

Universitat Politècnica de Catalunya

Dep. de Teoria del Senyal i Comunicacions

E.T.S. d'Enginyers de Telecomunicació

**TOMOGRAFIA DE MICROONDAS EN GEOMETRIA CILINDRICA
PARA APLICACIONES BIOMEDICAS**

Antoni Broquetas i Ibars

Dtor. Luis Jofre Roca

**Tesis doctoral presentada a la
Universitat Politècnica de Catalunya
para la obtención del título de Doctor
Ingeniero de Telecomunicación**

Barcelona, Mayo 1989

Los trabajos de investigación sobre los que se basa esta tesis han sido posibles gracias a las subvenciones recibidas de la Comisión Asesora Científica y Técnica en el proyecto "Sistemas de imágenes por microondas en tiempo real. Aplicaciones biomédicas" (1165-84), y del Fondo de Investigaciones Sanitarias de la Seguridad Social en el proyecto "Tomografía de microondas aplicación a la termografía diferencial" (84/2112), durante los años 1985-1988.

La interacción científica con grupos extranjeros dedicados al tema de imágenes por microondas gracias a dos acciones integradas hispano-francesa e hispano-británica (30/135, 17/173) durante los años 1985-1989, ha proporcionado una visión más completa de los sistemas de formación de imágenes permitiendo profundizar en los aspectos de reconstrucción y aplicaciones clínicas.

A la Sílvia pel seu
suport i comprensió

AGRAIMENTS

Agraeixo la confiança que el meu director de tesi Lluís Jofre m'ha demostrat, així com el seu suport i dedicació tant a nivell professional com humà.

Voldria agrair també l'ajut rebut dels membres del grup Antenes-Microones-Radar, especialment el consells d'en Angel Cardama i Javier Bará, així com l'entusiasme d'en Elías de los Reyes, Miquel Ferrando i Antoni Elías, particularment apreciat en els moments difícils amb el prototipus (alias "ROSCO").

Voldria expressar el meu agraïment als Professors J.Ch. Bolomey, Mme. Gaboriaud, A.P. Anderson i demés membres dels seus grups pel càlid acolliment rebut durant les estades a Supelec, Institut Curie i a la Universitat de Sheffield.

Vull donar les gràcies pel suport que en el aspectes clínics i mèdics m'han donat en Mark Hawley i l'Helena Almirall

Agraeixo especialment l'esforç dels tècnics Josep Ma. Haro, Joaquim Giner i Alfredo Cano solucionant de forma brillant els nombrosos problemes que comporta una realització experimental.

A totes les persones que d'una o altra manera han contribuït a que aquesta tesi arribés a bon terme voldria expressar la meva més sincera gratitud per la seva dedicació i pel bon ambient de treball creat

Finalment no voldria acabar sense reconèixer la generositat i valentia dels innumbrables "voluntaris" que van accedir a col·locar part del seu cos en el "ROSCO" durant les mesures experimentals

INDICE	1
NOTACIÓN UTILIZADA	7
1 INTRODUCCIÓN, ANTECEDENTES HISTÓRICOS Y PLANTEAMIENTO DE LA TESIS	1-1
1.1 Introducción	1-1
1.2 Antecedentes históricos	1-2
1.3 Planteamiento de la tesis	1-4
2 CARACTERÍSTICAS DIELECTRICAS DE LOS CUERPOS BIOLÓGICOS	2-1
2.1 Terminología	2-1
2.2 Medida de dieléctricos	2-2
2.3 Características dieléctricas de la materia biológica	2-5
2.3.1 Teoría de relajación, modelo de Debye	2-5
2.3.2 Permitividad del agua	2-6
2.3.3 Composición y permitividad de los tejidos	2-11
2.4 Materiales para la simulación biológica	2-13
2.5 Normas de seguridad en la exposición biológica a la radiación EM	2-17
3 DIFRACCIÓN DE CUERPOS BIOLÓGICOS	3-1
3.1 El problema directo de difracción	3-1
3.2 Solución analítica exacta para cilindros	3-3
3.3 Aproximaciones de primer orden	3-6
3.3.1 Aproximación de Born	3-9
3.3.2 Aproximación de Rytov	3-10
3.4 Aproximaciones de orden superior: Series de Born y Rytov	3-11
3.5 Método de momentos	3-12
3.6 Métodos secuenciales	3-15
3.6.1 Método incremental	3-16
3.6.2 Método espectral iterativo (SIT)	3-18
3.6.3 Método de diferencias finitas en dominio temporal (FDTD)	3-19

4 RECONSTRUCCIÓN DE CUERPOS DIELECTRICOS	4-1
4.1 Técnicas pasivas	4-1
4.2 Técnicas activas	4-2
4.3 Margen de frecuencias utilizable	4-3
4.4 El problema inverso de difracción	4-4
4.5 Reconstrucción de corrientes	4-8
4.5.1 Operadores de focalización	4-9
4.5.1.1 Formación de imágenes con operadores de focalización	4-10
4.5.1.2 Focalización de radiación electromagnética	4-12
4.5.1.3 Corriente de focalización sobre una línea recta	4-15
4.5.1.4 Corriente de focalización sobre una línea circular	4-19
4.5.2 Inversión de la ecuación integral	4-21
4.5.2.1 Obtención de corrientes en coordenadas rectangulares	4-23
4.5.2.2 Reconstrucción de corrientes en coordenadas cilíndricas	4-25
4.5.2.3 Generalización a geometrías arbitrarias mediante el teorema de reciprocidad	4-27
4.6 Reconstrucción de cuerpos bajo aproximaciones de primer orden	4-34
4.6.1 Aproximaciones de Born y de Rytov	4-35
4.6.1.1 Reconstrucción del contraste en coordenadas rectangulares, bajo la hipótesis de Born	4-35
4.6.1.2 Reconstrucción del contraste en coordenadas cilíndricas, bajo la hipótesis de Born.	4-37
4.6.1.3 Aproximación de Rytov	4-40
4.6.2 Aproximación de Born en operadores de focalización	4-42
4.7 Reconstrucción en medios con pérdidas	4-43
4.7.1 Propagación de los campos en medios con pérdidas	4-44
4.7.2 Operadores de focalización	4-47
4.7.3 Obtención del espectro de corrientes	4-48
4.7.4 Reconstrucción de cuerpos bajo aproximaciones de primer orden	4-50
4.8 Inversión de orden superior	4-55
4.8.1 Inversión basada en el Método de Momentos	4-55
4.8.2 Reconstrucción diferencial	4-60
4.8.3 Optimización paramétrica	4-61
4.8.4 Diversidad de frecuencia	4-62
4.8.5 Síntesis adaptada	4-63
4.8.5.1 Síntesis de ondas planas sobre cilindros centrados en una geometría cilíndrica	4-64

4.8.5.2 Síntesis de ondas planas sobre un cilindro no centrado	4.67
4.8.6 Discusión comparativa	4-69
5 SISTEMAS CON GEOMETRÍA PLANA	5-1
5.1 Características generales y clasificación de los sistemas	5-1
5.2 Configuraciones de medida: transmisión y reflexión	5-4
5.3 Realización de algoritmos de primer orden	5-4
5.3.1 Algoritmos de focalización	5-5
5.3.2 Interpolación espectral	5-6
5.3.3 Interpolación espacial	5-10
6 SISTEMAS CON GEOMETRÍA CILÍNDRICA	6-1
6.1 Características generales	6-1
6.2 Agrupación de medida	6-2
6.2.1 Radiación de guías y ranuras en agua	6-3
6.2.2 Focalización axial y región utilizable	6-5
6.3 Arquitectura de radiofrecuencia	6-8
6.3.1 Redes de distribución	6-8
6.3.2 Detección con interferencias: detección síncrona multifrecuencia	6-12
6.3.3 Detección coherente: configuraciones homodina y heterodina	6-18
6.3.4 Potencia de iluminación, tiempo de integración y ruido	6-19
6.3.5 Calibración del sistema	6-21
6.4 Algoritmos de primer orden	6-23
6.4.1 Inversión de la ecuación integral bajo la aproximación de Born	6-23
6.4.1.1 Evaluación del algoritmo	6-27
6.4.2 Aproximación de Rytov	6-37
6.4.3 Algoritmo de focalización	6-39
6.5 Algoritmos de orden superior	6-42
6.5.1 Reconstrucción diferencial	6-42
6.5.2 Método de optimización	6-43
6.5.3 Síntesis adaptada de ondas planas	6-49
6.5.4 Otras técnicas ensayadas	6-49

6.6 Estudio comparativo de los algoritmos	6-52
7 DEFINICIÓN Y DISEÑO DE UN PROTOTIPO CON GEOMETRÍA CILÍNDRICA	7-1
7.1 Especificaciones de diseño	7-1
7.2 Descripción del sistema	7-2
7.2.1 Agrupación de medida	7-3
7.2.2 Arquitectura de Radiofrecuencia	7-5
7.2.3 Subsistemas de baja frecuencia	7-7
7.3 Compatibilidad Electromagnética	7-8
7.4 Adquisición de datos y control	7-13
7.5 Evaluación del sistema	7-14
7.5.1 Agrupación de medida	7-14
7.5.2 Reconstrucción	7-17
7.5.3 Nivel de interferencias y relación señal-ruido	7-18
7.5.4 Detector fase-cuadratura	7-19
7.5.5 Nivel de exposición del cuerpo	7-20
7.6 Características globales del sistema	7-21
8 ESTUDIO DE LAS APLICACIONES BIOMÉDICAS DE LA TOMOGRAFÍA DE MICROONDAS	8-1
8.1 Reconstrucción diferencial de cambios térmicos	8-1
8.2 Formación de imágenes de la cabeza humana	8-4
8.2.1 Simulaciones sobre modelos numéricos	8-4
8.2.2 Medidas experimentales sobre maquetas	8-9
8.3 Reconstrucción absoluta de extremidades	8-13
8.4 Reconstrucción del contenido sanguíneo del brazo	8-16
8.5 Formación de imágenes de edemas pulmonares	8-18
8.6 Sincronización cardíaca de la adquisición	8-22
8.7 Otras aplicaciones pendientes de estudio	8-22
8.8 Discusión de los resultados	8-23
9 PREDEFINICIÓN DE UN PROTOTIPO CLÍNICO	9-1

10 CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS	10-1
APÉNDICE: MÉTODOS ESPECTRALES	A-1
A.1 Coordenadas Rectangulares	A-2
A.1.2 Espectro bidimensional de Fourier	A-4
A.2 Coordenadas cilíndricas	A-5
A.2.1 Espectro de modos cilíndricos	A-5
A.2.2 Transformada de Hankel	A-7
A.3 Condiciones de muestreo	A-10
BIBLIOGRAFÍA	B-1



NOTACIÓN UTILIZADA

Referencias:

- () : Expresiones matemáticas
 { } : Apartados de la tesis
 [] : Referencias bibliográficas

Símbolos matemáticos y variables:

- Δ : (identidad) definición de una variable o función
 * : convolución uni o multidimensional
 $\langle a, b \rangle$: producto escalar
 $\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2}$: norma
 ()' , ()'' partes real e imaginaria de un complejo
 $\omega = 2\pi f$: pulsación o frecuencia angular
 μ : permeabilidad magnética
 $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$: permitividad eléctrica compleja (variación temporal: $e^{j\omega t}$) (1)
 $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$: número de onda
 μ_0, ϵ_0, k_0 : valores del medio de referencia
 $C = 1 - \epsilon/\epsilon_0$: contraste de permitividad de un dieléctrico
 G : función de Green
 $E, E_0, E_s = E - E_0$: campo eléctrico total, incidente y dispersado
 $J_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$: Funciones de Bessel 1ª especie, Hankel 1ª y 2ª especie de orden n

¹ En la tesis se ha adoptado una variación temporal de los campos y corrientes según $e^{j\omega t}$ habitual en ingeniería, lo que implica un signo negativo para la parte imaginaria de ϵ , e^{-jkz} para describir una onda plana propagándose según +z, $H_n^{(2)}(kr)$ para describir ondas cilíndricas propagándose hacia el exterior etc. Sin embargo existen muchos trabajos en los que se adopta un fasor temporal $e^{-j\omega t}$ habitual en óptica, lo que da lugar a cambios de signo en la parte imaginaria de la permitividad y exponenciales describiendo propagación según un eje además de cambio de especie en las funciones de Hankel.

$A(\vec{r})$: dominio espacial de una función, $\vec{r} = (x,z)$ o (ρ,φ) o (x,y,z) ..

$\tilde{A}(\vec{\eta})$: dominio espectral de una función, $\vec{\eta} = (\eta_x,\eta_z)$ o (γ,n) o (η_x,η_y,η_z)

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$: transf. de Fourier directa e inversa, N dimensiones {Ap.A}

$$\mathcal{F} \{ A(\vec{r}) \} = \tilde{A}(\vec{\eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}) e^{j\vec{\eta} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{A}(\vec{\eta}) \} = A(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\vec{\eta}) e^{-j\vec{\eta} \cdot \vec{r}} d\vec{\eta}$$

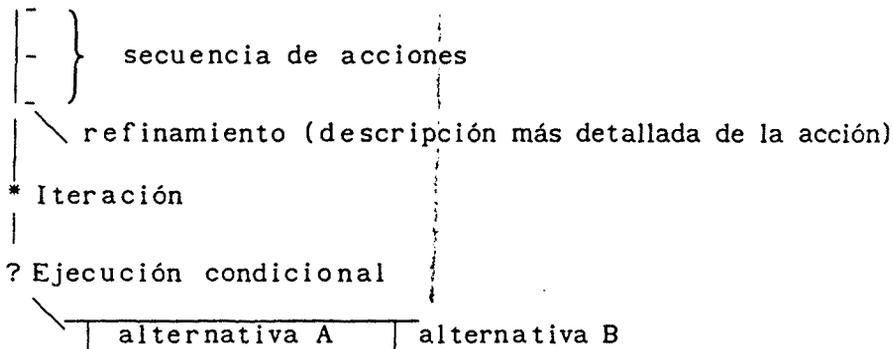
$\mathcal{H}, \mathcal{H}^{-1}$: transformada de Hankel bidimensional directa e inversa {Ap.A}

$$\mathcal{H} \{ A(\rho,\varphi) \} = \tilde{A}(\gamma,n) = 1/2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(\rho,\varphi) e^{-jn\varphi} J_n(\gamma\rho) d\varphi \rho d\rho$$

$$\mathcal{H}^{-1} \{ \tilde{A}(\gamma,n) \} = A(\rho,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{A}(\gamma,n) J_n(\gamma\rho) \gamma d\gamma e^{jn\varphi}$$

Algoritmos :

Diagrama de flujo dimensional:



CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN, ANTECEDENTES HISTÓRICOS Y PLANTEAMIENTO DE LA TESIS

1.1 Introducción

En 1895 el descubrimiento de los rayos X por K.Röntgen y su aplicación inmediata a la medicina, permitió por primera vez la visualización de zonas internas de cuerpos por medios no invasivos. Durante décadas el avance en radiografía consistió básicamente en la mejora de los componentes de los equipos. En paralelo los médicos desarrollaron técnicas para visualizar las zonas de interés mediante la administración de sustancias contrastantes. Sin embargo el principio de funcionamiento era el mismo y la imagen consistía básicamente en la "sombra" producida por el cuerpo sobre la radiación incidente.

A partir de los años 50 comienza la era de la instrumentación de diagnóstico. El desarrollo de la electrónica y los ordenadores digitales, permitió complementar el sensor que interacciona con el cuerpo, con sistemas de tratamiento de señal y formación de imágenes. Ingenieros y físicos jugaron un papel dominante en este proceso. Las primeras técnicas desarrolladas fueron la medicina nuclear y los ultrasonidos. Posteriormente la aparición de la tomografía axial computerizada de rayos X a principios de los 70, y más recientemente la resonancia magnética nuclear, han permitido obtener imágenes de gran calidad, proporcionando información hasta entonces sólo accesible mediante cirugía exploratoria. El avance en este campo continúa en la actualidad, con el perfeccionamiento de los sistemas existentes y la investigación de nuevas técnicas de obtención de imagen.

El empleo de sensores diferentes proporciona imágenes que corresponden a propiedades físicas distintas, lo que asegura su complementariedad. Por ejemplo algunos detalles de la estructura interna de cuerpos no detectables con una técnica, pueden visualizarse con otra. De ahí el interés en desarrollar nuevos sensores con los sistemas de formación de imagen apropiados. Los ultrasonidos proporcionan imágenes de las propiedades mecánicas de los tejidos, los rayos X muestran el nivel de opacidad a dicha radiación y los sistemas de RMN características del spin nuclear del átomo. Otros métodos en investigación son la tomografía por positrones, tomografía de impedancias y tomografía de microondas objeto de esta tesis.

En un sistema activo de obtención de imágenes de cuerpos por microondas,

el objeto a visualizar se ilumina con un campo incidente, y se miden los campos dispersados. Procesando esta información con algoritmos de reconstrucción, es posible visualizar las propiedades dieléctricas del cuerpo. Al ser la permitividad una magnitud compleja, se obtiene mayor información que con otras técnicas escalares. La tecnología empleada en un sistema de microondas es común a sistemas de comunicaciones y radar, bien conocida y de bajo coste. Una ventaja adicional del uso de microondas deriva de su carácter no ionizante, por lo que el riesgo de dañar los tejidos es mínimo a condición de utilizar iluminaciones de baja potencia. Esta cualidad permitiría la aplicación de un sistema de microondas en la monitorización continua de pacientes.

Las características más relevantes de los cuerpos biológicos a frecuencias de microondas son sus pérdidas elevadas y una fuerte inhomogeneidad debida a la dispersión en la permitividad de los diferentes tejidos. Una propiedad interesante es la dependencia de la constante dieléctrica del agua con la temperatura, lo que permite obtener imágenes térmicas. Las pérdidas de los tejidos aumentan rápidamente con la frecuencia. El margen de frecuencias utilizable en la exploración biológica es de 0.5 MHz a 4 GHz dependiendo del tamaño del cuerpo y del compromiso atenuación-resolución adoptado. La elevada permitividad del agua, principal componente de los tejidos, acorta la longitud de onda en un factor de 9 respecto al aire aproximadamente. Esto supone resoluciones del orden de algunos cm o mm dependiendo de la frecuencia. En aplicaciones de análisis no destructivo de materiales, las frecuencias a utilizar vendrán impuestas por su comportamiento dieléctrico y resoluciones deseadas, por ejemplo para plásticos y cerámicas pueden utilizarse frecuencias de hasta 30GHz o más, para obtener resoluciones de varios mm.

1.2 Antecedentes históricos

La investigación en sistemas de exploración por microondas para aplicaciones biomédicas, comenzó a finales de los años 70 en que los doctores Larsen y Jacobi obtuvieron las primeras imágenes de un riñón de perro [1]. Para ello realizaron un barrido mecánico del órgano con dos antenas enfrentadas, midiendo el acoplamiento entre ellas. El tiempo de adquisición era de varias horas. En 1981 el Prof. Hermert investigó la utilización de

algoritmos de tomografía de rayos X a frecuencias de microondas [2]. Los resultados indicaron que los algoritmos basados en la propagación rectilínea de la radiación no eran adecuados, debido a la fuerte difracción producida cuando la longitud de onda utilizada es comparable a las dimensiones del cuerpo. Posteriormente se han desarrollado sistemas de medida basados en agrupaciones planas de antenas, para minimizar el tiempo de adquisición [3]. También se han sentado las bases teóricas de la reconstrucción de cuerpos dieléctricos teniendo en cuenta la difracción y utilizando aproximaciones de dispersión débil [4]. La cámara de microondas desarrollada recientemente por el grupo del Prof. Bolomey utiliza una agrupación plana de 32x32 elementos y la medida se realiza mediante el método de la dispersión modulada [5]. El tiempo de adquisición es del orden del segundo. La imagen se obtiene mediante un algoritmo de retropropagación [6]. Dicho sistema ha sido empleado con éxito en la formación de imágenes de órganos aislados, imágenes de irrigación de órganos, cambios de temperatura y de contenido acuoso de un modelo de pulmón [5,7,8] (8.5).

Para obtener tomografías axiales de cuerpos es necesario un número elevado de direcciones de iluminación o vistas, al igual que ocurre en los 'scanners' de rayos X. Para ello las agrupaciones planares requieren rotación mecánica del cuerpo o de la agrupación, lo que dificulta la medida. Esto puede evitarse en principio mediante una agrupación envolvente utilizando conmutación de elementos y algoritmos adaptados a la geometría de medida. Esta posibilidad no había sido ensayada, probablemente por los problemas que plantea a nivel de sistema y algoritmos de reconstrucción, y constituye la idea de partida del trabajo de investigación realizado.

Los primeros trabajos en el grupo AMR sobre tomografía arrancan en 1984, en 1985 se conceden sendos proyectos de investigación de la CAICYT y el FISS con una duración de tres años, destinados a subvencionar diferentes tareas de evaluación de esta técnica y sus aplicaciones biomédicas.

En la primavera de 1986 fecha en que empieza mi trabajo en el tema se había iniciado la construcción de un prototipo cilíndrico de tomografía, en concreto la agrupación de medida y algunos subsistemas. Los aspectos de arquitectura de radiofrecuencia y la compatibilidad electromagnética del sistema, básicos en tomografía de microondas, no habían sido estudiados y debían resolverse. En paralelo se había desarrollado un algoritmo de reconstrucción para geometrías cilíndricas basado en una aproximación de primer orden. El diseño y evaluación de algoritmos capaces de reconstruir

cuerpos de alto contraste y pérdidas elevadas, era un tema pendiente de estudio que debía atacarse mediante simulaciones numéricas y experimentalmente una vez el prototipo estuviera operativo. Finalmente la escasez de estudios experimentales sobre las aplicaciones clínicas de la tomografía de microondas, aconsejaban dedicar un esfuerzo importante a la realización de medidas de maquetas y cuerpos biológicos 'in-vivo', con el propósito de realizar una evaluación veraz de la técnica. Estos son a grandes rasgos los problemas planteados sobre los que se ha centrado el trabajo de investigación y la contribución de la tesis.

En la primavera de 1987 finaliza la realización de un primer prototipo de tomografía de microondas con geometría cilíndrica para aplicaciones biomédicas. Desde entonces se realizan trabajos de evaluación y mejora del prototipo mediante simulaciones y medidas experimentales de maquetas y cuerpos 'in vivo'. La hipótesis de bajo contraste adoptada en la formulación de algoritmos inversos, en general no es válida para cuerpos biológicos. Por este motivo, se ha dedicado un esfuerzo importante a la investigación de nuevos algoritmos basados en aproximaciones de orden superior.

Un aspecto relevante en este trabajo es la colaboración mantenida con dos grupos extranjeros dedicados al tema de imágenes por microondas en el marco de dos acciones integradas, una francesa con el grupo del Prof. Bolomey (Supelec-París) y otra británica con el grupo del Prof. Anderson de la Univ. de Sheffield. Esta cooperación ha permitido la interacción entre investigadores y la realización de algunos trabajos de investigación que forman parte de la tesis en Supelec y el Institute Curie de París y en la Universidad de Sheffield.

1.3 Planteamiento de la tesis

La tesis se ha estructurado en cuatro bloques básicos:

- * Difracción de los cuerpos biológicos (Prob. Directo)
- * Reconstrucción de cuerpos dieléctricos (Prob. Inverso)
- * Configuraciones de medida: definición de un prototipo cilíndrico
- * Estudio de las aplicaciones biomédicas del tomógrafo.

El primer bloque es un estudio de las características de difracción de

los cuerpos biológicos. A partir de datos publicados sobre la permitividad de los tejidos, se han caracterizado materiales y mezclas para la construcción de maquetas dieléctricas de cuerpos (Cap.2).

El Capítulo 3 trata el problema directo de difracción, que consiste en el cálculo de la interacción de un objeto con un campo incidente conocido. Su resolución, ya sea de forma analítica o matricial, constituye un paso previo en el estudio de la reconstrucción del objeto a partir de los campos dispersados (problema inverso). Utilizaremos métodos directos en la evaluación numérica de algoritmos de reconstrucción, o como parte integrante de los mismos. Sin embargo el desarrollo de métodos de resolución del problema directo no es un objetivo de esta tesis, sino únicamente la aplicabilidad y limitaciones de cada uno de ellos al problema de un medio con pérdidas. Por ello se ha hecho una descripción de las técnicas básicas.

En el segundo bloque se aborda el tema de la obtención de imágenes a frecuencias de microondas, diferenciando entre sistemas activos y pasivos (Cap.4). La formación activa de imágenes se ha situado en el contexto del problema inverso de difracción electromagnética, que posee solución para objetos de bajo contraste. En la tesis se ha formulado en primer lugar la reconstrucción de corrientes inducidas o equivalentes bajo dos filosofías: operadores integrales de focalización sobre el campo medido, e inversión de la ecuación integral que relaciona corrientes inducidas en el cuerpo con los campos dispersados. La permitividad del cuerpo se obtiene a partir de las corrientes mediante aproximaciones. En este trabajo se estudian en primer lugar las formulaciones espectrales de ondas planas y modos cilíndricos adaptadas a las geometrías lineales y cilíndricas, para seguidamente generalizar el problema a geometrías de medida y familias espectrales arbitrarias, mediante el Teorema de Reciprocidad de Lorentz y bajo el formalismo de los espacios de Hilbert. La hipótesis de bajo contraste adoptada en la formulación de algoritmos inversos, en general no es válida para cuerpos biológicos. Por este motivo, se ha dedicado un esfuerzo importante a la investigación de nuevos algoritmos, con aproximaciones de orden superior, concretamente: técnicas de imagen diferencial, métodos de optimización, síntesis adaptada al cuerpo, etc.

La reconstrucción de cuerpos dieléctricos ha sido estudiada tradicionalmente desde enfoques diferentes y en función de una geometría de medida específica, en el Capítulo 4 se ha procurado desarrollar una

formulación de métodos de reconstrucción de forma general sin entrar en la implementación de los algoritmos fuertemente condicionada por la geometría de medida. La realización de los algoritmos se ha considerado parte del sistema de medida y se estudian en el bloque siguiente. Las técnicas de reconstrucción empleadas son de tipo holográfico y comparten una base teórica común con los métodos de alta resolución y apertura sintética en radar, medida de antenas y detección de objetos enterrados. Por ello la formulación desarrollada en este trabajo puede ser trasladada a otros campos de aplicación sin dificultad.

El tercer bloque se ha dedicado al sistema de medida que comprende la agrupación de antenas, redes de distribución, subsistemas de microondas y control, además del software de adquisición, calibración, y el algoritmo de reconstrucción (Cap.5,6). El Capítulo 5 se ha dedicado a los sistemas planos como paso introductorio a los sistemas cilíndricos que se estudian en el Capítulo 6. A diferencia de los sistemas planos, en un sistema cilíndrico existe una única agrupación, actuando simultáneamente antenas emisoras y receptoras. La detección de señales en estas condiciones requiere una arquitectura de radiofrecuencia adecuada, con elementos no recíprocos, y el uso de técnicas de modulación y detección síncrona a varias frecuencias. De este modo, la información puede separarse de las interferencias mediante correlación.

En el apartado de algoritmos se particularizan los resultados generales del Cap.4 según las características del sistema, por ello existen numerosas referencias a resultados anteriores. No obstante para mantener una cierta integridad de los Capítulos 5 y 6 se han reescrito algunos resultados para dar continuidad a la lectura, a costa de una cierta redundancia.

A partir de un estudio de compatibilidad electromagnética, teniendo en cuenta la tecnología disponible, se ha diseñado un prototipo, actualmente operativo, y que ha sido evaluado experimentalmente (Cap.7).

El cuarto bloque comprende la investigación experimental y mediante simulación de las aplicaciones biomédicas de la tomografía por microondas (Cap.8). Se describen las simulaciones numéricas realizadas, los resultados experimentales sobre una maqueta de cabeza, y los resultados sobre cuerpos 'in-vivo'; en particular imágenes absolutas de la mano y brazo humanos, además de imágenes diferenciales del contenido sanguíneo del brazo. También se incluye la actividad experimental realizada durante una estancia en el

Institute Curie (París), sobre la aplicación de sistemas planos en la visualización de edemas pulmonares.

A partir de la experiencia acumulada con el prototipo realizado, se proponen las líneas generales de un sistema clínico para tomografía de microondas {Cap.9}. Finalmente se presentan las conclusiones que se desprenden de este trabajo y los temas en los que se debe profundizar para su continuación {Cap.10}.

CAPÍTULO 2 CARACTERÍSTICAS DIELECTRICAS DE LOS CUERPOS BIOLÓGICOS

El conocimiento de las características eléctricas de los materiales biológicos permite simular numéricamente la difracción y reconstrucción de cuerpos. Por otra parte los márgenes esperables de constante dieléctrica y atenuación son datos necesarios en la definición de un sistema de tomografía. Para ello se ha realizado una recopilación de datos publicados de diversos tejidos y frecuencias.

Para comparar las imágenes obtenidas con la estructura real de los cuerpos, es interesante construir maquetas a partir de materiales eléctricamente equivalentes a los biológicos. Para ello se han desarrollado métodos de medida de dieléctricos que han permitido obtener líquidos y geles con las características dieléctricas similares a varios materiales básicos como la grasa, hueso, músculo, sangre, etc.

2.1 Terminología

En este trabajo utilizaremos la permitividad relativa compleja para describir el comportamiento dieléctrico de los materiales, ésta se define en función de la constante dieléctrica relativa ϵ_r y la conductividad σ como

$$\epsilon = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = \epsilon_r' - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (2.1)$$

$\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{-9}$ F/m es la permitividad del vacío y $\omega = 2\pi f$ es la pulsación correspondiente a una variación temporal de los campos según el fasor $e^{j\omega t}$. La parte real de ϵ es la constante dieléctrica. La parte imaginaria es responsable de las pérdidas de dicho material, que pueden caracterizarse de forma alternativa mediante la tangente de pérdidas $\text{tg}\delta = \epsilon''/\epsilon'$. La propagación en un medio se describe utilizando el número de onda k que en general es complejo, sus partes real e imaginaria vienen dados por [9]

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad ; \quad jk = \alpha + j\beta \quad (2.2)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon' / 2 \left[\sqrt{1 + (\epsilon''/\epsilon')^2} - 1 \right]} \quad (2.3)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon' / 2} \left[\sqrt{1 + (\epsilon'' / \epsilon')^2} + 1 \right] \quad (2.4)$$

μ es la permeabilidad del material que en el caso biológico es habitualmente la del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. α es la constante de atenuación en Nep/m, que puede obtenerse en dB/m como $8.686 \cdot \alpha$. β es la constante de fase en radianes/m. Estas expresiones pueden aproximarse para bajas pérdidas por [9]

$$\alpha \approx k \epsilon'' / 2\epsilon' ; \quad \beta \approx k [1 + 1/8(\epsilon'' / \epsilon')^2] \quad \text{si } \epsilon'' / \epsilon' \ll 1 \quad (2.5)$$

donde $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$.

2.2 Medida de dieléctricos

Existen diversos métodos para medida de dieléctricos a frecuencias de microondas basados en la utilización de líneas de transmisión, guías de onda y cavidades resonantes. En nuestro caso era deseable un método de medida de banda ancha, rápido y simple. La precisión requerida no era crítica, pudiendo tolerar errores del orden del 5%, dada la importante dispersión de permitividad de los tejidos dependiendo de las condiciones de medida, irrigación, etc. Uno de los métodos usuales de medida consiste en colocar una muestra de material en el interior de una línea coaxial, o guía de ondas terminada en cortocircuito. La permitividad puede calcularse a partir del coeficiente de onda estacionaria medido en la línea. El método requiere una muestra de dimensiones precisas siendo crítica su posición. Una técnica alternativa adecuada para líquidos, consiste en la medida del coeficiente de transmisión de una línea coaxial rellena de material [10]. Este método se evaluó construyendo una línea coaxial de 3 mm de radio interno y unos 3 cm de longitud. El coeficiente de transmisión se midió con un analizador de redes HP8410B con corrección de errores, realizando un barrido de frecuencia. El método fue evaluado comparando los resultados obtenidos para el agua destilada con los publicados por Von Hippel [11], mostrando una buena concordancia en media con un rizado superpuesto que se atribuyó a errores en la medida del coeficiente de transmisión. La precisión obtenida era del orden del 5% en la constante dieléctrica.

Para la construcción de maquetas puede ser interesante el empleo de materiales sólidos o geles por su capacidad de autosustentación y mejor

conservación. Por ello era necesario desarrollar un método de medida adecuado para estos materiales. Uno de los métodos más utilizados para materiales biológicos, se basa en la medida del coeficiente de reflexión de un coaxial terminado en circuito abierto que se coloca sobre la superficie plana del material, como muestra la fig.2.1.

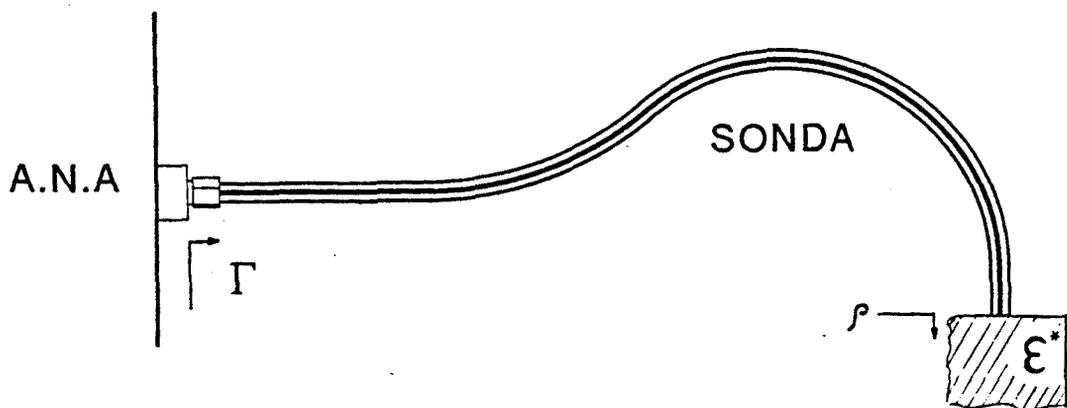


Fig 2.1 Sonda de medida de coaxial abierto

Este método posee la ventaja de requerir una sonda pequeña y simple, permitiendo la medida de sustancias sólidas y líquidas. Un análisis del método con resultados experimentales se encuentra en [12]. La permitividad se calcula a partir del coeficiente de reflexión Γ en el plano de la transición coaxial-dieléctrico, mediante la expresión

$$\epsilon = \frac{1 - \Gamma}{j\omega Z_0 C_0 (1 + \Gamma)} - \frac{C_f}{C_0} \quad (2.6)$$

C_0 es la capacidad cuando la línea está en aire y C_f es la capacidad adicional debida al campo tangente al dieléctrico del coaxial. Γ puede calcularse a partir del coeficiente Γ_m medido con analizador de redes en el otro extremo del cable si se conoce su matriz de parámetros S. La determinación de la matriz de Scattering del cable se realiza midiendo los coeficientes de reflexión que presenta terminando la sonda con cargas conocidas y resolviendo un sistema de ecuaciones [13]. Como un cable es un dispositivo pasivo y recíproco bastará con determinar tres parámetros: S_{11} , S_{22} , y $S_{12} = S_{21}$. Las

terminaciones de calibración usuales son el circuito abierto, el cortocircuito, y la impedancia que sobre el abierto presenta un dieléctrico conocido ya que no es posible realizar una conexión fiable a una carga con conector. Como dieléctrico de calibración se suele utilizar agua destilada por su comportamiento dieléctrico bien conocido.

Este método se implementó utilizando una sonda construida con cable coaxial semirrígido de 3.6 mm de diámetro externo y un analizador de redes HP8410B. El analizador se controla con un microordenador HP85 que también realiza los cálculos para la calibración de la sonda y corrección de medidas. Los parámetros característicos de la sonda utilizada son

$$Z_0 = 50 \Omega ; C_0 = 0.022 \text{ pF} ; C_f = 0.001 \text{ pF}$$

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, aunque persistía el rizado al barrer en frecuencia observado anteriormente con el método de medida en transmisión. Recientemente se rediseñó el sistema de medida utilizando un analizador de redes HP8510B más avanzado [14] consiguiendo una gran precisión, repetibilidad y ausencia de rizado en las medidas. La fig 2.2 muestra la calibración de la sonda conectada al analizador.

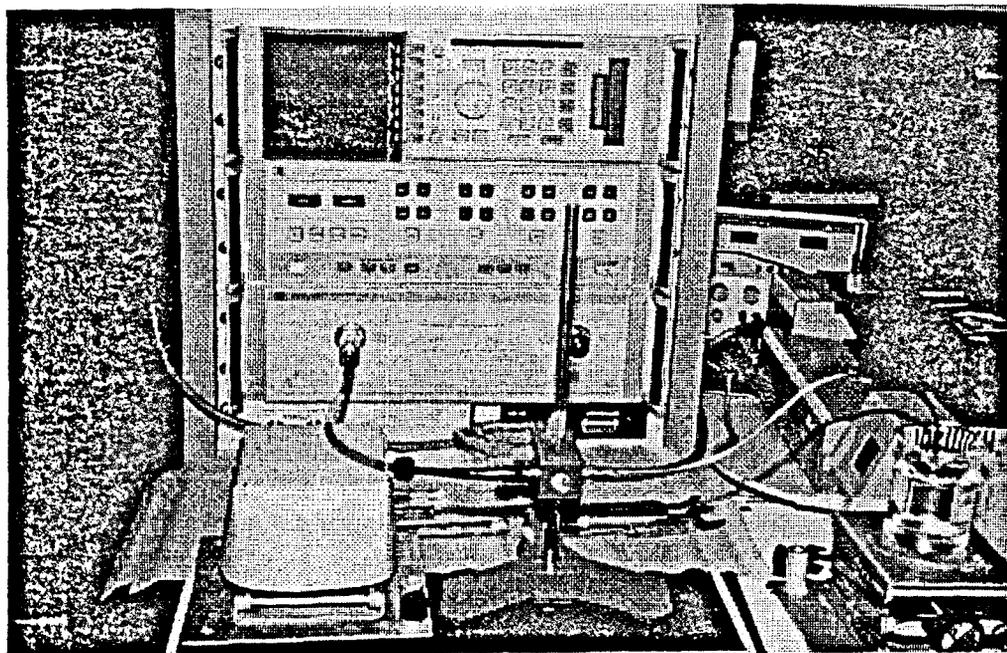


Fig.2.2 Sistema de medida basado en HP8510. Calibración de la sonda con agua destilada

Los resultados obtenidos para soluciones salinas y alcoholes se compararon con valores publicados [11], las diferencias fueron del orden del 3 % en la parte real y 5 % en la parte imaginaria. La repetibilidad conseguida en la medida del mismo material es del 1%.

2.3 Características dieléctricas de la materia biológica

A frecuencias de microondas los materiales biológicos poseen una permeabilidad similar a la del vacío μ_0 , y una permitividad muy variable. La constante dieléctrica está fuertemente condicionada por el contenido acuoso del tejido, por otra parte el agua constituye en media el 70% de la materia biológica. Por ello estudiaremos el comportamiento dieléctrico del agua, que a estas frecuencias responde al modelo de Debye, para seguidamente centrarnos en los tejidos biológicos.

2.3.1 Teoría de relajación, modelo de Debye

La polarización de los materiales tiene una componente electrónica debida al desplazamiento de la nube electrónica respecto al núcleo positivo y otra iónica debido al desplazamiento de los iones de sus posiciones de equilibrio. El modelo clásico para las dos componentes es un circuito resonante con pérdidas. En general la frecuencia de resonancia electrónica cae en el visible y la resonancia iónica está en el infrarrojo. Una contribución adicional a la polarización que puede ser dominante a frecuencias de microondas e inferiores, se debe a la tendencia de las moléculas polares a alinearse según el campo eléctrico, esto ocurre típicamente en gases y líquidos aunque puede darse también en algunos sólidos. El proceso se contrarresta con la agitación térmica, de manera que si cesa la aplicación de un campo estático, la alineación se relaja exponencialmente con una constante de tiempo τ propia del material. La constante dieléctrica evoluciona exponencialmente desde un valor ϵ_0 con el campo estático aplicado, a un valor ϵ_∞ en ausencia de campo, de forma análoga a la descarga de un circuito RC. La relajación constituye un mecanismo de pérdidas cuando se aplica un campo electromagnético, la permitividad compleja a una frecuencia angular ω viene dada por [15]

$$\epsilon = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau} \quad (2.7)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de Debye que estudió la relajación polar debida a la orientación molecular. La constante de tiempo de relajación determina una frecuencia característica $f_0 = 1/(2\pi\tau)$. Puede observarse que ϵ_0 es la permitividad a $f \ll f_0$ y para $f \gg f_0$ es ϵ_{∞} , en estos casos las pérdidas debidas a relajación son pequeñas, éstas alcanzan un máximo a la frecuencia característica. Cole-Cole introdujo una modificación empírica a la expresión de Debye para tener en cuenta la dispersión de la constante de tiempo de relajación del material [16]

$$\epsilon = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (2.8)$$

α es el parámetro de dispersión de τ . El valor de τ depende básicamente del tamaño y forma de la molécula polar, viscosidad y temperatura, resultando en frecuencias características de unos 20 GHz para el agua y del orden del MHz para las proteínas. En los tejidos biológicos la estructura celular produce otros mecanismos de relajación que dominan a bajas frecuencias.

2.3.2 Permitividad del agua

La permitividad compleja del agua puede calcularse a frecuencias de microondas mediante la expresión de Debye utilizando los parámetros ϵ_0 , ϵ_{∞} y τ que varían con la temperatura. Algunos autores han propuesto la utilización de (2.8) [17], con un parámetro α que actúa como un término de corrección menor y puede prescindirse de ella sin cometer errores sustanciales.

La constante dieléctrica de las soluciones salinas puede calcularse con una expresión derivada de la ecuación de Debye, más un término de pérdidas en función de la conductividad del soluto

$$\epsilon = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau} + j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (2.9)$$

En [18] se encuentran los valores tabulados por el NBS de ϵ_0 y τ que dependen

de la temperatura:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\infty} &= 4.9 \\
 \varepsilon_0(T,N) &= \varepsilon_0(T,0) \cdot a(N) \\
 \tau(T,N) &= \tau(T,0) \cdot b(N) \\
 \varepsilon_0(T,0) &= 87.74 - 0.4001T + 9.398 \cdot 10^{-4} T^2 - 1.41 \cdot 10^{-6} T^3 \\
 \tau(T,0) &= 17.6805 - 0.6086T + 1.0422 \cdot 10^{-3} T^2 - 8.1105 \cdot 10^{-5} T^3 \\
 a(N) &= 1.0 - 0.2551N + 5.1510 \cdot 10^{-2} N^2 - 6.8890 \cdot 10^{-3} N^3 \\
 b(N,T) &= 0.1463 \cdot 10^{-2} NT + 1.0 - 0.0489N - 0.0297N^2 + 5.6440 \cdot 10^{-3} N^3
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde T es la temperatura en grados °C y N es la normalidad en mol/l. Para la sal común existen fórmulas que dan la conductividad σ en función de la concentración y la temperatura [18]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{NaCl}}(T,N) = \sigma_{\text{NaCl}}(25,N) \{ &1.0 - 1.962 \cdot 10^{-2} \Delta + 8.08 \cdot 10^{-5} \Delta^2 - \Delta N [3.02 \cdot 10^{-5} + \\
 &3.922 \cdot 10^{-5} \Delta + N(1.721 \cdot 10^{-5} - 6.584 \cdot 10^{-5} \Delta)] \}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde

$$\Delta = 25 - T$$

$$\sigma_{\text{NaCl}}(25,N) = N [10.394 - 2.3776N + 0.68258N^2 - 0.13538N^3 + 1.0086 \cdot 10^{-2} N^4]$$

La gráfica de la fig.2.3 muestra la permitividad compleja del agua a 3GHz en función de la temperatura. Los resultados se han obtenido mediante medidas y teóricamente con las expresiones anteriores, incluyendo los valores publicados por Von Hippel [11] como referencia.

La sensibilidad térmica de la permitividad del agua es del orden de -0.5% /°C en la parte real y del -2% /°C en la parte imaginaria. La fuerte dependencia de las pérdidas con la temperatura se debe a la disminución de la constante de tiempo τ con la agitación térmica. La fig.2.4 muestra la permitividad del agua a 25°C con la frecuencia. La parte real decrece ligeramente, destacando el aumento de la parte imaginaria lo que limita la utilización de frecuencias altas. La presencia de iones hace que las pérdidas aumenten sensiblemente. Los resultados teóricos y medidas de soluciones de sal común se presentan en la fig.2.5 en función de la concentración, los puntos corresponden a valores publicados por Von Hippel [11].

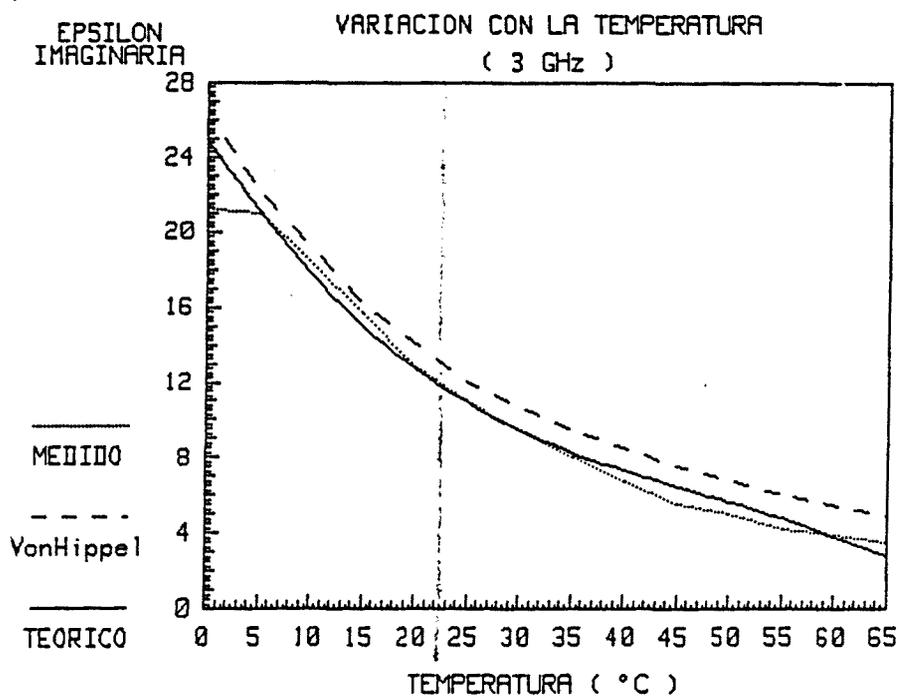
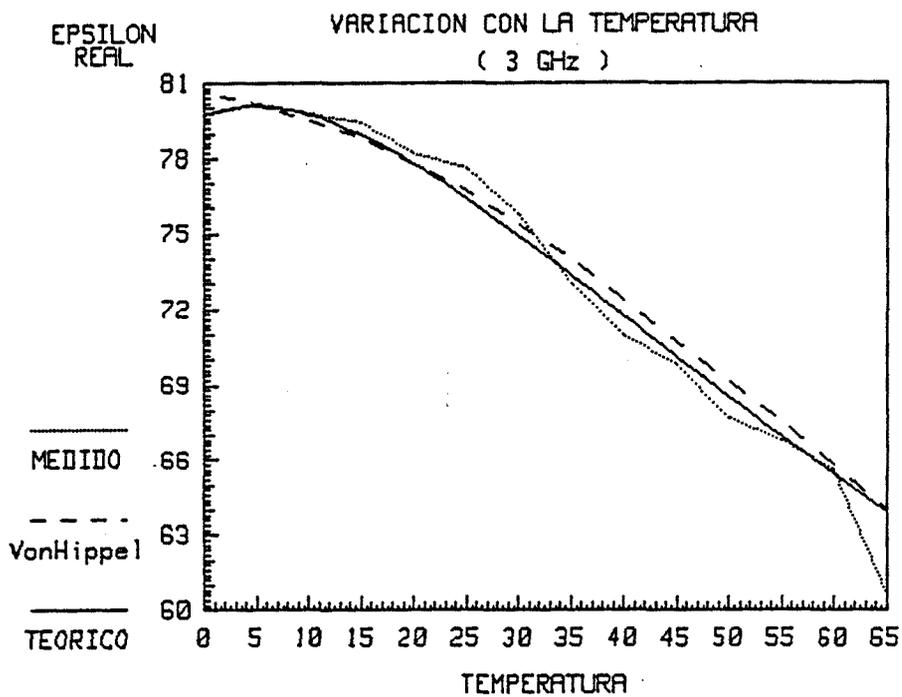


Fig.2.3 Permittividad del agua a 3 GHz en función de la temperatura.

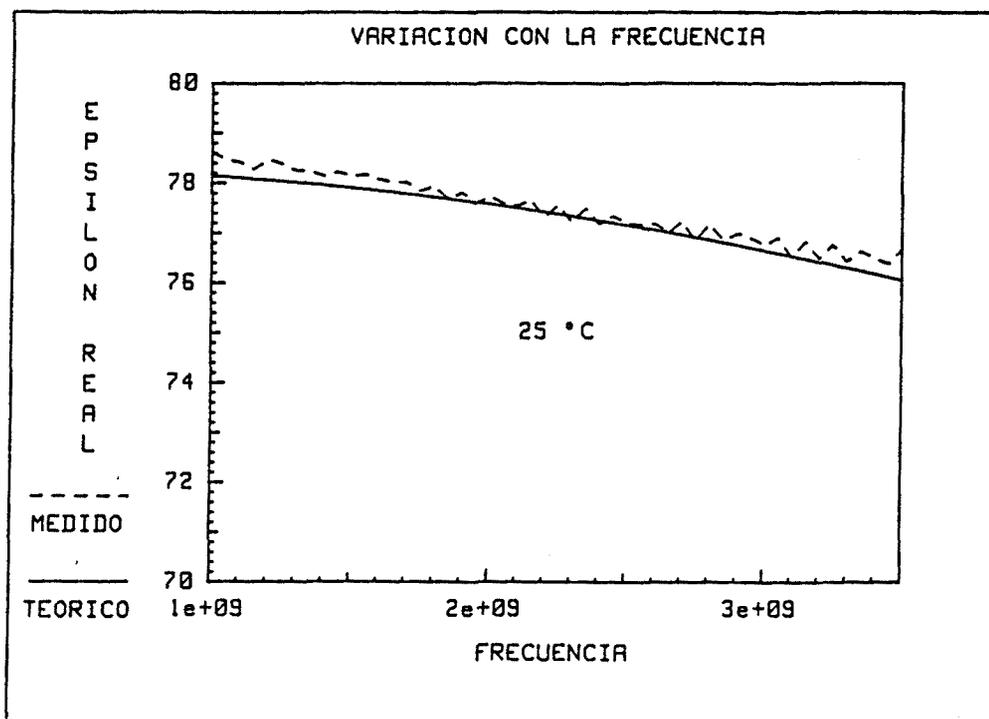
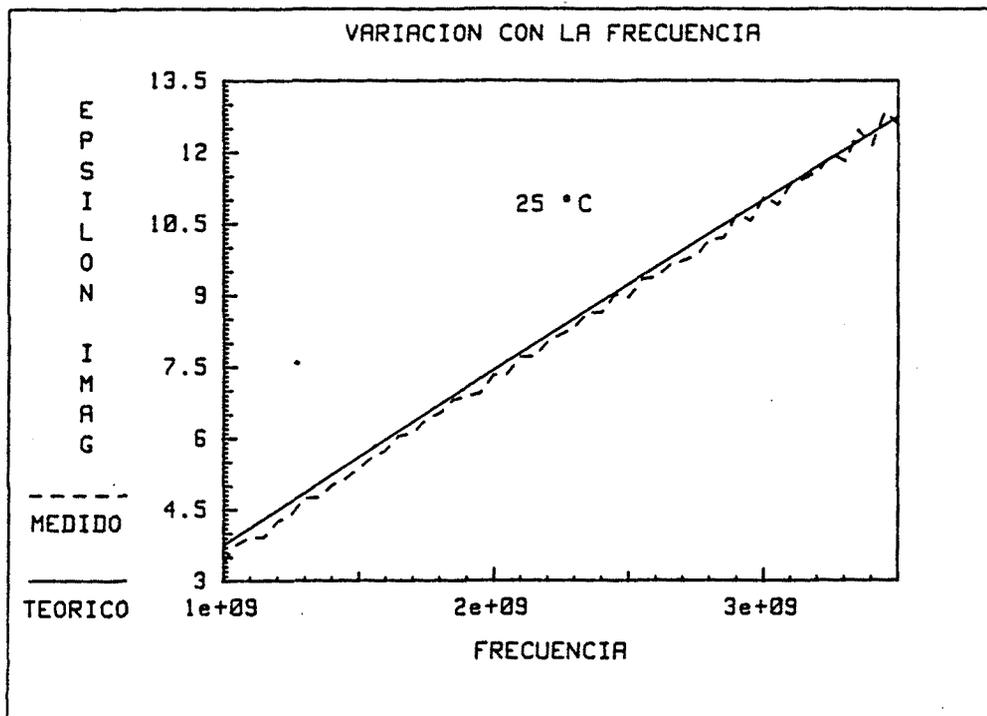


Fig.2.4 Permittividad del agua a 25°C en función de la frecuencia.

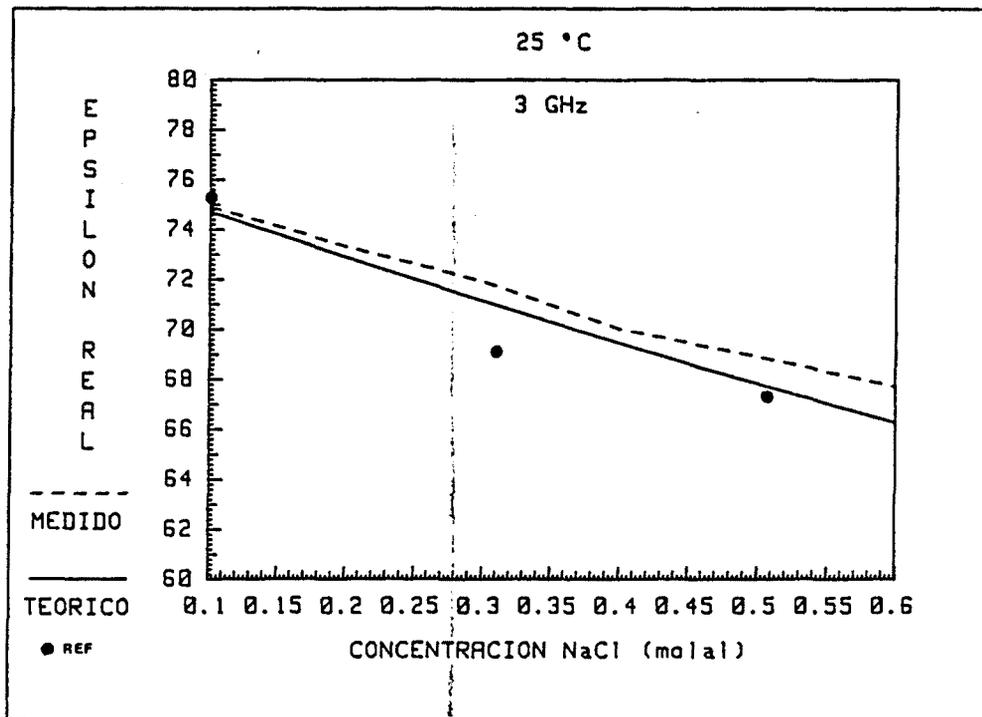
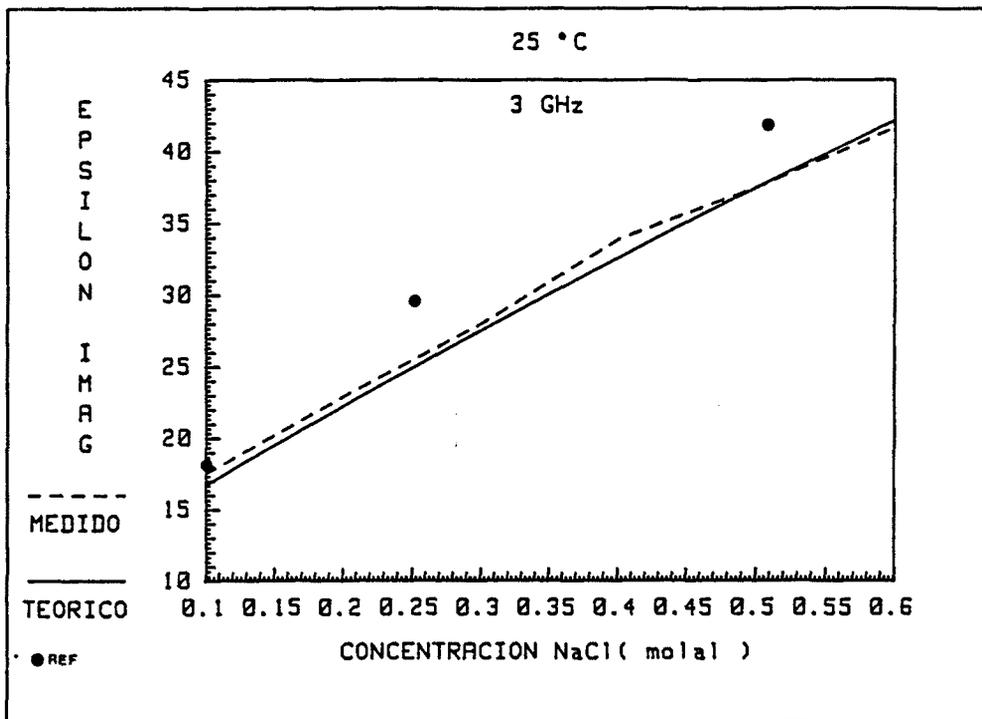


Fig.2.5 Permittividad del agua a 25°C y 3GHz en función de la concentración de NaCl.

2.3.3 Composición y permitividad de los tejidos

Las expresiones de Debye permiten el cálculo de la permitividad de materiales polares como el agua. En los materiales biológicos, la presencia de otros compuestos y la estructura del tejido resultan en múltiples constantes de tiempo de relajación. Existen fundamentalmente tres mecanismos de relajación responsables de las dispersiones α , β , γ dominando cada una de ellas en márgenes de frecuencia diferentes. Las dispersiones α y β dominan a bajas frecuencias y se deben al intercambio iónico y estructura celular. A frecuencias de microondas domina la dispersión γ debida principalmente al contenido de agua y electrolitos.

La interacción a frecuencias de microondas de los tejidos depende de su estructura y composición, estando dominada por los componentes que poseen una carga eléctrica neta o bien momento eléctrico dipolar [19]. En los tejidos los componentes con carga eléctrica son en su mayor parte iones (Na^+ , Cl^- , K^+ , Ca^{+2}), los componentes con momento dipolar son básicamente las moléculas polares (agua, amino-ácidos, proteínas, azúcares y grasas).

En función del contenido acuoso, la constante dieléctrica puede estar comprendida entre valores de 4 para el hueso y grasas hasta valores del orden de 60 para líquidos biológicos como la sangre. En [15] se encuentra un interesante estudio teórico del comportamiento dieléctrico de los materiales biológicos, [20] contiene una introducción teórica y una descripción del comportamiento dieléctrico de los tejidos musculares, grasos, y de la sangre. También se han publicado algunas recopilaciones bastante exhaustivas de las propiedades dieléctricas de las sustancias biológicas a varias frecuencias [21,22]. La tabla 2.1 reproduce las permitividades típicas de algunos tejidos tomadas de [21].

Los valores que aparecen en la literatura han sido obtenidos en general de medidas 'in vitro', algunos estudios [19] han mostrado el cambio de permitividad provocado por la muerte del organismo y por la pérdida de líquido al aislar un trozo de tejido para ser medido. Por este motivo y debido además a la dispersión de condiciones y técnicas de medida utilizadas por diferentes autores, los datos de permitividad de tejidos deben considerarse como orientativos.

2.45 GHz tejido	ϵ'	ϵ''
Hemoglobina 0.15% (23.6°C)	60-70	—
Sangre de rata (23°C)	56	15.5 (1971)
Materia gris perro 22-25% (37°C)	50-49	11-12
Materia blanca parro 22-25% (37°C)	37-37	8.5-8.7
Cerebro humano <i>in vitro</i> (37°C)	32	15.5
Cerebro rata <i>in vivo</i> (32°C)	52.5	14
Grasa de perro <i>in vivo</i> (37°C)	12	5.1
Grasa humana <i>in vitro</i> (37°C)	5.73	0.8
Riñón perro <i>in vivo</i> (37°C)	50	20
Músculo <i>in vitro</i> (25°C)	50.5	12
Músculo perro <i>in vivo</i> (34°C)	45	11
Músculo humano <i>in vitro</i> (37°C)	47.5	13.5
Rata <i>in vivo</i> (31°C) (Músculo)	58	17.5
Piel humana <i>in vitro</i> (37°C)	43	14
3.00 GHz tejido	ϵ'	ϵ''
Sangre de rata (23°C)	52	16.5
Tibia humana (37°C)	8.35	1.32
Tuétano (37°C)	4.2-5.8	0.7-1.35
Cerebro humano <i>in vitro</i> (37°C)	33	18
Grasa humana <i>in vivo</i> (37°C)	3.9-7.2	0.67-1.36
Grasa humana abdomen (37°C)	4.92	1.46
Grasa humana pecho (37°C)	3.94	0.87
Grasa humana fistula fetal (37°C)	7.0	1.75
Riñón perro <i>in vivo</i> (37°C)	49	18
Hígado humano <i>in vitro</i> (37°C)	42-43	12-12.2
Músculo <i>in vitro</i> (25°C)	50	12
Músculo humano <i>in vitro</i> (37°C)	45-48	13-14
Músculo humano pectoralis mayor (37°C)	50.0	17.1
Músculo humano soleo (37°C)	51.0	18.0
Rata <i>in vivo</i> (31°C) (Músculo)	56	17.3
Piel humana <i>in vitro</i> (37°C)	40-45	12-16

Tabla 2.1 Datos de permitividad de tejidos

Un tema de sumo interés para la aplicación biomédica de un sistema de tomografía por microondas, es la dependencia fisiológica de la permitividad de los tejidos. En principio cualquier cambio fisiológico o patológico que altere el contenido acuoso del tejido produce fuertes variaciones de permitividad, que pueden ser reconstruidas mediante tomografía. Un ejemplo de ello es el edema pulmonar produciendo un fuerte incremento de constante dieléctrica y conductividad [23]. Larsen [24] ha mostrado cambios en la permitividad de suspensiones de células vivas asociados con estados fisiológicos y patofisiológicos. Bolomey [5] visualizó con una cámara de microondas los cambios en un riñón aislado de caballo producidos por la perfusión del órgano. A partir de consideraciones teóricas Burdette [19] dedujo que la dependencia térmica de la permitividad de los tejidos debía ser similar a la del agua, el mismo autor midió sensibilidades del -0.75% /°C en la parte real y -1% /°C en la imaginaria para el tejido cerebral canino homogeneizado [25].

El paso a fase sólida de los líquidos biológicos provoca un cambio drástico de permitividad de los tejidos. El hielo a 3GHz posee una permitividad de $\epsilon' = 3.2$ con muy bajas pérdidas [11]. Este comportamiento responde a la pérdida de movilidad molecular y desaparición del mecanismo de relajación. Por este motivo los sistemas de formación de imágenes por microondas, podrían utilizarse para monitorizar la descongelación de órganos para su trasplante.

2.4 Materiales para la simulación biológica

Uno de los objetivos del proyecto era la construcción de maquetas con propiedades eléctricas similares a los tejidos biológicos, para la evaluación en laboratorio del prototipo de tomógrafo. La información publicada sobre materiales equivalentes a los biológicos no cubre todas las permitividades y frecuencias de interés, por lo que se han estudiado diversos materiales sólidos, geles y líquidos para simular diferentes tejidos. El primer paso fue caracterizar, con el método de medida desarrollado, una serie de materiales base repetibles y de fácil obtención. Se han estudiado líquidos como alcoholes, disoluciones de sal y azúcar en agua, grasas hidrosolubles, etc. También se han estudiado geles basados en agar-agar, por sus propiedades de autosustentación y moldeado. Las figs. 2.6, 2.7, 2.8 muestran la

permitividad de las mezclas de alcohol en agua, gel salino y gel azucarado respectivamente.

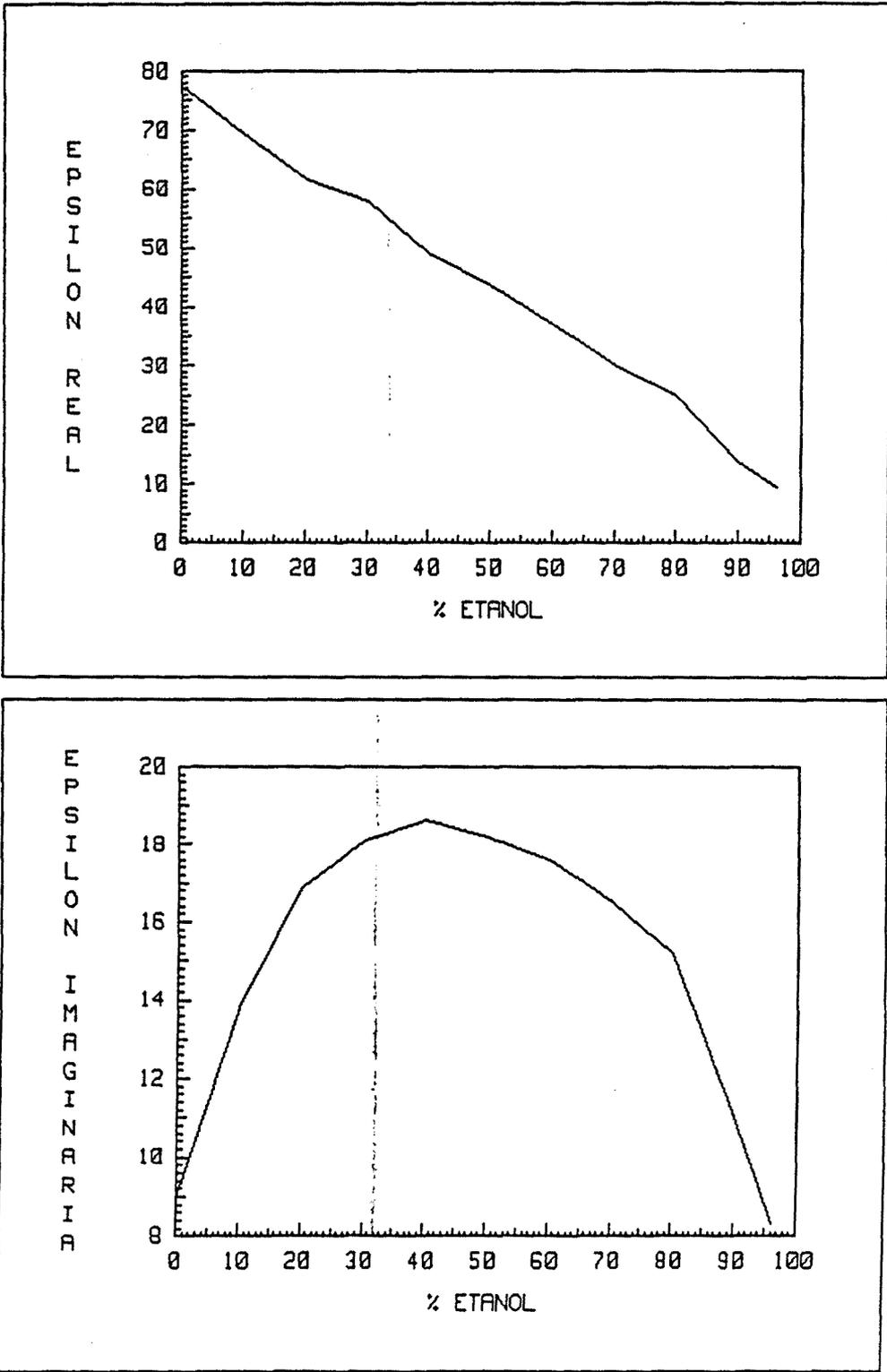


Fig.2.6 Permitividad de la disolución de alcohol etílico en agua

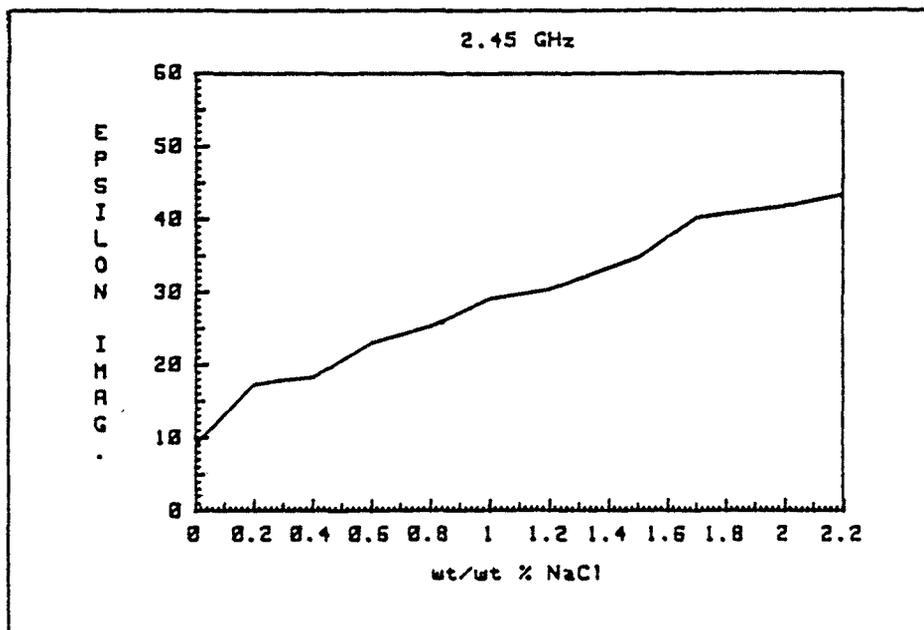
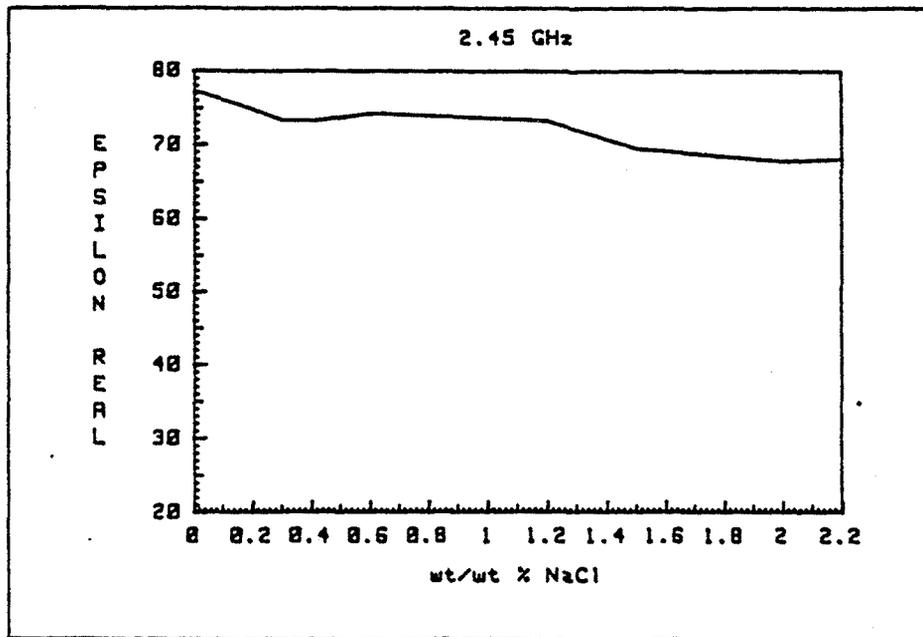


Fig.2.7 Permittividad de un gel de agar-agar en función de porcentaje en peso de NaCl

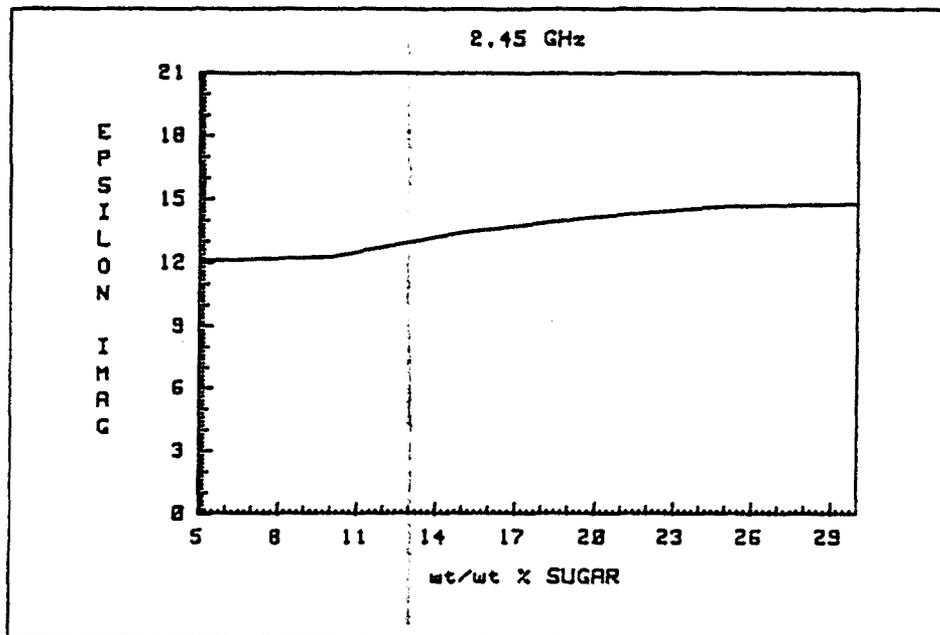
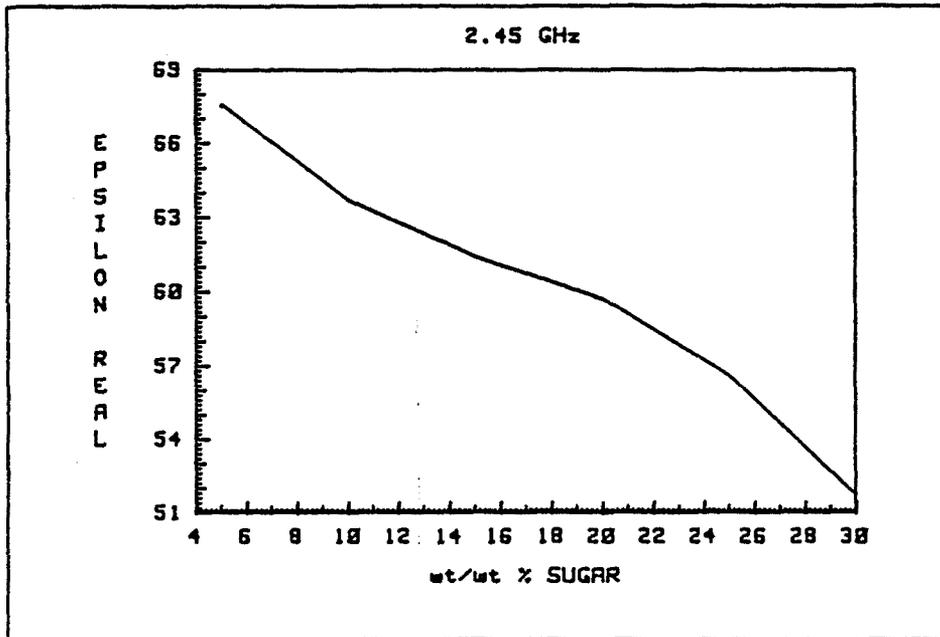


Fig.2.8 Permittividad de un gel de agar-agar en función del porcentaje de azúcar en peso

Los resultados de la caracterización de materiales se han empleado para realizar mezclas compatibles con permitividades similares a las biológicas. La tabla 2.2 recoge algunas recetas que han sido utilizadas en la realización de maquetas (Cap.8).

tejido	ϵ'	ϵ''	composición (líquidos % vol) (sólidos % vol)	estado
Grasa/hueso	5.1	1.1	yeso/escayola	sól.
Músculo	54.5	17.2	Agua (65), Etanol (35)	líq.
	53.7	19.4	Agua (60.85), Azúcar (30) NaN ₃ (0.15), Agar-agar (4)	sól. (gel)
<u>Cerebro</u> Materia gris	48.5	17.3	Agua (60.85), Azúcar (30) NaN ₃ (0.15), Agar-agar (4)	sól. (gel)
Materia blanca	31.6	13.5	Agua (40), Propanol (60)	líq.
	31.9	16.4	Agua (30), Etanol (70)	líq.
	33.4	8.8	Agua (50), Grasa (50)	líq.
Sangre	58.0	16.1	Agua (80), Propanol (20)	líq.
	64.3	14.8	Agua (80.85), Azúcar (20) NaN ₃ (0.15), Agar-agar(4)	sól. (gel)

Tabla 2.2 Materiales eléctricamente equivalentes a tejidos biológicos (2.45 GHz).

2.5 Normas de seguridad en la exposición biológica a la radiación EM

Con el uso creciente de la radiación electromagnética en aplicaciones industriales, domésticas, radiodifusión etc., se han confeccionado normas de seguridad a la exposición a la radiación. Existe una gran variedad de normativas al respecto dependiendo de varios factores: país o entidad que realiza la norma, base de datos o criterios utilizados, grupo de personas objetivo: público en general o ocupacional, promedios temporales de aplicación del campo, etc. Las normas se han revisado periódicamente en función de evidencia probada de efectos perjudiciales, incluyendo un margen de seguridad. El American National Standards Institute ha publicado recientemente la norma

ANSI C95.1-1982 [26], cubriendo el espectro 300KHz-100GHz. La norma está basada en estudios de dosimetría que permiten cuantificar la energía absorbida por un cuerpo biológico. El criterio utilizado es una tasa máxima de absorción específica de energía (SAR) promediada en todo el cuerpo de 0.4W/Kg, con la condición de que el SAR en cualquier gramo de tejido no debe exceder 8W/kg. Los valores indicados son promedios temporales durante 0.1h. El resultado es un límite de potencia de onda plana en función de la frecuencia que se indica en la fig.2.6. En el margen de frecuencias utilizables en tomografía de microondas el límite estaría alrededor de 5mW/cm². La normativa española ha adoptado una normativa muy similar a la ANSI [27].

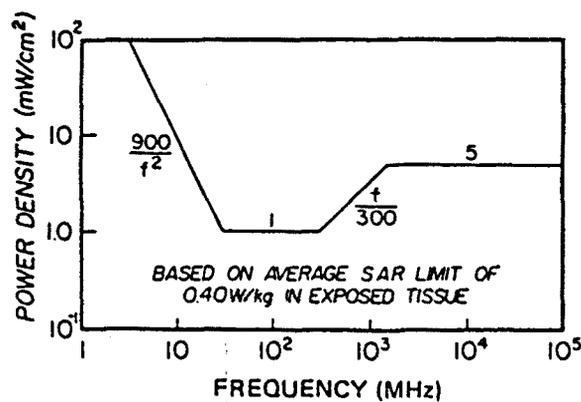


Fig.2.6 Norma ANSI C95.1-1982 de seguridad a la exposición de campos EM

Los países del Este han impuesto límites más restrictivos que en Occidente basándose en evidencias de efectos no térmicos de la radiación [28]. Los efectos no térmicos son objeto de fuerte debate en los aspectos de existencia, mecanismos de actuación, daños a los tejidos, etc. Una de las mayores dificultades para esclarecer estos puntos es la falta de un protocolo experimental unificado sobre el tema [29]. Existe cierta evidencia de efectos sobre el sistema nervioso central y sobre las membranas de las células. Otros efectos más dudosos son los inmunológicos y hematológicos [30]. Asimismo se han estudiado efectos asociados con las características de la modulación de la señal. Un aspecto adicional a tener en cuenta en la utilización de un equipo, es su compatibilidad con otros sistemas, por ejemplo pacientes con marcapasos.

Como conclusión la norma ANSI establece un criterio objetivo para

especificar los niveles de radiación ocupacionales y del público en general. Sin embargo, la posible existencia de efectos no térmicos obliga a utilizar la energía electromagnética de la forma más eficiente posible, con el objetivo de reducir al mínimo el riesgo de daños o efectos biológicos no deseados.

CAPÍTULO 3 DIFRACCIÓN DE CUERPOS BIOLÓGICOS

En este capítulo estudiaremos el cálculo de la difracción producida por cuerpos dieléctricos sometidos a iluminación monocromática. El tema se conoce como problema directo de difracción, es decir dados un campo iluminante y un objeto, determinar los campos dispersados. El procedimiento recíproco, objetivo principal de esta tesis, es el problema inverso de difracción, en que a partir del conocimiento de los campos dispersados y del campo incidente se determina el objeto.

El estudio en este trabajo del problema directo tiene un interés doble: en primer lugar el avance en la resolución del problema inverso de difracción requiere una buena comprensión del problema directo, en particular en objetos muy inhomogéneos. En segundo lugar la evaluación mediante simulaciones numéricas de algoritmos de reconstrucción y la predicción de los niveles de señal durante el diseño del prototipo realizado, han requerido el desarrollo de diferentes métodos directos. El problema directo de difracción es un tema muy amplio y motivo de un intenso trabajo de investigación a nivel mundial. En consecuencia este capítulo no pretende ser una revisión exhaustiva del problema, sino un paso introductorio al problema inverso y una descripción de las técnicas utilizadas en las simulaciones numéricas. Una reconstrucción tomográfica es una imagen en dos dimensiones, por ello se ha desarrollado una formulación bidimensional que permite expresar escalarmente los campos y corrientes.

3.1 El problema directo de difracción

La propagación de la energía electromagnética en un medio puede describirse mediante una ecuación diferencial que se deriva de las ecuaciones de Maxwell, denominada ecuación de onda. Las ecuaciones de Maxwell en un medio sin fuentes para campos armónicos con pulsación ω pueden escribirse como

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

donde \vec{E} , \vec{H} son los campos eléctrico y magnético, y \vec{D} , \vec{B} son las densidades de flujo eléctrico y magnético.

En un medio de permeabilidad μ_0 constante, como ocurre habitualmente con los materiales biológicos, tomando el rotacional de (3.1) y sustituyendo (3.2) en el segundo miembro obtenemos

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -j\omega \nabla \times \vec{B} = \omega^2 \mu_0 \epsilon \vec{E} \quad (3.5)$$

en un medio homogéneo $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y obtenemos la ecuación de onda homogénea

$$(\nabla^2 + k_0^2) \vec{E} = 0 \quad (3.6)$$

$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}$ es el número de onda en el medio a la frecuencia angular ω . Consideremos ahora un medio dieléctrico donde la permitividad $\epsilon(\vec{r})$ depende de la posición, la divergencia de E no se anulará

$$\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{E} \cdot \nabla(1/\epsilon) = -\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \quad (3.7)$$

sustituyendo en la ecuación de onda obtenemos

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{E} + \nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}) = 0 \quad (3.8)$$

donde el número de onda k depende de la posición y aparece un término adicional que al contener el gradiente de ϵ provocará cambios en la polarización del campo. Sin embargo si la longitud de onda en el medio es mucho menor que el tamaño de correlación de las inhomogeneidades del dieléctrico en la dirección del campo, puede despreciarse el segundo término obteniendo la ecuación de onda escalar inhomogénea o ecuación de Helmholtz [31]

$$(\nabla^2 + k^2) E = 0 \quad (3.9)$$

esto es equivalente a despreciar los efectos de despolarización. La aproximación es exacta para excitaciones y medios invariantes en la dirección del campo \vec{E} , es por lo tanto una aproximación bidimensional del problema real.

3.2 Solución analítica exacta para cilindros

En aquellos casos en que el objeto tenga una geometría sencilla, puede intentarse resolver la ecuación de onda en alguno de los sistemas de coordenadas usuales. El cálculo analítico de la difracción producida por cilindros dieléctricos es relativamente simple, y permite estimar los campos difractados por cuerpos de contorno aproximadamente circular como las extremidades. Analizaremos ondas incidentes planas y cilíndricas con el campo eléctrico dirigido según el eje del cilindro, (soluciones TM) lo que permite utilizar la ecuación escalar de Helmholtz sobre el campo \vec{E} , en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + k^2 E = 0 \quad (3.10)$$

planteando la solución por separación de variables [32]: $E = R(\rho) \cdot \Phi(\phi)$, se obtienen las autofunciones de la ecuación que son las funciones de Bessel $J_n(k\rho)$, $N_n(k\rho)$, $H_n^{(1)}(k\rho)$, $H_n^{(2)}(k\rho)$, para la función radial y funciones armónicas para la angular. Cualquier par de funciones de Bessel constituye una solución radial completa, escogeremos el par más conveniente según el caso. Calcularemos para incidencia de ondas planas y cilíndricas la difracción de un cilindro dieléctrico. El procedimiento puede extenderse fácilmente a un número arbitrario de capas.

Consideremos una onda incidente plana o cilíndrica sobre un cilindro como muestra la fig.3.1. Expresaremos los campos incidentes a partir de las autofunciones en coordenadas cilíndricas, así una onda plana propagándose según x en un medio de número de onda k_0 será [32]

$$E_o = E_a e^{-jk_0 x} = E_a e^{-jk_0 \rho \cos \phi} = E_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k_0 \rho) e^{jn\phi} \quad (3.11)$$

Una onda cilíndrica producida por un hilo de corriente I situado en el eje x a una distancia R del centro de coordenadas puede escribirse como

$$E_o = \frac{-k_0^2 I}{4\omega \epsilon} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{R}|) = \frac{-k_0^2 I}{4\omega \epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 R) J_n(k_0 \rho) e^{jn\phi} \quad (3.12)$$

donde se ha utilizado el teorema de adición de las funciones de Hankel para

expresar la onda cilíndrica como combinación de modos cilíndricos centrados en el origen. Vemos que de forma general cualquier campo incidente puede expresarse como suma de modos cilíndricos con diferentes coeficientes o_n

$$E_o = \sum_{n=-\infty}^{\infty} o_n J_n(k_o \rho) e^{jn\varphi} \quad (3.13)$$

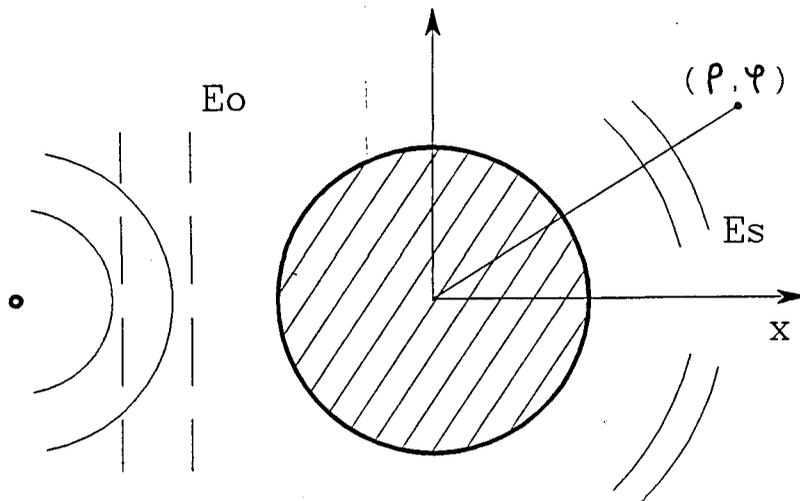


Fig.3.1 Cilindro iluminado por una onda plana o cilíndrica.

El campo dispersado por el cilindro estará formado exclusivamente por modos que se propagan hacia el exterior, por lo tanto puede escribirse como

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(k_o \rho) e^{jn\varphi} \quad (3.14)$$

donde b_n son los coeficientes a determinar. El campo total en el interior del dieléctrico puede escribirse como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_d \rho) e^{jn\varphi} \quad (3.15)$$

donde se han utilizado las funciones J_n por su carácter no singular en el

origen. En el exterior del dieléctrico el campo total será la superposición del incidente y el dispersado

$$E = E_o + E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [o_n J_n(k_o\rho) + a_n H_n^{(2)}(k_o\rho)] e^{jn\varphi} \quad (3.16)$$

las condiciones de contorno serán la continuidad de componentes tangenciales de los campos. De la continuidad del campo eléctrico

$$c_n = \frac{o_n J_n(k_o\rho) + a_n H_n^{(2)}(k_o\rho)}{J_n(k_d \rho)} \quad (3.17)$$

de la continuidad del campo magnético obtenemos

$$a_n = \frac{-k_d J_n(k_o a) J_n'(k_d a) + k_o J_n(k_d a) J_n'(k_o a)}{k_d H_n^{(2)}(k_o\rho) J_n'(k_d a) + k_o J_n(k_d a) H_n^{(2)'}(k_o a)} \quad (3.18)$$

y el campo dispersado se obtiene como

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)}(k_o\rho) e^{jn\varphi} \quad (3.19)$$

Particularizando $k_d = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ cuando $\epsilon \rightarrow -j\infty$, se obtiene el campo dispersado por cilindros metálicos quedando

$$a_n = \frac{-J_n(k_o a)}{H_n^{(2)}(k_o\rho)} \quad (3.20)$$

Una implementación eficiente se deriva de la utilización de fórmulas de recurrencia ascendente para el cálculo de las funciones de Bessel [33] y la utilización de FFT para sumar la serie tomando un número de modos potencia de 2. El número de modos a tomar para el campo dispersado crece con el radio del cilindro $N \geq 2k_o a$ (Ap.A), siendo a el radio del cilindro y k_o el número de onda en el medio externo al cilindro, los modos superiores que pueden excitarse localmente quedarán fuertemente atenuados al propagarse hacia el exterior como ocurre con los modos en corte en una guía, es decir el espectro del campo dispersado es de banda limitada. No ocurre así al expresar modalmente el campo incidente en el caso de una onda plana o un modo cilíndrico descentrado, por lo que en general debe utilizarse un número

elevado de modos para obtener errores aceptables.

El cálculo de la difracción de un cilindro multicapa puede realizarse planteando el conjunto de coeficientes que garanticen la continuidad de campos en los contornos, de esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución cierra el problema [34]. Un procedimiento más eficiente es la serie recursiva de Richmond. El método se basa en establecer una excitación arbitraria (no singular) en el cilindro más interno, por ejemplo $\sum a_n J_n$ donde $a_n = 1$, y calcular de forma recursiva hacia el exterior los coeficientes modales de las capas restantes [35]. La solución obtenida para la última capa corresponde al medio externo, por tanto incluye el campo incidente, cuyo valor real puede utilizarse para desnormalizar los coeficientes obtenidos, completando así la solución. La fig.3.2 muestra el campo total difractado por un cilindro dieléctrico.



Fig.3.2 Campo total difractado por un cilindro dieléctrico de $\text{diam.}=5\lambda$, $\epsilon=32$

3.3 Aproximaciones de primer orden

En este apartado veremos la obtención de soluciones para el campo

dispersado, transformando la ecuación de onda en una ecuación integral mediante la función de Green. Dicha ecuación puede linealizarse mediante las aproximaciones de Born y Rytov. Si el objeto se halla en un medio homogéneo de permitividad ϵ_0 , es conveniente reescribir la ecuación de onda con un término de excitación producido por el objeto

$$(\nabla^2 + k_0^2) E = k_0^2 C E \quad (3.21)$$

El término de la derecha es la excitación debida a las corrientes de polarización o inducidas en el dieléctrico, que actuando sobre un medio homogéneo ϵ_0 producen la misma distribución de campo que en el problema original. C es la función contraste del cuerpo con respecto al medio de permitividad ϵ_0 , definida como $C \triangleq (\epsilon_0 - \epsilon) / \epsilon_0$. La expresión de la corriente inducida o equivalente se deduce fácilmente de las ecuaciones de Maxwell en una zona sin fuentes

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} = j\omega \epsilon \vec{E} = \vec{J}_{eq} + j\omega \epsilon_0 \vec{E} \implies \vec{J}_{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = -j\omega \epsilon_0 C \vec{E} \quad (3.22)$$

El campo E puede considerarse como la superposición de dos componentes: el campo incidente E_0 existente en el medio homogéneo sin objeto, y el campo dispersado $E_s = E - E_0$ producido por las corrientes inducidas en el cuerpo. Como el campo incidente satisface la ecuación de onda homogénea podemos reescribir (3.21) como

$$(\nabla^2 + k_0^2) E_s = k_0^2 C E \quad (3.23)$$

La solución de la ecuación de onda inhomogénea se obtiene habitualmente transformando la ecuación diferencial en ecuación integral, mediante la función de Green o respuesta impulsional del problema para espacios abiertos [36]

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.24)$$

las soluciones de la función de Green pueden obtenerse mediante métodos espectrales. Tomando la transformada de Fourier en las N dimensiones del espacio {Ap.A}, y utilizando el símbolo \sim para denotar el dominio transformado de una función podemos escribir

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left[k_0^2 - |\vec{\eta}|^2 \right] \tilde{G}(\vec{\eta}) = -1 \quad (3.25)$$

de donde

$$\tilde{G}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\vec{\eta}|^2 - k_0^2} \quad (3.26)$$

$\tilde{G}(\vec{\eta})$ es singular para $|\vec{\eta}| = k_0$. El dominio espacial $G(\vec{r})$ se obtiene mediante transformada inversa, integrando en el plano complejo por un camino que rodee las singularidades apropiadamente [37]. En dos dimensiones

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\eta_x x} e^{-j\eta_z |z|}}{\eta_z} d\eta_x ; \quad \eta_z = +\sqrt{k_0^2 - \eta_x^2} \quad (3.27)$$

que es la expresión integral de la función de Hankel de segunda especie

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r}|) \quad (3.28)$$

para una fuente puntual situada en \vec{r}' , el campo producido será

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r}-\vec{r}'|) \quad (3.29)$$

en tres dimensiones la función de Green es

$$G(\vec{r}) = \frac{e^{-jk_0 |\vec{r}|}}{4\pi |\vec{r}|} \quad (3.30)$$

Gracias a la linealidad de la ecuación de onda, el campo dispersado puede expresarse como convolución de la excitación con la función de Green

$$E_s(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') E(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.31)$$

Esta es una ecuación de Fredholm de segunda especie y constituye el punto de partida de la mayoría de los métodos de resolución del problema directo, en que se conocen C , E_0 y se evalúa E_s . Nótese que E_s no se obtiene de forma explícita puesto que aparece en el integrando en el campo total $E = E_0 + E_s$.

Básicamente existen dos planteamientos para resolver (3.31), el primero se basa en diferentes aproximaciones del integrando y el segundo, más general, consiste en la transformación de la ecuación integral en un sistema de ecuaciones mediante el método de momentos.

Describiremos dos aproximaciones utilizadas para la resolución de la ecuación integral para el campo dispersado. Ambas aproximaciones están basadas en la hipótesis de perturbación débil sobre el campo incidente. La aproximación de Born consiste en suponer un campo dispersado mucho menor que el incidente. En cambio en la aproximación de Rytov se supone un cambio de fase del campo total suave con respecto al campo incidente. Las dos aproximaciones dan lugar a formulaciones parecidas pero su margen de aplicabilidad es diferente. Las aproximaciones de primer orden permiten expresar el campo dispersado de forma explícita y serán la base para la resolución del problema inverso.

3.3.1 Aproximación de Born

En la hipótesis de Born se supone una interacción débil del objeto sobre el campo incidente de forma que $E_s \ll E_o$, por lo que $E \approx E_o$ y (3.31) queda

$$E_s(\vec{r}) \approx -k_o^2 \int C(\vec{r}') E_o(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.32)$$

E_s se obtiene fácilmente de forma explícita a partir de E_o y C . La validez de la aproximación de Born depende del contraste o inhomogeneidad del objeto y de su tamaño. Por ejemplo un objeto de permitividad muy diferente al medio exterior pero de dimensiones pequeñas en términos de longitud de onda dará lugar a un campo interior de amplitud algo diferente pero conservará una fase parecida a la del campo incidente, con lo que la aproximación de Born puede ser válida. Sin embargo cuerpos con tamaños de varias longitudes de onda fácilmente producirán desfases de 180 grados o mayores respecto al campo incidente violando la aproximación.

Un criterio usual para determinar la validez de la aproximación de Born en un cuerpo consiste en estimar el desfase del campo total respecto al incidente. El límite de aplicación ha sido evaluado mediante simulación por algunos investigadores [31] y corresponde a un desfase máximo de 180 grados en el interior del objeto. Esta condición puede expresarse de forma aproximada en

función del tamaño d y permitividad media ϵ del objeto suponiendo propagación de onda plana en su interior,

$$k_0 d (\sqrt{\epsilon/\epsilon_0} - 1) < \pi \Rightarrow d (\sqrt{1-C} - 1) < \lambda / 2 \quad (3.33)$$

3.3.2 Aproximación de Rytov

La aproximación de Rytov ha sido utilizada en estudios de propagación electromagnética en la atmósfera, y se deriva de la expresión del campo en términos de la fase compleja definida como [38],

$$E(\vec{r}) = e^{\phi(\vec{r})} \quad (3.34)$$

la fase del campo total ϕ se expresa como suma de la fase incidente ϕ_0 y de la fase dispersada ϕ_s , donde $E_0 = e^{\phi_0}$, sustituyendo en la ecuación de onda (3.23) obtenemos

$$\nabla^2 \phi_s + (\nabla \phi_s)^2 + 2 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_s = k_0^2 C \quad (3.35)$$

suponiendo una onda plana incidente $E_0 = e^{-jk_0 r}$ tras algunas manipulaciones algebraicas llegamos a

$$(\nabla^2 + k_0^2) (E_0 \phi_s) = E_0 [k_0^2 C - (\nabla \phi_s)^2] \quad (3.36)$$

esta expresión posee una estructura de ecuación de onda por la presencia del operador $(\nabla^2 + k_0^2)$, lo que permite utilizar la función de Green obteniendo

$$\phi_s(\vec{r}) = \frac{-1}{E_0(\vec{r})} \int [k_0^2 C(\vec{r}') - (\nabla \phi_s(\vec{r}'))^2] E_0(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.37)$$

la aproximación de Rytov consiste en suponer un cambio de fase ϕ_s pequeño por longitud de onda, por lo que $(\nabla \phi_s)^2 \ll k_0^2 C$ y obtenemos ϕ_s de forma explícita

$$\phi_s(\vec{r}) = \frac{-k_0^2}{E_0(\vec{r})} \int C(\vec{r}') E_0(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.38)$$

La condición de validez de la aproximación de Rytov es $(\nabla \phi_s)^2 \ll k_0^2 C(r)$. El

término $\nabla\phi_s$ es el cambio de fase compleja del campo dispersado por unidad de longitud. Así en la aproximación de Rytov no es importante el valor absoluto de la fase como en la aproximación de Born, sino su pendiente por longitud de onda. Esta condición implica la validez de la aproximación de Rytov en objetos de muy bajo contraste con independencia de su tamaño.

3.4 Aproximaciones de orden superior: Series de Born y Rytov

Una forma sencilla de calcular aproximaciones de orden superior para el campo dispersado, consiste en reutilizar el resultado de las aproximaciones de primer orden para obtener una mejor aproximación del campo total. El procedimiento es análogo al método del punto fijo utilizado en cálculo numérico para obtener soluciones de expresiones del tipo $x = f(x)$. Este procedimiento se basa en la expresión recurrente

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (3.39)$$

la iteración converge a condición de que la derivada $|f'(x)| < 1$ en el margen de valores que toma x [39]. Recordemos la expresión exacta del campo dispersado

$$E_s(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') [E_o(\vec{r}') + E_s(\vec{r}')] G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.40)$$

la aproximación de Born no es más que la primera iteración de la serie,

$$E_s^0(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') E_o(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.41)$$

$$E_s^1(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') [E_o(\vec{r}') + E_s^0(\vec{r}')] G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$E_s^2(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') [E_o(\vec{r}') + E_s^1(\vec{r}')] G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}'$$

...

La convergencia de la serie de Born depende de las características del objeto por lo que no existe un criterio sencillo de convergencia y ésta debe hallarse mediante simulación. En [31] se encuentra un estudio de este método utilizando cilindros dieléctricos, desgraciadamente el procedimiento converge sólo para

objetos de bajo contraste, por lo que puede considerarse como un refinamiento de la aproximación de Born. En medios con pérdidas la convergencia mejora, debido al menor acoplamiento entre zonas distantes. El mismo método puede aplicarse partiendo de la aproximación de Rytov, lo que da lugar a la serie del mismo nombre. Al igual que la serie de Born, el dominio de convergencia es similar al de validez de la aproximación de Rytov [31].

3.5 Método de momentos

Mediante el método de momentos puede transformarse la ecuación integral (3.31) en una ecuación matricial o sistema de ecuaciones lineales [40]. La ecuación a resolver es del tipo $L(f) = g$ donde L es un operador lineal, g es una función conocida y f es la función incógnita. f puede expresarse en serie de funciones base f_n linealmente independientes y pertenecientes a un conjunto completo de la forma

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (3.42)$$

gracias a la linealidad de L podemos escribir

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (3.43)$$

la ecuación matricial se genera adoptando un conjunto de funciones peso o test w_1, w_2, \dots, w_m en el dominio de L y linealmente independientes, con las que formamos el producto escalar

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (3.44)$$

esta expresión puede escribirse en forma matricial como

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \quad (3.45)$$

donde

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad g_m = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

los coeficientes α_n pueden obtenerse invirtiendo $[l_{mn}]$

$$[\alpha_n] = [l_{mn}]^{-1} [g_m] \quad (3.47)$$

con lo que la solución deseada viene dada por (3.42). El método de momentos da lugar a una gran variedad de procedimientos de cálculo dependiendo en primer lugar de la elección de las funciones base y funciones peso, y del método utilizado para la resolución de la ecuación matricial. La elección de funciones base y peso es a menudo un compromiso entre facilidad de evaluación de los productos escalares y la similitud de las funciones con la solución buscada. El caso particular en que las funciones base y peso son iguales se denomina método de Galerkin. Es bastante usual elegir como funciones peso una red de deltas de Dirac distribuidas sobre el objeto, el procedimiento recibe el nombre de 'point-matching method'. Otra elección usual es tomar pulsos rectangulares o triangulares como funciones base, debido a que su dominio acotado facilita el cálculo de la matriz $[l_{mn}]$. Uno de los primeros trabajos sobre la utilización del método en el cálculo de difracción de dieléctricos se debe a Richmond en 1965 [41], en que utilizó pulsos rectangulares como funciones base y deltas como funciones peso.

La ecuación de partida habitual es la ecuación integral (3.31) que puede reescribirse como

$$E_o(\vec{r}) = E(\vec{r}) + k_o^2 \int C(\vec{r}') E(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.48)$$

utilizando pulsos rectangulares como funciones base en el dominio del objeto \vec{r}' y deltas como funciones peso en el dominio \vec{r} , la ecuación se transforma en

$$E_o [m] = E [m] - \sum C [n] E [n] G [m,n] \quad (3.49)$$

donde

$$G [m,n] = -k_o^2 \iint_n G(r_m-r') dr' \quad (3.50)$$

es la versión discreta de la función de Green que cuantifica la interacción de la celda n sobre la posición m . En notación matricial (3.49) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} E_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

donde [C] es una matriz diagonal siendo sus elementos las diferentes celdas en que se ha dividido el objeto, en notación más compacta

$$[GC -I] E = - E_0 \quad (3.51)$$

La ventaja del método de momentos reside en su generalidad y precisión, a condición de realizar una elección correcta de funciones base y peso. El inconveniente del método reside en el tamaño de las matrices que se generan cuando el objeto excede la extensión de algunas longitudes de onda. El coste computacional del método es alto pues se requiere un número de operaciones del orden de N^3 y un almacenamiento en memoria del orden de N^2 datos, siendo N el número de celdas en que ha sido discretizado el objeto. Debe tenerse en cuenta que para lograr una precisión aceptable el dominio espacial del objeto debe muestrearse con periodos inferiores a 0.25λ , lo que dificulta el tratamiento de problemas tridimensionales. Aún en dos dimensiones los tamaños de objeto manejables no exceden algunas longitudes de onda, con la capacidad de los ordenadores actuales. Para paliar este problema puede recurrirse a métodos iterativos para la resolución de la ecuación matricial. El método de gradiente conjugado, es un procedimiento iterativo, basado en minimizar un funcional de error [42]. Los métodos iterativos poseen la ventaja frente a los métodos directos, de ser más robustos frente al truncamiento de computación y permitir seleccionar el grado de precisión deseado en el cálculo. Una mejora adicional en el método de gradiente conjugado, se deriva de la utilización de técnicas de FFT para realizar la convolución entre objeto y función de Green en el dominio espectral. De esta forma puede reducirse el número de operaciones a $N \cdot \log_2(N)$ por iteración y un almacenamiento del orden de N datos [43].

Se ha utilizado un programa de gradiente conjugado utilizando FFT, realizado por el Groupe d'Electromagnetisme de Supelec (París), para calcular los campos dispersados por un modelo bidimensional de cabeza humana de tamaño 10λ (fig.3.3). En el programa se emplean pulsos rectangulares como funciones base y deltas como funciones peso, el paso de discretización fue de $\lambda/7$ con un total de 87×87 células. El tiempo de CPU en un ordenador HP9000-840 dado un campo incidente es de unos 90' con unas 70 iteraciones. La fig.3.4 muestra el campo total calculado para el modelo a 2.45 GHz.

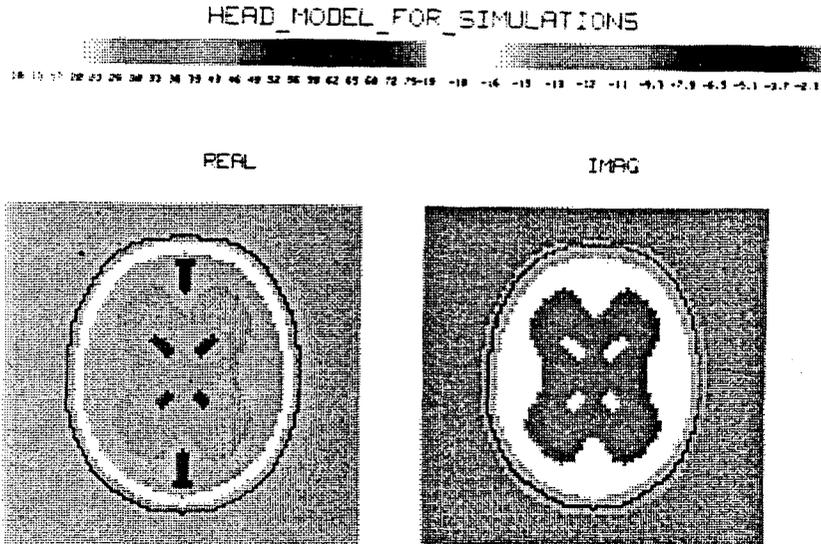


Fig.3.3 Modelo bidimensional de cabeza humana

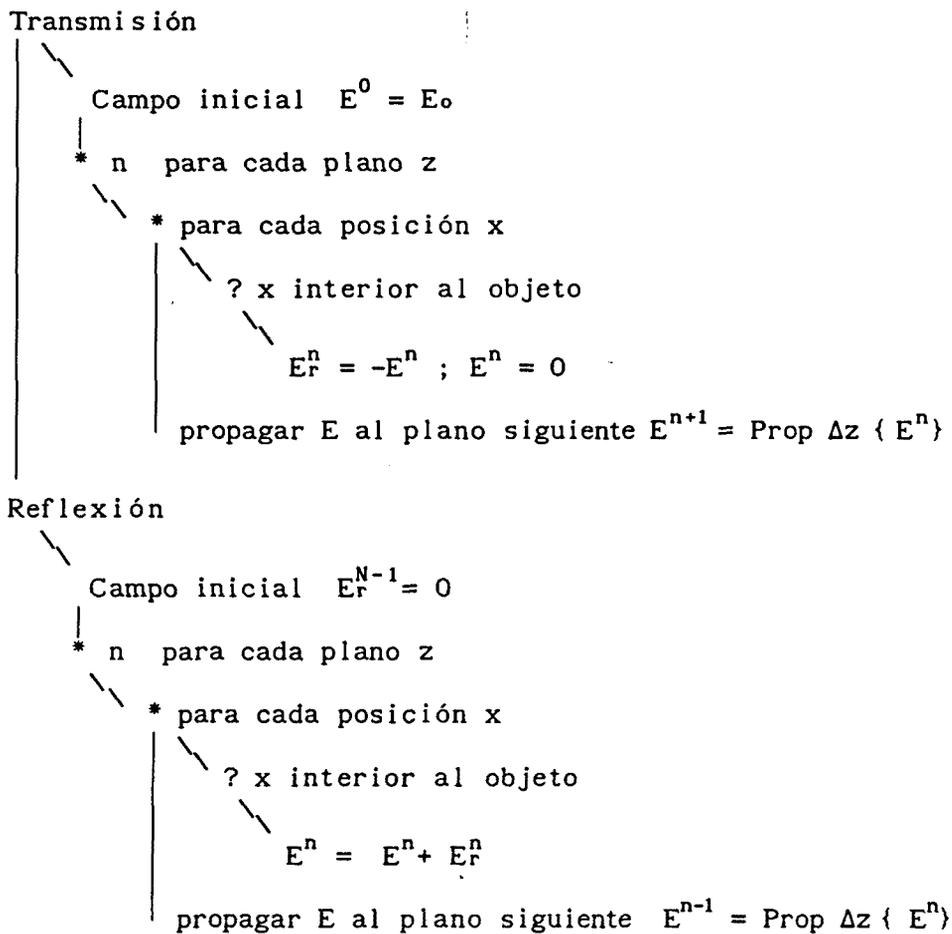
3.6 Métodos secuenciales

En un método secuencial, se calcula la interacción del campo con el objeto de forma secuencial en el espacio de forma similar al avance de un frente de onda a través del objeto. Describiremos sin profundizar en ellos tres métodos, el método incremental, el método espectral iterativo SIT, y el método de diferencias finitas en dominio temporal FDTD.

3.6.1 Método incremental

El método ha sido propuesto para metales por la Univ. de Sheffield (Inglaterra) [44]. El objeto se discretiza en una dimensión normalmente en la dirección de propagación de la onda en un conjunto de planos paralelos. En primer lugar se evalúa el campo total hacia delante, el paso básico para el cálculo del campo en un plano consiste en propagar hacia delante el campo

evaluado en el plano anterior, aplicando las condiciones de contorno de campo tangencial nulo en la superficie del conductor. Una forma eficiente de propagar el campo consiste en la utilización del espectro angular {Ap.A}. La porción de campo que se trunca se almacena para posteriormente calcular el campo dispersado hacia atrás. El procedimiento para el cálculo de la reflexión es similar, acumulando el campo cambiado de signo que se truncó en el barrido hacia adelante. Es decir en cada plano se considera que existe reflexión total en la extensión ocupada por el objeto, y el campo reflejado es igual al incidente cambiado de signo. El algoritmo puede escribirse simbólicamente como



La fig.3.5 muestra el campo total dispersado por un cilindro de radio 3λ calculado mediante el método incremental.

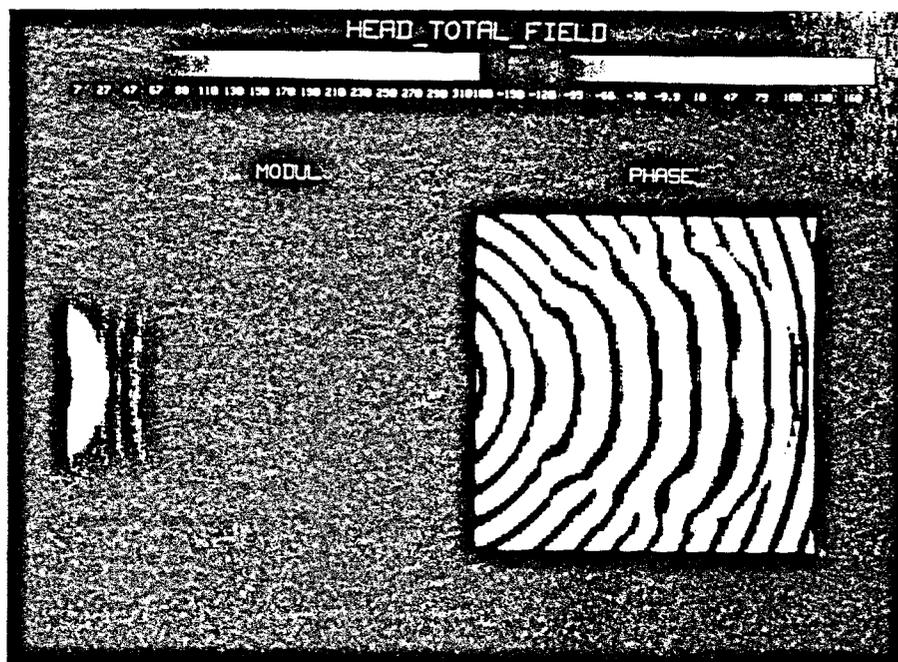


Fig.3.4 Campo total en el modelo de la fig.3.3 calculado con MM-GC.

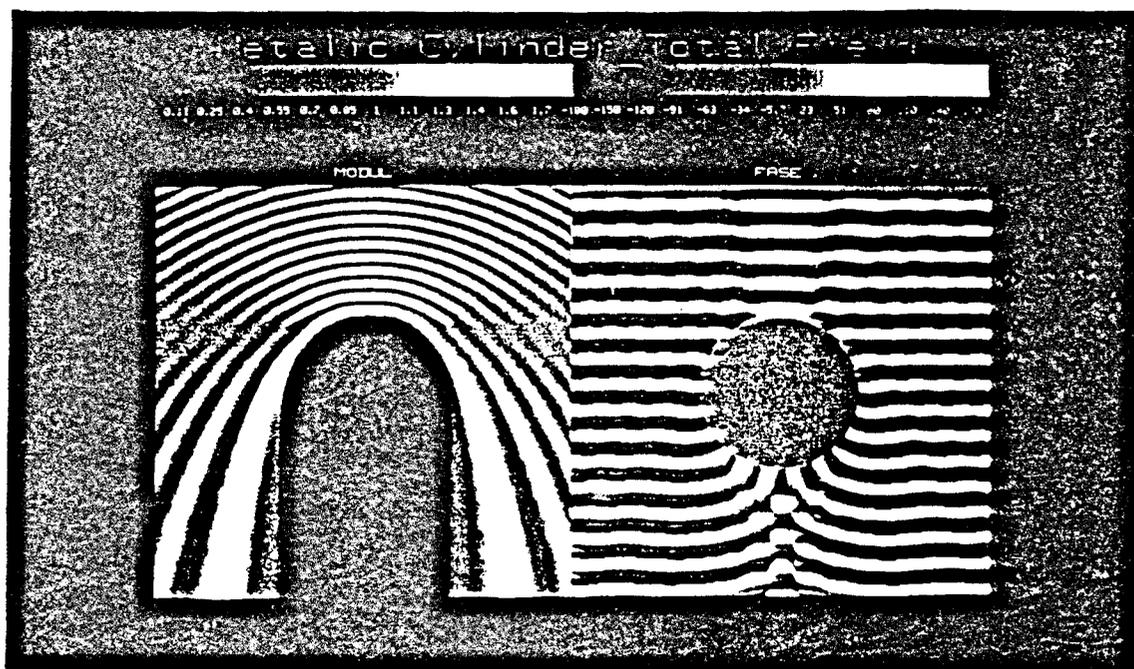


Fig.3.5 Campo total difractado por un cilindro metálico de radio 3λ .

El método incremental requiere discretizaciones transversales y longitudinales mucho menores que λ , p.ej. $\lambda/16$. El algoritmo es básicamente una secuencia de FFT y productos con un término de propagación, en líneas (2D) o planos (3D), que se calculan de forma eficiente. Para tener en cuenta acoplamientos longitudinales múltiples pueden realizarse varias pasadas delante-atrás, propagando los campos reflejados en la pasada anterior hasta que la amplitud del campo decae a valores despreciables. En la actualidad se está estudiando la bondad de los resultados y la eficiencia numérica del algoritmo. La extensión a dieléctricos del método incremental no es inmediata y es un tema pendiente de estudio.

3.6.2 Método espectral iterativo (SIT)

Este método fue propuesto por Kastner y Mittra en 1983 [45] y es de filosofía similar al método incremental, aunque más elaborado. El objeto se descompone en planos de forma que reduce el problema original a una secuencia de problemas de una dimensión menor. El método es aplicable a metales y dieléctricos. El paso básico del SIT es el cálculo iterativo para cada plano de las corrientes equivalentes en el objeto utilizando la información de permitividad y extensión de éste. El cálculo del campo a partir de las corrientes y viceversa se hace mediante la función de Green en el dominio espectral donde las convoluciones se convierten en productos. El ciclo básico del SIT para un plano z_n se esquematiza como

Aproximación inicial J_n

$$E_s = J_n * G = \mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{J} \cdot \tilde{G} \}$$

? x interior al objeto

$$E_s = -E_o + J_n / j\omega\epsilon_o(\epsilon_r - 1)$$

$$J_{n+1} = \mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{E} \cdot \tilde{G}^{-1} \}$$

? x exterior al objeto

$$J_{n+1} = 0$$

El ciclo básico puede utilizarse para calcular la difracción producida por cintas metálicas o dieléctricas. Para un objeto formado por varios planos, el procedimiento básico se aplica secuencialmente a cada plano, teniendo en cuenta que el campo aplicado será el incidente más los campos dispersados por los demás planos. Si el método converge, la solución se obtiene realizando varias pasadas a través del objeto, recalculando las corrientes hasta que se estabilizan. Los problemas de convergencia del método obligan a menudo a utilizar factores de relajación de forma que se pondera la nueva corriente con la obtenida en la iteración anterior.

3.6.3 Método de diferencias finitas en dominio temporal (FDTD)

A diferencia de los métodos anteriores, el FDTD resuelve las ecuaciones de Maxwell en dominio temporal, realizando una doble discretización en espacio y en tiempo. El método fue desarrollado por Yee ya en 1966 [46] y recientemente vuelve a ser investigado [43]. El objeto se considera inicialmente sin campos ni corrientes, el campo incidente excita secuencialmente las células en que se ha discretizado el objeto y las ecuaciones de rotacional implementadas con el método de diferencias finitas modelan la interacción del cuerpo con la onda.

En el caso de estar interesados en una solución monocromática, se excita el objeto con un frente de onda sinusoidal y se deja transcurrir el tiempo suficiente para que el transitorio se atenúe y todos los campos en el interior del objeto sean sinusoidales. El FDTD requiere volúmenes de almacenamiento similares al método de gradiente conjugado, aunque los tiempos de cálculo pueden ser sustancialmente menores. Una ventaja sobre otros métodos estriba en su generalidad, permitiendo excitaciones temporales arbitrarias y soluciones vectoriales generales TE y TM. Sin embargo al igual que el método de momentos, el FDTD está limitado a objetos de tamaño eléctrico moderado al requerir muestreos espaciales del orden de 0.1λ . Una limitación adicional se deriva del muestreo temporal, por razones de estabilidad el período de muestreo debe ser $\delta t \leq \delta x / 2c$, siendo c la velocidad de la luz en el medio. Si se desea una solución monocromática, para obtener un régimen permanente se requiere el paso de un frente de onda de dos a tres λ a través del objeto, por lo que el número de periodos temporales a calcular es del orden de $N \geq 5\lambda/\delta x$. Por ello el método FDTD es eficiente para frecuencias intermedias (tamaños de algunas λ).

Para frecuencias altas está limitado por el número de células espaciales y para frecuencias bajas el tiempo de cálculo para lograr una solución estable puede ser prohibitivo.

CAPÍTULO 4 RECONSTRUCCIÓN DE CUERPOS DIELECTRICOS

Existen dos modalidades de obtención de imágenes en microondas: pasiva y activa. La modalidad pasiva está basada en la medida de la radiación térmica producida por un cuerpo. Nos ocuparemos fundamentalmente de las técnicas activas, en las que el cuerpo se ilumina con una radiación coherente y medimos los campos dispersados por éste.

Tras situar la formación de imágenes de cuerpos en el contexto de los problemas inversos, formularemos la reconstrucción de las corrientes inducidas en el dieléctrico, mediante técnicas de focalización o invirtiendo la ecuación integral que relaciona las corrientes con los campos dispersados. Mediante aproximaciones de baja dispersión o primer orden obtendremos una imagen del contraste dieléctrico del cuerpo. Los medios biológicos producen una fuerte atenuación sobre los campos de microondas, por ello se ha dedicado un apartado a estudiar los efectos de las pérdidas en la reconstrucción.

Debido a la considerable inhomogeneidad de los cuerpos biológicos, las aproximaciones de baja dispersión no son válidas excepto para cuerpos de sección reducida. Por ello se han desarrollado técnicas de orden superior más adaptadas al alto contraste de los tejidos. Aunque el objetivo de la tesis se centra en la geometría de medida cilíndrica, se ha procurado realizar un estudio general de la reconstrucción, un algoritmo eficiente para sistemas cilíndricos se obtendrá como caso particular en el (Cap.6).

4.1 Técnicas pasivas

Los materiales a una cierta temperatura radían energía electromagnética incoherente y de banda ancha. Midiendo la radiación térmica de forma pasiva en el exterior, es posible obtener imágenes asociadas con la distribución volumétrica de temperatura en el cuerpo. Para un cuerpo negro la intensidad de radiación (densidad espectral de radiación por unidad de área y estereorradián), viene dada por la ley de Planck:

$$I(f) = \frac{2hf^3}{c^2} [e^{hf/kT} - 1]^{-1} \quad (4.1)$$

donde h , k son las constantes de Planck y Boltzmann respectivamente. A frecuencias de microondas puede utilizarse la aproximación de Rayleigh-Jeans

($hf \ll kT$) para la intensidad de radiación

$$I(f) \cong \frac{2kTf^2}{c^2} \quad (4.2)$$

así, la potencia radiada por un cuerpo biológico a frecuencias de microondas es proporcional a la temperatura. Para cuerpos a temperatura cercana a la ambiente, la intensidad de radiación presenta un máximo a frecuencias del orden del infrarrojo. Sin embargo la termografía de infrarrojos sólo proporciona información de la temperatura superficial debido a la reducida profundidad de penetración a estas frecuencias. En microondas la intensidad de radiación puede ser del orden de -70 dB respecto a frecuencias del infrarrojo, pero puede obtenerse información de la distribución de temperatura a profundidades de algunos cm. Ciertas dolencias y tumores producen una elevación local de temperatura en zonas subcutáneas, de ahí el interés de la termografía de microondas.

La instrumentación de medida consiste básicamente en radiómetros de banda ancha y alta sensibilidad, utilizando antenas de contacto adaptadas al tejido o reflectores parabólicos separados a cierta distancia del cuerpo [47,48]. La señal obtenida depende de la distribución térmica del cuerpo, de su emisividad, estructura dieléctrica y atenuación, y de las características en campo próximo y adaptación de la antena sobre el tejido. Barriendo la superficie del cuerpo con una antena o utilizando una agrupación, pueden obtenerse imágenes térmicas del cuerpo. La resolución viene condicionada por el tamaño de la antena y es del orden del cm o algunos cm dependiendo de la frecuencia y antenas empleadas.

4.2 Técnicas activas

En una técnica activa el cuerpo a estudio se ilumina con una radiación externa de microondas y se mide la interacción de éste con el campo incidente. La dispersión producida por un cuerpo es función de su distribución dieléctrica que a su vez depende de su estructura, irrigación y temperatura por lo que en principio es posible obtener imágenes de estos parámetros.

Las técnicas activas, al aportar energía externa, permiten la exploración de cuerpos a profundidades de decenas de cm, inalcanzables con técnicas pasivas. A diferencia de los sistemas pasivos donde la señal medida es incoherente, en

un sistema activo es posible utilizar receptores de banda estrecha y gran sensibilidad. Además el carácter vectorial de la medida hace posible la utilización de técnicas holográficas en la reconstrucción y alcanzar el límite teórico de resolución espacial, aproximadamente media longitud de onda en el dieléctrico.

4.3 Margen de frecuencias utilizable

La frecuencia de trabajo incide fundamentalmente en dos parámetros: la resolución de la imagen, del orden de media longitud de onda, y la atenuación producida por los tejidos que aumenta con la frecuencia. La atenuación condiciona la máxima profundidad de penetración, dadas la potencia de iluminación y sensibilidad del sistema. Por ello la elección de la frecuencia de trabajo es fundamentalmente un compromiso entre resolución y atenuación que incide también en el tamaño de las antenas y de la agrupación de medida.

La fig.4.1 tomada de [49] ilustra el compromiso de la elección de frecuencia entre atenuación y resolución, en este artículo se sugiere la utilización del margen 2-8 GHz para sistemas activos. Sin embargo en el caso de cuerpos de tamaño medio o grande la frecuencia debe ser inferior a 4 GHz [50] para obtener una atenuación razonable (<150dB).

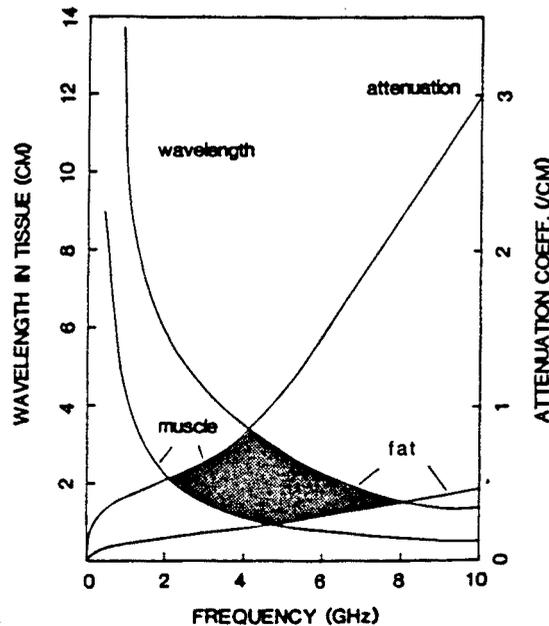


Fig.4.1 Compromiso atenuación-resolución en la elección de frecuencia [49].

4.4 El problema inverso de difracción

En el capítulo 3 hemos tratado el problema directo de difracción, es decir, dados un campo incidente y un objeto dieléctrico perfectamente conocidos, calcular el campo dispersado por éste. El problema inverso de difracción es el recíproco del directo y consiste en determinar las características del objeto, a partir del conocimiento de los campos incidente y dispersado. En el caso de un objeto activo o generador del campo, no existiría campo incidente, y la incógnita sería la distribución de corriente en el objeto o el campo cercano creado por éste en una superficie envolvente, en este caso estaríamos ante un problema inverso de fuente [51]. Nótese que los dos problemas son similares puesto que el problema inverso de difracción se reduce al problema inverso de fuente sin más que considerar las corrientes inducidas o equivalentes sobre el cuerpo como las fuentes que originan el campo dispersado.

Desde un punto de vista matemático el problema inverso electromagnético, pertenece a la familia de problemas de inversión de perfil, con aplicaciones en geofísica, sondeo atmosférico, dispersión de partículas en mecánica cuántica, etc [52]. La dificultad del problema inverso puede analizarse en los aspectos de completitud de los datos de partida, la existencia y unicidad de la solución, la estabilidad numérica de las soluciones, y finalmente el diseño del algoritmo inverso.

Completitud de los datos

En un problema inverso raramente se tiene un conjunto de datos de partida completo que especifique de forma única la solución. En el problema directo tenemos un conocimiento completo y libre de ruido de la escena: campo incidente y objeto, lo que permite calcular los campos dispersados para un determinado ángulo de incidencia, frecuencia y polarización. En el problema inverso, un conjunto completo de datos sería la matriz de dispersión libre de ruido para todas las direcciones del espacio y frecuencias [53,54]. En general no dispondremos de esta información sino que dispondremos de datos ruidosos en un conjunto discreto y de banda limitada de frecuencias, posiciones de medida y probablemente para una única polarización. Esto hace que no exista una única solución compatible con los datos de partida, aún en el caso de que el problema inverso tenga solución única al disponer de los datos completos. Una forma de completar los datos consiste en aportar información directamente

sobre el objeto, lo que se denomina información 'a-priori'. Por ejemplo el contorno del objeto, margen de permitividades posibles, etc.

Un enfoque diferente en la resolución de problemas subespecificados es la búsqueda de soluciones de máxima entropía, de forma que se obtiene el objeto más probable o de mínima información compatible con los datos de partida, el procedimiento ha sido aplicado a estimación espectral, tomografía de rayos X [55], y en transformada inversa de Fourier a partir de muestreos poco densos [56].

Unicidad de la solución

El problema de la unicidad de la solución dado un conjunto completo de datos, está ligado a la existencia de corrientes no radiantes, así llamadas por producir campos estáticos, nulos o evanescentes en el exterior de las fuentes y por tanto no medibles. Dos distribuciones de corriente que difieran en una distribución no radiante producirían los mismos campos en el exterior y no habría unicidad.

Aunque matemáticamente pueden calcularse ejemplos de corrientes no radiantes y objetos no difractantes [57], no está claro si tales distribuciones son físicamente realizables, el tema es motivo de activa discusión [58]. La unicidad de la solución del problema inverso de difracción, sólo ha sido demostrada para cuerpos de bajo contraste, en que el campo total en el interior del objeto puede aproximarse por el incidente (Aprox. de Born) [57]. En situaciones más generales, la utilización de restricciones y condicionantes permiten unificar la solución, por ejemplo siempre podremos encontrar una solución de mínima energía al problema. Otra forma de reducir el número de posibles soluciones, consiste en la utilización de información 'a-priori' acerca del objeto.

Estabilidad de la solución

El problema inverso se presenta a menudo mal condicionado o poco estable, lo que significa que pequeños errores en los datos originan grandes errores en la solución. El problema directo $\mathcal{D} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{C}$ puede considerarse un operador sobre el espacio de fuentes \mathbb{F} proporcionando puntos de un espacio de campos \mathbb{C} . A menudo el operador \mathcal{D} posee un efecto de alisado o de contracción sobre los datos de forma que dos fuentes diferentes pueden producir campos distintos pero extremadamente parecidos como se esquematiza en la fig.4.3. La fig.4.2 es

un ejemplo de ello, mostrando la evolución del campo dispersado por un cilindro cuyo contraste varía desde cero a un valor elevado. Fuera de la zona de bajo contraste existe una baja sensibilidad de los campos dispersados a la composición del cilindro.

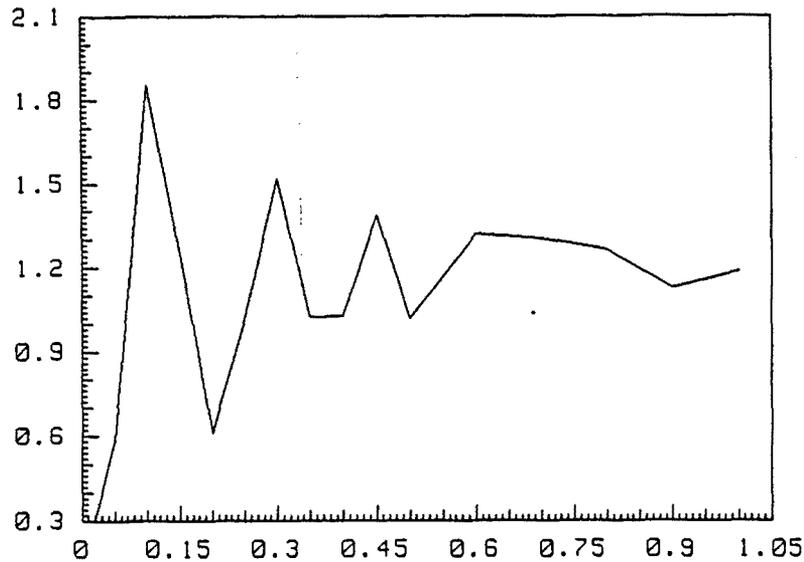


Fig.4.2 Potencia del campo dispersado ($\Sigma |E_s|^2$) por un cilindro de radio 5λ en función del contraste respecto al medio externo.

No existe una solución general para el problema inverso de difracción, pero aún en el caso de que se encontrara, los errores que son inevitables en el proceso de medida provocan inestabilidad en la inversión $\mathfrak{J} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{F}}$ donde $\bar{\mathbb{C}}$ son los campos contaminados con errores. Esto significa que pueden obtenerse fuentes muy distintas a las reales, y lo que es más grave, al destruirse la suavidad o continuidad propios de \mathbb{C} , puede incluso no haber solución para algunos puntos de $\bar{\mathbb{C}}$ o bien proporcionar fuentes físicamente no realizables pertenecientes a un conjunto $\bar{\mathbb{F}}$, como muestra la fig.4.3. La forma de "resolver" un problema mal condicionado se basa en la búsqueda de una solución "próxima" a la original según algún criterio. Para ello se utiliza información 'a-priori' para restringir $\bar{\mathbb{F}}$ a un espacio $\bar{\bar{\mathbb{F}}}$ realizable y de menor tamaño. Las restricciones más utilizadas son la acotación de las soluciones, criterios de suavidad, mínima energía, positividad, etc. Las restricciones pueden incluirse de forma arbitraria en los algoritmos inversos con resultados poco

predecibles, o bien pueden plantearse explícitamente como parte del problema, lo que se denomina método de regularización [59].

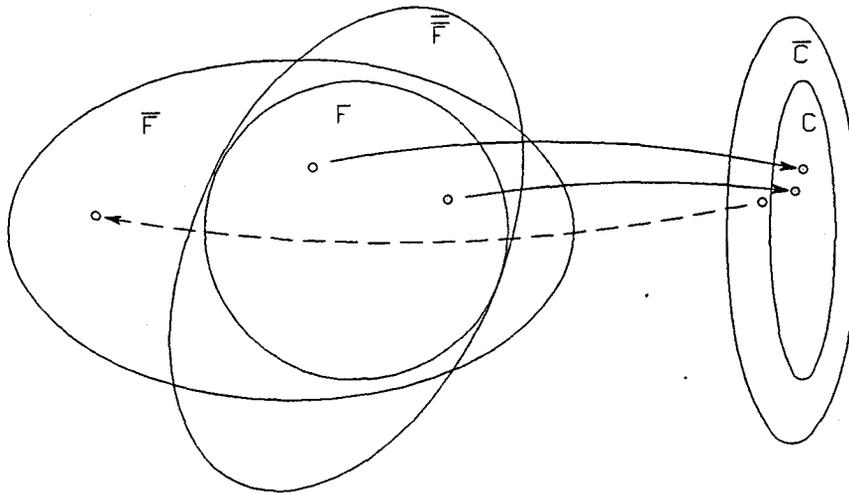


Fig.4.3 Dominios de fuentes y campos F, C . Línea continua prob. directo, línea discontinua prob.inverso. \bar{F}, \bar{C} indican soluciones afectadas de errores, $\bar{\bar{F}}$ es un criterio de regularización utilizando información "a-priori".

Si se conocen las estadísticas de las soluciones, la inversión puede abordarse en el contexto de filtrado óptimo de procesos estocásticos. Otra forma de estabilizar la solución consiste en parametrizar el objeto fuente por un conjunto de variables, éstas se obtienen por un procedimiento iterativo de optimización, de forma que minimicen el error entre los campos medidos y los que se obtienen aplicando un método directo sobre la solución. Este procedimiento ha sido utilizado en la reconstrucción de cilindros (6.5.2). Un enfoque diferente son las técnicas de reconocimiento (clasificación) de patrones (firmas), donde algoritmos de inteligencia artificial, permiten clasificar el objeto como perteneciente a un cierto tipo, del universo de objetos posibles. De hecho también en este caso se utiliza información 'a-priori' en la definición de las diferentes clases de objeto.

Diseño del algoritmo

No existe una solución general para el problema inverso electromagnético,

debido a la dificultad de encontrar una solución explícita, y a la diversidad de planteamientos que engloba. En consecuencia, tampoco existen pautas concretas para la implementación numérica de las soluciones. En algunos casos un mismo problema puede formularse de varias maneras matemáticamente equivalentes, escogeremos la opción que dé lugar a un costo computacional menor.

El problema inverso puede plantearse en una, dos y tres dimensiones, y puede referirse a la determinación de parámetros muy variados: la forma de un objeto metálico, la impedancia de una línea de transmisión inhomogénea, la distribución de corrientes sobre una antena o a la distribución espacial de permitividad de un objeto dieléctrico. Por otra parte como a menudo se recurre a la utilización de aproximaciones para encontrar una solución, el problema inverso da origen a formulaciones distintas según se utilicen aproximaciones de dispersión débil (primer orden), de baja frecuencia, zona de resonancia, de optica física (PO) o bien optica geométrica (GO) [60].

En este trabajo el problema inverso que trataremos de resolver, es la reconstrucción de la distribución de permitividad compleja de un cuerpo dieléctrico bidimensional, a partir de los campos dispersados a frecuencia y polarización únicas. En la reconstrucción de los cuerpos utilizaremos aproximaciones de primer orden, y aproximaciones de orden superior en las que utilizaremos información 'a-priori'. Otra técnica ensayada consiste en la utilización de diversidad de frecuencia en las medidas para obtener mayor información sobre el objeto.

4.5 Reconstrucción de corrientes

En el Cap. 3 se obtuvo una ecuación integral que relaciona el campo dispersado (medido) con el objeto que deseamos obtener:

$$E_s(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') E(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.3)$$

el campo dispersado es el resultado de la convolución de la función de Green del problema con el término de excitación, producto de la función contraste del objeto con el campo total en su interior (corriente equivalente o inducida). En primer lugar obtendremos sin aproximaciones las corrientes a partir del campo dispersado, para en una segunda etapa, obtener el espectro del objeto bajo aproximaciones de primer orden.

Históricamente, los problemas de formación holográfica de imágenes en microondas se han abordado desde dos filosofías diferentes, la utilización de operadores de focalización sobre el campo medido [61,62,63], y la inversión de la ecuación integral que relaciona los campos con las corrientes que los originan [4,6,31]. En la primera, la imagen se obtiene focalizando el campo sobre la región de fuentes, para ello se procesa numéricamente el campo medido en una región del espacio. El procedimiento es similar al tratamiento realizado por una lente convergente sobre el campo, en un sistema óptico de formación de imágenes. El operador de focalización no es único, lo que da lugar a formulaciones diferentes según la opción escogida.

La segunda alternativa adoptada por otros autores consiste en resolver la ecuación integral (4.3) para una geometría de medida canónica respecto a un sistema de coordenadas. De esta forma se obtiene una región del espectro de corrientes, según la familia correspondiente de autofunciones de la ecuación de onda. Como veremos, este planteamiento bajo ciertas condiciones puede interpretarse como un operador de focalización. Utilizando autofunciones de la ecuación de onda como campo incidente y aproximaciones de dispersión débil, puede establecerse una correspondencia punto a punto entre los espectros de corrientes y de función contraste que define el objeto, lo que permite su reconstrucción de forma eficiente.

El teorema de reciprocidad de Lorentz expresado en forma integral sobre el espacio de fuentes y medida es una herramienta idónea para el cálculo de operadores sobre campos y corrientes, lo utilizaremos para generalizar la obtención del espectro de corrientes y campos a partir de medidas sobre una geometría arbitraria.

4.5.1 Operadores de focalización

El concepto de focalización aplicado a la formación de imágenes es la base de los sistemas ópticos basados en lentes como el ojo humano, la cámara fotográfica, etc. Una lente convergente procesa en tiempo real el campo radiado por una fuente de manera que se forma en un plano de focalización una réplica o imagen de ésta. Otra técnica algo más evolucionada es la holografía, introducida por Gabor en 1948 [64], básicamente consiste en realizar un registro fasorial del campo eléctrico producido (o dispersado) por un objeto fuente en una superficie. A posteriori el frente de onda registrado puede reproducirse formando imágenes virtuales o reales del objeto original.

La medida fasorial del campo en óptica, requiere la utilización de fuentes coherentes (LASER) y técnicas interferométricas por la dificultad de medir directamente la fase a esas frecuencias. La formación óptica de imágenes puede analizarse mediante óptica de Fourier [64] utilizando una aproximación escalar del campo y las teorías de difracción de Kirchhoff y Rayleigh-Sommerfeld.

A frecuencias de microondas se dispone de detectores vectoriales que permiten una medida de fase directa del campo eléctrico incidente. La reconstrucción de las fuentes a partir de dicha medida, es pues una técnica holográfica compartiendo la misma base teórica que los sistemas ópticos. La diferencia estriba en que el registro y procesado del campo se realiza numéricamente en un ordenador. Esto permite una gran flexibilidad en la obtención de la imagen, a costa de requerir una potencia de cálculo importante. Piénsese que una simple lente convergente es un potente procesador paralelo, que realiza una transformada bidimensional de Fourier a la velocidad de la luz.

El problema que se plantea es la reconstrucción de las fuentes a partir del campo que generan, medido en una cierta región del espacio. Una forma de resolverlo sería procesar los campos de forma análoga a una lente, es decir cada punto de la fuente podría ser focalizado mediante la aplicación de un cierto operador matemático sobre el campo medido. Por ello estudiaremos en primer lugar la formación de imágenes mediante operadores de focalización y seguidamente la obtención de dichos operadores dada una geometría de medida.

4.5.1.1 Formación de imágenes con operadores de focalización

Nuestro objetivo es reconstruir las corrientes fuente o inducidas en un volumen v' a partir de la medida de los campos que producen sobre un volumen v (fig.4.4). Si aplicamos el teorema de Reciprocidad de Lorentz para medios lineales e isótropos a todo el espacio $v+v'$ obtenemos:

$$\int_{v'} \mathbf{J}(\vec{r}') \cdot \mathbf{E}_f(\vec{r}') \, d\vec{r}' = \int_v \mathbf{J}_f(\vec{r}) \cdot \mathbf{E}_s(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad (4.4)$$

\mathbf{J} son las corrientes a reconstruir y \mathbf{E}_s son los campos medidos que producen, \mathbf{J}_f es una corriente hipotética sobre la agrupación de medida que produciría un campo \mathbf{E}_f sobre el espacio de fuentes v' .

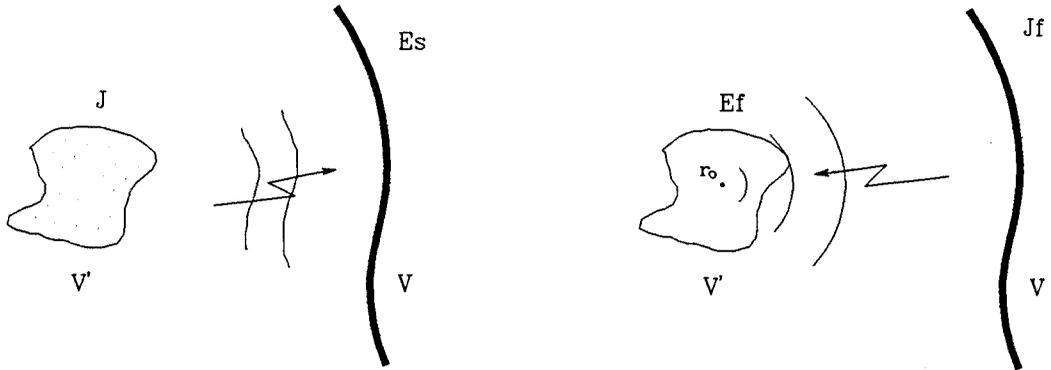


Fig.4.4 Reconstrucción de corrientes utilizando el Teorema de Reciprocidad y operadores de focalización.

Estamos interesados en encontrar un operador \mathfrak{F} sobre E_s que proporcione el valor de J en un punto determinado \vec{r}_o' :

$$J_r(\vec{r}_o') = \mathfrak{F} \{ E_s(r); \vec{r}_o' \} \cong J(\vec{r}_o') \quad (4.5)$$

J_r son las corrientes reconstruidas o imagen de las reales J . Para "aislar" el valor de J en un punto debemos utilizar un campo impulsivo E_f en (4.4), por ejemplo

$$E_f(\vec{r}') \approx \delta(\vec{r}' - \vec{r}_o') \quad (4.6)$$

lo que permite obtener el operador de focalización \mathfrak{F} sobre el campo medido E_s

$$J_r(\vec{r}_o') = \mathfrak{F} \{ E_s(\vec{r}); \vec{r}_o' \} = \int_V J_f(\vec{r}; \vec{r}_o') E_s(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{V'} J(\vec{r}') E_f(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.7)$$

donde J_r es la reconstrucción de las corrientes J , y $J_f(\vec{r}; \vec{r}_o')$ son las corrientes que sobre la agrupación de medida producirían un campo focalizado en \vec{r}_o' . De esta forma pueden obtenerse imágenes con una geometría de medida arbitraria, a condición de que ésta pueda focalizar el campo sobre la zona a reconstruir de forma aceptable. De (4.7) se desprende que la calidad de la imagen estará directamente relacionada con las características del foco. En el caso de que el campo E_f sea invariante en la zona focal la imagen puede

expresarse como convolución de las corrientes reales con E_f , que constituye la respuesta impulsional del sistema

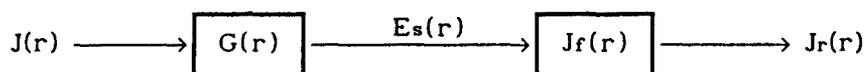
$$J_r(\vec{r}_o') = J(\vec{r}_o') * E_f(\vec{r}_o') \cong J(\vec{r}_o') \quad (4.8)$$

Como veremos $E_f(\vec{r}_o')$ tendrá una cierta extensión y relación de lóbulo principal a secundarios, lo que determinará la resolución y dinámica o contraste de la imagen.

La realización de un algoritmo de reconstrucción basado en focalización puede dar lugar a tiempos de cálculo muy elevados, pues cada pixel de la imagen requiere el cálculo de $J_f(r; r_o')$ y una integración sobre el campo medido. Sin embargo, para geometrías sencillas o con algún tipo de simetría, puede encontrarse una corriente de focalización que sea convolucional. Esto significa que para desplazar el foco en el espacio basta con desplazar las corrientes sin necesidad de ser reevaluadas. De este modo, la reconstrucción se obtendrá mediante convolución, o equivalentemente como producto en un dominio transformado, por ejemplo

$$\text{si } J_f(r; r') = J_f(r-r') \implies J_r(r') = \mathfrak{F} \{ E_s(r); r' \} = J_f(r') * E_s(r') \quad (4.9)$$

Un operador convolucional significa que es invariante en el espacio, de esta forma puede utilizarse una analogía con los circuitos lineales invariantes que quedan determinados por su respuesta impulsional, en este caso $J_f(r)$. Por tanto la imagen de las corrientes es la respuesta a un filtro excitado por los campos que producen en una región de medida. Como la función de Green de la ecuación de onda homogénea (3.29) también es invariante, el problema global puede modelarse como un circuito lineal invariante.



Como veremos en el apartado {4.5.2} $G(r)$ actúa como un filtro paso-banda, lo que limitará seriamente la reconstrucción.

4.5.1.2 Focalización de radiación electromagnética

El objetivo será encontrar una distribución de campos o corrientes que

produzcan una concentración de campo en un punto del espacio, para formar un operador de focalización. Idealmente desearíamos una distribución espacial de campo concentrada en un punto: delta de Dirac, aunque como veremos no será posible debido a las limitaciones impuestas por la difracción.

Una forma de abordar el problema consiste en utilizar el teorema de reciprocidad de Lorentz para un medio lineal e isotrópo:

$$\int_v J_a E_f dv = \int_{v'} J_f E_a dv' \quad (4.10)$$

v es la región del espacio en la que se desea crear el foco, v' es la región de las fuentes, en este caso la agrupación de medida. J_a es una corriente hipotética que colocamos en la zona focal y E_a es el campo que ésta produciría en la zona de fuentes. J_f son las corrientes fuente responsables de la focalización que queremos calcular, y E_f es el campo que queremos maximizar en un punto del espacio \vec{r}_0 .

Si tomamos $J_a(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ una fuente puntual en el foco, obtenemos

$$E_f(\vec{r}_0) = \int_{v'} J_f(\vec{r}') E_a(\vec{r}'; \vec{r}_0) dv' \quad (4.11)$$

E_a será el campo creado por la corriente puntual J_a en la región de fuentes v' , para medios homogéneos E_a no es más que la función de Green del problema, en cambio para medios inhomogéneos E_a debe calcularse resolviendo el problema directo. Suponiendo conocido E_a queremos maximizar E_f , esto puede hacerse utilizando la desigualdad de Schwarz, definiendo el producto escalar y la norma para funciones cuadrado integrables:

$$\langle A, B \rangle = \int A B^* dv \quad ; \quad \|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2} \quad (4.12)$$

la desigualdad de Schwarz establece un límite superior al producto escalar de dos funciones

$$\langle A, B \rangle \leq \|A\| \|B\| \quad (4.13)$$

la expresión llega a ser una igualdad en el caso en que las funciones A y B sean proporcionales $A = kB$ siendo k una constante arbitraria. En una situación electromagnética de energía finita, los campos y corrientes serán cuadrado integrables y podremos tomar $A = J_f$ y $B = E_a^*$, con lo que maximizaremos $E_f(\vec{r}_0)$

si

$$J_f(\vec{r}'; \vec{r}_0) = k E_a^*(\vec{r}'; \vec{r}_0) \quad ; \quad J_a(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \implies E_a(\vec{r}'; \vec{r}_0) \quad (4.14)$$

Por lo tanto para focalizar la radiación en un punto hemos de excitar nuestras fuentes con el conjugado del campo que se produciría sobre éstas al colocar una fuente puntual en el punto de focalización. El hecho de conjugar significa cambiar de signo la fase, de esta forma todos los elementos de la fuente contribuyen de forma constructiva al campo en \vec{r}_0 . La distribución de amplitud en cambio no es única para conseguir focalización. El criterio que hemos obtenido es óptimo en el sentido de maximizar el campo en \vec{r}_0 para una potencia de corrientes dada W_j , ya que $W_j \propto \|J_f\|^2$. Al utilizar J_f dada por (4.14) en (4.7) para construir un operador de focalización obtendríamos un filtro adaptado a una fuente puntual, de forma que ésta sería reconstruida con amplitud máxima. La constante k en (4.14) puede fijarse de forma que produzca un foco de amplitud constante en toda la región de interés, por ejemplo para producir un foco de amplitud unidad

$$1 = E_f(r_0) = k(r_0) \|E_a(\vec{r}_0)\|^2 \implies J_f(\vec{r}'; \vec{r}_0) = \frac{E_a^*(\vec{r}'; \vec{r}_0)}{\|E_a(\vec{r}_0)\|^2} \quad (4.15)$$

El concepto de filtro adaptado se utiliza frecuentemente en problemas de detección en radar, codificación, etc. en que se desea un máximo aprovechamiento energético de la señal a fin de maximizar la relación S/N [65]. Análogamente el operador adaptado producirá la imagen de máxima S/N en presencia de ruido en la medida. En este contexto (4.14) proporciona el filtro adaptado para ruido "blanco", es decir en presencia de errores de medida con densidad espectral de potencia uniforme sobre el dominio $\vec{\eta}$ transformado del dominio espacial \vec{r} .

Otra distribución de corriente de focalización puede ser el mantener una amplitud constante sobre la antena fuente con la fase dada por (4.14) para obtener coherencia. También puede utilizarse una iluminación del tipo [63]

$$J_f(\vec{r}'; \vec{r}_0) = \frac{1}{E_a(\vec{r}'; \vec{r}_0)} \quad (4.16)$$

la fase es la opuesta a E_a al igual que en (4.14), pero la amplitud responde al criterio de que cada parte de la antena contribuye energéticamente por igual a la formación del foco en \vec{r}_0 . Sustituyendo en (4.11) se comprueba que

proporciona una amplitud focal constante respecto a \vec{r}_0 . Comparando esta corriente (4.16) con el conjugado del campo (4.14) vemos que las zonas de menor influencia sobre el foco recibirán mayor ponderación lo que dará lugar a iluminaciones de menor rendimiento energético y en consecuencia un operador de focalización menos robusto en presencia de errores. En cambio producirá un lóbulo principal más estrecho aunque lóbulos secundarios más elevados.

Así, la fase será normalmente la indicada por (4.14), y la amplitud producirá diferentes características de lóbulo principal y secundarios. La elección se plantea también en el diseño de antenas en que se emplean diferentes criterios de amplitud en una apertura, según el compromiso ganancia-lóbulos secundarios deseado. De hecho una antena diseñada para radiar en campo lejano, no es más que un caso particular de focalización en que $r_0 \rightarrow \infty$. Las corrientes de focalización obtenidas a partir de E_a en general no contendrán frecuencias espaciales evanescentes o invisibles $\{Ap.A\}$ a no ser que el foco esté muy próximo a la agrupación. En cualquier caso el espectro invisible estará atenuado respecto al margen visible y las corrientes serán realizables.

En medios homogéneos el campo producido por una fuente puntual sobre una geometría de medida es simplemente la función de Green

$$E_a(\vec{r}'; \vec{r}_0) = -j\omega\mu_0 G(\vec{r}' - \vec{r}_0) \quad (4.17)$$

de forma que pueden calcularse las corrientes de la forma descrita en el apartado anterior. Una alternativa cuando la geometría de medida es canónica respecto a un sistema de coordenadas, consiste en resolver las corrientes fuente que sobre la antena reproducirían el campo deseado, en particular un foco.

4.5.1.3 Corriente de focalización sobre una línea recta

En un medio homogéneo podemos hallar las corrientes de focalización sobre una línea recta utilizando el espectro angular de ondas planas descrito en el $\{Ap.A\}$. Supongamos que deseamos una distribución determinada de campo en la línea $z = z_0$ y nuestra fuente es una distribución de corriente sobre una línea paralela $z = z_m$, como muestra la fig.4.5

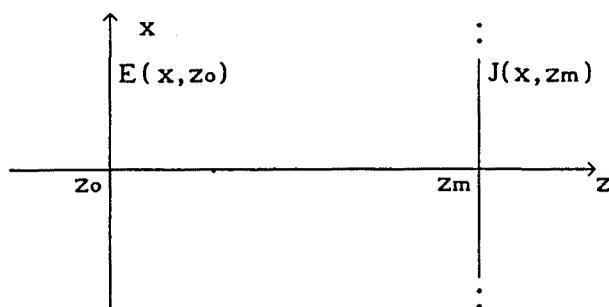


Fig.4.5 Campo creado por una línea de corriente

La transformada de Fourier según x de $E(x, z_0)$, es precisamente el espectro angular del campo en la región $z < z_m$. Retropropagando el campo hasta las fuentes {Ap.A} encontramos el espectro angular sobre z_m que deberemos producir

$$\tilde{E}^-(k_x; z_m) = \tilde{E}^-(k_x; z_0) e^{jk_z(z_m - z_0)} \quad (4.18)$$

el superíndice de E^- significa que el campo se propaga según $-\hat{z}$. Si nuestra antena es una apertura, la transformada inversa según k_x de (4.18) nos da la distribución de campo buscada. Si la fuente es una distribución de corriente, ésta puede obtenerse utilizando el espectro angular de la función de Green, llevando el origen a z_m por comodidad obtenemos

$$E(x) = -j\omega\mu_0 \int J(x') G(x-x') dx' \xrightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{E}(k_x) = -j\omega\mu_0 \tilde{J}(k_x) \tilde{G}(k_x) \quad (4.19)$$

donde $\tilde{J}(k_x)$ y $\tilde{G}(k_x)$ son el espectro angular según \hat{x} de la corriente y de la función de Green respectivamente, ésta puede obtenerse comparando la expresión integral de la función de Green [37] con la transformada inversa del espectro angular {Ap.A}

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_x x} e^{-jk_z |z|}}{k_z} dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x \quad (4.20)$$

siendo $k_z = +\sqrt{k_0^2 - k_x^2}$

$$\tilde{G}(k_x, z) = \frac{1}{2j} \frac{e^{-jk_z |z|}}{k_z} ; \quad k_z = +\sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (4.21)$$

la forma integral de la función de Green no es más que la expresión de una onda cilíndrica como combinación de ondas planas dirigidas hacia el exterior de la fuente en el origen, con una distribución de campo simétrica respecto a z , por este motivo aparece el módulo $|z|$ en el integrando. La coordenada z representa la distancia que separa los planos de corriente y de campo, en este caso al estar sobre la misma línea

$$\tilde{J}(k_x) = \frac{-2 k_z}{\omega \mu_0} \tilde{E}(k_x) \quad (4.22)$$

de donde la distribución de corriente que creará el campo deseado en $z = z_0$ queda

$$J(x, z_m) = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ \frac{-2 k_z}{\omega \mu_0} e^{jk_z(z_m - z_0)} \tilde{E}(k_x; z_0) \right\} = J_f(x; z_m - z_0) * E(x; z_0) \quad (4.23)$$

el producto del espectro angular del campo con una expresión que definimos como $\tilde{J}_f(k_x)$, puede escribirse como convolución en el dominio espacial (segundo término de (4.23)). $J_f(x; z_m - z_0)$ no es más que la distribución de corriente de focalización que produciría un campo delta de Dirac según x en la línea z_0 : $\delta(x; z_0)$ y será

$$J_f(x; z_m - z_0) = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ \frac{-2 k_z}{\omega \mu_0} e^{jk_z(z_m - z_0)} \right\} \implies E_f(x; z_0) = \delta(x; z_0) \quad (4.24)$$

para focalizar en otro punto x' bastará con desplazar las corrientes

$$J_f(x - x'; z_m - z_0) \implies E_f(x; z_0) = \delta(x - x'; z_0) \quad (4.25)$$

en cambio para focalizar en un plano distinto z_0' debe recalcularse la corriente J_f pues el término exponencial habrá variado. Por lo tanto el operador de focalización sobre los campos dispersados será convolucional en x pero no en z . Utilizando J_f podremos reconstruir las corrientes con un operador de focalización consistente en una convolución plano a plano.

$$J_r(x'; z_0) = \int_{\mathcal{V}} J_f(r; r') E_s(r) dr = J_r(x'; z_0) = E_s(x'; z_m) * J_f(x'; z_m - z_0) \quad (4.26)$$

o en el dominio transformado

$$\tilde{J}_r(k_x; z_0) = \tilde{E}_s(k_x; z_m) \frac{-2 k_z}{\omega \mu_0} e^{jk_z(z_m - z_0)} \quad (4.27)$$

Al trabajar con espectros debe identificarse la parte visible e invisible {Ap.A}, ya que éste último está asociado con superresolución dando lugar a corrientes reactivas muy grandes no deseables y en muchas ocasiones irrealizables. En el dominio invisible k_z es imaginario

dominio invisible

$$|k_x| > k_0 \Rightarrow k_z = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \quad (4.28)$$

así, el término exponencial de (4.27) provocará la aparición de corrientes de superresolución, por ello es conveniente truncar el espectro angular del campo deseado $E(k_x)$ al margen visible $|k_x| \leq k_0$. La consecuencia de renunciar al margen invisible es que ya no obtenemos exactamente el campo deseado sino la mejor aproximación posible en el sentido de mínimo error cuadrático medio. Recordemos que un espectro de Fourier no es más que el conjunto de autofunciones base del espacio de Hilbert, derivado del producto escalar definido en (4.12). La norma asociada es la raíz cuadrada de la potencia cuadrática media. Al expresar una función con una base truncada se obtiene un error de norma mínima [66], en este caso un error cuadrático medio mínimo.

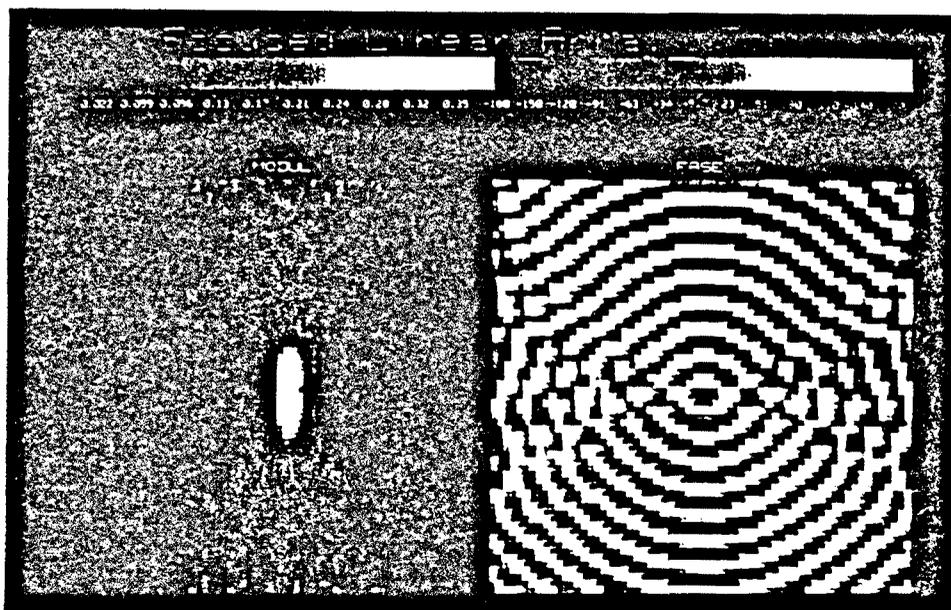


Fig.4.6 Campos producidos en un medio sin pérdidas por una agrupación lineal (parte superior de la imagen) focalizada a una distancia 8λ .

Puede comprobarse que esta distribución de corriente produce sobre la antena un campo conjugado al que se mediría al colocar una fuente dipolar en el foco [67]. La fig.4.6 muestra el campo de focalización producido en un medio sin pérdidas por una agrupación lineal, la distribución de corriente se ha calculado mediante (4.24) para una distancia focal de 8λ .

4.5.1.4 Corriente de focalización sobre una línea circular

Las corrientes que sobre una línea circular producen focalización de energía, pueden calcularse utilizando el espectro de modos cilíndricos (Ap.A). Expresando el campo en función de las corrientes mediante la función de Green

$$E_f(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 G(\vec{r}) * J_f(\vec{r}) = -\omega\mu_0/4 \int J_f(\vec{r}') H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) dr' \quad (4.29)$$

utilizando el teorema de adición de la función de Hankel cuando la línea fuente es exterior a la región de campos

$$H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho') J_n(k_0\rho) e^{jn(\varphi-\varphi')} \quad \rho' > \rho \quad (4.30)$$

sustituyendo e intercambiando integral y sumatorio, para una línea de radio R

$$E_f(\rho, \varphi) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0\rho) H_n^{(2)}(k_0R) e^{jn\varphi} \int_0^{2\pi} J_f(\varphi') e^{-jn\varphi'} d\varphi' \quad (4.31)$$

donde reconocemos en la última integral la transformada angular de $J_f \cdot 2\pi$, luego

$$E_f(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k_0\rho) e^{jn\varphi} ; A_n = \frac{-\omega\mu_0\pi}{2} H_n^{(2)}(k_0R) \tilde{J}_f(n) \quad (4.32)$$

Para obtener focalización, deberemos producir un campo E_f similar a una delta, por ejemplo $E_f(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$, como estamos en una zona sin fuentes, sólo podemos forzar el campo en una dimensión, así calcularemos las corrientes para tener un campo impulsivo en φ cuando $\rho = \rho_0$

$$E_f(\rho_0, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi_0) = 1/2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn(\varphi - \varphi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k_0 \rho_0) e^{jn\varphi} \quad (4.33)$$

de donde

$$A_n = \frac{e^{-jn\varphi_0}}{2\pi J_n(k_0 \rho_0)} \implies \tilde{J}_f(n; \vec{r}_0) = \frac{-1}{\omega \mu_0 \pi^2} \frac{e^{-jn\varphi_0}}{H_n^{(2)}(k_0 R) J_n(k_0 \rho_0)} \quad (4.34)$$

La dependencia de $\tilde{J}_f(n)$ con φ_0 es una fase lineal, por tanto las corrientes de focalización son invariantes en φ_0 , pero no en profundidad ρ_0 como ocurría en una geometría plana. En la práctica deberemos prescindir del dominio invisible de las corrientes para obtener una alimentación realizable, lo que significa truncar el espectro a $n_{\max} = \rho_0/2k_0$. Por ello el campo ya no será una delta, por ejemplo para el caso en que \vec{r}_0 es el Origen, A_n y $\tilde{J}_f(n)$ son singulares para todo n excepto $n = 0$. Por lo tanto, el campo será la función J_0 (fig.4.7)

$$\vec{r}_0 = 0 \implies E_f(\rho, \varphi) = 1/2\pi J_0(k_0 \rho) \quad (4.35)$$

la distribución de corrientes es constante en la línea, y coincide con los criterios de conjugación del campo producido por una fuente en el foco.

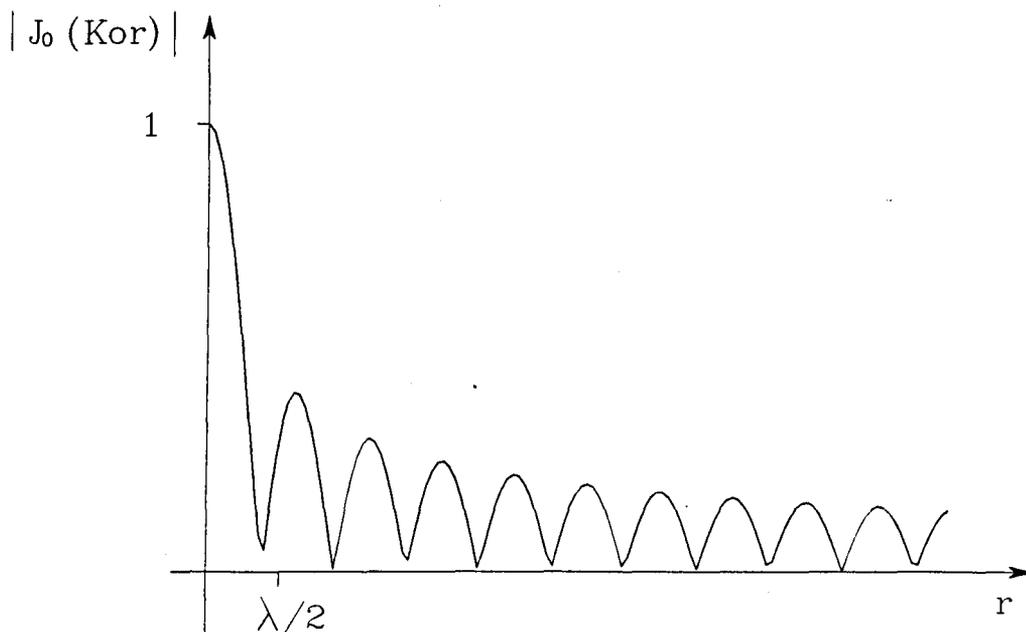


Fig.4.7 Corte del campo de focalización producido por una línea circular.

Una corriente de focalización alternativa será aquella que produce una distribución de campo invariante con la posición del foco, es decir la función J_0 desplazada. Utilizando el T. de Adición de la función J_0

$$E_f(\rho, \varphi) = J_0(k_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 \rho_0) J_n(k_0 \rho) e^{jn(\varphi - \varphi_0)} \quad (4.36)$$

utilizando (4.32) e identificando los coeficientes A_n

$$\tilde{J}_f(n; \vec{r}_0) = \frac{-2}{\omega \mu_0 \pi} \frac{J_n(k_0 \rho_0) e^{-jn\varphi_0}}{H_n^2(k_0 R)} \quad (4.37)$$

en este caso $\tilde{J}_f(n)$ tenderá a cero al entrar en el dominio invisible, y al ser el campo invariante, la reconstrucción puede expresarse como convolución de corrientes reales con la función J_0 .

4.5.2 Inversión de la ecuación integral

Un procedimiento de reconstrucción alternativo a los operadores de focalización, es la inversión de la ecuación integral, que como veremos dará lugar a algoritmos de recubrimiento espectral.

Utilizando la definición de corriente inducida (3.22) podemos expresar el campo dispersado como la convolución de ésta con la función de Green

$$E_s(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \int J(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.38)$$

Una forma de deconvolucionar las corrientes sería utilizar la transformada de Fourier entre el dominio espacial de campos y corrientes y un dominio espectral $\vec{\eta}$ (Ap.A), en el dominio transformado la convolución queda como producto, obteniendo

$$E_s(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 G(\vec{r}) * J(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{E}_s(\vec{\eta}) = -j\omega\mu_0 \tilde{G}(\vec{\eta}) \cdot \tilde{J}(\vec{\eta}) \quad (4.39)$$

así el espectro del campo dispersado puede expresarse como

$$\tilde{E}_s(\vec{\eta}) = -j\omega\mu_0 \tilde{J}(\vec{\eta}) \frac{1}{|\eta|^2 - k_0^2} \quad (4.40)$$

el último término es el espectro de la función de Green. Aunque esta expresión relaciona los campos y corrientes en todo el espacio, observamos que $\tilde{G}(\vec{\eta})$ es singular en el círculo $|\eta| = k_0$ como muestra la fig.4.8. Por esta razón, el espectro de campos dispersados contendrá básicamente la información del espectro de corrientes sobre el círculo en que la función de Green es singular. En tres dimensiones la región singular sería una superficie esférica de radio k_0 .

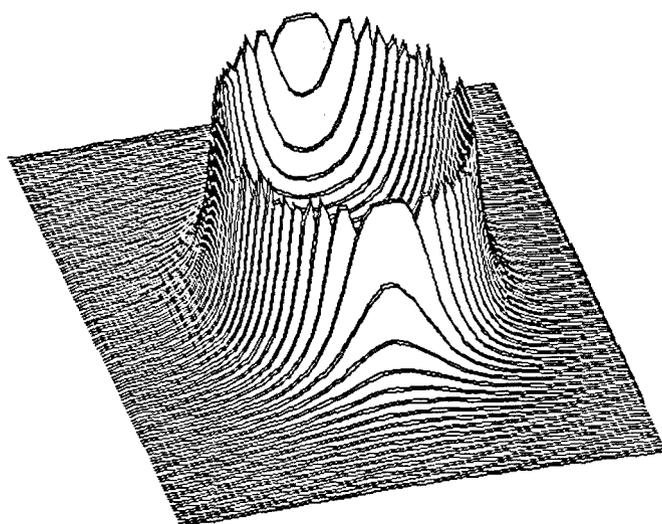


Fig.4.8 Dominio espectral de la función de Green en dos dimensiones.

La inversión directa de la ecuación (4.40) requeriría el conocimiento de los campos en todo el espacio incluido el interior del cuerpo, como éste no es accesible, deberemos obtener las corrientes a partir de la medida de los campos en una zona exterior. La inversión de las corrientes conocidos los campos fuera del objeto, se realiza mediante transformada inversa de Fourier de (4.40) que al contener singularidades obliga a integrar en el plano complejo utilizando el teorema de los residuos [31].

Una forma más compacta de obtener las corrientes, se deriva del hecho de que en una región sin fuentes, los campos quedan determinados conociendo las componentes tangenciales en un contorno cerrado según el Teorema de Unicidad [32], en dos dimensiones será suficiente conocer los campos en una línea cerrada. La inversión puede hacerse de varias maneras dependiendo del sistema de coordenadas elegido, aunque como veremos puede generalizarse para geometrías arbitrarias, utilizando el teorema de reciprocidad de Lorentz.

4.5.2.1 Obtención de corrientes en coordenadas rectangulares

Partiendo de la ecuación integral del campo dispersado, si transformamos respecto a un eje cualquiera del espacio (utilizaremos el eje x sin pérdida de generalidad) obtenemos:

$$E_s(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 G(\vec{r})_{(xz)} *_{(xz)} J(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{E}_s(\eta_x, z) = -j\omega\mu_0 \tilde{G}(\eta_x, z) *_{(z)} \tilde{J}(\eta_x, z) \quad (4.41)$$

la convolución según x desaparece al transformar respecto a este eje, resultando una expresión que relaciona el espectro angular del campo dispersado con la convolución según el eje ortogonal (z en este caso) de los espectros angulares de la función de Green y corriente {Ap.A}.

utilizando el espectro angular de la función de Green (4.21)

$$\tilde{G}(\eta_x, z) = \frac{1}{2j} \frac{e^{-j\eta_z |z|}}{\eta_z} \quad (4.21)$$

sustituyendo en el dominio espectral de (4.41)

$$\tilde{E}_s(\eta_x, z) = \frac{-\omega\mu_0}{2} \int \tilde{J}(\eta_x, z') \frac{e^{-j\eta_z |z-z'|}}{\eta_z} dz' \quad (4.43)$$

el término $|z-z'|$ obliga distinguir entre el campo E_s medido en una zona $z > z'$ o en una zona $z < z'$ como se indica en la fig.4.9, así para el caso $z > z'$ podemos escribir

$$\tilde{E}_s(\eta_x, z) = \frac{-\omega\mu_0}{2} \frac{e^{-j\eta_z z}}{\eta_z} \int \tilde{J}(\eta_x, z') e^{j\eta_z z'} dz' \quad (4.44)$$

donde reconocemos la transformada de Fourier según z' de las corrientes

evaluada en $\eta_z = +\sqrt{k_0^2 - \eta_x^2}$

despejando el espectro de corrientes y analizando del mismo modo el caso $z < z'$ resulta

$$z > z'$$

$$\tilde{J}(\eta_x, \eta_z) = \frac{-2\eta_z}{\omega \mu_0} e^{j\eta_z z_m} \tilde{E}_s^+(\eta_x, z_m) ; \eta_x \in (-k_0, k_0) \quad (4.45)$$

$$z < z'$$

$$\tilde{J}(\eta_x, -\eta_z) = \frac{-2\eta_z}{\omega \mu_0} e^{-j\eta_z z_m} \tilde{E}_s^-(\eta_x, z_m) ; \eta_x \in (-k_0, k_0), \quad (4.46)$$

$$\text{siendo } \eta_z = +\sqrt{k_0^2 - \eta_x^2}$$

estas expresiones relacionan la transformada de Fourier según x de los campos dispersados medidos sobre una línea (x, z_m) , con el espectro bidimensional de las corrientes J sobre un círculo centrado en el origen y de radio k_0 . Esta formulación fue derivada por Mueller en 1979 [4] para tomografía acústica, en este campo la ecuación de onda es similar y por tanto la reconstrucción escalar electromagnética y acústica son esencialmente el mismo problema.

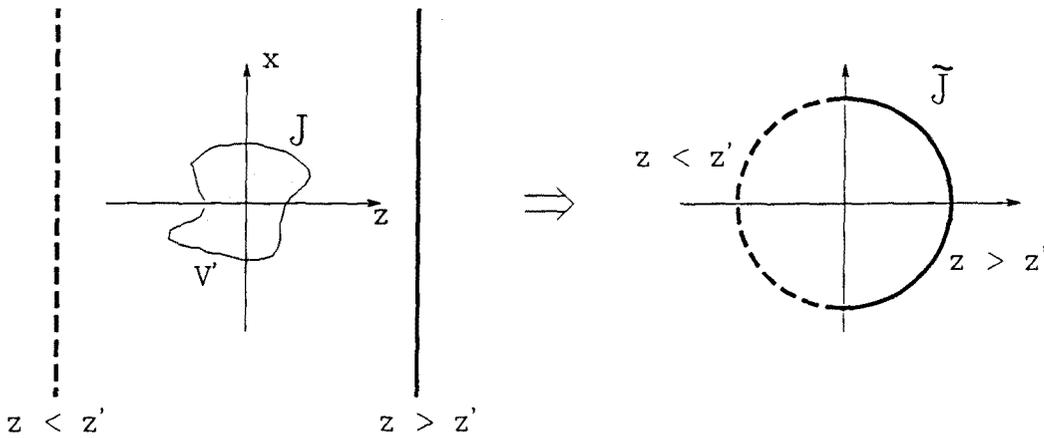


Fig.4.9 Obtención del espectro de corrientes a partir de la medida rectilínea del campo dispersado.

El espectro de corrientes puede expresarse también en función del ángulo

θ que forma el vector $\vec{\eta}$ respecto al eje z, utilizando el vector unitario $\hat{\theta}$ en la dirección θ

$$\eta_x = k_0 \sin\theta \quad ; \quad \eta_z = k_0 \cos\theta \quad ; \quad \hat{\theta} = \frac{\vec{\eta}}{k_0} \quad (4.47)$$

así

$$\tilde{J}(k_0\hat{\theta}) = \frac{-2}{\omega \mu_0} \tilde{\xi}_s(\theta) \quad ; \quad \theta \in (-\pi, \pi) \quad (4.48)$$

donde $\tilde{\xi}_s(\theta)$ es el espectro angular de ondas planas dirigidas según θ definido en el (Ap.A)

$$\tilde{\xi}(\theta) = \tilde{E}(k_0\sin\theta) |k_0\cos\theta| = \begin{cases} \tilde{E}^+(k_x) |k_z| \quad ; \quad |\theta| \leq \pi/2 \\ \tilde{E}^-(k_x) |k_z| \quad ; \quad |\theta| > \pi/2 \end{cases} \quad (4.49)$$

Como sólo tenemos acceso a un círculo del espectro bidimensional de corrientes, no podemos realizar la transformada inversa, una forma de obtener de forma aproximada la distribución espacial de corrientes sería suponer que el campo ha sido generado por una línea de corriente en un plano z_0 [6] de forma

$$J(x,z) = J(x) \delta(z-z_0) \quad (4.50)$$

bajo esta hipótesis obtenemos

$$\tilde{J}_r(\eta_x; z_0) = \tilde{E}_s(\eta_x; z_m) \frac{-2 \eta_z}{\omega \mu_0} e^{j\eta_z(z_m - z_0)} \quad (4.51)$$

análoga a (4.27) obtenida como operador de focalización sobre el plano z_0 , por lo que ambas formulaciones dan lugar a los mismos resultados bajo ciertas condiciones.

Si la geometría de medida es una línea recta, el espectro angular $\tilde{E}_s(\eta_x, z)$ es simplemente una transformada de Fourier del campo. Por ello (4.45, 4.46, 4.48) son la base de los algoritmos de reconstrucción para geometrías planas de implementación eficiente al utilizar técnicas de FFT en el tratamiento de las corrientes y los campos.

4.5.2.2 Reconstrucción de corrientes en coordenadas cilíndricas

A partir del campo expresado en modos cilíndricos, puede obtenerse el espectro de corrientes según la familia de autofunciones cilíndricas, de forma análoga a la formulación en rectangulares. Expresando la ecuación integral del campo en cilíndricas

$$E_s(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 G(\vec{r}) * J(\vec{r}) = -\omega\mu_0/4 \int J(\vec{r}') H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) dr' \quad (4.52)$$

utilizando el teorema de adición de la función de Hankel cuando la línea de medida envuelve las fuentes

$$H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho) J_n(k_0\rho') e^{jn(\varphi-\varphi')} \quad \rho > \rho' \quad (4.53)$$

e intercambiando integral y sumatorio

$$E_s(\rho, \varphi) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho) \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} J(\rho', \varphi') J_n(k_0\rho') e^{-jn\varphi'} \rho' d\rho' d\varphi' e^{jn\varphi} \quad (4.54)$$

observamos que la integral sobre las fuentes es una transformada de Hankel definida en {Ap.A} como

$$\mathcal{H}\{f(\rho', \varphi')\} = \tilde{f}(\gamma, n) = 1/2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho', \varphi') e^{-jn\varphi'} J_n(\gamma\rho') d\varphi' \rho' d\rho' \quad (4.55)$$

particularizada para $\gamma = k_0$, por lo que podemos escribir

$$\tilde{J}(\gamma, n) \Big|_{\gamma=k_0} = \frac{-2}{\omega\mu_0\pi} \frac{\tilde{E}_s(\rho, n)}{H_n^{(2)}(k_0\rho)} \quad (4.56)$$

siendo $\tilde{E}_s(\rho, n)$ la expresión espectral en modos cilíndricos de E_s {Ap.A}

$$\tilde{E}(\rho, n) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} E(\rho, \varphi) e^{-jn\varphi} d\varphi \quad (4.57)$$

Nótese que (4.56) es el equivalente a (4.48) para coordenadas rectangulares,

en este caso la región accesible del espectro de corrientes se representa en la fig.4.10.

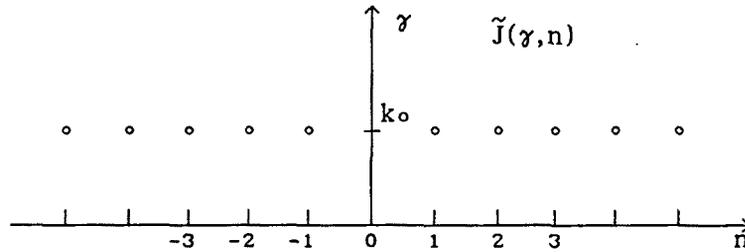


Fig.4.10 Espectro modal de corrientes accesible desde el exterior.

Aunque el espectro de modos es infinito sólo se propagarán aquellos que no estén en corte según la extensión de las fuentes (Ap.A). Así pues con independencia de la representación espectral empleada, vemos que el espacio actúa como un filtro paso banda sobre el espectro de campos. Como consecuencia sólo tenemos acceso al espectro de corrientes en aquellos puntos que son solución de la ecuación de onda homogénea.

4.5.2.3 Generalización a geometrías arbitrarias mediante el teorema de reciprocidad

Como hemos visto para coordenadas rectangulares y cilíndricas, a partir de la representación espectral de los campos es posible determinar una región del espectro de corrientes. La evaluación del espectro de campos en principio requiere su conocimiento sobre una geometría canónica, según el sistema de coordenadas adoptado. Por ejemplo el espectro angular de ondas planas se obtiene mediante una transformada unidimensional de Fourier del campo sobre una recta, y el espectro de modos cilíndricos requiere la evaluación de los coeficientes de Fourier del campo sobre una línea circular. En este apartado calcularemos el espectro de corrientes directamente de la medida del campo sobre una geometría arbitraria, y de un modo similar obtendremos el espectro de campos. El espectro será también arbitrario condicionado a los requisitos usuales de completitud, ortogonalidad y cumplir la ecuación de onda.

Este apartado tiene una importante trascendencia desde el punto de vista de la implementación de algoritmos en ordenadores, puesto que aunque matemáticamente equivalentes, las formulaciones espectrales requieren una

complejidad computacional importante con la excepción del espectro de Fourier con funciones base exponenciales, cuyas características de periodicidad permiten la utilización de algoritmos muy eficientes como la FFT. Por ello en general será interesante utilizar el espectro de Fourier aún con geometrías de medida canónicas según otros sistemas de coordenadas.

A) Geometrías canónicas

Consideremos una situación general de medida representada en la fig.4.11 a) donde las corrientes fuente J producen unos campos E_s que mediremos sobre la línea a . Si intercambiamos los papeles de fuente y campo obtenemos la situación b) en que la línea de medida actúa como fuente al ser excitada por las corrientes J_a produciendo sobre la región ocupada anteriormente por las fuentes un campo E_a . Si aplicamos el teorema de reciprocidad de Lorentz a ambas situaciones obtenemos

$$\int_{V'} J E_a dr' = \int_a J_a E_s dr \quad (4.58)$$

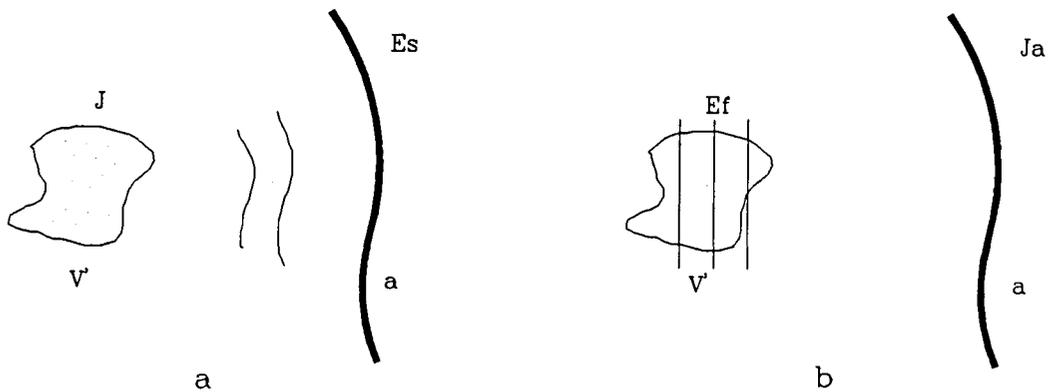


Fig.4.11 a) Fuente y geometría de medida arbitraria b) situación recíproca

En un espacio de Hilbert, el espectro de una función no es más que su proyección sobre cada una de las autofunciones ortogonales base Ψ_n del

espectro, que se calcula mediante la utilización del producto escalar asociado. Si la base está normalizada $\|\Psi_n\| = 1 \quad \forall n$, tendremos

$$\tilde{J}(n) = \langle J, \Psi_n \rangle = \int_{v'} J \Psi_n^* dr' \quad (4.59)$$

esto es válido para bases discretas (modos) o continuas (espectro de ondas planas). Podemos observar que (4.59) y el primer término de (4.58), son formalmente iguales sin más que hacer

$$E_a(r') = \Psi_n^*(r') \quad \text{en todo el espacio de fuentes } v' \quad (4.60)$$

lo que significa que podemos obtener el espectro de corrientes integrando sobre la línea a , el campo medido multiplicado por una corriente ficticia J_a , que sobre la región de fuentes produciría la iluminación conjugada de cada una de las autofunciones del espectro. Por supuesto del espectro completo de J sólo obtendremos aquella región cuyas autofunciones (autovalores) cumplen la ecuación de onda homogénea, puesto que deben poder existir en una zona sin fuentes (Fig.4.11b). Lo que explica la restricción en el acceso al espectro de corrientes encontrada en la formulación rectangular y cilíndrica de apartados anteriores. Debe considerarse también que no cualquier geometría es capaz de producir un espectro de autofunciones, por lo que ésta será "arbitraria" condicionada a su capacidad de producir campos Ψ_n^* sobre la región de fuentes con corrientes J_a adecuadas. En ocasiones una geometría solo podrá generar un subconjunto de todas las autofunciones posibles, como ocurre con una línea recta capaz de iluminar una región únicamente con ondas planas que tengan una componente en la dirección hacia dicha región.

Del espectro bidimensional de Fourier de las corrientes J , sólo tendremos acceso a un círculo correspondiente a ondas planas con número de onda k_0 orientadas según un vector unitario $\hat{\theta}$

$$\tilde{J}(\eta = k_0 \hat{\theta}) = \int_{v'} J(\vec{r}) e^{jk_0 \hat{\theta} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \int_a J_a(\vec{r}; \theta) E_s(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.61)$$

donde $J_a(\vec{r}; \theta)$ son las corrientes que sobre la línea de medida producirían una onda plana en la dirección $-\hat{\theta}$

$$E_a(r) = e^{jk_0 \hat{\theta} \cdot \vec{r}} = \left(e^{-jk_0 \hat{\theta} \cdot \vec{r}} \right)^* \quad (4.62)$$

En cilíndricas de forma análoga

$$\tilde{J}(n, \gamma=k_0) = \int_V J(\vec{r}) J_n(\rho k_0) e^{-jn\varphi} d\vec{r} = \int_a J_a(\vec{r}; n) E_s(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.63)$$

donde $J_a(r; n)$ sería las corrientes sobre a que generarían el modo n^*

$$E_a(r; n^*) = J_n(\rho k_0) e^{-jn\varphi} \quad (4.64)$$

Como ejemplo obtendremos el espectro de Fourier de corrientes a partir de los campos medidos en una recta, comprobando que se llega al mismo resultado que invirtiendo la ecuación integral. Situando el eje x sobre la línea de medida, el problema consiste en calcular la corriente $J_a(x; \hat{\theta})$, produciendo un campo E_a sobre la región de fuentes situada en el semiplano izquierdo $z' < 0$, de forma que obtengamos las autofunciones (ondas planas) conjugadas (direcciones opuestas) del espectro

$$J_a(x; \hat{\theta}) \implies E_a(\vec{r}) = e^{jk_0 \hat{\theta} \cdot \vec{r}} = e^{-jk_0(-\hat{\theta}) \cdot \vec{r}} \quad (4.65)$$

del espectro completo de direcciones sólo llegarán a la región de fuentes aquellas que se propagan hacia $-\hat{z}$, es decir con

$$k_z = -k_0 \sin\theta < 0 \implies |\theta| \leq \pi/2 \quad (4.66)$$

Para obtener las corrientes J_a que sobre la recta $z=0$ producen un campo E_a , calculamos el espectro angular de E_a en $z=0$, resultando una delta correspondiente a una onda plana con $k_x = -k_0 \cdot \cos\theta$

$$E_a(\eta_x; 0) = \int_a E_a(x; 0) e^{j\eta_x x} dx = \int_a e^{jk_0 \cos\theta \cdot x} e^{j\eta_x x} dx \quad (4.67)$$

$$E_a(\eta_x; 0) = 2\pi \delta(\eta_x + k_0 \cos\theta) \quad (4.68)$$

calcularemos ahora las corrientes que generan E_a utilizando el espectro de la función de Green (4.21)

$$J(x, 0) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2 \eta_z}{\omega \mu_0} \tilde{E}(\eta_x; 0) \right\} = \frac{-2 k_0 \sin\theta}{\omega \mu_0} e^{jk_0 x \cos\theta} \quad (4.69)$$

de esta forma el espectro de las corrientes fuente obtenido como la integral sobre el campo medido (4.63) queda

$$\tilde{J}(\eta=k_0\hat{\theta}) = \int_{V'} J(\vec{r}) e^{jk_0\hat{\theta}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \frac{-2k_0\sin\theta}{\omega\mu_0} \int_a E_s(x;0) e^{jk_0x\cos\theta} dx \quad (4.70)$$

$$\tilde{J}(\eta=k_0\hat{\theta}) = \frac{-2k_0\sin\theta}{\omega\mu_0} \tilde{E}_s(k_0x\cos\theta;0) \quad |\theta| \leq \pi/2 \quad (4.71)$$

que es el mismo resultado obtenido invirtiendo la ecuación integral (4.45) para una línea de medida en $z=0$ y fuentes en $z'<0$. Para acceder al espectro $\tilde{J}(\eta=k_0\hat{\theta})$ cuando $|\theta| > \pi/2$ debe utilizarse una línea de medida adicional sobre un plano al otro lado de las fuentes.

Si se requiere el espectro de corrientes a partir de medidas con una geometría canónica de un sistema de coordenadas diferente, el problema consiste una vez más en la síntesis de autofunciones base del espectro deseado. Para ello en primer lugar se calcula el espectro de cada autofunción a generar, según la base propia de la geometría; de aquí se obtendría el espectro de corrientes utilizando la función de Green y con una transformada inversa la corriente $J_a(r)$ al igual que en el ejemplo anterior. Calcularemos el espectro de Fourier a partir de medidas en un contorno circular.

Espectro de Fourier de corrientes con geometría cilíndrica

Si medimos los campos producidos por una fuente con una línea de medida circular envolvente como muestra la Fig.4.12, la opción más directa sería obtener el espectro de corrientes según las autofunciones cilíndricas, es decir con una transformada de Hankel. Sin embargo desde el punto de vista de la implementación de los algoritmos puede ser más eficiente trabajar con el espectro de Fourier. En este caso debemos calcular una corriente sobre el círculo de radio R que produzca el conjugado de las autofunciones correspondientes al espectro deseado, en este caso ondas planas según $-\hat{\theta}$.

$$\tilde{J}(\eta=k_0\hat{\theta}) = \int_{V'} J(\vec{r}) e^{jk_0\hat{\theta}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \int_a J_a(\varphi;-\hat{\theta}) E_s(\varphi) R d\varphi \quad (4.72)$$

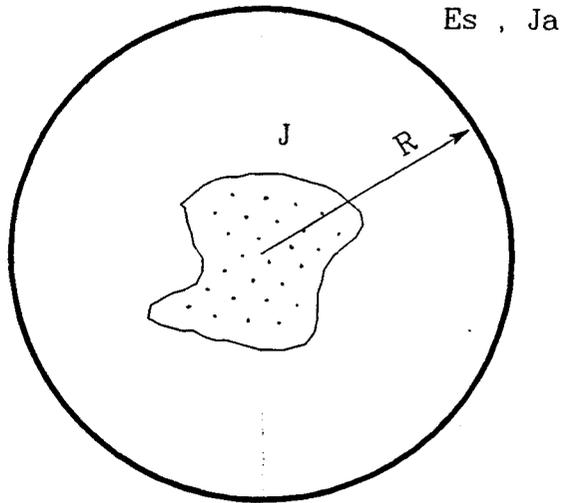


Fig.4.12. Fuentes y línea de medida circular de radio R

Expresando la onda plana según la familia de modos cilíndricos obtenemos

$$E_a(\vec{r}) = e^{jk_0\hat{\theta}\cdot\vec{r}} = e^{jk_0\rho\cos(\varphi-\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(k_0\rho) e^{jn(\varphi-\theta)} \quad (4.73)$$

calcularemos ahora las corrientes J_a sobre la línea de medida circular que producen E_a , expresando éste mediante la función de Green

$$E_a(\vec{r}) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \int J_a(\vec{r}') H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.74)$$

utilizando el teorema de adición de la función de Hankel [32]

$$H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho') J_n(k_0\rho) e^{jn(\varphi-\varphi')} \quad \rho' > \rho \quad (4.75)$$

sustituyendo e intercambiando integral y sumatorio

$$E_a(\rho, \varphi) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0\rho) H_n^{(2)}(k_0R) e^{jn\varphi} R \int_0^{2\pi} J_a(\varphi') e^{-jn\varphi'} d\varphi' \quad (4.76)$$

la última integral es la transformada angular de $J_a \cdot 2\pi$, igualando a la expresión de la onda plana buscada (4.73), y despejando el espectro de

corrientes $\tilde{J}_a(n)$, resulta

$$\tilde{J}_a(n) = \frac{-2j^n}{\omega\mu_0 R \pi} \cdot \frac{e^{-jn\theta}}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \quad (4.77)$$

e invirtiendo al dominio espacial

$$J_a(\varphi; -\hat{\theta}) = \frac{-2}{\omega\mu_0 R \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^n}{H_n^{(2)}(k_0 R)} e^{jn(\varphi-\theta)} \quad (4.78)$$

$J_a(\varphi; -\hat{\theta})$ son las corrientes sobre una línea circular de radio R que producen en la región interior una onda plana dirigida según $-\hat{\theta}$. El espectro de Fourier de las fuentes J según la dirección θ , puede calcularse sustituyendo en (4.72) y cambiando el signo de n , de esta forma la integral según φ puede expresarse como el espectro de modos de E_s :

$$\tilde{J}(\eta=k_0\hat{\theta}) = \int_a J_a(\varphi; \theta) E_s(\varphi) R \, d\varphi = \frac{-4}{\omega\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^n e^{jn\theta}}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \tilde{E}_s(n) \quad (4.79)$$

donde $\tilde{E}_s(n)$ es el espectro modal del campo medido:

$$\tilde{E}_s(n) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} E_s(\varphi) e^{-jn\varphi} \, d\varphi \quad (4.80)$$

Como una línea circular puede generar ondas planas en todas direcciones no hay restricción sobre θ , salvo que sea real para estar en el margen visible de corrientes y campos.

B) Geometrías no canónicas

La síntesis de iluminaciones base del espectro desde geometrías no canónicas en general no podrá resolverse de forma analítica. De todas formas debe tenerse en cuenta que no es necesario sintetizar la onda en todo el espacio sino sólo sobre la región de fuentes v' . Una aproximación al problema es la utilización de operadores de focalización. Supongamos que deseamos obtener el espectro de Fourier de las corrientes o campos, para ello debemos sintetizar ondas planas en todas las direcciones del espacio. La distribución

de campos o corrientes sobre una apertura que maximiza el campo en un punto en campo lejano, es aquella que en campo cercano produce una iluminación similar a una onda plana en dirección a ese punto. De este modo utilizando una distribución de focalización sobre un punto \vec{r}_0 situado en el infinito, obtendremos una iluminación aproximadamente plana en campo cercano. Para ello calcularíamos el campo sobre la antena producido por una fuente en \vec{r}_0 , y utilizaríamos el conjugado de la distribución obtenida, o un criterio alternativo de focalización (4.5.1.2). La pureza de la iluminación dependerá de la geometría utilizada y del espaciado entre elementos y en general deberá evaluarse mediante simulación por ordenador.

Lo mismo podría hacerse para obtener espectros de otras familias, por ejemplo, la síntesis de ondas cilíndricas centradas sobre un punto \vec{r}_0 puede abordarse calculando las corrientes de focalización sobre \vec{r}_0 para cada modo. Para ello podría utilizarse el conjugado de los campos producidos por fuentes multipolares según el modo, colocadas en \vec{r}_0 . De hecho sólo el modo J_0 produciría focalización en el sentido de concentración de energía sobre \vec{r}_0 , ya que los demás quedarán en corte para radios inferiores al valor de corte (Ap.A).

4.6 Reconstrucción de cuerpos bajo aproximaciones de primer orden

Para reconstruir un cuerpo dieléctrico, éste se ilumina con un campo incidente, apareciendo unas corrientes equivalentes de valor

$$J(r) = j\omega (\epsilon(r) - \epsilon_0) E(r) = -j\omega\epsilon_0 C(r) E(r) \quad (4.81)$$

$C(r) = 1 - \epsilon(r)/\epsilon_0$ es la función contraste que caracteriza el objeto y que deseamos obtener a partir de la reconstrucción de las corrientes inducidas. Si se conocen de forma completa las corrientes inducidas sobre el objeto, éste puede determinarse fácilmente calculando previamente el campo total en su interior mediante la función de Green:

$$C(r) = \frac{j J(r)}{\omega \epsilon_0 E(r)} = \frac{j J(r)}{\omega \epsilon_0 [E_0 - j\omega\mu_0 G(r) * J(r)]} \quad (4.82)$$

sin embargo a partir del campo dispersado sólo tenemos acceso a la información sobre un círculo de radio k_0 del espectro de corrientes $\tilde{J}(\hat{\theta} k_0)$, es decir la

difracción actúa como un filtro pasobanda sobre el espectro de corrientes fuente, que hace irrecuperable su dominio espacial de forma completa. Si relacionamos el dominio espectral del objeto con el espectro de corrientes obtenemos

$$J(\vec{r}) = -j\omega\epsilon_0 C(\vec{r}) E(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{J}(\vec{\eta}) = \frac{-j\omega\epsilon_0}{4\pi^2} [\tilde{C}(\vec{\eta}) * \tilde{E}(\vec{\eta})] \quad (4.83)$$

el espectro de corrientes es el resultado de la convolución del objeto con el campo total en su interior, éste no puede calcularse a partir del conocimiento incompleto del espectro de corrientes, por ello en general no podemos obtener información del objeto sin utilizar algún tipo de aproximación sobre el campo total $E(r)$.

4.6.1 Aproximaciones de Born y de Rytov

Si el objeto no es muy difractante podemos utilizar la aproximación de Born ($E \cong E_0$) en (4.82) obteniendo

$$C(r) \cong \frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{J(r)}{E_0(r)} \quad (4.84)$$

En el caso de que el campo incidente sea una onda canónica respecto al sistema de coordenadas utilizado, es posible relacionar el espectro de corrientes \tilde{J} con el espectro del contraste \tilde{C} . En coordenadas rectangulares, la relación es particularmente simple y cada punto del espectro de corrientes contiene la información de un punto del espectro del contraste. Esta cualidad no es general, por ejemplo en coordenadas cilíndricas no existe esta correspondencia biunívoca entre dominios espectrales, por lo que como veremos cada punto del espectro modal del contraste debe obtenerse por integración del espectro de corrientes.

4.6.1.1 Reconstrucción del contraste en coordenadas rectangulares, bajo la hipótesis de Born

Supongamos una onda plana que ilumina el cuerpo dieléctrico dirigida según el vector unitario $\hat{\theta}_0$, su transformada bidimensional de Fourier será un

impulso situado en un círculo de radio k_0

$$E_o(\vec{r}) = e^{-jk_0\hat{\theta}_o \cdot \vec{r}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{E}_o(\vec{\eta}) = 4\pi^2 \delta(\vec{\eta} - k_0\hat{\theta}_o) \quad (4.85)$$

para objetos poco difractantes $E \cong E_o$ (Aprox. Born)

$$\tilde{J}(\vec{\eta}) \cong -j\omega\epsilon_o \frac{1}{4\pi^2} \tilde{C}(\vec{\eta}) * \tilde{E}_o(\vec{\eta}) = -j\omega\epsilon_o \tilde{C}(\vec{\eta} - k_0\hat{\theta}_o) \quad (4.86)$$

por tanto bajo la hipótesis de Born e iluminación por onda plana, el espectro de corrientes será una versión desplazada del espectro del objeto según $k_0\hat{\theta}_o$.

En el apartado {4.5.2.1} vimos que a partir del campo dispersado medido en el exterior, sólo era posible acceder a un círculo del dominio espectral de las corrientes

$$\tilde{J}(k_0\hat{\theta}) = \frac{-2}{\omega \mu_o} \tilde{\xi}_s(\theta) ; \theta \in (-\pi, \pi) \quad (4.48)$$

de esta forma accederemos a un círculo desplazado del espectro del contraste del cuerpo

$$\tilde{C}[k_0(\hat{\theta} - \hat{\theta}_o)] \cong \frac{-j}{\omega\epsilon_o} \tilde{J}(k_0\hat{\theta}) = \frac{-2j}{k_o^2} \tilde{\xi}_s(\theta) \quad (4.88)$$

donde $\tilde{\xi}_s(\theta)$ es el espectro angular de ondas planas según θ , la fig.4.13 ilustra el dominio espectral del objeto obtenido mediante la aproximación de Born para una vista o ángulo de incidencia.

Repitiendo la exploración para direcciones de iluminación distintas, podemos recubrir totalmente el dominio espectral del objeto obteniendo una reconstrucción paso bajo con una frecuencia de corte de $2k_0$, que es lo que nos limitará la resolución a un valor típico $2\pi/2k_0 = \lambda/2$. Para recubrir totalmente el espectro del contraste del cuerpo, la medida se repite para un número adecuado de ángulos de incidencia hasta tener un muestreo suficientemente denso para realizar la inversión del espectro y obtener la imagen. La implementación de este algoritmo será descrita en el Cap.5 al comentar los sistemas con geometría plana.

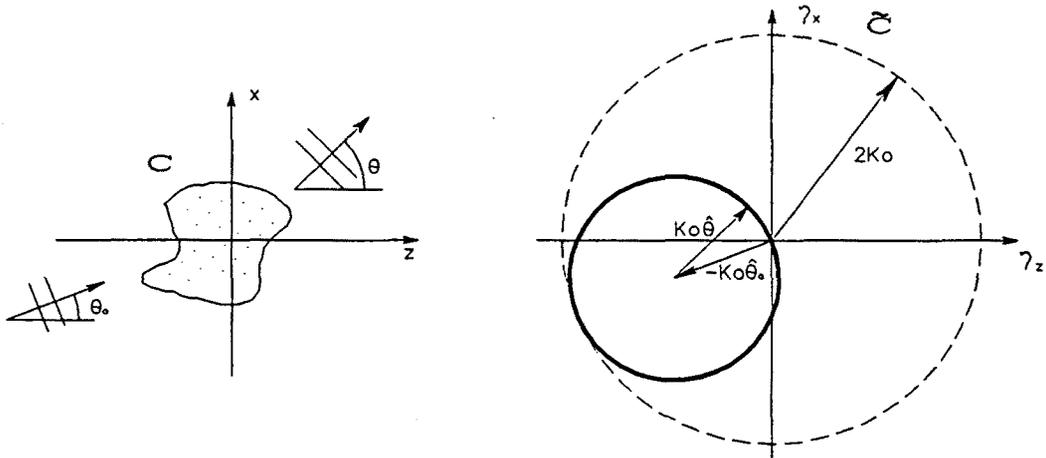


Fig.4.13 dominio espectral del objeto mediante la aproximación de Born.

4.6.1.2 Reconstrucción del contraste en coordenadas cilíndricas, bajo la hipótesis de Born.

En {4.5.2.2} habíamos encontrado el espectro modal de las corrientes a partir de los modos del campo producido E_s que generan

$$\tilde{J}(\gamma, n) \Big|_{\gamma=k_0} = \frac{-2}{\omega\mu_0\pi} \frac{\tilde{E}_s(\rho, n)}{H_n^{(2)}(k_0\rho)} \tag{4.56}$$

si el objeto es poco difractante podremos aplicar la aproximación de Born como antes

$$J(\vec{r}) \cong -j\omega\epsilon_0 C(\vec{r}) \cdot E_0(\vec{r}) \tag{4.90}$$

para conseguir relacionar los espectros de corrientes y campos, conviene utilizar una iluminación lo más simple posible respecto a la familia espectral utilizada, en este caso modos cilíndricos de orden m^*

$$E_0(\vec{r}') = J_m(k_0\rho') e^{-jm\phi'} \tag{4.91}$$

con esta iluminación podemos reescribir (4.56) como

$$\tilde{E}_s(\rho, n) = \frac{-\omega\mu_0}{4} H_n^2(k_0\rho) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C(\rho', \varphi') e^{-j(n+m)\varphi'} J_n(k_0\rho') J_m(k_0\rho') \rho' d\rho' d\varphi' \quad (4.92)$$

desgraciadamente el producto $J_n \cdot J_m$ no es otra función de Bessel (lo que permitiría "mapear" C y J punto a punto como ocurre en coordenadas rectangulares), utilizando la expresión integral del producto [68]

$$J_n(z) \cdot J_m(z) = \begin{cases} 2/\pi \int_0^{\pi/2} J_{n+m}(2z \sin\theta) \cos [(n-m)\theta] d\theta & ; \text{ si } n = m = 0 \\ 2/\pi \int_0^{\pi/2} J_{n+m}(2z \cos\theta) \cos [(n-m)\theta] d\theta & ; \text{ otros } n, m \end{cases} \quad (4.93)$$

sustituyendo

$$\tilde{E}_s(\rho, n) = -\omega\mu_0 H_n^2(k_0\rho) \int_0^{\pi/2} \cos [(n-m)\theta] \tilde{C}(\gamma, n+m) d\theta \quad (4.94)$$

donde $\tilde{C}(\gamma, n+m)$ es la transformada de Hankel de $C(r)$ (Ap.A)

$$\tilde{C}(\gamma, q) = \mathcal{H} \{ C(\rho', \varphi') \} = 1/2\pi \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C(\rho', \varphi') e^{-jq\rho'} J_q(\gamma\rho') d\varphi \rho' d\rho' \quad (4.95)$$

$$\text{para una frecuencia radial } \gamma = \begin{cases} 2k_0 \sin\theta & ; n = m = 0 \\ 2k_0 \cos\theta & ; \text{ otros } n, m \end{cases}$$

en el caso $n = m = 0$ puede utilizarse el cambio de variable $\theta' = \pi/2 - \theta$ lo que permite expresar γ según $\cos\theta$ para n, m arbitrarios

$$\gamma = 2k_0 \cos\theta \quad ; \quad \forall n, m \quad (4.96)$$

utilizando que $\cos [(n-m)\theta] \tilde{C}(\gamma, n+m)$ es una función par, podremos extender la integración según θ al intervalo $(-\pi, \pi)$, construyendo la función periódica C^e de período 2π

$$\tilde{C}^e(\gamma) = \begin{cases} \tilde{C}(\gamma) & ; \forall |\theta| \leq \pi/2 \pm k2\pi \\ 0 & ; \forall |\theta| > \pi/2 \pm k2\pi \end{cases} \quad ; \quad \gamma = 2k_0 \cos\theta \quad (4.97)$$

podemos escribir

$$\int_0^{\pi/2} \cos [(n-m)\theta] \tilde{C}(\gamma, n+m) d\theta = 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(n-m)\theta} \tilde{C}^e(\gamma, n+m) d\theta = \pi \tilde{C}_p^e(q) \quad (4.98)$$

es decir, la integral no es más que el coeficiente de Fourier según $p = (n-m)$ de $\tilde{C}^e(\gamma=2k_0 \cos \theta, q)$, donde hemos llamado $q = (n+m)$, sustituyendo obtenemos para el modo n del campo dispersado al iluminar con modo m

$$\tilde{E}_s(\rho, n; m) = -\omega \mu_0 \pi H_n^{(2)}(k_0 \rho) \tilde{C}_p^e(\gamma, q) ; \gamma = 2k_0 \cos \theta \quad (4.99)$$

expresión aparentemente sencilla sin embargo la relación $(n, m) \Leftrightarrow (p, q)$ dará lugar a un acoplamiento cruzado entre los modos del campo medido E_s y el contraste C , resolviendo \tilde{C}_p

$$\tilde{C}(\gamma=2k_0 \cos \theta, q) = \frac{-1}{\omega \mu_0 \pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_{\frac{(q+p)}{2}}^{(2)}(k_0 \rho)} E_s(\rho, \frac{q+p}{2}; \frac{q-p}{2}) e^{jp\theta} \quad (4.100)$$

siendo $0 \leq \theta \leq \pi/2$

tendremos que $n = (p+q)/2$ y $m = (q-p)/2$, como deben ser enteros deberemos distinguir la obtención de modos pares e impares de \tilde{C}

modos pares

$$q = 2l ; p = 2i ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\tilde{C}(\gamma=2k_0 \cos \theta, 2l) = \frac{-1}{\omega \mu_0 \pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_{(l+i)}^{(2)}(k_0 \rho)} E_s(\rho, l+i; l-i) e^{j2i\theta} \quad (4.101)$$

modos impares

$$q = 2l+1 ; p = 2i+1 ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\tilde{C}(\gamma=2k_0 \cos \theta, 2l+1) = \frac{-1}{\omega \mu_0 \pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_{(l+i+1)}^{(2)}(k_0 \rho)} E_s(\rho, l+i+1; l-i) e^{j(2i+1)\theta} \quad (4.102)$$

Obsérvese que a cada modo q de C contribuyen todas los pares de modos de iluminación y de campo dispersado con simetría respecto a q , como ilustra la Fig.4.14. Aunque la serie de modos es infinita podremos truncarla al orden

visible según el radio máximo del objeto {Ap.A}. En la zona invisible, ni iluminaremos significativamente el cuerpo ni podremos medir los campos dispersados. Una vez llenado el dominio espectral $\tilde{C}(\gamma, q)$, mediante transformada inversa de Hankel {Ap.A} obtendremos el dominio espacial. Como ocurría con el espectro de Fourier la reconstrucción es una versión paso bajo del contraste real con una frecuencia de corte a $2k_0$.

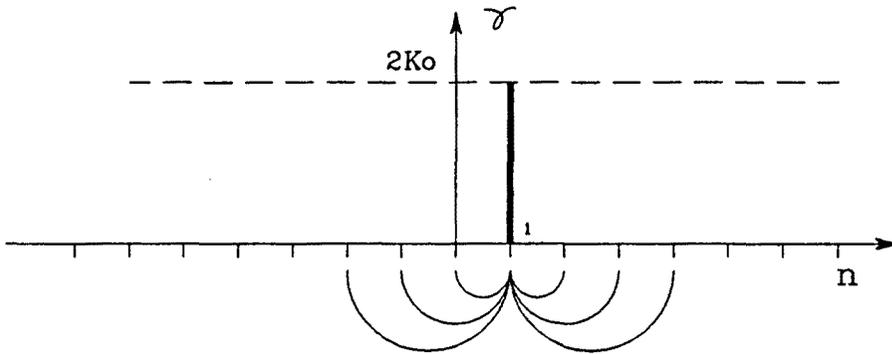


Fig.4.14 Obtención del espectro modal del contraste del objeto

4.6.1.3 Aproximación de Rytov

La aproximación de Rytov descrita en {3.3.2} puede aplicarse en la reconstrucción de forma similar a la aproximación de Born, si comparamos ambas aproximaciones aplicadas a la ecuación integral del campo dispersado

$$E_s(\vec{r}) \cong -k_0^2 \int C(\vec{r}') E_o(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.32)$$

$$\phi_s(\vec{r}) \cong \frac{-k_0^2}{E_o(\vec{r})} \int C(\vec{r}') E_o(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.38)$$

definimos Ψ_s como el valor exacto de la integral

$$\Psi_s(r) \triangleq \mathcal{L} [C(r)] = -k_0^2 \int C(\vec{r}') E_o(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.103)$$

en el apartado anterior obtuvimos el dominio espectral del objeto tomando el

campo incidente como el campo total en el interior del objeto, por tanto se invirtió (4.103) sin aproximación

$$\tilde{C}(\eta; \hat{\theta}_o) = \mathcal{L}^{-1} [\Psi_s] \quad (4.104)$$

de esta forma aplicar las aproximaciones de Born o de Rytov consistirá en aproximar Ψ_s por:

$$\text{Born:} \quad \Psi_s(r) \cong E_s(r) \quad (4.105)$$

$$\text{Rytov:} \quad \Psi_s(r) \cong \phi_s(r) E_o(r) \quad (4.106)$$

es decir se trabaja con el mismo algoritmo de reconstrucción utilizando datos de entrada diferentes. En particular para la aproximación de Rytov obtendremos:

$$E(r) = E_o(r) + E_s(r) = e^{j\phi(r)} ; E_o(r) = e^{j\phi_o(r)} \quad (4.107)$$

$$\phi(r) = \phi_o(r) + \phi_s(r) \quad (4.108)$$

despejando E_s y tomando logaritmos

$$\phi_s(r) = \ln \left[\frac{E_s(r)}{E_o(r)} + 1 \right] \quad (4.109)$$

$$\Psi_s(r) \cong \phi_s(r) E_o(r) = E_o(r) \ln \left[\frac{E_s(r)}{E_o(r)} + 1 \right] \quad (4.110)$$

el logaritmo neperiano de una función compleja es otra función compleja cuya parte real es el logaritmo neperiano del módulo y cuya parte imaginaria es la fase de la función original. Como la fase es ambigua en una constante $k2\pi$ el logaritmo neperiano es una función multivalor. Sin embargo al expresar Ψ_s en función de ϕ_s debe utilizarse la fase total acumulada respecto al campo incidente contando las vueltas enteras

$$\phi_s(r) = \text{pv}[\phi_s(r)] + N(r) \cdot 2\pi \quad (4.111)$$

pv es el valor principal de ϕ_s que se obtendrá numéricamente en un ordenador y N es un entero que se incrementará o decrementará en cada transición $0,2\pi$ y en

general dependerá de la posición. Si se tiene $p_v[\phi_s(r)]$ de forma continua sobre r , $N(r)$ puede deducirse fácilmente como aquel que garantice la continuidad de ϕ_s . Sin embargo normalmente dispondremos de un conjunto discreto de muestras con un cierto espaciado lo que dificultará el "desenrollado" de la fase (en inglés 'phase-unwrapping'). Una implementación de la aproximación de Rytov fue desarrollada para el sistema cilíndrico y será comentada en el Cap. {6.4.2}.

4.6.2 Aproximación de Born en operadores de focalización

Habíamos visto en {4.5.1.1} una forma alternativa a la inversión de la ecuación integral para la reconstrucción de corrientes, consistente en utilizar un operador de focalización sobre el campo dispersado. Un primer problema aparece al intentar focalizar en el interior de un objeto inhomogéneo y desconocido que pretendemos reconstruir. Si el cuerpo es de bajo contraste provocará una distorsión pequeña sobre los campos incidentes puesto que las corrientes inducidas en su interior serán débiles. Por lo tanto podremos emplear la hipótesis de Born sobre el campo de focalización, lo que permite aproximar las corrientes de focalización por las de un medio homogéneo.

La reconstrucción del cuerpo a partir de las corrientes equivalentes ha sido descrita en el apartado anterior {4.6.1.2} para la aproximación de Born. Por lo tanto, la reconstrucción de cuerpos con operadores de focalización requiere la utilización de la hipótesis de Born tanto en el cálculo del operador de focalización como para obtener el contraste $C(r)$ a partir de la reconstrucción de corrientes.

$$J(r) = -j\omega\epsilon_0 C(r) E(r) \implies C_r(r) \cong \frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{J_r(r)}{E_0(r)} \quad (4.112)$$

Un aspecto importante es la obtención del objeto a partir de múltiples vistas, dos métodos ensayados por otros autores [6,61] son la combinación aditiva o multiplicativa de las reconstrucciones de cada vista

$$C_+(r) = \sum_1 C_i(r) \quad ; \quad C^*(r) = \prod_1 C_i(r) \quad (4.113)$$

sin embargo ninguna de ellas garantiza una reconstrucción fiel de un cuerpo arbitrario. Debe tenerse en cuenta que una vista proporciona una versión paso

banda del objeto y en consecuencia la reconstrucción es espectralmente incompleta. En {5.3.3} se muestra que combinando aditivamente las imágenes ponderadas (ecualizadas) de forma que el espectro bidimensional quede recubierto de manera uniforme, un algoritmo de focalización proporciona el mismo resultado que un algoritmo de recubrimiento espectral. Por otra parte la combinación multiplicativa aunque puede dar buenos resultados para objetos sencillos o puntuales es un procedimiento no lineal con resultados difícilmente predecibles [6]. La mejor opción para la reconstrucción multivista, es utilizar un algoritmo basado en la obtención del espectro bidimensional del objeto, en que el recubrimiento uniforme es fácilmente realizable. Una posible excepción ocurre al utilizar agrupaciones para la iluminación y medida. En este caso puede diseñarse un operador que focaliza simultáneamente en emisión y recepción, con resultados potencialmente similares a una medida multivista. Un algoritmo de este tipo para geometrías cilíndricas se presenta en {6.4.3}.

4.7 Reconstrucción en medios con pérdidas

En medios con pérdidas el campo producido por una fuente sufrirá una atenuación disipativa proporcional a la distancia recorrida en el medio. El problema directo puede tratarse en principio adoptando un valor complejo para el número de onda k_0 . En los problemas de reconstrucción, trabajar en un medio con pérdidas tendrá diferentes repercusiones según el método, especialmente relevantes en los técnicas espectrales y que justifican el realizar un tratamiento diferenciado del tema.

Los operadores de focalización en medios disipativos perderán eficacia al focalizar sobre zonas profundas, por lo tanto en la reconstrucción de corrientes tendremos una sensibilidad decreciente con la profundidad. Como veremos, la sensibilidad espacial al reconstruir cuerpos dieléctricos podrá mantenerse aproximadamente constante, con iluminaciones adecuadas que exciten corrientes de mayor amplitud en las zonas más alejadas de la antena receptora.

En los algoritmos de recubrimiento espectral, la inclusión de pérdidas destruirá la ortogonalidad de las autofunciones de la ecuación de onda, aunque podremos utilizar una base ortogonal derivada del caso sin pérdidas, para $N-1$ dimensiones de un problema N dimensional. El espectro extendido a las N dimensiones del problema deberá incluir valores complejos como mínimo en uno de los ejes, por ejemplo en coordenadas rectangulares los campos dispersados

contendrán información de la transformada de Laplace de corrientes y campos.

4.7.1 Propagación de los campos en medios con pérdidas

Para tener en cuenta el efecto de las pérdidas en la ecuación de Helmholtz, utilizaremos un valor complejo para el número de onda k_0

$$(\nabla^2 + k_0^2) E = 0 \quad (3.6)$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_0' - j\epsilon_0'') = k_0'^2 - jk_0''^2 \quad (4.114)$$

El espectro angular y modal de los campos será también válido en este caso a condición de mantener los ejes transformados reales, a fin de preservar la ortogonalidad de las autofunciones. Por ejemplo podemos expresar el campo a partir del espectro angular

$$E(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^+(k_x) e^{-j(k_x x + k_z z)} dk_x + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}^-(k_x) e^{-j(k_x x - k_z z)} dk_x \quad (4.115)$$

donde $\tilde{E}^+(k_x) = \mathcal{F}_x \{ E^+(x, z=0) \}$

k_x es real y k_z debe cumplir la ecuación de onda $k_x^2 + k_z^2 = k_0^2$. Al ser k_0 complejo, k_z también lo será para todos los valores de k_x ,

$$k_z = \pm \sqrt{k_0^2 - k_x^2} = \pm k_z' \mp j k_z'' \quad (4.116)$$

donde

$$k_z' = \sqrt{1/2 \left[\sqrt{(k_0'^2 - k_x^2)^2 + k_0''^2} + (k_0'^2 - k_x^2) \right]} \quad (4.117)$$

$$k_z'' = \sqrt{1/2 \left[\sqrt{(k_0'^2 - k_x^2)^2 + k_0''^2} - (k_0'^2 - k_x^2) \right]} \quad (4.118)$$

el signo de k_z'' se escoge de modo que la onda se atenúe en la dirección de

propagación (condición de radiación en el infinito). De esta forma cualquier campo en una región sin fuentes, puede expresarse como combinación de ondas planas homogéneas según k_x , y la atenuación del medio incide sólo en k_z . Por este motivo las funciones base no son ondas planas uniformes que se atenúan en la dirección de propagación. Para preservar la ortogonalidad en una dimensión (k_x) hemos construido soluciones a partir de autofunciones de la ecuación de onda sin pérdidas, lo que puede interpretarse como la aplicación del procedimiento de Gram-Schmidt para ortogonalizar una base. Este método ha sido aplicado también para construir familias modales en guías con pérdidas [69,Cap.9 ; 70,Cap.5.3].

La fig.4.15 muestra el lugar geométrico de las soluciones de k_z en el plano complejo al variar k_x , para dos medios sin y con pérdidas. En un medio sin pérdidas el dominio visible corresponde a los valores reales de k_z , en que la onda no sufre atenuación. En cambio en un medio con pérdidas siempre existe atenuación que crece para valores elevados de k_z . Por lo tanto a efectos prácticos el margen visible en medios con pérdidas quedará fijado por el margen dinámico del receptor.

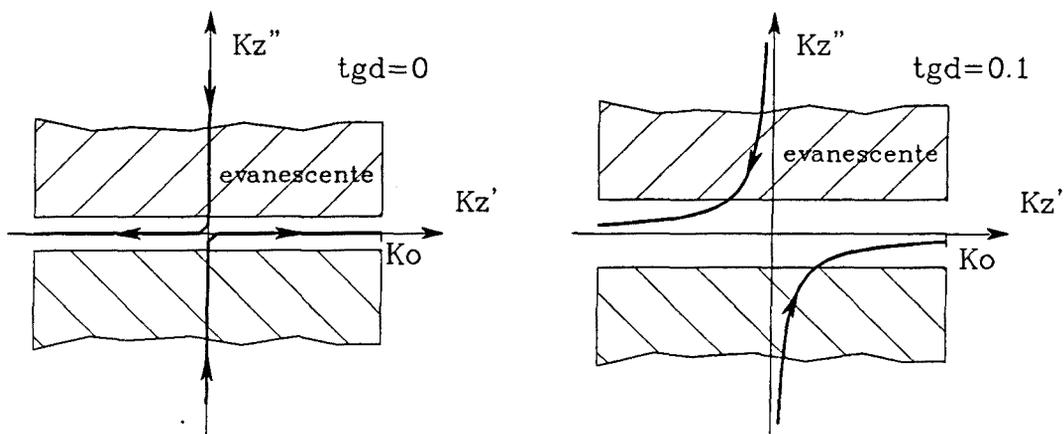


Fig.4.15 Soluciones de k_z sobre el plano complejo al variar k_x para medios sin y con pérdidas

En el caso de expresar los campos según un espectro de modos cilíndricos, tendremos

$$E(\rho_o, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\rho_o, n) B_n(k_o \rho_o) e^{jn\varphi} \quad (4.119)$$

$$\tilde{E}(\rho_o, n) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} E(\rho_o, \varphi) e^{-jn\varphi} d\varphi \quad (4.120)$$

la transformada angular mantendrá su ortogonalidad, con lo que puede utilizarse la formulación modal tomando un k_o complejo en el argumento de las funciones de Bessel. De forma análoga al espectro de ondas planas, ya no existe una frontera bien definida entre márgenes visible e invisible. En la fig.4.16 se muestra el comportamiento de la función de Bessel de primera especie J_n para $n=10$, para argumentos reales y complejos ($\text{tg}\delta=1$), el dominio evanescente o invisible viene determinado por la caída a cero de la función para argumentos $r k_o' < n/2$, podemos observar una caída más suave para el medio con pérdidas

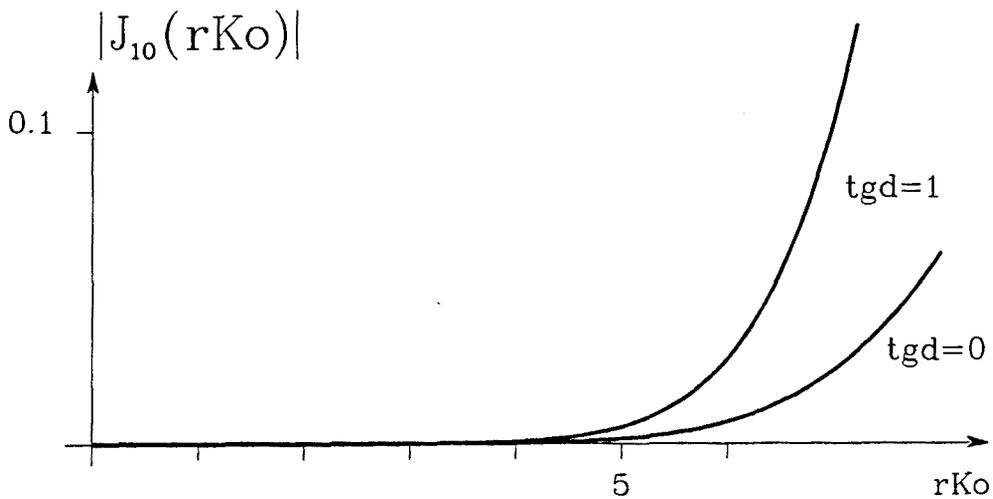


Fig.4.16 amplitud del modo J_{10} en medios sin y con pérdidas.

4.7.2 Operadores de focalización

La respuesta de un sistema de formación de imágenes basado en operadores de focalización sobre el campo dispersado, puede evaluarse en función del campo focal que la geometría de medida es capaz de crear en cada punto de la región explorada.

El cálculo de las corrientes sobre la geometría de medida que producen un foco sobre la región de fuentes, se haría de forma análoga al caso sin pérdidas. Sin embargo debe tenerse en cuenta que en zonas profundas, las corrientes que producen un foco de amplitud constante en un medio con pérdidas, alcanzarán valores muy elevados. En consecuencia la reconstrucción de esas zonas será poco robusta al amplificar considerablemente el ruido de medida. Por ejemplo al calcular la corriente que en un plano z_m produciría un foco en el plano z_0 , tenemos utilizando (4.24):

$$J_f(x; z_m) = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ \frac{-2 k_z}{\omega \mu_0} e^{jk_z'(z_m - z_0)} e^{k_z''(z_m - z_0)} \right\}; \quad k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (4.121)$$

en este caso al aumentar la profundidad, z_0 decrece y el término exponencial $e^{k_z''}$ se hará muy grande, sobre todo para k_x elevadas (fig.4.15). Por ello es habitual utilizar filtros que atenúen el espectro de corrientes a frecuencias altas a fin de mantener su amplitud a un valor razonable.

En el caso de reconstruir cuerpos dieléctricos, la magnitud de las corrientes inducidas responderá al comportamiento del campo total en el dieléctrico. Si la iluminación proviene del mismo lado que la geometría de medida, lo que se denomina configuración en reflexión, las corrientes fuente sufrirán una atenuación con la profundidad agravando la sensibilidad de la reconstrucción en regiones profundas. En cambio trabajando en transmisión, se ilumina el cuerpo desde el lado opuesto a la agrupación receptora. En este caso la amplitud de las corrientes decrece exponencialmente en dirección a la antena receptora, equilibrando la pérdida de sensibilidad en la reconstrucción de corrientes profundas. De esta forma la sensibilidad en la reconstrucción de cuerpos en transmisión es aproximadamente plana [6,p.105].

4.7.3 Obtención del espectro de corrientes

En el apartado {4.5.2}, vimos que conociendo los campos en una región exterior a las fuentes, podíamos obtener el espectro de corrientes en aquella región del espectro que fuese solución de la ecuación de onda en el medio exterior

$$\tilde{J}(\eta_x, \eta_z) = \int_{V'} J(x', z') e^{j(\eta_x x' + \eta_z z')} dx' dz' \quad ; \quad \eta_x^2 + \eta_z^2 = k_0^2 \quad (4.122)$$

cuando el medio exterior tiene pérdidas, k_0^2 será complejo con lo que uno de los ejes espectrales η_x, η_z o los dos serán complejos. Una opción será tomar η_x real como hicimos para el espectro angular y calcular η_z para satisfacer la ecuación de onda

$$\eta_x \text{ real} \quad ; \quad \eta_z = \pm \sqrt{k_0^2 - \eta_x^2} \quad (4.123)$$

en este caso obtendremos el espectro bidimensional de corrientes donde al variar η_x , la variable η_z recorrerá el plano complejo de la fig.4.15, obteniendo el espectro de corrientes en el camino complejo representado en la fig.4.17 para medios sin y con pérdidas.

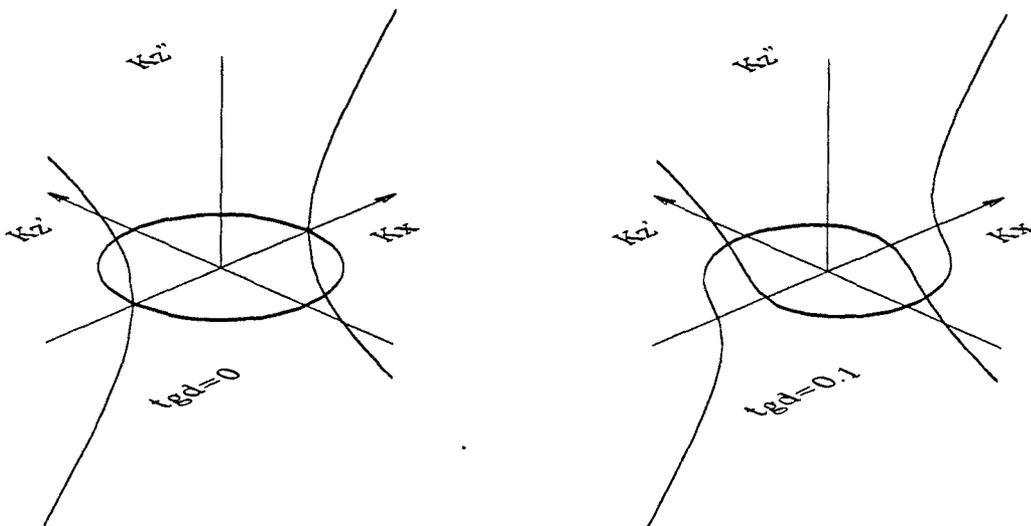


Fig.4.17 Espectro de las corrientes obtenido para η_x real.

Este caso corresponde a la obtención de corrientes mediante el cálculo del espectro angular del campo dispersado a partir de medidas sobre una geometría plana. Por ejemplo para un plano $z_m > z'$

$$\tilde{E}_s^+(\eta_x, z_m) = \mathcal{F}_x \left\{ E_s(x, z_m) \right\} = \frac{-\omega\mu_0}{2} \frac{e^{-j\eta_z z}}{\eta_z} \int \tilde{J}(\eta_x, z') e^{j\eta_z z'} dz'; \quad (4.124)$$

siendo η_x real ; $\eta_z = \pm \sqrt{k_0^2 - \eta_x^2}$

el espectro de corrientes será

$$\tilde{J}(\eta_x, \eta_z) = \frac{-2\eta_z}{\omega \mu_0} e^{j\eta_z z} \tilde{E}_s^+(\eta_x, z) \quad (4.125)$$

Otra opción sería obtener el espectro \tilde{J} según ondas planas uniformes atenuadas en la dirección de propagación de ángulo θ (real), resultando

$$\begin{cases} \eta_x = k_0 \cos \theta \\ \eta_z = k_0 \sin \theta \end{cases} \quad \text{siendo } k_0 = \sqrt{k_0^2} = \alpha + j\beta \quad (4.126)$$

α, β se obtienen mediante (2.3,2.4). En este caso el espectro al variar θ es un círculo en el espacio complejo cuyas componentes imaginarias η_x'', η_z'' son proporcionales a las reales η_x', η_z' en un factor $k_0''/k_0' \approx \text{tg}\delta/2$, como se muestra en la fig.4.18

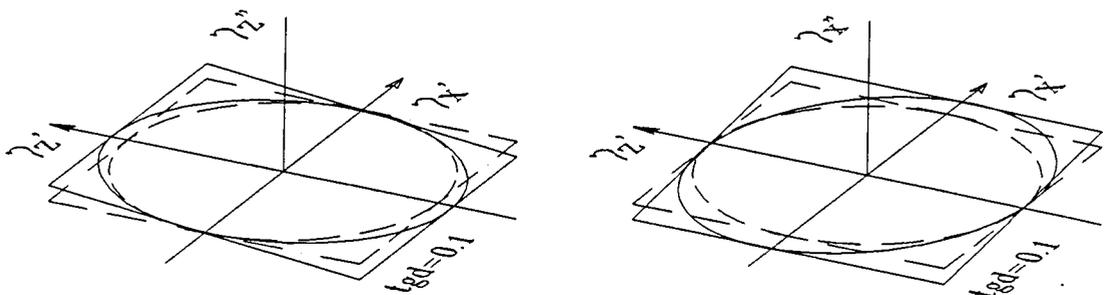


Fig.4.18 Espectro de las corrientes obtenido para θ real.

Estaremos en esta situación al utilizar el T. de Reciprocidad para la reconstrucción de corrientes (4.5.2.3), si sintetizamos ondas planas atenuadas en la dirección de propagación. Por ejemplo, con una geometría de medida cilíndrica utilizando (4.79) con un k_0 complejo.

En ambos casos el espectro de J se obtiene según una base de funciones armónicas amortiguadas en alguna o ambas direcciones, es decir en general como transformada bidimensional/bilateral de Laplace.

4.7.4 Reconstrucción de cuerpos bajo aproximaciones de primer orden

En este apartado consideraremos que las corrientes cuyo espectro obtuvimos en el apartado anterior, son debidas al producto de la función contraste del objeto por el campo total en su interior.

$$J(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon_0 C(\mathbf{r}) \cdot E(\mathbf{r}) \quad (4.81)$$

La hipótesis de Born consistirá en suponer una perturbación débil y aproximar el campo total por el incidente. Como antes, para cada dirección de incidencia la iluminación no es única, dependiendo de como asignemos la parte imaginaria a los ejes k_x , k_z . Estudiaremos la cobertura espectral en los casos η_x , k_x reales y complejos.

Iluminación con una onda plana de k_x real

Si iluminamos con una onda con k_x real tendremos

$$E_0(\vec{r}) = e^{-j(k_x x' + k_z z')} \quad k_x \text{ real} ; \quad k_z = \pm \sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (4.127)$$

utilizando el espectro angular según η_x en el plano z' para E_0 y J

$$\tilde{E}_0(\eta_x; z') = 2\pi \delta(\eta_x - k_x) e^{-jk_z z'}$$

$$\tilde{J}(\eta_x; z') = \frac{-j\omega\epsilon_0}{2\pi} C(\eta_x; z') * E_0(\eta_x; z') = -j\omega\epsilon_0 \tilde{C}(\eta_x - k_x; z') e^{-jk_z z'} \quad (4.128)$$

sustituyendo en (4.124)

$$\tilde{E}_s(\eta_x, z) = \frac{jk_0^2}{2} \frac{e^{-j\eta_z z}}{\eta_z} \int \tilde{C}(\eta_x - k_x; z') e^{s z z'} dz' ; \eta_x, k_x \text{ reales} \quad (4.129)$$

donde $s = (\eta_z'' - k_z'') + j(\eta_z' - k_z')$ (4.130)

()' indica parte real y ()" parte imaginaria que puede calcularse utilizando (4.117, 4.118). Al igual que ocurría con las corrientes, el espectro angular del campo dispersado contiene información del dominio espectral del objeto según una transformada de Laplace.

$$\tilde{C}(\eta_x - k_x, s z) = \frac{-2j\eta_z}{k_0^2} e^{j\eta_z z m} \tilde{E}_s^+(\eta_x, z m) ; \text{donde } \eta_x \text{ es real} \quad (4.131)$$

Al utilizar incidencias múltiples en un medio sin pérdidas se obtiene una cobertura espectral del contraste en círculos sobre el plano real η_x', η_z' , en cambio con pérdidas la cobertura es una superficie en un volumen complejo. La fig.4.19 es un ejemplo para iluminaciones en la dirección normal a la agrupación (\hat{z}) habitual en sistemas planos.

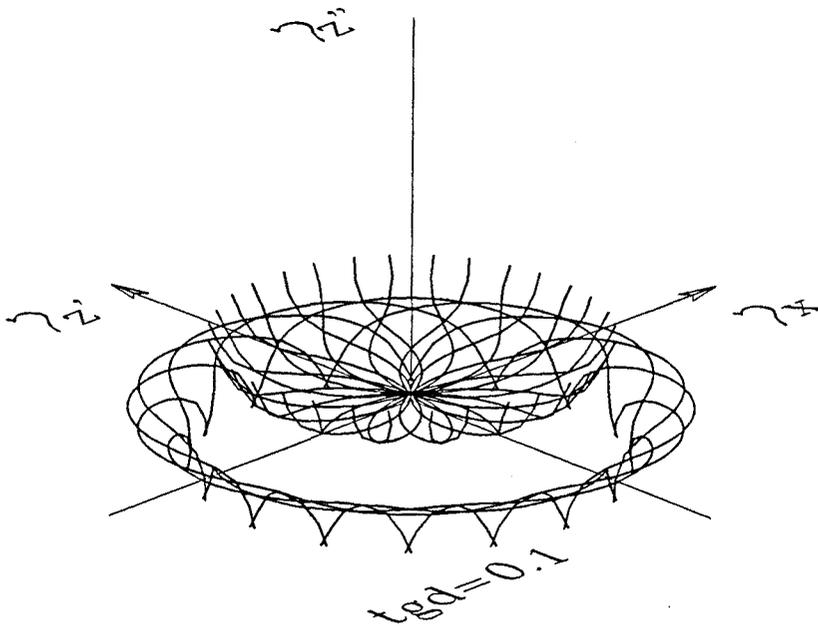


Fig.4.19 Cobertura del espectro del cuerpo para η_x, k_x reales (16 vistas).

Iluminación con una onda plana uniforme (k_x, k_z complejos)

En este caso la onda se atenúa en la dirección de propagación, expresaremos los ejes espectrales de la iluminación y campo dispersado en función de los ángulos reales θ_0 y θ respectivamente.

$$\begin{cases} \eta_x = k_0 \cos \theta & ; & k_x = k_0 \cos \theta_0 \\ \eta_z = k_0 \sin \theta & ; & k_z = k_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad (4.132)$$

Utilizando el T. de Reciprocidad (4.58) para obtener el dominio espectral de las corrientes J, a partir de los campos dispersados E_s medidos en una línea a

$$\int_{V'} J E_a d\vec{r}' = \int_a J_a E_s d\vec{r} \quad (4.58)$$

y sustituyendo las corrientes inducidas J por su valor bajo la hipótesis de Born

$$\begin{aligned} -j\omega\epsilon_0 \int_{V'} C(\vec{r}') E_0(\vec{r}') E_a(\vec{r}') d\vec{r}' &= \int_a J_a(\vec{r}) E_s(\vec{r}) d\vec{r} = \\ &= -j\omega\epsilon_0 \int_{V'} C(x', z') e^{jk_0[(\cos\theta - \cos\theta_0)x + (\sin\theta - \sin\theta_0)z]} dx dz \end{aligned} \quad (4.133)$$

que puede expresarse en función de los vectores unitarios $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}$

$$\int_a J_a(\vec{r}) E_s(\vec{r}) d\vec{r} = -j\omega\epsilon_0 \int_{V'} C(\vec{r}') e^{\vec{s} \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' ; \vec{s} = (k_0'' + jk_0')(\hat{\theta} - \hat{\theta}_0) \quad (4.134)$$

en este caso dependiendo del valor $\hat{\theta} - \hat{\theta}_0$ nos moveremos sobre una recta inclinada en el plano complejo de cada eje espectral s_x, s_z , resultando una cobertura espectral sobre superficies en un volumen complejo representado en la fig.4.20.

Desafortunadamente la inversión de una transformada de Laplace requiere la integración en el plano complejo s , siguiendo un contorno de parte real σ_0 constante [71,p.318;72]. En dos dimensiones la inversa de Laplace sería

$$C(x, z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\sigma_0 z - j\infty}^{\sigma_0 z + j\infty} \int_{\sigma_0 x - j\infty}^{\sigma_0 x + j\infty} \tilde{C}(s_x, s_z) e^{-(s_x X + s_z Z)} ds_x ds_z \quad (4.135)$$

donde σ_{0x} , σ_{0z} son constantes pertenecientes a la banda de convergencia de la transformada directa. Como hemos visto en los casos analizados, la condición $\eta_x^2 + \eta_z^2 = k_0^2$ fuerza la interdependencia de las partes real e imaginaria de s y la superficie cubierta no es un plano horizontal de η'' constante (fig.4.19,4.20), por lo tanto no podremos invertir de forma exacta el espectro.

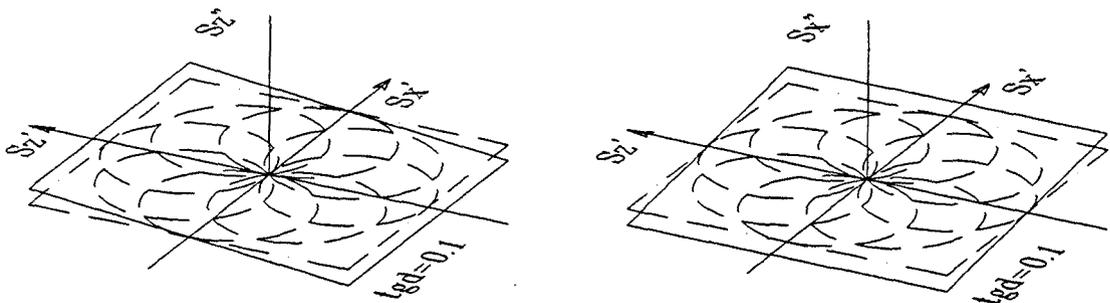


Fig.4.20 Cobertura espectral del cuerpo para η_x, k_x complejos

Si las pérdidas no son muy elevadas, puede aproximarse el espectro de Laplace por el de Fourier utilizando sólo la parte imaginaria de s ,

η_x, k_x reales

$$s_z = (\eta_z'' - k_z'') + j(\eta_z' - k_z') \cong j(\eta_z' - k_z') \quad (4.136)$$

η_x, k_x complejos ; θ, θ_0 reales

$$\vec{s} = (k_0'' + jk_0')(\hat{\theta} - \hat{\theta}_0) \cong jk_0'(\hat{\theta} - \hat{\theta}_0) \quad (4.137)$$

de esta forma se obtendría el dominio espacial del cuerpo mediante transformada inversa de Fourier. El error cometido será mayor en la zona de alta frecuencia del cuerpo en que k_0'' será mayor. También aumentará con el tamaño del cuerpo a reconstruir al aumentar el término exponencial en (4.135) con r' grande.

4.8 Inversión de orden superior

En apartados anteriores hemos planteado algoritmos de reconstrucción, utilizando aproximaciones de primer orden válidas para cuerpos poco difractantes. Debido a la inhomogeneidad dieléctrica de los cuerpos biológicos, estas aproximaciones no se cumplen salvo para cuerpos de tamaño pequeño o moderado. En este apartado, estudiaremos algunas técnicas destinadas a aumentar el margen de aplicación de los algoritmos de primer orden. Se han desarrollado nuevos algoritmos de orden superior basados en método de momentos, la utilización de información 'a-priori', y medidas con diversidad de frecuencia.

4.8.1 Inversión basada en el Método de Momentos

En este apartado trataremos de reconstruir un cuerpo dieléctrico, resolviendo la ecuación integral que relaciona campos y contraste de permitividad por el método de los momentos. Al igual que ocurría en los métodos de primer orden, será necesario emplear varias iluminaciones para tener suficiente información para la reconstrucción.

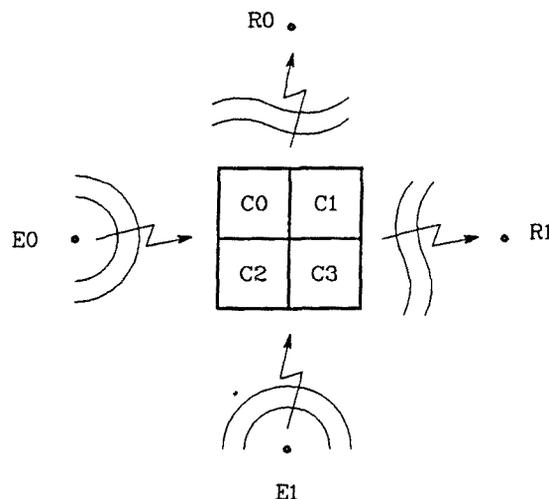


Fig.4.21 Medida multivista del campo dispersado por un objeto

La fig.4.21 ilustra la obtención multivista del campo dispersado por un objeto. El método de momentos consiste en transformar la ecuación integral en una ecuación matricial, discretizando el objeto en celdas homogéneas en las que corrientes y campo se suponen constantes. Esta hipótesis obliga a tomar un tamaño de celda pequeño respecto a la longitud de onda.

En el Capítulo 3 habíamos introducido la resolución del problema directo mediante el método de momentos, se trataba de calcular los campos dispersados por el objeto iluminado por un campo incidente. El problema inverso consistirá en calcular la función contraste del objeto, conocidos los campos dispersados para un conjunto de iluminaciones. Mediante un problema directo interior resolveremos para cada vista las interacciones en el objeto permitiendo calcular el campo total en su interior. Plantaremos un segundo problema directo exterior, que propocionará los campos dispersados sobre la geometría de medida, a partir de los campos en el objeto. Es decir modela la interacción entre el objeto y su entorno. Acoplando ambos problemas podremos calcular el contraste del cuerpo, dados los campos incidentes y dispersados para una serie de vistas.

Problema directo interior

La ecuación integral a resolver puede escribirse como

$$E_o(\vec{r}) = E(\vec{r}) + k_o^2 \int C(\vec{r}') E(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.138)$$

donde E es el campo total en el interior del objeto, C es la función contraste de permitividad y G es la función de Green del problema. La integral proporciona el campo dispersado cambiado de signo que sumado al campo total da el campo incidente E_o . Utilizando pulsos rectangulares como funciones base en el dominio del objeto \vec{r}' y deltas como funciones peso en el dominio \vec{r} , la ecuación se transforma en

$$E_o[m] = E[m] - \sum_n C[n] E[n] G_{i[m,n]} \quad (4.139)$$

donde

$$G_{i[m,n]} = -k_o^2 \iint_n G(r_m-r') dr' \quad (4.140)$$

es la versión discreta de la función de Green que cuantifica la interacción de la celda n sobre la celda m del objeto, como vimos al estudiar el problema directo (3.5). En notación matricial (4.139) puede escribirse como

$$[G_1C - I] E = - E_0 \quad (4.140)$$

$[C]$ es una matriz diagonal siendo sus elementos las N diferentes celdas en que se ha dividido el objeto, G_1 será cuadrada de $N \cdot N$ elementos, y E , E_0 serán vectores columna de N elementos. El campo total E puede obtenerse invirtiendo el operador matricial

$$E = [I - C^{-1}G_1^{-1}] E_0 \quad (4.141)$$

para varias incidencias variará E_0 y la solución E será distinta, sin embargo el operador sobre E_0 no cambiará. Para M incidencias tendremos M vectores E_0 y E que podemos expresar como matrices $[E_0]$, $[E]$ de $M \cdot N$ elementos donde cada columna representa una incidencia.

Problema directo exterior

En este caso supondremos conocido el campo total E en el interior del objeto (resultado del problema directo interior) y calcularemos el campo dispersado sobre un conjunto discreto de R puntos de medida. La ecuación integral será

$$E_s(\vec{r}) = -k_0^2 \int C(\vec{r}') E(\vec{r}') G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.142)$$

en forma matricial

$$E_s = G_e C E \quad (4.143)$$

G_e será la función de Green discretizada que modela la interacción de las corrientes inducidas en el interior del cuerpo sobre los R puntos de medida, por lo tanto su dimensión será $R \cdot N$

$$G_e[r,n] = -k_0^2 \int \int_n G(r-r') dr' \quad (4.144)$$

como antes las matrices G_e y C no dependen de la iluminación y son función de la geometría del problema. Al igual que en el problema interior, podemos incluir incidencia múltiple en la formulación, transformando los vectores E, E_s en matrices $M \cdot N$ formadas por los M vectores columna correspondientes a las M incidencias.

Problema inverso

Sustituyendo el campo total interior al objeto, solución del problema interior, en el problema exterior obtenemos

$$G_e C E_o = E_s - G_e G_i^{-1} E_o \quad (4.145)$$

donde G_e, G_i son característicos de la geometría de medida, E_o es conocido y E_s son los datos del problema, la incógnita es C . Si $R \cdot M = N$ el problema está especificado de forma exacta, al existir tantas incógnitas como datos, de otra forma estaríamos ante un problema sobreespecificado o subespecificado. La inversión de C no puede hacerse directamente pues las matrices G_e, E_o, E_s son rectangulares. Sin embargo los elementos pueden reagruparse de forma que sin cambiar las ecuaciones entre elementos las matrices sean cuadradas, para ello analizaremos con detalle (4.145), llamando P a la matriz $R \cdot M$

$$P = E_s - G_e G_i^{-1} E_o \quad (4.146)$$

podemos expandir el primer término de (4.145)

$$\begin{bmatrix} G_{11}E_1^1 C_1 + \dots + G_{1n}E_n^1 C_n & \dots & G_{11}E_1^m C_1 + \dots + G_{1n}E_n^m C_n \\ \vdots & & \vdots \\ G_{r1}E_1^1 C_1 + \dots + G_{rn}E_n^1 C_n & \dots & G_{r1}E_1^m C_1 + \dots + G_{rn}E_n^m C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 & \dots & P_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ P_r^1 & \dots & P_r^m \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

reorganizando los $R \cdot M$ elementos de las matrices en un vector columna podemos sacar C como factor (vector) común y obtenemos

$$\begin{bmatrix} G_{11}E_1^1 & \cdot & \cdot & G_{1n}E_n^1 \\ G_{r1}E_1^1 & \cdot & \cdot & G_{rn}E_n^1 \\ & & & \\ G_{11}E_1^m & \cdot & \cdot & G_{1n}E_n^m \\ G_{r1}E_1^m & \cdot & \cdot & G_{rn}E_n^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_r^1 \\ \cdot \\ P_1^m \\ P_r^m \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

En el caso de $N = R \cdot M$ (especificación exacta) la matriz formada por $[G_e E_o]$ es cuadrada de $N \cdot N$ y C puede obtenerse a partir de P que contiene los datos de la reconstrucción

$$C = [G_e E_o]^{-1} P \quad (4.149)$$

La primera dificultad de este algoritmo es su implementación en un ordenador. Una imagen de calidad aceptable puede constar de $64 \cdot 64$ pixels lo que representa $N = 4096$. En principio las matrices G_i y $[G_e E_o]$ poseerán N^2 elementos, aunque utilizando una discretización según una malla cuadrada y reciprocidad de la interacción, tendremos muchos elementos repetidos. Aún así el cálculo de $[G_i]^{-1}$ y $[G_e E_o]^{-1}$ puede ser prohibitivo. Una posible solución sería calcular estas matrices con un superordenador y almacenarlas ya que sólo dependen del sistema de medida. De esta forma, la reconstrucción consistiría básicamente en la multiplicación de $[G_e E_o]^{-1}$ de $N \cdot N$ por un vector P de dimensión N lo que requiere del orden de $4N^2$ multiplicaciones en coma flotante. Un problema adicional será el almacenamiento de las matrices $[G_i]^{-1}$ y $[G_e E_o]^{-1}$ de $N \cdot N$ elementos, para $N = 64$ representarían en total unos 256 Mbyte en precisión simple, aunque podrían reducirse apreciablemente con una discretización y posiciones de medida regulares. Estos tamaños condicionan seriamente la viabilidad del algoritmo.

Algunos autores han publicado resultados obtenidos con algoritmos según esta filosofía. Sólo se han reconstruido matrices de pocos elementos [73,74] y la evaluación del algoritmo mediante simulación numérica ha revelado una fuerte inestabilidad de la reconstrucción frente a errores de medida. Una posible causa estriba en una contradicción interna del planteamiento, la hipótesis de campo constante en el interior de una celda obliga a discretizar el objeto con un paso de típicamente $\lambda/10$. Sin embargo sabemos que la resolución vendrá limitada por la difracción a un valor del orden de $\lambda/2$. Lo que significa que un cambio en dos células contiguas no tendrá un efecto apreciable sobre los campos medidos, si en promedio la permitividad no varía.

Así pues estamos ante un algoritmo de superresolución mal condicionado desde el punto de vista numérico. Se ha investigado también la utilización de una función sinc como función base, lo que permite un paso de discretización mayor [74], sin embargo sólo se han obtenido resultados correctos para cuerpos de bajo contraste.

4.8.2 Reconstrucción diferencial

Los algoritmos de primer orden se basan en linealizar la ecuación integral del campo dispersado (3.31) mediante aproximaciones de dispersión débil, de forma que ésta puede invertirse. Para objetos en que sean válidas las aproximaciones de primer orden se obtendrá una imagen que será una versión paso bajo del objeto original. Sin embargo para objetos de mayor contraste, la reconstrucción no será correcta.

En cuerpos altamente difractantes, se ha investigado la obtención de imágenes diferenciales procesando con algoritmos de primer orden, el cambio en campo dispersado producido por alteraciones dieléctricas. Tomando la ecuación de Helmholtz, un cambio pequeño en la función contraste ΔC , producirá un cambio en el campo dispersado en el interior del objeto ΔE_s que puede suponerse pequeño, planteando las ecuaciones correspondientes a la situación inicial y la perturbada

$$(\nabla^2 + k_0^2) E_s = k_0^2 C E \quad (4.150)$$

$$(\nabla^2 + k_0^2) (E_s + \Delta E_s) = k_0^2 (C + \Delta C) E \quad (4.151)$$

restando la primera de la segunda

$$(\nabla^2 + k_0^2) \Delta E_s = k_0^2 \left[C \Delta E_s + \Delta C (E_0 + E_s) + \Delta C \Delta E_s \right] \quad (4.152)$$

si los cambios son pequeños podremos desprejiciar el término de segundo orden $\Delta C \Delta E_s$ frente a los demás

$$(\nabla^2 + k_0^2) \Delta E_s \cong k_0^2 \Delta C E_0 + \mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{E} = k_0^2 (C \Delta E_s + \Delta C E_s) \quad (4.153)$$

si el término de excitación de la ecuación de onda (segundo término de

(4.152)) fuera $k_0^2 \Delta C E_0$ (aprox. Born) reconstruiríamos exactamente el cambio, \mathcal{E} representa por tanto un término de error. Si el objeto es de bajo contraste, $E_s \ll E_0$ y podremos despreciar \mathcal{E} , en caso contrario vemos que si el cambio de C es pequeño y espacialmente localizado y además ΔE_s tiene un comportamiento suave, $\Delta C E_s \gg C \Delta E_s$ en la zona alterada, por ello puede esperarse obtener una imagen cualitativa del cambio, aunque ponderada por el campo total que será desconocido. En el apartado {6.5.1} describiremos las simulaciones realizadas para evaluar esta técnica utilizando un algoritmo de primer orden para geometrías cilíndricas.

4.8.3 Optimización paramétrica

Una forma de resolver un problema inverso consiste en comparar los campos dispersados por un cuerpo medidos, con los evaluados mediante un algoritmo directo, según un modelo numérico del cuerpo. El modelo puede modificarse iterativamente de forma que se reduzca la distancia o error entre los campos medidos y calculados. La optimización continuaría hasta que el error fuese inferior a un mínimo preestablecido (Fig.4.22), obteniendo la reconstrucción de los parámetros originales. Un criterio de error usual es el error cuadrático medio.

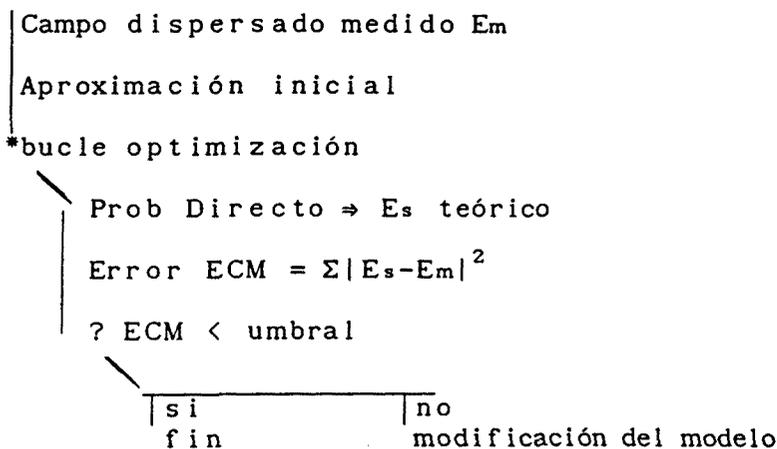


Fig.4.22 Algoritmo de optimización

Este método es particularmente indicado en aquellos casos en que el

objeto puede parametrizarse por un número reducido de variables y se dispone de un algoritmo directo eficiente. Se ha realizado un algoritmo de optimización para geometrías cilíndricas que ha sido evaluado mediante simulación y de forma experimental aplicado a la reconstrucción de cilindros dieléctricos de una o dos capas (6.5.2).

4.8.4 Diversidad de frecuencia

Una forma de mejorar un algoritmo inverso, consiste en ampliar el volumen de información o datos de entrada. En este caso estudiaremos la mejora introducida al utilizar varias medidas de campo dispersado a frecuencias diferentes, pero próximas entre sí ($\approx \pm 5\%$). La filosofía de esta técnica es intentar separar en el espectro de corrientes medido, la componente de bajo contraste que se obtendría si la hipótesis de Born fuera correcta, de la medida real contaminada por un término de alto contraste. La reconstrucción a partir del término de bajo contraste sería correcta. Expresando el campo dispersado en función de las corrientes tenemos

$$E_s(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \int [J_b(r') + J_{hc}(r')] G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.154)$$

donde J_b y J_h son las componentes de bajo y alto contraste de la corriente inducida total en el dieléctrico

$$J_b(r') = -j\omega\epsilon_0 C(r') E_o(r') \quad ; \quad J_{hc}(r') = -j\omega\epsilon_0 C(r') E_s(r') \quad (4.155)$$

En una medida monofrecuencia no parece sencillo separar ambas componentes, sin embargo podemos estimar analíticamente el comportamiento del espectro de corrientes respecto a la frecuencia de trabajo [75]

$$\frac{d\tilde{J}_b}{\tilde{J}_b} \approx \frac{d\tilde{J}_{hc}}{\tilde{J}_{hc}} \approx \frac{dk}{k} \quad (4.156)$$

De este modo con los datos pertenecientes a varias frecuencias, podemos plantear un sistema de ecuaciones que permitan separar ambas componentes. Mediante simulación, se ha comprobado que el método se presenta mal condicionado numéricamente. La causa es que en un cuerpo muy difractante, las componentes de bajo y alto contraste son casi opuestas, de forma que medimos

un vector resultante de amplitud mucho menor

$$\tilde{J}_b(kx) \approx -\tilde{J}_{hc}(kx) \Rightarrow J \ll J_b(r'), J_{hc} \quad (4.157)$$

Por lo tanto la obtención de las componentes será muy sensible al ruido de medida y a la validez de las aproximaciones (4.156).

4.8.5 Síntesis adaptada

Los algoritmos basados en la aproximación de Born, son válidos para cuerpos cuya permitividad sea relativamente homogénea y además similar al medio que les rodea. La última condición obliga a medir en inmersión con un medio de permitividad similar a la del cuerpo. La permitividad promedio de los cuerpos biológicos está en el margen 40-50. Debido a la dificultad de encontrar medios con esta permitividad y pérdidas moderadas, se suele utilizar agua con una constante dieléctrica alrededor de 77. Por este motivo la aproximación de Born, en que se supone un campo total en el objeto similar al incidente, no es válida excepto para cuerpos de pequeño tamaño {3.3.1}.

El método de síntesis adaptada permite medir un cuerpo como si estuviera inmerso en un medio ficticio de constante dieléctrica arbitraria. Supongamos que queremos obtener el espectro de Fourier del cuerpo a partir de los campos dispersados. Para relacionar el espectro de corrientes con el de la función contraste del cuerpo, debemos iluminar éste con una onda canónica, por ejemplo una onda plana. Si existe una diferencia importante entre la permitividad del medio exterior y el cilindro los campos incidente y total en su interior serán muy distintos, en este caso debemos tener en cuenta que la aproximación de onda plana se hace sobre el campo interior del cuerpo. Así el algoritmo de primer orden es válido en condiciones algo más generales que las impuestas por la aproximación de Born. Basta que logremos un campo total en el cuerpo similar a una onda plana. De hecho la situación puede considerarse como un caso particular de la generalización mediante el teorema de reciprocidad a geometrías arbitrarias {4.5.2.3}, considerando como antena la agrupación de medida más el medio externo que rodea el objeto, de esta forma estamos una vez más ante un problema de síntesis de ondas planas.

Para realizar la síntesis de iluminaciones en el interior de un cuerpo debemos conocer de forma aproximada sus características dieléctricas, por ello

será necesario utilizar información 'a-priori'. Por ejemplo contorno exterior y permitividad media esperada. La excitación de la antena de medida para que ésta produzca una onda plana puede calcularse anlíticamente suponiendo un contorno sencillo del objeto respecto a algún sistema de coordenadas.

En {4.5.2.3.A} obtuvimos las corrientes sobre una geometría cilíndrica que producen una onda plana sobre un medio homogéneo (4.78). Calcularemos ahora las corrientes que producirán una onda plana en el interior de un cilindro centrado en la geometría, rodeado de un medio de permitividad diferente.

4.8.5.1 Síntesis de ondas planas sobre cilindros centrados en una geometría cilíndrica

La fig.4.23 describe la situación, un cilindro de radio a y permitividad ϵ_2 , se encuentra centrado respecto a una línea circular de radio R , excitada por corrientes $I(\varphi')$ que calcularemos para obtener ondas planas en el cilindro. El sistema se encuentra en inmersión en un medio de permitividad ϵ_1 .

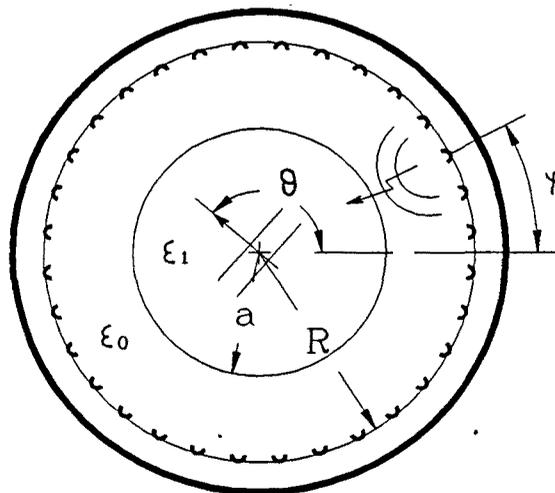


Fig.4.23 Síntesis de ondas planas sobre un cilindro centrado en una agrupación circular

En el interior del cilindro deseamos crear una onda plana en la dirección $\hat{\theta}$

$$E_2(\vec{r}) = e^{-jk_1\hat{\theta}\cdot\vec{r}} = e^{-jk_1\rho\cos(\varphi-\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k_1\rho) e^{jn(\varphi-\theta)} \quad (4.158)$$

En el medio externo tendremos modos incidentes generados por la antena y modos reflejados (dispersados) por la discontinuidad entre medio y cilindro, por ello deberemos utilizar una familia completa por ejemplo

$$E_1(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n J_n(k_0\rho) + b_n H_n^{(2)}(k_0\rho)] e^{jn\varphi} = E_{1o} + E_{1s} \quad (4.159)$$

J_n son los modos incidentes y $H_n^{(2)}$ son ondas propagándose hacia el exterior y por lo tanto modelan la reflexión. Expresando el campo incidente de forma integral mediante la función de Green tenemos

$$E_{1o}(\vec{r}) = -\omega\mu_0/4 \int J(\vec{r}') H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.160)$$

donde r' son las coordenadas de las fuentes en este caso la antena. Expandiendo $H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|)$ en modos cilíndricos centrados en la geometría mediante el Teorema de Adición de las funciones de Bessel [32]

$$H_0^{(2)}(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0\rho') J_n(k_0\rho) e^{jn(\varphi-\varphi')} \quad ; \quad \rho' > \rho \quad (4.161)$$

sustituyendo en (4.160) e intercambiando integral y sumatorio

$$E_{1o}(\rho,\varphi) = \frac{-\omega\mu_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0\rho) H_n^{(2)}(k_0R) e^{jn\varphi} R \int_0^{2\pi} J(\varphi') e^{-jn\varphi'} d\varphi' \quad (4.162)$$

la última integral es la transformada angular de $J \cdot 2\pi$. Igualando a la expresión del campo incidente según modos J_n en (4.159) obtenemos el espectro modal de corrientes en función de los coeficientes a_n

$$\tilde{J}(n) = \frac{-2}{\omega\mu_0 R \pi} \frac{a_n}{H_n^{(2)}(k_0R)} \quad (4.163)$$

Los coeficientes a_n pueden determinarse planteando condiciones de contorno de

los campos en las paredes del cilindro, así para $\rho = a$ deberemos tener continuidad en las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético

$$E_1(a, \varphi) = E_2(a, \varphi) \quad (4.164)$$

$$H_{\varphi 1}(a, \varphi) = H_{\varphi 2}(a, \varphi) \implies \frac{\partial E_1(\vec{r})}{\partial \rho} = \frac{\partial E_2(\vec{r})}{\partial \rho}; \vec{r} = (a, \varphi) \quad (4.165)$$

de la continuidad del campo eléctrico obtenemos

$$a_n J_n(k_0 a) + b_n H_n^{(2)}(k_0 a) = j^{-n} J_n(k_1 a) e^{-jn\theta} \quad (4.166)$$

de la continuidad del campo magnético

$$k_0 [a_n J_n'(k_0 a) + b_n H_n^{(2)'}(k_0 a)] = k_1 j^{-n} J_n'(k_1 a) e^{-jn\theta} \quad (4.167)$$

tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas a_n , b_n , resolviendo a_n obtenemos

$$a_n = j^{-n} e^{-jn\theta} \frac{J_n(k_1 a) H_n^{(2)'}(k_0 a) - (k_1/k_0) J_n'(k_1 a) H_n^{(2)}(k_1 a)}{J_n(k_0 a) H_n^{(2)'}(k_0 a) - J_n'(k_0 a) H_n^{(2)}(k_0 a)} \quad (4.168)$$

sustituyendo en (4.163) obtenemos la serie de Fourier de la corriente buscada

$$\tilde{J}(n) = \frac{-2}{\omega \mu_0 R \pi} \frac{j^{-n} e^{-jn\theta}}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \frac{J_n(k_1 a) H_n^{(2)'}(k_0 a) - (k_1/k_0) J_n'(k_1 a) H_n^{(2)}(k_1 a)}{J_n(k_0 a) H_n^{(2)'}(k_0 a) - J_n'(k_0 a) H_n^{(2)}(k_0 a)} \quad (4.169)$$

Nótese que al intervenir θ como una fase lineal en $\tilde{J}(n)$, la corriente es invariante en φ' , es decir para cambiar el ángulo de la onda plana θ , bastará con desplazar angularmente las corrientes sin necesidad de ser reevaluadas. Para el caso particular en que $k_0 = k_1$

$$a_n = j^{-n} e^{-jn\theta}; b_n = 0 \quad (4.170)$$

obteniendo una onda plana para ambos medios para un ángulo $-\theta$.

En el (Cap.6.5.3) se presenta un algoritmo basado en esta formulación y su evaluación numérica y experimental. La aplicabilidad de esta técnica dependerá en primer lugar del parecido del cuerpo a un cilindro homogéneo y en segundo lugar de la capacidad de centrar el cuerpo en la geometría. Estos inconvenientes podrían ser paliados con una formulación más general, por ejemplo la síntesis de ondas planas en cuerpos homogéneos elípticos de posición arbitraria en la geometría de medida. Para ello debería utilizarse una formulación en modos elípticos. Existe una familia de modos derivados de las coordenadas elípticas [69], la ecuación de onda toma la forma de ecuaciones de Mathieu de las que se obtienen dos familias modales ortogonales y completas, sin embargo la complejidad numérica asociada es notoria. Un caso algo menos general pero más abordable sería la síntesis de ondas planas en cilindros homogéneos no centrados que resolveremos a continuación.

4.8.5.2 Síntesis de ondas planas sobre un cilindro no centrado

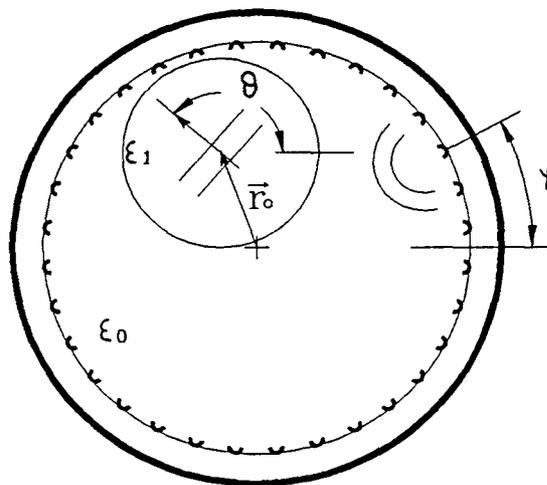


Fig.4.24 Cilindro no centrado en una geometría de medida cilíndrica

La situación se describe en la fig.4.24, $\vec{r}_o = (\rho_o, \varphi_o)$ es el vector de descentrado del cilindro respecto a la geometría. En este caso no existe simetría cilíndrica y la corriente ya no será invariante respecto a θ . Llamando $\vec{r}_c = (\rho_c, \varphi_c)$ a las coordenadas referidas al centro del cilindro, podemos utilizar el resultado del apartado anterior. Para producir una onda plana según $\hat{\theta}$ en el cilindro, necesitamos un campo incidente expresado en modos centrados sobre el cilindro de la forma

$$E_{1o}(\vec{r}_c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(k_o \rho_c) e^{jn\varphi_c} \quad (4.171)$$

con a_n dado por (4.168). El problema a resolver ahora consiste en encontrar el campo incidente expresado según la familia de modos centrados respecto a la geometría de medida, para así poder calcular el espectro de corrientes sobre ésta. Esto puede hacerse mediante el teorema de adición de las funciones de Bessel [69]

$$J_n(k_o \rho_c) e^{jn\varphi_c} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_o \rho_o) J_{n+m}(k_o \rho) e^{j(n+m)\varphi} e^{-jm\varphi_o} \quad (4.172)$$

cada modo referido al centro del cilindro O_c puede expresarse como combinación de modos centrados en la geometría de medida, así sustituyendo en (4.171)

$$E_{1o}(\vec{r}_c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_o \rho_o) J_{n+m}(k_o \rho) e^{j(n+m)\varphi} e^{-jm\varphi_o} \quad (4.173)$$

llamando $p = m+n$ e intercambiando los sumatorios

$$E_{1o}(\vec{r}_c) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_{p-n}(k_o \rho_o) e^{-j(p-n)\varphi_o} J_p(k_o \rho) e^{jp\varphi} \quad (4.174)$$

donde reconocemos los nuevos coeficientes c_p de modos centrados respecto a la antena

$$c_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_{p-n}(k_o \rho_o) e^{-j(p-n)\varphi_o} \quad (4.175)$$

de esta forma las corrientes sobre la antena se obtendrían como en el apartado anterior

$$\tilde{J}(p) = \frac{-2}{\omega\mu_0 R\pi} \frac{c_p}{H_p^{(2)}(k_0 R)} \quad (4.176)$$

Ahora los coeficientes c_p serán diferentes para cada dirección θ de la onda plana, y $J(\varphi')$ no será invariante como ocurría en el caso centrado.

4.8.6 Discusión comparativa

Se han presentado diferentes técnicas que permiten la realización de algoritmos mejor adaptados a la reconstrucción de cuerpos de alto contraste. El método de momentos presenta la ventaja de permitir una formulación matricial exacta del problema, no requerir información 'a-priori' y permitir una gran flexibilidad en la elección de una geometría de medida. Como contrapartida el coste computacional del método es muy elevado, y aún no se ha resuelto su escasa robustez frente al ruido de medida y alto contraste del objeto.

La utilización de diversidad de frecuencia tampoco requiere información 'a-priori', sin embargo la validez de las aproximaciones realizadas dependen del cuerpo a explorar, por otra parte el método se presenta mal condicionado al aumentar el contraste del cuerpo.

Los métodos restantes utilizan información 'a-priori' para obtener la reconstrucción. El método diferencial permite en principio reconstruir cualitativamente variaciones de permitividad de cuerpos usando algoritmos de primer orden. El método de optimización podrá aplicarse si el cuerpo admite una parametrización con pocas variables.

Finalmente la técnica de síntesis adaptada basada en sintetizar iluminaciones en el interior del cuerpo, puede considerarse un refinamiento de los algoritmos de primer orden. Sin embargo su validez se restringe a cuerpos que pueden aproximarse mediante formas sencillas, que admiten una solución analítica para el cálculo de los campos en su interior. Estos métodos han sido implementados y evaluados para una geometría de medida cilíndrica por lo que se describen en el Cap.6, la sección (6.6) es un estudio comparativo de los métodos utilizando el criterio de error cuadrático medio en la reconstrucción de cilindros.

CAPÍTULO 5 SISTEMAS CON GEOMETRÍA PLANA

Los sistemas con geometría plana han sido estudiados por varios autores tanto en el aspecto de algoritmos de reconstrucción como de instrumentación de medida [5,50,61] y son un punto de referencia en el estudio de nuevas geometrías como la cilíndrica. Por este motivo, se ha dedicado un capítulo a los sistemas planos en el que se analizan brevemente las técnicas y sistemas publicados, en los aspectos constructivos y de reconstrucción.

5.1 Características generales y clasificación de los sistemas

Los sistemas desarrollados hasta el momento para formación de imágenes de cuerpos biológicos, estaban basados en geometrías planas de medida. Las primeras imágenes fueron obtenidas por los doctores Larsen y Jacobi del Walter Reed Army Institute [1]. La imagen era el coeficiente de transmisión medido entre dos antenas enfrentadas colocadas a cada lado del cuerpo, que se movían simultáneamente realizando un barrido sobre un plano. Las imágenes correspondían a la componente copolar o de polarización cruzada respecto a la incidente. A pesar de la simplicidad del sistema, obtuvieron imágenes de un riñón de perro mostrando detalles de su estructura interna. La potencia de iluminación era de 1W a 3.9 GHz con un tiempo de medida de varias horas.

Un sistema ya más evolucionado fue desarrollado posteriormente por Foti [76], consistía en dos agrupaciones de medida planares y enfrentadas con 127 elementos la receptora y 151 la emisora, la agrupación receptora podía desplazarse longitudinalmente permitiendo sintetizar un array volumétrico. El direccionamiento de los elementos se realizaba mediante conmutadores de radiofrecuencia con un tiempo de medida del orden del minuto. La potencia utilizada era de 20 W a una frecuencia de 3 a 4 GHz. El algoritmo de reconstrucción estaba basado en un operador de focalización obtenido al ponderar cada elemento con el inverso de la función de Green centrada en el punto de focalización (4.16). Esto asegura coherencia en la fase que quedaba conjugada y compensación de amplitud de modo que cada elemento de la agrupación contribuye de forma uniforme a la focalización.

Se han desarrollado también sistemas basados en la medida del campo reflejado por un cuerpo, el grupo del Prof. Anderson de la Univ. de Sheffield evaluó un sistema funcionando en aire a una frecuencia de 32 GHz con una

longitud de onda similar a los sistemas de aplicación médica en agua a frecuencias inferiores. La medida se realizaba desplazando un par de antenas juntas emisora y receptora en un plano mediante posicionadores de dos ejes. El algoritmo utilizado era un operador de focalización. También han realizado medidas de objetos dieléctricos de baja permitividad sumergidos en aceite, utilizando una iluminación en onda plana, y midiendo el campo en transmisión sobre una línea recta [77]. Realizando una adquisición multivista girando el objeto, se utilizaba un algoritmo de recubrimiento espectral para reconstruir de forma cuantitativa su permitividad.

Una geometría que permite una exploración volumétrica con un mínimo de elementos consiste en dos agrupaciones lineales dispuestas en cruz [78], una de ellas funcionando como transmisora y la segunda como receptora. Pueden realizarse medidas en transmisión separando las agrupaciones una cierta distancia y colocando el cuerpo a explorar entre ellas, o bien en reflexión con las agrupaciones al mismo lado del cuerpo. La reconstrucción de imágenes se hace mediante un algoritmo de focalización que actúa concentrando la iluminación de la agrupación emisora y focalizando la agrupación receptora sobre el punto explorado. Los operadores son convolucionales en la dirección de la agrupación, por lo que pueden utilizarse métodos espectrales. Esta técnica ha sido evaluada en la configuración de transmisión, demostrándose su capacidad para la obtención de tomografías de objetos dieléctricos en aire [62].

Una forma de evitar movimientos mecánicos para obtener varias iluminaciones sobre el cuerpo consiste en sintetizar ondas planas en varias direcciones a partir de una agrupación lineal estática de antenas [31]. La síntesis puede realizarse controlando electrónicamente las amplitudes y fases de los elementos o alternativamente procesando numéricamente las medidas, opción que suele ser preferible dado el coste de una agrupación de amplitud/fase controlada. El grupo del profesor Hermert de la Universidad de Erlangen (Alemania) evaluó experimentalmente un sistema de este tipo, simulando las agrupaciones mediante un barrido mecánico de dos sondas [79].

Una técnica utilizada para la medida indirecta del campo es la difusión modulada, basada en colocar una pequeña sonda difusora en el punto donde queremos medir. El campo dispersado por la sonda se mide con una antena colectora que cubre toda la zona de medida. Al modular con una señal de baja frecuencia la reflectividad de la sonda, puede extraerse mediante técnicas de correlación el campo dispersado por ésta del campo incidente o dispersado por

otros elementos estáticos. De esta forma pueden construirse retinas lineales o superficiales formadas por agrupaciones de sondas, que permiten la medida rápida del campo utilizando modulación secuencial de elementos. Así se consigue una medida equivalente a una agrupación de antenas que obligaría a utilizar multiplexores de radiofrecuencia de complejidad y coste elevados. Como contrapartida, la sensibilidad de un sistema de difusión modulada es menor que el de una agrupación de antenas equivalente, debido a la pérdida por reradiación de la sonda sobre la antena colectora. La técnica fue aplicada a los sistemas de formación de imágenes por el grupo del Prof. Bolomey en SUPELEC (París), realizando una cámara plana de microondas [5]. El cuerpo a explorar se ilumina con una onda plana producida por una bocina y los campos dispersados por el cuerpo se miden sobre una retina cuadrada en un tiempo del orden del segundo. El sistema puede trabajar en transmisión o reflexión colocando la retina sobre la antena iluminadora o sobre una bocina similar enfrentada al otro lado del cuerpo. La frecuencia de trabajo es de 3GHz con una potencia de iluminación del orden del Watio resultando en una densidad de iluminación $< 10 \text{ mW/cm}^2$. La imagen se reconstruye mediante retropropagación e inversión de corrientes plano a plano, que puede interpretarse como un operador de focalización (4.5.1.1).

Girando el cuerpo o la agrupación, puede obtenerse el campo dispersado para varias incidencias o vistas, en este caso es conveniente utilizar un algoritmo basado en el recubrimiento espectral de la función contraste [5]. La ventaja de este sistema frente a agrupaciones lineales es la medida del campo en dos dimensiones, es decir realiza electrónicamente una exploración axial, que con un tomógrafo obligaría a desplazar mecánicamente la agrupación o el cuerpo. Con este sistema se han obtenido imágenes de extremidades, órganos aislados sometidos a diferentes condiciones de perfusión, e imágenes térmicas de agua a diferentes temperaturas [7].

La técnica de difusión modulada ha sido utilizada también para la medida y diagnóstico de antenas en campo próximo y en sistemas de visualización de objetos enterrados, en este caso puede recubrirse el dominio espectral del objeto gracias a la medida del campo dispersado en una banda suficientemente ancha de frecuencias [80].

5.2 Configuraciones de medida: transmisión y reflexión

Los sistemas planos al tener una agrupación de geometría abierta, en general pueden medir únicamente las ondas con una componente en la dirección de la agrupación. Para recoger el campo producido o dispersado por un objeto de forma completa debería disponerse de una antena a cada lado de las fuentes. En la práctica se mide con una única agrupación que puede estar en el lado de la antena iluminadora (medida en reflexión) o en el lado opuesto (medida en transmisión). Una configuración en transmisión presenta la ventaja de que el cuerpo contribuye de forma más uniforme al campo dispersado especialmente en medios con pérdidas. Por otra parte el campo dispersado sobre la agrupación es del mismo orden de magnitud que el incidente, lo que permite obtener el campo dispersado como sustracción numérica de las medidas de campo incidente y campo total. Un hecho a tener en cuenta es que en cuerpos poco difractantes, el campo dispersado presenta un máximo en la dirección de transmisión.

Una configuración en reflexión será usualmente más compacta que un sistema en transmisión, debido a que permite agrupar las antenas emisora y receptora en un sólo bloque. Una dificultad que plantean los sistemas en reflexión estriba en la medida de campos dispersados débiles en presencia de una campo de iluminación muy intenso (especialmente en medios con pérdidas), aunque pueden idearse métodos para minimizar el acoplamiento entre antenas emisora y receptora [81]. Una geometría en reflexión, no posee una sensibilidad espacial uniforme en medios con pérdidas, pues en zonas cercanas a la agrupación el campo de iluminación será mayor, y menor será la atenuación que sufrirán los campos dispersados. Por ello dejando al margen los problemas de realización, en medios con pérdidas y objetos de alto contraste, una configuración en reflexión estará mejor adaptada a la reconstrucción de regiones superficiales, mientras que para reconstruir zonas profundas será mejor usar una configuración en transmisión.

5.3 Realización de algoritmos de primer orden

En el Cap.4 obtuvimos una formulación general de algoritmos bajo aproximaciones de primer orden, un aspecto importante es su implementación en ordenadores digitales y eficiencia numérica dada una geometría de medida.

Los algoritmos basados en operadores de focalización utilizarán la

aproximación de Born para el cálculo del operador y para obtener el contraste del objeto a partir de la reconstrucción de corrientes, proporcionando una imagen para cada iluminación o vista.

Por otra parte los algoritmos de recubrimiento espectral requieren la medida del campo dispersado para varias vistas, admitiendo dos implementaciones matemáticamente equivalentes, pero con una eficiencia de cómputo muy distinta: algoritmos de interpolación espectral y de interpolación espacial.

5.3.1 Algoritmos de focalización

En el apartado (4.5.1.3) habíamos visto un operador de focalización para geometría plana, obtenido a partir de la distribución de corrientes que produce un campo parecido a una delta en cada plano de reconstrucción. Posteriormente comprobamos que el operador de focalización se obtenía también al invertir la ecuación integral considerando las corrientes fuente confinadas en un plano transversal (4.51). La reconstrucción de corrientes aplicando el operador de focalización sobre el campo medido puede expresarse como espectro angular según ejes ortogonales \hat{u}, \hat{v} orientados arbitrariamente respecto a las coordenadas del cuerpo como muestra la fig.5.1

$$J_r(k_u, v) = \frac{-2 k_v}{\omega \mu_0} e^{jk_v(v_m - v)} \tilde{E}(k_u; v_m) \quad (5.1)$$

el contraste se obtendrá al utilizar la aproximación de Born sobre el campo total

$$C(r) \cong \frac{j}{\omega \epsilon_0} \frac{J(r)}{E_0(r)} \quad (5.2)$$

si utilizamos un campo incidente dirigido según \hat{v} (transmisión) obtenemos

$$E_0(u, v) = e^{-jk_0 v} \implies C(u, v) \cong \frac{j}{\omega \epsilon_0} J(u, v) e^{jk_0 v} \quad (5.3)$$

transformando para obtener el espectro angular de C según k_u y utilizando (5.1) tenemos para un sistema en transmisión

$$\tilde{C}^T(k_u, v) \cong \frac{j}{\omega \epsilon_0} e^{jk_0 v} J(k_u, v) = \frac{-2j}{k_0^2} k_v e^{-j(kv-k_0)v} e^{jk_v v m} \tilde{E}(k_u; v m) \quad (5.4)$$

donde $k_v = \sqrt{k_0^2 - k_u^2}$

la reconstrucción del contraste será la transformada inversa de Fourier según el eje \hat{u} para cada profundidad v . En un sistema trabajando en reflexión utilizaremos un campo incidente dirigido según $-\hat{v}$ y obtenemos

$$\tilde{C}^R(k_u, v) \cong \frac{j}{\omega \epsilon_0} e^{jk_0 v} J(k_u, v) = \frac{-2j}{k_0^2} k_v e^{-j(kv+k_0)v} e^{jk_v v m} \tilde{E}(k_u; v m) \quad (5.5)$$

Para una agrupación de Q elementos y una imagen de $N \cdot N$ pixels la eficiencia numérica puede expresarse en función del número de FFT. Para este algoritmo tendremos una FFT de Q puntos para transformar el campo, más una FFT para cada coordenada v (profundidad) de la imagen en total $1 \text{ FFT}(Q) + N \text{ FFT}(N)$.

En el caso de que se utilice una agrupación para radiar el campo incidente, puede diseñarse un algoritmo de focalización, en que la focalización del campo medido en cada punto del cuerpo, se combina con focalización de la agrupación emisora. De esta forma, al maximizar el campo total en el punto de interés se mejora la resolución del sistema.

5.3.2 Interpolación espectral

En el apartado {4.6.1.1} habíamos visto que iluminando un cuerpo con una onda plana, el espectro angular del campo dispersado contenía la información del espectro del cuerpo en un círculo de radio k_0 . Normalmente se mide el campo dispersado con una línea paralela al frente de onda incidente. Según la línea de medida esté en el lado de iluminación o en el opuesto, tendremos una configuración en reflexión o en transmisión respectivamente. Particularizando la expresión del espectro del cuerpo en función de los campos dispersados (4.88), para una geometría orientada según los ejes u, v y una línea de medida situada en el plano v_0 exterior al cuerpo

Transmisión $v_o > v'_{\max}$

$$\tilde{C}[k_o(\hat{\theta}-\hat{\theta}_o)] \cong \frac{j}{\omega \epsilon_o} \tilde{J}(\vec{\eta}) = \frac{-2j}{k_o^2} \tilde{\xi}_s(\theta) \left| \begin{array}{l} = \frac{-2j\eta_v}{k_o^2} e^{j\eta_v v_o} \tilde{E}_s(\eta_u, v_o) \\ |\theta| \leq \pi/2 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\vec{\eta} = (\eta_u, \eta_v) = (\eta_u, \sqrt{k_o^2 - \eta_u^2}) ; \eta_u \in (-k_o, k_o) ; \hat{\theta} = \frac{\vec{\eta}}{\eta}$$

Reflexión $v_o < v'_{\min}$

$$\tilde{C}[k_o(\hat{\theta}-\hat{\theta}_o)] \cong \frac{j}{\omega \epsilon_o} \tilde{J}(\vec{\eta}) = \frac{-2j}{k_o^2} \tilde{\xi}_s(\theta) \left| \begin{array}{l} = \frac{-2j\eta_v}{k_o^2} e^{-j\eta_v v_o} \tilde{E}_s(\eta_u, v_o) \\ |\theta| > \pi/2 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\vec{\eta} = (\eta_u, \eta_v) = (\eta_u, -\sqrt{k_o^2 - \eta_u^2}) ; \eta_u \in (-k_o, k_o) ; \hat{\theta} = \frac{\vec{\eta}}{\eta}$$

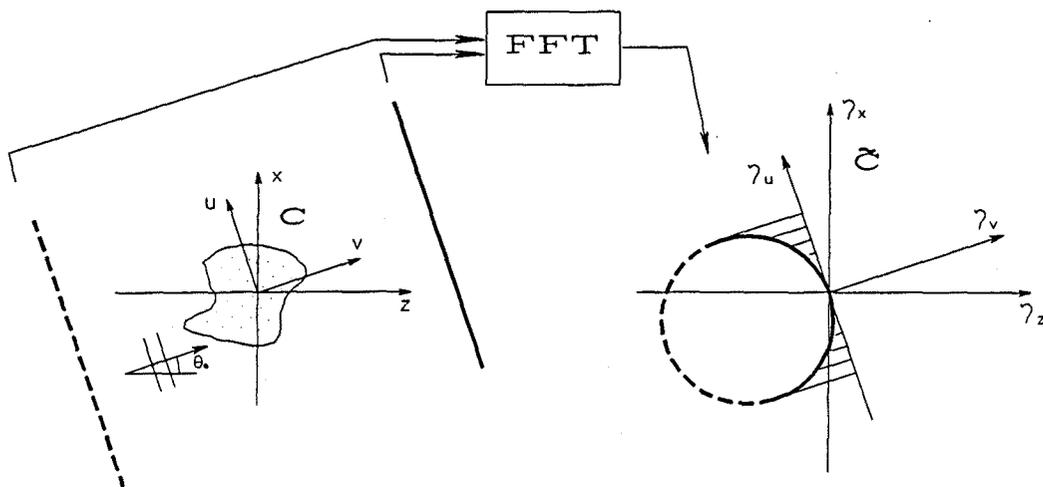


Fig.5.1 Espectro del cuerpo para una vista, muestras en el círculo.

La fig.5.1 muestra la obtención del espectro del contraste del cuerpo

para una iluminación o vista arbitraria, girando el cuerpo o las antenas sobre el eje ortogonal al plano de exploración se obtendrán un conjunto de círculos que cubrirán una región del espectro. La cobertura espectral de los sistemas en transmisión y en reflexión se muestra en la fig.5.2.

Nótese que un sistema en transmisión obtiene una versión paso bajo del objeto con una frecuencia de corte de $\sqrt{2} k_0$, mientras que un sistema en reflexión sólo tiene acceso a una región anular paso-banda entre $\sqrt{2} k_0$ y $2 k_0$. La parte baja del espectro contiene la información de variaciones lentas de la permitividad del cuerpo y es necesaria para obtener una reconstrucción aceptable. Por este motivo en un sistema en reflexión debe recurrirse a medidas multifrecuencia y técnicas de continuación analítica para extender el espectro y obtener la información de bajas frecuencias [82]. El hecho de utilizar multifrecuencia, si el ancho de banda es grande, proporciona un recubrimiento importante del espectro del objeto de forma que éste puede obtenerse a partir de un incidencia única, lo que tiene aplicación en sistemas de formación de imágenes de objetos enterrados [80].

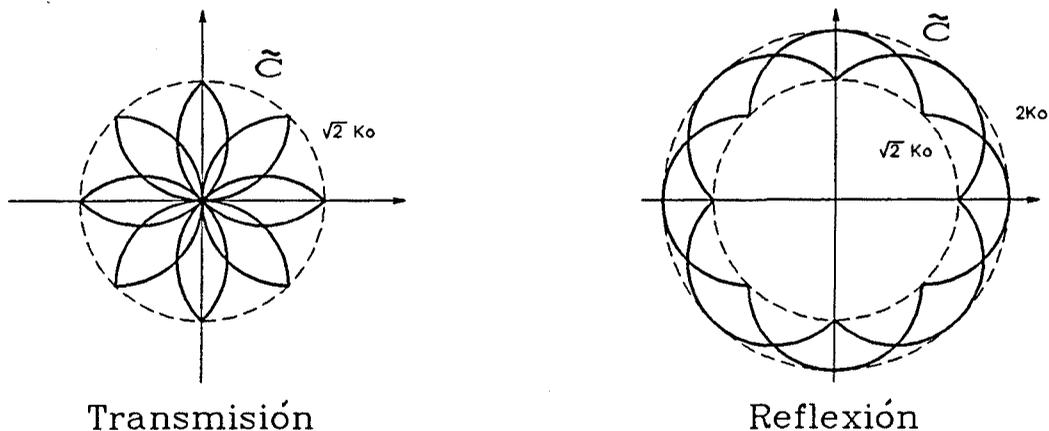


Fig.5.2 Cobertura espectral proporcionada por una medidas en transmisión y reflexión

La obtención del espectro angular del campo se realiza habitualmente mediante un algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT), teniendo en cuenta las características de paso de medida y longitud de la agrupación. De

esta forma, se obtiene el espectro en círculos con muestras equiespaciadas según η_u (5.6, 5.7) como muestra la fig.5.1. Un problema que plantean los algoritmos de recubrimiento espectral, es la inversión del espectro a partir de muestras de espaciado no uniforme. La técnica habitual es obtener muestras sobre una cuadrícula rectangular mediante interpolación, de aquí el nombre de interpolación espectral de este algoritmo, de esta forma la inversión puede obtenerse de forma muy eficiente con una FFT bidimensional. Para ello, los datos se almacenan en una matriz bidimensional con índices que representan la posición angular de la vista (θ_0) y la variable η_u del espectro angular del campo. Para cada punto de la retícula rectangular que deseamos llenar, se calcula su posición en las coordenadas (θ_0, η_u) , que en general no coincidirán con las muestras disponibles. El valor del punto deseado se obtiene a partir de una interpolación de los elementos vecinos.

Si se utiliza un número elevado de vistas, el muestreo espectral será denso ocasionando un error de interpolación pequeño. Para un número reducido de iluminaciones puede ser preferible utilizar un algoritmo de máxima entropía para la inversión, de forma que se obtiene un cuerpo de mínima información compatible con las muestras espectrales conocidas [56].

Existen muchos algoritmos de interpolación, por ejemplo en orden de complejidad creciente: vecino más próximo, interpolación bilineal, y spline [31,83]. Este último se acerca mucho a la interpolación ideal de una señal de banda limitada obtenida al superponer funciones sinc ponderadas por las muestras (filtro paso-bajo ideal). En general la elección es un compromiso entre el error producido y la eficiencia numérica. Una técnica muy utilizada consiste en aumentar la densidad de muestras de partida antes de realizar la interpolación. Esto puede hacerse de forma eficiente mediante una FFT añadiendo zeros en la zona de alta frecuencia del dominio transformado ('zero-padding') y realizando la FFT inversa. De esta forma puede ser más eficiente aumentar la densidad de muestreo y utilizar un interpolación de vecino más próximo que un método sofisticado como el spline con la densidad original. Un estudio de la incidencia de la interpolación de vecino más próximo y bilineal en la reconstrucción se encuentra en [31].

La estimación del tiempo de cálculo del algoritmo puede hacerse en función del número de FFT requerido, para una agrupación de N elementos y V vistas necesitaremos una FFT de N puntos por vista para obtener el espectro angular del campo y tras realizar la interpolación $2N$ FFT para invertir el espectro bidimensional del cuerpo, es decir un total de $V+2N$ FFT(N)

obteniéndose una imagen de $N \cdot N$ pixels. No se ha tenido en cuenta el tiempo consumido por la interpolación bidimensional del espectro, por ejemplo si para mejorar la interpolación se aumenta la densidad de muestreo en un factor M mediante FFT y extendiendo el espectro con ceros habrá que añadir $2N \text{ FFT}(N) + 2N \cdot M \text{ FFT}(N \cdot M)$.

5.3.3 Interpolación espacial

En el algoritmo de interpolación espectral la información correspondiente a cada vista o incidencia se añadía en el dominio transformado, para obtener el objeto como transformada inversa del espectro. Dada la linealidad de este procedimiento, es posible adicionar la información de cada vista en el dominio espacial. Como veremos, cada vista proporciona una imagen parcial del objeto sobre una retícula rectangular orientada según la dirección de la onda plana incidente. La imagen multivista se obtendrá al sumar una serie de mallas giradas, y al no coincidir las posiciones de los elementos deberemos recurrir a una interpolación en el dominio espacial.

Este procedimiento fue derivado por Devaney [84] con el nombre de 'filtered-backpropagation' y es equivalente para radiaciones que sufren difracción, al algoritmo de 'backprojection' utilizado en tomografía de Rayos X. Desde el punto de vista matemático la combinación espacial es totalmente equivalente a la combinación espectral, sin embargo la eficiencia numérica del algoritmo de interpolación espacial es mucho más baja.

La formulación del algoritmo para un sistema en transmisión se encuentra en [31] por lo que comentaremos brevemente su derivación, básicamente se realiza una serie de cambios de variables en la inversión del dominio espectral del objeto, de modo que nos queda una integral respecto al ángulo de iluminación θ_0 que representa la combinación espacial de vistas. La reconstrucción del contraste del cuerpo C_r conociendo su espectro es

$$C_r(x,z) = 1/4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}(\eta_x, \eta_z) e^{-j(\eta_x x + \eta_z z)} d\eta_x d\eta_z \quad (5.8)$$

realizando el cambio de variables $(\eta_x, \eta_z) \iff (\theta, \theta_0)$ obtenemos (fig.5.3)

$$C_r(x,z) = 1/8\pi^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{C}(\theta, \theta_0) e^{-j(\eta_x x + \eta_z z)} k_0^2 |\sin(\theta - \theta_0)| d\theta d\theta_0 \quad (5.9)$$

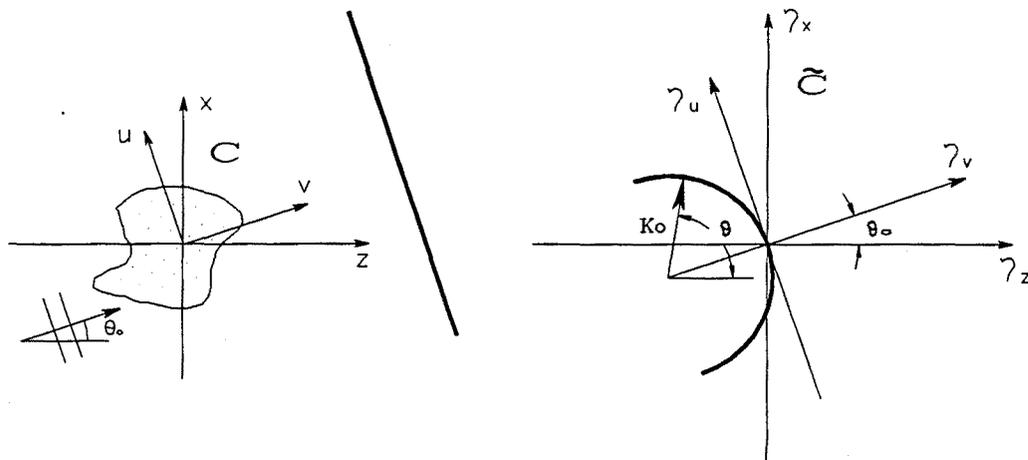


Fig.5.3 Dominio espectral del contraste del cuerpo

Una vez obtenido el espectro angular del campo, el espectro del objeto estará según las coordenadas (η_u, θ_0) , así realizando el cambio de variable entre θ y η_u y sustituyendo el espectro del contraste en función del espectro angular del campo dispersado en transmisión (5.6) se llega a

$$C_r(u,v) = \frac{-j}{4\pi^2 k_0} \int_0^{2\pi} \int_{-k_0}^{k_0} \tilde{E}_s(\eta_u, \theta_0) e^{-j[\eta_u u + (\eta_v - k_0)v]} e^{j\eta_v v_0} |\eta_u| d\eta_u d\theta_0 \quad (5.10)$$

$$C_r(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\{ A(\eta_u, \theta_0; v) \} d\theta_0 \quad (5.11)$$

siendo 'A una función del espectro angular del campo y de la profundidad espacial de la reconstrucción v

$$A(\eta_u;v) = \frac{-j}{k_o} \tilde{E}_s(\eta_u, \theta_o) e^{-j(\eta_v - k_o)v} e^{j\eta_v v_o} |\eta_u| \quad ; \quad \eta_v = \sqrt{k_o^2 - \eta_u^2} \quad (5.12)$$

La integral en θ_o representa la adición del dominio espacial de cada vista según la retícula u,v que en general no coincidirán con la malla x,z en que acumularemos la información. Debemos realizar por tanto una interpolación entre ambas mallas. La integral según η_u puede calcularse mediante FFT pero debe reevaluarse para cada profundidad v el integrando. Para V vistas y una imagen de $N \cdot N$ pixels necesitaremos $V(N+1)$ FFT(N) sin tener en cuenta la interpolación. Usualmente $V \approx N$ y como la interpolación espectral y espacial son similares, el tiempo de cálculo de este algoritmo es muy superior al del algoritmo de interpolación espectral.

Al comparar la reconstrucción de una vista (5.10) con el algoritmo de focalización (5.4), veremos que tan sólo difieren en constantes y el término $|\eta_u| \leftrightarrow kv$. La discrepancia es debida a que el algoritmo de retropropagación se ha obtenido de forma que garantiza una cobertura espectral uniforme al combinar las vistas, condición que no se ha impuesto en la derivación del algoritmo de focalización. El término $|\eta_u|$ en el algoritmo de retropropagación pondera con mayor peso la región de altas frecuencias correspondiente a η_u elevadas donde el recubrimiento espectral es menos denso (ver fig.5.2), de esta forma, éste puede interpretarse como un algoritmo de focalización "ecualizado" para tener una cobertura uniforme del espectro en la combinación aditiva. Por este motivo al trabajar con incidencia múltiple será preferible utilizar retropropagación o mejor aún interpolación espectral para una mayor eficiencia.

CAPÍTULO 6 SISTEMAS CON GEOMETRÍA CILÍNDRICA

En este capítulo se estudiarán las características generales de un sistema con geometría cilíndrica, en los aspectos de instrumentación de medida y algoritmos de reconstrucción. En los sistemas planos, una medida con iluminaciones múltiples, requería la rotación mecánica de la agrupación o el cuerpo. La utilización de una agrupación envolvente presenta la ventaja de permitir una medida muy rápida, al utilizar conmutación electrónica de elementos para modificar la iluminación.

El estudio de un tomógrafo cilíndrico en relación con los sistemas lineales convencionales puede considerarse una evolución paralela a la de los sistemas de tomografía de Rayos X. La primera generación de 'scanners' estaba basada en geometrías planas utilizando rotación mecánica para cambiar la dirección de incidencia de los haces. La última generación de estos sistemas, utiliza una disposición circular de fuentes y sensores de complejidad mayor. Los algoritmos relativamente simples en un sistema plano, han sido modificados para la geometría circular ('fan-beam tomography' [85]). Todo ello en beneficio de un tiempo de medida menor, minimizando la exposición del paciente y mejorando la explotación clínica de estos equipos.

6.1 Características generales

A grandes rasgos un sistema cilíndrico constará de una agrupación circular de medida capaz de focalizar la radiación sobre un corte del cuerpo a explorar, un emisor/receptor coherente de microondas, los subsistemas de control, adquisición, etc. y un ordenador que controlará el sistema y ejecutará los programas de reconstrucción de imágenes y representación de la imagen. La fig.6.1 es un diagrama de bloques básico del sistema.

Una antena es un elemento recíproco que puede actuar como fuente y sensor. Por ello es posible utilizar una única agrupación envolvente capaz de radiar el campo de iluminación y medir los campos dispersados. Debido a las elevadas atenuaciones de los tejidos biológicos a frecuencias de microondas, la utilización de una agrupación única con elementos emisores y receptores actuando simultáneamente, dará lugar a serios problemas de compatibilidad electromagnética (EMC) que deberán resolverse mediante arquitecturas de radiofrecuencia adecuadas.

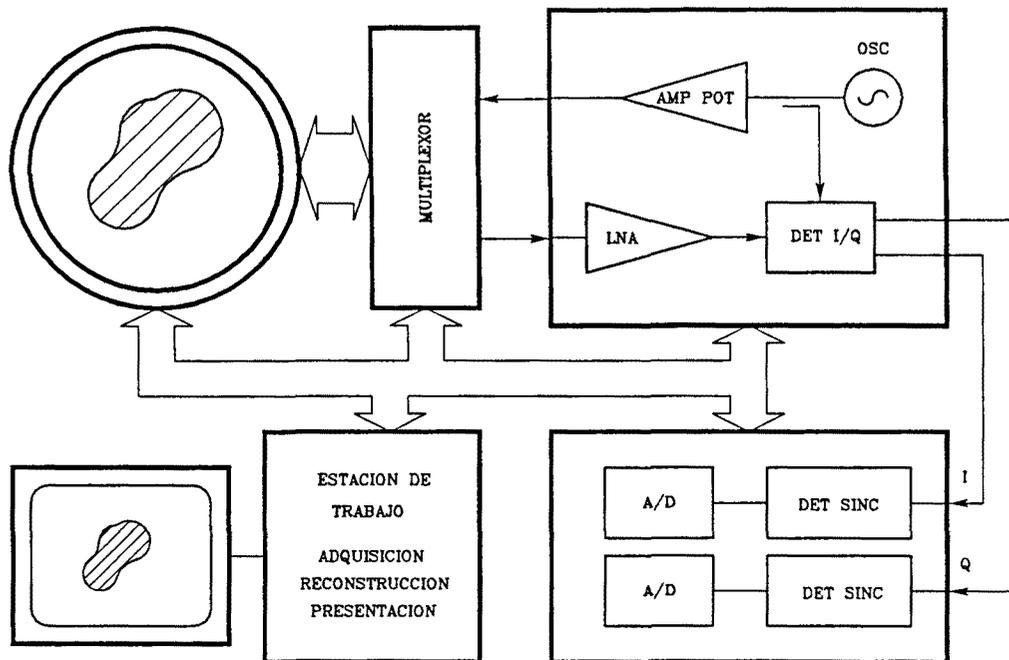


Fig.6.1 Diagrama de bloques de un sistema cilíndrico de formación de imágenes.

La medida de los valores complejos del campo se realiza con un detector fase/cuadratura (I/Q) coherente. Básicamente es un mezclador doble que entrega a su salida la proyección del fasor recibido sobre los ejes fase (0°) y cuadratura ($+90^\circ$) fijados por una señal de referencia. El sistema de la fig.6.1 emplea un detector homodino que utiliza como referencia un muestra de la señal emitida.

En el apartado de algoritmos, el diseño de operadores de focalización, o algoritmos de recubrimiento espectral, requerirán la iluminación con ondas planas o cilíndricas centradas, que se obtendrán de forma sintética.

6.2 Agrupación de medida

En un sistema cilíndrico, las características de la agrupación de medida determinarán el diámetro máximo de los cuerpos a reconstruir, condicionando en

gran parte los niveles de potencia y la arquitectura de radiofrecuencia.

Por cuestiones de adaptación, es conveniente trabajar con el cuerpo y la agrupación sumergidos en un líquido de permitividad parecida a la de los tejidos biológicos. Una ventaja adicional es la disminución de la distancia entre elementos de una agrupación en un factor $\sqrt{\epsilon_r}$ respecto a una agrupación en aire, con la consiguiente reducción de diámetro. Un líquido de constante dieléctrica alta y bajas pérdidas sería ideal, sin embargo no se ha encontrado un medio con estas características. Normalmente se utiliza el agua como medio de medida, al ser reproducible, de pérdidas moderadas sobre todo si se utiliza desionizada, y de coste muy bajo. Las pérdidas del agua suprimen las reflexiones múltiples, permitiendo trabajar en condiciones anecóicas sin utilizar materiales absorbentes.

Aunque podría pensarse en utilizar agrupaciones de amplitud y fase controladas, por razones tecnológicas y de coste es mucho más abordable la realización de agrupaciones conmutadas donde se direccionan secuencialmente los elementos mediante multiplexores. A posteriori puede sintetizarse la iluminación deseada, combinando las medidas con los pesos apropiados numéricamente en un ordenador.

La utilización de una formulación bidimensional en la reconstrucción, supone que el cuerpo es invariante respecto a un eje y que utilizamos antenas que producen campos uniformes según el eje del cuerpo. Un sistema real será una buena aproximación al caso bidimensional, en la medida en que seamos capaces de concentrar la radiación en un plano o corte del cuerpo. La polarización del campo eléctrico deberá ser axial si queremos usar la ecuación de onda escalar o de Helmholtz (3.9) para reducir la complejidad del problema. Si la divergencia axial de la radiación en la zona de medida es pequeña puede suponerse que cada elemento de la agrupación produce una onda aproximadamente cilíndrica, lo que permite adoptar una formulación bidimensional de los campos. Por ello deberemos utilizar alguna técnica de focalización en la agrupación de medida. El grosor del corte determinará la resolución axial del sistema, al integrar la medida las variaciones del cuerpo en este eje.

6.2.1 Radiación de guías y ranuras en agua

Para sintetizar iluminaciones arbitrarias como combinación de los campos producidos por los elementos de una agrupación, supondremos que éstos se

comportan como fuentes puntuales, produciendo en la región de medida un campo similar al radiado por un hilo de corriente infinito. De esta forma obtendremos una onda cilíndrica, o una buena aproximación si la divergencia axial de la radiación es baja. Como antenas elementales podemos utilizar dipolos, bocas de guía o ranuras debiendo producir un campo eléctrico polarizado según el eje de la agrupación. Se ha hecho un estudio experimental de las características de las antenas elementales radiando en agua, observando que en el caso de dipolos y ranuras, la longitud de la antena al exceder el valor de resonancia no influye apreciablemente sobre la impedancia de la antena ni en sus características de radiación. Esto es debido a que más allá de la longitud de resonancia la amplitud de corrientes o campos queda sensiblemente atenuada respecto a la zona cercana al punto de alimentación.

En cuanto a la radiación de bocas de guía, en primer lugar teniendo en cuenta que el dieléctrico de la guía será agua, tendremos una atenuación debida a la distancia entre la región de excitación del modo (normalmente el TE₁₀ en guía rectangular) y el plano de la boca de guía. Una ventaja al utilizar ondas guiadas, es la posibilidad de realizar bocinas en el plano E. De esta forma puede obtenerse en campo próximo, una radiación colimada en una zona de espesor similar al tamaño de la bocina.

Para calcular la atenuación del campo en el interior de una guía rectangular, podemos interpretar los modos como ondas planas cuya dirección de propagación forma un ángulo θ respecto a un plano transversal [9], para el modo TE₁₀

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{2a} = \frac{f_c}{f} \quad (6.1)$$

donde f_c es la frecuencia de corte de la guía, en primera aproximación puede usarse la frecuencia de corte para un medio sin pérdidas. La constante de atenuación en la guía puede calcularse utilizando la constante de atenuación de la onda plana y la distancia recorrida por ésta en relación con la distancia recorrida en la guía

$$\alpha_{guía} = \alpha \frac{l_{plana}}{l_{guía}} = \frac{\alpha}{\sin \theta} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} \quad (6.2)$$

donde $jk_0 = \alpha + j\beta$ y α es la constante de atenuación del medio en Nep/m dada por (2.3).

La atenuación en la guía será mayor que la de una onda plana y especialmente elevada para frecuencias cercanas al corte. Por ello, al igual que ocurre con los dominios visible e invisible de los campos, no existe una frecuencia de corte bien delimitada en guías con pérdidas.

La atenuación al radiar en medios con pérdidas puede calcularse utilizando un número de onda k_0 complejo en la expresión del campo. En un problema bidimensional, la radiación de una antena elemental, producirá una onda cilíndrica propagándose hacia el exterior $H_0^{(2)}(k_0\rho)$. El campo a grandes distancias puede expresarse asintóticamente como

$$H_0^{(2)}(k_0\rho) \underset{(\rho \gg \lambda)}{\cong} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0\rho}} e^{-jk_0\rho} \quad (6.3)$$

de forma que el campo sufrirá una atenuación en dB

$$E(\rho_2) = E(\rho_1) - 10 \log(\rho_2/\rho_1) - (\rho_2 - \rho_1) \cdot 8.686 \cdot \alpha \quad (\text{dB}) \quad (6.4)$$

el último término corresponde a la disipación de energía en el medio, por ejemplo para agua a 25°C y a 2.45 GHz

$$\epsilon' = 77, \quad \text{tg}\delta = 0.1 \implies \alpha = 22 \text{ Nep/m} \approx 2 \text{ dB/cm} \quad (6.5)$$

añadiendo la pérdida de radiación como $\rho^{-1/2}$ obtendremos la atenuación total.

6.2.2 Focalización axial y región utilizable

Como vimos en (6.2) es necesario confinar la radiación en el plano de la agrupación. La difracción impondrá un límite al espesor alcanzable que dependerá del diámetro de la zona de iluminación y del tamaño axial de las antenas. Un análisis simplificado del comportamiento del campo, consiste en distinguir las zonas de campo próximo y lejano de una apertura uniforme. En campo próximo podemos suponer que la radiación se mantiene confinada al tamaño de la antena. En campo lejano la radiación divergirá según el diagrama de radiación de la antena. El ancho de haz a -3dB puede utilizarse como ángulo de

divergencia. La ganancia de una apertura uniforme de dimensión L en campo lejano puede expresarse como

$$G(\phi) = \text{sinc}\left(\frac{L}{\lambda} \sin\phi\right) \quad ; \quad \text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.6)$$

el ancho a -3dB es aproximadamente

$$\phi_B \approx 2 \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2L}\right) \quad (6.7)$$

$$\text{si } L \gg \lambda \Rightarrow \phi_B \approx \frac{\lambda}{L} \quad ; \quad W = z \frac{\lambda}{L} \quad (6.8)$$

W es el ancho de haz en función de la distancia a la apertura, a la distancia z_0 en que $W = L$

$$z_0 = \frac{L^2}{\lambda} \quad (6.9)$$

podemos considerar que el haz empieza a abrirse [85], de esta forma podemos dibujar la distribución de energía radiada de forma asintótica como en la fig.6.2.

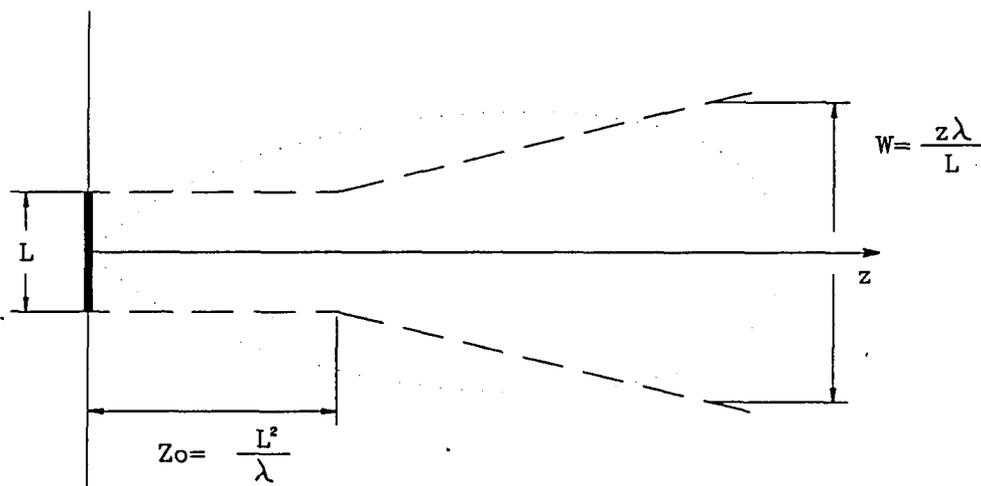


Fig.6.2 Distribución asintótica de energía radiada por una apertura uniforme de dimensión L .

Vemos que convendrá utilizar el menor tamaño de antena posible que ilumine en campo próximo la zona de medida. Una forma de reducir el espesor en zonas profundas sería utilizar una lente para focalizar sobre el eje de la agrupación como muestra la fig.6.3.

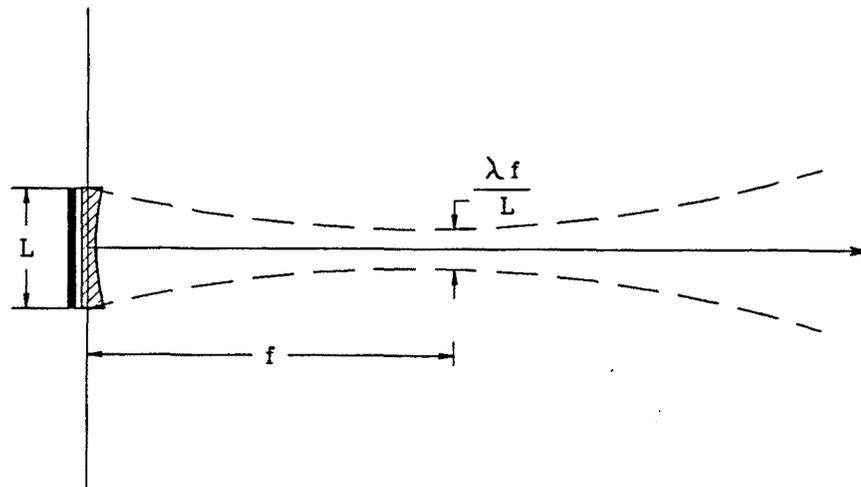


Fig.6.3 Iluminación axial focalizada

Otro parámetro de interés es la región en que podemos sintetizar iluminaciones arbitrarias que dependerá de la densidad de muestreo de la agrupación. En el caso en que la distancia entre elementos sea $\Delta s \leq \lambda/2$ tendremos un muestreo suficiente del campo para poder excitar de forma independiente (medir sin 'aliasing') todos los modos cilíndricos visibles referidos al centro de la agrupación (Ap.A), lo que posibilita la síntesis de cualquier iluminación visible en la región de medida.

En el caso de que el paso de medida sea superior a $\lambda/2$, no tendremos errores de muestreo si restringimos la zona de medida a un radio

$$\rho \leq \rho_{\max} = \frac{N}{4\pi} \lambda \quad (6.10)$$

donde N es el número de elementos de la antena, en esta región sólo pueden propagarse los $\pm N/2$ primeros modos que la antena es capaz de excitar de forma

independiente.

6.3 Arquitectura de radiofrecuencia

Una parte muy importante de un sistema cilíndrico es la red de distribución de señales de la agrupación. El aislamiento entre los caminos emisor y receptor será determinante para medir los campos difractados que fácilmente habrán sufrido atenuaciones por encima de 130dB. En un sistema complejo, la consecución de un alto nivel de aislamiento requiere un estudio de compatibilidad electromagnética que identifique todos los caminos posibles de interferencia. La arquitectura del sistema jugará un papel preponderante en el aislamiento entre señales, que puede mejorarse incluyendo elementos no recíprocos, como aisladores o amplificadores en puntos estratégicos. Una técnica que permite extraer señales débiles contaminadas con ruido o interferencias es la detección síncrona. La señal deseada se modula a baja frecuencia, de forma que puede distinguirse de señales interferentes mediante correlación. Finalmente se estudiarán las configuraciones homodina y heterodina del receptor, que ofrecerán diferentes compromisos de calidad-coste.

Dada una relación señal-ruido fijada por la calidad deseable en la reconstrucción, un estudio de niveles permitirá dimensionar los parámetros fundamentales del sistema. La temperatura de ruido y ancho de banda del receptor determinarán el tiempo de adquisición. La potencia de iluminación no deberá rebasar los límites de seguridad para no dañar los tejidos. A partir de estos datos, el estudio de compatibilidad determinará los aislamientos mínimos de cada uno de los caminos interferentes. De esta forma, una vez definida la arquitectura podremos especificar los componentes del sistema.

6.3.1 Redes de distribución

Una forma de separar los caminos emisor y receptor sería utilizar dos agrupaciones de medida independientes y superpuestas. En este caso las redes de distribución serían simplemente dos multiplexores de microondas de tantas vías como elementos tenga la agrupación. Sin embargo, por razones de economía convendrá utilizar una única agrupación como emisora y receptora. Para ello

deberemos disponer de dos redes de distribución separadas para las señales de iluminación y de campo difractado. Cada elemento de la agrupación se conectará a una de las redes mediante un conmutador, como ilustra la fig.6.4. Con una agrupación de N elementos, utilizaremos 2 multiplexores de N vías y N conmutadores. Si el multiplexor se realiza con un árbol binario de conmutadores, se necesitarán $N-1$ conmutadores por multiplexor, resultando un total de $3N-2$ conmutadores.

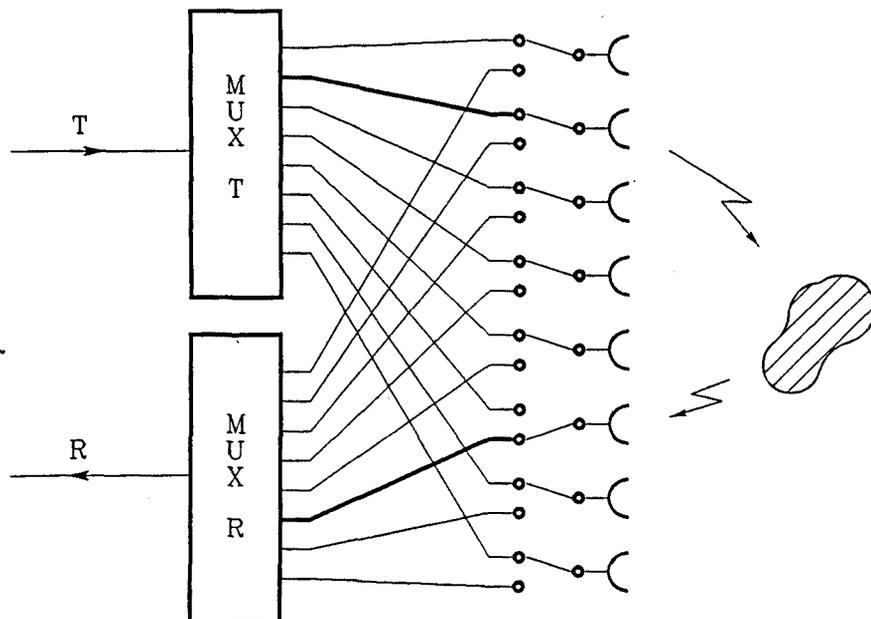


Fig.6.4 Agrupación circular y redes de distribución para recepción completa.

La adquisición consistirá en seleccionar una antena como emisora y medir el campo difractado con los elementos restantes de la agrupación. Repitiendo la medida hasta iluminar con todas las antenas, tendremos una matriz de campo difractado o total con un total de $N \cdot (N-1)$ medidas. El campo dispersado se obtendrá del total sustrayendo el campo incidente, que podemos calcular conociendo la geometría del sistema, o medir retirando el cuerpo del tomógrafo.

Para mantener un nivel de interferencias tolerable, el aislamiento de los conmutadores deberá ser elevado y también lo será el coste de esta red. Una solución de compromiso, consiste en realizar una partición de la agrupación de medida en subagrupaciones que son direccionadas globalmente como receptoras o emisoras mediante una matriz de conmutación. De esta forma el número de conmutadores es menor y su aislamiento ya no es tan crítico. Por ejemplo si dividimos la agrupación en cuatro secciones o cuadrantes, necesitaremos una matriz de conmutación de 2 a 4 vías y cuatro multiplexores de $N/4$ vías, la disposición se indica en la fig.6.5.

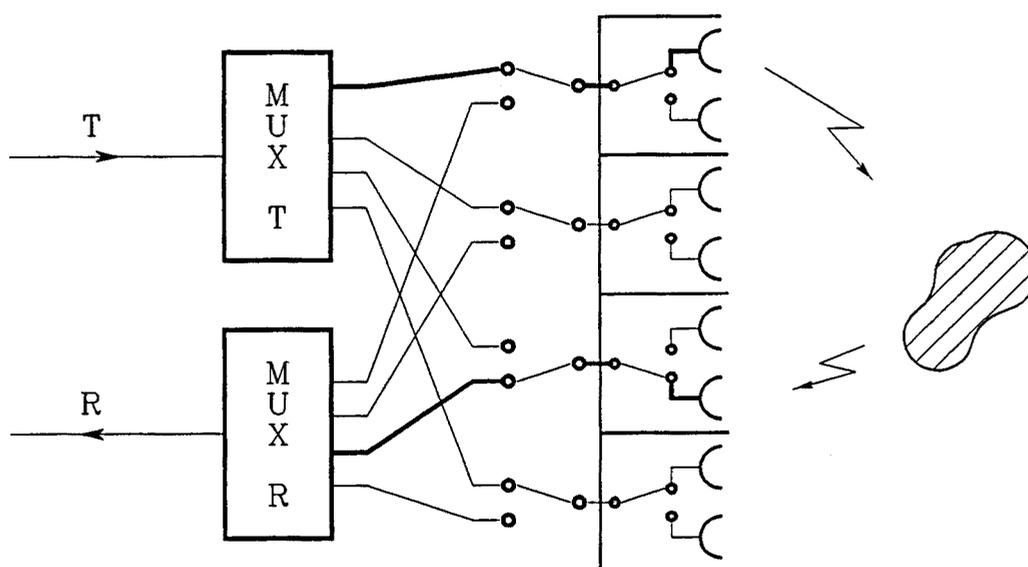


Fig.6.5 Partición de la agrupación en cuatro secciones

Si utilizamos árboles binarios para la matriz de conmutación y multiplexores, el número de conmutadores es $10 + (N-4)$. En este caso la zona crítica común a los caminos emisor-receptor es la matriz de conmutación, por lo que necesitamos sólo 10 conmutadores de alto aislamiento. La adquisición consistiría en seleccionar secuencialmente los diferentes pares de cuadrantes emisor-receptor. Para cada par se seleccionarán todas las combinaciones posibles entre elementos, lo que representa un total de $12 \cdot (N/4)^2$ medidas.

En contrapartida esta configuración no permite medir entre elementos contiguos pertenecientes a la misma subagrupación. Para tener una restricción menor sobre la adquisición, puede dividirse la agrupación en un número mayor de secciones, por ejemplo para M partes necesitaremos $2(M-1) + N$ conmutadores y la adquisición consistirá en $M(M-1) \cdot (N/M)^2$ medidas. Para el caso en que $M = N$ obtenemos la medida completa. De todas formas al medir en un medio con pérdidas, cuando el par emisor-receptor ocupe posiciones cercanas en la agrupación, los campos total e incidente serán varios órdenes de magnitud mayores que el campo dispersado. Si obtenemos el campo dispersado mediante sustracción los errores de truncado numérico serán muy importantes, por lo que la partición máxima de la agrupación dependerá del error de cuantización de la medida.

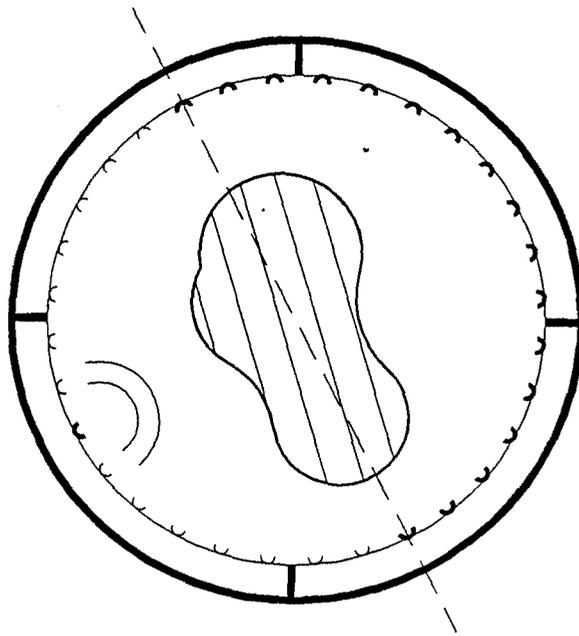


Fig.6.6 Simetrización de la recepción en una agrupación de 4 sectores.

Otro punto a tener en cuenta es la no simetría en los elementos receptores accesibles, al variar la posición del emisor en la sección. Así por ejemplo si emitimos con el elemento en un extremo de la sección emisora,

podemos recibir con el contiguo (de la sección siguiente), lo que no ocurrirá con un emisor central. La única forma de simetrizar la adquisición consiste en reducir el abanico de elementos receptores.

El número total de medidas puede reducirse a la mitad gracias a la reciprocidad entre elementos, es decir si se intercambian los papeles emisor-receptor para un par de antenas debe obtenerse la misma medida. Así puede utilizarse la redundancia para simplificar la red de distribución y reducir el tiempo de medida a la mitad, o bien realizar la adquisición completa a fin de incrementar la relación señal-ruido promediando las medidas recíprocas.

6.3.2 Detección con interferencias: detección síncrona multifrecuencia

Debido a las elevadas pérdidas de los tejidos y el agua que los rodea en la medida, la atenuación de la señal deseada puede superar los 130 dB. Los aislamientos requeridos en las redes de distribución pueden ser muy elevados. Aunque fuera posible realizar redes con suficiente aislamiento, debe tenerse en cuenta que existen múltiples caminos interferentes. Por ejemplo el cableado de control de la red de distribución debe estar muy bien desacoplado de las señales de microondas. La agrupación de medida aunque esté dividida en secciones compartirá un espacio físico reducido, debiendo evitar en lo posible radiaciones al exterior o la existencia de modos guiados o superficiales en la estructura. También la alimentación del sistema común a las secciones emisora y receptora, puede constituir un camino importante de interferencias. En la práctica el aislamiento en un sistema monofrecuencia difícilmente puede llevarse más allá de un cierto límite impuesto por las fugas de cables, desacoplos de alimentación y control, ranuras en las cajas, etc. Por ello deben utilizarse técnicas que refuercen el aislamiento, por ejemplo la recepción heterodina o la identificación de señales mediante técnicas de detección síncrona.

La modulación y detección síncrona al ser una técnica de baja frecuencia supone un coste menor que un sistema heterodino y además permite aislamientos mayores. Para ello debe modularse en los puntos apropiados y utilizar varias frecuencias según la complejidad del sistema y el aislamiento requerido. Debe tenerse en cuenta también que el detector fase/cuadratura de microondas entregará señales muy débiles que deberán ser amplificadas con el menor ruido

En el camino receptor tenemos en primer lugar el detector de microondas, en este caso en configuración homodina al utilizar la señal de oscilador de emisión. Supongamos que modulamos en amplitud o fase en un punto de la región de medida L, el detector coherente entregaría a su salida una señal de baja frecuencia con un nivel de continua debido a las interferencias (no moduladas) y a la posible polarización del detector, más una señal modulada en principio libre de interferencias.

El detector síncrono se muestra al final del camino receptor, consta básicamente de un amplificador de baja frecuencia y bajo ruido y un multiplicador seguido de un filtro paso-bajo. El ancho de banda del filtro debe ser mucho menor que la frecuencia de modulación y establecerá el ancho de banda de ruido del receptor y el tiempo de integración de cada medida. Un detector bien diseñado, sólo responderá a las señales correladas con la señal de frecuencia f_d . Si se utiliza esta señal para modular el camino deseable, tendremos una medida virtualmente libre de interferencias. En un caso real no podremos modular en la zona que ocupa el cuerpo a explorar, y el modulador deberá formar parte de la antena o red de distribución. Por otra parte debe tenerse en cuenta que un modulador real no sólo modula la señal transmitida, sino que también su coeficiente de reflexión variará al ritmo de la modulación. Por lo tanto la señal interferente quedará también modulada con una profundidad de modulación que convendrá minimizar. Como veremos la atenuación entre el punto de modulación y el camino interferente aumentará el aislamiento por lo que convendrá acercar la modulación a la región de medida, tanto como sea posible.

Si se particiona la agrupación y se eliminan los posibles acoplamientos entre sectores, los caminos de interferencia actuarán sobre los circuitos anteriores a los multiplexores de cada sector como se ha modelado en la fig.6.7. Los caminos provenientes del desacoplo entre alimentación y control de los multiplexores, admitirán un modelo análogo donde A sería la atenuación existente entre el modulador y el punto de desacoplo.

Como referencia calcularemos la relación señal-interferencia a la salida de la red $(S/I)_0$ en un sistema sin modulación, llamando S_1, S_0, I_0 a la señal de entrada, salida e interferente respectivamente tenemos (en dB)

Sin modulación

$$S_0 = S_1 - (L + 2A) ; \quad I_0 = S_1 - I \quad (6.11)$$

$$S/I)_o = S/I)_{ref} = I - (L + 2A) \quad (6.12)$$

Supongamos ahora que introducimos un modulador sobre una de las antenas, con una pérdida de inserción M_t y una pérdida de retorno M_r , que serán los cocientes entre señal modulada a la salida o reflejada y señal a la entrada. Los nuevos niveles serían

Un modulador

$$S_o = S_i - (L + 2A + M_t) ; \quad I_o = S_i - (I + 2A + M_r) \quad (6.13)$$

$$S/I)_o = I - L + (M_r - M_t) = S/I)_{ref} + 2A + (M_r - M_t) \quad (6.14)$$

Nótese que la señal interferente modulada proviene de la reflexión del modulador, por lo que aparece atenuada dos veces. Así la mejora de aislamiento respecto al caso sin modulación, se debe a la capacidad del modulador de favorecer la modulación en transmisión y a la atenuación entre el modulador y el camino interferente. Un mayor aislamiento se consigue modulando las antenas emisora y receptora con señales incorreladas, por ejemplo a frecuencias diferentes. El espectro de la señal a la entrada del modulador síncrono tendría el aspecto indicado por la fig.6.8.

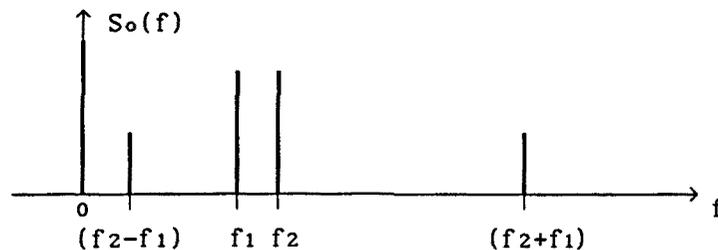


Fig.6.8 Espectro a la entrada del detector síncrono al modular a dos frecuencias.

La señal interferente daría lugar a la componente continua y a las señales a f_1 y f_2 , mientras que la señal deseada daría lugar a las líneas $f_1 \pm f_2$. Por lo tanto la señal a utilizar en el detector síncrono deberá ser la frecuencia suma o diferencia. Aún así existirán interferencias pero los

caminos deben alcanzar en reflexión a los dos moduladores por lo que el aislamiento será mayor:

Dos moduladores

$$S_o = S_i - (L + 2A + 2M_t) ; \quad I_o = S_i - (I + 4A + 2M_r) \quad (6.15)$$

$$S/I_o = I - L + 2(M_r - M_t) + 2A = S/I_{ref} + 4A + 2(M_r - M_t) \quad (6.16)$$

Una mejora adicional puede conseguirse utilizando elementos no recíprocos en vías unidireccionales, por ejemplo si colocamos un aislador en la bajada de la antena receptora el camino interferente que debe llegar la modulator en recepción quedará atenuado en el valor de aislamiento del dispositivo, lo mismo podría hacerse en el camino emisor.

Las características de modulación en transmisión y reflexión dependerán del tipo de modulación escogido y del diseño del dispositivo. Para simplificar los circuitos, se acostumbra a utilizar modulaciones digitales de dos niveles, es decir 2-PSK y 2-ASK. Un modulator ideal sería un 2-PSK perfectamente adaptado a la entrada en los dos niveles, con una pérdida de inserción nula, estudiaremos el caso de un dispositivo de dos niveles real.

Caracterización del modulator

El caso general será un dispositivo que dada una señal de microondas a la entrada $s_i(t)$ entregue a la salida una señal modulada $s_o(t)$, reflejando una señal $s_r(t)$.

$$s_i(t) = e^{j\omega_0 t} ; \quad s_o(t) = \begin{cases} A_0 e^{j\omega_0 t} & ; x(t) = 1 \\ A_1 e^{j(\omega_0 t + \phi_1)} & ; x(t) = -1 \end{cases} \quad (6.17)$$

$x(t)$ es la señal de modulación que toma dos niveles 1, -1. La señal reflejada podría caracterizarse como $s_o(t)$ con amplitudes y fase A_{0r} , A_{1r} , ϕ_{1r} adecuadas. Tendremos un modulator PSK en el caso $A_0 \cong A_1$, $\phi_1 \cong \pi$, o un modulator ASK si $A_1 \ll A_0$. La modulación que sufre $s_i(t)$ puede expresarse en forma de producto

$$s_o(t) = s_i(t) \cdot [A_c + A_m \cdot x(t)] \quad (6.18)$$

donde A_m sería la profundidad de modulación y A_c sería el nivel de señal no modulada, éstos pueden calcularse a partir de los niveles y fases en los dos estados del dispositivo:

$$A_m = \frac{A_o - A_1 \cos\phi_1}{2} ; A_c = \frac{A_o + A_1 \cos\phi_1}{2} \quad (6.19)$$

Si modulamos con una frecuencia f_m , en el detector síncrono sólo recuperaremos la línea del espectro sobre f_m , y deberemos evaluar la pérdida de señal debido a las características del modulador, teniendo en cuenta también la dispersión de potencia hacia armónicos superiores al utilizar como moduladora una señal cuadrada. Si expresamos $x(t)$ en serie de Fourier

$$x(t) = 4/\pi \cos\omega_m t - 4/3\pi \cos 3\omega_m t + 4/5\pi \cos 5\omega_m t - \dots \quad (6.20)$$

así aunque $x(t)$ posee una potencia total unidad

$$P_t\{ x(t) \} = 1/T \int_T |x(t)|^2 dt = 1 \quad (6.21)$$

la potencia útil correspondiente al primer armónico es del orden de 1dB menor

$$P_1\{ x(t) \} = 1/2 (4/\pi)^2 \cong P_t - 1dB \quad (6.22)$$

En teoría, utilizando también una señal digital para correlar la señal en el detector síncrono evitaríamos esta pérdida, sin embargo en la práctica existen varios factores que lo impiden. Por ejemplo los tiempos finitos de transición entre estados del modulador, ciclos de trabajo diferentes en las señales digitales, o un deficiente alineamiento de fase entre las señales modulada y de reloj en el detector.

De esta forma la atenuación causada por introducir un modulador en el camino de señal será en dB

$$M_t = 20 \log A_m + 1dB \quad (6.23)$$

La atenuación del camino reflejado puede calcularse de igual manera, una vez caracterizados los coeficientes de reflexión del dispositivo en los dos estados. Nótese que la pérdida de un sistema PSK es como mínimo de 1dB, mientras que un modulador ASK introduce pérdidas como mínimo de 7dB. El motivo

es la pérdida de al menos 3dB en portadora y 3dB adicionales al transmitir potencia durante el 50% del tiempo. La potencia no transmitida se disipará o reflejará según el diseño del modulador. En éste último caso obtendríamos una atenuación en reflexión y transmisión iguales $M_r \approx M_t$.

6.3.3 Detección coherente: configuraciones homodina y heterodina

En el apartado anterior no hemos entrado en detalle sobre la detección coherente de la señal de microondas. En realidad, puesto que se desea obtener valores complejos del campo, debe utilizarse un detector fase-cuadratura (I-Q) que nos dará las componentes real e imaginaria del campo con respecto a una fase de referencia. Consideraremos las alternativas de una detección homodina y heterodina, analizando el compromiso complejidad/coste-prestaciones que ofrecen, pero sin entrar en detalles constructivos.

Los circuitos básicos se muestran en la fig.6.9. En ambos casos la detección de las componentes en fase y cuadratura se realiza mediante dos mezcladores con las señales de inyección desfasadas 90 grados. La diferencia estriba en que en un sistema homodino la detección se hace directamente a frecuencias de microondas, mientras que un sistema heterodino la detección se hace a una frecuencia intermedia del orden de decenas o centenares de MHz.

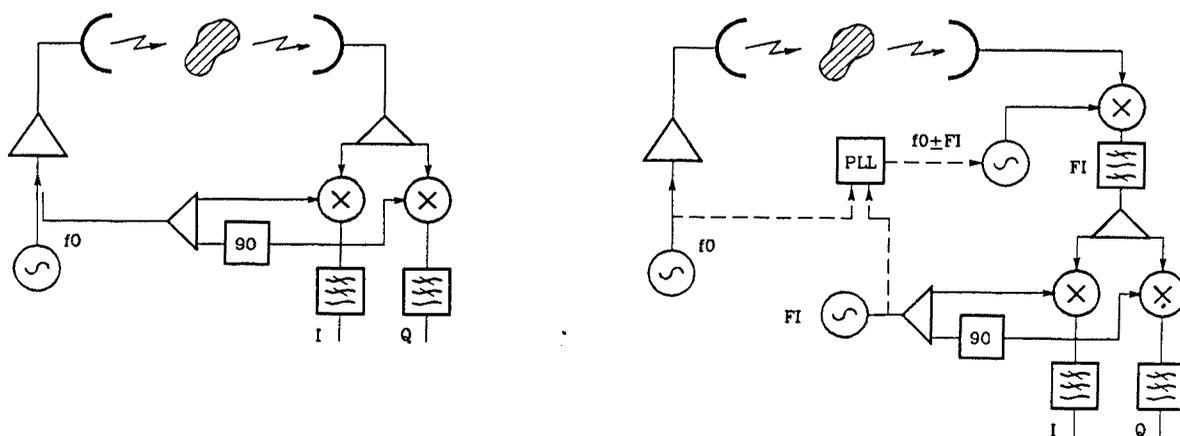


Fig.6.9 Sistemas homodino (a) y heterodino (b).

La ventaja fundamental del sistema homodino es su simplicidad y bajo coste. Sin embargo un sistema heterodino permitirá amplificar con menor ruido al estar la frecuencia intermedia más alejada de la zona ruidosa de bajas frecuencias. Otra ventaja de un detector heterodino son las mejores características de los mezcladores y desfasadores a frecuencias intermedias. Por otra parte el sistema heterodino permite realizar la primera conversión muy cerca de la agrupación receptora reduciendo la zona susceptible de provocar interferencias.

En un sistema monofrecuencia pueden diseñarse detectores homodinos con buenas características de linealidad y anchos de banda del orden del 10%, utilizando híbridos de 90 o 180 grados realizados con tecnología microstrip. El ruido del sistema puede reducirse incluyendo amplificadores de microondas de bajo ruido delante del detector con un coste moderado. Si se desea realizar medidas barriendo en frecuencia puede ser preferible un sistema heterodino, puesto que enganchando en fase el oscilador del mezclador en recepción, la frecuencia intermedia puede mantenerse constante durante el barrido y también lo será la respuesta del detector.

6.3.4 Potencia de iluminación, tiempo de integración y ruido

Si las señales interferentes han podido reducirse a un nivel adecuado respecto a la señal deseada, puede dimensionarse la potencia y ancho de banda del sistema en función del ruido tolerable en la reconstrucción. La forma de especificar la relación señal-ruido en un sistema cilíndrico no es evidente. En primer lugar podemos considerar como señal el campo incidente o total, o bien el campo dispersado obtenido como diferencia de los anteriores. Si bien el algoritmo de reconstrucción trabajará con el campo dispersado, éste depende del cuerpo explorado y el concepto de relación señal-ruido parece en este caso bastante arbitrario. El campo incidente en cambio será constante, pero la potencia de señal dependerá de los pares de antenas seleccionados. El peor caso corresponderá a dos elementos opuestos de forma que debe atravesarse un diámetro en el medio de reconstrucción, normalmente agua. Con referencia al campo incidente, el campo dispersado para cuerpos de tamaño no excesivamente pequeños, superará a éste hacia el límite de la aproximación de Born (fig.4.2). A partir de este momento decrecerá hacia un valor asintótico con una potencia del orden de la del campo incidente. Por este motivo, la relación

señal-ruido en la medida del campo incidente en el caso peor, se ha adoptado como criterio de diseño de un tomógrafo cilíndrico.

La señal incidente en el tomógrafo, puede calcularse caracterizando las pérdidas y ganancias de todo el camino, lo que dependerá de la arquitectura empleada. La atenuación al atravesar un diámetro de la zona de medida puede calcularse teniendo en cuenta la atenuación disipativa más la pérdida de radiación. Según la dimensión de las antenas podemos estar en campo próximo, zona de Fresnel o campo lejano. En general utilizaremos la mínima dimensión que nos dé una divergencia axial aceptable en la zona de medida, por lo que fácilmente estaremos en campo lejano al atravesar la agrupación. De esta forma tenemos para una ganancia de antenas G_a , un diámetro D y constante de atenuación α (Nep/m)

$$S_o = S_i + 2 G_a + 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi D} \right) - 8.686 \alpha D \quad (\text{dB}) \quad (6.24)$$

donde S_i , S_o son las potencias de señal a la entrada y salida respectivamente.

En cuanto a ruido del receptor, es conveniente utilizar un amplificador de bajo ruido tan cerca de la antena receptora como sea posible, a fin de reducir el ruido del receptor. La temperatura equivalente de ruido a la entrada del receptor se calculará mediante las conocidas expresiones de Friis [66] procurando que exista una buena adaptación entre etapas.

$$T_{eq} = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} + \dots \quad (6.25)$$

T_j , G_j : temperatura de ruido y ganancia de la etapa j del receptor.

En la práctica, si se utiliza un amplificador de bajo ruido con ganancias de 20 dB o superiores, éste fijará básicamente el ruido del sistema, pudiendo estar en el margen de 2 a 3 dB con amplificadores basados en dispositivos MESFET. Si no se utiliza un amplificador de bajo ruido tendremos el factor de ruido del detector coherente, típicamente unos 6dB típicos de un mezclador pasivo con diodos Schottky. Al ser un dispositivo pasivo será muy importante el ruido introducido por el amplificador de baja frecuencia que sigue al detector y que puede ser bastante alto. Por ello es prácticamente imprescindible la utilización de amplificadores de microondas, actualmente de coste moderado.

El ruido total del sistema puede evaluarse con facilidad en el plano de

entrada del amplificador o en su ausencia, del detector coherente. La temperatura total será la equivalente del receptor más la temperatura de entrada. Si el agua de la agrupación está a temperatura ambiente, ésta será básicamente la temperatura de ruido a la entrada $T_1 \approx T_0$, pues el camino hasta el receptor es pasivo. De otra forma debe calcularse el ruido a la entrada del receptor mediante las expresiones de Friis.

Para determinar la potencia de ruido debemos multiplicar la densidad espectral por el ancho de banda de ruido del receptor. Al ser el detector síncrono un dispositivo de doble banda lateral (DSB), a su entrada tenemos una ventana espectral de ancho $2B$ centrada sobre la frecuencia de correlación. B es el ancho de banda del integrador a la salida del detector, de forma que el tiempo de medida para cada punto es $\tau \approx 1/B$. Así la potencia de ruido a la entrada del receptor es

$$N_1 = k (T_1 + T_{eq}) 2B ; T_1 \approx T_0 \text{ (sistema a temp. ambiente) } \quad (6.26)$$

Un procedimiento de diseño sería partir de una relación señal-ruido deseable y una potencia de emisión, que produzca un nivel de radiación inferior a las normas de seguridad a la exposición biológica (2.5). Conociendo la atenuación del sistema puede determinarse el nivel de ruido tolerable para obtener la relación señal-ruido deseada a la salida. De esta manera calcularíamos el tiempo de integración de los detectores síncronos, que multiplicado por el número de medidas, daría el tiempo total de adquisición.

Un factor que incidirá sobre el ruido en la medida es el error de cuantización de los convertidores analógico-digitales (A/D), encargados de muestrear la señal a la salida de los detectores síncronos. Por este motivo el número de niveles deberá dimensionarse en función de la dinámica del sistema (relación entre campos incidentes máximo y mínimo) y del ruido, de forma que el paso de cuantización sea mucho menor que la desviación típica de ruido a la salida del detector.

6.3.5 Calibración del sistema

Un aspecto importante al considerar un sistema real es prever procedimientos de calibración. En primer lugar un algoritmo de reconstrucción parte de la base de unos niveles de potencia de iluminación absolutos, que en

general no coincidirán con los reales del sistema. Otro factor quizá más relevante es la dispersión en la respuesta en amplitud y fase de los elementos de la agrupación, lo que podemos denominar como firma. Dependiendo de las redes de distribución empleadas la firma de la agrupación puede ser totalmente aleatoria, de forma que la medida debe ser corregida mediante calibración. Pequeñas fluctuaciones de la constante dieléctrica del medio de referencia debidas por ejemplo a variaciones térmicas, o derivas de la ganancia global del sistema pueden ser compensadas al calibrar, lo que nos permitirá trabajar con un sistema de características virtuales muy superiores a las reales.

Al medir el campo dispersado por un objeto puntual centrado en la agrupación, en condiciones ideales deberíamos obtener un valor constante para cualquier par de elementos emisor-receptor. En la práctica no será así, sin embargo a partir de esta medida podemos determinar la firma. De esta manera, multiplicando la medida de cada elemento por el inverso de su respuesta característica obtendremos en teoría una medida libre de error. En este análisis estamos suponiendo implícitamente que no existen interacciones mutuas entre elementos, de forma que sólo el par seleccionado contribuye a la medida.

En lugar de calibrar los elementos aisladamente, también podrían calibrarse todos los pares de elementos, lo que daría lugar a una matriz de calibración similar a la de medida, de forma que la medida calibrada se obtendría multiplicando elemento a elemento la medida real con la matriz de calibración. Este procedimiento aunque da lugar a una matriz de calibración, más voluminosa que el vector firma, es de aplicación directa sobre la medida dando lugar a menos multiplicaciones por calibración que el vector. Además este método compensa comportamientos no isotrópicos de las antenas de la agrupación, pues se calibran los elementos y los caminos entre ellos.

La matriz de calibración se obtiene al medir un cuerpo sencillo, calculando los campos dispersados teóricos y resolviendo los pesos que debemos aplicar a la matriz real, de forma que obtengamos la medida ideal. Una posibilidad sería medir una varilla metálica fina centrada en la agrupación para obtener una dispersión isotrópica. Sin embargo la potencia del campo dispersado es muy baja en este caso. Por ello es preferible utilizar cilindros metálicos de tamaño moderado, cuya dispersión es fácilmente calculable y de amplitud mayor.

Si los elementos no seleccionados afectan a la medida, debido a un aislamiento pobre del multiplexor, el problema es mucho más complejo. En este caso para modelar el sistema real necesitamos una matriz de dispersión [S] de

orden igual al número de elementos de la agrupación, cuyos elementos S_{ij} modelan las interacciones entre antenas. Además la matriz muy probablemente variará al direccionar diferentes pares. La calibración de un sistema con acoplamientos importantes no parece abordable de forma práctica, por lo que deberemos minimizar las interacciones de forma que el error sea aceptable.

6.4 Algoritmos de primer orden

El diseño y evaluación de los algoritmos de reconstrucción al estar condicionados por la geometría de medida se han considerado partes del sistema de tomografía. En el capítulo 4 se hizo un estudio general del tema permitiendo la construcción de algoritmos sobre la formulación desarrollada. Dado el elevado número de referencias a resultados anteriores, se han reescrito algunas expresiones para dar continuidad a la lectura.

Básicamente existen dos filosofías en el diseño del algoritmo, la inversión de la ecuación integral y el uso de operadores de focalización sobre el campo dispersado. En un sistema cilíndrico, la primera opción es en principio preferible, al garantizar una combinación óptima de la información multivista. Por ello se ha estudiado un algoritmo basado en la inversión de la ecuación integral bajo la aproximación de Born, que proporciona el espectro de Fourier del cuerpo. La aproximación de Rytov posee un margen de validez diferente a la anterior y se obtiene al preprocesar los datos de entrada del algoritmo de Born. También se propone un algoritmo de focalización eficiente, válido en principio para medios con pérdidas y algunas técnicas de orden superior para permitir reconstruir cuerpos de alto contraste. Las técnicas desarrolladas se han evaluado mediante simulación numérica y de forma experimental.

6.4.1 Inversión de la ecuación integral bajo la aproximación de Born

En {4.6.1} estudiamos una técnica de diseño de algoritmos de reconstrucción basada en el recubrimiento espectral del cuerpo, al utilizar como campo incidente autofunciones de la ecuación de onda. La imagen se obtiene mediante transformada inversa bidimensional del espectro del cuerpo. Al considerar una geometría de medida canónica respecto a un sistema de

coordenadas, la opción más directa es utilizar las autofunciones derivadas de ésta, en este caso la familia de modos cilíndricos. En la sección {4.5.2.2} se estudió la reconstrucción en coordenadas cilíndricas, obteniendo el espectro de Hankel de las corrientes inducidas. Con el espectro de corrientes correspondiente a una serie de modos de iluminación, puede recubrirse el espectro de Hankel del cuerpo aunque de forma muy elaborada {4.6.1.2}. Por otra parte el coste computacional de la inversión de una transformada de Hankel es elevado. Las funciones de Bessel no pueden calcularse de forma sencilla, y al no ser periódicas impiden la realización de algoritmos eficientes como la FFT en Fourier.

En {4.5.2.3} mostramos que el espectro de corrientes podía obtenerse según una base arbitraria, si la geometría de medida era capaz de producir en emisión las autofunciones de la nueva base. De esta forma mediante la síntesis de ondas planas, podemos acceder al espectro de Fourier de las corrientes. En este caso el recubrimiento espectral del cuerpo es inmediato, al existir una correspondencia punto a punto entre el espectro de corrientes y el espectro del cuerpo {4.6.1.1}. Además la inversión del espectro de Fourier es muy eficiente utilizando FFT. Por consiguiente, como la síntesis de ondas planas en una geometría cilíndrica no es costosa, es mucho más eficiente utilizar el espectro de Fourier que el espectro de Hankel.

Como vimos en {4.5.2.3}, para obtener el espectro de Fourier del cuerpo debemos iluminarlo con un conjunto de ondas planas dirigidas según vector unitario $\hat{\theta}_0$

$$E_0(\vec{r}') = e^{-jk_0\hat{\theta}_0 \cdot \vec{r}'} \quad (4.85)$$

El espectro de las corrientes inducidas en el cuerpo $\tilde{J}(k_0\hat{\theta};\hat{\theta}_0)$ proporciona el espectro del contraste dieléctrico, en círculos de radio k_0 (fig.4.13)

$$\tilde{C}[k_0(\hat{\theta}-\hat{\theta}_0)] = \frac{j}{\omega\epsilon_0} \tilde{J}(k_0\hat{\theta};\hat{\theta}_0) \quad (4.88)$$

El espectro de las corrientes puede obtenerse a partir del campo dispersado $E_s(\varphi_r)$ medido sobre una línea circular de radio R , utilizando las corrientes $J_a(\varphi_r;-\hat{\theta})$ que producen una onda plana dirigida según $-\hat{\theta}$ en la geometría de medida (4.78), resultando

$$\tilde{J}(k_0\hat{\theta};\hat{\theta}_0) = \int_0^{2\pi} J_a(\varphi_r;-\hat{\theta}) E_s(\varphi_r;\hat{\theta}_0) R d\varphi_r = \frac{-4}{\omega\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^n e^{jn\theta}}{H_n^{(2)}(k_0R)} \tilde{E}_s(n;\hat{\theta}_0) \quad (6.26)$$

donde $\tilde{E}_s(n;\hat{\theta}_0)$ es el espectro modal del campo dispersado por el cuerpo al ser iluminado con una onda plana incidente según $\hat{\theta}_0$

$$\tilde{E}_s(n;\hat{\theta}_0) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} E_s(\varphi_r;\hat{\theta}_0) e^{-jn\varphi_r} d\varphi_r \quad (6.27)$$

φ_r es la posición angular del elemento receptor. θ es el ángulo que forma $\hat{\theta}$ con el eje \hat{z} como muestra la fig.6.10. Sustituyendo en (4.88) obtenemos

$$\tilde{C}[k_0(\hat{\theta}-\hat{\theta}_0)] = \frac{-4j}{k_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^n e^{jn\theta}}{H_n^{(2)}(k_0R)} \tilde{E}_s(n;\hat{\theta}_0) \quad (6.28)$$

En un sistema cilíndrico la iluminación proporcionada por cada elemento emisor será una onda cilíndrica. Para cada emisor mediremos el campo dispersado sobre el resto de la agrupación, obteniendo al emitir con todos los elementos una matriz de medida $E_s(\varphi_r,\varphi_e)$. φ_r es la posición angular del elemento receptor y φ_e la del emisor como indica la fig.6.10.

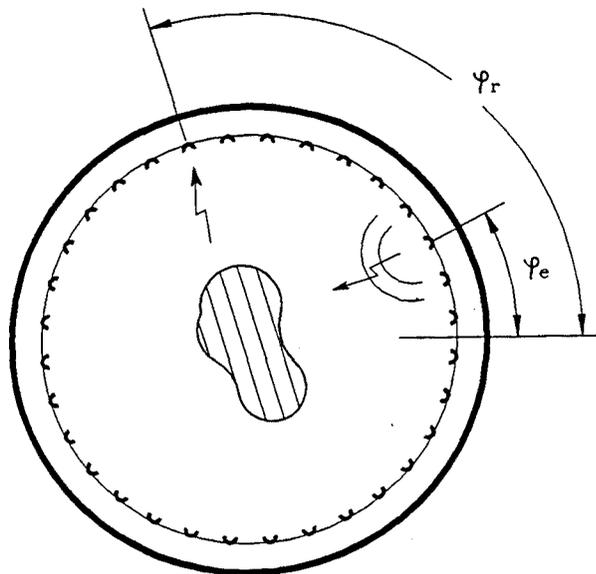


Fig.6.10 Medida multivista en un sistema cilíndrico

Si la interacción del campo incidente con el cuerpo es lineal, podemos sintetizar una iluminación combinando las medidas correspondientes a diferentes emisores, ponderadas por la distribución de corriente que sobre la agrupación produce la iluminación buscada. En este caso llamando $J_a(\varphi_e; \hat{\theta}_o)$ a la corriente que sobre la agrupación produce una onda plana según $\hat{\theta}_o$

$$\tilde{E}_s(n; \hat{\theta}_o) = \int_0^{2\pi} \tilde{E}_s(n, \varphi_e) J_a(\varphi_e; \hat{\theta}_o) R d\varphi_e \quad (6.29)$$

utilizando $J_a(\varphi_e; -\hat{\theta}_o)$ (4.78)

$$\tilde{E}_s(n; -\hat{\theta}_o) = \int_0^{2\pi} \tilde{E}_s(n, \varphi_e) \frac{-2}{\omega\mu_o R \pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^m}{H_m^{(2)}(k_o R)} e^{jm(\varphi_e - \theta_o)} R d\varphi_e \quad (6.30)$$

cambiando m por $-m$ e intercambiando integral y sumatorio podemos identificar la transformada según φ_e de $\tilde{E}_s(n, \varphi_e)$: $\tilde{E}_s(n, m)$, resultando

$$\tilde{E}_s(n; -\hat{\theta}_o) = \frac{-4}{\omega\mu_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^m}{H_m^{(2)}(k_o R)} e^{jm\theta_o} \tilde{E}_s(n, m) \quad (6.31)$$

donde

$$\tilde{E}_s(n, m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{E}_s(n, \varphi_e) d\varphi_e \quad (6.32)$$

finalmente sustituyendo en (6.28)

$$\tilde{C}[k_o(\hat{\theta} + \hat{\theta}_o)] = \frac{-16j}{k_o^2 \omega\mu_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^{(n+m)} e^{jn\theta} e^{jm\theta_o}}{H_n^{(2)}(k_o R) H_m^{(2)}(k_o R)} \tilde{E}_s(n, m) \quad (6.33)$$

esta ecuación es formalmente una transformada inversa bidimensional de Fourier entre los dominios $\theta, \theta_o \xleftrightarrow{\mathcal{F}} n, m$.

Conocido $\tilde{C}[k_o(\hat{\theta} + \hat{\theta}_o)]$ podemos obtener las muestras sobre una retícula rectangular mediante interpolación, que nos permitirán obtener la imagen mediante una transformada inversa de Fourier. El procedimiento es análogo al utilizado en algoritmos de interpolación espectral para sistemas planos (5.3.2). Como $\tilde{C}[k_o(\hat{\theta} + \hat{\theta}_o)]$ se obtiene mediante una transformada de Fourier, al añadir ceros en la región de alta frecuencia del dominio transformado

('zero-padding') aumentamos la densidad de muestreo de $\tilde{C}[k_o(\hat{\theta}+\hat{\theta}_o)]$. De esta forma para 64 elementos, aumentando al doble el muestreo puede utilizarse una interpolación bilineal sin cometer errores apreciables.

Este algoritmo fue implementado de forma muy eficiente [86] tabulando y almacenando en ficheros el espectro de la corriente que produce una onda plana

$$\tilde{J}(n) = \frac{j^n}{H_n^2(k_o R)} \quad ; \quad \tilde{J}(m) = \frac{j^m}{H_m^2(k_o R)} \quad (6.34)$$

y la versión discreta de la transformación entre coordenadas angulares y ejes espectrales

$$\vec{\eta} = k_o(\hat{\theta}+\hat{\theta}_o) \quad (6.35)$$

para N elementos y una imagen de N·N pixels el algoritmo puede expresarse simbólicamente como

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E_s(\varphi_r, \varphi_e) \\ \mathcal{F}_{2D} \rightarrow \tilde{E}_s(n, m) \quad \langle N \text{ FFT}(N) \rangle \\ \otimes \leftarrow \frac{j^{(n+m)}}{H_n^2(k_o R) H_m^2(k_o R)} \quad \langle 4N^2 \text{ multip.} \rangle \\ \mathcal{F}_{2D}^{-1} \rightarrow \tilde{C}[k_o(\hat{\theta}+\hat{\theta}_o)] \quad \langle N \text{ FFT}(N) \rangle \\ \text{Interpolación} \rightarrow \tilde{C}(\eta_x, \eta_z) \\ \mathcal{F}_{2D}^{-1} \rightarrow C(x, z) \quad \langle N \text{ FFT}(N) \rangle \end{array} \right\} \end{array}$$

El tiempo de reconstrucción empleado por el algoritmo para N = 64 es de 30" en una estación de trabajo HP9000/320 (μ P 68020 + 68881 de Motorola).

6.4.1.1 Evaluación del algoritmo

En la evaluación de un algoritmo de reconstrucción deberemos considerar la resolución, la validez de las aproximaciones al reconstruir cuerpos de alto contraste, y el comportamiento al trabajar en medios con pérdidas y con parte

de la agrupación.

Resolución

La resolución puede obtenerse calculando la respuesta impulsional del algoritmo, es decir la reconstrucción de un objeto puntual $C(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$. En este caso se obtendría un espectro uniforme de ancho de banda $2k_0$, con una fase lineal debida al desplazamiento \vec{r}_0 .

$$\tilde{C}(\eta_x, \eta_z) = \Pi \left(\frac{|\eta|}{4k_0} \right) e^{j\vec{\eta} \cdot \vec{r}_0} \quad (6.36)$$

la reconstrucción será la transformada inversa de \tilde{C} en este caso

$$C_r(\vec{r}) = C(\vec{r}) * h(\vec{r}) \quad ; \quad h(\vec{r}) = \frac{k_0}{\pi} \frac{J_1(2k_0|\vec{r}|)}{|\vec{r}|} \quad (6.37)$$

donde $h(r)$ es la respuesta impulsional del algoritmo, equivalente a la función sinc en una dimensión. La fig.6.11 muestra $h(r)$ para un medio con las pérdidas del agua $\text{tg}\delta \approx 0.1$

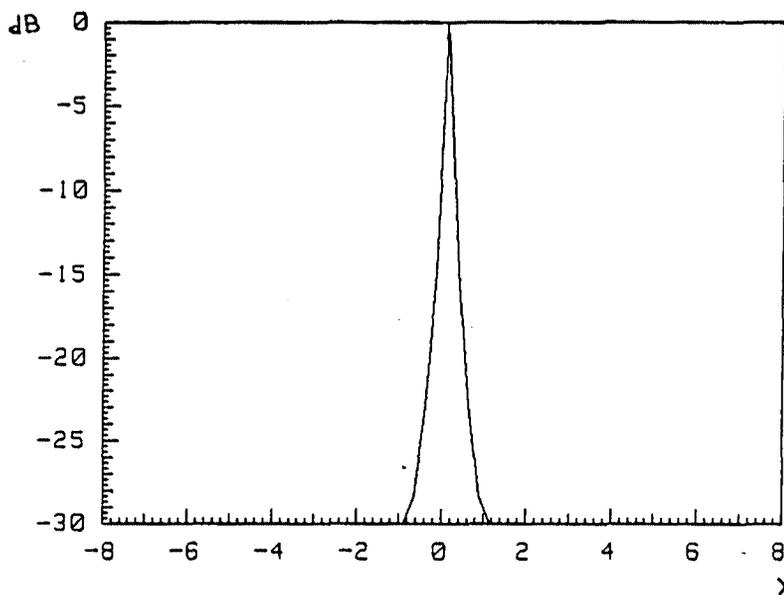


Fig.6.11. Respuesta impulsional del algoritmo cilíndrico ($\text{tg}\delta=0.1$)

Tomando la resolución como la anchura de lóbulo entre los puntos de caída a -3dB tenemos

$$\Delta r \approx 0.3 \lambda \quad (6.38)$$

Reconstrucción en medios con pérdidas

En {4.7} se estudió el efecto de las pérdidas en la reconstrucción. En los algoritmos de recubrimiento espectral no es posible obtener el dominio espacial del cuerpo de forma exacta. Debemos utilizar una aproximación de bajas pérdidas consistente en proyectar el dominio espectral complejo sobre el plano real, y usar una transformada de Fourier para la inversión.

El error causado por la aproximación de bajas pérdidas se agrava con el tamaño del cuerpo y su contenido de altas frecuencias {4.7.4}, mediante simulación se ha observado la aparición de rizados radiales en la reconstrucción de cilindros. Para disminuir este error podemos aplicar un filtro paso-bajo a la imagen, con el objetivo de reducir las componentes de alta frecuencia del cuerpo donde el error es mayor.

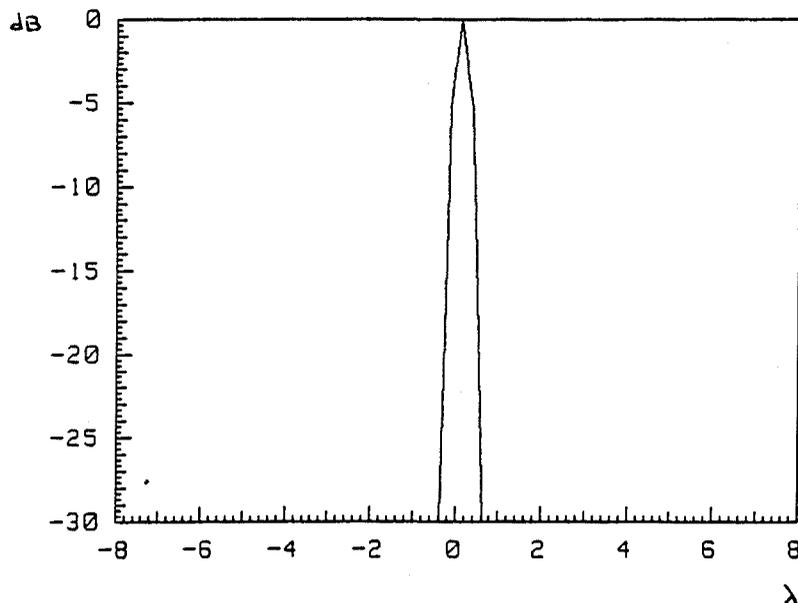


Fig.6.12 Respuesta impulsional al utilizar el filtro paso-bajo

Se ensayaron varios filtros, obteniendo buenos resultados con un filtro de perfil cosenoidal $H(\vec{\eta})$ de radio $2k_0$.

$$H(\vec{\eta}) = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2k_0} |\vec{\eta}| \right) \quad (6.39)$$

En contrapartida al reducir el ancho de banda perdemos resolución como podemos ver en la respuesta impulsional filtrada de la fig.6.12. El ancho a -3dB al utilizar $H(\vec{\eta})$ es

$$\Delta r \approx 0.75 \lambda \quad (6.40)$$

Evaluación de la aproximación de Born

De forma rigurosa el algoritmo desarrollado es válido únicamente para cuerpos poco difractantes. El comportamiento al aumentar el contraste del cuerpo puede evaluarse mediante simulación, por ejemplo reconstruyendo cilindros homogéneos de diámetro y permitividad variables. La fig.6.13 muestra la reconstrucción de varios cilindros para bajo y alto contraste y varios tamaños en agua ($\text{tg}\delta \approx 0.1$), cuando las pérdidas del cilindro son similares a las del agua. La reconstrucción sin pérdidas es muy similar lo que indica un error pequeño al aproximar el espectro complejo del cuerpo por un espectro real (4.7.4). Puede observarse que para alto contraste la aproximación de Born proporciona imágenes correctas de cuerpos de pequeño tamaño. El margen de validez del algoritmo es similar al publicado para geometrías planas por otros autores [31] como era de esperar. En (3.3.1) se estableció un criterio de aplicabilidad de la aproximación de Born en el problema directo en función del tamaño d y contraste

$$d \left| \sqrt{1-C} - 1 \right| < \lambda / 2 \quad (3.33)$$

Los resultados de la fig.6.13 indican que la condición (3.33) puede emplearse también para determinar el margen de validez de la aproximación de Born en la reconstrucción. También deberemos considerar el efecto sobre la reconstrucción de la desadaptación entre las pérdidas del cuerpo y el medio externo. En la fig.6.14 se muestra la reconstrucción de cilindros con pérdidas superiores e inferiores al medio de referencia.

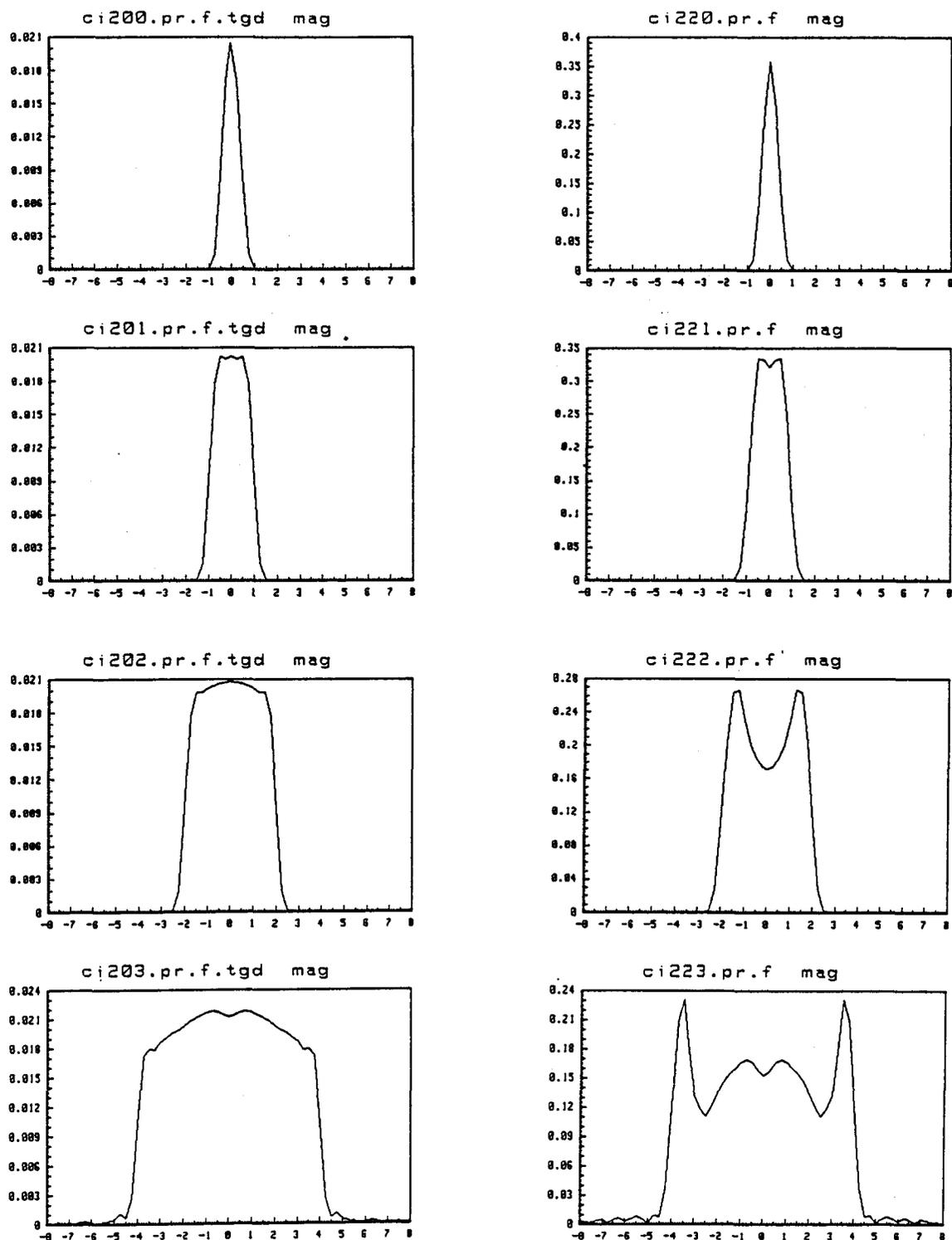


Fig.6.13 Reconstrucción del módulo del contraste de cilindros en agua ($tg\delta \approx 0.1$), pérdidas del cilindro similares al agua. Diámetros: 1,2,4,8 λ . Columna izquierda: contraste = 0.019. Columna derecha: contraste = 0.3

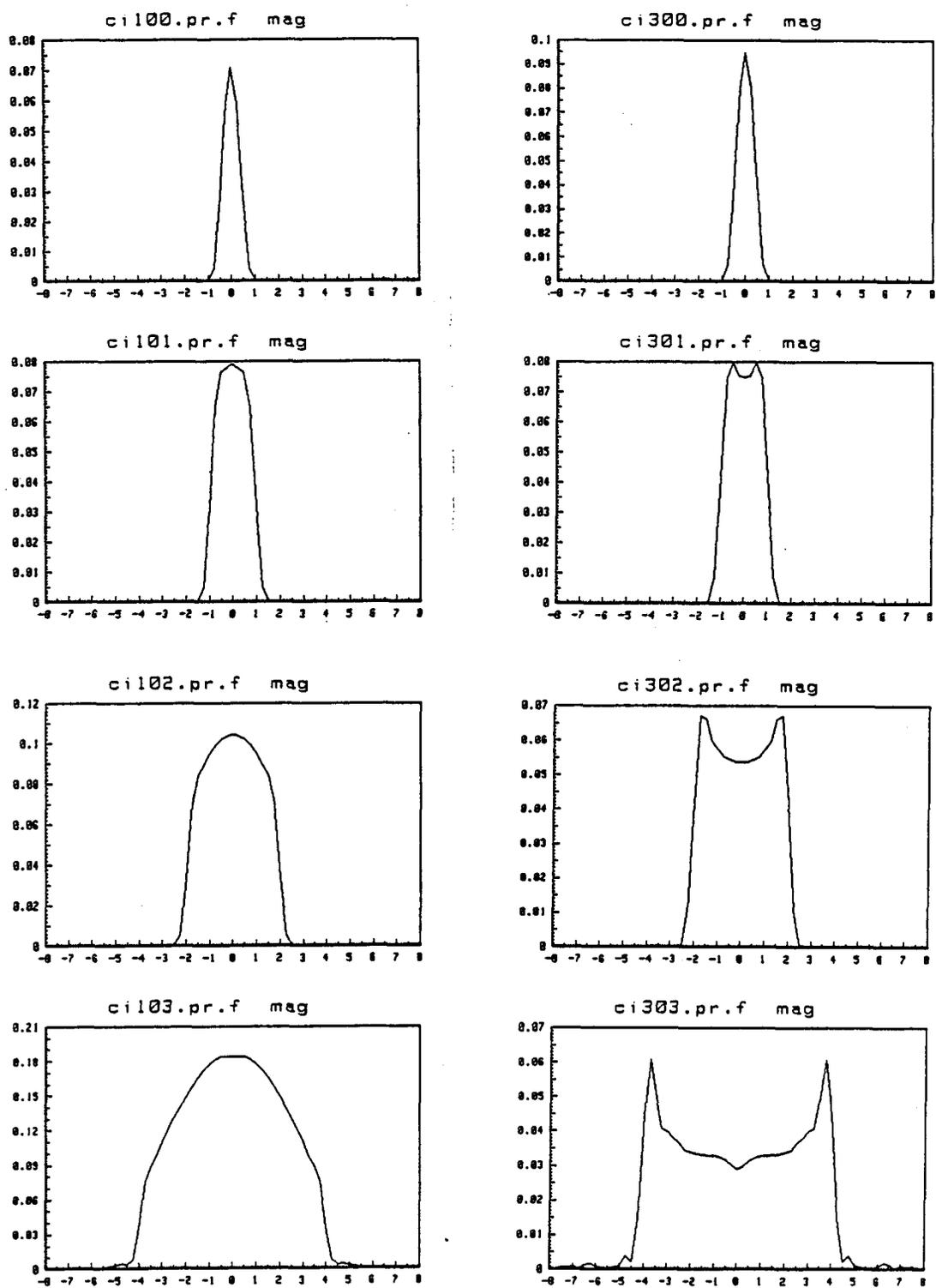


Fig.6.14 Reconstrucción del módulo del contraste de cilindros con pérdidas distintas al agua ($tg\delta \approx 0.1$). Diámetros: 1,2,4,8 λ . Columna izquierda: $tg\delta=0.03$, contraste = 0.061. Columna derecha: $tg\delta=0.2$, contraste = 0.1

Puede observarse que la desadaptación de pérdidas provoca una variación radial en la sensibilidad de la reconstrucción. Esto es debido a que el campo total para múltiples incidencias, tendrá en promedio un perfil exponencial radial, creciente o decreciente respecto al campo incidente. Si las pérdidas en el cuerpo son menores a las del medio, la sensibilidad de la imagen crecerá en las zonas internas, y en caso contrario disminuirá.

Reconstrucción recibiendo con parte de la agrupación

Al estudiar la compatibilidad y margen dinámico de los sistemas cilíndricos, se hizo patente la dificultad de medir los campos dispersados sobre la parte de la agrupación cercana al elemento emisor. Por ello en un sistema real mediremos fundamentalmente los campos dispersados en transmisión. La incidencia de limitar la medida del campo dispersado a un sector angular dependerá de las características de difracción del cuerpo. Para cuerpos de bajo contraste los campos reflejados serán débiles, y las corrientes equivalentes poseerán una fase parecida a la del campo incidente, actuando de forma similar a una agrupación 'end-fire' y produciendo un campo dispersado básicamente en transmisión. La situación puede ser diferente en el caso de cuerpos más difractantes en los que la reflexión puede jugar un papel importante.

Para reconstruir pondremos ceros en los puntos de la matriz $E_s(\varphi_r, \varphi_e)$ que no pueden medirse. Una forma de evaluar el efecto de truncar la recepción en la reconstrucción es obtener el filtro equivalente o dominio transformado de la respuesta impulsional. La fig.6.15 muestra el filtrado frecuencial debido a limitar la recepción a 1/4, 1/2 y 3/4 de la agrupación.

Puede verse que el truncar los campos dispersados por un cuerpo de bajo contraste equivale a un filtrado paso-bajo. Por lo tanto perderemos resolución y debido al enventanado rectangular del campo medido, aumenta el nivel de lóbulos secundarios. La fig.6.16. muestra la respuesta impulsional del algoritmo en un medio con las pérdidas del agua, filtrado paso-bajo y recepción con la mitad de los elementos de la agrupación.

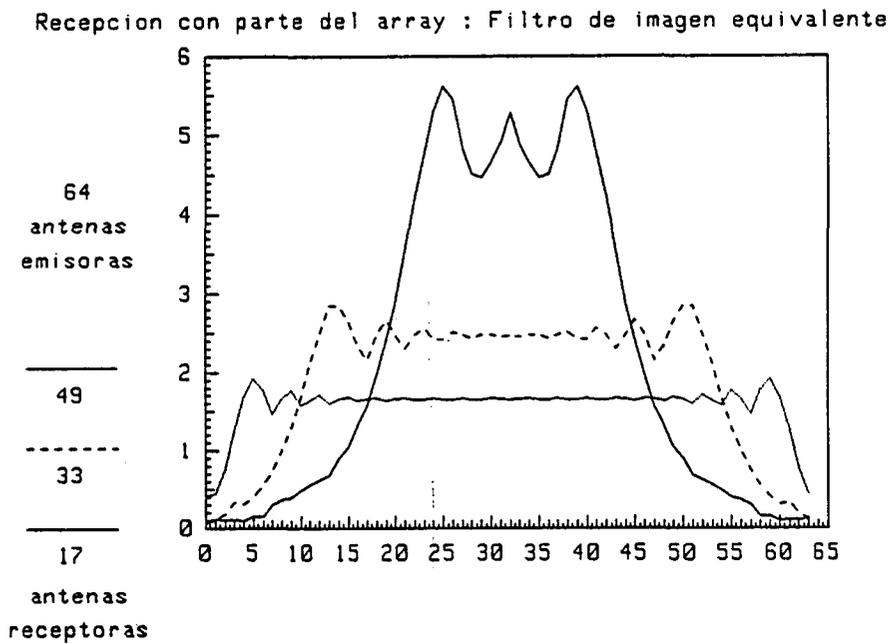


Fig.6.15 Filtro equivalente al recibir con 1/4, 1/2 y 3/4 de una agrupación de 64 elementos.

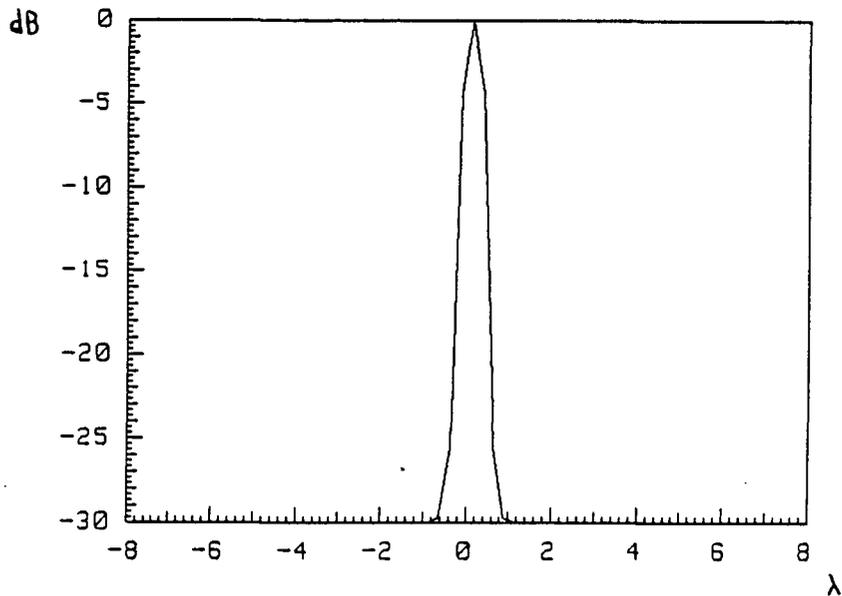


Fig.6.16 Respuesta impulsional del algoritmo al recibir con la mitad de la agrupación enfrentada al emisor ($\text{tg}\delta=0.1$, filtro p.bajo).