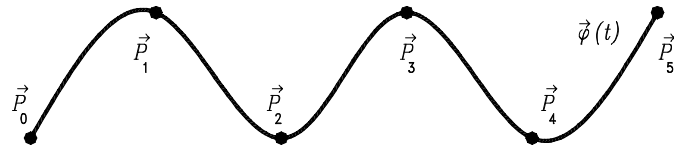
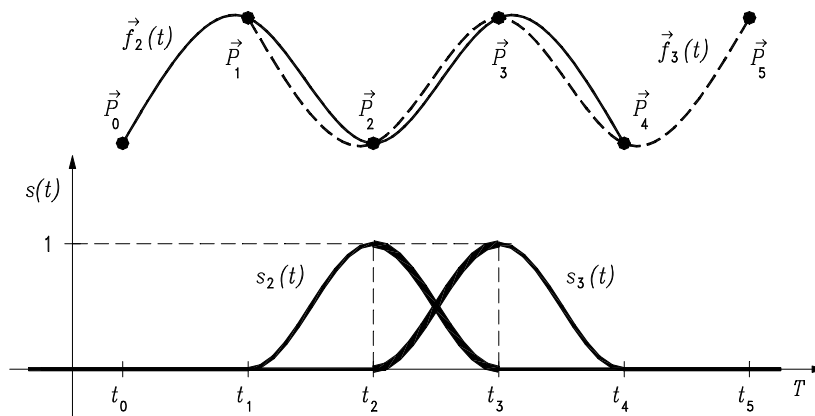


fig. 2.2.1

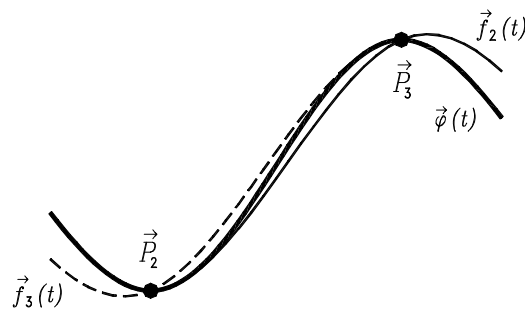
2.5. Figures.



a) col·lecció de punts i corba interpolant.



b) funcions que intervenen en el tram $[t_2, t_3]$.



c) detall de la formació d'aquest tram.

fig. 2.2.2.

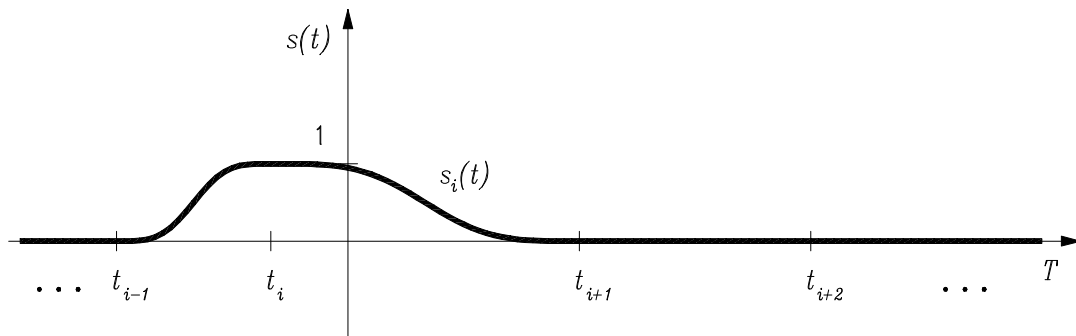
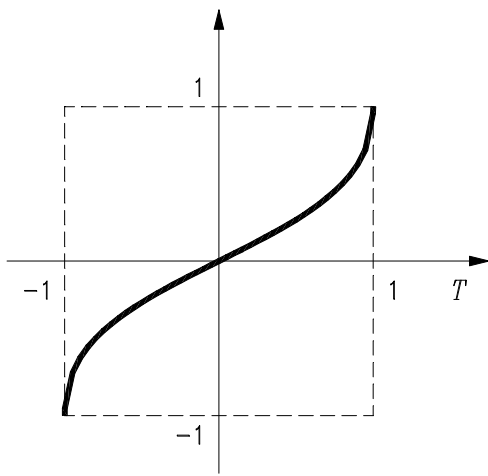
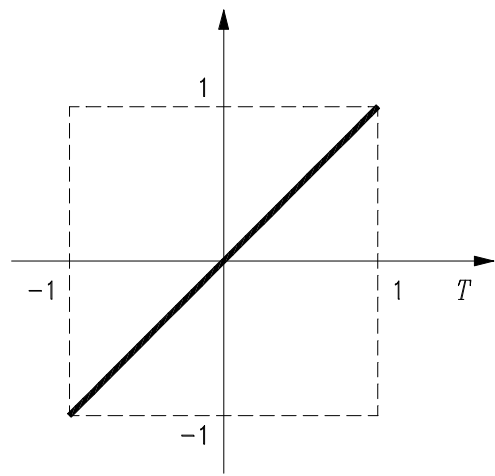


fig. 2.2.3.

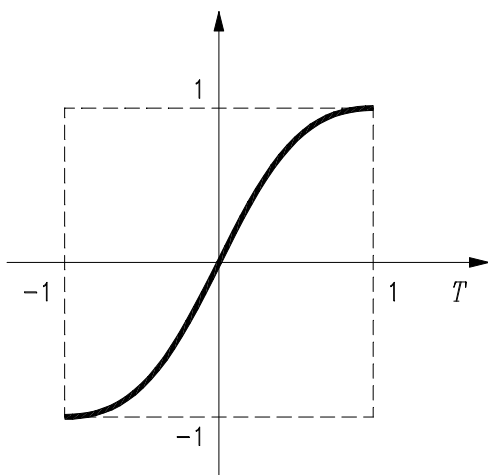
2.5. Figures.



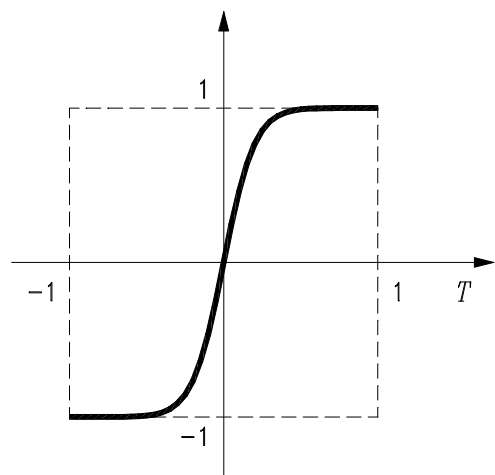
$$r = 0.5$$



$$r = 1.0$$



$$r = 2.0$$



$$r = 5.0$$

fig. 2.2.4.

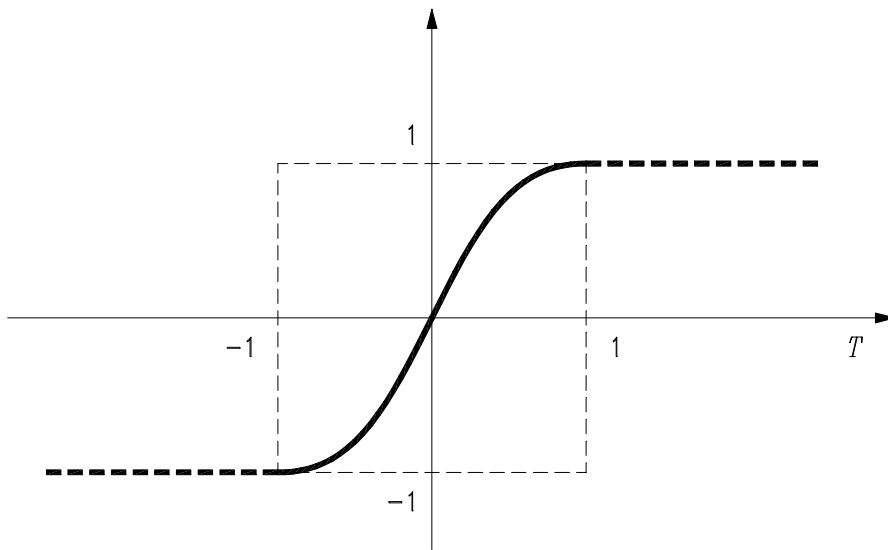


fig. 2.2.5.

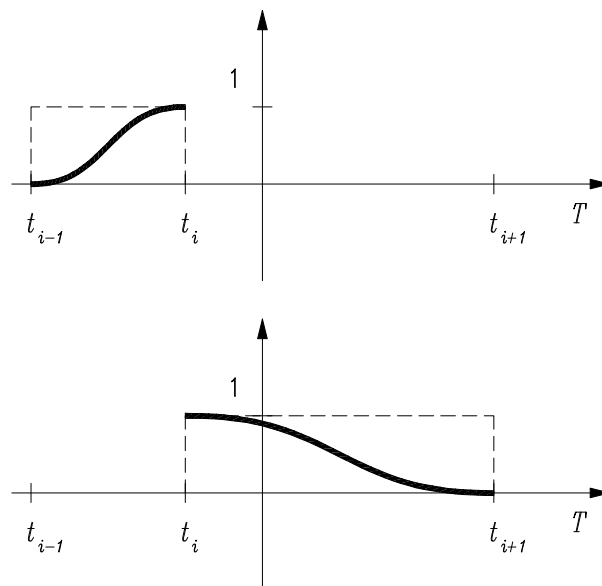


fig. 2.2.6.

2.5. Figures.

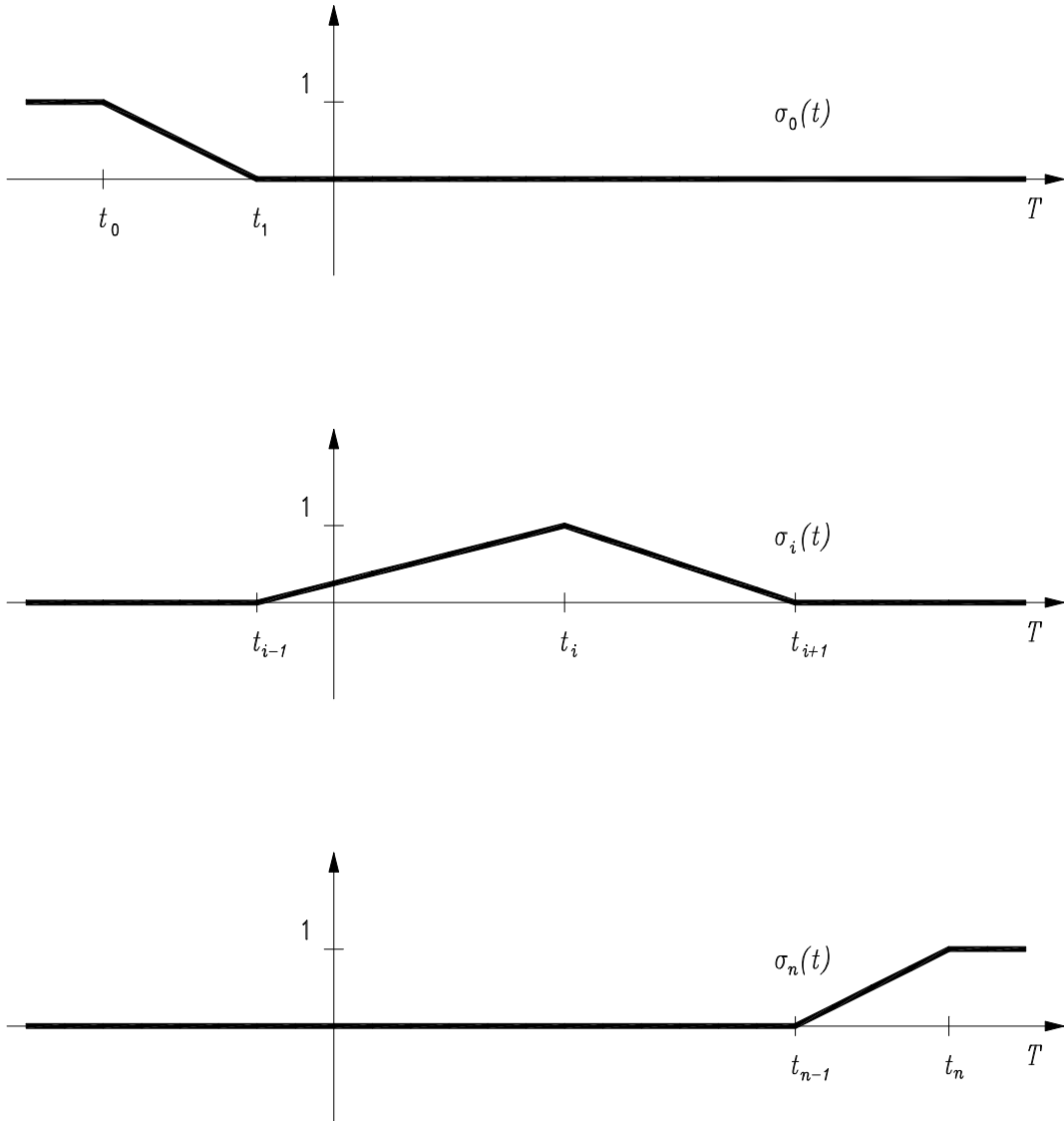


fig. 2.2.7.

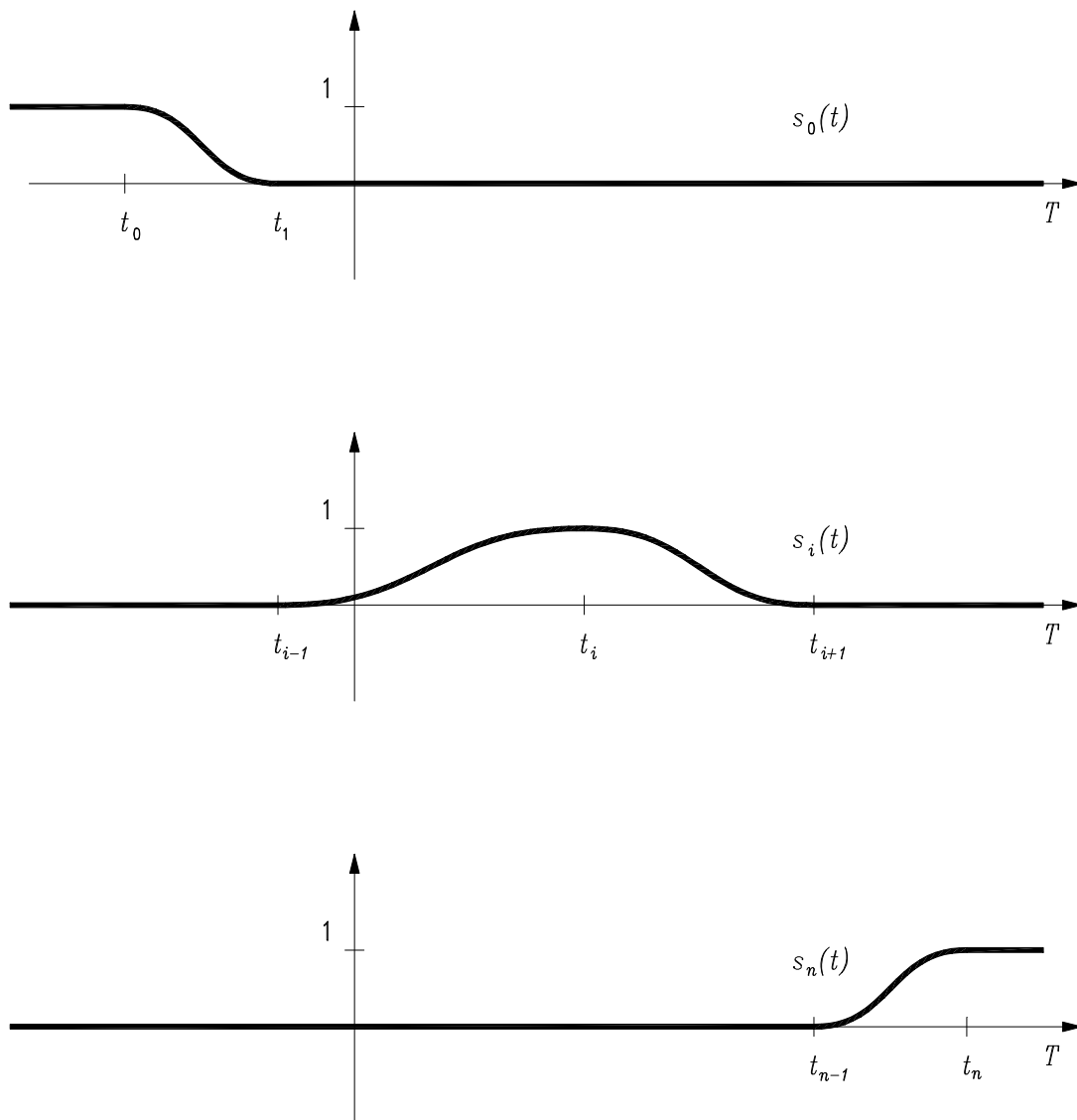


fig. 2.2.8.

2.5. Figures.

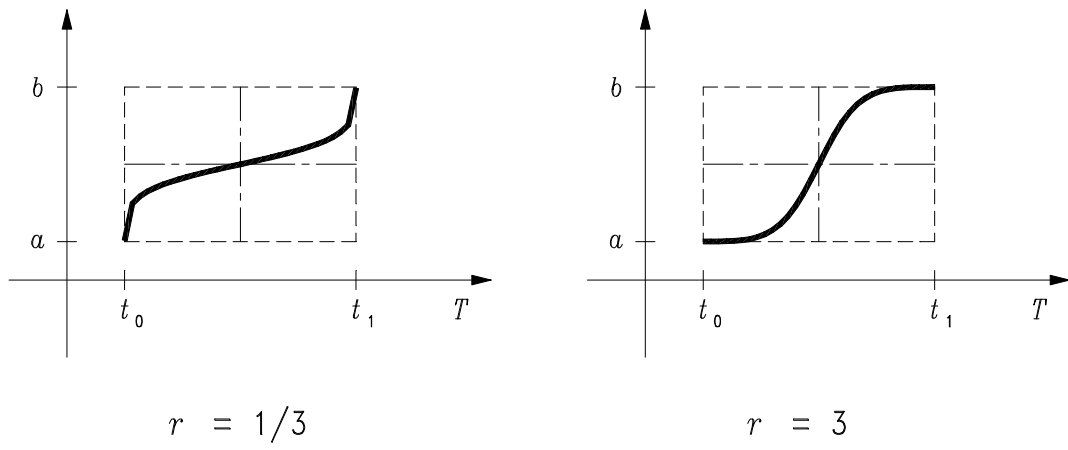
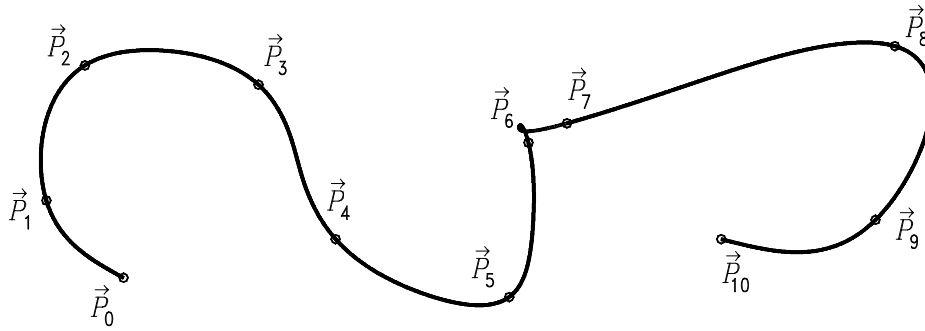
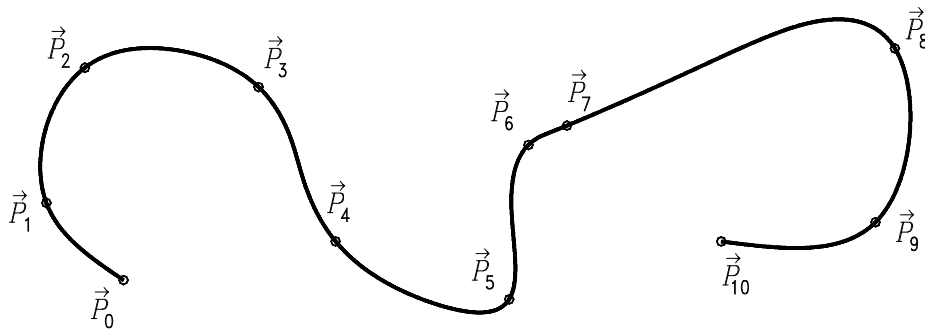


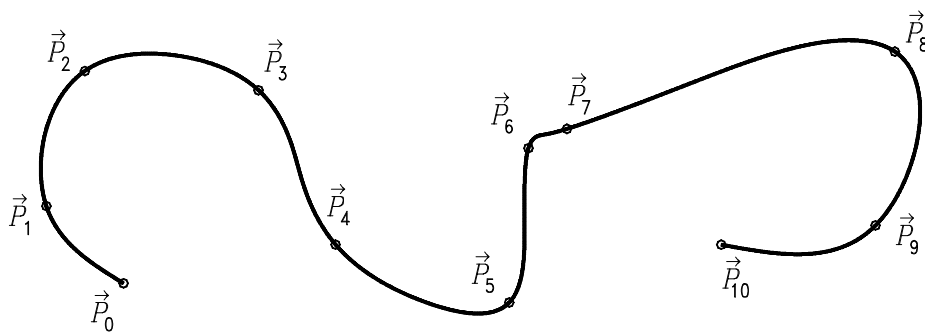
fig. 2.2.9.



(a) parametrizació uniforme.



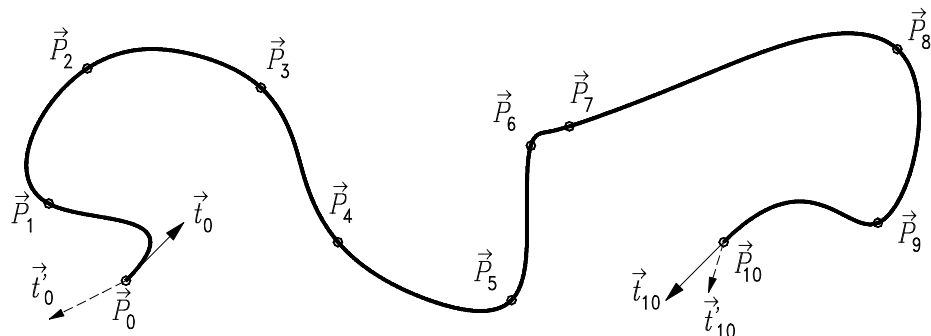
(b) parametrizació per la longitud de la corda.



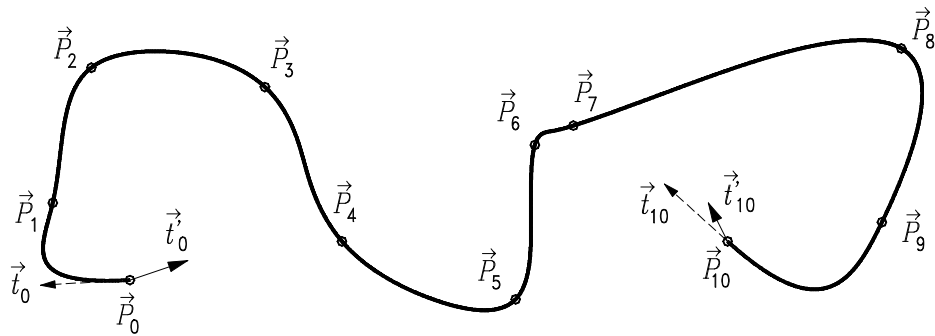
(c) parametrizació centrípeta.

fig. 2.3.1. Efecte de la parametrizació sobre la corba.

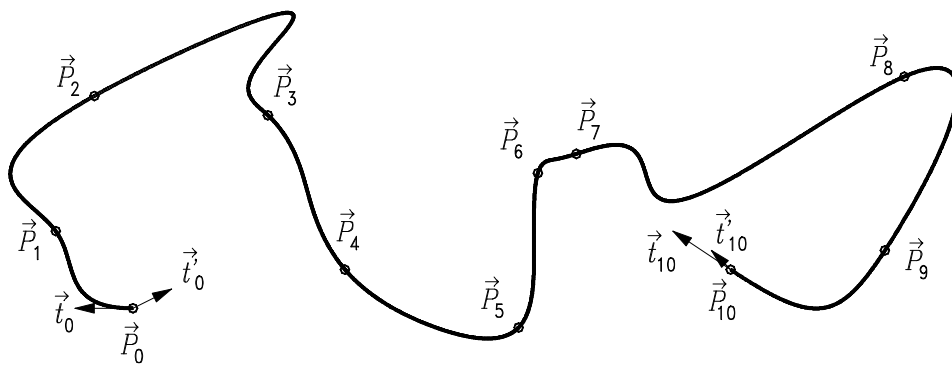
2.5. Figures.



(a) imposat vector tangent a cada extrem.



(b) imposat vector derivada segona a cada extrem.



(c) imposats vectors tangent i derivada segona a cada extrem.

fig. 2.3.2. Efecte de les condicions en els extrems sobre la corba.

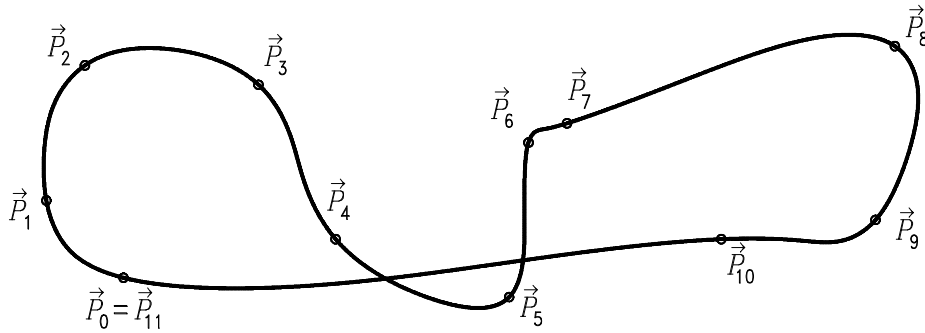


fig. 2.3.3. Corba tancada.

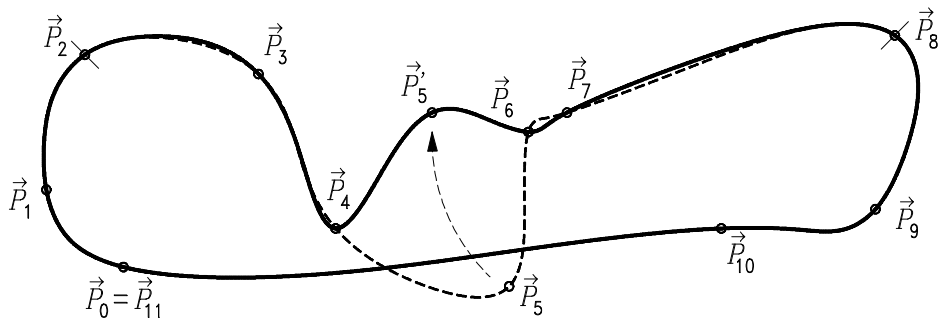


fig. 2.3.4. Modificació local de la corba al desplaçar un punt de control.

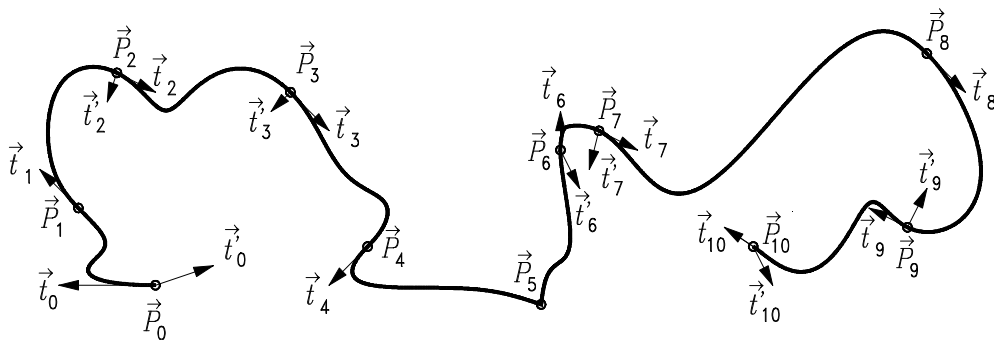


fig. 2.3.5. Construcció de la corba a trossos, amb condicions a cada punt.

Capítol 3

Modelització de corbes i superfícies mitjançant control difús

Per acabar aquesta primera part dedicada a desenvolupar eines en el terreny de la execució del disseny, en aquest tercer capítol aportem una alternativa a la generació de corbes i superfícies consistent en aplicar al món del disseny tècniques de raonament aproximat basades en lògica difusa, que han nascut motivades per problemes llunyans al disseny gràfic. Es tracta d'una proposta interdisciplinària, on es mostra que el control difús es pot aplicar al disseny amb la mateixa efectivitat que s'aplica a controlar una caldera o a governar un helicòpter. Això permet produir noves famílies de corbes i superfícies a partir de punts de control alhora que, especialment, dona un nou punt de vista des del que reinterpretar la tasca de produir objectes gràfics. De fet, permet generar una nova semàntica per a les habituals funcions de pes que solen aparèixer en els algorismes dels mètodes de CAGD relatius a disseny de corbes i superfícies per punts de control. En especial, es demostrarà que un dels més populars entre els citats mètodes, el de Bézier, es pot resituar com a cas particular de la nostra proposta.

Si recordem l'esquema d'algorisme genèric mostrat a la introducció (esquema I.e6) i reflexionem sobre la seva estructura, veiem que, en realitat, els punts de control no són dades *a priori* innegociables, sinó que hi ha tot un procés interactiu fins ajustar la corba o superfície desitjada. Això ens porta a pensar que en realitat hi ha una vaguetat intrínseca en el procés que prové de la mateixa vaguetat que inicialment hi ha en la ment del dissenyador. Per això és natural girar la vista cap el terreny de la lògica borrosa i el raonament aproximat, per veure si hi trobem alguna idea que es pugui "reciclar".

Cal remarcar que, un cop descobert que pot ser fructífer relacionar raonament aproximat i disseny gràfic, s'obre un camp de possibles propostes de concreció d'aquesta relació. El que aquí presentem és una proposta concreta, fins i tot només en

un estadi incipient, per “trencar el gel”, sense pretendre que sigui l’únic pont possible entre les dues disciplines.

En concret, proposem utilitzar tècniques de control basades en regles difuses formulades en termes lingüístics; regles del tipus “Si passa A , aleshores s’ha de fer B ”. Després, cal traduir a expressions matemàtiques aquesta formulació lingüística i un nombre borrós controlarà el grau d’acompliment de l’antecedent A de cada regla, segons el qual s’aplicarà la corresponent acció B .

Amb ànim de completessa, a continuació s’incorpora un breu resum sobre els conceptes de control difús, nombre borrós, regla lingüística difusa, etc., resum que pot ampliar-se, per exemple, en (Kruse 94; Takagi 85; Jacas 93). Després s’especifica per a quins problemes concrets s’ha pensat la nostra proposta que es desenvolupa acompanyada d’exemples. S’acaba el capítol provant que les corbes i superfícies de Bézier es poden reinterpretar com a membres de la família proposada per nosaltres, cosa que permet afegir una semàntica al polinomis de Bernstein (Farin 90; Vinogradov 93).

Aquesta proposta permet una nova manera d’entendre i abordar el problema de generar corbes i superfícies a partir de dades disperses, força tractat des d’altres perspectives, com ara triangulacions del domini, mínims quadrats, etc. (Lee 00; Lai 96; Guo 97; Chang 97; Costantini 99; Mann 99; Cotrina 00; Floater 01). Una versió anterior d’aquest mateix tema es pot trobar en (Jacas 97).

3.1. Introducció: Raonament aproximat basat en regles. Control difús.

Comencem amb un exemple. Suposem que volem dutxar-nos barrejant aigua calenta i freda amb una aixeta “monocomandament”. Hi ha *dues variables de sortida* que volem tenir controlades: el cabdal d’aigua i la seva temperatura; *dues variables de control* que serveixen per ajustar les anteriors: els dos angles de rotació de l’aixeta, i també intervenen diverses *variables de pertorbació*, com ara la pressió de l’aigua a l’entrada del domicili, la temperatura de la sala de bany, altres aixetes de l’immoble que s’obrin o es tanquin de sobte i amb diferents cabdals i temperatures, la pròpia capacitat de l’escalfador, etc., variables que són modificadores imprevisibles de la sortida. L’objectiu és mantenir les variables de sortida estables en uns valors determinats i, per aconseguir-ho, cal actuar, en temps real, sobre les variables de control, o sigui, per part de l’usuari, girant l’aixeta dins dels seus dos graus de llibertat. La tecnologia del control intervindria si volguéssim controlar la dutxa amb algun sistema automàtic de control, tot indicant-li, al començar, simplement el cabdal i la temperatura desitjats.

3.1.1. Conceptes i notació.

Així, en un problema de control, hi ha un dispositiu que presenta unes **variables de sortida**, que són funció, en el temps, de certes **variables de control** i de certes **variables de pertorbació**. L’objectiu és controlar el valor de les variables de sortida per mitjà de revisar i ajustar si cal, en temps real, les variables de control. En realitat, cal discretitzar el temps, de manera que es defineix una seqüència indefinida d’instantants $\{t_i\}_{i \in I}$ i en cada instant t_i es mesuren els valors actuals de les variables de sortida, que passen a ser condicions inicials a partir de les quals s’actualitzen les variables de control.

En la literatura de control clàssic, però, com que des de l’òptica del controlador són les variables de sortida les que de fet dicten el que s’ha de fer amb les de control, s’acostuma a designar com a **variables d’entrada** les que eren de sortida.

S’anomena **funció de control** la que descriu la dependència de les variables de control respecte les d’entrada. El propòsit de la teoria del control és especificar aquesta funció de control, la qual gairebé sempre és de tipus no lineal.

En el marc del control clàssic, el sistema es descriu usualment en termes d’equacions diferencials o en derivades parcials i la funció de control consisteix en calcular i ajustar la solució particular de l’equació prenent les dades actuals (les de l’instant t_i) com a condicions inicials. Per poder actuar en temps real es sol linealitzar l’equació. És clar que aquest tractament del problema requereix coneixements profunds de la física involucrada en el problema i bona capacitat per a construir models diferencials del mateix. En el cas de la dutxa, per exemple, ben segur que caldrà bons

coneixements de termodinàmica i dinàmica de fluids. En canvi, gairebé tothom ajusta satisfactòriament la seva dutxa malgrat que la majoria no tenim els coneixements de física necessaris al cas. Fins i tot els que sí els tenen passarien per ximplés si tractessin d'aplicar-la al problema de la dutxa!

Per això, el que fa la versió difusa del control és *modelitzar els coneixements d'una persona experta* en el control del sistema *enlloc del propi sistema*. Es tracta d'imitar el que fa l'expert quan el sistema està en tal o qual situació.

És el que s'anomena **anàlisi basat en el coneixement**. L'expert és interrogat o observat i posteriorment el seu coneixement es representa en forma de **regles lingüístiques** del tipus:

“**Si**

les variables d'entrada prenen valors
alts / petits / aproximadament tal valor / etc.

llavors

les variables de control han de prendre valors
alts / petits / aproximadament tal valor /
o bé
han d'(augmentar / disminuir) (fortament /dèbilment) / etc.”.

També són possibles combinacions mitjançant els connectors lògics **i**, **o** o **no**, o sigui, les regles tenen l'estructura d'antecedents-premisses i conseqüents-conclusió. El conjunt de regles lingüístiques constitueix la **base de regles** del sistema.

Cal fer notar que el valor de cada variable d'entrada prové d'algun dispositiu que proporciona un *valor numèric nítid* i que l'actuació sobre les variables de sortida ha de ser també, al final, un valor numèric nítid. En el control difús, usualment, pel que fa als antecedents de les regles, per cada variable d'entrada es fa una partició difusa del rang de valors possibles en forma de termes lingüístics o etiquetes; per exemple: **aproximadament zero**, **petit**, **mitjà**, **gran**, etc., segons la proposta de l'expert. Això s'anomena *procés de fussificació* de la variable d'entrada.

Llavors, si $V^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$) representa el nom de la variable i -èssima; v_i , el seu valor numèric, el que mesura el dispositiu sensor; $A_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq m_i$), els diferents termes lingüístics corresponents a la partició difusa associada al rang de valors que pot prendre v_i ; n , el nombre de variables d'entrada i m_i , el nombre de termes lingüístics associats a $V^{(i)}$, la r -èssima regla tindrà una estructura del tipus

3.1. Introducció: Raonament aproximat basat en regles. Control difús.

“Si

$$(V^{(1)} \text{ és } A_{j_1,r}^{(1)}) \text{ i } (V^{(2)} \text{ és } A_{j_2,r}^{(2)}) \text{ i } \dots (V^{(n)} \text{ és } A_{j_n,r}^{(n)}),$$

llavors

executar el *conseqüent-conclusió* de la regla ”.

(3.1.1)

Els connectius *i* poden, lògicament, substituir-se per *o* o *no*, segons convingui a la regla lingüística. Respecte el conseqüent de cada regla, hi ha diferents tècniques per la seva construcció. Nosaltres usarem la de Takagi-Sugeno (Kruse 94; Takagi 85).

En aquest cas, si només hi ha una variable de control *k* (únic cas que considerarem) llavors, per un conjunt nítid de valors v_1, v_2, \dots, v_n de les variables antecedents, el valor numèric nítid de *k* corresponent al conseqüent de la regla *r*-èsima és

$$k = f_r(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

on f_r és una funció afí del tipus

$$f_r(v_1, v_2, \dots, v_n) = a_{0,r} + a_{1,r} \cdot v_1 + a_{2,r} \cdot v_2 + \dots + a_{n,r} \cdot v_n$$

Els coeficients $a_{i,r}$ precisament modelitzen la opinió de l'expert sobre la influència de la variable *i* sobre la variable de control *k* en la regla *r*. En aquest cas no cal fer una partició difusa del domini de la variable de sortida.

Si només hi hagués una regla i els seus antecedents es verificuessin completament, aquest conseqüent seria justament el valor que hauria de prendre la variable *k* en funció dels particulars valors v_i que prenguessin les variables $V^{(i)}$. Altrament, en general, si *R* és el nombre de regles que té la base de regles, cada regla s'ha d'aplicar segons el grau d'acompliment dels seus antecedents. Un cop decidits els valors a_r d'aplicabilitat de cada regla *r*-èsima, la decisió final, directament nítida – numèrica, és

$$k = \frac{\sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \cdot f_r(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r} \quad (3.1.2)$$

o sigui, una mitjana ponderada del valor d'aplicabilitat dels conseqüents de cada regla.

Convé fer notar que no cal que hi hagi tantes regles lingüístiques com maneres de combinar els termes lingüístics o etiquetes (fent servir només el connector lògic *i*, ja seria $R = \prod_{i=1}^n m_i$, tal com es dedueix de totes les maneres de combinar etiquetes en

l'antecedent de (3.1.1)), només cal que cobreixin totes les situacions versemblants. Tampoc cal que siguin mútuament excloents, donat que en lògica difusa no hi ha tercer exclòs.

Abans de seguir, aprofitarem l'exemple de la dutxa per il·lustrar una mica tots aquests conceptes. Ho farem de manera completament hipotètica, sense pretendre que es faci, en la realitat dels aparells comercials, de la manera que aquí suposem.

3.1.1.1) Exemple: En el cas que es volgués dissenyar un controlador difús de la dutxa, enlloc de l'aixeta monocomandament hi hauria un comandament que regularia el cabdal de sortida i un dispositiu on indicar la temperatura a la que l'usuari vol que surti l'aigua.

Podríem contemplar com variables d'entrada, les següents:

$V^{(1)}$ = temperatura de l'aigua que arriba de la xarxa.

$V^{(2)}$ = diferència entre la temperatura de l'aigua que surt per l'aixeta de la dutxa i la que l'usuari ha prescrit.

En quant a les etiquetes, podrien ser

$A_1^{(1)}$ = "glaçada"; $A_2^{(1)}$ = "molt freda"; $A_3^{(1)}$ = "freda"; $A_4^{(1)}$ = "tèbia".

$A_1^{(2)}$ = "molt negativa"; $A_2^{(2)}$ = "negativa"; $A_3^{(2)}$ = "justa"; $A_4^{(2)}$ = "positiva"; $A_5^{(2)}$ = "molt positiva".

Pel que fa a les variables de control, podríem contemplar:

k_1 = cabdal de sortida d'aigua directa de la xarxa.

k_2 = cabdal de sortida d'aigua provenint de l'escalfador.

Com que el cabdal de sortida C queda fixat per l'usuari, tenim que $k_1 = C - k_2$ i, per tant, podem suposar que només hi ha una

3.1. Introducció: Raonament aproximat basat en regles. Control difús.

variable de control a regular que és $k = k_2$. Però el que regularem és la variació o increment de k : $k' = \Delta k$.

En aquestes condicions una possible regla tindria una redacció com ara:

Si

$(V^{(1)}$ és “freda”) **i** $(V^{(2)}$ és “molt positiva”),

llavors

$$k' = -1.0 + 0.5 v_1 - 1.2 v_2.$$

Com aquesta, se'n poden redactar diverses regles que contemplin totes les situacions previsibles, però, com hem dit, no cal confeccionar una taula que sigui el producte cartesià dels respectius conjunts d'etiquetes d'ambdues variables. Per exemple, quan $V^{(2)}$ està en “justa”, no cal fer res, per tant no cal cap regla que combini aquesta etiqueta entre els antecedents.

Després d'aquest exemple, falta concretar com es passa del valor numèric nítid de cada variable d'entrada, els valors v_i , als termes lingüístics corresponents a la partició difusa $A_j^{(i)}$; definir que és una partició difusa; com es decideix, dins de cada regla, el valor de veritat de cada component de l'antecedent (és a dir, com es mesura el grau d'acompliment de cada partícula del tipus “ $V^{(i)}$ és $A_{j,i}^{(i)}$ ”) i el de l'antecedent total, i que signifiquen i com es calculen els valors d'aplicabilitat a_r . En resum, falta donar un model del control difús en termes operatius. Aquesta tasca la portarem a terme en l'apartat 3.1.3, però abans, cal donar una breu nota dels conceptes de conjunt i nombre difús i de valor de veritat difús i de com es generalitza l'assignació de valors de veritat a sentències combinades mitjançant connectives **i** i **o**.

3.1.2. Definicions.

Les següents definicions provenen de l'àmbit de la lògica difusa i del control difús i són les que ens fan falta per desenvolupar la resta del capítol 3. Per un tractament més ampli d'aquests conceptes, especialment el de t-norma, apart de les referències que ja hem donat, es poden consultar també (Klement 00; Schweizer 83; Trillas 95).

3.1.2.1) Conjunt difús. Un **conjunt difús** m sobre un conjunt de referència X és una aplicació

$$m: X \rightarrow [0,1].$$

Per a cada $x \in X$ el valor $m(x)$ s'interpreta com el grau de pertinença de l'element x al subconjunt difús m . De fet, donat un subconjunt clàssic $A \subset X$, la funció característica

$$c_A: X \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \mapsto c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

n'és un cas particular i es poden entendre els conjunts difusos com una generalització de les funcions característiques dels conjunts, quan les fronteres dels subconjunts no són nítides. Pensi's, per exemple, en el concepte de "persona alta"; si prenem el conjunt de possibles estatures humanes, a partir de quin valor comença el subconjunt de les altes? És clar que, en occident, 1.50 m. no és alt en absolut i que 1.90 ho és del tot, però entremig hi ha estatures de transició. Per elles no es pot assignar un valor de pertinença al subconjunt "alt" ni 0 ni 1 perquè és massa "dràstic". Té sentit assignar valor entre 0 i 1. El mateix passa amb la temperatura de l'aigua, si està a 80°C la podem qualificar de "cremant", però on està la frontera entre "cremant" i "calenta" o entre "calenta" i "tèbia"? (figura 3.1.1).

3.1.2.2) Nombre difús. Quan $X \subseteq \mathbb{R}$ i m és monòtona creixent fins un valor x_0 i monòtona decreixent després, es sol parlar de **nombre difús**. Si $m(x_0) = 1$, el nombre difús es diu **normalitzat**.

3.1.2.3) Valor de veritat. De la mateixa manera que en lògica clàssica hi ha una correspondència bijectiva entre la teoria de conjunts i la lògica de proposicions, de manera que els valors $\{0,1\}$ de pertinença d'un element a a un subconjunt A definit per una propietat, per exemple "alt", es poden reinterpretar com valors de veritat d'una proposició del tipus " a és de A ", també en el context difús hi ha una correspondència entre les dues representacions, de manera que el valor de pertinença $m(x)$ de x a m es pot "llegir" com el **valor de veritat** d'una proposició del tipus " x és m ". Per exemple, si m és el subconjunt d'estatures altes, dir que $m(1.75) = 0.6$ equival a afirmar que la proposició "Un individu de 1.75 d'alçada és alt" és certa amb valor de veritat 0.6.

3.1. Introducció: Raonament aproximat basat en regles. Control difús.

3.1.2.4) Normes triangulars (t-normes). En lògica clàssica es poden assignar valors de veritat a proposicions combinades pels connectius **i**, **o** i **no** i la tècnica de les taules de veritat permet assignar valor 0 o 1 a afirmacions del tipus “**a i b o no-c**” a partir dels valors 0 o 1 dels particulars a, b i c . Això és relativament fàcil existint només dos valors possibles i gaudeix d’una sèrie de propietats com ara la monotonia, la commutativitat i l’associativitat. Per exemple: el valor de veritat de la proposició “**a i b**” és 1 si i només si a i b tenen valor 1 alhora, en altre cas és 0. Una funció que modelitza aquesta connectiva és la funció de dues variables $\min(x, y)$, que retorna el més petit entre els dos valors x i y . Però aquesta funció no és la única, també serveix el producte: $\text{prod}(x, y) = x \cdot y$ si $x, y \in \{0, 1\}$. La qüestió és estendre aquesta formulació quan $x, y \in [0, 1]$. Un dels procediments més usuals consisteix en usar les t-normes i les t-conormes per modelitzar la intersecció i la unió respectivament. En aquest capítol únicament usarem la intersecció i per tant definirem només les t-normes.

Una funció $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ és una t-norma si:

- i) $T(a, 1) = a$, (és a dir, existeix element unitat).
- ii) $a \leq b \Rightarrow T(a, c) \leq T(b, c)$, (monotonia; no decreixent).
- iii) $T(a, b) = T(b, a)$, (commutativitat).
- iv) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$, (associativitat).

Aquestes són les propietats de la intersecció clàssica que s’entén que han de preservar-se al generalitzar-la a la lògica difusa.

Les funcions **min** i **prod** que hem vist (figura 3.1.2) són justament dos exemples de t-norma, però no les úniques.

La t-conorma, per modelitzar la unió, es defineix de forma anàloga però amb el zero com unitat. Per exemple, les t-conormes que corresponen a les dos anteriors t-normes són: la funció **max** com a versió t-conorma del **min** mentre que la versió t-conorma del **prod** és la funció definida com $p(x, y) = x + y - x \cdot y$.

3.1.3. Modelització del control difús.

Amb tot el que tenim, ja podem tancar la introducció concretant com es poden fer operatius els conceptes del control difús que hem introduït al paràgraf 3.1.1.

Cada terme lingüístic $A_j^{(i)}$ es modelitza per un nombre difús $\mathbf{m}_j^{(i)}$ definit sobre el rang $X^{(i)}$ de valors numèrics v_i de la variable d’entrada $V^{(i)}$, de manera que el valor de veritat d’una expressió com “la variable $V^{(i)}$ és $A_{j_i, r}^{(i)}$ ” ve donat per $\mathbf{m}_j^{(i)}(v_i)$. Per exemple, el valor de veritat de la partícula “la temperatura de l’aigua que arriba de la xarxa” és “molt freda” s’obindrà d’un nombre difús aplicat al valor numèric de la

temperatura de l'aigua que arriba de la xarxa, valor que haurà mesurat un determinat dispositiu instal·lat a l'entrada de l'aigua.

Per poder connectar partícules de cara a formar els antecedents de les regles, només cal triar una t-norma adient al problema i llavors el valor de veritat de l'antecedent de la regla r -èsima, amb una estructura com a (3.1.1), s'obté com

$$\mathbf{a}_r = T\left(\mathbf{m}_{j_1,r}^{(1)}(v_i), \mathbf{m}_{j_2,r}^{(2)}(v_i), \dots, \mathbf{m}_{j_n,r}^{(n)}(v_i)\right)$$

i aquest valor de veritat és justament el grau d'aplicabilitat \mathbf{a}_r de la regla r , que després intervé en la fórmula (3.1.2) per decidir el valor que el sistema ha d'assignar a la variable de control k .

O sigui, cada regla intervé en la decisió en la mesura que és "certa". En altres mètodes de control, com és el cas de l'enfocament de Mamdani, cal aplicar el procés de fussificació també el rang de la variable de control, introduint-hi termes lingüístics. En aquest cas, no cal definir els pesos $a_{i,r}$ de cada variable dins de cada regla però, en canvi, al obtenir un conjunt difús a la sortida de l'algorisme, cal defussificar-lo per tal d'obtenir un valor nítid per la variable de control k , que és el que s'aplicarà. Precisament per evitar aquesta defussificació i pel tipus de problemes que tractarem, hem triat el mètode de Takagi-Sugeno.

Amb aquesta introducció ja estem en condicions d'abordar l'aplicació de les tècniques de control difús a una activitat aparentment tant poc relacionada amb elles com és el disseny de corbes i superfícies. Concretament, el model que nosaltres proposem a la secció 3.2 utilitza nombres difusos i el mètode de Takagi-Sugeno per produir corbes i superfícies a partir de punts de control. A la secció 3.3 es mostren alguns exemples i a la 3.4 es prova que les corbes i superfícies de Bézier són casos particulars d'aquest model.

3.2. Aplicació a la modelització de corbes i superfícies. Regles aplicades a cada node. Funció resultant.

En primer lloc anem a concretar els problemes que abordarem en aquest capítol i als quals donarem resposta en termes del model que proposem.

Problema 3.2.1.a) *Corbes funcionals o no paramètriques*. Donats $n+1$ punts de control $\vec{P}_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \dots, n$, amb $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, construir la gràfica d'una funció $f : [a_0, a_n] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{a_i\}$ siguin valors de la variable independent i $\{b_i\}$ valors o aproximacions de $\{f(a_i)\}$.

Problema 3.2.1.b) *Corbes paramètriques*. Donats $n+1$ punts de control $\vec{P}_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, o bé $\vec{P}_i = (a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 0, 1, \dots, n$ construir $n+1$ valors $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ d'un paràmetre i una corba paramètrica $\vec{f} : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 de tal manera que els punts $\{\vec{P}_i\}$ siguin valors o aproximacions de $\{\vec{f}(t_i)\}$.

Problema 3.2.2.a) *Superfícies funcionals o no paramètriques*. Donats $n+1$ punts de control $\vec{P}_i = (a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 0, 1, \dots, n$, **arbitrariament distribuïts**, (respectant que $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ si $i \neq j$), construir una superfície passant per o controlada per aquests punts com la gràfica de certa aplicació $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{(a_i, b_i)\}$ siguin els valors de les variables independents i $\{c_i\}$ valors o aproximacions de $\{f(a_i, b_i)\}$. El domini A , pot ser, per exemple, $A = [a_{\min}, a_{\max}] \times [b_{\min}, b_{\max}]$.

Problema 3.2.2.b) *Superfícies paramètriques*. Donada **una xarxa** de $(n+1) \times (m+1)$ punts de control $\vec{P}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \in \mathbb{R}^3$ $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, construir $n+1$ valors $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ d'un paràmetre s i $m+1$ valors $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ d'un paràmetre t i una superfície paramètrica $\vec{f} : [s_0, s_n] \times [t_0, t_m] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que els punts $\{\vec{P}_{ij}\}$ siguin els valors o aproximacions de $\{\vec{f}(s_i, t_j)\}$.

És clar que aquests són just els problemes que aquí abordem, no tots els que es poden plantejar. Tanmateix, ja hem comentat que hi ha altres tècniques que aborden i resolen aquests problemes. El que fem aquí es abordar-los des de la òptica de les tècniques de control difús, noves en aquest camp.

3.2.1. El model.

Proposem un sistema basat en regles lingüístiques difuses tal com

s'usen en control difús (Castro 93; Wang 92; Kruse 94). Hem adoptat el punt de vista de Takagi-Sugeno (Takagi 85) de cara a estalviar el procés de defusificació.

La idea principal consisteix en utilitzar regles del tipus

Si

\vec{x} està aprop de \vec{x}_i en el domini,

llavors

\vec{y} està aprop de \vec{y}_i en la imatge.

Aquesta idea es desenvolupa en el següent *model*:

- Prendre com a variable d'entrada el domini \vec{x} i com a variable de control la imatge \vec{y} .
- Tant per les variables d'entrada com per les de control, prendre tants termes lingüístics com el nombre de punts de control.
- Usar tantes regles del tipus

$$r_i : \text{ Si } \vec{x} \simeq \vec{x}_i, \quad \text{ llavors } \quad \vec{y} \simeq \vec{y}_i; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2.1)$$

com punts de control hi hagi.

- Modelitzar el grau d'acompliment de l'antecedent de la i -essima regla per mitjà d'un conjunt difús, α_i tal que $\alpha_i(\vec{x}_i) = 1$ i $\alpha_i(\vec{x})$ sigui una funció decreixent de la distància a x_i (Jacas 93).
- El conseqüent de cada regla, $f_i(\vec{x})$, és la constant \vec{y}_i .
- La sortida del sistema s'obté fent una mitja ponderada de les regles (veure (3.1.2)):

$$\vec{y}(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i(\vec{x}) \cdot \vec{y}_i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i(\vec{x})} = \sum_{i=0}^n F_i(\vec{x}) \cdot \vec{y}_i$$

on

$$F_i(\vec{x}_i) = \frac{\alpha_i(\vec{x})}{\sum_{j=0}^n \alpha_j(\vec{x})}, \quad \sum_{i=0}^n F_i(\vec{x}) \equiv 1. \quad (3.2.2)$$

Per tant, el resultat és una combinació lineal convexa o mitja ponderada dels conseqüents de cada regla on els coeficients o pesos depenen dels punts-dades i dels conjunts difusos α_i .

3.2.2. Observacions.

- 1) Si el domini és un interval de \mathbb{R} (cas d'una corba), llavors el $\alpha_i = \mu_i$ són nombres difusos.
- 2) Si el domini és una regió de \mathbb{R}^2 (cas d'una superfície), llavors el grau α_i de proximitat d'un punt $\vec{x} = (x, y)$ a $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$ es pot modelar de la següent manera

$$\vec{x} = (x, y) \text{ és proper a } \vec{x}_i = (x_i, y_i)$$

si

$$x \text{ és proper a } x_i \quad \mathbf{i} \quad y \text{ és proper a } y_i.$$

Si μ_i i ν_i són nombres difusos modelitzant aquestes dues proximitats, llavors el conjunt difús α_i pot ser definit com $\alpha_i(\vec{x}) = T(\mu_i(x), \nu_i(y))$, on T és una t-norma adient que actua com a conjunció. Degut a que volem produir superfícies i de cara a conservar el grau de suavitat heretat dels nombres difusos, convé triar una t-norma que sigui C^∞ . En el nostre model usarem el *Producte*.

- 3) Cal que els conjunts difusos $\{\alpha_i\}$ cobreixin el domini en el sentit de que per cada punt \vec{x} del domini, existeixi algun conjunt difús α_i tal que $\alpha_i(\vec{x}) \neq 0$. Això cal per evitar dividir per zero a (3.2.2) i té el significat semàntic de que la imatge de cada punt del domini vingui controlada per al menys algun dels punts de control $\{\vec{x}_i\}$.
- 4) Les corbes del tipus 3.2.1.a) i 3.2.1.b) generades per aquests models no poden ser alhora interpoladores i suaus (o sigui, amb continuïtat a la tangent). Efectivament, al ser (3.2.2) una combinació convexa de punts de control \vec{P}_i la corba sempre està dins la envolupant convexa $C(\{\vec{P}_i\})$, llavors la solució interpolativa necessàriament presentarà una cúspide en els vèrtexs "actius" de $C(\{\vec{P}_i\})$.
- 5) Cal remarcar que mentre en els mètodes clàssics de CAGD, només es pot influir en la corba per mitjà de la selecció de punts, aquí també tenim la possibilitat de triar el tipus i mida dels nombres difusos associats a cada punt; fins i tot poden variar la elecció dins d'un mateix conjunt de nodes. Així poden variar la influència i l'efecte a distància segons els punts. També permet modular el "pes" de cada punt d'una manera alternativa i més flexible que amb els pesos dels NURBS. Aquest aspecte proporciona gran versatilitat al model.

Amb tot això present, les solucions que proposem pels problemes plantejats són les següents.

3.2.3. Solucions.

Problema 3.2.1.a) (*Corba no paramètrica*). Aquí, $\vec{P}_i = (a_i, b_i)$, el domini és algun interval de \mathbb{R} (normalment $[a_0, a_n]$) i $\alpha_i = \mu_i$ són nombres difusos normalitzats. La corba solució és

$$y = f(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i(x) \cdot b_i}{\sum_{i=0}^n \mu_i(x)} = \sum_{i=0}^n F_i(x) \cdot b_i. \quad (3.2.3)$$

Problema 3.2.1.b) (*Corba paramètrica*). En aquest cas, $\vec{P}_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ o $\vec{P}_i = (a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$. El domini és un interval de \mathbb{R} , la variable és el paràmetre $t \in [t_0, t_n]$, $\vec{x}_i = t_i$, $\vec{y}_i = \vec{P}_i$ i $\alpha_i = \mu_i$ són nombres difusos normalitzats. La corba solució és

$$\vec{y} = \vec{f}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i(t) \cdot \vec{P}_i}{\sum_{i=0}^n \mu_i(t)} = \sum_{i=0}^n F_i(t) \cdot \vec{P}_i. \quad (3.2.4)$$

Respecte la elecció de la parametrització $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, veure §2.3.1.

Problema 3.2.2.a) (*Superfícies no paramètriques*). Ara, $\vec{P}_i = (a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$, el domini és alguna regió de \mathbb{R}^2 , $\vec{x}_i = (a_i, b_i)$, $\vec{y}_i = c_i$ i $\alpha_i(x, y) = \mu_i(x) \cdot \nu_i(y)$ on μ_i, ν_i són conjunts difusos normalitzats. La superfície solució és

$$z = f(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i(x, y) \cdot c_i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i(x, y)} = \sum_{i=0}^n F_i(x, y) \cdot c_i. \quad (3.2.5)$$

Problema 3.2.2.b) (*Superfícies paramètriques*). En aquest darrer cas, $\vec{P}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, el domini és un rectangle de \mathbb{R}^2 , les variables són els paràmetres $s \in [s_0, s_n]$, $t \in [t_0, t_m]$, $\vec{x}_{ij} = (s_i, t_j)$, $\vec{y}_{ij} = \vec{P}_{ij}$ i $\alpha_{ij}(s, t) = \mu_i(s) \cdot \nu_j(t)$ on μ_i, ν_j són nombres difusos normalitzats. La superfície solució és

$$\vec{P}(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(s, t) \cdot \vec{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(s, t)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m F_{ij}(s, t) \vec{P}_{ij}$$

3.2. Aplicació a la modelització de corbes i superfícies...

on

$$F_{ij}(s, t) = \frac{\alpha_{ij}(s, t)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij}(s, t)} \quad (3.2.6)$$

Nota: Donat que en aquest cas, el conjunt de punts determina una xarxa, hem usat un doble índex per conveniència. Si volguéssim utilitzar un únic índex k , per mantenir la unitat de notació, podem, per exemple, reassignar índexs de la manera següent

$$\{i, j\} \rightarrow \{k\} \quad \text{amb } k = i \cdot (m + 1) + j.$$

Respecte de la elecció de les parametritzacions veure §2.3.1.

3.3. Exemples.

Exemple 1. Usant nombres difusos μ_i que s'anulin fora de (t_{i-1}, t_{i+1}) , per exemple triangulacions, en cada tram només compten dos punts i surt un segment recte. Obtenim per tant una corba poligonal interpoladora. En la figura 3.3.1 veiem un cas funcional (o sigui, no paramètric) per vuit punts, amb els nombres difusos utilitzats.

Exemple 2. Si prenem com a μ_i 's triangulacions “més amples”, surt una corba C^0 que ja no és interpoladora ni poligonal. En la figura 3.3.2 veiem la nova corba amb els nous difusos pel mateix conjunt de punts que en l'exemple 1.

Exemple 3. Amb el mateix conjunt de punts i també en versió funcional ara amb nombres difusos de tipus gaussià amb diferents amplades, que repercuteixen en que cada punt té una diferent influència a distància (fig. 3.3.3).

Exemple 4. La figura 3.3.4 mostra les corbes obtingudes amb els mateixos punts però amb un altre ordre i en versió paramètrica per dos eleccions de nombres gaussians, estrets en el primer cas, amples en el segon. Es pot observar que quan més estrets són els nombres, més a prop dels punts passen les corbes. No es mostren els nombres difusos.

Exemple 5. La figura 3.3.5 mostra dues vistes d'una superfície funcional controlada per deu punts. En una de les vistes es mostren els nombres difusos gaussians usats en cada component, que després es combinen amb la t-norma producte per formar els conjunts difusos corresponents a cada punt. Cal recalcar que, en aquest cas, no cal que els punts formin una xarxa ni cal triangular el domini. Això fa el model adient, per exemple, per problemes topogràfics i, en general per tots els problemes que parteixen d'un conjunt de dades disperses.

Exemple 6. Finalment la figura 3.3.6 presenta dues superfícies paramètriques controlades per una mateixa xarxa de 3×4 punts. Els nombres borrosos usats són gaussians i no es mostren. En el primer cas són més estrets que en el segon, de manera similar a l'exemple 4 pel cas de corbes.

3.4. Corbes i superfícies de Bézier.

En aquesta secció provarem que les corbes i superfícies de Bézier (Farin 90; Faux 85; Hearn 94) es poden considerar cassos particular del model que es presenta aquí.

Primer atendrem el cas de les corbes. Transformem el problema a resoldre a un més fàcil de manipular per mitjà de la proposició 3.4.2, després mostrem la existència de solucions (Corol·lari 3.4.6) i en donem una dins de la demostració del teorema 3.4.10. La darrera part de la secció s'aprofita de la feina anterior per resoldre el cas de les superfícies amb el teorema 3.4.11.

Lema 3.4.1. Sigui $\{\alpha_i\}$ una família de conjunts difusos sobre un domini A satisfent la observació 3 de 3.2.2 i k una funció de A sobre $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Llavors els objectes (corbes o superfícies) generats usant $\{\alpha_i\}$ i $\{\alpha_i/k\}$, en les fórmules (3.2.2) coincideixen

Demostració.

$$\vec{y}(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i(\vec{x}) \vec{y}_i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i(\vec{x})} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i(\vec{x})}{k(\vec{x})} \cdot \vec{y}_i}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i(\vec{x})}{k(\vec{x})}} \quad \blacksquare$$

En altres paraules, si tots els conjunts difusos es reescalen en un mateix factor en cada punt de A , l'objecte obtingut no varia.

Recordem ara que, donats $n + 1$ punts de control \vec{P}_i , la corba de Bézier $\vec{B}(t)$ controlada per ells s'obté en la seva forma de Bernstein, per mitjà de la fórmula

$$\vec{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \vec{P}_i \quad \text{per } t \in [0, 1] \quad (3.4.1)$$

on

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

és el i -èssim polinomi de Bernstein de grau n , ja mencionat a l'inici del capítol. Perquè això tingui sentit considerarem només el cas $0 < n < +\infty$.

Aquestes corbes són de la forma (3.2.4) amb $F_i = B_i^n$, sense cap referència als nodes $\{t_i\}$. Si volem encabir aquestes corbes dins el nostre model, cal trobar apropiats nombres difusos normalitzats $\{\mu_i\}$ i nodes $\{t_i\}$ (que seran els punts on cada μ_i atansa el valor 1), tals que

$$B_i^n = \frac{\mu_i}{\sum_{j=0}^n \mu_j}. \quad (3.4.2)$$

La figura 3.4.1 mostra una típica corba de Bézier amb el seu polígon de control, de cinc punts en aquest cas, junt amb el corresponent conjunt de polinomis de Bernstein de grau 4.

Ja que $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1$, podríem prendre $\mu_i = B_i^n$, però, en general, $B_i^n < 1$, o sigui, $\{B_i^n\}$ no és una família de nombres difusos normalitzats. Degut a la semàntica del model, l'antecedent $t \simeq t_i$ de cada regla R_i ha de ser certa del tot (valor 1) per t_i . Per sort, d'acord amb el lema 3.4.1 podem usar funcions $k(t)$ de cara a normalitzar la família $\{B_i^n\}$.

Així doncs, l'objectiu és trobar una funció $k : [0, 1] \rightarrow R^+ \setminus \{0\}$ tal que $\mu_i = B_i^n/k$ sigui un nombre difús tal que, per cada i , existeixi un t_i tal que $\mu_i(t_i) = 1$. Com que l'ordre dels punts de control s'ha de preservar, necessitem, addicionalment la condició $0 \cdot t_0 < t_1 < \dots < t_n \cdot 1$.

En particular, la precedent condició per k significa que $k(t) \geq B_i^n(t)$ per cada i i per tot t i que, per cada i , existeixi t_i verificant $k(t_i) = B_i^n(t_i)$ junt amb la condició $t_i < t_j$ si $i < j$, per assegurar l'ordre.

Així les coses, de cara a provar el teorema 3.4.10, només cal mostrar la existència de tals funcions k i construir-ne una.

La següent proposició dóna una condició necessària i suficient perquè tals funcions k existeixin.

Proposició 3.4.2. Una funció k , tal com es requereix existeix sii per cada i existeix t_i tal que si $j \neq i$ llavors $B_i^n(t_i) \geq B_j^n(t_i)$ i aquest conjunt $\{t_i\}$ es pot escollir de tal manera que $t_i < t_j$ si $i < j$.

Demostració. \Rightarrow) Si per alguns i i qualsevol t , $B_i^n(t) < B_j^n(t)$ per certa j dependent de t , no podem normalitzar la funció $B_i^n(t)$ sobre cap valor t_i dividint per cap $k(t_i)$ perquè llavors, per alguns j , $\mu_j(t_i) = \frac{B_j^n(t_i)}{k(t_i)} > 1$ contradint el fet que μ_j és un nombre difús.

Si $\{t_i\}$ existeix però no pot ser adientment ordenada, l'ordre dels punts \overrightarrow{P}_i no pot ser preservat.

\Leftarrow) En aquest cas, definim $k_0(t) = \text{Max}(B_i^n(t))$ que és sempre més gran que zero. Cada funció $k(t) \geq k_0(t)$ amb $k(t_i) = k_0(t_i)$ compleix el requeriment. Això prova, a més, que la solució d'existir, no és única. ■

Per provar l'existència de solucions per k i calcular-ne una, submergirem la família

$$\{B_i^n(t)\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$$

dins d'una família uniparamètrica de funcions

$$\{B_\lambda^n(t)\}_{\lambda \in [0,n]}$$

3.4. Corbes i superfícies de Bézier.

on

$$B_\lambda^n(t) = \binom{n}{\lambda} t^\lambda (1-t)^{n-\lambda},$$

amb λ real,

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma(n-\lambda+1)}$$

essent Γ la funció Gamma (Artin 64).

Considerem la família paramètrica de corbes $y = B_\lambda^n(t)$, $\lambda \in [0, n]$ o $G_n(t, y, \lambda) = B_\lambda^n(t) - y = 0$ en la seva forma implícita. Per illustrar-ho, la figura 3.4.2 mostra la família $\{B_i^8(t)\}$. Podem observar una envolupant superior o perfil sobre els polinomis que “toca” cada un en un punt. Aquest perfil ens permetrà provar la existència de solucions i servirà per construir-ne una.

Observació 3.4.3. De cara a aplicar la Proposició 3.4.2, i donat que per $\lambda = 0$ i $t = 0$, $B_0^n(0) = 1 > 0 = B_\mu^n(0)$ si $\mu \in (0, n]$, podem prendre $t_0 = 0$. De la mateixa manera per $\lambda = n$ i $t = 1$, $B_n^n(1) = 1 > 0 = B_\mu^n(1)$ si $\mu \in [0, n)$, i podem prendre $t_n = 1$. Per tant, des d'ara, centrarem l'atenció en el cas $\lambda \in (0, n)$ i $t \in (0, 1)$.

Proposició 3.4.4. Per cada $\lambda \in (0, n)$ existeix una $t_\lambda \in (0, 1)$ tal que, per tot $\lambda' \in (0, n) \setminus \{\lambda\}$

$$B_\lambda^n(t_\lambda) > B_{\lambda'}^n(t_\lambda) \quad \text{i, si } \lambda < \lambda', \quad \text{llavors } t_\lambda < t_{\lambda'}.$$

Demostració. Si prenem $B_\lambda^n(t)$ com una funció de dues variables, figura 3.4.3, és suficient provar que per cada λ , $B_\lambda^n(t)$ tenen màxim relatiu respecte λ per algun valor t_λ , que també és màxim absolut. Això està relacionat amb la existència de envolupant de la família G_n (veure Faux 85).

Hem de trobar les solucions de

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} G(t, y, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} B_\lambda^n(t) = 0 \quad \text{per } (t, \lambda) \in (0, 1) \times (0, n) \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B_\lambda^n(t) = t^\lambda (1-t)^{n-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{\lambda} \cdot \log \left(\frac{t}{1-t} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{t}{1-t} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\log \binom{n}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (\log \Gamma(\lambda+1) + \log \Gamma(n-\lambda+1)) = \\ &= \psi(\lambda+1) - \psi(n-\lambda+1) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

on $\psi(x)$ és la funció *psi* de Gauss o funció poligamma (Artin 64) que es defineix com la derivada del $\log \Gamma(x)$ i es pot expressar com

$$\psi(x+1) = -C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)} \quad (3.4.5)$$

amb $C \simeq 0.577216$, la constant d'Euler.

Es sabut (Artin 64, Rudin 76) que, donat que $\log \Gamma(x)$ és convex per $x > 0$, llavors $\log \Gamma(\lambda+1) + \log \Gamma(n-\lambda+1)$ és convex també per $\lambda \in (0, n)$ i la funció $l^n(\lambda)$ definida a partir de (3.4.4) com

$$l^n(\lambda) := \psi(\lambda+1) - \psi(n-\lambda+1) \quad (3.4.6)$$

és estrictament monòtona creixent per tot $\lambda \in (0, n)$, degut a que és la primera derivada d'una funció convexa. Resolent (3.4.4) per t podem definir

$$t_\lambda := \tau_n(\lambda) = \frac{e^{l^n(\lambda)}}{1 + e^{l^n(\lambda)}}. \quad (3.4.7)$$

Ja que $\frac{e^x}{1+e^x}$ és una funció estrictament monòtona creixent igual que $l^n(\lambda)$ i

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

llavors $\tau_n(\lambda)$ és també una funció estrictament monòtona creixent i és una aplicació bijectiva de $(0, n)$ sobre cert subconjunt de $(0, 1)$. Per tant, per cada λ existeix una única t_λ solució de (3.4.4) i $t_\lambda < t_{\lambda'}$ si $\lambda < \lambda'$. Per altra part, gràcies a la convexitat de $\log \Gamma$, es pot provar que $\left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} B_\lambda^n(t) \right|_{t=\tau_n(\lambda)} < 0$ $\forall \lambda \in (0, n)$. Per tant, (λ, t_λ) és un màxim relatiu respecte λ .

És més, degut a la monotonia de τ_n i la unicitat de solucions de (3.4.4) per λ al llarg del interval obert $(0, n)$, el màxim relatiu ho és també absolut. ■

Corol·lari 3.4.5. Per cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ existeix un $t_i \in (0, 1)$ tal que $B_i^n(t_i) > B_j^n(t_i)$ per $j \neq i$, i $t_i < t_j$ si $i < j$.

Demostració. A partir de la proposició 3.4.4 només cal restringir els valors de λ sobre els enters i . ■

Corol·lari 3.4.6. Existeix una funció k que satisfà les condicions enunciades a l'objectiu previ a la proposició 3.4.2. Aquesta funció no és única.

3.4. Corbes i superfícies de Bézier.

Demostració. A partir de la observació 3.4.3 i el corol·lari 3.4.5 hem deduït la existència d'un conjunt adequat de nodes $\{t_i\}$ tal com es requereix a la proposició 3.4.2, per tant, podem construir la funció $k_0(x)$ que es defineix allà. Qualsevol altra funció $k \geq k_0$ amb $k(t_i) = k_0(t_i)$ n'és també una solució.

■

Fins i tot la llibertat d'elecció és més amplia: quan es torna de $\lambda \in [0, n]$ cap el cas discret, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, per cada i , cada pun t_i que és solució de (3.4.4) té un interval obert de valors de t pels quals $B_i^n(t)$ encara és més gran que $B_j^n(t)$ per $j \neq i$, com es veu en la figura 3.4.2. Podriem canviar la elecció de cada t_i per qualsevol altra del seu interval i començar la construcció d'una altra funció k d'acord amb aquest nou conjunt de nodes amb la mateixa llibertat que abans. És interessant observar que cada elecció de nodes $\{t_i\}$ i cada funció k dóna lloc a un conjunt diferent de nombres difussos $\{\mu_i\}$ amb diferents valors i propietats però amb *la mateixa* corba de Bézier com a resultat.

Un cop s'ha provat la existència de solucions, en construirem una. Tot i que la funció k_0 podria ser suficient, dóna lloc a un conjunt de nombres difussos de classe C^0 . És preferible una funció k que tingui en compte la propietat dels polinomis de Bernstein i garanteixi la suavitat dels nombres difussos. La k escollida està inspirada en la envolupant de la família $\{B_\lambda^n(x)\}$.

Com hem vist en (3.4.7) i (3.4.8) $\tau_n(\lambda)$ envia $(0, n)$ sobre un subconjunt de $(0, 1)$. Anem a determinar-lo.

Definició 3.4.7. A partir de (3.4.7) definim:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_0 &:= \text{Inf}\{\tau_n(\lambda)/\lambda \in (0, n)\} \\ \tilde{t}_n &:= \text{Sup}\{\tau_n(\lambda)/\lambda \in (0, n)\}\end{aligned}$$

Proposició 3.4.8. Si $0 < n < +\infty$, llavors

$$0 < \tilde{t}_0 < \frac{1}{2} < \tilde{t}_n < 1.$$

Demostració. De (3.4.4) i (3.4.6), junt amb la continuïtat

$$\begin{aligned}l^n(0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} l^n(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\psi(\lambda + 1) - \psi(n - \lambda + 1)) = \psi(1) - \psi(n + 1) = \\ &= -C - \psi(n + 1) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)} < 0 \quad \forall n > 0.\end{aligned}$$

Per una altra banda, de la convexitat de $\frac{n}{x(x+n)}$, tenim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)} &= \frac{n}{(1+n)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)} < \frac{n}{(1+n)} + \int_1^{\infty} \frac{n}{x(x+n)} dx = \\ &= \frac{n}{(1+n)} - \log \frac{1}{(1+n)} < +\infty \quad \text{si } n < +\infty \end{aligned}$$

Per tant, per $0 < n < +\infty$,

$$-\infty < l^n(0) < 0$$

De forma similar,

$$l^n(n) = \psi(n+1) - \psi(1) = -l^n(0)$$

i $0 < l^n < +\infty$.

Ara, usant (3.4.7) i la monotonia de τ_n , obtenim

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 &= \tau_n(0) = \frac{e^{-C-\psi(n+1)}}{1 + e^{-C-\psi(n+1)}} \\ \tilde{t}_n &= \tau_n(n) = \frac{e^{C+\psi(n+1)}}{1 + e^{C+\psi(n+1)}} \end{aligned}$$

i, amb (3.4.8),

$$0 < \tilde{t}_0 < \frac{1}{2} < \tilde{t}_n < 1. \quad \blacksquare$$

Observació 3.4.9. No hi ha solució de (3.4.3) per tot $t \in [0, \tilde{t}_0]$ i per tant, $B_0^n(t)$ es manté més gran que $B_\lambda^n(t)$ en aquest interval. De manera similar, $B_n^n(t)$ roman més gran que $B_\lambda^n(t)$ per $t \in (\tilde{t}_n, 1]$.

Ja que $\tau_n(\lambda)$ és una bijecció entre $(0, n)$ i $(\tilde{t}_0, \tilde{t}_n)$, té una inversa en aquest interval que denotarem per $\lambda(t)$.

Observis que, per cada $t \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_n)$, $B_{\lambda(t)}^n(t)$ és un màxim absolut de $B_\lambda^n(t)$ respecte λ , d'acord amb la proposició 3.4.4.

Juntant tots aquests fets, ara podem construir els nodes $\{t_i\}$, la funció $k(t)$ i els nombres difussos $\{\mu_i\}$:

Teorema 3.4.10. Les corbes de Bézier són del tipus 3.2.1b) per una elecció adient dels nodes $\{t_i\}$ i els nombres difussos $\{\mu_i\}$.

3.4. Corbes i superfícies de Bézier.

Demostració.

a) Prengui's

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = \tau_n(i) & i = 1, \dots, n-1 \\ t_n = 1 \end{cases}$$

b) Defineixi's $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ com

$$k(t) = \begin{cases} B_0^n(t) & \text{si } 0 \cdot t \cdot \tilde{t}_0 \\ B_{\lambda(t)}^n(t) & \text{si } \tilde{t}_0 < t < \tilde{t}_n \\ B_n^n(t) & \text{si } \tilde{t}_n \cdot t \cdot 1 \end{cases}$$

c) Defineixi's $\mu_i(t) = \frac{B_i^n(t)}{k(t)}$

Aquesta elecció verifica:

$$t_i < t_j \text{ if } i < j, \quad \mu_i(t) \in [0, 1], \quad \mu_i(t_i) = 1$$

i $F_i(t) = \frac{\mu_i(t)}{\sum_{j=0}^n \mu_j(t)} = B_i^n(t)$, com es requereix. ■

A la figura 3.4.4 es representa el conjunt de $\{\mu_i\}$ per $n = 8$.

Respecte les superfícies de Bézier, recordem que, donats $(n+1) \times (m+1)$ punts de control $\vec{P}_{ij} \in \mathbb{R}^3$, la superfície de Bézier $\vec{B}(s, t)$ controlada per ells s'obté, en la seva forma de Bernstein per mitjà de la fórmula

$$\vec{B}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(s) \cdot B_j^m(t) \cdot \vec{P}_{ij} \quad \text{per } [s, t] \in [0, 1] \times [0, 1]$$

on els B_k^n són els polinomis de Bernstein, com a (3.4.1).

Aquestes superfícies són del tipus (3.2.6) amb $F_{ij} = B_i^n \cdot B_j^m$

La figura 3.4.5 mostra una típica superfície de Bézier amb la seva xarxa de control.

Teorema 3.4.11. Les superfícies de Bézier són del tipus 3.2.2.b) per una elecció adient dels nodes $\{(s_i, t_j)\}$ i els conjunts difussos $\{\alpha_{ij}\}$.

Demostració. D'acord amb el teorema 3.4.10, construïm els nodes $\{s_i\}$ i $\{t_j\}$, les funcions k_s i k_t i els nombres difussos $\{\mu_{s_i}\}$ i $\{\mu_{t_j}\}$ independentment per s i t , i llavors reunim els nodes i definim els conjunts difussos α_{ij} , usant la t-norma producte, com $\alpha_{ij}(s, t) = \mu_{s_i}(s) \cdot \mu_{t_j}(t)$.

Amb això, el teorema 3.4.11 conclou immediatament. ■

En definitiva, en aquest capítol hem presentat un model pel disseny de corbes i superfícies dins del CAGD utilitzant raonament aproximat difús. A més de la seva utilitat per aplicacions concretes per la nova flexibilitat aportada, proporciona una nova interpretació del significat d'ajustar corbes i superfícies a punts i una nova semàtica pel CAGD des del punt de vista del raonament aproximat i la teoria de conjunts difussos, que només queda encetada, en absolut esgotada. Addicionalment, hem mostrat que un dels mètodes més coneguts, les corbes i superfícies de Bézier, es poden interpretar com a membres d'aquesta nova família.

Figures del Capítol 3

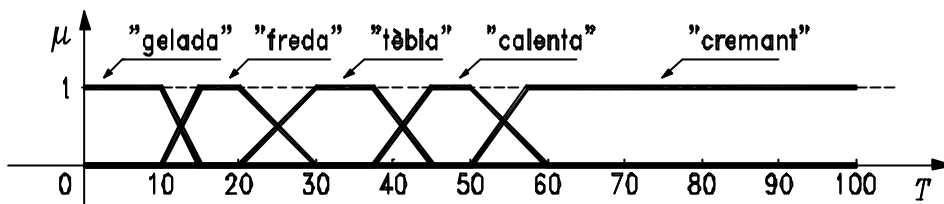


fig. 3.1.1. Nombres difusos i termes lingüístics associats a la temperatura de l'aigua líquida.

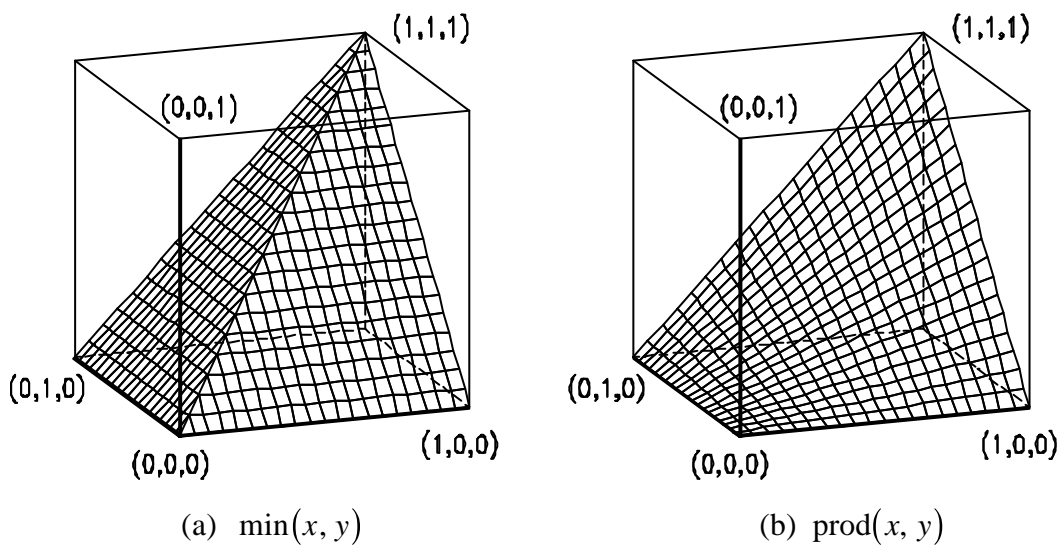


fig. 3.1.2. Dos exemples de t-normes.

3.5. Figures.

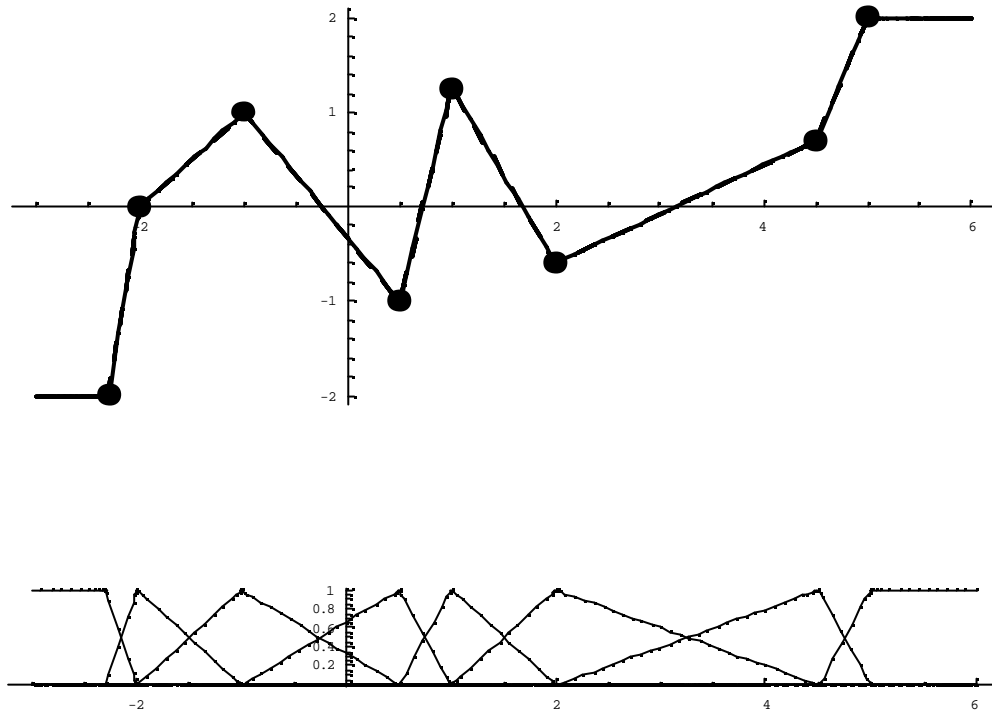


fig. 3.3.1. Cas poligonal interpolador.

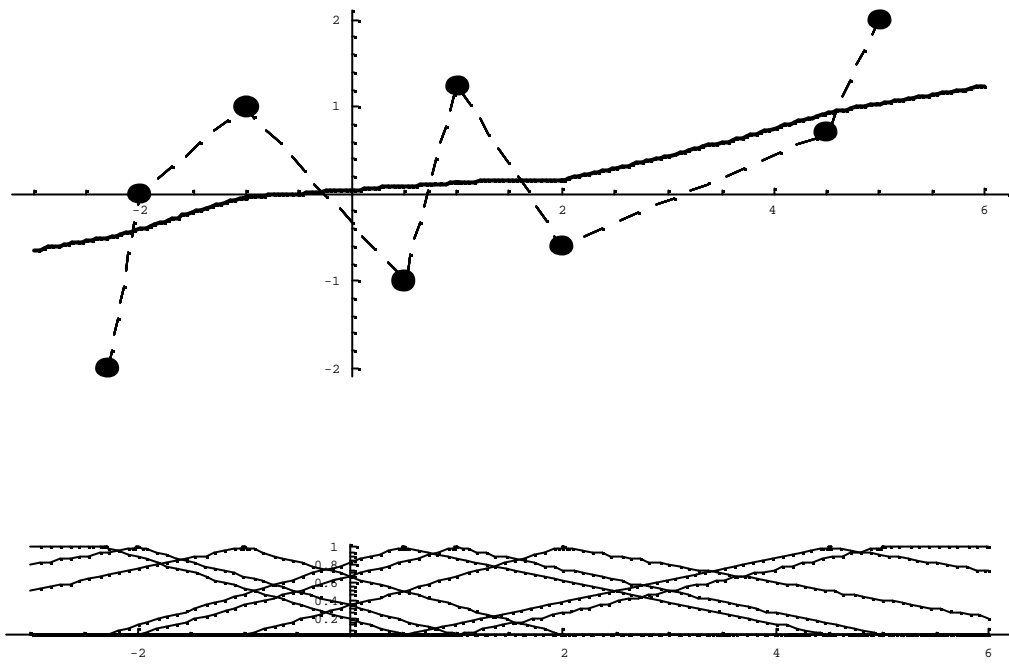


fig. 3.3.2. Amb difusos poligonals prou amples, corba no poligonal ni interpoladora.

3.5. Figures.

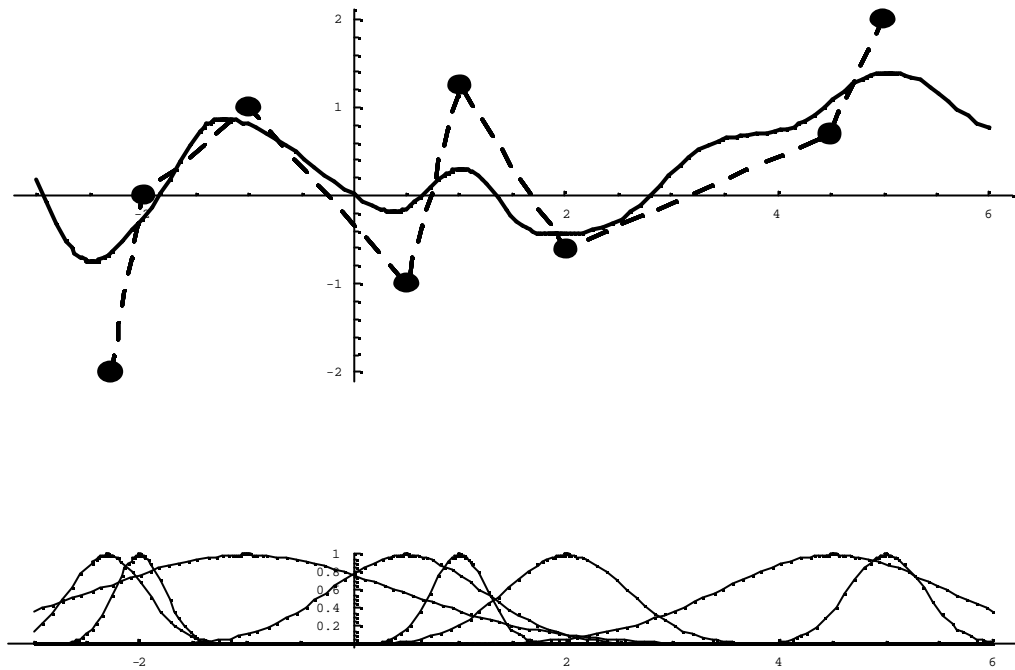


fig. 3.3.3. Corba no paramètrica, obtinguda amb conjunts difusos gaussians.

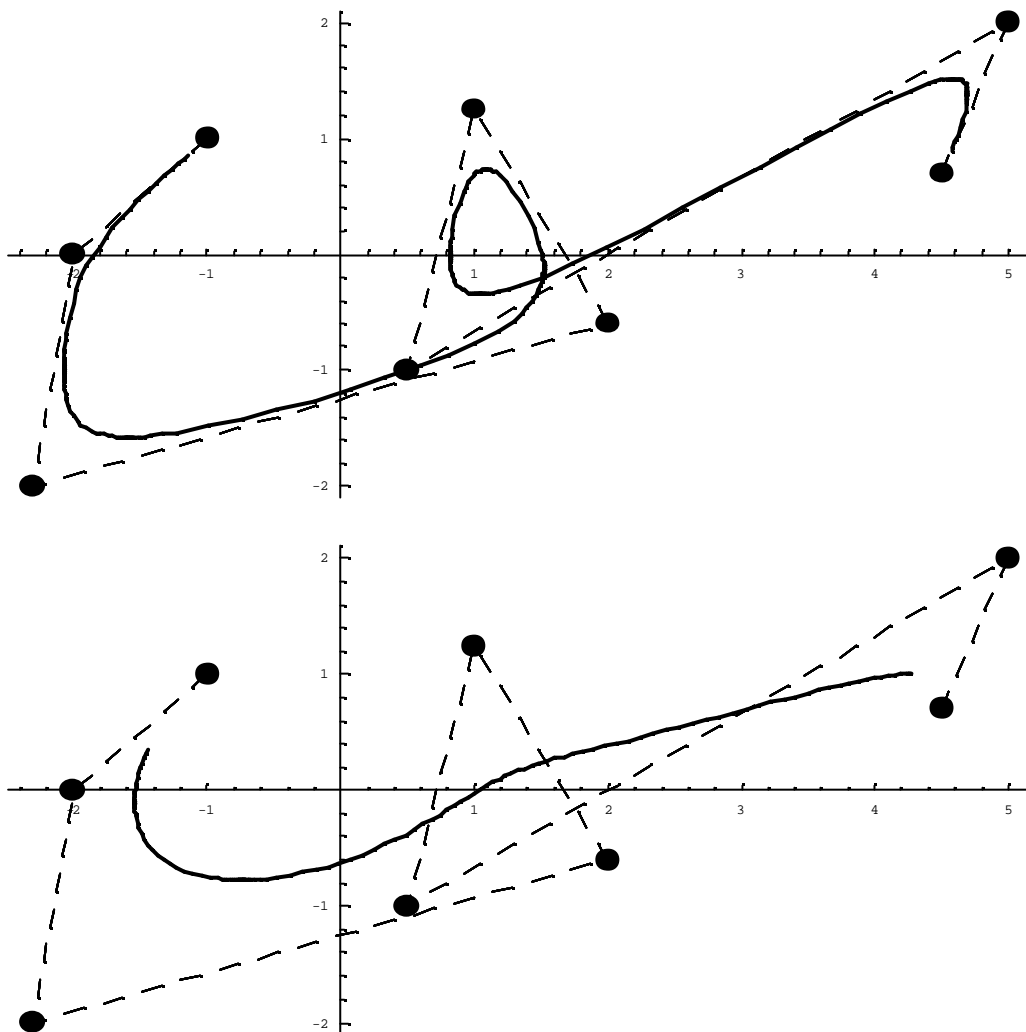


fig. 3.3.4. Dos exemples de corbes paramètriques amb el mateix polígon de control i diferent amplada dels difusos gaussians.

3.5. Figures.

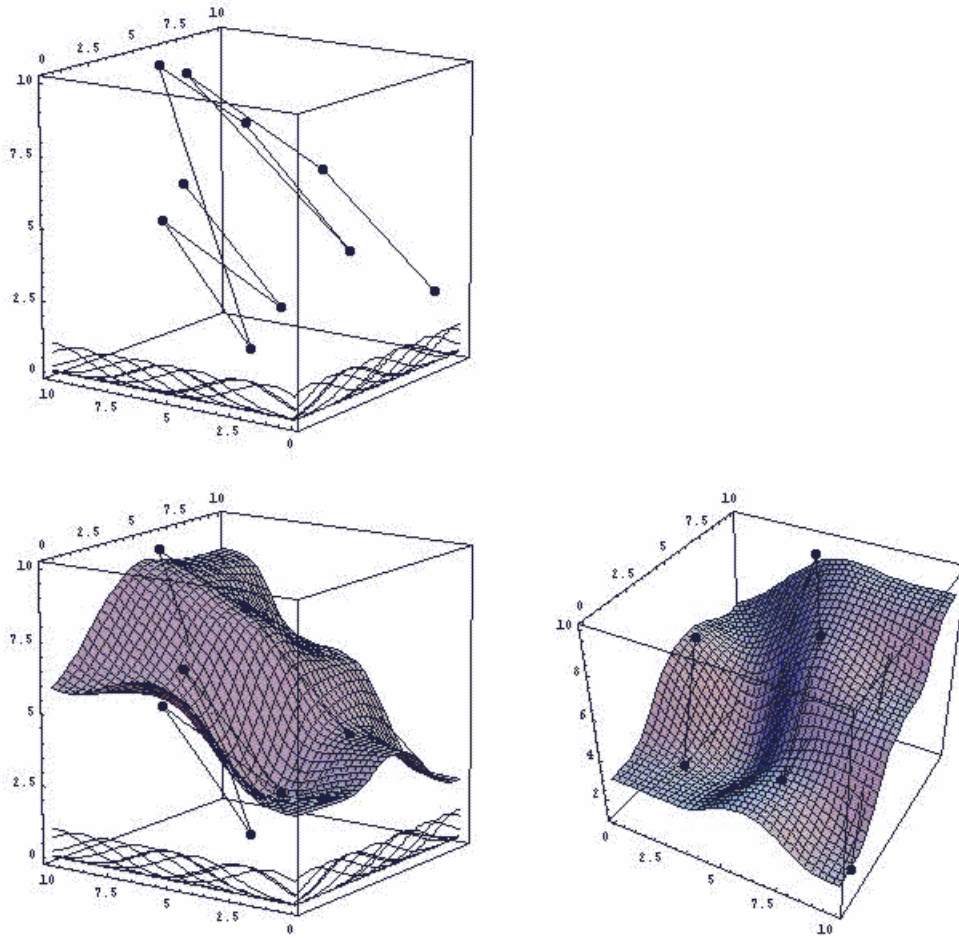


fig. 3.3.5. Exemple de superfície no paramètrica amb punts de control dispersos.

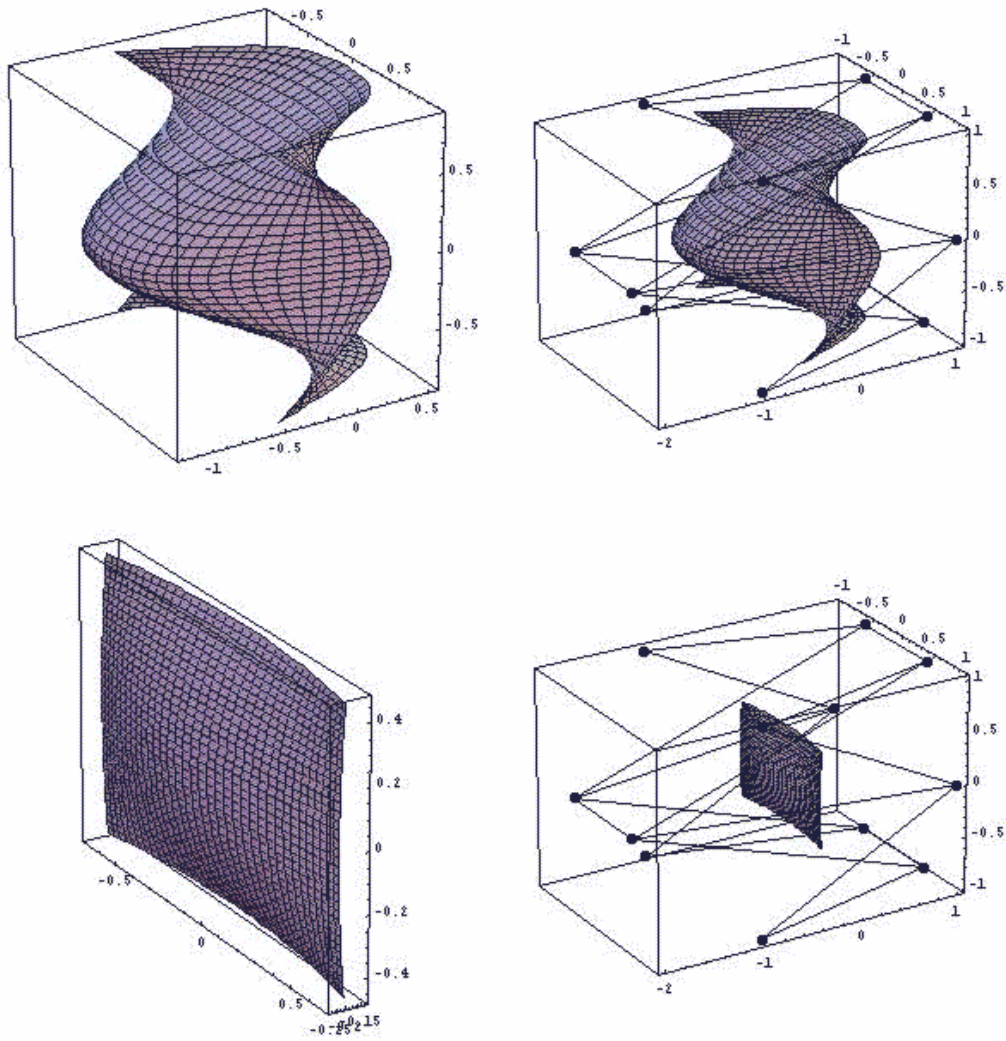
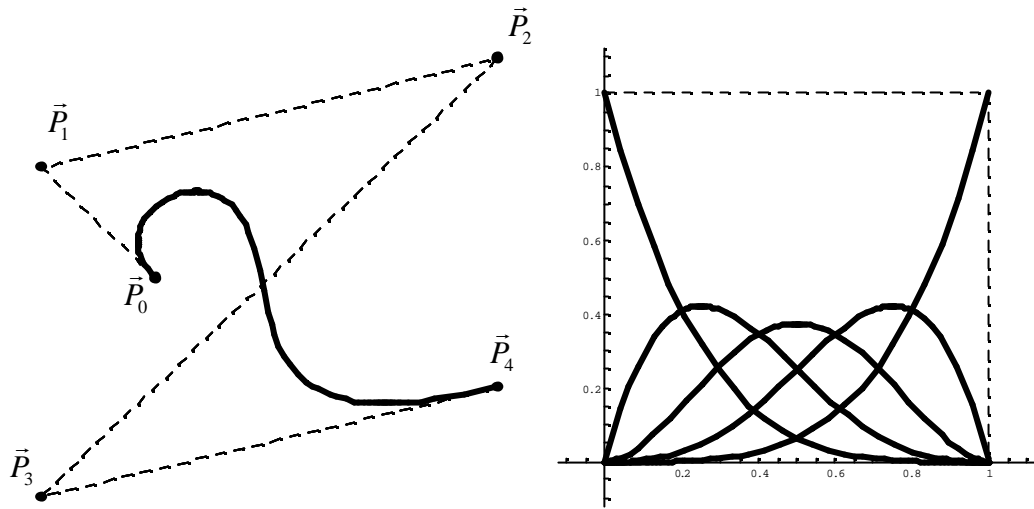


fig. 3.3.6. Dos superfícies paramètriques amb la mateixa xarxa de control i diferent amplada dels conjunts difusos gaussians.

3.5. Figures.



(a) polígon de control i corba de Bézier.

(b) polinomis de Bernstein de grau 4.

fig. 3.4.1. Exemple de corba de Bézier.

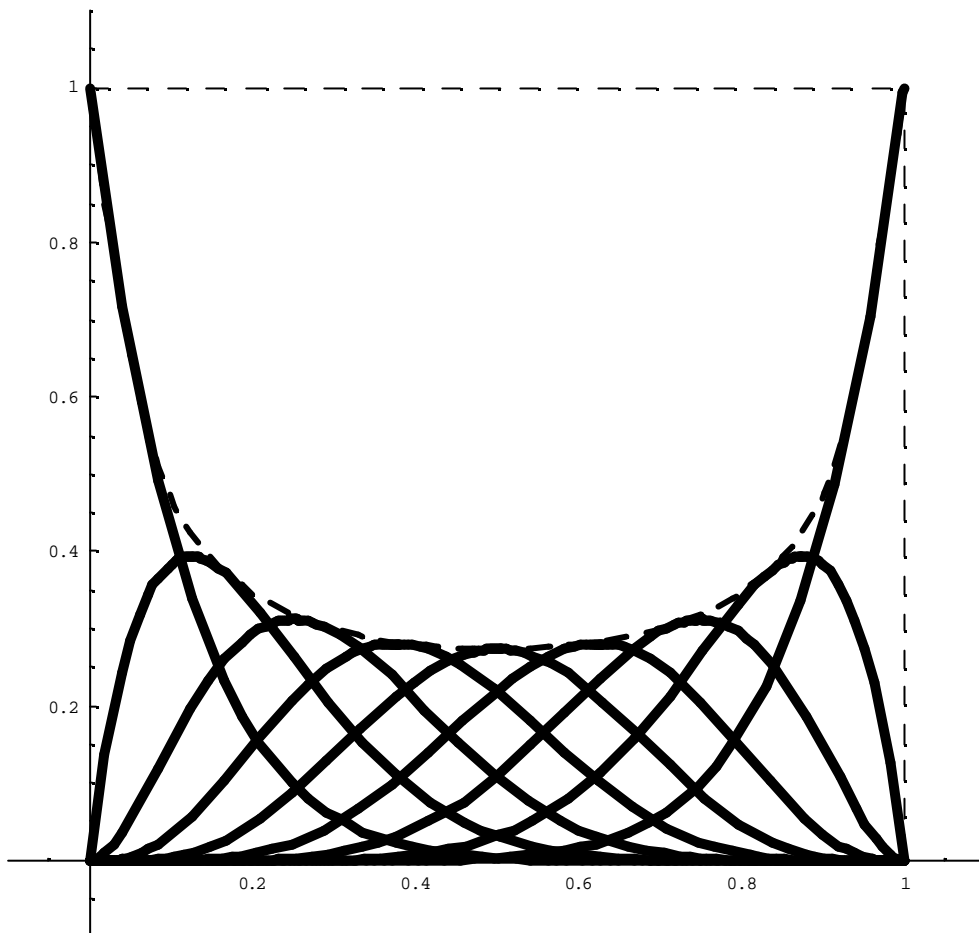


fig. 3.4.2. Gràfiques dels polinomis de Bernstein de grau 8 i envolupant superior.

3.5. Figures.

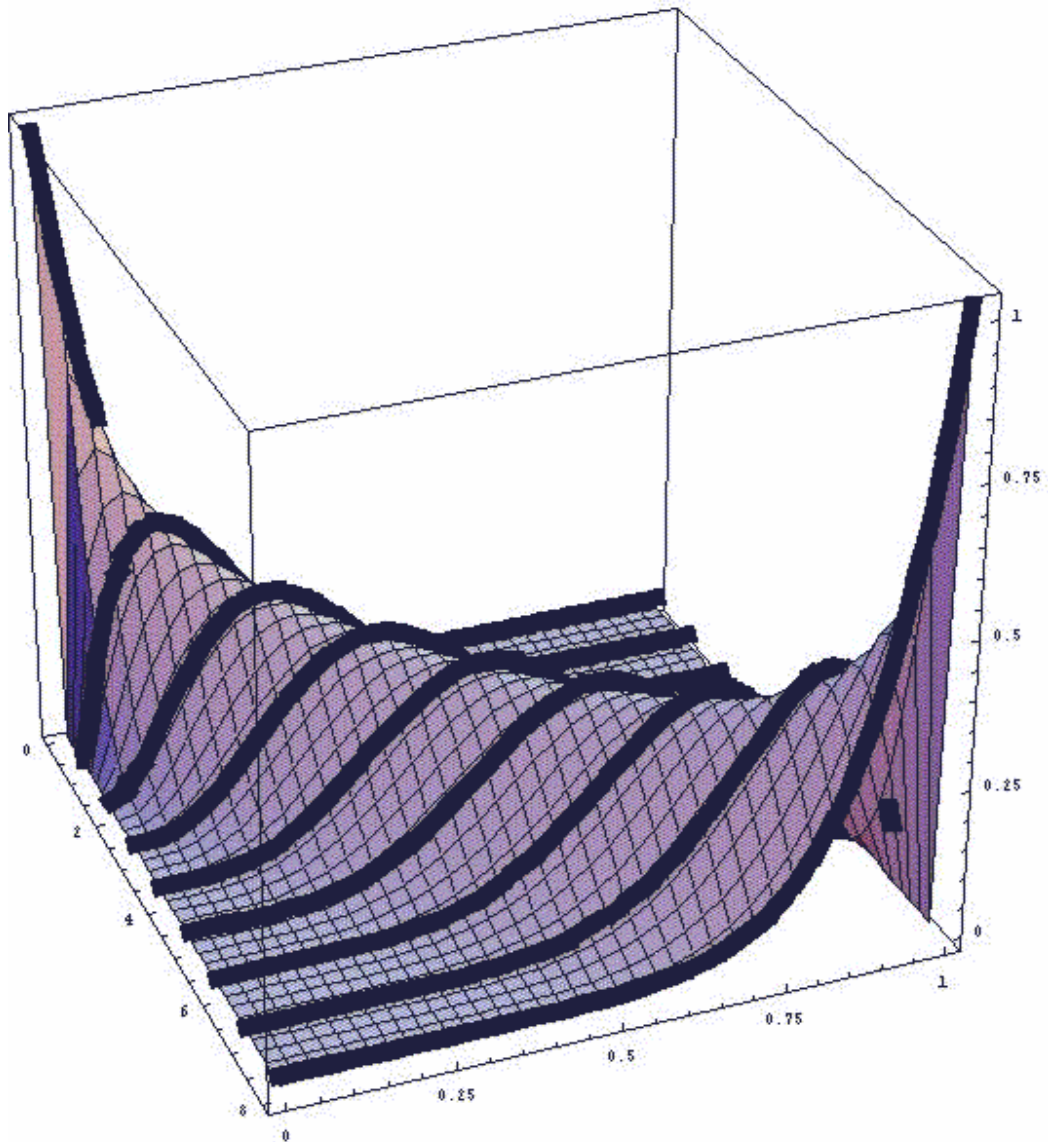


fig. 3.4.3. Superfície contínua interpoladora dels polinomis de Bernstein.

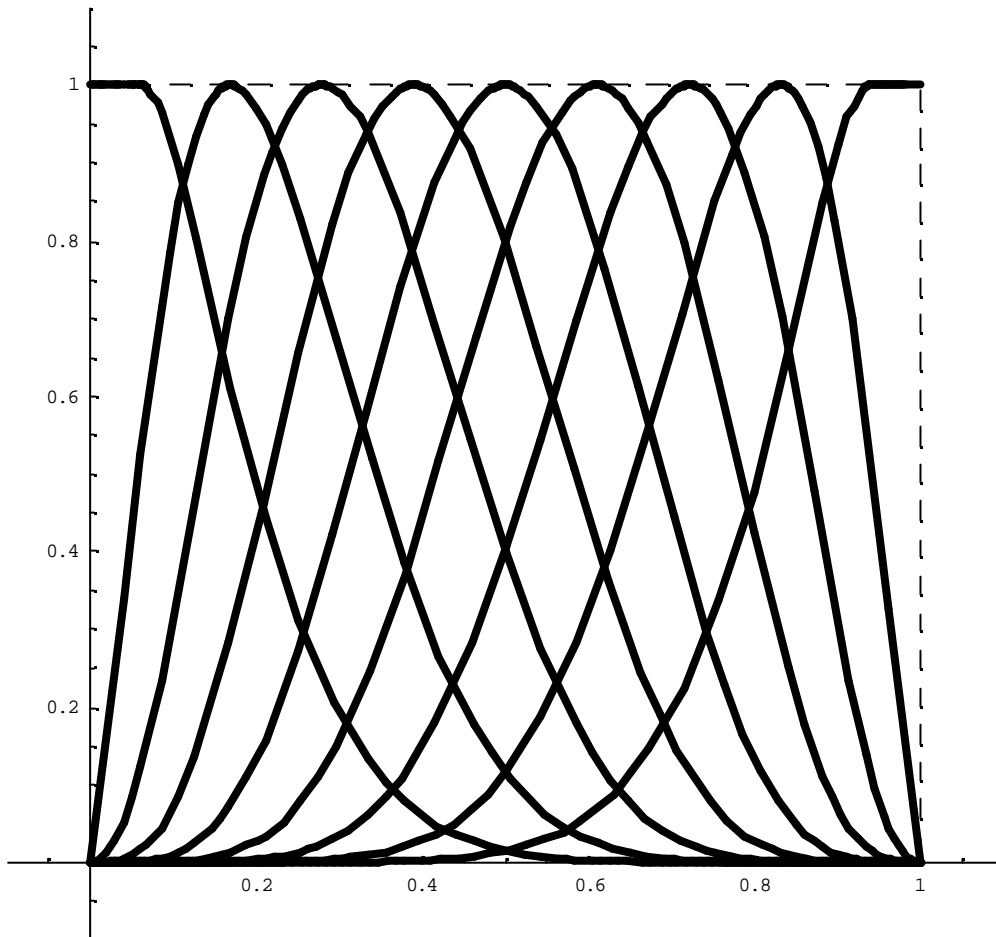


fig. 3.4.4. Conjunts difusos obtinguts al normalitzar els polinomis de Bernstein.

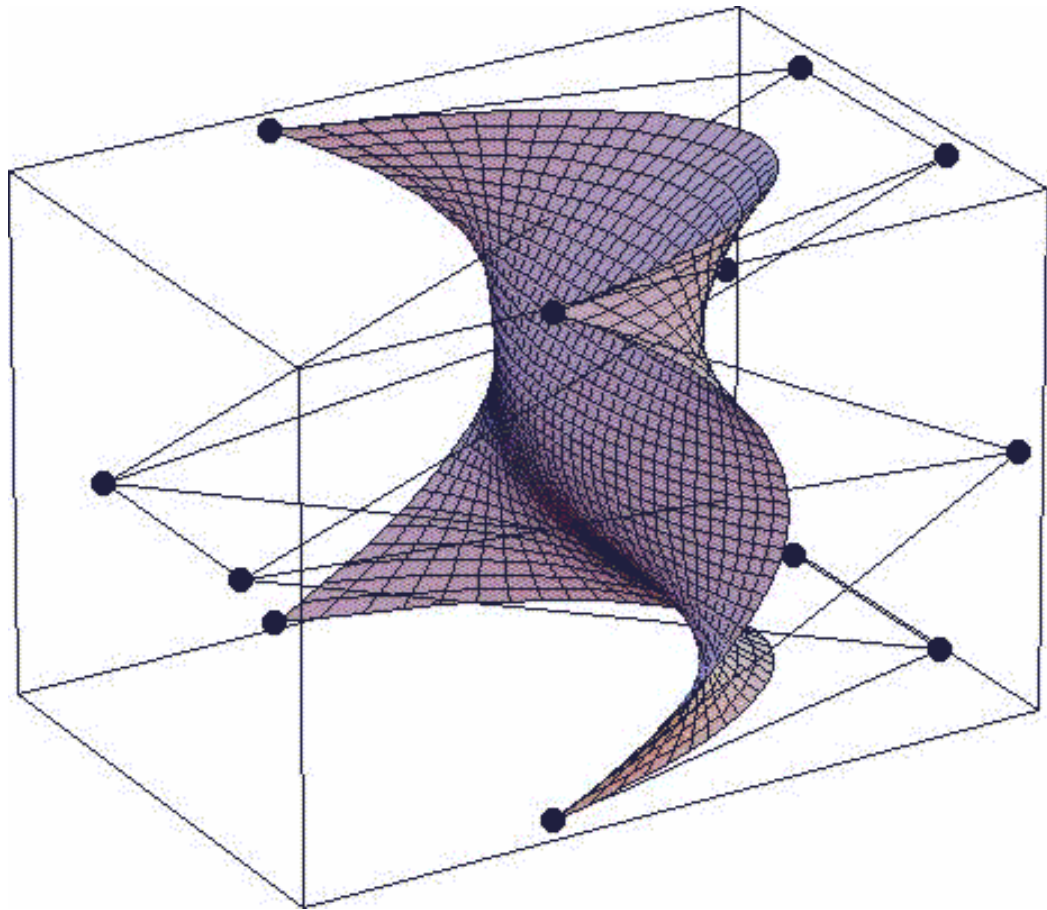


fig. 3.4.5. Exemple de superfície de Bézier, amb la seva xarxa de control.

part II

Part II

Aportacions a les eines de concepció

Seguint la estructura de continguts imposada en la introducció, aquesta part està dedicada a desenvolupar recursos matemàtics que ajudin al dissenyador en la fase de concepció, la més subjectiva i la que creiem més abandonada per l'actual recerca, simplement perquè no deu considerar que hi falti res aquí, o perquè creu que la concepció pertany a l'àmbit de la creativitat espontània i no és cosa de ficar-s'hi des de les matemàtiques i menys des de la informàtica, on es creu ubicada la dita recerca actual. Som conscients de que el simple fet de suggerir usar matemàtiques, funcions, per pilotar el flux creatiu farà saltar de la cadira a més d'un dissenyador-artista, apel·lant a la llibertat de l'esperit alhora de crear. Que no es preocupi; no volem (ni podem!) imposar res. Oferirem uns nous recursos; qui els aprofiti podrà fer, controlant-les, certes coses noves, qui no, podrà seguir fent les que ja es feien, que tampoc estan malament. També hi ha artistes que sí creuen en la utilitat d'un cert rigor mental alhora de crear, en la necessitat d'un llenguatge que organitzi i faci entenedores i coherents les idees. A ells va dirigida aquesta Part II. En aquests temps en que es reivindica, amb raó, la intel·ligència emocional, la pura noció primordial de simetria indica que també s'haurà de considerar la emoció intel·ligent. Una creativitat que s'enfili sobre la base d'un llenguatge matemàtic ha de ser un bon exemple de emoció intel·ligent. Probablement la intel·ligència artificial no acaba d'emular la humana perquè no sap com incorporar la part emocional que acompanya a la racional, com el camp magnètic acompanya a l'elèctric en la radiació electromagnètica, o com la ona i la partícula són dues maneres d'interpretar la mateixa realitat. Probablement, la principal causa del fracàs en l'ensenyament de les matemàtiques és que es transmet un saber abstracte esterilitzat i pasteuritzat, al que, en ares del rigor formal i del volum dels programes, se li ha tret l'emoció i el neguit amb que va néixer; al no tenir aquest vehiculitzador, el coneixement és fa indigerible i la comunicació es trenca. De la mateixa

manera, probablement gran part de l'art modern és incompreensible al profà, apart d'inútil, perquè és pura emoció de l'autor (“... jo no preparo l'obra que faré, deixo que ella mateixa surti tota sola...”) i, per tant, matèria més pròpia de la consulta del psicoanalista que dels museus o del paisatge urbà; falta que s'articuli amb una racionalitat, com el formigó s'articula amb el ferro, una racionalitat que permeti verbalitzar aquesta emoció i la faci comunicable (i per tant útil) a un mateix i als demés. Només amb racionalitat o només amb emoció esdevé impossible la comunicació. L'art i la ciència són els dos paradigmes antagònics de l'expressió d'aquesta dualitat (poder més metodològica que real) del esperit humà entre emoció i raó. Cal que cadascuna recuperi aspectes de l'altre, o millor, que formin com una emulsió que treballi com una unitat. Sense caure en orientalismes de supermercat, podríem dir que l'establiment i consolidació del pensament en termes de les dualitats o contraposicions cos-ànima, emoció-raó, constitueix una de les pitjors tragèdies de la cultura occidental.

Però aquesta racionalitat implicarà un aprenentatge, mai ha estat d'altra manera; ja hem assenyalat en la introducció que ningú discutia que el disseny amb regla i compàs exigia un aprenentatge dels rudiments de la geometria euclidiana. Creiem que qui vulgui aprofitar a ple rendiment la eina informàtica, ja des del moment de la concepció, haurà de fer l'esforç de familiaritzar-se amb les funcions matemàtiques, sobre tot amb la seva traducció gràfica.

En definitiva, tal com hem argumentat en la introducció, creiem que falta un llenguatge per regular la fase de concepció de formes apropiat a la nova eina d'execució, el software gràfic, i en aquesta Part II volem proposar una manera d'omplir aquest buit, concretament mitjançant la elaboració d'una mena de gramàtica a partir de les funcions matemàtiques usuals. Així, el capítol 4 està dedicat a exposar els pressupostos teòrics i metodològics en que s'assenta la proposta; el capítol 5 a desenvolupar detalladament i descriptivament aquesta gramàtica i el capítol 6 a mostrar exemples de la seva aplicació.

Capítol 4

Proposta d'una gramàtica matemàtica per al disseny

Aquest capítol reprèn el fil iniciat en la introducció, especialment en l'apartat dedicat a la crítica a la situació actual. Tal crítica obliga, si es vol ser constructiu, a proposar una alternativa. Resumint el que hem argumentat, podem jerarquitzar la nostra crítica-proposta en tres capes o nivells, del més genèric al més concret:

- 1) La geometria euclidiana, com a llenguatge articulador de la concepció, és insuficient per permetre al dissenyador aprofitar totes les possibilitats de la informàtica gràfica com a nova eina d'execució. Roman pendent la elaboració d'un nou codi que superi l'anterior, incloent-lo, i que estigui expressament pensat per aquesta nova eina.
- 2) Entre els possibles codis imaginables, i atès que la informàtica gràfica modelitza i gestiona els objectes del pla i de l'espai mitjançant funcions o formulacions matemàtiques, creiem que un tal codi té que basar-se en l'aprofitament exhaustiu de les possibilitats formals de les funcions matemàtiques, possibilitats degudes a la relació entre elles i les seves representacions gràfiques. Per tant, en el repertori teòric, cal afegir a la geometria euclidiana, el càlcul infinitesimal, la geometria diferencial, l'àlgebra i qualsevol part de les matemàtiques que pugui servir en algun moment per produir, modificar, controlar, entendre, avaluar, etc. les formes, que són l'objectiu del disseny.
- 3) Entre les possibles alternatives d'explotació dels recursos gràfics de les funcions, hem ideat una, consistent en la construcció d'una mena de gramàtica que usa com a lletres les funcions més usuals i que exposarem i justificarem a continuació.

Aquesta proposta no és de caixa o faixa, no posa al lector en la tessitura de tot o res, es pot anar entrant a través dels seus nivells fins acomodar-se en el nivell més profund on s'estigui d'acord: hom pot no estar d'acord ni tant sols en que falti ampliar el marc euclidià, o acceptar això però discrepar de que la solució tingui a veure amb l'ús de tècniques relacionades amb la teoria de funcions matemàtiques. Poder, estant d'acord en aquest punt, pot opinar-se que la gramàtica que s'ofereix no és la forma més adient d'utilitzar les funcions. Finalment (esperem que sigui la postura majoritària!) es pot estar d'acord amb tot. Qui estigui d'acord fins un nivell però no a partir d'ell, pot partir d'aquest nivell per encetar una línia alternativa de solucions.

Ara correspon fonamentar aquesta proposta, explicar com hem arribat a ella i perquè la creiem encertada, per després començar la seva edificació de manera explícita, enumerativa i progressiva.

4.1. Metodologia.

En els primers temps de treball en el que arribaria a ser aquesta tesi, just arribat a la Escola d'Arquitectura, vaig començar a estudiar que és tot això de les corbes de Bézier, els *B-splines*, les superfícies de Coons, etc., i de la carrera ja coneixia la interpolació de Lagrange i els *splines* no paramètrics (jo prefereixo dir funcionals) interpoladors. Tots aquests mètodes tenen en comú a) l'ús d'un repertori a priori de funcions per produir l'objecte, que es pot dir que sempre són, o purament polinomis, o quocient de polinomis, per senzillesa conceptual i per economia computacional, i b) l'ús de punts o vectors i, en algunes superfícies, corbes que s'hauran produït segurament a partir de punts o vectors, subministrats per l'usuari, per determinar la forma de l'objecte. L'usuari no té perquè saber res de les funcions involucrades, només el *use it*, tot el seu paper es redueix a jugar amb els punts, moure'ls, afegir-ne, treure'n, etc., fins que la forma el satisfaci (esquema I.e6). És un joc manual; quan acaba, hom té una forma però no sap què és, no coneix el seu ADN matemàtic, que, a més, no és natural sinó sintètic, ja que sigui quina sigui la forma, sempre està format per "proteïnes" polinòmiques.

Simultàniament, més com a hobby que com a feina, i més per provar les possibilitats del software gràfic, que acabava de descobrir, que per exercitar les matemàtiques, vaig començar a aprofitar el que sabia d'equacions paramètriques per dibuixar corbes i superfícies típiques: primer el cercle; ara, amb a i b enlloc de r , surt la el·lipse; després una espiral, però introduint i variant un cert paràmetre creix més ràpid o més a poc a poc en cada volta; després una esfera, ... "i si ara poso el radi de la esfera com a funció de la latitud i la longitud...?"; les quàdriques, el torus, l'helicoide; "ara recordo com es definia el conoide: el parametrizo i el dibuixo"; "mira, amb el sinus i rectes, surt una uralita, però, desfasant el sinus d'un extrem respecte el de l'altre surt una superfície reglada guerxada que recorda la teulada de les escoles de la Sagrada Família de Gaudí"; "i si ara intento produir el perfil d'una copa?, després revolucionant-lo tindrà la copa, però ... amb quines funcions podria obtenir un tal perfil?"; i un barret de cow-boy?; i un tricorni?. Tornant a la copa, quin radi cal donar-li a la base del peu, quina alçada ...? "Fixa't, depèn dels valors que doni a aquests paràmetres, surt una copa de cava alta, una baixa, una de brandy o una de vi ...!"; i així successivament, cada cop més interessant, ara sí aprenent coses sobre parametrització que no sabia abans.

- "Ah!, però això no es fa ja amb *B-splines* o altres mètodes de disseny lliure? A més, es fa de manera més automàtica, sense haver d'escarrassar-se tant! Una cosa és parametritzar una esfera i una altra, parametritzar una motocicleta".

- "Sí, però la manera de controlar la forma és totalment diferent, ara la forma que es vol porta a triar les funcions que la produiran per la proximitat formal de la seva gràfica a la forma definitiva. És a dir, es busquen funcions que representin un ADN natural el més proper possible al de la figura que es vol

produir. En una analogia amb la música, cada instrument té un tipus de so, un timbre; per cada intenció musical del compositor hi han uns instruments que són els més adients. Usar les funcions adients per cada forma és com usar la orquestra; usar, per exemple, una corba de Bézier és com usar un equip Hi-Fi: l'altaveu sempre està fet del mateix material, només és una membrana que vibra, el que passa és que imita qualsevol so i qualsevol timbre, fa "com si" ... , però amb una mica de distorsió, és clar. Amb el nostre procediment, el control no és per punts, sinó per elecció de funcions i de paràmetres formals (altura, amplada, etc.), o sigui, el control és a baix nivell, sobre l'arrel matemàtica de la forma; és com programar en Assembler en lloc de amb Pascal".

- "Bé, però amb això podràs fer objectes fàcils, com la copa, que és molt simètrica, però com reproduir paramètricament objectes molt complicats? I, suposant que puguis, sembla molt heurístic, cada cas és un problema nou a resoldre, com automatitzar el procés, com decidir automàticament les funcions que intervindran i com hauria de ser una interfície amb l'usuari, tant còmode com el dels actuals mètodes de disseny lliure?"

- "Sí, és cert, però jo li veig interès; no sé ... la sensació de saber el que estic fent és molt diferent que quan faig servir els mètodes usuals. Tot plegat és un bon embolic!"

Ho era, i ho era perquè es cometien dos errors greus:

1) Intentar que fos un mètode per reproduir objectes ja existents. Si existeixen ja s'han dissenyat abans, perquè redissenyar-los sense saber amb quines idees van ser dissenyats? Si un objecte s'ha dissenyat per mitjà de segments i arcs, aquesta és la seva naturalesa geomètrica; perquè inventar-li un altra?

2) Pretendre que fos un mètode en competència amb els existents, és a dir, un mètode automàtic d'execució, els mecanismes interns del qual havien de quedar invisibles a l'usuari. Si es tracta d'emular la ma alçada, el traç lliure, els mètodes existents ja són prou bons i barats computacionalment parlant i, si es tracta de reproduir objectes existents, també són ideals, gràcies a la seva interfície interactiva i a que, en un objecte ja existent, la filiació matemàtica de la forma és desconeguda, com en la ma alçada, i aquí els mètodes de disseny lliure, com ja hem dit, són els més adients, no ja per pragmatisme sinó per concepte.

No va ser fins bastant temps després que vàrem veure que la dificultat estava en que tot estava barrejat. Al adonar-nos de la existència dels dos nivells, el de concepció i el d'execució, distinció que fins llavors no ens havia arribat a la consciència, vàrem veure clar que els mètodes actuals estaven ubicats en la fase d'execució i la seva finalitat principal era oferir a l'usuari una facilitat per emular el traç lliure (que la seva finalitat era aquesta tampoc ho teníem clar abans). Si el mapa és aquest, és clar que la casella que li correspon a un mètode de baix nivell, basant en jugar amb funcions i paràmetres per definir la forma, no pot ser la casella de "mètode per emular el disseny lliure en la fase d'execució del disseny" i per tant no pot estar en competència amb els N.U.R.B.S. i família. Aquí vàrem

4.1. Metodologia.

veure que aquella sensació de saber “el que estic fent” de que parlàvem i que ens feia resistir a abandonar aquesta filosofia de treball es devia a que anava molt bé per pensar formes, per controlar-les, per modular-les, és a dir, per dissenyar-les, d’una manera que no es podia fer amb la geometria euclidiana, i alhora es tractava de formes que no havien esdevingut assequibles fins l’aparició de l’ordinador, que abans no es podien realitzar. És a dir, aquesta nova manera de treballar les idees formals permet dissenyar, de manera controlada, les noves formes que la informàtica permet materialitzar.

Quins són, doncs, els trets definitoris d’aquesta filosofia funcional, els pressupostos metodològics, destil·lats d’aquest procés d’experimentació i reflexió?

En primer lloc, l’ordinador ens dóna accés a un ampli repertori de funcions, les tenim a l’abast com mai les havíem tingut, usem-les, i usem-les totes! Ja se sap que costa menys d’avaluar un polinomi (de grau petit) que un sinus, però la millora constant en la algorísmica i en la geometria computacional fa que els algorismes compilats per avaluar funcions més complexes, (per exemple, les transcendents) siguin cada cop més eficients. Si un usuari normal intenta programar un algorisme per avaluar la funció sinus mitjançant el seu polinomi de Taylor d’un grau baix, obtindrà un algorisme molt menys eficient que si usa la funció sinus implementada originalment en el software comercial. Per altra banda, l’inaturable creixement en les prestacions dels ordinadors, especialment la velocitat de procés, fa cada cop menys crítica la elecció del repertori de funcions a usar. Creiem que el que es guanya en possibilitats de fer coses compensa les ínfimes pèrdues d’optimalitat computacional.

Cal subratllar que si les formulacions precises de les corbes i superfícies de disseny (Bézier, N.U.R.B.S. ...) passen de ser ocultes a l’usuari a ser conegudes i assimilades, llavors poden entrar dins del repertori com qualsevol altre i, llavors aquests tipus de mètodes poden passar de ser eines d’execució, per emular la ma alçada, a ser elements del llenguatge funcional que proposem per regular el procés de concepció.

Un cop tenim a l’abast les funcions, cal explotar les seves possibilitats per produir formes. Cada funció té una gràfica que, com a dibuix, té una forma; cal començar coneixent-la. Però aquesta forma és massa rígida, cal treballar-la com un bonsai, introduint coeficients, permetent que variïn (llavors passen a ser paràmetres), substituint la o les variables per funcions d’altres variables, és a dir, fent composició de funcions, etc. En definitiva, cal explotar totes les combinacions i “barreges” entre funcions, res de limitar-se a combinacions lineals de bases finites de funcions “fàcils”. En els mètodes usuals de C.A.G.D., les funcions estan fixades i l’usuari només juga amb punts. En la geometria euclidiana, es tracta d’articular pedaços de segments i d’arcs. Aquí es tracta de jugar amb les funcions i els coeficients, manipular-les com argila abstracta, com un enginyer que calibra, ajusta i articula les peces d’una maquinària, en la que

cadascuna té una tasca concreta i calculada dins del conjunt i la seva acció es coordina amb cura amb la de les demés peces per obtenir un funcionament precís de tot l'aparell. O com un químic o un cuiner que tria els compostos, les dosis i la manera de combinar-les en funció de l'efecte que vol produir, afinant en successives etapes de prova, de manera artesanal, molt intuïtiva al principi i amb criteris més racionals a mesura que augmenta l'experiència. Al cap i a la fi, el domini sobre quines funcions estan intervenint, quins paràmetres són els significatius i quina acció està exercint cadascú proporciona al dissenyador un gran poder, a un nivell molt profund, en el control de la forma i en el procés de disseny, apart de permetre dissenyar no un objecte sinó catàlegs sencers d'ells, amb un nombre infinit, continu, d'elements, només variant (modulant, com en un sintetitzador de so) els paràmetres precisos.

Tal com ja fan els mètodes de disseny lliure, la representació preferida per una corba o superfície serà la paramètrica (figura I.13), és a dir, aquella en la que les coordenades de l'objecte són funcions d'un o dos paràmetres, segons els cas, els quals, en variar dins certs dominis i a través de les dites funcions, produeixen tots els seus punts. A través de les equacions paramètriques és com entraran en joc les possibilitats formals implícites en les funcions. Es clar que el cas no paramètric n'és un cas particular quan alguna equació paramètrica és la identitat. Tanmateix, disposar d'equacions paramètriques per un objecte geomètric obre la porta a la potència dels càlculs diferencial, integral i variacional i a la geometria diferencial per obtenir informacions sobre longituds, àrees, volums, tangències, geodèsiques, etc.

Aquí cal fer una observació-definició per evitar un possible mal entès: la paraula paràmetre s'usa en dues accepcions diferents i per tant pot dur a confusió.

Definició 4.1. Hi han els paràmetres que acabem de dir, els que, en variar, van “fabricant” els punts d'un objecte per mitjà de les seves equacions paramètriques. Podríem anomenar-los “**paràmetres proteics**”. Per altra banda, estan els paràmetres que intervenen com a coeficients (que poden variar) dins d'una expressió; la expressió, amb paràmetres, identifica una família d'objectes (pensis, per exemple, en la equació cartesiana reduïda d'un hiperboloide d'una fulla, aquí els paràmetres són els tres semieixos), cada tria de valors d'aquests paràmetres identifica un individu d'aquesta família. Aquí els paràmetres serveixen per decidir la forma concreta de l'objecte singular. Podríem anomenar-los, per tant, “**paràmetres genètics**”. En el que segueix s'usarà el concepte paràmetre en els dos sentits i, si cal, es precisarà en cada cas a quina accepció ens referim.

També, en relació a la habitual preocupació pel cost computacional, com que el que es pretén és ajudar al dissenyador a dissenyar, davant de dues formulacions de la mateixa funció o davant de dues funcions que tenen un efecte formal indistingible, cal decantar-se sempre per la que sigui més clara i més fàcil

4.1. Metodologia.

de gestionar conceptualment per l'usuari, no la que sigui més ràpida per l'ordinador.

Això també significa que, en similitud de condicions, és preferible, per una funció, la seva expressió per mitjà d'una fórmula global que una definició per casos (o per trossos), o una definició recursiva o per mitjà d'un algorisme ple de IF's, WHILE's, etc. De fet, el concepte modern de funció és una substancial millora respecte el dels segles XVII i XVIII, que identificava funció amb fórmula, però, com passa a vegades, aquest èxit pot haver produït un acomodament que porta a no exercitar-se en l'art de formular funcions. No s'ha d'oblidar que la fórmula global és com una màquina automàtica que només cal alimentar de matèria prima (valor de la variable) sense preocupar-se dels seus rangs de variació, sense haver de controlar "commutadors" de la màquina depenent del que entra, és una recepta sense disjuntives, que diu el que s'ha de fer en qualsevol cas. La fórmula "empaqueta" i guarda tota la informació de la forma a produir en molt poc espai físic (sovint menys que una taula de molts punts) i d'una manera molt significativa per aquell que coneixi l'idioma funcional. Un exemple molt ingenu d'això, només per il·lustrar-ho: $\sqrt{x^2}$ és una expressió molt més còmode de manejar per la funció $|x|$, si després ha d'entrar en un procés de combinació amb altres funcions, que la usual per casos i també és més ràpida de visualitzar. Com en aquest exemple, sovint les dades ja porten a priori la informació sobre el que s'ha de fer amb elles, no cal esperar a veure quin valor de la variable "ha sortit" per consultar una taula i decidir què s'ha de fer amb ell per avaluar la funció; si podem deixar establert a priori el que farem amb la variable surti el que surti, perquè esperar a posteriori? Perquè esperar a veure si la x és més gran o igual que zero o és més petita? Insistim en que el valor absolut només es cita com exemple; atès que sol estar implementat, cal invocar-lo tal qual, no definir-lo per part de l'usuari, d'acord amb el que hem dit. Però altres funcions més complicades no ho estaran, d'implementades; aquí és on cal optar, si és possible, per fórmules globals. Això té una altra repercussió positiva: desenvolupar l'art de formular funcions ajuda a familiaritzar-se amb elles i, per tant, a millorar la capacitat per jugar amb elles de cara al seu ús en el disseny. Així mateix, disposar de diferents expressions per una mateixa funció pot ajudar també a descobrir més propietats seves o a descobrir relacions funcionals amb altres funcions. Per exemple, la expressió

$$|\sin(x)| = \sin\left(x + \mathbf{p}\left[\frac{x}{\mathbf{p}}\right]\right)$$

relaciona el sinus, la part entera i el valor absolut. Recordis que volem dissenyar formes, llavors sovint estarem fent "representació funcional de gràfiques": serà la gràfica la que portarà a buscar la funció; si tenim diferents expressions que donen

la mateixa gràfica, podem triar la que més convingui. Com es recordarà, el capítol 1 ja està inspirat en aquesta voluntat de cercar formulacions globals i el capítol 2 en treu profit.

De tot això es desprèn que, òbviament, i en contra de les tendències dominants, el mètode que estem introduint, si es vol utilitzar amb aprofitament, apel·la al desenvolupament d'un art, d'una habilitat en el seu ús i, per tant caldrà un aprenentatge que involucrarà familiaritzar-se amb les funcions matemàtiques i la seva implicació gràfica, no és un mètode fàcil, per usuaris que només vulguin saber el *use it*: què han d'entrar i què els hi sortirà i per als quals el nucli de l'aplicació gràfica és una caixa negra (fet que no els preocupa). Però si nosaltres no sabem fer anar (o fins i tot desconeixem) allò que fa anar l'eina que usem, mai l'aprofitarem del tot. Ho hem de dominar més que ella. És com la fotografia: qui no es vulgui preocupar, que compri una màquina automàtica: ella li enfocarà per ell, li decidirà l'obertura segons la llum, etc. i sortiran fotografies de cap de setmana prou bones, que ningú ho dubti. Però qui vulgui extreure totes les possibilitats d'una bona cambra, qui vulgui fer autèntica "literatura" en el llenguatge fotogràfic i no només "xerrades" de cafè, haurà d'aprendre fotografia i usar una cambra manual. Per suposat, el que resulta fatal és usar la cambra manual sense tenir-ne idea! També és més còmode i quasi sempre suficient el canvi de marxes automàtic en els cotxes, però qui domina el tema pot controlar millor un cotxe si pot decidir ell mateix quina marxa ha d'anar en cada moment. En suma, que calgui un aprenentatge no és sorprenent: cada codi, cada llenguatge, ho requereix. També calia aprendre geometria euclidiana per ser delineant de regle i compàs i seguirà fent falta, perquè no s'ha de deixar de saber el que ja es sabia. El cost de l'aprenentatge, però, es compensarà amb un domini superior del procés de disseny de formes mitjançant un ordinador.

Un cop fixats els criteris sobre els que s'assentarà el mètode, veiem quina és la estratègia, el procediment operatiu concret, que hem triat per dur-lo a terme.

4.2. Estratègia.

El nostre projecte consisteix en construir un “llenguatge”, un “idioma”, que tingui les funcions com a símbols mínims (“lletres”) i les equacions paramètriques dels objectes com a oracions, junt amb una “gramàtica” per regular la combinació dels símbols. L’ús de les paraules idioma, lletres i gramàtica és només per analogia, per evocar un context, el lingüístic, que té similituds formals amb el procediment que aquí descriurem. Per exemple, el que aquí anomenarem “gramàtica” no dirà el que és correcte o incorrecte, només proposarà regles, vies sistemàtiques, per combinar les funcions, per no haver d’improvisar de zero cada cop. Concretant, el procediment s’articula, de menys a més, en els següents passos:

- Partir d’un repertori de funcions-base que s’obtingui de l’usual en qualsevol programa de dibuix i/o de càlcul, ja que aquestes són les “peces” (les “lletres”) disponibles, les que es poden invocar pel seu nom i podem suposar optimitzades en la seva implementació. Per exemple, les potències, les funcions trigonomètriques, hiperbòliques, exponencial, logarítmica, valor absolut, part entera, signe, etc. Aquest repertori de funcions “en brut”, representa “l’alfabet” del nostre llenguatge. Si algú pensa que són poques lletres, pot recordar tot el que es porta fet amb només dues, el segment recte i l’arc de circumferència.

- Introduir en elles paràmetres “de la forma” (paràmetres genètics segons la definició 4.1) que modulin la forma de la gràfica de cada funció a l’estil d’un *tunning*, de manera que ja no es té una funció sinó una forma, una forma modulable per uns paràmetres que, si bé són numèrics, han de tenir valor semàntic, significació en termes geomètrics (per exemple, altura, amplada, inclinació, període, pendent en un extrem, etc.). Cada forma modulable és una “paraula”. Cada “lletra” donarà lloc a diferents “paraules” segons quants paràmetres hi introduïm i a on. Per aquest sistema obtenim una primera generació de “paraules” i, per tant, un primer “vocabulari”.

- Obtenir successives generacions de “paraules” per combinació de les anteriorment disponibles, per exemple, per mitjà de:

a) Combinacions aritmètiques $(+, -, *, /, ^, \sqrt{\quad})$.

b) Composició de funcions (per exemple, $\sin(\log(1 + x^2))$).

c) Explotació de les dependències funcionals entre elles per obtenir noves expressions i combinacions.

Amb això es pot ampliar indefinidament el vocabulari, ara amb una mena de “paraules compostes”. Així es té com un catàleg obert de formes disponibles, un “diccionari”; obert en el sentit de que qualsevol pot dissenyar noves combinacions i afegir-les a la llista, en contraposició als mètodes de C.A.G.D., on les funcions disponibles en cada mètode formen un conjunt tancat i aliè a l’usuari. Cada paraula és una forma qualitativa, però modulable quantitativament per l’acció sobre els paràmetres semàntics.

- Confeccionar un repertori, també obert en el mateix sentit, d’operadors funcionals, funcions-eina, o, en termes lingüístics, “verbs”, que actuïn sobre les paraules del diccionari donant-ne de noves i que es puguin invocar per la descripció semàntica de l’acció que produeixen (“doblegar”, “repetir periòdicament”, “estirar”, “truncar”, “tallar i enganxar”, “arrugar”, “fer un zoom local”, etc.) i que també es puguin modular per mitjà de l’ajustament de paràmetres de control que també siguin semànticament significatius (“angle de torsió”, “període de la repetició”, “interval truncat”, etc.). Es poden definir aquests “verbs” a partir dels conceptes de moviment en l’espai, deformacions d’aquest (que són moviments dependents de cada punt), també composició de funcions, etc. Es clar que totes les transformacions afins que inclou una aplicació gràfica usual són un petit subconjunt de les que aquí s’admeten. Això introdueix una mena de “regles sintàctiques” al diccionari, donant lloc a la “gramàtica”. Cal subratllar que la mateixa fórmula matemàtica es pot haver obtingut per simple composició de funcions, o per l’acció d’un verb sobre una paraula. Serà una cosa o una altra depenent de la manera subjectiva d’abordar-la per part del dissenyador.

- Obtenir les funcions finals, les productores de la forma, les que constituïran les equacions paramètriques de l’objecte, per mitjà de la interacció entre el diccionari i els verbs (els operadors). D’aquesta manera, les formes es poden interpretar com les “oracions” o “frases” d’aquest “idioma” funcional-formal.

Observi’s com les lletres de l’idioma euclidià, el segment i l’arc, ara són oracions formades per paraules basades en funcions lineals i trigonomètriques, respectivament (recordar la figura I.12). Mentre que una superfície *B-spline*, per exemple, també és una oració amb força paràmetres geomètricament significatius: les coordenades dels punts de control; el que passa és que l’usuari no controla el funcionament intern d’aquesta oració i, per altra banda, les funcions involucrades són “neutres”, no tenen res a veure amb la forma a produir; recordis l’analogia amb un altaveu que imita una orquestra sencera.

Com es veu, aquesta estratègia permet que la construcció d’aquest idioma pugi ser, o millor, hagi de ser una tasca col·lectiva, en el sentit de que, partint d’un

4.2. Estratègia.

petit lèxic i unes poques regles sintàctiques, es pugi començar a treballar i, a mesura que es va adquirint experiència, es van enriquint ambdós per l'aportació de l'enginy de cadascun dels usuaris. Podem imaginar revistes que siguin fòrums dedicats a proposar noves combinacions i a discutir maneres de produir tal o qual forma. En aquest sentit, també es pot reconèixer un paral·lelisme amb el llenguatge natural, que evoluciona i s'enriqueix amb l'aportació de les successives generacions. Des d'aquest treball, l'única cosa que farem serà encetar l'idioma, proposant unes quantes paraules i verbs que hem anat desenvolupant fins ara, els quals, de passada, suggeriran possibles vies de continuació. Aquesta tasca recapitulativa correspon al proper capítol.

Capítol 5

Un primer joc d'elements per inaugurar la gramàtica

Fins aquí, especialment en el capítol anterior, s'ha descrit el procés de pensament que ha menat a proposar una gramàtica matemàtica pel disseny, les bases metodològiques en les que s'assenta i la estratègia per arribar a construir-la efectivament, consistent en bastir una estructura que es fonamenta en l'ús, com a lletres de l'alfabet, de les funcions matemàtiques usualment implementades en qualsevol software gràfic junt amb certes combinacions d'aquestes. A partir d'aquí, es va trenant una xarxa progressiva de funcions i d'operadors formats ambdós per combinacions de les lletres o de funcions i operadors anteriors junt amb la introducció de paràmetres formals significatius de manera que la interacció de tots aquests elements doni com a resultat les equacions paramètriques de les corbes i superfícies desitjades. Més concretament, tenim lletres, paraules, verbs (operadors) i frases o enunciats (combinacions e interaccions dels anteriors) que són el resultat final cercat. Tal com ha quedat en el capítol anterior, de moment és una estructura buida, un conjunt de prestatges; com a molt, tenim només les lletres. Però també, com s'ha puntualitzat en aquell capítol, la construcció de la gramàtica, és a dir, la feina d'omplir els prestatges, és una tasca oberta, amb vocació de col·lectiva i potencialment infinita: quan més elements de cada tipus es "fabriquin" més rica serà la gramàtica, més formes del pla i de l'espai estaran a l'abast dels dissenyadors que la utilitzin i més fàcil serà cada vegada la elaboració de noves fórmules a partir del repertori disponible, atès que aquest formarà una trama cada cop més espessa. Es pot comparar aquesta concepció del procés amb el progressiu entrellaçat de les neurones del cervell d'un nadó a mida que va madurant i aprenent.

Si és així que es tracta d'una tasca oberta i segurament inacabable, no és el cas de fer-la aquí, com qualsevol pot comprendre. Però, tanmateix, que no es

pugui completar no vol dir que no es pugui iniciar i si, per una banda, mai no pretendríem pas equiparar-nos a en Fermat en quan a talent, per un altre, tampoc volem imitar-lo en la seva vessant “faronera”: si diem que es pot fer aquesta gramàtica volem demostrar-ho inaugurant-la amb un primer repertori d’elements de tots els tipus descrits. Així doncs, en aquest capítol es precisarà una mica més la estructura de la gramàtica introduïda en el capítol anterior i es començarà la tasca d’omplir-la, de vegades amb descripcions reforçades amb exemples senzills, de vegades, especialment en el cas dels operadors, amb la presentació d’alguns artefactes que hem desenvolupat al llarg dels anys que ha durat el present treball. Això permetrà aclarir les idees i el mètode que defensem, donar pistes per la continuació de la feina, i oferir una primera versió amb suficients elements com per que ja es pugin enllestir dissenys reals, cosa que exemplificarem en el següent capítol. D’acord amb l’esquema del capítol anterior, aquesta aportació descriptiva i constructiva, pràcticament en forma de llista, d’elements a la gramàtica s’ha organitzat en els apartats de “lletres”, “paraules”, “verbs” i “frases”.

A partir d’aquí, qualsevol podrà prosseguir la tasca d’anar omplint els “prestatges” motivat essencialment per les seves necessitats alhora de dissenyar, en qualsevol direcció i amb l’única limitació de la seva imaginació. Recordis: l’objectiu és dissenyar formes sensibles usant com a guia per la seva concepció un codi de naturalesa matemàtica. La matèria primera és funcional i la manera de treballar-la és matemàtica, però, com que les possibilitats de combinació són il·limitades (tantes com les de concepció de formes), la “gràcia” en trobar millors o pitjors combinacions funcionals constituirà també un art. En definitiva, **es tracta de treballar les matemàtiques de manera artística per poder fer art de manera matemàtica**. Es tracta d’acabar amb l’abisme fals que separa l’art i la ciència, la emoció i la raó, d’anihilar les eternes i tòpiques bajanades sobre creativitat lliure, sobre fredor dels números, etc. No existeix tal dualitat i una obra humana digne de tal nom ha de contenir aportacions de les dues vessants. Aquí precisament proposem usar les dues habilitats entrelaçadament i de manera gairebé oposada a l’habitual.

5.1. Lletres.

Anomenem “gramàtica” o “llenguatge” al mètode que proposem per l’analogia formal que observem entre aquest i aquella. Es tracta d’una metàfora. En concret, l’analogia la entenem respecte d’un llenguatge escrit de tipus alfabètic perquè el punt de partida és un conjunt de símbols o caràcters, és a dir “lletres”. Seran com els tipus que el tipògraf guarda en un calaix i amb els que forma les paraules i els textos. En el nostre cas, aquest calaix de tipus serà el repertori de funcions matemàtiques que solen incorporar els programes gràfics o les aplicacions de càlcul numèric-simbòlic que inclouen capacitats gràfiques i estàndards d’intercanvi gràfic amb els primers, enriquit amb certes combinacions, com una mena de macros, d’aquestes funcions primordials. Encara que no es pot fixar a priori una fita, entenem que el conjunt de caràcters ha de ser finit; el que serà il·limitat és el nombre de possibles maneres d’introduir-els-hi paràmetres i de combinar-les. Cada lletra representa, en primer lloc, el germen d’una forma o d’un tret formal. Per exemple, el valor absolut és el germen genuí de l’aparició de vèrtexs. Però diferents lletres poden representar el germen de la mateixa forma, així les funcions sinus i cosinus, la exponencial i el logaritme. Però cal mantenir-les totes, perquè a més de ser germen de formes, també representen diferents possibilitats operatives i combinatives, més versatilitat, a part de que la seva pertinença al acerb del dissenyador permet facilitar moltes tasques. En efecte, una forma com la de la gràfica de $\log(1+x^2)$ costa bastant més de produir si no disposem de la funció logaritme.

Per ser més explícits aportarem alguns exemples, a més de dividir les lletres en dues categories: **lletres simples** i **lletres compostes**.

5.1.1. Lletres simples.

Són, estrictament, totes les que es puguin trobar implementades en algun software que sigui capaç de produir formulacions o, directament, gràfiques dins de o exportables a un entorn gràfic, i tal com estan, sense cap coeficient ni constant afegida. Això inclou totes les funcions potència (entera o real), trigonomètriques i les seves inverses locals, hiperbòliques i les seves inverses locals o globals, exponencial i logarítmica, etc. Especial menció cal fer de certes funcions clau per la producció de trets formals característics. Aquest és el cas de la funció valor absolut, germen de la forma “vèrtex”, de la funció signe, que permet produir discontinuïtats de salt aïllades, de la funció part entera, que produeix salts a intervals regulars, etc. També considerarem lletres certes funcions de dues variables que hom sol entendre com operacions binaries: ens referim, és clar, a les cèlebres quatre regles de la aritmètica, $+$, $-$, \times i \div , però també a les operacions Màx. i Min. útils per modelitzar unions i interseccions. Així mateix, cal incloure com a lletres simples funcions que no tenen una formulació tant explícita però que

bastants programes porten ben implementades; aquest és el cas de les funcions Gamma, zeta de Riemann, de Bessel, les integrals de Fresnel, que permeten dibuixar clotoïdes, etc. (figura 5.1.1).

5.1.2. Lletres compostes.

Aquí s'inclouen certes funcions, algunes de les quals definirem aquí, però que formen un conjunt en principi obert a noves incorporacions, que es formen com a combinacions poc complicades de les anteriors. En principi, es podria argumentar que és millor considera-les paraules, però les incloem com a lletres perquè no porten cap paràmetre que permeti modular la forma i, de fet, es poden considerar com a "macros" de les anteriors, petits empaquetaments que faciliten la feina. El seu principal interès està en el fet de representar gèrmens de formes o d'accions que són molt característiques i que no queden representades per cap de les altres. Moltes d'elles, al ser ja artefactes construïts a partir de lletres simples, queden subjectes a la provisionalitat de que, més endavant, puguin ser substituïdes per altres que també serveixin de germen de la mateixa forma i siguin més eficients en qualsevol sentit. La millor manera d'aclarir el sentit d'aquesta definició de lletra composta és oferir una llista de les que nosaltres hem considerat o dissenyat i que, per tant, són les que tenim en ment alhora de definir aquest concepte.

Exemples de lletres compostes:

5.1.2.1) Les funcions que podem anomenar pseudopotències i pseudoarrels. Les funcions potència x^n , $n \in \mathbb{N}$, són la base dels polinomis i, per tant, d'ulteriors aproximacions a d'altres funcions i proporcionen un repertori ampli de variacions respecte x amb diferents intensitats de creixement-decreixement, de curvatura i de concavitat-convexitat. Però la meitat d'elles són parells i l'altre senars i, si $x < 0$, no poden ser esteses a exponents no enters. De vegades cal tenir una funció parell, però que, com a corba, variï, a banda i banda del zero, com x^3 , o senar amb propietats de paràbola, o amb una variació entremig de un quadrat i un cub, etc. Per això introduïm les funcions que proposem anomenar pseudopotències, que són (figura 5.1.2):

- **Pseudopotències senars**, psp1_k : $\text{psp1}_k(x) = x|x|^{k-1}$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$, que donen corbes senars definides per tot x real i per qualsevol exponent real k . Si $k < 0$, òbviament presentaran asímptotes verticals en el zero. Evidentment, ara la continuïtat C^∞ ja no queda garantida.

- **Pseudopotències parells**, psp2_k : $\text{psp2}_k(x) = |x|^k$, $k \in \mathbb{R}$, que donen corbes parells en les mateixes condicions que les anteriors.

5.1. Lletres.

En consonància amb aquestes, es defineixen les pseudoarrels:

- **Pseudoarrels senars**, psa1_k : $\text{psa1}_k(x) = x|x|^{(1-k)/k}$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$, que retornen "l'arrel k -èsima" de qualsevol nombre real, mantenint el signe; per exemple, " $\sqrt{-4}$ " = -2 .

- **Pseudoarrels parells**, psa2_k : $\text{psa2}_k(x) = |x|^{1/k}$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, com les arrels-funció parells, però per qualsevol exponent k .

5.1.2.2) Les variants de la part entera. (figura 5.1.3). La funció part entera, $[x]$, per cada x retorna l'enter més gran que encara és més petit o igual que x . És per tant una funció que produeix discontinuïtats de salt en cada enter, amb continuïtat per la dreta. En ocasions convé disposar de variants d'aquesta, com ara les següents (la notació és nostra):

- La funció **sostre enter**: $[\bar{x}] = \text{Min}(\{n \in \mathbb{N} / n \geq x\}) = -[-x]$, contínua per l'esquerra. Aquesta funció està directament implementada en algunes aplicacions.

- La funció **pseudopart entera**:

$[\underline{x}] = \text{Max}(\{n \in \mathbb{N} / n < x\}) = -1 - [-x]$, com la part entera, però continua per l'esquerra.

- La funció **pseudosostre enter**:

$[[\bar{x}]] = \text{Min}(\{n \in \mathbb{N} / n > x\}) = 1 + [x]$, com el sostre enter, però amb continuïtat per la dreta.

D'acord, amb aquesta notació, la pròpia **part entera** podria tenir la notació $[[[x]]]$.

5.1.2.3) Les funcions periodificadores. Són funcions que serveixen de base als operadors de periodificació que definirem més endavant. Essencialment, són dues; després, ulteriors manipulacions faran més gran el repertori (figura 5.1.4):

- La funció **periodificador simple**: $\text{ps}(x) = x - [x]$. Aquesta funció, convenientment condicionada mitjançant paràmetres (és a dir, convertida en paraula) permetrà, per via de composició de funcions, repetir periòdicament una funció qualsevol definida sobre un interval I . Canviant la part entera per la pseudopart entera canviem de cantó la continuïtat en els salts.

- La funció **periodificador doble**: $\text{pd}(x) = \text{ArcCos}(\text{Cos}(x))$. Aquesta funció (que és C^0) aprofita el fet de que les funcions trigonomètriques només tenen inverses locals, per tant $\text{ArcCos}(\text{Cos}(x))$ no retorna la identitat, sinó que sempre queda dins de l'interval $[0, \mathbf{p}]$. Fets similars succeeixen amb el sinus,

la tangent, etc. En concret, aquest periodificador doble, permetrà convertir una funció definida sobre un interval I en una funció parella definida sobre I “duplicat” i després repetir-la periòdicament.

5.1.2.4) Una funció per poder empalmar amb continuïtat C^∞ amb una recta. Cal una funció tal que, en un punt, se li anul·lin totes les derivades a partir de la segona i podem partir d’una que també tingui nuls en aquest punt el propi valor de la funció i el de la primera derivada. Es tracta d’una funció que requereix un software capaç de donar valors per pas al límit amb eficàcia. Actualment aquest tipus de software no sempre està disponible i menys en un entorn gràfic, però és d’esperar que en el futur sigui més assequible. Hem triat la funció

$$\text{continf}(x) = (x)^{(\frac{1}{x})},$$

que no està definida per $x = 0$, però es pot estendre al zero per pas al límit. En el zero val zero així com totes les seves derivades i, per tant, pot empalmar-se amb continuïtat C^∞ amb la recta $x = 0$. Es pot veure la seva gràfica en la figura 5.1.5.

5.1.2.5) Les funcions de salt. (figura 5.1.6) La funció part entera proporciona un nombre infinit de salts. De vegades, cal produir només un salt. Una funció que inicialment pot anar bé és la funció “signe”, però en el zero salta de menys u a més u, prenent, a més, el valor zero. Per aconseguir que només sigui un salt, sense valors entremig, podem definir un parell de funcions de salt, una contínua per l’esquerra i l’altre per la dreta, tot jugant amb el valor absolut i la part entera. La diferència amb el signe rau en que la primera, en el zero, dóna el valor -1 , mentre que la segona dóna el valor 1 . Per tant, proposem designar-les $\underline{\text{sign}}(x)$ i $\overline{\text{sign}}(x)$:

$$\begin{aligned} - \underline{\text{sign}}(x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0; \\ -1, & \text{altrament.} \end{cases} = |[-x]| - |[1-x]|. \\ - \overline{\text{sign}}(x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ -1, & \text{altrament.} \end{cases} = |[1+x]| - |[x]|. \end{aligned}$$

És interessant observar que

$$\frac{\overline{\text{sign}}(x) - \underline{\text{sign}}(x)}{2} = \chi_0(x) \quad (\text{funció característica del punt zero}) \quad (5.1.1)$$

encara que, si està implementada, és millor usar la versió que ofereix el software.

5.1. Lletres.

Si el que es vol és produir salts que, amb període 2, vagin alternant entre 0 i 1 (és a dir, que la longitud entre dos salts consecutius sigui 1), es poden utilitzar les funcions

$$\mathbf{saltalter}_0(x) = \frac{1 - (-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2},$$

o bé

(5.1.2)

$$\mathbf{saltalter}_1(x) = \frac{1 + (-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2},$$

que juntes sumen idènticament 1, o les seves variants que resulten de prendre les de la part entera.

A vegades, cal fer transicions menys brusques, de manera que hi hagi un interval finit per produir-la. Si es vol que la transició connecti amb les rectes horitzontals, que representen els valors constants d'abans i després de la transició respectivament, amb continuïtat C^n , podem recuperar la família de funcions que va de la (2.2.14) a la (2.2.18) i usar com lletra composta la funció

$$\mathbf{trans}_n(x) = \frac{x^n}{x^n + (1-x)^n} \quad (5.1.3)$$

que representen una bijecció del quadrat $[0,1]$ amb $\mathbf{trans}_n(0) = 0$ i $\mathbf{trans}_n(1) = 1$. Per les propietats de la Proposició 2.2.2.3, aquesta funció es pot estendre a tota la recta amb valor constant zero per $t < 0$ i amb valor constant u per $t > 1$ i amb continuïtat C^{n-1} . La gràfica és anàloga a la de la figura 2.2.4 però canviant $[-1,1]$ per $[0,1]$.

Si el que cal és una continuïtat infinita, es pot usar la funció $\mathbf{continf}(x) = (x)^{(1/x)}$ que hem vist abans i que tractarem en la secció de paraules, o bé, si n'hi ha prou amb un comportament asimptòtic, es pot usar la funció tangent hiperbòlica, $\tanh(x)$, que és una lletra simple.

5.1.2.6) Funcions campana. En ocasions, cal disposar de funcions en forma de campana, que siguin diferents de zero només dins d'un cert interval. Per exemple, pot caldre per forçar a que una altra funció només actuï dins d'aquell interval, o per produir, en combinació amb altres, una partició de la unitat vinculada a una seqüència de nodes; aquest era el cas de les funcions (2.2.15) i (2.2.16) del Capítol 2. Aquestes funcions ja són paraules i ja estan definides, de

manera que una tal lletra es pot obtenir com un cas particular. Després dels càlcul oportuns, proposem la funció

$$\mathbf{campana}_r(x) = \frac{(\mathbf{s}(x))^r}{(\mathbf{s}(x))^r + (1 - \mathbf{s}(x))^r} \quad (5.1.4)$$

on $\mathbf{s}(x) = \mathbf{j}_{-1,0,1}(x) - \mathbf{j}_{0,1,1}(x) = \frac{|x-1| - 2|x| + |x+1|}{2}$. Recordis que la funció \mathbf{j} és la de la definició (1.2.3) i la figura 1.2.1. Aquí, per la Proposició 2.2.2.3, la funció “**campana**,” té continuïtat $r-1$, si r és natural.

Si es vol una continuïtat infinita, podem usar la funció $\mathbf{continf}(x) = (x)^{1/x}$ d’abans i definir

$$\mathbf{campana}_\infty(x) = \begin{cases} \mathbf{continf}(1+x) \cdot \mathbf{continf}(1-x) & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x \leq -1 \text{ o bé } x \geq 1. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

En cas que un comportament asimptòtic sigui suficient, podem usar una funció del tipus

$$\mathbf{campana}_{\text{assimp}}(x) = \exp(1 - \exp(x^2)), \quad (5.1.6)$$

la qual, és indistingible de zero llevat d’un interval. En aquest cas la dada precisa és la abscissa dels punts d’inflexió (que són simètrics). Pel cas de $\mathbf{campana}_{\text{assimp}}$, els punts d’inflexió s’han de calcular numèricament, i resulten ser, aproximadament, els punts $x_{\text{infl}} = \pm 0.776851$. Es pot considerar que, més enllà de 2.5 vegades l’abscissa d’inflexió, o, per arrodonir, a partir de $|x| > 2$, la funció és indistingible de zero a qualsevol efecte pràctic. Veure les seves gràfiques en la figura 5.1.7.

Respecte al comportament asimptòtic, sovint, a efectes de disseny, no cal un valor exacte, sinó que n’hi ha prou amb un de suficientment aproximat. Per això a vegades es pot usar una funció que tendeixi asimptòticament, per exemple, al valor zero o al u, si l’estalvi computacional compensa. Però en aquest cas, convé que aquest comportament asimptòtic sigui molt ràpid, per reduir l’error tot el que es pugui i per evitar interferències amb altres funcions. Per això introduïm funcions amb forta actuació de la funció exponencial: per exemple, preferim la

5.1. Lletres.

funció **tanh** en lloc de altres com **arctan**, o proposem la **campana**_{assimp} abans que, per exemple, la campana de Gauss o la típica $1/(1+x^2)$.

De la mateixa manera que s'han dissenyat aquestes lletres compostes, se'n poden definir d'altres quan es cregui convenient, alhora que aquestes mateixes poden ser redefinides a partir d'altres funcions elementals, a fi de millorar-les des del punt de vista computacional.

5.2. Paraules.

Les funcions que hem vist en l'apartat anterior apareixen nues de qualsevol manipulació o alteració: la funció cosinus té un període 2π i una amplitud 1; la funció sign salta només en el zero i només salta entre -1 i 1. Per això les anomenem *lletres*, només són els “dígit”, els “signes” amb els que després produïrem formes, però elles soles no permeten el joc formal, cal que entrin en la roda de combinacions amb paràmetres formals i amb d'altres funcions. Quan això s'hagi donat, tindrem **paraules**, gèrmens de formes que es podran modular a voluntat.

Des del punt de vista del dissenyador, considerem dues vies bàsiques per convertir una lletra en paraula:

1) Per introducció de certs paràmetres formals i certes constants que entrin o com a coeficients o com a sumands. Sovint es tracta de permetre transformacions afins, regulables a voluntat, tant del domini com del recorregut

i

2) Per combinació (producte, addició o composició) amb d'altres funcions. En aquest cas, les modificacions regulables del domini i/o del recorregut són més complexes.

Cal remarcar que els paràmetres i demés combinacions han d'estar disposades de manera que tinguin, en termes de repercussió formal, valor semàntic immediat per poder parlar de “paraules”; de seguida veurem un exemple d'això. Tanmateix, convé explicitar que cada lletra pot donar lloc a moltes paraules diferents, segons quins paràmetres o combinacions se li introdueixin i a on; tanmateix, sempre, per certa tria de valors pels paràmetres, ha de poder quedar la funció original, de manera que les lletres puguin ser al seu torn paraules, de la mateixa manera que, en el llenguatge comú, certes lletres també són paraules (*a* lletra i *a* preposició pròpia, *i* lletra i *i* conjunció copulativa, etc.). Aquí les possibles combinacions són il·limitades, tantes com calguin o es puguin imaginar per part d'algú; és per això que només indicarem unes poques d'entre les moltes que ja hem provat, només a títol d'il·lustració.

5.2.1) Els polinomis. Aquestes funcions són la base de la majoria de mètodes de disseny de corbes i superfícies a partir de inputs gràfics de l'usuari així com de la majoria de teoremes d'aproximació de funcions. En ser combinacions de funcions “potència” o monomis, és a dir lletres, formen part de les paraules disponibles. Però aquest és un cas exemplar del que hem dit sobre que els paràmetres han de ser formalment significatius per poder parlar d'una paraula. En efecte, un polinomi de la forma

$\sum_{i=0}^n a_i t^i$ és una combinació lineal de monomis,

5.2. Paraules.

essent els coeficients a_i els que fan de paràmetres, però són paràmetres que no informen sobre la seva repercussió exacta sobre la forma de la gràfica i per tant l'usuari no pot modular-los amb facilitat; per aconseguir un cert efecte formal, no se sap quin o quins coeficients cal modificar ni en quina magnitud. En canvi un polinomi de grau dos escrit en la forma $h \left(1 - \frac{4(t-c)^2}{a^2} \right)$ descriu que la seva

gràfica està centrada en $t = c$, té una amplitud o distància entre les dues arrels de valor a i, en el vèrtex arriba a una altura h des del eix d'abscisses (figura 5.2.1.(a)). Si el que interessa és explicitar les dues arrels t_0 i t_1 en lloc de la amplitud, així com el valor h per una abscissa concreta t_2 , es pot posar en la forma de Lagrange, és a dir $h \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}$. Aquí els paràmetres, significatius, són t_0 ,

t_1 , t_2 i h . Notis que, si prenem $t_2 = c$, $t_0 = c - a/2$ i $t_1 = c + a/2$, aquest polinomi és el mateix que l'anterior, això ens va molt bé per il·lustrar com la mateixa funció des del punt de vista matemàtic, pot tenir diferents formats a efectes del seu ús en el disseny matematitzat i, per tant, representar diferents paraules, tot depèn de quins aspectes formals de la gràfica convingui tenir explicitats en cada cas; així, en l'exemple, en un cas interessa l'abscissa en la que està centrada la paràbola i la distància entre arrels, en l'altra, les arrels directament. En general, la forma de Lagrange és una forma significativa, perquè permet explicitar totes les arrels del polinomi, així com el seu valor per una abscissa concreta, però es poden imaginar molts altres formats per un polinomi, segons el que calgui fer controlable via afinament de paràmetres.

5.2.2) Gràfiques sinusoidals regulables. Totes les funcions disponibles com a primitives (com a lletres) poden modular-se perquè passin per punts concrets, perquè tinguin el pendent o la curvatura desitjats en certs punts, etc. i de manera que aquests valors regulables a voluntat apareguin explícitament com a paràmetres en la formulació. Com exemple d'això parlarem de les sinusoidals. La funció $\sin(x)$ té període 2π i amplitud 1 fixats; és una lletra. Però a partir d'ella podem obtenir una corba sinusoidal de període i amplitud variable situada en qualsevol lloc del pla. A més hi han diferents possibles versions: pot interessar el punt d'inici, o el centre, o el nombre d'oscil·lacions dins d'un interval; pot interessar directament l'amplitud o poder convé partir del rang del recorregut, etc. Com un exemple, si volem que tingui una ona entre les abscisses a i b , recurrent entre un mínim de valor c i un màxim de valor d , podem seguir el següent procés:

$\sin(t - a)$ trasllada l'origen de la corba al punt a . $\sin\left(2p \frac{(t - a)}{(b - a)}\right)$ permet ajustar

l'oscil·lació entre a i b . $\frac{1 + \sin\left(2p \frac{(t - a)}{(b - a)}\right)}{2}$ té un recorregut entre 0 i 1. Per fi,

$$\frac{(d + c) + (d - c) \sin\left(2p \frac{(t - a)}{(b - a)}\right)}{2} \quad (5.2.1)$$

oscil·la entre c i d . Si es vol que la oscil·lació comenci i acabi en un màxim, només cal canviar la funció sinus per la funció cosinus. Aquesta es pot veure a la figura 5.2.1.(b).

5.2.3) Periodificadors regulables. En l'apartat d'operadors veurem com convertir en periòdica una funció definida en un interval $[a, b]$. Per això usarem els periodificadors que hem vist més amunt, però cal que siguin ajustables. Així, per mitjà d'un procés anàleg al de l'exemple anterior, s'arriba, per un costat, a

$$\mathbf{ps}_{a,b}(t) = t - (b - a) \left[\frac{t - a}{b - a} \right], \quad (5.2.2)$$

que és la identitat sobre $[a, b]$ i després còpia aquest tros de gràfica, amb període $(b - a)$ a banda i banda, i, per l'altra, a

$$\mathbf{pd}_{a,b}(t) = a + (b - a) \frac{\arccos\left(\cos\left(p \frac{t - a}{b - a}\right)\right)}{p}, \quad (5.2.3)$$

que és la identitat sobre $[a, b]$, retorna linealment de b fins a sobre $[b, 2b - a]$ i després ho còpia a banda i banda amb període $2(b - a)$. En ocasions, cal una variant d'aquest periodificador doble, de manera que, mentre el recorregut oscil·li encara en l'interval $[a, b]$, el període de partida sigui mixt, format per un tram creixent i un decreixent no necessàriament iguals: creixent de a fins a b entre un valor t_0 i un valor t_1 i després tornant de b fins a a entre t_1 i t_2 . Aquest cas es redueix a $\mathbf{pd}_{a,b}$ si $t_0 = a$ i $t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = b - a$. Per formular aquest

5.2. Paraules.

periodificador, construïm una poligonal que passi pels punts (t_0, a) , (t_1, b) i (t_2, a) i després la composarem amb ps_{t_0, t_2} . La poligonal és

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{t_0, t_1, t_2, a, b}(t) &= \mathbf{a}_1(t - t_1) + \mathbf{a}_2|t - t_1| + b \\ \text{on} & \\ \mathbf{a}_1 &= \frac{(b - a)}{2} \cdot \frac{(t_2 - 2t_1 + t_0)}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)} \quad \text{i} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{-(b - a)}{2} \cdot \frac{(t_2 - t_0)}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

(aquesta poligonal té a veure amb les \mathbf{j} definides en (1.2.3)). El resultat és el periodificador mixt:

$$\mathbf{pm}_{t_0, t_1, t_2, a, b}(t) = \mathbf{j}_{t_0, t_1, t_2, a, b}(\text{ps}_{t_0, t_2}(t)). \quad (5.2.5)$$

Les gràfiques dels tres periodificadors es mostren en la figura 5.2.2.

5.2.4) Salts regulables. Fàcilment es veu com

$$\overline{\text{salt}}_{t_0, a, b}(t) = \frac{(a + b) + (b - a)\overline{\text{sign}}(t - t_0)}{2} \quad (5.2.6)$$

produceix, en l'abscissa t_0 un salt discontinu entre a i b amb continuïtat per la dreta. Anàlogament es pot definir salt $_{t_0, a, b}(t)$ a partir de sign i amb continuïtat per l'esquerra. Per produir salts alternats entre a i b cada distància d a partir de t_0 , podem usar

$$\text{saltalternat}_j(t; t_0, d, a, b) = a + (b - a) \text{saltalter}_j\left(\frac{t - t_0}{d}\right) \text{ on } j = 0 \text{ o be } 1. \quad (5.2.7)$$

Les gràfiques són anàlogues a les corresponents de la figura 5.1.6 amb les adequacions òbvies.

Però a vegades, com hem dit en l'apartat de lletres, cal fer un salt menys brusc, és a dir, que la transició entre els valors a i b es produeixi progressivament (monòtonament) entre dues abscisses t_0 i t_1 i, a més amb un cert grau de suavitat o continuïtat. Això es pot aconseguir usant addicionalment el segon tipus d'acció: la composició. Amb aquesta finalitat, també del Capítol 2, recuperem la família de

funcions \bar{s}_r i $tran_{t_0, t_1, a, b, r}$ i, triant un cas particular, recuperem

$\mathbf{trans}_r(t) = \frac{t^r}{t^r + (1-t)^r}$ que és la mateixa que la (5.1.3). Per les propietats de la

Proposició 2.2.2.3 i per r natural, aquesta funció es pot estendre a tota la recta amb valor constant zero per $t < 0$ i amb valor constant u per $t > 1$ amb continuïtat C^{r-1} . Del Capítol 1 prenem les funcions lineals a trossos definides en l'apartat 1.2.2. i formulades en termes del valor absolut en les fórmules (1.2.3); més explícitament, prenem

$$\mathbf{j}_{t_0, t_1, 1}(t) = \frac{(|t - t_0| - |t - t_1| + t_1 - t_0)}{2(t_1 - t_0)}, \quad (5.2.8)$$

que passa de zero a u entre t_0 i t_1 . Amb aquestes dues funcions, formem la funció

$$\mathbf{rampa}(t; t_0, t_1, a, b, r) = a + (b - a) \mathbf{trans}_r(\mathbf{j}_{t_0, t_1, 1}(t)). \quad (5.2.9)$$

Les gràfiques de la figura 2.4 són d'aquesta família amb $t_0 = a = -1$, $t_1 = b = 1$. Pel cas de necessitar continuïtat infinita, podem usar la funció **campana** $_{\infty}$ definida com a lletra composta: primer definim

$$\mathbf{trans}_{\infty}(t) = \frac{\int_{-1}^t \mathbf{campana}_{\infty}(u) d(u)}{\int_{-1}^1 \mathbf{campana}_{\infty}(u) d(u)}, \quad (5.2.10)$$

que passa de 0 a 1 entre -1 i 1 i després només cal definir

$$\mathbf{rampa}(t; t_0, t_1, a, b, \infty) = a + (b - a) \mathbf{trans}_{\infty}\left(\frac{2t - (t_0 + t_1)}{t_1 - t_0}\right). \quad (5.2.11)$$

Veure la figura 5.2.3.

5.2.5) Funcions característiques. A partir del que hem vist al parlar de lletres, podem expressar la funció característica de qualsevol punt de \mathbb{R} com

$$\chi_{t_0}(t) = \frac{\overline{\mathbf{sign}(t - t_0)} - \mathbf{sign}(t - t_0)}{2}.$$

Anàlogament, (5.2.12)

$$\chi_{[t_0, t_1]}(t) = \frac{\overline{\text{sign}}(t - t_0) - \overline{\text{sign}}(t - t_1)}{2}$$

i, jugant amb la continuïtat per la dreta o l'esquerra de les dues versions de **sign**, podem obtenir la funció característica d'interval obert, obert per la dreta i tancat per l'esquerra, etc. Per exemple $\chi_{[t_0, t_1)}(t) = \frac{\overline{\text{sign}}(t - t_0) - \overline{\text{sign}}(t - t_1)}{2}$.

Això es correspon amb la noció de funció característica de la lògica clàssica. Si es volen versions difuses, podem aprofitar el paràgraf anterior. Sigui

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{trans}_r(\mathbf{j}_{t_0, t_1, 1}(t) - \mathbf{j}_{t_2, t_3, 1}(t)) \quad (5.2.13)$$

on r marca la suavitat de la corba resultant, en els termes que ja hem indicat. $\mathbf{m}(t)$ és un conjunt difús tal que val zero fora de l'interval $[t_0, t_3]$ i val u dins del $[t_1, t_2]$ essent monòtones les transicions. Amb \mathbf{trans}_∞ , es pot fer una versió C^∞ . Veure figura 5.2.4.

5.2.6) Particions de la unitat. Les funcions $s_i(t)$ de la formulació (2.2.15) a (2.2.17) del Capítol 2, que són funcions dels tipus $\mathbf{m}(t)$ per $t_0 = t_{i-1}$, $t_1 = t_2 = t_i$ i $t_3 = t_{i+1}$, representen particions de la unitat (encara que no del tipus C^∞) lligades a una seqüència de nodes t_i . Usant les funcions $\chi_{[t_0, t_1]}(t)$ o similars, o les $\mathbf{m}(t)$ de l'apartat anterior (fins i tot la versió amb continuïtat infinita), aquestes per una seqüència d'interval amb els trams de transició convenientment encaixats, obtenim també una partició de la unitat, nítida o difusa respectivament, vinculada als interval donats. Veure figures 2.2.3, 2.2.7, 2.2.8 i 5.2.4.

Dins de "verbs quirúrgics" tractarem, parcialment, el cas de dimensió superior a 1.

Bastants d'aquests exemples, com ara els periodificadors, les funcions característiques, etc. intervindran més com a verbs operadors que com a elements formals, però s'han inclòs aquí perquè els tipus de manipulacions que els hi hem fet són plenament representatives de les que volíem il·lustrar i, ahora, ja els tenim introduïts pel següent apartat. Al cap i a la fi, com en qualsevol gramàtica, els verbs no són més que un tipus particular de paraules, amb un caràcter especial. Però, com tots els exemples que hem posat, se'n poden posar una infinitat d'altres, tants com situacions de disseny es puguin donar. Aquestes paraules sovint no donaran lloc directament a corbes (que, per tant, haurien de ser gràfiques de funcions) sinó que poden constituir les funcions components dins d'una

formulació paramètrica d'una corba o superfície. Així, en una espiral arquimèdiana, apareixerien com a paràmetres el pas de volta, el desfasament inicial, etc.; en un el·lipsoide, els paràmetres formals serien els semieixos i, en una ulterior aplicació d'operadors, es podrà girar i traslladar, etc., etc.

Respecte les paraules que es poden formar usant composició de funcions, sovint és més natural concebre-les com generades per l'acció d'un operador (un verb) sobre una paraula anterior, per tant és millor passar a aquest apartat.

5.3. Verbs.

Per poder parlar d'un llenguatge cal que aquest contingui alguna classe de coses que expressin cada acció possible. Vist en termes de la elaboració d'un mètode per guiar la concepció del disseny, de base funcional, convé que certes manipulacions, transformacions, composicions de funcions, etc. siguin pensades, i quedin sintetitzades apart, com accions que es fan sobre una forma més senzilla produïda abans. D'aquesta manera el procés de concepció queda més estructurat, les idees queden millor ubicades entre elles i, a més, es pot disposar llavors d'un repertori d'accions que estan formulades a priori i que són independents de la forma sobre la que s'aplicarà. Es podria, no obstant, pensar-ho tot com manipulacions per obtenir paraules noves a partir d'altres, però això portaria a un magma desorganitzat d'idees i a un constant partir de quasi zero. Treballar amb ordre, per passos senzills i jerarquitats, sempre és millor que voler-ho fer tot al mateix temps, en un sol pas. En definitiva, hem decidit introduir el concepte d'operador, que en termes lingüístics anomenarem *verb* i que en els principis anomenàvem *funció-eina*. Es tracta també d'un repertori obert de funcions de una, dues o tres variables, que interactuen de diferents maneres amb les funcions que modelitzaven una forma prèvia a fi de modificar-la d'una manera que sigui **significativa** en termes de la repercussió formal de la dita modificació i **explícita** en termes de la manera d'intervenir i dels paràmetres que calgui ajustar. Respecte la expressió "...interactuen de diferents maneres..." no veiem raó perquè aquestes maneres es donin en nombre finit, però, a partir de la nostra experiència, tots els operadors que hem imaginat es poden agrupar en cinc tipus, diguem-ne purs, més un corresponent als operadors que són combinació de diversos dels anteriors. Aquests sis grups, tot i no ser exclusius, poden donar la pauta de com classificar tots els que es puguin afegir. Encara menys motiu hi ha per considerar que el propi nombre d'operadors o verbs sigui finit: tot queda obert a la imaginació de qualsevol que es posi a treballar amb aquest mètode. Per altra banda, aquests verbs, que representen un tipus d'acció amb contingut semàntic quasi manual, es concreten forçosament per mitjà de funcions matemàtiques, però el que és important és l'acció; la particular formulació funcional que aquesta prengui cal considerar-la provisional: sempre algú pot trobar una nova expressió funcional que faci el mateix de manera més eficient. És com el tren: l'important és l'acció de transportar persones i mercaderies, i això, al principi es resolvia, entre altres coses, usant màquines de vapor, però l'important no era que la màquina fos de vapor; ara són elèctriques en la seva majoria i demà no se sap. Per tot això, el que farem aquí, com en apartats anteriors, és donar una llista d'alguns dels que hem produït nosaltres mateixos, a tall d'exemple i d'inici, agrupats en els sis tipus que hem mencionat i que són:

- **Verbs genètics per mutació.** Actuen sobre el domini, alterant la variable.
- **Verbs quirúrgics.** Actuen sobre el recorregut, alterant la imatge, pel que també es podrien anomenar **epidèrmics**.
- **Verbs ambientals.** Actuen sobre la gràfica o la forma, deformant l'espai ambient.
- **Verbs dinàmics.** Actuen sobre la gràfica o la forma, per moviments (no necessàriament constants en tot l'espai).
- **Verbs genètics per encreuament.** Actuen per combinació (interpolació, juxtaposició, etc.) de formes anteriors.
- **Verbs compostos.** Combinen més d'un dels altres.

Un cop més, cal recalcar que aquesta classificació està feta pensant en el punt de vista del dissenyador, en els seus usos i la seva manera de pensar les accions que fa i, en aquest sentit, fins i tot una mateixa funció pot ser en un moment un operador d'un tipus i en un altre moment un d'un altre tipus; des del punt de vista matemàtic, diversos d'aquests tipus es confonen o interseccionen fortament.

Passem a detallar i exemplificar cadascun d'ells.

5.3.1. Verbs genètics per mutació.

El seu nom ve suggerit pel fet de que produeixen una mutació en una forma o germen de forma al alterar el seu "codi genètic" (en la variable, dins del domini). En efecte, si tenim un objecte del tipus $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, la mutació consisteix en introduir una transformació en el domini del tipus $\vec{x} = \vec{g}(\vec{u})$, així, al fer la substitució dins de la variable, obtenim $\vec{y} = \vec{f}(\vec{g}(\vec{u}))$, que és l'objecte "mutat".

Exemples.

Per il·lustrar els següents exemples usarem com a gràfica un fragment d'una serpentina de Newton tal com es pot veure en la figura 5.3.1.

5.3.1.1) Periodificadors. Aquests operadors serveixen per convertir en periòdica una funció definida sobre un interval. La periodificació donarà una funció continua o no depenen de si ho és la original i de si pren o no el mateix valor en els extrems. Anàlogament per la continuïtat d'ordre superior. Utilitzarem les "paraules" periodificadores $\mathbf{ps}_{a,b}(t)$ i $\mathbf{pd}_{a,b}(t)$ o $\mathbf{pm}_{t_0,t_1,t_2,a,b}(t)$ de 5.2.3). La particular acció de cada periodificador queda il·lustrada en la figura 5.3.2.

Concretament, sigui $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Llavors:

- a) $f \circ \mathbf{ps}_{a,b}$ dóna la funció f repetida $(b-a)$ -periòdicament, a partir de a .
- b) $f \circ \mathbf{pd}_{a,b}$ dóna la funció f estesa de forma parell a les dues bandes de l'interval $[a,b]$ i després repetida $(2(b-a))$ -periòdicament. (5.3.1)
 Ara, multiplicant per funcions que alternin el signe entre 1 i -1, es poden produir noves modalitats de periodificadors; els alternadors provindran de paraules del tipus $\mathbf{saltalternat}_1(t; t_0, d, -1, 1)$ (veure paraules):
- c) $\mathbf{saltalternat}_1(t; a, (b-a), -1, 1) \cdot (f \circ \mathbf{pd}_{a,b})$ dóna la funció f estesa de forma senar a les dues bandes de l'interval $[a,b]$ i després repetida $(2(b-a))$ -periòdicament.
- d) $\mathbf{saltalternat}_1(t; a, 2(b-a), -1, 1) \cdot (f \circ \mathbf{pd}_{a,b})$ dóna la funció f estesa primer de forma parell a la dreta i, el resultat, estès de forma senar a l'esquerra de l'interval $[a,b]$ i després repetida $(4(b-a))$ -periòdicament.
- e) $\mathbf{saltalternat}_1(t; (2a-b), 2(b-a), -1, 1) \cdot (f \circ \mathbf{pd}_{a,b})$ dóna la funció f estesa primer de forma senar a la dreta i, el resultat, estès de forma parell a l'esquerra de l'interval $[a,b]$ i després repetida $(4(b-a))$ -periòdicament. (5.3.2)

Aquests tres darrers, en incorporar el producte per alguna versió de $\mathbf{saltalternat}$, són també operadors quirúrgics, perquè aquest producte actua sobre la gràfica. Per tant, haurien d'anar a l'apartat de verbs compostos, com la versió paramètrica de la periodificació, però els mantenim aquí per no trencar el grup, creant dispersió en els conceptes. Dins de verbs compostos oferim una versió de periodificadors pel cas de corbes paramètriques a l'apartat 5.3.6.3).

Canviant el periodificador \mathbf{pd} pel \mathbf{pm} es poden obtenir variants de la periodificació on els trams "parells" no siguin de la mateixa longitud que els "senars" ni aquestes dues longituds iguals a la del tram de funció f que s'hagi periodificat. Per exemple, $f \circ \mathbf{pm}_{t_0, t_1, t_2, a, b}$ periodifica el tram de la gràfica de f corresponent a l'interval $[a, b]$, però en la gràfica resultant, aquest tram apareix traslladat i escalat a l'interval $[t_0, t_1]$, mentre que una còpia simètrica d'aquest tram s'acomoda sobre l'interval $[t_1, t_2]$ i, finalment, és tot l'interval $[t_0, t_2]$ el que és repeteix periòdicament (veure també la figura 5.3.2)

5.3.1.2) Verbs per tallar i suprimir horitzontalment. Es tracta de suprimir intervals de la gràfica d'una funció $f(t)$ a base de tallar pels dos extrems de cada interval i després enganxar els trossos de gràfica que quedin. En tenim dos d'operadors d'aquesta mena (figura 5.3.3), el que suprimeix un sol interval i el que suprimeix periòdicament:

- a) Tallar i suprimir un únic interval $[t_0, t_1]$ i enganxar, en t_0 , els dos trossos de gràfica que han quedat: La funció $t + \overline{\text{salt}}_{t_0, 0, t_1 - t_0}(t)$ representa la identitat amb una discontinuïtat de salt cap amunt de longitud $t_1 - t_0$ en el punt t_0 , per tant, la gràfica de

$$f\left(t + \overline{\text{salt}}_{t_0, 0, t_1 - t_0}(t)\right) \quad (5.3.3)$$

serà igual a la de $f(t)$ fins a t_0 , però a partir d'aquest punt seguirà com la gràfica de $f(t)$ que hi havia a partir de t_1 . Si f era contínua, la continuïtat només es preservarà, lògicament, si $f(t_0) = f(t_1)$.

- b) Tallar i suprimir, comptant des de t_0 , intervals de longitud d_s , amb període d (distància, en les abscisses, entre punts de “sutura” en la gràfica resultant): Aquí es tracta d'alterar el domini no amb un salt sinó amb salts periòdics, un dels quals comenci en t_0 . Aquesta alteració es pot fer amb el “sostre enter” que hem vist en les “lletres”; es tracta de

fer $t + d_s \left[\left[\frac{t - t_0}{d} \right] \right]$ i llavors la gràfica amb les supressions desitjades és la de la funció

$$f\left(t + d_s \left[\left[\frac{t - t_0}{d} \right] \right]\right). \quad (5.3.4)$$

5.3.1.3) Verbs per tallar i desplaçar horitzontalment. En aquest cas, també es tracta de tallar en certs punts la gràfica d'una funció $f(t)$, però ara, en lloc de suprimir intervals, el que es vol és desplaçar la gràfica una certa distància cap a la dreta en cada tall. També tenim dues versions, la de tall únic i la de tall periòdic, que es poden visualitzar a la figura 5.3.4.

- a) Tallar en un únic punt t_0 i desplaçar la gràfica que queda a la dreta fins un altre punt $t_1 > t_0$ unint les dues parts per una recta horitzontal: Es tracta de produir, en el domini, la mateixa alteració en la funció identitat. Per això comptem amb les funcions poligonals de salt que hem vist en el Capítol 1, les \mathbf{j} definides en (1.2.3). Com que $\mathbf{j}_{t_0, t_1, t_1 - t_0}(t)$ salta linealment de 0 a $t_1 - t_0$ entre t_0 i t_1 , sent constant 0 o

$t_1 - t_0$ respectivament a banda i banda d'aquest interval, llavors la funció $t - \mathbf{j}_{t_0, t_1, t_1 - t_0}(t)$ és la identitat fins a t_0 , després presenta una línia horitzontal fins a t_1 i després segueix com una recta a 45° . Així l'acció de tallar i desplaçar la gràfica de f consisteix en fer

$$f\left(t - \mathbf{j}_{t_0, t_1, t_1 - t_0}(t)\right). \quad (5.3.5)$$

- b) Tallar, comptant des de t_0 , cada d (distància entre punts de tall, abans de tallar) i desplaçar, en cada tall, una distància d_d cap a la dreta: Considerem primer el cas $d_d = d$. Aquí, per produir els desplaçaments horitzontals en la identitat, en lloc de les funcions \mathbf{j} , necessitem les del tipus $\arccos(\cos(t))$ que hem anomenat, entre les lletres, com $\text{pd}_{a,b}$, però oscil·lant entre 0 i d . En efecte, aquí ni ha prou en fer

$$f\left(\frac{t - (\text{pd}_{t_0, t_0+d}(t) - t_0)}{2}\right). \quad (5.3.6)$$

Pel cas $d_d \neq d$, el problema és més complicat, atès que, en les funcions $\text{pd}_{a,b}$, els intervals on són ascendents i on són descendents tenen igual longitud; aquí l'operador adient és el periodificador mixt $\text{pm}_{t_0, t_1, t_2, a, b}$. De manera anàloga als dos casos anteriors, es tracta d'alterar la identitat en el domini de manera que, ara, de $t_0 - d$ a t_0 , es mantingui la identitat, de t_0 fins a $t_0 + d_d$ sigui constant igual a t_0 , de $t_0 + d_d$ a $t_0 + d_d + d$ torni a ser creixent a 45° i després cal repetir indefinidament aquesta forma esglaonada a banda i banda. Si en el cas $d_d = d$ substituïm la variable t per una combinació lineal entre t i $(\text{pd}_{t_0, t_0+d}(t) - t_0)$, ara es tracta de fer-ne una entre t i $\text{pm}_{t_0, t_0+d_d, t_0+d_d+d, 0, d_d}(t)$. Després dels oportuns càlculs, es pot comprovar que l'acció de tallar i desplaçar periòdicament, ve modelitzada per la funció composta

$$f\left(\left(\frac{d}{d_d + d}\right) \cdot \left(t - \text{pm}_{t_0, t_0+d_d, t_0+d_d+d, 0, d_d}(t)\right)\right). \quad (5.3.7)$$

5.3.1.4) Verbs per expandir i contraure horitzontalment (locals). Donada una funció real f , definida en un domini prou ampli, i un punt t_0 de l'interior del

domini, es tracta d'expandir o contraure la gràfica de f en un entorn d'aquest punt, en el sentit de que, dins d'aquest entorn, els punts de coordenades $(t, f(t))$, passin a punts de coordenades $(t', f(t))$, on t' estigui més lluny o més a prop, respectivament, de t_0 del que ho estava t , essent $(t_0, f(t_0))$ un punt fix dins del procés. De fet aquest és l'efecte aparent que es busca; en realitat, al actuar sobre el domini, si el que es vol és un efecte d'expansió (alternativament, contracció), vol dir que si a l'abscissa t abans li corresponia una ordenada $f(t)$, ara li ha de correspondre una que sigui $f(t')$ per certa t' que està més a prop (alternativament, més lluny) de t_0 del que ho estava t . A més, la deformació s'ha d'atenuar al apropar-se als extrems de l'entorn. Això es pot aconseguir alterant el domini d'una manera que, qualitativament, ha de tenir l'aspecte que es veu en la figura 5.3.5 (el cas (a) per la expansió i el (b) per la contracció). Anomenarem *defloc* una funció amb aquesta gràfica. Per tant, restant la identitat, cal produir una corba *osc* (per oscil·ladora) del tipus de la figura 5.3.6, la qual, multiplicada per una constant negativa i afegida a la identitat, produeix l'efecte d'expansió i, per una de positiva, el de contracció. El valor absolut de la constant regula, a més, la intensitat de la deformació. Ara només cal produir la dita funció *osc*.

Presentarem dues modalitats, una exacta, on l'entorn en el que es produeix la deformació queda fixat amb precisió, i una de asimptòtica, en el que la deformació decreix asimptòticament cap a zero i l'entorn de deformació es defineix amb vaguetat com aquell en el que la deformació és apreciable. Aquesta imprecisió pot ser greu matemàticament, però pot ser perfectament vàlida des del punt de vista del disseny, i més si tenim en compte que, a canvi, es disposa de funcions més senzilles i més suaus.

- a) **Versió exacte:** Sigui $(t_0 - d, t_0 + d)$ l'entorn on es produeix la deformació. Prenem una funció campana *camp* que sigui alguna de les exactes entre les tractades a 5.1.2.6), amb continuïtat $r-1$ o infinit respectivament, segons s'ha vist llavors. El suport d'aquestes funcions és l'interval $(-1, 1)$. Llavors, la funció

$$\text{oscil}(t) = t \cdot \text{camp}(t) \quad (5.3.8)$$

produeix una oscil·lació dins el mateix suport. La funció $\text{osc}_{t_0,d}(t) = \text{oscil}\left(\frac{t-t_0}{d}\right)$ oscil·la dins l'interval desitjat, o sigui, el $(t_0 - d, t_0 + d)$. Aleshores, una funció del tipus $t + \text{osc}_{t_0,d}(t)$ té la classe de gràfica que volem per *defloc*, però cal poder graduar la intensitat de la deformació, això s'aconsegueix afectant *osc* per una constant, com hem dit. En aquest sentit, cal fer notar que convé que la funció *defloc*

sigui monòtona creixent, que no tingui trams de pendent negativa, per assegurar la bijectivitat de la deformació del domini i evitar així “arrugues” (inflexions) imprevistes i probablement no desitjades en la gràfica final, la de la f resultant que es cercava. És fàcil veure que, per la forma de la gràfica de osc , la condició que cal imposar per a tal fi és que $osc'_{t_0,d}(t_{infl}^+) \geq -1$ (on t_{infl}^+ és el punt d’inflexió positiu de osc , el de derivada menor), perquè llavors, al sumar-li la identitat, el pendent romandrà no negatiu. Però $osc'_{t_0,d}(t_{infl}^+)$ és un valor concret, no es pot regular i a més depèn també de t_0 i de d . Per arreglar això podem formar la funció $\frac{-d}{oscil'(t_{infl_0}^+)} osc_{t_0,d}(t)$ (on $t_{infl_0}^+$ és el punt d’inflexió positiu de la “lletra” $oscil$): d’aquesta manera, tant el punt d’inflexió com la derivada, es calculen d’una vegada per sempre sobre la funció-base o “lletra” $oscil$ (només depèn de la campana triada, així la quantitat $oscil'(t_{infl_0}^+)$ és constant per cada mètode) i, per qualsevol t_0 i d , sumada a la identitat, arriba a tenir pendent zero en el punt d’inflexió positiu. Finalment la deformació regulable que cercàvem es pot definir com

$$defloc_{t_0,d,k}(t) = t + k \cdot \frac{-d}{oscil'(t_{infl_0}^+)} osc_{t_0,d}(t). \quad (5.3.9)$$

D’aquesta manera, independentment de t_0 i d , la variació de k des de “cap deformació” fins “deformació límit abans de no-bijectivitat” és sempre de 0 a 1, si la deformació és contractora, i de 0 a -1, si és expandidora. En quan a la quantitat $oscil'(t_{infl_0}^+)$ només cal calcular-la un cop, depenent de la campana “camp” triada. En el cas de **campana $_{\infty}$** , calculat numèricament, surt $t_{infl_0}^+ \approx 0.56745576$ i $oscil'(t_{infl_0}^+) \approx -0.853499138$.

Pel que fa al cas de les campanes basades en el tipus **campana $_r$** , depèn de r i el seu càlcul queda facilitat per la següent proposició.

Proposició 5.3.1. La funció $oscil(t) = t \cdot camp(t)$ té un únic punt d’inflexió en l’interval obert $(0,1)$ si i només si $r > 1$ i llavors correspon a l’abscissa $t_{infl_0}^+ = \frac{(r+1)^{(1/r)}}{(r+1)^{(1/r)} + (r-1)^{(1/r)}}$. Si $0 < r \leq 1$, el pendent mínim de $oscil(t)$ es dona per $t = 1$.

Demostració. Com que considerem només l'interval $(0,1)$, per simplificar els càlculs, (recordar la fórmula (5.1.4), on es defineix **campana**_{*r*}) podem aprofitar que $\mathbf{s}(t)|_{(0,1)} = 1-t$ i llavors

$$\mathbf{campana}_r(x)|_{(0,1)} = \frac{(1-t)^r}{(1-t)^r + (t)^r}.$$

Derivant dos vegades respecte t i igualant a zero, per trobar els punts d'inflexió, i, tenint en compte que ni r , ni $1-t$, ni t s'anul·len, s'arriba a la condició $\frac{1}{r} = \frac{t^r - (1-t)^r}{t^r + (1-t)^r} = \mathit{tran}_{0,1,-1,1,r}(t)$ segons la definició (2.2.18). Com que el recorregut de $\mathit{tran}_{0,1,-1,1,r}(t)$ és $[-1,1]$ i $r > 0$, això només té solució si $0 \leq \frac{1}{r} \leq 1 \Rightarrow 1 < r$.

Per resoldre aquesta equació quan $r > 1$, només cal invertir $\mathit{tran}_{0,1,-1,1,r}(t)$ respecte t i trobar la imatge de $1/r$. Pel corol·lari 2.2.2.6, la inversa és $\mathit{tran}_{-1,1,0,1,1/r}(t)$; només cal avaluar per $t = 1/r$ per obtenir el resultat enunciat. En cas que $0 < r \leq 1$, no hi ha punt d'inflexió a $(0,1)$ i, per la concavitat de $\mathit{oscil}(t)$ (veure figura 5.3.6 i observis que osc no és més que una transformació afí de oscil), el pendent segueix disminuint fins a l'extrem 1.

Amb aquesta proposició, es pot tenir implementada una funció que calculi $t_{infl_0}^+$ i avaluï en aquest punt la derivada de oscil per cada valor de r .

- b) **Versió assimp tòtica:** És molt similar a l'anterior, però aquí es parteix de la funció **campana**_{*assimp*}. Si ara $(t_0 - d, t_0 + d)$ és l'interval fora del qual la deformació ha de ser inapreciable, hem de fer correspondre aquest interval amb l'interval $(-2, 2)$, fora del qual és inapreciable la funció **campana**_{*assimp*} original, com s'ha comentat al definir-la. D'entrada, definim aquí la *camp*, amb el mateix paper que la del paràgraf anterior, com $\mathit{camp}(t) = \mathbf{campana}_{assimp}(2t)$: aquesta és inapreciable fora de $(-1, 1)$. Llavors, a partir d'aquí, com abans, $\mathit{oscil}(t) = t \cdot \mathit{camp}(t)$; $\mathit{osc}_{t_0,d}(t) = \mathit{oscil}\left(\frac{t-t_0}{d}\right)$ i, finalment,

$$\text{defloc}_{t_0,d,k}(t) = t + k \cdot \frac{-d}{\text{oscil}'(t_{\text{infl}_0}^+)} \text{osc}_{t_0,d}(t), \text{ com a (5.3.9)}$$

essent aquí, $t_{\text{infl}_0}^+ \approx 0.486931286$ i $\text{oscil}'(t_{\text{infl}_0}^+) \approx -0.8013661565$. El factor k té el mateix paper.

5.3.1.5) Verbs per expandir i contraure horitzontalment (periòdics). Aquí també es tracta de produir una expansió o contracció però no en l'entorn d'un sol punt sinó en l'entorn d'una seqüència de punts, comptant des d'un punt t_0 i separats una distància d , que és el període; així, els punts d'aquesta seqüència, que són de la forma $t_0 + kd$, $k \in \mathbb{Z}$, són fixos. Si la deformació en aquests punts és expansiva, forçosament en els punts intermedis, de la forma $t_0 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)d$, $k \in \mathbb{Z}$, també fixos, s'ha de produir una compressió i viceversa, si en els primers és contractiva, en els segons ha de ser expansiva. Seguint amb la notació del paràgraf anterior, ara, en lloc de *defloc* hem de parlar de *defper* i les funcions *defper* i *osc* han de tenir l'aspecte que s'observa en la figura 5.3.7 ((a) i (b) respectivament). La funció **sinus** és una perfecta candidata per produir les oscil·lacions requerides per *osc*. Només cal graduar-la segons hem vist en l'apartat 5.2.2): $\text{osc}_{t_0,d} = \sin\left(\frac{2\mathbf{p}}{d}(t - t_0)\right)$. Clarament, aquí els punts d'inflexió, els que són crítics per la preservació de la bijectivitat, són els citats punts intermedis. En ells cal mesurar la derivada primera i explicitar-la al marge de la constant k que regularà la intensitat de la deformació. En resum, i seguint el paral·lelisme amb els deformadors locals precedents, tenim

$$\text{defper}_{t_0,d,k}(t) = t + k \cdot \frac{-d}{\text{oscil}'(t_{\text{infl}_0}^+)} \text{osc}_{t_0,d}(t), \text{ on } t_{\text{infl}_0}^+ \text{ és qualsevol dels punts intermedis } t_0 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)d, k \in \mathbb{Z}. \text{ Però ara podem precisar més el valor de } \text{oscil}'(t_{\text{infl}_0}^+), \text{ que és } -2\mathbf{p}, \text{ i, finalment, podem establir el deformador com}$$

$$\text{defper}_{t_0,d,k}(t) = t + k \cdot \frac{d}{2\mathbf{p}} \cdot \sin\left(\frac{2\mathbf{p}}{d}(t - t_0)\right). \quad (5.3.10)$$

La interpretació i valors de variació de la constant k són els mateixos que en el paràgraf anterior.

5.3.2. Verbs quirúrgics.

Hem decidit anomenar-los així perquè la seva acció recau sobre la imatge de la funció sobre la que actuen enlloc de sobre el seu domini, com era el cas anterior. La seva manera d'actuar és com una cirurgia estètica sobre el recorregut de la funció. Pel fet d'actuar sobre la imatge també els hi és escaient el nom d'epidèrmics. Més precisament, si tenim un objecte del tipus $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, l'acció quirúrgica consisteix en introduir una transformació en el recorregut del tipus $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y})$, així, al fer la composició, obtenim $\vec{z} = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$, que és l'objecte "operat". Cal fer notar que és evident que, des del punt de vista matemàtic, l'estructura funcional dels verbs genètics per mutació i la dels quirúrgics és la mateixa: en els dos casos es tracta de fer composició de funcions. Això permet subratllar un cop més que el criteri que guia tot el procés és el de donar prioritat a la vessant subjectiva del dissenyador, al qual va dirigit tot el treball i, en conseqüència, la distinció entre aquests dos tipus de verbs en dues classes separades està justificada pel fet de que es pensen com dues accions diferents: la fórmula final és equivalent, però no és el mateix pensar que s'està actuant sobre el domini que pensar que s'està actuant sobre el recorregut perquè el pensar en una acció o l'altre té implicacions en la manera com canalitzem el fluir de les idees sobre el que s'està dissenyant. Aquesta argumentació s'aplica per justificar l'establiment de la resta de classes de verbs.

Els verbs quirúrgics admeten còmodament una interpretació en termes d'operadors funcionals: Si tenim un determinat espai E de funcions reals de variable real, un verb quirúrgic no és més que una aplicació $e: E \rightarrow E$ $f \mapsto e(f)$. En general, com hem dit, aquesta aplicació consistirà en compondre "per l'esquerra" amb una altra funció.

Exemples.

5.3.2.1) Funcions característiques i particions de la unitat. Dins de paraules ja els hem tractat pel cas de la recta. Aquí tractarem el cas d'espais de dimensió superior, atès que, en certs casos convindrà que la gràfica o la imatge de certes funcions o l'acció d'altres verbs, tots de diverses variables, quedi confinada a una certa regió o, en el cas de combinacions de formes, que veurem més endavant, caldrà fer transicions entre formes, predominant cadascuna dins d'una regió. Si es volen transicions brusques, cal una formulació clàssica (0 ó 1), mentre que si cal suavitat, haurà que disposar de versions difuses. Llavors l'acció quirúrgica consistirà a multiplicar la funció original per una funció característica o les funcions a combinar pels elements d'una partició de la unitat (no necessàriament del tipus C^∞). Com que els conjunts poden ser molt complexos, només

5.3. Verbs.

proposarem solucions pensades pel disseny per certs casos. Per casos arbitraris, remetem a la bibliografia sobre particions de la unitat (per exemple, Spivak 82; Hicks 74; Warner 83) o sobre funcions de pertinença (per exemple, Ross 95).

En referirem a punts i conjunts de \mathbb{R}^n (cal pensar que serà $n = 2$ ó 3). Els punts els denotarem per \vec{x} , per no haver de variar cada cop la notació segons el nombre de coordenades. Seguirem un paral·lelisme amb el cas d'una variable.

Cas 1. Funció característica d'un punt \vec{x}_0 . N'hi ha prou en definir

$$c_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = 1 - \text{sign}(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|). \quad (5.3.11)$$

Cas 2. Funció característica d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$, fitat, tal que la seva vora ve donada per una equació cartesiana del tipus $F(\vec{x}) = k$, amb $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (sempre es pot normalitzar F perquè k sigui 0), i amb el signe arreglat de tal manera que l'interior $\overset{\circ}{A}$ és el conjunt de punts on F és més gran que k . Llavors

només cal definir $c_{\bar{A}}(\vec{x}) = \frac{1 + \text{sign}(F(\vec{x}) - k)}{2}$ o bé

$$c_A(\vec{x}) = \frac{1 + \text{sign}(F(\vec{x}) - k)}{2}, \quad (5.3.12)$$

segons es vulgui que sobre la frontera valgui 1 o 0 respectivament.

Cas 3. Funció característica difusa. Aquí A és un conjunt definit com abans per una equació cartesiana $F(\vec{x}) = k$ per a la vora i una inequació $F(\vec{x}) > k$ per a l'interior, però ara es vol que la transició entre el valor 1 a l'interior i el 0 a l'exterior sigui més suau, tingui una "frontera ample" per produir-se. Si definim $A_F(\mathbf{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / F(\vec{x}) \geq \mathbf{a}\}$, tenim $\bar{A} = A_F(k)$ i, per la definició de F , $A_F(k_2) \subseteq A_F(k_1)$ sempre que $k_1 \leq k_2$. Amb això, per produir una transició suau, escollirem dos valors k_1 i k_2 de manera que $k_1 < k < k_2$. Per exemple, si $k = 0$, podem triar cert valor $\mathbf{e} > 0$ i definir $k_1 = -\mathbf{e}$ i $k_2 = \mathbf{e}$. Es tracta de definir una funció que valgui 1 a $A_F(k_2)$ i 0 a $(A_F(k_1))^c$. Per això, aprofitarem el material que teníem per una variable, a l'apartat de paraules (veure apartat 5.2.4) i fórmula (5.1.3)). Seguint la notació d'aleshores, només cal definir la funció característica difusa de A , definida per F i supeditada a la banda (k_1, k_2) amb suavitat r , com

$$\mathbf{m}_{A_F(k),(k_1,k_2),r}(\vec{x}) = \text{trans}_r(\mathbf{j}_{k_1,k_2,1}(F(\vec{x}))). \quad (5.3.13)$$

Veure un exemple en la figura 5.3.8.

Cas 3b. Cas particular, quan A és un rectangle (o millor dit, un hiperrectangle, si estem a una dimensió qualsevol). En aquest cas, A és un producte cartesià d'interval unidimensionals (segments) i llavors podem definir la seva funció característica per combinació de les de cada segment i això ja està fet a paraules. Si A_i és el segment corresponent a la i -èssima coordenada dels punts de A i, per la transició suau el tenim encaixat entre dos intervals, diguem-ne $[x_{i,1}, x_{i,2}] \subset A_i \subset [x_{i,0}, x_{i,3}]$, definim, com s'ha fet a paraules, $\mathbf{m}_i(x) = \text{trans}_r(\mathbf{j}_{x_{i,0},x_{i,1},1}(x) - \mathbf{j}_{x_{i,2},x_{i,3},1}(x))$. Com que la pertinença a A correspon a un AND de la pertinença de cada coordenada al seu interval, la combinació de pertinences a cada segment coordinat es pot modelitzar per una t -norma. A efectes de suavitat i altres aspectes relacionats amb el Cas 5, creiem que la més adient és la t -norma producte. Així doncs, si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, resulta

$$\mathbf{m}_A(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{m}_i(x_i). \quad (5.3.14)$$

Veure figura 5.3.9.

Cas 4. Partició de la unitat quan es té un domini D i un subconjunt A contingut al seu interior (de manera que la clausura de A encara és interior a un tancat contingut a l'interior de D). Aquí només tenim A i $D \setminus A$. Per tant, n'hi ha prou en prendre una funció característica de A , sigui \mathbf{m} , per la component de A , i $1 - \mathbf{m}$ per la component de $D \setminus A$. Aquest és el cas que s'usa en l'exemple que s'inclou a 5.3.5, dins de combinacions de formes (apartat 5.3.5.3, cas b)). En la figura 5.3.10 veiem un exemple on D és un rectangle i A és la superfície tancada per una superel·lipse continguda a l'interior de D .

Cas 5. Partició de la unitat quan el domini D és un hiperrectangle particionat al seu torn en un "enrajolat" d'hiperrectangles (es pot pensar en una típica tauleta de xocolata). Aquest enrajolat, projectat sobre cada eix de coordenades, dóna una seqüència de nodes $x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,m_i}$. D és el producte cartesià dels intervals $[x_{i,0}, x_{i,m_i}]$, mentre que les "rajoles" són els productes cartesianes dels intervals $[x_{i,j_{i-1}}, x_{i,j_i}]$, és a dir, $A_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_{i,j_{i-1}} \leq x_i \leq x_{i,j_i}, i = 1, \dots, n \}$. Els nodes els convertim en difusos, menys els extrems: per cada $x_{i,j}$, llevat de $j = 0$ i de

$j = m_i$, definim $x^-_{i,j}$ i $x^+_{i,j}$, de manera que $x^-_{i,j} < x_{i,j} < x^+_{i,j}$ i que les “bandes difuses” no s’ensolapin, o sigui, $x^+_{i,j} \leq x^-_{i,j+1}$. Això dóna lloc, per cada “rajola”, a una mena d’aura recobridora entorn seu, l’hiperrectangle que té com aresta j -èssima el segment $(x^-_{i,j-1}, x^+_{i,j})$, i a una mena d’aura interna, continguda dintre seu, l’hiperrectangle que té com aresta j -èssima el segment $(x^+_{i,j-1}, x^-_{i,j})$. El conjunt d’aures recobridores forma un recobriment de D tal que, per cada rajola, l’aura interna és disjunta amb la reunió d’aures recobridores de totes les demés rajoles. Doncs bé, només cal prendre, per cada rajola, la seva funció característica, com s’ha vist al Cas 3b i a la figura 5.3.9, de manera que valgui 1 dins de la seva aura interna i zero fora de la seva aura recobridora; ens referim a funcions del tipus $\mathbf{m}_{A_{j_1, j_2, \dots, j_n}}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{m}_{i, j_i}(x_i)$, on $\mathbf{m}_{i, j_i}(x_i)$ és del tipus $\mathbf{m}(t)$ de 5.2.6)

(particions de la unitat) lligats a la seqüència $\{x^-_{i, j-1}, x^+_{i, j-1}, x^-_{i, j}, x^+_{i, j}\}$. La partició de la unitat és la col·lecció d’aquestes funcions característiques. Per cada coordenada, cal prendre el mateix grau de suavitat r_i per totes les rajoles. El que hem fet és, per cada coordenada, una partició de la unitat unidimensional segons hem explicat a l’apartat de paraules i després les hem combinat per mitjà d’una t -norma, en aquest cas, el producte. Del següent lema se’n desprèn que aquestes funcions constitueixen efectivament una partició de la unitat (no necessàriament del tipus C^∞).

Lema 5.3.2. Siguin D , A_{j_1, j_2, \dots, j_n} i $\mathbf{m}_{A_{j_1, j_2, \dots, j_n}}(\vec{x})$ com s’acaben de definir.

Aleshores si, per cada i , $\sum_{j_i=1}^{m_i} \mathbf{m}_{i, j_i}(x_i) \equiv 1 \quad \forall x_i \in [x_{i,0}, x_{i, m_i}]$, llavors la suma de tots els $\mathbf{m}_{A_{j_1, j_2, \dots, j_n}}(\vec{x})$ dóna idènticament 1 per tot $\vec{x} \in D$.

Prova. Es tracta simplement d’escriure-ho:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \mathbf{m}_{A_{j_1, j_2, \dots, j_n}}(\vec{x}) &= \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{m}_{i, j_i}(x_i) \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j_i=1}^{m_i} \mathbf{m}_{i, j_i}(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n 1 \equiv 1. \end{aligned}$$

En altres paraules, com que, per cada coordenada, la suma de $\mathbf{m}_{i, j}$ dóna idènticament 1, al fer productes, per distributivitat, surt efectivament una partició de la unitat sobre D vinculada al recobriment per les aures recobridores del enrajolat.

A l’apartat 6.2 veurem exemples de trames produïdes com imatges d’una trama rectangular al aplicar-li una transformació del pla en sí mateix. Si aquesta

transformació és bijectiva i, per tant invertible, podem produir particions de la unitat vinculades al enrajolat imatge, **ja no rectangular**. Només cal produir una partició com la del paràgraf anterior sobre la trama origen i compondre-la amb la transformació del pla. La seva generalització a dimensions superiors no ofereix cap dificultat addicional.

5.3.2.2) Plegadors. La versió de partida és la següent: Donada una funció $f(t)$, funció a plegar (figura 5.3.11(a)), i una constant a , valor “vora” o “frontissa”, es tracta de plegar la gràfica de la f entorn de la recta $y = a$, en principi **cap amunt**, és a dir, la part de la gràfica de la f que està per damunt del valor a queda igual i és la que estava per sota la que es plega. Després generalitzarem aquest primer cas. El “truc” és molt senzill: es tracta de “baixar” f una altura a , fer “valor absolut” i tornar a pujar. En fórmula:

$$[\text{plec}_a^+(f)](t) = a + |f(t) - a|.$$

És clar que si el que es vol és un plec “cap avall”, només cal fer

$$[\text{plec}_a^-(f)](t) = a - |f(t) - a|.$$

Ara podem fer generalitzacions d'aquests dos operadors:

- i) Es pot substituir la “vora” constant del plec per una de variable, definida per la gràfica d'una funció $g(t)$. Tindrem llavors (figures 5.3.11(b) i (c))

$$[\text{plec}_{g(t)}^+(f)](t) \text{ i } [\text{plec}_{g(t)}^-(f)](t). \quad (5.3.15)$$

- ii) Es pot plegar la gràfica de f compresa entre dues vores: plegar cap avall respecte una vora superior g_s i cap amunt respecte una vora inferior g_i , fent cada un dels dos plects **només un cop**. Evidentment, la coherència del resultat dependrà de que efectivament les vores que consten respectivament com superior i inferior ho siguin realment, és a dir $g_s(t) > g_i(t)$ per tot t . En aquest cas, només cal aplicar successivament els dos plects, en el ben entès de que l'ordre no és indiferent: es tracta de fer, per exemple,

$$\left[\text{plec}_{g_i(t)}^+ \left[\text{plec}_{g_s(t)}^-(f) \right] \right]. \quad (5.3.16)$$

Amb aquesta formulació, és evident que, si la part de f que estava per sota de g_i després de plegar cap amunt passa de llarg de g_s , ja no es plega més; per això parlavem de que aquest cas feia els plects només un

cop. Això pot ser bastant insatisfactori per la qual cosa convé construir un operador que faci tants plecs com calgui fins que tota la gràfica de f quedi confinada entre les dues vores. Aquesta serà la següent generalització.

iii) Com en el cas anterior, es tracta de plegar entorn de dues vores, una superior i una inferior, però ara s'ha de seguir plegant cap avall i cap amunt respectivament fins que tota la gràfica de f quedi entre les dues vores. Malgrat la similitud "manual" amb els casos anteriors, el recurs matemàtic per fabricar un tal operador serà bastant diferent, atès que no podem aplicar indefinidament els plecs anteriors: sortiria una funció monstruosa i a més no està clar com establir un bon criteri automàtic per decidir quan s'ha de parar. Per elaborar aquest operador començarem fent $g_i(t) \equiv 0$ i $g_s(t) \equiv 1$, després canviarem 0 i 1 per dues constants a i b i llavors no costarà gens passar al cas general. Sigui, doncs, $g_i(t) \equiv 0$ i $g_s(t) \equiv 1$ i sigui un valor $k = f(t_0)$, per no importa quin t_0 . Cal decidir a quin lloc entre 0 i 1 ha d'anar a parar aquest k . Per això, el que farem, en lloc de plegar k , és desplegar indefinidament l'interval $[0, 1]$. El valor k queda entre $[k]$ i $[k+1]$ ($[\cdot]$ = "part entera"). Es veu que el tractament, quan pleguem serà diferent si $[k]$ és parell o senar, perquè cada plec canvia l'orientació (cap amunt o cap avall) de la part de pla que s'ha plegat. Llavors podem quedar-nos amb la resta de k mòdul 2: $k - 2[k/2]$; així queda un valor entre 0 i 2, que cal plegar cap avall un cop més entorn de 1 si és més gran que 1 i deixar-ho com està altrament. Però per això només cal aplicar plec $^-$:

$[\text{plec}_{0,1}^\infty(f)](t_0) = 1 - |(k - 2[k/2]) - 1|$. Si es vol que la banda de plec sigui entre a i b ($a < b$) en lloc de entre 0 i 1, només cal prendre com unitat $(b-a)$, traslladar la gràfica de a fins a 0, plegar i després tornar a portar de 0 a a . De tot això resulta

$$[\text{plec}_{a,b}^\infty(f)](t_0) = b - |(k - b) - 2(b - a) \cdot [(k - a)/(2(b - a))]|$$

Finalment, podem retornar a $f(t)$ i a $g_s(t)$ i $g_i(t)$ qualssevol i obtenim

$$[\text{plec}_{g_i(t),g_s(t)}^\infty(f)](t) = g_s(t) - \left| (f(t) - g_s(t)) - 2(g_s(t) - g_i(t)) \cdot \left[\frac{f(t) - g_i(t)}{2(g_s(t) - g_i(t))} \right] \right| \quad (5.3.17)$$

Es pot veure una il·lustració en la figura 5.3.11(d).

Observacions: 1) Si no volem preocupar-nos sobre el compliment a tot arreu de la condició $g_s(t) > g_i(t)$, podem prendre $a(t) = \text{Min}(g_i(t), g_s(t))$

i $b(t) = \text{Màx}(g_i(t), g_s(t))$. 2) Si es trunca la funció part entera, amb un verb lllindar, que veurem en el següent apartant, entre dos valors determinats, de manera que el nombre de salts passi a ser finit, es pot fixar a voluntat el nombre màxim de plecs.

5.3.2.3) Truncadors o verbs-llindar. Són semblants als anteriors, en el sentit de que aquí també i ha una o dues vores superiors i/o inferiors, del tipus $g_s(t)$ i $g_i(t)$, sols que ara aquestes vores no fan de línia de plec sinó que ara faran de lllindar, és a dir, la funció “operada” f quedarà truncada per aquestes vores. Com abans, anirem del cas més simple fins el més general.

i) Un únic lllindar constant. Si $g_s(t) \equiv b$, l’operador-llindar

$[I_b^+(f)](t) = \text{Min}(b, f(t))$ trunca o escapça la gràfica de f per sobre del valor b . Anàlogament, si $g_i(t) \equiv a$, l’operador-llindar

$$[I_a^-(f)](t) = \text{Màx}(a, f(t)) \text{ trunca per sota del valor } a. \quad (5.3.18)$$

ii) Un únic lllindar qualsevol (figura 5.3.11(e)). Respecte el cas anterior, permetent que les funcions vora puguin no ser constants, tenim, de manera natural,

$$[I_{g_s(t)}^+(f)](t) \text{ i } [I_{g_i(t)}^-(f)](t). \quad (5.3.19)$$

iii) Doble lllindar o banda (figura 5.3.11(f)). Podem definir directament el cas general, tenint dues vores $g_s(t)$ i $g_i(t)$. Només cal aplicar els dos truncaments successivament. Tenim dues possibilitats:

$$[I_{g_i(t), g_s(t)}^{-,+}(f)](t) = [I_{g_s(t)}^+ [I_{g_i(t)}^-(f)]](t) = \text{Min}(g_s(t), \text{Màx}(g_i(t), f(t)))$$

o bé

$$[I_{g_i(t), g_s(t)}^{+,-}(f)](t) = [I_{g_i(t)}^- [I_{g_s(t)}^+(f)]](t) = \text{Màx}(g_i(t), \text{Min}(g_s(t), f(t))).$$

(5.3.20)

Allà on $g_s(t) > g_i(t)$ aquest dos operadors són idèntics; en canvi en els trams on $g_s(t) < g_i(t)$, el primer dona permanentment $g_s(t)$ mentre que el segon dona permanentment $g_i(t)$. Per tant, si els lllindars s’han triat en coherència amb el seu paper respectiu de superior i inferior, les dues opcions d’operadors banda són equivalents.

5.3.2.4) Desplaçadors locals (paramètrics). L’objectiu d’aquest verb és simular l’acció de “pinçar” un objecte en un punt i estirar-lo fins un altra punt, de

5.3. Verbs.

manera que l'efecte d'aquesta acció s'atenuï amb la distància al punt “pinçat”. Veurem primer el cas d'una corba i comentarem després la seva generalització a superfícies.

Sigui $\vec{J}(t)$ una corba en l'espai i sigui $\vec{P} = \vec{J}(t_p)$ el punt de la corba per cert valor t_p del paràmetre. Es vol desplaçar aquest punt fins un altre punt \vec{Q} de l'espai, arrossegant un cert interval de corba. Llavors no cal més que definir $\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P}$ i prendre la “lletra” **campana*** més adient segons la continuïtat i la localitat desitjada (veure 5.1.2.6). La “lletra” es converteix en “paraula” fent **campana*** $\left(\frac{t-t_p}{r}\right)$; ara és una campana centrada en t_p i d'abast (interval on es manifesta algun desplaçament) r enlloc de 1. L'acció de desplaçar el punt \vec{P} es redueix a definir la nova corba

$$\vec{y}(t) = \vec{J}(t) + \vec{v} \cdot \text{campana}_*\left(\frac{t-t_p}{r}\right). \quad (5.3.21)$$

(veure figura 5.3.12). Pel cas bidimensional, sigui $\vec{S}(s, t)$ una superfície i $\vec{P} = \vec{S}(s_p, t_p)$ el punt d'ella que volem desplaçar fins un altre punt \vec{Q} de l'espai. Definim \vec{v} i triem una funció campana com abans. Prenem també una distància en el pla de paràmetres segons la forma que convingui a la vora de la zona d'abast del desplaçament, per exemple, una del tipus

$$d_n((s_1, t_1), (s_2, t_2)) = \left(\left| \frac{s_2 - s_1}{a} \right|^n + \left| \frac{t_2 - t_1}{b} \right|^n \right)^{1/n}. \quad (5.3.22)$$

En aquest cas, la zona que sofreix algun grau de desplaçament té forma de superel·lipse amb semieixos d'abast de mides a i b , centrada en \vec{P} . Amb tot això, només cal definir

$$\vec{V}(s, t) = \vec{S}(s_p, t_p) + \vec{v} \cdot \text{campana}_*\left(d_n((s, t), (s_p, t_p))\right). \quad (5.3.23)$$

A més dels verbs quirúrgics que acabem de desenvolupar, podem definir uns quants més tant sols aplicant mimèticament a la imatge d'una certa funció f alguns dels operadors que abans hem definit com “genètics per mutació” pel fet d'estar aplicats a la variable. No és que tots els verbs genètics i els quirúrgics

siguin intercanviables amb naturalitat, però uns quants d'ells sí que ho són. En aquests casos intercanviables, però, l'efecte de cada operador és contrari segons s'apliqui a la variable o a la imatge: per exemple, el mateix operador que aplicat a la variable és “contractor”, aplicat a la imatge és “expandidor”, el que en un cas “talla i desplaça”, en l'altre “talla i suprimeix”, etc. Entre aquests operadors intercanviables podem incloure els següents, la formulació dels quals no incloem per ser una simple transposició a la $f(t)$ del que abans fèiem sobre la t , amb el pertinent intercanvi per la inversió d'efectes que hem comentat:

5.3.2.5) Verbs per tallar i suprimir verticalment.

5.3.2.6) Verbs per tallar i desplaçar verticalment.

5.3.2.7) Verbs per expandir i contraure verticalment (locals).

5.3.2.8) Verbs per expandir i contraure verticalment (periòdics).

5.3.3. Verbs ambientals.

Els operadors d'aquesta família actuen sobre un objecte construït anteriorment d'una manera que es pot entendre com indirecta, atès que el que fan és deformar o transformar l'espai ambient on viu l'objecte, arrossegant aquest en la deformació. D'una manera més formal, un verb ambiental és una transformació $\Delta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on $d = 2$ ó 3 , segons es tracti d'un disseny pla o espacial. Com que un objecte A el podem entendre com un cert subconjunt de punts del seu espai ambient, el resultat de l'acció de Δ sobre l'objecte no és més que el nou subconjunt $\Delta(A)$, format pels transformats de tots els punts de A . No és estrictament necessari que Δ sigui injectiva i menys encara bijectiva, però cal tenir present aquest aspecte, per evitar plecs de l'objecte sobre sí mateix o, fins i tot, pèrdua de dimensió, en cas que no es desitgin efectes d'aquesta mena. A diferència dels verbs dinàmics que comentarem més endavant, s'entén que un verb ambiental actua un cop i el resultat és la imatge de l'objecte original.

Exemples.

5.3.3.1) Transformacions afins. Són les transformacions més senzilles i conegudes i cal que estiguin en un llistat com aquest, però no és la nostra intenció desenvolupar-les aquí. Només recordarem que inclouen totes les aplicacions lineals i, a més, les translacions i combinacions d'unes i altres. Casos especialment cèlebres són les cisalladures, les transformacions equiformes (escalats) i totes les isometries (girs, simetries i simetries rotacionals, a més de les translacions). Respecte les isometries, el seu efecte només és el d'un moviment rígid de la figura i, per tant el seu interès poder consisteix en poder produir un

5.3. Verbs.

objecte en una posició “estranya”, a base de produir-lo en una posició “fàcil” respecte els eixos i després moure’l fins la seva ubicació final.

5.3.3.2) Inversió. Es tracta també d’un tipus de transformació força conegut. Es tracta d’invertir una figura A respecte un centre d’inversió O amb una potència d’inversió k ($k \neq 0$, si volem que tingui sentit pràctic); és a dir, en fórmula vectorial, per cada punt $P \in A$, el seu transformat és el punt

$$P' = I_{O,k}(P) = O + \left(\frac{k}{\|P - O\|^2} \right) \cdot (P - O). \quad (5.3.24)$$

Quan $k > 0$, es pot definir el *radi d’inversió* com $r = \sqrt{k}$. Es tracta d’una transformació conforme i, per tant, conserva els angles, encara que no la forma, i permet produir efectes interessants, difícils de definir de manera directa, a partir de formes senzilles. Per exemple, pel porisme de Steiner (Coxeter 71), podem produir un “polígon” de circumferències tangents cadascuna a l’anterior i a la següent i totes elles a dues, una interior i l’altre exterior, no concèntriques com es veu a la figura 5.3.13.

5.3.3.3) Canvis de coordenades. Un cop més, es tracta de transformacions força conegudes, però és convenient incorporar-les explícitament a aquesta llista, perquè, habitualment, quan hom pensa en canvis de coordenades ho fa en contextos que no són precisament els d’operadors que deformen objectes. En canvi, en certs problemes de disseny, poden ser molt útils. Només dos exemples: Una forma com la de la figura 5.3.14(b) pot ser difícil de parametritzar directament; en canvi, “desplegada” com una sanefa, és una corba sinusoidal. Es pot, doncs, prendre una funció sinus o cosinus, convenientment escalada i traslladada (figura 5.3.14(a)), com ja hem vist a 5.2.2, i passar-la a **coordenades polars**. La parametrització d’una girola de catedral pot ser resultar, d’entrada, inabordable, però, si podem parametritzar un element lineal de nau (i sí que podem, veure capítol 6), passant-lo a **coordenades cilíndriques** i, si cal, poligonitzant (veure verbs compostos), la podem obtenir. Veure les figures del §6.4.4. El canvi a **coordenades esfèriques** és també sovint d’utilitat.

5.3.3.4) Arrugador. També es podria anomenar, amb més precisió però menys concisió, “productor d’irregularitats generalitzades”. Es tracta de construir una transformació l’efecte de la qual sigui provocar per tot arreu deformacions, variables segons cada punt i petites en relació a l’objecte sobre el que s’actua, de manera que, tot i ser determinista, doni sensació de ser aleatori; d’aquí s’obté la impressió de que s’ha arrugat o millor “abonyegat” un objecte que prèviament

era molt més suau. Com que només es vol arrugar, no “soldar” ni “aixafar”, cal que sigui una transformació almenys injectiva. Per produir un tal efecte hem dissenyat un operador inspirat inicialment en l’art cinètic de Vasarely i després millorat amb conceptes obtinguts del món de les sèries de Fourier. Primer elaborarem el cas bidimensional i, a partir d’aquest, el de tres dimensions.

Partim de la transformació identitat dins del pla, $(\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)) = \text{Id}(x, y) = (x, y)$, que equival a la identitat en cada component. Ara, si alterem cada identitat amb una funció periòdica en la mateixa variable, quelcom del tipus $\bar{x}(x, y) = x - k \sin(x)$; $\bar{y}(x, y) = y - k \sin(y)$, es produeix un efecte de teixit escocès com el de la figura 5.3.15 (la missió de k és garantir la bijectivitat de la transformació i, per a això, cal que $-1 \leq k \leq 1$, però, a efectes de l’operador arrugador, la prendrem sempre no negativa; en la figura anterior, $k = 2/3$. Si el que es vol és dissenyar trames, es pot prendre k negatiu o, fins i tot, de valor absolut més gran que 1. Per altra banda, encara no hem introduït tots els habituals paràmetres de disseny. Per fi, actuem sobre la funció periòdica alteradora amb una funció també periòdica en l’altra variable, de manera que l’alteració sigui completa en certs llocs i nul·la en d’altres. La formulació en brut és $\bar{x}(x, y) = x - k \cdot \sin(x) \cdot \sin^2(y/2)$; $\bar{y}(x, y) = y - k \cdot \sin(y) \cdot \sin^2(x/2)$ i el resultat és una trama que recorda certs dissenys de Vasarely com es pot comparar en les dues imatges de la figura 5.3.16..

Arribats aquí recordem que $\sin^2(u/2) = 1/2 - (1/2)\cos(u)$ i definim, provisionalment,

$$\text{def}_1(u) = \sin(u) \quad \text{i} \quad \text{def}_2(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(u),$$

així que podem escriure

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y) = x - k \cdot \text{def}_1(x) \cdot \text{def}_2(y) \\ \bar{y}(x, y) = y - k \cdot \text{def}_1(y) \cdot \text{def}_2(x) \end{cases} \quad (5.3.25)$$

i observar que def_1 i def_2 no són més que casos particulars i molt senzills de sèries de Fourier. Una manera, doncs, d’obtenir un “arrugador” més general, amb més irregularitats, consisteix en permetre que def_1 i def_2 siguin sèries de Fourier arbitràries (almenys en principi). D’entre totes les possibilitats que s’obren, nosaltres proposem una gamma concreta. Per evitar un excés d’operacions, només afegirem un “harmònic” més a cada sèrie. Atenent al paper de cada sèrie en la producció de la deformació del disseny de la figura 5.3.16, convé que def_1 sigui una suma de “sinus” mentre que def_2 ho sigui de “cosinus” més una constant. Per preservar la periodicitat, que permet un millor control, convé que el segon “harmònic” tingui una freqüència múltiple enter de la principal, però que aquest

5.3. Verbs.

múltiple no sigui massa baix (per exemple, 2) ni massa alt; una bona elecció pot ser 5 ó 7; fou_1 i fou_2 controlaran això. Convé poder regular el pes relatiu de cada “harmònic” per tenir realment una gamma; això ho facilitaràn w_1 i w_2 ; quan ambdós siguin zero, retrobem el cas “Vasarely” (figura 5.3.16). També ha de ser elegible a voluntat el període del “harmònic” principal, sigui p . Recordem finalment que $k \in [0,1)$, regula la intensitat de “l’arruga”: per $k = 0$ no es produeix cap efecte, per $k = 1$ estem al límit de la injectivitat. Amb aquestes consideracions, més bastant empirisme, hem arribat a la següent proposta:

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y) = x - k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \cdot \text{def}_1(x) \cdot \text{def}_2(y) \\ \bar{y}(x, y) = y - k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \text{def}_1(y) \cdot \text{def}_2(x) \end{cases} \quad (5.3.26)$$

essent

$$\begin{cases} \text{def}_1(u) = (1 - w_1) \cdot \sin\left(\left(\frac{2p}{p}\right)u\right) + w_1 \frac{\sin\left(fou_1 \cdot \left(\frac{2p}{p}\right)u\right)}{fou_1} \\ \text{def}_2(u) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left((1 - w_2) \cdot \cos\left(\left(\frac{2p}{p}\right)u\right) + w_2 \cdot \frac{\cos\left(fou_2 \cdot \left(\frac{2p}{p}\right)u\right)}{\left(\frac{fou_2}{2}\right)} \right) \end{cases} \quad (5.3.27)$$

En la figura 5.3.17 és veu una taula de deformacions per diferents valors de w_1 i w_2 , fixats $k = 0.8$, $p = 35\text{mm}$. i $fou_1 = fou_2 = 5$. Es veu només un quadrat (una “rajola”) de la retícula, atès que el motiu és periòdic. Cal recalcar que, en la vora del motiu periòdic, la transformació és la identitat, per tant, hi ha tota una quadrícula, de període p en ambdues direccions a partir del (0,0), de rectes invariants; això permet un millor control, a més de ser convenient en certs casos: per exemple, en el cas 3D que comentarem a continuació, pot interessar “arrugar” les parets d’un edifici, però que no “s’arrugui” el pla del terra. Per “arrugar” un objecte, només cal aplicar l’operador als seus punts: per exemple, si tenim una corba paramètrica del tipus $(x(t), y(t))$, la parametrització de la deformació serà $(\bar{x}(x(t), y(t)), \bar{y}(x(t), y(t)))$, on \bar{x} i \bar{y} són els de (5.3.26). En la figura 5.3.18 es veu l’efecte d’aplicar un operador d’aquesta família a una espiral d’Arquímedes.

Amb la formulació triada per def_2 , basada en el $\sin^2(u/2)$, i el signe menys davant de la constant k en les fórmules (5.3.25) i (5.3.26), s'aconsegueix que l'origen de coordenades sigui vèrtex de quatre "rajoles" i que els eixos x i y siguin línies d'unió entre fileres de "rajoles", línies on la transformació (5.3.26) és la identitat (veure figures 5.3.15 i 5.3.16). Si es vol que l'origen sigui centre d'una de les "rajoles" de la quadrícula periòdica, només cal definir def_2 a partir del $\cos^2(u/2)$ i canviar el *menys* per *més* davant de k . Tindrem llavors les fórmules

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y) = x + k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \cdot \text{def}_1(x) \cdot \text{def}_2(y) \\ \bar{y}(x, y) = y + k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \text{def}_1(y) \cdot \text{def}_2(x) \end{cases} \quad (5.3.26.\text{bis})$$

amb

$$\begin{cases} \text{def}_1(u) = (1 - w_1) \cdot \sin\left(\left(\frac{2p}{p}\right)u\right) + w_1 \frac{\sin\left(fou_1 \cdot \left(\frac{2p}{p}\right)u\right)}{fou_1} \\ \text{def}_2(u) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left((1 - w_2) \cdot \cos\left(\left(\frac{2p}{p}\right)u\right) + w_2 \cdot \frac{\cos\left(fou_2 \cdot \left(\frac{2p}{p}\right)u\right)}{\left(\frac{fou_2}{2}\right)} \right) \end{cases} \quad (5.3.27.\text{bis})$$

Recordem, tanmateix, que per obtenir la figura en forma de trama escocesa (fig. 5.3.15), cal substituir def_2 per 1 a (5.3.26).

En el cas tridimensional, només cal aplicar les mateixes pautes: es tracta de produir una transformació del espai en ell mateix basada en alterar la identitat per mitjà de funcions periòdiques en una variable modulades per funcions periòdiques en les restants dues variables. Així arribem a

$$\text{arrugador}_{k,p,w_1,w_2,fou_1,fou_2}(x, y, z) = (\bar{x}(x, y, z), \bar{y}(x, y, z), \bar{z}(x, y, z))$$

on

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y, z) = x - k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \cdot \text{def}_1(x) \cdot \text{def}_2(y) \cdot \text{def}_2(z) \\ \bar{y}(x, y, z) = y - k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \cdot \text{def}_1(y) \cdot \text{def}_2(z) \cdot \text{def}_2(x) \\ \bar{z}(x, y, z) = z - k \cdot \left(\frac{p}{2p}\right) \cdot \text{def}_1(z) \cdot \text{def}_2(x) \cdot \text{def}_2(y) \end{cases} \quad (5.3.28)$$

amb les mateixes definicions per def_1 i def_2 . En la figura 5.3.19 s'il·lustra el cas tridimensional tot arrugant un hiperboloide d'una fulla. De la mateixa manera que en el cas de corbes en el pla, per “arrugar” un objecte immers en l'espai, només cal aplicar l'operador als seus punts: per exemple, si tenim una superfície paramètrica del tipus $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, la parametrització de la deformació serà $(\bar{x}(x(s, t), y(s, t), z(s, t)), \bar{y}(x(s, t), y(s, t), z(s, t)), \bar{z}(x(s, t), y(s, t), z(s, t)))$, on \bar{x} , \bar{y} i \bar{z} són els de (5.3.28)

Com recomanacions generals, per un millor efecte d'arruga aleatòria, convé que el període de la deformació no entri en fase amb les regularitats del objecte a deformar, si les té. Això s'aconsegueix triant un valor de p “estudiadament arbitrari”. També convé que les direccions principals de la quadrícula deformadora no s'alineïn amb les del objecte, cas que aquest les tingui. Si cal es pot aplicar la deformació girada un angle arbitrari. Per altra banda, per augmentar l'efecte d'arruga i trencar la periodicitat subjacent, es poden superposar dos operadors amb períodes p_1 i p_2 no múltiples un de l'altre i amb girs diferents, etc. S'ha de ser conscient, però, que en aquest cas pot augmentar molt el cost computacional.

5.3.3.5) Doblegador. Està pensat per actuar sobre objectes allargats. Es tracta de “doblegar” l'espai prenent un punt com a frontissa, llavors la trama cartesiana, en torçar-se, arrossega l'objecte. L'operador es defineix explícitament pel cas en que es doblega l'eix de les x per l'origen un cert angle a dins del pla $z = 0$, torçant-se consegüentment totes les rectes paral·leles a ell i mantenint-se rectes i perpendiculars a ell totes les que ho eren abans (és a dir les paral·leles al eix y , que giren a partir del plec, i les paral·leles al eix z , que només es desplacen mantenint-se paral·leles a sí mateixes). Per dobles d'altres rectes entorn d'altres punts, només cal compondre a la dreta per la isometria que porti la configuració a la posició “normal” i a l'esquerra per la seva inversa. Per evitar la formació d'un vèrtex en el punt de doblec, s'estableix un interval de colze de longitud $2a$, de manera que l'eix de les x i, de fet tot l'espai, queda invariant per $x \leq -a$; gira un angle a entorn del eix z per $x \geq a$ i es forma una corba (colze) de transició entre el “darrer” punt invariant a l'esquerra, el $(-a, 0, 0)$, i el “primer” girat a la dreta, el

$(a \cos(\mathbf{a}), a \sin(\mathbf{a}), 0)$. Com que la coordenada z no queda afectada, treballarem a partir d'aquí en versió plana, per simplificació. Així, abans de doblegar, tenim la identitat en el pla: $(x, y) \rightarrow (\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)) = (x, y)$. Llavors, l'eix x es pot considerar la recta paramètrica $(x, 0) = x \cdot (1, 0)$. Després de doblegar, tindrem un transformació del tipus $(x, y) \rightarrow \text{dob}(x, y)$. Pel que fa a l'eix x , es transforma en la corba $\text{dob}(x, 0)$; cada punt $(x_0, 0)$ va a parar a cert punt $\text{dob}(x_0, 0)$. La recta $x = x_0$ passa a la recta perpendicular a la corba $\text{dob}(x, 0)$ pel punt $\text{dob}(x_0, 0)$ i un punt (x_0, y_0) va a parar sobre la imatge de la recta $x = x_0$, a distància y_0 del punt $\text{dob}(x_0, 0)$ i al mateix costat de $\text{dob}(x, 0)$ que abans ho estava de l'eix x . En altres paraules, un cop doblegat l'eix x , per cada punt d'ell s'hi fa passar una perpendicular (per mitjà d'un vector normal unitari) i sobre ella es van situant les antigues coordenades y . Només resta, doncs, formular una corba $\text{dob}_0(x)$, de manera que sigui $\text{dob}(x, 0) = \text{dob}_0(x)$. (figura 5.3.20)

Com que fora de la franja del doblec el pla no ha de sofrir cap deformació, només un moviment rígid "a la dreta" del colze, $\text{dob}_0(x)$ ha de ser $(x, 0)$ per $x \leq -a$, mentre que, atès que la semirrecta $\{(x, 0) / x \geq a\}$ ha de girar un angle \mathbf{a} entorn de l'origen, ha de ser $(x \cos(\mathbf{a}), x \sin(\mathbf{a})) = x (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a}))$ per $x \geq a$. Així, tenim dues rectes que es tallen a l'origen; ara cal "construir" una corba-colze de transició entre ambdues, és a dir, cal definir $\text{dob}_0(x)$ per $x \in (-a, a)$, com una corba que faci una transició suficientment suau entre les dues rectes. El millor compromís que hem trobat entre suavitat geomètrica (tangència, curvatura), suavitat paramètrica (velocitat, acceleració), simplicitat de càlcul i aprofitament de recursos propis anteriors, ha consistit en fer una adaptació de les corbes de Bézier: Prenem

$$\vec{P}_0 = (-a, 0), \quad \vec{P}_1 = (0, 0) \quad \text{i} \quad \vec{P}_2 = (a \cos(\mathbf{a}), a \sin(\mathbf{a}))$$

i construïm la paràbola de Bézier per aquests tres punts, tot reescalant el paràmetre perquè variï dins de $(-a, a)$. En definitiva, després d'operar, queda que

$$\text{dob}_0(x) = \left(\frac{a-x}{2a}\right)^2 \cdot (-a, 0) + \left(\frac{a+x}{2a}\right)^2 \cdot (a \cos(\mathbf{a}), a \sin(\mathbf{a})) \quad \text{si} \quad x \in (-a, a).$$

Si ho ajuntem tot i ho reescribim adequadament, podem definir

5.3. Verbs.

$$\text{dob}_0(x) = \begin{cases} 1 \cdot x \cdot (1, 0) + 0 \cdot \left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a})) & \text{si } x \in (-\infty, -a] \\ \left(\frac{a-x}{2a}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{2}\right) \cdot (1, 0) + \left(\frac{a+x}{2a}\right) \cdot \left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a})) & \text{si } x \in (-a, a) \\ 0 \cdot \left(\frac{x-a}{2}\right) \cdot (1, 0) + 1 \cdot x \cdot (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a})) & \text{si } x \in [a, \infty) \end{cases}$$

És a dir, es pot interpretar que $\text{dob}_0(x)$ té la forma global

$$\text{dob}_0(x) = f_1(x) \cdot g_1(x) \cdot (1, 0) + f_2(x) \cdot g_2(x) \cdot (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a})), \quad (5.3.29)$$

essent

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-\infty, -a] \\ \left(\frac{a-x}{2a}\right) & \text{si } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{si } x \in [a, \infty) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -a] \\ \left(\frac{a+x}{2a}\right) & \text{si } x \in (-a, a) \\ 1 & \text{si } x \in [a, \infty) \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, -a] \\ \left(\frac{x-a}{2}\right) & \text{si } x \in [-a, \infty) \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+a}{2}\right) & \text{si } x \in (-\infty, a] \\ x & \text{si } x \in [a, \infty) \end{cases}$$

Aquestes funcions es poden definir globalment. En efecte: $f_2(x)$ no és més que la funció $\mathbf{j}_{-a,a,1}(x) = \left(\frac{1}{4a}\right) \cdot (|x+a| - |x-a| + 2a)$ definida en (1.2.3), mentre que

$$f_1(x) = 1 - f_2(x).$$

O sigui,

$$f_1(x) = 1 + \mathbf{j}_{-a,a,-1}(x)$$

$$f_2(x) = \mathbf{j}_{-a,a,1}(x)$$

Per la seva part,

(5.3.30)

$$g_1(x) = \frac{3x - |x + a| - a}{4}$$

$$g_2(x) = \frac{3x + |x - a| + a}{4}.$$

Ara, per completar la formulació de la transformació $\text{dob}(x, y)$ (figura 5.3.20), usarem que per cada x tenim el vector tangent (continu)

$$\bar{\mathbf{T}}(x) = \text{dob}'_0(x) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } x \in (-\infty, -a] \\ \left(\frac{(a-x) + (a+x)\cos(\mathbf{a})}{2a}, \frac{(a+x)\sin(\mathbf{a})}{2a} \right) & \text{si } x \in (-a, a) \\ (\cos(\mathbf{a}), \sin(\mathbf{a})) & \text{si } x \in [a, \infty) \end{cases}$$

que també es pot definir de manera global:

Primer fem

$$u(x) = \mathbf{j}_{-a,a,2a}(x) - a$$

i després

$$\bar{\mathbf{T}}(x) = \left(\frac{(a - u(x)) + (a + u(x))\cos(\mathbf{a})}{2a}, \frac{(a + u(x))\sin(\mathbf{a})}{2a} \right). \quad (5.3.31)$$

Llavors , definim el vector tangent unitari $\vec{t}(x) = \frac{\vec{T}(x)}{\|\vec{T}(x)\|}$ i, a partir d'ell, el normal unitari $\vec{n}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\vec{t}(x))^\top$. Per acabar, només cal definir, en general,

$$\text{dob}(x, y) = \text{dob}_0(x) + y \cdot \vec{n}(x). \quad (5.3.32)$$

Si tenim un punt (x, y, z) de l'espai, al doblegar, passa al punt $(\text{dob}(x, y), z)$. Per doblegar un objecte, només cal aplicar-li el doblec a cadascun dels seus punts. Veure figura 5.3.21.

5.3.3.6) Desplaçadors locals (ambientals). Similars als desplaçadors locals paramètrics que hem desenvolupat abans, dins dels verbs quirúrgics, amb la diferència de que aquests deformen l'espai ambient, independentment de que contingui alguna cosa; llavors aquesta deformació arrossegirà els objectes que es trobin en la zona afectada. La seva definició operativa, en canvi, és anàloga a l'anterior, només que actuant sobre la identitat en l'espai ambient. Així, a \mathbb{R}^3 , es tracta de fer que un determinat punt $\vec{P} = (x_p, y_p, z_p)$ es desplaci fins un altre punt \vec{Q} . Definim $\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P}$ i triem una funció **campana**_{*} de les de 5.1.2.6), segons les necessitats del problema concret. També triem una funció distància que reguli la forma i abast de la zona d'influència de la deformació, per exemple, pot ser de tipus superel·lipsoide, és a dir,

$$d_n((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \left(\left| \frac{x_2 - x_1}{a} \right|^n + \left| \frac{y_2 - y_1}{b} \right|^n + \left| \frac{z_2 - z_1}{c} \right|^n \right)^{1/n}. \quad (5.3.33)$$

Amb això, donat un punt $\vec{X} = (x, y, z)$, el seu desplaçament es defineix com

$$\text{desp}(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{v} \cdot \text{campana}_*(d_n(\vec{P}, \vec{X})). \quad (5.3.34)$$

Anàlogament es poden definir desplaçadors restringits al pla (figura 5.3.22). En tot cas, si es vol preservar la bijectivitat de la transformació (és a dir, que l'espai no es plegui sobre si mateix), cal que la regió d'abast sigui prou ampla en relació a la magnitud de \vec{v} com per impedir que alguna derivada direccional de "desp" s'arribi a anul·lar.

A (Foley-Van Dam 96, pàgina 1014) es pot trobar una referència a un operador similar basat en *splines* i polinomis de Bernstein.

5.3.4. Verbs dinàmics.

Aquesta categoria d'operadors s'inclou més per explicitar una manera alternativa d'enfocar la concepció de formes que ja té llarga tradició i que resulta a vegades avantatjosa respecte d'altres que per oferir una llista d'operadors concrets. En els verbs de l'apartat anterior, es produïa una forma nova per l'acció d'*una* transformació; aquí, es tracta de produir una forma a partir de l'acció d'*un continu* de transformacions, dependents d'un o dos paràmetres, sobre una forma original, de manera que la forma final és l'agrupació de totes les transformades. En altres paraules, són formes que es poden concebre com la trajectòria d'una forma prèvia, eventualment canviant, que es mou per l'espai al llarg del temps. És cert que qualsevol corba o superfície pot ser concebuda així, només cal interpretar el o un dels paràmetres com el temps; però sovint aquesta interpretació no facilita en res la concepció de la forma respecte a una interpretació estàtica. Per exemple, una circumferència queda perfectament descrita com el lloc geomètric dels punts que equidisten del seu centre o un paraboloid hiperbòlic es pot pensar sense cap problema com una família de rectes que *romanen* recolzades sobre dues que fan de directrius. En canvi, en altres casos, una concepció dinàmica resulta avantatjosa, o fins i tot imprescindible, sempre des del punt de vista subjectiu-psicològic, no des del formal-objectiu. És el cas de la cicloide (trajectòria descrita per un punt d'una circumferència que roda sense lliscar sobre una recta) i tota la família de epi i hipo-trocoides, que sempre es defineixen en termes de moviment, o d'una forma com la de la figura 5.3.23. que només es pot descriure i parametritzar com la trajectòria d'una secció super-el·líptica que, en anar pujant al llarg d'un eix vertical, gira i canvia de mida segons funcions de l'altura alhora que canvia de exponent en la formulació super-el·líptica, passant d'un quadrat (exponent 1) a la part inferior a un cercle (exponent 2) a la punta de dalt. També les canonades, especialment si l'eix és una corba guerdada i la secció variable (figura 5.3.21), són un bon exemple de superfície que s'explica millor en termes dinàmics. Gràcies a les actuals possibilitats informàtiques, és factible construir la parametrització senzillament descomposant el moviment complex en moviments elementals, de formulació coneguda (girs, translacions, escalats), i anar-los concatenant en la formulació. De fet, per l'usuari és més fàcil construir així la parametrització d'una cicloide, una epicicloide (figura I.4) o una hipotrocoide (composició de translacions i girs aplicats a un punt) que fer una "foto fixa" de la configuració en un moment donat i fer consideracions trigonomètriques, que és com usualment s'elabora la parametrització. No deixa de ser una paradoxa que una corba concebuda dinàmicament es parametritzi en termes estàtics; aquesta paradoxa s'explica sens dubte perquè tradicionalment, amb paper i bolígraf, és molt més fàcil això que arrossegar expressions matricials. Però, ara, un programa

5.3. Verbs.

de manipulació simbòlica no té cap problema en manegar aquestes expressions i, si cal, simplificar-les pel seu ús posterior en càlculs.

Descriurem l'esquema comú a tots aquests objectes. Pel cas d'una corba, es comença, senzillament, amb un punt P . Només hi ha un paràmetre, sigui t . Per cada valor de t , se li aplica a P una transformació afí (un endomorfisme lineal compost amb una translació) que depèn de t . Aquesta afinitat pot ser encadenament de transformacions elementals. Per exemple, en el cas d'una cicloide sobre una circumferència de radi r que gira sobre l'eix x i comença amb el seu centre al punt $(0, r)$, es pot partir del punt $P = (0, 0)$ i, per cada t , aplicar-li concatenadament la translació $(0, -r)$, un gir d'angle $-t$ (és a dir, horari), la translació $(0, r)$ i la translació, $(rt, 0)$. Cada transformació d'aquestes és elemental i pot estar emmagatzemada (de fet sol estar-hi) en una base de transformacions definides *a priori*. La corba és el conjunt de posicions del punt P de partida al aplicar-li les transformacions per tots els valors de t dins del rang que convingui. Un cop simplificada l'expressió resultant, obtenim la parametrització de sempre, sols que ara no cal ni molta memòria ni tornar a repetir elucubracions sobre angles i valors trigonomètrics, sols cal escriure els moviments que defineixen la corba (és el que hem fet al escriure aquest paràgraf; no ens a fet falta consultar cap manual ni recordar "com anava" la parametrització de la cicloide). És, en definitiva, un procediment molt més mnemotècnic i per tant més còmode per l'usuari; el qui té més feina així és l'ordinador, però aquest, avui en dia ja el tenim prou entrenat!

Pel cas de superfícies definides dinàmicament, en el cas més senzill, es parteix d'una corba, sigui $\vec{J}(s)$, a la qual, com en el cas de corbes, se li aplica una transformació afí dependent d'un segon paràmetre t . En el cas, per exemple, d'una canonada, $\vec{J}(s)$ és la seva secció, centrada en l'origen i situada en pla xy , i, si $\vec{y}(t)$ és la corba que fa d'eix o nucli de la canonada, la transformació afí dependent de t té per part lineal el gir que porta el vector $(0, 0, 1)$ al vector $\vec{y}'(t)$ (dividit per la seva norma) i, per translació, senzillament la posició $\vec{y}(t)$ del centre de la secció. Aquest esquema es pot enriquir permetent que la corba \vec{J} variï mentre es desplaça, és a dir, que depengui també de t . Fins i tot, es pot complicar més, permetent que la posició depengui també de s . Així, en l'esquema general tenim un objecte parametritzat segons l'esquema

$$\vec{s}(s, t) = L_s(t) \circ \vec{J}_t(s) + \vec{y}_s(t) \quad (5.3.35)$$

on L indica una aplicació lineal, mentre que \vec{y} és una translació. Els subíndexs indiquen que cada funció paramètrica, a més de dependre de la seva variable natural principal, pot dependre subsidiàriament de l'altre variable. De fet, L i

\bar{y} són, respectivament, la part lineal i la translació de l'afinitat resultant de totes les afinitats composades en la definició de l'objecte. En el cas de corbes, \bar{j} és senzillament un punt.

5.3.5. Verbs genètics per encreuament.

Si la metàfora dels verbs genètics per mutació era la d'un objecte que per sí sol muta en un altre en alterar-se el seu codi genètic (la variable), la dels operadors genètics per encreuament pot ser la d'un objecte que s'obté com a "fill" d'altres dos o més anteriors concurrents, de manera que el nou hereta característiques de cadascun dels vells. Per aquest apartat és convenient tenir present el que s'ha dit sobre **periodificadors regulables**, **salts regulables**, **funcions característiques** i **particions de la unitat**, dins l'apartat de **paraules**, els quals, al seu torn usen les **lletres** del tipus **periodificadors**, **funcions de salt** i **funcions campana**; en particular, usarem les funcions dels tipus **saltalternat**, (5.1.2) i (5.2.7), $\chi_{[t_a, t_b]}(t)$ (5.2.12) o $m(t)$ (5.2.13) que s'han vist llavors.

Exemples.

5.3.5.1) Tallar i intercalar sense desplaçament. Entre els verbs genètics per mutació hem vist el que talla un interval o una seqüència periòdica d'interval·ls d'una funció, els suprimeix i enganxa els fragments que han quedat. En el cas d'ara, tenim dues funcions, $f_1(t)$ i $f_2(t)$, definides sobre un mateix domini $D = [t_0, t_1]$. Suposem que $D = D_1 \cup D_2$, essent $D_1 \cap D_2$ un conjunt numerable de punts aïllats. Es vol produir una gràfica que sigui la de $f_1(t)$ sobre D_1 i la de $f_2(t)$ sobre D_2 . Per això, primer cal obtenir la funció característica clàssica de cadascun dels dos subdominis. Un cop es tenen aquestes dues funcions, la gràfica desitjada no és més que

$$f(t) = f_1(t) \cdot \chi_{D_1}(t) + f_2(t) \cdot \chi_{D_2}(t). \quad (5.3.36)$$

Pel que fa a les funcions característiques, contemplarem explícitament dos casos:

- Cada D_i és reunió finita d'interval·ls disjunts. Usant les funcions del tipus $\chi_{[t_a, t_b)}(t)$ definides com ja hem vist, podem obtenir, mitjançant producte, les funcions característiques $\chi_{D_i}(t)$. És el cas exemplificat en la figura 5.3.24.
- $D = \mathbb{R}$, $D_1 = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} [t_0 + i \cdot d, t_0 + d_1 + i \cdot d)$, per cert punt de partida t_0 i certes longituds $d = d_1 + d_2 > d_1$ i $D_2 = \mathbb{R} \setminus D_1$. És a dir, D_1 està format per interval·ls

de longitud d_1 i D_2 , per intervals de longitud d_2 , que es van alternant amb període d . Si $d_2 = d_1$, tots els intervals són iguals i només cal fer $\mathbf{C}_{D_1} = \mathbf{saltalternat}_1(t; t_0, d_1, 0, 1)$; $\mathbf{C}_{D_2} = \mathbf{saltalternat}_0(t; t_0, d_1, 0, 1)$. En el cas que $d_2 \neq d_1$, el més fàcil és prendre $\mathbf{C}_{[t_0, t_0+d_1)}(t)$ i periodificar-la amb període d a partir de t_0 : obtenim $\mathbf{C}_{D_1} = \mathbf{C}_{[t_0, t_0+d_1)}(\mathbf{ps}_{t_0, t_0+d}(t))$; $\mathbf{C}_{D_2} = 1 - \mathbf{C}_{D_1}$.

5.3.5.2) Tallar i intercalar amb desplaçament. En aquest cas, també tenim dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$, però ara el que es pretén és anar empalmant fragments de les gràfiques de totes dues, no suprimint cap tros, sinó posant uns a continuació dels altres. Més concretament, es vol tallar la gràfica de $f_1(t)$ cada d_1 a partir d'un punt t_0 i produir desplaçaments cap a la dreta de longitud d_2 en cada tall (veure el verb "tallar amb desplaçament"), mentre que s'ha de tallar la gràfica de $f_2(t)$ cada d_2 a partir d'un punt $t_0 + d_2$ i desplaçar-la, en cada tall, una longitud d_1 cap a la dreta. En altres paraules, l'objectiu és anar intercalant trams de longitud d_1 de $f_1(t)$ amb trams de longitud d_2 de $f_2(t)$ sense suprimir cap part de la gràfica original; la gràfica de cada funció, en cada tall, es desplaça cap a la dreta per encabir el fragment corresponent de l'altra. Encara que les dues funcions siguin contínues, si en els punts de tall no valen el mateix, tenim dues possibilitats: si acceptem també desplaçaments verticals podem empalmar cada fragment de la gràfica d'una funció en el punt on acabi el corresponent de l'altra, és el cas de la figura 5.3.25; sinó, si només acceptem desplaçar horitzontalment cada tram de cada gràfica, tindrem una gràfica resultant possiblement discontinua en cada tall.

Pel primer cas, només cal aplicar l'operador "tallar i desplaçar" convenient per cada gràfica i sumar les dues. Si diem $t_1 = t_0 + d_2$, $t_2 = t_1 + d_1$ i $t_3 = t_2 + d_2$, es té la gràfica

$$f_1\left(\left(\frac{d_1}{d_2 + d_1}\right) \cdot (t - \mathbf{pm}_{t_0, t_1, t_2, 0, d_2}(t))\right) + f_2\left(\left(\frac{d_2}{d_1 + d_2}\right) \cdot (t - \mathbf{pm}_{t_1, t_2, t_3, 0, d_1}(t))\right). \quad (5.3.37)$$

Si $d_2 = d_1$, es pot utilitzar el periodificador **pd** enlloc del **pm**.

Pel segon cas, només cal prendre les dues funcions prèviament tractades amb talls i desplaçaments i intercalar-les amb l'operador de "tallar i intercalar sense desplaçament" segons hem dit en el paràgraf corresponent.

5.3.5.3) Combinacions de formes. Aquest apartat recull altres procediments per generar formes que resulten, genèricament, de combinar,

d'alguna manera o altra, dues o més formes precedents, siguin aquestes del mateix tipus que la forma resultant o no (per exemple, la forma resultant pot ser una corba mentre que les formes "progenitores" poden ser, o bé corbes, o bé punts).

Alguns dels procediments que es poden incloure aquí són mètodes clàssics de Disseny Geomètric Assistit per Ordinador (CAGD), per tant es poden trobar en qualsevol llibre sobre el tema, com ara: corbes i superfícies de tipus Bézier, o de tipus spline interpolador, o de tipus B-spline, o de tipus NURBS, etc., que combinen punts per mitjà de certes funcions de transició per produir l'objecte final; superfícies reglades entre dues corbes, o de tipus Coons patches, o de tipus Gordon, etc., que combinen dues o més corbes per produir una superfície. Aquests mètodes, si la seva formulació roman oculta a l'usuari i aquest només cal que coneixi com s'usen i quines prestacions donen, cauen dins de la primera part d'aquesta memòria, com a mètode per la fase d'execució. Aquí es poden recuperar com a mètodes per la fase de concepció si l'usuari pensa la forma resultant en termes de les combinacions de formes que substancien aquests mètodes i coneix i utilitza, de manera no passiva, la seva maquinària funcional.

Es poden, però, proposar d'altres maneres de combinar formes. Sense esgotar els possibles esquemes, oferirem alguns d'ells:

- a) Transició entre corbes per produir una corba. Es tenen diverses corbes $\vec{J}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, parametritzades totes dins d'un mateix domini, diguem-li $[t_0, t_n]$. Es vol produir una corba $\vec{J}(t)$, definida dins del mateix interval, que, per trams sigui successivament cadascuna de les \vec{J}_i . Més precisament, cal definir una sèrie de nodes $t_{i,0}$, $t_{i,1}$, $i = 1, \dots, n$, de manera que $t_{i,0} \leq t_{i,1}$; $t_{i,1} \leq t_{j,0}$ si $i < j$; $t_{1,0} = t_0$ i $t_{n,1} = t_n$. Es tracta de que $\vec{J}(t)$ sigui $\vec{J}_i(t)$ per $t \in [t_{i,0}, t_{i,1}]$ i faci una transició entre \vec{J}_i i $\vec{J}_{i+1}(t)$ per $t \in (t_{i,1}, t_{i+1,0})$. Només cal utilitzar les funcions característiques difuses $m(t)$ (fórmula (5.2.13)) i multiplicar cada \vec{J}_i per una d'elles que valgui 1 per $t \in [t_{i,0}, t_{i,1}]$ i 0 per $t \in \mathbb{R} \setminus [t_{i-1,1}, t_{i+1,0}]$ (per construcció, en les transicions, les dues funcions característiques que són diferents de zero, sumen idènticament 1). En concret,

$$\vec{J}(t) = \sum_{i=1}^n m_i(t) \cdot \vec{J}_i(t)$$

on

(5.3.38)

$$m_i(t) = \text{trans}_r(\mathbf{j}_{t_{i-1,1}, t_{i,0}, 1}(t) - \mathbf{j}_{t_{i,1}, t_{i+1,0}, 1}(t))$$

(les funcions \mathbf{j} “sense fletxa” són les de (5.2.8)).

Pel primer i darrer tram cal fer les adequacions oportunes, trivials, en la funció característica corresponent. Cal observar que el tipus de corbes interpoladores que hem introduït en el Capítol 2, en fer transicions entre diversos splines cúbics, responen, de fet, a aquest esquema.

En la figura 5.3.26. podem veure un exemple. És un anagrama format inicialment per combinació entre una espiral que tendeix asimptòticament a una circumferència (fig. a) i una lemniscata (fig. b). En un entorn del centre és exclusivament la lemniscata, després passa progressivament d'aquesta a l'espiral fins que, a la vora és exclusivament l'espiral (figures d i e). La figura c mostra la partició de la unitat que controla la transició entre les dues corbes. Això pel que fa a la corba nucli de la figura (altre cop fig. e). Després, per cada punt d'ella, es situa una circumferència perpendicular al vector tangent (usant verbs dinàmics) per donar gruix i adquirir la forma de canonada (fig. f). Addicionalment, l'altura (coordenada z) varia segons una funció oscil·lant, de període i amplitud convenientment ajustats, per aconseguir l'efecte de que uns trams passin per sobre o per sota d'altres (fig. g).

- b) Transició entre superfícies per produir una superfície. Molt esquemàticament, es tenen diverses superfícies $\vec{\mathbf{S}}_i(s, t)$, per i variant dins d'un conjunt de índexs, possiblement dobles, parametritzades totes dins d'un mateix domini D del pla de paràmetres, possiblement rectangular. Es vol produir una partició finita de D per conjunts D_i i una superfície $\vec{\mathbf{S}}(s, t)$, definida sobre D , que dins d'un tancat \bar{D}_i interior (llevat poder de les vores de D) a cert obert interior a cada D_i , coincideixi amb la corresponent $\vec{\mathbf{S}}_i$ i que en les bandes que contenen les fronteres de la partició (és a dir, D menys la reunió dels tancats) presenti transicions entre les $\vec{\mathbf{S}}_i$ veïnes. Si cada D_i l'ampliem amb les bandes que recobreixen *la seva* frontera, obtenim un recubriment finit de D per oberts \dot{D}_i . Es defineix una partició de la unitat vinculada a aquest recubriment, és a dir, funcions contínues (i suficientment diferenciables) $\mathbf{m}_i(s, t)$ que valguin 1 sobre \bar{D}_i , zero fora de \dot{D}_i i que sumin idènticament 1 en tot D . Amb això, la parametrització de la superfície resultant és

$$\vec{\mathbf{S}}(s, t) = \sum_i \mathbf{m}_i(s, t) \cdot \vec{\mathbf{S}}_i(s, t). \quad (5.3.39)$$

En general, la construcció efectiva de la partició de la unitat pot ser molt complicada, però en certs casos pot ser assequible. Per exemple (veure figura 5.3.27), partint d'un el·lipsoide i d'un pedaç de paraboloid hiperbòlic, tots dos com a gràfiques de funcions definides sobre el quadrat $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, hem produït una superfície per combinació d'elles dues. El domini D s'ha partit en dos, la frontera entre els quals és una superel·lipse concèntrica i interior a D , i sobre aquesta partició del domini s'ha definit una partició de la unitat, tal com es pot veure en la fig. (a), que és de continuïtat C^2 . La superfície coincideix amb l'el·lipsoide allà on el corresponent factor de la partició de la unitat val 1 i coincideix amb el paraboloid on aquell val zero i, per tant, val 1 l'altra factor de la partició. Entremig es produeix la transició, que **no és la intersecció** entre les dues **sinó una mena de soldadura** (fig. b).

- c) Interpolació a nivell de paràmetres formals i/o de posició. Ja hem comentat que una superfície reglada es pot interpretar com una transició, del tipus interpolació lineal, entre dues corbes que li fan de directrius: si tenim dues corbes $\vec{J}_0(s)$ i $\vec{J}_1(s)$, ambdues parametritzades dins d'un mateix interval $[s_0, s_1]$, podem parametritzar una superfície reglada fent $\vec{S}(s, t) = (1-t) \cdot \vec{J}_0(s) + t \cdot \vec{J}_1(s)$, amb t variant de 0 a 1, si volem que les dues directrius facin de vora. Aquesta superfície *interpola* amb una generatriu recta, per cada s , *parells de punts*, un de cada directriu. Es poden substituir els pesos $(1-t)$ i t per altres parells de funcions que sumin idènticament 1, com les dels tipus $s_i(t)$ de (2.2.15); una tal substitució, **varia la velocitat** de la transició d'una corba a l'altra, encara que, en aquest cas, **no varia la forma** de la superfície.

Però suposem ara que aquestes dues corbes directrius $\vec{J}_0(s)$ i $\vec{J}_1(s)$, pertanyen a una mateixa família de corbes. Pensem, per fixar idees, en dues el·lipses, com les de la figura 5.3.28(a). Cada el·lipse ve determinada en la seva forma i posició per una sèrie de paràmetres d'aquells que en la definició 4.1 hem anomenat genètics, per distingir-los dels proteics, que en aquest cas es redueixen a la s variant de 0 a $2p$. Per una el·lipse en l'espai els paràmetres formals són només la longitud dels semieixos, mentre que els posicionals són: les coordenades del centre, un vector unitari normal al pla de la el·lipse i la direcció, dins d'aquest pla, del semieix major (o qualsevol altre conjunt suficient de dades). Pel procediment que acabem de descriure, podem definir una superfície reglada que faci una transició entre la el·lipse $\vec{J}_0(s)$ i la $\vec{J}_1(s)$; és el cas de la figura 5.3.28(b). Però no és la única transició possible entre les dues corbes. Una altra via, no equivalent, és la que proposem: enlloc d'interpolar entre punts de les corbes, podem

interpolat entre els valors dels paràmetres de cadascuna d'elles. Donat que hi ha diversos paràmetres, ara la **elecció de diferents velocitats** en la transició de cada paràmetre permet una infinitat de transicions diferents. Per fixar el que diem, tornem, amb més detall, a la figura 5.3.28. es parteix de dues el·lipses com a directrius (fig. a); una en el pla $z = -2$, amb semieixos 2 i 1.25, i l'altra en el pla $z = 2$, amb semieixos 0.625 i 1. En (fig. b), com a transició entre aquestes dues directrius, es veu la habitual superfície reglada, mentre que en (fig. c) s'han interpolat, amb diferents velocitats, els valors del semieix de les x , els del de les y i l'altura z .

5.3.6. Verbs compostos.

Si el que es vol amb la definició de “verbs” és tenir enllestides determinades eines capaces d'actuar sobre objectes virtuals a fi de crear-ne de nous, tot modelitzant funcionalment les accions que podem imaginar fetes amb les mans sobre els corresponents objectes reals, és obvi que el que es pot esperar és que no totes les accions “manuales” tinguin un corresponent funcional que caigui exactament dins d'una de les classes de verbs que hem vist fins aquí, atès que aquesta classificació s'ha fet amb un criteri molt condicionat per la vessant matemàtica. Encara que deixem oberta la porta a la definició de noves classes “pures” que algú pugui imaginar, aquest paràgraf representa, de moment, el “vagó de cua” del bloc de verbs. El que importa és tenir un bagatge, quan més ampli millor, d'accions, amb un nom significatiu, preparades per actuar, contribuint així a enriquir les possibilitats del dissenyador. Seria confondre el fi amb els mitjans si no admetéssim un “verb” per no tenir una classe a la que assignar-lo. En definitiva, el que cal esperar és que la majoria de combinacions de funcions matemàtiques que es pugin imaginar a fi de donar lloc a un artefacte que serveixi com un operador o verb d'alguna mena, incorporin característiques de més d'una de les classes “pures”. Com que fins aquí hem proposat, per començar, cinc d'aquestes classes, ja es veu que el nombre de possibles tipus de verbs compostos és, per començar, de l'ordre de 2^5 ; només cal posar-s'hi! Però també cal tenir clar que no té interès inventar verbs només per l'exigència d'aquestes consideracions metodològiques. Només tenen interès els que es creïn a partir d'una necessitat de disseny actual o previsible. En aquesta línia, només com exemple, en proposem tres. Com a cosa curiosa, els dos primers tenen en comú que la tasca que fan sembla anar, en cert manera, en sentit contrari respecte a les propietats que, en el món del disseny per ordinador, solen ser les ideals i a les quals tendir. Ambdós redueixen el grau de continuïtat, o suavitat, de la forma inicial, donant, a canvi, una formulació matemàtica *exacta* d'alguns dels objectes *reals* que solen aparèixer, a la pràctica, enlloc dels objectes *ideals*, dels que són només *aproximacions*.

5.3.6.1) Esglaonadors. (Per funcions d'una variable). Com una primera descripció, podem dir que són verbs que converteixen en una funció esglaonada una funció prèvia qualsevol, diguem-li $f(t)$. Entendrem per funció esglaonada una funció $\bar{f}(t)$ que és **constant a trossos**, presentant discontinuïtats de salt al canviar de “tros”. A més, considerarem que el conjunt de trossos és finit. Per cada cas presentarem quatre solucions esglaonades, segons els costats de la continuïtat en cada salt i a quin costat de la gràfica de f queda la de \bar{f} . Combinacions d'aquestes poden donar encara més variants.

Començarem per abordar un problema més concret i precís, sense referència, de moment, a cap $f(t)$, encara que podem pensar que hi és de manera subjacent:

Donats $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, es tracta de formular quatre funcions esglaonades segons les següents definicions:

$$\text{esc}_{dd}(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t < t_1 \\ x_i & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ x_n & \text{si } t_n \leq t \end{cases}$$

$$\text{esc}_{de}(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t \leq t_1 \\ x_i & \text{si } t_i < t \leq t_{i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ x_n & \text{si } t_n < t \end{cases}$$

$$\text{esc}_{ed}(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t < t_0 \\ x_i & \text{si } t_{i-1} \leq t < t_i, i = 1, \dots, n-1 \\ x_n & \text{si } t_{n-1} \leq t \end{cases}$$

$$\text{esc}_{ee}(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t \leq t_0 \\ x_i & \text{si } t_{i-1} < t \leq t_i, i = 1, \dots, n-1 \\ x_n & \text{si } t_{n-1} < t \end{cases}$$

Es poden veure il·lustrades dues d'elles en la figura 5.3.29 (c) i (d). La denominació “esc” fa referència al fet de ser esglaonades, mentre que, entre els subíndexs, (e = esquerra, d = dreta), el primer especifica a quin costat dels punts (t_i, x_i) queda cada tram constant i el segon, per quin costat és contínua la funció

5.3. Verbs.

esglaonada. De moment, podem considerar com $f(t)$ la funció poligonal (o *spline* de grau 1) que interpola els punts (t_i, x_i) .

Si recordem les definicions i propietats de les variants de la part entera, vistes a l'apartat de lletres, és fàcil veure que, per aconseguir una formulació explícita i global d'aquestes funcions definides per casos, només cal construir dues funcions poligonals, contínues i lineals a trossos, $\mathbf{a}(t)$ i $\mathbf{b}(u)$, que verifiquin el següent (figura 5.3.29(b)):

$\mathbf{a}(t_i) = i$, per $i = 0, \dots, n$; amb $\mathbf{a}'(t) = 1$ per $t \notin [t_0, t_n]$;

$\mathbf{b}(i) = x_i$, per $i = 0, \dots, n$; amb $\mathbf{b}'(u) = 0$ per $u \notin [0, n]$.

Això es pot aconseguir usant les funcions $\mathbf{j}_{a,b,h}(t)$ de (1.2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \min(t - t_0, 0) + \max(t - t_n, 0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{j}_{t_{i-1}, t_i, 1}(t) = \\ &= \frac{(t - t_0) - |t - t_0|}{2} + \frac{(t - t_n) + |t - t_n|}{2} + \sum_{i=1}^n \mathbf{j}_{t_{i-1}, t_i, 1}(t); \\ \mathbf{b}(u) &= x_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{j}_{i-1, i, x_i - x_{i-1}}(u). \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

Amb aquestes dues funcions, tenim que

$$\begin{aligned} \text{esc}_{dd}(t) &= \mathbf{b}(\underline{[\mathbf{a}(t)]}) \\ \text{esc}_{de}(t) &= \mathbf{b}(\underline{[\overline{\mathbf{a}(t)}]}) \\ \text{esc}_{ed}(t) &= \mathbf{b}(\overline{[\mathbf{a}(t)]}) \\ \text{esc}_{ee}(t) &= \mathbf{b}(\overline{[\overline{\mathbf{a}(t)}]}) \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

Observacions:

a) El valor 1 per $\mathbf{a}'(t)$ fora de $[t_0, t_n]$ només pretén assegurar que \mathbf{a} sigui bijectiva i per tant es pot substituir per qualsevol altre valor positiu.

b) Si el punt de partida és una certa funció $f(t)$ i es vol esglaonar en certs nodes $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, només cal prendre $x_i = f(t_i)$ i procedir com abans (figura 5.3.29(a)). D'aquí la qualificació d'aquests verbs com a compostos, perquè la funció \mathbf{a} altera el domini de f , i per tant, és una acció genètica per mutació,

mentre que la \mathbf{b} , combinada amb les variants de la part entera, actuen com un verb quirúrgic.

c) Si $x_i = t_i$, llavors $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$ a $[t_0, t_n]$ i es pot aconseguir un esglaonat arbitrari i desigual amb els vèrtexs dels graons sobre la identitat.

d) Així mateix, si definim

$$\begin{cases} \text{esc}_{s^*}(t) = \max(\text{esc}_{e^*}, \text{esc}_{d^*}) \\ \text{esc}_{i^*}(t) = \min(\text{esc}_{e^*}, \text{esc}_{d^*}) \end{cases} \quad (5.3.42)$$

(* = d ó e).

s'aconsegueix una funció esglaonada $\text{esc}_{s^*}(t) \geq f(t)$ (s , per superior) que queda per sobre de la f , amb continuïtat per la dreta o per l'esquerra segons $*$ i una $\text{esc}_{i^*}(t) \leq f(t)$ que en queda per sota (veure figura 5.3.29 (e) i (f)).

Nota: (Relació amb integració). Suposem que tenim una funció integrable i fitada $y = g(x)$, definida dins d'un interval $[x_a, x_b]$, amb un recorregut dins d'un interval $[y_a, y_b]$. Usant les idees d'aquest apartat, es pot veure que la funció $g(\lfloor x \rfloor)$ produeix un esglaonat de la g amb salts sobre els enters. Refinant això, podem fer que els punts de salt siguin $n + 1$ (comptant els extrems del domini), produint una partició del domini en n subintervalls d'igual longitud, llavors la

funció $g\left(x_a + \frac{(x_b - x_a)}{n} \cdot \left\lfloor \frac{n}{(x_b - x_a)} \cdot ((x - x_a)) \right\rfloor\right)$ és la g esglaonada sobre la

base d'aquesta partició, coincidint amb l'esglaonat que produeix l'operador esc_{dd} .

Canviant $\lfloor \cdot \rfloor$ per $\lceil \cdot \rceil$ tenim l'esglaonat corresponent a esc_{ed} . Fent "max" o "min" de les dues, com a l'observació d), tenim escalats, superiors o inferiors respectivament, que, integrats sobre $[x_a, x_b]$, no són altra cosa que sumes de Riemann superiors o inferiors que, quan n tendeix a infinit, tendeixen a l'integral de g sobre $[x_a, x_b]$. Però ara tenim, a més, una formulació explícita i global d'aquestes funcions esglaonades que aproximen la g . De fet la pròpia esc_{dd} o qualsevol de les altres tres, també donen aproximacions que, a falta d'una comprovació rigorosa, de ben segur són convergents i per tant poden donar lloc a teories d'integració equivalents a la de Riemann.

De la mateixa manera, la funció $\lceil g(x) \rceil$ produeix un esglaonat de la g , però ara només amb valors enters, és a dir, hi ha un salt cada vegada que la gràfica de la g travessa una ordenada entera. Si amb $g(\lfloor x \rfloor)$ i els seus refinaments, la pauta dels salts venia donada per les abscisses, ara, amb $\lceil g(x) \rceil$, són les ordenades les que

marquen els salts. Anàlogament al cas anterior, aquí també podem refinar: la

funció $y_a + \frac{(y_b - y_a)}{n} \cdot \left[\frac{n}{(y_b - y_a)} \cdot ((g(x) - y_a)) \right]$ escala la gràfica de la g de

manera que el recorregut $[y_a, y_b]$ queda dividit en $n+1$ graons o terrasses equiespaiades. En aquest cas, llevat de la continuïtat lateral en els punts de salt (que no és rellevant alhora d'integrar) aquest esglaonat correspon al d'un esc_{i^*} (escalat inferior) per una tria adequada de nodes x_i ; concretament, han de ser les antiimatges dels valors de la g que corresponen a cada terrassa. Usant les altres variants de la part entera, tenim formulacions similars. Si en el cas anterior hem obtingut formulacions de funcions esglaonades relacionades amb la teoria d'integració de Riemann, ara aquestes funcions, explícites i globals, són de la família de les empleades dins la teoria d'integració de Lebesgue.

5.3.6.2) Poligonitzador de corbes. Aquest nou exemple de verb que proposem també fa una tasca que sembla contrària a la que habitualment es desitja en l'àmbit del disseny: converteix en poligonal una corba possiblement més suau, o sigui, li redueix el grau de continuïtat fins grau C^0 , deixant-la com a lineal entre cada dos vèrtexs consecutius. De totes maneres, aquesta proposta té quelcom d'homenatge a la realitat pràctica. En efecte: per molt que es pretengui ignorar-ho apel·lant al fet de que, a efectes pràctics, la qualitat és tan bona com es vulgui i que l'error és inapreciable, el cert és que, encara que una corba sigui C^∞ i en tinguem la seva formulació disponible, **la corba que realment es dibuixa és una poligonal** (o sigui, una subclasse de les corbes C^0), que té tants vèrtex com es vulgui, però en nombre finit, situats sobre la corba teòrica. Això és degut a que la corba autèntica només es pot avaluar per un nombre finit de valors de la variable. Aquestes avaluacions donen lloc a punts certs de la corba; entre dos d'ells consecutius el que es fa és aplicar l'algorisme de dibuix d'un segment entre dos punts. Doncs bé, perquè no disposar de formulacions matemàtiques explícites de les corbes que realment es dibuixen? Aquesta és una de les motivacions d'un operador com aquest. Però almenys tenim una altra. De vegades, es vol realment una corba poligonal però és més fàcil parametritzar una corba suau que passi pels seus vèrtexs; pensis, per exemple, en un polígon inscrit en una el·lipse, o en el cas de la figura 5.3.30 (a) i (b). Si només es vol dibuixar la poligonal, una solució és usar la parametrització de la corba suau i avaluar-la *només* pels valors del paràmetre que corresponen als citats vèrtexs, unint-los amb segments rectes a nivell de dispositiu de sortida. Però, llavors, no tenim control sobre els punts interiors de cada segment, la corba “salta instantàniament” d'un vèrtex a l'altra, mentre que, a vegades, cal poder passar per cada punt de la corba poligonal. Si aquesta corba poligonal, per exemple, és la base d'una superfície, només podrem dibuixar panys trapezoïdals entre dos vèrtexs consecutius (figura 5.3.30(d)). Si

sobre cada tram lineal de la poligonal, la superfície havia de tenir “coses més riques” en l'altra dimensió (ondulacions, variacions de forma i longitud en les seccions transversals a la corba, etc., com en el cas de la figura 5.3.30(c)), tot això no es pot reflectir per mitjà d'aquest “truc”. En canvi, amb la poligonització que proposem, es parametriza realment tota la poligonal; cadascun dels seus punts correspon a un valor del paràmetre i , a més, cada tram lineal és recorregut amb velocitat uniforme (fig.(e)).

Aleshores, i de manera més formal, el problema és el següent:

Sigui $\mathbf{j}:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametrizada de l'espai. Sigui $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partició del seu domini de definició (preferiblement amb els t_i equiespaiats, com és el cas més freqüent alhora de dibuixar una corba). Es vol parametrizar la corba poligonal que té per vèrtexs els punts $\mathbf{J}(t_i)$.

La solució que proposem és la següent:

Sigui $\mathbf{d}:[0,n] \rightarrow [a,b]$ una funció monòtona creixent estricta tal que, per a tot $i \in [0,n] \cap \mathbb{N}$, $\mathbf{d}(i) = t_i$. Si els t_i estan equiespaiats aquesta funció pot reduir-se a una recta; sinó, és la funció inversa d'una del tipus $\mathbf{a}(t)$ que hem vist dins de l'apartat anterior, corresponents als verbs esglaonadors (fórmules (5.3.40)), i, per tant, construïble a partir de les funcions $\mathbf{j}_{a,b,h}(t)$ de (1.2.3). Si recordem que $[x]$ denota la part entera de x (apartat 5.1.2.2)), és immediat veure que

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}([t])) = \mathbf{J}(t_i); \quad \forall t \in [i, i+1),$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}([t+1])) = \mathbf{J}(t_{i+1}); \quad \forall t \in [i+1, i+2).$$

Llavors, es tracta d'interpolar linealment $\mathbf{J}(t_i)$ i $\mathbf{J}(t_{i+1})$ successivament. Això s'aconsegueix per mitjà de la funció $\bar{\mathbf{p}}_j:[0, n-1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$\bar{\mathbf{p}}_j(t) = ([t+1]-t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{d}([t])) + (t-[t]) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{d}([t+1])). \quad (5.3.43)$$

Aquest verb es considera compost perquè combina el tipus genètic per mutació, al alterar el domini per mitjà de la funció \mathbf{d} , i el genètic per encreuament, al combinar $\mathbf{J}(\mathbf{d}([t]))$ i $\mathbf{J}(\mathbf{d}([t+1]))$.

Aquesta solució per poligonitzar una corba resulta apropiada si el nombre de vèrtexs és arbitràriament gran i els valors dels nodes t_i estan equiespaiats, perquè llavors la funció \mathbf{d} és lineal i la seva expressió no creix amb el nombre de nodes, com és el cas de l'espiral d'Arquímedes de la figura 5.3.30(a), que és infinita. En cas que hi hagi relativament pocs punts i amb valors dels nodes no equiespaiats, és recomanable prendre els punts $\bar{P}_i = \mathbf{J}(t_i)$ i construir una poligonal

segons el procediment descrit en el capítol 1, paràgraf 1.7.1. Aquesta darrera solució és també millor si la poligonal té un gran nombre de nodes no equiespaiats però és periòdica; llavors es pot parametritzar un període segons el citat procediment de §1.7.1 i després es periodifica usant un operador periodificador de l'apartat 5.3.1.1). En el cas d'un nombre indefinit de nodes, no equiespaiats i sense periodicitat, cap de les dues solucions treballa bé, malgrat que segueixin sent solucions des del punt de vista teòric.

Nota: (Extensió al cas de superfícies). En el cas de corbes, s'ha "poligonitzat" per mitjà de successives interpolacions lineals entre parells de punts-vèrtexs consecutius. Vist això, és un exercici relativament senzill "copiar" el procés per aconseguir una mena de "poliedrització" d'una superfície $\vec{s}(s,t)$, parametritzada segons una trama quadriculada. En efecte, per cada quatre punts $\vec{s}(s_i, t_j)$, $\vec{s}(s_{i+1}, t_j)$, $\vec{s}(s_i, t_{j+1})$ i $\vec{s}(s_{i+1}, t_{j+1})$ cal produir un pedaç de paraboloid hiperbòlic, que no és més que l'interpolació bilineal entre quatre punts (l'equivalent per objectes bidimensionals de la interpolació lineal entre dos punts). Per això, només cal discretitzar els paràmetres a base de funcions del tipus \mathbf{d} i de la part entera, just com acabem de veure, i fer interpolació bilineal dins la malla discretitzada resultant.

5.3.6.3) Periodificadors de corbes paramètriques. A l'apartat 5.3.1.1) hem vist operadors que periodifiquen gràfiques de funcions. Pel cas d'una corba paramètrica $\vec{\mathbf{j}}(t)$ del pla o de l'espai, si apliquem mimèticament el mateix procediment, podem pensar que només cal periodificar cada funció component. Però quan es periodifica així, es periodifica només la imatge, no la variable, i en una corba paramètrica totes les seves components són imatge, per tant, si fem **només** el que hem dit, no obtindrem una corba periòdica sinó que tindrem un únic motiu repetit sobre ell mateix, en el mateix lloc, indefinides vegades, junt amb un salt cada vegada del darrer punt del motiu al primer. Si volem que cada còpia del motiu aparegui desplaçada de l'anterior, de manera que faci com una sanefa, cal que a la periodificació de les components hi afegim una translació, constant per cada còpia del motiu i diferent d'una còpia a l'altra. En concret, si la corba és $\vec{\mathbf{j}}(t)$ i està definida sobre $[a,b]$, $\vec{P}_0 = \vec{\mathbf{j}}(a)$ és el primer punt del motiu a periodificar, \vec{P}_1 és el punt on ha d'anar el primer punt de la **següent còpia** del motiu i diem $\vec{v} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$, llavors, quan s'ha acomplert un període, hem de sumar \vec{v} a la corba perquè no es superposi a l'anterior còpia; quan s'han acomplert dos períodes, cal sumar $2\vec{v}$, etc. En particular, si volem que la corba resultant sigui contínua, com que $\vec{\mathbf{j}}(b)$ és el darrer punt del motiu, cal definir $\vec{P}_1 = \vec{\mathbf{j}}(b)$. Veure figura 5.3.31(a)

Si a un motiu bàsic se li han d'aplicar certes simetries pròpies de les sanefes abans de repetir-lo linealment, suposem que això ja s'ha fet i que a la corba paramètrica definida sobre $[a, b]$ només se li ha d'aplicar una repetició lineal amb període $(b - a)$, comptant a partir de $t = a$. Llavors (recordar la part entera, dins l'apartat de lletres compostes), la funció $\left[\frac{t - a}{b - a} \right]$ pren successivament els valors 0, 1, 2 a partir d' a amb pas $(b - a)$. Només cal multiplicar \vec{v} per aquesta funció i sumar-lo a la corba periodificada. Segons la notació de 5.3.1, la corba paramètrica periodificada ve donada per

$$\vec{p}(t) = \vec{J}(\text{ps}_{a,b}(t)) + \left[\frac{t - a}{b - a} \right] \cdot \vec{v}. \quad (5.3.44)$$

Veure figura 5.3.31(b). La presència d'aquesta addició d'un múltiple de \vec{v} és la que fa que aquest operador sigui quirúrgic a més de genètic. Respecte a la fórmula, certs casos particulars poden admetre una formulació *ad hoc* que tregui profit de les altres versions periodificadores, que incorporen simetries, etc., a efectes d'estalviar complexitat al motiu inicial i, per tant, cost de computació. A l'apartat 6.1.1.2 n'oferim un exemple dins la temàtica de greques. Però la formulació general que hem presentat aquí, encara que no sempre sigui la millor, és la més còmode i segura conceptualment.

Fins aquí el primer lot d'elements que aportem per substanciar la gramàtica. Sobre aquesta base es pot seguir treballant en la línia d'ampliar el repertori amb noves lletres, paraules i verbs, així com millorant el cost i les prestacions de les ja existents. La pròpia manera d'elaborar els presents, pot suggerir un estil de treball per aquesta tasca que aquí tot just s'ha encetat, per no començar de zero, però són imaginables altres estils, és a dir, no sols la gramàtica és un patrimoni obert sinó que també és oberta la manera d'ampliar-la i millorar-la.

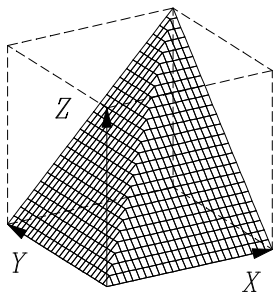
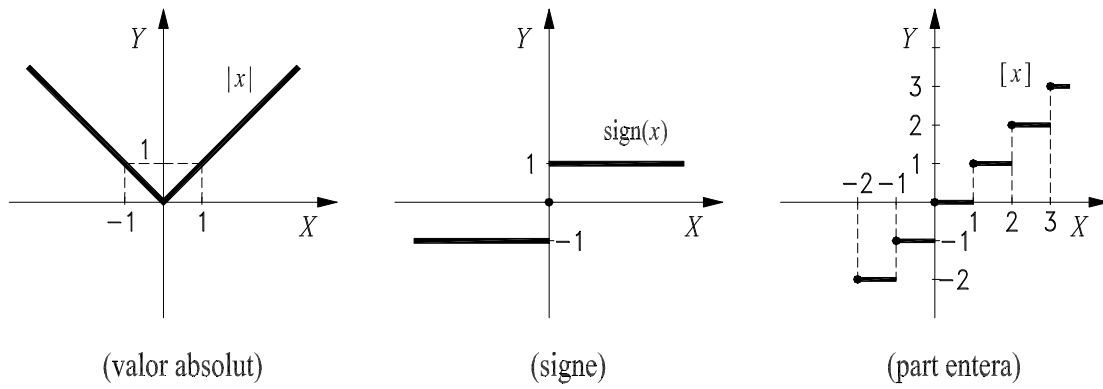
També pot ser útil recordar que les distincions fetes, especialment entre paraules i verbs, són subjectives, lligades als processos mentals del dissenyador, però que, en definitiva, tot són funcions matemàtiques que es combinen entre elles i, al final, el que es té és una formulació explícita (encara que pugui ser molt complicada) de les equacions paramètriques de l'objecte dissenyat. Degut a la potència del software, aquestes equacions permeten el seu dibuix (CAD) o fabricació (CAM). Però no sols això: un software de càlcul combinat amb unes equacions matemàtiques també permet l'aplicació de l'anàlisi matemàtic o, en casos de molta complexitat, del càlcul numèric, per obtenir informacions relacionades amb la derivació (pendents, tangències, curvatures, ...), la integració

5.3. Verbs.

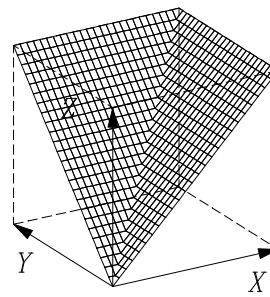
(longituds, àrees, volums, moments d'inèrcia, ...), la resolució d'equacions (interseccions, corbes de nivell, ...), etc., de gran interès en molts processos de disseny.

Per acabar, en el següent i darrer capítol, mostrem diversos exemples d'aplicació d'aquesta "gramàtica" al disseny, especialment el disseny gràfic i l'arquitectònic.

Figures del Capítol 5



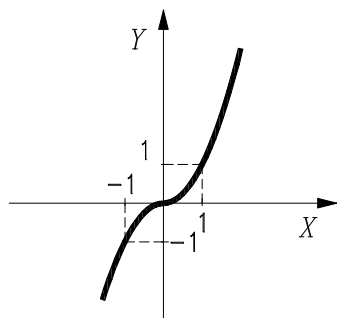
$\text{Min}(x,y)$



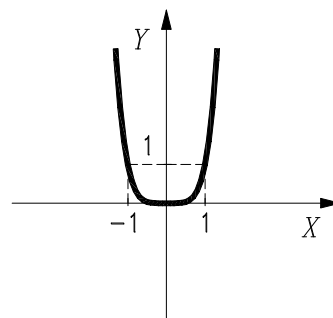
$\text{Max}(x,y)$

fig. 5.1.1. Algunes "lletres" simples.

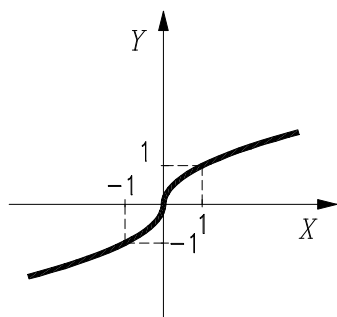
5.4. Figures.



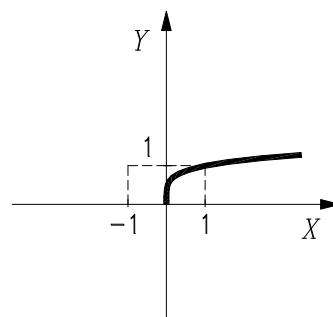
$\text{psp1}_2(x)$



$\text{psp2}_5(x)$



$\text{psa1}_2(x)$



$\text{psa2}_5(x)$

fig. 5.1.2. Exemples de pseudopotències i pseudoarrels.

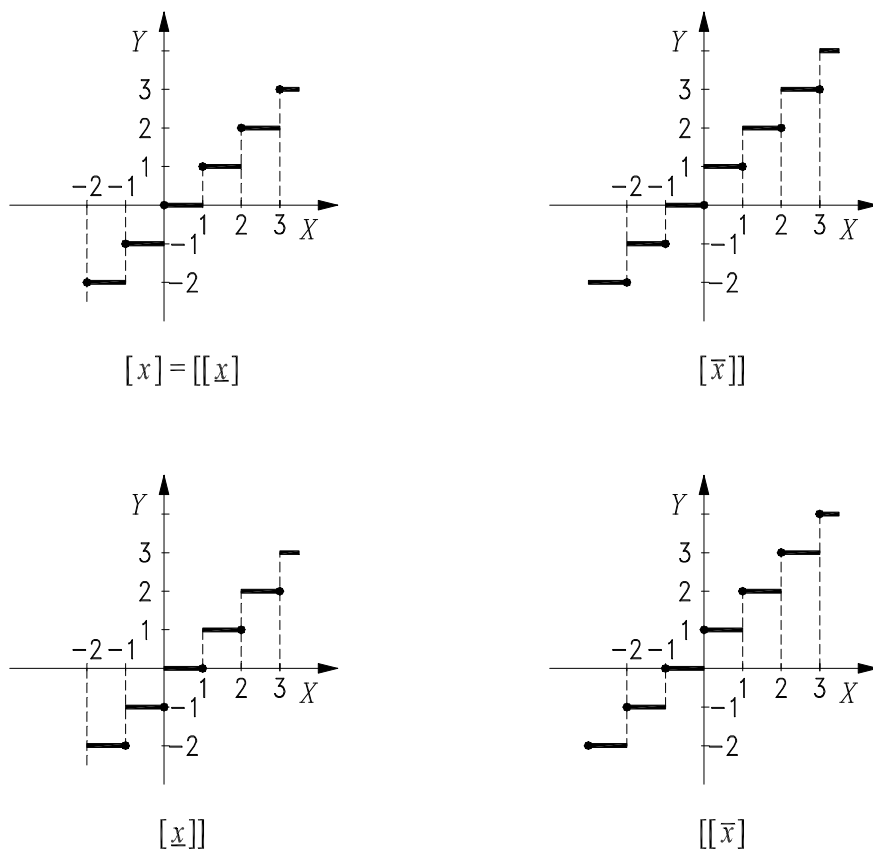


fig. 5.1.3. Les variants de la funció part entera.

5.4. Figures.

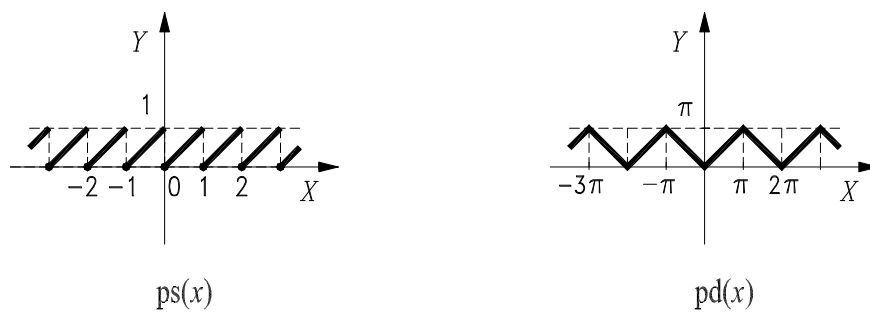


fig. 5.1.4. Les funcions periodificadores.

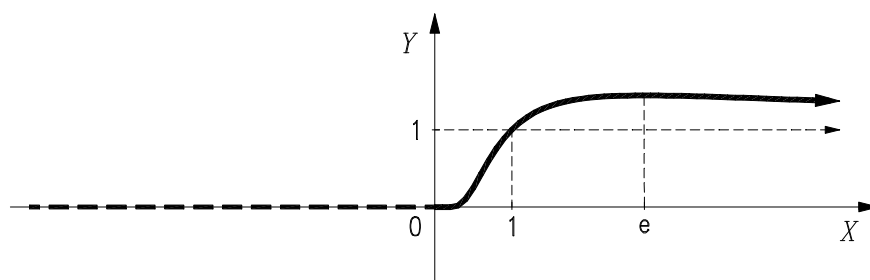


fig. 5.1.5. Funció continf(x).

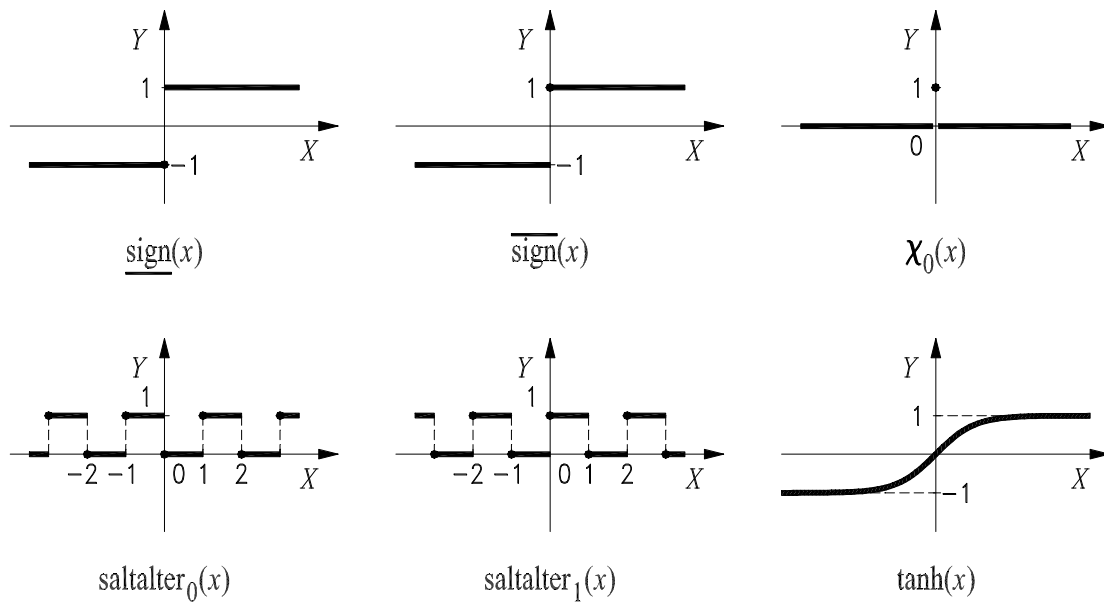


fig. 5.1.6. Funcions de salt.

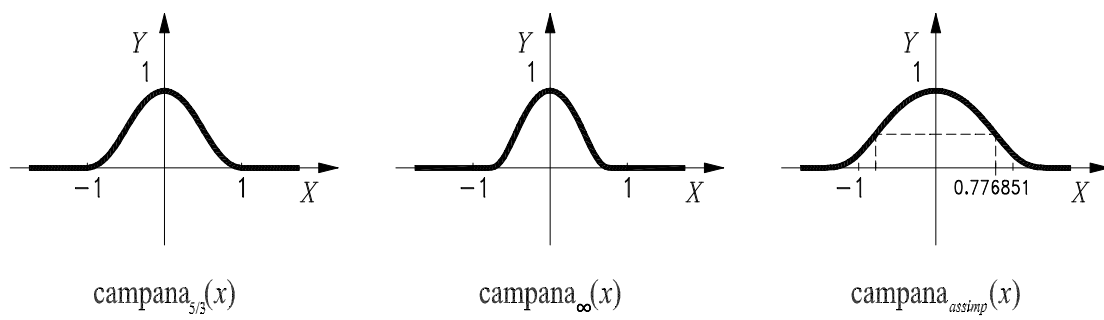
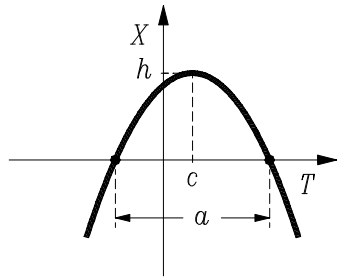
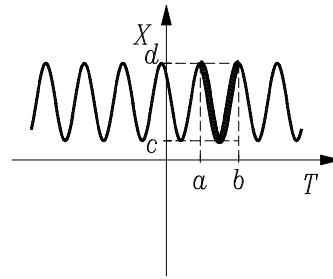


fig. 5.1.7. Funcions campana.

5.4. Figures.

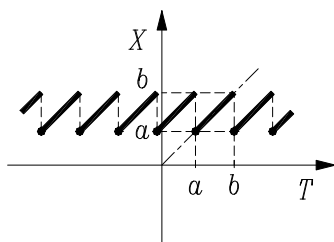


a) polinomis.

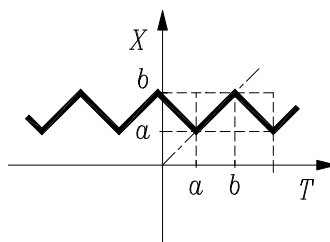


b) sinusoidals.

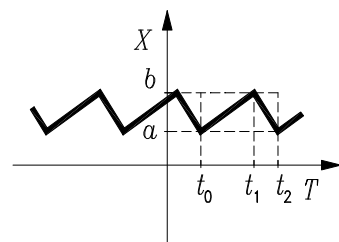
fig. 5.2.1. Primers exemples de paraules.



$ps_{a,b}(t)$



$pd_{a,b}(t)$



$pm_{t_0, t_1, t_2, a, b}(t)$

fig. 5.2.2. Els periodificadors regulables.

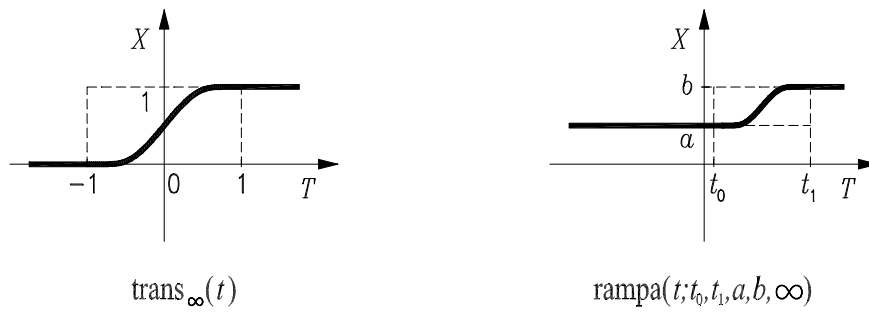


fig. 5.2.3. Transició i rampa C^∞

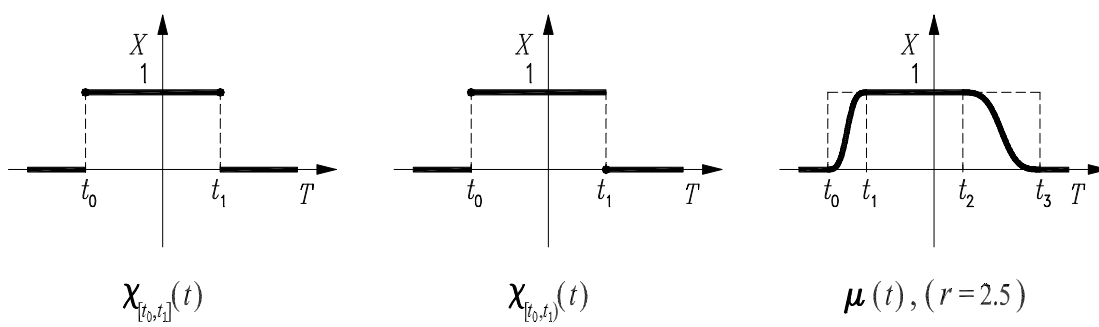


fig. 5.2.4. Funcions característiques.

5.4. Figures.

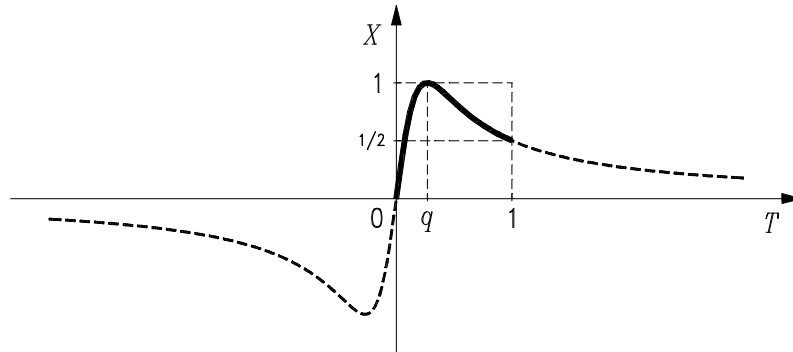


fig. 5.3.1. Gràfica de partida, $f(t)$.

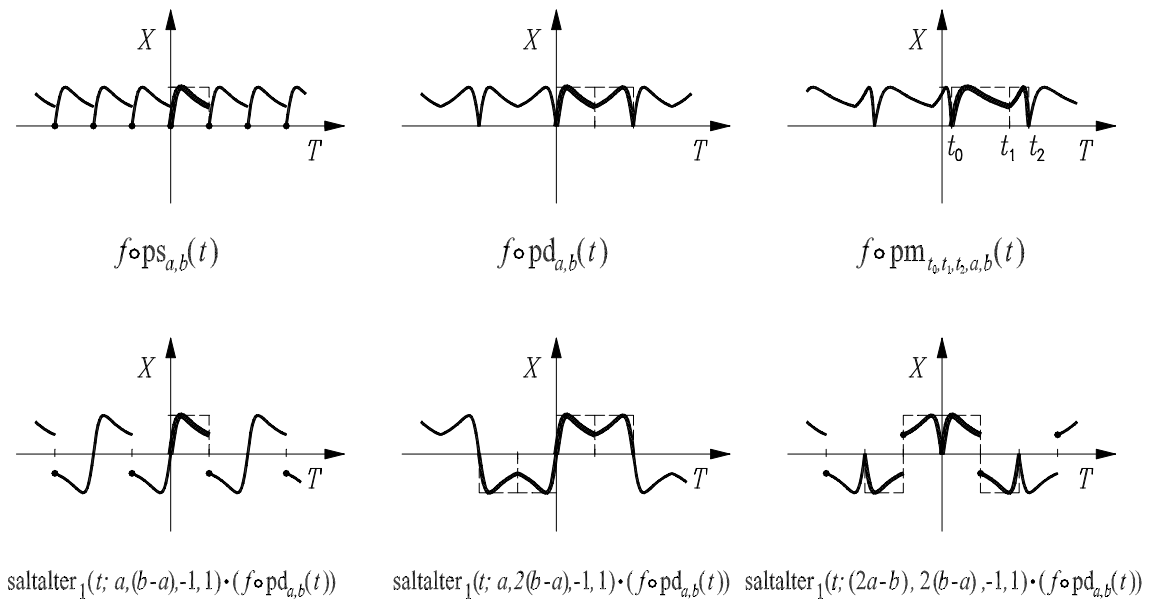


fig. 5.3.2. Periodificadors.

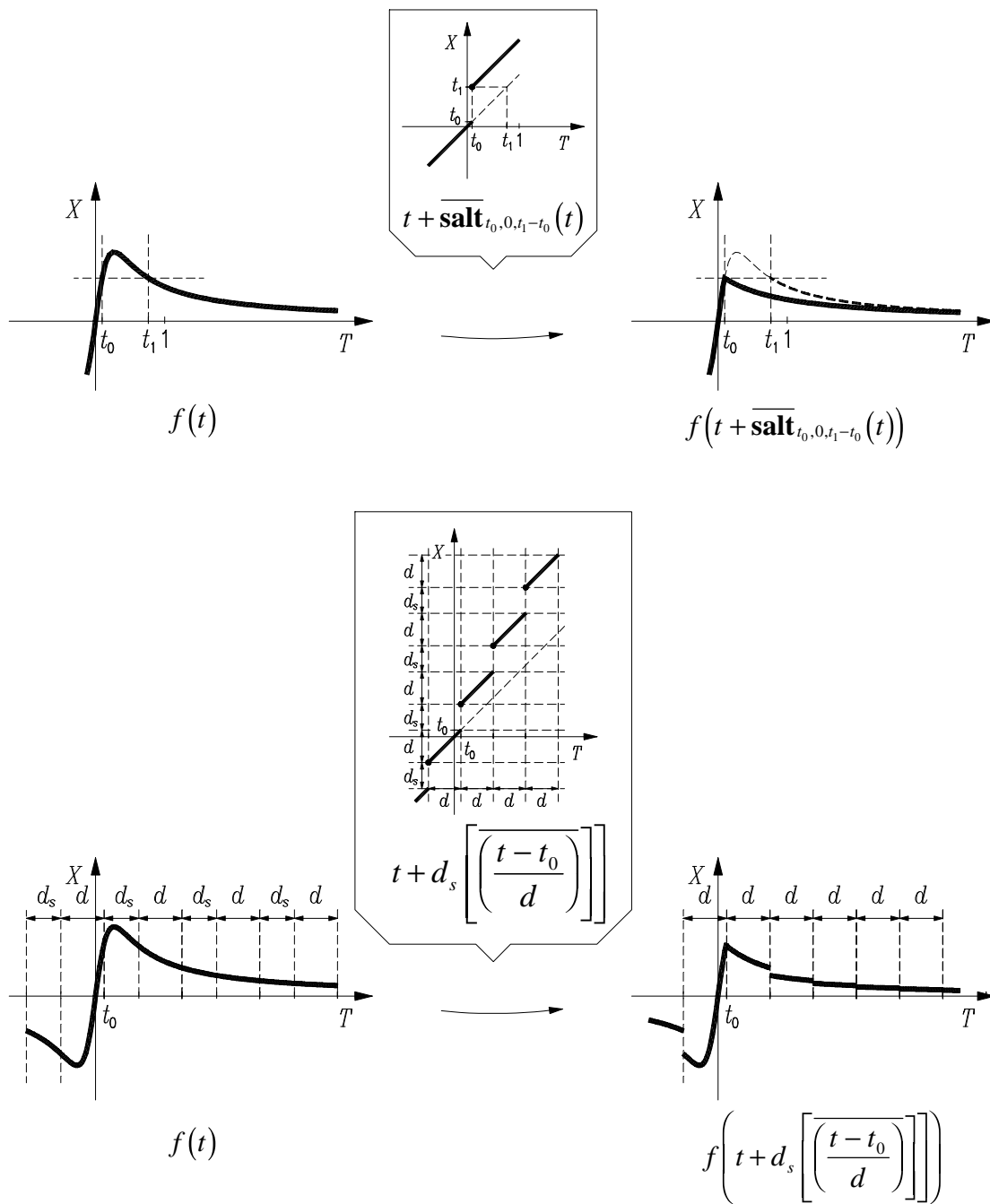


fig. 5.3.3. Tallar i suprimir horitzontalment.

5.4. Figures.

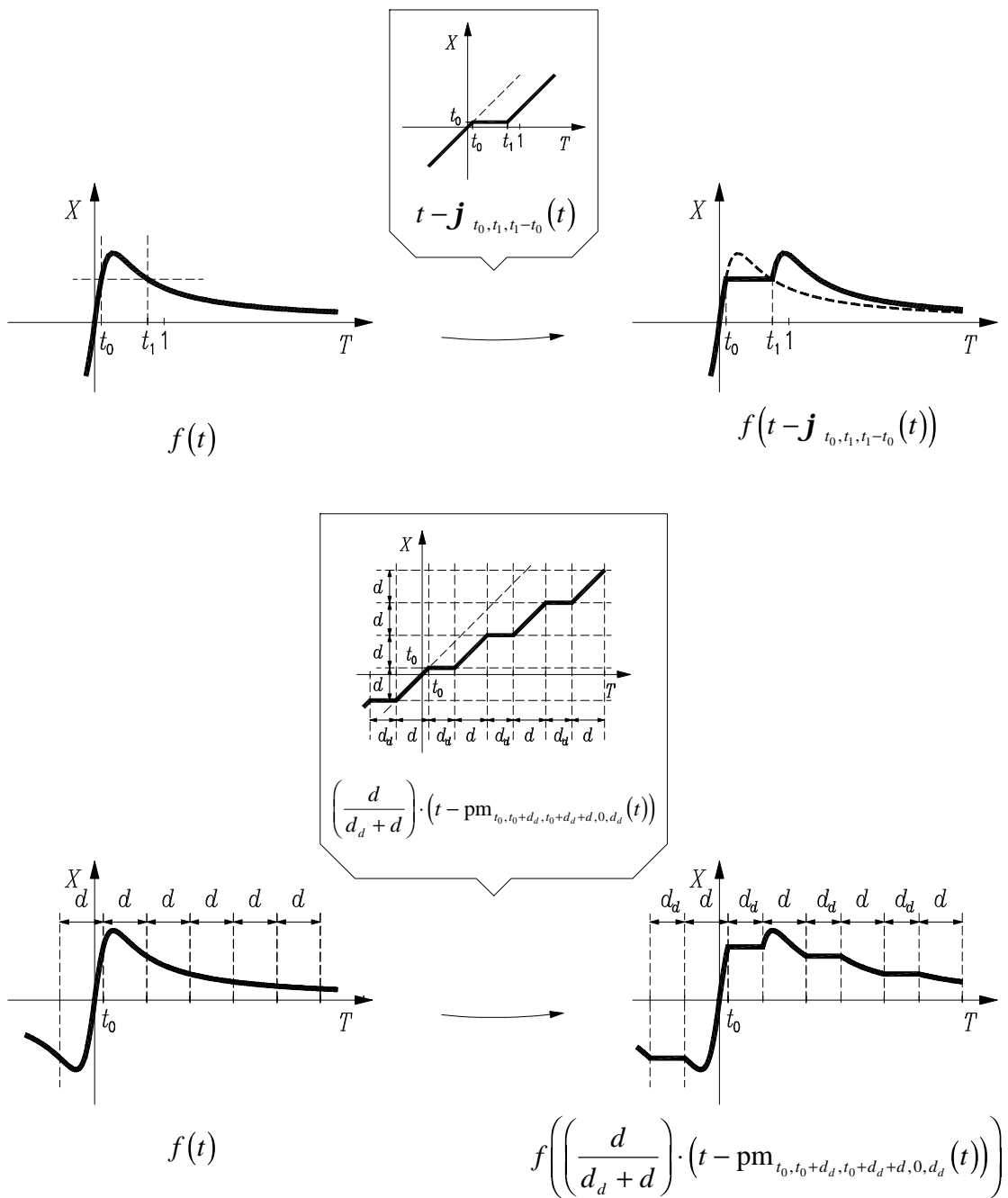


fig. 5.3.4. Tallar i desplaçar horitzontalment.

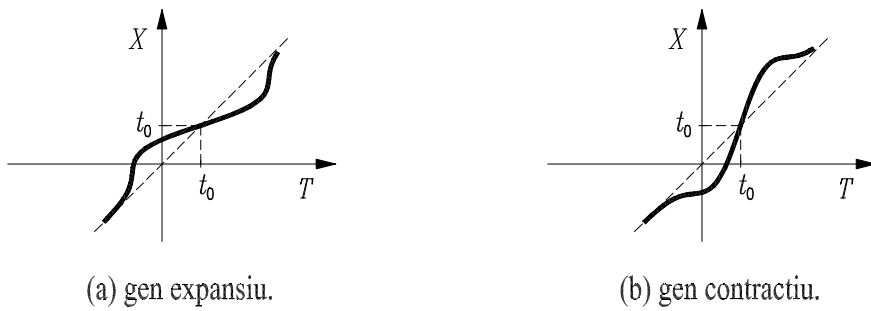


fig. 5.3.5. Gràfiques qualitatives de les funcions *defloc*.

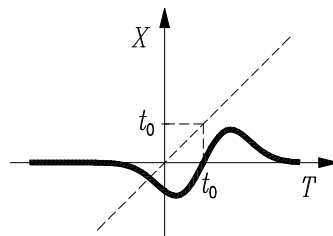


fig. 5.3.6. Funció *osc* (local).

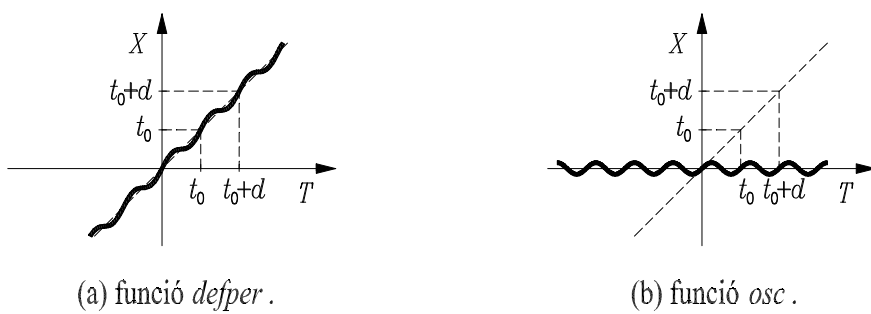


fig. 5.3.7.

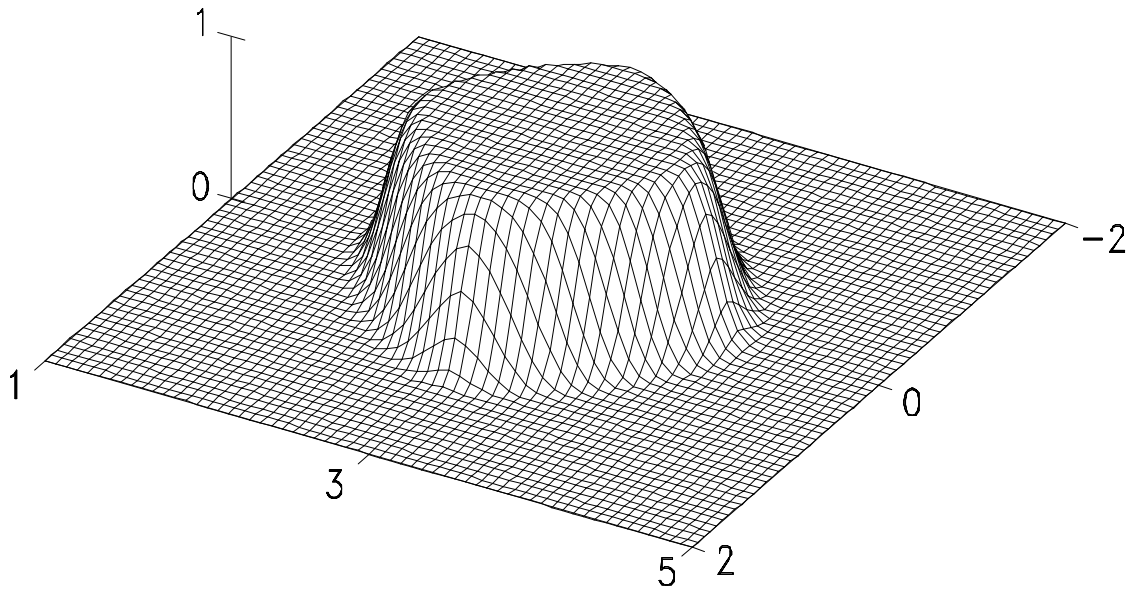


fig. 5.3.8. Funció característica difusa d'una superel·lipse.

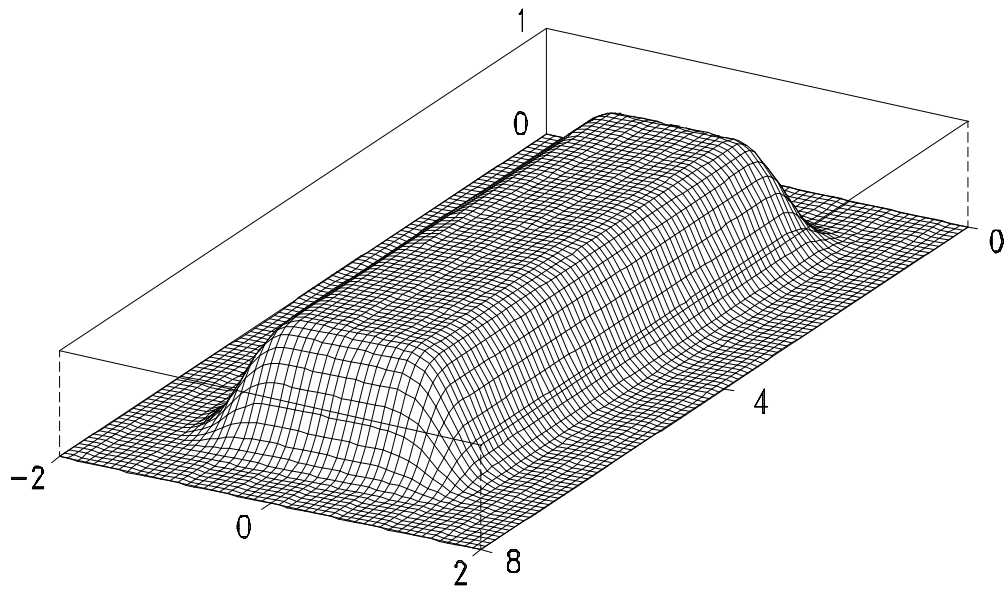
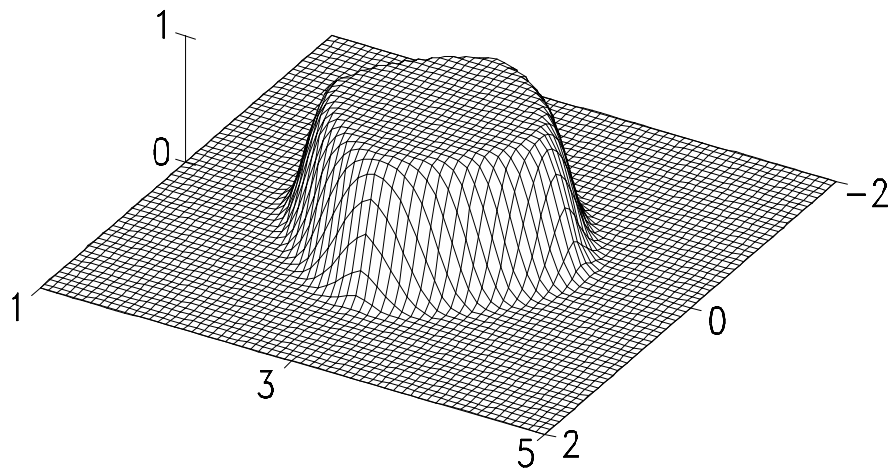
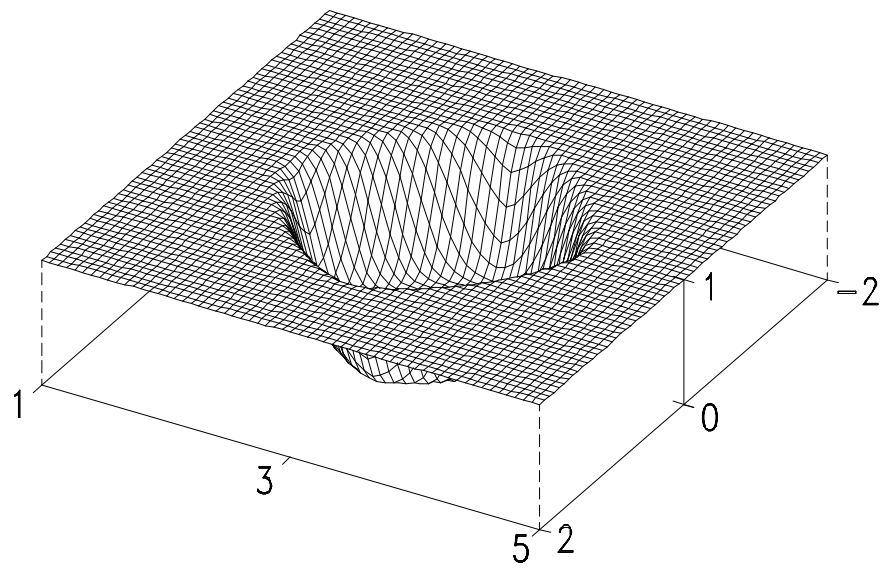


fig. 5.3.9. Funció característica difusa d'un rectangle.

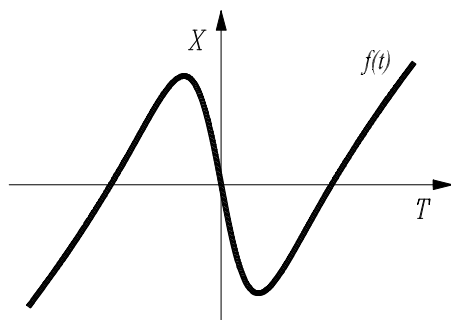


(a) Component de A .

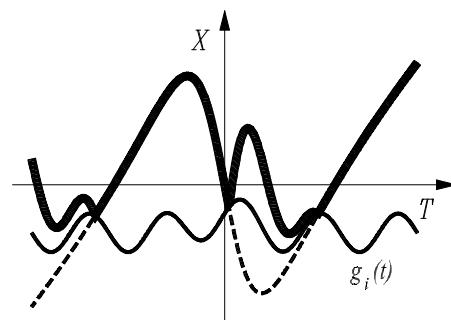


(b) Component de $D \setminus A$.

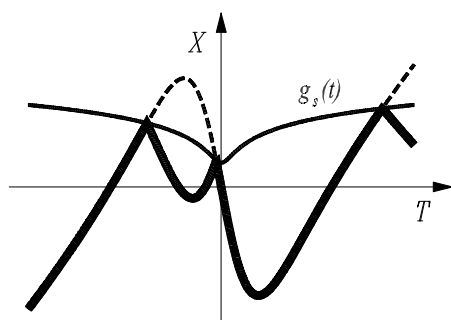
fig. 5.3.10. Exemple de partició de la unitat.



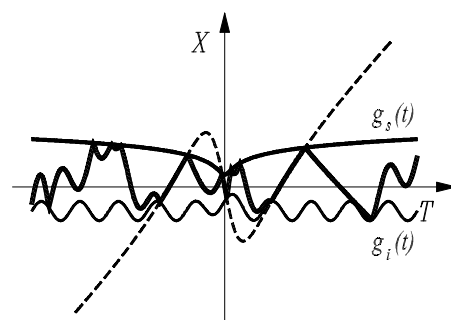
(a) funció de partida.



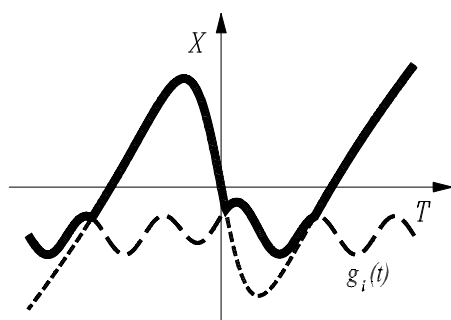
(b) Plec cap amunt.



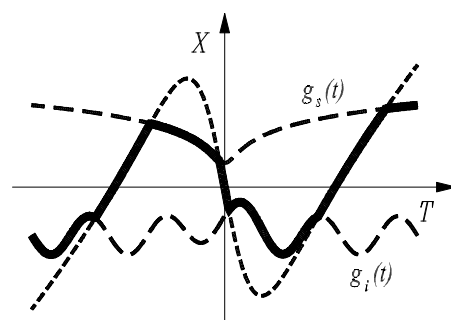
(c) Plec cap avall.



(d) Plec "infinit" (escalat a la meitat).



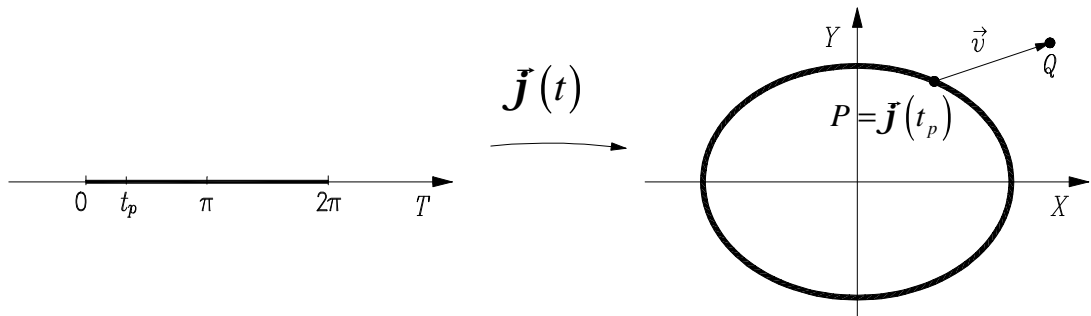
(e) llindar inferior.



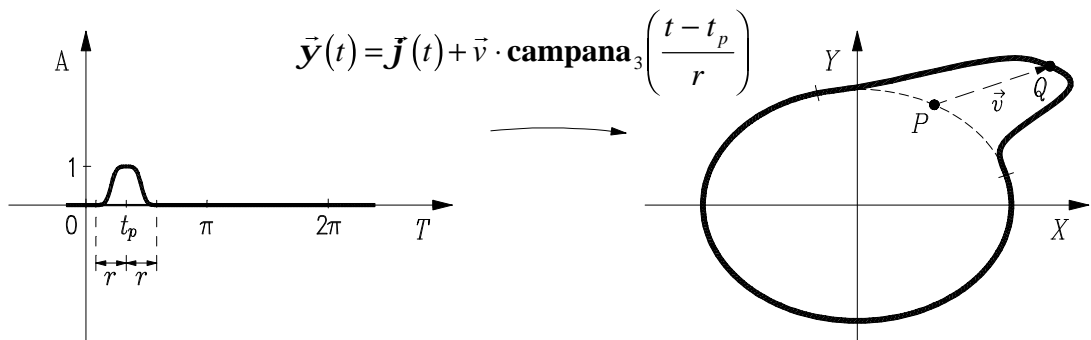
(f) Banda.

fig. 5.3.11. Exemples de plegadors i truncadors.

5.4. Figures.

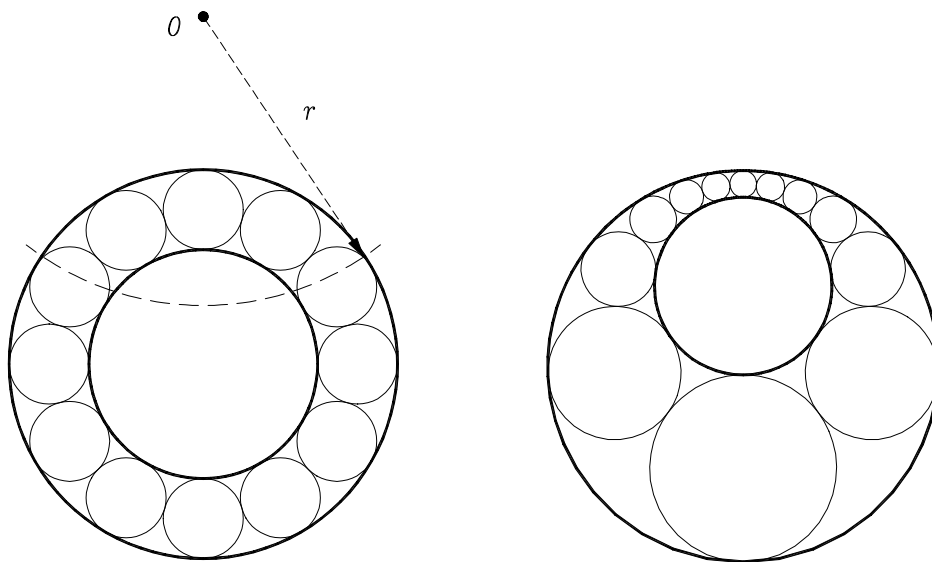


(a) Situació inicial: parametrització d'una el·lipse i vector de desplaçament.



(b) Interval i funció d'abast de la deformació i corba resultant.

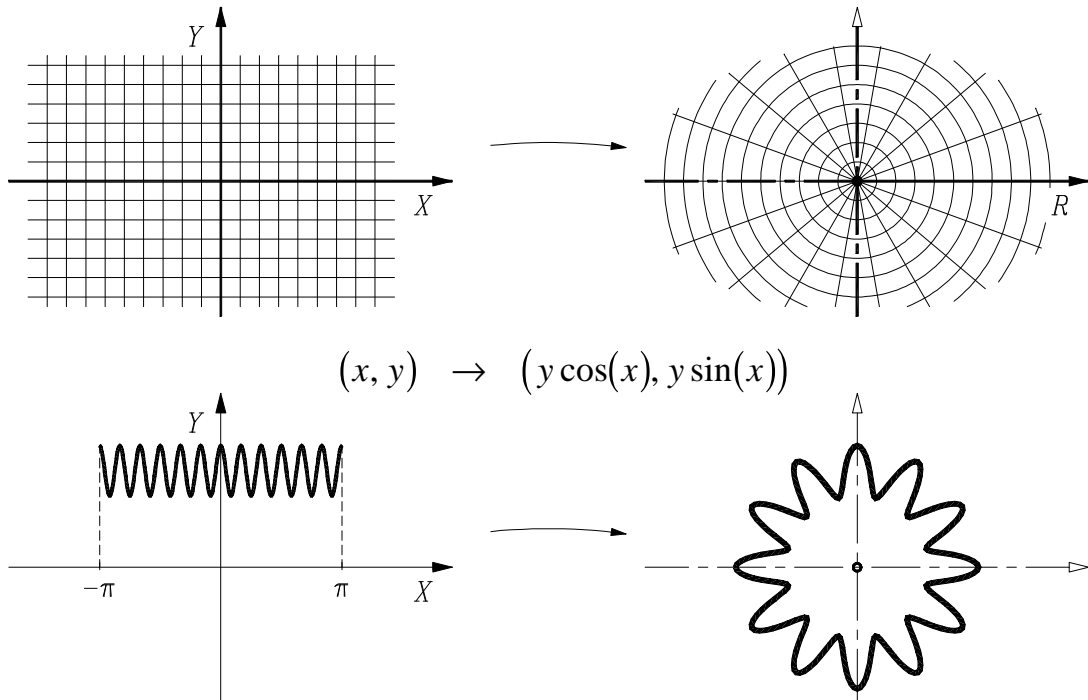
fig. 5.3.12. Exemple de desplaçador local paramètric.



(a) Configuració inicial i centre i radi d'inversió. (b) Resultat d'invertir l'anterior configuració.

fig. 5.3.13. Una aplicació de l'inversió: porisme de Steiner.

5.4. Figures.



(a) trama inicial (cartesiana) i forma de partida. (b) trama transformada (polar) i forma objectiu.

fig. 5.3.14. Il·lustració de les aplicacions del canvi a coordenades polars.

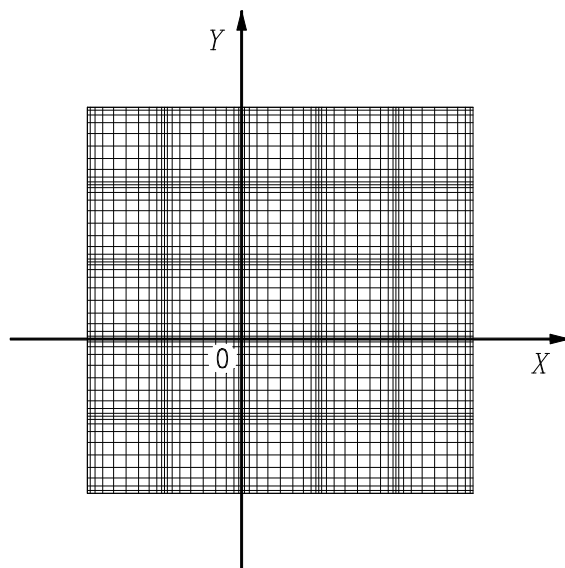


fig. 5.3.15. Efecte de teixit "escocès".

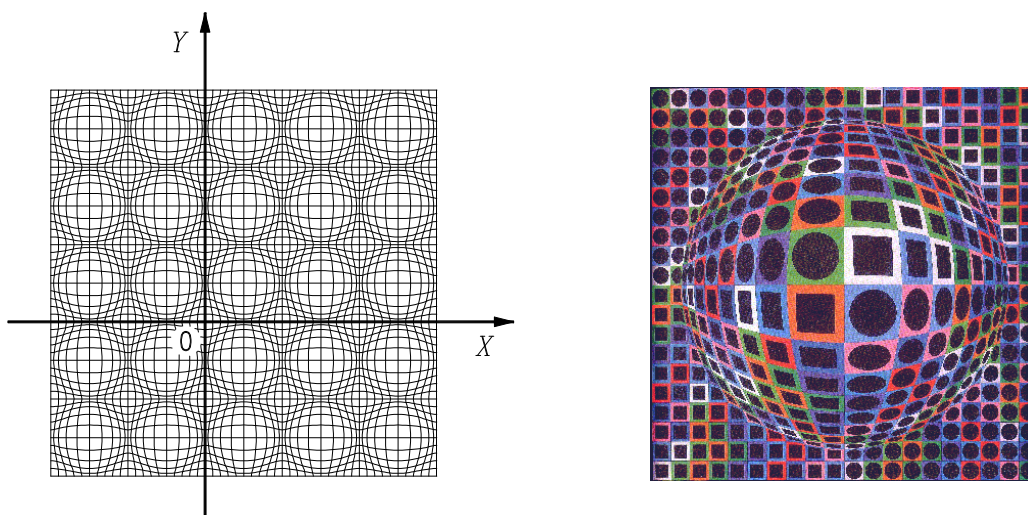


fig. 5.3.16. Trama obtinguda i pintura de Vasarely.

5.4. Figures.

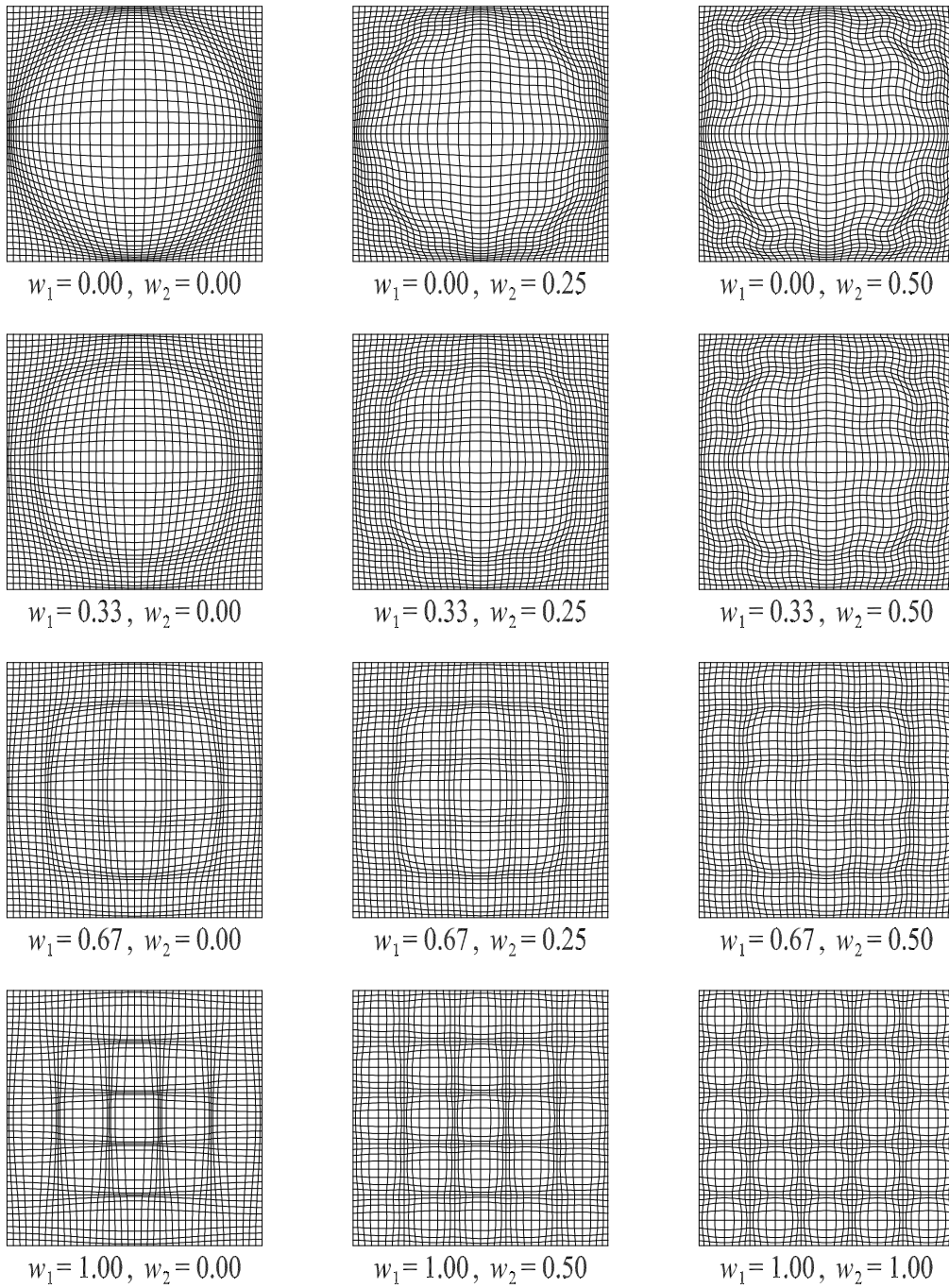
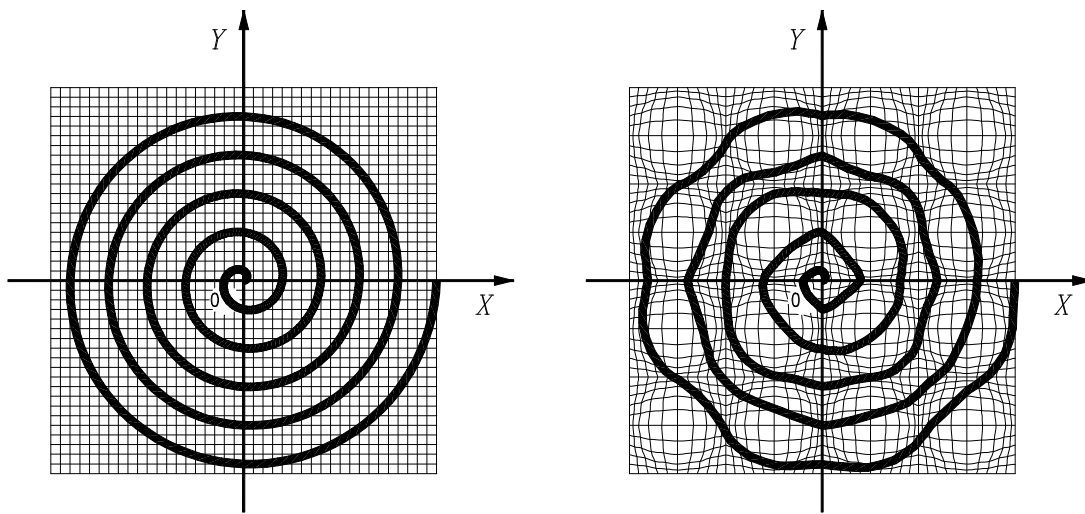


fig. 5.3.17. Taula de deformacions.



(a) espiral i trama subjacent inicials.

(b) espiral resultant després de deformar l'espai.

fig. 5.3.18. Deformació d'una espiral d'Arquimedes.

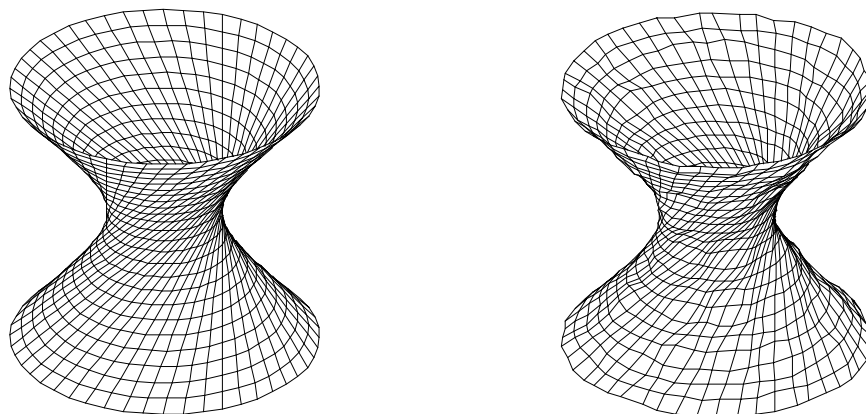


fig. 5.3.19. Deformació d'un hiperboloide d'una fulla.

5.4. Figures.

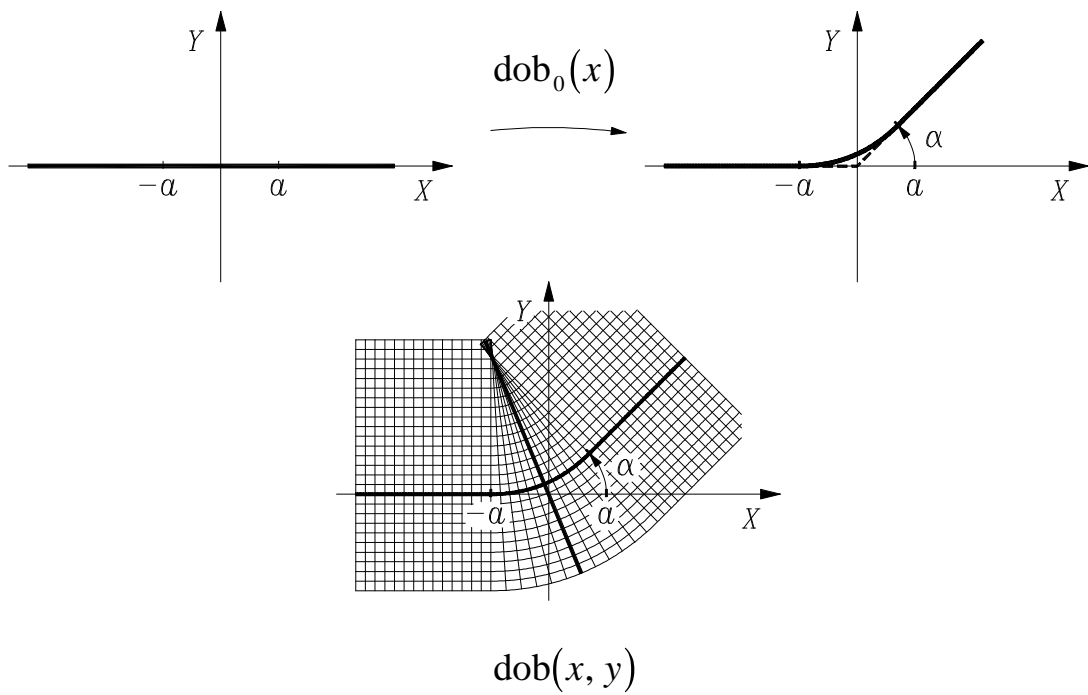


fig. 5.3.20. Deformació de l'eix x i del pla per efecte del doblegador.

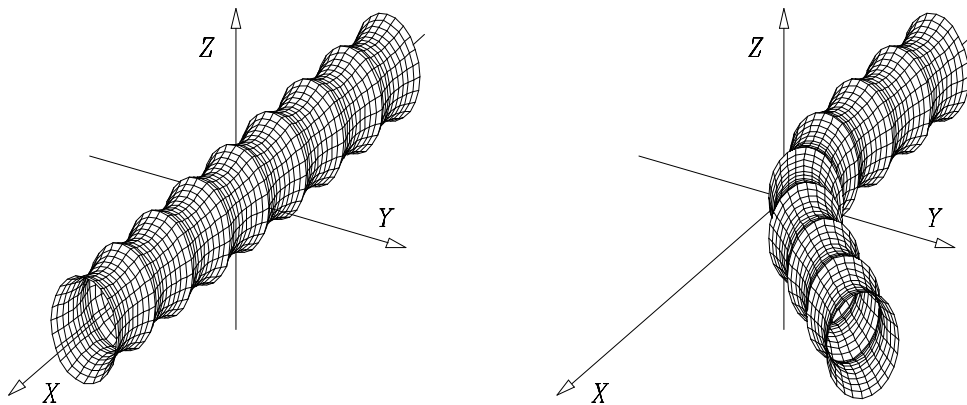


fig. 5.3.21. Doblec d'un objecte allargat.

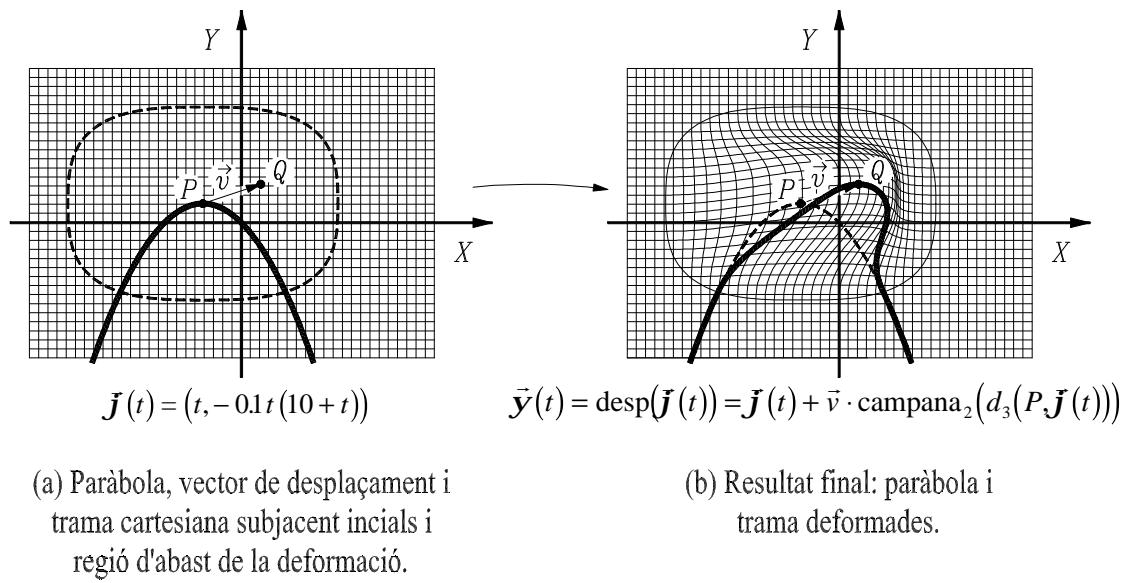


fig. 5.3.22. Exemple de desplaçador local ambiental (bidimensional).

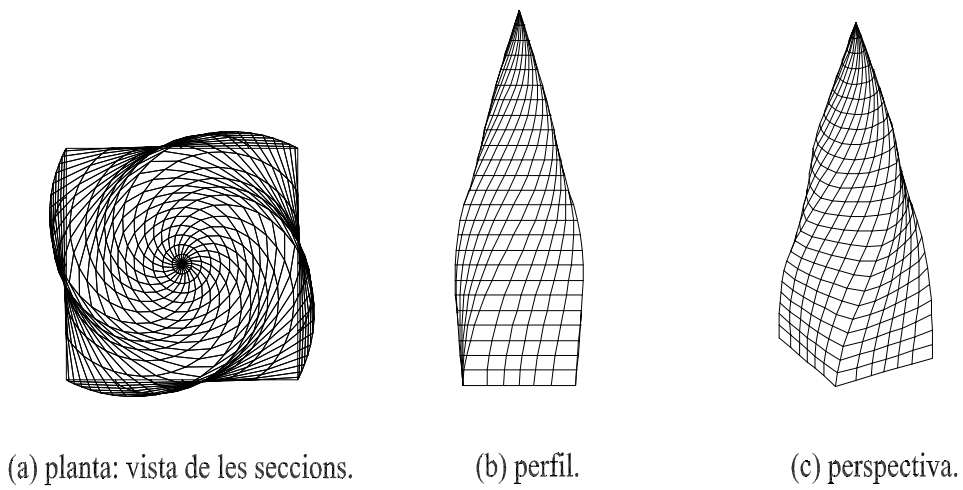


fig. 5.3.23. Exemple de generació dinàmica: cimbori de la catedral del capítol 6.

5.4. Figures.

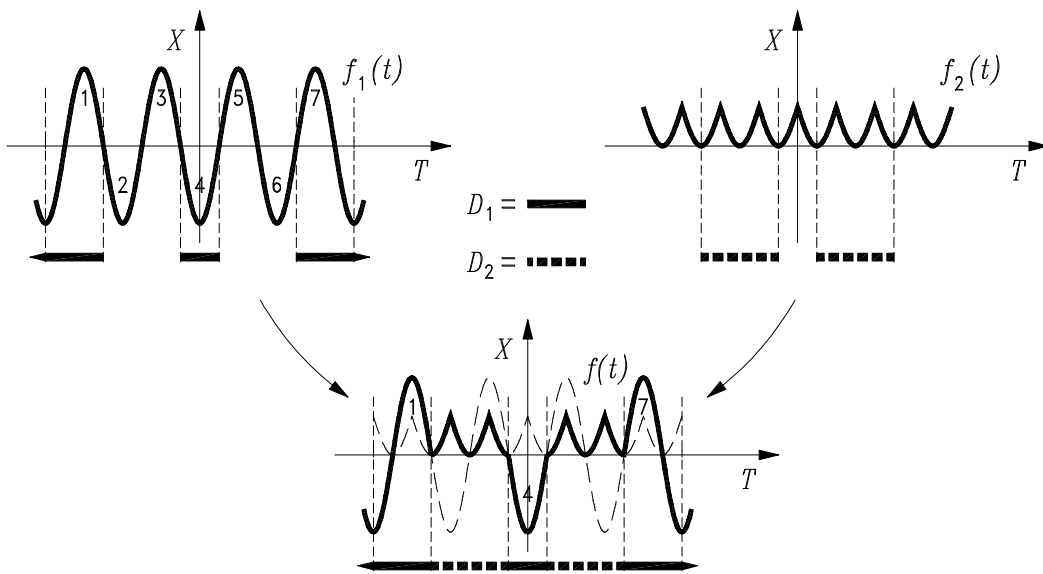


fig. 5.3.24. Exemple de tallar i intercalar sense desplaçament.

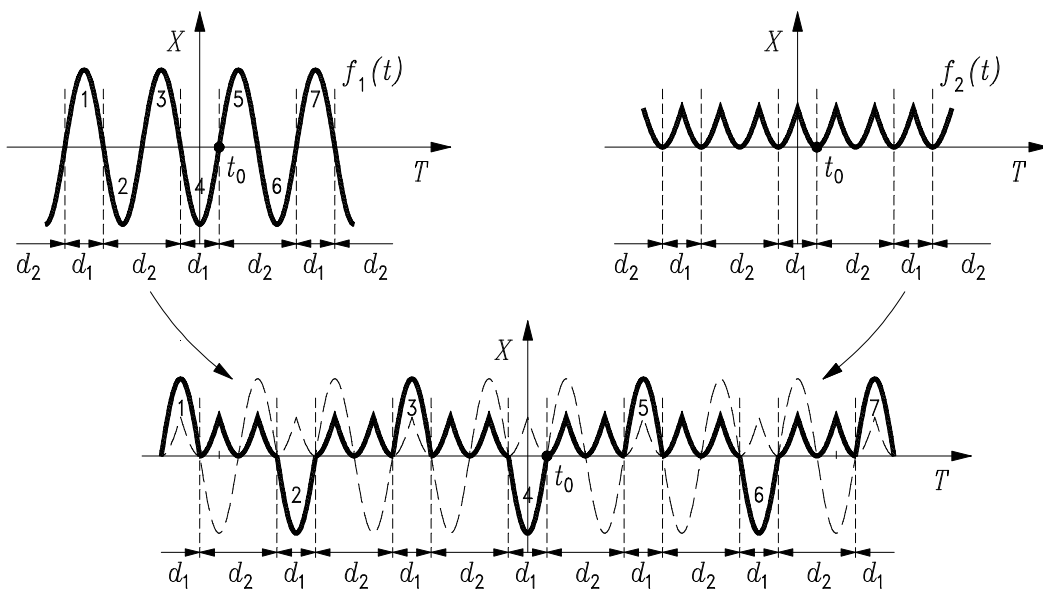


fig. 5.3.25. Exemple de tallar i intercalar amb desplaçament.

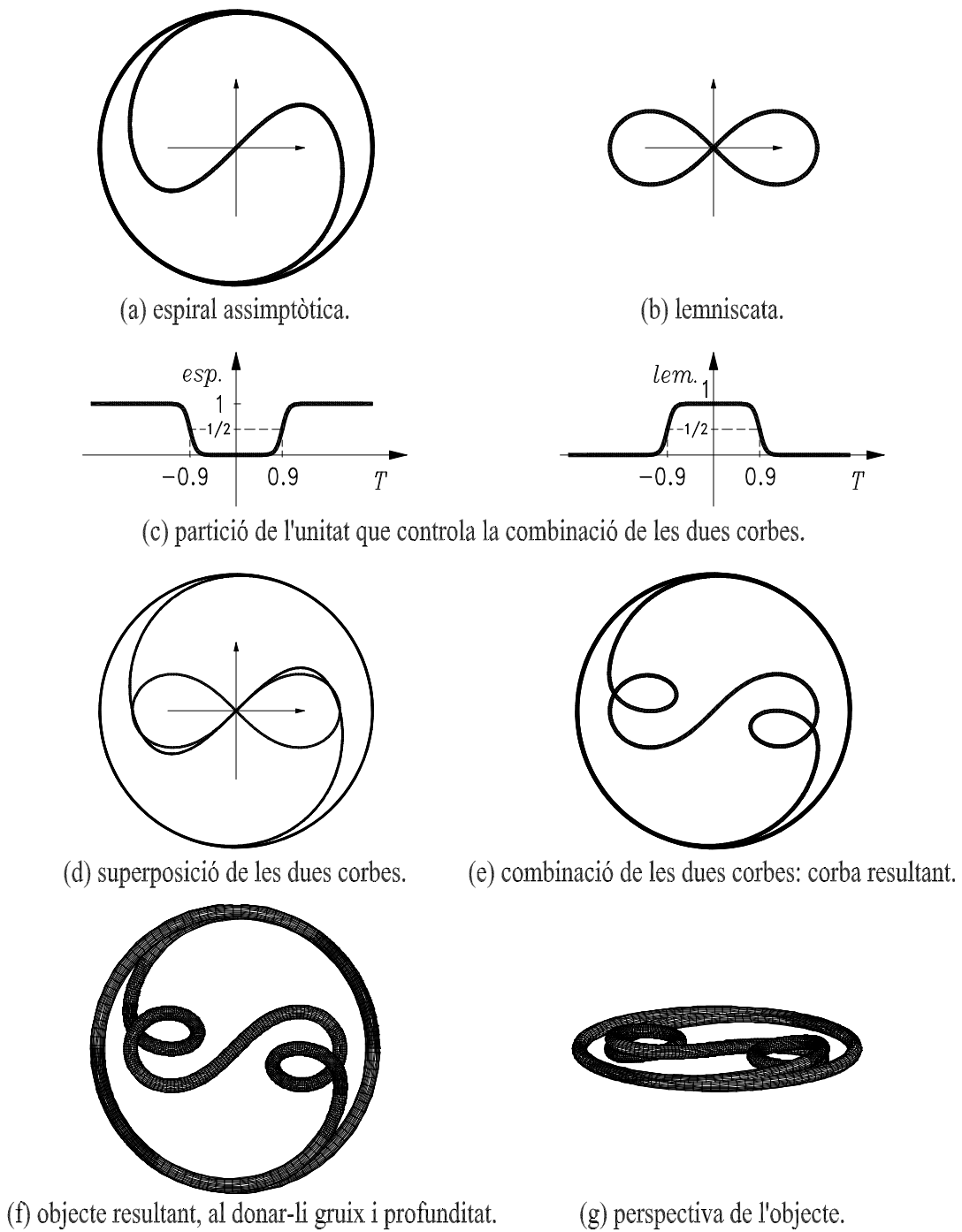
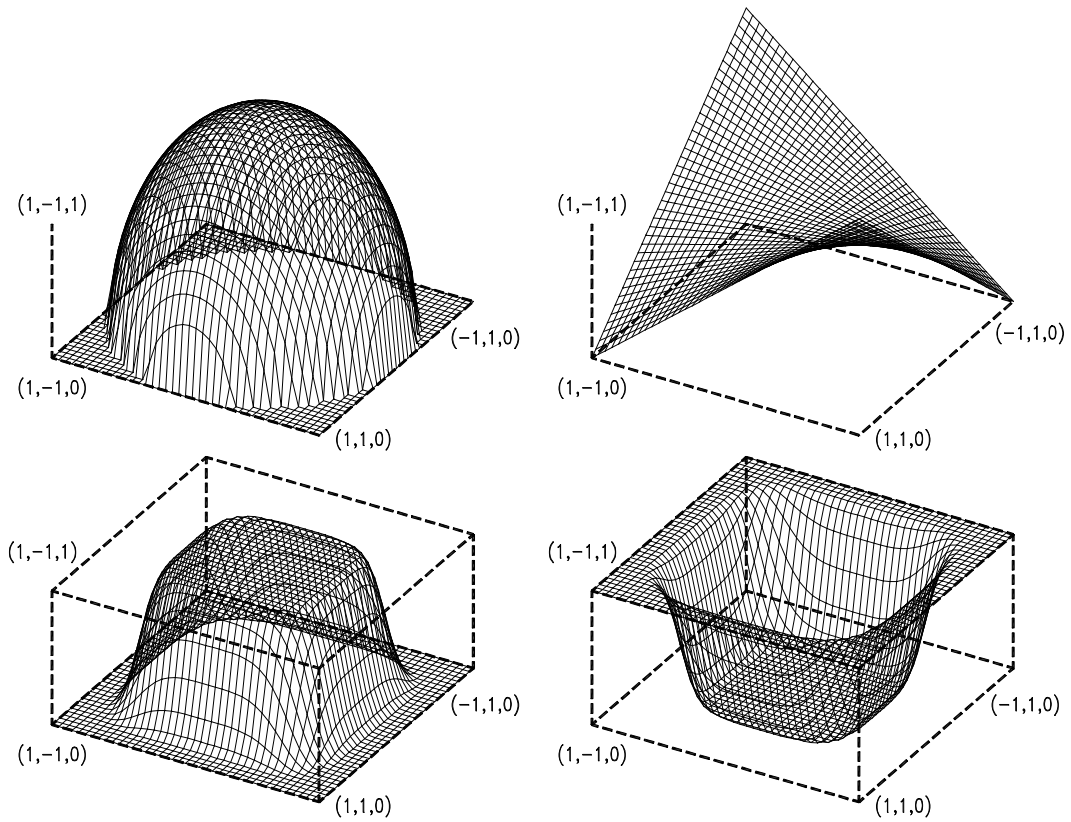
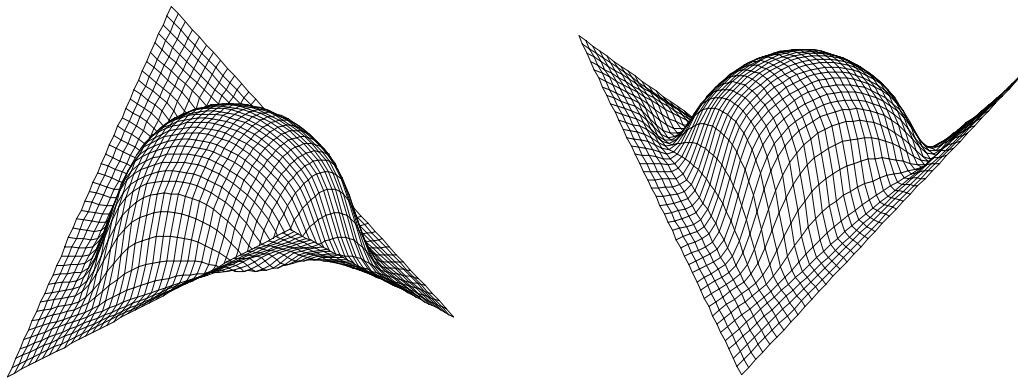


fig. 5.3.26. Exemple de transició entre corbes per produir una corba.

5.4. Figures.



(a) les dues formes a combinar i les components de la partició de la unitat que les afecten.



(b) dues vistes de la superfície resultat.

fig. 5.3.27. Exemple de transició entre superfícies per produir una superfície.

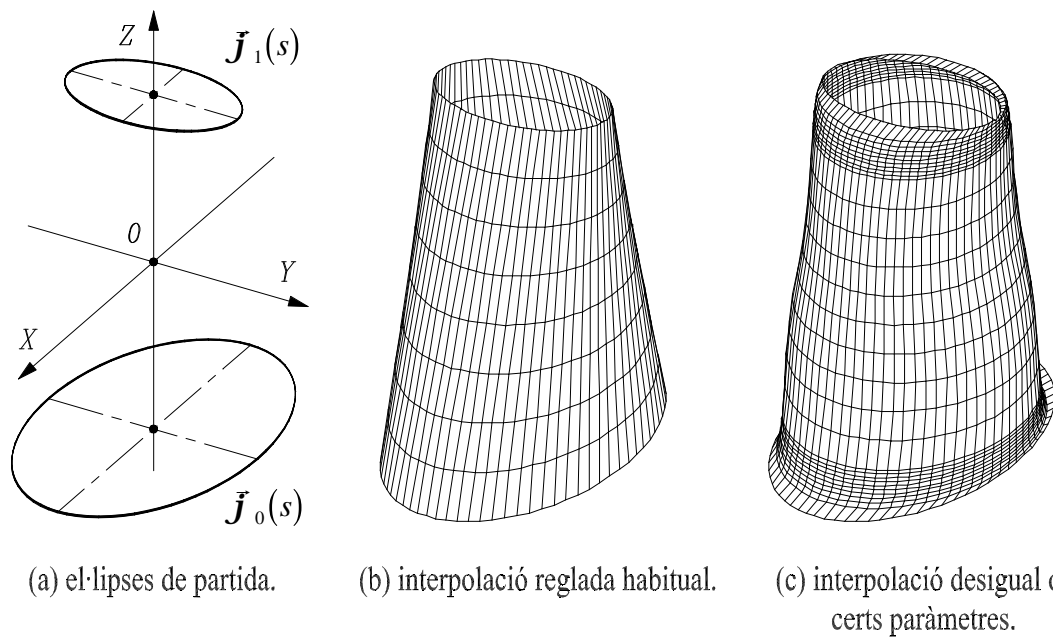
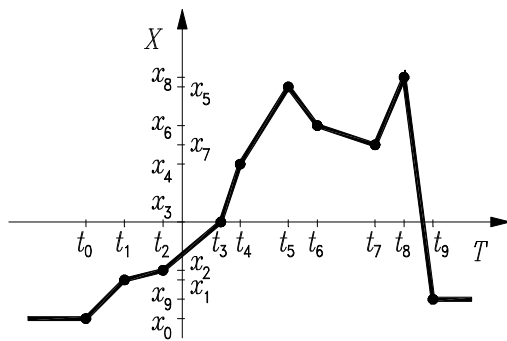
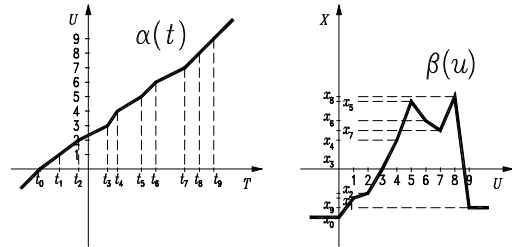


fig. 5.3.28. Exemple d'interpolació a nivell de paràmetres formals i de posició.

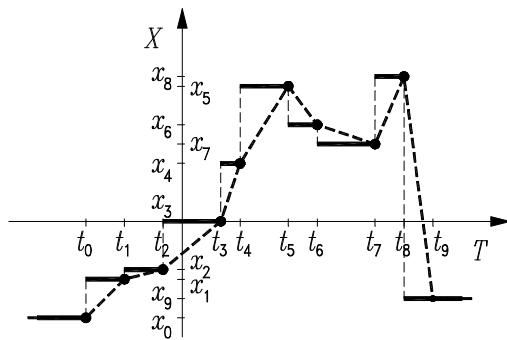
5.4. Figures.



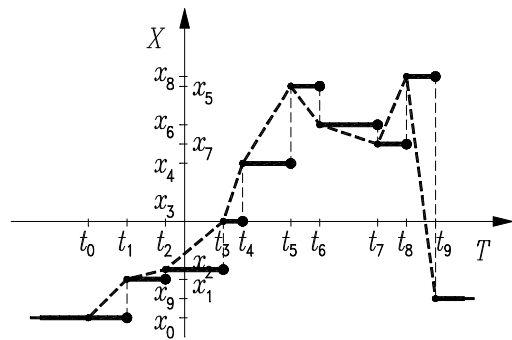
(a) nodes, punts i gràfica de partida.



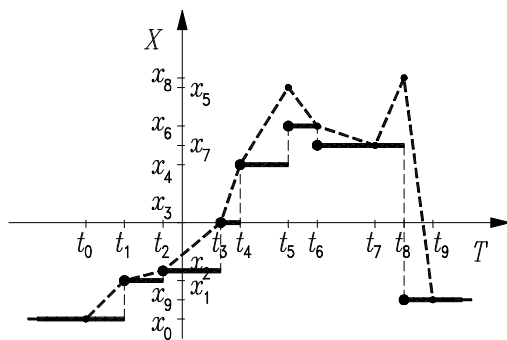
(b) els dos agents per esglaonar globalment.



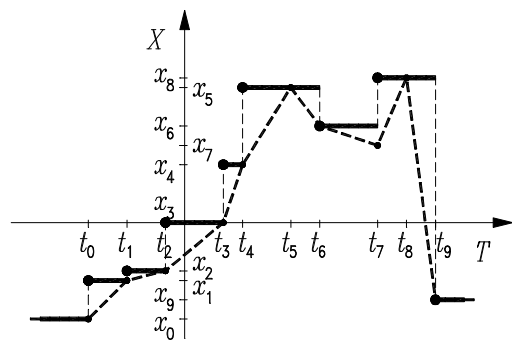
(c) $esc_{ee}(t)$.



(d) $esc_{de}(t)$.

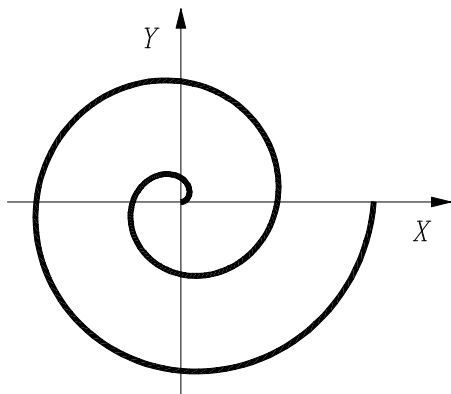


(e) $esc_{id}(t)$.

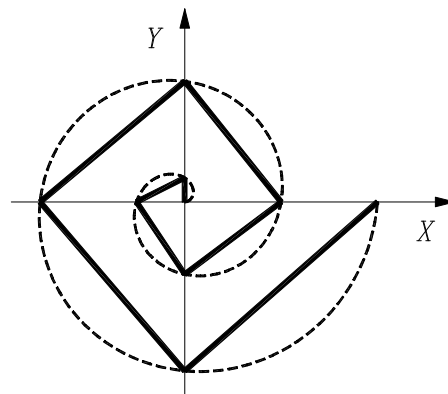


(f) $esc_{sd}(t)$.

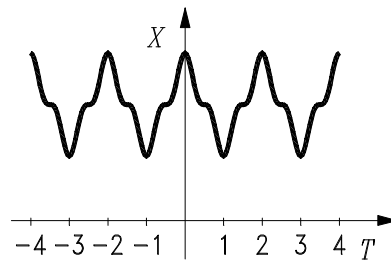
fig. 5.3.29. Alguns dels esglaonadors actuant sobre una gràfica.



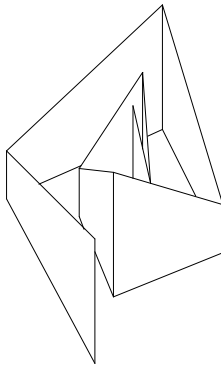
(a) corba original.



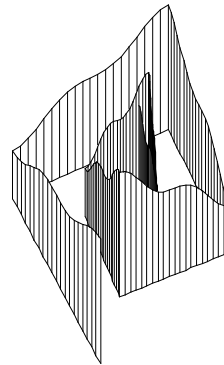
(b) corba poligonitzada.



(c) funció altura sobre la corba poligonitzada.



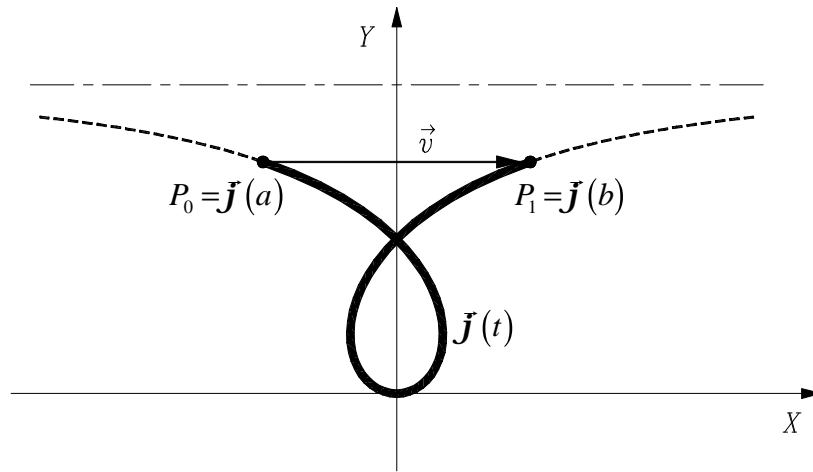
(d) resultat amb la poligonització falsa.



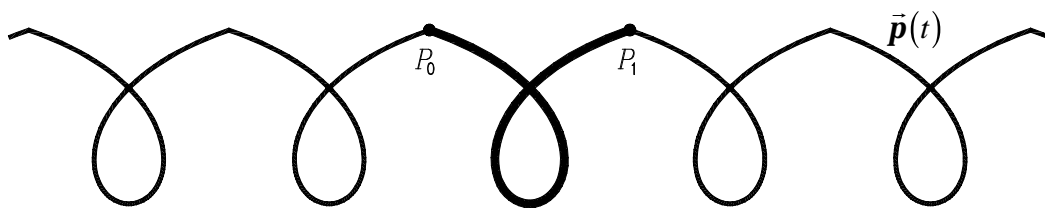
(e) resultant amb la poligonització completa.

fig. 5.3.30. Exemple i aplicació de la poligonització de corbes.

5.4. Figures.



(a) corba de partida, punts extrems i vector de translació.



(b) corba periodificada.

fig. 5.3.31. Exemple de periodificació de corbes paramètriques.

Capítol 6

Exemples d'aplicació al disseny i l'arquitectura

Acabem de plantejar un mètode basat en incorporar formulacions matemàtiques en ple procés mental de concepció del disseny, justament per conduir-lo, i hem encetat una gramàtica que ha de donar eines i tècniques per ajudar en aquesta tasca. No és un plantejament que es pugui considerar d'allò més assumit i quotidià. Possiblement, doncs, algunes de les persones que ho hagin llegit es mostrin escèptiques respecte a la viabilitat o l'interès de tot plegat. Per això mateix, si sempre és d'agrair que s'acompanyin les teories amb exemples il·lustratius, aquí una tal consideració envers el lector es fa més peremptòria que mai. Cal que no es tanqui aquesta memòria sense oferir algunes demostracions de la gramàtica i, en general, de tota la idiosincràsia funcional que hem proposat, "actuant" en ple procés de disseny informatitzat, per donar proves de que realment és un llenguatge-guia que ha de permetre a l'enginy humà espremer molt més suc a la creixent potència de la informàtica del que pot treure amb les actuals cotilles mentals euclidianes, que no faciliten explotar més que parcialment tant el hardware com el software gràfics.

Al llarg dels capítols precedents, s'han recollit diversos exemples concrets del que s'anava descrivint, però eren exemples petits i parcials. Aquí volem donar exemples que representin processos complets de disseny, tot i que no parlem de "complet" en el sentit de projecte acabat i fabricable immediatament, sinó només en el sentit de que, en cada exemple, es cossi el sentit, es percebi una perspectiva global del procés i quedi clar el paper que en ell juga el nostre mètode. Pel que volem il·lustrar, els petits detalls irrellevants haurien de resultar més un soroll que un aclariment.

Hem decidit oferir quatre mostres d'aplicació de la nostra proposta. Els dos primers en l'àmbit del disseny gràfic: un relatiu a la producció de sanefes i motius, diguem-ne, florals; l'altre, al disseny de certes trames o textures. Els altres

dos, en l'àmbit de l'arquitectura: un consistent en parametritzar graderies isòptiques i, amb elles, dissenyar un estadi de futbol; l'altre, en formular un catàleg d'arcs i aplicar-lo al disseny de galeries, naus, voltes, etc.

6.1. Motius basats en corbes planes. Sanefes i “flors”.

En aquesta secció il·lustrem l'ús de la mecànica de la gramàtica per produir formes lineals periòdiques regulables que, en principi, serveixen com sanefes, però que, combinades amb ulteriors transformacions donen lloc a altres temes; per exemple, amb la conversió a coordenades polars, donen lloc a motius florals geometritzats. Respecte a les sanefes, oferim un primer exemple basat en formes sinusoidals regulades per mitjà de diferents operadors dels que hem vist en el capítol precedent; després un basat en la periodificació d'una corba poligonal, amb el que es veu de quina manera es poden produir sanefes del tipus “greca”. A continuació, es mostra com aquests motius lineals (o qualssevol altres) es poden convertir en altres, per exemple, en circulars, usant les transformacions adients.

6.1.1. Sanefes.

Es tracta de mostrar, per mitjà de dos exemples, com, amb la gramàtica, es poden produir sanefes amb determinades propietats regulables a voluntat. El primer dóna lloc a un tipus de sanefa sinusoidal; el segon, a una greca.

6.1.1.1) Modificació quirúrgica i ambiental del cosinus. El punt de partida per aquesta sanefa és la gràfica de la funció cosinus: $y = \cos(x)$ que podem veure en la figura 6.1.1(a). Es pot parametritzar com

$$\vec{g}_0(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ara, es tracta d'alterar la component x ; ho farem per mitjà una acció quirúrgica. En concret, cal modificar $x(t)$ de manera que les “crestes” i “valls” de la corba s'eixamplin (o contraguin) a voluntat segons el dibuix, qualitatiu, de la figura 6.1.1(b). Segons això

- Els punts de la forma $(n\pi/2, \cos(n\pi/2))$; $n \in \mathbb{Z}$, que són els màxims, els mínims i els punts d'inflexió, són fixos.
- Els punts de la forma $(n\pi, \cos(n\pi))$; $n \in \mathbb{Z}$, que són els màxims i els mínims, són repulsors (o atractors) dels veïns

D'aquí que, qualitativament, cal que la gràfica de $x(t)$ tingui un aspecte com el de la figura 6.1.1(c). És una senzilla comprovació veure que una tal gràfica s'aconsegueix sumant a la identitat una funció sinus amb freqüència doble. És a dir, la parametrització que buscàvem és del tipus

$$\vec{g}_k(t) = \begin{cases} x(t) = t + k \sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.1.1)$$

per certa k real que és la que modularà l'amplitud i el caràcter de la deformació. En la figura 6.1.1 (b) i (c) s'ha pres $k = 2$. És clar que, per k igual a zero, no hi ha deformació; per k positiu, es produeix eixamplament entorn dels màxims i mínims, mentre que si k és negatiu (petit), es produeix una contracció entorn d'aquests punts fixos (figura 6.1.2 (c) i (d)). Si k és negatiu prou gran, la contracció fa creuar la corba sobre sí mateixa i apareixen bucles i expansió invertida. Veure fig. 6.1.2 (a) i (b). En general, a la figura 6.1.2 es pot apreciar com varia la sanefa al variar el paràmetre k .

En termes de la gramàtica, s'interpreta com que tenim una corba paramètrica plana, $\vec{J}_1(t) = (t, \cos(t))$; la variable està en \mathbb{R} , la imatge, en \mathbb{R}^2 . A aquesta corba se li aplica un **operador quirúrgic**, és a dir, un que actua sobre la imatge: l'operador del pla $\vec{J}_{2,k}(u, v) = (u + k \sin(2u), v)$. Així, la sanefa és la corba modificada $\vec{g}_k(t) = \vec{J}_{2,k}(\vec{J}_1(t))$. Cal dir que aquesta mateixa acció també pot ser interpretada en termes ambientals.

Casos particulars importants.

- Valor de k per tal què, en els tall amb l'eix x , la corba sigui vertical (figura 6.1.2(g):

El vector tangent és

$$\vec{t}(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 + 2k \cos(2t) \\ y'(t) = -\sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R};$$

perquè sigui vertical en un punt, cal que, en ell, $x'(t) = 0$. Si volem que això passi en els talls amb l'eix x (punts amb t de la forma $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$) resulta

$$x'((2n + 1)\frac{\pi}{2}) = 1 + 2k \cos((2n + 1)\pi) = 1 - 2k = 0, \text{ és a dir,}$$

$$k = \frac{1}{2}.$$

- Valor de k per tal què, en els màxims i mínims, la corba es contragui fins tenir un vèrtex (figura 6.1.2(c)):

Els extrems es donen per $t = n\pi$ i la condició per l'aparició de vèrtexs és que el vector tangent s'anul·li. En equacions,

$$\begin{cases} x'(n\pi) = 1 + 2k \cos(2n\pi) = 1 + 2k = 0 \\ y'(n\pi) = -\sin(n\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{i, d'aquí, surt}$$

$$k = -\frac{1}{2}.$$

6.1. Motius basats en corbes planes. Sanefes i “flors”.

- Valor de k perquè la corba s'expandeixi fins que els “turons” veïns siguin tangents (sense bucles) i el mateix succeeixi per les “valls” veïnes com es pot apreciar en la figura 6.1.2(i):

Per periodicitat i simetria, només cal estudiar el contacte en el punt P de la citada figura. Un tal punt, representa, per $x(t)$, un màxim dins

l'interval $\left(-p, -\frac{p}{2}\right)$ i un mínim dins el $\left(\frac{p}{2}, p\right)$. Com que, a més, el

punt P està sobre l'eix y , tot es redueix a resoldre el sistema

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ x'(t) = 0 \end{cases} \text{ o sigui, } \begin{cases} t + k \sin(2t) = 0 \\ 1 + 2k \cos(2t) = 0 \end{cases}$$

Les incògnites són la k i el valor de t pel punt P . Tenint en compte la determinació del cosinus que prenen les funcions “arccos” implementades en els programes i la que aquí ens fa falta, tenim que

$2t = 2p - \arccos\left(-\frac{1}{2k}\right)$. Operant, i sabent que $k > 0$, per ser una expansió, s'arriba a la equació

$$\left(2p - \arccos\left(-\frac{1}{2k}\right)\right) - \sqrt{4k^2 - 1} = 0.$$

Aquesta equació cal resoldre-la per mètodes numèrics i dona

$$\begin{cases} k = 2.30166942437585 \\ t = 2.2467 \text{ rads.} = 128.727^\circ \end{cases}$$

- Valor de k perquè la corba es contragui fins que els “turons” veïns siguin tangents (amb bucles) i el mateix succeeixi per les “valls” veïnes (figura 6.1.2(a)):

Una altra vegada, només cal considerar el punt P , també tenim les equacions $x(t) = 0$ i $x'(t) = 0$, però ara $k < 0$, $t \in \left(p, 3\frac{p}{2}\right)$ i, per tant,

aquí, la determinació dona $2t = 2p + \arccos\left(-\frac{1}{2k}\right)$. S'arriba a la

equació $\left(2p + \arccos\left(-\frac{1}{2k}\right)\right) - \sqrt{4k^2 - 1} = 0$ i s'obté numèricament

el resultat

$$\begin{cases} k = -3.89485288374636 \\ t = 3.86263 \text{ rads.} = 221.312^\circ \end{cases}$$

Fins aquí, diversos exemples de sanefes produïdes per acció quirúrgica sobre la gràfica de la funció cosinus. Però la mida de totes elles (període, amplitud) és fixa. Per poder actuar sobre això només cal aplicar, a qualsevol d'elles, **operadors ambientals afins**.

En efecte, si volem variar el període aparent de la corba (distància, per exemple, entre dos màxims consecutius), només cal aplicar un escalat en la direcció x :

$$\vec{s}_{x,a}(u, v) = (a u, v).$$

Si volem variar l'amplitud, un escalat en la direcció y :

$$\vec{s}_{y,b}(u, v) = (u, b v).$$

També es pot traslladar:

$$\vec{T}_{(a,b)}(u, v) = (u + a, v + b). \quad (6.1.2)$$

Aquestes modificacions, aplicades a la corba \vec{g}_k , seran útils quan convertim la sanefa en una "flor" a 6.1.2.1), tal com es mostra en la figura 6.1.4.

6.1.1.2) Disseny de greques. En una definició restrictiva, una greca és una sanefa formada per una poligonal periòdica en la que tots els vèrtexs són angles rectes. Nosaltres considerarem aquí com a greca qualsevol sanefa poligonal (periòdica), atès que el cost, tant de computació com de concepte, d'una tal generalització és nul. Per acomplir l'objectiu, per una banda cal dissenyar el motiu de la sanefa i per un altra disposar un procediment per periodificar-lo.

MOTIU. A efectes descriptius de cara a la parametrització de la greca, el motiu no serà més que una seqüència finita de punts del pla: $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, que són justament els vèrtexs de la poligonal; el motiu és la poligonal que els uneix en aquest mateix ordre. Llevat de que estudis particulars permetin formulacions *ad hoc* (de la qual cosa aviat en veurem un exemple), aquesta llista de punts ja ha de representar tot el motiu que s'ha de repetir linealment, incorporant prèviament eventuais simetries que s'hagin d'aplicar a un motiu bàsic més simple. De les fórmules (1.7.1) i (1.7.2) se'n desprèn que una corba poligonal amb els citats vèrtexs, amb les definicions $\vec{P}_{-1} := \vec{P}_0$, $\vec{P}_{n+1} := \vec{P}_n$, admet la formulació vectorial següent:

6.1. Motius basats en corbes planes. Sanefes i “flors”.

$$\vec{m}(t) = \frac{\vec{P}_0 + \vec{P}_n}{2} + \sum_{i=0}^n \left(\frac{\vec{P}_{i-1} - 2\vec{P}_i + \vec{P}_{i+1}}{2} \right) \cdot |t - i|; \quad t \in [0, n]. \quad (6.1.3)$$

PERIODIFICACIÓ. Un cop parametrizat el motiu de la greca, cal repetir-lo indefinidament. Això ho aconseguirem per mitjà dels periodificadors paramètrics que hem vist l'apartat 5.3.6.3), que, al seu torn, es basen en els del 5.3.1.1). D'acord amb la fórmula (5.3.44), la formulació general de la greca serà

$$\vec{g}(t) = \vec{m}(\mathbf{ps}_{0,n}(t)) + \left[\frac{t}{n} \right] \cdot (\vec{P}_n - \vec{P}_0). \quad (6.1.4)$$

EXEMPLE. Donarem un senzill exemple de greca, però amb una formulació menys general que la que hem donat; una formulació que aprofita les simetries del motiu i utilitza altres versions de periodificador diferents del \mathbf{ps} , per mostrar que, en casos particulars, es pot optimitzar la formulació respecte de la general. Sigui, doncs, la seqüència de punts

$$\vec{P}_0 = (0, 0), \quad \vec{P}_1 = (-3, -3), \quad \vec{P}_2 = (3, -3), \quad \vec{P}_3 = (3, 0.5), \quad \vec{P}_4 = (4.5, 0.5) \text{ i } \vec{P}_5 = (4, 0).$$

La poligonal que els uneix és el motiu bàsic previ (figura 6.1.3(a)). El motiu que volem repetir periòdicament és la reunió d'aquest amb el seu simètric respecte l'origen; és a dir, que cal afegir els punts $\vec{P}_{-i} = -\vec{P}_i$, per i de 1 a 5 (fig. 6.1.3(b)).

Segons el procediment general, hauríem de definir la seqüència $\vec{Q}_0 = \vec{P}_{-5}$, $\vec{Q}_1 = \vec{P}_{-4}$, ..., $\vec{Q}_5 = \vec{P}_0$, ..., fins $\vec{Q}_{10} = \vec{P}_5$ i aplicar-li la fórmula del paràgraf anterior. Una alternativa, que és la que aplicarem aquí i que es queda amb la seqüència inicial de punts, més curta, és aprofitar els altres periodificadors que ja hem vist a l'apartat 5.3.1.1) (fórmules (5.3.1) i (5.3.2)): com que cal copiar el motiu previ amb simetria central, vol dir que, a nivell de components, tant la x com la y han de ser copiades amb simetria; si repassem (5.3.2), veiem que cal usar la versió c), és a dir, $\mathbf{saltalternat}_1(t; a, (b-a), -1, 1) \cdot (f \circ \mathbf{pd}_{a,b})$, essent aquí $a = 0$, $b = 5$ i $f = \vec{m}$ (\vec{m} és la poligonal definida pels \vec{P}_i , segons la fórmula (6.1.3)). En definitiva, queda

$$\vec{g}(t) = \mathbf{saltalternat}_1(t; 0, 5, -1, 1) \cdot \vec{m}(\mathbf{pd}_{0,5}(t)) + \left[\frac{t+5}{10} \right] \cdot (2(\vec{P}_5 - \vec{P}_0)). \quad (6.1.5)$$

Notis que la translació-salt entre dos còpies del motiu complert ha de ser del doble del vector $\vec{P}_5 - \vec{P}_0$ i ha de produir-se cada deu punts comptant des del “(-5)-è”. Això és el que expressa el segon sumand de l'expressió anterior. La figura

6.1.3(c) mostra un fragment de la greca resultant, que de fet es pot estendre indefinidament a banda i banda; només cal ampliar tant com calgui l'interval de la t pel que s'avalua la $\vec{g}(t)$.

6.1.2. Nous motius a partir de transformacions de les sanefes.

En aquest paràgraf aplicarem diverses transformacions a les sanefes anteriors per produir nous temes. L'objectiu principal és mostrar com alguns dels resultats que obtindrem per aquesta via funcional no són fàcilment assolibles per mitjans clàssics, tant si es tracta de regle i compàs com si es tracta de CAD convencional.

6.1.2.1) Sanefes circulars. Un cop tenim una sanefa lineal com les de l'apartat anterior (tant se val si el motiu és una corba suau com si és una greca poligonal), podem convertir-la en circular usant el pas de coordenades cartesianes a polars (fórmula (6.1.6), que segueix, i figura 5.3.14). Prèviament, però, hi haurà que preparar la sanefa lineal perquè s'ajusti bé a la circumferència. Això s'aconsegueix usant transformacions afins sobre el pla, és a dir, un cas de verbs ambientals del tipus dels tres de (6.1.2). Per fixar idees, suposem que la sanefa s'estén en la direcció de l'eix x i està centrada respecte l'eix y (si cal es fa una transformació afí prèvia per arribar a aquesta situació) de manera que el motiu bàsic a repetir ocupa de 0 fins x_0 i de $-y_0$ fins y_0 (figura 6.1.4(a)). Suposem que volem formar una sanefa circular de manera que en una volta entrin exactament n còpies del motiu bàsic les quals, respecte el gruix, vagin d'un radi r_1 fins un radi r_2 . Per satisfer aquests requisits, apliquem les següents transformacions en l'ordre indicat:

1er.: escalem en la direcció x un factor $\frac{2p}{n x_0}$,

2on.: traslladem en la direcció y segons el vector $(0, y_0)$,

3er.: escalem en la direcció y un factor $\frac{(r_2 - r_1)}{2y_0}$ i, finalment,

4at.: traslladem altre cop en la direcció y segons el vector $(0, r_1)$.

Cada transformació d'aquestes està tipificada i formulada a (6.1.2), per tant, només cal invocar-les successivament i aplicar-les a la corba-sanefa. Ara, en el rectangle $[0, 2p] \times [r_1, r_2]$ hi ha, ajustada, una cadena de n còpies del motiu bàsic de la sanefa, com es veu en la figura 6.1.4(b) (en aquest exemple, per $n = 6$). Només cal passar a polars segons la transformació ambiental

6.1. Motius basats en corbes planes. Sanefes i “flors”.

$$(x, y) \rightarrow (y \cos(x), y \sin(x)) \text{ o bé } (x, y) \rightarrow (-y \cos(x), y \sin(x)) \quad (6.1.6)$$

segons la orientació que es desitgi per la versió circular. En la figura 6.1.4(c) es pot apreciar el resultat. Per donar una volta, només cal considerar $(x, y) \in [0, 2\pi) \times [r_1, r_2]$; aleshores, si la sanefa és una corba paramètrica, de manera que la variació de la x des de 0 fins a x_0 correspon a la variació del paràmetre t de t_0 a t_1 , per donar la volta l'interval de variació del paràmetre ha de ser $[t_0, t_0 + n(t_1 - t_0)]$. En les figures de la 6.1.5 fins la 6.1.11 es veuen diferents exemples usant les sanefes del §6.1.1 incloent-hi combinacions de varies d'elles en un sol dibuix (cas de la 6.1.9). Pel cas de la greca (figures 6.1.10 i 6.1.11), cal subratllar que, si s'hagués elaborat formant el tema bàsic per mitjà d'una polilínia definida pels seus vèrtexs i repetint-lo linealment usant la corresponent funció de CAD, no tindríem informació dels punts interiors de cada segment recte, com ja hem comentat a 5.3.6.2) pel cas del poligonitzador de corbes, i, per tant, al passar al cercle, només podríem saber on van a parar els vèrtexs: tindríem una greca que “dóna la volta” però tots els trams seguirien sent rectes. Si això és el que es vol, el procediment manual clàssic és vàlid, però si es vol que l'efecte de corbar repercuteixi sobre la greca, és millor tenir-la parametritzada per poder-li llavors aplicar totes les transformacions que calguin. A continuació veurem altres transformacions que fan més evident el poder d'aquest plantejament paramètric enfront del manual clàssic.

6.1.2.2) Variacions sobre les sanefes circulars. Passar de la sanefa lineal a la circular no és, òbviament, l'única cosa que es pot fer. Només com exemple, aquí mostrem algunes transformacions alternatives.

- Sanefa el·líptica: A la versió circular se li aplica un escalat $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (fig. 6.1.12), per certs a i b convenientment triats en funció dels r_1 i r_2 previs i de la el·lipse desitjada.
- Sanefa superel·líptica: Enlloc de passar a la circumferència (d'equació cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$) es pot passar a una supercircumferència (d'equació $|x|^u + |y|^u = r^u$, u real positiu) i d'aquí, per un escalat com el del punt anterior, a una superel·lipse (d'equació $\left|\frac{x}{A}\right|^u + \left|\frac{y}{B}\right|^u = 1$, veure figura 6.3.8). Si, abans, el canvi a polars venia donat per la transformació $(x, y) \rightarrow y \cdot (\cos(x), \sin(x))$, ara el canvi a “superpolars” es pot definir per

$$(x, y) \rightarrow \text{radi}(x, y, u) \cdot (\cos(x), \sin(x)),$$

on (6.1.7)

$$\text{radi}(x, y, u) = \frac{y}{\left(|\cos(x)|^u + |\sin(x)|^u\right)^{\left(\frac{1}{u}\right)}}.$$

Com en el cas de les coordenades polars, només cal que $(x, y) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty)$. Les coordenades polars són un cas particular d'aquesta família, quan $u = 2$. La figures 6.1.13, 6.1.14 i 6.1.15 mostra tres exemples per diferents valors de u .

- Sanefa arrugada: Només cal aplicar a qualsevol versió anterior, un dels arrugadors que hem definit a 5.3.3.4). Un exemple en la figura 6.1.16.
- Altres transformacions: En definitiva, a qualsevol versió prèvia de sanefa se li pot aplicar qualsevol operador ambiental per produir innumbrables variacions sobre el tema. A la figura 6.1.17 donem alguna mínima mostra, mentre que a la 6.1.18 apliquem al dibuix de la figura 6.1.9 una transformació ambiental que transforma les línies paral·leles a l'eix x en paràboles obertes “cap avall”.
- Versió tridimensional: També podem fer divertiments a l'espai. Si la sanefa la col·loquem en un pla paral·lel a l'eix z , li apliquem una extrusió i la passem a coordenades cilíndriques, es poden obtenir objectes com el de la figura 6.1.19.

Si amb la versió simplement circular encara es podia pensar que “el mateix es pot fer per medis clàssics”, amb aquests darrers exemples es veu clar que les possibilitats manipuladores de la forma que ofereix la gramàtica funcional no són un subconjunt de les que ofereixen els procediments habituals, enfocats a la fase d'execució. També és remarcable que aquesta metodologia permet un nou tipus d'experimentació formal, provant noves formes **des del joc amb les funcions i els paràmetres**, és a dir, els conceptes matemàtics (reescalats, deformacions, canvis de coordenades, etc.) suggereixen accions a fer sobre els objectes que s'estan dissenyant. L'abstracció i la racionalitat de la matemàtica aporta idees genuïnes del seu àmbit, habitualment considerat com purament mental, per enriquir la capacitat d'experimentació sobre formes que afecten els sentits.

6.2. Endomorfismes del pla. Trames.

A partir de la visió d'un quadre del pintor hongarès Víctor Vasarely (recordi's la figura 5.3.16), vam tenir la idea d'intentar trobar una formulació matemàtica que reproduís la trama bàsica d'aquell quadre o alguna que se li assemblés. Per altra banda, hem fet un esforç per produir operadors ambientals (arrugadors, doblegadors, etc.). El resultat d'això ha estat un cert nombre de transformacions bijectives del pla o de l'espai, que ja hem exposat i hem aplicat, per exemple, en el paràgraf anterior. Però, més enllà de la seva aplicació com verbs o el repte emulador d'un disseny d'un altra persona, hem pensat que aquestes transformacions suggerien tot un camp d'especulació plàstica per sí mateix, altre cop des de la manipulació funcional, en el camp del disseny de trames i textures.

6.2.1. Descripció teòrica.

De manera similar al que s'ha dit al principi del §5.3.3, es tracta d'estudiar, o millor experimentar amb, transformacions $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a fi de veure relacions entre les formulacions i les seves contrapartides formals. Es dóna prioritat a les que siguin bijectives, però sense tancar la porta a "veure que passa" quan no ho siguin (aparició de plecs, superposicions, etc.). Quan diem experimentar no parlem de provar per provar, sinó de fer proves amb un cert criteri sobre què cal formular atès el que s'espera que surti. El sistema per visualitzar l'efecte, o millor l'estructura, de la transformació és l'estàndard: es defineix una trama quadriculada o rectangular (és a dir, cartesiana) de rectes equiespaiades $x = x_0 + i\Delta_x$ i $y = y_0 + j\Delta_y$, $i, j \in \mathbb{Z}$, que és a la que se li aplica la transformació T , com ja s'ha fet en els exemples de l'apartat 5.3.3. Donat que altres possibles trames de partida, com ara la polar, formada per rectes per l'origen i cercles concèntrics amb ell, es poden obtenir de la cartesiana per una particular transformació prèvia del pla, es pot compondre aquesta amb la que produeix la textura. Per tant, el supòsit de partir d'una trama cartesiana es pot mantenir en tot cas.

L'estructura de la trama buscada és **la imatge** d'aquesta trama "neutre" de partida. Ara bé, això només és, com diem, l'esquelet del disseny que es vol fer. En algun cas el resultat buscat serà senzillament aquest esquelet, o només una de les dues famílies de línies inicialment paral·leles, mentre que en molts altres, sobre aquesta trama, que poder haurà de restar oculta, caldrà situar una col·lecció de motius (per exemple, una quadrícula de cercles i/o quadrats, com en citat exemple de Vasarely) que és a la que se li aplicarà la transformació per produir la textura definitiva. Cada transformació d'un element de la col·lecció de motius és un cas particular d'aplicació d'un verb ambiental a un objecte. Sobre la col·lecció de motius transformats, ulteriorment se li podran afegir altres recursos de disseny, com ara color, lluisor, textura d'algun material específic, etc. Per altra banda, es

pot dibuixar una textura sobre una superfície (parametritzada), com ara una esfera, un hiperboloide, etc. pel sistema de produir-la sobre l'espai de paràmetres i , a través de la parametrització, passar-la a la superfície.

6.2.2. Exemples.

Volem oferir un quants exemples de trames obtingudes per aquests procediments funcionals. Com que la intenció és posar l'èmfasi en la operativitat funcional, la majoria dels exemples els visualitzarem només a partir de la trama-esquelet, en el ben entès que, a partir d'ella la creativitat del dissenyador pot anar-la guarnint amb multitud de motius fins completar el disseny.

6.2.2.1) Un primer exemple, o col·lecció d'exemples, ja els hem vist al §5.3.3 al parlar de l'operador arrugador; remetem a aquell apartat tant per l'obtenció de la formulació com per les il·lustracions (figures 5.3.15, 16 i 17).

6.2.2.2) L'anterior, en la versió més senzilla (figura 5.3.16 i també la 5.3.17, quan $w_1 = w_2 = 0$), en realitat, històricament va ser la segona formulació que vam elaborar, per obtenir un model periòdic, del tema de Vasarely que ja hem vist. El primer havia estat, precisament, la modelització del dibuix de Vasarely pròpiament, que representava un "inflament" *únic*, aïllat, de la trama quadriculada. Si situem el centre de "l'inflament" en l'origen de coordenades, cal que els punts propers a ell se li allunyin, de manera que aquest desplaçament centrífug vagi esmorteint-se amb la distància fins resultar imperceptible. L'origen O és un punt fix de la transformació. Amb això present, hem optat per un desplaçament radial que decreixi exponencialment amb el quadrat de la distància a l'origen. És a dir, si un punt P està a distància $r > 0$ de O , ha d'anar a parar a un altre punt $T(P)$ situat sobre la recta OP i a distància $\mathbf{r}(r) > r$; aquesta funció $\mathbf{r}(r)$ l'hem definit com

$$\mathbf{r}_{k,r_0}(r) = r \cdot \left(1 + k \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right), \quad (6.2.1)$$

on k modula la intensitat de la deformació i r_0 té l'efecte d'un factor d'escala. Si k és nul, no hi ha deformació i a partir d'un valor k_{\max} es perdrà la bijectivitat (apareixeran plecs del pla sobre sí mateix). Per calcular k_{\max} cal buscar un valor de r i un de k pels quals \mathbf{r} presenti un punt d'inflexió amb tangent horitzontal, és

a dir, que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' = 0$. S'obté $k_{\max} = \frac{e^{(\frac{3}{2})}}{2}$ per $r = r_0 \sqrt{\frac{3}{2}}$. Podem normalitzar el paràmetre k multiplicant-lo per aquest valor k_{\max} . Ara, donat un punt (x, y) , es calcula la seva norma (distància a l'origen), es divideix per ella i es multiplica per la nova distància que li correspon. En resum

6.2. Endomorfismes del pla. Trames.

$$T_{k,r_0}(x, y) = \left(\frac{\mathbf{r}_{k,r_0}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot (x, y) = \left(1 + k \cdot \left(\frac{e^{(\frac{3}{2})}}{2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{r_0^2} \right) \right) \cdot (x, y) \quad (6.2.2)$$

En la figura 6.2.1 es veuen tres exemples per diferents valors de k , primer $(k_{\max})^{-1}$, després 1 (límit de la bijectivitat) i, finalment, 2 (no bijectiva: la trama es “plega” sobre sí mateixa). A partir d’aquesta trama, per augmentar la similitud amb el quadre de Vasarely, es pot construir una quadrícula de cercles centrats en cada quadrat de la quadrícula cartesiana neutre i aplicar-li el mateix tipus de transformació, amb el què el resultat és una cosa com la de la figura 6.2.2.

6.2.2.3) En el següent exemple, es tracta de tornar a aplicar la periodicitat de les trames de l’exemple 6.2.2.1), però ara en la expansió radial, com en el segon exemple, no en la quadrícula, com era el cas del primer. El resultat serà un efecte d’onades concèntriques, per les expansions i contraccions. Es tracta de modificar la funció $\mathbf{r}(r)$ de l’exemple precedent, substituint la exponencial, que s’esmorteix ràpidament, per una sinusoidal, de manera similar al cas de l’arrugador. Concretament, ara ha de ser del tipus $\mathbf{r}(r) = r + k \sin(r)$, o, més exactament, per poder controlar el període p ,

$$\mathbf{r}_{k,p}(r) = r + k \left(\frac{p}{2p} \right) \sin\left(\left(\frac{2p}{p} \right) r \right). \quad (6.2.3)$$

Com és habitual, per $k = 0$ no hi ha deformació i el valor més gran de k abans de que es produeixin plecs és 1. La transformació és com l’anterior, però actualitzant la \mathbf{r} (veure figures 6.2.3 i 6.2.4):

$$T_{k,p}(x, y) = \left(\frac{\mathbf{r}_{k,p}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot (x, y). \quad (6.2.4)$$

6.2.2.4) El següent exemple aprofitarà les funcions que han servit per produir el periodificador doble, vistes a 5.2.3) (periodificadors regulables), per formular trames en zig-zag. Prenem

$$\mathbf{pd}_{-1,1}(u) = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot \arccos\left(\cos\left(\left(\frac{p}{2}\right)(u+1)\right)\right) - 1.$$

Es tracta de modificar la x de cada punt segons aquest zig-zag en funció de la y i la y segons el zig-zag en funció de la x , accions modulades per un paràmetre que en regula la intensitat. La formulació resultant és

$$T_k(x, y) = (x + k \cdot \mathbf{pd}_{-1,1}(y), y - k \cdot \mathbf{pd}_{-1,1}(x)) = (x, y) + k \cdot (\mathbf{pd}_{-1,1}(y), -\mathbf{pd}_{-1,1}(x)). \quad (6.2.5)$$

Si $k \geq 1$, la transformació deixa de ser bijectiva. De fet es poden aplicar paràmetres k_1 i k_2 diferents a cada component, per augmentar la gamma de possibilitats, de les quals en la figura 6.2.5 en tenim un exemple. Aquesta trama s'estén per tot el pla; una variació és localitzar-la en una zona, fora de la qual només quedi la identitat. Per això podem usar les funcions característiques (versió difusa) i les funcions partició de la unitat vistes primer a 5.2.5 i a 5.2.6), després a 5.3.2.1) i usades finalment a 5.3.5.3), dins de combinacions de formes. Només cal multiplicar el segon sumand de T_k , que és el que incorpora la deformació de la trama, per la funció característica (difusa, és a dir, amb transició suau) del recinte on es vol que es manifesti aquesta deformació. A les figures de la 6.2.6 a la 6.2.12, s'hi veuen diversos exemples.

6.2.2.5) Per acabar amb les transformacions del pla, un exemple en que es perd la bijectivitat, tot passant d'una trama quadriculada a una d'aspecte hexagonal, tot recordant un rusc. El resultat desitjat és el de la figura 6.2.14. Per aconseguir-ho, hem seguit el següent procés: si observem que $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, podem expressar-ho com

$$\begin{aligned} \text{Id}(x, y) &= \vec{\mathbf{a}}_{\text{Id}}(x) + \vec{\mathbf{b}}_{\text{Id}}(y), \\ \text{amb} & \quad (6.2.6) \\ \vec{\mathbf{a}}_{\text{Id}}(x) &= (x, 0) \text{ i } \vec{\mathbf{b}}_{\text{Id}}(y) = (0, y). \end{aligned}$$

Llavors queda explicitat que tot punt del pla és suma de dues corbes parametritzades (aquí rectes: els dos eixos coordinats). Es tracta de construir $T(x, y)$ com la suma de transformacions adients, com imatges, d'aquestes dues corbes. En concret, la imatge de l'eix x ha de ser la de la figura 6.2.13(a) mentre que la de l'eix y ha de ser la de la figura 6.2.13(b) i llavors la trama resultant vindrà expressada per

6.2. Endomorfismes del pla. Trames.

$$T(x, y) = \vec{a}_T(x) + \vec{b}_T(y). \quad (6.2.7)$$

Ajustant adientment els paràmetres perquè els angles siguin de 120° i els costats de longitud 1, obtenim que

$$\vec{a}_T(x) = \left(\left(\frac{1}{4} \right) (3x + \mathbf{pd}_{0,1}(x)), \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (x - \mathbf{pd}_{0,1}(x)) \right)$$

i

(6.2.8)

$$\vec{b}_T(y) = \left(-\frac{\mathbf{pd}_{0,1}(y)}{2}, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) y \right).$$

És a dir, les línies paral·leles als eixos es transformen en corbes poligonals parametritzades.

6.2.2.6) Addicionalment, només a nivell d'il·lustració, mostrem un exemple de dibuix d'una trama sobre una superfície via la parametrització (figura 6.2.15). En l'exemple tenim un hiperboloide d'una fulla que és la imatge paramètrica de la banda $(s, t) \in [0, 2\mathbf{p}] \times (-\infty, \infty)$. Abans de passar a l'hiperboloide, hem transformat la banda segons una trama tipus Vasarely la qual, per l'acció d'una funció característica difusa, només és vigent dins d'una faixa centrada entorn de l'equador. Al passar a l'hiperboloide, aquest apareix amb la trama incorporada com una textura superficial, és a dir, com un dibuix que “se li ha pintat al damunt”, sense modificar-lo com a superfície; segueix sent un hiperboloide, sense arrugues ni “bonys”.

6.3. Un estadi de futbol.

Després d'uns exemples d'aplicació al disseny pla o disseny gràfic, els dos darrers apartats es dedicaran a exemples d'aplicació de la gramàtica matemàtica a guiar la concepció de dissenys a l'espai, concretament en l'àmbit de l'arquitectura.

En el present apartat l'objectiu principal és la parametrització de la forma grada, primer com a corba i després, en moure aquesta per l'espai, com a superfície. És una forma que alterna repetitivament plans i arestes i per tant molt allunyada de les formes típiques de la enginyeria, que cerquen sobre tot superfícies i corbes suaus; just les que van motivar la aparició de les corbes i superfícies de Bézier, NURBS etc. Com a conseqüència d'aquest origen, aquestes corbes i superfícies de disseny són poc adients per modelar objectes amb moltes arestes i vèrtexs com és el cas de les grades i per això pensem que aquest exemple és especialment interessant per posar a prova la utilitat de la nostra proposta.

Per guarnir aquest objectiu s'ha triat com a tema el disseny d'un estadi de futbol. Amb ell afegim també, entre d'altres, un exercici de manipulació funcional de les corbes superel·líptiques per perfilar el contorn en planta de les grades, un exercici de formulació compacta de les corbes isòptiques, altres de càlcul numèric (per trobar interseccions), etc. És clar que no anem a presentar un projecte arquitectònic complet sinó que només donarem les claus funcionals de les que neixen els volums principals del disseny, de manera que, a partir d'elles, un arquitecte pogués continuar la tasca fins el projecte acabat. D'acord amb això, primer, quasi com un annex previ, recordarem la definició de grada isòptica, que és la que sol utilitzar-se en el disseny d'estadis, cinemes, etc., i en donarem una formulació compacta (de fet, aproximada, "ultra-isòptica") que evita la definició habitual en termes recursius. A partir d'ella parametritzarem la secció vertical d'una grada ultra-isòptica, com a corba. En tercer lloc lligarem això amb el tema de les corbes superel·líptiques i la seva manipulació seguint el nostre estil per definir el contorn en planta de les grades i convertir així la corba d'abans en una superfície: la corba que representa la secció vertical de la grada fa el paper de generatriu, mentre que la superel·lipse modificada n'és la directriu. Finalment, amb tot això, perfilarem els elements més importants del disseny d'un estadi que, versemblantment, podria fer-se realitat. Concretarem mides, nombre de pisos i nombre de files en cada pis, forma de la coberta i solució de la intersecció entre aquesta i la grada més alta, forma i ubicació de la tribuna de premsa, etc. En aquest punt del procés, la part gràfica tindrà un paper especialment important.

6.3.1 Grades isòptiques i ultra-isòptiques.

Una grada isòptica (nom no gaire reeixit, ja que nos es tracta d'igual visió) és aquella que està dissenyada de tal manera que cada espectador pot veure tota la zona on es desenvolupa l'espectacle sense que els espectadors que estan davant

6.3. Un estadi de futbol.

seu li tapin una part d'aquella. Si la grada és prou plana, pot ser una superfície suau, com ara la platea d'un cinema o un teatre; si el pendent és més acusat, llavors té que tenir una forma esglaonada. En tot cas, la grada es definirà a partir de la posició dels ulls dels successius espectadors. Aquesta primera definició només expressa allò que es desitja aconseguir; per tenir un plantejament que permeti fer càlculs cal precisar més, fer un model, en definitiva. En primer lloc, que els espectadors de davant no tapin l'espectacle equival a que cada espectador pugui veure-ho tot **per damunt** dels caps d'aquells; per veure-ho tot, es suficient que es vegi el punt més baix, si és un espectacle vertical (cinema, etc.), o el punt més proper, si és horitzontal (esports, etc.). Així doncs, es tracta de que la línia recta que va de l'ull d'un espectador a aquest *punt crucial*, passi per damunt dels caps de tots els altres que el poguessin tapar, però és fàcil veure que n'hi ha prou amb que això passi pel més proper que tingui al davant, si aquesta condició s'aplica a tots. Aquest "per damunt del cap" es converteix en que, respecte del espectador que té al davant, la visual passi, **com a mínim**, per sobre de l'altura de l'ull més l'altura del front. Alguns autors consideren que aquest espectador més proper que està al davant d'un de donat és el de la fila immediatament davant de la seva, mentre que altres consideren que és el de dues files més endavant, degut a que preveuen que les localitats es disposaran segons una trama romboïdal, com el totxos de successives filades d'una paret, i creuen que llavors els dos més propers de la fila immediatament davant no tallen la visual cap a l'espectacle. Nosaltres creiem que això és força temerari (pensi's, per exemple, en un cinema i les localitats als extrems laterals de les primeres files) i per tant triarem el primer model. En aquest apartat començarem recordant el plantejament matemàtic de la grada isòptica i en deduirem una formulació de la seva anomenada equació fonamental, que és la que sol usar-se en el seu disseny. Atès que, a partir del punt crucial que cal que tothom vegi i de l'ull del primer espectador, la posició de l'ull de cada espectador es calcula a partir de l'anterior, la formulació que s'obté o bé és recursiva o bé, en l'equació fonamental, depèn d'un sumatori de tants termes com files hi ha davant de l'ull que s'estigui ubicant; per tant, és fàcil adonar-se de que el càlcul serà feixuc i de que la intervenció d'aquesta formulació en posteriors càlculs, com ara interseccions, pendents, àrees, etc., serà poc amigable. En altres paraules, seria millor disposar, per cada secció vertical de la grada, d'una corba parametritzada, contínua, o millor derivable, que interpoli la posició del ulls de tots els espectadors d'aquella secció i que tingui una formulació compacta, fàcil d'avaluar i manipular. Aquest serà l'objectiu de 6.3.1.2), on veurem que llavors la solució obtinguda només pot ser una bona aproximació per excés, és a dir, una mica per sobre de la isòptica autèntica. Finalment, donarem explícitament la formulació paramètrica d'aquesta corba.

6.3.1.1) Variables de la grada isòptica i fórmula fonamental. En primer lloc fixarem les variables importants per definir una grada isòptica i els hi assignarem una notació. Cal remarcar que, en aquest plantejament, només es vol resoldre la grada per una secció vertical; aquesta solució serà la *generatriu* que

després s'haurà de "copiar" pels successius punts de la *directriu* que no és altra que el contorn en planta de la grada, definit per la primera fila. De moment, a més, el que obtindrem no serà una corba sinó una seqüència de punts, un per cada ull de cada espectador de la secció generatriu (noti's que considerem que els espectadors són com Polifem). Precisament, en el següent apartat construïm a partir d'aquesta seqüència una corba que gairebé l'interpola. O sigui que la isòptica, per nosaltres, és la que passa pels ulls. A partir d'ella, no costa gens, com veurem, passar a la grada material que ha d'anar per sota. Inicialment considerarem que el punt que hem anomenat abans *crucial* i que a partir d'ara serà el *punt objectiu* (el que tothom ha de veure) està en l'origen de coordenades, que estem en un pla i que la grada es desenvolupa cap el seu primer quadrant. Ara és el moment de fixar les dades pertinents i la notació a emprar (veure la figura 6.3.1):

- Punt objectiu: $P_{ob} = (d_{ob}, h_{ob})$; per defecte, el $(0, 0)$.
- Amplada de cada fila (la considerarem igual per totes les files): d .
- Altura del front d'un espectador tipus: h_F .
- Altura de l'ull d'un espectador tipus respecte el terra de la seva fila: h_U .
- Distància entre l'extrem davanter de la fila i la projecció a terra de l'ull: d_U .
- Posició de l'ull primer espectador: $P_{U,0} = (d_0, h_0)$.
- Nombre de files de la grada (comptant des de zero): N .

Aquestes són les dades de disseny. El que cal calcular a partir d'elles és:

- Posició de l'ull de l'espectador de la fila n -èssima: $P_{U,n} = (d_n, h_n)$.

No està de més fer algunes precisions respecte aquestes dades.

a) Aquí considerem constant l'amplada de les files, fet que és bastant usual, almenys per blocs; si hi ha algun passadís o alguna altra fila "anòmala" és millor interrompre la isòptica, fer una isòptica de només dues files sobre aquesta interrupció i després seguir amb una nova isòptica prenent com a primera fila la primera després de la interrupció. Òbviament, això també s'aplica si la grada té diversos pisos. Respecte a d , depèn del tipus d'espectacle i del confort desitjat però sol oscil·lar entre 0.8 i 1 metres.

b) És inevitable considerar un espectador tipus (estadísticament mitjà) perquè avui per avui és inimaginable ajustar la grada a un espectador variable en

6.3. Un estadi de futbol.

l'espai i en el temps. Es pot prendre $h_F \approx 0.125$ mtrs. i $h_U \approx 1.15$ mtrs. si els espectadors estan asseguts, que és el més habitual actualment.

c) La abscissa d_0 no és més que la distància en planta del punt objectiu a l'ull del primer espectador, és a dir, $d_0 - d_U$ és la distància horitzontal del punt més proper de l'espectacle a la primera fila. La ordenada h_0 és el desnivell entre l'ull del primer espectador i el punt objectiu. d_0 , h_0 i d , junt amb h_F , determinen completament la isòptica. Si el punt objectiu no és l'origen només cal calcular la isòptica com si ho fos i després aplicar-li la translació donada per la posició de P_{ob} .

Fixada la notació, ja podem deduir les fórmules habituals d'una isòptica. Malgrat que això ja es pot trobar en diferents textos (Alsina 93; Alvarado 71), ho incluïm aquí com a preparatiu per 6.3.1.2).

La condició decisiva que defineix la isòptica és que, per salvar el cap del espectador n -èssim, la recta visual que va de $P_{U,n+1}$ a P_{ob} passi per sobre de $P_{U,n}$ a una distància més gran o igual que h_F (per concretar la isòptica i estalviar altura innecessària es pren la igualtat). Això es mostra esquemàticament en la figura 6.3.2. Podem veure que, pel teorema de Thales, això es tradueix en la condició

$$\frac{h_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{h_n + h_F}{d_n} \quad (6.3.1.1)$$

i, d'aquí,

$$h_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{d_n} (h_n + h_F). \quad (6.3.1.2)$$

Amb això hem obtingut una formulació recursiva de les altures de la isòptica, però, com que $d_{n+1} = d_n + d = d_0 + (n+1)d$, podem iterar (6.3.1.2) i arribem a

$$h_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{d_0} (h_0 + h_F) + h_F d_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = \frac{d_{n+1}}{d_0} h_0 + d_{n+1} h_F \sum_{i=0}^n \frac{1}{d_i}.$$

Reanomenant els índexs, podem escriure

$$h_n = \frac{(d_0 + n d)}{d_0} h_0 + h_F (d_0 + n d) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{d_0 + i \cdot d}. \quad (6.3.1.3)$$

Si definim $\mathbf{d} = \frac{d_0}{d}$, l'anterior expressió es pot escriure com

$$h_n = \frac{h_0}{\mathbf{d}}(\mathbf{d} + n) + \left(h_F \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mathbf{d} + i} \right) \cdot (\mathbf{d} + n) . \quad (6.3.1.4)$$

Finalment, denotant $H_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i + \mathbf{d}}$, podem donar la següent expressió simplificada

$$\begin{cases} d_n = d \cdot (\mathbf{d} + n) \\ h_n = \left(\frac{h_0}{\mathbf{d}} + h_F \cdot H_n \right) \cdot (\mathbf{d} + n) \\ n = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6.3.1.5)$$

Aquesta és una de les maneres de presentar la fórmula fonamental de les isòptiques que permet posar de relleu les següents

Observacions:

- 1) De cara al valor de h_n no importa d , només \mathbf{d} , que és un valor relatiu.
- 2) h_0 només afecta en un terme lineal.
- 3) H_n no és més que una suma parcial d'una translació “horitzontal” de la sèrie harmònica en una constant \mathbf{d} i representa el “destil·lat” que conté la part no lineal de la isòptica. Amb això queda clar que no es pot esperar trobar una funció derivable i de formulació finita en termes de funcions elementals que interpoli la isòptica (com alguns autors han pretès haver trobat a partir d'equacions en increments que, per pas al límit es converteixen en diferencials, sense haver-se adonat de que les solucions d'aquestes no ho són de les primeres) perquè llavors, operant amb les expressions anteriors disposaríem d'una tal funció que interpolaria les sumes parcials de la sèrie harmònica, de manera similar a com la funció gamma interpola els factorials i no ens consta que existeixi una tal funció. Tanmateix, si h_F fos zero, la isòptica esdevindria lineal.
- 4) Si dividim les dues equacions de (6.3.1.5), obtenim

$$\frac{h_n}{d_n} = \frac{\left(\frac{h_0}{\mathbf{d}} + h_F \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i + \mathbf{d}} \right)}{\mathbf{d}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty . \quad (6.3.1.6)$$

6.3. Un estadi de futbol.

Com que el quocient de l'esquerra d'aquesta expressió és el pendent del radi vector que, en coordenades polars, situa el punt $P_{U,n}$, el límit infinit indica que la isòptica no presenta cap asímptota obliqua, és a dir, el seu pendent no tendeix a estabilitzar-se en cap valor sinó que es va dreçant indefinidament, fet que sembla poc intuïtiu a poc que es dibuixin unes quantes isòptiques. Això és degut a que la tendència a infinit és tant lenta com ho és la de la sèrie harmònica, que n'és la responsable d'aquesta tendència.

6.3.1.2) Pas al continu, aproximant per excés. Un cop es té la formulació (6.3.1.5), que permet calcular les posicions dels successius ulls dins d'una mateixa generatriu (això sí, amb un sumatori involucrat), seria convenient disposar d'una corba derivable que interpolés aquesta successió de punts i que tingués una formulació fàcil de manegar. De fet, a ma alçada se'n pot dibuixar una. Però ja hem comentat que una tal corba que verifiqui els dos requisits no ens consta que existeixi; podem trobar alguna que interpoli, però la seva expressió no serà més fàcil que el propi sumatori del cas discret. Però tractant-se de matemàtica aplicada (i aplicada al disseny arquitectònic) no cal una exactitud absoluta. Els avantatges pràctics d'una corba com la que desitgem fan que una corba que approximi la autèntica isòptica sigui acceptable, sempre i quan l'error sigui prou petit i **per excés**. De (6.3.1.5) és clar que la única dificultat és trobar una bona aproximació del sumatori H_n . Nosaltres en proposem una que involucra logaritmes basada en el mètode dels trapezidis, que correspon al tema d'integració numèrica (veure, per exemple, Alsina 93; Dahlquis 74).

És fàcil comprovar que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i+d} < \int_d^{n+d} \frac{1}{x} dx < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+d} \quad (6.3.1.7)$$

la qual cosa vol dir que

$$H_n + \frac{1}{n+d} - \frac{1}{d} < \log\left(\frac{n+d}{d}\right) < H_n \quad (6.3.1.8)$$

Degut a que la funció $1/x$ és monòtona decreixent estricta, si ara fem la mitja de les dues cotes del logaritme, el resultat és equivalent a la aproximació de la integral anterior (i, per tant, del logaritme) per trapezidis, amb n divisions, prenent com a nodes els punts $d, 1+d, \dots, n+d$; per tant

$$\log\left(\frac{n+d}{d}\right) = H_n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+d} - \frac{1}{d}\right) + E_n \quad (6.3.1.9)$$

o sigui,

$$H_n = \log\left(\frac{n+d}{d}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+d}\right) - E_n \quad (6.3.1.10)$$

on E_n és l'error comès, que depèn de la derivada segona de $1/x$ i que, en aquest cas, val

$$E_n = -\frac{n}{6x^3},$$

per cert $x \in (d, n+d)$ desconegut. Com que l'error és negatiu, ignorant-lo tenim una corba que aproxima la isòptica “per sota” i per tant no és bona. El que cal és fitar superiorment el valor absolut de l'error. Per monotonia, $|E_n| \leq \frac{n}{6d^3}$, és a dir,

$$H_n \leq \log\left(\frac{n+d}{d}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+d}\right) + \frac{n}{6d^3} \quad (6.3.1.11)$$

L'expressió de la dreta dona una corba que aproxima “per sobre” la isòptica, però ara no és bona perquè la diferència entre ambdues tendeix a infinit. Això és degut a que la cota de l'error és massa pessimista. Com que $1/x$ també és convexa, els errors comesos en cada tram entre dos nodes tenen tots els mateix signe i per tant el valor absolut del error és igual a la suma dels valors absoluts dels errors en cada tram. Tanmateix, en cada tram, la fórmula de l'error té la mateixa expressió i s'acota superiorment pel valor en l'extrem esquerra. O sigui,

$$|E_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3}. \quad (6.3.1.12)$$

Aquesta fita és millor, però si ho deixem així, tornem a tenir un sumatori. Es tracta d'aproximar també aquest i també fer-ho per excés. Anàlogament a (6.3.1.7) també tenim

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6(i+d)^3} < \int_d^{n+d} \frac{1}{6x^3} dx < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3} \quad (6.3.1.13)$$

6.3. Un estadi de futbol.

o sigui,

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3} \right) + \frac{1}{6(n+d)^3} - \frac{1}{6d^3} < \left[\frac{-1}{12x^2} \right]_d^{n+d} < \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3} \right) \quad (6.3.1.14)$$

Ara podríem tornar a repetir el procediment d'abans, fent mitja de les dues fites de la integral i fitant l'error comès al fer aquesta aproximació per trapezis. De fet aquests càlculs suggereixen un mètode d'aproximacions successives a H_n . Però en algun lloc cal aturar-se i convé, evidentment, que l'expressió resultant no sigui massa llarga. Ens aturem en la primera desigualtat de (6.3.1.14):

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3} \right) < \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(n+d)^2} \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{(n+d)^3} \right) \quad (6.3.1.15)$$

Per simplificar la escriptura, definim

$$\mathbf{r}(u) := \frac{1}{12u^2} + \frac{1}{6u^3} = \frac{u+2}{12u^3} \quad (6.3.1.16)$$

llavors (6.3.1.12) i (6.3.1.15) es converteixen en

$$|E_n| \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6(i+d)^3} \right) < \mathbf{r}(d) - \mathbf{r}(n+d) \quad (6.3.1.17)$$

Amb això arribem al que anàvem cercant:

$$H_n < \log\left(\frac{n+d}{d}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+d} \right) + \mathbf{r}(d) - \mathbf{r}(n+d). \quad (6.3.1.18)$$

L'expressió de la dreta de la desigualtat és la aproximació per excés que **proposem**; també proposem anomenar-la *ultra-isòptica*, de moment, discreta. Respecte l'error, si recordem (6.3.1.9) i (6.3.1.10), tenim que

$$-|E_n| \leq H_n - \left(\log\left(\frac{n+d}{d}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+d}\right) \right) \leq |E_n|,$$

així que,

$$-2(\mathbf{r}(d) - \mathbf{r}(n+d)) < H_n - \left(\log\left(\frac{n+d}{d}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{n+d}\right) + \mathbf{r}(d) - \mathbf{r}(n+d) \right) < 0 \quad (6.3.1.19)$$

D'aquí es pot veure que, en valor absolut, la diferència entre les dues corbes ve fitada per $2(\mathbf{r}(d) - \mathbf{r}(n+d))$. Aquesta expressió és creixent en n i decreixent en d . Si d tendeix a zero, l'error tendeix a infinit, però és raonable pensar que serà més gran que 1 ja que habitualment la distància (d_0) del punt objectiu a la primera fila és més gran que l'amplada d'una fila (d). Fixada $d > 0$, el valor màxim de la fita de la diferència és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{d+2}{12d^3} - \frac{(n+d)+2}{12(n+d)^3} \right) = \frac{d+2}{6d^3}.$$

Pel cas (poc freqüent) que $d = 1$, la diferència es manté per sota de $\frac{1}{2}$ (i això com a límit, si hi haguessin infinites files); si d augmenta, la diferència és menor. Per fer-se una idea de la repercussió que aquesta aproximació pot tenir a la pràctica mostrarem un exemple especialment extrem. Prenem $h_F = 0.15$, $N = 100$, $d_0 = 5$ i $d = 1$, amb el que $d = 5$. Amb aquests valors, la diferència d'altura en la darrera fila entre prendre H_n (de l'expressió (6.3.1.4)) o la seva aproximació (usant l'expressió (6.3.1.18)) és menor de quinze centímetres. Si fem $d = 3$, encara no arriba a mig metre. En canvi pel cas molt exagerat de $d_0 = d \Rightarrow d = 1$, la diferència és d'uns set metres i mig, la qual, menyspreant la contribució lineal de h_0 , així i tot només representa un increment d'altura del 9.6 % respecte la grada isòptica exacta després de 100 files ininterrompudes! Notis que cada interrupció de la grada per un passadís etc., fa recomençar la grada i retorna l'error acumulat a zero.

6.3.1.3) Parametrització de la ultra-isòptica. La expressió a la dreta de la desigualtat de (6.3.1.18) depèn de moment dels naturals, com la de (6.3.1.4), però, a diferència d'aquella, aquesta és immediatament convertible en una funció definida sobre els reals positius, només cal, formalment, canviar $n \in \mathbb{N}$ per $t \in \mathbb{R}^+$. Així definim la funció

6.3. Un estadi de futbol.

$$\hat{H}_d(t) = \log\left(\frac{t+d}{d}\right) + \frac{t}{2d(t+d)} + r(d) - r(t+d) \quad (6.3.1.20)$$

on r és la de la definició (6.3.1.16). Amb aquesta funció, (6.3.1.4) i (6.3.1.5) podem formular la parametrització de la corba ultra-isòptica definida sobre el continu, plana i derivable, amb el punt objectiu a l'origen:

$$\begin{cases} x(t) = d(t+d) \\ z(t) = \left(\frac{h_0}{d} + h_F \cdot \hat{H}_d(t)\right) \cdot (t+d) \\ t \in [0, N] \end{cases} \quad (6.3.1.21)$$

De fet es pot estendre a $t \in [0, \infty)$; recordi's també que $d = \frac{d_0}{d}$. Aquesta corba, per cada $t = n \in \mathbb{Z} \cap [0, N]$, dóna la posició del n -èssim ull.

Pel cas d'una grada llisa, com ara la de la platea d'un cinema, es pot parametritzar la grada material sense més que baixar l'anterior dels ulls als peus. Introduïm també unes coordenades arbitràries pel punt objectiu:

$$\begin{cases} x(t) = d_{ob} + d(t+d) \\ z(t) = h_{ob} + \left(\frac{h_0}{d} + h_F \cdot \hat{H}_d(t)\right) \cdot (t+d) - h_U \\ t \in [0, N] \end{cases} \quad (6.3.1.22)$$

La parametrització compacta d'una grada esglaonada la desenvoluparem en l'apartat següent. De moment, si la tractem com una polilínia, cal donar la seqüència de vèrtexs. Aleshores, cal tornar al cas discret. Per trobar la posició dels vèrtexs davanters de cada fila, apart de baixar la corba que passa pels ulls una altura h_U com en el cas llis, cal també avançar una distància horitzontal d_U (recordi's la figura 6.3.1). Així, els vèrtexs davanters de les files s'obtenen de les següents fórmules:

$$\begin{cases} x(n) = d_{ob} + d(n+d) - d_U \\ z(n) = h_{ob} + \left(\frac{h_0}{d} + h_F \cdot \hat{H}_d(n)\right) \cdot (n+d) - h_U \\ n \in \{0, 1, \dots, N\} \end{cases} \quad (6.3.1.23)$$

Els vèrtexs posteriors de cada fila surten dels davanters sumant a la seva coordenada x l'amplada d de la fila. La polilínia ve determinada per la seqüència de vèrtexs davanters i posteriors intercalats. Si canviem l'índex n pel nombre real t , obtenim la isòptica de (6.3.1.21) amb els ulls traslladats als vèrtexs davanters dels graons.

6.3.2. Parametrització d'una grada esglaonada.

Segons l'estil de treball que proposem, la tasca de l'apartat anterior no queda complerta en donar un tractament de polilínia a la grada amb graons. És preferible, en favor de l'automatisme de posteriors càlculs, disposar d'una formulació compacta d'aquest cas particular de corba poligonal. En aquest breu apartat en proposem una parametrització que treu partit de la forma de la gràfica del periodificador doble (**pd**), introduït a 5.1.2.3) i generalizat a 5.2.3), la gràfica del qual ja té aspecte d'escala "tombada", tal com es pot veure en les figures 5.1.4 i 5.2.2. Cal observar que volem una corba *paramètrica* i *contínua* que vagi recorrent amb velocitat el més uniforme possible tant les petjades com els cantells dels graons, per tant, no són útils les diferents variants de la funció *part entera* que hem vist a 5.1.2.2), ja que són totes discontinües. Tanmateix, la "trampa" d'aprofitar que, al dibuixar-les, apareixen com a contínues, no és bona, perquè llavors, per aconseguir que el cantell no aparegui visiblement inclinat, cal prendre moltíssimes avaluacions de la funció i la velocitat de recorregut sofreix de grans sotracs.

En primer lloc parametritzarem una *forma escala* tipus, en la que tant les petjades com els cantells tenen longitud 1 i comença horitzontalment a l'origen i després l'ajustarem a la grada ultra-isòptica. Aquesta escala tipus (figura 6.3.3) "puja" just per sota de la gràfica de la identitat, coincidint amb ella en els vèrtexs davanters de cada petjada. Per obtenir la parametrització d'aquesta forma, un cop disposem de la funció **pd**, només cal dibuixar les gràfiques de les dues funcions components, $x_e(t)$ i $z_e(t)$, les quals surten de la simple observació de la citada figura 6.3.3 i corresponen a les de la figura 6.3.4. Arribats aquí és un senzill exercici d'ús de la gramàtica veure que la parametrització és:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e(t) = \frac{1}{2} \cdot (t + \mathbf{pd}_{0,1}(t)) = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{\arccos(\cos(\mathbf{p} t))}{\mathbf{p}} \right) \\ z_e(t) = \frac{1}{2} \cdot (t - \mathbf{pd}_{0,1}(t)) = \frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{\arccos(\cos(\mathbf{p} t))}{\mathbf{p}} \right) \\ t \in [0, 2N + 1] \end{array} \right. \quad (6.3.2.1)$$

6.3. Un estadi de futbol.

Per parametritzar la grada ultra-isòptica només cal combinar aquesta escala tipus, “tangent” a la identitat, amb la grada ultra-isòptica llisa donada per (6.3.1.23), versió continua (és a dir, canviant n per t), la qual podem escriure com:

$$\begin{cases} x_{gl}(t) = d_{ob} + d(t + \mathbf{d}) - d_U \\ z_{gl}(t) = h_{ob} + \left(\frac{h_0}{\mathbf{d}} + h_F \cdot \hat{H}_d(t) \right) \cdot (t + \mathbf{d}) - h_U \\ t \in [0, N] \end{cases} \quad (6.3.2.2)$$

El subíndex gl és per “grada llisa”, mentre que l’immediat subíndex ge indicarà “grada esglaonada”. Aquest exercici de combinació dóna la forma escala “tangent” a la ultra-isòptica llisa i el resultat és:

$$\begin{cases} x_{ge}(t) = x_{gl}(x_e(t)) \\ z_{ge}(t) = z_{gl}(z_e(t)) \\ t \in [0, 2N + 1] \end{cases} \quad (6.3.2.3)$$

Es pot expressar vectorialment com

$$\vec{\Gamma}(t) = (x_{ge}(t), z_{ge}(t)) \quad (6.3.2.4)$$

En la figura 6.3.5(a) es pot veure una ultra-isòptica suau passant pels ulls, la seva traslladada a la vora davantera de cada graó i la grada ultra-isòptica esglaonada ajustada a aquesta, que permet que, al ubicar els espectadors sobre ella, els seus ulls es col·loquin en el lloc que els correspon sobre la ultra-isòptica inicial. Per la seva part, en la figura 6.3.5(b) està superposada aquesta ultra-isòptica (en traç continu) amb la isòptica tradicional definida per les mateixes dades (en traç discontinu), per poder copsar fins a quin punt n’és de petit l’error relatiu comès. S’han ampliat les darreres files (18, 19 i 20), on l’error és més gran. Cal tenir present que l’amplada de cada fila és d’un metre i que, després de mesurar-ho, s’ha obtingut que, a la fila 20, la diferència d’altura és de 2.916 centímetres.

Amb això tenim enllestit el procediment per formular de manera operativament senzilla les generatrius poligonals de la superfície “grada ultra-isòptica”. En el següent paràgraf, abordem la parametrització de la directriu, a partir d’un joc amb les superel·lipses.

6.3.3. Superel·lipses i contorn d'un camp de futbol.

Per completar la grada com a superfície, necessitem, junt amb la generatriu que acabem d'introduir (la ultra-isòptica), una directriu. La directriu ha de ser una corba tancada que limiti una regió convexa on es pugui encabir el terreny de joc. Llavors, per cada punt d'aquesta prendrem un vector normal unitari horitzontal i un de vertical i així tindrem un sistema local de referència bidimensional amb origen en el punt donat de la directriu, com es mostra en la figura 6.3.6. Sobre cada sistema local hi col·locarem una còpia de la generatriu. De moment, en aquest apartat només farem unes quantes consideracions qualitatives d'aproximació a la forma que volem obtenir per la directriu i enunciam una parametrització plena de paràmetres formals no concretats; la qual cosa fa que pugui donar lloc a moltes formes, segons els valors que prenguin finalment aquests paràmetres. La concreció quantitativa en un exemple la farem en el paràgraf següent. De fet, en el disseny que proposarem, dissenyarem dues d'aquestes corbes, una que limita la regió amb gespa i una altra que conté el conjunt d'òrigens de coordenades locals per les corbes ultra-isòptiques verticals, segons (6.3.2.3).

Si comencem, doncs, a pensar en aquestes directrius, veiem que determinaran mimèticament l'aspecte global de les grades. Si ens fixem en diferents camps de futbol de prou entitat i que no tinguin pista d'atletisme, veurem que tant el contorn de la grada com el del final de la gespa són (probablement) corbes formades per diversos arcs de circumferència (un pel lateral, molt obert, un pel gol una mica més corbat i un pel còrner, de radi molt petit) empalmats amb tangent contínua, tal com s'aprecia a la figura 6.3.7. Aquesta forma ens agrada, però la definició a trossos fa que la grada també s'hagi de parametritzar a trossos. A més, té un inconvenient addicional a nivell de resultat formal: la curvatura és fortament discontinua en els empalmes, especialment entre el lateral i el còrner. Per altra banda, tornant a observar la silueta d'aquesta corba, ens recorda la de les superel·lipses, que ja hem introduït en 6.1.2.2) (veure la parametrització (6.1.7)).

La seva equació cartesiana és $\left|\frac{x}{A}\right|^u + \left|\frac{y}{B}\right|^u = 1$, on A i B tenen el mateix paper de semieixos que en el cas de les el·lipses. A la figura 6.3.8 es pot observar una col·lecció de superel·lipses per diferents valors de u , mantenint-se en totes elles $A = B = 1$. Aquestes corbes, per un exponent $u > 1$, són prou suaus i no presenten discontinuïtats en la curvatura; a més es parametritzen de manera global. El problema és "domesticar" una d'aquestes corbes perquè s'ajusti bé al contorn d'un camp de futbol de manera similar a com ho fa la composta per arcs de circumferència.

Aparentment, sembla que hem de cercar entre les que tenen $u > 2$, però aviat es veu (figura 6.3.9) que, per no malbaratar espai i que el còrner sigui prou tancat, cal prendre u molt gran i llavors els laterals i els gols es tornen massa rectes; obtenim gairebé un rectangle. No resulta gaire estètic, té un aire antiquat.

6.3. Un estadi de futbol.

La idea bona és provar entre les que tenen u entre 1 i 2! Naturalment, abans hem de girar-les 45° i allargar-les més en la direcció x que en la y (figura 6.3.10), és a dir aplicar-les-hi una transformació ortogonal seguida d'una afinitat; tot plegat, operadors ambientals. Però quin valor de u hem de prendre exactament? Aquest valor ha de sortir de consideracions que provenen del disseny i que, després de reflexionar-hi, hem vist que tenen a veure amb les distàncies que necessitem entre la corba i un *rectangle de referència* (aquell que la directriu ha d'envoltar, és a dir, el de joc o un de molt semblant que el contingui) en tres punts concrets: el de màxima distància del lateral (per simetria, el del mig del lateral), el de màxima distància del gol (igualment el punt mig) i el de mínima distància al còrner. Després de diverses proves, es veu que, si pretenem triar una u constant a tot el voltant del camp, o hi ha més equacions que incògnites, o el resultat no és prou satisfactori, perquè llavors no aconseguim controlar independentment les curvatures de darrera la porteria i del lateral. En definitiva, caldrà prendre una u **variable**, que sigui funció del paràmetre que genera els punts de la directriu, el qual designarem per s , ja que la lletra t ja l'hem "gastat" al parametritzar la generatriu. Aquesta s ha de variar 2π radianys entre el valor inicial i el final per donar tota la volta al camp.

Veiem, doncs, com es pot parametritzar una corba d'aquest tipus. En primer lloc, fixem els paràmetres importants:

Anomenarem a i b al llarg i ample, respectivament, del rectangle de referència, el qual quedarà centrat a l'origen i alineat amb els eixos. Anomenarem d_l la distància màxima que es vol entre la corba i el rectangle en la zona lateral, d_g el mateix en la zona de gol i d_c la distància del còrner del rectangle a la corba (figura 6.3.11). En total 5 paràmetres. Si imaginem que ja tenim traçada la corba, podem definir una nova corba com el lloc geomètric dels punts, interiors respecte de la primera corba, que equidisten d'aquella una distància d_c . Aquesta segona corba passa, lògicament, pels còrniers del rectangle de referència i té com a distàncies màximes a aquest el valors $d'_l = d_l - d_c$ en el centre del lateral i $d'_g = d_g - d_c$ en el centre del gol. Aquests valors determinaran $u(s)$ i la corba que en resulti és precisament el tipus de corba, com la de la figura 6.3.10(c), que parametritzarem i les demés corbes s'obtidran d'aquesta com a llocs geomètrics de punts equidistants a ella, és a dir, com a corbes *paral·leles* a ella. Aquesta serà també la directriu que contindrà els orígens de coordenades locals per situar la còpia de la generatriu, com es veia a la figura 6.3.6.

Esquemàticament, per obtenir tal corba, partim d'una superel·lipse d'equació $|x|^u + |y|^u = 1$, amb u destinada a ser variable i periòdica. Es pot seguir el procés en la seqüència de imatges de la citada figura 6.3.10. Atès que els valors que prendrà u no seran molt grans, és millor parametritzar la superel·lipse segons la següent formulació, enlloc de la vista a (6.1.7):

$$\begin{cases} x_0(s) = \text{sign}(\cos(s)) \cdot [\cos^2(s)]^{\left(\frac{1}{u(s)}\right)} \\ y_0(s) = \text{sign}(\sin(s)) \cdot [\sin^2(s)]^{\left(\frac{1}{u(s)}\right)} \\ s \in [0, 2\mathbf{p}) \end{cases} \quad (6.3.3.1)$$

La funció $u(s)$ es precisarà aviat. Per disposar d'una expressió més còmoda podem usar la versió vectorial i denotar aquesta proto-directriu com

$$\vec{\Delta}_0(s) = (x_0(s), y_0(s)) \quad (6.3.3.2)$$

A aquesta corba i al quadrat inscrit que passa pels seus vèrtexs, que són els punts $(1, 0)$, $(0, 1)$, etc., **sigui quin sigui el valor de u** i que és tot el que es veu a la figura 6.3.10(a), se'ls hi aplica un gir de 45° , obtenint la disposició de la figura 6.3.10(b). Ara el quadrat inscrit té els vèrtexs en els punts $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$. Una homotècia de factor $\sqrt{2}$ per renormalitzar i un nou escalat, amb valors $a/2$ per la x i $b/2$ per la y , porta aquest quadrat al rectangle que té els vèrtexs en els punts $(\pm a/2, \pm b/2)$, tot arrossegant a la superel·lipse (figura 6.3.10(c)). Com que hem fet un gir de 45° , els punts extrems sobre l'eix x corresponen als valors $(-\mathbf{p})/4$ i $(3\mathbf{p})/4$ del paràmetre s , mentre que els extrems sobre l'eix y s'obtenen quan s val $\mathbf{p}/4$ ó $(5\mathbf{p})/4$. Amb tot això, la corba ve donada per la formulació

$$\begin{cases} \vec{\Delta}(s) = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \vec{\Delta}_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{\Delta}_0(s) := \\ = (x_\Delta(s), y_\Delta(s)) \\ s \in \left[-\frac{\mathbf{p}}{4}, \frac{7\mathbf{p}}{4}\right) \end{cases} \quad (6.3.3.3)$$

6.3. Un estadi de futbol.

Ara podem calcular els valors (que considerarem extrems) de l'exponent u que determinaran la funció $u(s)$ i que s'obtenen imposant les distàncies d'_g i d'_l que ja hem introduït. Pel centre del gol, es resol l'equació

$$\text{"component } x \text{ de } \bar{\Delta}\left(-\frac{\mathbf{p}}{4}\right)\text{"} = \frac{a}{2} + d'_g,$$

amb u com incògnita; sigui u_g la solució. És a dir, la equació és

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{u_g}\right)} = \frac{a}{2} + d'_g$$

i la solució és

$$u_g = \frac{-\log(2)}{\log\left(\frac{a + 2d'_g}{2a}\right)} \quad (6.3.3.4)$$

De la mateixa manera, pel centre del lateral, sigui u_l la solució de la equació

$$\text{"component } y \text{ de } \bar{\Delta}\left(\frac{\mathbf{p}}{4}\right)\text{"} = \frac{b}{2} + d'_l,$$

o sigui,

$$u_l = \frac{-\log(2)}{\log\left(\frac{b + 2d'_l}{2b}\right)} \quad (6.3.3.5)$$

Doncs bé, $u(s)$ ha de ser una funció periòdica, de període \mathbf{p} , tal que $u\left(-\frac{\mathbf{p}}{4}\right) = u_g$ i $u\left(\frac{\mathbf{p}}{4}\right) = u_l$, essent aquests els seus valors extrems. Només tenim que repassar les gràfiques sinusoidals regulables dins de "paraules" (apartat 5.2.2)) per veure que la formulació que ens faltava no cal que sigui un altre que la següent:

$$u(s) = \frac{(u_g + u_l) + (u_g - u_l) \cdot \cos\left(2\left(s + \frac{\mathbf{p}}{4}\right)\right)}{2} \quad (6.3.3.6)$$

Substituint (6.3.3.6) dins de (6.3.3.3) a través de (6.3.3.1) i (6.3.3.2), ja tenim el tipus de parametrització que necessitàvem. La corba que passa a una distància d_c del vèrtex o còrner del rectangle de referència s'obté com una paral·lela d'aquesta (figura 6.3.11) i això s'aconsegueix a la pràctica, com s'ha dit, prenent en cada punt de $\vec{\Delta}(s)$ un vector normal unitari “cap enfora” i multiplicant-lo per la distància desitjada, en aquest cas, d_c (figura 6.3.6).

Un cop tenim una directriu i una generatriu patró, podem donar la parametrització d'una grada com a superfície. Es tracta de “muntar”, per cada punt de la directriu, pres com a origen local de coordenades, i sobre el seu pla normal, una còpia de la generatriu. Noti's que la directriu conté els orígens locals de coordenades, però els punts objectius P_{ob} (en el sentit de les definicions de l'apartat 6.3.1.1)) no tenen perquè coincidir amb aquests orígens. En primer lloc, tornant a la grada, recuperem les formulacions de la directriu i de la generatriu, (6.3.2.4) i (6.3.3.3), en versió tridimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Delta}(s) = (x_{\Delta}(s), y_{\Delta}(s), 0) \\ \vec{\Gamma}(t) = (x_{ge}(t), 0, z_{ge}(t)) \\ \left\{ \begin{array}{l} s \in \left[-\frac{p}{4}, \frac{7p}{4} \right) \\ t \in [0, 2N + 1] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.3.3.7)$$

Ara, per cada s , tenim un punt de la directriu, $\vec{\Delta}(s)$; per derivació (usant, si convé a efectes pràctics, mètodes numèrics) i divisió per la norma, obtenim el vector tangent unitari, diguem-li $\vec{t}_{\Delta}(s)$ i, a partir d'ell el vector normal unitari

horitzontal “cap enfora”, $\vec{n}_{\Delta}(s) = (\vec{t}_{\Delta}(s)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si diem també

$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, tenim que la parametrització de la grada ve donada per

6.3. Un estadi de futbol.

$$\vec{G}(s,t) = x_{ge}(t) \cdot \vec{n}_\Delta(s) + z_{ge}(t) \cdot \vec{e}_3 + \vec{\Lambda}(s) = \vec{\Gamma}(t) \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_\Delta(s) \\ \vec{t}_\Delta(s) \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} + \vec{\Lambda}(s) \quad (6.3.3.8)$$

amb s i t variant com a (6.3.3.7). És a dir, és com si tinguéssim un motlle per fabricar generatrius, en un sistema de referència fix, i per cada valor de s apliquem una afinitat (gir més translació) que porta una d'aquestes generatrius al sistema de referència local del punt corresponent de la directriu (recordi's la figura 6.3.6).

6.3.4 Disseny d'un estadi de futbol.

Un cop resolta la parametrització en general d'una generatriu ultra-isòptica esglaonada i d'una directriu, diguem-ne, pseudo-superel·líptica (no ho direm més!) i, en definitiva, d'una grada arbitrària, ja disposem de prou maquinària teòrica i funcional. El treball que resta és aliè a les matemàtiques; involucra la vessant subjectiva i els criteris tècnics, antropomètrics, etc. Si fóssim arquitectes, parlariem de l'ofici. Són aquests aspectes extra-matemàtics els que intervenen per donar valors numèrics als paràmetres formals que fins ara eren "lletres" a fi d'arribar a un exemple versemblant. Ja posats, a més de la grada (de fet, les grades), també dissenyarem alguna cosa més, com ara la coberta, la tribuna de premsa, la ubicació de la il·luminació i dels marcadors, etc. De totes maneres, no és un projecte complet; apart de moltes altres coses, no considerem la part estructural, ni les instal·lacions, ni l'entorn urbanístic, ni les escales d'accés, portes, vestidors, etc. ni, encara menys, els aspectes econòmics o les normatives de la construcció. Només volem exemplificar per on pot anar el procés de disseny de la forma usant el sistema que hem proposat. Tampoc entrarem en tots els detalls de les mides que hem triat i dels càlculs que hem fet. Al Apèndix es pot trobar el llistat del programa comentat que hem usat per produir el model del que hem tret totes les imatges de l'estadi que s'incorporen a aquest treball. És evident que la introducció de condicionants contextuals realistes estressaria la capacitat del mètode que proposem per obtenir solucions, però no més que la de qualsevol altre mètode a l'ús; només hi hauria més feina, com sempre.

Hem dissenyat un estadi de futbol sense pista d'atletisme del que podem veure una vista panoràmica en la figura 6.3.12. Com que no tenim cap limitació d'espai ni d'economia, es tracta d'un estadi de grans dimensions, capaç d'albergar a l'entorn de cent mil espectadors asseguts i amb espais interiors, entre les zones d'accés, suficients per que s'hi puguin acomodar molts altres serveis, com ara botigues, piscina, pistes de handbol, cinemes, etc., encara que no n'hem concretat el seu disseny. L'estadi té dos plans de simetria, verticals i perpendiculars entre sí (figura 6.3.13 (a) i (b), sense ocultacions), corresponents als eixos longitudinal i transversal del terreny de joc; això no és cap mèrit especial atès que, no havent-hi cap condicionant extern, el més lògic és que tot l'estadi sigui invariant per les mateixes transformacions que el camp de futbol que hi ha al mig, és a dir, que

tingui el seu mateix grup de simetria. Presenta tres pisos de grades, o sigui, tres nivells o graderies, essent la segona especialment petita, ja que està pensada per ubicar la part “noble”, llotja de presidència i altres llotges, localitats de més categoria, zona inferior de premsa, etc., donat que és la franja de grades que tindrà la millor visibilitat. Les grades de l'estadi queden completament cobertes per dos voladissos en forma, essencialment, de cilindre parabòlic inclinat, un per cada lateral, que es tallen per darrera les grades de gol. Com que aquestes grades no queden cobertes pels voladissos anteriors, s'afegeixen dos membranes més que uneixen les parabòliques. Degut a la forma cilíndrica de les cobertes, la tercera graderia queda retallada per elles, de manera que la seva vora superior té altura variable. Sota les cobertes, penjant d'elles, s'ubiquen les tribunes altes de premsa, les fileres de focus d'il·luminació i, sobre les grades de gol, els dos marcadors gegants; tots ells queden continguts dins d'un element en forma d'anell que en realitat es part d'un con de revolució, que es retalla amb les cobertes. La figura 6.3.14 permet veure una vista general de l'interior de l'estadi.

Per fer una descripció més detallada de tots aquest elements, dividirem la exposició en diferents apartats corresponents a les diferents components del disseny. Abans però, indicar que hem triat un sistema de referència ortonormal amb l'origen en el centre just del camp de futbol, allà on es situa la pilota quan comença el partit, i l'eix x segons l'eix longitudinal del camp; la unitat de mesura serà el **metre**. Gràcies a les simetries, sovint només caldrà parlar del que passa en el primer quadrant.

6.3.4.1) Mides del terreny de joc. El reglament de futbol no fixa unes mides exactes pel que fa al llarg i ample del rectangle de joc, només uns intervals dins dels quals han de quedar els valors que es triïn. Hi ha competicions com el campionat del món que sí fixen unes mides determinades dins d'aquests marges. De vegades, doncs, en un mateix estadi, d'un partit a un altre es canvien aquestes mides depenent del tipus de competició o de criteris tàctics del entrenador local. En definitiva, hem pensat en un rectangle màxim de joc de 106×72 metres, que es força suficient i que sovint, segons les normes més restrictives de determinades competicions, es veurà reduït. Per tant, els còrnors correspondran al punts de coordenades $(\pm 53, \pm 36, 0)$. Malgrat això, per prevenir possibles caigudes venint en carrera, considerarem com a rectangle de referència, en el sentit dels comentaris al principi de 6.3.3, un que tingui dos metres més de llarg per cada cantó, és a dir, els vèrtex del rectangle de referència seran els punts $(\pm 55, \pm 36, 0)$; veure la figura 6.3.15. Si mirem la fórmula (6.3.3.3), veiem que, aquí, $a = 110$; $b = 72$. Aquest rectangle és el que servirà de base per totes les directrius que es dissenyin.

6.3.4.2) Vora (o contorn) de la gespa. Com és obvi, la gespa no pot acabar just on acaba el rectangle de referència, té que haver una mica de marge no sols

6.3. Un estadi de futbol.

per qüestions del propi joc sinó també per pura estètica. Com a corba que tanca la regió amb gespa, hem triat una de paral·lela a una del tipus directriu descrita a (6.3.3.3), tal com es pot veure en la figura 6.3.16. D'acord amb notacions ja introduïdes a 6.3.3 i figura 6.3.11, i **referit al rectangle de referència**, hem triat els següents valors (la notació intermèdia correspon a la del programa del Apèndix):

- distància mínima al vèrtex o còrner: $d_c = radi1 = 2$;
- distància màxima al centre del lateral: $d_l = gespaample = 4$;
- distància màxima al centre del gol: $d_g = gespallarg - 2 = 10$.

D'aquí resulta $d'_l = 2$; $d'_g = 8$. El paràmetre *gespallarg* usat en el programa de càlcul indica la distància màxima, en el centre del costat de gol, entre la vora de la gespa i la línia de fons del rectangle de joc; els dos metres que li restem per obtenir d_g corresponen a la diferència entre el rectangle de joc i el de referència. Aquestes mides determinen completament la corba, tal com s'ha explicat al §6.3.3.

6.3.4.3) Barana de la primera fila. Directriu de les grades. Les necessitats d'espai entre la gespa i les grades no és la mateixa en el centre de lateral, on hi ha que encabir les sortides de vestuaris, les banquetes dels suplents i del quart àrbitre, etc., que en el còrner o darrera les porteries. Per això hem decidit que la corba directriu de les grades i, per tant, també la que representa la barana de la primera fila, que considerarem com el contorn de les grades, no sigui paral·lela a la de la vora de la gespa (figura 6.3.17). Aquí les mides que hem triat per la barana (recordar §6.3.3 i figura 6.3.11) són les següents:

- distància mínima al vèrtex o còrner: $d_c = radi2 = 5$;
- distància màxima al centre del lateral: $d_l = gradaample = 10$;
- distància màxima al centre del gol: $d_g = gradallarg - 2 = 15$.

En aquest cas, per parametritzar la directriu, $d'_l = 5$; $d'_g = 10$. Respecte a *gradallarg*, remetem al comentari que acabem de fer per *gespallarg*. La corba que s'obté a partir de (6.3.3.3) amb aquestes dades passa pels vèrtexs $(\pm 55, \pm 36, 0)$ i és la directriu per totes les grades del estadi, que s'obtidran d'ella com a corbes formades per punts a igual distància, o sigui, com a *corbes paral·leles*. En planta, la barana de la primera fila és una d'aquestes corbes a distància 5 de la directriu. En quant a l'espai entre la vora de la gespa i la barana de la primera fila, la qual

està a un nivell 50 cms. més baix que el del camp, s'articula una superfície de transició apreciable en la figura 6.3.18: en planta, interpola entre les dues directrius (vora de la gespa i barana), que no són paral·leles, i, en secció, entre el nivell 0 i el -0.6, per mitjà d'un perfil poligonal format per dos trams horitzontals i, entremig, un d'inclinat; d'aquesta manera, l'espai entre la gespa i la grada acaba 10 cms. per sota del terra de la primera fila. El tram horitzontal més proper a la grada i l'inclinat són constants a tot el voltant del camp, per tant, les seves arestes són corbes paral·leles a la directriu de la grada; en planta, mesuren una amplada d'un metre cadascun. Per la seva part, el tram horitzontal situat entre l'inclinat i la vora de la gespa és de longitud variable, per absorbir les diferències entre els dos tipus de directrius, la de la vora de la gespa i la paral·lela a la de les grades. En el còrner està el seu punt de mínima amplada, 1 m., mentre que la màxima amplada la té en el centre del lateral, on val 4 ms.; darrera la porteria l'amplada és de 3 ms.

6.3.4.4) Grades. Les grades s'han dissenyat segons el model ultra-isòptic introduït al §6.3.1 i la notació prové d'aquell paràgraf. Tenen 80 cms. d'amplada cadascuna. Cada primera fila després d'una barana té 20 cms. addicionals per encabir-la. L'ull dels espectadors es considera a 1.15 ms. per sobre del ciment i 60 cms. per darrera de la aresta davantera de la fila (80 cms. pel cas de primeres files). Com que, en el còrner, $d_c = 5$, el primer espectador està a $5 + 0.2 + 0.6 = 5.8$ ms. de la directriu, la qual marca l'origen de coordenades locals per cada còpia de la corba-grada. Com que el còrner del terreny de joc està a 2 ms. del vèrtex del rectangle de referència, situem el punt objectiu, P_{ob} , a 7 ms. de la vertical de l'ull del primer espectador de la primera grada. D'aquesta manera, en el sistema de coordenades on es fabriquen les corbes-grada, el punt-objectiu té coordenades $P_{ob} = (d_{ob}, h_{ob}) = (-1.2, 0)$ (figura 6.3.19). Per parametritzar les grades, considerarem la altura del front de cada espectador com $h_f = 0.125$ i l'altura de l'ull respecte el terra de la seva fila com $h_v = 1.15$. Anem ara a donar les principals dades de cadascuna de les tres graderies que té l'estadi (convé recordar la notació de 6.3.1.1) i les figures 6.3.13(b) i 6.3.14).

GRADA 1 (figures 6.3.18 i 6.3.20): D'acord amb el que ja hem comentat, hem triat per l'ull del primer espectador, $P_{U,0} = (d_0, h_0) = (7, 0.65)$. Certament, com que el terra de la primera fila està enfonsat mig metre, la visibilitat de les dues o tres primeres files és bastant dolenta. La nostra idea és deixar aquestes primeres files com reserva, només pel cas de que tota la resta de l'estadi estigui ple, i a preus molt més econòmics. La contrapartida d'aquest sacrifici d'un mínim nombre de localitats és que el pendent de **totes** les grades pot ser força menor i així la resta dels espectadors se'n beneficia de la menor altura i, per tant, menor distància a l'espectacle. Aquesta primera grada té, en principi, 36 files dimensionades segons la formulació de la grada ultra-isòptica. Un cop traçada la grada, les files 13 i 14 es converteixen en un sol graó doble al nivell de la 13, que fa el paper de passadís per circular i on, a intervals regulars s'hi ha de col·locar

6.3. Un estadi de futbol.

una boca d'accés. Així, a la pràctica només hi ha 34 files efectives. L'amplada útil d'aquest passadís és de $1.2 = 2 \times 0.8 - 2 \times 0.2$ (les dues files menys les dues baranes, que es repercuteixen al passadís per no alterar la seqüència de la grada). També s'hi pot accedir a aquesta grada per la part alta, des dels passadissos interiors col·locats darrera de la fila 36.

GRADA 2 (figura 6.3.21): Com ja hem comentat, la segona grada és la més petita i dedicada a autoritats, premsa i localitats més cares. Nominalment, té deu files, just damunt de les deu últimes de la primera graderia. Les seves dades definitòries són $P_{v,0} = (d_0, h_0) = (27.8, 13.9)$. El càlcul de h_0 per la grada 2 es fa de manera que l'espectador de la última fila de la grada de sota tingui visibilitat fins la horitzontal, comptant 20 cms. pel forjat; necessitem aleshores l'altura de la darrera fila de la grada 1, però això només requereix un únic càlcul: avaluar $z_{ge}(71)$ dins de (6.3.2.3) pels valors actuals dels paràmetres. L'accés es fa per la part alta. Hem dit que té deu files nominals perquè la seva amplada i el seu perfil ultra-isòptic corresponen a deu files estàndar de 0.8 ms., però en les llotges o en la zona de premsa es poden convertir en 5 files de 1.6 ms. ó 8 files d'un metre, etc. Així mateix, donada la seva poca altura, es pot tancar amb finestrals de vidre des de la barana de la seva primera fila fins la barana de la primera fila de la grada de sobre, que està just damunt.

El nivell del carrer, considerat un pla horitzontal, es situa a peu pla de la darrera fila d'aquesta segona graderia. Això vol dir una altura sobre el terreny de joc de 17.6259 ms.

GRADA 3 (figura 6.3.22): És la més gran de les tres, per nombre de files i perquè, quedant més enrera, té major perímetre. La seva primera fila està sobre la vertical de la primera de la grada 2, Per tant, per produir la ultra-isòptica, les dades són $P_{v,0} = (d_0, h_0) = (27.8, 19.9)$. El mateix comentari per h_0 que en el cas de la grada 2. Es dissenya com una única grada ultra-isòptica de 60 files, les quals queden dividides en tres blocs de 20 al introduir dos passadissos de circulació i boques d'accés. Aquests passadissos es formen, com en el cas de la grada 1, eliminant o unificant algunes files de les 60: el primer passadís o anell de circulació es forma a nivell de la fila 19 ajuntant en un graó o nivell les amplades de les files 19, 20 i 21, mentre que el segon passadís agrupa i, per tant, invalida per contenir-hi localitats, les files 39, 40 i 41. Com en el cas de la grada 1, aquests passadissos absorbeixen en el seu ample l'amplada corresponent a les dues baranes que s'han d'introduir en cadascun d'ells, la davantera, per protegir els que caminen pel passadís i la darrera, perquè els espectadors de la primera fila després del passadís no hi caiguin sobre d'ell. L'amplada és doncs de $2 = 3 \times 0.8 - 2 \times 0.2$. Els dos blocs inferiors d'aquesta grada resten segons el disseny indicat, però el tercer, de la fila 42 a la 60, ha de ser modificat degut a les cobertes cilíndriques parabòliques. Com comentarem al parlar d'elles, aquestes tenen intersecció amb el tercer bloc, el que va de la fila 42 a la 60, de manera que a la fila 60 només s'hi arriba en el centre del lateral, a partir d'allà la grada va baixant fins el còrner, on

només hi ha lloc per la fila 42, després torna a créixer fins el centre de la zona de gol on podria arribar altre cop a la fila 60, però només amb una localitat! Per evitar la sensació de soledat d'aquests dos hipotètics espectadors ermitans, darrera la porteria només deixem arribar a la fila 58, on ja hi ha espai per varies localitats. Els accessos es poden fer des dels dos passadissos intermedis i, pel tercer bloc, també des d'escalas i passadissos col·locats darrera de la última fila de cada columna, resseguint el perfil de la intersecció amb la coberta.

6.3.4.5) Cobertes. Tot l'estadi menys el terreny de joc queda cobert en planta per un sistema format per quatre elements iguals i simètrics dos a dos (figures 6.3.12, 6.3.13, 6.3.23 i 6.3.24): un parell de cobertes en forma de cilindre parabòlic inclinat per sobre dels laterals, que es tallen entre sí més enllà de les grades de gol i constitueixen la part principal, i altres dos que, com membranes, uneixen les dues anteriors prop de la seva intersecció per cobrir la part de les grades de gol que no cobreixen les primeres i, de pas, sostenir els marcadors gegants. Veiem les dades principals del seu disseny, tot estudiant-ne una de cada tipus, que anomenarem *coberta de lateral* i *coberta de gol* respectivament:

COBERTA DE LATERAL. Es dissenya a partir d'un cilindre virtual que és el que interseca el tercer bloc de la tercera graderia a nivell de ciment. Aixecant paral·lelament aquest perquè hi càpiguen drets els espectadors de les darreres files, tenim el cilindre real que constitueix la cara de sota de la coberta. Per sobre d'aquest hi ha la cara de sobre que és un altre cilindre paral·lel al anterior però al que se li aplica un abombament per disposar d'espai interior per on passar els accessos als equipaments instal·lats en la coberta (tribunes de premsa i T.V., il·luminació, marcadors, etc.). El cilindre virtual queda determinat al donar una directriu parabòlica i la direcció de les generatrius rectes, que pot venir marcada per una d'elles. L'idea original que dóna lloc a la forma de la coberta consisteix en una gran paràbola inclinada, simètrica respecte el pla transversal ($y-z$), la tendència a caure de la qual queda contrarestada per les bigues rectes inclinades que suporten la coberta; per la seva part, la compressió produïda entre el pes de la gran paràbola i l'encast en el terra ajuda a sostenir les bigues. Les paràboles de les dues cobertes de lateral es tallen just damunt de la que, si hi arribés, seria la fila 60 de la tercera graderia, en els centres de les dos grades de gol, tot formant entre les dues un conjunt simètric respecte el pla longitudinal ($x-z$). La gran paràbola inclinada pot utilitzar-se com directriu, però primer cal dimensionar el conjunt i aquesta paràbola no és adient per "prendre mides". Per això resulta millor usar un altre paràbola com a directriu: si imaginem que la grada 3 encara no ha estat retallada i que arriba a la fila 60 per tot arreu, prenem tres punts de la aresta de darrera de la última fila: el corresponen a la localitat del centre del lateral, $P_l = (0, 115.8, 65.098)$, i els corresponents a les dues del centre de cada gol, $P_{gn} = (139.8, 0, 65.098)$ i $P_{gs} = (-139.8, 0, 65.098)$, com es veu a la figura 6.3.25. Amb aquest tres punts i simetria respecte el pla transversal, es determina una paràbola que és la directriu bona pels càlculs. Ara agafem el punt de la aresta de

6.3. Un estadi de futbol.

darrera de la fila 42 corresponent a la localitat del còrner (la que cau sobre el radi vector a zero radiants segons la parametrització (6.3.3.3)); considerem el pla vertical que conté aquest punt i és paral·lel al pla $y-z$; considerem el punt de tall entre aquest pla i la paràbola directriu: la recta que passa per aquest dos punts és una generatriu (també figura 6.3.25). Ja hem determinat el cilindre parabòlic infinit. Els seus límits per formar la coberta són, cap avall, el pla de la esplanada exterior de l'estadi, i, cap amunt, la gran paràbola inclinada que es determinarà per intersecció amb un altre cilindre parabòlic: el que té com a directriu la paràbola que passa per la projecció en planta de P_{gn} i P_{gs} , més el punt de la vora de la gespa sobre el centre del lateral, punt $P_{lvg} = (0, 40, 0)$, i rectes verticals com generatrius; en la figura 6.3.13(a) es pot apreciar com aquesta paràbola passa pels tres punts indicats. Evidentment, la paràbola directriu d'aquest cilindre vertical no és altra que la projecció en planta de la paràbola inclinada. L'altura màxima d'aquesta paràbola (virtual) es dona en el centre, en l'aixecament del punt P_{lvg} , que té altura 121.523 ms. Aquest cilindre es farà servir per retallar les files del tercer bloc de la tercera graderia, però, si constituís la cara de sota de la coberta, a les darreres files no hi cabria ningú. La cara de sota de la coberta real s'obté aixecant paral·lelament aquest cilindre imaginari. Quant s'ha d'aixecar? Hem decidit que cal que hi càpiga un passadís per darrera de les darreres files, així que hem exigut que la coberta passi dos metres per sobre d'un punt situat tres metres darrera del P_l , o sigui, que passi pel punt de coordenades $(0, 118.8, 67.098)$. Així, la cara de sota de la coberta s'obté aixecant 4.648 metres el cilindre virtual. La cara de sobre en principi és paral·lela a la de sota, un metre més amunt i aquesta és la amplada en l'extrem davanter de la coberta. Però, per donar més resistència a la coberta i habilitar espai per les escales i accessos a les dependències i serveis instal·lats en o penjant de la coberta, es col·loquen cintres parabòliques la fletxa de les quals disminueix cap els còrnors fins desaparèixer. En el centre de lateral, la cintra té una fletxa màxima de 8 ms. El resultat formal és un abombament de la cara exterior de la coberta i la traducció matemàtica consisteix a sumar al cilindre una funció doblement parabòlica, tal com es pot apreciar en les figures 6.3.13(b) i 6.3.23.

COBERTA DE GOL. Aquesta coberta aixopluga el triangle \mathfrak{S} , situat en el terra i de costats corbats, limitat per la projecció en planta de les dues grans paràboles inclinades i una corba paral·lela a la directriu de les grades que passa pel punt central de la vora de la gespa darrera la porteria, és a dir, el $(65, 0, 0)$, tal com es mostra en la figura 6.3.26. De fet, si la tècnica ho permet i sempre que s'usi algun material translúcid per poder il·luminar l'interior, aquesta coberta podria ocupar tot l'espai entre les dues grans paràboles. En quan a la seva forma, la gènesi és la següent: Si tallem les dues cobertes laterals per plans verticals paral·lels al pla transversal $y-z$, per cada pla i per cada cara (la de sobre o la de sota, prescindint de l'abombament) de cada coberta lateral tallem una generatriu recta inclinada. Considerem l'extrem davanter de cadascuna d'elles i el punt on es

tallen les seves perllongacions, que està sobre l'eix longitudinal del camp (figura 6.3.27). Aquests tres punts formen un polígon de control d'una paràbola (corba de Bézier per tres punts). Aquesta paràbola és la secció de la coberta de gol pel pla vertical considerat i, com hem dit, n'hi ha una per la cara de sota i una per la de sobre; a més, empalma amb suavitat amb les generatrius de les cobertes laterals. Com que per sobre de cada punt de \mathcal{S} només hi ha un punt per cada cara de la coberta de gol, podem posar la z de cada cara en funció de x i y , prenent \mathcal{S} com domini. El problema és que, alhora de generar la forma, els límits de variació de x i y són força irregulars. Solució: compondre amb una transformació del pla. En efecte, considerem \mathcal{S} com un quadrilàter de costats corbats en el que un costat ha col·lapsat en un punt, el projectat de P_{gn} ; parametrizem cada costat entre 0 i 1 i apliquem el mètode dels *Coons-patches* (Farin 90) (que serveix per parametritzar una superfície donada la seva vora, si aquesta està formada per quatre corbes amb interseccions convenientes per donar lloc a un quadrilàter a l'espai, eventualment guerxat i "arrugat") per parametritzar \mathcal{S} com la imatge del quadrat unitat. Com que les quatre vores de \mathcal{S} estan en el pla x - y , tot el pedaç de Coons també està dins d'aquest pla. Ara, per produir la coberta de gol, només cal prendre valors del quadrat unitat, passar-los a \mathcal{S} i d'aquí, per la funció de dues variables, a la cara corresponent de la coberta de gol.

6.3.4.6) Tribunes de premsa, il·luminació i marcadors. Aquests serveis o equipaments estan instal·lats penjant de la cara de sota de les cobertes, integrats en un gran element anular que es genera de la següent manera: suficientment per sobre de la última fila de les grades, a 66 metres per sobre del camp de futbol, i amb centre sobre la vertical del centre del camp, es traça una circumferència horitzontal de radi 107 ms. (figura 6.3.28). Per cada punt d'aquest cercle tracem una semirrecta horitzontal cap enfora i una semirrecta inclinada que formi 60° amb la horitzontal i que, projectada en planta sigui radial respecte el cercle i apuntant cap endins (figura 6.3.29). Ambdues semirrectes les perllonguem fins tallar amb la coberta. El que queda de les horitzontals forma la cara de sota del terra de l'element anular mentre que el que queda de les inclinades forma la seva cara davantera. Cal observar que aquesta cara formada per les semirrectes inclinades en realitat és part d'un con de revolució del qual la gran circumferència n'és la base. Després de comptar el gruix d'un forjat i les mides ergonòmiques, a partir del terra i sobre el con es practiquen, en les dues zones que corren per sobre dels laterals, les finestres de la tribuna de premsa, formant dues línies horitzontals que també son arcs de circumferència. Els seus límits angulars en planta venen donats pels radis vectors que passen pels vèrtexs del rectangle de referència. Més amunt, paral·lelament a les finestres de la tribuna de premsa i amb el mateix abast angular es practiquen les ranures pels focus d'il·luminació. En la zona del con situada per sobre de les grades de gol es col·loquen sengles marcadors de grans dimensions. Veure figures 6.3.30 i 6.3.31.

6.3. Un estadi de futbol.

6.3.4.7) Interseccions entre elements. Encara que, per no ser reiteratius, no ho hem inclòs al parlar de la coberta i els seus elements adossats, queda clar que, per cada elements d'aquests, hem elaborat la corresponent parametrització matemàtica i hem calculat els oportuns límits de variació dels paràmetres s i t . Quan la superfície parametritzada no és la imatge d'un rectangle de l'espai de paràmetres sinó que els límits de variació d'un paràmetre depenen del valor de l'altre, hem articulat les corresponents solucions, com ara la que hem explicat per la coberta de gol. Això és particularment senzill pel cas de superfícies reglades, perquè llavors n'hi a prou en parametritzar, diguem-ne per s , les dues vores de les generatrius rectes i interpolar linealment ambdues corbes per l'altre paràmetre, t en aquest cas. Tot aquest comentari serveix d'introducció al present apartat, el qual, encara que no el detallarem gaire, és dels més significatius perquè il·lustra un altre dels avantatges que té el mètode que proposem: el de poder calcular amb l'auxili del mètodes de resolució d'equacions analítics o numèrics les interseccions entre elements, essent possible trobar tants punts i amb tanta precisió com calgui de manera automàtica; només cal programar un petit algorisme o emprar rutines que els programes de càlcul ja porten implementades. No cal acudir a feixugues tasques gràfiques i descriptives, que acaben donant uns quants punts amb la precisió de l'eina de dibuix i fer després desenvolupaments, maquetes, etc. Només cal prendre les equacions del dos elements que es tallen i resoldre el sistema format per les dues. Un cop "llençada" la rutina, només cal esperar uns pocs segons per veure aparèixer a la pantalla la corba d'intersecció o les dues superfícies ja tallades, segons el que es volgués. Aquí comentarem breument, com il·lustració, tres interseccions importants que hem resolt d'aquesta manera. La més senzilla és la que es dona entre les dues grans cobertes en forma de cilindre parabòlic inclinat que cobreixen els dos laterals; després, la que retalla l'element de la premsa, il·luminació, etc. contra la coberta i, per fi, la més complexa, que és la que permet determinar on acaben les successives fileres de grades del tercer bloc de la tercera graderia, al trobar la intersecció entre aquestes i la coberta virtual de la que hem parlat abans.

INTERSECCIÓ ENTRE ELS DOS CILINDRES PARABÒLICS INCLINATS. Aquest cas és força senzill perquè, per simetria, la intersecció està en el pla $y=0$. Només cal passar de l'equació paramètrica a la cartesiana i eliminar la y . Tindrem l'equació d'una paràbola amb la z en funció quadràtica de la x . Els límits van des de la x de la intersecció de les dues grans paràboles inclinades fins la z del terreny exterior del estadi. Recordem que hi ha una paràbola pel tall de les respectives cares de sota i un altre per les de sobre.

INTERSECCIÓ DE L'ELEMENT ALT AMB LES COBERTES. Com hem assenyalat, ens referim a l'element que penja de la coberta i que allotja la tribuna de premsa, els focus d'il·luminació i els marcadors gegants i que hem descrit a 6.3.4.6). Aquest element, en el seu exterior, està format per una superfície plana horitzontal i una cònica de revolució, ambdues limitades per una circumferència, que fa d'aresta comú, i la cara de sota de la coberta. Per trobar la

intersecció, hem pres l'equació cartesiana de cada pedaç de coberta i la equació paramètrica del pla o del con respectivament. L'equació de la circumferència que fa d'aresta és, segons l'apartat 6.3.4.6), $\vec{d}(s) = 107 \cdot (\cos(s), \sin(s), 0) + (0, 0, 66)$; el vector normal unitari cap en fora és, òbviament, $\vec{n}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$. Per tant, la superfície horitzontal que fa de terra de l'element es pot parametritzar com

$$\vec{t}(s, t) = \vec{d}(s) + t \cdot \vec{n}(s). \quad (6.3.4.1)$$

Per trobar la corba d'intersecció de la superfície horitzontal amb la coberta, només hi ha que anar fixant valors per s i substituir (6.3.4.1) dins l'equació cartesiana del cilindre, resolent-la per t . La solució d'aquest tipus d'equació es pot trobar amb precisió arbitrària usant un mètode numèric estàndard com ara el de Newton o el de la secant. Amb això tenim parametritzada la corba d'intersecció en funció del paràmetre s . Per produir la superfície només cal fer, per cada s , interpolació lineal, amb el paràmetre t , entre aquesta corba i la circumferència \vec{d} . Anàlogament es parametritza la superfície cònica tot trobant, per cada s , el vector normal unitari a 60° i "cap endins" que és

$$\vec{n}_{\frac{p}{3}}(s) = -\cos\left(\frac{p}{3}\right) \cdot (\cos(s), \sin(s), 0) + \sin\left(\frac{p}{3}\right) \cdot (0, 0, 1) = \left(\frac{-\cos(s)}{2}, \frac{-\sin(s)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (6.3.4.2)$$

La intersecció i la producció del pedaç de con retallat segueix exactament el mateix procediment que el de la superfície horitzontal.

INTERSECCIÓ ENTRE LES GRADES I LA COBERTA. Es tracta de decidir fins on pot arribar cada fila de la tercera graderia, a partir de la fila 43, per tal de que els espectadors no quedin tallats per la coberta ni per sobre d'aquesta, a fi d'evitar reclamacions. Com que la coberta no és precisament plana, ni tampoc ho és la grada, la intersecció no és obvia. Per trobar-la hem seguit un procediment semblant al de l'apartat anterior. Prenem l'equació cartesiana de la coberta virtual, que, pel que afecta a les grades, sempre és la corresponent als cilindres parabòlics inclinats, i la paramètrica de la grada, que és del tipus (6.3.3.8) pels valor actuals de la nostra particular grada. D'acord amb el que hem comentat a 6.3.4.5), a partir de la directriu i les generatrius s'obtenen les equacions paramètriques del cilindre parabòlic virtual i d'aquestes s'arriba a la cartesiana, que resulta ser (per un d'ells, l'altre és simètric)

$$0.0059793x^2 + y + 1.27773z - 195.274 = 0 \quad (6.3.4.3)$$

6.3. Un estadi de futbol.

Com que la coberta té el màxim d'alçada al mig, cada fila s'estén des del centre cap als costats fins que talla a la coberta. Per simetria n'hi a prou en considerar un dels costats. Cada fila té una aresta davantera i una darrera; la primera correspon a un valor enter i parell del paràmetre t i la segona a un de senar. Aleshores, només cal fixar t al corresponent valor enter, substituir l'equació (6.3.3.8) dins la (6.3.4.3) i obtenir, per solució numèrica, el valor límit de la s , que, per tot el que hem dit, estarà entre $-p/4$ i 0 pel tram de fila darrera la porteria i entre 0 i $p/4$ pel lateral. Només cal anar dibuixant cada tram de fila d'acord amb (6.3.3.8) i entre els seus valors límits pel paràmetre s .

Per arrodonir l'acompanyament gràfic, afegim una petita col·lecció d'il·lustracions per mitjà de les figures que van de la 6.3.32 fins a la 6.3.39.

Tot i que, com ja hem comentat, el disseny de l'estadi no pretén ni acostar-se a un projecte "de veritat", no hem explicat tots els detalls que sí hem estudiat per arribar al resultat que es pot veure en les diferents il·lustracions de l'estadi que presentem. Ni calia ni era procedent fer-ho. Creiem que amb la descripció que hem fet ja es pot copsar el tipus de procediments i maneres de "pilotar" els conceptes que proposem amb el nostre mètode.

Per acabar de il·lustrar-ho, oferim uns darrers exemples, amb una temàtica inicialment molt diferent, on, enlloc d'un exemple que acaba en ell mateix, com aquest, desenvolupem una solució per un problema concret que es converteix en una tipologia molt flexible, modulable i adaptable a moltes solucions futures insospitadament allunyades de la inicial. És un exemple de la força que proporciona el treballar amb superfícies descrites amb equacions paramètriques i governades per paràmetres formals significatius.

6.4. Arcs, voltes, naus.

Aquest exemple va néixer arran d'una consulta d'un alumne de 5é. d'arquitectura a propòsit d'un exercici de la assignatura de projectes. El tema era una hipotètica reforma del Gran Bazaar d'Istanbul, consistent en enderrocar part de les galeries actuals i les seves corresponents botigues, ja envellides, i construir-les de nou, tot respectant l'estructura de galeries amb botigues adossades però no necessàriament el seu estil clàssic. Així mateix, dins de la zona reformada, hi havia un nucli central que, en lloc de seguir l'esquema de passadissos, consistia en una rectangle cobert per una trama de voltes sostingudes per pilars, que també havia que reconstruir. L'alumne citat tenia, en primera aproximació, una idea formal per les galeries que es traduïa en el esbós que ens va presentar i que es reproduïx en la figura 6.4.1. “Voldria fer alguna cosa com aquesta – digué – amb molta llibertat per variar l'altura, la forma i fins i tot les particulars “arrugues” d'una galeria a una altre i també d'un tram a un altre de la mateixa galeria”. “Les botigues també han de presentar la mateixa variabilitat de manera que l'aspecte general, de cara al resultat observable, recordi la aleatorietat de la naturalesa, les coves, etc.” La consulta, en fi, consistia en demanar si era possible articular algun procediment de disseny de manera que, malgrat que l'aspecte final fos el d'una forma arbitrària o aleatòria, en realitat, de portes endins del projecte, la forma romangués perfectament controlada en la seva llei de formació. Respecte a la naturalesa d'aquest control, l'alumne no tenia massa clar quina havia de ser, però intuïa que havia de tenir alguna cosa a veure amb les matemàtiques.

En resum, doncs, el programa a cobrir consistia en crear una tipologia prou amplia com per encabir tant galeries amb botigues adossades perpendicularment com sales amb pilars. També devia ser prou flexible com per poder variar l'altura al llarg de cada galeria i d'una botiga a una altre; la forma de les seccions d'una secció vertical a un altre; l'amplada d'un passadís a l'altre i, fins i tot, d'un extrem a l'altre del passadís i, per acabar, s'havia de poder imprimir al conjunt l'aspecte d'arrugat. Tot això amb el menor nombre de paràmetres de control, els quals, quan més significatius fossin respecte l'efecte que havien de produir, millor.

En quan a la solució adoptada, podríem fer un símil, no intentant ni molt menys equiparar la qualitat però sí la manera com va progressant l'articulació dels conceptes, amb el Bolero de Ravel o la Ofrena Musical de Bach, ja que es parteix d'un ínfim motiu i es van agregant i combinant diferents idees i operadors dels que hem introduït al capítol 5 (com si fossin els instruments) fins arribar a la solució final. En efecte, encara que es vol arribar a produir les galeries, botigues, etc. com a superfícies, el punt de partida consisteix en crear una corba, una que suggereixi una forma d'arc, en concret, una funció parabòlica, és a dir, de grau 2. Després de diverses manipulacions, s'arriba a un tipus *arc* amb diversos paràmetres formals que serveixen per modular-lo a fi d'individualitzar cada element concret d'entre tot el conjunt de possibilitats; per **repetició**, podem fer una fila de còpies del arc. Per **extrusió** (funcional) l'arc es pot convertir en una

6.4. Arcs, voltes, naus.

nau, o la fila d'arcs, en una fila de naus paral·leles, amb la possibilitat de que els paràmetres formals variïn al llarg de l'extrusió i a l'ample de la fila. Ara ja tenim una superfície. Si **encreuem** naus disposades en direccions perpendiculars entre sí i altures eventualment diferents, podem obtenir, per exemple, el tipus *passadís amb botigues*. Finalment se li pot aplicar al conjunt un **arrugador** tridimensional, també modulable, per fer "l'acabat".

Veiem amb més detall aquest procés i a continuació mostrarem dos exemples d'aplicació d'aquesta flexible tipologia: la del propi tema de la reforma de Gran Bazaar i la del disseny d'una hipotètica catedral gòtica.

6.4.1. Catàleg d'arcs.

A partir de la idea de que una galeria, nau o passadís, és una agregat continu de seccions verticals, cadascuna de les quals és una corba en forma d'arc (més o menys rectangular, o apuntat, o de mig punt, ... no importa), el primer objectiu és produir aquest element *arc*, amb prou graus de llibertat com per cobrir un ampli ventall de formes. La solució que hem donat a aquesta part del programa consisteix en cercar una funció que pugui recordar una forma d'arc i anar-la manipulant fins obtenir un objecte molt més general i flexible.

6.4.1.1) Parametrització de l'element *arc*. Prenem, doncs, la funció més senzilla que pot suggerir un arc, $y = x^2$. Aquest és en tot cas un arc cap amunt! Ho arreglem girant-la i traslladant-la una mica cap amunt: $y = 1 - x^2$. La gràfica d'aquesta funció, si considerem només la part que està sobre el semiplà $y \geq 0$, és un arc de llum 2 (des de $(-1, 0)$ fins a $(1, 0)$) i altura 1, que és el màxim, quan x val 0, just el que es veu en la figura 6.4.2(a). Una primera generalització, que dóna ja molt joc, s'aconsegueix al substituir l'exponent 2 per un exponent n que eventualment pot variar entre tots els reals positius. Per evitar problemes amb el signe, incorporem el valor absolut: $y = 1 - |x|^n$. La figura 6.4.2(b) mostra la gràfica d'aquesta funció pel cas $n = 4$. Aquesta formulació recorda la de les superel·lipses i l'efecte formal del paràmetre n entorn de la part superior i central de l'arc és també molt similar. Com que aquestes corbes se'n van cap menys infinit i només interessa la part per sobre de l'eix x , trunquem per aquest nivell:

$$y = \max(1 - |x|^n, 0) \quad (6.4.1.1)$$

Veure la figura 6.4.2(c). En aquest moment, podem introduir els paràmetres corresponents a les mides. La notació serà la següent, d'acord amb la figura 6.4.2(d):

- altura màxima: h .
- Llum de l'arc en la base: $2a$.
- Amplada total de l'element arc (llum més "peus"): $2b$.

Cada "peu" mesura, d'aquesta manera, $b - a$.

Si introduïm aquests paràmetres i traslladem l'arc de manera que el peu esquerra comenci a $x = 0$ i el dret acabi a $x = 2b$, resulta la funció

$$y = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{x-b}{a}\right|^n, 0\right) \quad (6.4.1.2)$$

la qual, de cara a les properes manipulacions i a la seva intervenció en la parametrització d'una superfície, ja escriurem en forma paramètrica:

$$\begin{cases} x(t) = t = \text{Id}(t) \\ z(t) = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{t-b}{a}\right|^n, 0\right) \\ t \in [0, 2b] \end{cases} \quad (6.4.1.3)$$

Hem substituït la y per la z , ja que representarà l'altura, com es pot veure en la figura 6.4.2(e). Amb això ja tenim una gamma gens menyspreable d'arcs (figura 6.4.2(f)), però encara presenten massa rigidesa en un aspecte. Al ser, en essència, gràfiques de funcions potencials, mai poden ser completament verticals enlloc; en particular, els muntants mai arrenquen del peu cap amunt verticalment, sempre presenten inclinació. Només per valors de n molt grans sembla com si fossin verticals, però al preu de que queda un arc quasi rectangular i numèricament inestable (observi's, per exemple, la figura 6.4.2(f) per $n = 50$). Per resoldre això, caldrà alterar la component $x(t)$, que de moment és la identitat en el paràmetre t . Es tracta d'aplicar una idea lleugerament similar a la de la grada esglaonada o a la dels expandidors horitzontals locals de l'apartat 5.3.1.4). Quan t arriba al valor $b - a$, s'acaba el peu i la z comença a augmentar. En aquest moment, cal mantenir fixat el valor de la x fins que la z hagi pujat prou, després cal que avanci traçant la volta de l'arc i arribi i s'estabilitzi a $b + a$ abans de que la z torni a arribar a 0. A més la "verticalitat" ha de ser graduable de manera que la gamma que ja tenim quedi inclosa en la nova com un cas particular. En concepte, el procediment triat per acomplir això ha estat mantenir la identitat entre la x i la t per $t \in [0, b - a] \cup [b + a, 2b]$ i substituir-la dins del quadrat

6.4. Arcs, voltes, naus.

$[b-a, b+a]^2$ per una funció de salt regulable de les del tipus **rampa** que hem vist a 5.2.4). Seguint aquella notació, i operant, d'acord amb l'esquema de la figura 6.4.3 resulta

$$x(t) = \mathbf{rampa}(t; b-a, b+a, -a, a, m) + (a - \mathbf{j}_{b-a, b+a, 2a}(t)) + t \quad (6.4.1.4)$$

Si anomenem

$$f_m(t) = \mathbf{rampa}(t; b-a, b+a, -a, a, m) + (a - \mathbf{j}_{b-a, b+a, 2a}(t)) \quad (6.4.1.5)$$

definitivament, l'arc queda parametrizat per

$$\begin{cases} x(t) = f_m(t) + t \\ z(t) = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{t-b}{a}\right|^n, 0\right) \\ t \in [0, 2b] \end{cases} \quad (6.4.1.6)$$

El nou paràmetre m , que ha de ser real positiu, gradua la intensitat de la verticalitat: quan més gran sigui, més s'atura la x sobre les dues bases de l'arc. Pel cas $m = 1$, es recupera la identitat per tota t , mentre que per t entre 0 i 1, enlloc de verticalitat aconseguim horitzontalitat. La figura 6.4.4 mostra un catàleg complet d'arcs d'aquesta família, amb la doble variació de n i m , on hem mantingut fixos, per no distreure, la llum i l'alçada de tots els arcs. Encara que aquest catàleg està discretitzat, en realitat disposem d'un doble continu de models d'arc on tant n , que controla la forma entorn de la volta de l'arc (des de més punxeguda fins a més plana passant per formes arrodonides), com m , que controla la verticalitat dels muntants, poden variar dins de la semirecta oberta $(0, +\infty)$. Recordi's que la fila " $m = 1$ " representa la família inicial d'arcs, la de la figura 6.4.2(f). Podem observar que, tot i que no estan formats ni per arcs de circumferència ni per trams rectes, dins del catàleg hi trobem arcs tant propers formalment com es vulgui (és a dir, visualment indistingibles) al tipus d'arc oriental, al gòtic elevat o abaixat, al romànic o al clàssic de mig punt, al rectangular, etc. Deixem per un treball futur l'arc de ferradura, que requereix avenços i retrocessos de la x més enllà de les possibilitats de **rampa**, encara que no ha de presentar especials dificultats.

Hem pogut veure, doncs, com podem modelitzar o emular gairebé totes les mides i formes d'arcs del món amb només quatre paràmetres, a , h , m i n , apart de la b , que fixa l'amplada del peu. A més, amb l'acció d'operadors ambientals

podem posteriorment deformar aquests arcs, obtenint arcs que no siguin simètrics, o arcs arrugats o corbats, etc. També podem introduir operadors genètics, fent que els paràmetres citats no siguin fixos per tot l'arc sinó que depenguin de t , etc. Alguna d'aquestes accions intervindran aviat quan passem de l'arc a la superfície.

6.4.1.2) Reparametrització de l'element *arc*. En ocasions, com succeirà a l'exemple de la catedral, cal combinar dos arcs (per exemple, fent transició d'un a l'altre) amb diferents valors del paràmetre m , el que controla la "verticalitat" dels muntants. Si els respectius valors de m són prou diferents, les velocitats i acceleracions en el recorregut de cada arc al variar la t poden ser tant diferents que la combinació resulti molt insatisfactòria. Per exemple, pot ser que un determinat valor de t correspongui en un arc a un punt molt proper al centre de l'arc mentre que en l'altre el punt en prou feines comenci a pujar pel muntant. Per això convé poder reparametritzar els dos arcs de manera que la component horitzontal es recorri al mateix o prou similar ritme. Aquí intervindran les propietats de les funcions de transició *tran* que hem enunciat en la proposició 2.2.2.5 i corol·lari 2.2.2.6 referides a la composició i la inversió d'aquestes funcions. Gràcies a aquelles propietats, si observem la formulació de $x(t)$ en (6.4.1.6) junt amb la figura 6.4.3, és immediat veure que la seva inversa és $x^{-1}(t) = f_{1/m}(t) + t$. Per tant, si definim $t(u) = f_{1/m}(u) + u$, podem reparametritzar (6.4.1.6) de manera que quedi com

$$\begin{cases} x(u) = u \\ z(u) = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{f_{1/m}(u) + u - b}{a}\right|^n, 0\right) \\ u \in [0, 2b] \end{cases} \quad (6.4.1.7)$$

Si es fa així es recupera l'arc en **versió funcional**, cosa que pot ser interessant per certes qüestions però que, si m és gaire gran, obliga a anar molt en compte amb el nombre i distribució de les avaluacions alhora de dibuixar l'arc. Podem fer un pas més: si prenem un altre valor m' , el mateix arc amb paràmetres formals m i n formulat en (6.4.1.6) i (6.4.1.7) pot ser reparametritzat també com

$$\begin{cases} x(v) = f_{m'}(v) + v \\ z(v) = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{f_{m'/m}(v) + v - b}{a}\right|^n, 0\right) \\ v \in [0, 2b] \end{cases} \quad (6.4.1.8)$$

D'aquesta manera, si cal fer una combinació entre dos arcs, es pot triar un valor comú de m' més o menys equidistant dels respectius valors de m de cada arc.

6.4.2. Periodificació, extrusió i encreuament de naus.

Un cop disposem de l'element bàsic, del motiu melòdic simple, que és l'arc, podem començar a orquestrar tota la composició. De fet, al introduir-li paràmetres a la primera paràbola, ja hem començat a fer variacions sobre el motiu primordial. Ara ampliarem el que tenim en dues direccions: 1) En el pla del primer arc i amb el mateix paràmetre que hem usat, per exemple la t , hem de passar d'un sol arc a una fila indefinidament llarga de còpies seves. 2) En una direcció perpendicular al pla anterior, governada per un segon paràmetre, diguem-li s , hem d'extrusionar l'arc o la fila d'arcs a fi d'obtenir una superfície, que serà la galeria o fila de galeries paral·leles que cercàvem.

Ulteriorment, prendrem dues famílies mútuament perpendiculars de galeries, definides sobre un mateix rectangle o "terra" (pla x - y) i les encreuarem, quedant-nos, sobre cada punt del "terra", amb el punt de la galeria que quedi més alta de les dues. Com veurem, ara tot això resulta molt senzill.

6.4.2.1) Periodificació. Cal aplicar-la només si es vol produir una fila d'arcs. L'arc a copiar al llarg de la fila serà un dels del paràgraf 6.4.1; com que el seu peu mesura $b - a$, la separació entre dos arcs consecutius serà $2(b - a)$. El més habitual es que es fixi al principi la llum dels arcs i la seva separació, així que el paràmetre b es calcularà a posteriori d'aquestes decisions.

Suposat, doncs, que ja tenim parametritzat el primer arc segons (6.4.1.6), es tracta de periodificar-lo a partir de $t = 0$ amb període $2b$. Com que l'arc ve formulat en forma paramètrica, podem acudir a 5.3.6.3), *periodificador de corbes paramètriques* i hi trobarem una solució estàndard en la fórmula (5.3.44). Malgrat això, en aquest cas es pot aplicar un recurs més específic. Podem periodificar funcionalment segons 5.3.1.1), *periodificadors* usant la versió *periodificador simple (ps)*. En efecte, si tornem a mirar la figura 6.4.3 i les fórmules (6.4.1.4) i (6.4.1.5), veiem que, amb **ps**, podem periodificar funcionalment la component $z(t)$ així com la part de la $x(t)$ que hi ha abans de sumar t , o sigui, la $f_m(t)$. Un cop periodificat, se li suma t , segons es veu en la figura 6.4.5 (compari's amb la 6.4.3). En definitiva, la parametrització de la fila d'arcs, amb infinites còpies, és

$$\begin{cases} x(t) = f_m(\mathbf{ps}_{0,2b}(t)) + t \\ z(t) = h \cdot \max\left(1 - \left|\frac{\mathbf{ps}_{0,2b}(t) - b}{a}\right|^n, 0\right) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.4.2.1)$$

Si només es volen k còpies de l'arc a partir de $t = 0$, només cal restringir-se a $t \in [0, 2kb]$. Podem designar vectorialment la corba obtinguda, d'acord amb (6.4.1.6) o (6.4.2.1) segons sigui un arc o una fila d'ells, com

$$\vec{\text{arc}}_1(t; a, b, h, n, m) = (x(t), 0, z(t)) \quad (6.4.2.2a)$$

o bé

$$\vec{\text{arc}}_2(t; a, b, h, n, m) = (0, x(t), z(t)) \quad (6.4.2.2b)$$

segons en quin pla vertical vulguem situar-la de cara a extrusionar-la.

6.4.2.2) Extrusió. Produir una galeria, passadís o nau, o una fila d'elles, a partir d'aquesta parametrització, per extrusió funcional és immediat. Per adequar-nos a l'ordre alfabètic, usarem la s per designar el paràmetre de la corba dels arcs i t pel de l'extrusió. Aleshores, si situem, per exemple, la corba en el pla x - z , i fem una extrusió, en la direcció de l'eix y , de longitud l d'un conjunt de k arcs (l i k poden ser infinit), tenim

$$\begin{cases} \vec{\text{nau}}_1(s, t; a, b, h, n, m) = \vec{\text{arc}}_1(s; a, b, h, n, m) + (0, t, 0) = (x(s), t, z(s)) \\ s \in [0, 2kb] \\ t \in [0, l] \end{cases} \quad (6.4.2.3)$$

Veure la figura 6.4.6. Per cada t fixada, tenim una secció de la nau. És força interessant subratllar que els paràmetres formals, a , b i, especialment, h , n i m , poden variar al llarg de l'extrusió és a dir poden ser funció de t . És més, també poden canviar al ample d'una secció, així que poden ser també funció de s . En definitiva, podem tenir, per exemple, $n(s, t)$ i $m(s, t)$, que vol dir que la forma dels arcs varia dins la mateixa fila (les còpies del primer arc dins la fila són diferents entre sí) i també al llarg de l'extrusió. En aquest cas, l'acció consisteix en que la forma inicial, que tenia els paràmetres constants, es veu afectada per

6.4. Arcs, voltes, naus.

operadors genètics “per mutació” que els converteixen en variables. Per altra banda, si recordem que, per dibuixar o generar la superfície, el que es fa es formar una quadrícula uniforme en el rectangle de l’espai de paràmetres s i t i es dibuixa la seva imatge, llavors també cal notar que, al no ser la component horitzontal $x(s)$ la identitat en s , si projectem les naus (per exemple les de la figura 6.4.6) sobre el terra no obtenim la quadrícula uniforme inicial sinó una trama periòdica com la de la figura 6.4.7, amb compressions transversals a la direcció de la fila d’arcs. En canvi, és uniforme en l’altre direcció, atès que en aquesta encara és la identitat en t . Això és important de cara al següent pas, la intersecció de galeries. Per fi, com en el cas de la simple corba, tot el conjunt de galeries així format pot ser transformat posteriorment per l’acció d’operadors ambientals, com ara girs, translacions i deformacions afins en general i, especialment, el pas a polars, per formar galeries que giren, i els arrugadors, per donar textura complexa a la superfície i respondre així a la comanda del citat alumne de 5é (figura 6.4.1).

6.4.2.3) Intersecció de galeries. Per poder donar compta de la típica trama de galeries que, per exemple, presenta el Gran Bazaar, cal poder interseccionar galeries que es creuen quedant-se en cada lloc **amb la més alta**. Aquí considerarem el cas de dues famílies mútuament perpendiculars, encara que no seria gaire més difícil abordar un cas més general. Siguin, doncs,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{nau}}_1(s, t; a_1, b_1, h_1, n_1, m_1) = \vec{\text{arc}}_1(s; a_1, b_1, h_1, n_1, m_1) + (0, t, 0) = (x_1(s), t, z_1(s)) \\ \vec{\text{nau}}_2(s, t; a_2, b_2, h_2, n_2, m_2) = \vec{\text{arc}}_2(t; a_2, b_2, h_2, n_2, m_2) + (s, 0, 0) = (s, x_2(t), z_2(t)) \\ \left\{ \begin{array}{l} s \in [0, 2k_1 b_1] \\ t \in [0, 2k_2 b_2] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.4.2.4)$$

dues famílies de galeries paral·leles que es creuen perpendicularment una amb l’altra, una amb k_1 passadissos i l’altre amb k_2 , i cadascuna amb els seus propis valors per cada paràmetre. Notis que, per evitar un abús de notació (atès que per cada família les funcions x i z involucren diferents valors pels paràmetres), els hi hem afegit un subíndex a les funcions x i z . Es tracta de formular la parametrització d’una nova superfície que, sobre cada punt del terra, coincideixi amb el sostre més alt de les dues famílies.

La parametrització (6.4.2.4) és bona per cada família de naus per separat, però no va bé si es volen combinar. Això és degut a les compressions transversals de les que parlàvem abans (figura 6.4.7); la direcció horitzontal que per una nau és la identitat, no ho és per l’altra. Cal llavors que cada parametrització reculli les

compressions de l'altra per tal de que, per cada parell de valors (s, t) obtinguem, en el terra, el mateix punt (x, y) i poder llavors comparar les dues altures z que hi corresponen i poder decidir quina és més alta.

La solució és compartir les irregularitats de la quadrícula. Si recuperem les fórmules des de la (6.4.1.4) a la (6.4.2.3), només cal reparametritzar la direcció d'extrusió de cada família de naus: ara (6.4.2.4) passa a ser

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{nau}}_1(s, t; a_1, b_1, h_1, n_1, m_1) = (f_{m_1}(\bar{s}) + s, f_{m_2}(\bar{t}) + t, z_1(\bar{s})) \\ \vec{\text{nau}}_2(s, t; a_2, b_2, h_2, n_2, m_2) = (f_{m_1}(\bar{s}) + s, f_{m_2}(\bar{t}) + t, z_2(\bar{t})) \\ \left\{ \begin{array}{l} s \in [0, 2k_1 b_1] \\ t \in [0, 2k_2 b_2] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.4.2.5)$$

on, per estalviar càlculs quan en una direcció només hi hagi una galeria, podem prendre

$$\bar{s} = \begin{cases} s & \text{si només volem una galeria en la direcció } x. \\ \mathbf{ps}_{0,2b_1}(s) & \text{si hi volem una fila de galeries.} \end{cases}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} t & \text{si només volem una galeria en la direcció } y. \\ \mathbf{ps}_{0,2b_2}(t) & \text{si hi volem una fila de galeries.} \end{cases}$$

La trama en planta ara és la que correspon a la figura 6.4.8. La intersecció surt immediatament:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{naus}}_{1,2}(s, t; a_1, b_1, h_1, n_1, m_1, a_2, b_2, h_2, n_2, m_2) = \\ = (f_{m_1}(\bar{s}) + s, f_{m_2}(\bar{t}) + t, \max(z_1(\bar{s}), z_2(\bar{t}))) \\ \left\{ \begin{array}{l} s \in [0, 2k_1 b_1] \\ t \in [0, 2k_2 b_2] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.4.2.6)$$

L'efecte és que, al llarg de cada extrusió, les seccions no estan equiespaiades, sinó que presenten les compressions corresponents als muntants

6.4. Arcs, voltes, naus.

dels arcs de l'altra família. La única precaució que cal prendre ara, al tenir la trama amb doble compressió, és que, si algun paràmetre, per exemple l'altura d'una de les dues famílies d'arcs (sigui per fixar idees la que està parametritzada per s) ha de variar al llarg de l'extrusió, és a dir, en funció de t , ja no pot fer-ho directament respecte t sinó de que ha de fer-ho a través de la corresponent $x_2(t)$; altrament, apareixeran discontinuïtats o arrugues inesperades.

Ja ho tenim tot disposat per presentar només dos exemples de les múltiples possibilitats que aquesta tipologia ha obert. Abans però, en la figura 6.4.9 mostrem algunes imatges d'altres exemples que queden coberts per ella. Com efecte secundari del nostre objectiu, canviant el **max** pel **min** en (6.4.2.6), obtenim tota una altra tipologia útil per modelitzar altres famílies d'objectes com ara els de la figura 6.4.10.

6.4.3. Solució del problema de la reforma del Gran Bazaar.

Amb el que hem desenvolupat podem oferir una tècnica **sistemàtica** per produir galeries com les de la figura 6.4.1, a les que també se li poden afegir les botigues adossades, de les que en la figura només es veu l'obertura per la porta. Descriurem, només superficialment, com hem resolt la galeria amb botigues i la sala rectangular amb columnes, sense entrar en valors numèrics concrets, que a aquestes altures ja no calen per entendre millor els procediments que s'estan il·lustrant. També comentem un parell de possibles extensions a casos més generals.

6.4.3.1) Galeries amb botigues. Degut a que es tracta d'una reforma, cal respectar la distribució vella en planta, és a dir, el passadís ha de tenir el mateix llarg i ample que abans i les botigues també han de conservar les seves mides, el seu nombre i la seva ubicació. La llibertat està al pujar de la planta cap amunt. Veurem l'exemple d'una galeria amb quatre botigues a cada costat, que és el cas que ens van proposar. Les variables de disseny forçades són:

- ample de la galeria: a_1 .
- ample de cada botiga: a_2 .
- distància entre les obertures de les portes de les botigues: d_b .
- profunditat de les botigues: l_b .
- llarg de la galeria: $4(a_2 + d_b)$.

Les variables lliures, i directament paràmetres formals per la formulació, són:

- altura de la galeria: h_1 .
- altura de les botigues: h_2 .
- forma de la secció de la galeria: n_1, m_1 .
- forma de la secció de les botigues: n_2, m_2 .

Respecte aquestes últimes, no cal que siguin constants, poden variar al llarg i ample. Una restricció natural és que es mantingui la desigualtat $h_1 > h_2$. Pel que fa al llarg de la galeria, comptem les quatre botigues, els tres espais entre elles i mig espai més al principi i final del passadís.

Amb això crearem un element del tipus (6.4.2.6), amb la secció de la galeria parametritzada per s i paral·lela a l'eix x (o sigui, s'extrusiona en la direcció y) i formada per un sol arc i les botigues formant una fila de quatre naus parametritzades per t i amb les seccions paral·leles a l'eix y . D'acord amb la notació establerta, les variables de disseny forçades d'abans ens forcen els paràmetres formals no lliures que faltaven:

$$a_1 = \mathbf{a}_1/2; \quad a_2 = \mathbf{a}_2/2; \quad b_1 = l_b + (\mathbf{a}_1/2); \quad b_2 = (\mathbf{a}_2 + d_b)/2.$$

Notis que el peu de l'arc de la galeria és el llarg de les botigues, mentre que el de cada arc de les botigues és la meitat de la distància entre elles.

Per observació del model (figura 6.4.1), que només representa una idea vaga i qualitativa, no pas exacte, i del catàleg d'arcs de la figura 6.4.4, triem, després de temptejar, els valors que ens semblen més adients pels paràmetres que fixen la forma de les seccions, els n_i i m_i ; els de la galeria són constants, mentre que els de les botigues tenen un valor diferent per cada parell al variar la t , de manera que són funcions de t constants a trossos, cosa que s'aconsegueix utilitzant les funcions característiques de les fórmules (5.2.12). Respecte les altures, fixem una altura per totes les botigues que va multiplicada per una versió ajustada de les funcions característiques difuses del tipus \mathbf{m} que hem vist a 5.2.5), fórmula (5.2.13), aquí $\mathbf{m}(x_1(s))$, de manera que l'altura romanguí constant fins prop del fons de la botiga i després baixi a zero just al arribar al fons (quan $s = 0$ i $s = 2b_1$); per la seva part, l'altura de la galeria es forma a partir d'una constant més una recte de pendent petita més una sinusoidal de període, amplitud i fase ajustades empíricament de cara a produir l'efecte d'abombament i depressió que s'observa en el model. La sinusoidal, recordem-ho, ha de ser funció de $x_2(t)$. Amb això s'obté un primer model com el de la figura 6.4.11, encara sense botigues, que és la nostra primera aproximació al model de 6.4.1. La figura 6.4.12 representa l'anterior galeria ja amb la profunditat de les botigues afegida.

Per acabar d'emular el model, cal arrugar-lo. Per això disposem dels operadors arrugadors tridimensionals, dins de verbs ambientals, a 5.3.3.4). Cal recordar que la planta no s'ha de veure afectada, per tant convé que, per $z = 0$, no

hi hagi arruga. Això no és problema, ja que els arrugadors són periòdics i tenen plans on són la identitat; només cal triar $z = 0$ com un d'ells. Per augmentar la sensació d'aleatorietat, cal triar un període pel arrugador prou més petit que el marcat pel ritme de l'alineament de les botigues i que no s'acosti a ser un divisor d'ell, per evitar ressonàncies i, a més, fixar les direccions principals de l'arrugador girades entorn de l'eix z , perquè actuï esbiaixat. A la pràctica, el que fem és girar l'objecte l'angle contrari al previst per l'arrugador, aplicar-li aquest sense girar i després desfer el gir. També cal triar una intensitat per l'arruga que no sigui molt exagerada; cal que aquesta sigui com una textura no que sembli un camió després de caure per un barranc! Es pot veure el resultat en la figura 6.4.13. Les figures de la 6.4.14 a la 6.4.17 ofereixen vistes addicionals d'aquesta galeria amb botigues.

Al Apèndix hi ha un llistat de codi de programa per dibuixar aquest element.

Aquesta solució admet complicacions addicionals per adaptar-la a casos específics més realistes. Entre d'altres, per exemple, si la planta formada per la galeria i les botigues no és perfectament rectangular sinó que té forma de trapezoide, es pot fer una adaptació partint d'una solució rectangular i després aplicant-li un operador ambiental que passi de la planta rectangular a la trapezoïdal, deixant les altures invariants. Un tal operador pot ser la transformació bilineal que serveix per parametritzar els paraboloides hiperbòlics, només que ara els quatre vèrtexs són coplanaris. També, en el cas en què el terreny no sigui pla o no sigui horitzontal, com que hem dit que l'altura h podia no ser constant, podem prendre aquesta com la diferència desitjada entre el terra i el sostre i, un cop formulat el conjunt com si el terra fos el pla $z = 0$, se li afegeix a la z en cada punt la cota del terra.

6.4.3.2) Sala rectangular amb columnes. En l'apartat anterior hem produït una tipologia de galeria amb botigues als costats a partir de l'element arc, la seva repetició i extrusió i el posterior encreuament de dos elements d'aquests perpendiculars entre sí. El fet de que d'aquest procés surti una tal tipologia no és inexorable, com ja hem vist, és només degut a la particular tria de valors que hem fet pels paràmetres formals que estaven a la nostra disposició. Per exemple, l'altura de la galeria és major que la de les botigues; el peu de l'arc de la galeria és justament el llarg o fondària de les botigues, mentre que el dels arcs d'aquestes és la meitat de la separació entre elles. Només canviant aquestes relacions entre mides, podem obtenir altres tipologies, sense canviar la estructura de les fórmules involucrades, només els valors dels paràmetres, com ja s'ha pogut comprovar en les figures 6.4.9 i 6.4.10. En altres paraules, una mateixa tipologia funcional (en el sentit de funcions matemàtiques) pot donar lloc a diverses tipologies formals o funcionals (en el sentit arquitectònic del seu ús). Així, en el cas present partim de la mateixa formulació per obtenir, amb una altra combinació de paràmetres, la tipologia de sala rectangular coberta per una quadrícula de voltes sustentada, en els vèrtexs d'aquesta quadrícula, per pilars de secció quadrada.

Per això, només cal triar, del catàleg, el mateix tipus d'arc per les dues files de voltes a encreuar, amb la mateixa altura i amplada per ambdues i donar al peu de tots els arcs la mida de la meitat del costat de la secció del pilar. La figura 6.4.18 mostra un resultat concret, amb les voltes bastant corbades. Amb valors prou alts per n i m , tindríem la forma de forjat pla sostingut per pilars, semblada a la de la darrera imatge de la figura 6.4.9. Podem generalitzar aquesta tipologia immediatament, sense esgotar les possibilitats de generalització: si l'amplada dels arcs d'una direcció no és la mateixa que la dels altres, la trama de pilars serà rectangular però no quadrada; si el peu no és igual en les dues direccions, els pilars tindran secció rectangular enlloc de quadrada.

Finalment, hi ha una generalització vàlida per tot el model però especialment per aquest darrer cas de sala rectangular amb columnes i voltes que també és interessant comentar. Degut a que l'objectiu inicial era resoldre el cas de galeries amb botigues que ens havien requerit (figura 6.4.1), en el qual es suposa que l'altura de les botigues és menor que el de la galeria central, quan s'ha formulat l'encreuament de l'extrusió de l'arc de la galeria central amb l'extrusió de la fila d'arcs de les botigues, en l'apartat 6.4.2.3), hem triat la funció **max** i aquesta s'ha mantingut la resta del temps. Només al final del citat paràgraf hem comentat les possibilitats que s'obrien cap a d'altres tipologies només canviant **max** per **min**. La generalització de la que parlem consisteix precisament en no imposar sempre el **max** com la única manera de combinar les altures de les extrusions que s'encreuen sinó que es permeti jugar amb el tipus d'*operació binària* que s'hi col·loqui en aquest punt de la fórmula. Per exemple, en el cas d'una quadrícula de columnes com la que acabem de tractar, en cada quadrat pot interessar una coberta de tipus casquet com en la figura 6.4.19. Aquesta es pot aconseguir essencialment usant (combinada amb altres "truquets"!) la **suma** d'altures. Tanmateix, la funció **max**, restringida al quadrat unitat, és una *t*-conorma, per tant és interessant estudiar l'efecte formal que pugui resultar de l'ús d'altres *t*-conormes, convenientment adaptades al fet de no estar restringits al quadrat unitat. En tot cas, aquí no seguirem aquest camí, que deixem per futurs treballs.

6.4.4. Disseny d'una catedral gòtica.

El que volem mostrar en aquest darrer exemple és el que podrien haver dissenyat els mestres medievals si haguessin disposat de la tecnologia actual i de la "gramàtica" funcional que estem proposant, tot mantenint l'expressivitat, l'estil, el repertori formal, etc., propis de l'art gòtic. Al mostrar que es poden combinar sense grinyolar móns i mentalitats allunyades de manera tan extrema, pretenen invitar al lector a que tregui la conclusió de que efectivament el mètode que proposem no imposa *a priori* un estil o un aire de família determinats als resultats formals que a partir d'ell es poden obtenir; per dir-ho usant un tòpic, no coarta la creativitat. Al contrari, veurem com l'amplia, al permetre concebre amb facilitat formes vàlides dintre de l'estil en que es treballi, en aquest cas el gòtic, i que són

6.4. Arcs, voltes, naus.

difícils de pensar i resoldre amb els mitjans antics, com és el cas del cimbori, el portal principal o els pinacles de les torres de la façana principal. De la mateixa manera, hi ha formes gòtiques, o de qualsevol altra estil, totalment establertes dins del repertori però que en realitat s'intueix que no són opcions irrenunciables de la lògica de l'estil sinó resultat de limitacions tècniques. L'exemple en el que estem pensant és el de la girola: en gairebé totes les catedrals està formada, en planta, per elements en forma de trapezi isòsceles, amb dos arcs ogivals (nervis) seguint el traçat de les dues diagonals del trapezi. Aquest elements són la solució medieval a la necessitat d'adaptar a la forma corba de la girola els elements lineals, rectangulars, que formen les naus rectes. Usant el nostre mètode, en canvi, és molt més fàcil partir dels elements lineals i transformar-los a coordenades polars, amb el que no queda un trapezi sinó un arc de corona circular i els nervis ogivals, en planta, també queden corbats. Segons el nostre mètode, no els fem en forma de trapezi perquè costa més: la limitació tècnica es dona a l'inrevés! Tanmateix, és bastant versemblant que, si als mestres gòtics els hagués costat *el mateix* ambdues solucions, sovint haguessin triat la corbada. En relació amb això, algú pot al·legar que, no sempre el nostre mètode amplia la creativitat sinó que, recíprocament, hi ha formes, aquestes sí específiques de l'estil, que eren més fàcils de dissenyar “a l'antiga”, com ara les columnes de secció lobulada. El que responem és: Doncs facis així! Ja hem dit que en aquest aspecte epistemològic som tan eclèctics com calgui: el nostre mètode no suplantja els anteriors, s'hi afegeix com una eina més. En cada cas cal triar el procediment de disseny més adient i si una forma s'ha pensat amb mentalitat de regla i compàs s'expressa millor amb aquestes eines.

Després del treball desenvolupat per donar resposta al problema del Gran Bazaar i després de la tipologia d'arcs, naus i voltes que hem obtingut, ens hem adonat de que, amb valors adients pels paràmetres, especialment igualant les altures i fent $n = 1$ i, per exemple, $m = 4$, s'obté alguna cosa com ara la de la figura 6.4.20 que té un fort aspecte gòtic. Aquest exemple ha estat el prototipus i el que ens ha fet pensar en dissenyar tota una catedral.

Així doncs, hem dissenyat una catedral gòtica en la seva estructura, tipologia i *aspecte formal general* però moderna en els procediments i recursos conceptuals i en la consciència de les possibilitats tecnològiques que hi ha darrera, de la qual es poden veure dues vistes generals en les figures 6.4.21 i 6.4.22. Hem dit “aspecte formal general” perquè a nivell dels detalls o dels elements individuals no són gòtics en la seva naturalesa, només ho semblen. Per exemple, els arcs i les naus tenen aspecte ogival degut a que $n = 1$, però no estan formats per arcs de circumferència com inevitablement ho hagués dissenyat un mestre medieval sinó que estan formulats segons les funcions de (6.4.1.6). Però, com hem dit, si el mestre medieval hagués disposat de la tecnologia actual poder no hauria considerat com quelcom irrenunciable l'ús d'arcs de circumferència; a la fi el que compta és l'aspecte que té el resultat final.

Tanmateix ens hem limitat a dissenyar les **superfícies** despullades, pures, corresponents a la obra en pedra o formigó i les teulades, de manera que queden excloses la fusteria, els vitralls, els detalls ornamentals (traceries, motllures, gàrgoles, cornises, grups escultòrics, baix-relleus, ...), el mobiliari, el cadiratge del cor, etc., atès que tot això correspon a un nivell de detall posterior al disseny principal i sol anar a càrrec d'altres artesans. Tampoc hem resolt les escales interiors, galeries de servei, cripta, sagristia, etc. Al cap i a la fi, el propòsit, com hem dit, només és provar que dins el nostre mètode es pot encabir una gamma molt ample de formes i estils. En canvi, és clar que una gàrgola o una escultura és més fàcil de fer a ma per un escultor que amb CAM després de parametritzar-la! Anem a descriure els trets més rellevants de la catedral: primer l'esquema general i les mides més importants i després com s'han dissenyat i formulat paramètricament els elements més significatius. Al Apèndix es poden trobar els fitxers *catedral.m* i *catedral.lsp* que contenen les funcions més importants que hem usat per produir els diferents elements de la catedral.

6.4.4.1) Esquema general. Es tracta d'una catedral d'estructura formal intencionadament molt clàssica però original en el sentit de que és completament inventada per nosaltres, no correspon a cap d'existent. La descripció que segueix es pot acompanyar de l'observació de les figures de la 6.4.21 cap endavant. Com la majoria de catedrals gòtiques, té planta de creu llatina (figures de la 6.4.23 a la 6.4.26). Tant el braç principal com el creuer estan formats per cinc naus (una principal i dues laterals a cada banda d'aquella) amb un segon pis, el trifori, sobre les primeres naus laterals, mentre que queda una terrassa correguda sobre les segones naus laterals, les quals, eventualment, es poden dedicar a capelles. Les capelles, absents de moment, també es poden encabir per fora d'aquestes naus laterals segones, encaixades entre els contraforts dels arcbotants. Totes les naus laterals s'uneixen per darrera el cor per mitjà de la típica girola, els cinc elements o trams de la qual, com hem dit, són els corresponents a les naus lineals passats a coordenades polars. Per evitar trams massa llargs en la façana més exterior de la girola, corresponent al corbat de les segones naus laterals, s'han duplicat el nombre d'arcs en aquesta façana (figura 6.4.22). Sobre el creuer s'alça un gran cimbori (figura 6.4.27). Cada façana té dues torres una a cada banda, adossades i de planta rectangular les de les façanes del creuer, exemptes i de planta quadrada (dobles de les anteriors) les de la façana principal. Les torres de les façanes laterals es coronen en pinacles que, en corbar-se un cap a l'altre, s'ajunten i formen un únic arc gòtic sobre tota la façana (figura 6.4.28). Les de la façana principal es coronen amb pinacles en forma d'agulla amb balcó a la seva base (figura 6.4.29). En planta, el mòdul bàsic és un quadrat de 10x10 metres. Cada tram de les naus laterals correspon a un d'aquests mòduls mentre que en la nau principal, tant del braç principal com del creuer, està format per dos mòduls, de manera que els trams d'aquestes naus són igual de llargs que els de les laterals però són el doble d'amples. En el creuer, només la nau principal té un portal a cada extrem (figura 6.4.30), mentre que el braç principal té una gran portalada en

6.4. Arcs, voltes, naus.

voladís a la façana principal que emmarca tres portals corresponents a la nau principal i a les dues primeres laterals (figura 6.4.31). Les naus principals s'eleven a 50 metres, més la teulada, les laterals baixes a 15 metres, el trifori té una altura de 10 metres més la teulada i la torre del cimbori arriba a 75 metres als que cal afegir 50 metres més del pinacle. Les torres de les façanes també tenen 50 metres d'altura, sense comptar els pinacles, i estan dividits en altura segons el mateix esquema de les naus. Els pinacles-arcs de les façanes laterals afegixen 25 metres més a les seves torres mentre que els de la façana principal sumen a cada torre 50 metres. Respecte l'altura exterior que hem donat per cada element, l'altura interior de cada volta és mig metre inferior, degut al gruix de la pedra; així, per dins, la nau principal arriba als 49.5 metres, etc.

6.4.4.2) Descripció dels elements més significatius. En aquest darrer apartat només pretenem donar les claus per entendre l'origen conceptual de les formes i el "disseny" dels muntatges matemàtics que les defineixen, més que explicitar-los; a més, no ho fem exhaustivament per tots els objectes que apareixen en la catedral. S'entén que si uns ha estat possible formular-los, els altres també i per mitjans similars.

NAUS I TRIFORI; GIROLA. Tant les naus com el trifori, per la part interior, són encreuaments de naus extrusionades i periodificades segons el model de la fórmula (6.4.2.6) amb el mateix valor per les dues naus per l'altura h , per n que val tota l'estona 1 per produir l'efecte d'arc ogival i per m que en el cas de la nau principal val 6, per les laterals baixes val 4 i pel trifori altre cop 6. Veure figura 6.4.32. Aquests valors s'han triat simplement provant i valorant l'efecte visual resultant en funció del previst. D'acord amb la notació introduïda al principi de 6.4.1.1), la base dels pilars resulta quadrada amb costat dues vegades $b - a$. Com que a s'ha triat un metre menys que b , resulten pilars de 2×2 metres.

La nau principal del braç principal de la planta en creu (figura 6.4.33) acaba en un absis, mentre que les naus laterals i el trifori (figura 6.4.34 i 6.4.37), al arribar a l'altura d'aquests absis formen una doble girola. La formulació de l'absis i de les capes de la girola s'obté passant a polars la formulació dels trams rectes de les naus respectives. Així es dissenya un tram rectangular en el que una direcció, la que correspon a la transversal dels trams rectes, està mesurada en metres amb el mateixos valors de a i b que per aquells, mentre que la direcció longitudinal es pren en radiants, mantenint llavors entre a i b la mateixa proporció que en els trams rectes. En el cas de l'absis de la nau central (figura 6.4.35), només s'ha de passar a polars la meitat de cada tram i traslladar-la de manera que al passar a polars la clau de cada tram vagi a l'origen o centre de gir de l'absis, com es veu en el detall de la figura 6.4.36. Pel que fa a la girola de la nau més exterior, la meitat interior segueix el ritme dels seus trams rectes, mentre que en la meitat exterior, en la direcció longitudinal, es duplica el nombre d'arcades, per

evitar finestrals massa amples. Un nervi en la “cresta” longitudinal d'aquests trams separa els dos jocs d'arcades (figura 6.4.37).

TRANSICIÓ ENTRE DOS TIPUS D'ARCS I APLICACIÓ ALS PANYS DE MUR I ALTRES ELEMENTS. Les voltes que hem vist en paràgraf anterior representen la superfície interior de l'edifici; cap l'exterior calen panys de paret per tancar l'espai entre dos trams de nau. Per això, el que hem fet és emmarcar cada extrem exterior de nau, que és un arc bidimensional, en un rectangle sense base que definim com un altre arc amb n i m prou grans com perquè el resultat sigui rectangular a qualsevol efecte pràctic. Aquest arc té $a = b =$ “la b de la nau que tanca”, mentre que, a diferència de la nau de la que és extrem, l'arc a emmarcar es parametriza sense peu, és a dir amb la b igualada a la a . Per produir el pany de paret, només cal fer una transició lineal entre els dos arcs, tal com ja hem vist al capítol 5. Però, tal com hem definit l'element arc, el rang del paràmetre va de zero a $2b$; com que aquí el rang dels dos arcs no és igual, cal reparametritzar un d'ells per igualar els rangs. En l'absis i les giroles es procedeix igual, només que les unitats en horitzontal són en radians.

Un altra aspecte a tenir en compte és que si els dos valors de m dels dos arcs a unir per mitjà d'una superfície de transició són molt diferents, es produeix una gran discrepància en la velocitat de recorregut de la projecció horitzontal de l'arc, ja que aquest paràmetre precisament produïa una distorsió en la component horitzontal de l'arc per graduar la “verticalitat” amb que aquest arrencava del terra. Això pot arribar a provocar que s'uneixi un punt proper a la base d'un arc amb un proper a la clau de l'altre i llavors la recta d'unió pot no quedar tot dins de l'espai entre els dos arcs. Precisament aquest problema es dona en el pany més exterior de les portalades del creuer, en el que l'arc de “sota” és ogival amb $n = 1$ i $m = 4$ mentre que el de “sobre” és poligonal ja que té $n = m = 1$. Just per resoldre aquesta dificultat (encara que també serveix per altres aplicacions) hem introduït l'apartat 6.4.1.2): apart de la reparametrització d'un dels arcs per igualar els rangs, ara, gràcies a les propietats 2.2.2.5 i 2.2.2.6, podem reparametritzar tots dos arcs de manera que la seva component horitzontal es recorri segons el valor de m d'un d'ells o un valor comú de m equidistant dels dos valors inicials discrepants, segons les fórmules (6.4.1.7) i (6.4.1.8). Es pot observar aquesta transició en qualsevol figura que contingui una vista exterior de la catedral.

CIMBORI. El cimbori té dos cossos. L'inferior omple l'espai interior on es creuen les naus principals dels dos braços de la planta; per tant cobreix un quadrat 20×20 encara que arriba més amunt, fins a 75 metres. La diferència entre aquesta altura i les cobertes de les naus permet obrir finestrals ogivals que donen llum quasi zenital al creuer i a l'altar, que està gairebé a sota. Ajustant els valors dels paràmetres, la morfologia d'aquest element és la mateixa que la d'un tram de la nau principal; també té tancaments per panys de paret del tipus del paràgraf anterior. Per donar més resistència, el peu de l'element arc (diferència $b - a$) aquí val 2 metres.

6.4. Arcs, voltes, naus.

Pel que fa a l'element superior, es tracta del pinacle de 50 metres d'alçada que es mostra en la figura 6.4.38. La base és quadrada de costat 15 metres. La diferència amb l'element inferior permet ubicar una terrassa entorn del peu del pinacle. La forma d'aquest pinacle està determinada per un joc de tres variacions simultànies. És una superfície generada per una secció que es mou des de 75 metres fins a 125 metres segons un eix vertical centrat sobre la planta del cimbori. Si aquesta secció fos constant en el seu recorregut, òbviament donaria lloc a un prisma de base quadrada. Però en realitat hi ha tres característiques que varien al llarg de l'ascensió: la forma, la mida i la orientació respecte l'eix. La forma de la secció és en realitat una superel·lipse (veure §6.3.3) l'exponent u de la equació cartesiana de la qual varia des de 1 a la base (per això és quadrada) fins a 2 a dalt (és a dir acaba sent circular). La variació, però, no és lineal sinó que està controlada per una funció de transició del tipus de les **trans** de 5.2.4), que ja hem usat sovint, de manera que es faci circular més a poc a poc que linealment. La mida ve controlada per un factor d'escala que també és una transició entre 1 (base 15×15) i 0 (acaba en punxa) en funció de l'altura, de manera que el propi perfil del pinacle revela la gràfica de la funció de transició. Al dir que també varia la orientació ens referim a que la secció gira entorn de l'eix a mida que puja: comença amb un gir de 45° per ajustar el quadrat inicial a la base (les superel·lipses de $u = 1$ són "diamants" per la seva posició típica respecte els eixos de coordenades) i, mentre completa l'altura del pinacle, fa mitja volta més, gir que tampoc és lineal respecte l'altura sinó que es regula per una transició, per aconseguir que les arestes del prisma inicial arrenquin amb tangent vertical.

TORRES DE LA FAÇANA PRINCIPAL. La façana principal queda emmarcada per dues torres simètriques que estan formades per un cos en forma de prisma de base quadrada de 20×20 metres i altura 50 metres més un pinacle de 50 metres més.

El cos està dividit en tres nivells: l'inferior, de 15 metres, format per 2×2 trams com els de la primera nau lateral, el segon, de 10 metres, format per 2×2 trams com els del trifori i el tercer de 25 metres format per dos trams 20×10 dissenyat de manera anàloga als trams de les naus i amb el mateix tipus de tancament per panys de paret definides com una transició entre un arc ogival i un rectangular.

Els pinacles, com succeïa amb el del cimbori, són el resultat del joc de múltiples transformacions simultànies aplicades a una secció a mida que aquesta ascendeix per un eix vertical des de la cota 50 fins a la 100. Comparteix amb el cimbori un escalat en altura des del factor 0.75 de la base (per deixar espai a una terrassa al voltant) fins el 0 (extrem en punxa) regit per una transició que comença a actuar en la cota 55. També s'aplica un gir, en aquest cas de 22.5° , que s'estén entre la cota 52.5 i la 77.5. La diferència essencial amb el cimbori està en la secció que ascendeix i sobre la que s'apliquen aquestes transformacions. També és una secció que comença per un quadrat i que va variant de forma a mida que puja, però segons una altra regla que no té res a veure amb superel·lipses.

L'objectiu formal és que passi progressivament d'un quadrat a una estrella de vuit puntes com la de la figura 6.4.39(c), de manera que fins a la cota 52.5 sigui una secció quadrada, es produeixi la transformació en la estrella de vuit puntes entre aquí i la cota 82.5 i segueixi així fins a la punta. Per aconseguir aquest objectiu hem definit un octògon per mitjà de la seqüència ordenada dels seus vèrtexs:

$$v_1(t) \rightarrow w_1(t) \rightarrow v_2(t) \rightarrow w_2(t) \rightarrow v_3(t) \rightarrow w_3(t) \rightarrow v_4(t) \rightarrow w_4(t) \rightarrow v_1(t). \quad (6.4.4.1)$$

Cada vèrtex té una posició inicial i una final i, al variar t de 52.5 a 82.5, van passant de la posició inicial a la final. En la posició inicial estan agrupats per parelles sobre cadascun dels vèrtexs del quadrat segons es mostra en la figura 6.4.39(a), mentre que en la posició final ocupen els vèrtexs de la estrella de vuit puntes. En la figura 6.4.39 es veu la posició inicial, la final i la intermèdia. Això, combinat amb les altres dues transformacions, és a dir, el gir i l'escalat (que no es recullen en la citada figura), dóna lloc a un pinacle; l'altre és simètric d'aquest respecte l'eix longitudinal de la catedral. Cal aclarir que el pinacle és la superfície donada pel contorn exterior de l'objecte que hem generat; la part de cada aresta que queda interior cal suprimir-la, retallar-la. A partir de la seqüència (6.4.4.1), el polígon es parametriza segons les fórmules (1.7.3) del paràgraf 1.7.2, referit a la parametrització de polígons. Veure la figura 6.4.40.

TORRES DE LES FAÇANES DEL CREUER. Les façanes del creuer són una mica més modestes. També estan emmarcades per dues torres simètriques menys exemptes respecte l'edifici principal que les de la façana principal, cadascuna de les quals té un cos en forma de prisma de base rectangular amb un frontal de 20 metres, una profunditat de 10 i una altura de 50. La divisió en tres nivells i la constitució d'aquests nivells és idèntica a les de les torres de la façana principal llevat que en la part de darrera cal dividir els finestrals i les naus del tercer nivell en dos per donar lloc a un pilar que rebí la descàrrega d'un arcbotant. Respecte al pinacles, com hem dit, s'inclinen i s'ajunten fins formar de fet una arcada, com si tot el conjunt fos una sola portalada. Per concretar aquest disseny, hem establert quatre arcs de tipus ogival, els més alts de 25 metres, cadascun dels quals arrenca d'un dels vèrtexs de la part superior del cos d'una torre (cota 50) i acaba en el vèrtex simètric de la torre veïna simètrica. Els arcs que surten dels vèrtexs més interior s'inclinen lleugerament cap el centre, de manera que les seves claus es toquen (figura 6.4.41). En parametritzar aquests quatre arcs per un mateix rang d'un paràmetre t , per cada valor d'ell resulten quatre punts que donen lloc a un polígon (un quadrilàter), que podem parametritzar per un altre paràmetre s , segons les fórmules (1.7.3), com abans.

PORTALADES. La portalada principal esta formada per tres portals, un més gran per la nau principal i un per cadascuna de les primeres laterals (les segones laterals desemboquen en el cos de les torres). Són portals ogivals amb

6.4. Arcs, voltes, naus.

arquivoltes. Aquests tres portals queden emmarcats per un altre arc ogival molt aplanat que omple l'espai entre les dues torres i forma una mena de porxo unificador de tota la portalada (figura 6.4.42).

Cada portal d'aquesta portalada s'ha formulat per separat a partir d'una sèrie d'arcs (parametritzats per t , però amb els valors d'aquest paràmetre consecutius per poder-los acoblar amb els del porxo) que determinen les arestes principals del portal, des de la més interior i més petita fins la més exterior i més gran, de manera que, en alçat, cada arc conté els anteriors al seu interior; llevat de la última, les demés arestes no tenen "peu" ($b = a$). Aquestes arestes s'interpolen d'una a la següent per mitjà d'una transició (parametritzada per un altre paràmetre s) la majoria de vegades lineal llevat de dues: la que produeix les arquivoltes és una transició esglaonada (en el paràmetre s) del tipus *grada* que hem definit al paràgraf 6.3.2, mentre que, ja fora del portal, entre l'arc més exterior del portal i el porxo, la transició és en forma d'arc ogival. Per això hem desenvolupat una funció que, donats dos punts de l'espai i dos valors n i m , construeix un arc sense peu del tipus (6.4.1.6) en el pla vertical que conté els dos punts amb $b = a =$ "distància en planta entre els dos punts" i $h =$ "diferència d'altura entre els dos punts". Aquí les dos punts varien sobre cadascun dels dos arcs a interpolar. En algunes transicions, especialment en aquesta entre l'arc més exterior de cada portal i el porxo, ha calgut reparametritzar d'acord amb el corol·lari 2.2.2.6 i les fórmules (6.4.1.8) per igualar la velocitat de recorregut horitzontal. Cada portal presenta a més un timpà formulat con una superfície d'interpolació entre les dues meitats simètriques del seu arc més interior, des d'una certa altura fins el vèrtex.

El portal de cada extrem del creuer és una versió més senzilla del mateix procediment d'anar interpolant arcs; una d'aquests interpolacions és esglaonada per produir les arquivoltes, una altra, la que es dona entre l'arc més exterior de les arquivoltes i l'arc triangular que emmarca tot el portal, amb reparametrització per ajustar les velocitats de recorregut horitzontal (figura 6.4.30).

ARCBOTANTS I CONTRAFORTS. Els arcbotants consisteixen senzillament en una biga inclinada a 45° de secció rectangular, que es resol usant la funció que parametriza polígons d'acord amb les fórmules (1.7.3) per la secció i copiant-la al llarg d'una guia recta inclinada, i un arc circular de reforç de la biga, que també té secció rectangular, una mica més petita, que es còpia *paral·lela a sí mateixa* al llarg d'una guia circular (figura 6.4.43). Com que tots els recursos són útils, el centre, el radi i el rang angular d'aquesta guia s'ha obtingut, gràficament, amb tècniques pròpies del dibuix tècnic o de la geometria descriptiva, encara que després la guia s'ha formulat paramètricament.

Els arcbotants descarreguen el seu esforç sobre els contraforts, que estan formats per un cos i una agulla. El cos és de secció rectangular (variable) tal que, ha nivell de terra té una base de 2 metres en la direcció paral·lela al mur i 5 en la perpendicular, al que s'afegeix un prisma de base 2×1 a partir de la terrassa del nivell del trifori; aquest cos es va fent més estret fins a l'altura de 36 metres on la secció és 2×2 . Sobre aquest quadrat, que li fa de base, es col·loca una agulla que,

al marge de posteriors afegitons decoratius, és una simple piràmide que puja fins la cota 45. Respecte al al·ludit estretament progressiu de la secció, aquest segueix un esquema d'iteració fins l'infinit d'una llei. En efecte, apart d'una llesca prismàtica constant de $2 \times 1 \times 36$ que s'uneix a la que neix en la terrassa del trifori, la resta del contrafort parteix d'un element format per un prisma, adossat a l'anterior, de mides $2 \times 4 \times 15$, més un prisma trapezoïdal col·locat al seu damunt que passa de la secció 2×4 a la secció 2×2 amb una altura de 3 metres. Aquest conjunt té una altura de 18 metres que és la meitat de la de tot el cos. La resta del cos es forma afegint còpies d'aquest conjunt inicial escalades des de l'altura 36 (l'escalat afecta al perfil, no al ample que sempre és 2 metres). Cada còpia és la meitat de la anterior, de manera que només amb infinites iteracions del procés es pot arribar a la cota 36. Naturalment, quan falten pocs mil·límetres, s'acaba amb una línia recte. Aquest escalat s'ha formulat aplicant a la parametrització del conjunt inicial una funció d'escalat des d'un punt amb un factor d'escala que varia amb un paràmetre t però no linealment, sinó segons la funció part entera (veure apartat 5.1.2.2)), de manera que durant l'execució d'una còpia, el factor d'escala és constant i, al passar a una nova còpia el factor salta al valor meitat de l'anterior.

Aquesta regressió infinita, apart d'augmentar l'efecte de perspectiva i fuga cap a la verticalitat ascendent del contrafort, es presta, al gust del consumidor, a diverses metàfores de caire espiritual o moral, a les que són molt afeccionats els usuaris d'aquest tipus d'instal·lacions.

A més dels arcbotants i contraforts principals, per resoldre els angles entorn del cimbori hem afegit algunes bigues i contraforts intermedis de formulació més senzilla, que es poden veure en el detall de la figura 6.4.44.

ALTRES ELEMENTS. Fins aquí hem fet una breu descripció dels elements més rellevants de la catedral i del seu procés de concepció i formulació matemàtica. Per completar la catedral hem hagut de dissenyar molts altres elements, sempre seguint les mateixes pautes i tècniques que ja hem il·lustrat, per tant no cal entretenir-se en cadascun d'ells. De totes maneres pot ser interessant resumir les idees més importants d'alguns d'ells.

- Teulades. Les teulades es formulen com galeries simples. Llevat del tram que va del cimbori fins la façana principal, tots tenen $n = m = 1$, amb ample i altura adients. El tram principal té el valor de m i de h variable, des del cimbori, on és igual als altres fins la façana principal, on és un arc ogival. En particular, el valor de h està controlat per una funció polinòmica de grau 3. L'absis de la nau principal es cobreix amb un simple mig con. A l'entorn de les teulades, als seus extrems i a l'entorn de les terrasses del cimbori i de les torres principals s'ha col·locat una mena de sanefa el motiu bàsic de la qual és una peça polinòmica de grau 8 de llarg com cada tram de la nau sobre la que està, de manera que l'efecte és el d'una barana amb agulles. Les teulades del trifori són del mateix tipus que els més senzills, prenent

6.4. Arcs, voltes, naus.

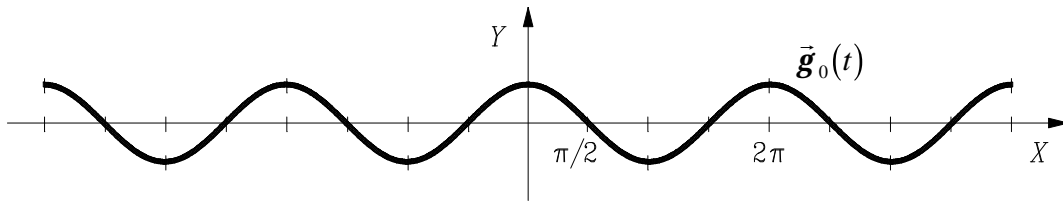
només la meitat i havent de produir els elements en angle com encreuament de naus. Veure figures 6.4.45 i 6.4.46.

- Rosassa. La rosassa és una interpolació entre dos superel·lipses no concèntriques, una de exponent 2 pel contorn de la rosassa i un altre de exponent 1 per encaixar el pany de paret a la façana principal. Després de parametritzar aquest element per interpolació entre les dues corbes, s'ha de girar 45° per ubicar-lo (figura 6.4.47).
- Elements dissenyats com interpolació entre dos arcs. La tècnica emprada per produir els panys de paret s'ha aprofitat per molts altres elements. Entre els que encara no hem descrit podem citar: les finestretes de les façanes, sobre el portal; els grans vitralls de les façanes del creuer; els remats, en la façana principal, de les naus del trifori; les gelosies que envolten el cor (figura 6.4.48), etc.
- Altar. Aquesta peça està dissenyada usant la mateixa formulació d'encreuament de naus que hem usat per fabricar les naus de l'edifici. Es tracta de un arc sencer i dos mitjos a cada banda per cada direcció. Després es cobreix amb una llosa ortoèdrica (figura 6.4.49).

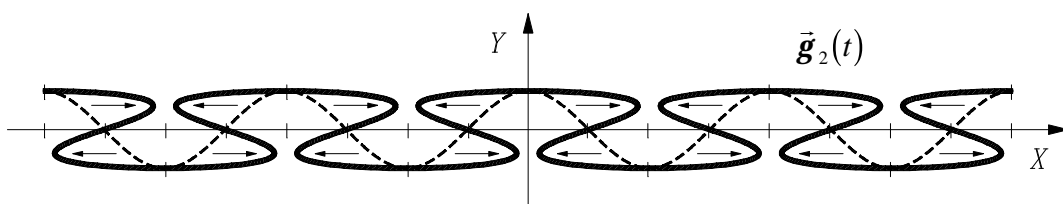
Fins aquí arriba la descripció de la catedral, que es complementa necessàriament amb la observació de les il·lustracions que s'adjunten, de la 6.4.21 a la 6.4.49, ja comentades, i de la 6.4.50 a la 6.4.60 com imatges addicionals. Creiem que amb els exemples que hem donat es pot entendre millor el que hem volgut oferir i es pot intuir com es pot aplicar tot això a tota mena de temes de disseny, com una eina més que nosaltres creiem que enriqueix, ni que sigui modestament, el bagatge de les ja disponibles fins ara. Aquí ho deixem, a disposició de qui li pugui fer servei.

En el darrer bloc comentem possibles temes, aspectes, etc., relacionats amb aquests, que no han quedat esgotats aquí i que podria ser d'interès seguir desenvolupant.

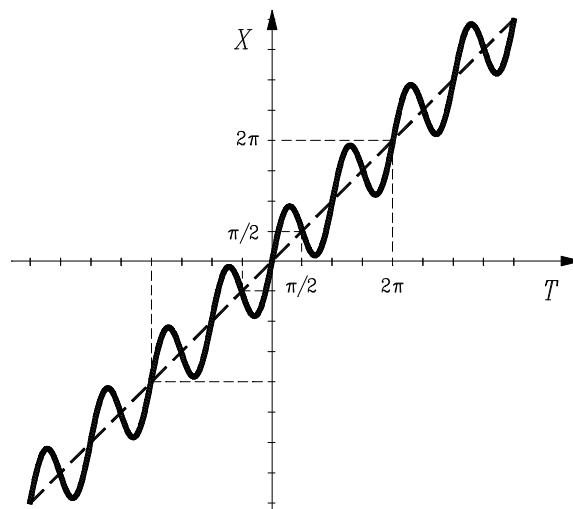
Figures del Capítol 6



(a) objecte de partida: gràfica de la funció cosinus.



(b) alteració requerida per la gràfica de la funció cosinus.



(c) alteració requerida per la identitat en t , pel que fa a la component x .

fig. 6.1.1. Modificació quirúrgica de la gràfica de la funció cosinus.

6.5. Figures.

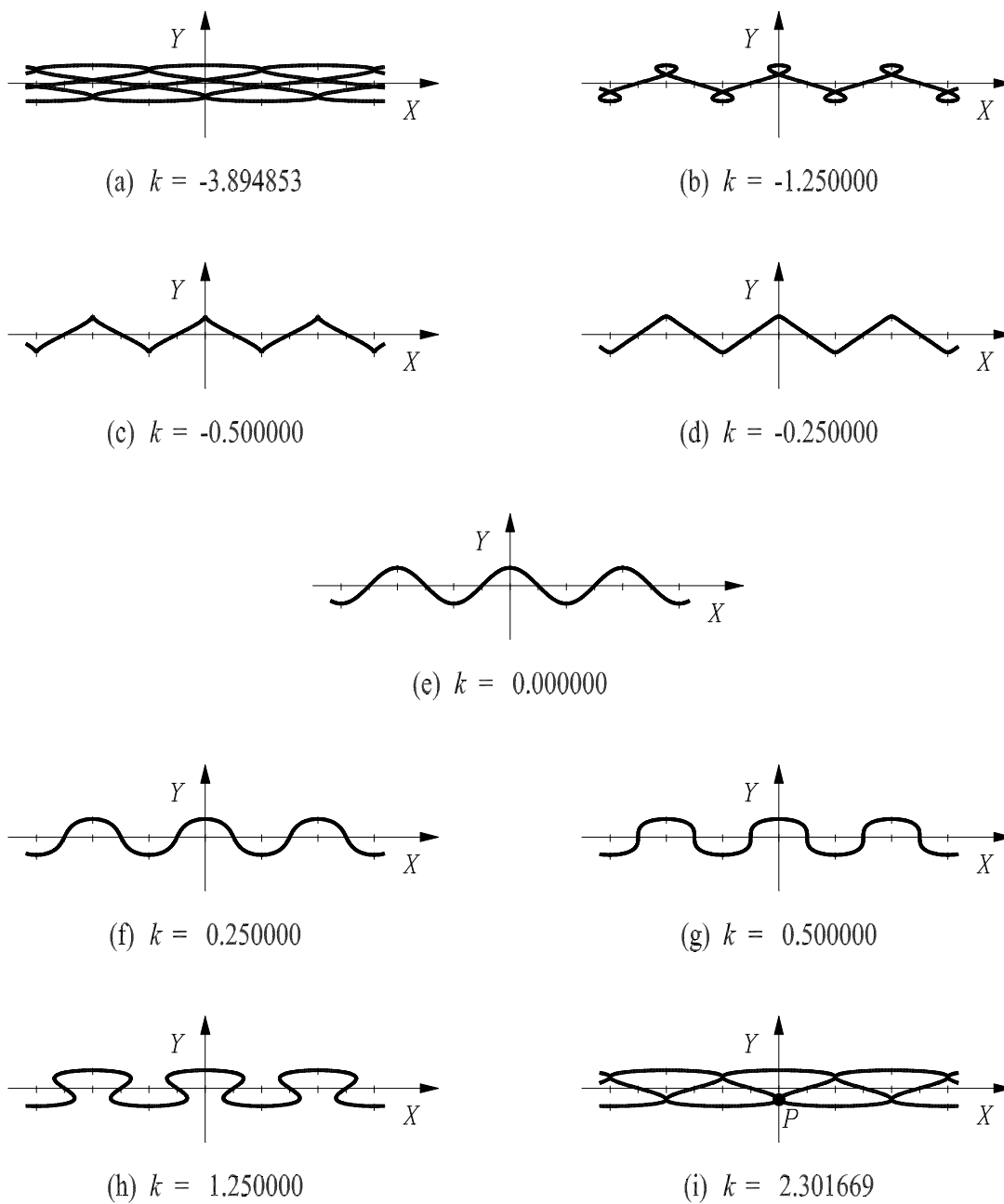
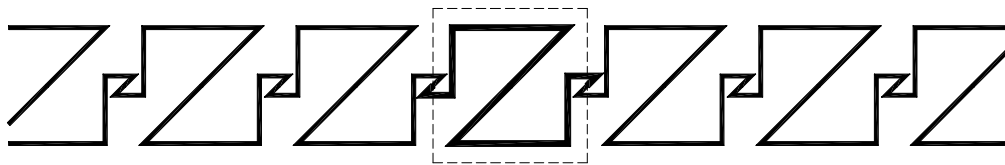
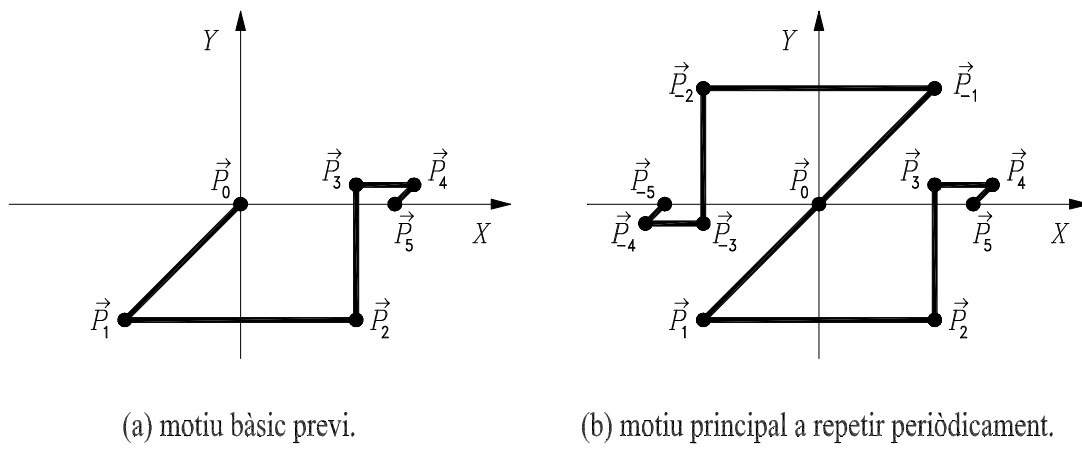


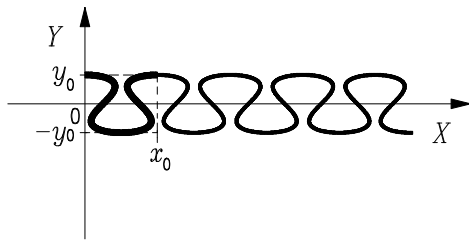
fig. 6.1.2. Sanefes cosinusoidals per diferents valors de k .



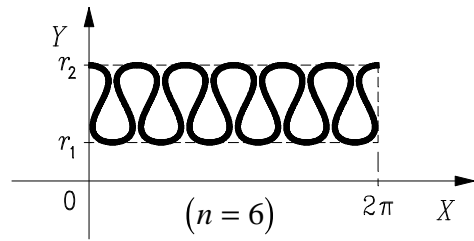
(c) greca resultant.

fig. 6.1.3. Exemple de disseny de greques.

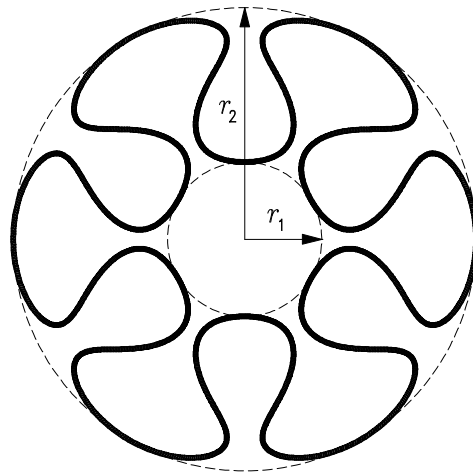
6.5. Figures.



(a) sanefa inicial i motiu bàsic.



(b) transformació afí de la sanefa.



(c) motiu resultant, al passar a polars l'anterior.

fig. 6.1.4. Procés a seguir per produir una sanefa circular.

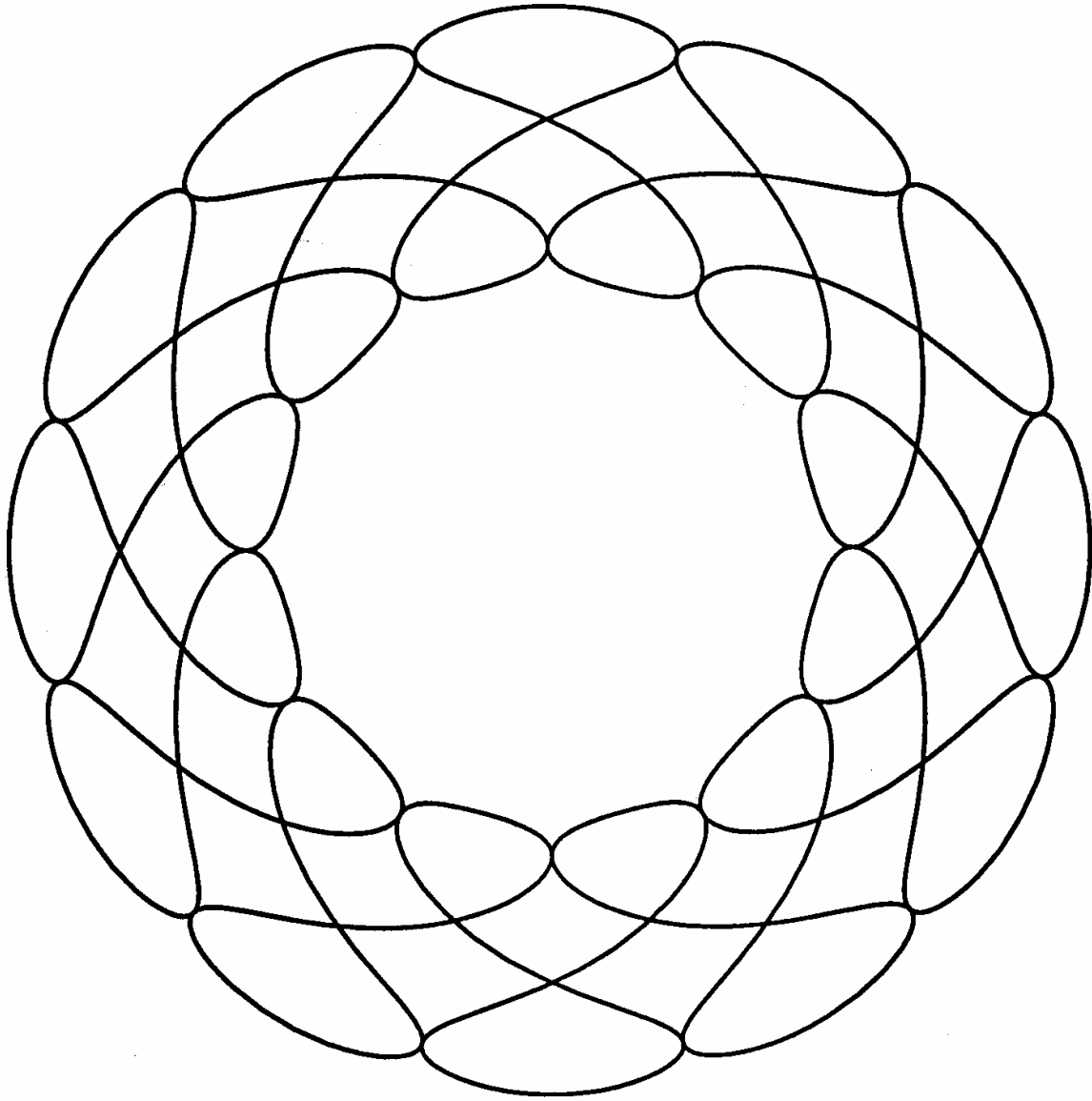


fig. 6.1.5.

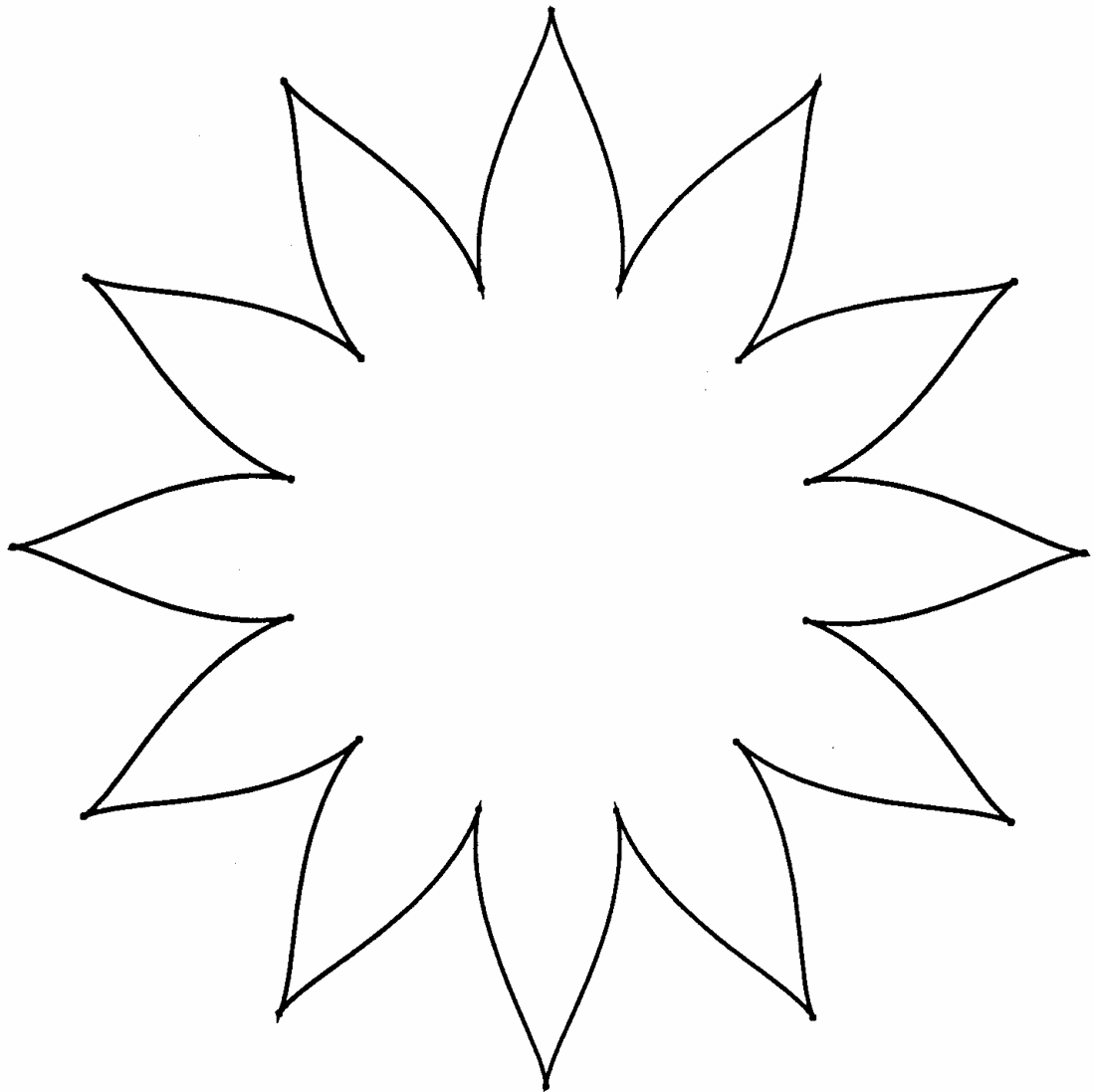


fig. 6.1.6.

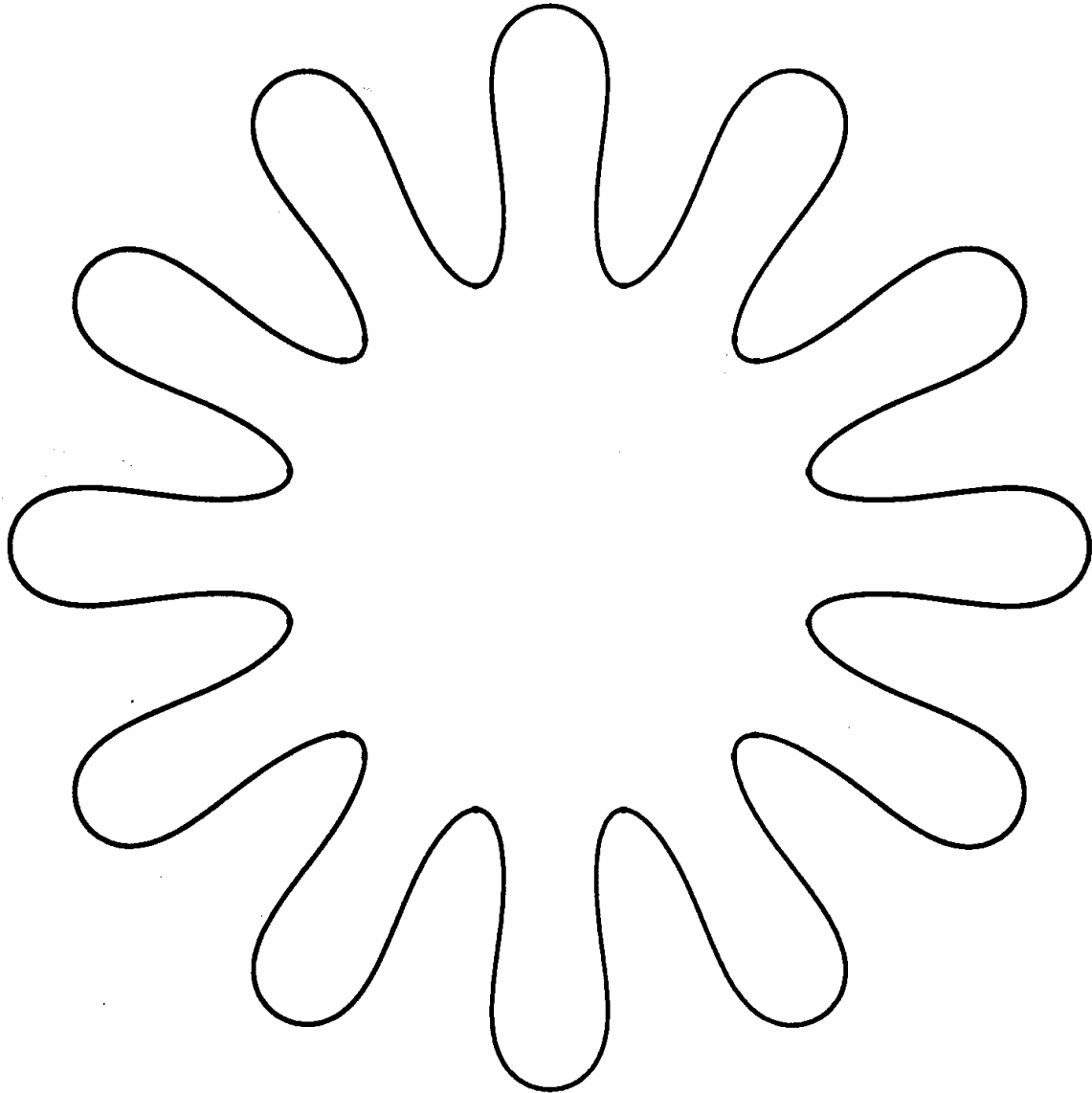


fig. 6.1.7.

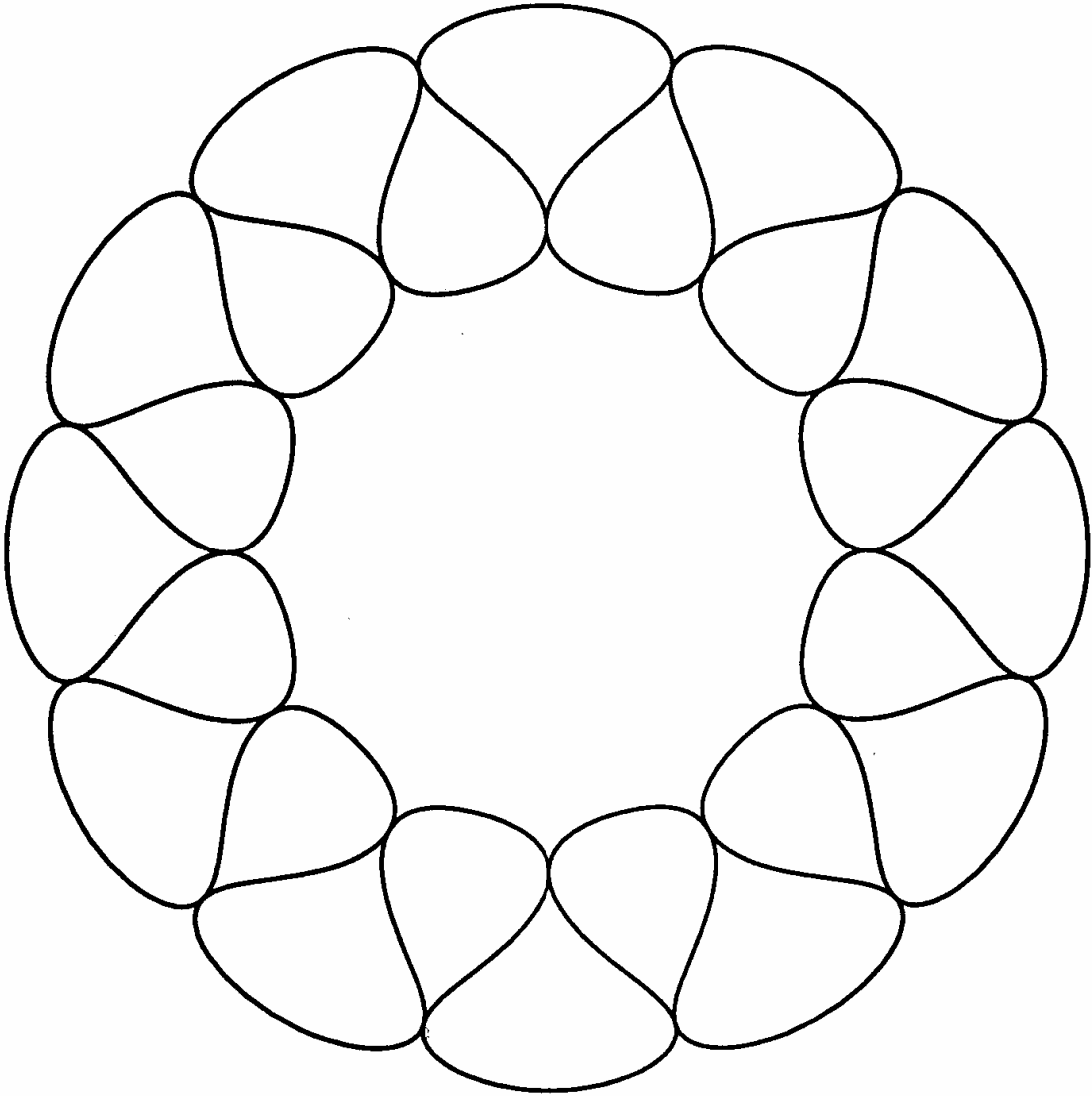


fig. 6.1.8.

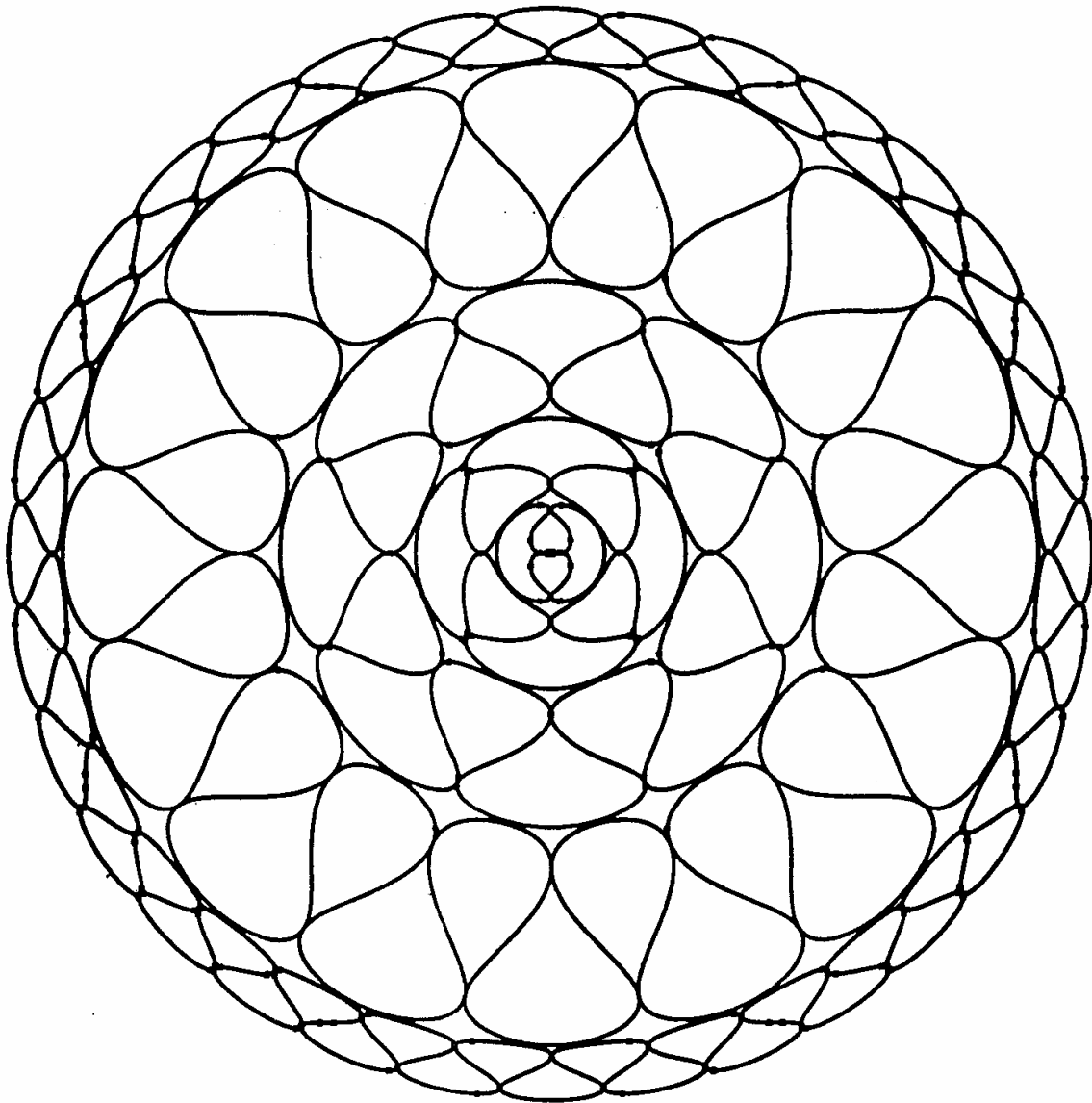


fig. 6.1.9.

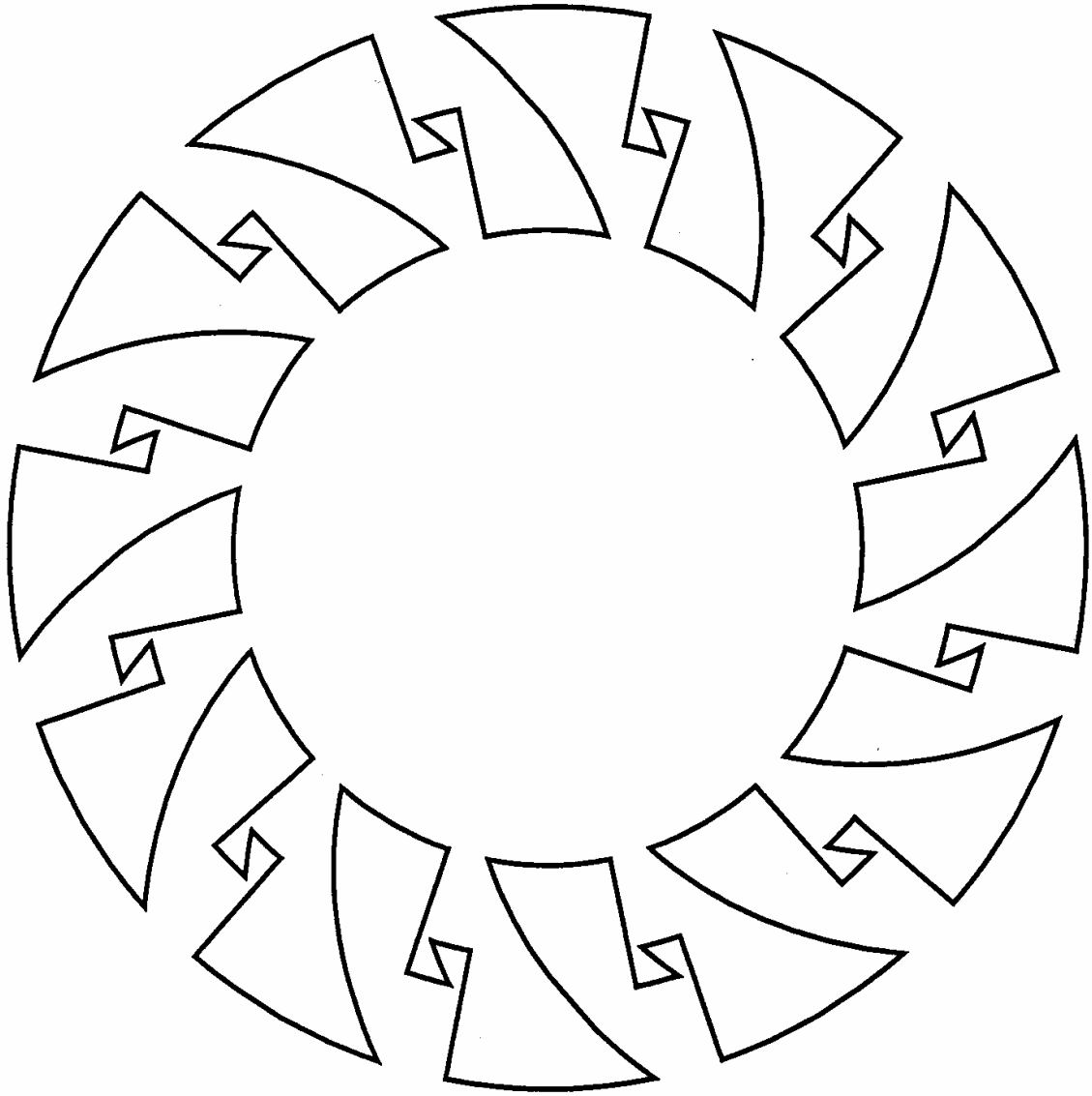


fig. 6.1.10.

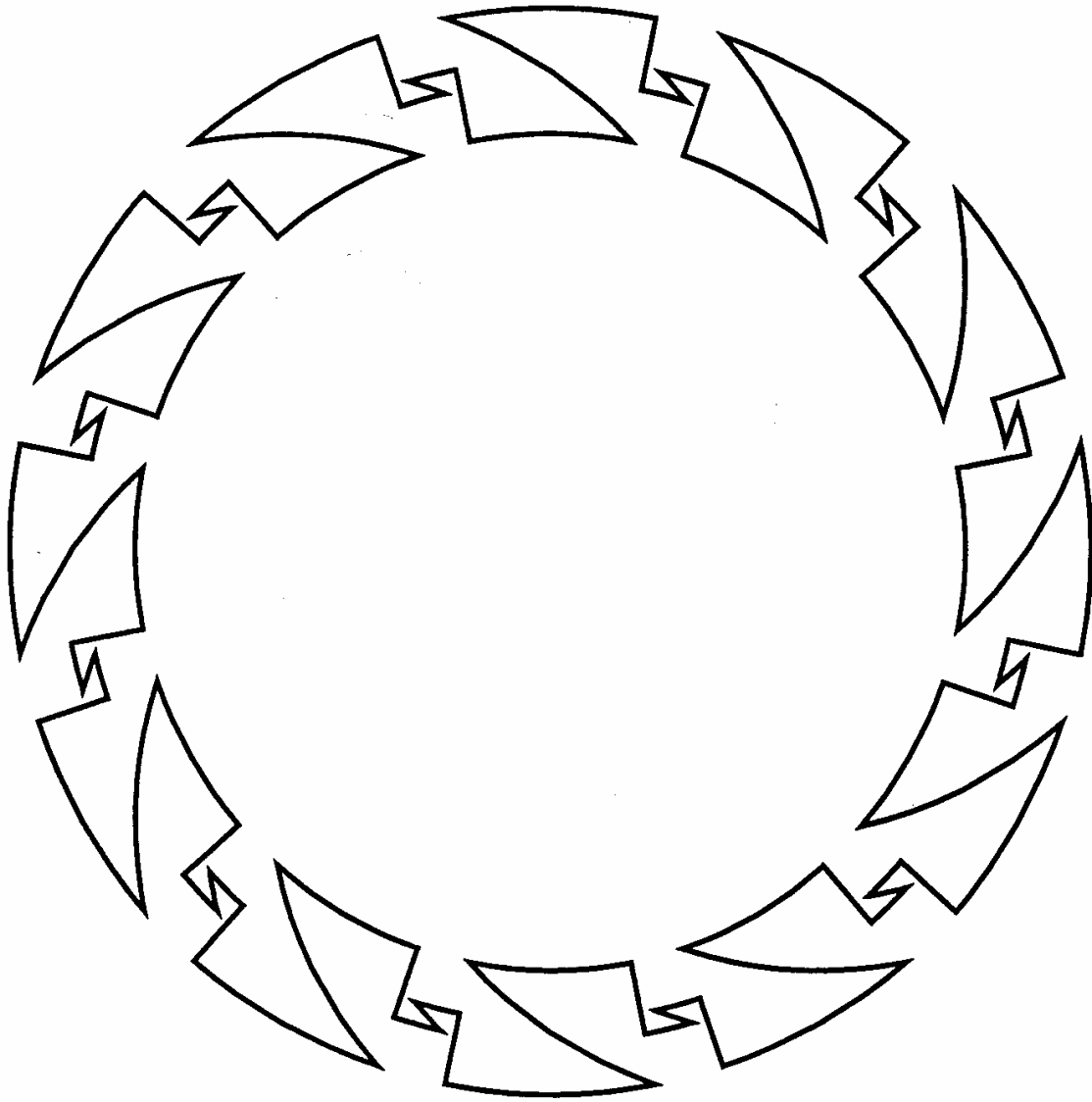


fig. 6.1.11.

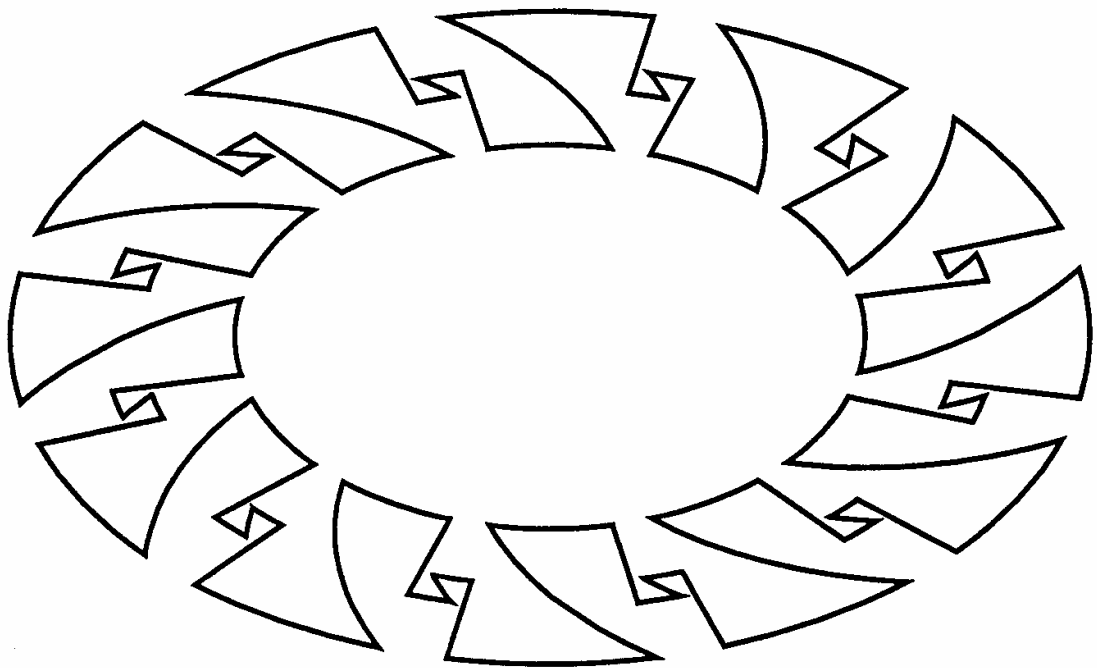


fig. 6.1.12. Sanefa el·líptica.

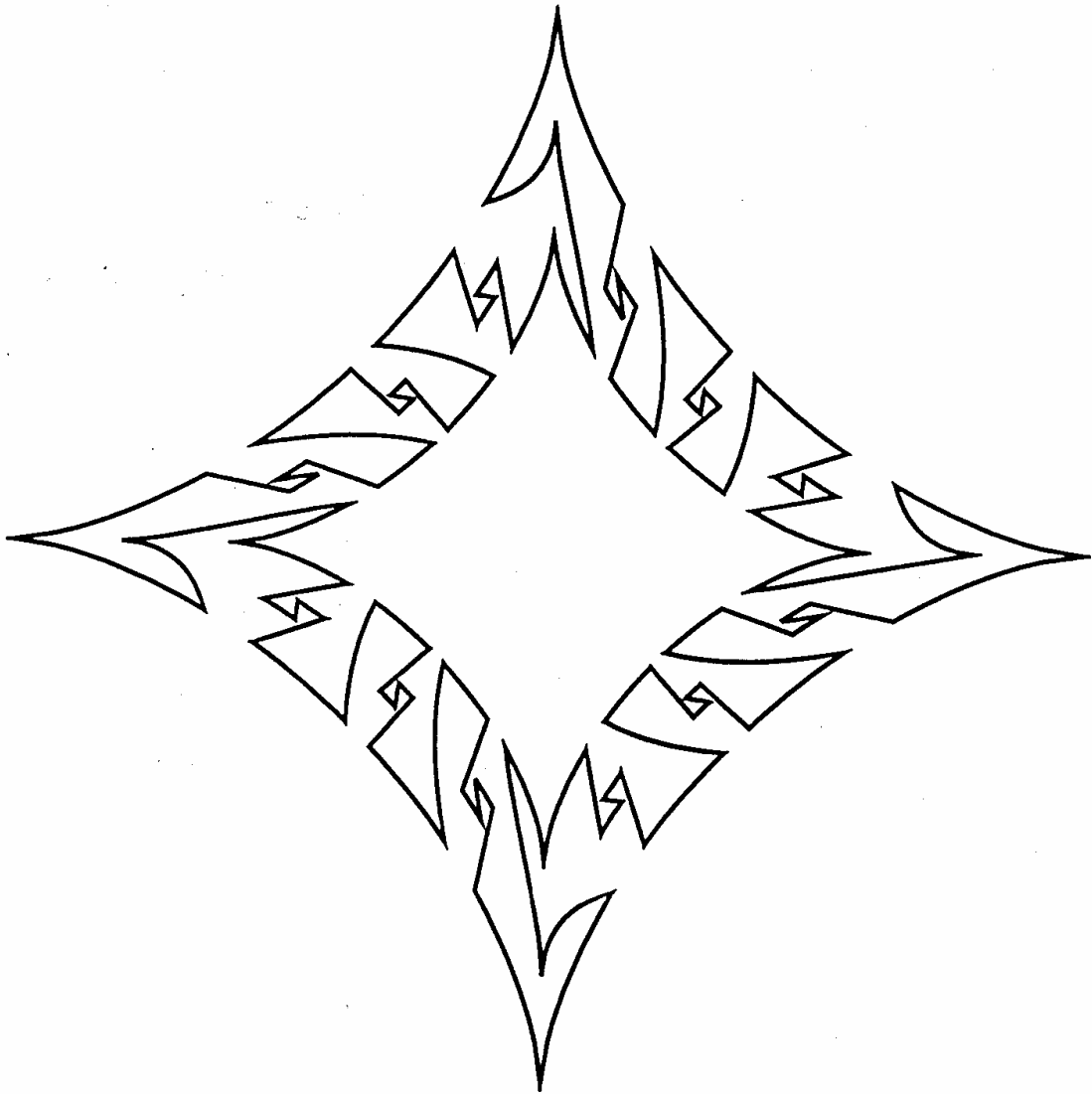


fig. 6.1.13.

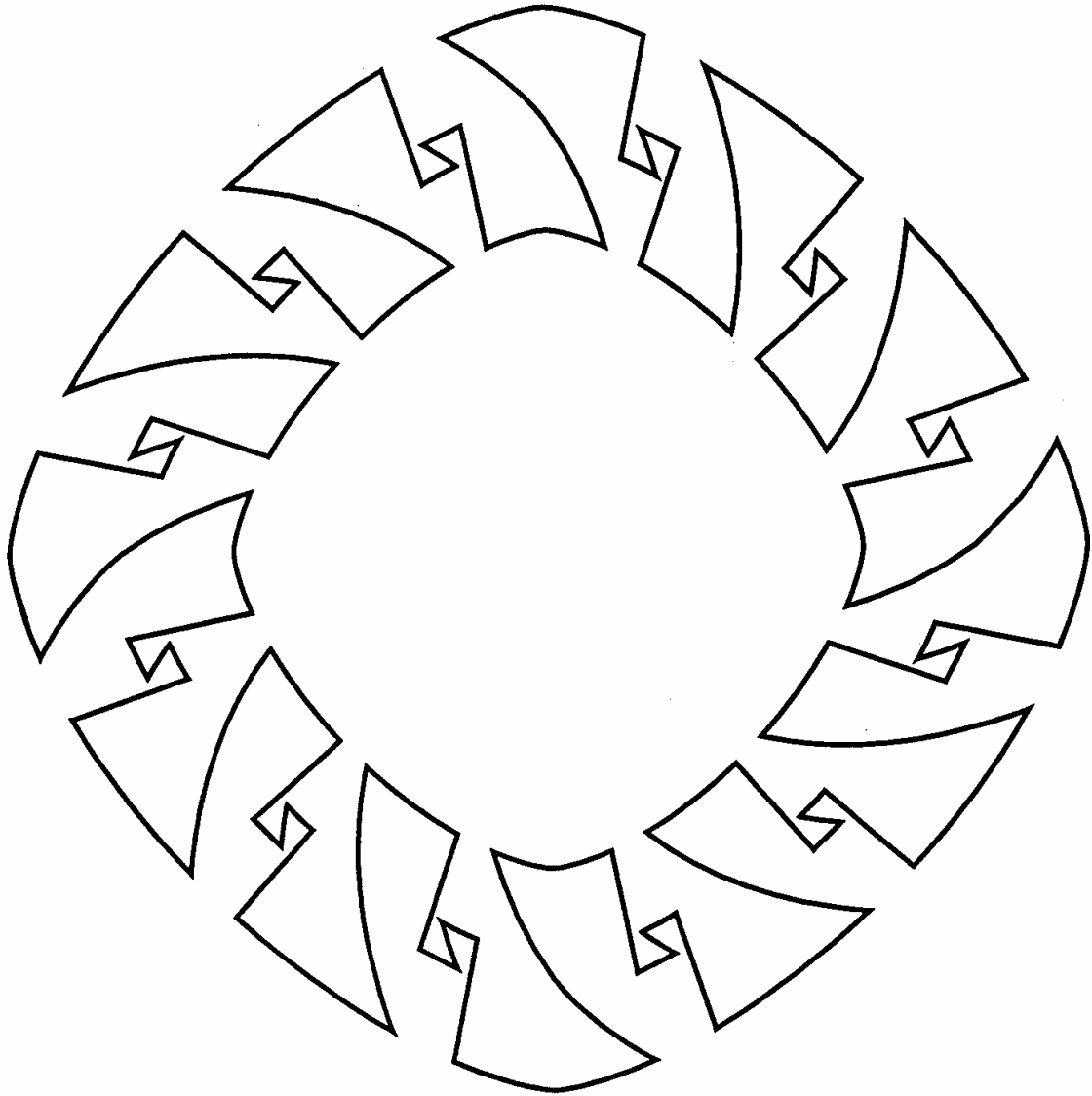


fig. 6.1.14.

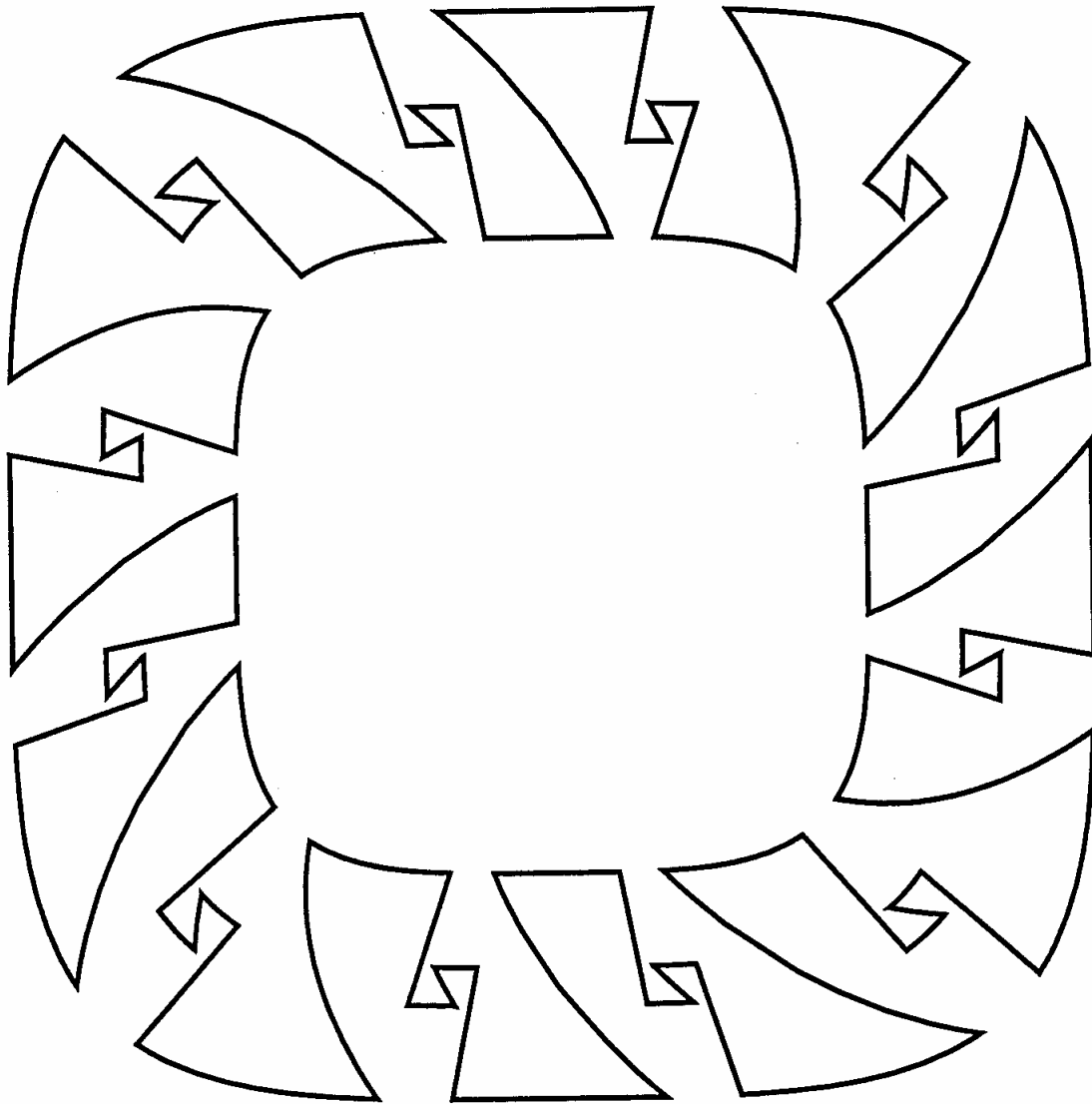


fig. 6.1.15.

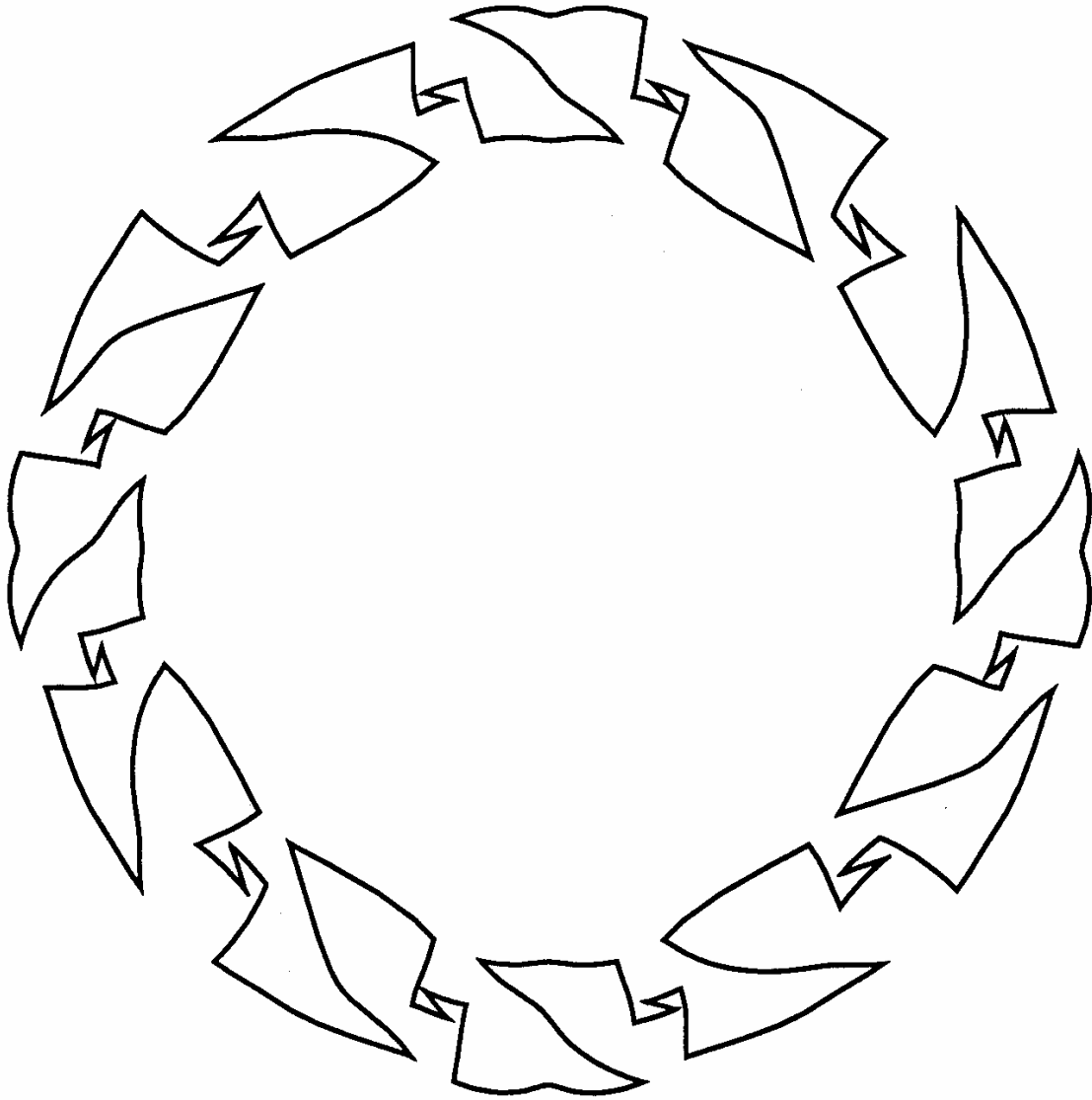


fig. 6.1.16. Sanefa arrugada.

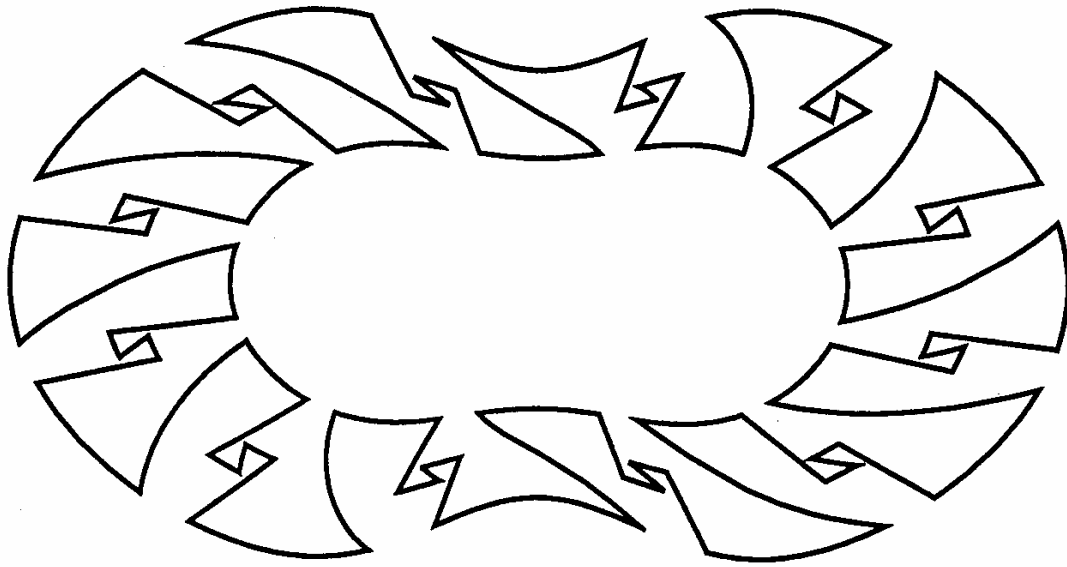


fig. 6.1.17.

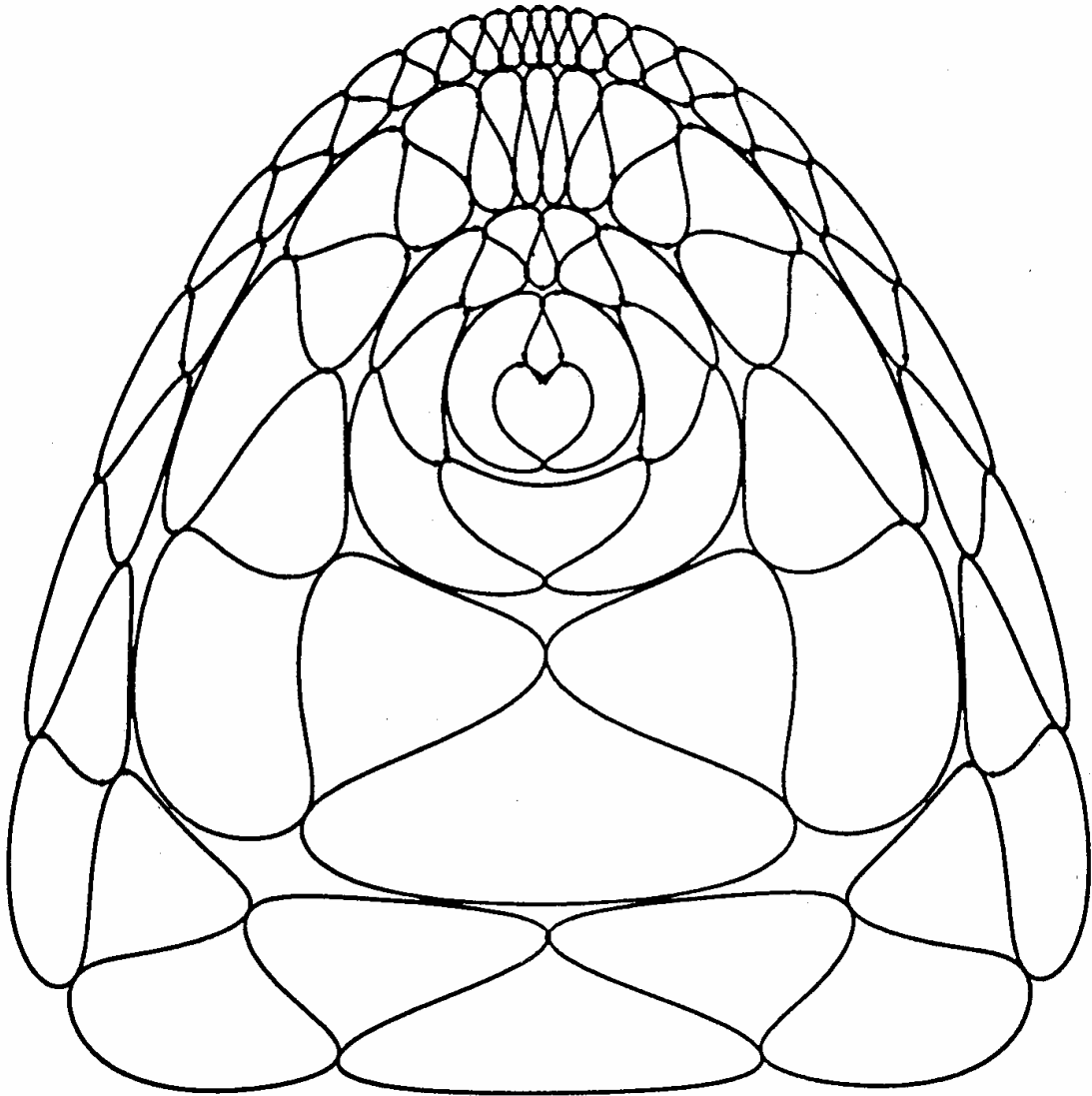


fig. 6.1.18. Transformació ambiental de la figura 6.1.9.

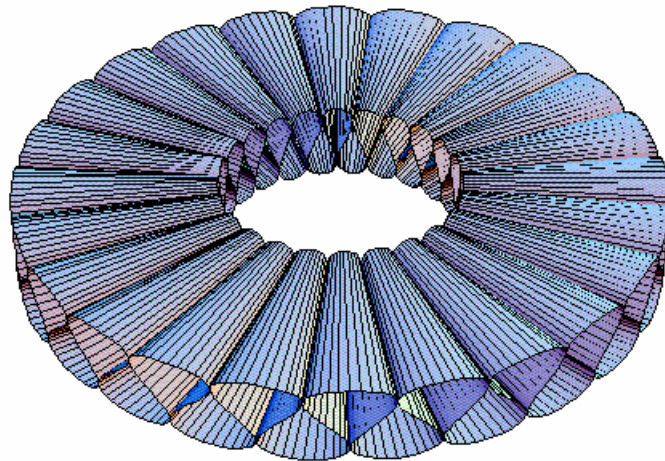
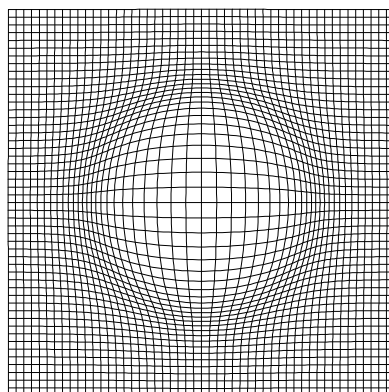
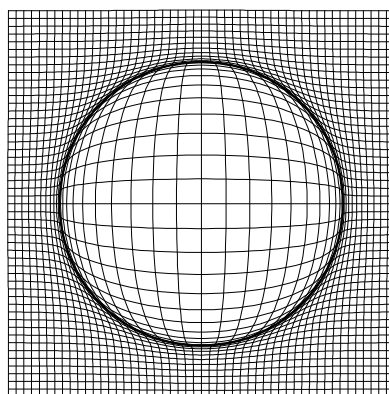


fig. 6.1.19. Objecte tridimensional dissenyat a partir d'una sanefa.

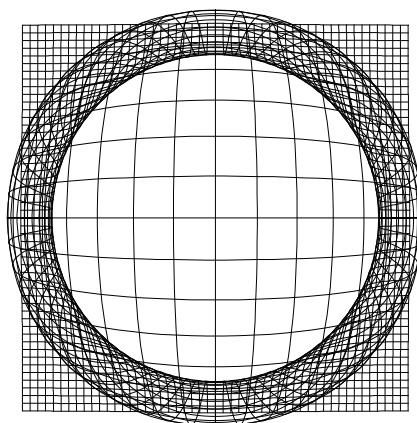
6.5. Figures.



$$k = 0.44626$$



$$k = 1.0$$



$$k = 2.0$$

fig. 6.2.1. Exemples de trames d'inflament únic.

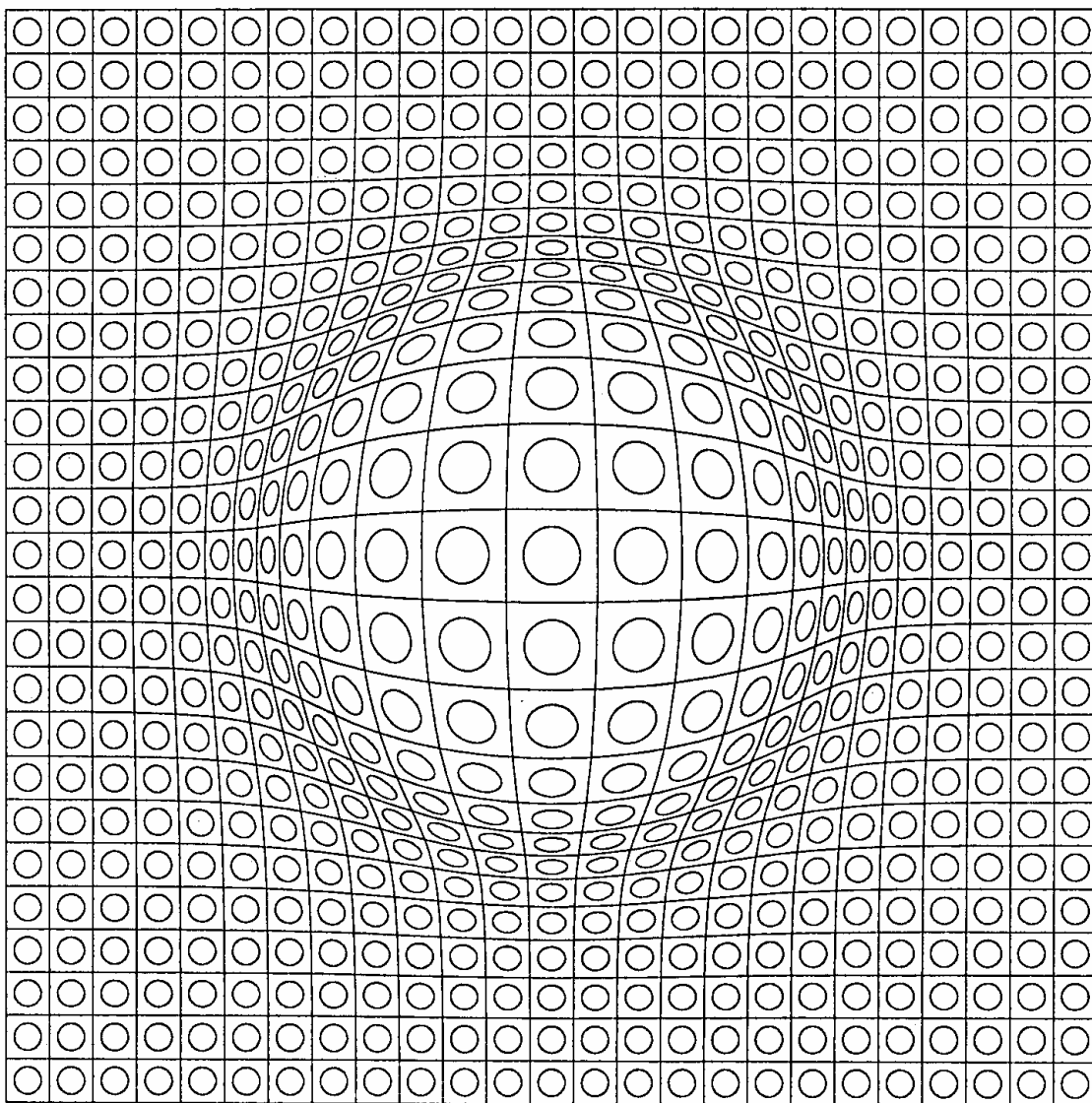
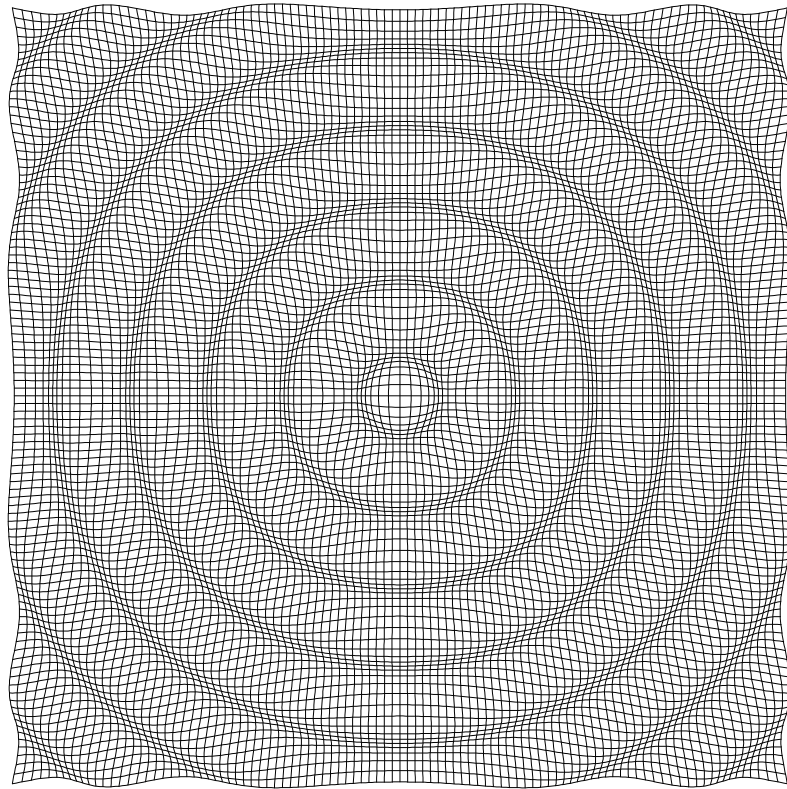
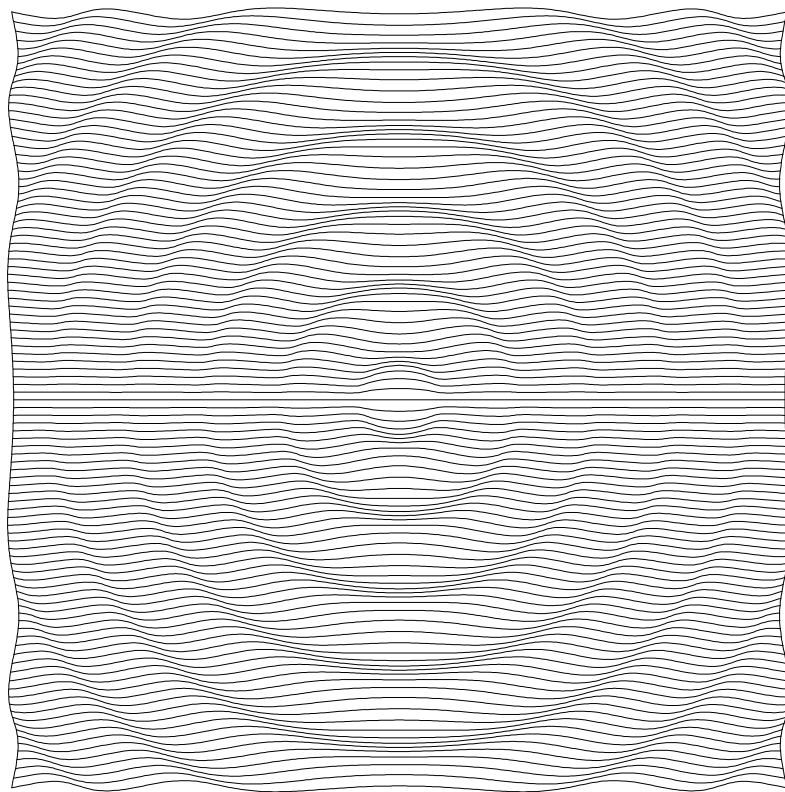


fig. 6.2.2. Efecte de la transformació sobre una col·lecció de figures del pla.



$$k = 0.5$$

fig. 6.2.3. Efecte onada.



$$k = 0.5$$

fig. 6.2.4. Efecte onada, mostrant només les línies horitzontals.

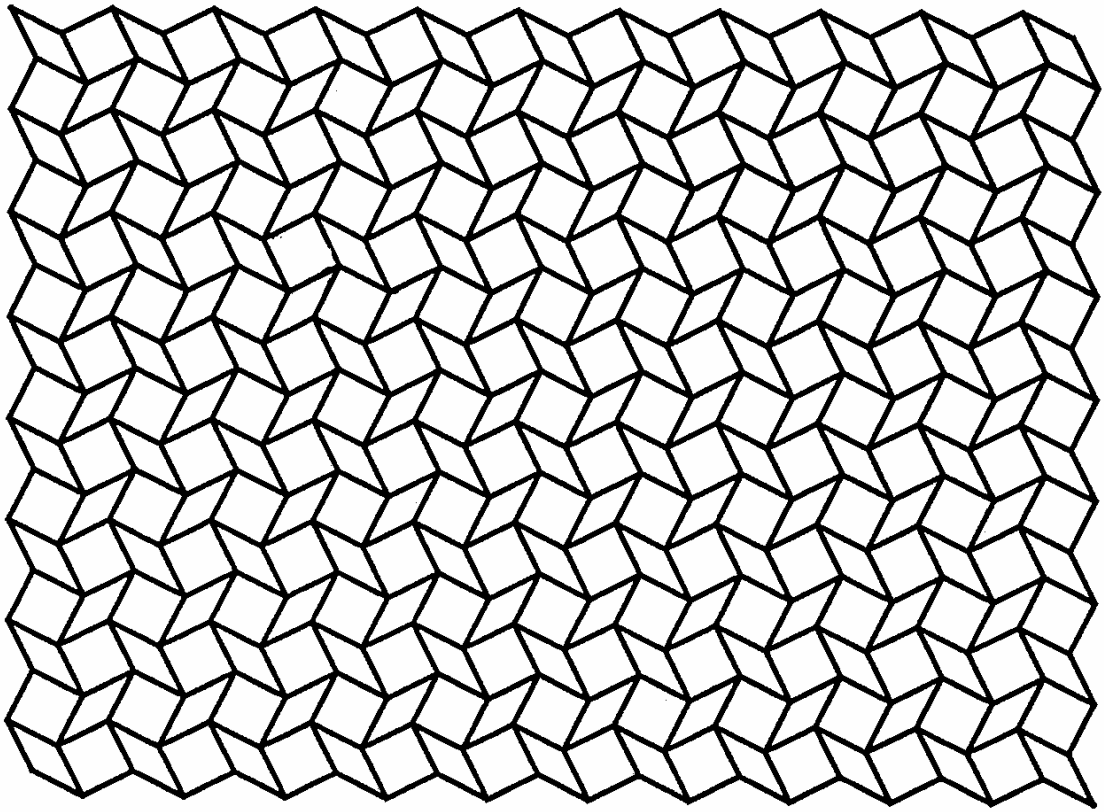


fig. 6.2.5. Trama en zig-zag estesa a tot el pla.

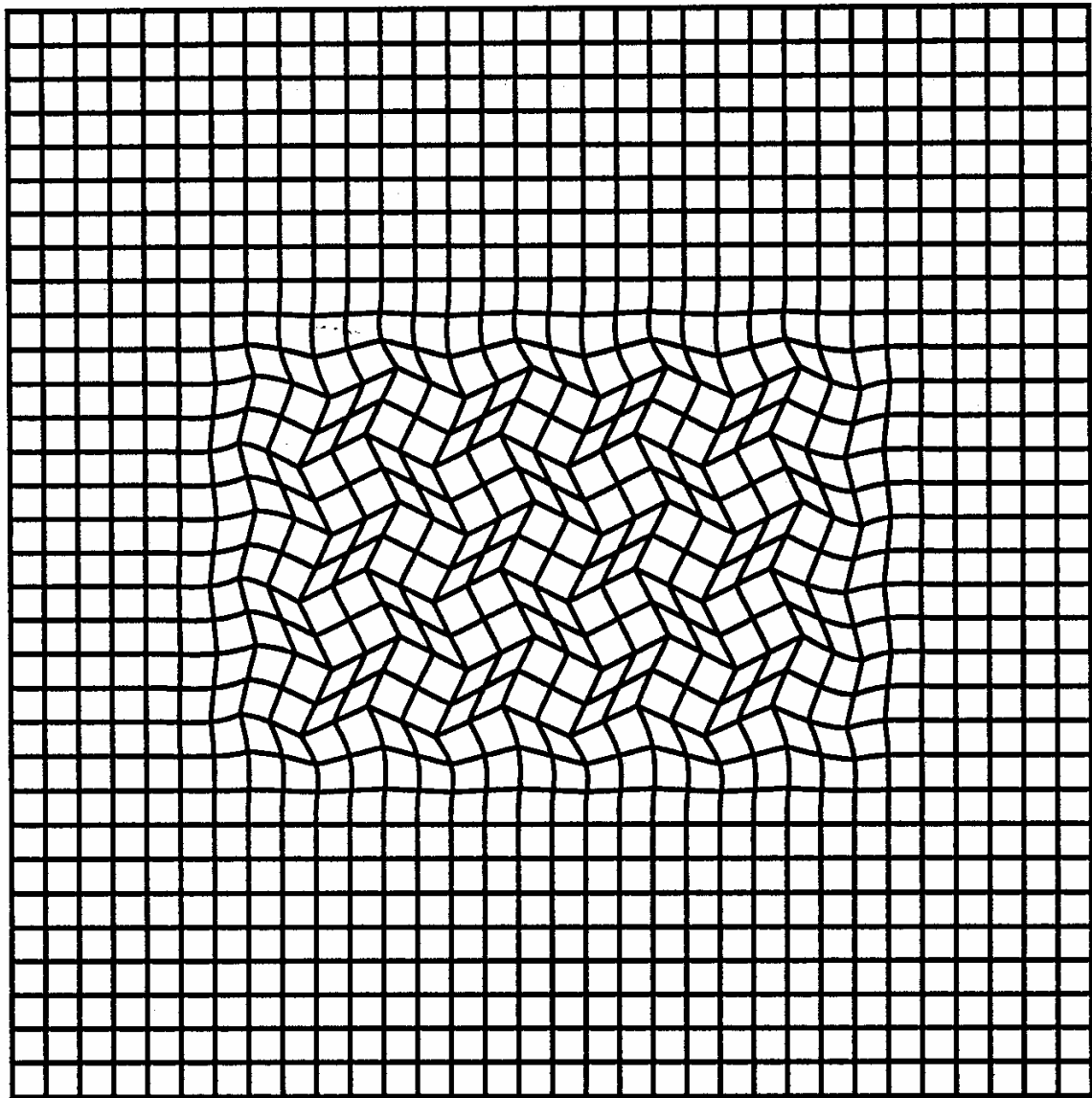


fig. 6.2.6. Trama en zig-zag restringida a un rectangle.

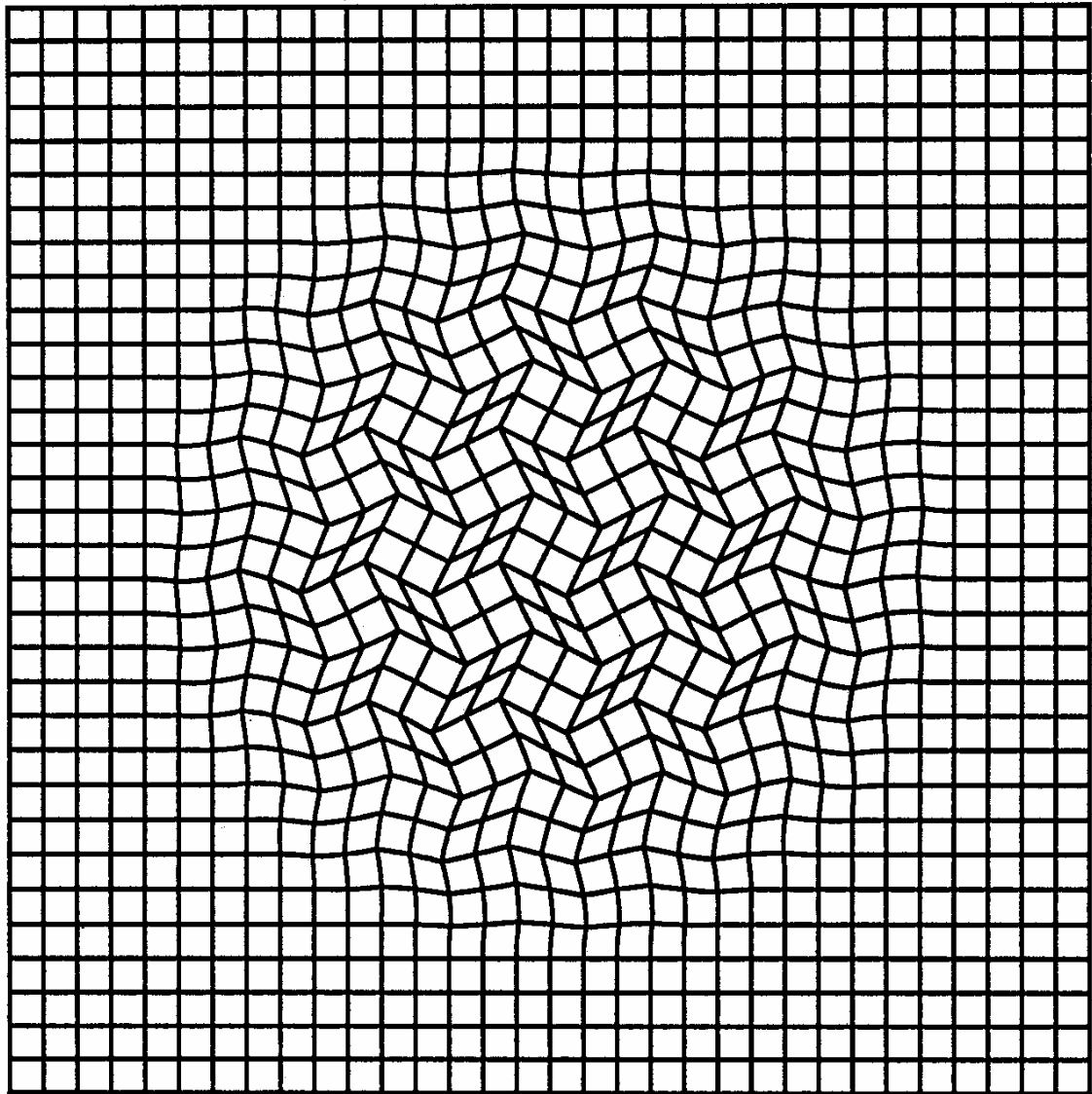


fig. 6.2.7. Trama en zig-zag restringida a un círculo.

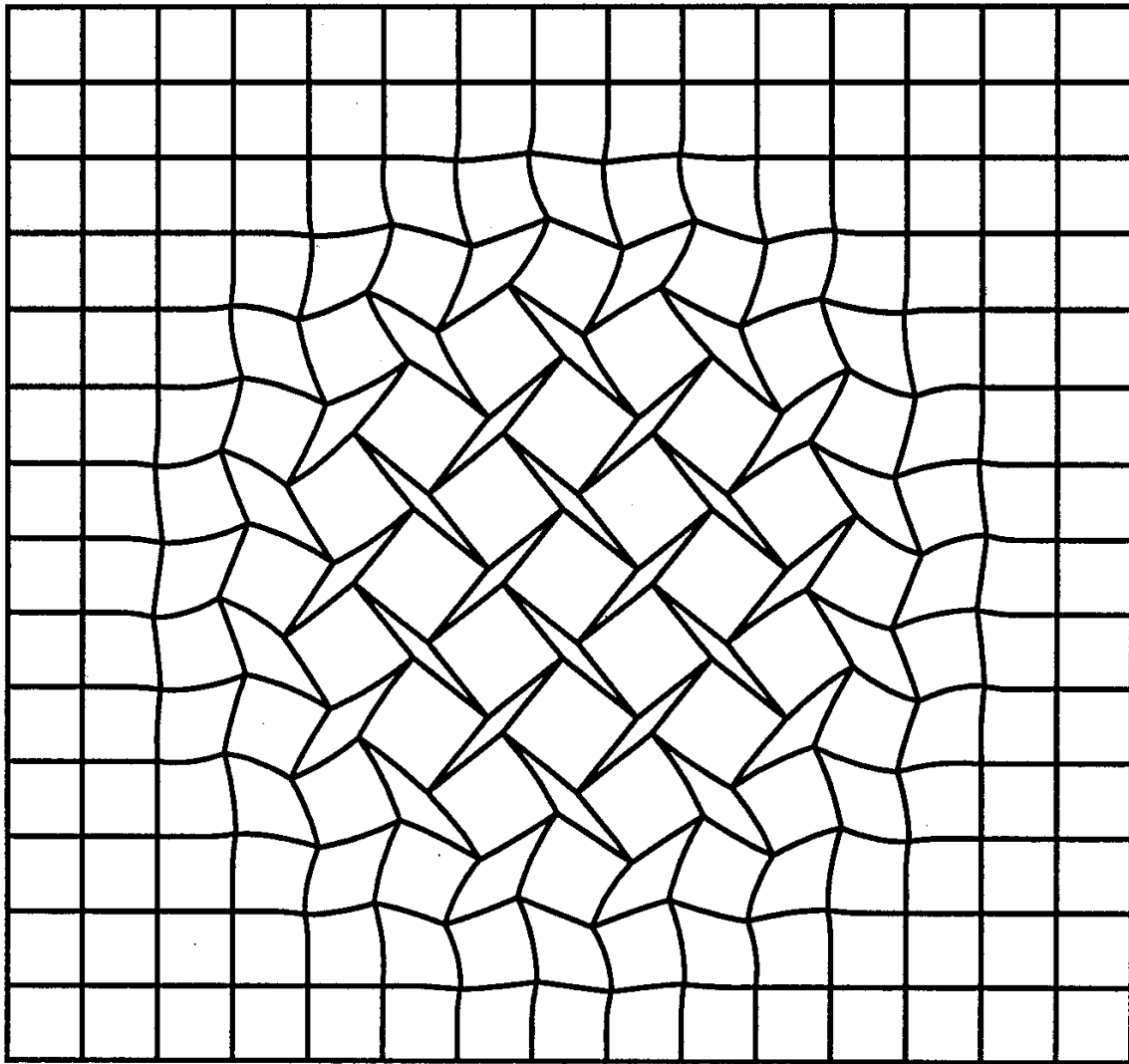


fig. 6.2.8. Trama en zig-zag restringida a un cercle, prop del límit de bijectivitat.

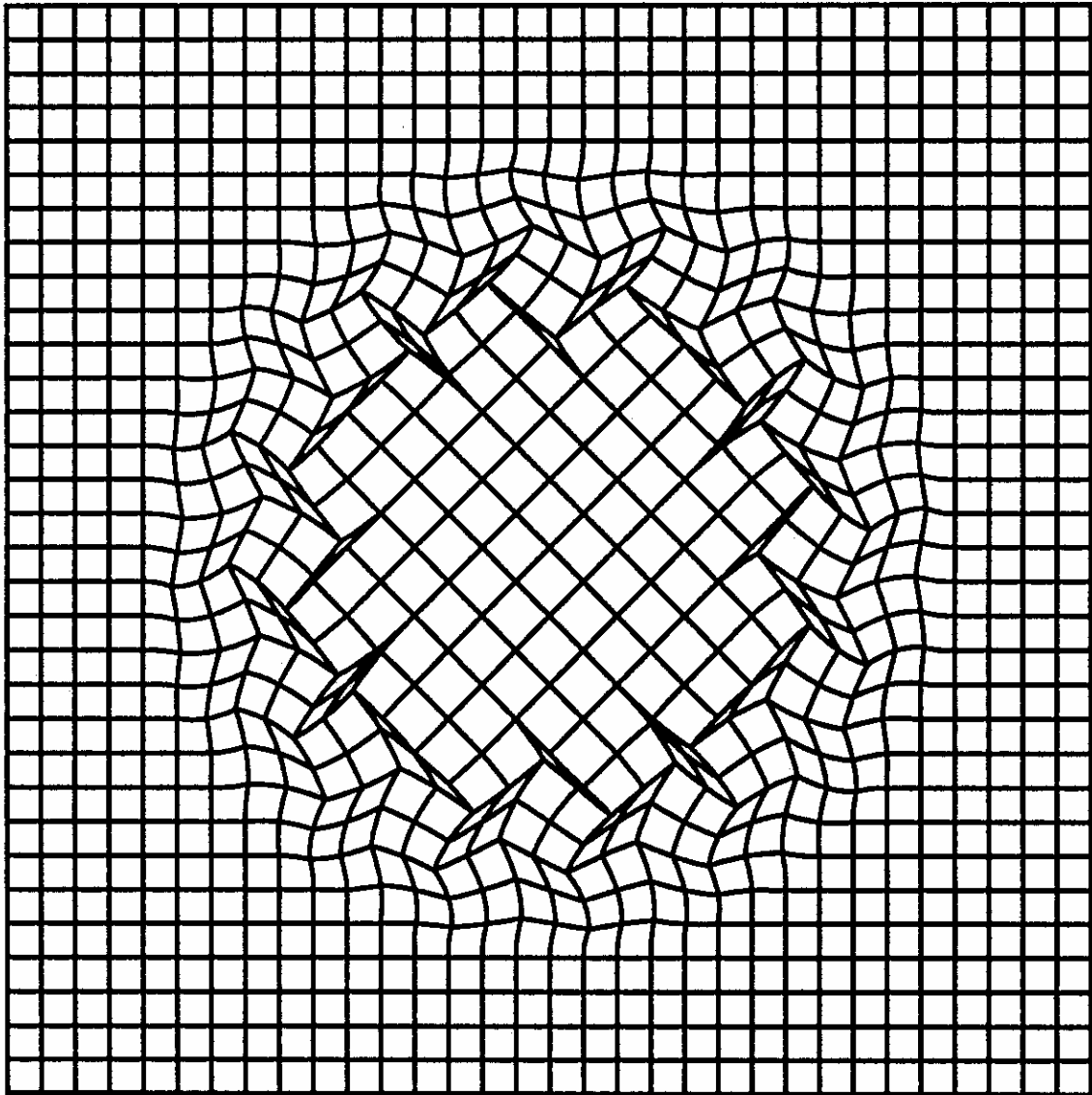


fig. 6.2.9. Trama en zig-zag restringida a un cercle, al límit de bijectivitat.

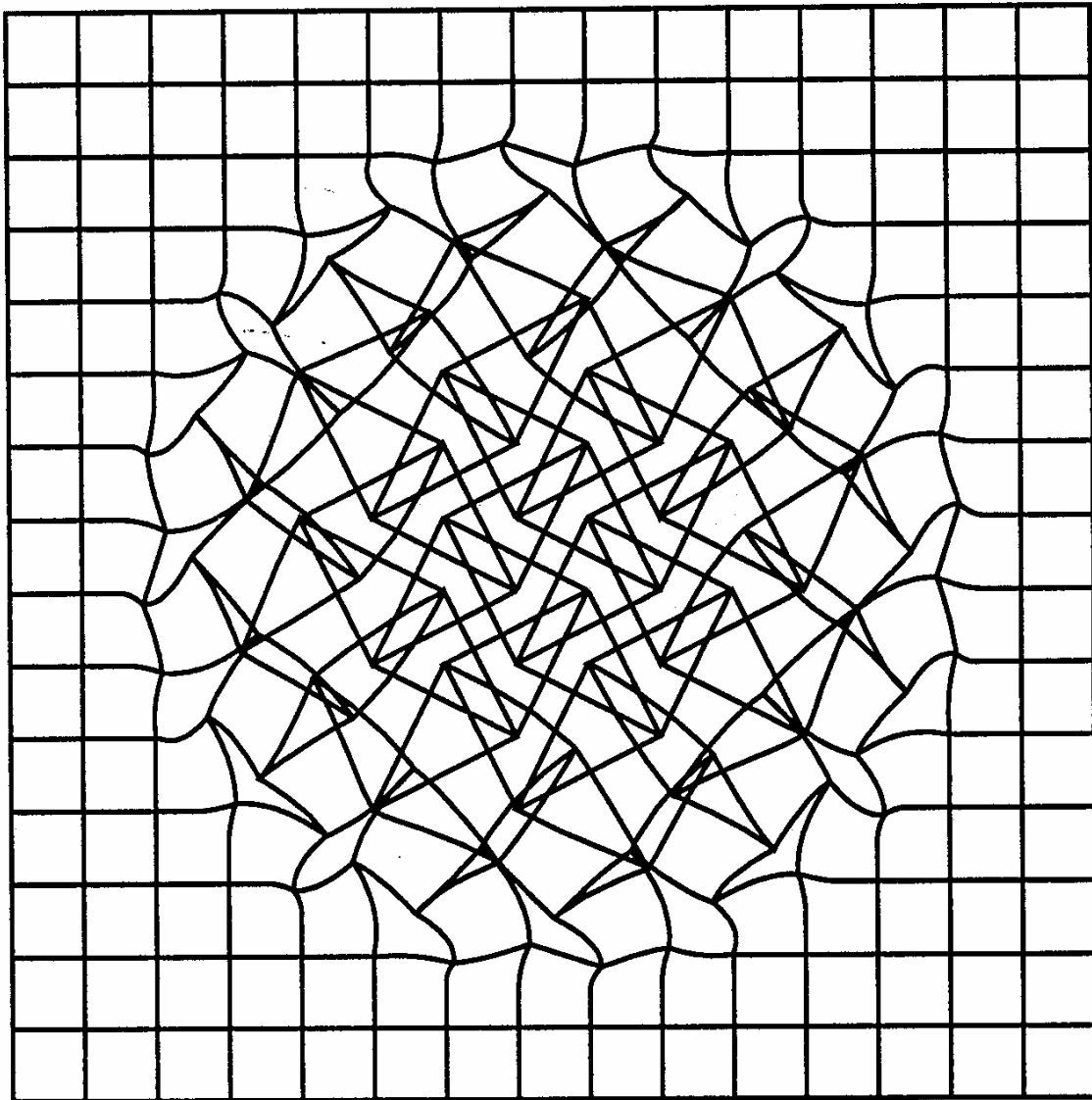


fig. 6.2.10. Trama en zig-zag restringida a un cercle, no bijectiva.

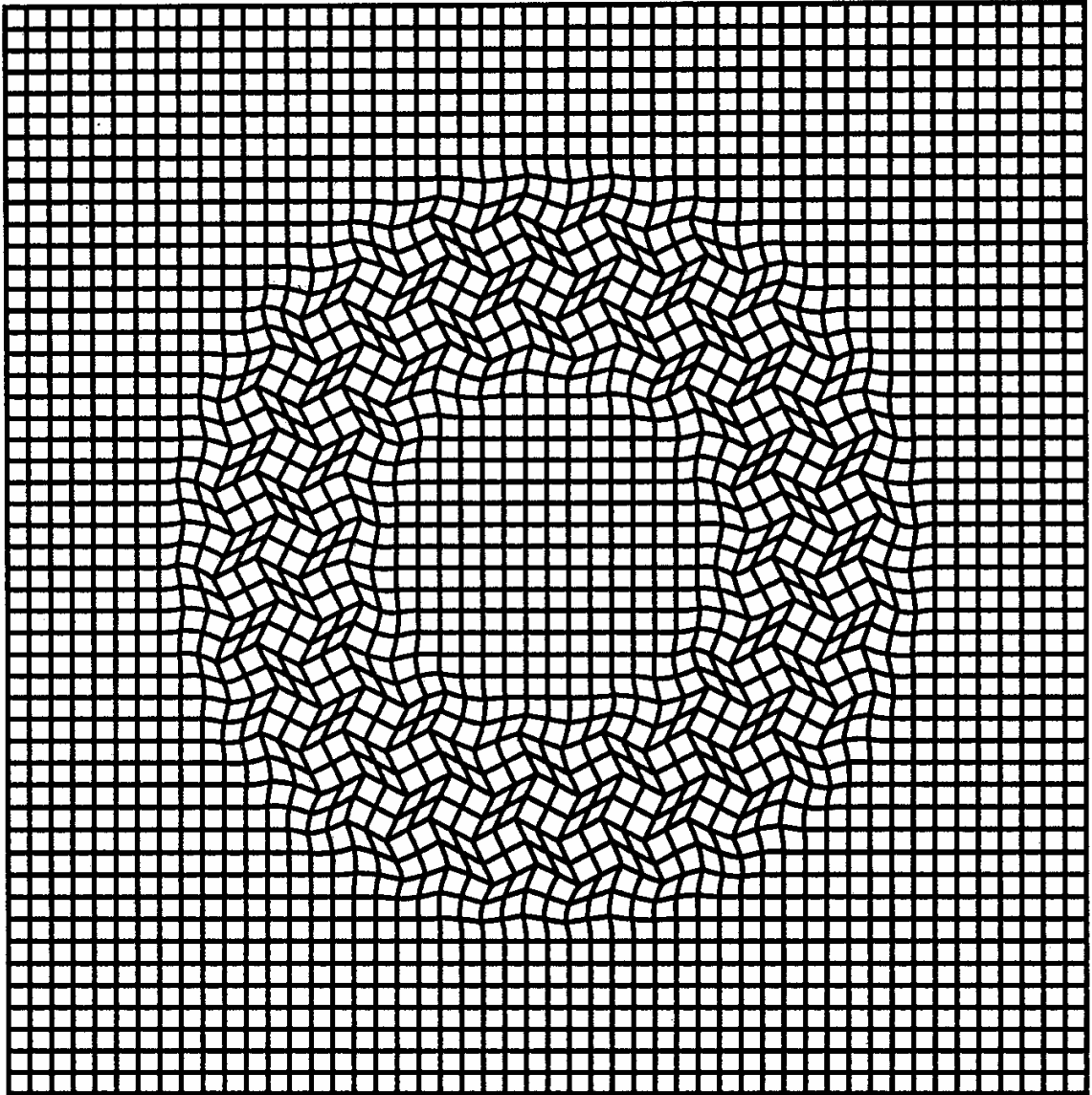


fig. 6.2.11. Trama en zig-zag restringida a una corona circular.

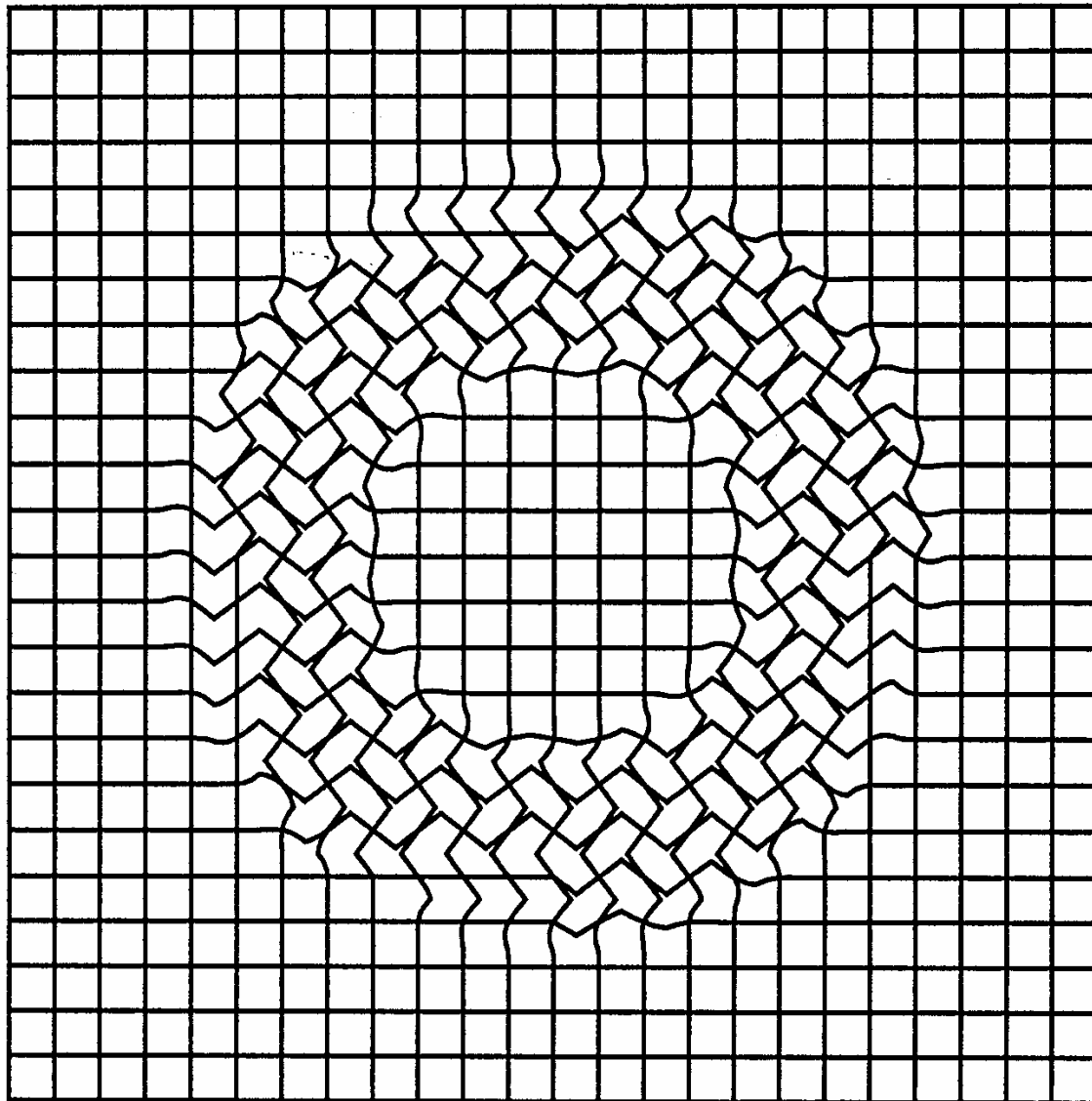


fig. 6.2.12. Trama en zig-zag restringida a una corona superel·líptica.

6.5. Figures.

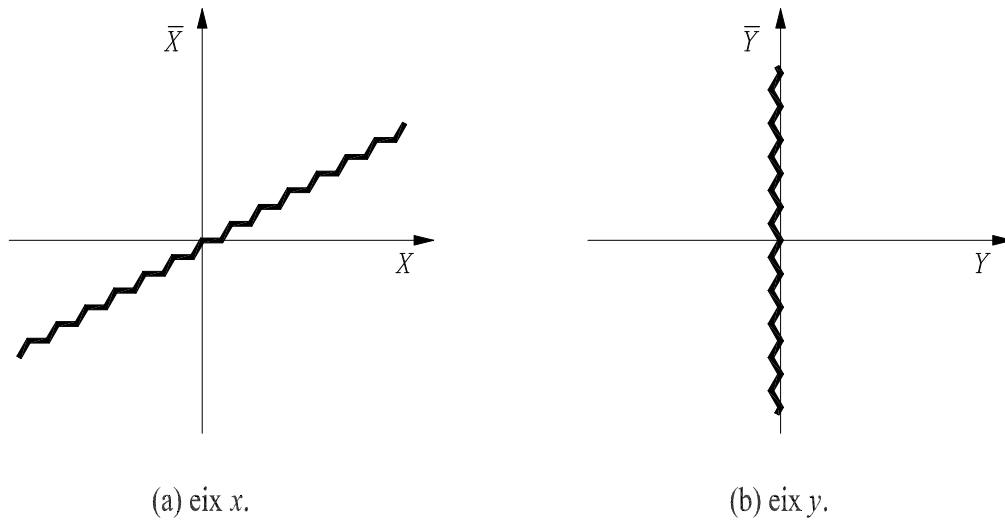


fig. 6.2.13. Transformacions requerides pels eixos, per produir el "risc".

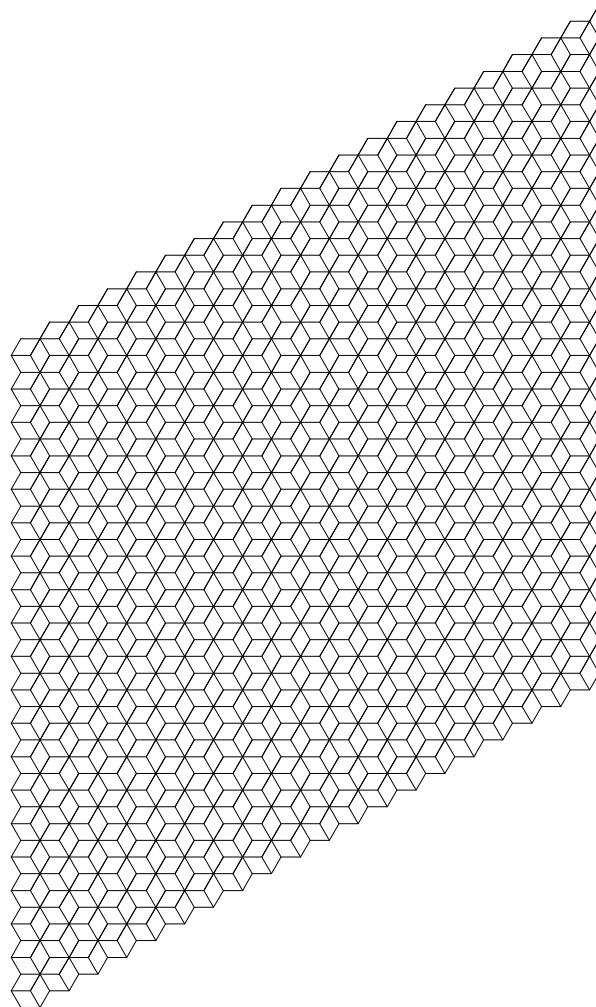


fig. 6.2.14. Trama en forma de rusc (no és bijectiva).

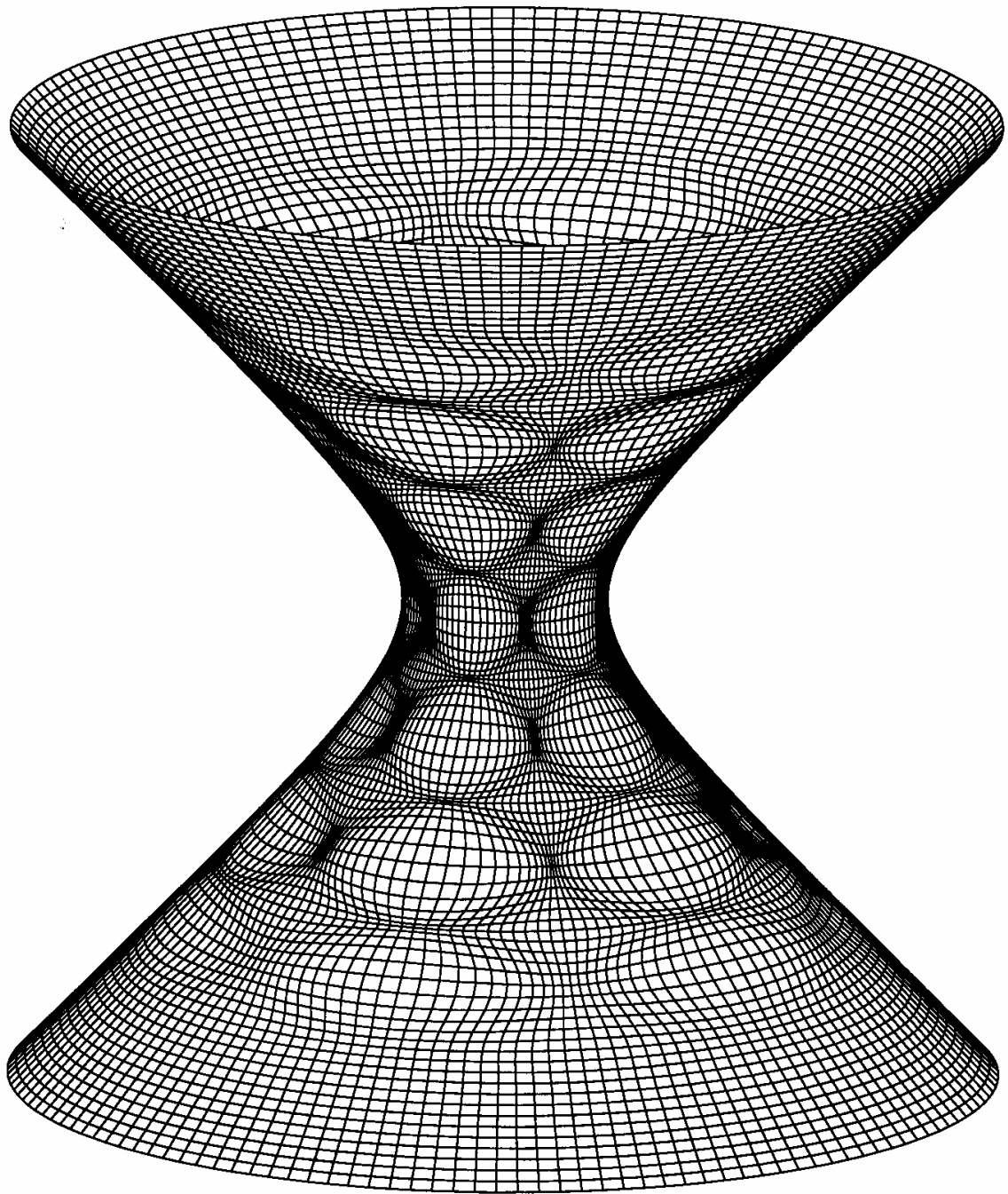


fig. 6.2.15. Col·locació d'una trama sobre una superfície, via parametrització.

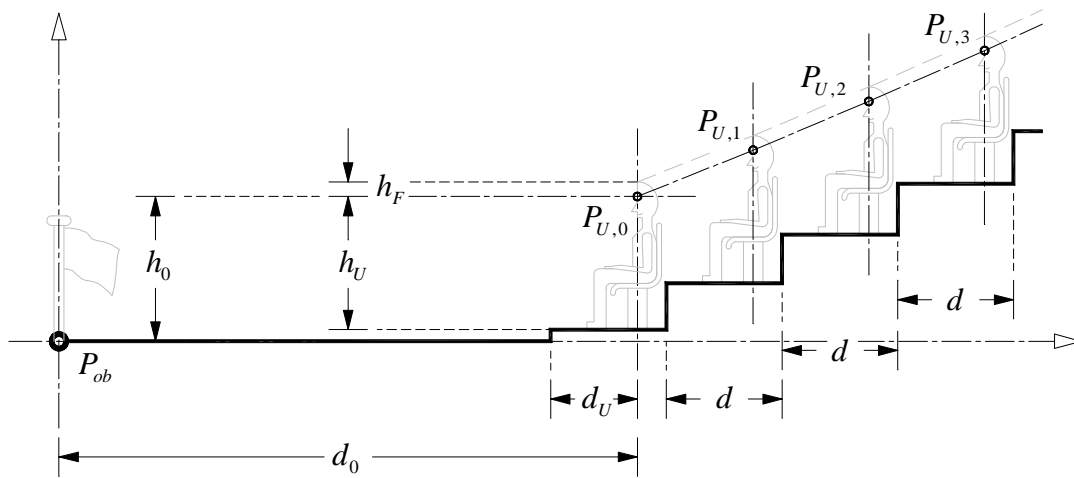


fig. 6.3.1. Variables que determinen una grada isòptica.

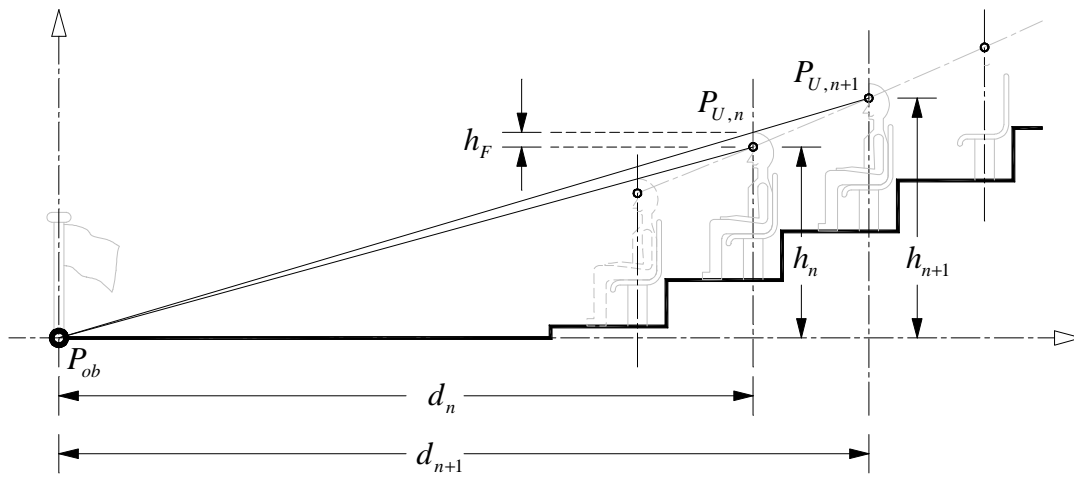


fig. 6.3.2. Condió de visibilitat d'una grada isòptica.

6.5. Figures.

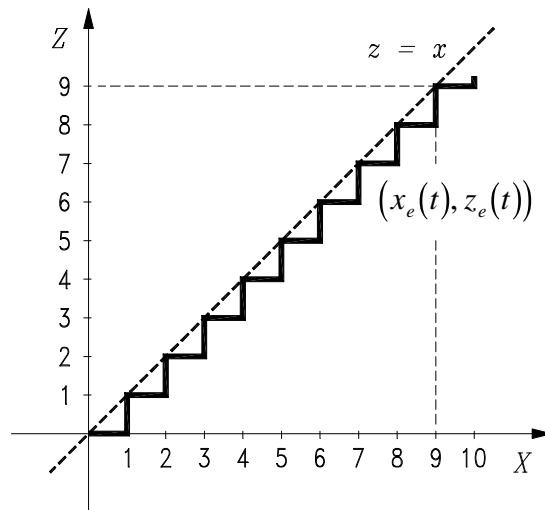


fig. 6.3.3. Forma bàsica, unitària, d'escala.

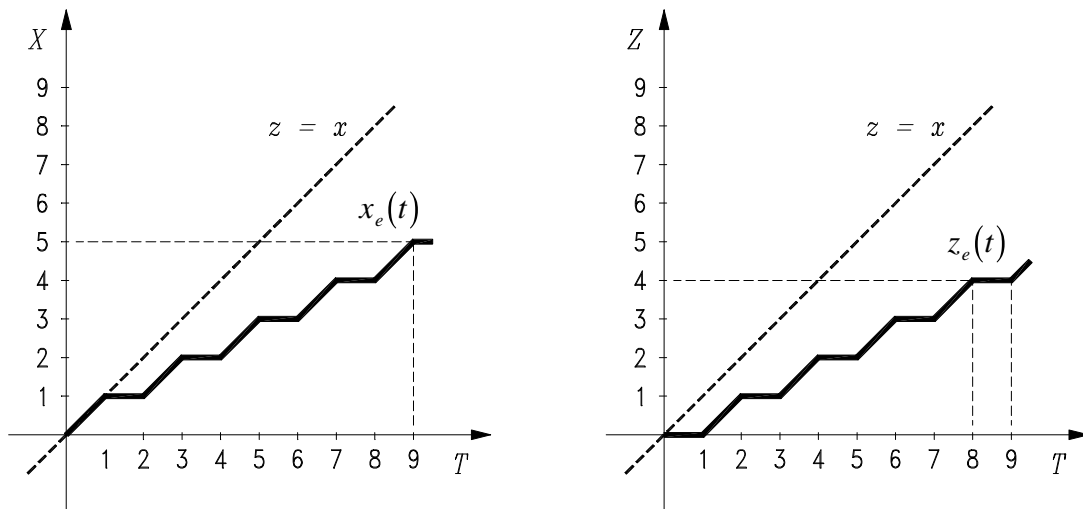


fig. 6.3.4. Gràfiques de les funcions components necessàries.

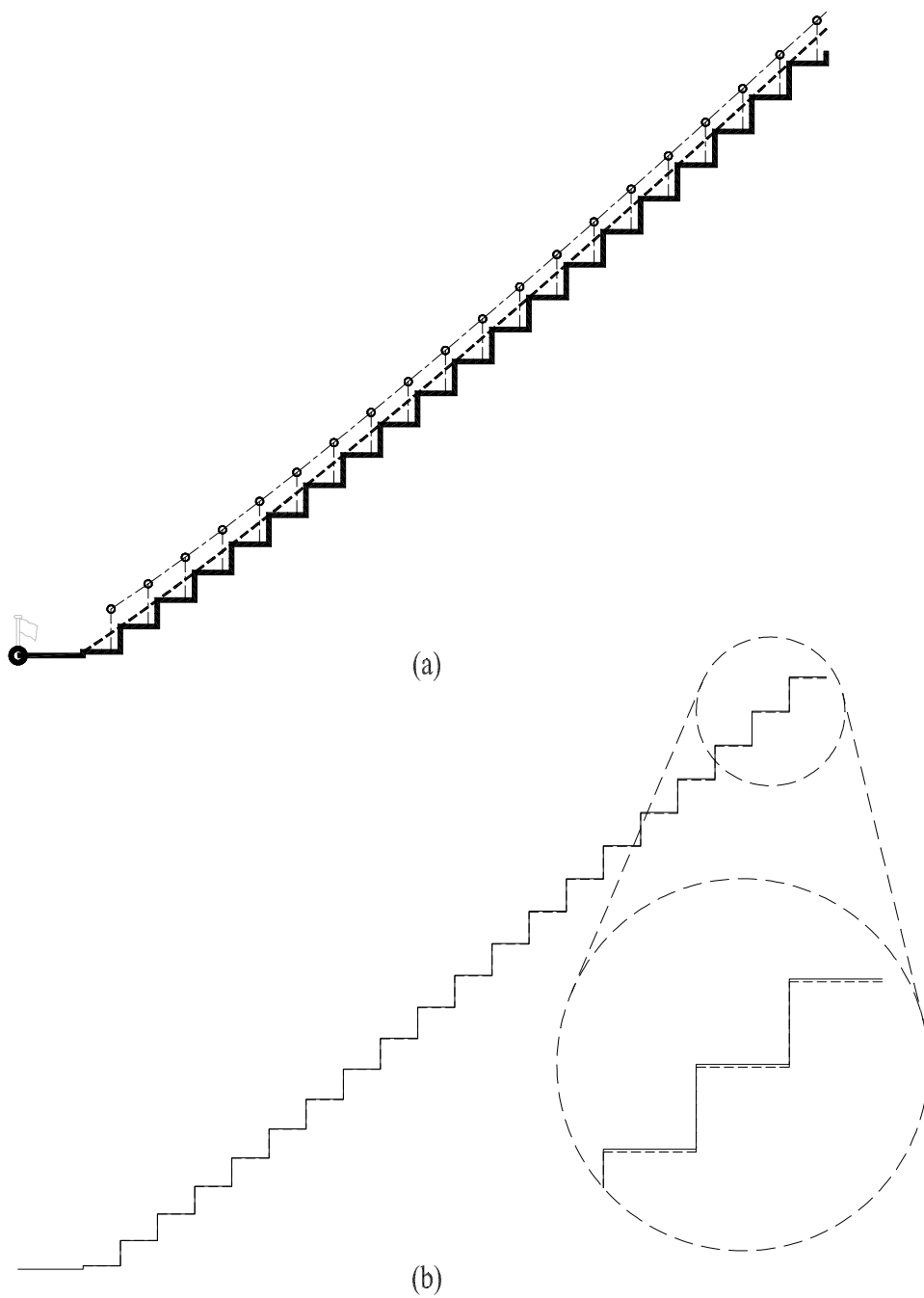


fig. 6.3.5. (a): Grada ultrasòptica. (b): Comparació amb la isòptica.

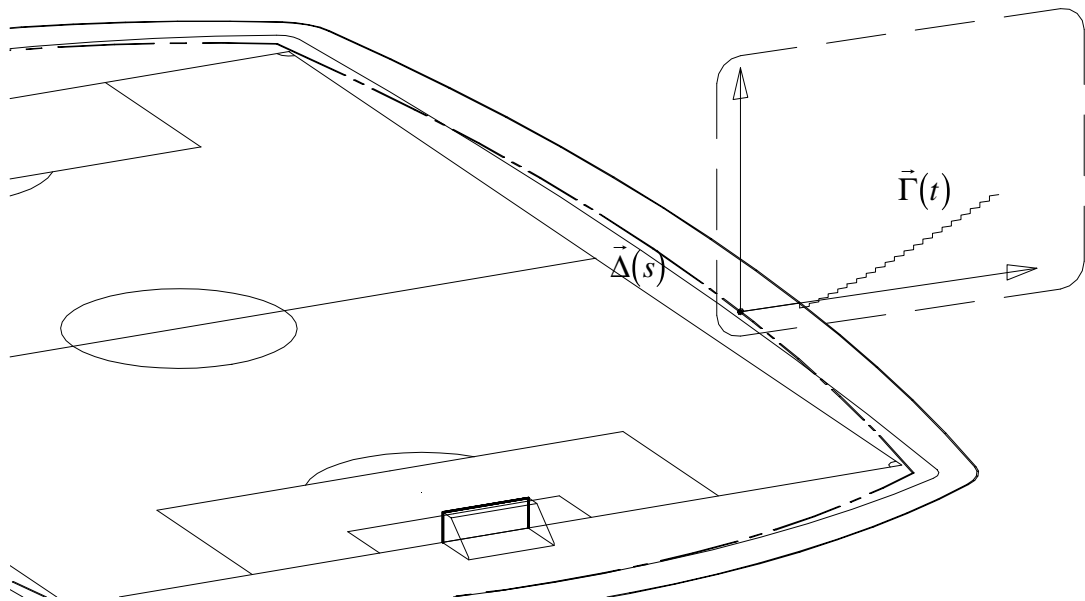


fig. 6.3.6. Directriu, sistema local de referència i còpia de la generatriu.

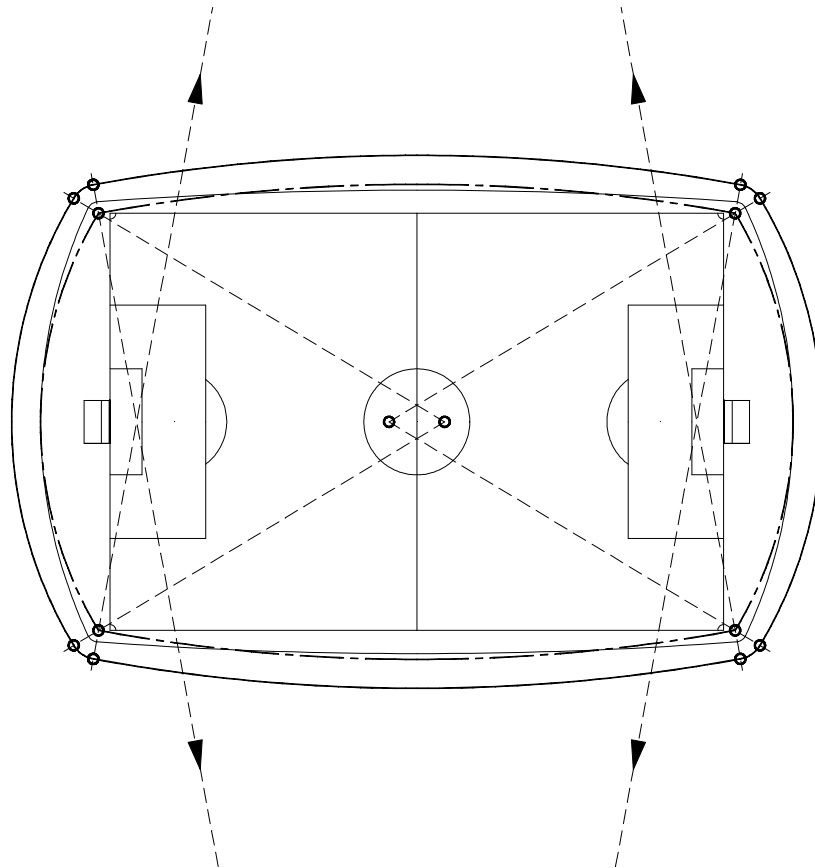


fig. 6.3.7. Contorn format per arcs de circumferència.

6.5. Figures.

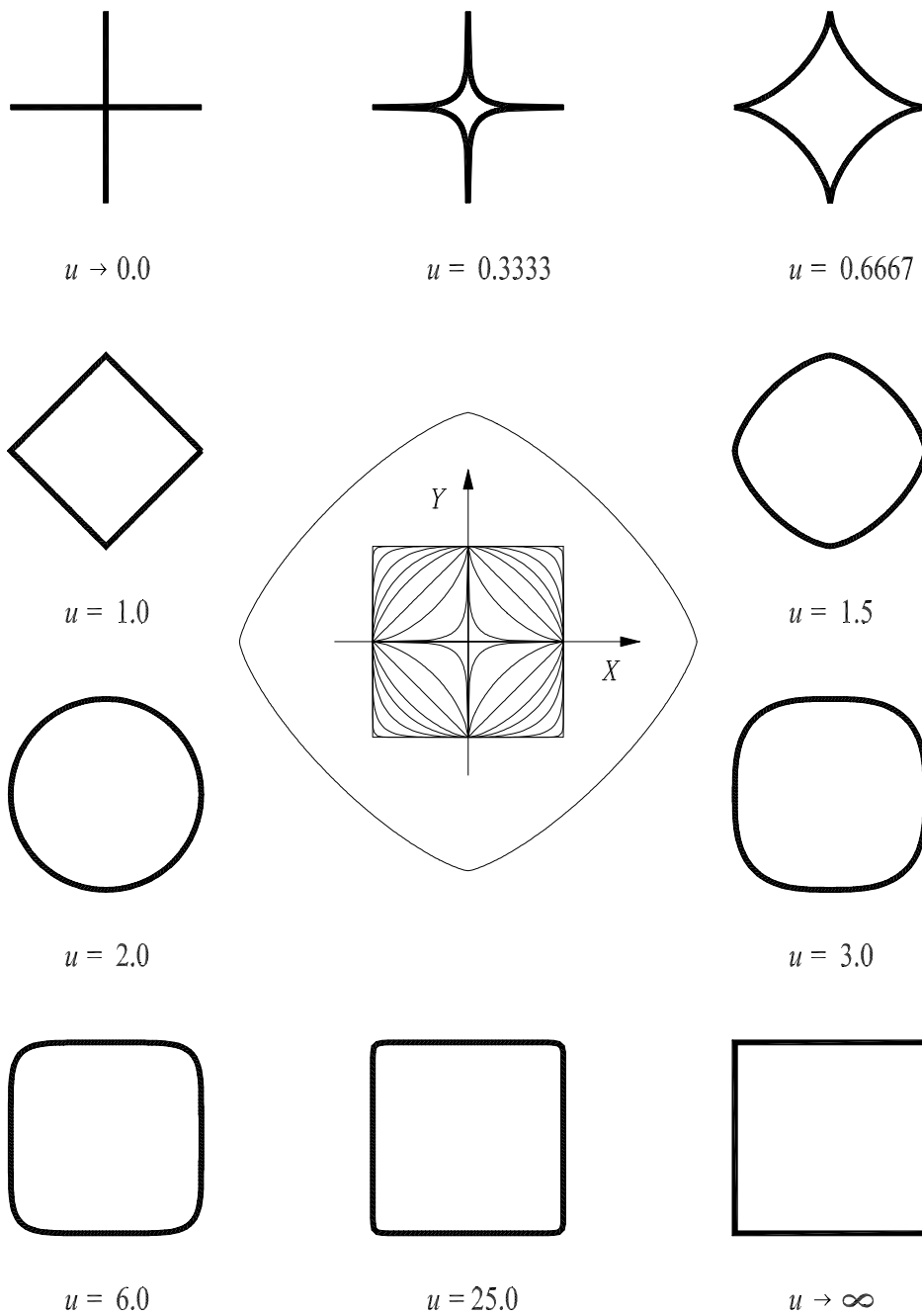


fig. 6.3.8. Col·lecció de superel·lipses per diferents valors de l'exponent u .

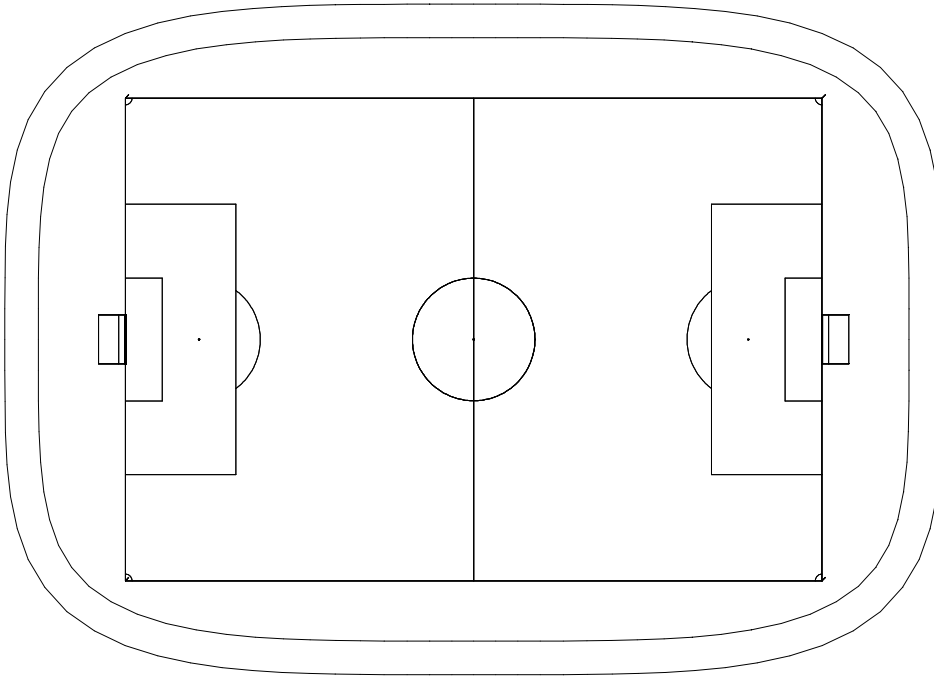
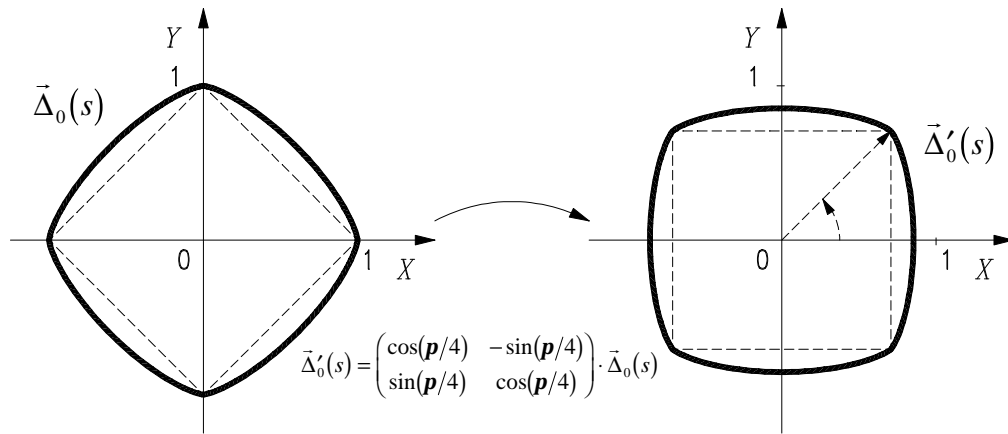


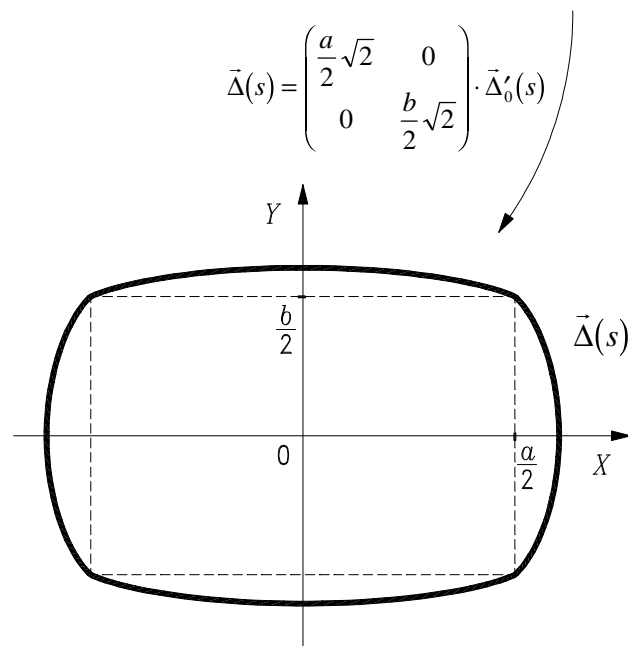
fig. 6.3.9. Contorn superel·líptic amb $u > 2$.

6.5. Figures.



(a) superel·lipse de partida.

(b) l'anterior després de girar-la 45°.



(c) resultat final, després de reescalar la segona figura.

fig. 6.3.10. Idea inicial per al disseny del contorn del terreny de joc.

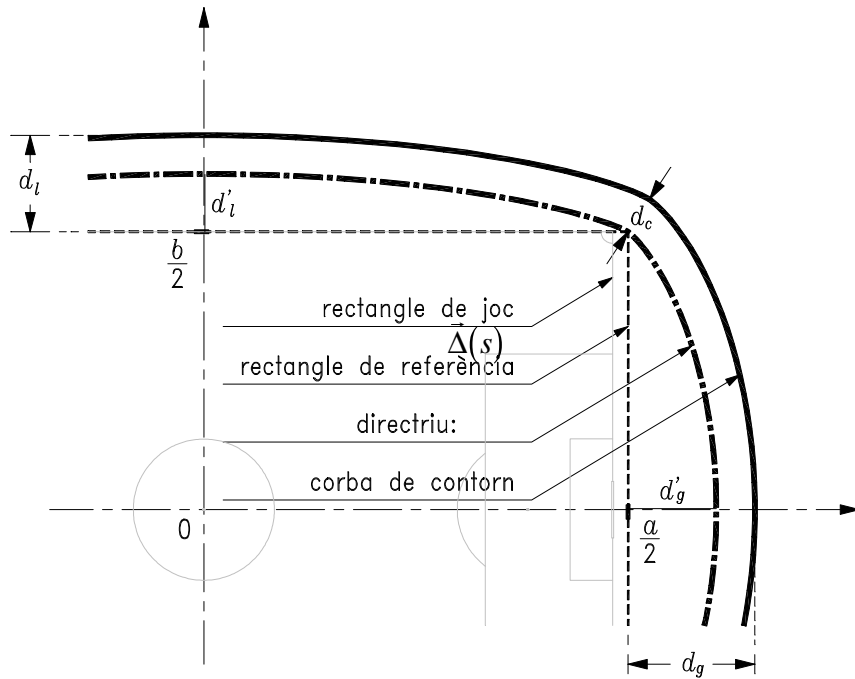


fig. 6.3.11. Dades significatives per determinar la directriu i les corbes de contorn.

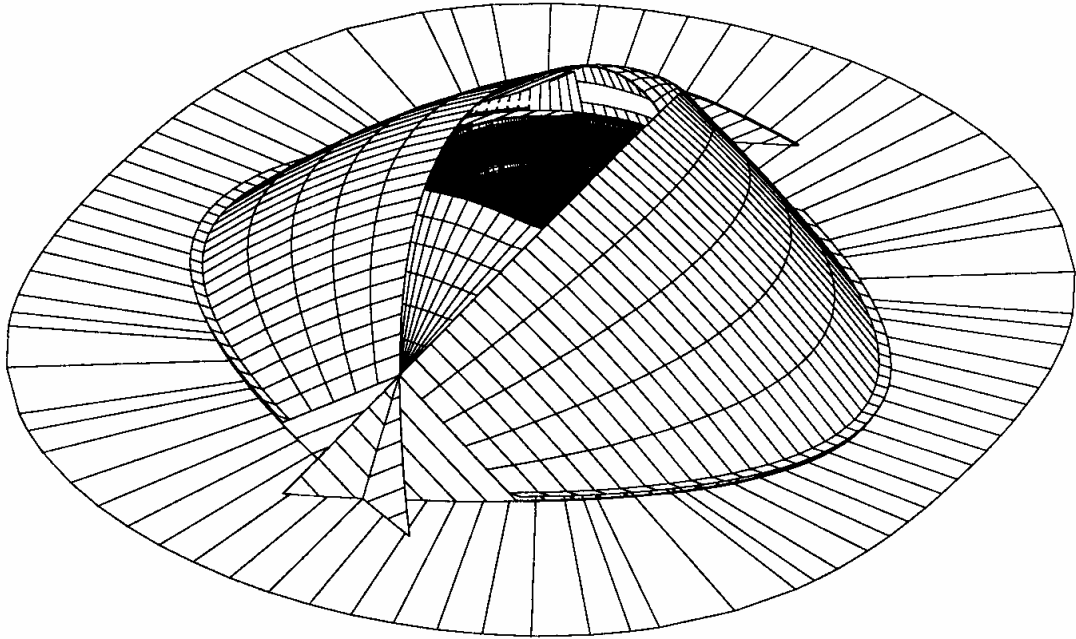


fig. 6.3.12. Vista panoràmica exterior de l'estadi.

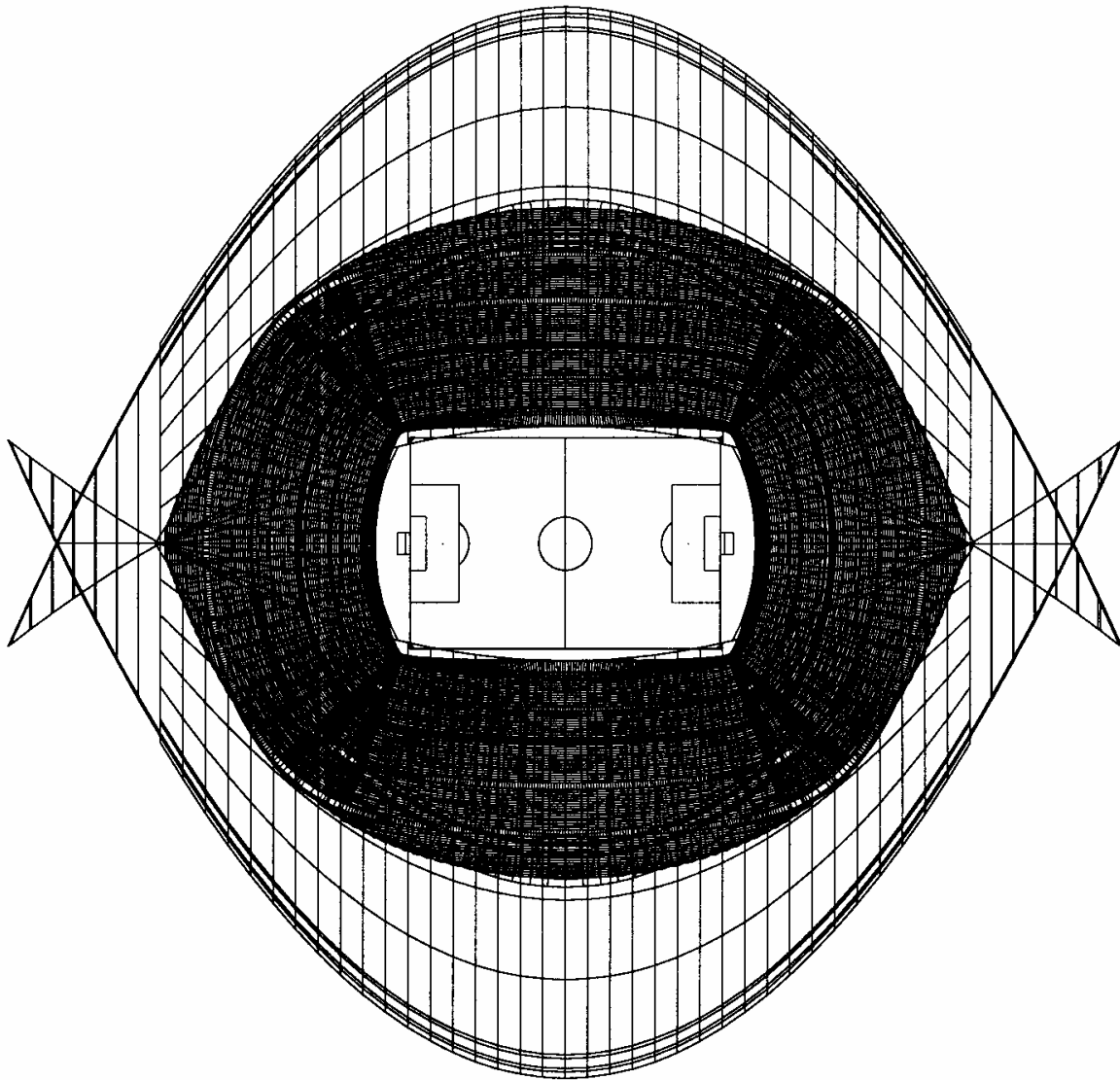


fig. 6.3.13(a). Planta general de l'estadi.

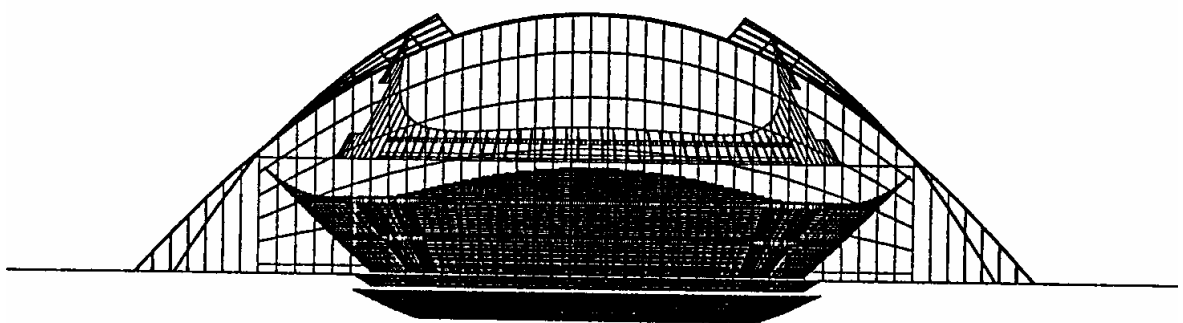
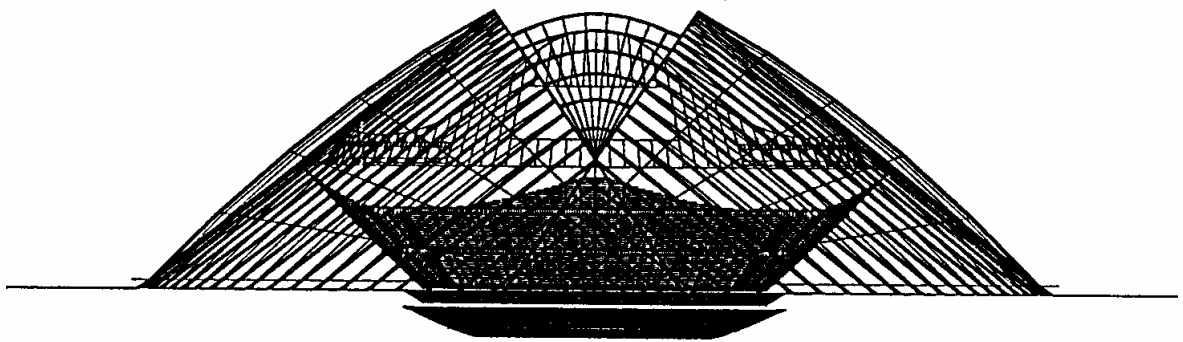


fig. 6.3.13(b). Alçats principals de l'estadi.

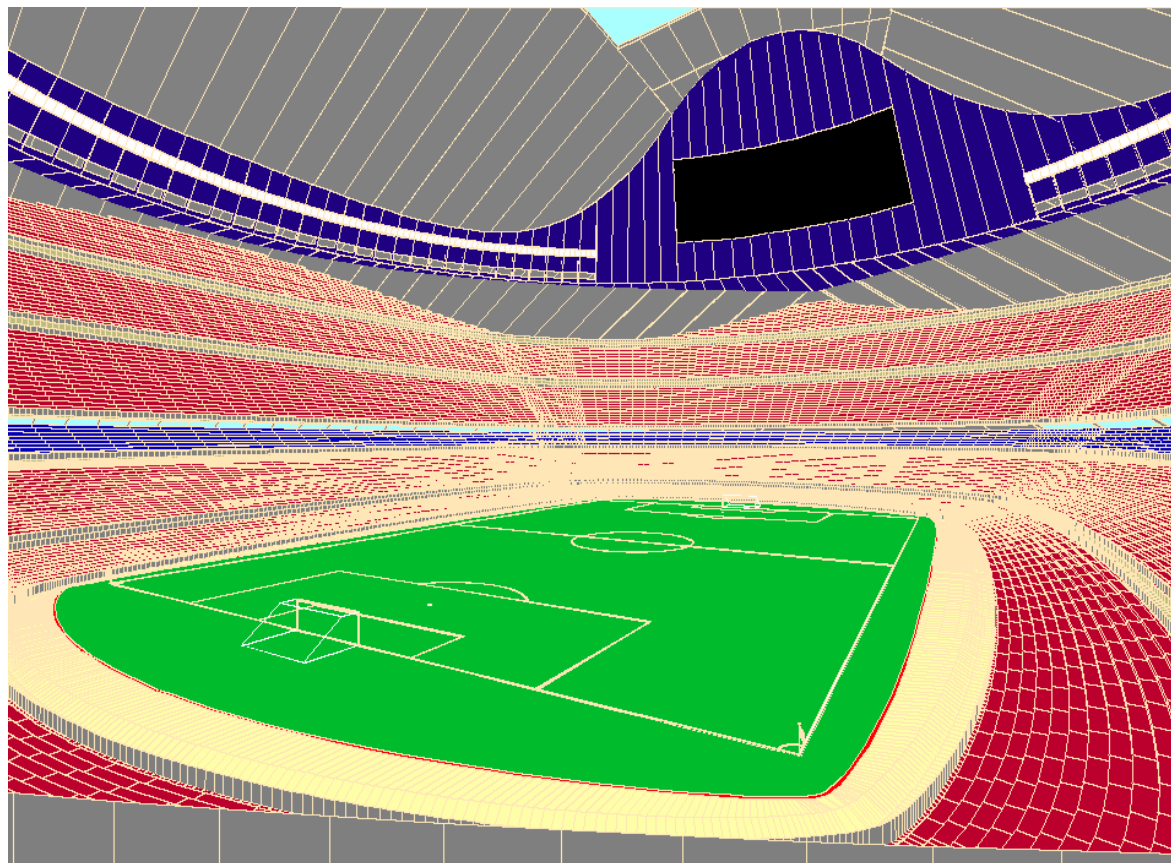


fig. 6.3.14. Vista panoràmica interior de l'estadi.

6.5. Figures.

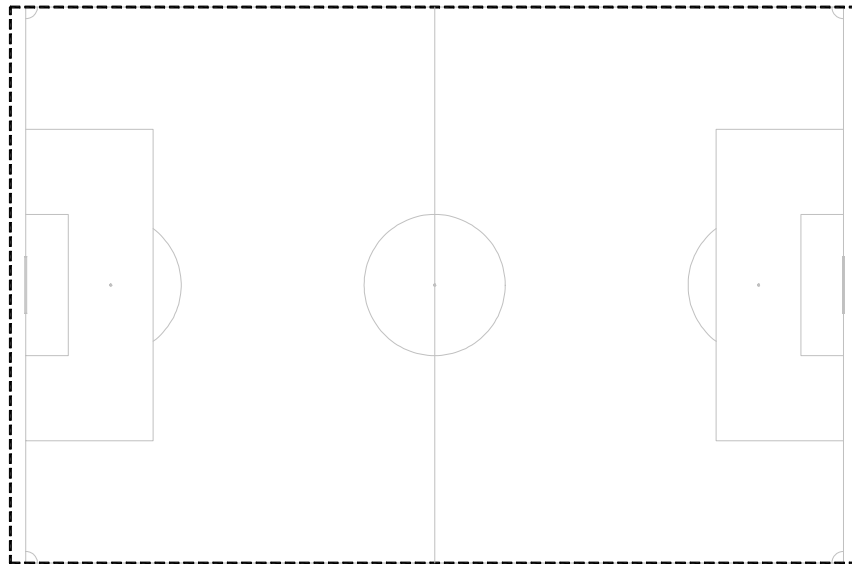


fig. 6.3.15. Terreny de joc i rectangle de referència.

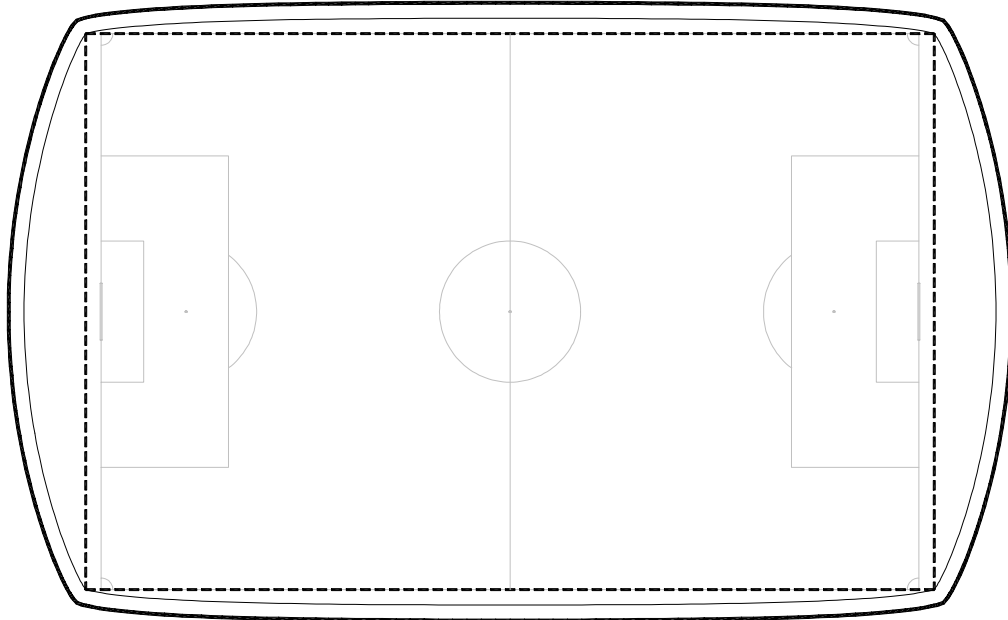


fig. 6.3.16. Directriu i vora de la gespa.

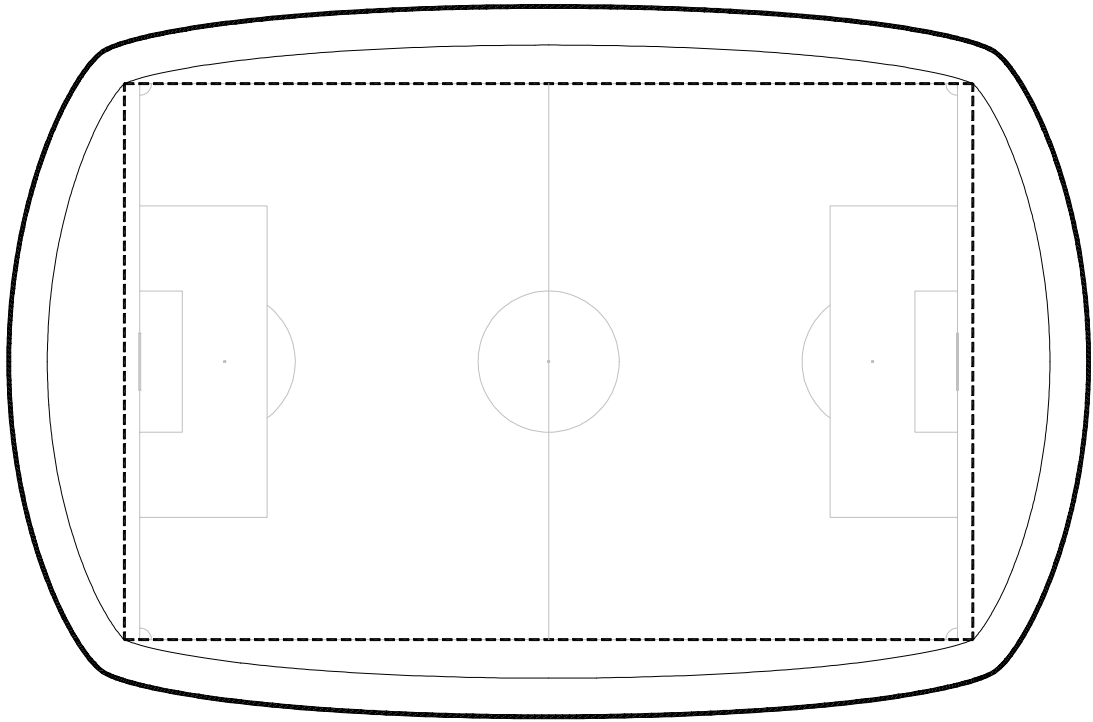


fig. 6.3.17. Directriu i vora (barana) de la primera fila de la grada 1.

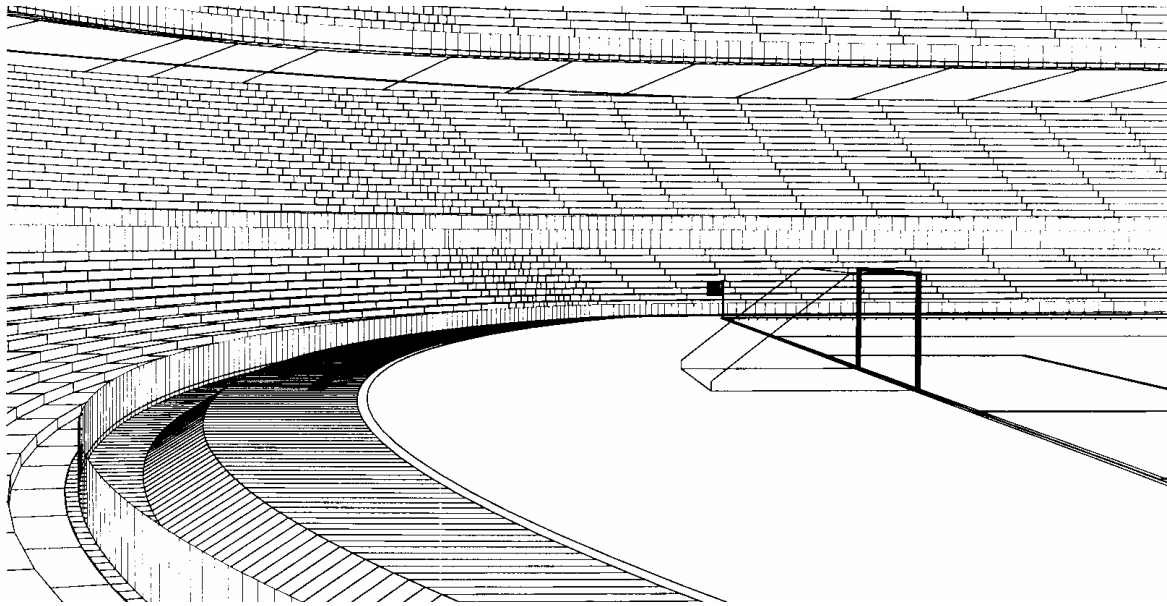


fig. 6.3.18. Vista de la superfície de transició entre la grada i el camp.

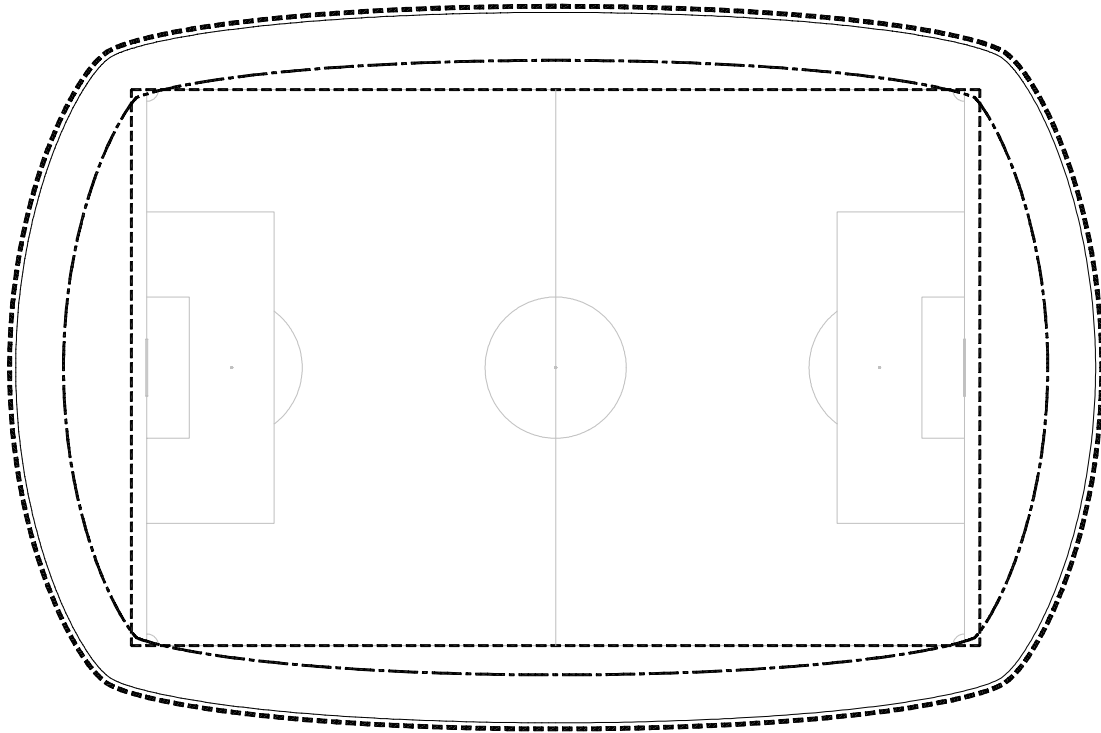


fig. 6.3.19. Línies dels ulls dels espectadors de primera fila i de punts-objectiu.

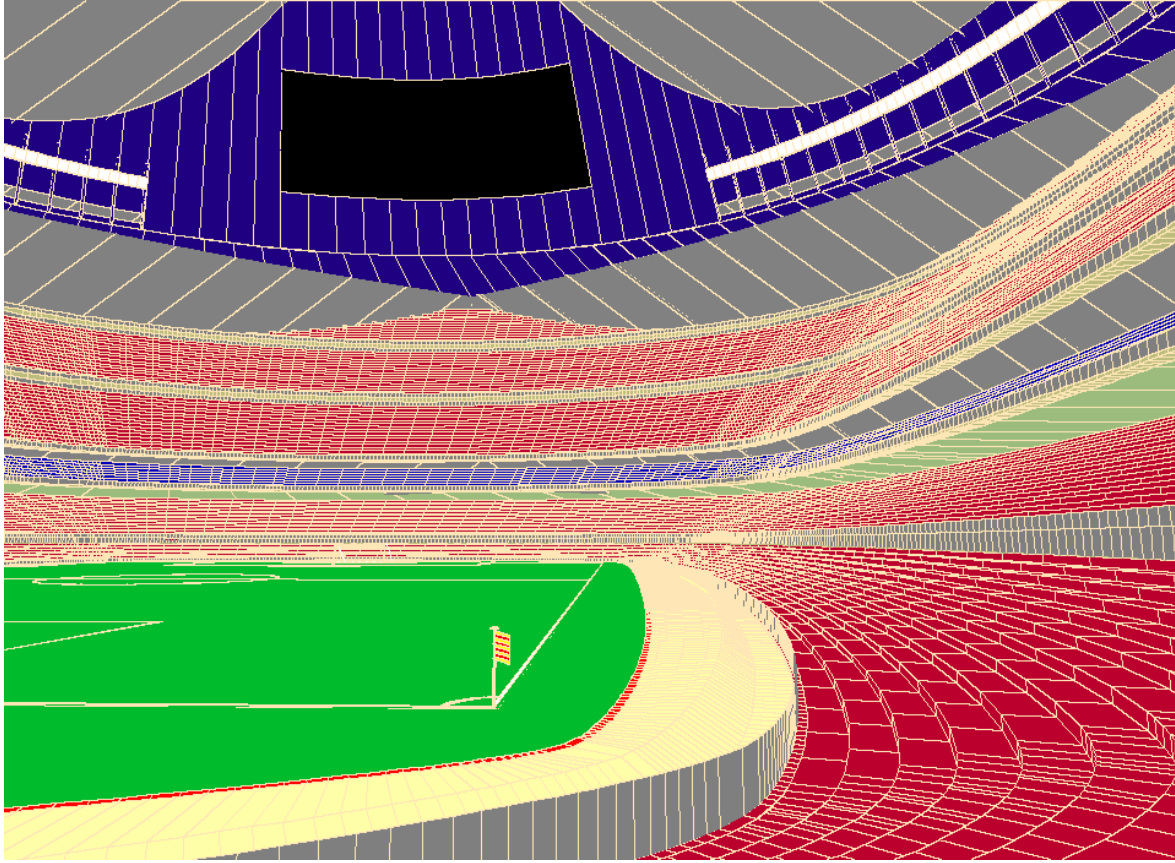


fig. 6.3.20. Perspectiva de la primera graderia.

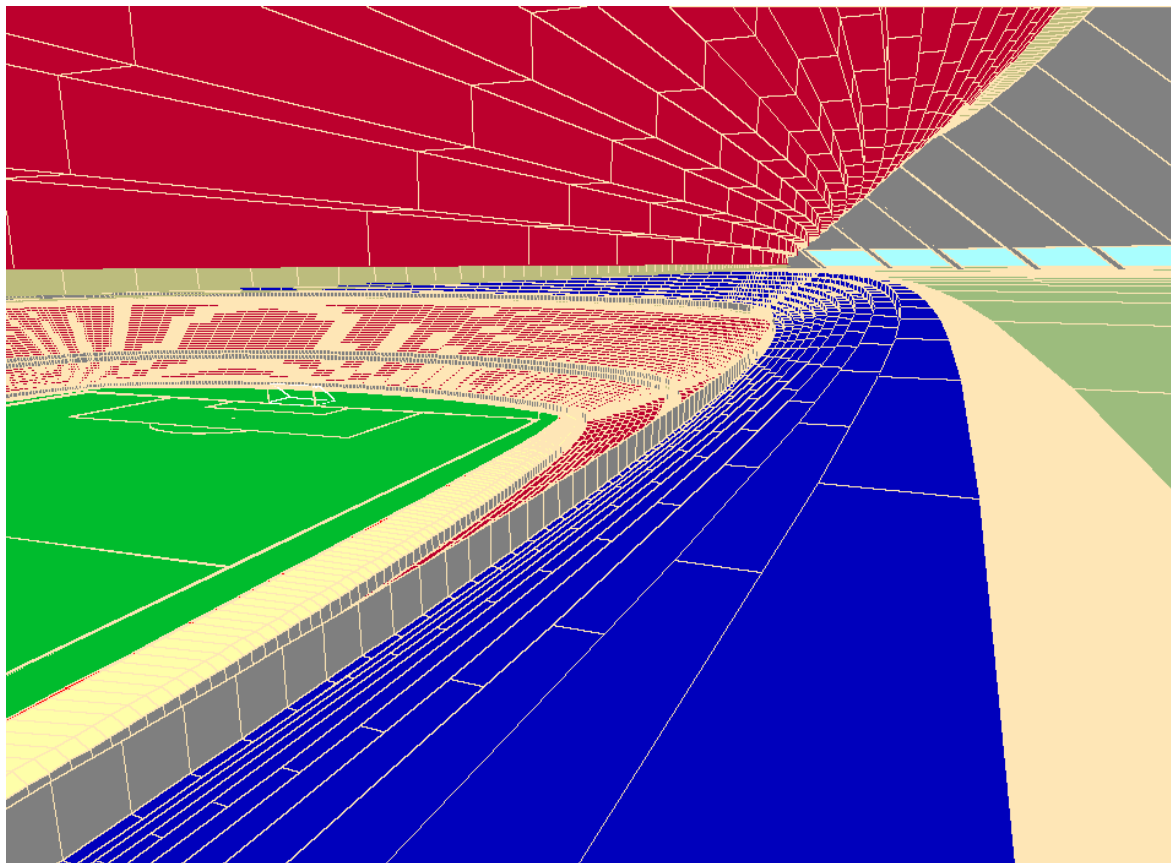


fig. 6.3.21. Perspectiva de la segona graderia.

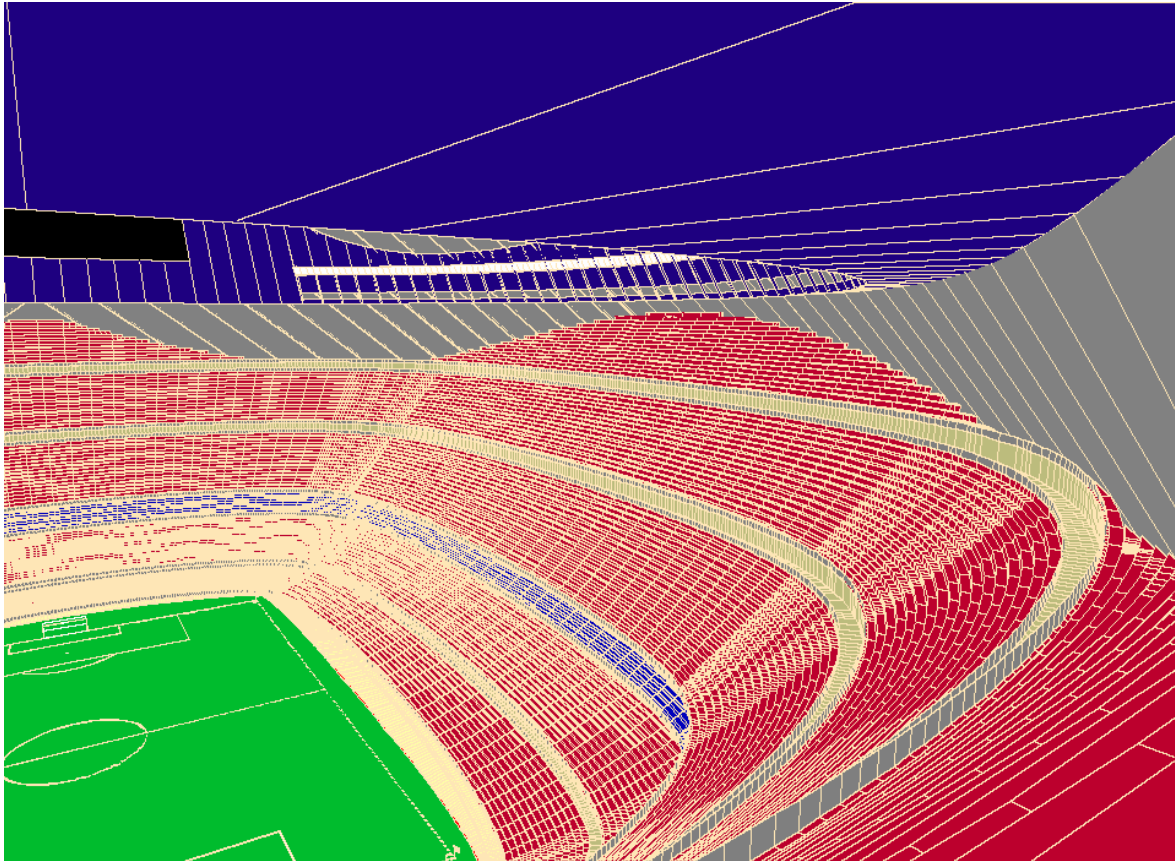


fig. 6.3.22. Perspectiva de la tercera graderia.

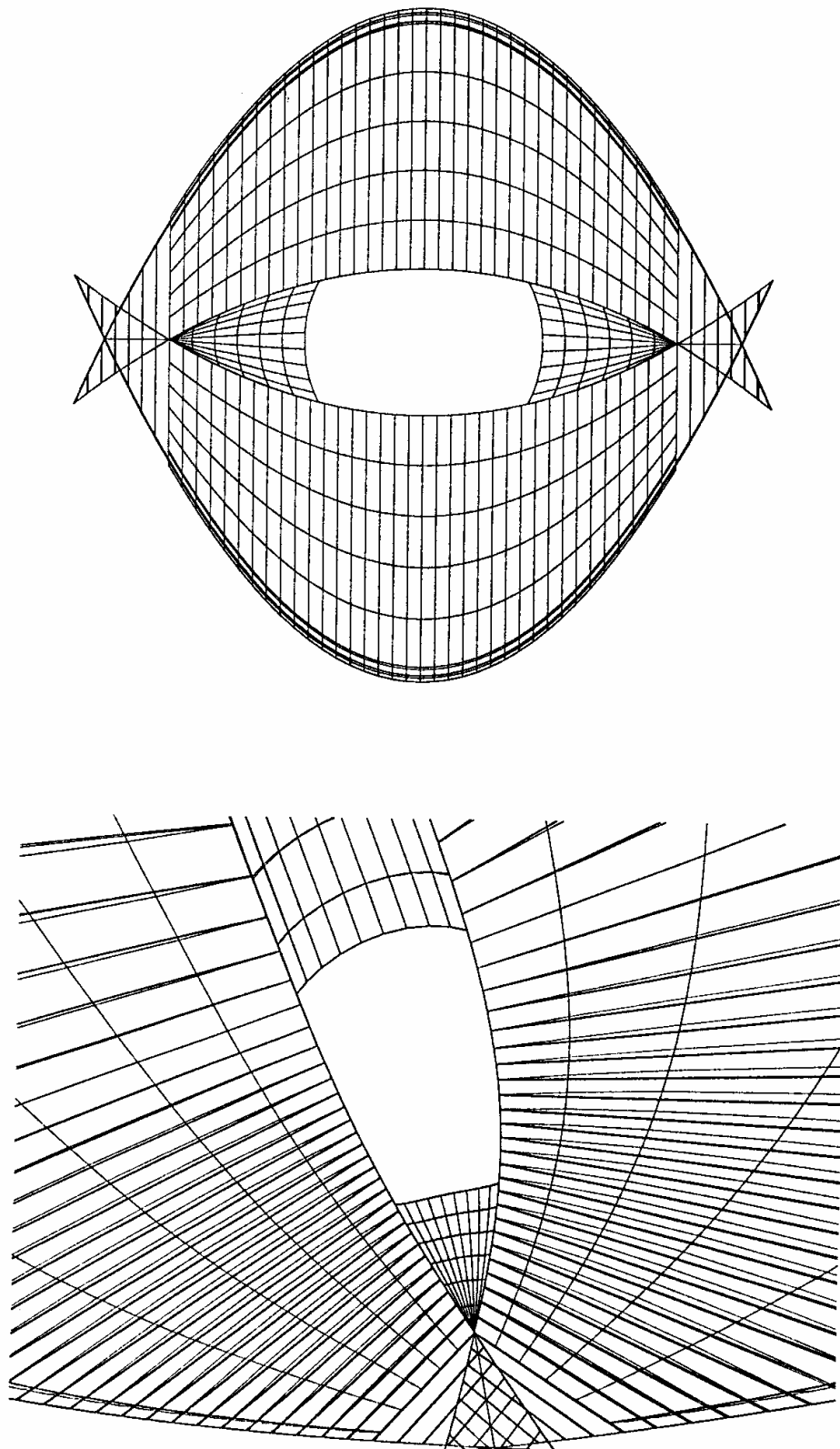


fig. 6.3.23. Planta i perspectiva de la coberta.

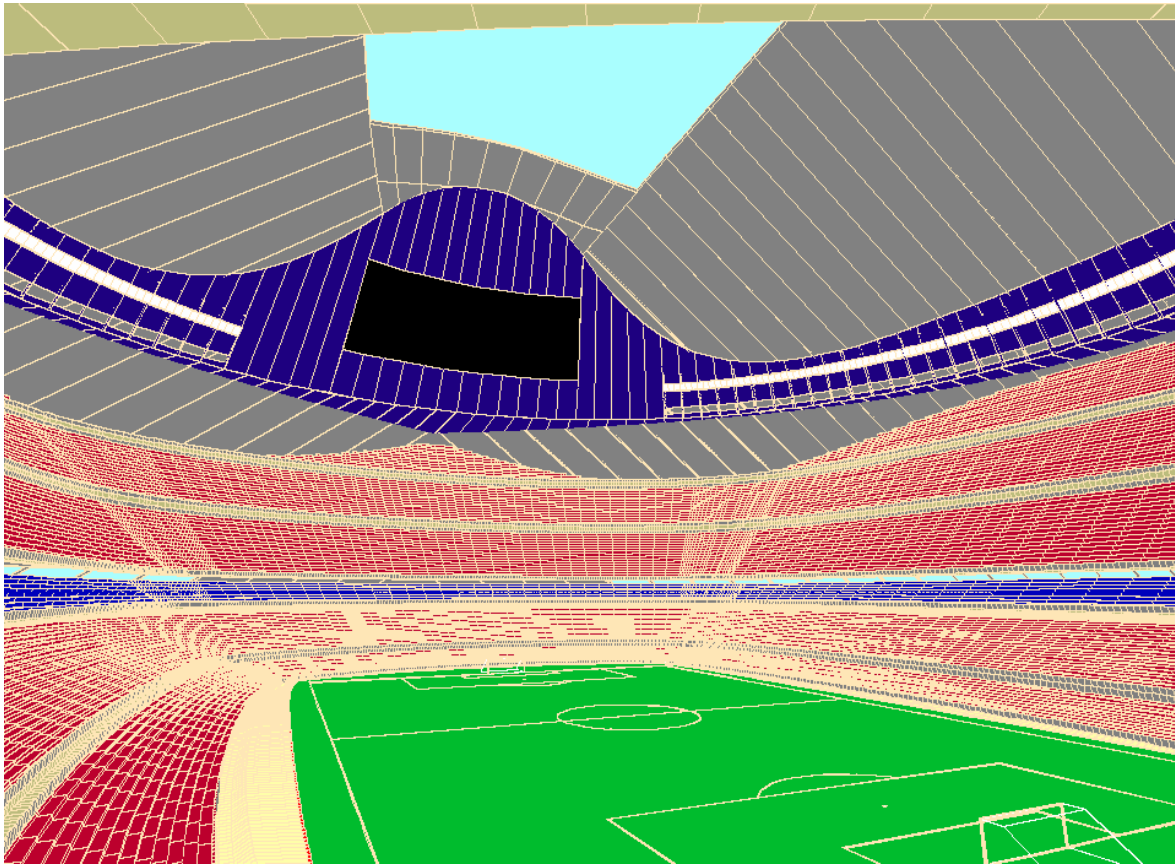


fig. 6.3.24. Visió de conjunt de la coberta.

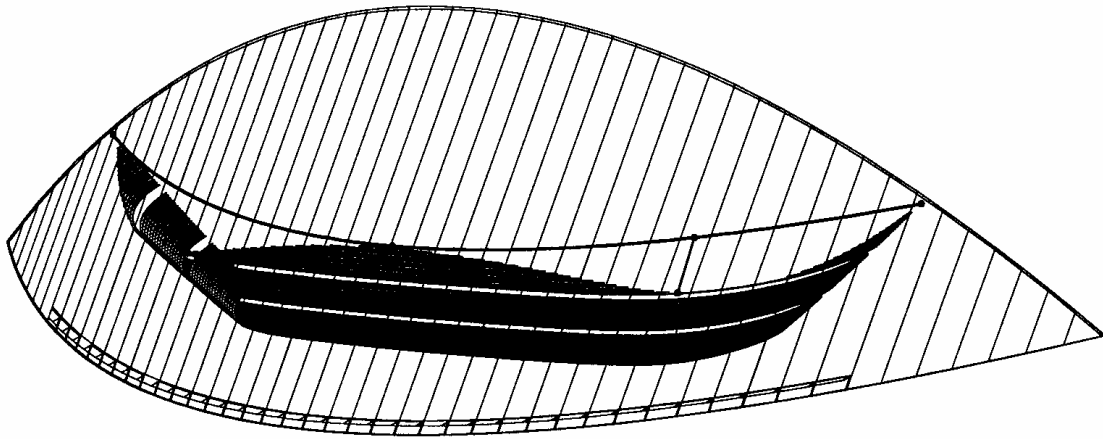


fig. 6.3.25. Paràbola directriu i primera generatriu de la coberta de lateral.

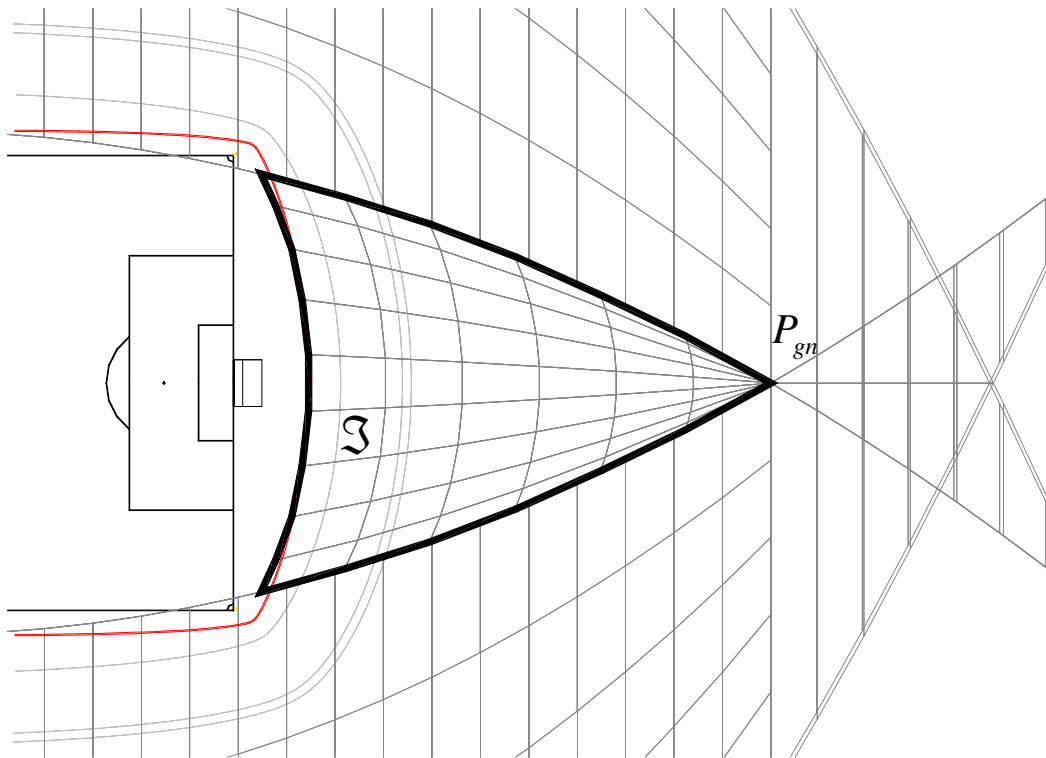


fig. 6.3.26. Definició del domini de la coberta de gol.

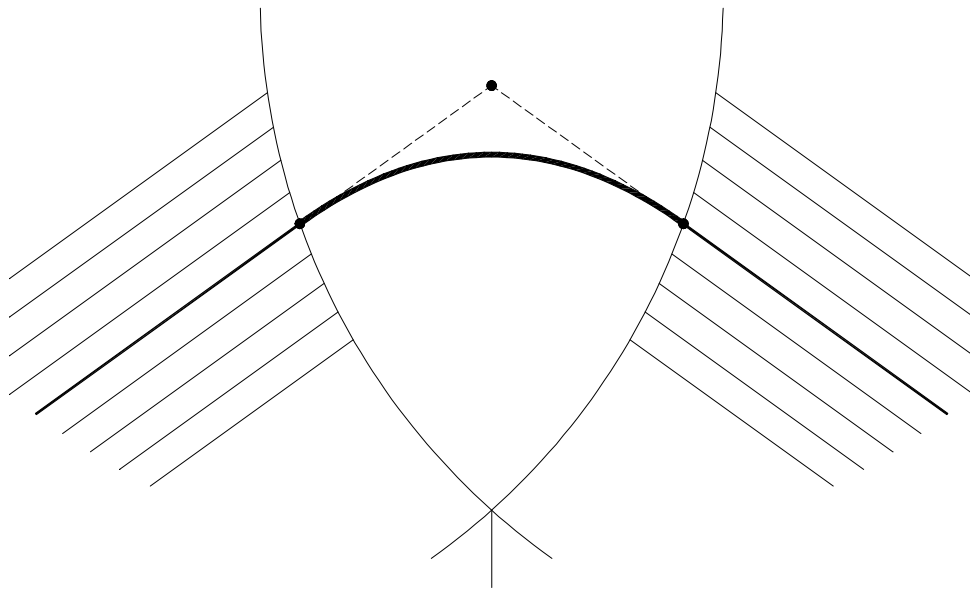


fig. 6.3.27. Definició de les generatrius com a corbes de Bézier.

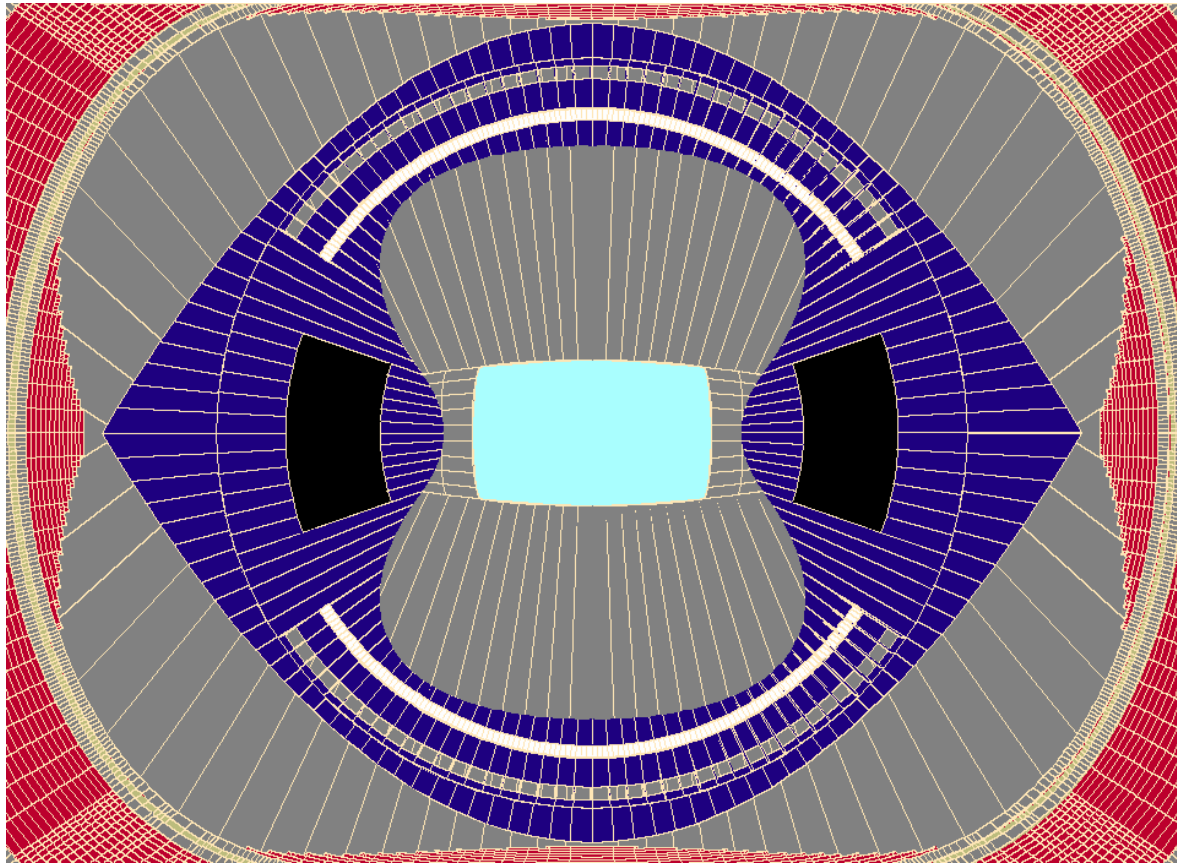


fig. 6.3.28. Cercle que defineix la tribuna de premsa, il·luminació i marcadros.

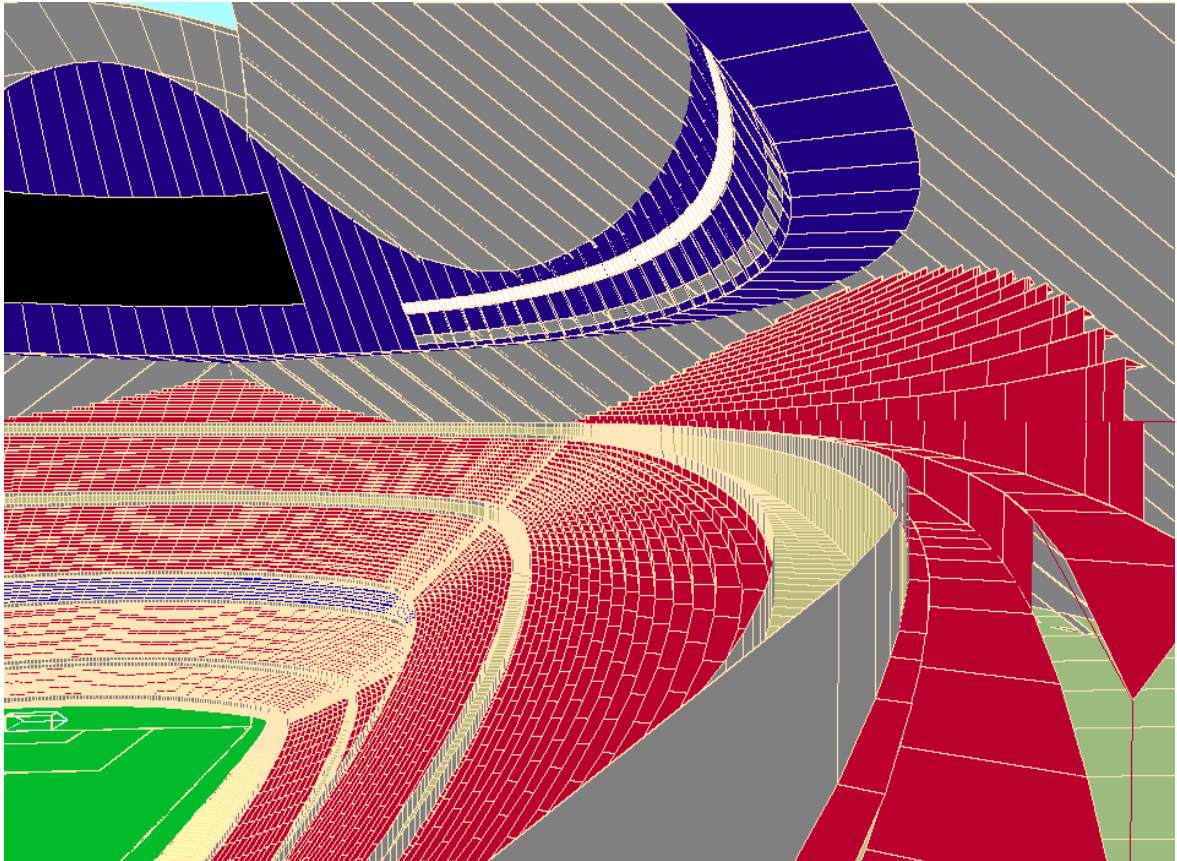


fig. 6.3.29. Detall de la tribuna de premsa, il·luminació i marcadors.

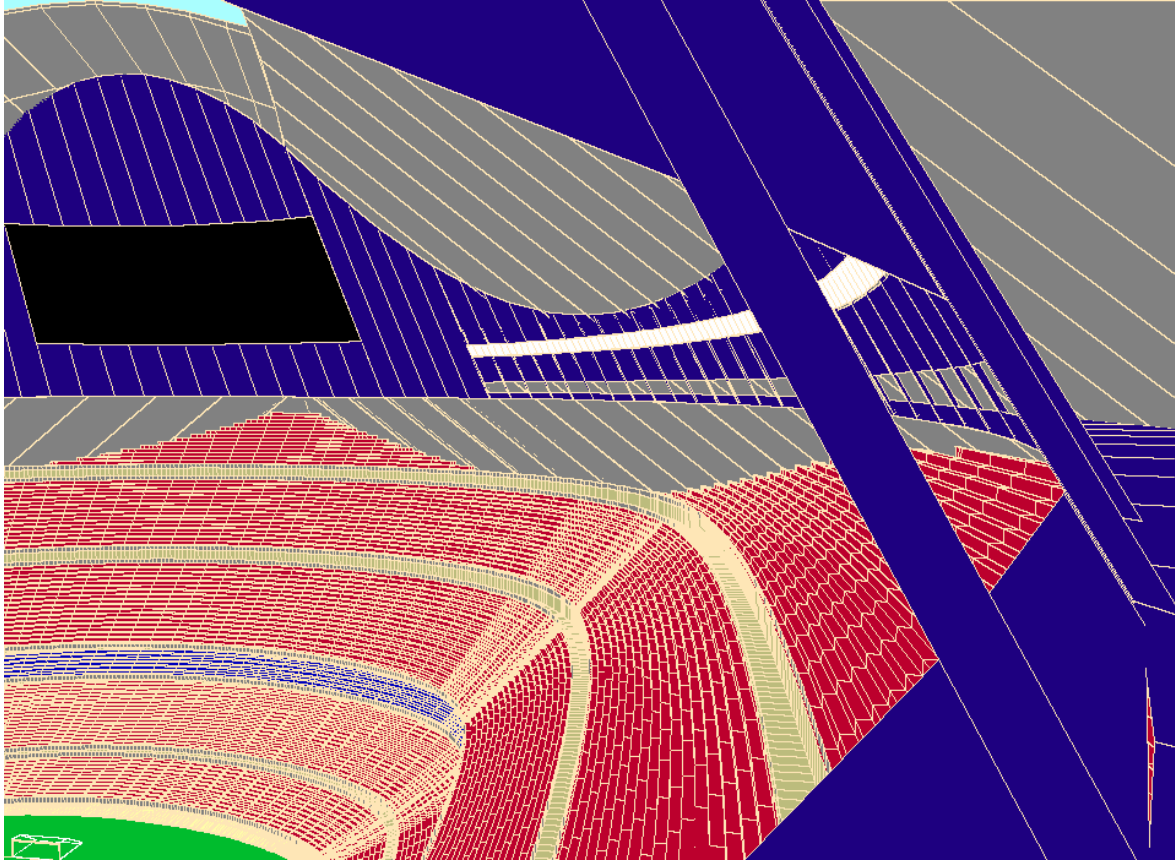


fig. 6.3.30. Vista des de la tribuna de premsa (I).

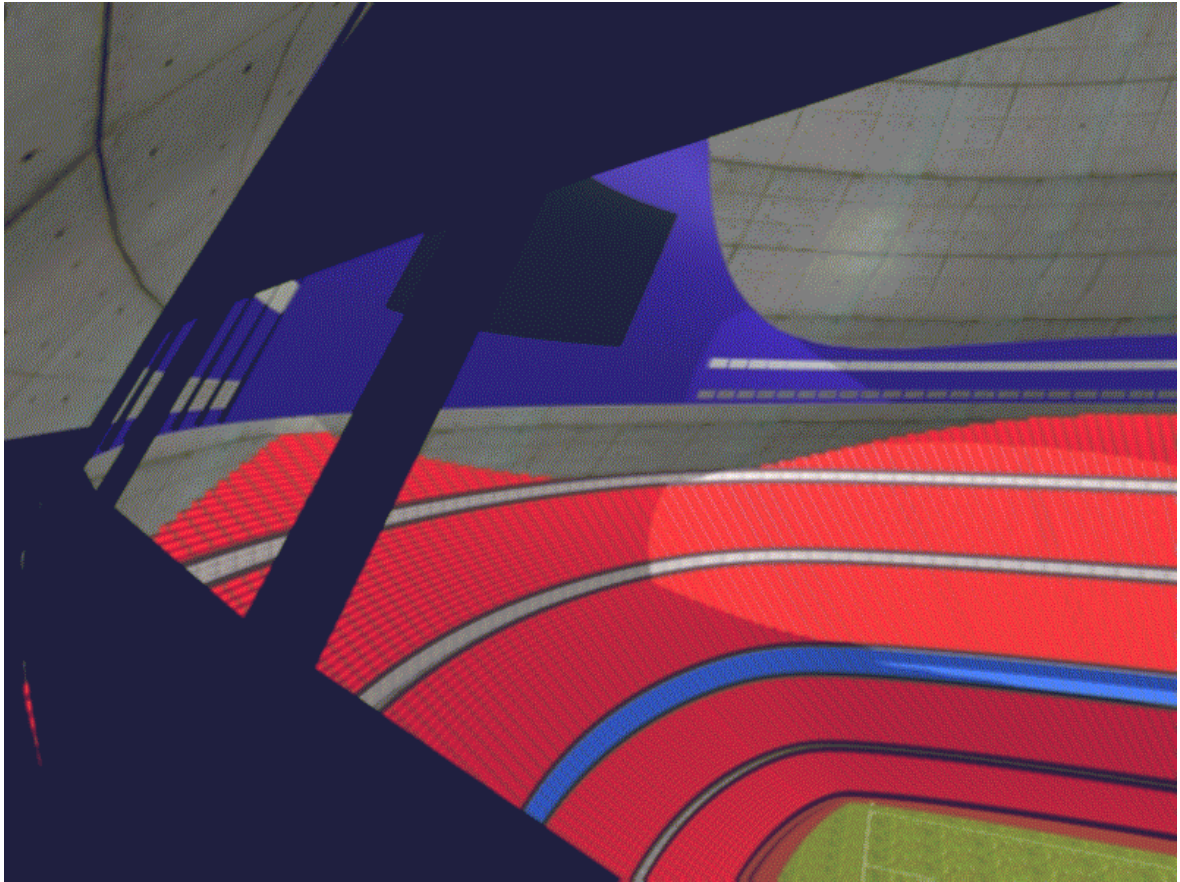


fig. 6.3.31. Vista des de la tribuna de premsa (II).

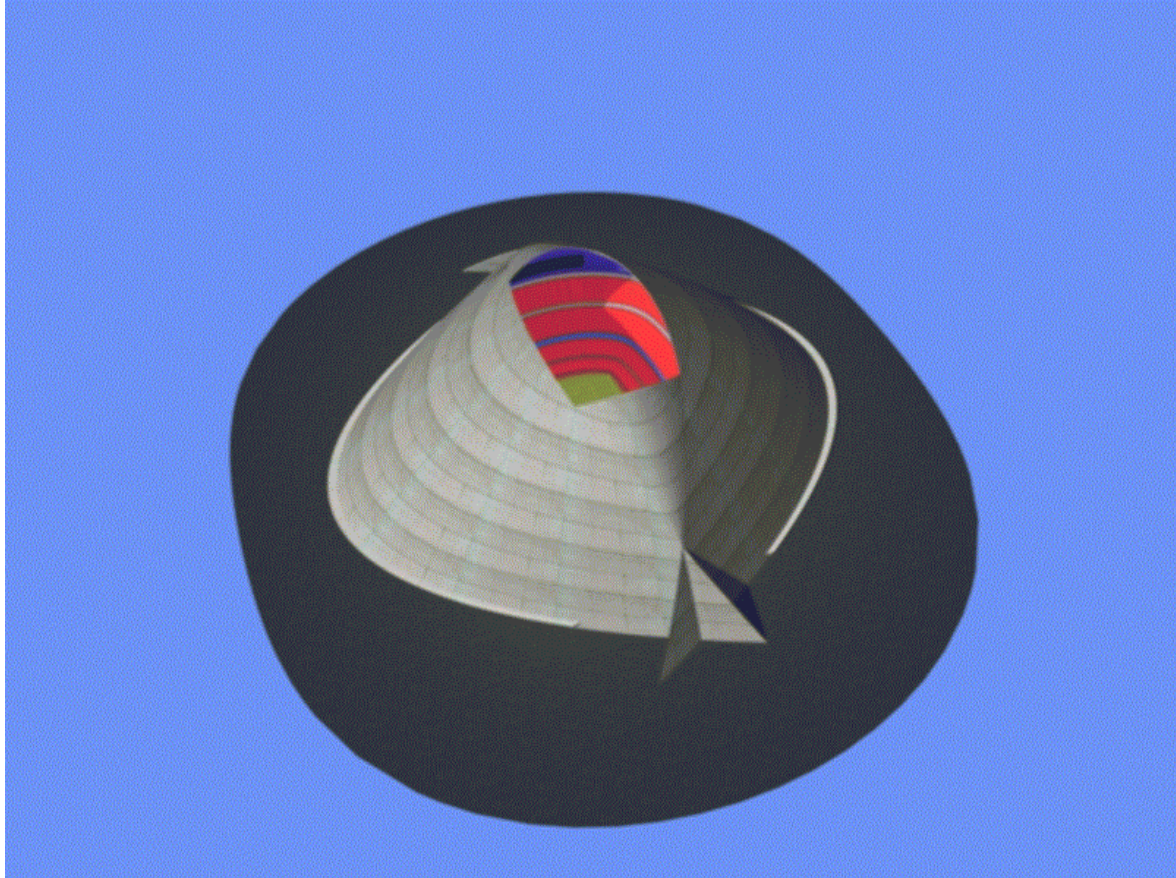


fig. 6.3.32.

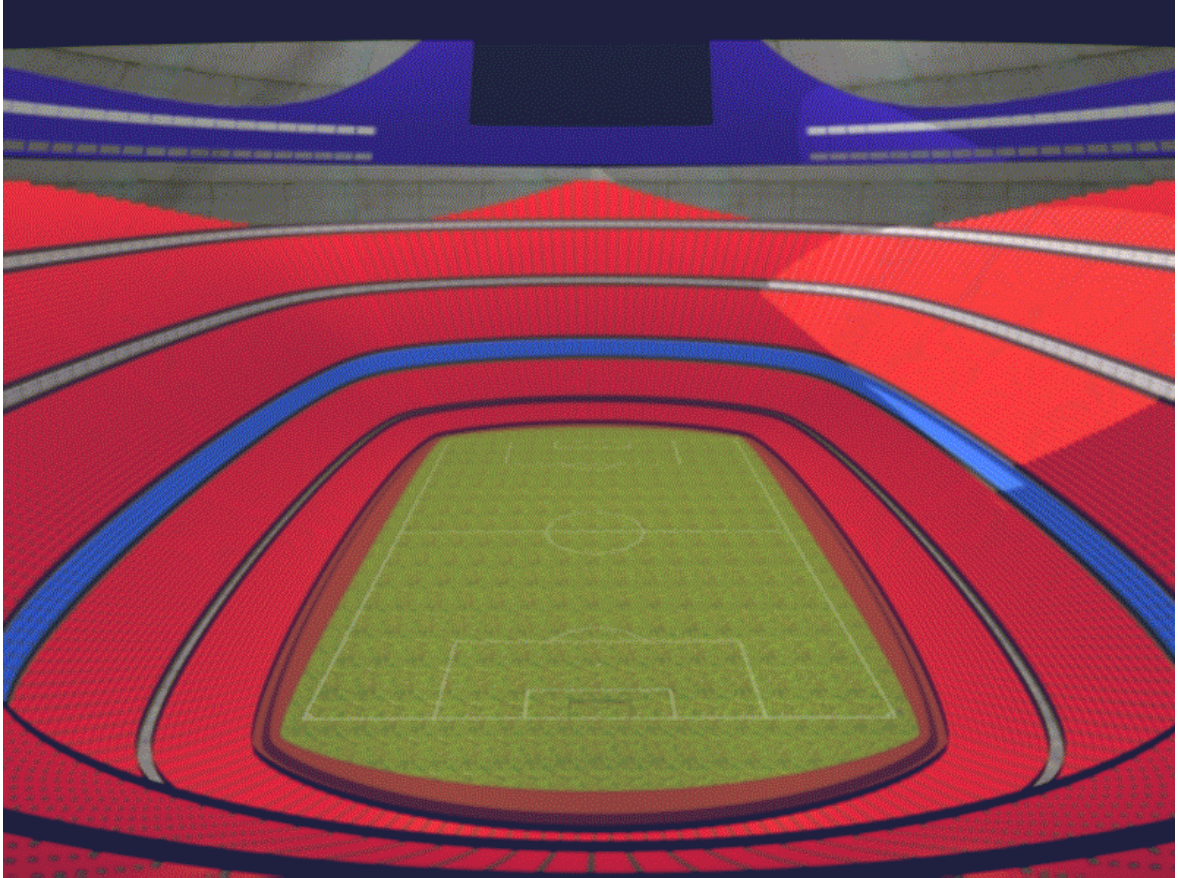


fig. 6.3.33.

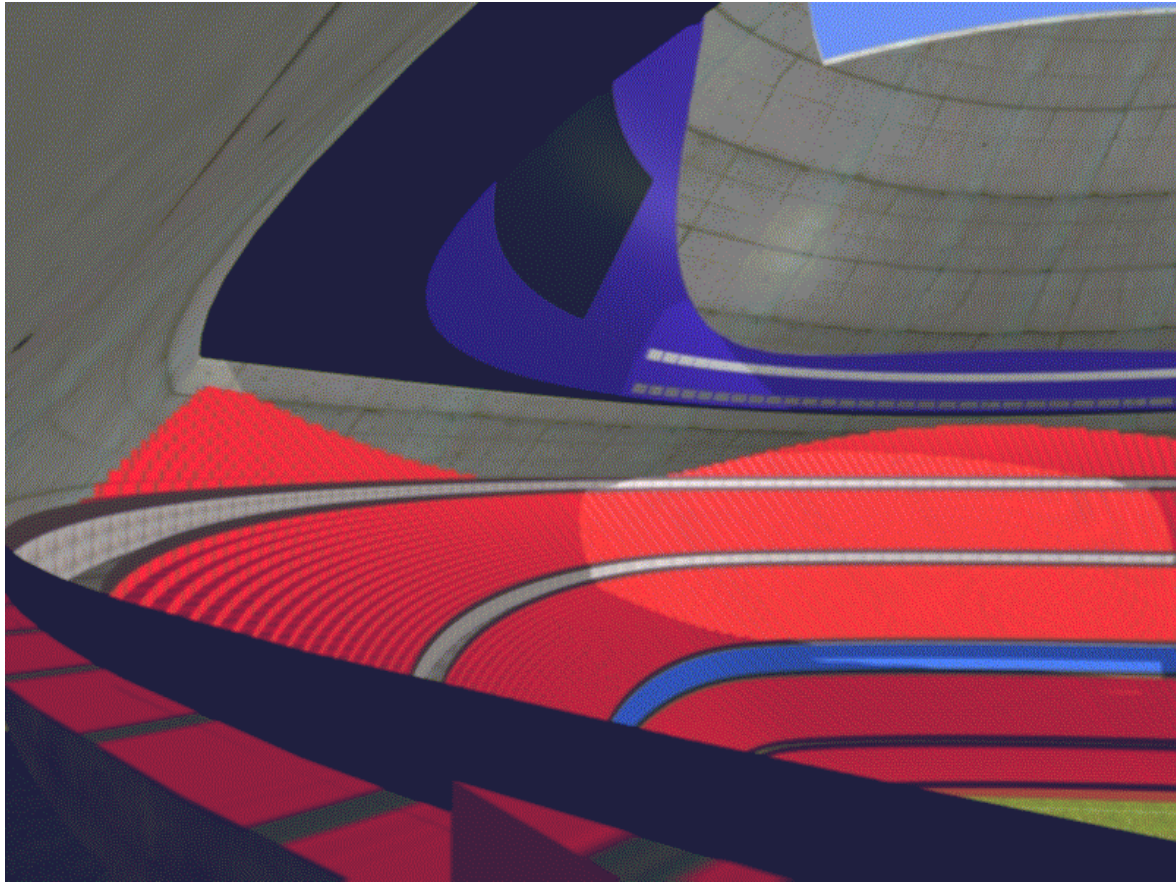


fig. 6.3.34.

6.5. Figures.

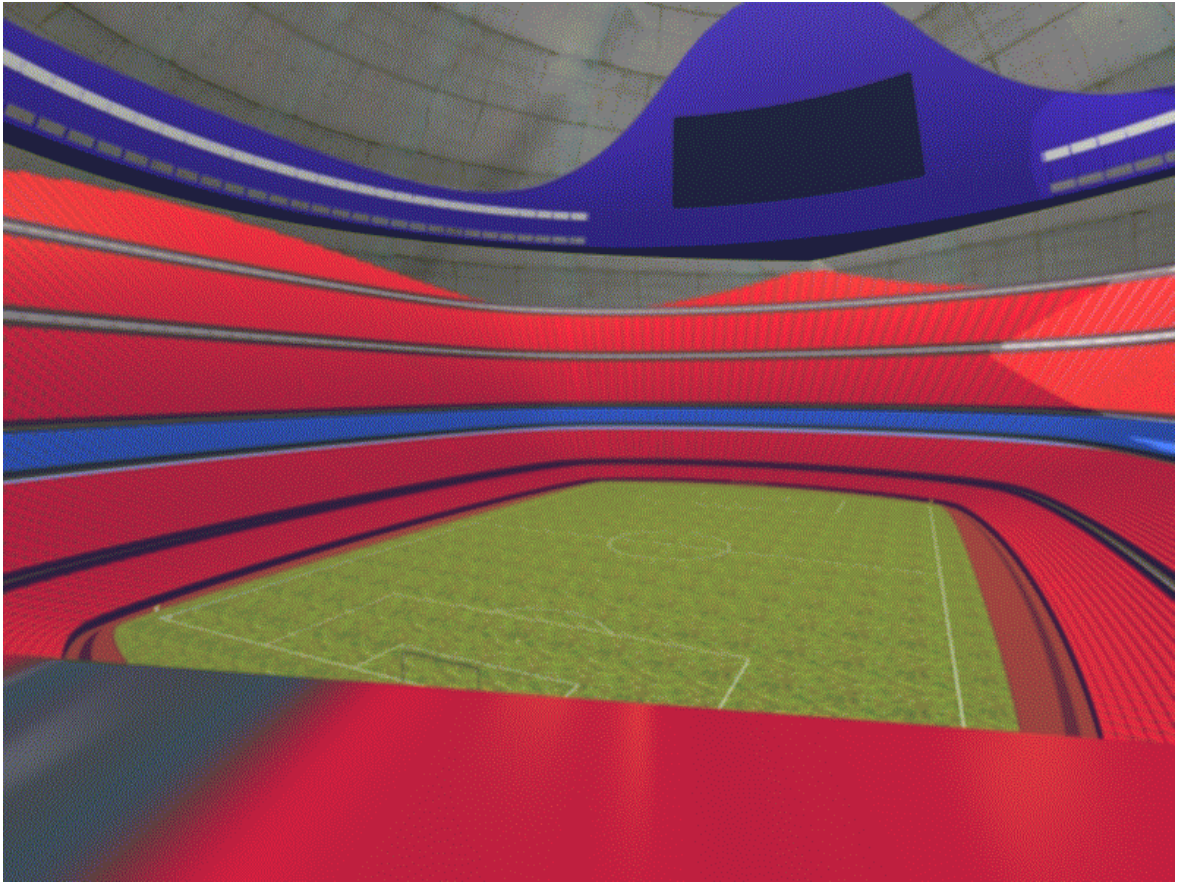


fig. 6.3.35.

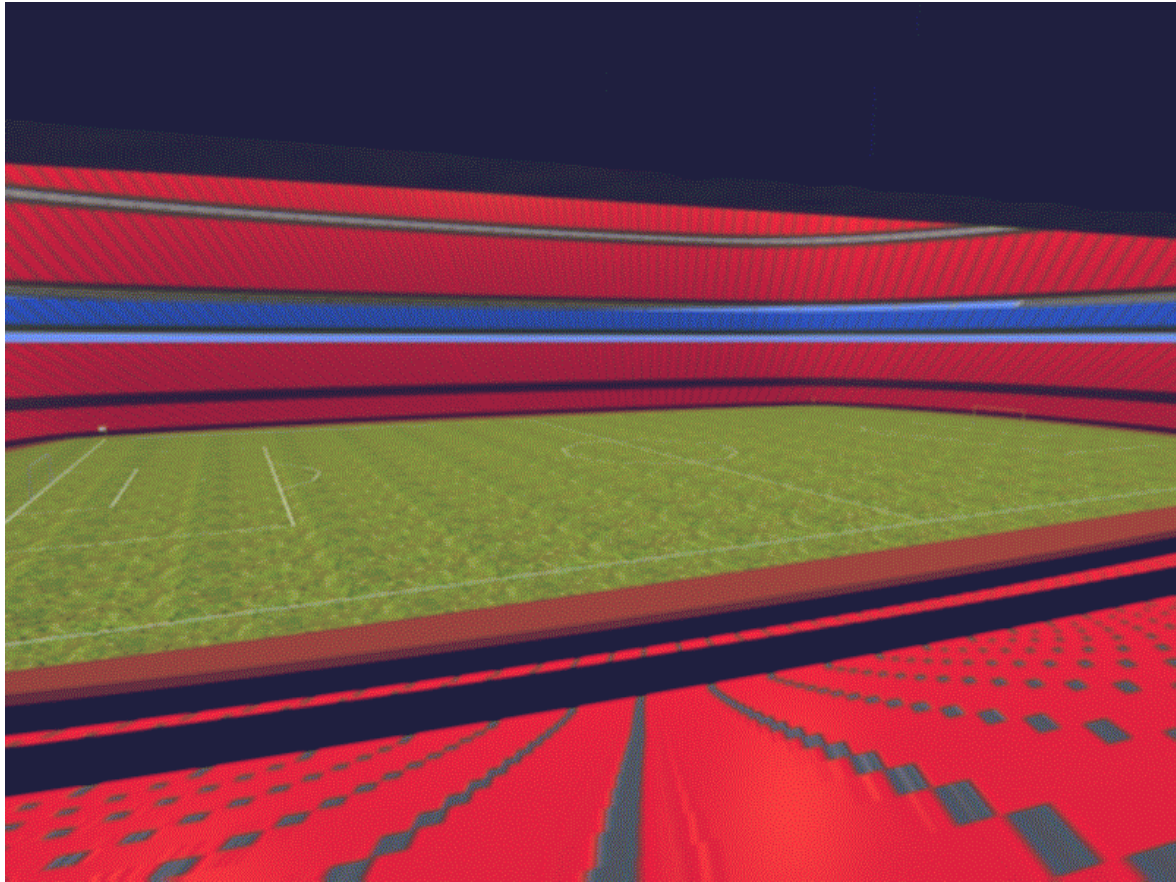


fig. 6.3.36.

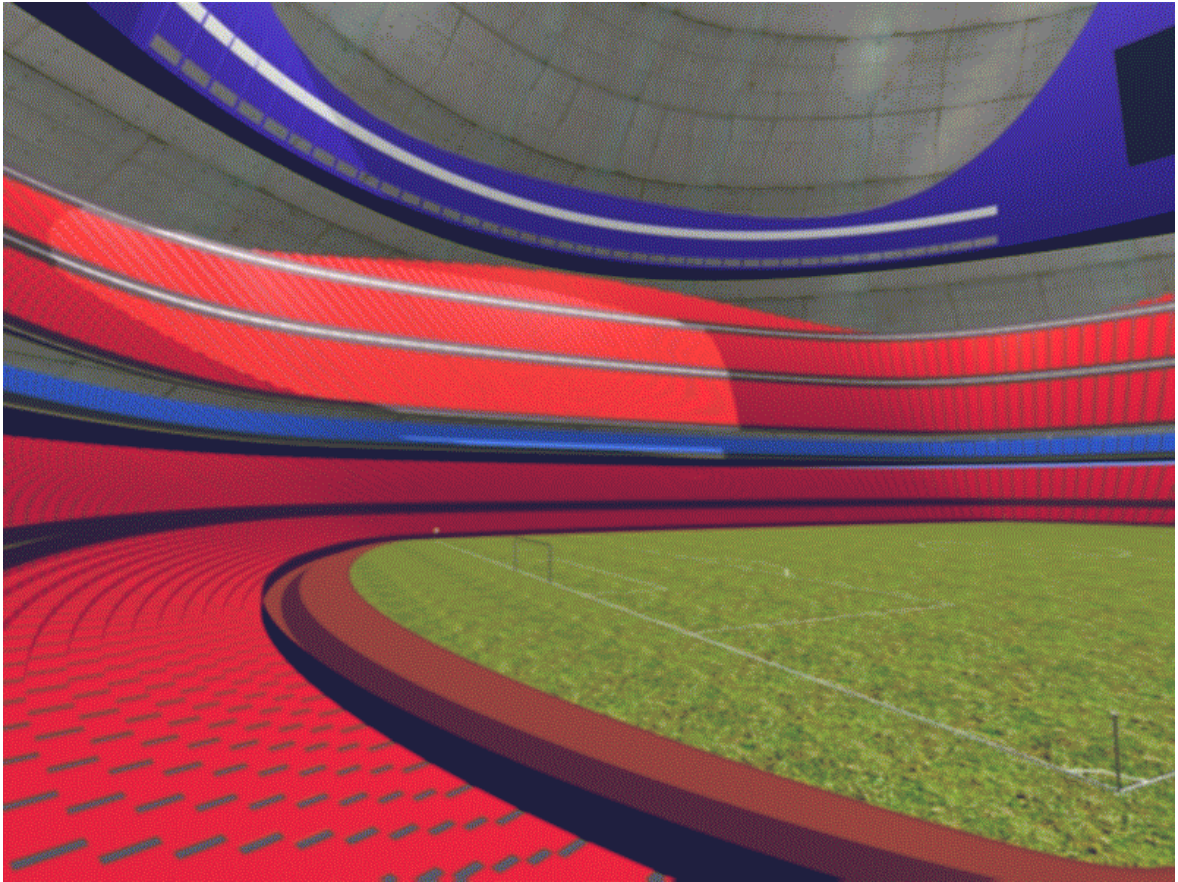


fig. 6.3.37.

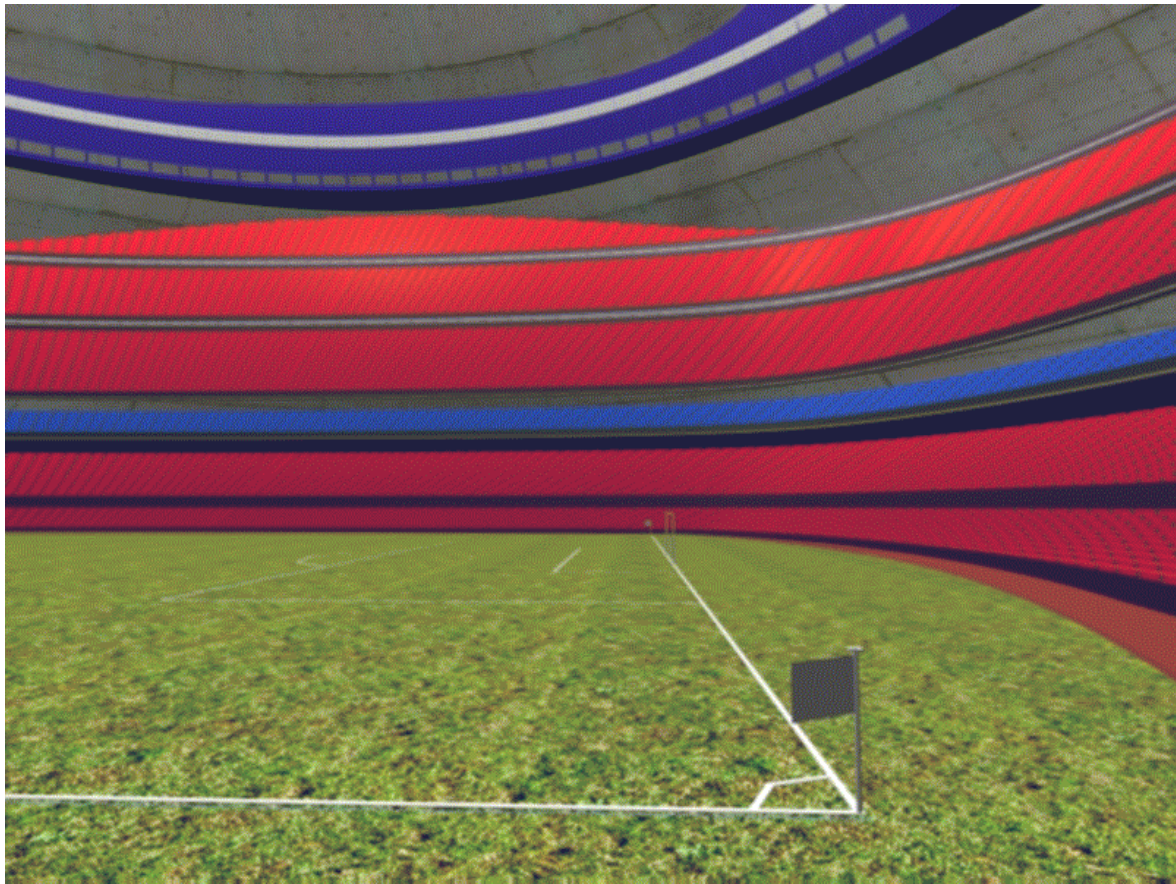


fig. 6.3.38.

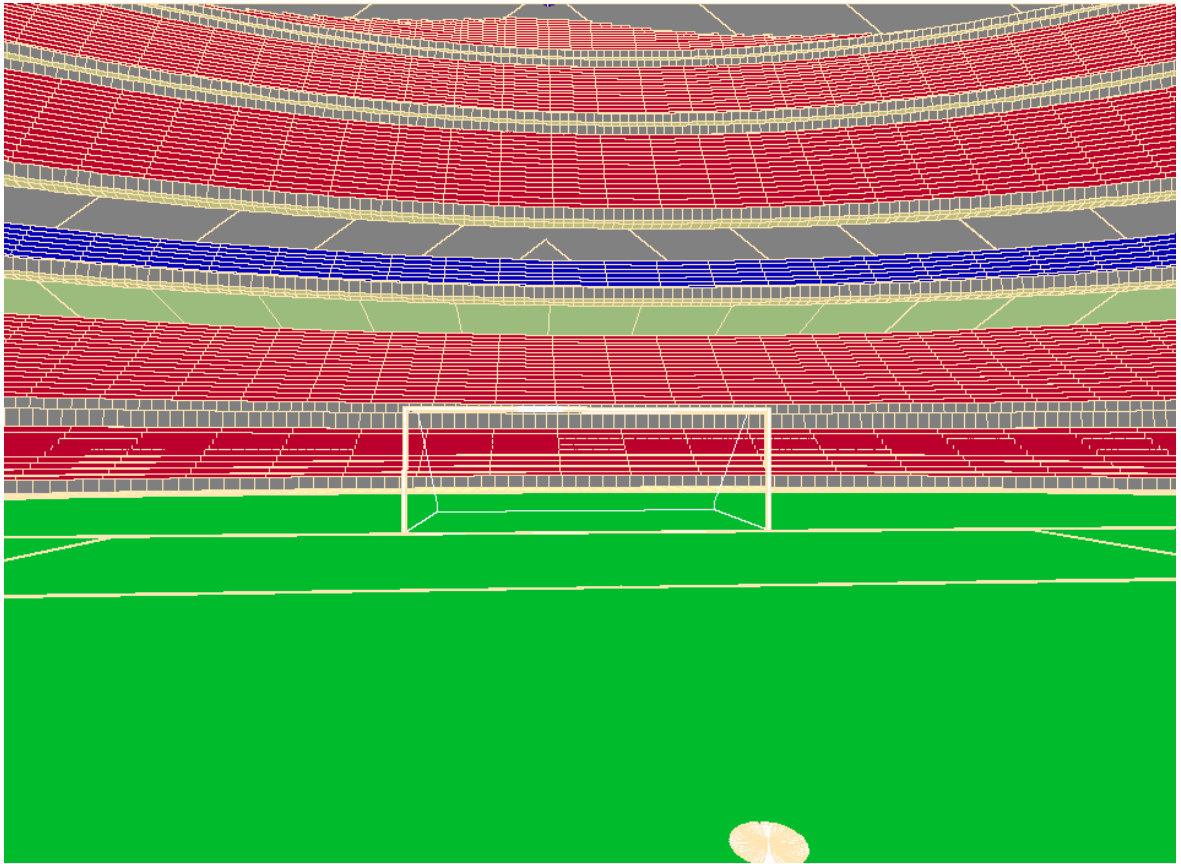


fig. 6.3.39.

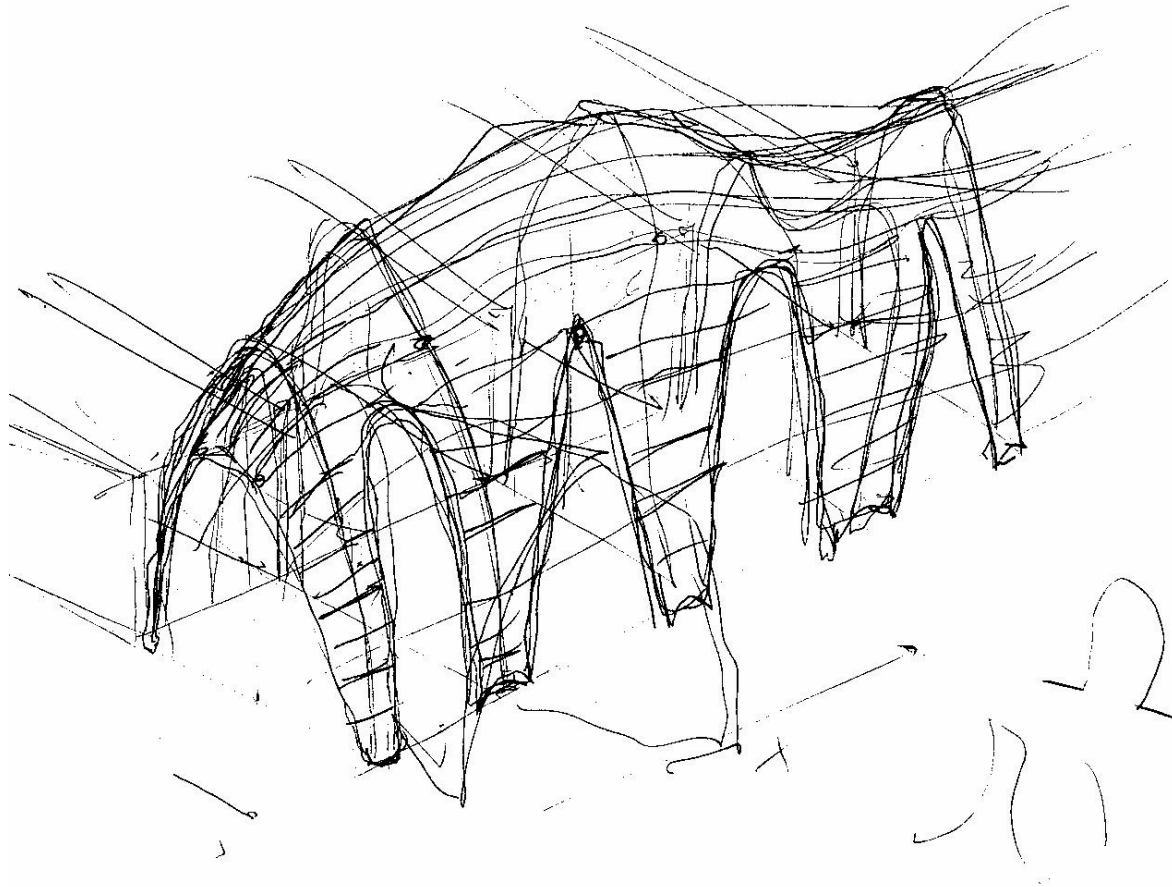
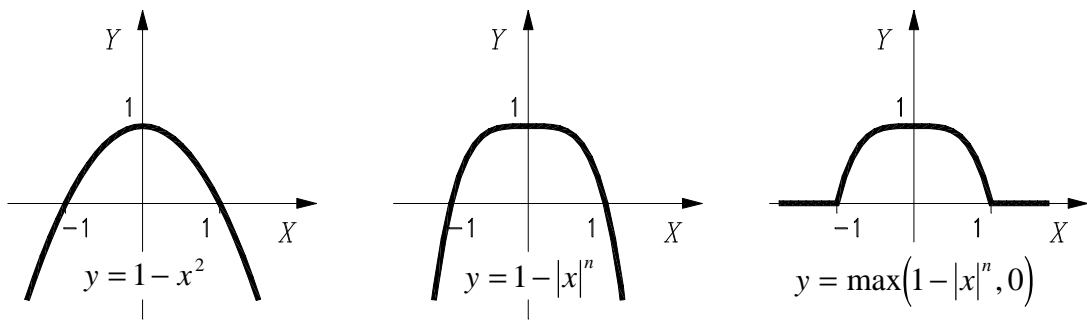


fig. 6.4.1. Esbós de la idea original.

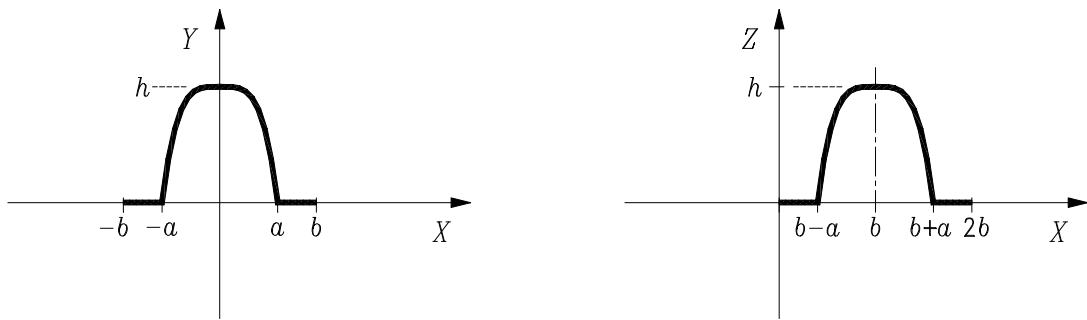
6.5. Figures.



(a) paràbola de partida.

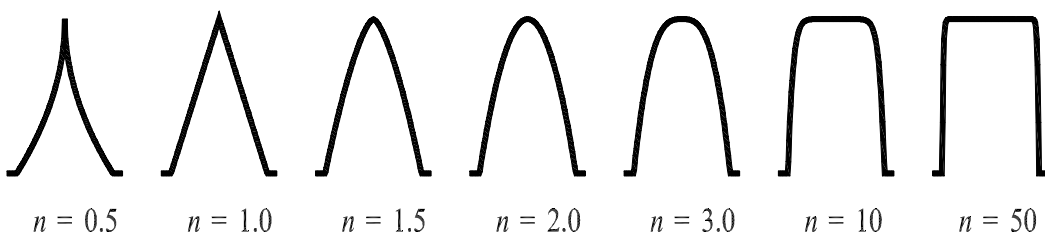
(b) generalització de l'exponent.

(c) truncament inferior.



(d) introducció de paràmetres formals.

(e) primera versió operativa d'element arc.



(f) primera col·lecció d'arcs només variant l'exponent n .

fig. 6.4.2. Primers passos en el disseny d'un element arc regulable.

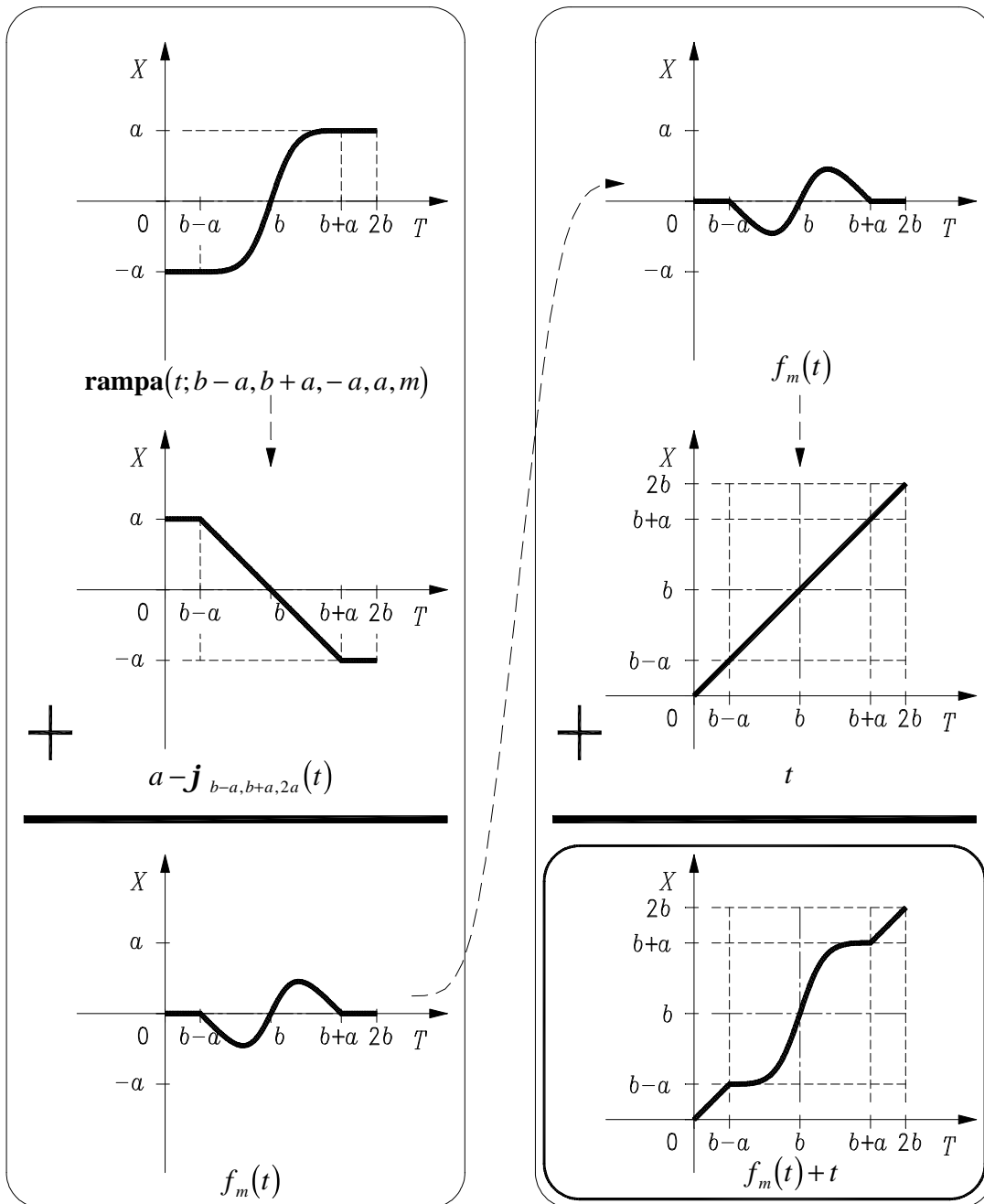


fig. 6.4.3. Procès per parametritzar la component x de l'element arc.

6.5. Figures.

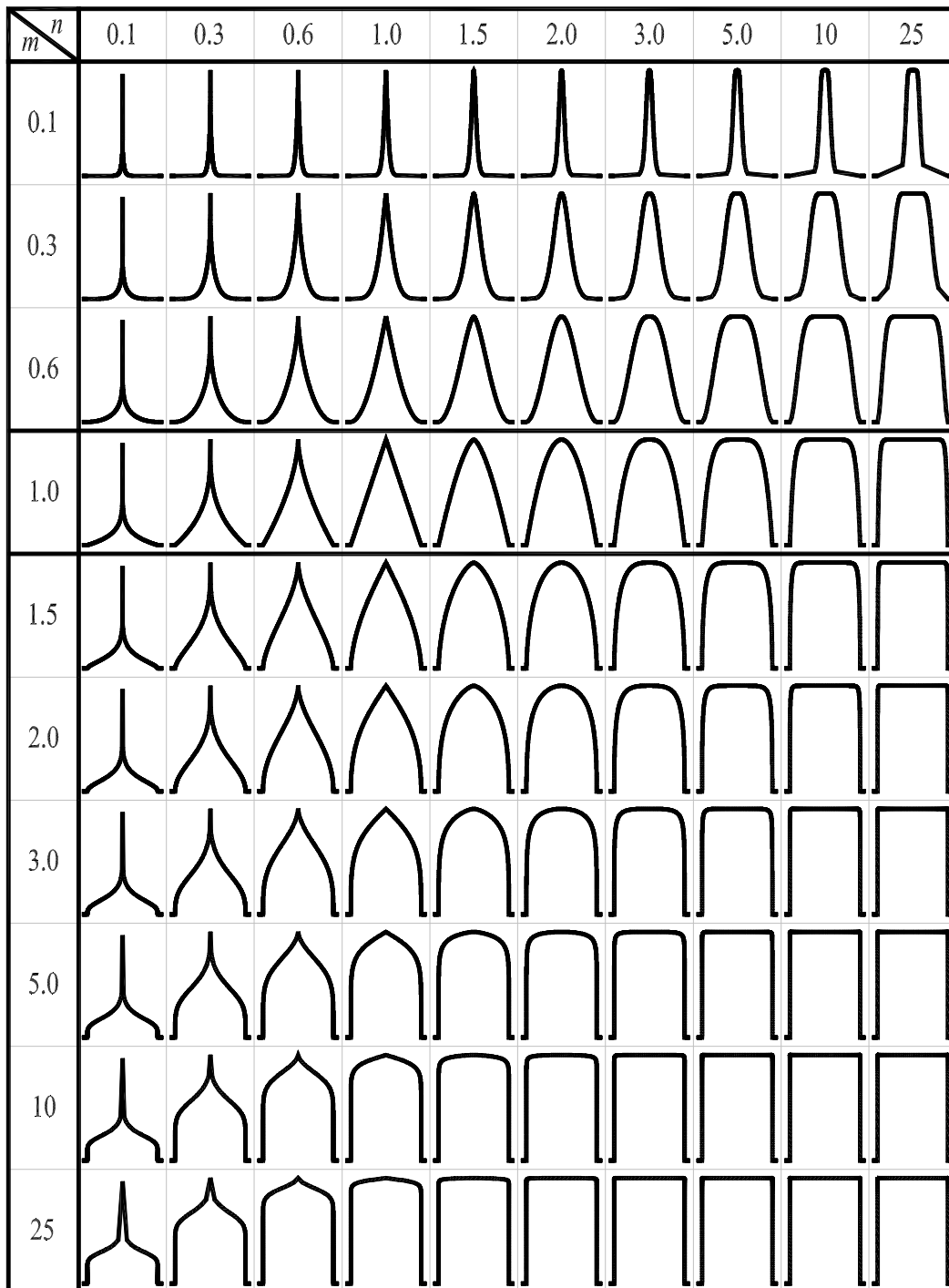
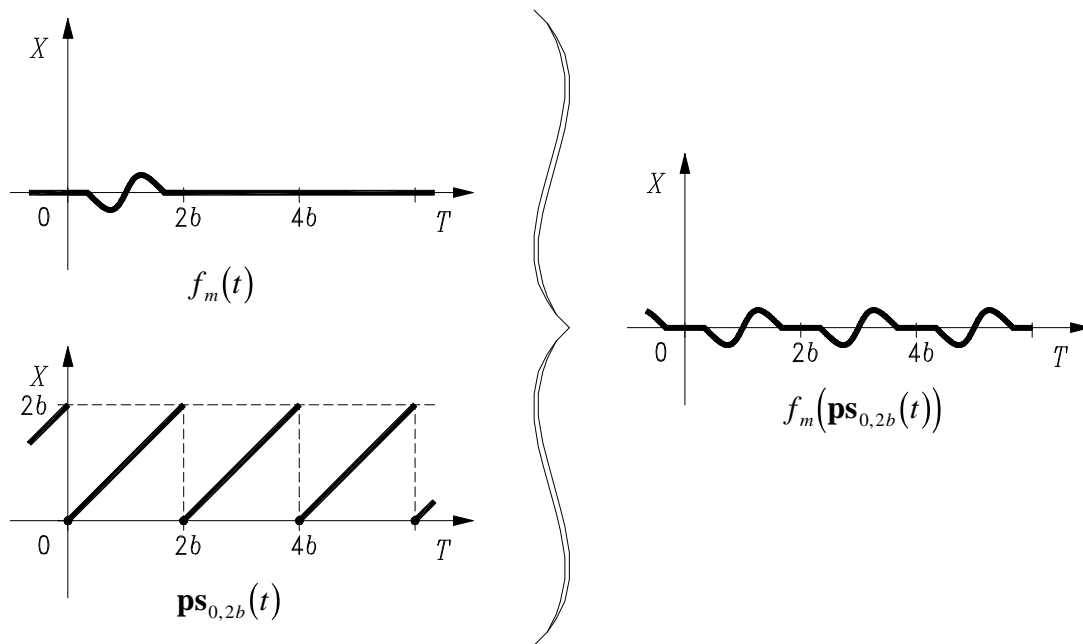
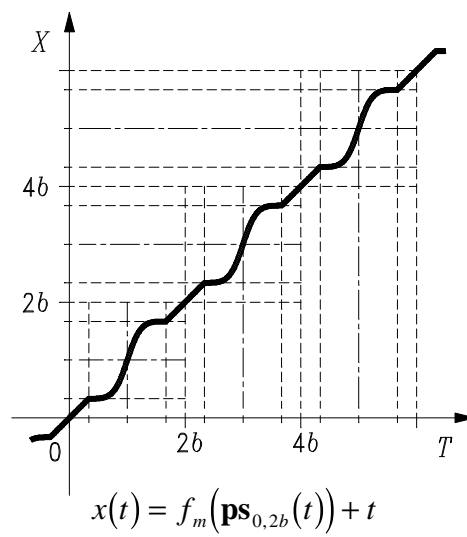


fig. 6.4.4. Catàleg complet d'arcs.



(a) periodificació funcional abans de sumar la identitat.



(b) addició de la identitat a la part periodificada.

fig. 6.4.5. Procès per periodificar la component $x(t)$.

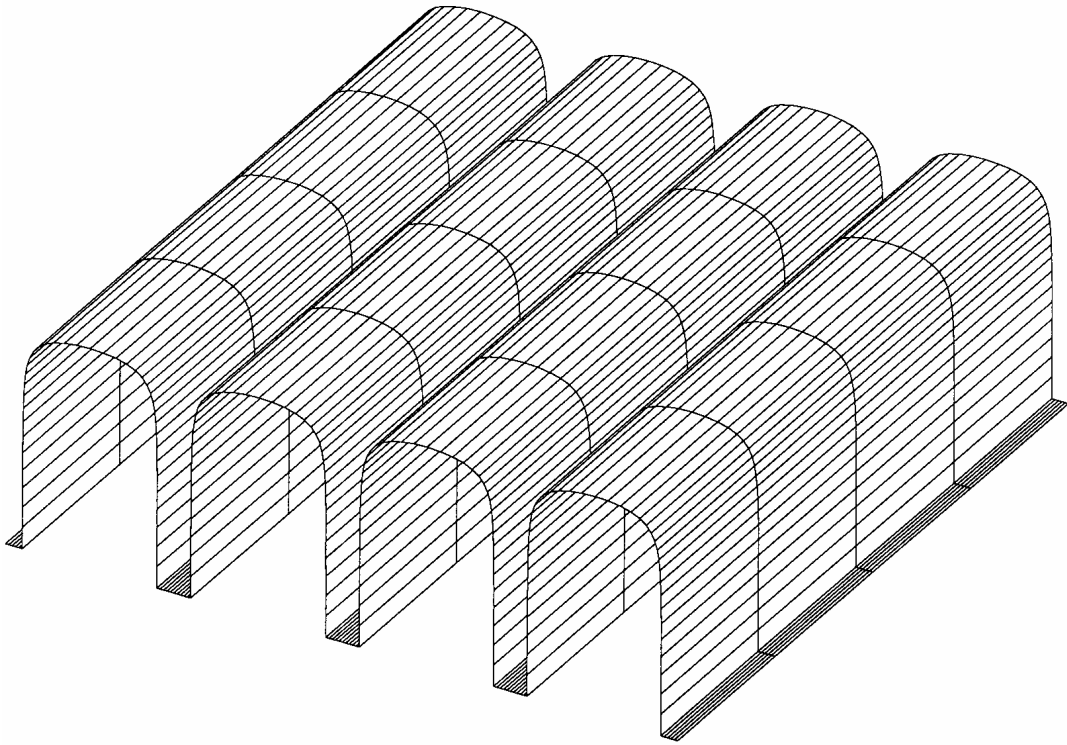


fig. 6.4.6. Exemple d'extrusió d'una filera d'arcs.

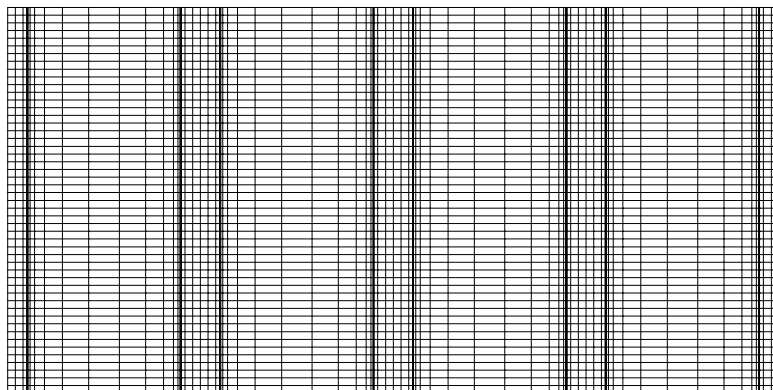
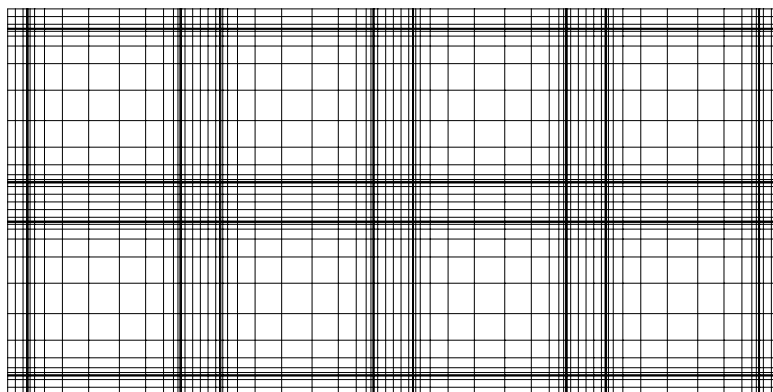


fig. 6.4.7. Alteració de la quadrícula original al produir una fila de galeries.



fid. 6.4.8. L'anterior alteració quan es produeixen dues fileres que s'intersequen.

6.5. Figures.

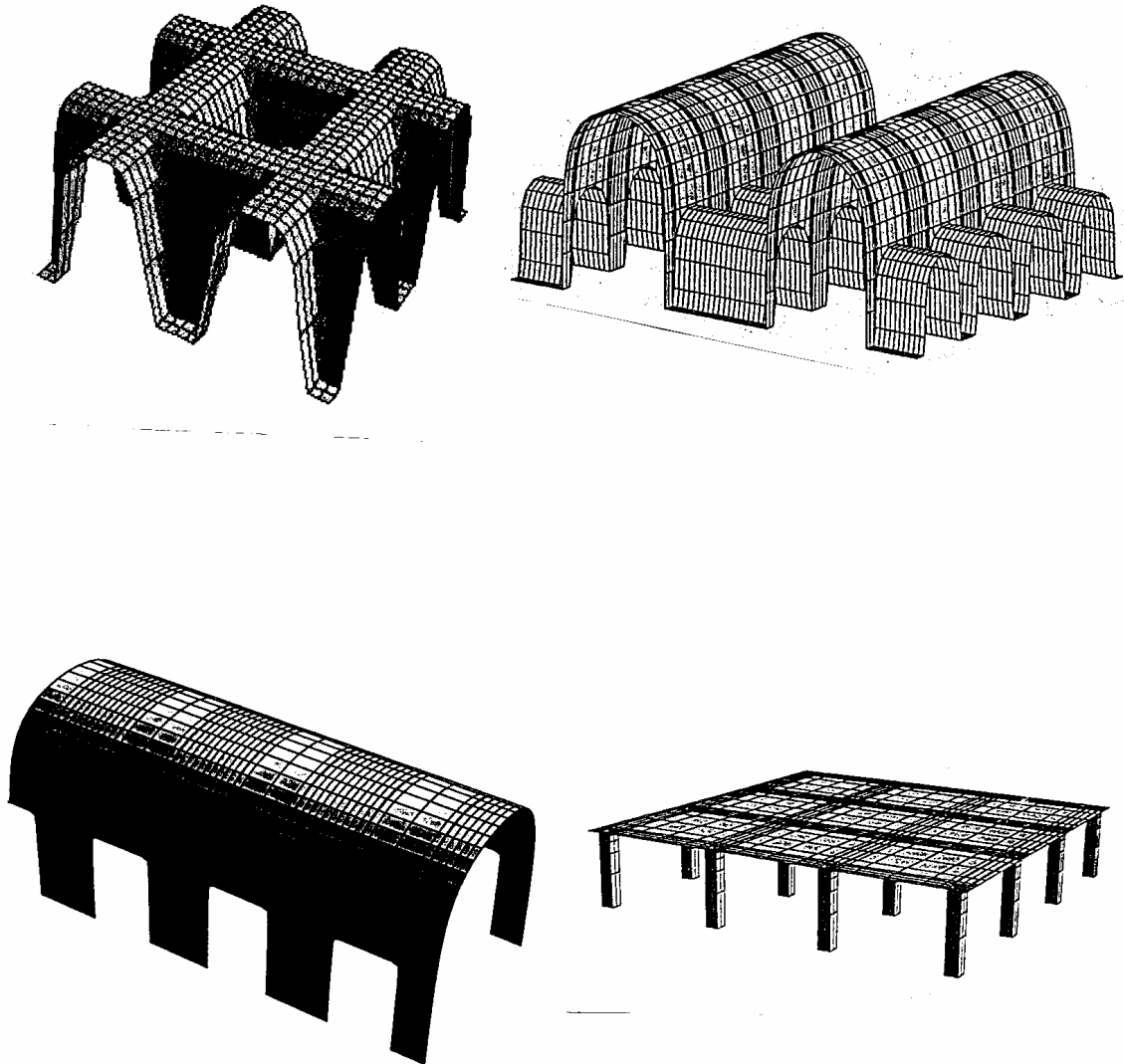


fig. 6.4.9. Algunes tipologies obtenibles per encreuament de galeries.

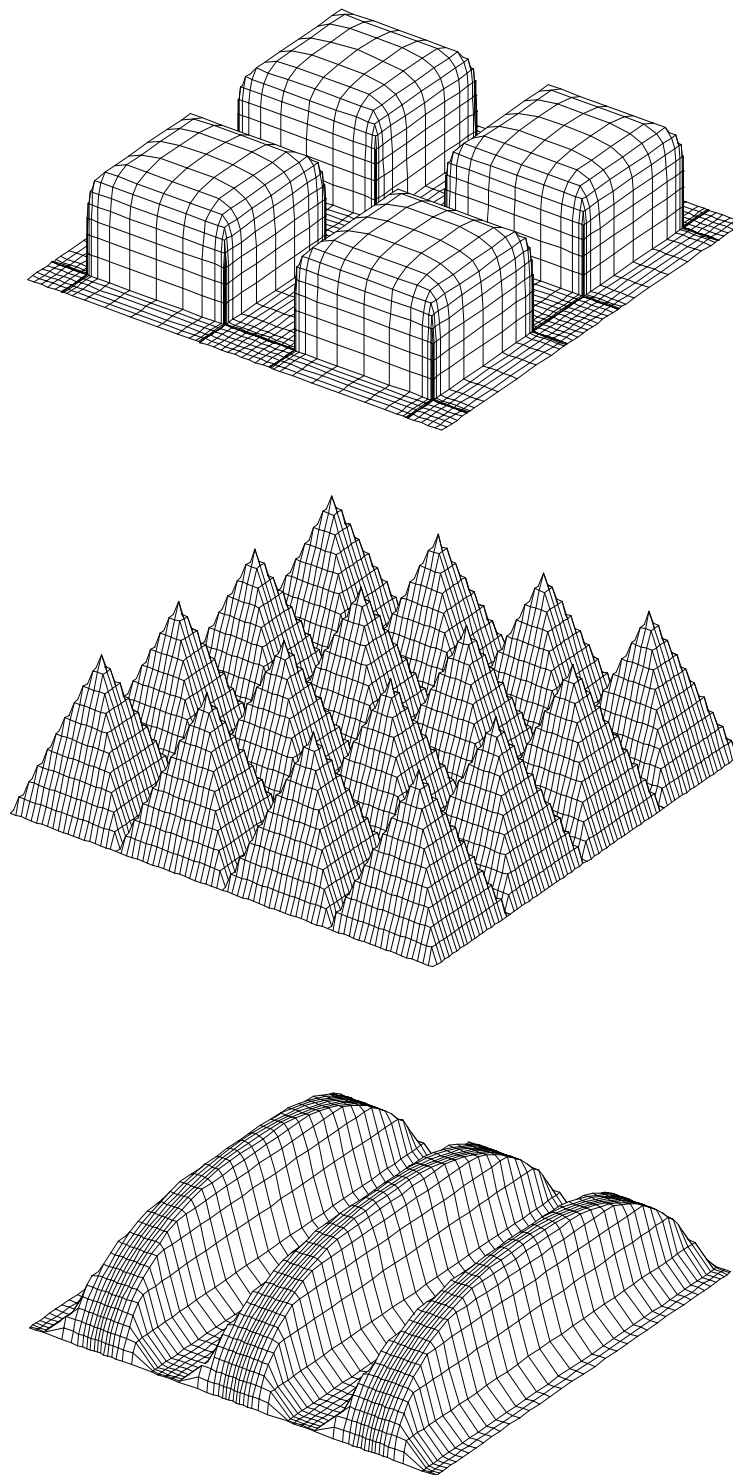


fig. 6.4.10. Algunes tipologies aconseguibles al encreuar usant el *min*.

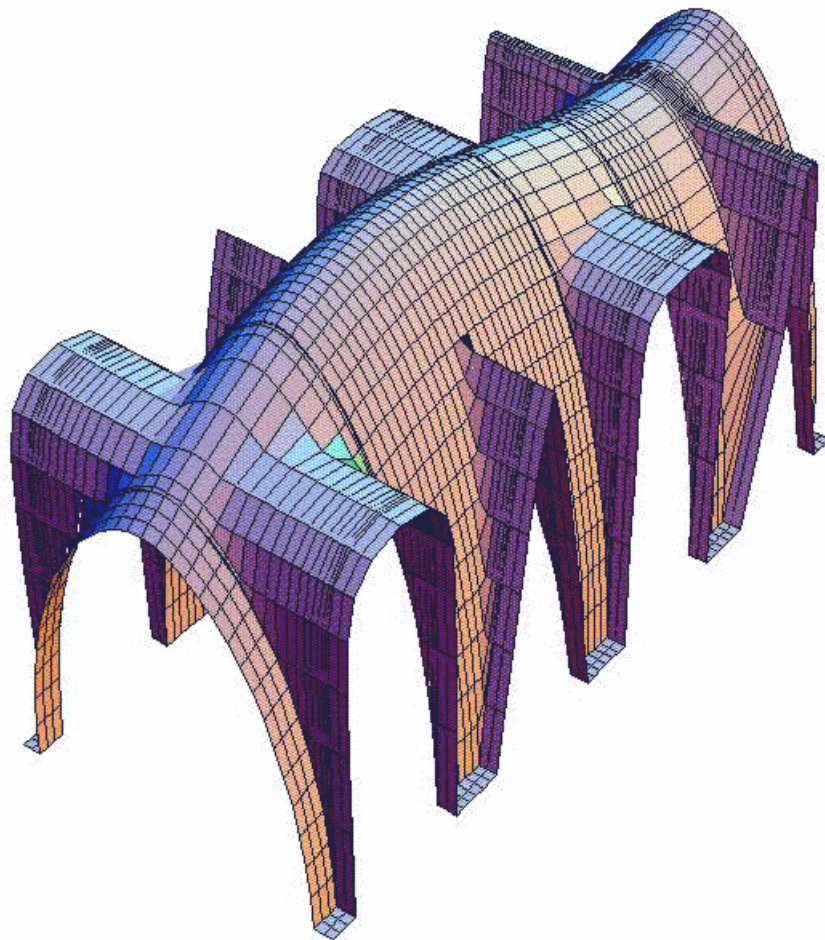


fig. 6.4.11. Model inicial de galeria, sense botigues ni arrugues.

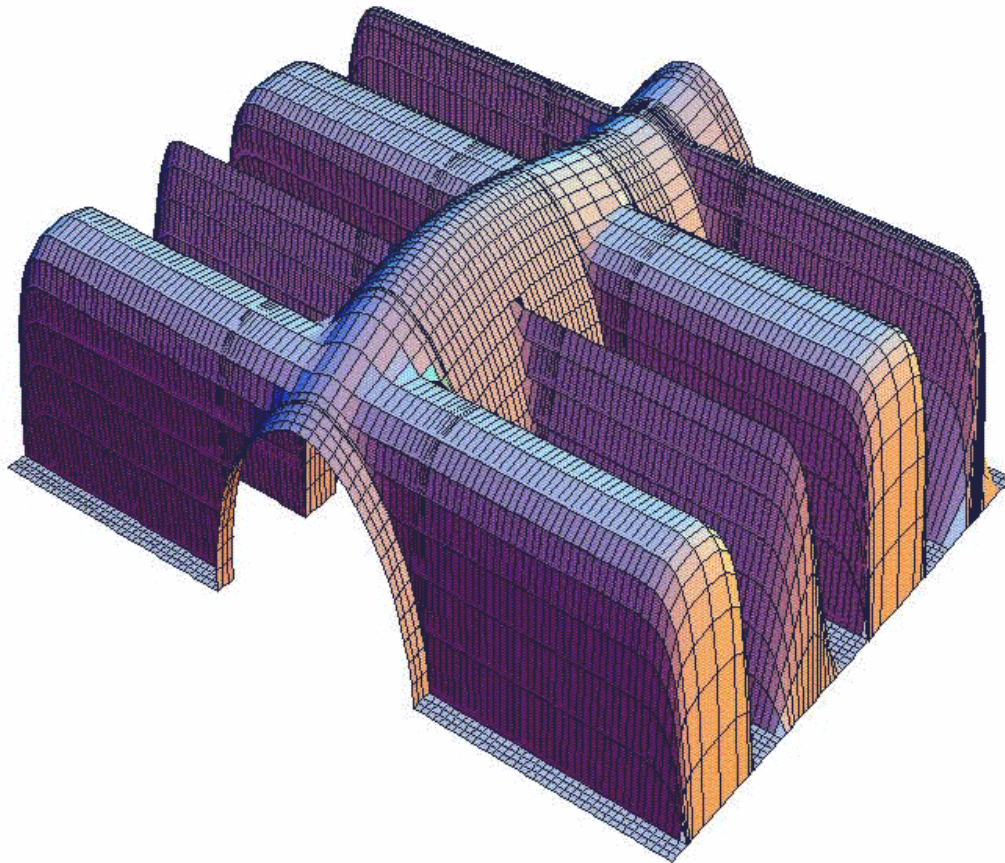


fig. 6.4.12. Model de galeria amb botigues però sense arrugar.

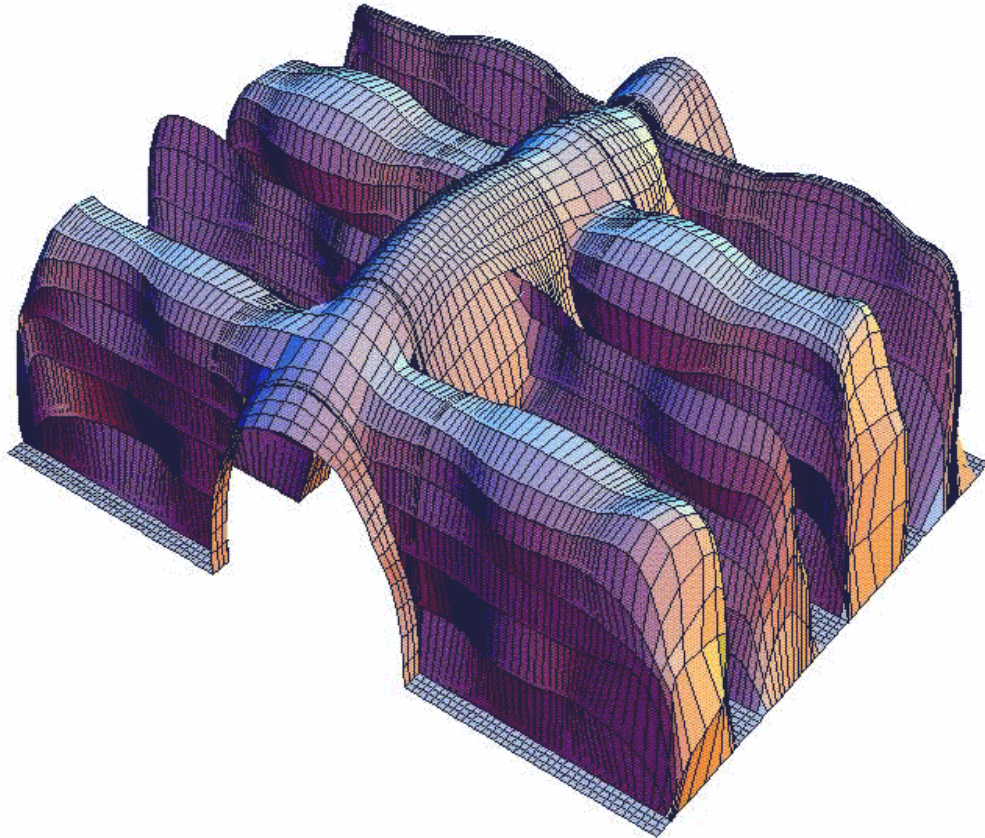


fig. 6.4.13. Model final de galeria amb botigues per la reforma del Gran Bazaar.

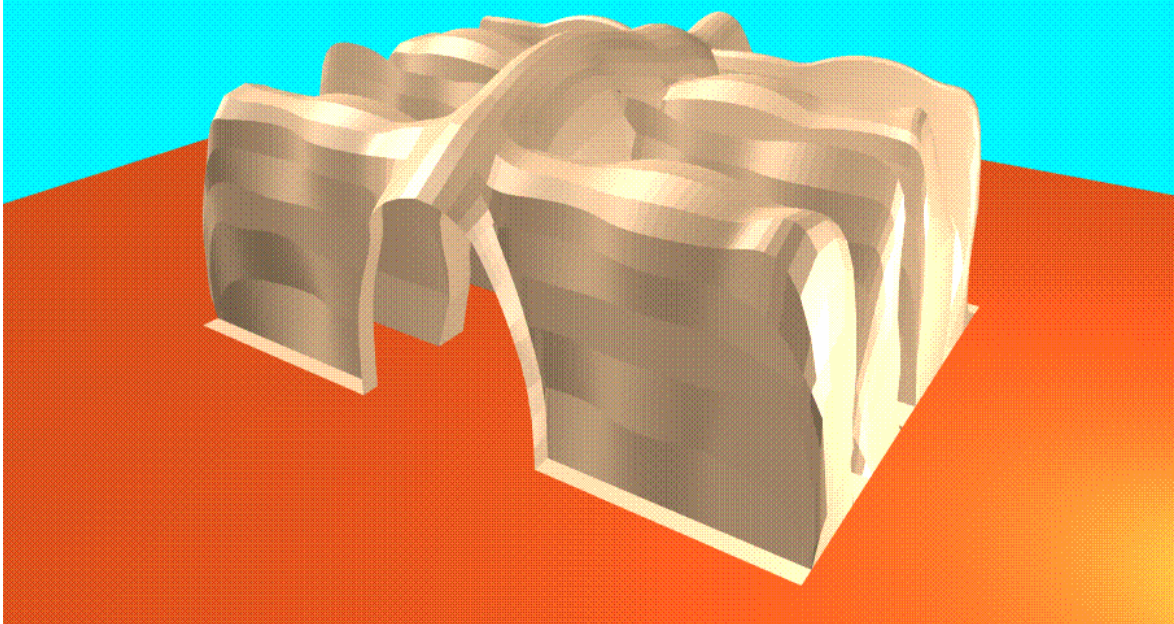


fig. 6.4.14.

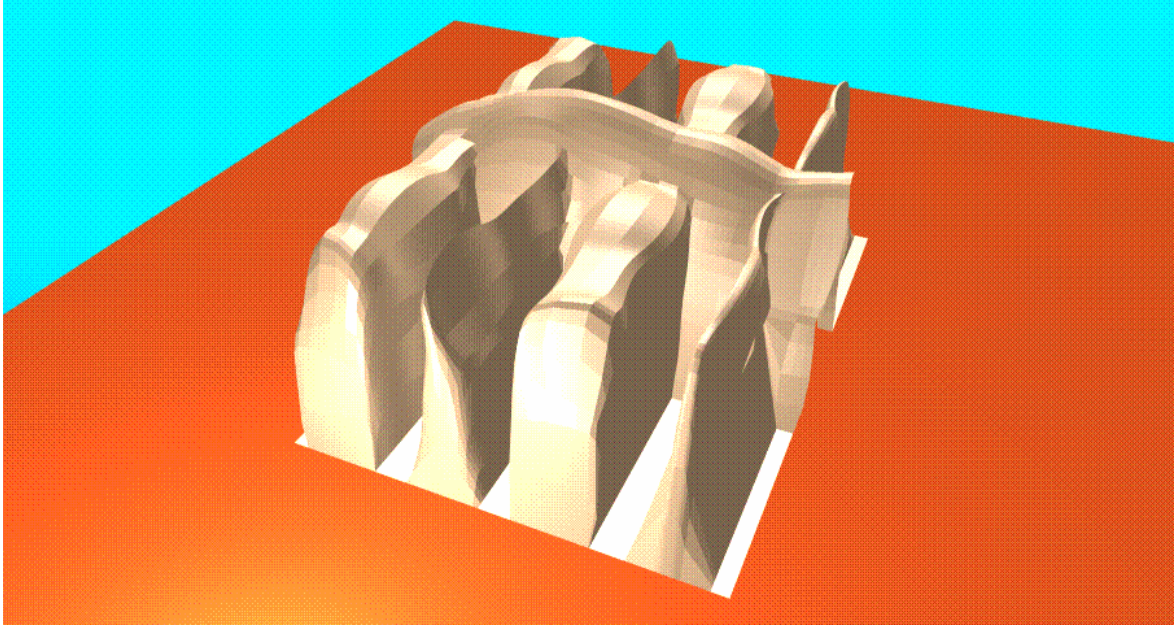


fig. 6.4.15.

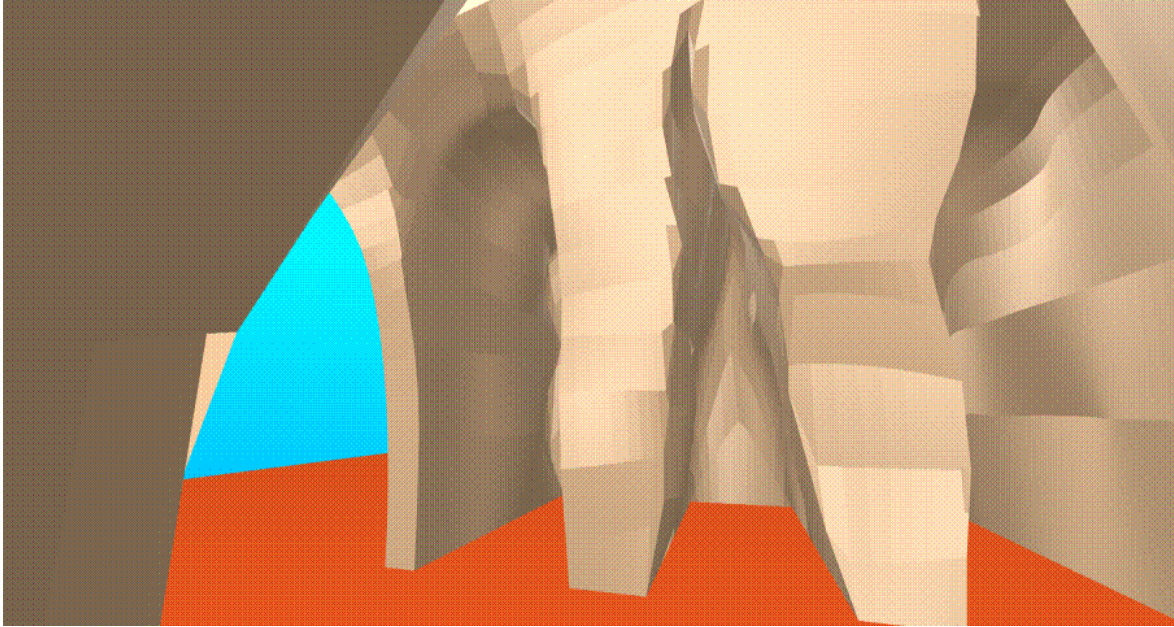


fig. 6.4.16.

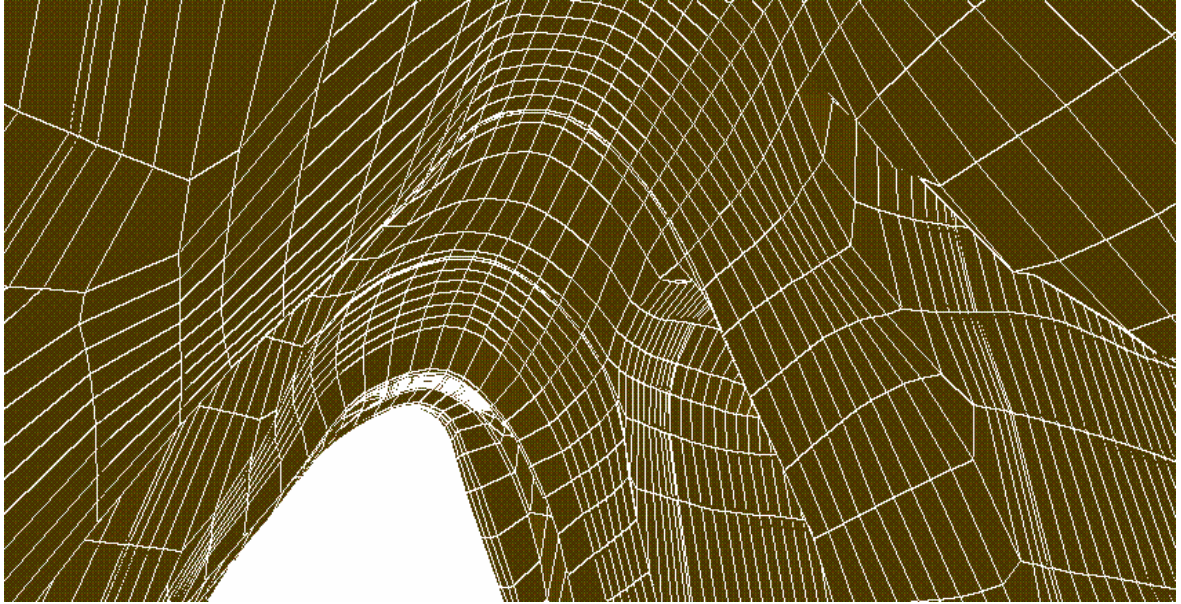


fig. 6.4.17.

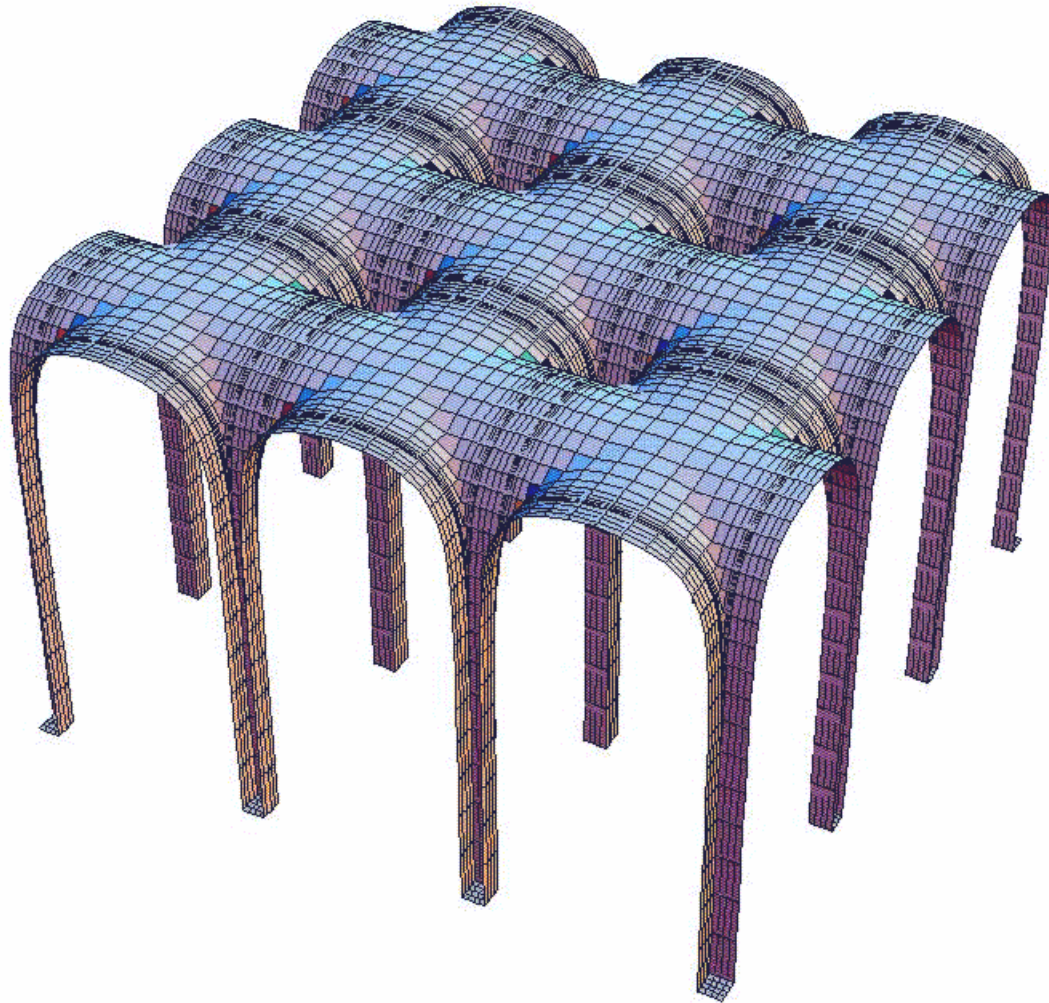


fig. 6.4.18. Sala rectangular amb columnes, usant encreuament amb el *max*.

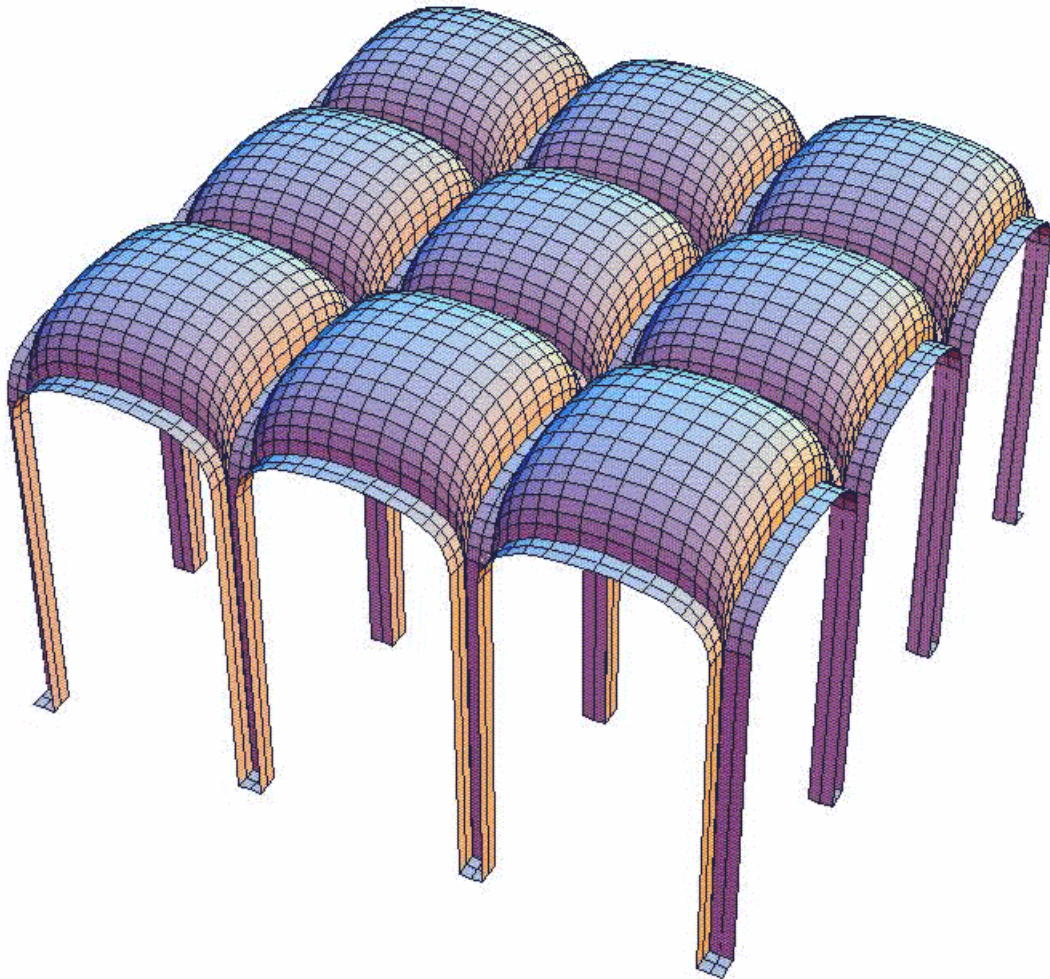


fig. 6.4.19. Versió de la sala rectangular, usant la *suma* per encreuar.

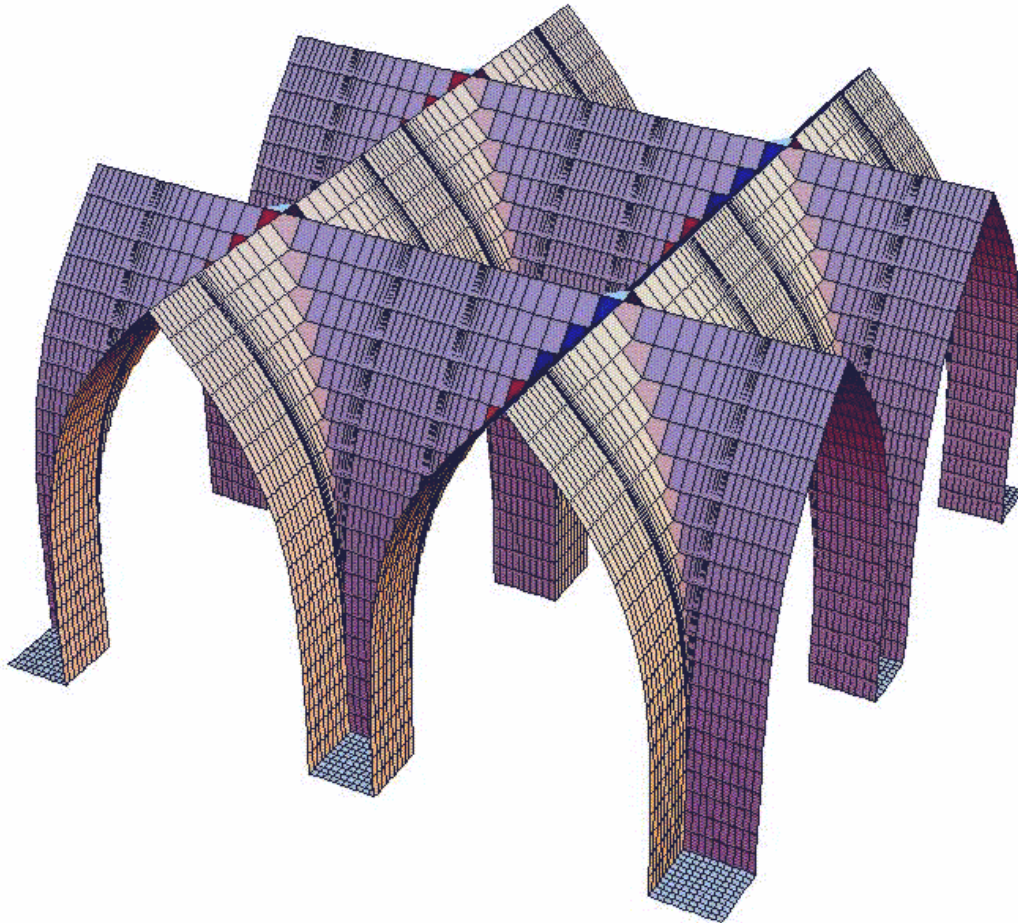


fig. 6.4.20. Prototipus que suggereix la possibilitat de reproduir l'estil gòtic.

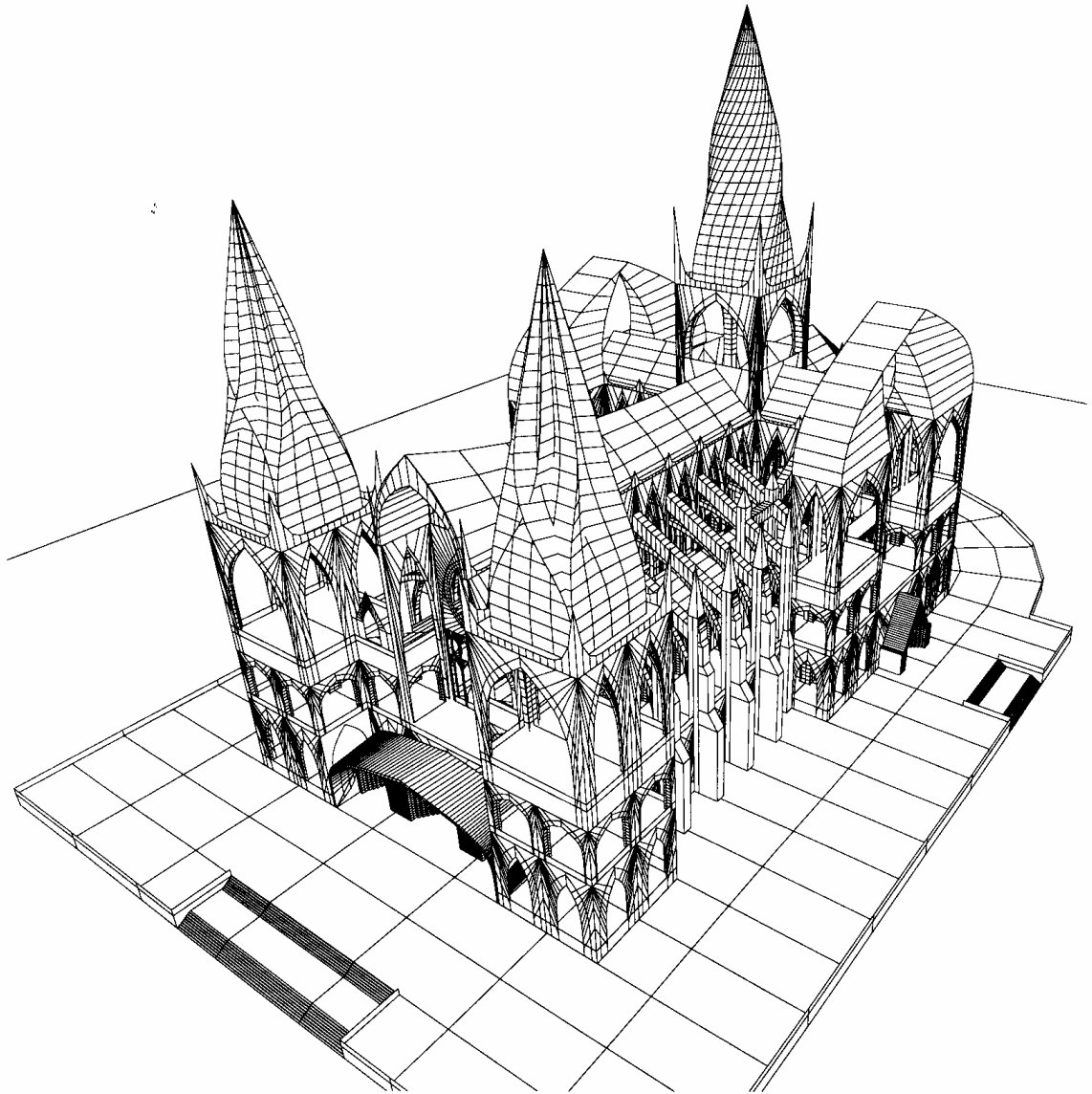


fig. 6.4.21. Vista general anterior.

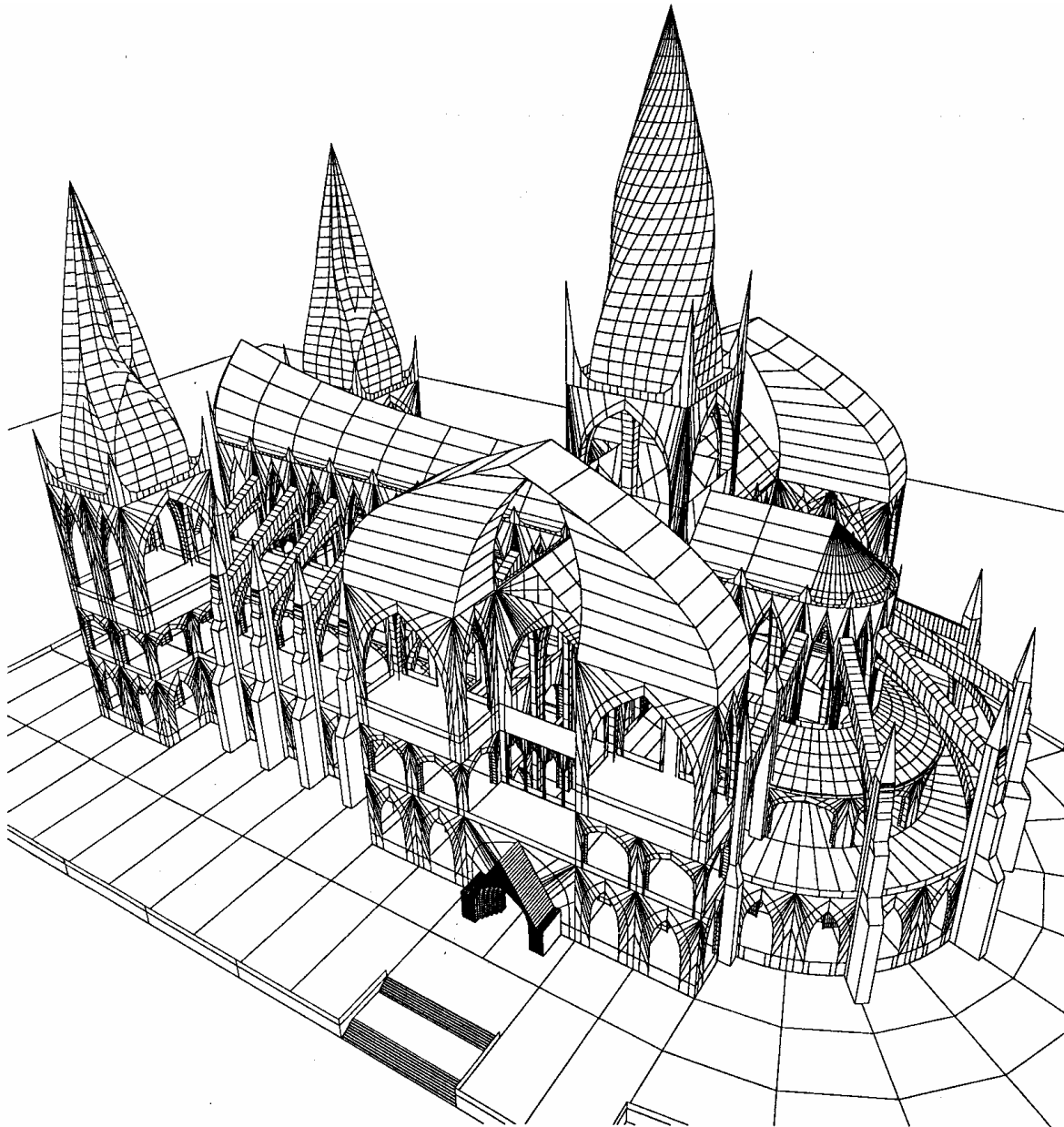


fig. 6.4.22. Vista general posterior.

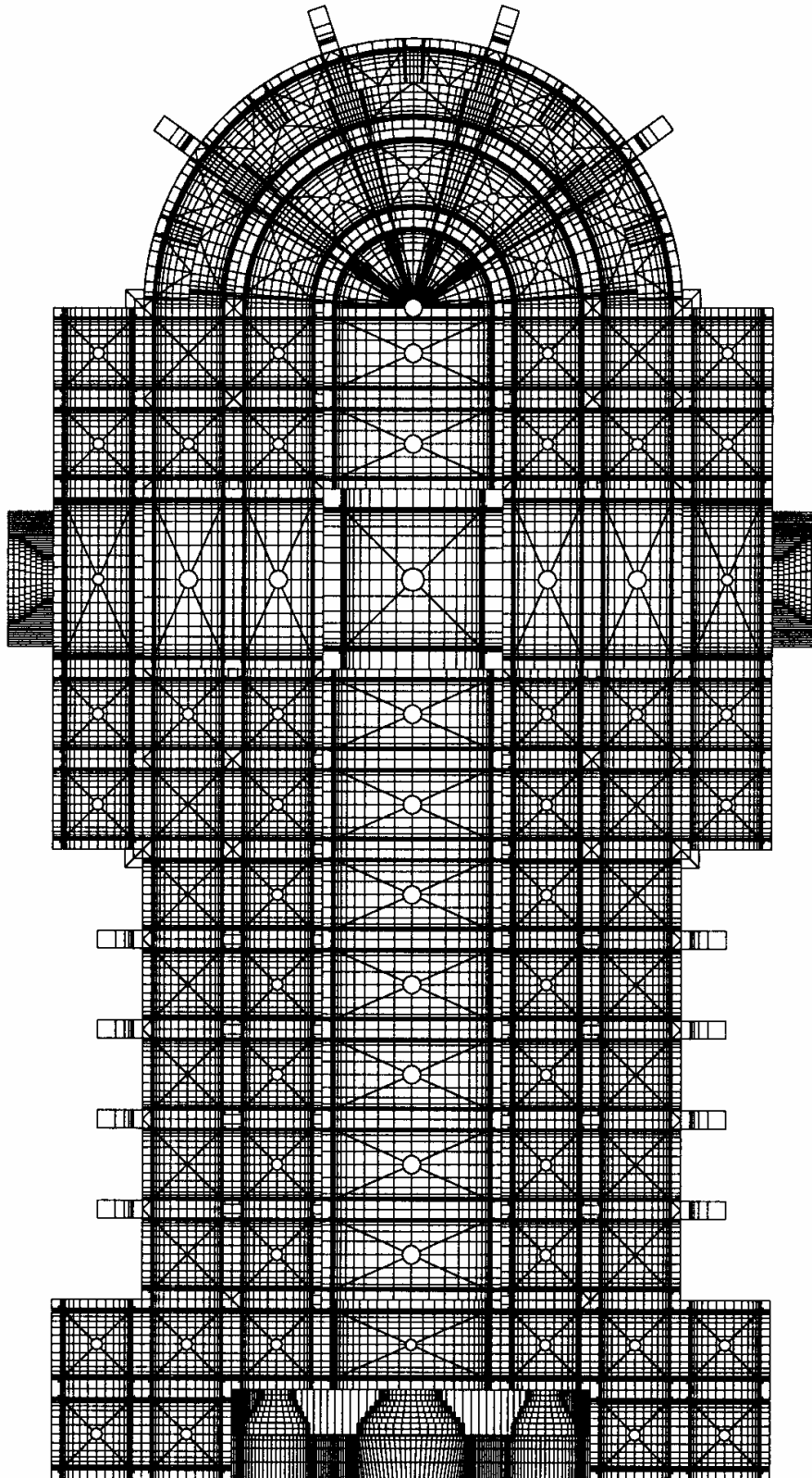


fig. 6.4.23. Planta.

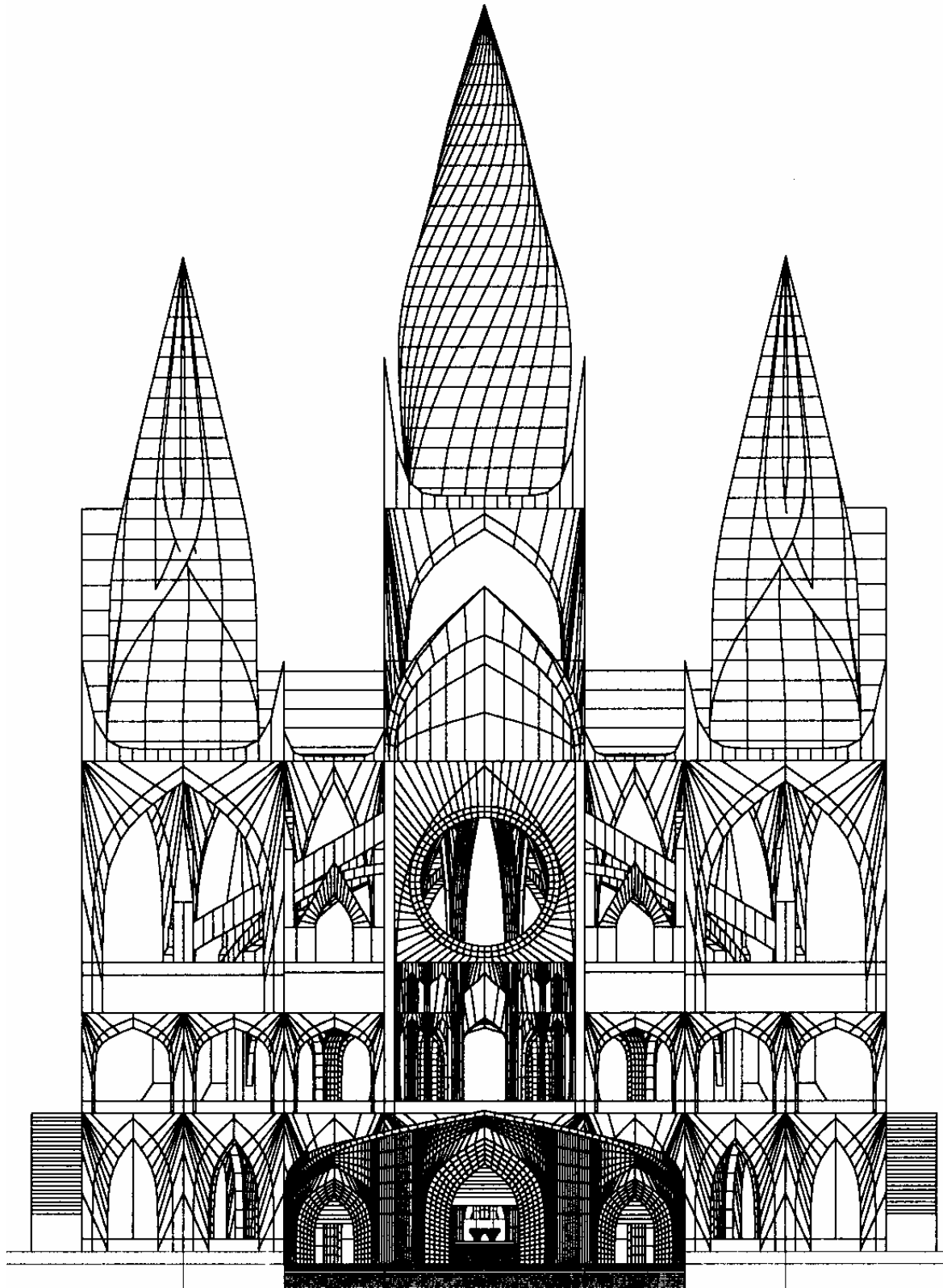


fig. 6.4.24. Alçat de la façana principal.

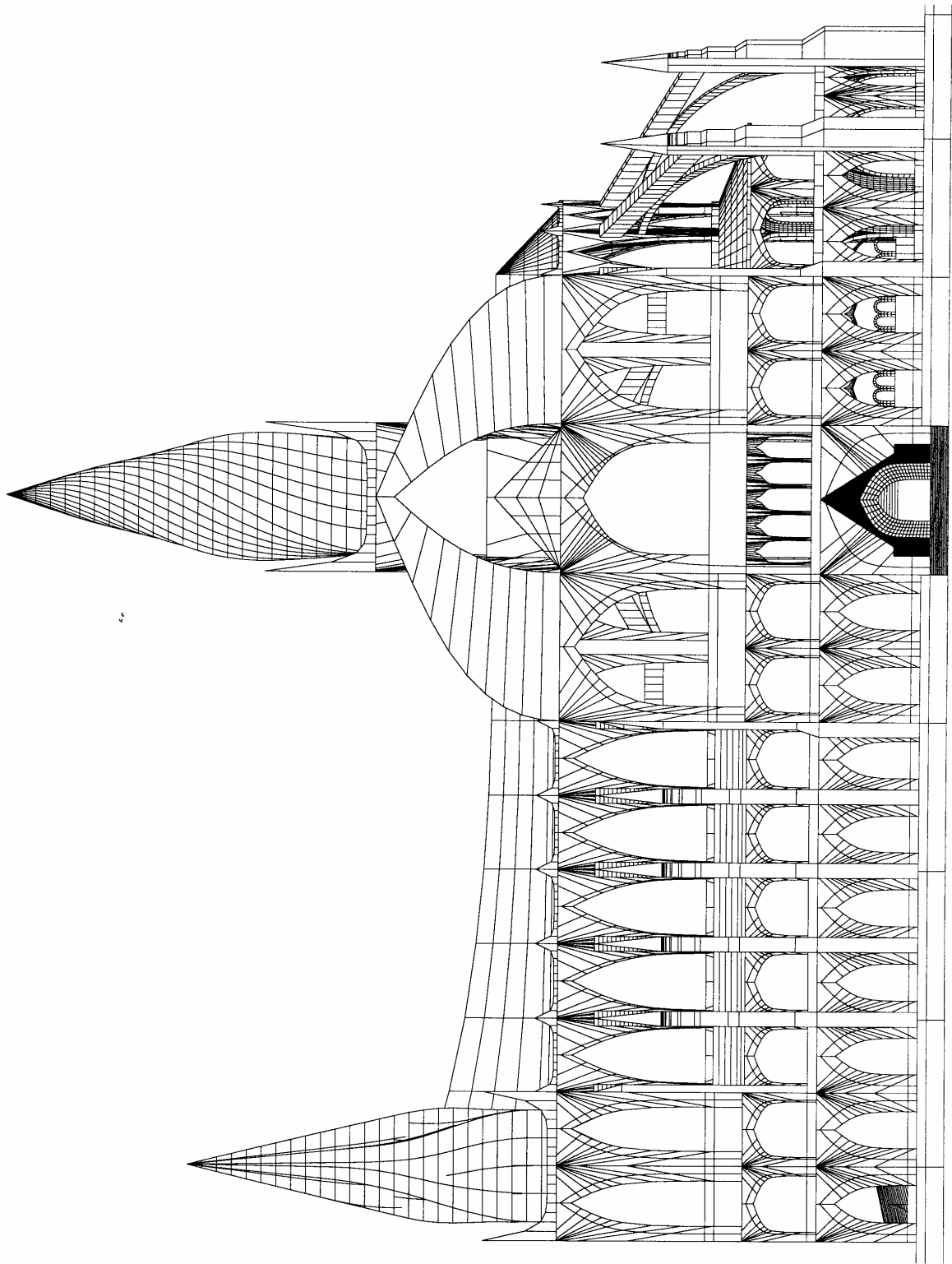


fig. 6.4.25. Alçat de la façana lateral.

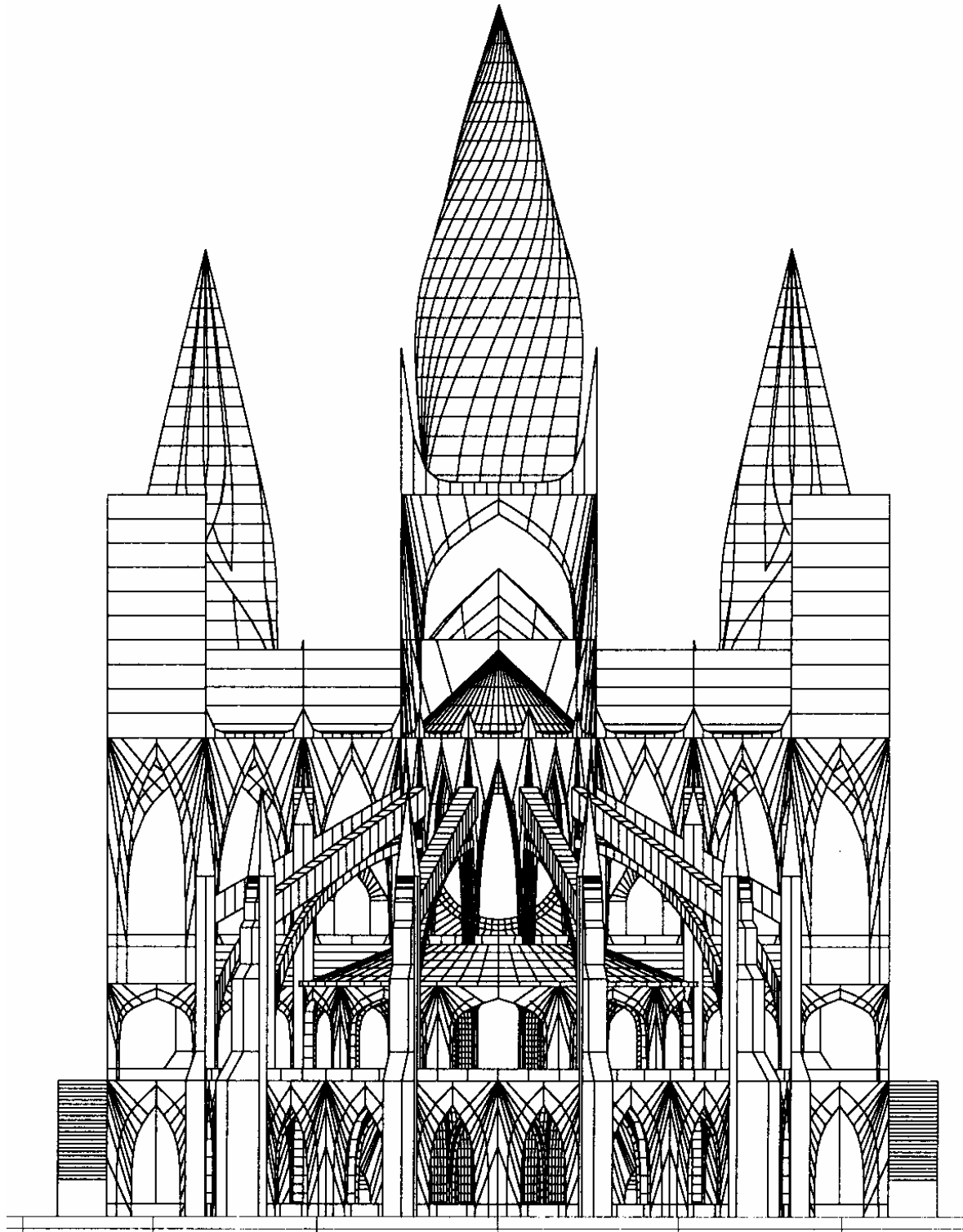


fig. 6.4.26. Alçat posterior.

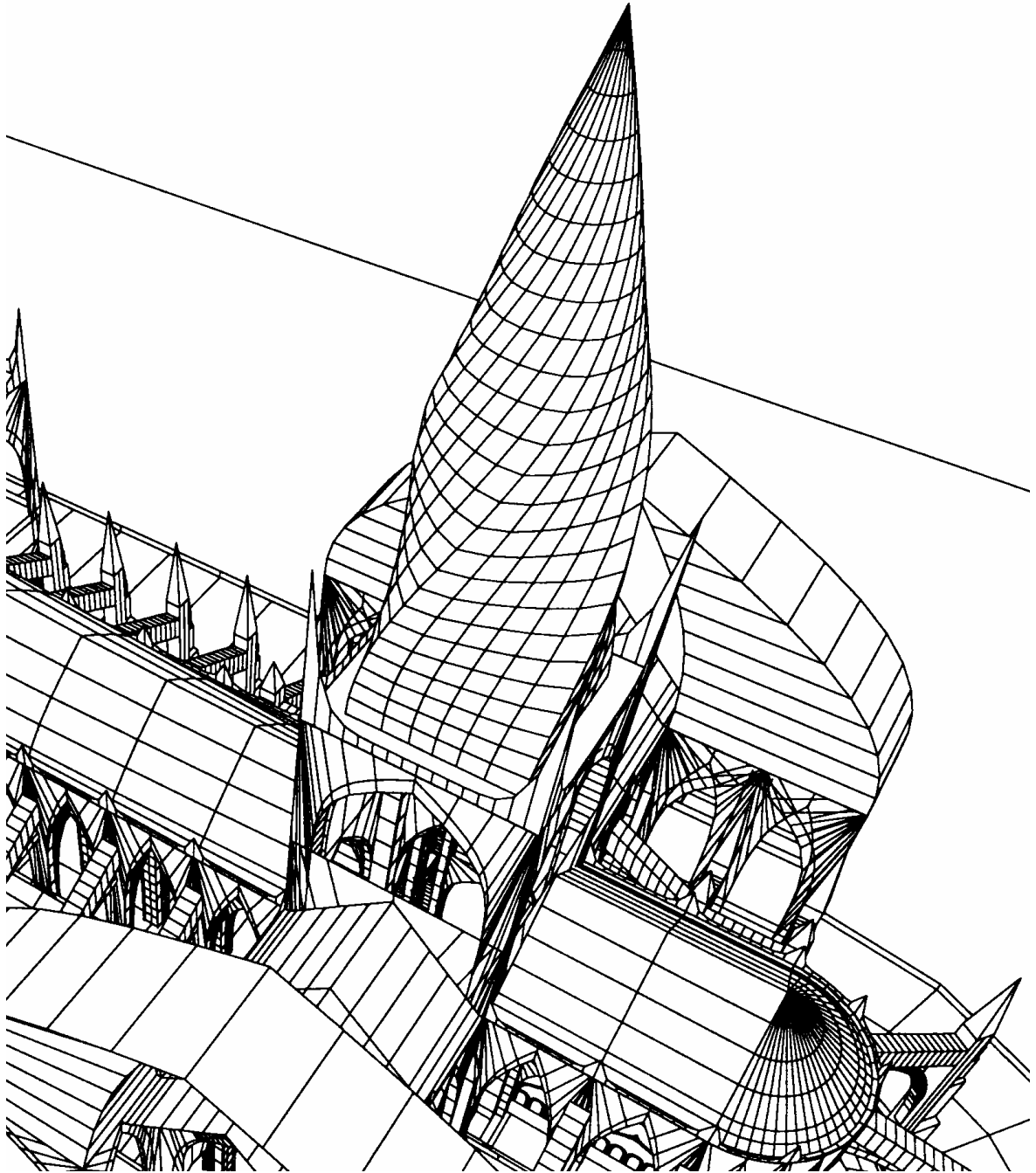


fig. 6.4.27. Vista del cimbori.

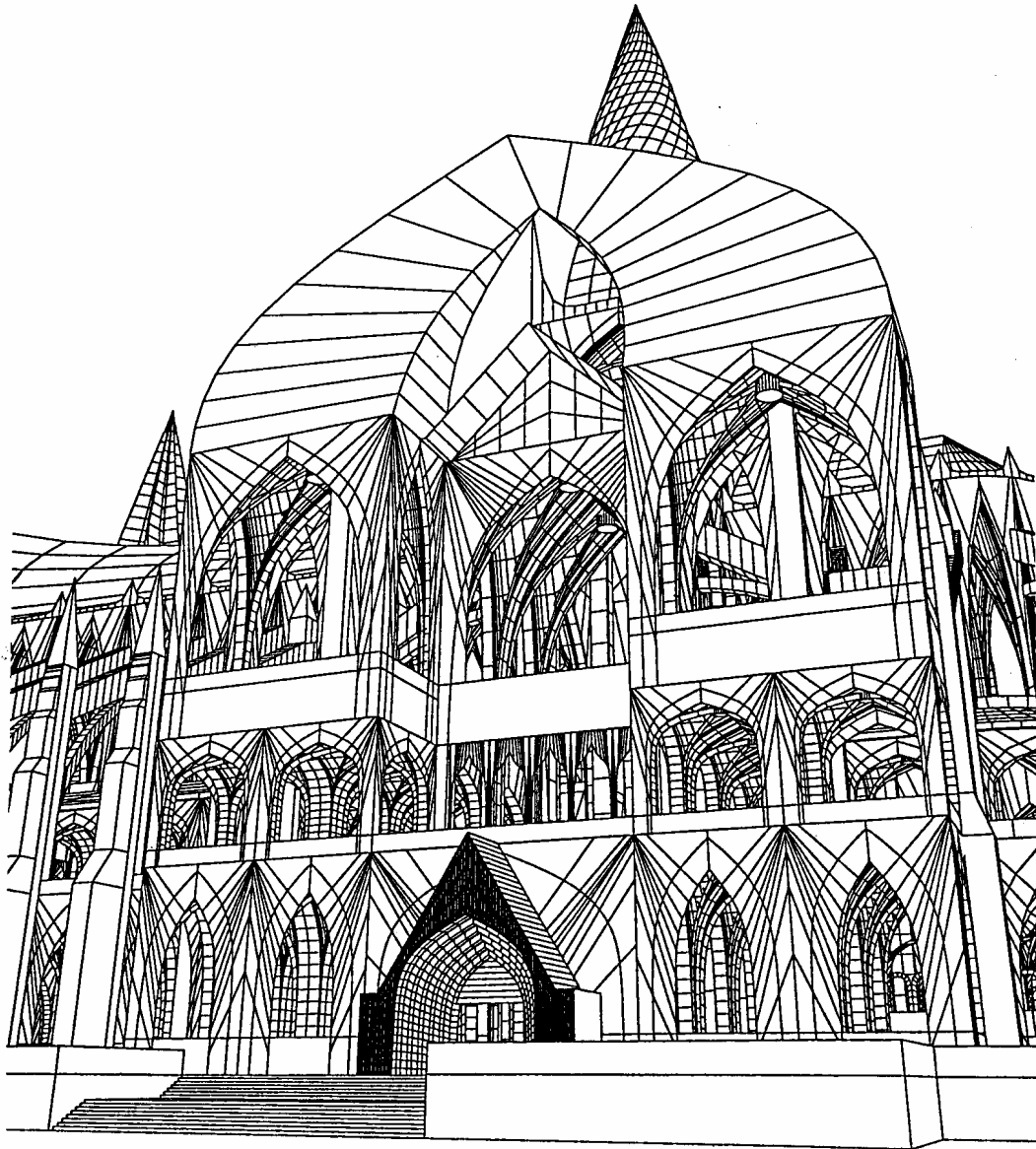


fig. 6.4.28. Torres i pinacles de la façana lateral.

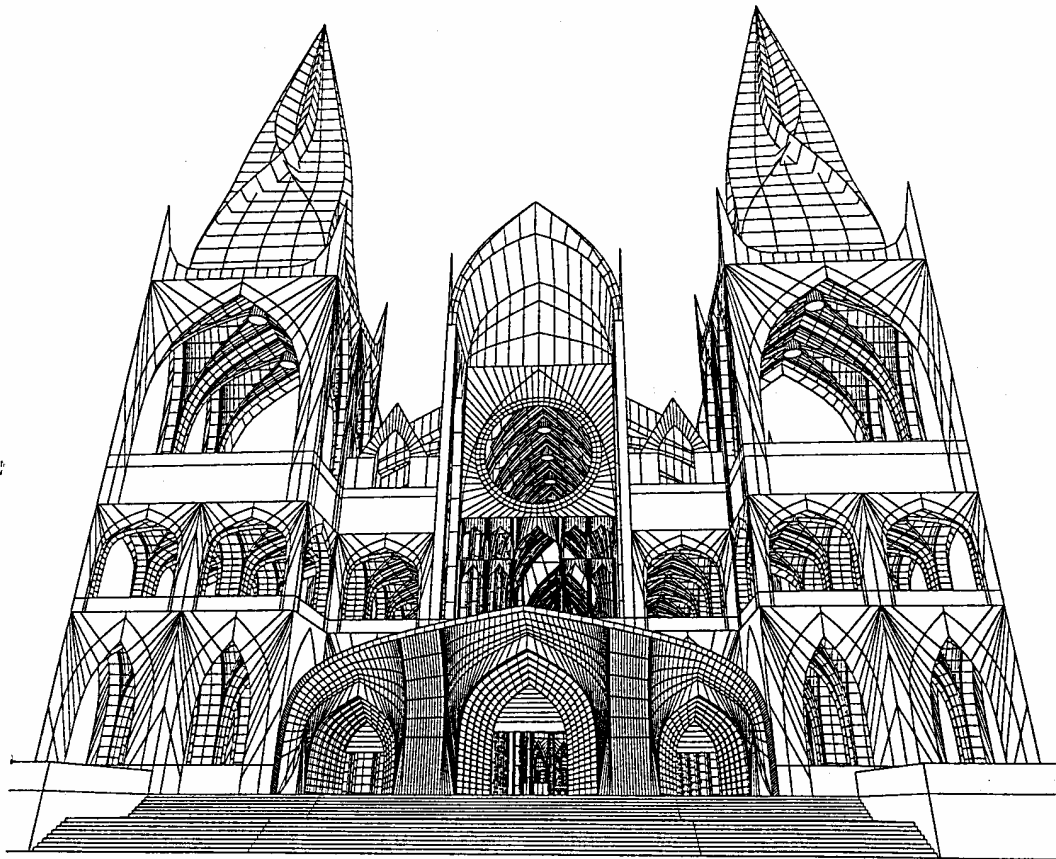


fig. 6.4.29. Torres i pinacles de la façana principal.

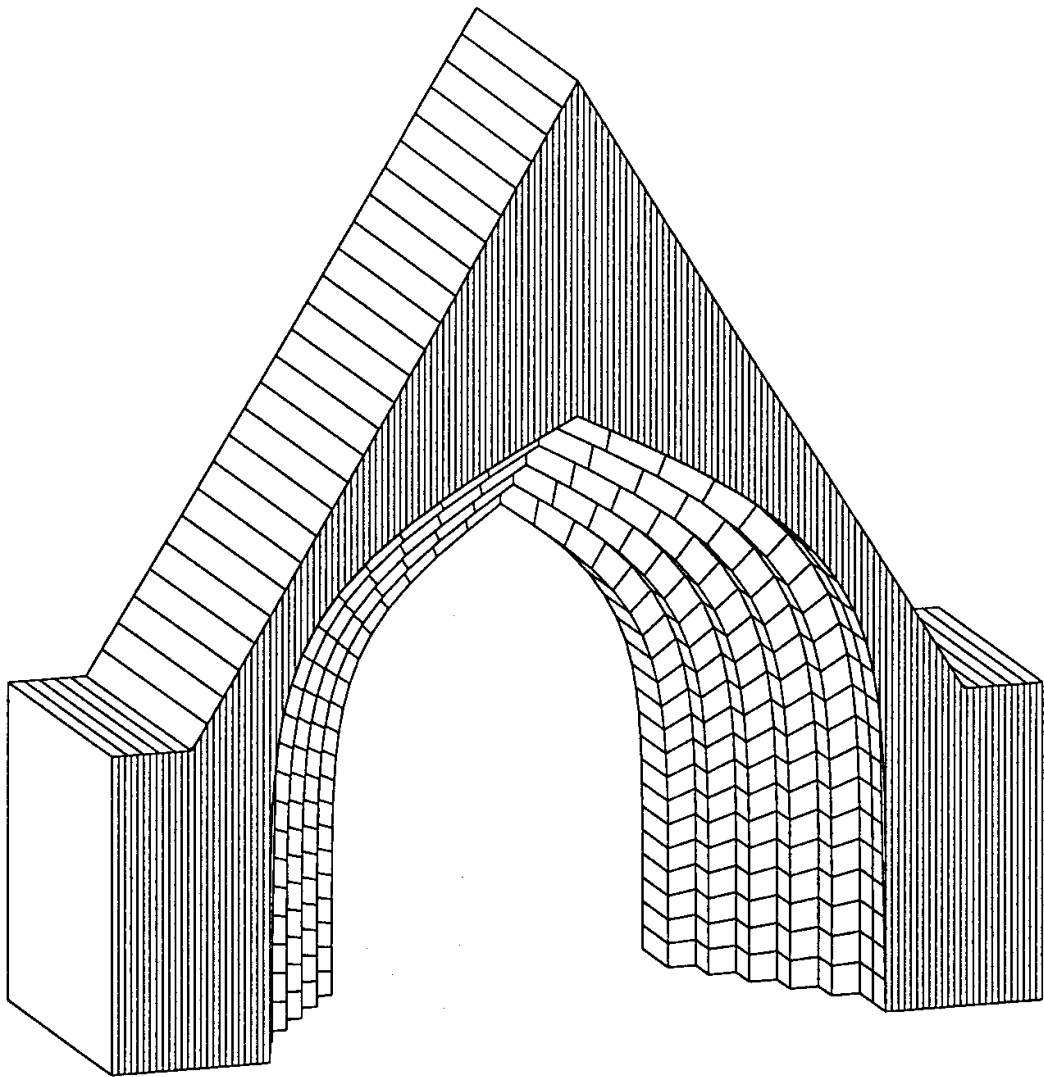


fig. 6.4.30. Portal de la façana lateral.

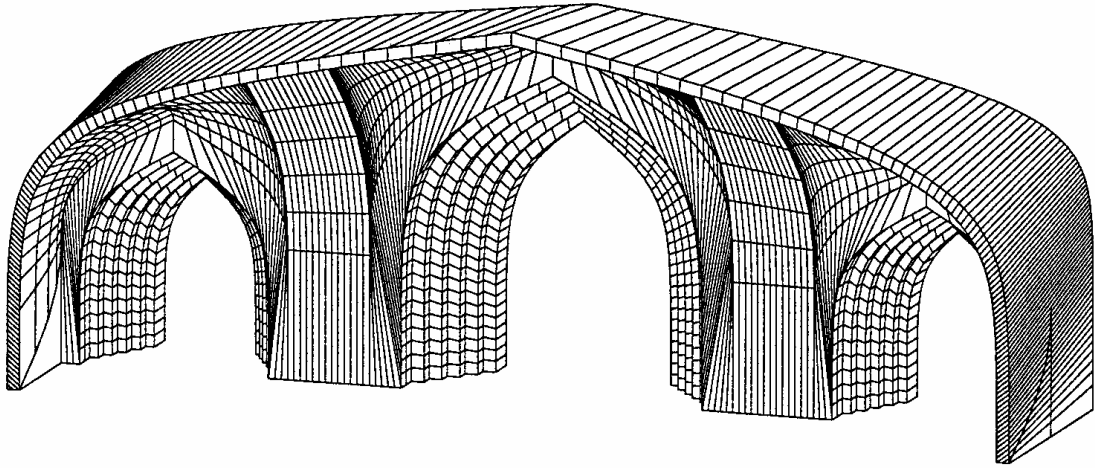


fig. 6.4.31. Portalada de la façana principal.

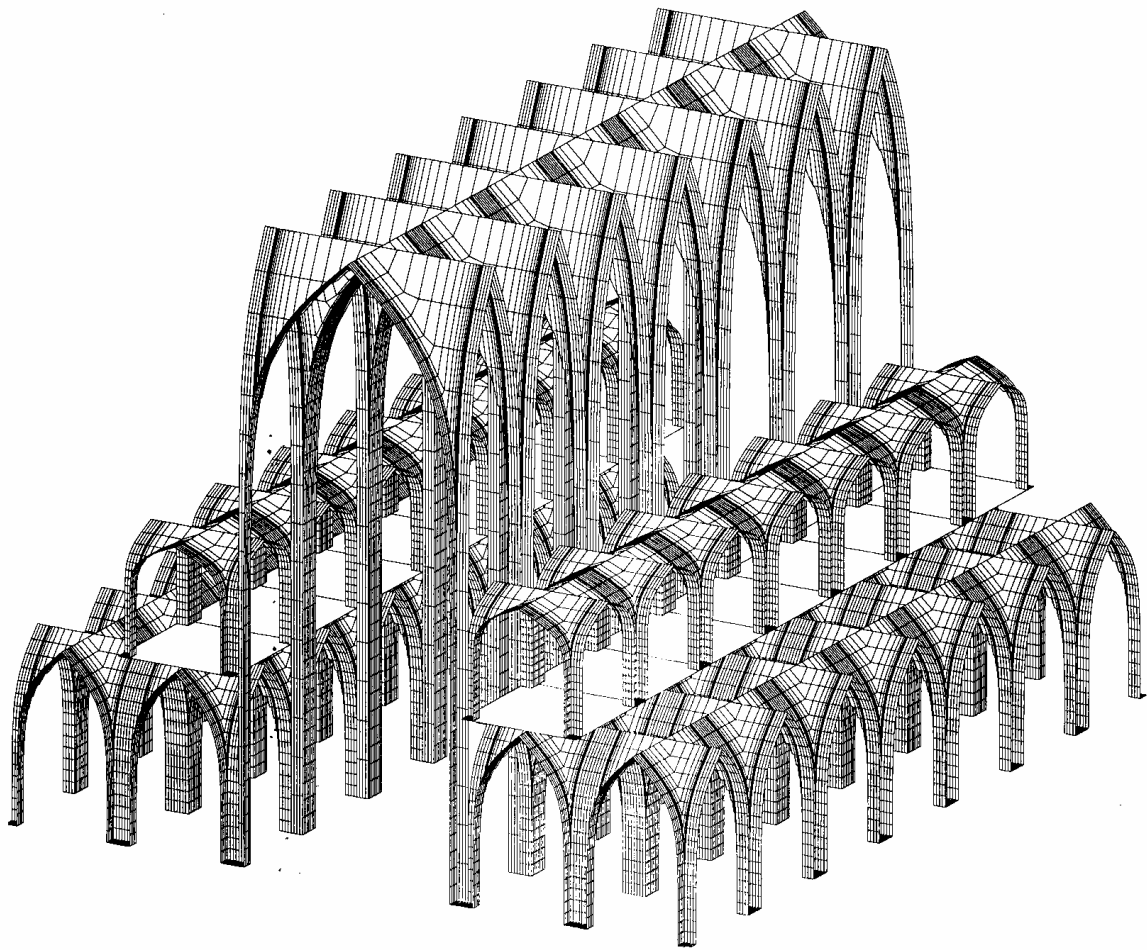


fig. 6.4.32. Generació de les naus segons el model d'encreuament de galeries.

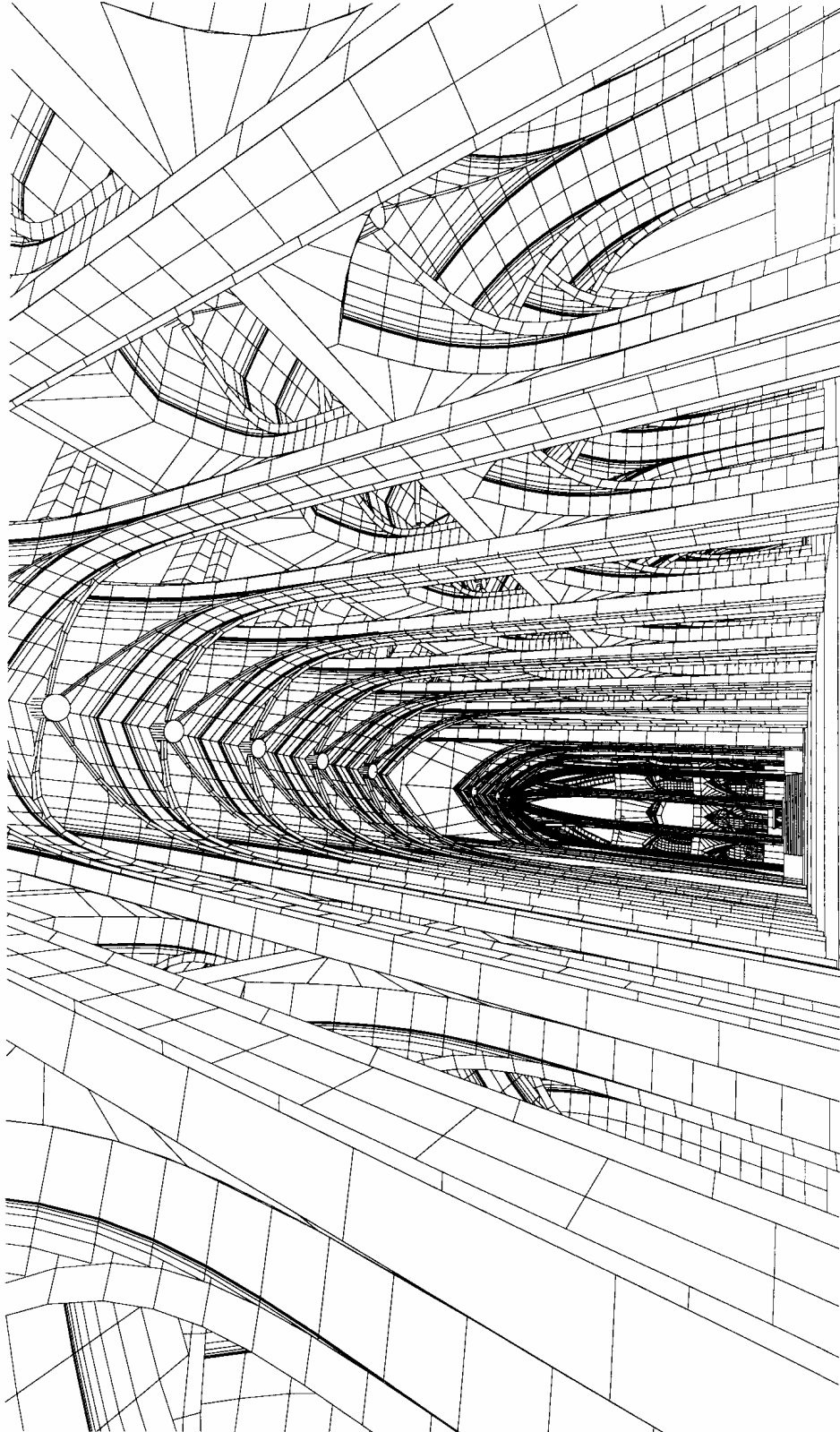


fig. 6.4.33. Vista de la nau principal des de l'entrada.

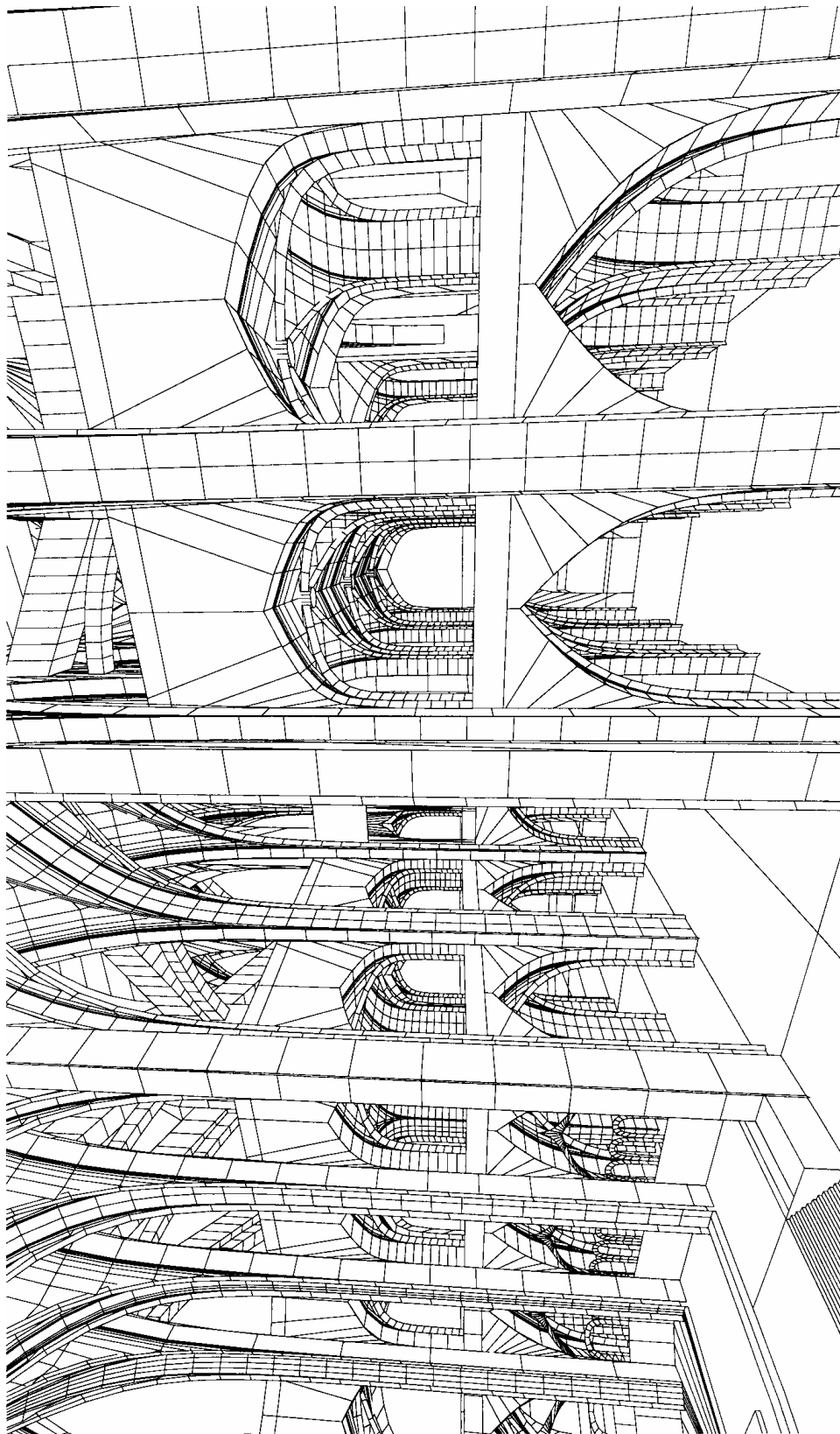


fig. 6.4.34. Vista del trifori, prop del creuer.

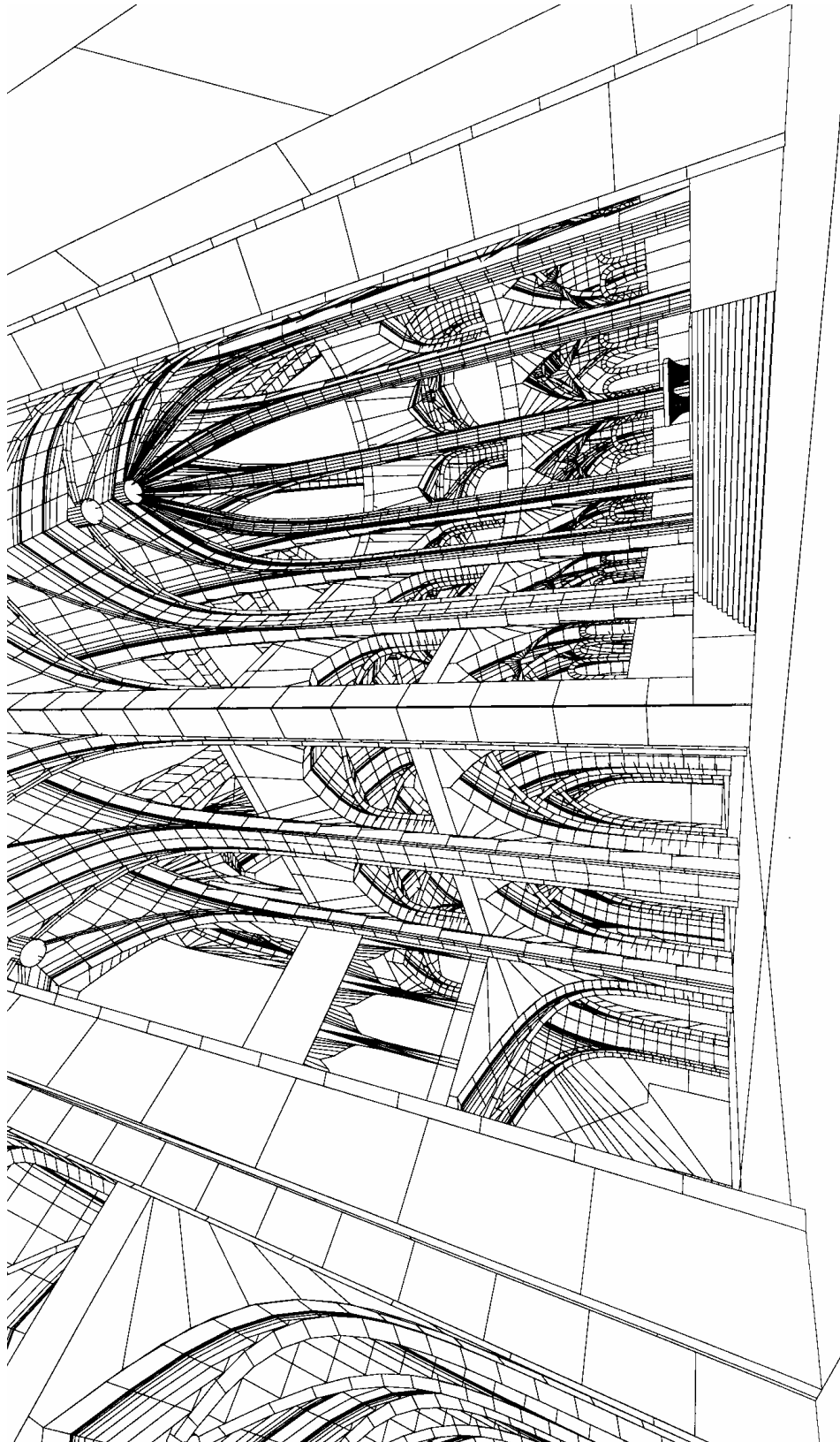


fig. 6.4.35. Vista general de l'absis de la nau principal.

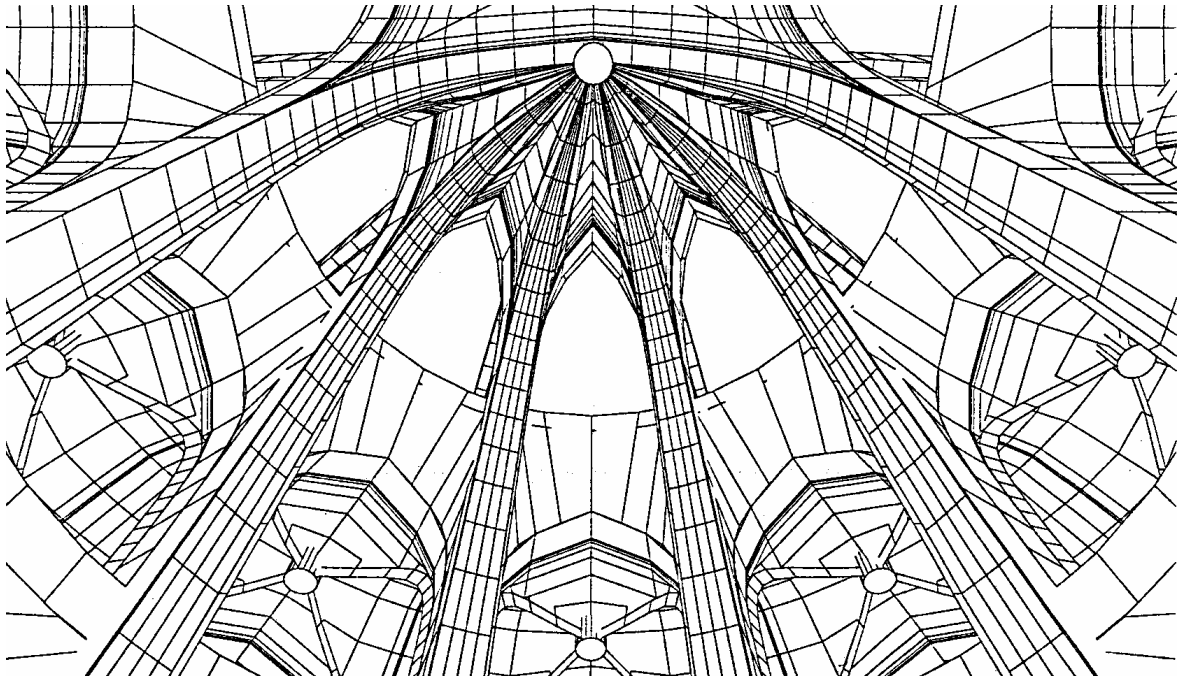


fig. 6.4.36. Detall de la volta de l'absis de la nau principal.

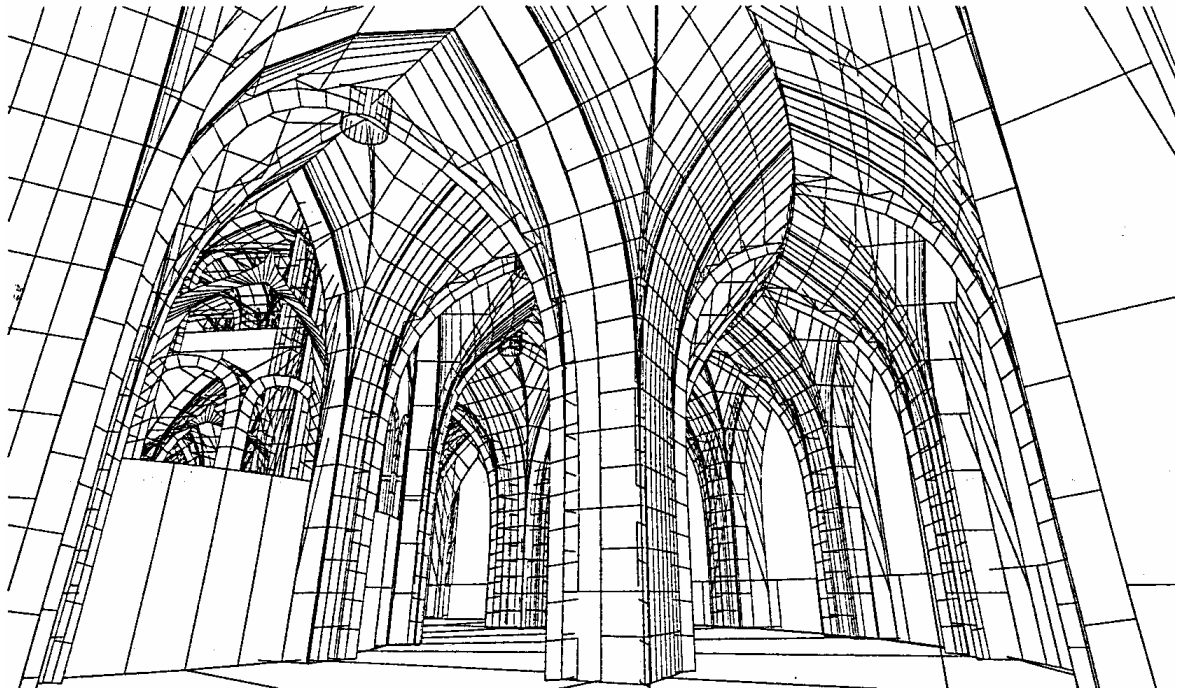


fig. 6.4.37. Vista de la girola, amb la duplicació d'arcs entre l'interior i l'exterior.

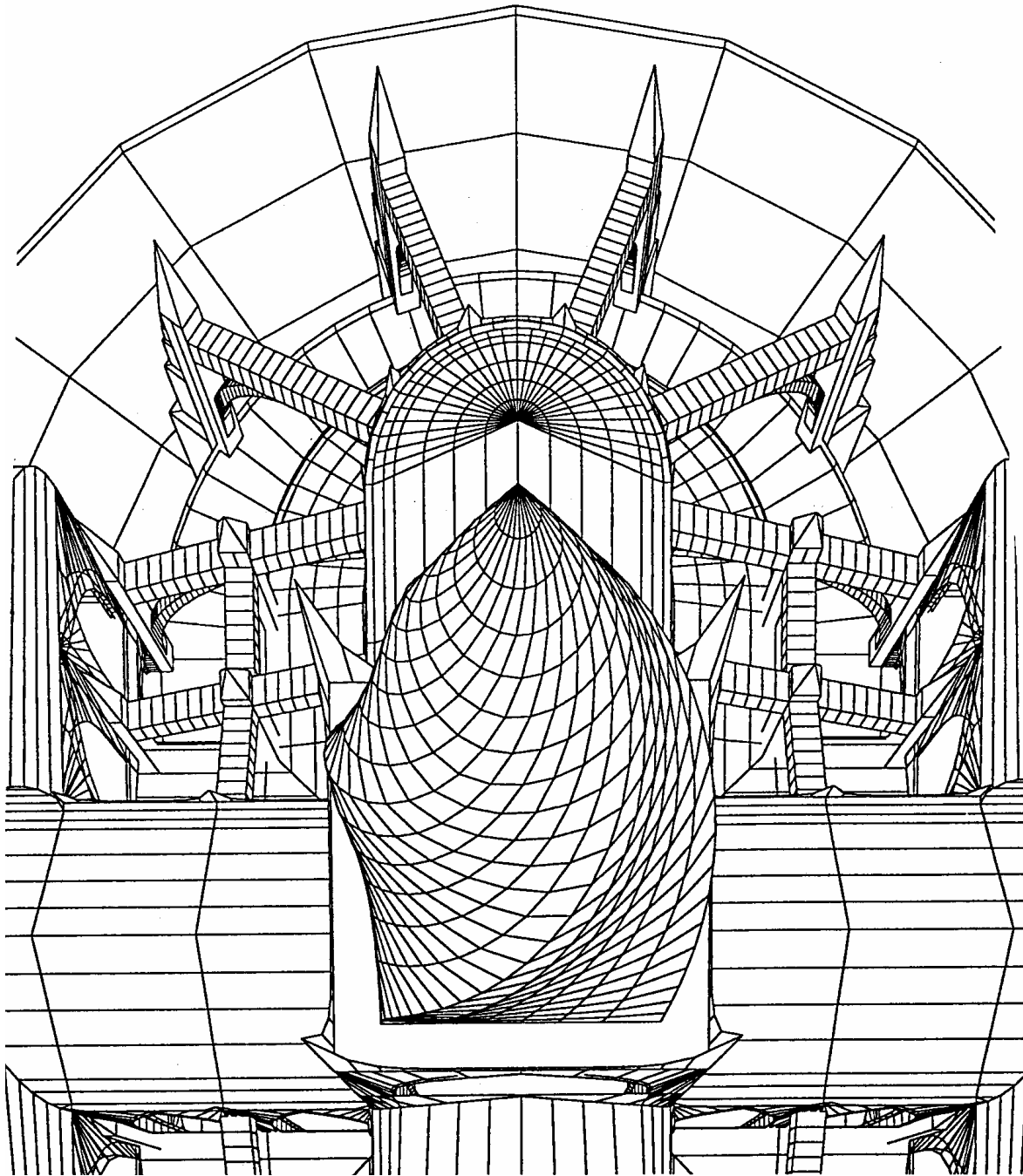
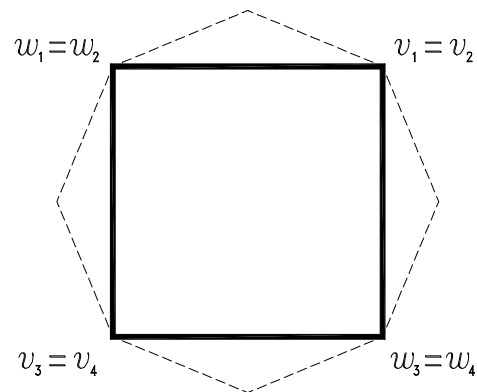
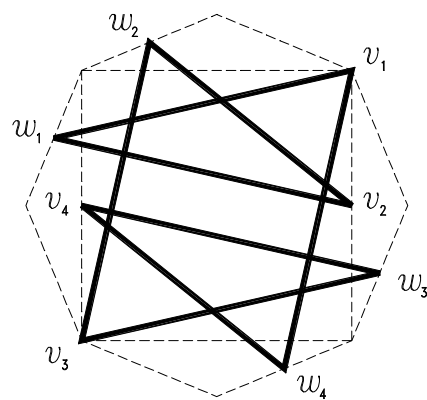


fig. 6.4.38. Vista del cimbori des de dalt, on s'observen les "corbes de nivell".

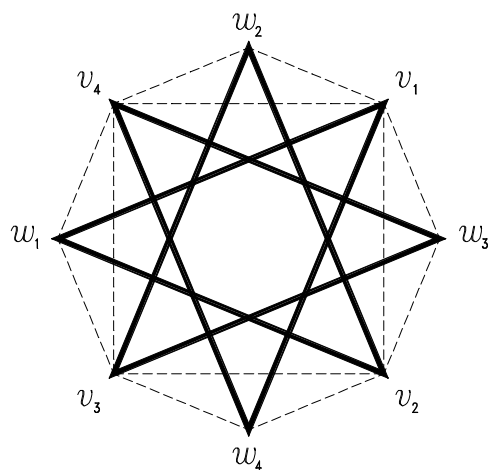
6.5. Figures.



(a) cota 52.5.



(b) cota 67.5.



(c) cota 82.5.

fig. 6.4.39. Pinacles de la façana principal: transició del quadrat a l'estrella.

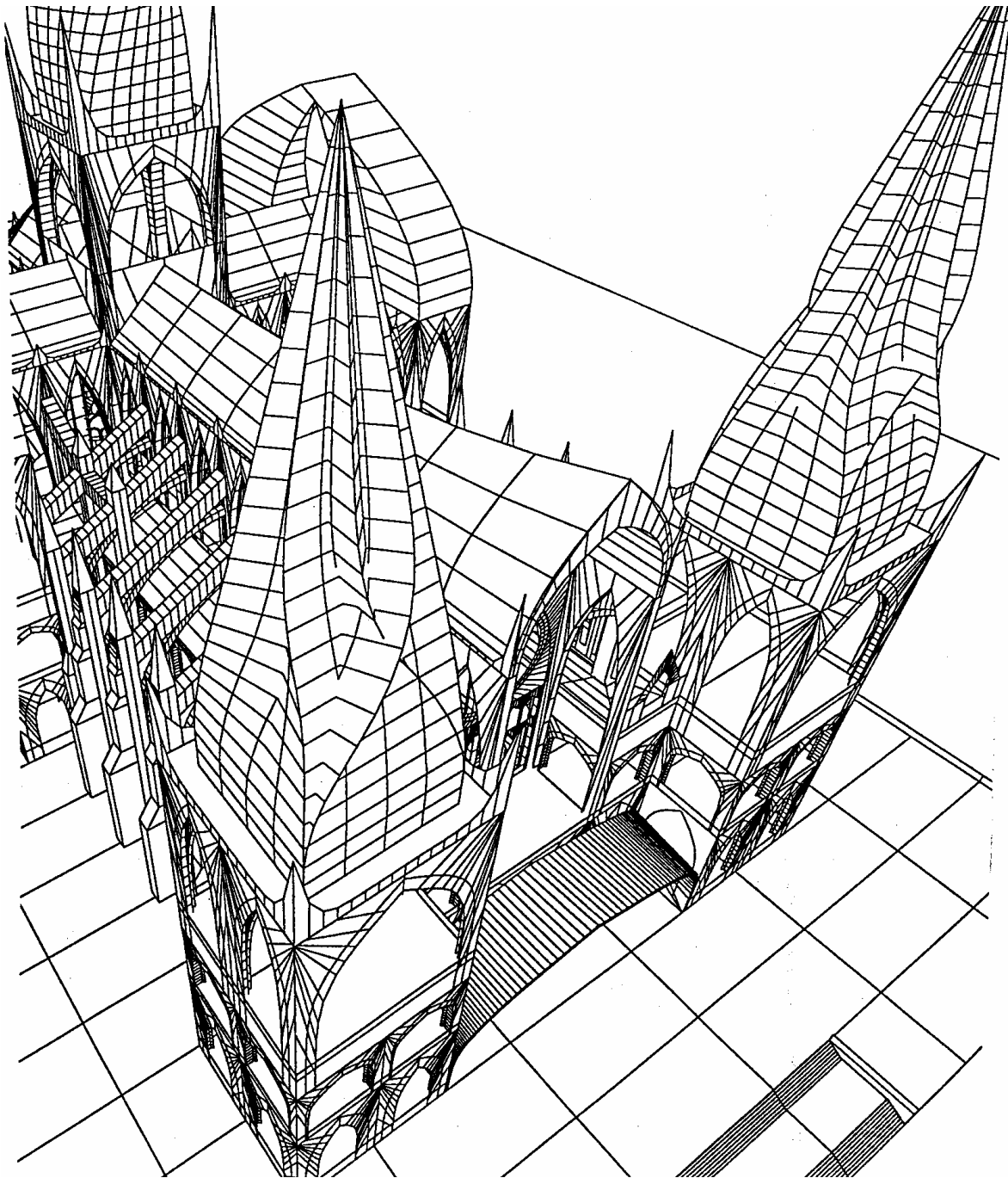


fig. 6.4.40. Vista de les torres i pinacles de la façana principal.

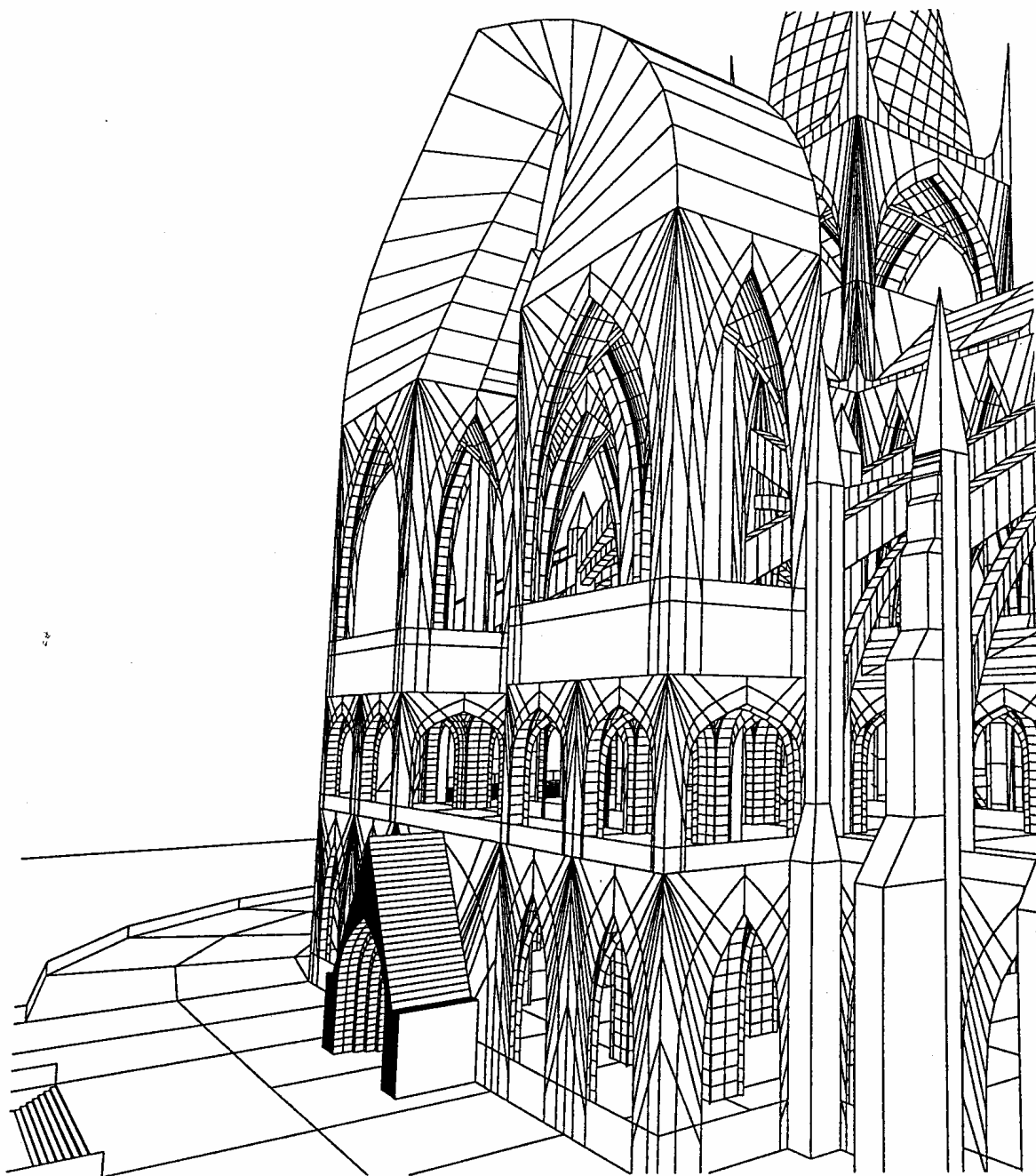


fig. 6.4.41. Vista de les torres i pinacles de la façana lateral.

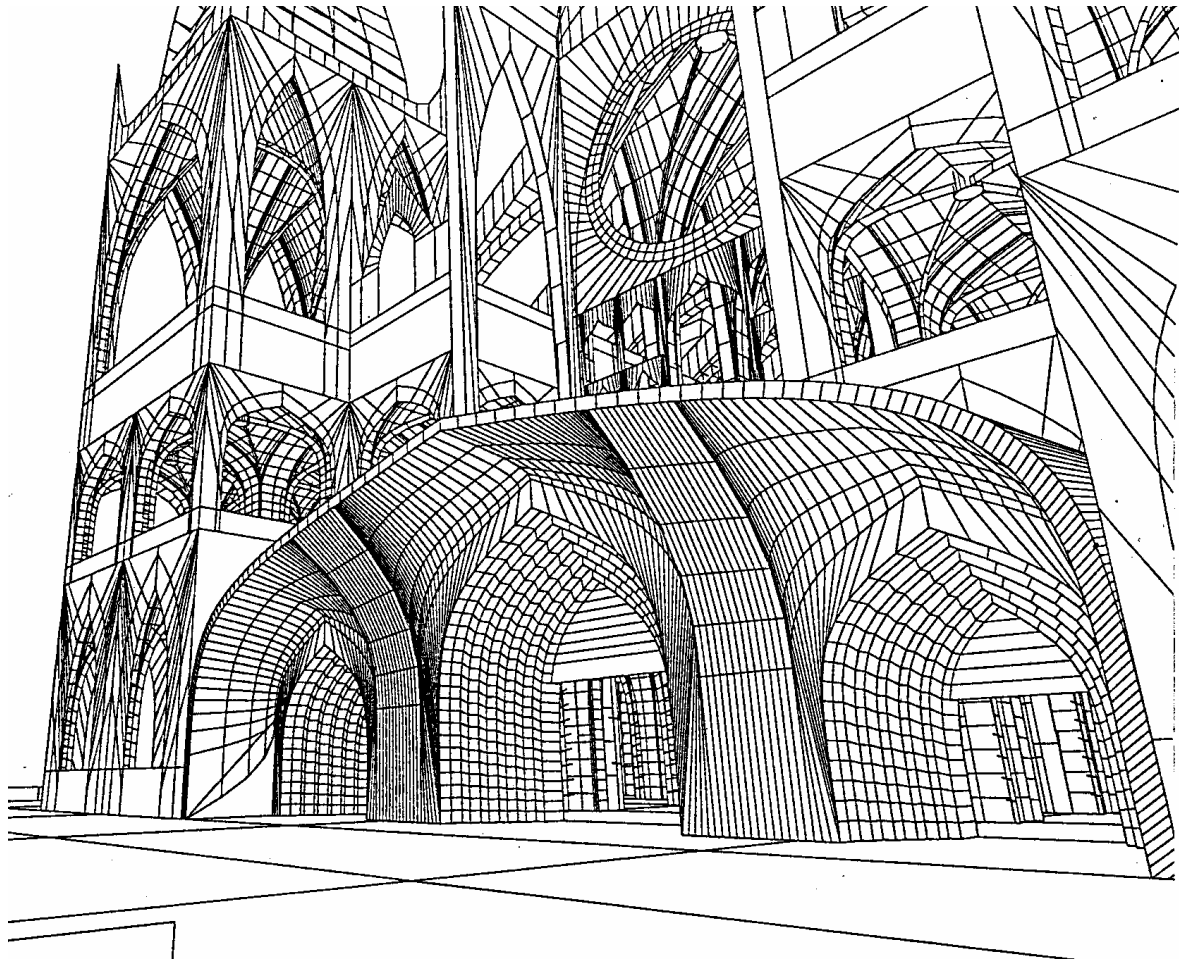


fig. 6.4.42. Detall de la portalada de la façana principal.

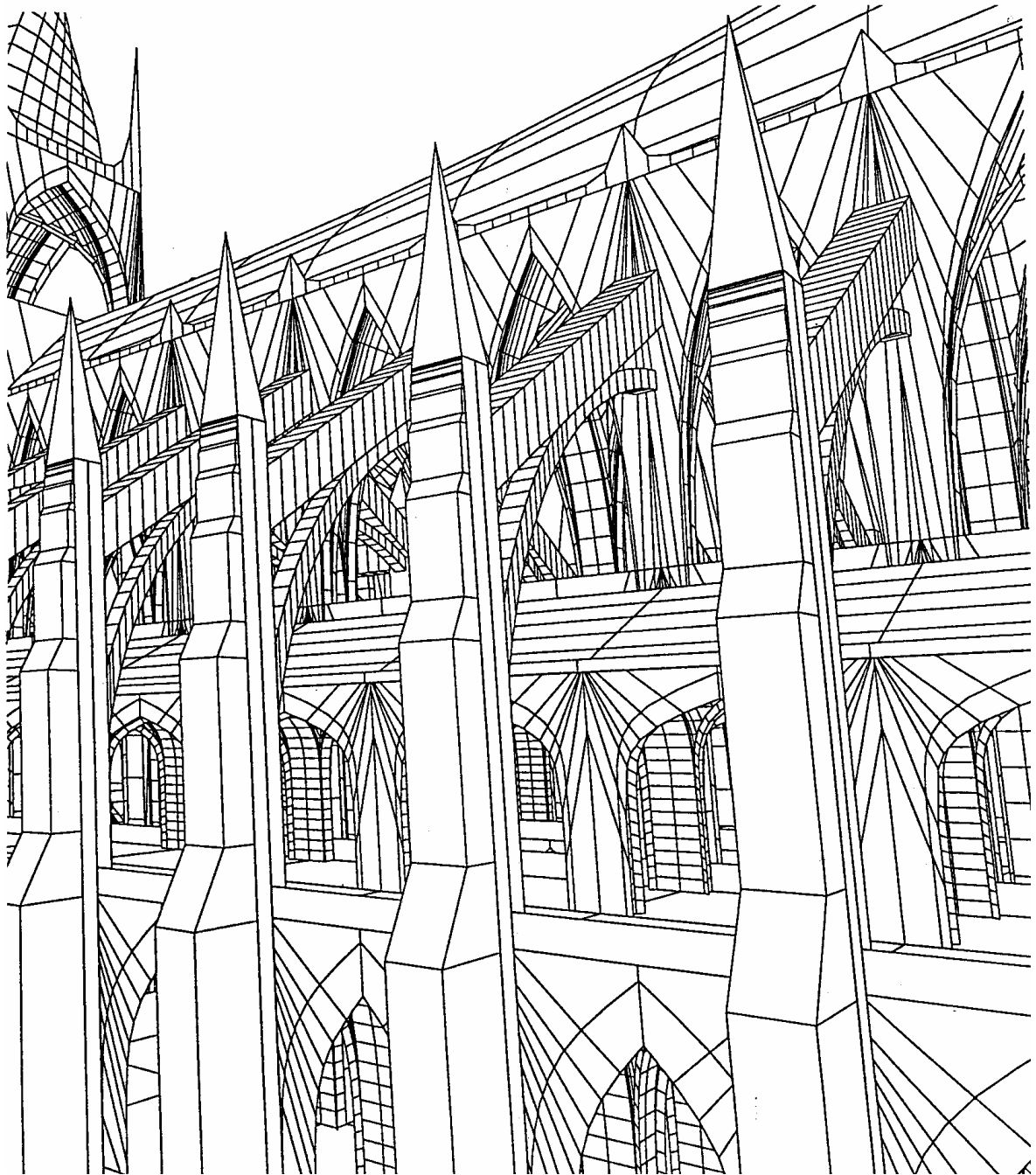


fig. 6.4.43. Vista dels arcbotants i dels contraforts.

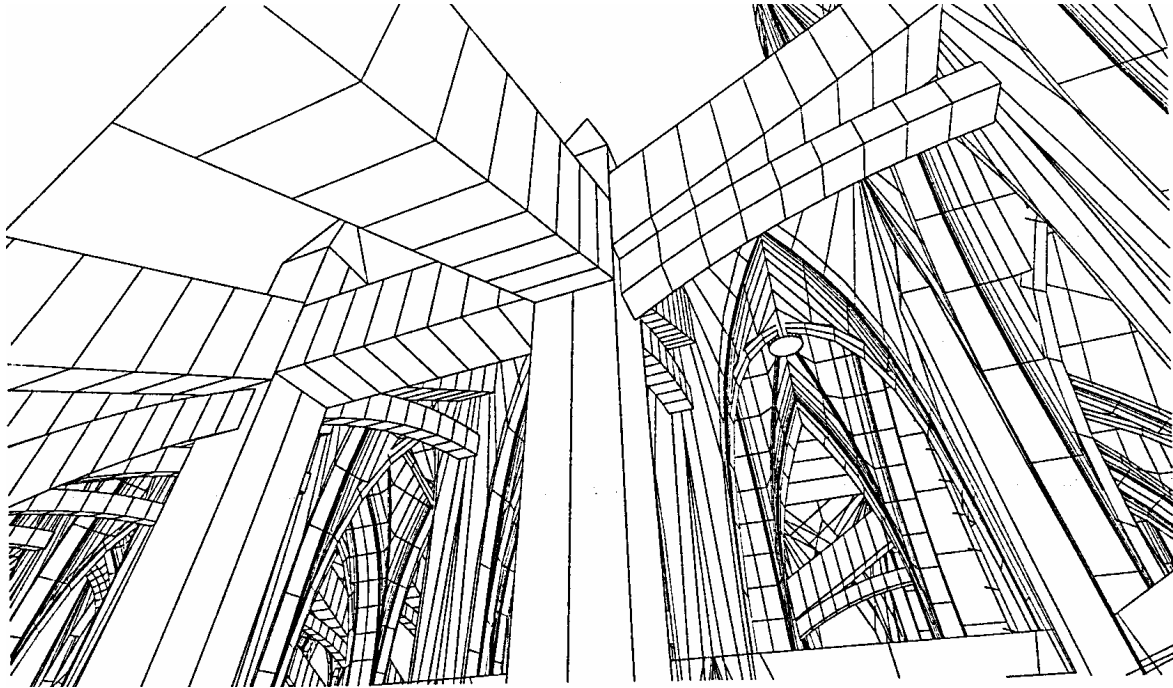


fig. 6.4.44. Detall dels arcbotants i contraforts de l'entorn del cimbori.

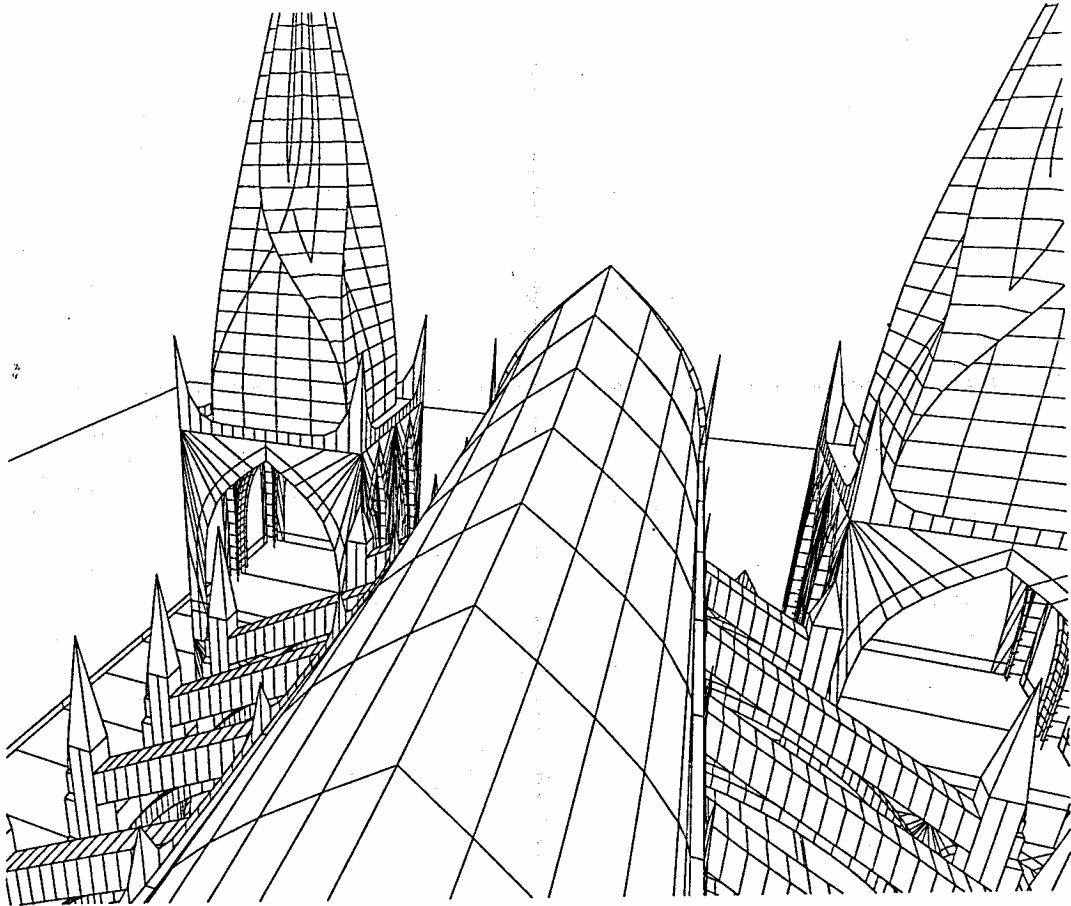


fig. 6.4.45. Vista de la coberta de la part davantera de la nau principal.

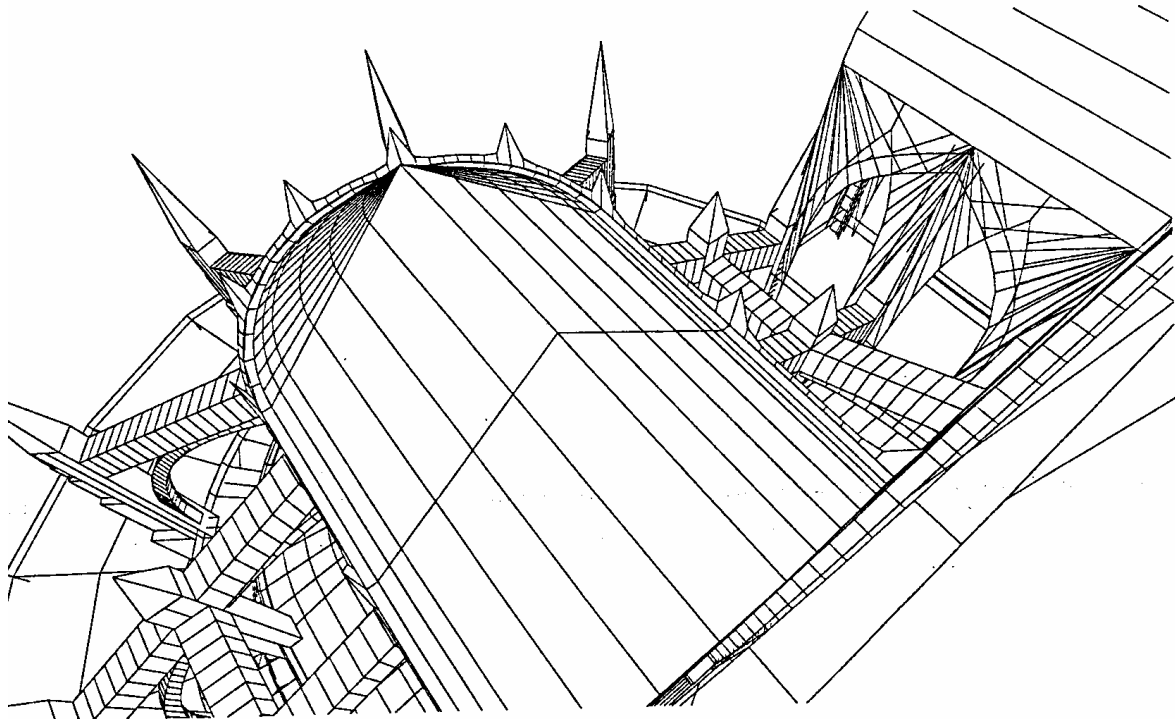


fig. 6.4.46. Vista de la coberta de la nau principal, sobre l'absis.

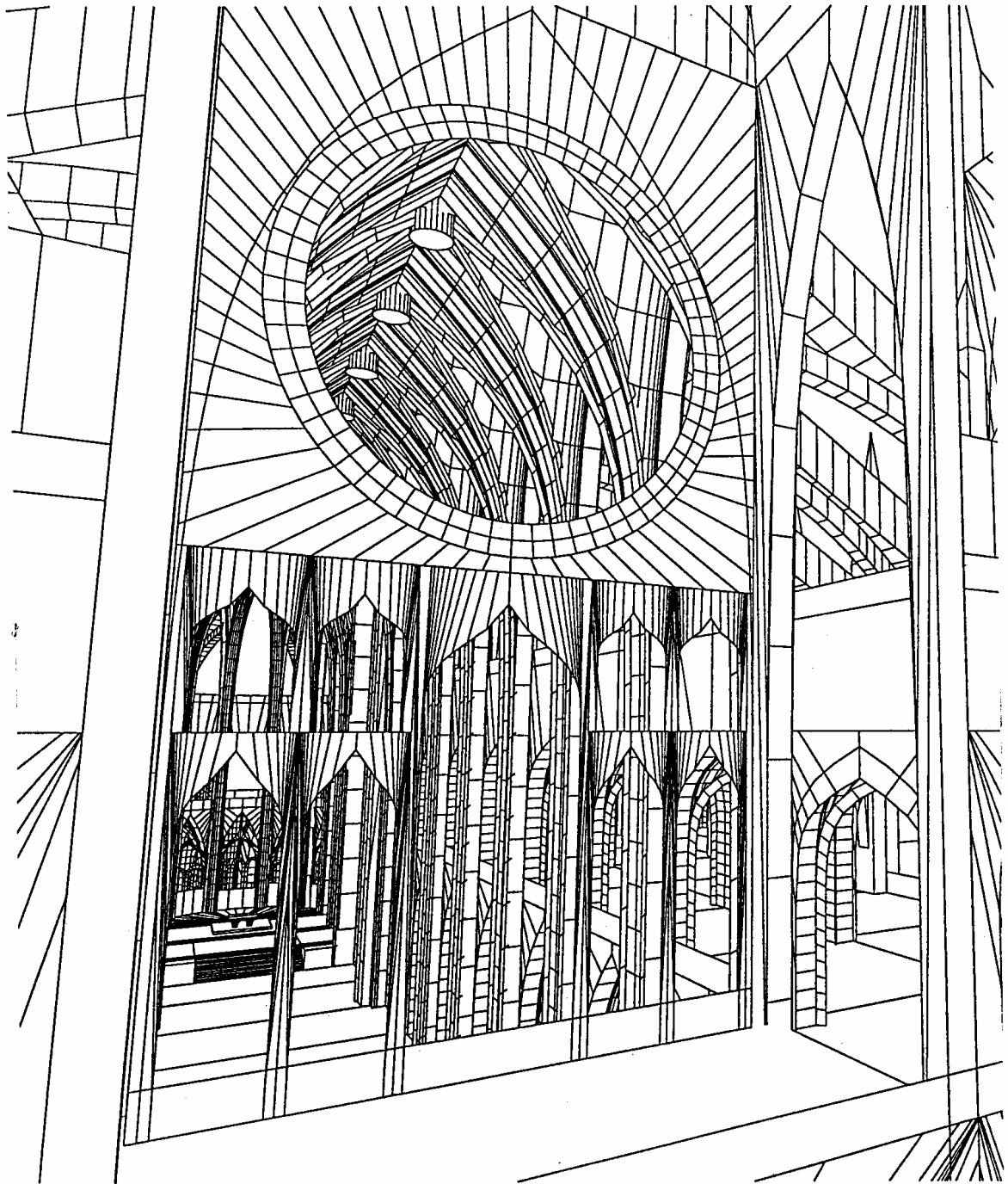


fig. 6.4.47. Detall de la rosassa i els finestrals de la façana principal.

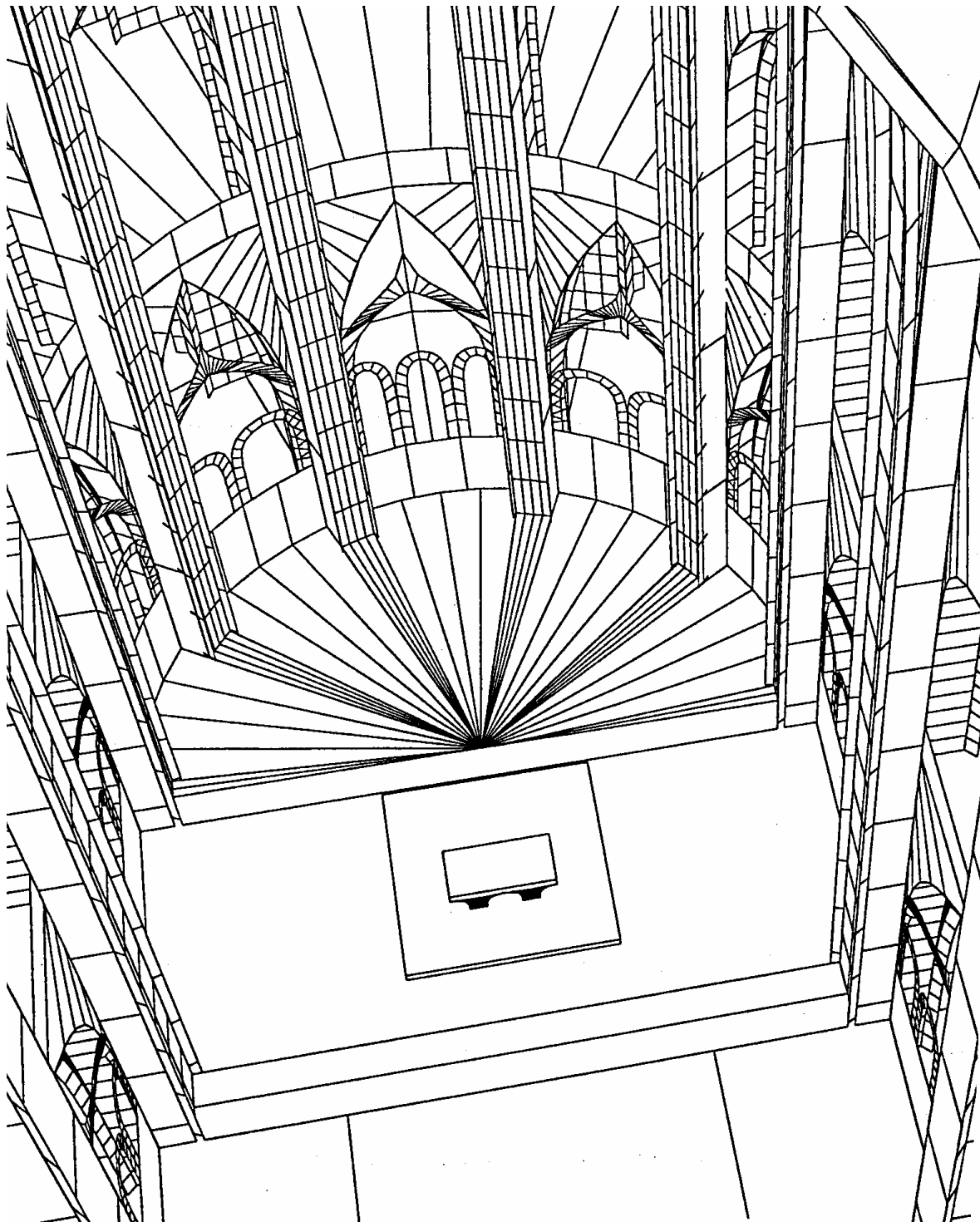


fig. 6.4.48. Vista de l'entorn de l'altar, amb les gelosies que l'envolten.

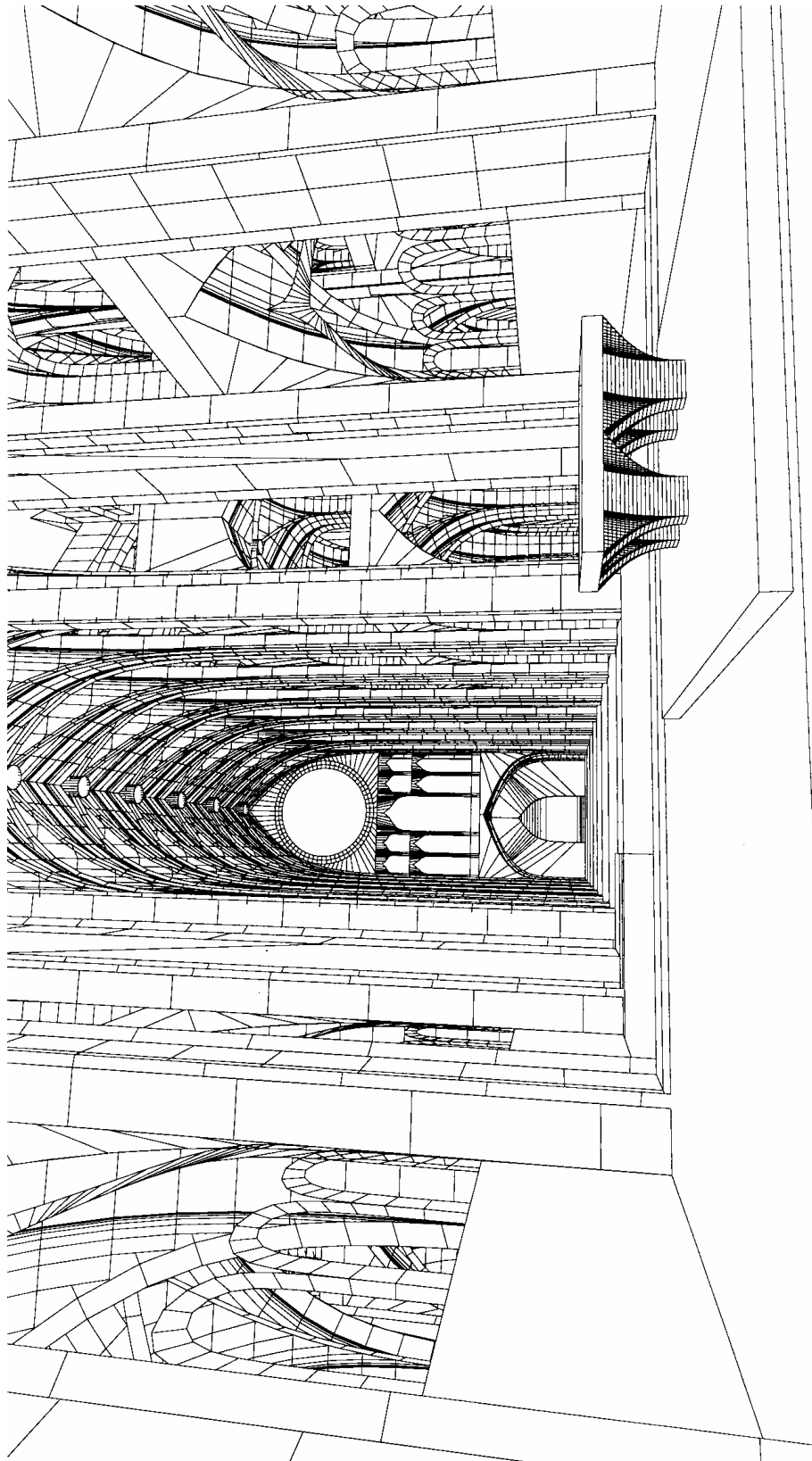


fig. 6.4.49. Detall de l'altar.

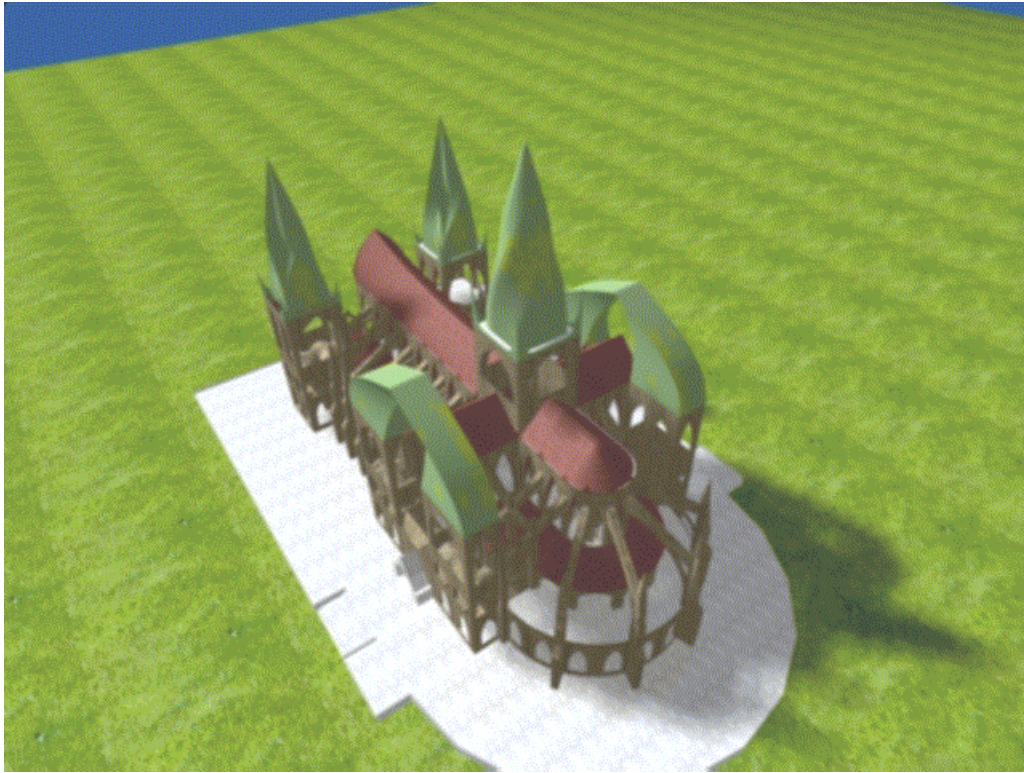


fig. 6.4.50.

6.5. Figures.



fig. 6.4.51.

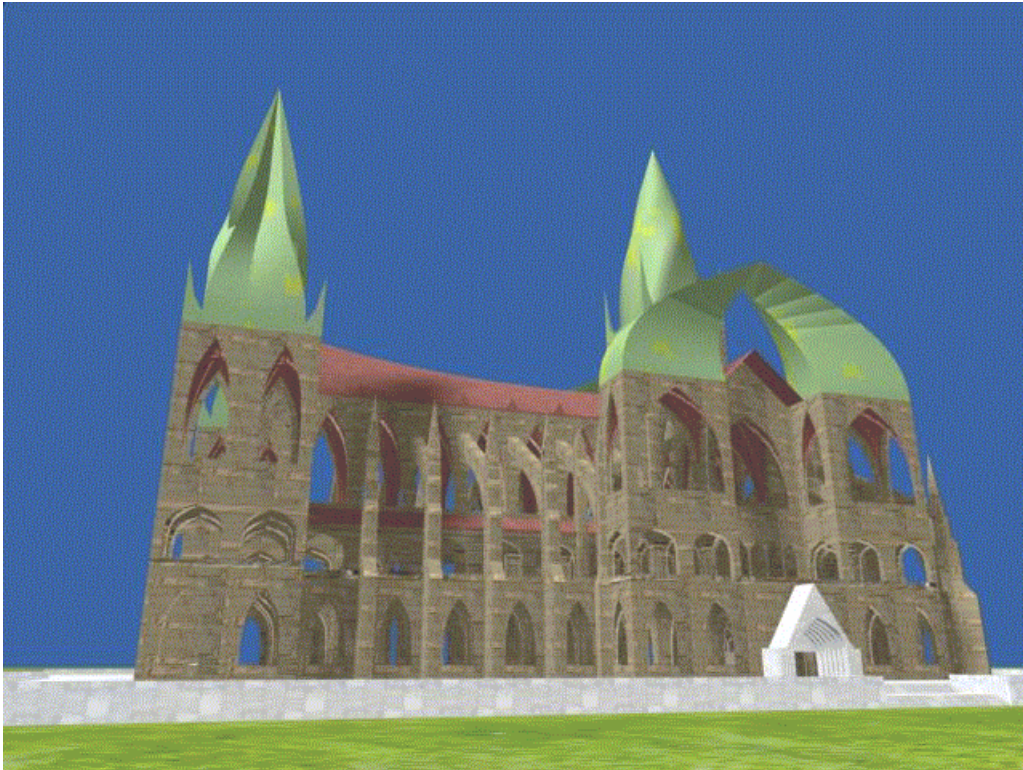


fig. 6.4.52.

6.5. Figures.

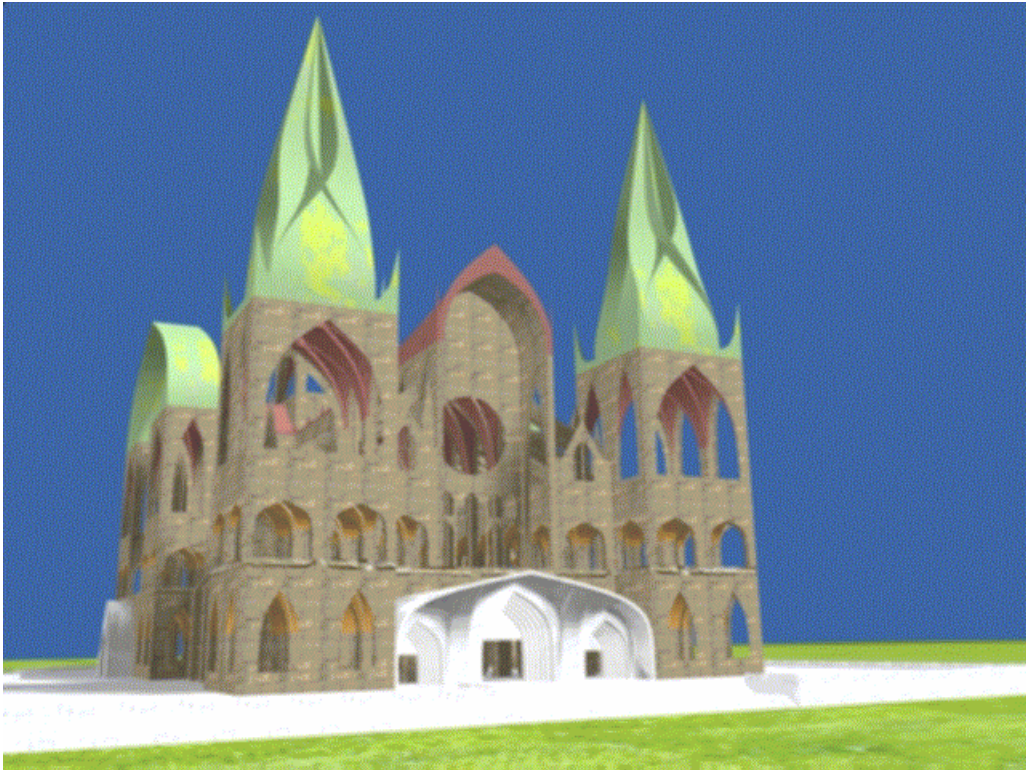


fig. 6.4.53.



fig. 6.4.54.

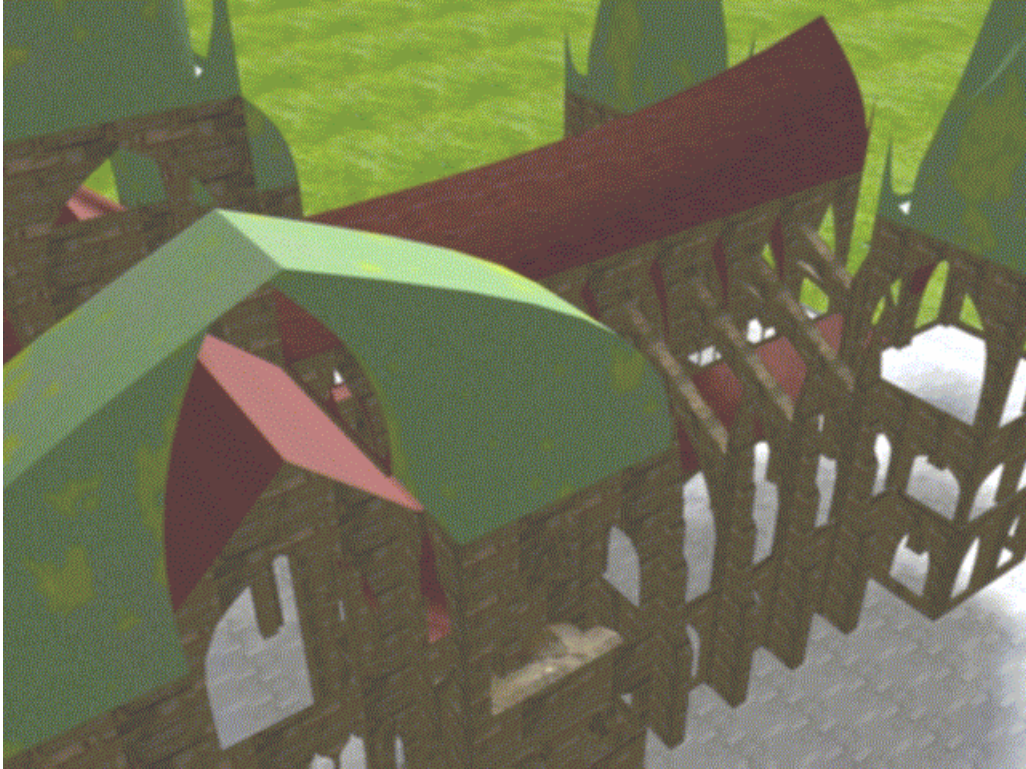


fig. 6.4.55.



fig. 6.4.56.

6.5. Figures.

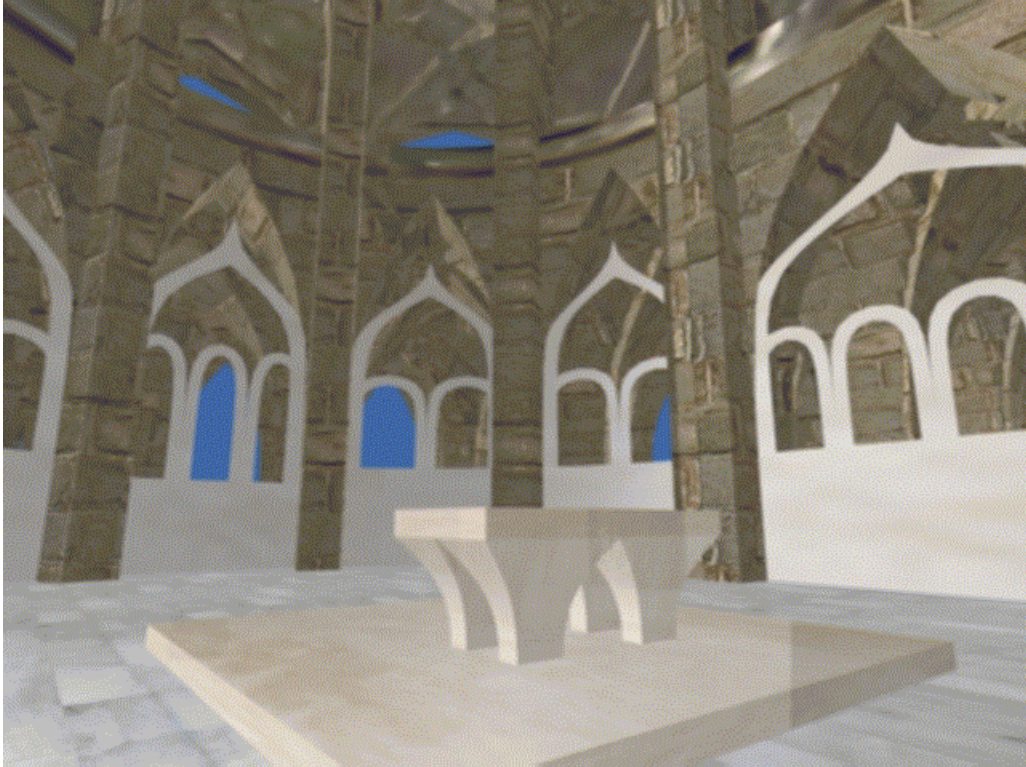


fig. 6.4.57.



fig. 6.4.58.

6.5. Figures.



fig. 6.4.59.

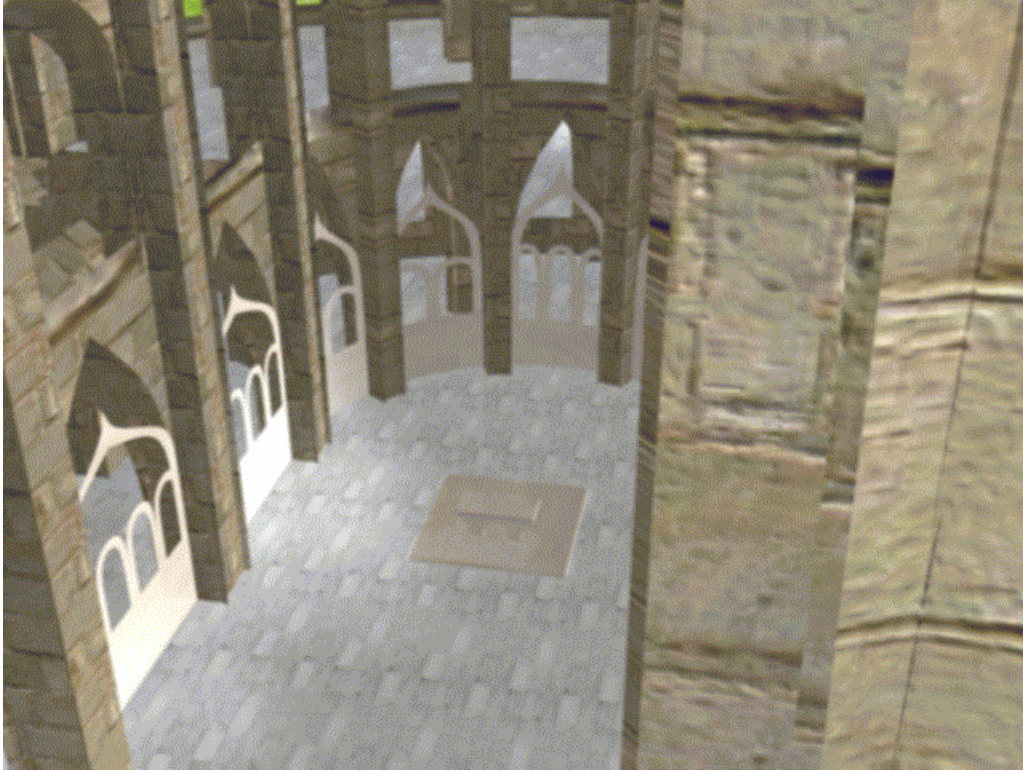


fig. 6.4.60.

resum
perspectives
conclusions

Resum, perspectives i conclusions

Un cop acabada l'exposició del material que hem anat elaborant durant el temps que ha durat aquest treball, creiem convenient fer un darrer esforç recapitulador per evitar la tòpica dispersió del tipus "arbres que tapen el bosc". D'altra banda, aquest treball no pretén ser exhaustiu, ans al contrari, desitja haver obert petits corriols per on seguir ampliant en el futur el seu abast i la seva eficàcia; per confirmar això, després del sumari, proposarem algunes possibles línies d'evolució i alguns possibles temes, no encabits aquí però suggerits pels aquí tractats, que ens sembla que seria interessant desenvolupar en el futur.

Resum.

A la introducció d'aquest treball s'han exposat les idees principals, la ideologia podríem dir, que justifiquen tant la estructura com els continguts de tot el que segueix. En primer lloc s'estableix el discurs sobre la base d'una divisió metodològica de qualsevol mena de disseny que involucri tasques gràfiques en dues fases: la de concepció del disseny i la de la seva execució com a tal disseny, com a projecte capaç de ser comunicat (la materialització-fabricació d'allò que s'ha dissenyat correspon, segons aquesta divisió, a una ulterior tercera fase). A partir d'aquest esquema, la idea clau és que, fins ara, la revolució informàtica, de manera aclaparadorament majoritària, només ha incidit en la fase d'execució; per entendre'ns i sabent que simplifiquem massa: només ha transformat radicalment la manera de dibuixar, de fer els plànols. Ja no cal fer servir la regla, el compàs i els altres estris tradicionals; molts problemes de geometria descriptiva es poden resoldre en molts menys passos igual que la calculadora estalvia molts passos de càlcul manual en problemes d'aritmètica, d'àlgebra i de càlcul numèric. També ha substituït el dibuix a ma alçada, que requeria molta traça, per certes famílies de corbes i superfícies de disseny lliure fàcils d'editar. Ha fet més fàcil dibuixar però, de cara a l'usuari, els *interfaces* estant organitzats, conscientment o no, sobre el supòsit de que es seguirà dibuixant el mateix tipus de coses que abans. Els programes estan pensats per un usuari euclidià.

No obstant, internament, invisiblement, s'ha produït un canvi radical; més encara: una subversió. Malgrat la il·lusió geomètrica, alhora euclidiana i platònica, en que es fa viure a l'usuari, els procediments interns utilitzen funcions matemàtiques, càlcul numèric i la inexactitud pròpia de l'ús de nombres en coma flotant. Això traeix l'ideal platònic de la construcció exacte amb regla i compàs (exactitud que, per altra banda, era pur idealisme: a la pràctica, resulta més inexacte que el càlcul amb coma flotant). Però no ens hem de lamentar. Justament el que hem proposat en aquest treball és que, enlloc d'intentar que el càlcul sembli euclidià, el que cal fer és aprofitar (aprofitar a fons) allò que el càlcul i la informàtica poden fer i que no podia fer la geometria euclidiana: dissenyar, **controlant-les des de la fase de concepció**, multitud de corbes i superfícies de formes complexes; insistim: complexes, que no vol dir arbitràries.

En resum, la informàtica ha portat una revolució en la fase d'execució però està pendent una altra en la fase de concepció. Creiem que gran part de l'arrel del problema rau en que també les matemàtiques, que estan al cor de tot aquest món, amb un paper menys aparent però igualment important, també són utilitzades de manera desajustada entre les dues fases. Mentre que en la fase de concepció només s'aprofiten les matemàtiques-geometria que avalaven les tècniques pròpies de les antigues eines de dibuix, a la fase executiva s'estan usant les matemàtiques-càlcul, que són les naturals pels procediments de la informàtica. Hi ha un desgavell entre eines noves, que usen uns determinats recursos matemàtics, i marcs conceptuals vells, que es basen en uns altres. Insistim doncs: hi ha una

revolució pendent en la fase de concepció per tal de que el dissenyador s'harmonitzi no tant sols amb les capacitats executives de la nova eina sinó també, *especialment*, amb la seva nova idiosincràsia.

D'acord amb aquest criteri, el treball s'ha estructurat en dues parts.

La primera, més tradicional, està dedicada a proposar alguns mètodes de producció d'objectes gràfics de disseny lliure (sobre tot corbes), els quals no pretenen permetre fer coses que no es poguessin fer abans sinó que tant sols intenten, o bé millorar el cost conceptual (capítol 1) o computacional (capítol 2) respecte el mètodes ja establerts com estàndards, o bé oferir altres maneres d'enfocar o entendre el que és un mètode de producció d'objectes de disseny lliure (capítol 3). És, doncs, una part dedicada a les tasques pròpies de la fase d'execució.

La segona, poder més agosarada, accepta el repte auto-plantejat en la introducció i proposa un projecte d'explotació dels citats nous recursos que l'eina informàtica subministra. Aquest projecte es basa en l'ampliació dels recursos mentals dels que pugui disposar el dissenyador durant la fase de concepció per mitjà d'una mena de llenguatge o gramàtica funcional. La justificació de l'ús de funcions matemàtiques rau en que a) per mitjà d'un sistema de coordenades, les funcions donen lloc a objectes gràfics, i b) és precisament aquest el mitjà que utilitza internament l'ordinador per crear la il·lusió de que fa geometria. Però, com tot llenguatge, cal estructurar-lo i cal exercitar-se en el seu ús: que les funcions donin lloc a formes no vol dir que sigui fàcil encertar la correcta relació entre certes formes i certes funcions que les pugui produir.

Els capítols 4 i 5 es dediquen justament a la feina de fonamentar i crear (sense ni molt menys acabar-lo) el llenguatge funcional i de dotar-lo de certa organització. Així, distingim entre lletres (funcions en brut), paraules (funcions modulades amb paràmetres significatius respecte la forma a produir) i verbs (operadors que actuen sobre les paraules, provocant efectes previsibles sobre la forma). Un disseny serà una combinació d'aquest elements i, per tant, es pot interpretar com una frase del llenguatge.

El capítol 6 incideix en l'aspecte d'exercitació i també, com a darrer, es pot interpretar com el de les aplicacions. En aquests dos sentits, proposa diversos exemples de processos de disseny duts a terme seguint el model funcional que s'acaba de presentar, fent especial èmfasi en els processos mentals involucrats, en com les idees sobre la forma i les idees sobre les funcions a usar no van unes després de les altres sinó que dialoguen des del principi, de manera que unes motiven a les altres i el resultat es pot entendre com un treball en equip entre les dues famílies d'idees.

De fet, la bateria de paraules i, especialment, de operadors o verbs que proposem no són més que empaquetaments, *macros*, d'aquests diàlegs entre formes i funcions destil·lats de les nostres primeres experiències de exercitació en el llenguatge. No hi ha dubte que la col·lecció de paraules i verbs és oberta i pot créixer indefinidament per les aportacions d'experiències de qualsevol que trobi a

bé endinsar-se en l'ús d'aquesta gramàtica; de fet, el nostre desig és que així sigui i que aviat els operadors aquí proposats siguin una petita i ingènua part dels aportats per altres dissenyadors i usuaris més capacitats que nosaltres.

Amb aquest comentari podem enllaçar amb les possibles línies d'evolució del material aquí aportat.

Perspectives.

A mesura que un treball com aquest, que requereix un cert temps, va creixent, a qui el va desenvolupant se li van acudint, sobre la base de les primeres idees i els primers continguts previstos, d'altres nous suggerits per aquells. Alguns són fàcilment incorporables al cos principal, però aviat es veu que els incorporats, al seu torn generen noves idees i així successivament. És obvi que el treball no pot seguir indefinidament, així que hom decideix tallar per algun lloc, de manera que el que quedi a dins tingui suficient consistència interna, i deixa la resta per seguir en el futur. Nosaltres no som diferents i això és el que hem fet. En aquest paràgraf relacionem algunes idees i algunes tasques que creiem que són línies naturals d'evolució del present treball i que pot tenir interès desenvolupar-les més endavant. Les hem organitzat, primer segons l'esquema que proporcionen les dues parts i els diferents capítols (sense ser massa rígids), per afegir després alguns temes, podríem dir germans o cosins (encara que en direm paral·lels) dels que hem incorporat en aquest treball, que han sorgit per associació d'idees entre el que fèiem i d'altres especialitats mes o menys properes a la nostra.

Part I.

- En tota aquesta part es troba a faltar un desenvolupament de les mateixes idees que s'han desenvolupat per corbes cap al món de les superfícies. Quan es tracta de superfícies de producte tensorial (donades per una quadrícula de punts de control) la extensió no sembla que hagi de ser gaire difícil, de fet en el Capítol 3 ja s'ha abordat bastant això, en canvi falta en els dos primers capítols. Pel cas de que els punts de control formin un núvol, costarà més estendre les bases de funcions, les formulacions globals, etc. i segurament el tema requerirà aportacions de les tècniques de triangulació del domini (referències al final de l'estat de l'art, dins de la introducció).

Capítol 2).

- Pel que fa específicament al capítol 2, hem proposat un tipus de corbes que en cada tram combinen dos *splines* estàndards que interpolen uns quants punts veïns. És de suposar, doncs, atesa la propietat de extinció asimptòtica de la influència de cada punt de control quan ens allunyem d'ell que presenten els *splines*, que la corba resultant s'assembli molt a l'únic *spline* estàndard que interpola tots els punts. És sabut que en el cas de *splines* cúbics, aquests minimitzen el funcional $\int_{t_0}^{t_n} \|\vec{f}''(t)\|^2 dt$, similar al que mesura la energia elàstica de deformació. La qüestió pendent és, per tant, obtenir una mesura de la proximitat a aquesta minimització, estudiar si les nostres corbes minimitzen algun altre funcional similar i significatiu, etc.

- En els apèndixs hem proposat una implementació, en llenguatge LISP, d'un programa que produeix corbes d'aquest tipus. Al ser, de moment, d'ús personal, no hi ha hagut una cura molt rigorosa per optimitzar-la. Una possible tasca pot ser millorar aquest programa per tal d'una possible implementació més exportable a altres usuaris interessats principalment en la seva eficàcia. La millora ha d'incloure entre d'altres: 1) un augment de la velocitat de càlcul; 2) un augment de la velocitat de presentació en pantalla; 3) la possibilitat del control local, anunciada en la teoria però no recollida en el programa i què, a més, representa una de les millores d'aquest tipus de corbes sobre els *splines* estàndard, és a dir, la possibilitat de modificar la posició dels punts de control així com de introduir-ne de nous o suprimir-ne algun sense recalcular tota la corba, tot això interactivament.

Capítol 3).

El capítol 3 enceta un tema interdisciplinari entre el món del CAGD i el de la lògica difusa, per tant queda molt camp per seguir treballant. Entre d'altres temes interessants que estan oberts podem citar:

- Estudiar altres famílies de regles lingüístiques enlloc de les (3.2.1), sempre que mantinguin un sentit semàntic, i veure com afecten a les corbes i superfícies resultants i també a la complexitat computacional del mètode resultant. Per exemple, pot ser interessant considerar regles r_i del tipus si $\vec{x} \approx \vec{x}_i$ i, a més, $\neg(\vec{x} \approx \vec{x}_j)$ per $j \neq i$, llavors $\vec{y} \approx \vec{y}_i$. Poder també pot ser interessant treballar amb conseqüents de cada regla diferents de la mera constant \vec{y}_i (veure (3.1.2)).

- La modelització dels "i" de nombres difosos, és a dir, de la seva intersecció, per donar un conjunt difús, com hem introduït en (3.1.1), es fa amb una t -norma i nosaltres hem triat, per les seves qualitats funcionals, la t -norma producte. Es pot estudiar l'ús d'altres t -normes, fins i tot d'algunes, com el *Min*, que no són diferenciables, per produir corbes amb vèrtexs o superfícies amb arestes.

- A les observacions 3.2.2, punt 4, hem comentat que, amb el model proposat, no es poden generar corbes alhora suaus i interpoladores, degut a que els pesos dels punts de control formen una combinació convexa. Atesa la importància dels mètodes interpoladors, convé poder estendre aquest model a aquest tipus de mètodes. Perquè això sigui possible, sembla inevitable usar funcions de pes que, col·locades en el lloc que ara ocupen els nombres i conjunts difosos, prenguin valors negatius. Però llavors cal trobar, si la té, una interpretació semàntica d'aquestes funcions en el context de les regles de control difús que ens hem plantejat.

- Hem vist com el joc amb els nombres i conjunts difosos triats per cada punt de control amplia les possibilitats de acció sobre la corba o superfície de control. Però queda per fer un estudi en profunditat de com es produeix aquesta relació entre els nombres difosos i la forma que en resulta.

- En relació amb l'anterior, de moment la elecció de nombres borrosos dona la sensació de ser bastant arbitrària; en tot cas, només s'atén a la forma de la seva gràfica, al seu abast (regió on és significativament diferent de zero) i al seu grau de diferenciabilitat. Però, quan en un conjunt s'introdueix una E -indistingibilitat (Jacas 87; Jacas 93; Klawonn 93; de Soto 01), els seus *singletons* donen lloc a nombres borrosos. Llavors, per donar un sentit més unificat i menys arbitrari a la elecció, la qüestió que es planteja és si per qualsevol elecció d'una col·lecció de nombres difosos existeix una E -indistingibilitat de la qual provinguin com a *singletons*. En cas que en general la resposta sigui negativa, la qüestió passaria a ser en quins casos o en quines condicions és afirmativa.

- Pel cas de superfícies paramètriques, només hem resolt el cas particular en que els punts de control es puguin organitzar segons una xarxa de $(n+1) \times (m+1)$ punts. No hem resolt el cas de que els punts de control formin un núvol arbitrari, atès que en aquest cas ni tant sols està clara quina regió del espai de paràmetres (s, t) cal prendre.

- Pel cas de corbes, la proposició 3.4.2 dona una condició suficient per a que les funcions de pes F_i provinguin de nombres difosos m_i . No hem intentat encara una proposició equivalent pel cas de superfícies, on els que hi intervenen són conjunts difosos a_i .

- L'anterior qüestió, junt amb el fet de que ja hem verificat que les corbes i superfícies de Bézier són casos particulars del model que proposem, porta a preguntar-se si tots els mètodes, o quins d'ells, de producció de corbes i superfícies per punts de controls admeten una reinterpretació en termes d'aquest model basat en regles de control en el marc de la lògica difusa.

Part II.

- Malgrat que aquesta part es dedica a produir materials per a la fase de concepció que, per tant, estan pensats perquè l'usuari els conegui i domini, una **segona utilitat** d'aquests materials o d'alguns d'ells, pendent de desenvolupar, és la seva **reconversió** en mòduls automàtics, utilitzables aleshores com a eines (de contingut transparent a l'usuari) dins la fase d'execució. Per exemple, l'element arc que hem desenvolupat en la secció 6.4 pel Gran Bazaar i per la catedral gòtica, es pot convertir en un mòdul que produeixi arcs invocant-lo junt amb els paràmetres definitoris (valors dels exponents n i m , altura, amplada, etc.). Igualment en els casos de sanefes i flors, vistos en la secció 6.1. En realitat, el primer objectiu del treball que ara estem tancant era la posta a punt de mòduls d'aquest tipus fins poder automatitzar la producció de qualsevol forma; amb aquesta clau cal entendre la part I. Va ser posteriorment que vam aclarir el mapa de les fases conceptual i executiva i vam constatar que els operadors que intentàvem convertir en automàtics realment nosaltres mateixos els estàvem usant com a guies per concebre. Amb això es va donar la orientació definitiva al treball i també va néixer la part II. Realment, obtenir mòduls a base de paraules i

operadors per automatitzar la producció (en fase executiva) de qualsevol forma sembla massa difícil, però, repetim, moltes famílies de formes, com ara els arc, sí admeten aquest tractament i és una línia de continuació lògica d'aquest treball.

Capítol 4).

- Un cop fixada la crítica a la situació actual i la nostra filosofia i metodologia respecte com ha d'evolucionar el marc conceptual, és a dir, els recursos teòrics posats en joc durant la fase de concepció, a 4.2 proposem una estratègia, una concreció del que proposem, basada en la edificació del que hem anomenat "llenguatge" o "idioma" funcional, amb les seves "lletres" i "paraules" i la seva "gramàtica". Aquestes denominacions s'han triat com a símil, atès que, efectivament, hi ha aspectes en la manera d'articular els elements que proposem que recorden les estructures d'un llenguatge. Però no passa de ser un símil que, en el grau que l'hem desenvolupat, resulta bastant ingenu. En canvi, hi ha efectivament certa relació real amb l'estructura d'un llenguatge que caldria explotar. En definitiva, creiem que podria ser força interessant fer una incursió cap a la lingüística "de veritat", l'estructura dels llenguatges naturals i formals, la lingüística comparada, etc. per polir i enriquir la proposta que presentem en aquest treball. La llunyania entre la nostra disciplina i la lingüística fa que aquesta tasca sembli feixuga i plena d'incògnites respecte el rendiment que pugui donar, però això no li treu l'interès que ens sembla que té l'empresa.

- En qualsevol cas, cal arribar a edificar una estructura o marc teòric més robust que aixoplugui aquesta gramàtica i justifiqui la fins ara aparent arbitriietat en l'elecció de tal o qual combinació de funcions per construir tal o qual operador. Com estem en una primera època, l'objectiu més urgent és disposar d'eines encara que no estiguin optimitzades, però quan això estigui més consolidat, caldrà formalitzar-ho; cal tenir una manera d'avaluar la qualitat de les eines. A continuació tornarem sobre alguna d'aquestes idees.

Capítol 5).

- El capítol 5 ofereix un primer conjunt de "lletres", "paraules" i "verbs" (operadors). Aleshores, un primer tema pendent, obvi, és anar millorant i ampliant indefinidament aquest repertori, introduint també altres "estils" en la manera de formar "verbs": per exemple, definint operadors com un procediment o programa enlloc de basar-nos sempre en fórmules. Quantes més lletres i verbs estiguin formulats i disponibles amb el seu *use-it* perfectament clar, més automàtica i ràpida serà la tasca del dissenyador. Aquesta ampliació és, en principi, il·limitada i qualsevol que vulgui pot contribuir-hi. Una altra tasca sempre inacabada és la millora del repertori ja existent. Com acabem de comentar en relació al capítol 4, al començar cal sobre tot produir eines, encara que siguin una mica primitives, però, en una segona època, també es pot dedicar temps a la millora de les que es tenen; ens referim a millorar la versatilitat i generalitat de les lletres i verbs que haguem definit, simplificar la seva formulació, millorar la seva implementació i

reduir-ne el seu cost computacional, etc., optimitzar-les, en definitiva. En aquest sentit, queda pendent l'aplicació de tècniques de **geometria computacional** per tal d'analitzar, avaluar i, en el seu cas, millorar les eines de la gramàtica ja produïdes.

- Els operadors s'han concebut atenent a la acció purament formal que produeixen. Una millora, que també requereix una excursió cap altres disciplines properes, és introduir consideracions de la física en aquells operadors que semblen demanar-ho. Per exemple: Si es dissenya una coberta en forma de carpa, podem generar una formulació purament geomètrica i després, si cal, el CAD-CAM ja fabricarà la coberta, però serà més satisfactori que tinguem en compte temes d'elasticitat, de lones tibants i de superfícies minimal, de manera que la formulació reflecteixi la forma natural de la coberta. Un altre exemple: A 5.3.3 hem proposat un operador "arrugador" i un "doblegador"; la seva formulació només ha pretès que el resultat tingués l'aspecte d'arruga o de colze, però per ser més realistes, altre cop seria més acurat considerar les equacions diferencials o en derivades parcials involucrades en les accions de arrugar o doblegar un material real, la qual cosa portarà a problemes numèrics i tècniques com les dels elements finits (HoSeok-Avi 96; Guillet-Léon 98). Això permetrà connectar amb els models basats en la Física (Foley-Van Dam 96, pàgina 1039; Hearn-Baker 94, pàgina 393), com els que reproduïxen el comportament de la roba i demés superfícies flexibles, etc.

- En el cas concret dels operadors arrugadors, cal aprofundir en l'aplicació de tècniques d'anàlisi de Fourier no sols per millorar l'aplicació pràctica d'aquests operadors, sinó per entendre'ls millor; al cap i a la fi, les arrugues no són més que soroll formal i el soroll es sol tractar amb sèries de Fourier (normalment per eliminar-lo!). Per altra banda, després d'haver formulat els operadors arrugadors, creiem que les sèries de Fourier també podrien encabir-se dins de la gramàtica, com a subfamília, perquè també són útils per aproximar formes, especialment si són periòdiques. Una dificultat pendent per acomplir això, en tot cas, és reconvertir els coeficients de la sèrie en termes que siguin directament significatius respecte als paràmetres rellevants de la forma que es produirà (altura, període, etc.), d'acord amb la filosofia del llenguatge funcional que proposem.

- Convé establir una relació amb el disseny paramètric, és a dir, poder introduir en el disseny, de manera articulada amb la fase de concepció, les restriccions i lligadures entre els paràmetres que cal preservar per evitar formes constructivament o funcionalment absurdes.

- Estudiar possibles generalitzacions de les funcions de transició introduïdes de (2.2.14) a (2.2.15) i també en (5.1.3) i en 5.2.4), per permetre més flexibilitat en la seva forma i en el tipus de transició que permeten. En particular, semblen prometedores generalitzacions del tipus

$$\left(\frac{(k \cdot (1+t)^n - (1-k) \cdot (1-t)^m)}{(k \cdot (1+t)^n + (1-k) \cdot (1-t)^m)} \right)^p,$$

com a bijecció de $[-1,1]$ en $[-1,1]$, o bé

$$\left(\frac{k \cdot t^n}{(k \cdot t^n + (1-k) \cdot (1-t)^m)} \right)^p,$$

com a bijecció de $[0,1]$ en $[0,1]$. En ambdós casos, $p > 0$ i $k \in (0,1)$. Per $k = 0$, la primera funció és constant -1 mentre que la segona és constant 0 . Per $k = 1$, ambdues són constants iguals a 1 .

- Hi ha un aspecte important, especialment en el cas de dissenys plans i la posterior possibilitat de “mapejar” aquests a una superfície com a textura, que no hem tractat: **es tracta del color**. Donat que qualsevol color es pot determinar donant tres nombres entre zero i u corresponents al tant per u de cadascun dels tres colors bàsics i que a cada *pixel* o a cada objecte singular podem assignar-li un color d’aquesta manera, podem jugar amb tots els recursos que hem desenvolupat per parametritzar corbes i superfícies per parametritzar també el color. Per exemple, si tenim una superfície parametritzada del tipus $\vec{S}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, definida sobre $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$, podem definir paral·lelament, sobre el mateix domini, la funció de color $\vec{C}(s,t) = (R(s,t), G(s,t), B(s,t))$, de manera que cada component d’aquesta funció prengui valors en l’interval $[0,1]$. Això assignarà a cada punt de la superfície un color, de manera que es poden produir innumbrables combinacions, tonalitats, efectes tornassolats, etc.

Capítol 6).

Aquest capítol és el dels exemples d’aplicació pràctica, per tant, el treball futur més obvi està constituït per tots els dissenys que qualsevol usuari pugui fer a partir d’ara usant els procediments que hem introduït. Particularment, sembla que el més natural i esperable és usar el mètode per portar a terme dissenys, diguem-ne, futuristes, en la línia dels actuals més avantguardistes (Foster, Gehry, Isozaki, etc.). Com que la utilitat del mètode per aquest tipus de dissenys sembla fora de dubte (en part ja s’ha apuntat en l’exemple del Gran Bazaar), els exemples que hem triat pretenien mostrar que **també** serveix per dissenys més convencionals (estadi de futbol) o fins i tot molt enrera en el temps i les mentalitats (catedral gòtica). De totes formes en un ulterior desenvolupament d’aquest treball, no estarà de més proveir de més exemples d’aplicació, centrats, aleshores, en formes actuals.

Pel que fa als continguts concrets del capítol 6, en l'exemple de la reforma del Gran Bazaar, hi ha almenys tres coses que admeten ampliació futura:

- Generalitzar la formulació de l'element arc (§6.4.1), intentant no distorsionar massa la seva claredat, per ampliar el catàleg d'arcs que es pugin generar dins d'aquest model. En particular, és interessant poder produir la forma d'arc de ferradura i similars. En aquest cas la component $x(t)$ ja no podrà ser monòtona.

- Per encreuar les galeries, a l'apartat 6.4.2.3), hem usat el **max** (fórmula (6.4.2.6)). Aquesta funció és un cas particular de t -conorma (veure apartat 3.1.2.4) i també Klement 00). Una experimentació fàcil i que pot donar resultats formals interessants, encara que poder per altres aplicacions diferents d'aquest exemple, consisteix en usar altres t -conormes.

- Just després de la fórmula (6.4.2.6) hem al·ludit a l'efecte que es produeix al substituir **max** per **min**. Cal seguir per aquest camí i, combinar això amb les superquàdriques (generalització de les superel·lipses vistes, unes i altres, al parlar dels desplaçadors paramètrics i ambientals, apartats 5.3.2.4) i 5.3.3.6) respectivament), per generar variades formes de les famílies dels tipus campana i cúpula.

Temes paral·lels.

Aquest treball està centrat en el tema de la modelització o generació de corbes i superfícies. No obstant, mentre ha anat evolucionant i prenent cos, han aparegut idees, a vegades mentre es canviaven impressions amb altres companys, que, relacionades amb el que aquí tractem, apuntaven fora del nostre tema. Algunes tenen a veure també amb el món dels gràfics per ordinador però en aspectes diferents de la pura creació d'objectes. D'altres cauen en disciplines del tot fora de l'activitat gràfica. En tot cas, per homogeneïtat no semblava oportú incloure-les aquí, però no està de més sumaritzar-les abans de posar el punt final perquè no es perdin definitivament. Aquí en citem algunes.

- Equació cartesiana de polígons i políedres. Mentre que les equacions paramètriques són útils per generar objectes, les cartesianes van bé posteriorment, quan els objectes ja generats han d'interactuar amb d'altres, s'han de modificar etc. Per exemple, la equació cartesiana serveix per resoldre interseccions i per decidir si un punt està dins, sobre o fora d'un objecte, si aquest és tancat, o si està a una banda o l'altra, etc., si és obert. Hi ha exemples típics d'equacions cartesianes, per exemple les de la recta i el pla, que són polinòmiques de grau u i les de les còniques i quàdriques, que són polinòmiques de grau dos. Dons bé, del tema de superel·lipses i superquàdriques (veure verbs desplaçadors, apartats 5.3.2.4) i 5.3.3.6)) i també dels tòpics usuals d'espais mètrics (Schweizer 83; Rudin 76; White 73), podem observar que l'equació $|x|+|y|=1$ correspon a un quadrat amb els vèrtexs sobre els eixos coordenats, mentre que afegint semieixos a i b de manera anàloga a les el·lipses, correspon a un rombe. Passant a l'espai, els

punts que verifiquen l'equació $|x| + |y| + |z| = 1$ formen un octàedre. Jugant amb transformacions afins, podem obtenir, en el pla, la equació cartesiana d'un paral·lelogram qualsevol, etc. Això suggereix que la introducció del valor absolut en les equacions del pla i del espai pot ser la via natural per obtenir equacions de polígons i políedres qualssevol. És un tema que creiem força atractiu, perquè sent les figures més típiques de la geometria clàssica, no semblen incorporades a la revolució cartesiana, poder per la obsessió per la suavitat.

- Relació amb equacions funcionals. Degut a la nostra obsessió, sobre tot en els primers temps, per obtenir formulacions globals de funcions definides per casos, o de reduir algunes funcions com ara la **part entera** o el **signe** a formulacions usant funcions més "habituals", vam obtenir una certa col·lecció de relacions funcionals més o menys exòtiques entre diferents funcions. Algunes d'aquestes, compartides amb companys de treball, han permès donar caracteritzacions, en termes d'equacions funcionals, pel **valor absolut** i la **part entera** (veure Monreal 98a). Altres relacions funcionals ja obtingudes no s'han estudiat encara i, sens dubte, se'n poden obtenir de noves. Per altra banda, una altra possible "col·laboració" profitosa entre la gramàtica funcional i les equacions funcionals consisteix en aplicar aquestes a la justificació o caracterització de les funcions i/o combinacions de funcions amb que s'han bastit les paraules i verbs de la gramàtica. En efecte, cada operador s'ha articulat usant una determinada combinació de funcions que s'ha ideat a partir d'intuïcions respecte la relació entre funcions i gràfiques, però, fins a quin punt és o no imprescindible tal o qual funció en una determinada posició d'una fórmula? És intercanviable per una altra funció amb tal de que comparteixi amb la primera determinades propietats? Si en una determinada fórmula substituïm una funció concreta per una f incògnita a la que se li exigeixen determinades propietats necessàries per que l'operador "funcioni bé" passem a tenir una equació funcional. La seva solució poder caracteritzarà la funció que havíem triat i, per tant, donarà una justificació més sòlida a la elecció que havíem fet o, en canvi, donarà una família de solucions, entre les quals, llavors, podrem triar la que sigui millor segons el criteri que s'hagi establert.

- Relació entre gràfiques i funcions. Simplement atenent a la forma que, per força ha de tenir la gràfica, hem obtingut una primitiva de la funció part entera que podíem veure en la figura 5.1.3. En efecte, (veure fig. P.1.) aquesta gràfica ha de ser una corba poligonal amb pendent entera entre cada dos valors enters de la variable, per tant, resulta

$$\int [x] dx = [x] \left(x - \frac{([x]+1)}{2} \right) + C .$$

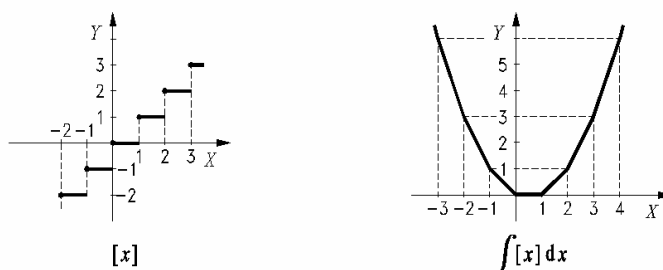


Figura P.1.

És a dir, **la forma de la gràfica com a *input* ha permès resoldre un problema analític**. Igualment, hem arribat a la formulació de les funcions components de la forma “grada” atenent a la forma que havia de tenir la seva gràfica (veure figures 6.3.3 i 6.3.4 i fórmules (6.3.2.1)). Aquests són els únics exemples possibles o bé es tracta d’una manera alternativa de treballar amb funcions i gràfiques que té més aplicacions? Si ho és, cal remarcar que aquest procediment recorre un camí invers a l’habitual: va de la gràfica a les funcions. No està de més comentar que aquesta primitiva de la part entera és correcta a diferència, per exemple, de la que dona una aplicació tant potent com ara el Maple 6[®], que és discontinua! (El Mathematica 3.0[®] ja ni ho intenta).

- El tema de les funcions periòdiques habitualment es tracta amb les tècniques de l’anàlisi de Fourier, sèries de funcions trigonomètriques, etc. Ens preguntem si els periodificadors, que hem introduït primer a l’apartat 5.2.3) com a paraules i després al 5.3.1.1) com a verbs, poden representar una manera alternativa de tractar el tema, almenys en certs casos, atès que proporcionen una periodificació amb una expressió funcional explícita i relativament curta (en termes de funcions que ja tenen implementades tots els sistemes informàtics) i, per tant, permet evitar desenvolupaments en sèrie, problemes de convergència, etc. Una aplicació és la solució de la típica equació de l’ona produïda per una corda vibrant quan es tiba pel punt mig i es deixa anar sense velocitat inicial. La solució, deguda primer a D’Alembert per tota la recta i després adaptada a un segment per Dirichlet (Tijonov 72), consisteix en periodificar la forma de perfil de teulada a dues aigües que té la corda al principi, fer-ne dues còpies i sumar-les mentre es desplacen en el temps a velocitat constant, una cap a la dreta i l’altre cap a l’esquerra. La periodificació amb una fórmula curta, enlloc d’una sèrie, dona una solució explícita de la solució i facilita els càlculs.

- De manera similar, a 5.3.6.1) hem definit els verbs esglaonadors i hem inclòs una nota en que s’observa una relació entre aquests operadors i una expressió explícita de les funcions esglaonades que intervenen en la fonamentació

de les teories d'integració. Plantegem la possibilitat de que aquesta relació tingui alguna utilitat.

Qüestió pendent global.

Per acabar, hi ha una qüestió pendent de tractament que afecta a tot el contingut d'aquest treball. Es refereix a l'estudi de la viabilitat tècnico-pràctica del nostre projecte. En altres paraules, caldrà fer una adaptació de les tècniques estàndard de CAD-CAM als requeriments específics dels objectes arquitectònics, especialment els que es poden generar amb el llenguatge funcional que hem proposat. Abans hem dit que la informàtica permet construir allò que es pot modelitzar amb una aplicació de disseny, però cal passar de la potència a l'acte, falta concretar la manera més adient de fer-ho en el nostre cas, on els objectes són força diferents dels habituals en enginyeria, per als quals s'han desenvolupant la majoria de tècniques CAD-CAM existents. Aquesta tasca és imprescindible per poder portar a terme efectivament dissenys com els que hem proposat i exigirà una estreta col·laboració interdisciplinària entre especialistes en matemàtiques, informàtica, arquitectura i enginyeria. Des d'ara mateix ja està oberta l'admissió de voluntaris!

Conclusions.

Com ja hem comentat en algun lloc, aquest treball no representa una aportació d'artilleria teòrica de matemàtiques per a les matemàtiques sinó que organitza uns recursos que provenen de les matemàtiques perquè es converteixin en noves eines pel disseny, per eixamplar allò que sigui possible concebre i portar a terme dins del món del disseny que involucra producció gràfica. L'única tesi que conté és la relativa al ja comentat desgavell entre les matemàtiques presents en la fase de concepció i les emprades en la fase d'execució, degut a una desigual adaptació de les dues fases a la irrupció de l'eina cibernètica, i, per tant, a la necessitat d'adequar el marc matemàtic en la fase de concepció. Només així el sistema dissenyador-ordinador no "grinyolarà" i s'aprofitaran plenament els recursos de la nova eina. Un cop afirmat això, només queda proposar una manera concreta (segurament no la única) de dur a terme aquesta adequació i ho hem fet proposant un llenguatge funcional, que no és més que una manera organitzada i sistemàtica d'emprar les funcions que ja estan de fa temps disponibles en el *software* habitual, per tal d'optimitzar el seu ús. Ja que proposem un mètode, també hem donat exemples d'aplicació pràctica. Addicionalment, a la part I, hem proposat algunes millores o ampliacions en les tècniques de disseny lliure.

Només queda esperar que tota aquesta feina sigui profitosa i que, a partir de la primera col·lecció de lletres, paraules i verbs que hem proposat, es vagi afegint gent que creï nous operadors, noves combinacions de funcions, noves formes per incorporar al repertori, que després podran compartides per mitjà de qualsevol fòrum públic, com ara Internet, fins consolidar (perquè no?) una nova disciplina en el món del disseny.

Una altra possible evolució, atès que dominar aquestes tècniques pot ser una mica feixuc per persones poc entrenades a imaginar-se la relació entre fórmules matemàtiques i formes sensibles, seria la preparació d'especialistes que, a través de bufets, assessoressin els dissenyadors, com fan, en altres terrenys, els advocats, els assessors financers, etc. Aquests bufets haurien de comptar entre el seu personal amb persones properes a les matemàtiques, la informàtica, etc. i persones properes a la construcció, el disseny, l'art, etc. per una bona transició i engalzament entre ambdues sensibilitats, difícils de conjuminar en un sol individu.

El que importa és que els creadors sàpiguen que poden concebre i fer (amb control sobre el que fan) molt més del que creien. Un cop en siguin conscients i en tinguin ganes, el com s'hi arribi és el de menys: com diu un proverbi swahili, "on hi ha un desig, hi ha un camí".

Barcelona, tardor de 2.001.

apèndix

Apèndix

Dins d'aquest apèndix s'inclouen els llistats dels principals programes i funcions que hem desenvolupat a fi de dur a terme de manera efectiva els mètodes i tècniques que hem proposat al llarg d'aquest treball, especialment el mètode d'interpolació proposat en el capítol 2 i els exemples del capítol 6. Representen, per tant, un esforç per sortir de la teoria cap a les aplicacions. Tanmateix, encara que, com es pot veure en les il·lustracions que acompanyen aquest treball, aquest programes ja són operatius, ja permeten “fer coses”, es clar que es tracta d'una operativitat “de laboratori”, per ús gairebé exclusiu de l'autor, no són versions comercialitzables tal com estan. Tampoc podia ser aquest l'objectiu, només es pretenia mostrar el que es pot fer o, millor dit, suggerir part del que es pot fer.

Els programes estan organitzats per capítols, encara que no tots els capítols tenen associats programes o funcions rellevants; en aquestos casos (capítols 1 i 4), no apareix cap secció dedicada a ells. Els comentaris als programes van inclosos dins del seu codi font.

Programes del capítol 2.

interpcf.lsp

```

;
;PROGRAMA INTERPcf.LSP
;
; =INTERP, amb particions de la unitat simplificats i
; reformulats en termes de teoria de la iteració de Targonski. "cf", perquè
; aquesta versió contempla la possibilitat de que l'usuari imposi dues
; condicions de frontera a cada costat. Pretén ser la versió definitiva.
; La funció que cal invocar al usar aquest programa s'anomena "interp".
;
;Aquest programa interpola una corba passant per n+1 punts (nodes) donats
;utilitzant en cada interval una ponderació entre dos "splines" cúbics
;natural (llevat dels extrems), passant per cinc nodes, un centrat en el
;node esquerre del interval i l'altre en el dret. La corba pot ésser oberta
;o tancada, llavors el primer node és també l'últim. En el cas obert,
;en els dos primers i els dos darrers intervals s'utilitza el mateix "spline".
; En el cas tancat, s'afegeixen dos nodes a cada extrem: el n+2 i n+3 són el
;0 i el 1 repetits i els -1 i -2 són el n+1 i el n repetits.
;Per utilitzar-lo, cal donar el nivell de detall desitjat, donant la longitud
;aproximada entre cada dos punts de pas que seran calculats, entre els quals
;es dibuixarà un segment recte. S'anomenen trams aquests segments.
;A continuació s'han d'anar donant, mitjançant un digitalizador, mouse, etc.
;els nodes de pas, en l'ordre desitjat (es poden utilitzar las facilitats del
;AutoCAD per la selecció de entitats), acabant amb un RETURN si es vol corba
;oberta o la lletra "c" (sense cometes) si es vol tancada.
;En el cas de corba oberta, l'usuari és requerit a donar els vectors derivada
;primera i segona en cada extrem, podent triar, independentment per cada
;extrem, entre no donar-ne cap, donar-ne un o tots dos vectors. En cada cas
;el programa calcula les condicions que falten per determinar la corba.
;(veure capítol 2 de la tesi pels detalls). Al final, el programa pregunta
;si es desitja que es dibuixin els quatre vectors citats, tant si els ha
;proporcionat l'usuari com si els ha calculat el programa.
;Per traçar la corba fa falta construir la parametrització, donant valors
;al paràmetre t per cada node. Per això es fa que la corba passi pel node 0
;pel valor 0 del paràmetre i la resta de valors del paràmetre s'obtenen per
;un dels tres mètodes següents a escollir: mètode uniforme, mètode de la
;longitud de la corda o mètode del "centroid" o centrípet.
;
;FUNCIONS AUXILIARS
;
;Es defineixen unes funcions partició de la unitat que valen 1 en un node i 0
;en la resta de nodes, essent idènticament nul·les fora del interval que va
;del node precedent al següent i que són de classe C1 (versió simplificada).
;s1 és la part dreta de la corresponent al node que correspon al valor tu
;del paràmetre i s2 la part esquerra del següent node i valor del paràmetre.
;estan basades en iteradors continus.
;
(defun s1 (t tu tv)
  (/ (* (- tv t) (- tv t))
     (+ (* (- t tu) (- t tu)) (* (- tv t) (- tv t))))
)
)
(defun s2 (t tu tv)
  (/ (* (- t tu) (- t tu))
     (+ (* (- t tu) (- t tu)) (* (- tv t) (- tv t))))
)
)
;
;les funcions g formen part d'una base de "splines" cúbics. dl1 i dl2 són

```


Programes del capítol 2.

```
;les seves derivades. Hi ha una funció g per cada node des del 0 fins el
;n-1. La resta de la base és la recta t-ti i la paràbola 0.5*(t-ti)^2.
;Hi ha una altre base de "splines", la de les gamma's, que és la adient
;pel càlcul directe, que s'ha de posar en termes d'aquesta base.
;
(defun parab (t tu) (* 0.5 (- t tu) (- t tu)))
;
(defun g (t tu tv)
  (/ (* 0.5 (- t tu) (- t tu) (+ (- t tu) (abs (- t tu))))
     (* (- tv tu) (- tv tu) (- tv tu))
  )
)
(defun dlq (t tu tv)
  (/ (* 1.5 (- t tu) (+ (- t tu) (abs (- t tu))))
     (* (- tv tu) (- tv tu) (- tv tu))
  )
)
(defun d2g (t tu tv)
  (/ (* 3.0 (+ (- t tu) (abs (- t tu))))
     (* (- tv tu) (- tv tu) (- tv tu))
  )
)
;
;A continuació es defineixen les funcions corresponents a cada possible
;parametrització. Cada un dóna el valor en el que s'ha d'incrementar el
;paràmetre al passar del node (xa,ya) al (xb,yb).
;
(defun uniforme (xa xb ya yb) 1.0)
(defun longcord (xa xb ya yb) (sqrt (+ (* (- xb xa) (- xb xa))
                                       (* (- yb ya) (- yb ya))
                                       )
)
)
(defun centroid (xa xb ya yb) (sqrt (sqrt (+ (* (- xb xa) (- xb xa))
                                             (* (- yb ya) (- yb ya))
                                             )
)
)
)
;
; càlcul d'un determinant 2x2, pel càlcul de condicions de frontera.
;
(defun det (ma11 ma12 ma21 ma22) (- (* ma11 ma22) (* ma12 ma21)))
;
; funció que calcula el vector tangent inicial i el vector derivada
; segona inicial dels splines que comencen en el primer node o que
; acaben en el darrer, en funció de les condicions de frontera donades
; per l'usuari. Veure les funcions calcoefs"n".
;
(defun condsfrontinici ()
  (cond
    ; 1er. Cas: quan no s'ha donat cap vector.
    ((and (not vectaninici) (not vecder2inici))
     (setq x10q 0.0 y10q 0.0
           x10p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 x10q) betx2)) alf22)
           y10p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 y10q) bety2)) alf22)
     )
    )
    ; 2on. Cas: Només s'ha donat el "derivada 2a.".
    ((and (not vectaninici) (listp vecder2inici))
     (setq x10q xiq y10q yiq
           x10p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 x10q) betx2)) alf22)
           y10p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 y10q) bety2)) alf22)
     )
    )
    ; etc.
    ((and (listp vectaninici) (not vecder2inici))

```

```

    (setq x10p xip y10p yip
          x10q (/ (* -1.0 (+ (* alf22 x10p) betx2)) alf21)
          y10q (/ (* -1.0 (+ (* alf22 y10p) bety2)) alf21)
    )
  )
  ((and (listp vectaninici) (listp vecder2inici))
   (setq x10p xip y10p yip x10q xiq y10q yiq)
  )
)
(setq veloinici (list x10p y10p)
      acceinici (list x10q y10q)
)
)
(defun condsfrontfinal () ; comentaris com a la funció anterior.
  (cond
    ((and (not vectanfinal) (not vecder2final))
     (setq x20q 0.0 y20q 0.0
           x20p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 x20q) betx2)) alf22)
           y20p (/ (* -1.0 (+ (* alf21 y20q) bety2)) alf22)
     )
    )
    ((and (not vectanfinal) (listp vecder2final))
     (setq x20q 0.0 y20q 0.0
           x20p (/ (- xfq betx2) alf22)
           y20p (/ (- yfq bety2) alf22)
     )
    )
    ((and (listp vectanfinal) (not vecder2final))
     (setq x20q 0.0 y20q 0.0
           x20p (/ (- xfp betx1) alf12)
           y20p (/ (- yfp bety1) alf12)
     )
    )
    ((and (listp vectanfinal) (listp vecder2final))
     (setq x20p (/ (det alf11 (- xfp betx1) alf21 (- xfq betx2))
                  (det alf11 alf12 alf21 alf22))
           y20p (/ (det alf11 (- yfp bety1) alf21 (- yfq bety2))
                  (det alf11 alf12 alf21 alf22))
           x20q (/ (det (- xfp betx1) alf12 (- xfq betx2) alf22)
                  (det alf11 alf12 alf21 alf22))
           y20q (/ (det (- yfp bety1) alf12 (- yfq bety2) alf22)
                  (det alf11 alf12 alf21 alf22))
     )
    )
  )
  (setq velofinal (list (+ (* alf11 x20q) (* alf12 x20p) betx1)
                        (+ (* alf11 y20q) (* alf12 y20p) bety1)
                        )
          accefina (list (+ (* alf21 x20q) (* alf22 x20p) betx2)
                        (+ (* alf21 y20q) (* alf22 y20p) bety2)
                        )
  )
)
)
;
;Les següents funcions calculen els coeficients que determinen els
;dos "splines" que intervenen en cada interval, distingint entre 2,
;3,4, 5 o més de 5 nodes. Els que tenen un 1 com primer numero després
;de la lletra corresponen al de la esquerra i els que tenen un 2, al de la
;dreta. Els xki i yki són les coordenades dels cinc punts de cada "spline".
;Pels dos primers intervals i els dos darrers, s'utilitza el mateix "spline",
;ajustat al extrem, a dreta i esquerra del interval.

```

Programes del capítol 2.

```
;tki són el valors del paràmetre al passar pel node i. hki els increments de
;t acumulats des del ti0. gkij els valors de les funcions g que s'indiquen.
;akij els valors corresponents de la matriu inversa, que dóna els elements de
;la base de las gamma's en termes de la base de les g's. xk0p i yk0p són els
;valors del pendent de cada funció component en el extrem esquerre
;xk0q i yk0q ídem. per les segones derivades. El seu valor dependrà de les
;condicions de frontera proveïts per l'usuari.
;bxki i byki són, finalment, els coeficients de les components de cada "spline"
;en la base de les g's, es numeren de 1 a n. Fins a n=5, no cal distingir entre
;k=1 i k=2, perquè els únics dos splines que apareixen comparteixen els
;mateixos nodes.
;
(defun calcoefs1 ()
  (setq x10 (car (cdr (assoc 0 punts)))
        x11 (car (cdr (assoc 1 punts)))
        y10 (car (cdr (cdr (assoc 0 punts))))
        y11 (car (cdr (cdr (assoc 1 punts))))
        t10 (car (cdr (assoc 0 tllist)))
        t11 (car (cdr (assoc 1 tllist)))
        h11 (- t11 t10)
        a141 (* -0.5 h11 h11)
        a142 (* -1.0 h11)
  )
)
(defun coefscondsfront1 ()
  (setq alf11 (+ (* 1.0 a141 d1g101) (- t11 t10))
        alf12 (+ 1.0 (* a142 d1g101))
        alf21 (+ 1.0 (* a141 d2g101))
        alf22 (* 1.0 a142 d2g101)
        betx1 (* (- x11 x10) d1g101)
        betx2 (* (- x11 x10) d2g101)
        bety1 (* (- y11 y10) d1g101)
        bety2 (* (- y11 y10) d2g101)
  )
)
(defun calcbs1 ()
  (setq bx11 (+ (* x10q a141) (* x10p a142) (* x10 -1.0) x11)
        by11 (+ (* y10q a141) (* y10p a142) (* y10 -1.0) y11)
        bx21 (+ (* x20q a141) (* x20p a142) (* x10 -1.0) x11)
        by21 (+ (* y20q a141) (* y20p a142) (* y10 -1.0) y11)
  )
)
(defun calcoefs2 ()
  (calcoefs1)
  (setq x12 (car (cdr (assoc 2 punts)))
        y12 (car (cdr (cdr (assoc 2 punts))))
        t12 (car (cdr (assoc 2 tllist)))
        h12 (- t12 t10)
        g102 (g t12 t10 t11)
        a151 (* -1.0 (+ (* 0.5 h12 h12) (* a141 g102)))
        a152 (* -1.0 (+ h12 (* a142 g102)))
        a153 (- g102 1.0)
        a154 (* -1.0 g102)
  )
)
(defun coefscondsfront2 ()
  (setq alf11 (+ (* 1.0 a141 d1g102) (* a151 d1g112) (- t12 t10))
        alf12 (+ 1.0 (* a142 d1g102) (* a152 d1g112))
        alf21 (+ 1.0 (* a141 d2g102) (* a151 d2g112))
        alf22 (+ (* 1.0 a142 d2g102) (* a152 d2g112))
        betx1 (+ (* (- x11 x10) d1g102)
                 (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d1g112)
  )
        betx2 (+ (* (- x11 x10) d2g102)
                 (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d2g112)
  )
)
)
```

```

    bety1 (+ (* (- y11 y10) d1g102)
             (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d1g112)
          )
    bety2 (+ (* (- y11 y10) d2g102)
             (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d2g112)
          )
  )
)
(defun calcbs2 ()
  (calcbs1)
  (setq
    bx12 (+ (* x10q a151) (* x10p a152)
            (* x10 a153) (* x11 a154) x12
          )
    bx22 (+ (* x20q a151) (* x20p a152)
            (* x10 a153) (* x11 a154) x12
          )
    by12 (+ (* y10q a151) (* y10p a152)
            (* y10 a153) (* y11 a154) y12
          )
    by22 (+ (* y20q a151) (* y20p a152)
            (* y10 a153) (* y11 a154) y12
          )
  )
)
)
(defun calcoefs3 ()
  (calcoefs2)
  (setq
    x13 (car (cdr (assoc 3 punts)))
    y13 (car (cdr (cdr (assoc 3 punts))))
    t13 (car (cdr (assoc 3 t1list)))
    h13 (- t13 t10)
    g102 (g t12 t10 t11) g103 (g t13 t10 t11)
    g113 (g t13 t11 t12)
    a161 (* -1.0 (+ (* 0.5 h13 h13) (* a141 g103) (* a151 g113)))
    a162 (* -1.0 (+ h13 (* a142 g103) (* a152 g113)))
    a163 (- g103 (+ 1.0 (* a153 g113)))
    a164 (* -1.0 (+ g103 (* a154 g113)))
    a165 (* -1.0 g113)
  )
)
)
(defun coefscscondsfront3 ()
  (setq alf11 (+ (* 1.0 a141 d1g103) (* a151 d1g113)
                (* a161 d1g123) (- t13 t10)
              )
        alf12 (+ 1.0 (* a142 d1g103) (* a152 d1g113)
                (* a162 d1g123)
              )
        alf21 (+ 1.0 (* a141 d2g103) (* a151 d2g113)
                (* a161 d2g123)
              )
        alf22 (+ (* 1.0 a142 d2g103) (* a152 d2g113)
                (* a162 d2g123)
              )
        betx1 (+ (* (- x11 x10) d1g103)
                (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d1g113)
                (* (+ (* a163 x10) (* a164 x11) (* a165 x12) x13)
                  d1g123
                )
              )
        betx2 (+ (* (- x11 x10) d2g103)
                (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d2g113)
                (* (+ (* a163 x10) (* a164 x11) (* a165 x12) x13)
                  d2g123
                )
              )
        bety1 (+ (* (- y11 y10) d1g103)
                (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d1g113)
              )
  )
)

```

Programes del capítol 2.

```

        (* (+ (* a163 y10) (* a164 y11) (* a165 y12) y13)
           d1g123
        )
    )
    bety2 (+ (* (- y11 y10) d2g103)
            (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d2g113)
            (* (+ (* a163 y10) (* a164 y11) (* a165 y12) y13)
              d2g123
            )
    )
)
(defun calcbs3 ()
  (calcbs2)
  (setq bx13 (+ (* x10q a161) (* x10p a162) (* x10 a163)
                (* x11 a164) (* x12 a165) x13)
        )
        bx23 (+ (* x20q a161) (* x20p a162) (* x10 a163)
                (* x11 a164) (* x12 a165) x13
        )
        by13 (+ (* y10q a161) (* y10p a162) (* y10 a163)
                (* y11 a164) (* y12 a165) y13
        )
        by23 (+ (* y20q a161) (* y20p a162) (* y10 a163)
                (* y11 a164) (* y12 a165) y13
        )
  )
)
(defun calcoefs4 ()
  (calcoefs3)
  (setq x14 (car (cdr (assoc 4 punts)))
        y14 (car (cdr (cdr (assoc 4 punts))))
        t14 (car (cdr (assoc 4 tllist)))
        h14 (- t14 t10)
        g102 (g t12 t10 t11) g103 (g t13 t10 t11) g104 (g t14 t10 t11)
        g113 (g t13 t11 t12) g114 (g t14 t11 t12) g124 (g t14 t12 t13)
        a171 (* -1.0
              (+ (* 0.5 h14 h14) (* a141 g104)
                (* a151 g114) (* a161 g124)
              )
            )
        a172 (* -1.0 (+ h14 (* a142 g104) (* a152 g114) (* a162 g124)))
        a173 (- g104 (+ 1.0 (* a153 g114) (* a163 g124)))
        a174 (* -1.0 (+ g104 (* a154 g114) (* a164 g124)))
        a175 (* -1.0 (+ g114 (* a165 g124))) a176 (* -1.0 g124)
  )
)
(defun coefscondsfront4 ()
  (setq alf11 (+ (* 1.0 a141 d1g104) (* a151 d1g114)
                 (* a161 d1g124) (* a171 d1g134) (- t14 t10)
  )
        )
        alf12 (+ 1.0 (* a142 d1g104) (* a152 d1g114)
                (* a162 d1g124) (* a172 d1g134)
        )
        )
        alf21 (+ 1.0 (* a141 d2g104) (* a151 d2g114)
                (* a161 d2g124) (* a171 d2g134)
        )
        )
        alf22 (+ (* 1.0 a142 d2g104) (* a152 d2g114)
                (* a162 d2g124) (* a172 d2g134)
        )
        )
        betx1 (+ (* (- x11 x10) d1g104)
                (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d1g114)
                (* (+ (* a163 x10) (* a164 x11) (* a165 x12) x13)
                  d1g124
                )
                (* (+ (* a173 x10) (* a174 x11) (* a175 x12)
                    (* a176 x13) x14
                )
  )
)

```

```

        )
        d1g134
    )
    )
    betx2 (+ (* (- x11 x10) d2g104)
            (* (+ (* a153 x10) (* a154 x11) x12) d2g114)
            (* (+ (* a163 x10) (* a164 x11) (* a165 x12) x13)
              d2g124)
            )
            (* (+ (* a173 x10) (* a174 x11) (* a175 x12)
              (* a176 x13) x14)
              )
            )
            d2g134
        )
    )
    bety1 (+ (* (- y11 y10) d1g104)
            (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d1g114)
            (* (+ (* a163 y10) (* a164 y11) (* a165 y12) y13)
              d1g124)
            )
            (* (+ (* a173 y10) (* a174 y11) (* a175 y12)
              (* a176 y13) y14)
              )
            )
            d1g134
        )
    )
    bety2 (+ (* (- y11 y10) d2g104)
            (* (+ (* a153 y10) (* a154 y11) y12) d2g114)
            (* (+ (* a163 y10) (* a164 y11) (* a165 y12) y13)
              d2g124)
            )
            (* (+ (* a173 y10) (* a174 y11) (* a175 y12)
              (* a176 y13) y14)
              )
            )
            d2g134
        )
    )
)
)
(defun calcbs4 ()
  (calcbs3)
  (setq bx14 (+ (* x10q a171) (* x10p a172) (* x10 a173)
                (* x11 a174) (* x12 a175) (* x13 a176)
                x14)
        )
  (setq bx24 (+ (* x20q a171) (* x20p a172) (* x10 a173)
                (* x11 a174) (* x12 a175) (* x13 a176)
                x14)
        )
  (setq by14 (+ (* y10q a171) (* y10p a172) (* y10 a173)
                (* y11 a174) (* y12 a175) (* y13 a176)
                y14)
         )
  (setq by24 (+ (* y20q a171) (* y20p a172) (* y10 a173)
                (* y11 a174) (* y12 a175) (* y13 a176)
                y14)
         )
)
)
(defun calcoefsmede4 ()
  (setq x10 (car (cdr (assoc k1 punts))))
        x11 (car (cdr (assoc (+ k1 1) punts)))
        x12 (car (cdr (assoc (+ k1 2) punts)))
        x13 (car (cdr (assoc (+ k1 3) punts)))
        x14 (car (cdr (assoc (+ k1 4) punts)))
        y10 (car (cdr (cdr (assoc k1 punts))))
        y11 (car (cdr (cdr (assoc (+ k1 1) punts))))
)
)

```

Programes del capítol 2.

```
y12 (car (cdr (cdr (assoc (+ k1 2) punts))))
y13 (car (cdr (cdr (assoc (+ k1 3) punts))))
y14 (car (cdr (cdr (assoc (+ k1 4) punts))))
x20 (car (cdr (assoc k2 punts)))
x21 (car (cdr (assoc (+ k2 1) punts)))
x22 (car (cdr (assoc (+ k2 2) punts)))
x23 (car (cdr (assoc (+ k2 3) punts)))
x24 (car (cdr (assoc (+ k2 4) punts)))
y20 (car (cdr (cdr (assoc k2 punts))))
y21 (car (cdr (cdr (assoc (+ k2 1) punts))))
y22 (car (cdr (cdr (assoc (+ k2 2) punts))))
y23 (car (cdr (cdr (assoc (+ k2 3) punts))))
y24 (car (cdr (cdr (assoc (+ k2 4) punts))))
t10 (car (cdr (assoc k1 tllist)))
t11 (car (cdr (assoc (+ k1 1) tllist)))
t12 (car (cdr (assoc (+ k1 2) tllist)))
t13 (car (cdr (assoc (+ k1 3) tllist)))
t14 (car (cdr (assoc (+ k1 4) tllist)))
t20 (car (cdr (assoc k2 tllist)))
t21 (car (cdr (assoc (+ k2 1) tllist)))
t22 (car (cdr (assoc (+ k2 2) tllist)))
t23 (car (cdr (assoc (+ k2 3) tllist)))
t24 (car (cdr (assoc (+ k2 4) tllist)))
h11 (- t11 t10) h12 (- t12 t10) h13 (- t13 t10) h14 (- t14 t10)
h21 (- t21 t20) h22 (- t22 t20) h23 (- t23 t20) h24 (- t24 t20)
g102 (g t12 t10 t11) g103 (g t13 t10 t11) g104 (g t14 t10 t11)
g113 (g t13 t11 t12) g114 (g t14 t11 t12) g124 (g t14 t12 t13)
g202 (g t22 t20 t21) g203 (g t23 t20 t21) g204 (g t24 t20 t21)
g213 (g t23 t21 t22) g214 (g t24 t21 t22) g224 (g t24 t22 t23)
a141 (* -0.5 h11 h11) a142 (* -1.0 h11)
a151 (* -1.0 (+ (* 0.5 h12 h12) (* a141 g102)))
a152 (* -1.0 (+ h12 (* a142 g102)))
a153 (- g102 1.0) a154 (* -1.0 g102)
a161 (* -1.0 (+ (* 0.5 h13 h13) (* a141 g103) (* a151 g113)))
a162 (* -1.0 (+ h13 (* a142 g103) (* a152 g113)))
a163 (- g103 (+ 1.0 (* a153 g113)))
a164 (* -1.0 (+ g103 (* a154 g113))) a165 (* -1.0 g113)
a171 (* -1.0
      (+ (* 0.5 h14 h14) (* a141 g104)
        (* a151 g114) (* a161 g124)
      )
    )
a172 (* -1.0 (+ h14 (* a142 g104) (* a152 g114) (* a162 g124)))
a173 (- g104 (+ 1.0 (* a153 g114) (* a163 g124)))
a174 (* -1.0 (+ g104 (* a154 g114) (* a164 g124)))
a175 (* -1.0 (+ g114 (* a165 g124))) a176 (* -1.0 g124)
a241 (* -0.5 h21 h21) a242 (* -1.0 h21)
a251 (* -1.0 (+ (* 0.5 h22 h22) (* a241 g202)))
a252 (* -1.0 (+ h22 (* a242 g202)))
a253 (- g202 1.0) a254 (* -1.0 g202)
a261 (* -1.0 (+ (* 0.5 h23 h23) (* a241 g203) (* a251 g213)))
a262 (* -1.0 (+ h23 (* a242 g203) (* a252 g213)))
a263 (- g203 (+ 1.0 (* a253 g213)))
a264 (* -1.0 (+ g203 (* a254 g213))) a265 (* -1.0 g213)
a271 (* -1.0
      (+ (* 0.5 h24 h24) (* a241 g204)
        (* a251 g214) (* a261 g224)
      )
    )
a272 (* -1.0 (+ h24 (* a242 g204) (* a252 g214) (* a262 g224)))
a273 (- g204 (+ 1.0 (* a253 g214) (* a263 g224)))
a274 (* -1.0 (+ g204 (* a254 g214) (* a264 g224)))
a275 (* -1.0 (+ g214 (* a265 g224))) a276 (* -1.0 g224)
)
)
(defun condsfrontinterns1 () ; pels trams interns de la corba.
                          ; pel cas de corba tancada, tots els
```

```

; trams són interns.
; el 1 és pel spline pur de l'esquerra.
(setq x10q 0.0
  x10p (/ (* -1.0
    (+ (* (d2g t14 t10 t11) (- x11 x10))
      (* (d2g t14 t11 t12)
        (+ (* x10 a153) (* x11 a154) x12)
      )
      (* (d2g t14 t12 t13)
        (+ (* x10 a163) (* x11 a164) (* x12 a165) x13)
      )
      (* (d2g t14 t13 t14)
        (+ (* x10 a173) (* x11 a174)
          (* x12 a175) (* x13 a176) x14
        )
      )
    )
  )
  (+ (* (d2g t14 t10 t11) a142) (* (d2g t14 t11 t12) a152)
    (* (d2g t14 t12 t13) a162) (* (d2g t14 t13 t14) a172)
  )
)
y10q 0.0
y10p (/ (* -1.0
  (+ (* (d2g t14 t10 t11) (- y11 y10))
    (* (d2g t14 t11 t12)
      (+ (* y10 a153) (* y11 a154) y12)
    )
    (* (d2g t14 t12 t13)
      (+ (* y10 a163) (* y11 a164) (* y12 a165) y13)
    )
    (* (d2g t14 t13 t14)
      (+ (* y10 a173) (* y11 a174)
        (* y12 a175) (* y13 a176) y14
      )
    )
  )
  (+ (* (d2g t14 t10 t11) a142) (* (d2g t14 t11 t12) a152)
    (* (d2g t14 t12 t13) a162) (* (d2g t14 t13 t14) a172)
  )
)
)
(defun condsfrontinterns2 () ; el 2 és pel spline pur de la dreta.
  (setq x20q 0.0
    x20p (/ (* -1.0
      (+ (* (d2g t24 t20 t21) (- x21 x20))
        (* (d2g t24 t21 t22)
          (+ (* x20 a253) (* x21 a254) x22)
        )
        (* (d2g t24 t22 t23)
          (+ (* x20 a263) (* x21 a264) (* x22 a265) x23)
        )
        (* (d2g t24 t23 t24)
          (+ (* x20 a273) (* x21 a274)
            (* x22 a275) (* x23 a276) x24
          )
        )
      )
    )
    (+ (* (d2g t24 t20 t21) a242) (* (d2g t24 t21 t22) a252)
      (* (d2g t24 t22 t23) a262) (* (d2g t24 t23 t24) a272)
    )
  )
  y20q 0.0
  y20p (/ (* -1.0

```


Programes del capítol 2.

```

      (* (+ (* a263 y20) (* a264 y21) (* a265 y22) y23)
         dlgl24
      )
      (* (+ (* a273 y20) (* a274 y21) (* a275 y22)
           (* a276 y23) y24)
         dlgl34
      )
    )
  bety2 (+ (* (- y21 y20) d2g104)
         (* (+ (* a253 y20) (* a254 y21) y22) d2g114)
         (* (+ (* a263 y20) (* a264 y21) (* a265 y22) y23)
            d2g124)
         (* (+ (* a273 y20) (* a274 y21) (* a275 y22)
            (* a276 y23) y24)
            d2g134)
    )
)
)
(defun condsfrontmesde4 ()
  (cond
    ((= k1 0)
     (coefscondsfrontlmesde4)
     (condsfrontinici)
    )
    ((and (< 0 k1) (< k1 (- n 4)))
     (condsfrontinterns1)
    )
    ((= k1 (- n 4))
     (coefscondsfrontlmesde4)
     (condsfrontfinal)
     (setq x10q x20q y10q y20q x10p x20p y10p y20p)
     ; noti's que, si k1=n-4, k2 també i els dos splines són iguals.
    )
  )
  (cond
    ((= k2 0)
     (setq x20q x10q y20q y10q x20p x10p y20p y10p)
     ; noti's que, si k2=0, k1 també, els dos splines són iguals i
     ; les condicions d'extrem ja s'hauran calculat en el "cond" anterior.
    )
    ((and (< 0 k2) (< k2 (- n 4)))
     (condsfrontinterns2)
    )
    ((and (= k2 (- n 4)) (< k1 k2))
     ; el cas k2=k1=n-4, ja s'ha calculat en tercer cas del "cond" anterior.
     (coefscondsfront2mesde4)
     (condsfrontfinal)
    )
  )
)
)
(defun calcbsmesde4 ()
  (setq bx11 (+ (* x10q a141) (* x10p a142) (* x10 -1.0) x11)
        bx12 (+ (* x10q a151) (* x10p a152) (* x10 a153)
                (* x11 a154) x12)
        )
  (setq bx13 (+ (* x10q a161) (* x10p a162) (* x10 a163)
                (* x11 a164) (* x12 a165) x13)
        )
  (setq bx14 (+ (* x10q a171) (* x10p a172) (* x10 a173)
                (* x11 a174) (* x12 a175) (* x13 a176) x14)
        )
  (setq by11 (+ (* y10q a141) (* y10p a142) (* y10 -1.0) y11)
        by12 (+ (* y10q a151) (* y10p a152) (* y10 a153)
                )
  )
)

```

```

        (* y11 a154) y12
    )
by13 (+ (* y10q a161) (* y10p a162) (* y10 a163)
      (* y11 a164) (* y12 a165) y13
    )
by14 (+ (* y10q a171) (* y10p a172) (* y10 a173)
      (* y11 a174) (* y12 a175) (* y13 a176) y14
    )
bx21 (+ (* x20q a241) (* x20p a242) (* x20 -1.0) x21)
bx22 (+ (* x20q a251) (* x20p a252) (* x20 a253)
      (* x21 a254) x22
    )
bx23 (+ (* x20q a261) (* x20p a262) (* x20 a263)
      (* x21 a264) (* x22 a265) x23
    )
bx24 (+ (* x20q a271) (* x20p a272) (* x20 a273)
      (* x21 a274) (* x22 a275) (* x23 a276) x24
    )
by21 (+ (* y20q a241) (* y20p a242) (* y20 -1.0) y21)
by22 (+ (* y20q a251) (* y20p a252) (* y20 a253)
      (* y21 a254) y22
    )
by23 (+ (* y20q a261) (* y20p a262) (* y20 a263)
      (* y21 a264) (* y22 a265) y23
    )
by24 (+ (* y20q a271) (* y20p a272) (* y20 a273)
      (* y21 a274) (* y22 a275) (* y23 a276) y24
    )
)
)
;
;La funció interval dibuixa l'interval de corba entre el node i i el i+1.
;Donada la finesa mitjançant la variable u, calcula la distància del taxista
;entre el dos nodes i, dividit per u, dóna el número de divisions que s'han
;de fer en l'interval. Com a mínim es faran dos divisions. Dividint l'increment
;del paràmetre per aquest valor nt dóna el pas del paràmetre entre dos punts
;successius a calcular. Finalment està el bucle que dibuixa l'interval,
;assegurant-se de que el darrer punt és justament el node i+1.
;
(defun interval ()
  (progn
    (setq xa (car (cdr (assoc i punts)))
          xb (car (cdr (assoc (1+ i) punts)))
          ya (car (cdr (cdr (assoc i punts))))
          yb (car (cdr (cdr (assoc (1+ i) punts))))
          ta (car (cdr (assoc i tllist)))
          tb (car (cdr (assoc (1+ i) tllist)))
          nt (fix (max 2.1 (/ (+ (abs (- xb xa))
                                (abs (- yb ya))
                                )
                            u)
                    )
    )
    )
    )
    pas (/ (- tb ta) nt)
    t ta
  )
  (repeat (- (atoi (rtos nt)) 1)
    (command (list (x (setq t (+ t pas))) (y t)))
  )
  (command (cdr (assoc (setq i (1+ i)) punts)))
)
)
;
;
;

```

Programes del capítol 2.

```
;FUNCIO PRINCIPAL.
;
;
(defun c:interp ()
  (setq eco (getvar "cmdecho") blip (getvar "blipmode"))
  (setvar "cmdecho" 0)
  (setvar "blipmode" 1)
  (setq u (getreal "\nLongitud aproximada de cada tram?: "))
  (while (or (not u) (zerop u) (minusp u))
    (prompt "no és un nombre real positiu. ")
    (setq u (getreal "\nLongitud aproximada de cada tram?: ")))
  )
  (setq par (getstring
    "\nMètode de parametrització (Uniform (U), Long. de corda (L),
Centroid (C)) <C>: "
  )
  )
  param (cond ((equal par nil) centroid)
    ((equal par "") centroid)
    ((equal par "U") uniforme)
    ((equal par "u") uniforme)
    ((equal par "L") longcord)
    ((equal par "l") longcord)
    ((equal par "C") centroid)
    ((equal par "c") centroid)
    (t centroid)
  )
  p0 (progn (initget "C") (getpoint "\nDóna punt: "))
  i 0 punts nil
)
;
;u servirà de base aproximada pel càlcul de l'increment del paràmetre
;en cada node. p0 rep els successius punts donats pel usuari que s'acumularan
;en la llista de llistes indexades que s'anomena punts. "initget c" permetrà
;acabar amb una "c" per tancar la corba, si es vol.
;Amb par s'assigna a param el valor de la funció escollida, C per defecte.
;recordar que la "t" del últim condicional vol dir "true" i en aquest cas
;significa que si el Input no és cap dels previstos, s'assigna el defecte.
;
(while (and p0 (listp p0));mentre p0 sigui una llista, anem donant punts.
  ;notar que si p0=nil llavors (listp p0)=T,
  ;per això el and.
  (setq punts (append punts (list (append (list i) p0)))
    i (1+ i)
    p0 (progn (initget "C") (getpoint "\nDóna punt: ")))
  )
)
;
;els nodes (punts donats) es numeren de 0 a n, per tant n val el num. de
;nodes menys 1.
;
(setq n (- (length punts) 1) i 1 tllist (list (list 0 0)) tac 0)
(while (<= i n)
  ;aquí es defineixen el valors del paràmetre per cada node
  ;tac guarda el valor de t acumulat i els successius valors de t,
  ;calculats mitjançant el mètode escollit, es guarden en la
  ;llista de llistes indexades anomenada tllist.
  ;
  (setq x0 (car (cdr (assoc (- i 1) punts)))
    x1 (car (cdr (assoc i punts)))
    y0 (car (cdr (cdr (assoc (- i 1) punts))))
    y1 (car (cdr (cdr (assoc i punts))))
    tac (+ tac (param x0 x1 y0 y1))
    tllist (append tllist (list (append (list i) (list tac))))
    i (1+ i)
  )
)
;
;
```

```

;un cop es tenen els nodes i el paràmetre es pot dibuixar la corba.
;el primer if filtra que no hi hagi cap o només un node, llavors no s'ha
;de fer res. Si hi han més d'un node, es distingeix entre el cas de corba
;oberta o tancada. Si és oberta l'últim p0 és nil (s'ha donat RETURN).
;Si és tancada, p0 val "c".
;
(setvar "blipmode" 0)
(if (<= n 0)
  nil ; a continuació comença l'ELSE:
  (if (not p0) ; cas obert, cal entrar condicions de frontera.
    (progn
      (setq ptinici (cdr (assoc 0 punts)) ptfinal (cdr (assoc n punts)))
      ; es dibuixen també unes línies que indiquen els vectors proveïts.
      ; en vermell els tangents, en blau les derivades segones.
      ; només són gràfiques, no són entitats i desapareixen amb un "redraw".
      ;
      (setq taninici
        (getpoint ptinici "\nExtrem del vector tangent inicial: ")
      )
      (if (numberp (car taninici)) (grvecs (list 1 ptinici taninici)))
      (setq der2inici
        (getpoint ptinici "\nExtrem del vector derivada 2a inicial: ")
      )
      (if (numberp (car der2inici)) (grvecs (list 5 ptinici der2inici)))
      (setq tanfinal
        (getpoint ptfinal "\nExtrem del vector tangent final: ")
      )
      (if (numberp (car tanfinal)) (grvecs (list 1 ptfinal tanfinal)))
      (setq der2final
        (getpoint ptfinal "\nExtrem del vector derivada 2a final: ")
      )
      (if (numberp (car der2final)) (grvecs (list 5 ptfinal der2final)))
      (setq vectaninici (mapcar '- taninici ptinici)
        vecder2inici (mapcar '- der2inici ptinici)
        vectanfinal (mapcar '- tanfinal ptfinal)
        vecder2final (mapcar '- der2final ptfinal)
      )
      ;
      ; extracció de les components dels vectors.
      ; i i f són per inici i final. p per derivada primera, q per segona.
      (setq xip (car vectaninici) yip (car (cdr vectaninici))
        xfp (car vectanfinal) yfp (car (cdr vectanfinal))
        xiq (car vecder2inici) yiq (car (cdr vecder2inici))
        xfq (car vecder2final) yfq (car (cdr vecder2final))
      )
      ;
      ;En el cas obert, el cond distingeix si hi han dos, tres, quatre o més de
      ;4 nodes.
      (cond
        ((= n 1)
          ;components del "spline" esquerra en termes de la base de g's:
          (defun flx (t) (+ x10 (* x10q (parab t t10))
            (* x10p t)
            (* bx11 (g t t10 t11))
          )
          )
          (defun fly (t) (+ y10 (* y10q (parab t t10))
            (* y10p t)
            (* by11 (g t t10 t11))
          )
          )
          ;components del "spline" dret en termes de la base de g's:
          (defun f2x (t) (+ x10 (* x20q (parab t t10))
            (* x20p t)
            (* bx21 (g t t10 t11))
          )
          )
        )
      )
    )
  )

```

Programes del capítol 2.

```
(defun f2y (t) (+ y10 (* y20q (parab t t10))
                  (* y20p t)
                  (* by21 (g t t10 t11))
                )
)
; funcions components de la corba, resultat de combinar
; els dos splines:
(defun x (t) (+ (* (f1x t) (s1 t t10 t11))
               (* (f2x t) (s2 t t10 t11))
             )
)
(defun y (t) (+ (* (f1y t) (s1 t t10 t11))
               (* (f2y t) (s2 t t10 t11))
             )
)
; càlcul dels coeficients del "spline".
(calcoefs1)
(setq d1g101 (d1g t11 t10 t11)
      d2g101 (d2g t11 t10 t11)
)
(coefscondsfront1)
(condsfrontinici)
(condsfrontfinal)
(calcbs1)
(setq i 0); comença el traçat de la corba que només té 1 interval.
(command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))
(while (< i 1) (interval))
(command "")
)
((= n 2)
; funcions components de la corba, resultat de combinar
; els dos splines:
; components del "spline" esquerra en termes de la base de g's:
(defun f1x (t) (+ x10 (* x10q (parab t t10))
                  (* x10p t)
                  (* bx11 (g t t10 t11))
                  (* bx12 (g t t11 t12))
                )
)
(defun f1y (t) (+ y10 (* y10q (parab t t10))
                  (* y10p t)
                  (* by11 (g t t10 t11))
                  (* by12 (g t t11 t12))
                )
)
; components del "spline" dret en termes de la base de g's:
(defun f2x (t) (+ x10 (* x20q (parab t t10))
                  (* x20p t)
                  (* bx21 (g t t10 t11))
                  (* bx22 (g t t11 t12))
                )
)
(defun f2y (t) (+ y10 (* y20q (parab t t10))
                  (* y20p t)
                  (* by21 (g t t10 t11))
                  (* by22 (g t t11 t12))
                )
)
(defun x (t) (+ (* (f1x t) (s1 t t10 t12))
               (* (f2x t) (s2 t t10 t12))
             )
)
(defun y (t) (+ (* (f1y t) (s1 t t10 t12))
               (* (f2y t) (s2 t t10 t12))
             )
)
)
```

```

;càlcul dels coeficients del "spline".
(calcoefs2)
(setq d1g102 (d1g t12 t10 t11)
      d2g102 (d2g t12 t10 t11)
      d1g112 (d1g t12 t11 t12)
      d2g112 (d2g t12 t11 t12)
)
(coefscondsfront2)
(condsfrontinici)
(condsfrontfinal)
(calcb2)
(setq i 0);comença el traçat de la corba que només té 2 intervals.
(command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))
(while (< i 2) (interval))
(command ""
)
(= n 3);Cas de 4 nodes. Comentaris similars al cas de tres.
(defun f1x (t) (+ x10 (* x10q (parab t t10))
                 (* x10p t)
                 (* bx11 (g t t10 t11))
                 (* bx12 (g t t11 t12))
                 (* bx13 (g t t12 t13))
)
)
(defun fly (t) (+ y10 (* y10q (parab t t10))
                 (* y10p t)
                 (* by11 (g t t10 t11))
                 (* by12 (g t t11 t12))
                 (* by13 (g t t12 t13))
)
)
(defun f2x (t) (+ x10 (* x20q (parab t t10))
                 (* x20p t)
                 (* bx21 (g t t10 t11))
                 (* bx22 (g t t11 t12))
                 (* bx23 (g t t12 t13))
)
)
(defun f2y (t) (+ y10 (* y20q (parab t t10))
                 (* y20p t)
                 (* by21 (g t t10 t11))
                 (* by22 (g t t11 t12))
                 (* by23 (g t t12 t13))
)
)
(defun x (t) (+ (* (f1x t) (s1 t t10 t13))
               (* (f2x t) (s2 t t10 t13))
)
)
(defun y (t) (+ (* (fly t) (s1 t t10 t13))
               (* (f2y t) (s2 t t10 t13))
)
)
(calcoefs3)
(setq d1g103 (d1g t13 t10 t11)
      d2g103 (d2g t13 t10 t11)
      d1g113 (d1g t13 t11 t12)
      d2g113 (d2g t13 t11 t12)
      d1g123 (d1g t13 t12 t13)
      d2g123 (d2g t13 t12 t13)
)
(coefscondsfront3)
(condsfrontinici)
(condsfrontfinal)
(calcb3)
(setq i 0)
(command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))

```


Programes del capítol 2.

```
(while (< i 3) (interval))
(command "")
)
((= n 4) ; Cas de 5 nodes. Comentaris similars als anteriors.
  (defun flx (t) (+ x10 (* x10q (parab t t10))
                    (* x10p t)
                    (* bx11 (g t t10 t11))
                    (* bx12 (g t t11 t12))
                    (* bx13 (g t t12 t13))
                    (* bx14 (g t t13 t14))
                  )
    )
  (defun fly (t) (+ y10 (* y10q (parab t t10))
                    (* y10p t)
                    (* by11 (g t t10 t11))
                    (* by12 (g t t11 t12))
                    (* by13 (g t t12 t13))
                    (* by14 (g t t13 t14))
                  )
    )
  (defun f2x (t) (+ x10 (* x20q (parab t t10))
                    (* x20p t)
                    (* bx21 (g t t10 t11))
                    (* bx22 (g t t11 t12))
                    (* bx23 (g t t12 t13))
                    (* bx24 (g t t13 t14))
                  )
    )
  (defun f2y (t) (+ y10 (* y20q (parab t t10))
                    (* y20p t)
                    (* by21 (g t t10 t11))
                    (* by22 (g t t11 t12))
                    (* by23 (g t t12 t13))
                    (* by24 (g t t13 t14))
                  )
    )
  (defun x (t) (+ (* (flx t) (s1 t t10 t14))
                 (* (f2x t) (s2 t t10 t14))
                )
    )
  (defun y (t) (+ (* (fly t) (s1 t t10 t14))
                 (* (f2y t) (s2 t t10 t14))
                )
    )
  (calcoefs4)
  (setq dlq104 (dlq t14 t10 t11)
        d2q104 (d2q t14 t10 t11)
        dlq114 (dlq t14 t11 t12)
        d2q114 (d2q t14 t11 t12)
        dlq124 (dlq t14 t12 t13)
        d2q124 (d2q t14 t12 t13)
        dlq134 (dlq t14 t13 t14)
        d2q134 (d2q t14 t13 t14)
        )
  (coefscondsfront4)
  (condsfrontinici)
  (condsfrontfinal)
  (calcbs4)
  (setq i 0)
  (command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))
  (while (< i 4) (interval))
  (command "")
)
((> n 4); pel cas de més de 5 nodes ja s'utilitza la ponderació
; entre dos "splines"
; Aquí per definir x(t) i y(t) s'han de definir els
; "splines" fkx i fky (k=1 o 2) de cada tram i
```

```

; ponderar-los mitjançant les funcions s1 i s2.
; En atenció als dos darrers intervals, es defineixen
; aquí les f's de manera completa.
(defun flx (t) (+ x10 (* x10q (parab t t10))
                  (* x10p (- t t10))
                  (* bx11 (g t t10 t11))
                  (* bx12 (g t t11 t12))
                  (* bx13 (g t t12 t13))
                  (* bx14 (g t t13 t14))
                )
)
(defun fly (t) (+ y10 (* y10q (parab t t10))
                  (* y10p (- t t10))
                  (* by11 (g t t10 t11))
                  (* by12 (g t t11 t12))
                  (* by13 (g t t12 t13))
                  (* by14 (g t t13 t14))
                )
)
(defun f2x (t) (+ x20 (* x20q (parab t t20))
                  (* x20p (- t t20))
                  (* bx21 (g t t20 t21))
                  (* bx22 (g t t21 t22))
                  (* bx23 (g t t22 t23))
                  (* bx24 (g t t23 t24))
                )
)
(defun f2y (t) (+ y20 (* y20q (parab t t20))
                  (* y20p (- t t20))
                  (* by21 (g t t20 t21))
                  (* by22 (g t t21 t22))
                  (* by23 (g t t22 t23))
                  (* by24 (g t t23 t24))
                )
)
(defun x (t) (+ (* (flx t) (s1 t ta tb))
                (* (f2x t) (s2 t ta tb))
              )
)
(defun y (t) (+ (* (fly t) (s1 t ta tb))
                (* (f2y t) (s2 t ta tb))
              )
)
(setq i 0)
(command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))
(while (< i n)
  ;
  ;k1 i k2 regulen quin és el node extrem esquerre del
  ;"spline" 1 i quin el del 2 segons si estem en els
  ;nodes extrems de la corba o no.
  (setq k1 (cond ((< i 2) 0) ((> i (- n 2)) (- n 4)) (t (- i 2)))
          k2 (cond ((< i 1) 0) ((> i (- n 3)) (- n 4)) (t (- i 1)))
        )
  (calcoefsmesde4)
  (condsfrontmesde4)
  (calcbmesde4)
  (interval)
)
(command "") ; això acaba la funció "pline".
) ; tanca la condició n>3
) ; tanca el COND
; es demana si es vol que es dibuixin tots els vectors derivada
; primera i segona en els extrems.
(setq dibuix (getstring "\nVols veure els vectors en els extrems? <S>: "))
(if (or (= dibuix "S") (= dibuix "s") (= dibuix "Sí"))
    (= dibuix "s1") (= dibuix "Si") (= dibuix "sí")
    (= dibuix "SÍ") (= dibuix "SI") (= dibuix "Y"))

```

Programes del capítol 2.

```
(= dibuix "y") (= dibuix "Yes") (= dibuix "yes")
(= dibuix "")
)
(progn
  (command "_line" ptinici (mapcar '+ ptinici veloinici) "")
  (command "_line" ptinici (mapcar '+ ptinici acceinici) "")
  (command "_line" ptfinal (mapcar '+ ptfinal velofinal) "")
  (command "_line" ptfinal (mapcar '+ ptfinal accefinal) "")
)
)
) ; tanca el PROGN i, per tant, el THEN del "IF not p0".
; a continuació comença el seu ELSE.
(progn
;en el cas tancat les f's no cal que es defineixin del tot perquè
;els darrers termes no intervenen mai, sempre s'utilitza l'interval
;3 del "spline 1 i el 2 del "spline" 2. També, totes les derivades
; segones en els extrems de cada spline pur són zero.
(defun flx (t) (+ x10 (* x10p (- t t10))
                  (* bx11 (g t t10 t11))
                  (* bx12 (g t t11 t12))
                  (* bx13 (g t t12 t13))
                )
)
)
(defun fly (t) (+ y10 (* y10p (- t t10))
                  (* by11 (g t t10 t11))
                  (* by12 (g t t11 t12))
                  (* by13 (g t t12 t13))
                )
)
)
(defun f2x (t) (+ x20 (* x20p (- t t20))
                  (* bx21 (g t t20 t21))
                  (* bx22 (g t t21 t22))
                )
)
)
(defun f2y (t) (+ y20 (* y20p (- t t20))
                  (* by21 (g t t20 t21))
                  (* by22 (g t t21 t22))
                )
)
)
)
(defun x (t) (+ (* (flx t) (s1 t ta tb))
                (* (f2x t) (s2 t ta tb))
              )
)
)
(defun y (t) (+ (* (fly t) (s1 t ta tb))
                (* (f2y t) (s2 t ta tb))
              )
)
)
)
;si el darrer node no coincideix amb el primer s'afegeix aquest a
;la llista de punts. La nova n serà la n antiga + 1.
(if (not (equal (cdr (assoc 0 punts)) (cdr (assoc n punts))))
  (setq
    x0 (car (cdr (assoc n punts)))
    x1 (car (cdr (assoc 0 punts)))
    y0 (car (cdr (cdr (assoc n punts))))
    y1 (car (cdr (cdr (assoc 0 punts))))
    tac (+ tac (param x0 x1 y0 y1))
    n (1+ n)
    punts (append punts
                  (list (append (list n) (cdr (assoc 0 punts)))))
  )
)
)
)
)
;aquí s'afegeixen els dos darrers nodes al principi de la llista
;de punts i els dos primers al final, de manera que tots els
;interval es calcularan de la mateixa manera anant la i de 0 a n
```

```

;i s'assegura la continuïtat C2.
(setq
 punts (append (list (append (list -1) (cdr (assoc (- n 1) punts))))
            punts
        )
 punts (append (list (append (list -2) (cdr (assoc (- n 2) punts))))
            punts
        )
 punts (append punts
            (list (append (list (+ n 1)) (cdr (assoc 1 punts))))
        )
 punts (append punts
            (list (append (list (+ n 2)) (cdr (assoc 2 punts))))
        )
;cal actualitzar corresponentment la llista de valors del paràmetre.
tmen1 (- (car (cdr (assoc (- n 1) tllist))) tac)
tmen2 (- (car (cdr (assoc (- n 2) tllist))) tac)
tmas1 (+ (car (cdr (assoc 1 tllist))) tac)
tmas2 (+ (car (cdr (assoc 2 tllist))) tac)
tllist (append tllist (list (append (list -1) (list tmen1))))
tllist (append tllist (list (append (list -2) (list tmen2))))
tllist (append tllist (list (append (list (+ n 1)) (list tmas1))))
tllist (append tllist (list (append (list (+ n 2)) (list tmas2))))
)
;
;es dibuixa la corba de la manera habitual. Aquí k1 sempre és i-2
;i k2 sempre és i-1, però es mantenen per aprofitar la funció Calcoefs.
(setq i 0)
(command "_pline" (cdr (assoc 0 punts)))
(while (< i n)
  (setq k1 (- i 2) k2 (- i 1))
  (calcoefsmesde4)
  (condsfrontinterns1)
  (condsfrontinterns2)
  (calcbmesde4)
  (interval)
  )
(command "_u" "_c") ; abans de tancar, desfem l'últim tram
                    ; i tanquem, així assegurem que AutoCAD
                    ; tracta la corba com una corba tancada.
) ; tanca el ELSE
) ; tanca el if not p0
) ; tanca el if n<=0
(setvar "cmdecho" eco)
(setvar "blipmode" blip)
)

```

Programes del capítol 3.

difusos_c-s.m

```
(* funcions per produir corbes i superfícies basades en control difús
d'acord amb el capítol 3 de la tesi. *)

(* cal definir els punts de control i els nombres difusos que regulen
la seva influència. Amb això, fpes són les funcions de pes de cada punt;
formcorba fabrica la formula de la corba corresponent, que després de
simplificada, servirà per fer el dibuix. En el cas no paramètric,
els "punts" són les segones coordenades i els valors de la t,
les primeres. En el cas paramètric, els "punts" són els de control i cal
definir la parametrització. Aquí usem la uniforme: ti=i.
*)

fpes[l1istadifusos_,i_]:=l1istadifusos[[i]]/
Sum[l1istadifusos[[j]],{j,1,Length[l1istadifusos]}]

formcorba[l1istapunts_,l1istadifusos_]:=
Block[{pesos,formula},
  pesos=Table[fpes[l1istadifusos,k],{k,1,Length[l1istadifusos]}];
  formula=pesos.l1istapunts;
  Return[formula]
]

(* funcions per produir els nombres difusos poligonals *)

fi01[a_,b_][t_]:=1/(2*(b-a))*(Abs[t-a]-Abs[t-b]+b-a)
fi10[a_,b_][t_]:=1-1/(2*(b-a))*(Abs[t-a]-Abs[t-b]+b-a)

hat[a_,b_,c_][t]:=fi01[a,b][t]+fi10[b,c][t]-1

(* exemples. l1ispt33i serà la llista de punts per l'exemple i,
i l1isdf33i, la dels difusos corresponents
*)

(* exemple per la figura 3.3.1 *)

l1ispt33i={{-2.3,-2},{-2,0},{-1,1},{0.5,-1},{1,1.25},{2,-0.6},{4.5,0.7},{5,2}}
l1isdf33i=Prepend[Append[Table[hat[l1ispt33i[[i-1,1]],l1ispt33i[[i,1]],
l1ispt33i[[i+1,1]]
][t],
{i,2,7}
],
fi01[l1ispt33i[[7,1]],l1ispt33i[[8,1]]][t]
],
fi10[l1ispt33i[[1,1]],l1ispt33i[[2,1]]][t]
]

(* aquí, al ser funcional, cal prendre només les segones coordenades de
cada punt de control; la primera serà el valor de la t.
*)
l1isim33i=Table[l1ispt33i[[i,2]],{i,1,8}]

(* exemple per la figura 3.3.2. Els punts de control són els de la 3.3.1;
la llista332 només és per poder exemplar els conjunts difusos
*)

l1ispt332={{-7,0},{-5,0},{-2.3,-2},{-2,0},{-1,1},
{0.5,-1},{1,1.25},{2,-0.6},{4.5,0.7},{5,2},{7,0},{10,0}
}

l1isdf332=Prepend[Append[Table[hat[l1ispt332[[i-3,1]],l1ispt332[[i,1]],
```

```

                llispt332[[i+3,1]]
            ] [t],
            {i,4,9}
        ],
        fi01[llispt331[[5,1]],llispt331[[8,1]]][t]
    ],
    fi10[llispt331[[1,1]],llispt331[[4,1]]][t]
]

(* exemple per la figura 3.3.3. Els punts de control són els mateixos de 3.3.1,
però els difusos són del tipus campana de Gauss
*)

gaus[a_,k_][t_]:=Exp[-(k*(t-a))^2]

(* llista de valors de la k per cada difús d'aquest exemple *)
llisk={2,3,0.5,1,2.7,1.25,0.667,1.97}

llisdf333=Table[gaus[llispt331[[i,1]],llisk[[i]]][t],{i,1,8}]

(* exemple per la figura 3.3.4, amb la mateixa llista de punts, però reordenats;
per tant, ara és una corba paramètrica. Ara la t va de 0 a 7
i la parametrització és uniforme. Els valors de la k seran iguals per tots
els punts de control.
*)

llispt334={llispt331[[3]],llispt331[[2]],llispt331[[1]],llispt331[[6]],
           llispt331[[5]],llispt331[[4]],llispt331[[8]],llispt331[[7]]
          }

(* dos casos, un amb difusos amples i l'altre, estrets. *)

llisdf334a=Table[gaus[i,2/3][t],{i,0,7}]
llisdf334b=Table[gaus[i,4/3][t],{i,0,7}]

(* fórmula per una superfície *)

formsup[llistapunts_,llistadifusos_]:=
Block[{pesos,formula},
  pesos=Table[fpes[lisadifusos,k],{k,1,Length[lisadifusos]}];
  formula=pesos.llistapunts;
  Return[formula]
]

(* exemple 3.3.5 per superfícies no-paramètriques: 10 punts dispersos *)

llispt335={{0.9,5.1},{2.1,2},{3,7.5},{3.2,4},{4.5,8.75},
           {6,6.2},{6.5,2.2},{7.8,10},{9,5},{10,1}
          }

llisim335={7,3,5,1,10,8,4,9,6,2}

llisdf335x=Table[gaus[llispt335[[i,1]],0.5][s],{i,1,10}]
llisdf335y=Table[gaus[llispt335[[i,2]],0.5][t],{i,1,10}]

llisdf335=Table[llisdf335x[[i]]*llisdf335y[[i]],{i,1,10}]

(* exemple per una superfície paramètrica. Els punts estan agrupats
en una malla 3X4
*)

mallpt336= {{{ 1,-1,-1},{ 0.5, 1,-1},{-0.5, 1,-1},{-1,-1,-1}},

```

Programes del capítol 3.

```
      {{ 1, 1, 0},{ 0.5,-2, 0},{-0.5,-2, 0},{-1, 1, 0}},
      {{ 1,-1, 1},{ 0.5, 1, 1},{-0.5, 1, 1},{-1,-1, 1}}
    }

(* dos casos, un amb difosos amples i l'altre, estrets. *)

malldf336a=Table[gaus[i,2/3][s]*gaus[j,2/3][t],{i,0,2},{j,0,3}]
malldf336b=Table[gaus[i,4/3][s]*gaus[j,4/3][t],{i,0,2},{j,0,3}]
```

bezier_c-s.m

(* funcions per dibuixar corbes i pedaços de superfícies de Bézier *)

```
<<graphics`parametricplot3d`

comb[n_,m_]:=Factorial[n]/(Factorial[m]*Factorial[n-m])

bernstein[n_,i_][t_]:=t^n /; N[i]==N[n]
bernstein[n_,i_][t_]:= (1-t)^n /; N[i]==0.0
bernstein[n_,i_][t_]:=comb[n,i]*t^i*(1-t)^(n-i)

beziercorb[l1listapts_List][t_]:=
  Block[{n,suma},
    n=Length[l1listapts]-1;
    suma=Sum[bernstein[n,i][t]*l1listapts[[i+1]],{i,0,n}];
    Return[suma]
  ]

beziercorb2dpolig[l1listapts_List]:=
  Block[{punts,linies,dibu},
    punts=Graphics[{PointSize[0.025],Map[Point,l1listapts]}];
    linies=Table[Graphics[{Dashing[{0.02,0.02}],
      Line[l1listapts]
    }],
      {i,1,Length[l1listapts]}
    ];
    dibu=Show[punts,linies,AspectRatio->Automatic,PlotRange->All]
  ]

beziercorb3dpolig[l1listapts_List]:=
  Block[{punts,linies,dibu},
    punts=Graphics3D[{PointSize[0.025],Map[Point,l1listapts]}];
    linies=Table[Graphics3D[{Line[l1listapts]}],
      {i,1,Length[l1listapts]}
    ];
    dibu=Show[punts,linies,AspectRatio->Automatic,PlotRange->All]
  ]

beziercorbpolig[l1listapts_List]:=
  If[Length[l1listapts[[1]]]==2,
    beziercorb2dpolig[l1listapts],
    beziercorb3dpolig[l1listapts]
  ]

beziersup[l1listapts_List][s_,t_]:=
  Block[{n,m,suma},
    n=Length[l1listapts]-1;
    m=Length[Transpose[l1listapts]]-1;
    suma=Sum[bernstein[n,i][s]*bernstein[m,j][t]*
      l1listapts[[i+1,j+1]],
      {i,0,n},{j,0,m}
    ];
    Return[suma]
```

```

]

beziersuppolig[l1listapts_List]:=
Block[{punts,linies1,linies2,dibu},
punts=Graphics3D[{PointSize[0.025],Map[Point,Flatten[l1listapts,1]]}];
linies1=Table[Graphics3D[{Line[l1listapts[[i]]}],
{i,1,Length[l1listapts]}
];
linies2=Table[Graphics3D[{Line[Transpose[l1listapts][[j]]}],
{j,1,Length[Transpose[l1listapts]]}
];
dibu=Show[punts,linies1,linies2,BoxRatios->Automatic,PlotRange->All]
]

(* immersió de les corbes i superfícies de Bézier dins les corbes
generades usant control difús. Veure Capítol 3 de la tesi per les
definicions de les funcions.
*)

(* versió d'índex continu pels polinomis de Bernstein.
Usa la funció Gamma, d'aquí la g.
*)

combg[n_,lam_]:=Gamma[n+1]/(Gamma[lam+1]*Gamma[n-lam+1])

bernsteing[n_,lam_][t_]:=t^n /; N[lam]==N[n]
bernsteing[n_,lam_][t_]:= (1-t)^n /; N[lam]==0.0
bernsteing[n_,lam_][t_]:=combg[n,lam]*t^lam*(1-t)^(n-lam)

l[n_][lam_]:=PolyGamma[lam+1]-PolyGamma[n-lam+1]

tau[n_][lam_]:=Exp[l[n][lam]]/(1+Exp[l[n][lam]])

lambda[n_][t_]:=FindRoot[tau[n][la]==t,{la,0.5}][[1,2]]

ka[n_][t_]:=bernsteing[n,0][t] /; 0.0<=N[t]<=N[tau[n][0.0]]
ka[n_][t_]:=bernsteing[n,lambda[n][t]][t] /; N[tau[n][0.0]]<N[t]<N[tau[n][n]]
ka[n_][t_]:=bernsteing[n,n][t] /; N[tau[n][n]]<=N[t]<=1.0

bezierdifusos[n_,i_][t_]:=bernsteing[n,i][t]/ka[n][t]

```


Programes del capítol 5.

gramatic.lsp

```
; fitxer gramatic.lsp.
;
; algunes de les lletres, paraules i verbs de la tesi.
; No sempre estan definides amb la mateixa formulació de la tesi,
; degut a que es pretén aprofitar millor les particularitats de les
; funcions que ja porta implementades l'AutoLisp. És el cas, per
; exemple, de la funció part entera, que usa la funció "FIX".
; Algunes lletres estan directament a paraules, és a dir, amb
; paràmetres.
; Convé veure les definicions de les funcions en la tesi pels detalls,
; significat dels paràmetres etc.
;
;
; funcions auxiliars.
;
; norma d'un vector.
(defun norma2 (x y) (sqrt (+ (* x x) (* y y))))
(defun norma3 (x y z) (sqrt (+ (* x x) (* y y) (* z z))))
;
; producte vectorial de dos vectors.
(defun prodvectx (x1 y1 z1 x2 y2 z2)
  (- (* y1 z2) (* y2 z1))
)
(defun prodvecty (x1 y1 z1 x2 y2 z2)
  (- (* x2 z1) (* x1 z2))
)
(defun prodvectz (x1 y1 z1 x2 y2 z2)
  (- (* x1 y2) (* x2 y1))
)

; distància de la norma "n" bidimensional amb semieixos no
; necessàriament iguals.
(defun distn2 (x1 y1 x2 y2 a b n)
  (pow (+ (pow (abs (/ (- x2 x1) (* 1.0 a))) n)
          (pow (abs (/ (- y2 y1) (* 1.0 b))) n)
        )
        (/ 1.0 (* 1.0 n))
  )
)

; distància de la norma "n" tridimensional amb semieixos no
; necessàriament iguals.
(defun distn3 (x1 y1 z1 x2 y2 z2 a b c n)
  (pow (+ (pow (abs (/ (- x2 x1) (* 1.0 a))) n)
          (pow (abs (/ (- y2 y1) (* 1.0 b))) n)
          (pow (abs (/ (- z2 z1) (* 1.0 c))) n)
        )
        (/ 1.0 (* 1.0 n))
  )
)

; lletres simples.

; potència entera.
(DEFUN POWI (X N)
  (IF (MINUSP N) (SETQ X (/ 1.0 (FLOAT X))) N (* -1 N)) (SETQ X (FLOAT X)))
  (COND ((EQUAL N 0) 1)
        (T (* X (POWI X (- N 1)))))
  )
)
```

```

; potència real.
(DEFUN POW (X Y / PR)
  (COND ((AND (NUMBERP X) (NUMBERP Y))
    (SETQ PR (* (SIN (* 3.1415926 Y)) (SIN (* 3.1415926 Y))))
    (COND ((< PR 0.000001)
      (IF (MINUSP Y)
        (SETQ X (/ 1.0 (FLOAT X)) Y (* -1.0 (FLOAT Y)))
        (SETQ X (FLOAT X) Y (FLOAT Y)))
      )
    (COND ((< (* Y Y) 0.00001) 1.0)
    (T (* X (POW X (- Y 1.0)))))
  )
)
((MINUSP X) (PROMPT "ERROR: N§ NEG. ELEVAT A EXP. NO ENTER"))
((not (zerop x)) (EXP (* Y (LOG (FLOAT X)))))
((and (zerop x) (not (zerop y))) 0.0)
(t (prompt "INDETERMINAT"))
)
)
(T (PROMPT "ARGUMENTS INCORRECTES"))
)
)

; les trigonomètriques que no incorpora l'AutoLisp.
(DEFUN TAN (X) (/ (SIN X) (COS X)))

(DEFUN ASIN (X)
  (COND ((< (* X X) (- 1 1.0E-30))
    (ATAN (/ X (SQRT (- 1 (* X X)))))
  )
  ((AND (>= (* X X) (- 1 1.0E-30)) (<= (* X X) 1))
  (IF (> X 0) 1.5707963 -1.5707963)
  )
  (T (PRINT "ERROR: VALOR ABSOLUT DEL ARGUMENT > 1"))
)
)

(DEFUN ACOS (X)
  (IF (/= (* 1.0 X X) 0.0)
    (+ (* 1.5707963 (- 1 (/ X (SQRT (* X X)))))
      (ATAN (/ (SQRT (- 1 (* X X))) X))
    )
    1.5707963
  )
)

; les funcions hiperbòliques.
(defun sinh (t) (* 0.5 (- (exp t) (exp (* -1.0 t)))))
(defun cosh (t) (* 0.5 (+ (exp t) (exp (* -1.0 t)))))
(defun tanh (t) (/ (- (exp t) (exp (* -1.0 t)))
  (+ (exp t) (exp (* -1.0 t)))
)
)

; funció factorial.
(defun fac (n) (if (eq n 0) 1 (* n (fac (- n 1)))))

; nombre combinatori (n i).
(defun comb (n i) (/ (fac n) (* (fac (- n i)) (fac i))))

; funció signe.
(defun sign (x) (cond ((> (* 1.0 x) 0.0) 1)
  ((eq (* 1.0 x) 0.0) 0)
  ((< (* 1.0 x) 0.0) -1)
)

```

Programes del capítol 5.

```
        (t x)
      )
)

; funció part entera. (signsup està més endavant).
(defun pe (x) (+ (fix x) (/ (- (signsup x) 1) 2)))

; lletres compostes.

; sostre enter.
(defun se (x) (* -1 (pe (* -1.0 x))))

; periodificadors simple i doble -> a paraules.

; funcions "salt alternat".
(defun saltalter0 (x) (/ (- 1 (powi -1 (pe x))) 2))
(defun saltalter1 (x) (/ (+ 1 (powi -1 (pe x))) 2))

; funció signe superior.
(defun signsup (x) (if (>= (* 1.0 x) 0.0) 1 -1))

; funció signe inferior.
(defun signinf (x) (if (> (* 1.0 x) 0.0) 1 -1))

; base per la continuïtat infinita.
(defun continf (x) (if (< x 1.0e-8) 0.0 (pow x (/ 1.0 (* 1.0 x)))))

; transició de zero a 1 entre zero i 1 amb suavitat regulada per r.
; el valor absolut és per evitar que per errors d'arrodoniment
; apareguin negatius elevats a potències no enteres.
(defun transr (x r)
  (/ (pow (abs x) r)
      (+ (pow (abs x) r)
          (pow (abs (- 1 x)) r)
          )
  )
)

; funció sigma, que és una campana poligonal entre -1, 0 i 1,
; amb altura 1.
(defun sigm (x) (* 0.5 (+ (abs (- x 1)) (* -2 (abs x)) (abs (+ x 1)))))

; funció campana, de continuïtat regulada per r, entre -1, 0 i 1,
; amb altura 1.
(defun campr (x r) (transr (sigm x) r))

; funció campana, de continuïtat infinita entre -1, 0 i 1,
; amb altura 1.
(defun campinf (x) (* (continf (+ 1 x)) (continf (- 1 x))))

; campana assimp tòtica.
(defun compass (x) (exp (- 1 (exp (* x x)))))

; paraules

; funció fi, de transició poligonal entre el nivell zero i el "h"
; al passar de "a" a "b".
(defun fi (t a b h)
  (* (/ h (* 2.0 (- b a)))
      (+ (abs (- t a))
          (* -1.0 (abs (- t b)))
          (- b a)
          )
  )
)
```

```

)
)

; periodificadors regulables.
; periodificador simple.

(defun pers (t a b) (- t (* (- b a) (pe (/ (- t a) (* 1.0 (- b a)))))))

; periodificador doble.
(defun perd (t a b)
  (+ a
    (* (- b a)
      (/ (acos (cos (* pi (/ (- t a) (* 1.0 (- b a))))))
        pi
      )
    )
  )
)

; periodificador mixt.
(defun perm (t t0 t1 t2 a b / a1 a2 u fh)
  (setq a1 (* 0.5 (- b a) (/ (+ t2 (* -2 t1) t0)
                             (* (- t2 t1) (- t1 t0))
                           )
        )
        a2 (* 0.5 (- a b) (/ (- t2 t0)
                             (* (- t2 t1) (- t1 t0))
                           )
        )
        u (ps t t0 t2)
        fh (+ b (* a1 (- u t1)) (* a2 (abs (- u t1))))
  )
)

; Salts regulables.
; salt amb continuïtat per la dreta, en l'abscissa t0,
; entre les ordenades a i b.
(defun saltdre (t t0 a b)
  (* 0.5 (+ a b (* (- b a) (signsup (- t t0))))))
)

; id amb continuïtat per l'esquerra.

(defun saltesq (t t0 a b)
  (* 0.5 (+ a b (* (- b a) (signinf (- t t0))))))
)

; salts alternats.
(defun saltalternat0 (t t0 d a b)
  (+ a (* (- b a) (saltalter0 (/ (- t t0) (* 1.0 d))))))
)
(defun saltalternat1 (t t0 d a b)
  (+ a (* (- b a) (saltalter1 (/ (- t t0) (* 1.0 d))))))
)

; rampa entre t0 i t1, passant de "a" a "b"
; amb suavitat controlada per r.
(defun rampar (t t0 t1 a b r)
  (+ a (* (- b a) (transr (fi t t0 t1 1) r)))
)

; funcions característiques.
; d'un punt.
(defun caractp (t t0) (if (eq (* 1.0 t) (* 1.0 t0)) 1.0 0.0))

; d'un interval tancat.
(defun caractintt (t t0 t1)

```

Programes del capítol 5.

```
( * 0.5 (- (signsup (- t t0)) (signinf (- t t1))))
)

; fun. caract. difusa d'un interval amb suavitat dependent de r.
(defun mu (t t0 t1 t2 t3 r)
  (transr (- (fi t t0 t1 1) (fi t t2 t3 1)) r)
)

; algunes corbes i superfícies d'interès.

; superel·lipses, versió 1, vàlida per n<=2.
(defun superel1x (t a b n)
  (* a (sign (cos t))
    (pow (* (cos t) (cos t)) (/ 1.0 (* 1.0 n))))
)
)
(defun superel1y (t a b n)
  (* b (sign (sin t))
    (pow (* (sin t) (sin t)) (/ 1.0 (* 1.0 n))))
)
)

; superel·lipses, versió 2, vàlida per n>=2.
; El radi està parametritzat en polars.
(defun radsuperel (t a b n)
  (pow (/ 1.0 (+ (pow (abs (/ (cos t) (* 1.0 a))) n)
    (pow (abs (/ (sin t) (* 1.0 b))) n)
  )
    (/ 1.0 (* 1.0 n))
)
)
)
(defun superel2x (t a b n) (* (radsuperel t a b n) (cos t)))
(defun superel2y (t a b n) (* (radsuperel t a b n) (sin t)))

; verbs genètics per mutació.

; gen per tallar i suprimir un sol cop.
(defun ts1 (t t0 t1) (+ t (saltdre t t0 0 (- t1 t0))))

; gen per tallar i suprimir periòdicament.
(defun tsp (t t0 ds d) (+ t (* ds (se (/ (- t t0) (* 1.0 d))))))

; gen per tallar i desplaçar horitzontalment un sol cop.
(defun td1 (t t0 t1) (- t (fi t t0 t1 (- t1 t0))))

; gen per tallar i desplaçar horitz. i periòdicament.
(defun tdp (t t0 dd d)
  (* (/ d (* 1.0 (+ dd d)))
    (- t (pm t t0 (+ t0 dd) (+ t0 dd d) 0 dd))
)
)

; gen per expandir localment amb continuïtat r-1.
; (pendent de calcular oscil'(tinflx+).

; gen per expandir localment amb continuïtat infinita.
(defun oscilinf (t) (* t (campinf t)))
(defun oscinf (t t0 d) (oscilinf (/ (- t t0) (* 1.0 d))))
(defun deflocinf (t t0 d k) (+ t (* k
  (/ d 0.853499138)
  (oscinf t t0 d)
)
)
)
)
```

```

; gen per expandir periòdicament.
(defun defper (t t0 d k)
  (+ t (* k
        (/ d (* 2 pi))
        (sin (* (/ (* 2 pi) (* 1.0 d)) (- t t0)))
      )
  )
)

; verbs epidèmics o quirúrgics.

; funció característica clàssica (d'aquí el zero) d'un conjunt
; (tancat: d'aquí el "sup") donat per l'equació cartesiana
; de la seva vora. k és el nivell de la vora. Només caldrà
; substituir equació per la funció implícita tal que, quan
; dóna >=0, estem dins del conjunt)
(defun caractset0sup (equacio k)
  (* 0.5 (+ 1 (signsup (- equacio k))))
)

;funció característica difusa (d'aquí "mu"), continuïtat r-1.
(defun caractsetmu (equacio k1 k2 r)
  (transr (fi equacio k1 k2 1) r)
)

; plegadors.

; plec cap amunt.
(defun plecup (fun a) (+ a (abs (- fun a))))

; plec cap avall.
(defun plecdown (fun a) (- a (abs (- fun a))))

; plec infinit entorn de dues bandes.
(defun plecinf (fun gi gs)
  (- gs
    (abs (- (- fun gs)
            (* 2 (- gs gi)
              (pe (/ (- fun gi) (* 2.0 (- gs gi))))
            )
          )
  )
)

; truncadors.

;llindar únic superior.
(defun llinsup (fun b) (min b fun))

; llindar únic inferior.
(defun llininf (fun a) (max a fun))

; llindar doble, primera opció.
(defun llindob (fun gi gs) (min gs (max gi fun)))

; verbs ambientals.

; abans dues funcions auxiliars.
; primer: una versió ad-hoc de plin2d.
(DEFUN polin2 (xf yf ti tf nt / X Y XF YF TI TF NT PAS ECO BLIP)
  ; funcions components.
  (DEFUN X (T) (EVAL XF))

```

Programes del capítol 5.

```
(DEFUN Y (T) (EVAL YF))
(SETQ ECO (GETVAR "CMDECHO") BLIP (GETVAR "BLIPMODE"))
(SETVAR "CMDECHO" 0)
(SETVAR "BLIPMODE" 0)
; entrada de les fórmules i demés dades.
(SETQ PAS (/ (- TF TI) (FLOAT NT)) ; increment_de_t entre divisions.
  T TI ; t pren el valor inicial per començar el traçat de la corba.
)
; bucle que construeix la corba. S'inicia la corba amb un punt i després
; s'entra en el bucle, en el que en cada pas s'aprofita per actualitzar
; el valor de t.
(COMMAND "_PLINE" (LIST (X T) (Y T)))
(REPEAT NT
  (COMMAND (LIST (X (SETQ T (+ T PAS))) (Y T)))
)
(COMMAND ""); "return" per acabar la polilínea.
(SETVAR "CMDECHO" ECO)
(SETVAR "BLIPMODE" BLIP)
)

; segon: una funció per dibuixar graelles (trames) bidimensionals.
; defx i defy són els noms de les funcions components de la
; deformació que cal aplicar a una trama ortogonal de partida, per
; exemple, arrugx i arrugy. Han de ser dues funcions cadascuna
; d'elles de dues variables. Només cal escriure el nom.
; Per produir la pròpia graella de partida, cal definir
; idenx(s t)=s i ideny(s t)=t (ja està fet més avall).
; llistapars ha de ser la llista dels paràmetres pertinents de
; cada tipus de deformació, per exemple, per "doblegar",
; serà '(a alf) amb els valors concrets de a i alfa del cas que
; s'estigui dibuixant. Cal qua vagi precedida per la "quotació"
; i amb els valors numèrics, encara que algun d'aquest valors hagi
; de ser el resultat d'una avaluació, per exemple una variable alfa
; que té assignat un cert valor numèric, o una expressió com ara
; (* 2 pi). En qualsevol cas, però, es pot usar també la funció
; "list", per exemple (list 3.1 alfa (* 2 pi)).
; Han de ser els mateixos paràmetres per les dues components.
; nns i nnt són el nombre de divisions per cada línia a dibuixar
; dins la graella. smin, smax, tmin i tmax són els valors extrems
; de la graella que es deformarà. ms i mt són els respectius nombres
; de línies en cada direcció.
(defun graella
  (defx defy llistavars nns nnt smin smax tmin tmax ms mt
    / pass past i j sj ti
  )
  (setq i -1 past (/ (- tmax tmin) (* 1.0 mt)))
  (repeat (1+ mt)
    (setq tind
      (+ tmin
        (* (setq i (1+ i)) past)
      )
      xf (append (list 'defx 't) (list tind) llistavars)
      yf (append (list 'defy 't) (list tind) llistavars)
      ti smin tf smax nt nns
    )
    (polin2 xf yf ti tf nt)
  )
  (setq j -1 pass (/ (- smax smin) (* 1.0 ms)))
  (repeat (1+ ms)
    (setq sjnd
      (+ smin
        (* (setq j (1+ j)) pass)
      )
      xf (append (list 'defx sjnd 't) llistavars)
      yf (append (list 'defy sjnd 't) llistavars)
      ti tmin tf tmax nt nnt
    )
  )
)
```

```

    )
    (polin2 xf yf ti tf nt)
  )
)

; ara el cas de la trama ortogonal no deformada.
(defun idenx (s t) s)
(defun ideny (s t) t)
(defun graella0 (smin smax tmin tmax ns nt)
  (graella idenx ideny '() 1 1 smin smax tmin tmax ns nt)
)

; girs.

; en el pla.
(defun gir2dx (al x y) (- (* x (cos al)) (* y (sin al))))
(defun gir2dy (al x y) (+ (* x (sin al)) (* y (cos al))))

; en l'espai. primer indica respecte quin eix i després
; quina coordenada és.
(defun girx3dx (al x y z) x)
(defun girx3dy (al x y z) (gir2dx al y z))
(defun girx3dz (al x y z) (gir2dy al y z))
(defun giry3dx (al x y z) (gir2dx al x z))
(defun giry3dy (al x y z) y)
(defun giry3dz (al x y z) (gir2dy al x z))
(defun girz3dx (al x y z) (gir2dx al x y))
(defun girz3dy (al x y z) (gir2dy al x y))
(defun girz3dz (al x y z) z)

; un gir útil per situar objectes en perspectiva.
; Combina primer un gir alfa respecte z i després beta
; respecte x. Un cas clàssic pot ser alfa=-120°, beta=-60°.
(defun girzxx (al be x y z)
  (girx3dx be (girz3dx al x y z)
    (girz3dy al x y z)
    (girz3dz al x y z)
  )
)
(defun girzxy (al be x y z)
  (girx3dy be (girz3dx al x y z)
    (girz3dy al x y z)
    (girz3dz al x y z)
  )
)
(defun girzxxz (al be x y z)
  (girx3dz be (girz3dx al x y z)
    (girz3dy al x y z)
    (girz3dz al x y z)
  )
)

; inversió.
(defun invex (x y ox oy k)
  (+ ox (* (/ k (+ (* 1.0 (powi (- x ox) 2))
    (powi (- y oy) 2))
  )
  )
  (- x ox)
)
)
(defun invey (x y ox oy k)
  (+ oy (* (/ k (+ (* 1.0 (powi (- x ox) 2))
    (powi (- y oy) 2))
  )
)

```


Programes del capítol 5.

```
        )
      )
    )
  )
)

; un canvi a polars.
(defun polx (x y) (* y (cos x)))
(defun poly (x y) (* y (sin x)))

; NOTA: també es pot invocar directament "graella" per dibuixar
; trames invertides, polars o qualsevol altra atenent llavors les
; instruccions que s'han donat al definir "graella".

; arrugadors.
(defun def1 (u w p fou)
  (+ (* (- 1 w) (sin (/ (* 2 pi u) (* 1.0 p))))
     (* w (/ (sin (/ (* 2 pi u fou) (* 1.0 p))) (* 1.0 fou)))
  )
)
(defun def2 (u w p fou)
  (* 0.5 (- 1
    (+ (* (- 1 w) (cos (/ (* 2 pi u) (* 1.0 p))))
       (* w (/ (cos (/ (* 2 pi u fou) (* 1.0 p)))
              (* 0.5 fou)
            )
      )
    )
  )
)
)

; cas 2D.
(defun arrugx (s t w1 w2 p fou1 fou2 k)
  (- s (* k (/ p (* 2 pi))) (def1 s w1 p fou1) (def2 t w2 p fou2)))
)
(defun arrugy (s t w1 w2 p fou1 fou2 k)
  (- t (* k (/ p (* 2 pi))) (def1 t w1 p fou1) (def2 s w2 p fou2)))
)

; cas 3D.
(defun arrugx3d (s t u w1 w2 p fou1 fou2 k)
  (- s (* k (/ p (* 2 pi))) (def1 s w1 p fou1)
     (def2 t w2 p fou2)
     (def2 u w2 p fou2)
  )
)
(defun arrugy3d (s t u w1 w2 p fou1 fou2 k)
  (- t (* k (/ p (* 2 pi))) (def1 t w1 p fou1)
     (def2 u w2 p fou2)
     (def2 s w2 p fou2)
  )
)
(defun arrugz3d (s t u w1 w2 p fou1 fou2 k)
  (- u (* k (/ p (* 2 pi))) (def1 u w1 p fou1)
     (def2 s w2 p fou2)
     (def2 t w2 p fou2)
  )
)

; per dibuixar una trama arrugada.
```

```

(defun graellarrug
  (w1 w2 p foul fou2 k nns nnt smin smax tmin tmax ms mt)
  (graella arrugx arrugy '(w1 w2 p foul fou2 k)
    nns nnt smin smax tmin tmax ms mt
  )
)

; doblegador.
(defun fdobl (s a) (+ 1.0 (fi s (* -1.0 a) a -1.0)))
(defun fdob2 (s a) (fi s (* -1.0 a) a 1))
(defun gdobl (s a) (* 0.25 (- (* 3.0 s) (+ (abs (+ s a)) a))))
(defun gdob2 (s a) (* 0.25 (+ (* 3.0 s) (abs (- s a)) a)))
; (dob0 correspon a dob(s,0) ).
(defun dob0x (s a alf)
  (+ (* (fdobl s a) (gdobl s a))
    (* (cos alf) (fdob2 s a) (gdob2 s a))
  )
)
(defun dob0y (s a alf) (* (sin alf) (fdob2 s a) (gdob2 s a)))
(defun normaldob00x (s a alf)
  (/ (* -1.0 (+ a s) (sin alf)) (* 2.0 a))
)
(defun normaldob00y (s a alf)
  (/ (+ (- a s) (* (+ a s) (cos alf))) (* 2.0 a))
)
(defun normaldob0x (s a alf)
  (/ (normaldob00x s a alf)
    (norma2 (normaldob00x s a alf) (normaldob00y s a alf))
  )
)
(defun normaldob0y (s a alf)
  (/ (normaldob00y s a alf)
    (norma2 (normaldob00x s a alf) (normaldob00y s a alf))
  )
)
(defun normaldobx (s a alf)
  (normaldob0x (- (fi s (* -1.0 a) a (* 2.0 a)) a) a alf)
)
(defun normaldoby (s a alf)
  (normaldob0y (- (fi s (* -1.0 a) a (* 2.0 a)) a) a alf)
)
(defun dobx (s t a alf)
  (+ (dob0x s a alf) (* t (normaldobx s a alf)))
)
(defun doby (s t a alf)
  (+ (dob0y s a alf) (* t (normaldoby s a alf)))
)
; (la z és invariant pel dobleg en el pla z=0).

(defun graelladob
  (a alf nns nnt smin smax tmin tmax ms mt)
  (graella dobx doby '(a alf)
    nns nnt smin smax tmin tmax ms mt
  )
)

; desplaçadors locals ambientals.
; versió per usar campanes del tipus "campr".

; cas 2D.
; x,y és el punt a desplaçar, px,py el punt P
; (centre de la deformació), vx,vy vector de desplaçament de P.
; r-1 grau de continuïtat de la campana.
; a,b,n regulen l'abast de la campana.

(defun desplx (x y px py vx vy r a b n)

```

Programes del capítol 5.

```
(+ x (* vx (campr (distn2 px py x y a b n) r))
)
)
(defun display (x y px py vx vy r a b n)
  (+ y (* vy (campr (distn2 px py x y a b n) r))
)
)
```

cap5-3.lsp

```
; fitxer cap5-3.lsp.

; funcions per les gràfiques de la tesi, cap. 5 apartat 3.
; (les funcions genèriques estan al fitxer de la gramàtica).

; serpentina de Newton

(setq a (- 2 (sqrt 3)) b (sqrt (* 2 a)))
(defun serpn (t) (/ (* b b t) (+ (* t t) (* a a))))

(defun defper (t t0 d k)
  (+ t (* k (/ d (* 2 pi))
    (sin (* (/ (* 2 pi) d) (- t t0))))
)
)

; funcions pel plegador i pel truncador.

(defun gs (t) (+ 2.5 (log (+ 1 (* t t)))))
(defun gi (t) (+ -5.0 (* 2.0 (sin (* 0.25 pi t)))
  (* 2.0 (exp (* -0.1 t t)))
)
)
(defun fpart (t) (/ (- (* t t t) (* 5.25 25.0 t))
  (+ 25.0 (* t t))
)
)

; funcions pel desplaçador local paramètric.
; la el·lipse té semieixos 20 i 15. La campana (exponent r=3)
; està centrada en pi/3 i el seu radi d'abast és (pi/4),
; de manera que el seu suport va de (pi/12) a (7 pi/12).
; en graus, de 15° a 105°, amb centre a 60°.
; es parametrizza la el·lipse com fifletxa(t) i resulta
; P=fifletxa(pi/3), Q=P+vifletxa, on vifletxa=(15,5).
; finalment es dibuixa la corba psi(t) tal com està definida.

; funcions per la inversió (porisme de Steiner.
; rbol és el radi de les boletes abans d'invertir,
; rint i rext els dels dos cercles tangents a totes les boletes.
(setq rbol (* 10.0 (sin (/ pi 12.0)))
  rint (- 10.0 rbol)
  rext (+ 10.0 rbol)
)
)
(defun centx (i) (* -10 (sin (/ (* 2 pi i) 12.0))))
(defun centy (i) (* 10 (cos (/ (* 2 pi i) 12.0))))
(defun cerclex (t ox r) (+ ox (* r (cos t))))
(defun cercley (t oy r) (+ oy (* r (sin t))))
; s'han de construir les boletes usant cerclex i cercley amb
; ox i oy igualats a centx(i) i centy(i) variant i de 1 a 12.
; després s'aplica inversió a cada cercle de la configuració
; des del punt i radi que ja es veu al dibuix. (crec que el radi
```

```

; d'inversió és 18.70829).

; funcions pel canvi a polars.
; la corba inicial te components x=t i la y ve donada per:
(defun ysinpo (t) (+ 10.0 (* rbol (cos (* 12.0 t)))))

; arrugues.

; les figures 5.3.15 i 16, són tal com es descriu al text, amb k=2/3.

; per l'espiral d'Arquimedes, s'ha prè ro(theta)=(5 pi/2) theta.
; per la seva arruga, w1=0.1, w2=0.2, p=12.5, fou1=fou2=5, k=0.8.

; per l'exemple d'arruga 3D,
; parametrizació reglada de l'hiperboloide d'una fulla:
(defun hiplx (s t) (- (cos s) (* t (sin s))))
(defun hiply (s t) (+ (sin s) (* t (cos s))))
(defun hiplz (s t) t)
; parametrizació de l'hiperboloide girat, primer
; -120° entorn z i després -30° entorn x.
(defun persphiperx (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
          (hiplx s t)
          (hiply s t)
          (hiplz s t)
  )
)

(defun perpshipery (s t)
  (girzxy (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
          (hiplx s t)
          (hiply s t)
          (hiplz s t)
  )
)

(defun persphiperz (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
          (hiplx s t)
          (hiply s t)
          (hiplz s t)
  )
)

; per arrugar el hiperb. enlloc de girar i traslladar el
; arrugador, primer posem en perspectiva e hiperb. (amb les
; funcions anteriors) i després li apliquem el arrugador en
; posició normal. En la fig. 5.3.19. s'ha fet sup4 amb
; x(s,t)=
; (- (arrugx3d (+ (persphiperx s t) dx)
;               (+ (persshipery s t) dy)
;               (+ (persphiperz s t) dz)
;               0.1 0.2 0.87 5 5 0.8
;            )
;   dx
; )
; i similars per y(s,t) i z(s,t). dx,dy,dz són unes petites
; translacions per fer-ho més pseudoaleatori. No recordo els
; valors però podien ser alguna cosa com 1.13, -0.97, 2.31.
; primer s'afegeixen, llavors s'arruga i després es descompten.

; dobleg.
; Pel de l'eix x 45° amb a=0.75 només cal usar les funs. de
; la gramàtica.

; tub a doblegar. rtub(t) és el factor d'escala de la secció
; al llarg del tub. La secció és el·líptica: el semieix menor,

```

Programes del capítol 5.

```
; horitzontal, val rtub(t), l'altre val 1.618*rtub(t).
(defun rtub (t) (- 2.5 (* 0.5 (abs (sin (* (/ pi 5.0) t))))))
(defun tuby (s t) (* (rtub t) (cos s)))
(defun tubz (s t) (* 1.618 (rtub t) (sin s)))
; (respecte tubx, és la identitat en t abans de doblregar).

; parametrització del tub girat, primer
; -120° entorn z i després -30° entorn x.
(defun persptubx (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    t
    (tuby s t)
    (tubz s t)
  )
)
(defun persptuby (s t)
  (girzxy (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    t
    (tuby s t)
    (tubz s t)
  )
)
(defun persptubz (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    t
    (tuby s t)
    (tubz s t)
  )
)

; parametrització del tub doblat i girat, primer
; -120° entorn z i després -30° entorn x.
(defun perspdobtubx (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    (dobx t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (doby t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (tubz s t)
  )
)
(defun perspdobtuby (s t)
  (girzxy (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    (dobx t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (doby t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (tubz s t)
  )
)
(defun perspdobtubz (s t)
  (girzxx (* -0.66667 pi) (/ pi -3.0)
    (dobx t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (doby t (tuby s t) 7.5 (* 0.25 pi))
    (tubz s t)
  )
)

; desplaçador local ambiental.
; la paràbola és la  $y = -0.1 * x * (10 + x)$ , el punt P és el seu vèrtex,
; o sigui, (-5,2.5), el vector vletxa és (7.5,2.5). Q=P+vletxa.
; l'abast de la deformació ve controlada per una campana de exponent
; r=2 i una funció distància superel·líptica de n=3 i semieixos
; 17.5 i 12.5. La quadrícula té un espaiat de 1.25mm.

; combinació de formes.

; combinació de corbes per produir una corba.
```

```

; c&a. Només les funcions per mostrar, en versió plana,
; la lemniscata, l'espiral i la seva combinació (tot sense gruix).
; la resta també està en versió Matemàtica® i ja en tinc el dibuix
; cia_tesi.dwg. Les funcions tenen, aproximadament,
; els mateixos noms que en el fitxer cia.m.
(defun atral (t) (* 0.5 (+ 1.0 (tanh (* 8.333333 (+ t 0.9))))))
(defun atra2 (t) (* 0.5 (- 1.0 (tanh (* 8.333333 (- t 0.9))))))
(defun lem0x (t) (/ (* 0.7603 (sin t))
                   (+ 1.0 (* (cos t) (cos t)))
                   )
)
)
(defun lem0y (t) (/ (* 0.7603 (sin t) (cos t))
                   (+ 1.0 (* (cos t) (cos t)))
                   )
)
)
(defun lemx (t) (lem0x (* 3.35085 t)))
(defun lemy (t) (lem0y (* 3.35085 t)))
(defun espX (t)
  (gir2dx (* 0.25 pi)
    (* (tanh (* 1.618 t)) (cos t))
    (* -1.0 (tanh (* 1.618 t)) (sin t) (tanh t))
  )
)
)
(defun espY (t)
  (gir2dy (* 0.25 pi)
    (* (tanh (* 1.618 t)) (cos t))
    (* -1.0 (tanh (* 1.618 t)) (sin t) (tanh t))
  )
)
)
(defun plem (t) (* (atral t) (atra2 t)))
(defun pesp (t) (- 1.0 (plem t)))
; la corba cal dibuixar-la per t des de (-13 pi/4) a (+13 pi/4).
; en t=+-0.9 estan els centres de la transició entre les
; dues corbes a combinar.
(defun corbacia0x (t)
  (+ (* (plem t) (lemx t))
    (* (pesp t) (espX t))
  )
)
)
(defun corbacia0y (t)
  (+ (* (plem t) (lemy t))
    (* (pesp t) (espY t))
  )
)
)
; combinació de superfícies per donar una superfície.

; casc de la època d'en Pizarro. Veure fitxer exetrsup.m.
; tot s'ha de dibuixar escalat en un factor 25 i aplicant a les
; línies i les superfícies un gir de -120° entorn z i després -60°
; entorn x (usant les funcions girzx*), llevat de la darrera vista
; de ña superfície resultant, que s'ha de girar -60° entorn z i
; -72° (-0.4 pi) entorn x.
; superfícies a combinar.
(defun supcascl (s t)
  (if (>= (- 1.0 (+ (* s s) (* t t))) 0.0)
    (* 1.618 (sqrt (- 1.0 (+ (* s s) (* t t))))
      0.0
    )
  )
)
)
(defun supcasc2 (s t) (* 1.618 0.5 (+ 1.0 (* s t))))
; funció de transició, controlat per una superel·lipse
(defun funtranscasc (s t)
  (fi (distn2 0.0 0.0 s t 1.0 1.0 4.0) 0.5 0.875 1.0)
)
)
; superfície resultant. (la superfície serà la gràfica de la

```

Programes del capítol 5.

```
; funció de dues variables que segueix).
(defun superfcasc (s t)
  (+ (* (rampar (funtrascasc s t) 0.0 1.0 1.0 0.0 2.0)
        (supcasc1 s t)
      )
     (* (rampar (funtrascasc s t) 0.0 1.0 0.0 1.0 2.0)
        (supcasc2 s t)
      )
  )
)

; transició entre paràmetres. Superfícies semblades a pantalles
; de llum. Veure fitxer exetrans.m

; transicions dels diferents paràmetres.
; semieix a de pantalla:
(defun seapant (t) (+ (* 2.000 (rampar t 0.0 1.0 1.0 0.0 0.3333))
                    (* 0.625 (rampar t 0.0 1.0 0.0 1.0 0.3333))
                  )
)
; semieix b:
(defun sebpant (t) (+ (* 1.250 (rampar t 0.0 1.0 1.0 0.0 3.0000))
                    (* 1.000 (rampar t 0.0 1.0 0.0 1.0 3.0000))
                  )
)
; altura z:
(defun zpant (t) (+ (* -2.00 (rampar t 0.0 1.0 1.0 0.0 1.0000))
                  (* 2.00 (rampar t 0.0 1.0 0.0 1.0 1.0000))
                )
)
; les el·lipses les definim a partir d'una sola,
; amb els paràmetres variables.
(defun elipantx (s a) (* a (cos s)))
(defun elipanty (s b) (* b (sin s)))
; la component z és, simplement, zpan per les dues pantalles.
; per la el·lipse d'abaix, és zpan(0), per l'altra, zpan(1).
; la primera pantalla surt d'interpolació lineal entre les dues
; el·lipses.
; com altres vegades, s'han de situar en perspectiva,
; amb gir de -120° "z" i -60° "x".
(defun pantlx (s t)
  (+ (* (- 1.0 t) (elipantx s 2.000))
     (* t (elipantx s 0.625))
  )
)
(defun pantly (s t)
  (+ (* (- 1.0 t) (elipanty s 1.250))
     (* t (elipanty s 1.000))
  )
)
(defun pantlz (s t)
  (+ (* (- 1.0 t) -2.0)
     (* t 2.0)
  )
)
; la segona és la que interpola no les corbes sinó els paràmetres.
(defun pant2x (s t) (elipantx s (seapant t)))
(defun pant2y (s t) (elipanty s (sebpant t)))
; pant2z és zpant.

; poligonitzador de corbes. Exemple d'una espiral d'Arquimedes.

; ro(theta) de la espiral del poligonitzador->roespol
(defun roespol (t) (/ t (* 2 pi)))
; l'espiral sense poligonitzar.
(defun espol0x (t) (* (roespol t) (cos t)))
```

```

(defun espol0y (t) (* (roespol t) (sin t)))
; es poligonitza cada pi/2, llavors la funció delta del text és:
(defun deltpol (t) (* 0.5 pi t))
; es discretitza la variable t.
(defun esdisc0x (t) (espol0x (deltpol (pe t))))
(defun esdisc0y (t) (espol0y (deltpol (pe t))))
(defun esdisc1x (t) (espol0x (deltpol (pe (+ 1 t)))))
(defun esdisc1y (t) (espol0y (deltpol (pe (+ 1 t)))))
; l'espiral poligonitzada. Ara cada unitat de t correspon a pi/2
; de la espiral sense poligonitzar.
(defun espollx (t) (+ (* (- (pe (+ 1 t)) t) (esdisc0x t))
                    (* (- t (pe t)) (esdisc1x t))
                    )
)
)
(defun espolly (t) (+ (* (- (pe (+ 1 t)) t) (esdisc0y t))
                    (* (- t (pe t)) (esdisc1y t))
                    )
)
)
; finalment, una funció altura sobre la espiral poligonitzada.
; S'haurà de dibuixar en perspectiva de manera similar a les
; anteriors perspectives, però amb gir "z" -105° (-7 pi/12) i
; gir "x" -22.5° (- pi/8). Es dibuixen dues voltes, primer avaluant
; la espiral només cada pi/2, des de 0 a 4 pi, i després amb el
; poligonitzador, amb les divisions que es vulgui, entre 0 i 8.
; Els vèrtexs de la poligonal es donen en els valors enters.
(defun altpol (t) (+ 3 (cos (* pi t)) (/ (cos (* 3 pi t)) 3.0)))

; periodificador de corbes paramètriques.
; corba de partida: una estrofoide recta, horitzontal, amb a=20.
; s'ha de dibuixar per t entre -pi/3 i +pi/3.
(defun estrofy (t) (* 2 20 (- 1 (* (cos t) (cos t)))))
(defun estrofx (t) (* 20 (tan t) (- 1 (* 2 (cos t) (cos t)))))
; la estrofoide periodificada.
(defun estrofperx (t)
  (+ (estrofx (ps t (/ pi -3.0) (/ pi 3.0)))
     (* (pe (/ (- t (/ pi -3.0)) (- (/ pi 3.0) (/ pi -3.0)))
        (- (estrofx (/ pi 3.0)) (estrofx (/ pi -3.0)))
        )
     )
)
)
)
(defun estrofpery (t)
  (+ (estrofy (ps t (/ pi -3.0) (/ pi 3.0)))
     (* (pe (/ (- t (/ pi -3.0)) (- (/ pi 3.0) (/ pi -3.0)))
        (- (estrofy (/ pi 3.0)) (estrofy (/ pi -3.0)))
        )
     )
)
)
)

```

arruga2.m

```

(* fitxer arruga2.m *)

<<graphics`parametricplot3d`
(* funcions per produir arrugues en objectes a l'espai *)
fu1=5;fu2=5;
ff[x_,c_,k0_]:= (1-k0)*Sin[(2*Pi/c)*x]+k0*Sin[fu1*(2*Pi/c)*x]/fu1
gg[x_,c_,k0_]:= (1-((1-k0)*Cos[(2*Pi/c)*x]+k0*Cos[fu2*(2*Pi/c)*x]/(fu2/2)))/2

(* aquesta trf és com la que es va fer per el Bazaar, amb l'afegit
de k01 i k02: si se'ls dóna el valor 0, és la mateixa d'abans.
*)
trf3d[c_,k_,k01_,k02_] [{s_, t_, u_}] :=
  {s - k*(c/(2*Pi))*ff[s,c,k01] * gg[t,c,k02]*gg[u,c,k02],

```


Programes del capítol 5.

```
t - k*(c/(2*Pi))*ff[t,c,k01] * gg[u,c,k02]*gg[s,c,k02],
u - k*(c/(2*Pi))*ff[u,c,k01] * gg[s,c,k02]*gg[t,c,k02]
}

trf3dcent[c_,k_,k01_,k02_] [{s_, t_, u_}] :=
{ s - k*(c/(2*Pi))*ff[s+c/2,c,k01] * gg[t+c/2,c,k02]*gg[u+c/2,c,k02],
  t - k*(c/(2*Pi))*ff[t+c/2,c,k01] * gg[u+c/2,c,k02]*gg[s+c/2,c,k02],
  u - k*(c/(2*Pi))*ff[u+c/2,c,k01] * gg[s+c/2,c,k02]*gg[t+c/2,c,k02]
}

(* per arrugar un objecte, parametritzat com, diguem, obj[s,t],
cal fer trf[obj[s,t],c,k,k01,k02].
*)

(* cas bidimensional *)
trf2d[c_,k_,k01_,k02_] [{s_,t_}] :=
{ s - k*(c/(2*Pi))*ff[s,c,k01] * gg[t,c,k02],
  t - k*(c/(2*Pi))*ff[t,c,k01] * gg[s,c,k02]
}

trf2dcent[c_,k_,k01_,k02_] [{s_,t_}] :=
{ s - k*(c/(2*Pi))*ff[s+c/2,c,k01] * gg[t+c/2,c,k02],
  t - k*(c/(2*Pi))*ff[t+c/2,c,k01] * gg[s+c/2,c,k02]
}

dibu[k_,a_,b_] := ParametricPlot3D[Append[trf2d[1,k,a,b] [{s,t}],0],
{ s,0,1,0.02}, { t,0,1,0.02}, ViewPoint->{0,0,100},
Axes->None, Boxed->False]
taula:=
GraphicsArray[{{dibu[0.00,0.00],dibu[0.00,0.25],dibu[0.00,0.67],dibu[0.00,1.00]},
{dibu[0.25,0.00],dibu[0.25,0.25],dibu[0.25,0.67],dibu[0.25,1.00]},
{dibu[0.50,0.00],dibu[0.50,0.25],dibu[0.50,0.67],dibu[0.50,1.00]},
{dibu[0.75,0.00],dibu[0.75,0.25],dibu[0.75,0.67],dibu[0.75,1.00]},
{dibu[1.00,0.00],dibu[1.00,0.25],dibu[1.00,0.67],dibu[1.00,1.00]},
}
]
```

Programes del capítol 6.

cap6.lsp

```

; fitxer cap6.lsp.

; funcions per les gràfiques de la tesi, capítol 6.
; (les funcions genèriques estan al fitxer de la gramàtica).

; Sanefes.

; modificació epidèmica del cosinus.
(defun sanefx (t k) (+ t (* k (sin (* 2 t)))))
(defun sanefy (t) (cos t))

; trames.

; Vasarely.
(defun rovas (s t k r0)
  (+ 1.0
    (* k 0.5 (exp 1.5)
      (exp (/ (+ (* s s) (* t t)) (* -1.0 r0 r0)))
    )
  )
)
(defun vasax (s t k r0) (* (rovas s t k r0) s))
(defun vasay (s t k r0) (* (rovas s t k r0) t))

; efecte onada.
(defun roona0 (r k p)
  (+ r (* k (/ p (* 2 pi)) (sin (/ (* 2 pi r) (* 1.0 p))))
)
(defun roona (s t k p)
  (/ (roona0 (sqrt (+ (* 1.0 s s) (* t t))) k p)
    (sqrt (+ (* 1.0 s s) (* t t)))
  )
)
(defun onax (s t k p) (* s (roona s t k p)))
(defun onay (s t k p) (* t (roona s t k p)))

; rusc.
(defun alfaruscx (u) (* 0.25 (+ (* 3 u) (pd u 0 1))))
(defun alfaruscy (u) (* 0.25 (sqrt 3.0) (- u (pd u 0 1))))
(defun betaruscx (u) (* -0.5 (pd u 0 1)))
(defun betaruscy (u) (* 0.5 (sqrt 3.0) u))
(defun ruscx (s t) (+ (alfaruscx s) (betaruscx t)))
(defun ruscy (s t) (+ (alfaruscy s) (betaruscy t)))

; grades.

; escala unitat.
(defun esclx (t) (* 0.5 (+ t (pd t 0 1))))
(defun esclz (t) (* 0.5 (- t (pd t 0 1))))

; grada ultra-isòptica.
; funció auxiliar.
(defun rograd (u) (/ (+ 2.0 u) (* 12.0 u u)))

; part no lineal.
(defun hggrad (t dl)
  (+ (log (/ (+ t dl) (* 1.0 dl)))
    (/ t (* 2.0 dl (+ t dl)))
    (rograd dl)
    (* -1.0 (rograd (+ t dl)))
  )
)

```

Programes del capítol 6.

```
)
)
; grada llisa (punt objectiu: l'origen)
(defun gradlx (t dob d d0 du)
  (- (+ dob (* d (+ t (/ d0 (* 1.0 d)))))) du)
)

(defun gradlz (t d d0 hob h0 hu hf)
  (- (+ hob
      (* (+ (/ (* h0 d) (* 1.0 d0))
          (* hf (hhgrad t (/ d0 (* 1.0 d))))))
      (+ t (/ d0 (* 1.0 d))))
  )
  hu
)

; grada esglaonada (punt objectiu: l'origen)
(defun gradex (t dob d d0 du) (gradlx (esclx t) dob d d0 du))
(defun gradez (t d d0 hob h0 hu hf) (gradlz (esclz t) d d0 hob h0 hu hf))

; idea de contorn pel camp de futbol, usant una superel·lipse amb
; u=1.375. (l'arrel de 2 és per escalar a 1 la primera
; superel·lipse després de girar-la 45°. El 0.5 és perquè no sigui
; tant gran.
(defun contornidx (t)
  (* 0.5 (sqrt 2) 55
    (gir2dx (* 0.25 pi) (superellx t 1 1 1.375)
             (superelly t 1 1 1.375))
  )
)

(defun contornidy (t)
  (* 0.5 (sqrt 2) 36
    (gir2dy (* 0.25 pi) (superellx t 1 1 1.375)
             (superelly t 1 1 1.375))
  )
)

; contorn del camp de futbol.
; funcions auxiliars.
; valors extrems de l'exponent u. En una sola funció:
; per ug s'ha de fer ab=a, dp=dpg.
; per ul s'ha de fer ab=b, dp=dpl.
(defun ugl (ab dp)
  (/ (* -1 (log 2.0)) (log (/ (+ ab (* 2.0 dp)) (* 2.0 ab))))
)

(defun ucontorn (s a b dpd dpl)
  (* 0.5
    (+ (ugl a dpd) (ugl b dpl)
      (* (- (ugl a dpd) (ugl b dpl))
        (cos (* 2 (+ s (* 0.25 pi))))))
  )
)

(defun contornx (t a b dpd dpl)
  (* 0.5 (sqrt 2) a
    (gir2dx (* 0.25 pi) (superellx t 1 1 (ucontorn t a b dpd dpl))
             (superelly t 1 1 (ucontorn t a b dpd dpl))
  )
)
)
```

```
(defun contorny (t a b dpq dpl)
  (* 0.5 (sqrt 2) b
    (gir2dy (* 0.25 pi) (superellx t 1 1 (ucontorn t a b dpq dpl))
              (superelly t 1 1 (ucontorn t a b dpq dpl))
    )
  )
)

; catàleg d'arcs.
; funció per dibuixar un arc donat el punt inicial, w, b, h, n i m
(DEFUN dibarc (x0 y0 w b h n m / X Y XF YF TI TF NT PAS ECO BLIP)
  ; funcions components.
  (DEFUN X (T) (+ x0 (archorz t w b m)))
  (DEFUN Y (T) (+ y0 (arcvert t w b h n)))
  (SETQ ECO (GETVAR "CMDECHO") BLIP (GETVAR "BLIPMODE"))
  (SETVAR "CMDECHO" 0)
  (SETVAR "BLIPMODE" 0)
  (setq ti 0.0 tf (* 2.0 b))
  (setq nt (max (* 2.0 (fix (+ (* 40.0 b) 1.0))) 100.0))
  (SETQ PAS (/ (- TF TI) NT) ; increment_de_t entre divisions.
    T TI ; t pren el valor inicial per començar el traçat de la corba.
  )
  ; bucle que construeix la corba. S'inicia la corba amb un punt i després
  ; s'entra en el bucle, en el que en cada pas s'aprofita per actualitzar
  ; el valor de t.
  (COMMAND "_PLINE" (LIST (X T) (Y T)))
  (REPEAT (ATOI (RTOS NT))
    (COMMAND (LIST (X (SETQ T (+ T PAS))) (Y T)))
  )
  (COMMAND "") ; "return" per acabar la polilinea.
  (SETVAR "CMDECHO" ECO)
  (SETVAR "BLIPMODE" BLIP)
)

; funció per dibuixar tot el catàleg.
(defun c:cataleg ( / ww bb hh valors xcornerini ycornerini
  xinc yinc ample alt xcorner ycorner
  xindex yindex
  )
  (setq ww 5.0 bb 5.75 hh 15.0)
  (setq valors (list 0.1 0.3 0.6 1.0 1.5 2.0 3.0 5.0 10.0 25.0))
  (setq xcornerini -57.5 ycornerini 70.0 xinc 0.5 yinc 1.25)
  (setq ample 12.5 alt 17.5)
  (setq xcorner (- xcornerini ample) ycorner ycornerini)
  (setq xindex -1 yindex 0)
  (repeat 10
    (repeat 10
      (dibarc (+ (setq xcorner (+ xcorner ample)) xinc)
        (+ ycorner yinc)
        ww bb hh
        (nth (setq xindex (1+ xindex)) valors)
        (nth yindex valors)
      )
    )
    (setq xcorner (- xcornerini ample) ycorner (- ycorner alt)
      xindex -1 yindex (1+ yindex)
    )
  )
)
)
```

sanefes.lsp

```
; fitxer sanefes.lsp.
; per produir les sanefes del capítol 6, secció 1.
```

Programes del capítol 6.

```
; components x i y de la sanefa.
(defun xsf (t k p)
  (+ t (* (/ (* 1.0 p) (* 2.0 pi)) k (sin (/ (* 4.0 pi t) (* 1.0 p))))))
)

(defun ysf (t a p) (* a (cos (/ (* 2.0 pi t) (* 1.0 p))))))

(defun c:sanefa (/ k0 kk aa pp ti tf nt pas t eco blip)
  (setq eco (getvar "cmdecho") blip (getvar "blipmode"))
  (setvar "cmdecho" 0)
  (setvar "blipmode" 0)
  (setq k0 (getreal "factor k de distorsió?<2.30167> : ")
        kk (if (equal k0 nil) 2.30167 k0)
        aa (float (eval (read (getstring "amplitud? : " T))))
        pp (float (eval (read (getstring "període? : " T))))
        ti (float (eval (read (getstring "t inicial? : " T))))
        tf (float (eval (read (getstring "t final? : " T))))
        nt (getint "nº de divs.? : ")
        pas (/ (- tf ti) (float nt))
        t ti
  )
  (command "_pline" (list (xsf t kk pp) (ysf t aa pp)))
  (repeat nt
    (command (list (xsf (setq t (+ t pas)) kk pp) (ysf t aa pp)))
  )
  (command "")
  (setvar "blipmode" blip)
  (setvar "cmdecho" eco)
)
```

flors.m

```
(* funcions per produir flors - fitxer flors.m - *)

<<graphics`parametricplot3d`
normq[v_List]:=v.v
norma[v_List]:=Sqrt[normq[v]]
x[t_,k_] := t + k*Sin[2*t]

(* valors interessants per la k: *)
(* talls amb eix "x" verticals *)
k1 = 0.5
(* crestes i valls veïnes tangents directes (sense rinxols) *)
k2 = 2.30166942437585
k3 = -0.5 (* extrems en forma de "punxa" *)
(* crestes i valls veïnes tangents inverses (amb rinxols) *)
k4 = -3.89485288374636

y[t_] := Cos[t]

fpolars[{u_, v_}] := v*{Cos[u], Sin[u]}

sradi[s_,t_,m_] := t/(Abs[Cos[s]]^m+Abs[Sin[s]]^m)^(1/m)

fspolars[{u_,v_},m_] := sradi[u,v,m]*{Cos[u],Sin[u]}

fexpx[{u_, v_}, a_] := {a*u, v}

fafiy[{u_, v_}, a_, b_] := {u,a+(b-a)*((v+1)/2)}

inversio[punt_List,centre_List,radi_] :=
  centre+(punt-centre)*(radi^2/normq[punt-centre])

(* les dos següents son per deformar la flor *)
```

```

(* parab s'aplica després de pasar a polars i fa l'efecte de "fondre's" *)
(* trama produeix compressions i expansions dels pètals *)
parab[{u_,v_},c_]:= {u,v-c*u^2}

trama[{u_,v_},k_]:= {u+k*cos[u],v}

(* n=n$ de pètals, radint i radext= radis interior i exterior *)
(* kf=k per la flor,kt=k per la trama *)

flor[t_,n_,radint_,radext_,kf_,kt_]:=
  fpolars[trama[fafiy[fexpx[{x[t,kf],y[t]}],1/n],radint,radext],kt]]

supflor[t_,n_,radint_,radext_,kf_,kt_,m_]:=
  fspolars[trama[fafiy[fexpx[{x[t,kf],y[t]}],1/n],radint,radext],kt],m]

dibflor1[n_,radint_,radext_,kf_,kt_]:=
ParametricPlot[flor[t,n,radint,radext,kf,kt],{t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n),PlotStyle->{Thickness[0.005]}
]
dibflor2[n_,radint_,radext_,kf_,kt_,centre_List,radi_]:=
  ParametricPlot[inversio[flor[t,n,radint,radext,kf,kt],centre,radi],{t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n)]
dibflor3[n_,radint_,radext_,k_,centre_List,radi_,curv_]:=
  ParametricPlot[parab[inversio[flor[t,n,radint,radext,kf,kt],centre,radi],curv],
  {t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n),PlotStyle->{Thickness[0.005]}
]
]
dibsupflor1[n_,radint_,radext_,kf_,kt_,m_]:=
  ParametricPlot[supflor[t,n,radint,radext,kf,kt,m],{t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n),PlotStyle->{Thickness[0.005]}
]
dibsupflor2[n_,radint_,radext_,kf_,kt_,centre_List,radi_,m_]:=
  ParametricPlot[inversio[supflor[t,n,radint,radext,kf,kt,m],centre,radi],
  {t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n),PlotStyle->{Thickness[0.005]}
]
]
dibsupflor3[n_,radint_,radext_,kf_,kt_,centre_List,radi_,curv_,m_]:=
ParametricPlot[parab[inversio[supflor[t,n,radint,radext,kf,kt,m],centre,radi],curv
],
  {t,0,2 n Pi},
  PlotRange->All,AspectRatio->Automatic,Axes->None,
  PlotPoints->(50*n),PlotStyle->{Thickness[0.005]}
]
]

sup0[s_,t_,n_]:= {s,x[t,k2]/n,y[t]}
ciliz[{u_,v_,w_}]:= {u*cos[v],u*sin[v],w}
dibcoll:=
ParametricPlot3D[ciliz[sup0[s,t,24.0]],{s,3,8,5},{t,0,48 Pi,Pi/24.0},
Boxed->False,Axes->None]

```

hyperest.m

```

(* funcions i dades per a produir el hyperestadi, per estadi amb contorn
superel·líptic o hyperel·líptic
*)

```

Programes del capítol 6.

```
<<graphics`parametricplot3d`

(* corner = còrner autèntic, corner2 = vèrtex de les hyperel·lipses, o
   superel·lipses
*)
corner={53,36,0}
corner2={55,36,0}

(* radil = "radi" de la gespa en el corner2; radi2 = íd. per la barana de
   la primera grada *)
radil=2
radi2=5

(* distàncies de GEspa i GRada des de els límits del camp en el centre de
   els laterals i gols respectivament
*)
gespaample=4
gespallarg=12
gradaample=10
gradallarg=17

(* factorescala canvia la superel·lipse girada en la escala adient *)
factorescala=Sqrt[2]*corner2

(* corba produeix la directriu de les grades amb n1 i n2 els valors extrems
   de la n de la superel·lipse *)

corba[t_,n1_,n2_]:=factorescala*hypel2[t,cosmod[Cos,t,n1,n2,-Pi/4,3 Pi/4]]

hypel2[s_, t_]:= gir[Pi/4] . hypel[s, t]

gir[alfa_] := {{Cos[alfa], -Sin[alfa],0}, {Sin[alfa], Cos[alfa],0},{0,0,1}}

(* hypel produeix la superel·lipse amb paràmetre s i valor del exponent n=t *)
hypel[s_, t_] := {x0[s, t], y0[s, t],0}

x0[s_, t_] := Sign[Cos[s]]*(Cos[s]^2)^(1/t)
y0[s_, t_] := Sign[Sin[s]]*(Sin[s]^2)^(1/t)

(* cosmod produeix una cosinusoidal (si f=Cos) que oscil·la entre a i b amb
   període de c a d *)
cosmod[f_, u_, a_, b_, c_, d_] :=
  (b + a + (b - a)*f[(2*Pi*(u - c))/(d - c)])/2

(* guia ,s la normal cap enfora de corba i serveix per a produir les grades *)
guia[t_,n1_,n2_] :=
  {{0, 1,0}, {-1, 0,0},{0,0,1}} . tan[t,n1,n2]/norma[tan[t,n1,n2]]

(* tan de corba es calcula numèricament per evitar els problemes de Sign *)
tan[t_,n1_,n2_] := (corba[t + 0.000001,n1,n2] - corba[t - 0.000001,n1,n2]) /
  0.000002

norma[v_List] := Sqrt[v . v]

(* mgea i mgel pel contorn de la gespa, amb "offset des del vertex"=radi1,
   mgra i mgrl pel contorn de la grada, amb "offset des del vertex"=radi2
   (...a=ample, ...l=llarg)
*)

mgea = N[-Log[2]/Log[(corner[[2]]+gespaample-radi1)/(2*corner2[[2]])],8]
mgel = N[-Log[2]/Log[(corner[[1]]+gespallarg-radi1)/(2*corner2[[1]])],8]
mgrl = N[-Log[2]/Log[(corner[[2]]+gradaample-radi2)/(2*corner2[[2]])],8]
```

```

mgr1 = N[-Log[2]/Log[(corner[[1]]+gradallarg-radi2)/(2*corner2[[1]])],8]

(* d0=distància horitzontal punt objectiu - ull primer espectador;
   d =amplada de cada grada; h0=altura ull primer espectador respecte punt
   objectiu; hf = altura front; (du,hu) = posició ull espectador respecte
   cantell davanter de cada grada; (dob,hob)= posició punt objectiu
   respecte corba directriu (grada(s,0); dl = "veure apunts isòptiques"
*)

(* per la primera graderia *)
d0=7.0;d=0.8;h0=0.65;hf=0.125;du=0.6;hu=1.15;
dob=radi2+0.8-d0;hob=0.0;dl=d0/d

(* per la segona graderia *)
d0=27.8;d=0.8;h0=13.9;hf=0.125;du=0.6;hu=1.15;
dob=-1.2;hob=0.0;dl=d0/d

(* per la tercera graderia *)
d0=27.8;d=0.8;h0=19.9;hf=0.125;du=0.6;hu=1.15;
dob=-1.2;hob=0.0;dl=d0/d

(* q = funció que aproxima per excés la autentica isòptica (corba suau) *)
q[t_]:= Log[(dl+t)/dl]+1/(2 dl)-1/(2 (dl+t))+1/(12 dl^2)-1/(12 (dl+t)^2)+
        1/(6 dl^3)-1/(6 (dl+t)^3)

(* (xe,ye)= funció productora del esglaonat *)
xe[t_]:= (t + ArcCos[Cos[Pi t]]/Pi)/2
ye[t_]:= (t - ArcCos[Cos[Pi t]]/Pi)/2

(* (xgl,ygl)= parametrització llisa de la grada *)
xgl[t_]:= dob + d*(dl+t)-du
ygl[t_]:= hob + (h0/dl+hf*q[t])*(dl+t)-hu

(* (xge,yge)= parametrització esglaonada de la grada *)
xge[t_]:=xgl[xe[t]]
yge[t_]:=ygl[ye[t]]

(* grada=funció productora de la grada; s= param. que dona la volta;
   t par..metre sobre la grada: t=0 -> davant primera fila, t=1 -> darrera
   primera fila, t=2 ->devant segona fila, etc. *)
grada[s_,t_]:=corba[s,mgra,mgr1] + xge[t]*guia[s,mgra,mgr1]+{0,0,yge[t]}

(* gespa=funció productora del límit de la gespa *)
gespa[t_]:=corba[t,mgea,mgel]+ radi1 * guia[t,mgea,mgel]

gesp0[t_,r_,h_]:=corba[t,mgea,mgel]+ r * guia[t,mgea,mgel] + {0,0,h}

(* grad0 permet produir una corba llisa que ,s un offset de grada(t,0)
   de dist...ncia r a altura h *)
grad0[t_,r_,h_]:=corba[t,mgra,mgr1]+ r * guia[t,mgra,mgr1] + {0,0,h}

(* cal usar diferents passos per produir les grades i les baranes atesa la
   diferència de curvatura. int_i dóna els adients per a les grades; els
   altres (intb_i) s'han usat per a les baranes i passadissos usant grad0 *)
int1 = {s, -Pi/4, -Pi/64, Pi/64}
int2 = {s, -Pi/64, -Pi/512, Pi/512}
int3 = {s, -Pi/512, -Pi/1024, Pi/1024}
int4 = {s, -Pi/1024, Pi/1024, Pi/2048}
int5 = {s, Pi/1024, Pi/512, Pi/1024}
int6 = {s, Pi/512, Pi/64, Pi/512}

```


Programes del capítol 6.

```
int7 = {s, Pi/64, Pi/4, Pi/64}
intb1 = {s, -Pi/4, -Pi/360, Pi/360}

intb2 = {s, -Pi/360, Pi/360, Pi/1440}

intb3 = {s, Pi/360, Pi/4, Pi/360}

(* parab0= par..bola directriu de la coberta0 a la altura de la última fila;
   vectord= vector director de les generatrius de la coberta *)
parab0[x_] := -0.0059793*(x^2 - 138.2^2)

vectord = {0, 0.7874936192208692, -0.616322804775563}

(* equacions cartesianes de la coberta virtual i del up & down de la real *)
cobertcartes0[x_, y_, z_] := 0.0059793*x^2 + y + 1.27773*z - 195.274
cobertcartes1[x_, y_, z_] := 0.0059793*x^2 + y + 1.27773*z - 201.213
cobertcartes2[x_, y_, z_] := 0.0059793*x^2 + y + 1.27773*z - 202.491

(* paraby i parabz sçn les projeccions de la paràbola-límit davantera de
   cobertal *)
paraby[x_] := -0.00209432*(x^2 - 138.2^2)

parabz[x_] := -0.00304049*(x^2 - 203.708^2)

(* parabx0z ,s la par bola intersecció de les dos cobertes1 que es tallen
   sobre y=0 *)
parabx0z[x_] := (-0.0059793*x^2 + 201.213)/1.27773

(* biga_i donen els 4 costats-perfils de cada biga, per a dibuixar-les
   per doble interpolació lineal *)
biga1[s_] := {s, -0.0059793*s^2 + 178.692, 17.6259}

biga2[s_] := {s, -0.0059793*s^2 + 179.97, 17.6259}

biga3[s_] := {s, paraby[s], parabz[s]}

biga4[s_] := {s, paraby[s], parabz[s] + 1}

(* tall_i dona l'angle s per al que es dona la intersecció de la aresta
   t-èssima de grada3 amb coberta0, pel lateral i pel gol respectivament *)
tall1[t_] := FindRoot[cobertcartes0[N[grada[s, t][[1]]],
  N[grada[s, t][[2]]], N[grada[s, t][[3]]]] == 0, {s, 0, 0.7854}][[1,2]]

tall2[t_] := FindRoot[cobertcartes0[N[grada[s, t][[1]]],
  N[grada[s, t][[2]]], N[grada[s, t][[3]]]] == 0, {s, -0.7854, 0}][[1,2]]

(* triangle produeix un ídem donats els v,rtexs. Serveix per a produir els
   extrems triangulars de cada fila de grada tallada per coberta0 *)
triangle[p0_List, p1_List, p2_List, s_, t_] :=
  (1 - t)*p0 + t*((1 - s)*p1 + s*p2)

(* vol_i dona la superfície del voladís de premsa-focus-marcador des de
   ellipsevol (cercle directriu) cap amunt (vol1) o cap enrera
   horitzontalment (vols2) fins tallar cobertal (per t de 0 a 1) *)
vol1[s_, t_] := ellipsevol[s] + t*cortel[s]*nellipsevol2[s]

ellipsevol[s_] := {107*Cos[s], 107*Sin[s], 66}

(* corte_i dona, per cada s, la longitud sobre la generatriu fins tallar
   cobertal (cortel cap amunt a 60°, corte2 cap enrera horitz. *)
cortel[s_] := FindRoot[cobertcartes1[vol01[s, t][[1]], vol01[s, t][[2]],
  vol01[s, t][[3]]] == 0, {t, 10, 120}][[1,2]]

(* vol01 simplement produeix la superfície cònica des de la directriu
   ellipsevol seguint la generatriu normalitzada i a 60$ (nellipsevol2) *)
vol01[s_, t_] := ellipsevol[s] + t*nellipsevol2[s]
```

```

nellipsevol2[s_] := nellipsevol[s]/2 + {0, 0, Sqrt[3]/2}
nellipsevol[s_] := {-Cos[s], -Sin[s], 0}
vol2[s_, t_] := ellipsevol[s] - t*corte2[s]*nellipsevol[s]
corte2[s_] := FindRoot[cobertcartes1[vol02[s, t][[1]], vol02[s, t][[2]],
    vol02[s, t][[3]]] == 0, {t, 5, 55}][[1,2]]
(* vol02 id. que vol01 però cap enrera *)
vol02[s_, t_] := ellipsevol[s] - t*nellipsevol[s]
(* bezier(up & down) és la versió cartesiana (z=f(x,y)) de la superfície de
    bezier que produeix les dues cobertes menors sobre els gols (up= versió
    "sobre", down= versió "sota" *)
bezierup[{x_, y_}] :=
    ((parabz[x]+1 - parabx0z[x])*(y^2 - paraby[x]^2))/(2*paraby[x]^2) +
    parabz[x]+1
bezierdw[{x_, y_}] :=
    ((parabz[x] - parabx0z[x])*(y^2 - paraby[x]^2))/(2*paraby[x]^2) +
    parabz[x]
(* coons permet dibuixar les cobertes de bezier només sobre el recinte
    limitat per les cobs corbac_i i corbad_i *)
coons[s_, t_] :=
    (1 - t)*corbac1[s] + t*corbac2[s] + (1 - s)*corbad1[t] + s*corbad2[t] -
    ((1 - t)*(1 - s)*corbad1[0] + (1 - t)*s*corbad2[0] +
    t*(1 - s)*corbad1[1] + t*s*corbad2[1])
corbac1[s_] := {(138.2-57.112)*s + 57.112,
    -paraby[(138.2-57.112)*s + 57.112], 0}
corbac2[s_] := {(138.2-57.112)*s + 57.112,
    paraby[(138.2-57.112)*s + 57.112], 0}
corbad1[t_] := grad0[2*0.62394*t - 1.40934, 0, 0]
corbad2[t_] := {138.2, 0, 0}
(* vollp i cortelp fan el mateix paper que vol_i i corte_i però respecte
    la coberta bezierdw. El valor de s on cal canviar de voll a vollp es
    troba resolent per s la equació voll(s,1)[[1,2]] "pertany a" paraby
    (intersecció de la projecció horitzontal de voll amb paraby). La solució
    està apuntada en el resum i és 0.331893
*)
vollp[s_, t_] := ellipsevol[s] + t*cortelp[s]*nellipsevol2[s]
cortelp[s_] := FindRoot[vol01[s, t][[3]] -
    bezierdw[vol01[s, t][[1, 2]]] == 0, {t, 25, 125}][[1,2]]

```

bazaar.m

```

(* fitxer bazaar.m, per produir les voltes i les naus de la reforma
    del Gran Bazaar de Istanbul. Capítol 6, secció 4, paràgraf 3.
*)
<<graphics`parametricplot3d`
girz[alf_] := {{Cos[alf], -Sin[alf], 0}, {Sin[alf], Cos[alf], 0}, {0, 0, 1}}
trf[{s_, t_, u_},c_,k_] :=
    {s - k*(c/(2*Pi))*Sin[(2*Pi/c)*s] * ( Sin[(Pi/c)*t]*Sin[(Pi/c)*u] )^2,
    t - k*(c/(2*Pi))*Sin[(2*Pi/c)*t] * ( Sin[(Pi/c)*u]*Sin[(Pi/c)*s] )^2,
    u - k*(c/(2*Pi))*Sin[(2*Pi/c)*u] * ( Sin[(Pi/c)*s]*Sin[(Pi/c)*t] )^2}

```

Programes del capítol 6.

```
(* funcions per produir una nau de la reforma del Gran Bazaar *)
(* sup1 és la funció productora *)

sup0[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_] :=
{fr[s, as, bs, grs], t+fr0[per[t, 2 bt], at, bt, grt],
  Max[fz[s, as, bs, hs, ns], fz[per[t, 2 bt], at, bt, ht, nt]]
}

sup0sum[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_] :=
{fr[s, as, bs, grs], t+fr0[per[t, 2 bt], at, bt, grt],
  fz[s, as, bs, hs, ns]+fz[per[t, 2 bt], at, bt, ht, nt]
}

sup1[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_, c_, k_, alf_] :=
girz[-alf].trf[girz[alf].sup0[s, t, as, at, bs, bt, hs, ht, ns, nt, grs, grt], c, k]

sup0p[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_] :=
{s+fr0[per[s, 2 bs], as, bs, grs], t+fr0[per[t, 2 bt], at, bt, grt],
  Max[fz[per[s, 2 bs], as, bs, hs, ns], fz[per[t, 2 bt], at, bt, ht, nt]]
}

sup0psum[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_] :=
{s+fr0[per[s, 2 bs], as, bs, grs], t+fr0[per[t, 2 bt], at, bt, grt],
  fz[per[s, 2 bs], as, bs, hs, ns]+fz[per[t, 2 bt], at, bt, ht, nt]
}

sup1p[s_, t_, as_, at_, bs_, bt_, hs_, ht_, ns_, nt_, grs_, grt_, c_, k_, alf_] :=
girz[-alf].trf[girz[alf].sup0p[s, t, as, at, bs, bt, hs, ht, ns, nt, grs, grt], c, k]

fr0[t_, a_, b_, gr_] := a*salt[fil[t - b, a], a, gr] - fil[t - b, a]

fr[t_, a_, b_, gr_] := t + fr0[t, a, b, gr]

salt[t_, a_, gr_] := ((a + t)^(1 + gr) - (a - t)^(1 + gr))/
  ((a + t)^(1 + gr) + (a - t)^(1 + gr))

fil[t_, a_] := (Abs[a + t] - Abs[a - t])/2

fi[t_, t0_, t1_] := (Abs[t-t0]-Abs[t-t1]+t1-t0)/(2.0*(t1-t0))

transr[t_, r_] := t^r/(t^r+(1-t)^r)

mu[t_, t0_, t1_, t2_, t3_, r_] := transr[(fi[t, t0, t1]-fi[t, t2, t3]), r]

per[t_, l_] := t - l*Floor[t/l]

fz[t_, a_, b_, h_, n_] := Max[0, h*fz0[(t-b)/a, n]]

fz0[t_, n_] := 1-Abs[t]^n

(* a= semiampçada de les voltes (a la base); b= a+semidistància entre voltes;
  h= altura del centre de la volta (abans de deformat); n= exponent que
  controla la corba de la volta; c= període de la deformació aplicada;
  k= intensitat de la deformació aplicada (k entre 0 i 1);
  alf= gir en el que s'aplica la deformació; l= període de la funció "per";
  gr= grau de continuïtat de salt.
*)

(* dht és una deformació longitudinal sinusoidal més una recta
  que cal afegir a la altura constant de la nau principal.
  enet és el valor de n a llarg de les botigues.
  graut és el valor de grt al llarg de les botigues.
  aquestes dues darreres usen caract, funció característica d'un
```

```

interval [t0,t1], que, al seu torn usa signsup.
altbot controla l'altura de les botigues.
*)

dht0[y_]:= Sin[0.5*y]+(y-7.5)/5.0
dht[t_]:= dht0[t+fr0[per[t, 2.5], 0.875, 1.25,graut[t]]]

signsup[x_]:= Abs[Floor[1+x]]-Abs[Floor[x]]
caract[t_,t0_,t1_]:= (signsup[t-t0]-signsup[t-t1])/2
(* n de les botigues : 1ª=2, 2ª=1.25, 3ª=2.5, 4ª=5.
   grau de les botig.: 1ª=3, 2ª=0, 3ª=3.5, 4ª=-0.75.
*)
ene[t_]:=2-0.75*caract[t,2.5,5]+0.5*caract[t,5,7.5]+3*caract[t,7.5,10]
graut[t_] :=
  1+2*caract[t,0,2.5]-caract[t,2.5,5]+
  2.5*caract[t,5,7.5]-1.75*caract[t,7.5,10]

altbot[s_]:= 5*(2*mu[s,-5.75,-3.25,7.75,10.25,3]-1)

(* una proposta de valors, que després no s'aplica del tot:
   as=2, at=0.875, bs=2.25, bt=1.25, hs=6+dht[t], ht=5, ns=1.5, nt=1.5,
   grs=2, grt=2, c=2.943, k=0.8, alf=0.5.
   Per dibuixar el basar cal fer anar t de 0 a 10 i la s
   de 0 a 4.5 si és només amb la porta de les botigues i
   de -4.5 a 9 si és amb les botigues complertes.
*)

(* bazar0nb= bazar sense arrugar i sense botigues;
   bazar0b = bazar sense arrugar i amb botigues;
   bazar1 = bazar amb botigues i arrugues.
*)

dibbazar0nb:=
  ParametricPlot3D[
    sup0[s,t,2,0.875,2.25,1.25,6+dht[t],5,1.75,ene[t],0.5,graut[t]],
    {s,0,4.5,0.125},{t,0,10,0.125},Boxed->False,Axes->None,
    ViewPoint->{1.3,-1.7,1.8}
  ]

dibbazar0b:=
  ParametricPlot3D[
    sup0[s,t,2,0.875,2.25,1.25,6+dht[t],altbot[s],
      1.75,ene[t],0.5,graut[t]
    ],
    {s,-4.5,9.0,0.125},{t,0,10,0.125},Boxed->False,Axes->None,
    ViewPoint->{1.3,-1.7,1.8}
  ]

dibbazar1:=
  ParametricPlot3D[
    sup1[s,t,2,0.875,2.25,1.25,6+dht[t],altbot[s],
      1.75,ene[t],0.5,graut[t],2.943,0.8,0.5
    ],
    {s,-4.5,9.0,0.125},{t,0,10,0.125},Boxed->False,Axes->None,
    ViewPoint->{1.3,-1.7,1.8}
  ]

```

catedral.lsp

```

; fitxer catedral.lsp.

(DEFUN POW (X Y / PR)
  (COND ((AND (NUMBERP X) (NUMBERP Y))
    (SETQ PR (* (SIN (* 3.1415926 Y)) (SIN (* 3.1415926 Y))))
    (COND ((< PR 0.000001)
      (IF (MINUSP Y)

```

Programes del capítol 6.

```
(SETQ X (/ 1.0 (FLOAT X)) Y (* -1.0 (FLOAT Y)))
(SETQ X (FLOAT X) Y (FLOAT Y))
)
(COND ((< (* Y Y) 0.00001) 1.0)
      (T (* X (POW X (- Y 1.0)))))
)
)
((MINUSP X) (PROMPT "ERROR: N§ NEG. ELEVAT A EXP. NO ENTER"))
((not (zerop x)) (EXP (* Y (LOG (FLOAT X)))))
((and (zerop x) (not (zerop y))) 0.0)
(t (prompt "INDETERMINAT")))
)
)
(T (PROMPT "ARGUMENTS INCORRECTES"))
)
)
(defun arc0 (x n) (- 1.0 (pow (abs x) n)))
(defun arcl (x h w n) (* h (arc0 (/ x (* 1.0 w)) n)))
(defun arc (x h w n) (max 0.0 (arcl x h w n)))
(defun ramp0 (x a)
  (* 0.5 (- (abs (+ x a)) (abs (- x a)))))
)
(defun ramp1 (t a m)
  (/ (- (pow (+ a t) m) (pow (- a t) m))
     (+ (pow (+ a t) m) (pow (- a t) m))))
)
)
(defun archorz0 (t w b m)
  (- (* w (ramp1 (ramp0 (- t b) w) w m))
     (ramp0 (- t b) w)))
)
)
(defun archorz (t w b m) (+ t (archorz0 t w b m)))
(defun arcvert (t w b h n) (arc (- t b) h w n))

; per produir fileres d'arcades, cal importar el periodificador
; simple des de la gramàtica. Els hi direm galeries periodificades.

(defun archorzper (t w b m)
  (+ t (archorz0 (pers t 0.0 (* 2.0 b)) w b m)))
)
(defun arcvertper (t w b h n)
  (arc (- (pers t 0.0 (* 2.0 b)) b) h w n))
)

; per intersecar galeries. En horitzontal hi haurà dues direccions:
; una, en x, amb paràmetre s i valors w1, b1, etc. i l'altra, en y,
; amb paràmetre t i valors w2, b2, etc. La component x es farà amb
; archorzper(s w1 b1 m1) i la y ídem. amb t i subíndexs 2.
; per la vertical, intervenen alhora els dos paràmetres s i t.
; fem dues versions, una amb max i l'altra amb min.

(defun galeriesvertmax (s t w1 b1 h1 n1 w2 b2 h2 n2)
  (max (arcvertper s w1 b1 h1 n1) (arcvertper t w2 b2 h2 n2)))
)
(defun galeriesvertmin (s t w1 b1 h1 n1 w2 b2 h2 n2)
  (min (arcvertper s w1 b1 h1 n1) (arcvertper t w2 b2 h2 n2)))
)

; per dibuixar en perspectiva, amb combinació amb girzx x,y,z de la
; gramàtica: primer cal definir amb un setq els paràmetres formals i
; després usar les següents funcions:

(defun xbaz (s) (archorzper s ww1 bb1 mm1))
(defun ybaz (t) (archorzper t ww2 bb2 mm2))
(defun zbazmax (s t)
  (galeriesvertmax s t ww1 bb1 hh1 nn1 ww2 bb2 hh2 nn2))
```

```

)
(defun zbazmin (s t)
  (galeriestvertmin s t ww1 bb1 hh1 nn1 ww2 bb2 hh2 nn2)
)

(defun panyhorz (s t h1 h2 w1 w2 b1 b2 c1 c2 n1 n2 m1 m2)
  (+ (* (- 1 s) (+ (- c1 b1) (archorz (- t (- c1 b1)) w1 b1 m1)))
    (* s
      (+ (- c2 b2)
        (archorz (* (/ (* 1.0 b2) (* 1.0 b1)) (- t (- c1 b1))) w2 b2 m2)
      )
    )
)

(defun panyvert (s t h1 h2 w1 w2 b1 b2 c1 c2 n1 n2 m1 m2)
  (+ (* (- 1 s) (arcvert (- t (- c1 b1)) w1 b1 h1 n1))
    (* s
      (arcvert (* (/ (* 1.0 b2) (* 1.0 b1)) (- t (- c1 b1))) w2 b2 h2 n2)
    )
)

; donant abans, amb setq, valors a les variables, es poden definir
; les següents funcions:
(defun xypany (s t) (panyhorz s t h1 h2 w1 w2 b1 b2 c1 c2 n1 n2 m1 m2))
(defun zpany (s t) (panyvert s t h1 h2 w1 w2 b1 b2 c1 c2 n1 n2 m1 m2))

; funcions per dibuixar els nervis creuats dels trams 10 x 20.
; serveixen d'exemple pels altres casos. La y queda multiplicada per
; 4/9 que és la proporció un cop restats els pilars i traslladada.
; Cal donar h1 i m1 abans usant setq.

(defun ogiv20x10x (s t) (panyhorz s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
  (+ 9 0.25) (- 9 0.25)(+ 9 0.25)
  (- 9 0.25) 10 10 1 1 m1 m1
)

(defun ogiv20x10y (s t) (+ (- 1 (/ 4.0 9.0))
  (* (/ 4.0 9.0)
    (panyhorz s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
      (+ 9 0.25) (- 9 0.25)(+ 9 0.25)
      (- 9 0.25) 10 10 1 1 m1 m1
    )
  )
)

(defun ogiv20x10z (s t) (panyvert s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
  (+ 9 0.25) (- 9 0.25)(+ 9 0.25)
  (- 9 0.25) 10 10 1 1 m1 m1
)

; Ara el cas 10 x 10. Íd. respecte h1 i m1.

(defun ogiv10x10x (s t) (panyhorz s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
  (+ 4 0.25) (- 4 0.25)(+ 4 0.25)
  (- 4 0.25) 5 5 1 1 m1 m1
)

(defun ogiv10x10y (s t) (panyhorz s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
  (+ 4 0.25) (- 4 0.25)(+ 4 0.25)
  (- 4 0.25) 5 5 1 1 m1 m1
)

(defun ogiv10x10z (s t) (panyvert s t (+ h1 0.375) (- h1 0.375)
  (+ 4 0.25) (- 4 0.25)(+ 4 0.25)

```

Programes del capítol 6.

```

                                (- 4 0.25) 5 5 1 1 ml ml
                                )
)

(defun coordcilx (s t) (* t (cos s)))
(defun coordcily (s t) (* t (sin s)))

; funcions per dibuixar nervis ogivals a les giroles. Cal, amb setq,
; donar valors prèviament als paràmetres que apareixen.
(defun sss (s t) (+ (- (* 0.2 fa) pe)(* pe (ttt s t))))
(defun ttt (s t) (panyhorz s t hp hm wp wm wp wm c c n n m m))

(defun girocx (s t)
  (+ 10
    (coordcilx
      (panyhorz s t 49.5 50.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
        (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
      )
    )
  )
)

(defun girocy (s t)
  (+ 110
    (coordcily
      (panyhorz s t 49.5 50.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
        (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
      )
    )
  )
)

(defun girocz (s t)
  (panyvert s t 48.5 50.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
    (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
  )
)

(defun girolex (s t)
  (+ 10
    (coordcilx
      (panyhorz s t 12.5 15.0 (* 0.025 pi) (* 0.05 pi) (* 0.025 pi)
        (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) 1 5 4 15
      )
    )
  )
)

(defun giroley (s t)
  (+ 110
    (coordcily
      (panyhorz s t 12.5 15.0 (* 0.025 pi) (* 0.05 pi) (* 0.025 pi)
        (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) 1 5 4 15
      )
    )
  )
)

(defun girolez (s t)
  (panyvert s t 12.5 15.0 (* 0.025 pi) (* 0.05 pi) (* 0.025 pi)
    (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) (* 0.05 pi) 1 5 4 15
  )
)

(defun girolix (s t)
  (+ 10
```

```

        (coordcilx
          (panyhorz s t 14.5 15.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
            (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 4 15
          )
        )
      )
    )
  )
  (defun giroliy (s t)
    (+ 110
      (coordcily
        (panyhorz s t 14.5 15.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
          (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 4 15
        )
      )
    )
  )
  )
  (defun giroliz (s t)
    (panyvert s t 14.5 15.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi) (* 0.1 pi)
      (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 4 15
    )
  )
  )
  (defun giro2ex (s t)
    (+ 10
      (coordcilx
        (panyhorz s t 8.5 10.0 (* 0.075 pi) (* 0.1 pi) (* 0.075 pi)
          (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
        )
      )
    )
  )
  )
  (defun giro2ey (s t)
    (+ 110
      (coordcily
        (panyhorz s t 8.5 10.0 (* 0.075 pi) (* 0.1 pi) (* 0.075 pi)
          (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
        )
      )
    )
  )
  )
  (defun giro2ez (s t)
    (+ 15.0
      (panyvert s t 8.5 10.0 (* 0.075 pi) (* 0.1 pi) (* 0.075 pi)
        (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 5 6 15
      )
    )
  )
  )
  (defun giro2ix (s t)
    (+ 10
      (coordcilx
        (panyhorz s t 9.5 15.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
          (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 10 6 10
        )
      )
    )
  )
  )
  (defun giro2iy (s t)
    (+ 110
      (coordcily
        (panyhorz s t 9.5 15.0 (* 0.08 pi) (* 0.1 pi) (* 0.08 pi)
          (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) (* 0.1 pi) 1 10 6 10
        )
      )
    )
  )
  )

```



```

iter[x_,per_]:=x-per*Floor[x/per]

anchorzfila[t_,w_,b_,m_]:=t+anchorz0[iter[t,2 b],w,b,m]
arcvertfila[t_,w_,b_,h_,n_]:=arcvert[iter[t,2 b],w,b,h,n]

(* galeries encreua dues files d'arcs extrusionats i pren el màxim
de les dues sobre cada punt del terra
*)

galeries[s_,t_,hs_,ht_,ws_,wt_,bs_,bt_,ns_,nt_,ms_,mt_]:=
{
  anchorzfila[s,ws,bs,ms],
  anchorzfila[t,wt,bt,mt],
  Max[arcvertfila[s,ws,bs,hs,ns],
    arcvertfila[t,wt,bt,ht,nt]
  ]
}

(* coordcilind passa a coordenades cilíndriques per fer els
elements de la girola
*)

coordcilind[{u_,v_,w_}] := {v*Cos[u],v*Sin[u],w}

(* funcions de transició entre 0, 1 o -1 ("m1" *)

trans01[t_,t0_,t1_,m_]:= (t-t0)^m/((t1-t)^m+(t-t0)^m)
trans10[t_,t0_,t1_,m_]:= (t1-t)^m/((t1-t)^m+(t-t0)^m)
trans1m1[t_,t0_,t1_,m_]:= ((t1-t)^m-(t-t0)^m)/((t1-t)^m+(t-t0)^m)
transm11[t_,t0_,t1_,m_]:= ((t-t0)^m-(t1-t)^m)/((t1-t)^m+(t-t0)^m)

(* funcions pel cimbori *)

(* la versió vella tenia: anglec[t_]:=Pi/4+(Pi/75)*t *)

anglec[t_]:= Pi/4+2*Pi*trans01[t,0,100,1.5]
expo[t_]:=1+transm11[t,-50,50,1.5]
radhipere1[s_,exp_]:=1/((Abs[Cos[s]])^exp+(Abs[Sin[s]])^exp)

radic[t_]:=7.5*Sqrt[2]*trans1m1[t,0,100,1.5]

cimbori[s_,t_]:=gir[anglec[t]].
(radic[t]*radhipere1[s,expo[t]]*{Cos[s],Sin[s],0})+{10,80,75+t}

(* funcions pels pinacles de la façana principal *)

radip[t_]:= -0.75*ramp1[ramp0[t-50,45],45,1.125]
anglep[t_]:= (Pi/2)+(Pi/8)*((1+ramp1[ramp0[t-15,12.5],12.5,2])/2)

v1={10,10,0};vini2={10,10,0};v3={-10,-10,0};vini4={-10,-10,0};
wini1={-10,10,0};wini2={-10,10,0};wini3={10,-10,0};wini4={10,-10,0};
vfin2={10,-10,0};vfin4={-10,10,0};
wfin1={-10*Sqrt[2],0,0};wfin2={0,10*Sqrt[2],0};
wfin3={10*Sqrt[2],0,0};wfin4={0,-10*Sqrt[2],0};
v2[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*vini2+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*vfin2
v4[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*vini4+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*vfin4
w1[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wini1+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wfin1
w2[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wini2+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wfin2
w3[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wini3+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wfin3
w4[t_]:=((1-ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wini4+
((1+ramp1[ramp0[t-17.5,15],15,2])/2)*wfin4

```

Programes del capítol 6.

```
(* funció per produir un polígon tancat. No cal repetir al final
el primer vèrtex, s'entén que també és el darrer
*)

poligon[s_,llops0_List]:=
Block[{pini,llops,res},
  pini=llops0[[1]];
  llops=Prepend[llops0,pini];
  llops=Append[llops,pini];llops=Append[llops,pini];
  res=llops[[1]]+
    Sum[({llops[[i-1]]-2*llops[[i]]+llops[[i+1]])/2]*
      Abs[s-i+2],
      {i,2,Length[llops]-1}
    ];
  Return[res]
]

(* funció per produir una poligonal eventualment oberta *)

poligonal[s_,llops0_List]:=
Block[{pini,pfin,llops,res},
  pini=llops0[[1]];pfin=llops0[[Length[llops0]]];
  llops=Prepend[llops0,pini];
  llops=Append[llops,pfin];
  res=(llops[[1]]+llops[[Length[llops]]])/2+
    Sum[({llops[[i-1]]-2*llops[[i]]+llops[[i+1]])/2]*
      Abs[s-i+2],
      {i,2,Length[llops]-1}
    ];
  Return[res]
]

pinacle[s_,t_]:=
gir[anglep[t]].
(radip[t]*poligon[s,{v1,w1[t],v2[t],w2[t],v3,w3[t],v4[t],w4[t]}])+
{-20,-10,50+t}

(* torres del creuer *)

arest1[t_]:= {50,50+30*archorz[t,1,1,2],50+arcvert[t,1,1,25,1]}
arest2[t_]:= {40,50+30*archorz[t,1,1,2],50+arcvert[t,1,1,25,1]}
arest3[t_]:= {40+(2.5/22.5)*arcvert[t,1,1,22.5,1],70+10*archorz[t,1,1,2],50+
  arcvert[t,1,1,22.5,1]
}
arest4[t_]:= {50-(7.5/22.5)*arcvert[t,1,1,22.5,1],70+10*archorz[t,1,1,2],
  50+arcvert[t,1,1,22.5,1]
}
torrecreuer[s_,t_]:=poligon[s,{arest1[t],arest2[t],arest3[t],arest4[t]}]

(* rosassa *)

girxz[ang_]:= {{Cos[ang],0,-Sin[ang]},{0,1,0},{Sin[ang],0,Cos[ang]}}
rosassa[s_,t_]:=
{10,0,40}+girxz[Pi/4].
((1-t)*10*Sqrt[2]*radhiperel[s,1]*{Cos[s],0,Sin[s]}+
t*(7.5*{Cos[s],0,Sin[s]}-{Sqrt[2],0,Sqrt[2]}))
rosassaint[s_,t_]:= {10,0,38}+((1-t)*7.5+t*6.4)*{Cos[s],0,Sin[s]}

(* porta façana principal, centre *)

portplle[t_]:= {3+archorz[((7-3)/(8.75-1.25))*(t-1.25),2,2,4],
  -10,arcvert[((7-3)/(8.75-1.25))*(t-1.25),2,2,6.75,1]
}
portplld[t_]:= {33+archorz[((37-33)/(38.75-31.25))*(t-31.25),2,2,4],
```

```

-10,arcvert[((37-33)/(38.75-31.25))*(t-31.25),2,2,6.75,1]
}
portp1c[t_]:= {16.5+archorz[((23.5-16.5)/(26-14))*(t-14),3.5,3.5,4],
-10,arcvert[((23.5-16.5)/(26-14))*(t-14),3.5,3.5,10,1]
}
portp2le[t_]:= {3+archorz[((7-3)/(8.75-1.25))*(t-1.25),2,2,4],
-11.25,arcvert[((7-3)/(8.75-1.25))*(t-1.25),2,2,6.75,1]
}
portp2ld[t_]:= {33+archorz[((37-33)/(38.75-31.25))*(t-31.25),2,2,4],
-11.25,arcvert[((37-33)/(38.75-31.25))*(t-31.25),2,2,6.75,1]
}
portp2c[t_]:= {16.5+archorz[((23.5-16.5)/(26-14))*(t-14),3.5,3.5,4],
-11.25,arcvert[((23.5-16.5)/(26-14))*(t-14),3.5,3.5,10,1]
}
portp3le[t_]:= {1.25+archorz[t-1.25,3.75,3.75,4],
-14.375,arcvert[t-1.25,3.75,3.75,8.5,1]
}
portp3ld[t_]:= {31.25+archorz[(t-31.25),3.75,3.75,4],
-14.375,arcvert[(t-31.25),3.75,3.75,8.5,1]
}
portp3c[t_]:= {14+archorz[(t-14),6,6,4],-14.375,arcvert[(t-14),6,6,12.5,1]}
portp4le[t_]:= {1.25+archorz[t-1.25,3.75,3.75,4],
-15,arcvert[t-1.25,3.75,3.75,8.5,1]
}
portp4ld[t_]:= {31.25+archorz[(t-31.25),3.75,3.75,4],
-15,arcvert[(t-31.25),3.75,3.75,8.5,1]
}
portp4c[t_]:= {14+archorz[(t-14),6,6,4],-15,arcvert[(t-14),6,6,12.5,1]}
portp4lebis[t_]:= {archorz[t,3.75,5,4],-15,arcvert[t,3.75,5,8.5,1]}
portp4ldbis[t_]:= {30+archorz[(t-30),3.75,5,4],-15,arcvert[(t-30),3.75,5,8.5,1]}
portp4cbis[t_]:= {10+archorz[(t-10),6,10,4],-15,arcvert[(t-10),6,10,12.5,1]}
portp5le[t_]:= {archorz[t,4.5,5,2],-15,5+arcvert[t,4.5,5,4.75,1]}
portp5ld[t_]:= {30+archorz[(t-30),4.5,5,2],-15,5+arcvert[(t-30),4.5,5,4.75,1]}
portp5c[t_]:= {10+archorz[(t-10),7.25,10,2.5],-15,5+arcvert[(t-10),7.25,10,8.75,1]}
portp6le[t_]:= {archorz[t,4.5,5,2],-
20,arcvert[archorz[archorz[t,4.5,5,2],19.5,20,0.25],19.5,20,14.75,1]}
portp6ld[t_]:= {archorz[t,4.5,35,2],-
20,arcvert[archorz[archorz[t,4.5,35,2],19.5,20,0.25],19.5,20,14.75,1]}
portp6c[t_]:= {archorz[t,7.25,20,2],-
20,arcvert[archorz[archorz[t,7.25,20,2],19.5,20,0.25],19.5,20,14.75,1]}
portp6bis[t_]:= {archorz[t,19.5,20,4],-20,arcvert[t,19.5,20,14.75,1]}
portp7[t_]:= {archorz[t,20,20,4],-20,arcvert[t,20,20,15.25,1]}
portp8[t_]:= {archorz[t,20,20,4],-10,
arcvert[archorz[archorz[t,20,20,4],20,20,1/6],20,20,14.25,1]
}

(* s'ha de fer interpolació amb s i (1-s) entre portp1 i portp2
(versió esquerra, centre i dreta), igualment entre el 3 i el 4,
entre el 4bis i el 5, entre el 6bis i el 7 i entre el 7 i el 8.
Entre el 2 i el 3, per fer la forma d'arcs esglaonats, es fa el següent:
*)
portp23le[s_,t_]:=
(1-2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp2le[t]+(2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp3le[t]+
(1-2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp2le[t]+(2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp3le[t]
portp23ld[s_,t_]:=
(1-2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp2ld[t]+(2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp3ld[t]+
(1-2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp2ld[t]+(2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp3ld[t]
portp23c[s_,t_]:=
(1-2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp2c[t]+(2 esg1[10 s]/10)*{1,0,1}*portp3c[t]+
(1-2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp2c[t]+(2 esg0[10 s]/10)*{0,1,0}*portp3c[t]
(* on esg0 i esg1 són funcions esglaonadores del tipus escaleta: *)
esg0[s_]:= (s-ArcCos[Cos[Pi s]]/Pi)/2
esg1[s_]:= (s+ArcCos[Cos[Pi s]]/Pi)/2

(* d'aquesta manera, es formen 5 arcs esglaonats. La funció de {1,0,1} i {0,1,0}
és que quan avancen les coordenades x i z, ha d'aturar-se la y i viceversa.
La s ha de variar de 0 a 1 amb pas 0.1

```

Programes del capítol 6.

```
*)
(* respecte la interpolació entre 5 i 6, volem que sigui, no recte, sinó en forma
d'arc gòtic. Per això definim una funció que interpola en arc entre dos punts
p0 i p1. En aquest cas, p0 i p1 dependran de t
*)
interparc[s_,n_,m_,p0_List,p1_List]:=
  p0+{archorz[s,1,1,m],archorz[s,1,1,m],arcvert[s,1,1,1,n]}*(p1-p0)

(* porta façana creuer *)

portl1[t_]:=
  {60,77.25+archorz[((82.75-77.25)/(85-75))*(t-75),2.75,2.75,4],
  arcvert[((82.75-77.25)/(85-75))*(t-75),2.75,2.75,7.5,1]}
}
portl2[t_]:=
  {61.25,77.25+archorz[((82.75-77.25)/(85-75))*(t-75),2.75,2.75,4],
  arcvert[((82.75-77.25)/(85-75))*(t-75),2.75,2.75,7.5,1]}
}
portl3[t_]:= {64.375,75+archorz[(t-75),5,5,4],arcvert[(t-75),5,5,9.75,1]}
portl4[t_]:= {65,75+archorz[(t-75),5,5,4],arcvert[(t-75),5,5,9.75,1]}
portl4bis[t_]:= {65,72.5+archorz[(t-72.5),5,7.5,1],arcvert[archorz[archorz[(t-
72.5),5,7.5,1],5,7.5,0.25],5,7.5,9.75,1]}
portl5[t_]:=
  {65,72.5+archorz[(t-72.5),6.25,7.5,1],5+arcvert[(t-72.5),6.25,7.5,10,1]}
portl6[t_]:=
  {60,72.5+archorz[(t-72.5),6.25,7.5,1],5+arcvert[(t-72.5),6.25,7.5,10,1]}
portl23[s_,t_]:=
  (1-2 esg1[10 s]/10)*{0,1,1}*portl2[t]+(2 esg1[10 s]/10)*{0,1,1}*portl3[t]+
  (1-2 esg0[10 s]/10)*{1,0,0}*portl2[t]+(2 esg0[10 s]/10)*{1,0,0}*portl3[t]

(* funcions pels contraforts dels arcbotants *)

escalat[centre_List,punt_List,factor_]:=centre+factor*(punt-centre)
fact[t_]:=2^(-Floor[t/2])
secontra1[t_]:=poligonal[t,{{5,-1,0},{5,-1,15},{3,-1,18}}]
secontra2[t_]:=poligonal[t,{{5,1,0},{5,1,15},{3,1,18}}]
secontra3[t_]:=poligonal[t,{{1,1,0},{1,1,15},{1,1,18}}]
secontra4[t_]:=poligonal[t,{{1,-1,0},{1,-1,15},{1,-1,18}}]
contra[s_,t_]:=poligon[s,{escalat[{1,-1,36},secontra1[iter[t,2]],fact[t]],
  escalat[{1,1,36},secontra2[iter[t,2]],fact[t]],
  escalat[{1,1,36},secontra3[iter[t,2]],fact[t]],
  escalat[{1,-1,36},secontra4[iter[t,2]],fact[t]]
}
]

(* funcions per l'arc (de circumferència) de l'arcbotant. Les dades
provenen d'una solució gràfica obtinguda en el fitxer
arcbotant.dwg
*)

arcarbol[t_]:= {t,-0.5,17.7202+Sqrt[21.25^2-(t+2.25)^2]}
arcarbo2[t_]:= {t,0.5,17.7202+Sqrt[21.25^2-(t+2.25)^2]}
arcarbo3[t_]:= {t,0.5,17.7202+Sqrt[22.25^2-(t+2.25)^2]}
arcarbo4[t_]:= {t,-0.5,17.7202+Sqrt[22.25^2-(t+2.25)^2]}
arcarbo[s_,t_]:=poligon[s,{arcarbol[t],arcarbo2[t],
  arcarbo3[t],arcarbo4[t]}
]

(* la biga recta de l'arcbotant baixa amb una inclinació
de 45° amb el punt més alt a 45 mtrs., té un gruix
de 2.5 mtrs. i un ample de 2.
*)

secarbo[s_]:=poligon[s,{{0,-1,45},{0,1,45},{0,1,45-5/Sqrt[3]},
  {0,-1,45-5/Sqrt[3]}
}
```

```

]
arbo[s_,t_]:=secarbo[s]+t*{1,0,-1/Sqrt[3]}

(* funcions per produir panys de paret entre dos arcs, un emmarcant
l'altre
*)

panyhorz[s_,t_,h1_,h2_,w1_,w2_,b1_,b2_,c1_,c2_,n1_,n2_,m1_,m2_]:=
(1-s)*((c1-b1)+archorz[(t-(c1-b1)),w1,b1,m1])+
s*((c2-b2)+archorz[(b2/b1)*(t-(c1-b1)),w2,b2,m2])

panyvert[s_,t_,h1_,h2_,w1_,w2_,b1_,b2_,c1_,c2_,n1_,n2_,m1_,m2_]:=
(1-s)*arcvert[(t-(c1-b1)),w1,b1,h1,n1]+
s*arcvert[(b2/b1)*(t-(c1-b1)),w2,b2,h2,n2]

panyhorzfila[s_,t_,h1_,h2_,w1_,w2_,b1_,b2_,c1_,c2_,n1_,n2_,m1_,m2_]:=
(1-s)*((c1-b1)+archorzfila[(t-(c1-b1)),w1,b1,m1])+
s*((c2-b2)+archorzfila[(b2/b1)*(t-(c1-b1)),w2,b2,m2])

panyvertfila[s_,t_,h1_,h2_,w1_,w2_,b1_,b2_,c1_,c2_,n1_,n2_,m1_,m2_]:=
(1-s)*arcvertfila[(t-(c1-b1)),w1,b1,h1,n1]+
s*arcvertfila[(b2/b1)*(t-(c1-b1)),w2,b2,h2,n2]

```

bibliografia

Bibliografia

Sota la denominació de *Bibliografia* incloem tots els textos que hem consultat en relació al present treball, tant si han tingut un paper central com si es tracta de consultes molt puntuals i tant si els hi hem fet referència explícita com si no. Tampoc distingim entre llibres i articles en revistes especialitzades.

En atenció als textos citats, la bibliografia està per ordre alfabètic del primer autor o editor precedit d'una abreviatura de quatre lletres del seu cognom i l'any d'edició, ambdós tancats entre claudàtors. Tot i això, per facilitar la identificació mental, per part del lector, del autor citat, quan en el text d'aquest treball es cita una referència bibliogràfica, s'escriu el cognom sencer, no abreviat. S'entén que, per localitzar la referència en aquesta bibliografia, s'ha de buscar per les primeres quatre lletres de la cita. Per exemple, el llibre de Klement E., Mesiar R. i Pap E. es cita en el paràgraf 3.1.2 com Klement 00, això vol dir que s'ha de buscar a la bibliografia per l'entrada [**Klem00**].

Bibliografia.

- [Acze96] Aczel J. *Lectures on functional equations and their applications*. Academic Press. 1996.
- [Akki98] Akkiraju N. *Approximating spheres and sphere patches*. Computer Aided Geometric Design 15(7):739-756. 1998.
- [Alan78] Alan J. et alt. *Dibujo Técnico*. Ed. Bruño, Madrid 1978.
- [Alsi84] Alsina C., Trillas E. *Lecciones de Álgebra y Geometría (curso para estudiantes de Arquitectura)*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona 1984.
- [Alsi92] Alsina C., García-Roig J.L., Jacas J. *Temes Clau de Geometría*. Eds. U.P.C., Barcelona 1992.
- [Alsi93] Alsina C. *L'Art de Calcular en l'Arquitectura*. Edicions U.P.C., Barcelona 1993.
- [Alsi98] Alsina C. *La geometria de Gaudí*. Actes de les Jornades gaudinianes, Fundació Caixa de Catalunya, Barcelona 1998.
- [Alva71] Alvarado L. *Isópticas. Técnica en el proyecto de óptima visibilidad para espectadores*. Ed. Trillas, México 1971.
- [Ande96] Anderl R., Mendgen R. *Modelling with constraints: theoretical foundation and application*. Computer-aided Design 28(3):155-168. 1996.
- [Arti64] Artin, E. *The Gamma Function*. Holt, Rinehart & Winston Inc. NY 1964.
- [Auge72] Auger B. *The Architect and the Computer*. Pall Mall Press, London 1972.
- [Baja99] Bajaj Ch. L., Xu G. *A-splines: local interpolation and approximation using G^k -continuous piecewise real algebraic curves*. Computer Aided Geometric Design 16(6): 557-578. 1999.
- [Barn74] Barnhill R., Riesenfeld R.F. editores. *Computer Aided Geometric Design*. Academic Press. 1974.

- [Bars81] Barsky B. *The Beta-spline: a local representation based on shape parameters and fundamental geometric measures*. PhD thesis, Dept. of Computer Science, Univ. of Utah. 1981.
- [Bars88] Barsky B. *Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta-splines*. Springer-Verlag. 1988.
- [Bear81] Beardsley M.C., Hospers J. *Estética. Historia y fundamentos*. Colección Teorema, Eds. Cátedra, Madrid 1981.
- [Bern12] Bernstein S. *Démonstration du théorème de Weierstrass fondé sur le Calcul des Probabilités*. Harkov Soobs. Matem. ob-va., 13:1-2. 1912.
- [Bézi66] Bézier P. *Définition Numérique des Courbes et Surfaces I*. Automatisation, 11:625-632. 1966.
- [Bézi67] Bézier P. *Définition Numérique des Courbes et Surfaces II*. Automatisation, 12:17-21. 1967.
- [Bézi68] Bézier P. *How Renault uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling*. SAE Paper 680010. 1968.
- [Böhm84] Böhm W., Farin G., Kahman J. *A survey of Curve and Surface Methods in CAD*. Computer Aided Geometric Design, 1(1):1-60. 1984.
- [Boja93] Bojanov B.D., Hakopian H.A., Sahakian A.A. *Spline Functions and Multivariate Interpolations*. Kluwer Academic Publishers. 1993.
- [Bone94] Bonell C. *La divina proporción, las formas geométricas y la acción del demiurgo*. Edicions UPC, Barcelona 1994.
- [Bone00] Bonet J. *L'últim Gaudí*. Ed. Pòrtic, Barcelona 2000.
- [Broa71] Broadbent G. et al. *Metodología del Diseño Arquitectónico*. Colección Arquitectura y Crítica, Ed. Gustavo Gili 1971.
- [Brod80] Brodlie K.W. *Mathematical Methods in Computer Graphics and Design*. Academic Press Inc., London 1980.
- [Burr97] Burry M. et al. *Boolean operations and Architectural Form finding*. Proceedings of the 2nd. Int. Conference "Mathematics & Design":131-141, The University of the Basque Country, San Sebastián 1997.
- [Cast93] Castro J.L., Delgado M. *Fuzzy Systems with defuzzification are universal approximators*. Fuzzy Sets & Systems. 1993

- [Chan99] Chandrajit L.B., Gouliang X. *A-splines: local interpolation and approximation using G^k -continuous piecewise real algebraic curves.* Computer Aided Geometric Design 16(6):557-578. 1999.
- [Chan97] Chang L.H.T., Said H.B. *A C^2 triangular patch for the interpolation of functional scattered data.* Computer-aided Design 29(6):407-412. 1997.
- [Chen91] Cheng F., Barsky B.A. *Interproximation: Interpolation and Approximation using Cubic Spline Curves.* Computer-Aided Design 23(10):700-706. 1991.
- [Cont80] Conte S.D., de Boor C. *Elementary Numerical Analysis.* MacGraw Hill. 1980.
- [Cook79] Cook T.A. *The Curves of Life.* Dover Pub. Inc., N.Y. 1979.
- [Coon67] Coons S. *Surfaces for Computer Aided Design of Space Forms.* Informe Técnico. MIT, Proyecto MAC-TR 41. 1967.
- [Cord95] Cordero L.A., Fernández M., Gray A. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Matemática®.* Addison-Wesley Iberoamericana 1995.
- [Cost96] Costantini P., Manni C. *A bicubic shape-preserving blending scheme.* Computer Aided Geometric Design 13(4):307-331. 1996.
- [Cost99] Costantini P., Manni C. *A local shape-preserving interpolation scheme for scattered data.* Computer Aided Geometric Design 16(5):385-405. 1999.
- [Cotr00] Cotrina J., Pla N. *Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology.* Computer Aided Geometric Design 17(7):643-671. 2000.
- [Coxe71] Coxeter H.S.M. *Fundamentos de Geometría.* Ed. Limusa, México 1971.
- [Coxe86] Coxeter H.S.M., Penrose R. et alt. (eds.) *M.C. Escher: Art and Science.* North Holland, Elsevier Science Pub. 1986.
- [Dahl74] Dahlquis G., Björck Å. *Numerical Methods.* Prentice-Hall, New Jersey 1974.
- [dBer73] de Bertola E. *El arte cinético, el movimiento y la transformación. Análisis perceptivo y funcional.* Ed. Nueva Visión, Buenos Aires 1973.
- [dBoo62] de Boor C. *Bicubic Spline Interpolation.* J. Math. Phys., 41:212-218. 1962.

Bibliografia.

- [dBoo72] de Boor C. *On calculating with B-splines*. J. Approx. Theory 6, 50-62. 1972.
- [dBoo78] de Boor C. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag. 1978.
- [dCas63] de Casteljaou P. *Courbes et Surfaces á Poles*. Informe Técnico, A. Citróen, Paris. 1963.
- [dSot01] de Soto A., Recasens J. *Modelling a linguistic variable as a hierarchical family of partitions induced by and indistinguishability operator*. Fuzzy Sets and Systems 121,427-437. 2001.
- [dCar76] Do Carmo M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1976.
- [Dhom79] Dhombres J. *Some aspects of functional equations*. Chulalongkorn University. 1979.
- [Dier 97] Dierckx P. *On calculating normalized Powell-Sabin B-splines*. Computer Aided Geometric Design 15(1):61-78. 1997.
- [Dony85] Dony R. *Graphisme Scientifique sur Micro-Ordinateur*. Ed. Masson, Paris 1985.
- [Dubo00] Dubois D., Prade H. Eds. *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Kluwe Ac. Pub. 2000.
- [Earl71] Earle J.H. *Descriptive Geometry*. Addison-Wesley P.C. 1971.
- [Edwa85] Edwards R. *Microcomputer Art*. Prentice Hall of Australia Ltd. 1985.
- [Efim84] Efimov E.V. *Geometría Superior*. Ed. Mir, Moscú 1984.
- [Ehre73] Ehrenzweig A. *El orden oculto del Arte*. Biblioteca Universitaria Labor, Barcelona 1973.
- [Fang98] Fang L. *Circular arc approximation by quintic polynomial curves*. Computer Aided Geometric Design 15(8):843-861. 1998.
- [Fari90] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press. 1990.
- [Faro85] Farouki R. T., Hinds J. *A hierarchy of geometric forms*. IEEE Computer Graphics and Applications, 5(5):51-78. 1985.
- [Faro97] Farouki R. T. *Pythagorean-hodograph quintic transition curves of monotone curvature*. Computer-aided Design 29(9):601-606. 1997.

- [Faux85] Faux I., Pratt M. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood. 1985.
- [Ferg64] Ferguson J. *Multivariable Curve Interpolation*. JACM, II/2:221-228. 1964.
- [Fior97] Fiorot J. C., Jeannin P., Cattiaux-Huillard, I. *The circle as a smoothly joined BR-curve on [0,1]*. Computer Aided Geometric Design 14(4):313-324. 1997.
- [Floa01] Floater M.S., Reimers M. *Meshless parametrization and surface reconstruction*. Computer Aided Geometric Design 18(2):77-92. 2001.
- [Fole96] Foley J.D., Van Dam A., Feiner S.K., Hughes J.F. *Computer Graphics, principles and practice, 2nd ed in C*. Addison-Wesley P.C. 1996.
- [Gard85] Gardner M. *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas*. Ed. Labor, Barcelona 1985.
- [Ghyk77] Ghyka M.C. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Ed. Poseidón, Barcelona 1977.
- [Ghyk78] Ghyka M.C. *El número de oro (vols. 1 y 2)*. Ed. Poseidón, Barcelona 1978.
- [Gies79] Giesecke F.E. et al. *Dibujo Técnico*. Ed. Limusa, México 1979.
- [Guil98] Guillet S., Léon J.C. *Parametrically deformed free-form surfaces as part of a variational model*. Computer-aided Design 30(8):621-630. 1998.
- [Gome97] Gómez Serrano J., Burry M., Coll J., Monreal A. *A Mathematical Framework to Gaudí's use of Geometry*. Journal of the Int. Ass. for Shell and Spatial Structures, vol. 38(1997) n°. 1 April n°. 123. 1997.
- [Good98] Goodman T.N.T., Ong B.H., Sampoli M.L. *Automatic interpolation by fair, shape-preserving, G^2 space curves*. Computer-aided Design 30(10):813-822. 1998.
- [Gord69] Gordon W. *Blending-function methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation*. SIAM J. Numerical Analysis 8(1):158-177. 1969.

- [Gord74] Gordon W., Riesenfeld R.E. *B-spline Curves and Surfaces*. Barnhill et al. '74, 95-126. 1974.
- [Goul01] Gouliang X. et al. *C^1 modeling with A-patches from rational trivariate functions*. Computer Aided Geometric Design 18(3):221-243. 2001.
- [Guo 97] Guo B. *Surface reconstruction: from points to splines*. Computer-aided Design 29(4):269-277. 1997.
- [Hear94] Hearn D., Baker M.P. *Computer Graphics*. Prentice Hall. 1994.
- [Heat56] Heath T.L. *Euclid, The thirteen Books of The Elements*. Dover Publ. Inc., New York 1956.
- [Hick74] Hicks N.J. *Notas sobre Geometria Diferencial*. Col. Politècnica, Ed. Hispano-Europea 1974.
- [Hoff01] Hoffmann C.M., Kim K.-J. *Towards valid parametric CAD models*. Computer-aided Design 33(1):81-90. 2001.
- [HoSe96] HoSeok K., Avi K. *Deforming virtual objects interactively in accordance with an elastic model*. Computer-aided Design 28(4):251-262. 1996.
- [Hosa92] Hosaka M. *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*. Springer-Verlag 1992.
- [Hui 99] Hui K.C. *Shape blending of curves and surfaces with geometric continuity*. Computer-aided Design 31(13):819-828. 1999.
- [Ibar45] Ibarrola J. *Problemas gráficos de geometría métrica y proyectiva*. Casa Dochoa, Bilbao 1945.
- [Jaca87] Jacas J. *Contribució a l'estudi de les relacions d'indistingibilitat i a les seves aplicacions als processos de classificació*. Tesi Doctoral U.P.C. 1987.
- [Jaca93] Jacas J., Recasens J. *Fuzzy Numbers and Equality Relations*. FUZZ'IEEE-93, San Francisco 1298-1301. 1993.
- [Jaca97] Jacas J., Monreal A., Recasens J. *A model for CAGD using Fuzzy Logic*. International Journal of Approximate Reasoning 16, 3-4(1997):280-308 1997.

- [Jaca00] Jacas J., Casabó J., Comerón Ll., Monreal A. *Iniciació a la Informàtica en Arquitectura (matemàtiques II)*. Material didàctic-UPC, Barcelona 2000.
- [Jens91] Jensen T.W., Petersen C.S., Watkins M.A. *Practical Curves and Surfaces for a Geometric Modeler*. Computer Aided Geometric Design, 8:357-369. 1991.
- [Juha98] Juhász I. *Cubic parametric curves of given tangent and curvature*. Computer-aided Design 30(1):1-9. 1998.
- [Klaw93] Klawonn F., Kruse R. *Equality Relations as the Basis of Fuzzy Control*. Fuzzy Sets and Systems 54,147-156. 1993.
- [Klei56] Klein F. *Famous Problems of Elementary Geometry*. Dover 1956.
- [Klem00] Klement E., Mesiar R., Pap E. *Triangular norms*. Kluwer Ac. Pub. 2000.
- [Knor75] Knorr W.R. *The Evolution of the Euclidean Elements*. D. Reidel, Dordrecht (Holland) 1975.
- [Knor86] Knorr W.R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Birkhäuser, Boston 1986.
- [Koch71] Koch W. *Los Estilos en la Arquitectura*. Círculo de Lectores, Barcelona 1971.
- [Kost80] Kostovski A.N. *Construcciones Geométricas mediante un compás*. Ed. Mir, Moscú 1980.
- [Krus94] Kruse R., Gebhard J., Klawoon F. *Fondations of fuzzy Systems*. John Wiley & Sons, NY. 1994.
- [Lai 96] Lai, Ming-Jun. *Scattered data interpolation and approximation using bivariate C^1 piecewise cubic polynomials*. Computer Aided geometric Design 13(1):81-88. 1996.
- [Lawr72] Lawrence J.D. *A catalog of special plane curves*. Dover publications Inc. N.Y. 1972.

Bibliografía.

- [Cor79] Le Corbusier. *El Modulor (vols. 1 y 2)*. Ed. Poseidón, Barcelona 1979.
- [Lee 00] Lee In-Kwon. *Curve reconstruction from unorganized points*. Computer Aided Geometric Design 17(2):161-177. 2000.
- [Lee 96] Lee Jae Y., Kwangsoo K. *Geometric reasoning for knowledge-based parametric design using graph representation*. Computer-aided Design 28(10):831-841. 1996.
- [LiXi92] Wang Li-Xin. *Fuzzy Systems are universal approximators*. FUZZ'IEEE-92, San Diego, 1163-1170. 1992.
- [Mann99] Mann S. *Cubic precision Clough-Tocher interpolation*. Computer Aided Geometric Design 16(2):85-88. 1999.
- [Mart91] Martínez Marzoa F. *Càlculo y Ser (aproximación a Leibniz)*. Colección La Balsa de la Medusa nº. 43, Visor de Distribuciones 1991.
- [Mitc00] Mitchell J. *Topological obstructions to blending algorithms*. Computer Aided Geometric Design 17(7):673-694. 2000.
- [Miur00] Miura K.T. *Unit quaternion integral curve: A new type of fair free-form curves*. Computer Aided Geometric Design 17(1):39-58. 2000.
- [Mone00] Monedero J. *Parametric design: a review and some experiences*. Automation in Construction 9(4):369-377. 2000
- [Monr98a] Monreal A., Tomás M.S. *On some functional equations arising in Computer Graphics*. Aequationes Mathematicae A55,1:61-73. 1998.
- [Monr98b] Monreal A., Jacas J. *A Functional Code for the Guidance of the Design Conception*. Proceedings of the 2nd. Int. Conference "Mathematics & Design":35-43, The University of the Basque Country, San Sebastián 1997.
- [Niet92] Nieto M., Luca de Tena C. *La mezquita de Córdoba: Planos y dibujos*. Colegio Oficial de Arquitectos de Andalucía Occidental, Córdoba 1992.
- [Noci97] Nocito G. J. *Los cuerpos geométricos en la arquitectura de Gaudí*. Tesis Doctoral U.P.C., Barcelona 1997.
- [Nonw84] Nonweiler T.R.F. *Computational Mathematics, an introduction to Numerical Approximation*. Ellis Horwood. 1984.
- [Palu98] Paluszny M., Patterson R.R. *Geometric control of G^2 -cubic A-splines*. Computer Aided Geometric design 15(3):261-287. 1998.

- [Pedo79] Pedoe D. *La Geometria en el Arte*. Ed. Gustavo Gili., Barcelona 1979.
- [Phai96] (sense autor) *The 20th-Century Art Book*. Phaidon Press. Ltd. 1996.
- [Piegl91] Piegl L. *On NURBS: A Survey*. IEEE Computer Graphics and Applications, 11(1):55-71. 1991.
- [Prat97] Pratt M.J. *Quartic supercyclides I:Basic theory*. Computer Aided Geometric Design 14(7):671-692. 1997.
- [Puig56] Puig Adam P. *Curso de Geometría Métrica (vols. 1 y 2)*. Biblioteca Matemática, Madrid 1956.
- [Ross95] Ross T.J. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Mc.Graw Hill Inc. 1995.
- [Rove00] Rovenski V. *Geometry of Curves and Surfaces with Mapple*. Birkhäuser, Boston 2000.
- [Rudi76] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis, 3rd. ed.* MacGraw Hill. 1976.
- [Saga93] Saga S., Makino H. *Fuzzy Spline interpolation and its applications to on-line freehand curve identification*. Proceedings of the 2nd. IEEE International Conference on Fuzzy Systems (vol. II) 1993.
- [Sant66] Santaló L.A. *Geometría Projectiva*. EUDEBA, Buenos Aires 1966.
- [Schw83] Schweizer B., Sklar A. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland 1983.
- [Smog81] Smogorzhevski A.S. *La regla en construcciones geométricas*. Ed. Mir, Moscú 1981.
- [Spiv82] Spivak M. *Cálculo en Variedades*. Ed. Reverté, Barcelona 1982.
- [Sree96] Sreenivasa R.G., Srinam R.D. *From symbol to form: a framework for conceptual design*. Computer-aided Design 28(11):853-870. 1996.
- [Srin96] Srinivas Y.L., Vinod K.P., Dutta D. *Surface design using cyclide patches*. Computer-aided Design 28(4):263-276. 1996.
- [Srin99] Srinivasan V. *A geometrical product specification language based on a classification of symmetry groups*. Computer-aided Design 31(11):659-668. 1999.
- [Summ94] Summerson J. *El lenguaje clásico de la Arquitectura. De L. Alberti a Le Corbusier*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona 1994.

Bibliografia.

- [Szil00] Szilvási-Nagy M., Vendel T.P. *Generating curves and swept surfaces by blending circles*. Computer Aided Geometric Design 17(2):197-206. 2000.
- [Taka85] Takagi H., Sugeno M. *Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control*. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 15, 116-132. 1985.
- [Targ81] Targonski G. *Topics in Iteration Theory*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1981.
- [Tijo72] Tijonov A., Samarsky A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Ed. Mir, Moscú 1972.
- [Tril95] Trillas E., Alsina C., Terricabras J.M. *Introducción a la lògica borrosa*. Ed. Ariel, Barcelona 1995.
- [Vasa72] Vasarely V. *Notes Brutes*. Denoël-Gonthier, Paris 1972.
- [Vent95] Venturi R. *Complejidad y Contradicción en la Arquitectura*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona 1995.
- [Vino93] Vinogràdov J.M. (dir.) *Enciclopedia de las Matemáticas*. Ed. Mir, Moscú – Ed. Rubiños, Madrid 1993.
- [Walt96] Walton D.J., Meek D.S. *A Pythagorean hodograph quintic spiral*. Computer-aided Design 28(12):943-950. 1996.
- [Walt98] Walton D.J., Meek D.S. *G^2 curves composed of planar cubic and Pythagorean hodograph quintic spirals*. Computer Aided Geometric Design 15(6):547-566. 1998.
- [Warn83] Warner F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Col. Graduate Text in Mathematics n°. 94, Springer-Verlag 1983.
- [Wenz96] Wenz H.-J. *Intepolation of curve data by blending generalized circles*. Computer Aided Geometric Design 13(8):673-680. 1996.
- [Weyl74] Weyl H. *La Simetría*. Promoción Cultural, Barcelona 1974.
- [Whit73] White A.J. *Introducción al análisis real*. Promocion Cultural, Barcelona 1973.
- [Will84] Williams C. *Los orígenes de la forma*. Ed. Gustavo Gili 1984.
- [Zade75] Zadeh L.A. *The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning –I*. Information Sciences 8:199-249, 1975.

[Zevi98] Zevi B. *Saber ver la Arquitectura*. Eds. Apóstrofe DL, Barcelona 1998.

