

1400217591
0025-54060

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA
FACULTAT D'INFORMATICA DE BARCELONA

GRAFOS Y DIGRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES
COMO MODELOS PARA REDES DE INTERCONEXION

TESIS DOCTORAL

Presentada en la Universitat
Politècnica de Catalunya para
la obtención del título de
Doctor en Informática.

Autora: Paz MORILLO BOSCH

Director: Miguel A. FIOL MORA

Barcelona, Enero 1987

**UPC**
BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATÉ
Jordi Girona, 1 i 3 Campus Nord
Edifici B1
08034 BARCELONA

Mi agradecimiento a todas aquellas personas que de alguna forma han colaborado en la realización de este trabajo. Especialmente a mis amigos de la E.T.S. Ingenieros de Telecomunicación.

 A mi Director de Tesis M.A. Fiol y al Dr. J.L.A. Yebra por su inestimable ayuda, y al Dr. M. Valero como ponente de esta Tesis.

Barcelona, Enero 1987

INDICE

CAPITULO I INTRODUCCION

- 1.1 INTRODUCCION
- 1.2 GRAFOS, REDES DE INTERCONEXION Y
TESELACIONES
- 1.2.1 Grafos y digrafos
- 1.2.2 Redes de interconexion
- 1.2.3 Teselaciones
- 1.3 CONTENIDO DE LA TESIS

CAPITULO II DIGRAFOS CIRCULANTES

- 2.1 DESARROLLO MATEMATICO
- 2.1.1 Definición de equivalencia.....
- 2.1.2 Operaciones elementales
- 2.1.3 Forma normal de Hermite
- 2.1.4 Divisores determinantaes
- 2.1.5 Forma normal de Smith
- 2.1.6 Congruencias en \mathbb{Z}^n
- 2.1.7 Estructura de $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$
- 2.2 DIGRAFOS CIRCULANTES
- 2.2.1 Digrafos circulares multi-
dimensionales
- 2.2.2 Dimensión del digrafo

CAPITULO III GRAFOS Y DIGRAFOS ASOCIADOS CON TESE-
LACIONES

- 3.1 INTRODUCCION

3.2 GRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES

 3.2.1 Grafos de doble lazo

 3.2.2 Grafos de triple lazo

 3.2.3 Dos familias de grafos cúbicos

 3.2.4 Grafos $BG(a,b,c)$

3.3 DIGRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES

 3.3.1 Digrafos de doble lazo

 3.3.2 Digrafos bipartitos

 3.3.3 Digrafos 4-partitos

 3.3.4 Digrafos asociados a teselaciones
 hexagonales

CAPITULO IV DIAMETRO DE UNA FAMILIA DE DIGRAFOS
 CIRCULANTES

4.1 INTRODUCCION

4.2 DIGRAFOS 3-CIRCULANTES

4.3 FORMA DE LAS BALDOSAS

4.4 BALDOSA OPTIMA

CAPITULO V DIAMETRO, DISTANCIA MEDIA Y VUNERA-
 BILIDAD

5.1 INTRODUCCION

5.2 GRAFOS DE DOBLE LAZO

5.3 DIGRAFOS DE DOBLE LAZO

5.4 GRAFOS DE TRIPLE LAZO

5.5 DIGRAFOS DE TRIPLE LAZO

5.6 DIGRAFOS BIPARTITOS

5.7 DIGRAFOS 4-PARTITOS

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1 INTRODUCCION

El tema central de este trabajo se enmarca en el estudio de diversas aplicaciones de la Teoría de Grafos a la Arquitectura de Computadores y, en particular, al diseño de redes de interconexión, lo que constituye un problema fundamental en Ingeniería de Telecomunicación y Ciencia de los Computadores [17].

Por ejemplo, en un sistema multiprocesador (constituido por varios procesadores que se comunican entre sí a través de módulos de memoria compartidos, con objeto de obtener paralelismo en las tareas que le son asignadas), el rendimiento depende de la estructura de la red que interconecta los procesadores con los módulos de memoria.

Otro ejemplo lo constituye la red de área local, que interconecta varios ordenadores que se comunican entre sí a muy alta velocidad. De la topología de dicha red dependen el fácil encaminamiento de los mensajes y la fiabilidad del sistema ante el posible fallo de uno o varios elementos del mismo.

Las redes de interconexión pueden modelarse mediante grafos (dirigidos o no) cuyos vértices representan procesadores, memorias o buses y sus líneas (arcos) enlaces o conexiones entre ellos. Los parámetros y propiedades más importantes a tener en cuenta en el diseño de la red de interconexión corresponden a parámetros y propiedades análogas en el grafo que la modela. A continuación presentamos la terminología sobre grafos y digrafos [11], [23], que se utilizará posteriormente.

1.2 GRAFOS, REDES DE INTERCONEXION Y TESELACIONES.

1.2.1 Grafos y digrafos

Un grafo $G=(V,E)$ está formado por un conjunto $V=V(G)$ de elementos llamados vértices y un conjunto $E=E(G)$ cuyos elementos son pares no ordenados de vértices distintos llamados ramas. Dados dos vértices x e y se dice que son adyacentes si el par no ordenado (x,y) (que denotamos por $xy=yx$) es un elemento de E .

El cardinal del conjunto V , $|G|=|V|$, es el orden del grafo (número de vértices) y el cardinal de E , $|E|$, es el tamaño (número de ramas).

Dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ se dice que son isomorfos, $G \cong G'$, si existe una aplicación biyectiva $\phi:V \rightarrow V'$ tal que $xy \in E \Rightarrow \phi(x)\phi(y) \in E'$.

Dos vértices x , y de un grafo G son semejantes si existe un automorfismo (aplicación biyectiva que conserva las adyacencias) $\psi:G \rightarrow G$ tal que $\psi(x)=y$. Un grafo es vértice-simétrico si todo par de vértices son semejantes.

El conjunto de vértices adyacentes a un vértice $x \in V(G)$ se representa por $\Gamma(x)$. El cardinal de dicho conjunto, $d(x)=|\Gamma(x)|$, se llama grado de x (número de vértices adyacentes a x).

Un grafo es regular de grado d o d -regular, si todos sus vértices tienen grado d . El grado mínimo de los vértices de un grafo se representa por $\delta(G)$ y el grado máximo por $\Delta(G)$.

Un recorrido de longitud ℓ , es una secuencia de vértices y ramas $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{\ell-1}, e_\ell, x_\ell$, con $e_i = x_{i-1}x_i$, $1 \leq i \leq \ell$. Un sendero es un recorrido en el que todas las ramas son distintas, un camino es un recorrido con todos los vértices distintos. Un circuito (ciclo) es un sendero (camino) cuyos vértices inicial y final (vértices terminales) coinciden : $x_0 = x_\ell$.

La distancia $d(x, y)$ entre dos vértices $x, y \in V(G)$ se define como la longitud mínima de un camino $x-y$. Si no existe tal camino, entonces $d(x, y) = \infty$. Un grafo G es conexo si $\forall x, y \in V(G)$, $d(x, y) < \infty$.

Dos parámetros relacionados con la distancia son el diámetro, D , y la distancia media entre vértices, \bar{D} , que se definen por :

$$D = \max_{x, y \in V} \{d(x, y)\} \quad (1.1)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in V} d(x, y) \quad (1.2)$$

donde $N = |V|$.

Un grafo $G=(V, E)$ es bipartito con conjuntos de vértices V_1 y V_2 si $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada rama une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . Un grafo G es r-partito con clases de vértices V_1, V_2, \dots, V_r si $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y cada rama une vértices de clases distintas.

El concepto de grafo dirigido o digrafo es semejante al de grafo, pero se exige que las ramas, ahora llamadas arcos, sean pares ordenados de vértices. Por tanto, la mayor parte de conceptos y terminología sobre grafos se generalizan directamente a digrafos.

Un digrafo D se representa por $D=(V,A)$, donde V es el conjunto de vértices y A el de arcos. Si $u,v \in A$, se dice que u es adyacente hacia v y que v es adyacente desde u .

Si $x \in V$, $d^+(x)$ representará el grado de salida de x , es decir, el número de vértices adyacentes desde x , y $d^-(x)$ el grado de entrada o número de vértices adyacentes hacia x . D es un digrafo d -regular si $\forall x \in V, d^+(x) = d^-(x) = d$.

Todos los conceptos relacionados con el de camino son análogos a los de grafos, con la salvedad de que en los digrafos los caminos son dirigidos. Así la distancia entre dos vértices $u,v \in V$ se denota igualmente por $d(u,v)$, pero ahora no tiene que cumplirse $d(u,v) = d(v,u)$.

Un digrafo $D=(V,A)$ es débilmente conexo si el grafo asociado $G=(V,E)$, obtenido al suprimir las direcciones de los arcos, es conexo. Es unilateralmente conexo si $\forall u,v \in V d(u,v) < \infty$ o $d(v,u) < \infty$. Es fuertemente conexo si $\forall u,v \in V d(u,v) < \infty$ y $d(v,u) < \infty$.

La matriz de adyacencia de un grafo $G=(V,E)$ con N vértices es una matriz $A=A(G)$, $N \times N$, definida por $(|11|, |17|)$:

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= 1 && \text{si } v_i v_j \in E, v_i, v_j \in V \\ (A)_{ij} &= 0 && \text{en caso contrario} \end{aligned} \quad (1.3)$$

De manera análoga se define la matriz de adyacencia de un digrafo D . Trivialmente, en el caso de grafos $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, es decir, la matriz de adyacencia es una matriz simétrica. Sin embargo, cualquier matriz binaria $N \times N$, con ceros en la diagonal, puede ser la matriz de adyacencia de un digrafo.

Dada la matriz de adyacencia $A(G)$ de un grafo, el número de unos en la fila i -ésima, es $d(v_i)$, el grado del vértice v_i . Para la matriz $A(D)$ de un digrafo D , el número de unos en la fila i -ésima es $d^+(v_i)$ y el número de unos en la columna i -ésima es $d^-(v_i)$.

Si $A(D)$ es la matriz de adyacencia de un digrafo D , la matriz traspuesta A^t es la matriz de adyacencia del digrafo opuesto D' , obtenido a partir de D cambiando las direcciones de los arcos.

Las potencias de A dan información del número de recorridos entre dos vértices. Considerando los elementos de A^2 :

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^N (A)_{ik}(A)_{kj} \quad (1.4)$$

A este sumatorio sólo contribuyen con términos no nulos los productos $(A)_{ik}(A)_{kj}$ para los que $(A)_{ik}=1$ y $(A)_{kj}=1$, es decir, existe un recorrido de longitud dos entre v_i y v_j que pasa por v_k . Por tanto, $(A^2)_{ij}$ expresa el número de recorridos distintos de longitud dos entre v_i y v_j . En general, $(A^k)_{ij}$ expresa el número de recorridos distintos, de longitud k , entre v_i y v_j .

En un grafo conexo, o en un digrafo fuertemente conexo, la distancia entre dos vértices v_i y v_j , $i \neq j$, es k , si y sólo si k es el menor entero para el cual $(A^k)_{ij} \neq 0$.

Las permutaciones de las filas y de las correspondientes columnas de A , equivalen a reordenar los vértices del grafo (digrafo). Así dos grafos (digrafos) son isomorfos si y sólo si las correspondientes matrices de adyacencia A_1 y A_2 están relacionadas mediante una

matriz P de permutación:

$$A_2 = P^{-1} A_1 P$$

Otra matriz que se utiliza para caracterizar un grafo es la matriz de incidencia. Dado un grafo $G=(V,E)$ con $|V|=n$ y $|E|=m$, se define la matriz de incidencia $B=B(G)$ como $(|11|, |17|)$:

$$\begin{aligned} (B)_{ij} &= 1 \text{ si } v_i \text{ es incidente con la rama } e_j \\ (B)_{ij} &= 0 \text{ en caso contrario} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para un digrafo D con n vértices y m arcos, se define como:

$$\begin{aligned} (B)_{ij} &= 1 \text{ si el arco } e_j \text{ es incidente desde } v_i \\ (B)_{ij} &= -1 \text{ si el arco } e_j \text{ es incidente hacia } v_i \\ (B)_{ij} &= 0 \text{ en otro caso} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las matrices de adyacencia y de incidencia constituyen la base de las estructuras de datos más comúnmente utilizadas para representar un grafo o un digrafo en la memoria del ordenador. Por ejemplo, si el número de ramas o arcos es mucho menor que n^2 , la forma más económica de representación será una lista de incidencia. En tal lista encadenada se enuncian, para cada vértice v , las ramas o arcos de los que v es vértice terminal.

1.2.2 Redes de interconexión

Sistemas multiprocesadores

Como se ha mencionado en la introducción, un problema fundamental en el diseño de estos sistemas es la forma de interconectar los procesadores con los módulos de memoria. Existen diferentes soluciones que son, fundamentalmente, función de la tecnología subyacente, del número de procesadores y del grado de comunicación necesitada entre ellos.

Los sistemas pueden tener un solo nivel de memoria (los procesadores acceden a cualquier posición de memoria en el mismo tiempo) o varios (cada procesador accede a diferentes partes de la memoria con diferente costo).

Los primeros son sistemas "fuertemente acoplados" [3], las unidades de memoria son compartidas directamente por los procesadores. Los segundos son "débilmente acoplados" (llamados en [3] multicomputadores), cada procesador con su correspondiente memoria local intercambia mensajes con los otros pares procesador-memoria, las memorias sólo se comparten en el sentido de que los mensajes pueden ser enviados a, o transmitidos desde, otros computadores (pares proc-mem).

Además de poder ejecutar los algoritmos de forma paralela, otros objetivos de los sistemas multiprocesadores son:

1. Aumentar la velocidad de cálculo.
2. Fiabilidad, es decir, posibilidad de que el sistema funcione en el caso de que un procesador o un enlace de la red queden fuera de servicio.
3. Modularidad, o posibilidad de variar el número de procesadores y de recursos en general (memorias, periféricos, etc) según las necesidades.

Entre los principales requerimientos exigidos a la topología del sistema, los que estudiaremos en este trabajo son:

1. Diámetro y distancia media (entre vértices) mínimos.
2. Existencia de algoritmos eficientes y sencillos de encaminamiento de los mensajes a través del sistema.
3. Fiabilidad frente a posibles fallos de algunas conexiones.

En [36] se divide a las topologías de interconexión en las siguientes clases:

1. Redes multietapa, en las que los procesadores están conectados a las memorias a través de una red de líneas e interruptores.
2. Redes de camino dedicado, los procesadores están conectados a las memorias, o entre sí, por enlaces directos. Según el carácter de los enlaces, las redes pueden ser unidireccionales o bidireccionales.
3. Redes de camino compartido, en las que los procesadores comparten un medio de comunicación, p.e. un conjunto de buses.

El carácter uni o bidireccional de los enlaces determina el tipo de grafo, dirigido o no, capaz de modelar la red. Las redes con caminos unidireccionales, modeladas mediante digrafos, poseen una serie de ventajas frente a las de tipo bidireccional. Principalmente, en lo que se refiere a la complejidad de los "interfaces" (permiten puertas diferenciadas de entrada y salida), control de tráfico y algoritmos de encaminamiento.

Algunas topologías propuestas recientemente se resumen en [18].

Redes locales

Para el diseño de redes locales han sido propuestas e implementadas varias soluciones. Dos de ellas son las llamadas topologías de bus y de lazo. El ejemplo más sencillo de estas últimas es la topología en anillo, en la que cada procesador está conectado al siguiente formando un ciclo unidireccional [28].

Sin embargo, la topología de lazo presenta inconvenientes, en particular, una gran vulnerabilidad (el fallo de un nodo o de un enlace desconecta el grafo), una sobrecarga de tareas (cada nodo es solicitado por muchas comunicaciones) y un elevado tiempo de transmisión (debido a un mal diámetro).

Para mejorar la fiabilidad y el ancho de banda de la comunicación se han propuesto diferentes topologías multiplicando los lazos. Básicamente en todas ellas se dobla el número de enlaces, así todos los nodos quedan con grado de entrada y de salida igual a dos. Estas topologías se denominan DDLCN ("Distributed Double Loop Computer Networks").

Muchos autores han estudiado estas redes de doble lazo: J.Wolf [42], A.Granrov [22], C.S.Raghavendra en [34] y [35], han propuesto grafos dirigidos de paso fijo, es decir, digrafos en los que cada vértice i es adyacente hacia los vértices $(i+a) \bmod m$, $(i+b) \bmod m$, donde respectivamente $(a,b)=(1,-1)$, $(a,b)=(1,-2)$, $(a,b)=(1,-\sqrt{m})$. Obteniéndose diámetros del orden (resp.) $m/2$, $m/3$ y $2\sqrt{m}$, y distancias medias de $m/4$, $m/6$ y \sqrt{m} .

En [19] y [20] se resumen las configuraciones de este tipo sucesivamente propuestas, junto con el diámetro y la distancia media obtenidos en cada caso.

El objetivo es disminuir estos diámetros y distancias medias (por razones de coste) eligiendo, de manera conveniente, los pasos a y b . En [21] se ha estudiado qué pares (a,b) minimizan el diámetro de una red con un tamaño dado, este estudio se ha realizado para el caso dirigido. El caso no dirigido se estudia en [24].

Una característica muy importante de este

planteamiento es que el problema equivale a un problema de alineamiento de datos: Reordenar vectores p -ordenados con dos interconexiones k -separadas [26], [38].

Dados a_0, a_1, \dots, a_n , un $(n+1)$ -vector, admitiendo los a_i por coordenadas, se llama p -ordenado, si a_{i+1} está situado en la posición $j+p \pmod{n+1}$, siendo j la posición de a_i . Un ejemplo de vector 3-ordenado es $(a_0, a_5, a_3, a_1, a_6, a_4, a_2)$.

Un problema en el que aparecen vectores p -ordenados es en el almacenamiento lineal de matrices. El elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A de orden $n+1$ se almacena en el módulo de memoria de orden $pi+qj \pmod{n+1}$ (lo que para una utilización en paralelo es más interesante que almacenar una misma fila o una misma columna en el mismo módulo). Entonces, las filas se recuperan como vectores q -ordenados y las columnas como vectores p -ordenados.

Es necesario saber reordenar tales vectores, para ello se utilizan interconexiones k -separadas. Una interconexión k -separada transfiere el contenido del registro $ki \pmod{n+1}$ al registro i , para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Se buscan k_1 y k_2 tales que una combinación de interconexiones k_1 -separadas y k_2 -separadas reordene todo vector de dimensión $n+1$ p -ordenado, para $p \in \{1, \dots, n\}$, lo más rápidamente posible. En [21] se muestra cómo este problema es equivalente al enunciado anteriormente.

1.2.3 Teselaciones

Para definir un grafo sobre un conjunto de

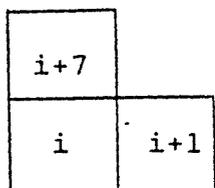
vértices V , basta definir las reglas de adyacencia.

Los grafos y digrafos estudiados en esta Tesis tienen como conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ y existe una partición del conjunto V en subconjuntos V_i (con la misma cardinalidad), $1 \leq i \leq \lfloor m/4 \rfloor$, de forma que cada vértice $j \in V_i$ es adyacente a los vértices $j+a_{i1}, \dots, j+a_{id} \pmod m$. Estos grafos poseen la propiedad de que pueden asociarse con teselaciones del plano.

La idea en la que se basa esta representación geométrica es la siguiente: Identificamos cada vértice del grafo o del digrafo con un triángulo, un cuadrado o un hexágono (dependiendo del grado del grafo) y representamos vértices adyacentes por figuras con un lado en común. De esta forma el grafo corresponde a una cierta baldosa de m celdas que tesela el plano.

La teselación caracteriza completamente el grafo y facilita el estudio de algunas de sus características: diámetro, distancia media, encaminamiento, fiabilidad,...

En la Figura 1-1 se muestra un ejemplo de esta representación geométrica para el digrafo definido sobre \mathbb{Z}_9 , en el que cada vértice i , $0 \leq i \leq 8$, es adyacente hacia los vértices $i+1, i+7 \pmod 9$. En este caso identificamos cada vértice del grafo con un cuadrado, y las adyacencias se representan de la siguiente forma: Cada cuadrado es adyacente hacia el cuadrado situado a su derecha y hacia el situado encima.



En la primera sección del capítulo II se define la congruencia entre vectores de \mathbb{Z}^n módulo una matriz entera M cuadrada de orden n , y se caracteriza el grupo cociente $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$, utilizando la reducción de M a la forma normal de Smith.

Un problema interesante en Teoría de Grafos es la caracterización de los grafos vértice-simétricos. En [39] Turner estudia los grafos vértice-simétricos con un número primo de vértices (grafos PPS) y demuestra que estos grafos son polígonos estrellados. Un grafo $G=(V,E)$ es un polígono estrellado si sus vértices pueden etiquetarse de manera que

$$(v_i, v_j) \in E \iff (v_{i+k}, v_{j+k}) \in E, \quad 1 \leq k \leq |V|-1 \quad (1.7)$$

En este estudio utiliza que la matriz de adyacencia de estos grafos es una matriz circulante. Una matriz circulante es una matriz en la que cada fila se obtiene a partir de la primera mediante un desplazamiento cíclico. Estas matrices han sido estudiadas en [1] y [14].

Debido a la forma de su matriz de adyacencia, los polígonos estrellados se llaman también grafos circulantes.

En [27], Leighton extiende la noción de circulante a la de grafo circulante multidimensional. Esta clase de grafos consiste de aquellos grafos vértice-simétricos cuyo grupo de automorfismos contiene un subgrupo abeliano regular. Previamente demuestra que los grafos circulantes son aquellos cuyo grupo de automorfismos contiene un subgrupo cíclico regular.

En la segunda sección del capítulo II generalizamos estos conceptos al caso de grafos dirigidos. Definimos los digrafos circulantes, cuyo conjunto de vértices

es Z/mZ , y los digrafos circulantes multidimensionales, con conjunto de vértices Z^n/MZ^n . En el estudio de estos digrafos utilizamos los resultados obtenidos en la primera sección.

El capítulo III trata un problema importante en el diseño de redes de interconexión, que consiste en maximizar el número de nodos de la red sabiendo que la distancia máxima entre nodos es k y que cada nodo está interconectado como máximo a otros d nodos. Este problema se conoce, en Teoría de Grafos, como problema (d,k) . Se trata de hallar grafos que tengan máximo número de vértices dados el diámetro k y el grado máximo d , $|6|, |9|$. Este problema se estudia para ciertas familias de grafos y digrafos que pueden asociarse con teselaciones del plano. Después de presentar los resultados conocidos para grafos y digrafos de doble lazo, en este trabajo se dan las soluciones óptimas para las restantes familias propuestas.

Este mismo problema se estudia en el capítulo IV para una familia de digrafos circulantes de grado tres. Para el estudio de esta familia utilizamos un método distinto al utilizado para las familias del capítulo anterior. En primer lugar se demuestra que la baldosa asociada al digrafo siempre se puede tomar en forma de T con ciertas dimensiones, entonces el diámetro del digrafo se puede expresar en función de ellas. En este contexto, el problema planteado equivale a buscar baldosas que tengan área máxima para valores dados de este parámetro (diámetro del grafo).

Otros problemas de optimización que aparecen en el diseño de redes de interconexión son los de minimización del retraso máximo y retraso medio en la transmisión de los mensajes. En el grafo que modela la red, estos problemas corresponden a minimizar el diámetro y la distancia media entre vértices.

En el capítulo V se estudian estos problemas para algunas de las familias definidas en el capítulo III, obteniendo, salvo en un caso, fórmulas cerradas para el diámetro y la distancia media mínimos, en función del orden del grafo. En el estudio realizado en este capítulo, se obtienen también los grafos óptimos para todas las familias propuestas.

En este mismo capítulo se estudia la vulnerabilidad de los grafos pertenecientes a las familias consideradas, es decir, cómo aumenta el diámetro al suprimir un vértice o una arista.

CAPITULO II

DIGRAFOS CIRCULANTES

2.1 DESARROLLO MATEMATICO

Sean Z y $Z^{n \times n}$ los anillos de enteros y matrices cuadradas de orden n sobre Z respectivamente. Sea Z^n el grupo aditivo de n -vectores columna con coordenadas enteras.

2.1.1 Definición de equivalencia

Sean M, M' matrices de $Z^{n \times n}$. Se dice que M' es equivalente por la derecha a M ($M' \tilde{R} M$) si $M' = MV$ para alguna matriz entera unimodular V ($\det V = \pm 1$); M' es equivalente a M ($M' \tilde{E} M$) si $M' = UMV$ para algunas matrices enteras unimodulares U, V .

Es inmediato comprobar que ambas son relaciones de equivalencia.

2.1.2 Operaciones elementales fila (columna)

Consideramos las siguientes operaciones sobre las filas (columnas) de una matriz M :

- a) Intercambiar dos filas (columnas).
- b) Añadir a una fila (columna) m veces otra fila (columna).
- c) Cambiar el signo de una fila (columna).

Cada una de estas operaciones corresponde a multiplicar la matriz M por la izquierda (derecha) por una matriz unimodular.

Por ejemplo, multiplicar por la izquierda

por la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

añade a la fila 1 m veces la fila 2.

Las matrices asociadas a operaciones elementales se llaman matrices elementales. Tienen gran importancia en la clasificación de matrices respecto a las relaciones de equivalencia definidas anteriormente.

2.1.3 Forma normal de Hermite

Toda matriz M de $\mathbb{Z}^{n \times n}$ es equivalente por la derecha a una matriz triangular superior, tal que los elementos de la diagonal principal son positivos, y cada elemento por encima de la diagonal principal pertenece a un determinado sistema completo de residuos módulo el elemento de la diagonal situado en la misma fila.

Para obtener la forma normal de Hermite basta efectuar operaciones elementales, convenientemente elegidas, en las columnas de la matriz M .

Veamos un ejemplo. Como sistema completo de residuos módulo un entero positivo m , tomamos $0, 1, \dots, m-1$.

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

las matrices unimodulares que empleamos en la reducción

de M son:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las sucesivas matrices que obtenemos son:

$$M_1 = M V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = M_1 V_2 = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = M_2 V_3 = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 = M_3 V_4 = \begin{pmatrix} 16 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = M_4 V_5 = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $T = M V$, donde

$$T = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Divisores determinantaes. Factores invariantes.

Sea $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ y k un entero tal que $1 \leq k \leq n$. Se define el k -ésimo divisor determinantal de M , $d_k = d_k(M)$, como el máximo común divisor de todos los menores de orden k de la matriz M . Si son todos nulos se define $d_k(M) = 0$.

Notar que, según esta definición, $d_n(M) = |\det M|$, y si r es el mayor número tal que $d_r(M) \neq 0$, entonces el rango de la matriz M es r .

Se pueden demostrar las siguientes propiedades, [33].

$$a) d_k(M)/d_{k+1}(M), \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$$b) M \tilde{E} M' \iff d_k(M) = d_k(M'), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Por conveniencia, consideramos $d_0(M) = 1$. Las cantidades

$$s_k(M) = d_k(M)/d_{k-1}(M), \quad 1 \leq k \leq r$$

se denominan factores invariantes de M . Se puede demostrar que $s_i(M)/s_{i+1}(M)$, $1 \leq i \leq r-1$, [33].

2.1.5 Forma normal de Smith

Toda matriz M de $Z^{n \times n}$ es equivalente a una matriz diagonal $S = S(M) = \text{diag}(s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0)$, donde r es el rango de M y s_k , $1 \leq k \leq r$, son los factores invariantes de M .

El método de construcción de la forma normal de Smith consiste en colocar, mediante operaciones elementales sobre las filas y las columnas de M , un elemento en la posición $(1,1)$ que divida a todo elemento de la primera fila y columna. Entonces todos los demás elementos de la primera fila y columna pueden reemplazarse por 0, usando sólo operaciones elementales. Sea C la matriz así obtenida ($C \tilde{E} M$), si algún c_{ij} no es divisible por c_{11} , se añade la columna j a la primera y se repite el proceso anterior. Así hasta que el elemento en la

posición (1,1) divide a todos los elementos de la matriz, y los demás elementos de la primera fila y columna sean 0. Luego se repite todo el proceso con la submatriz obtenida suprimiendo la primera fila y columna, y así sucesivamente.

De la existencia y unicidad de la forma normal de Smith, se deduce que dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen los mismos factores invariantes, es decir, si tienen los mismos divisores determinantaes.

2.1.6 Congruencias en \mathbb{Z}^n .

Nuestro objetivo es generalizar a \mathbb{Z}^n el concepto de congruencia en \mathbb{Z} , del que tomamos la siguiente formulación: Dados $\alpha, \beta, m, m \neq 0$, se dice que α es congruente con β módulo m , $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$, si $\alpha - \beta \in m\mathbb{Z}$ (ideal de los múltiplos de m).

Sean ahora $a, b \in \mathbb{Z}^n$ y $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ no singular, diremos que a es congruente con b módulo M , $a \equiv b \pmod{M}$, si $a - b \in M\mathbb{Z}^n$ (conjunto cuyos elementos son las combinaciones lineales, con coeficientes enteros, de los vectores columna de M . Dicho conjunto se llama retículo generado por M).

Notemos que si $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, los vectores $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son congruentes módulo m si y sólo si $a_i \equiv b_i \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq n$.

2.1.7 Estructura de $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$

Puesto que $M\mathbb{Z}^n$ es subgrupo normal de \mathbb{Z}^n , se puede considerar el grupo cociente $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$, grupo de los vectores enteros módulo M .

Para estudiar la estructura de $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$ observe-

mos que si $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, este grupo es el producto directo de los grupos cíclicos $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$.

Si consideramos la forma normal de Hermite de M , $M' = MV$, es fácil ver que $a \equiv b \pmod{M} \iff a \equiv b \pmod{M'}$. Por tanto $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n/M'\mathbb{Z}^n$.

Consideremos ahora la forma normal de Smith de M , $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) = UMV$. En este caso se demuestra que $a \equiv b \pmod{M}$ si y sólo si $Ua \equiv Ub \pmod{S}$, es decir:

$$a \equiv b \pmod{M} \iff U_i a \equiv U_i b \pmod{s_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

donde U_i representa la fila i -ésima de la matriz U .

Sea p el menor entero positivo tal que $s_{n-p} = 1$ ($\implies s_1 = s_2 = \dots = s_{n-p-1} = 1$). Entonces las $n-p$ primeras ecuaciones de (2.1) son irrelevantes, resultando:

$$a \equiv b \pmod{M} \iff U' a \equiv U' b \pmod{S'} \quad (2.2)$$

donde U' es la matriz $p \times n$ obtenida a partir de U suprimiendo las $n-p$ primeras filas $S' = \text{diag}(s_{n-p+1}, s_{n-p+2}, \dots, s_n)$.

Por tanto se puede definir una aplicación ϕ entre los vectores módulo M y los vectores módulo S' , con $\phi(a) = U'a$. Es inmediato comprobar que ϕ es un isomorfismo de grupos, y entonces:

$$\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n \cong \prod_{i=n-p+1}^n \mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z} \quad (2.3)$$

Consecuencia de esto son los siguientes lemas:

Lema 2.1.1:

El número de clases de equivalencia módulo M es $o(\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n) = |\det M|$.

Lema 2.1.2:

El grupo cociente $\mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$ es cíclico si y sólo

si $d_{n-1}=1$.

Por ejemplo, si $n=2$, esta condición se traduce en $\text{mcd}(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})=1$, siendo m_{ij} los elementos de la matriz M , [18].

2.2 DIGRAFOS CIRCULANTES

Se define un digrafo circulante $D_m(a_1, a_2, \dots, a_d)$ como el digrafo con conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$ (grupo cíclico de enteros módulo m) y adyacencias dadas por $u \rightarrow u+a_1, u+a_2, \dots, u+a_d \pmod{m}$. Los a_i , $1 \leq i \leq d$, se llaman pasos o saltos del digrafo.

El digrafo $D_m(a_1, a_2, \dots, a_d)$ es fuertemente conexo si y sólo si a partir del vértice 0 se puede alcanzar el vértice 1 (y por tanto todos los demás); es decir, existen enteros positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ tales que $a_i \alpha_i \equiv 1 \pmod{m}$, o en forma vectorial $a^T \alpha \equiv 1 \pmod{m}$, donde $a = (a_1, \dots, a_d)^T$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T$, lo que equivale a

$$\text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_d, m) = 1 \quad (2.4)$$

2.2.1 Digrafos circulantes multidimensionales

Sea M una matriz de $\mathbb{Z}^{n \times n}$ no singular, y sean b_1, \dots, b_d vectores de \mathbb{Z}^n . Se define el digrafo circulante multidimensional $D_M(b_1, \dots, b_d)$ como el digrafo con conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}^n / M\mathbb{Z}^n$ (grupo abeliano de vectores enteros módulo M) y arcos $u \rightarrow u+b_1, \dots, u+b_d \pmod{M}$.

En el caso $b_k = e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, $1 \leq k \leq d$, se denominan también digrafos de pasos conmutativos. Estos digrafos corresponden a diagramas de Cayley de grupos abe-

lianos, $|37|, |41|$.

El digrafo $D_M(b_1, \dots, b_d)$ es fuertemente conexo si y sólo si desde el vértice 0 pueden alcanzarse los vértices e_k , $1 \leq k \leq n$ (y por tanto todos los demás); es decir, existen d -vectores a_1, \dots, a_n con coordenadas enteras positivas tales que $(b_1, \dots, b_d)a_k \equiv e_k \pmod{M}$, $1 \leq k \leq n$, o en forma matricial $BQ \equiv I \pmod{M}$, con B matriz $n \times d$ y Q matriz $d \times n$.

2.2.2 Dimensión de un digrafo circulante multidimensional

Un digrafo circulante puede ser multidimensional para diferentes valores de n . Por ejemplo:

$n=3$

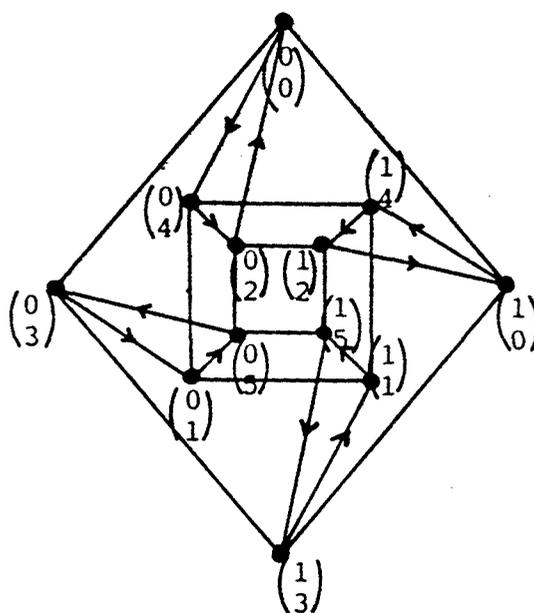
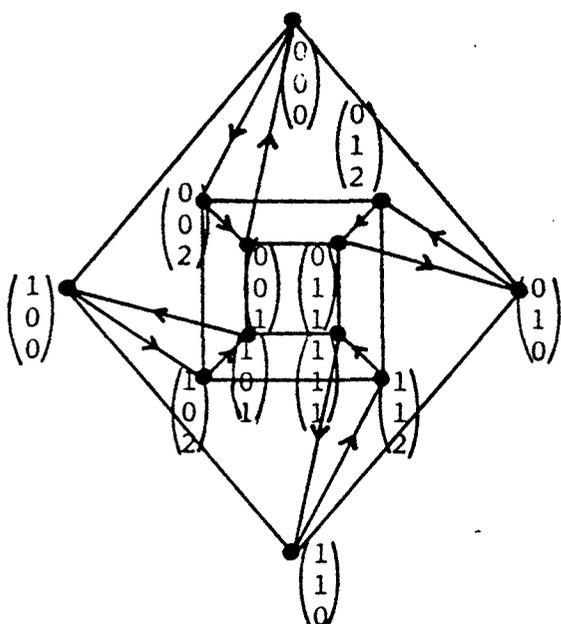
$$M = \text{diag}(2, 2, 3)$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$n=2$

$$M = \text{diag}(2, 6)$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Utilizando la notación de Leighton [27] para grafos, el menor de tales n se llama dimensión del digrafo y se dice que D es un digrafo n -dimensional. Así los digrafos circulantes son 1-dimensionales.

Como consecuencia del isomorfismo dado en 2.1.7

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{Z}^n / M\mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \bigotimes_{i=n-p+1}^n \mathbb{Z} / s_i \mathbb{Z} \\ \mathbf{b} & \longrightarrow & U'\mathbf{b} \end{array}$$

se tiene el siguiente isomorfismo entre digrafos:

$$D_M(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d) \cong D_S(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_d), \text{ donde } \mathbf{c}_i = U'\mathbf{b}_i, \ 1 \leq i \leq d.$$

Por tanto la dimensión de $D_M(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$ es menor o igual que p , y si $p=1$ ($s_{n-1}=d_{n-1}=1$) el digrafo es circulante.

En este caso particular estudiamos una propiedad que será de utilidad en las secciones siguientes.

Observemos que si el digrafo $D_M(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$ es circulante, la matriz del isomorfismo ϕ corresponde a la última fila de la matriz U , $U' = U_n$.

Para obtener todos los isomorfismos entre $\mathbb{Z}^n / M\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ basta componer ϕ con cualquier isomorfismo σ de $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$. Se sabe que todo isomorfismo σ de $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ es de la forma $\sigma(a) = \alpha a$ con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$; por tanto, existen $\phi(m)$ (donde ϕ es la función de Euler) isomorfismos de $\mathbb{Z}^n / M\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$, cuyas matrices son αU_n con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$. En consecuencia existen al menos $\phi(m)$ isomorfismos entre $D_M(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$ y $D_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)$ con $\mathbf{a}_i = U_n \mathbf{b}_i$, $1 \leq i \leq d$.

En los siguientes capítulos consideramos algunas familias de digrafos circulantes $D_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)$, donde r ($\leq d$) pasos son independientes (por ejemplo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$)

y los demás son combinaciones de éstos.

El estudio que realizamos consiste en hallar qué digrafos de la familia (es decir, con qué pasos a_1, \dots, a_d) cumplen determinadas propiedades relacionadas con la distancia. Demostraremos que es posible hacer una representación geométrica del digrafo en el espacio \mathbb{R}^r , que facilita este estudio.

Como consecuencia de esta representación cada digrafo circulante puede asociarse a un digrafo circulante multidimensional. Se tendrá $D_m(a_1, \dots, a_d) \cong D_M(b_1, \dots, b_d)$, donde M es una matriz de $\mathbb{Z}^{r \times r}$ con $|\det M| = m$ y $b_i = e_i$, para $1 \leq i \leq r$.

Entonces, según lo expuesto anteriormente, los pasos a_1, \dots, a_r asociados al digrafo corresponden a las componentes de la última fila de U multiplicadas por cualquier α tal que $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$ (donde U es una matriz unimodular tal que $S(M) = UMV$), es decir, $(a_1, \dots, a_r) = \alpha U_r$. También se deduce que hay $\phi(m)$ conjuntos distintos de pasos asociados al mismo digrafo.

Veamos ahora otro método para hallar los pasos asociados a un determinado digrafo circulante, a partir de la matriz M . Demostraremos que hacer el cálculo anterior equivale a resolver el sistema de congruencias

$$(a_1, \dots, a_r)M \equiv 0 \pmod{m} \quad (2.5)$$

junto con la condición

$$\text{mcd}(a_1, \dots, a_r, m) = 1 \quad (2.6)$$

En efecto, si $(a_1, \dots, a_r) = \alpha U_r$, entonces (a_1, \dots, a_r) es la matriz de un isomorfismo entre $\mathbb{Z}^r / M\mathbb{Z}^r$ y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y por lo tanto $(a_1, \dots, a_r)M \equiv 0 \pmod{m}$. Por otra parte, como U es unimodular, los elementos de la última fila de U son primos entre sí, y de aquí $\text{mcd}(a_1, \dots, a_r, m) = \text{mcd}(\alpha, m) = 1$.

Estudiemos la implicación en sentido contrario. Buscamos las soluciones del sistema de congruencias

$$\begin{aligned} aM \equiv 0 \pmod{m} &\iff aM = \beta m, \beta \in \mathbb{Z}^r \iff \\ \iff aU^{-1}SV^{-1} = \beta m, \beta \in \mathbb{Z}^r, S = S(M) = \text{diag}(1, 1, \dots, m) &\iff \\ \iff aU^{-1}S = \beta Vm = \mu m, \mu \in \mathbb{Z}^r \end{aligned}$$

Denotamos $aU^{-1} = b \in \mathbb{Z}^r$, entonces $bS = \mu m$, $\mu \in \mathbb{Z}^r$ y por tanto $b = (\mu_1 m, \mu_2 m, \dots, \mu_{r-1} m, \mu_r)$.

Ahora, entre todas las soluciones de (2.5) sólo nos interesan las que cumplan (2.6), en consecuencia b ha de verificar $\text{mcd}(b_1, b_2, \dots, b_r, m) = 1$. Por tanto las soluciones serán $a = bU$, donde $b = (0, 0, \dots, 0, \alpha)$ con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$. Es decir, $a = \alpha e_r U = \alpha U_r$ con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$ c.q.d.

Otra manera de demostrar que las soluciones de (2.5) que cumplen (2.6) son de la forma αU_r con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$ es la siguiente:

Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ u & \longrightarrow & au \end{array}$$

por cumplirse (2.5) tiene sentido factorizar esta aplicación al grupo cociente

$$\tilde{\phi} : \mathbb{Z}^r / m\mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

además, por verificarse (2.6), este morfismo es exhaustivo y, como los dos grupos tienen el mismo orden, será un isomorfismo. Por tanto, según lo visto anteriormente, el vector a tiene que ser $a = \alpha U_r$ con $\text{mcd}(\alpha, m) = 1$

CAPITULO III

GRAFOS Y DIGRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo estudiamos el diámetro de algunas familias de grafos y digrafos que pueden asociarse con teselaciones del plano. Concretamente, el problema que nos planteamos es hallar los grafos que tienen orden máximo para valores dados del diámetro y el grado. El estudio conduce siempre a las soluciones óptimas [29], [44].

En las secciones 3.2.1 y 3.2.2 consideramos dos familias de grafos circulantes interesantes en el diseño de redes, ver [4]. Estas familias corresponden a los grafos de doble y triple lazo, un estudio detallado de la primera se encuentra en [8]. En [5] se estudian los grafos de doble lazo como topologías de redes óptimas en cuanto a diámetro en el contexto de redes con cuatro enlaces bidireccionales por nodo.

En la sección 3.2.3 se estudian dos familias de grafos cúbicos con diferentes reglas de adyacencia para vértices pares e impares, el estudio conduce a los grafos de Petersen generalizados y a anillos con cuerdas. En [12] se determinan las clases de isomorfismos de esta última familia cuando el número de vértices es primo.

En la sección 3.2.4 se estudia una familia de grafos bipartitos de grado 4, en la que cada vértice se identifica con un triángulo equilátero [30].

La sección 3.3.1 contiene los principales resultados sobre digrafos de doble lazo, en los que cada vértice i es adyacente hacia los vértices $i+a$ y $i+b$, mod m , para ciertos a y b enteros distintos. Este caso ha sido considerado por otros autores, ver por ejemplo [43], y ha sido

resuelto en [21]. Los digrafos óptimos tienen orden $m = \lfloor (k+2)^2/3 \rfloor - 1$.

Considerando digrafos bipartitos, en la sección 3.3.2 construimos digrafos regulares de grado 2 y con un número de vértices del orden de k^2 . Una mejora adicional se obtiene en la sección 3.3.3, donde la consideración de digrafos 4-partitos permite la construcción de digrafos regulares de grado 2 y cuyo número de vértices es del orden de $2k^2$.

En [25] se proponen unas redes análogas a las representadas por los digrafos 4-partitos y se demuestra que poseen un buen algoritmo de encaminamiento desde un nodo fijo hacia todos los demás.

Todos estos digrafos están asociados a teselaciones del plano que utilizan un cuadrado para representar un vértice. En la sección 3.3.4 se considera una situación diferente, al identificar cada vértice de un digrafo regular de grado 3 con un hexágono.

3.2 GRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES

3.2.1 Grafos de doble lazo

Sea un grafo con conjunto de vértices Z_m . Se dice que se un grafo de doble lazo si cada vértice i es adyacente a los vértices $i \pm a, i \pm b, (\text{mod } m)$, donde a y b son enteros distintos tales que $1 \leq a, b \leq \lfloor m/2 \rfloor$. Denotaremos estos grafos por $D_m(a, b)$ y diremos que a y b son pasos asociados al grafo. En la Figura 3-1 se muestra $D_{13}(1, 5)$.

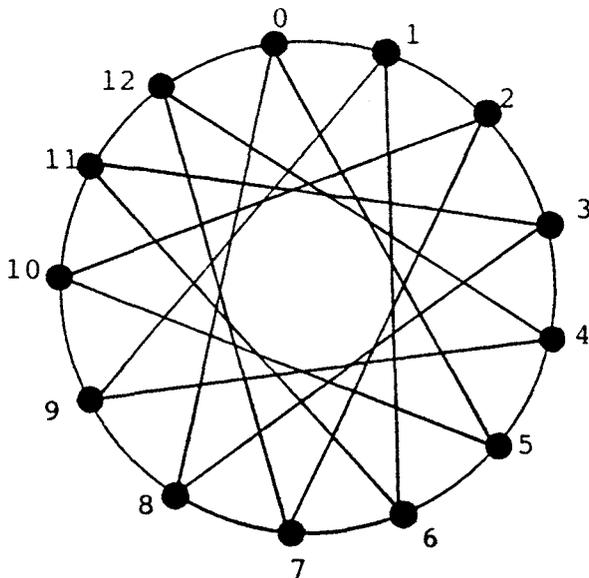


Fig. 3-1

Los grafos de doble lazo son vértice-simétricos debido a los automorfismos $i \rightarrow i + \alpha, 0 \leq \alpha \leq m-1$. Esto nos permite estudiar su diámetro desde cualquier vértice, por comodidad lo haremos desde el 0.

Desde este vértice, en un paso alcanzamos los vértices $\pm a, \pm b, (\text{mod } m)$; en dos pasos $\pm 2a, \pm a \pm b, \pm 2b, (\text{mod } m)$; en tres pasos $\pm 3a, \pm 2a \pm b, \pm a \pm 2b, \pm 3b, (\text{mod } m)$, y así sucesi-

mente. Entonces, el orden máximo de un grafo de doble lazo con diámetro k sería

$$m_k = 1 + 4 + 8 + \dots + 4k = 2k^2 + 2k + 1 \quad (3.1)$$

si todos los números $pa + qb$, con $|p| + |q| \leq k$, fuesen distintos módulo m . Demostraremos que esta cota es alcanzable.

Observemos que una condición necesaria y suficiente para que el grafo sea conexo es

$$(a, b, m) = \text{mcd}(a, b, m) = 1 \quad (3.2)$$

En efecto, si $(a, b, m) = r \neq 1$ sólo podremos alcanzar los vértices que son múltiplos de r . Recíprocamente, si $(a, b, m) = 1$ existen enteros α , β y γ tales que $\alpha a + \beta b + \gamma m = 1$, es decir, $\alpha a + \beta b \equiv 1 \pmod{m}$. Entonces, el vértice 1, y en consecuencia todos los demás, puede alcanzarse desde el 0.

Los vértices que alcanzamos sucesivamente a partir del 0 pueden situarse en el plano tal como muestra la Figura 3-2.

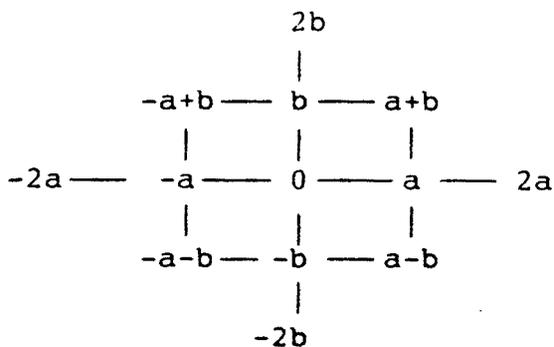


Fig. 3-2

Como consecuencia de esta representación observamos dos propiedades de tipo geométrico.

1. Periodicidad. Consideremos el plano dividido en cuadrados iguales, numerados como indica la Figura 3-2, situando el 0 en uno cualquiera de ellos. Cada cuadrado contiene un número de 0 a $m-1$, y la distribución de estos números en

el plano se repite periódicamente. Este hecho se ilustra en la Figura 3-3 para $m=13$, $a=2$ y $b=3$.

2. Teselación. Supongamos $(a,b,m)=1$ y formemos una baldosa con m cuadrados cualesquiera numerados de 0 a $m-1$. Esta baldosa tesela periódicamente el plano; para ello basta colocar el cuadrado de la baldosa numerado con el 0 sobre todos los cuadrados del plano numerados con el 0. En la Figura 3-3 se muestra una posible teselación.

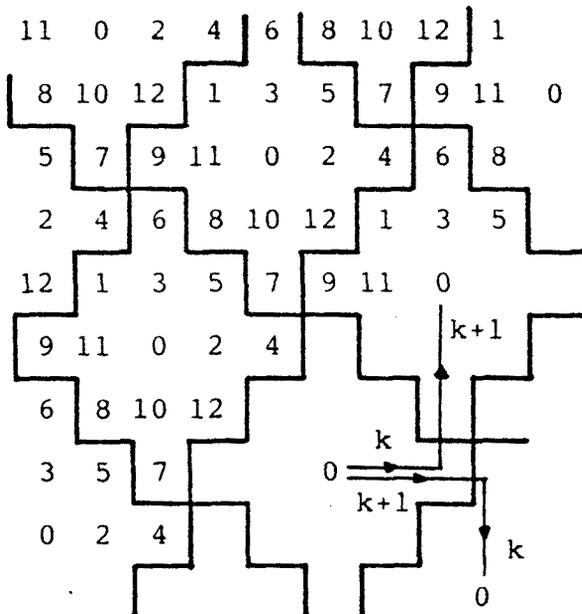


Fig. 3-3

Planteado en este contexto, nuestro objetivo es construir baldosas que teselen el plano y correspondan a grafos con orden máximo para valores dados del diámetro.

Como se muestra en la Figura 3-3, la baldosa óptima que corresponde a $m=2k^2+2k+1$ tesela el plano. Falta demostrar que existen pasos a y b que la generan; para ello basta ver que existen valores que producen el modelo periódico dado, el cual está caracterizado por la posición de los "ceros". Por tanto a y b deben satisfacer (ver Fig. 3-3)

$$\begin{aligned} (k+1)a - kb &\equiv 0 \pmod{m} \\ ka + (k+1)b &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned} \tag{3.3}$$

junto con la condición (3.2) que impide la existencia de otros ceros dentro de la baldosa. Notar que estas dos igual-

dades corresponden a un caso particular de las expresiones (2.5) y (2.6) del cap.II, donde se justificó matemáticamente esta formulación.

Este sistema tiene soluciones no triviales ya que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = (k+1)^2 + k^2 = 2k^2 + 2k + 1 \equiv 0 \pmod{m} \quad (3.4)$$

Resolvemos el sistema escribiendo, para ciertos α, β ,

$$(a, b) \begin{pmatrix} k+1 & k \\ -k & k+1 \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)m \quad (3.5)$$

de donde

$$(a, b) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ k & k+1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Por ejemplo, para $\alpha=1, \beta=1$ obtenemos

$$a=2k+1 \quad b=1$$

que trivialmente satisfacen la condición (3.2), mientras que para $\alpha=0, \beta=1$ obtenemos otro par de pasos

$$(a, b) = (k, k+1) = (k+1)(2k+1, 1)$$

3.2.2 Grafos de triple lazo

Consideremos ahora el caso en que cada vértice $i, 0 \leq i \leq m-1$, es adyacente a los vértices $i+a, i+b, i+c$, donde $c=-(a+b)$ y a, b son enteros distintos $0 \leq a, b \leq \lfloor m/2 \rfloor$. Denotamos estos grafos por $TLG(a, b, c)$.

En este caso tomamos el modelo geométrico que se muestra en la Figura 3-4.

Como en la familia anterior, estos grafos son vértice-simétricos debido al automorfismo $i \rightarrow i+\alpha, 1 \leq \alpha \leq m-1$, y los grafos son conexos si y sólo si

$$(a, b, c, m) = (a, b, m) = 1 \quad (3.7)$$

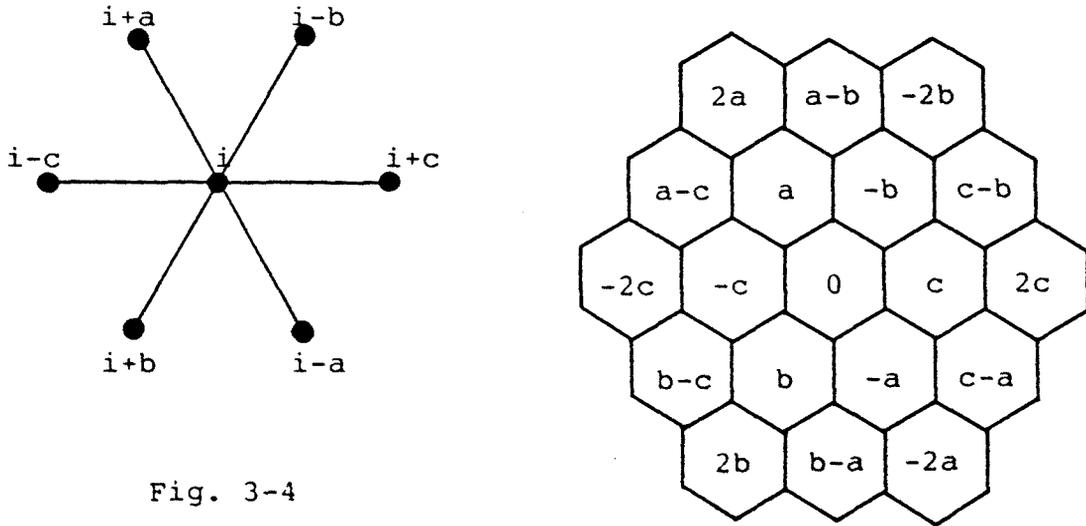


Fig. 3-4

El orden máximo de un grafo de triple lazo con diámetro k es

$$m_k = 1 + \sum_{q=1}^k 6q = 3k^2 + 3k + 1 \quad (3.8)$$

La correspondiente baldosa óptima tesela el plano y las ecuaciones para la distribución de ceros son ahora (ver Figura 3-5):

$$\begin{aligned} (k+1)a - kb &\equiv 0 \pmod{m_k} \\ (k+1)b - kc &\equiv 0 \pmod{m_k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

junto con

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{m_k} \quad (3.10)$$

El sistema (3.9), (3.10) tiene soluciones no triviales puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = 3k^2 + 3k + 1 \equiv 0 \pmod{m_k} \quad (3.11)$$

y las soluciones viene dadas por :

$$(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} k^2 & k(k+1) & (k+1)^2 \\ 2k+1 & -k & -k-1 \\ k & k+1 & -2k-1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

para α, β, γ enteros cualesquiera. Por ejemplo, para $\alpha=0$, $\beta=1$ y $\gamma=1$ obtenemos la solución

$$a=3k+1, \quad b=1, \quad c=-3k-2$$

que trivialmente satisface (3.7) y además muestra la estructura del triple lazo ya que

$$(a, m_k) = (b, m_k) = (c, m_k) = 1$$

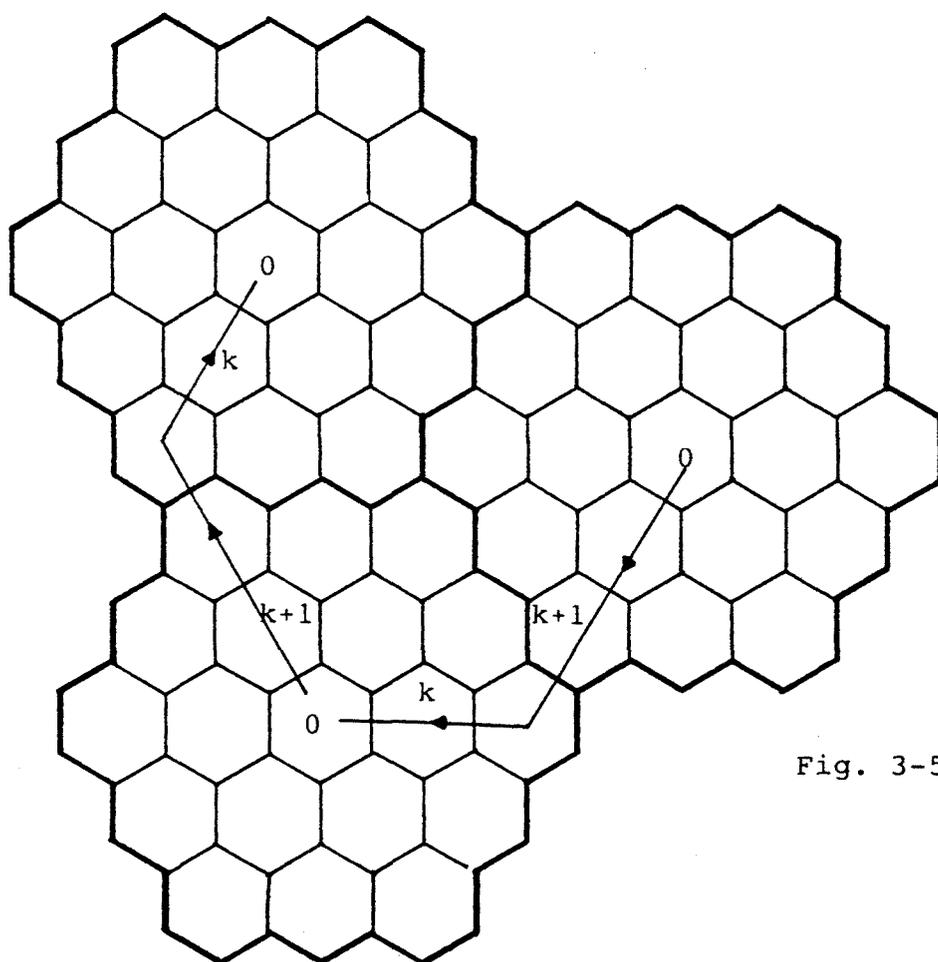


Fig. 3-5

3.2.3 Dos familias de grafos cúbicos

Consideramos ahora dos familias de grafos cúbicos con un número par de vértices, $V = V_0 \cup V_1$, donde $V_0 = \{0, 2, 4, \dots, m-2\}$ y $V_1 = \{1, 3, 5, \dots, m-1\}$.

En la primera familia cada vértice $i \in V_0$ es adyacente a los vértices (mod m) $i + c \in V_1$ y $i \pm a \in V_0$, y cada vértice $j \in V_1$ es adyacente a los vértices $j - c \in V_0$, $j \pm b \in V_1$, tal que c es impar y a, b son pares. Sin perder generalidad, podemos

suponer $c=1$ (basta reenumerar los vértices de V_0 o V_1). Nuestro estudio conduce a los grafos de Petersen generalizados, en el sentido de [40], donde se estudian sus propiedades de línea-coloración.

En la segunda familia cada vértice $i \in V_0$ es adyacente a los vértices $(\text{mod } m)$ $i+a, i+b, i+c \in V_1$, para a, b y c impares distintos. En consecuencia, cada vértice $j \in V_1$ es adyacente a los vértices $j-a, j-b, j-c \in V_0$. Como antes es posible fijar uno de estos parámetros, tomaremos $c=1$. En este caso los grafos óptimos son los anillos con cuerdas, en el sentido de [3], estos grafos ya fueron introducidos en [13].

Grafos de Petersen generalizados

En la Figura 3-6 se muestra la representación geométrica de estos grafos con $c=1$.

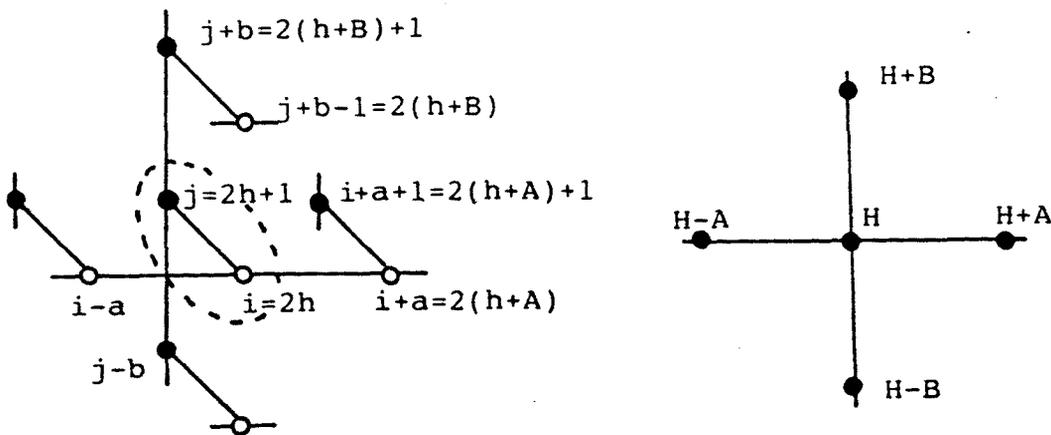


Fig. 3-6

En este caso las baldosas óptimas no teselan el plano; el modelo dado en la figura 3-6 sugiere asociar cada par de vértices $H=\{2h, 2h+1\}$, el cual es adyacente a los pares $H \pm A$ y $H \pm B$ donde $a=2A, b=2B$, y utilizar los resultados de la sección 3.2.1. A partir del grafo de doble lazo óptimo con diámetro 1 y $2l^2+2l+1$ vértices, podemos obtener

un grafo de orden $2(2l^2+2l+1)$ y diámetro como máximo $k=l+2$, ya que cualquier camino requiere como máximo dos pasos adicionales de tipo c. Para $l>1$ los grafos resultantes tienen realmente diámetro $k=l+2$ y orden

$$m_k = 2(2(k-2)^2+2(k-2)+1) = (2k-3)^2+1, \quad (3.13)$$

mientras que para $l=1$ conduce al grafo de Petersen ($k=2$). Además, para $k>4$ estos grafos se pueden generar con

$$a=2A=2l=2k-4, \quad b=2B=2(l+1)=2k-2$$

En [7] se deduce este mismo resultado analíticamente, obteniendo estos grafos como un producto especial de K_2 (grafo completo con dos vértices) y C_{2l^2+2l+1} .

Anillos con cuerdas

En este caso se puede asociar cada vértice con un triángulo equilátero obteniéndose el modelo plano de la Figura 3-7.

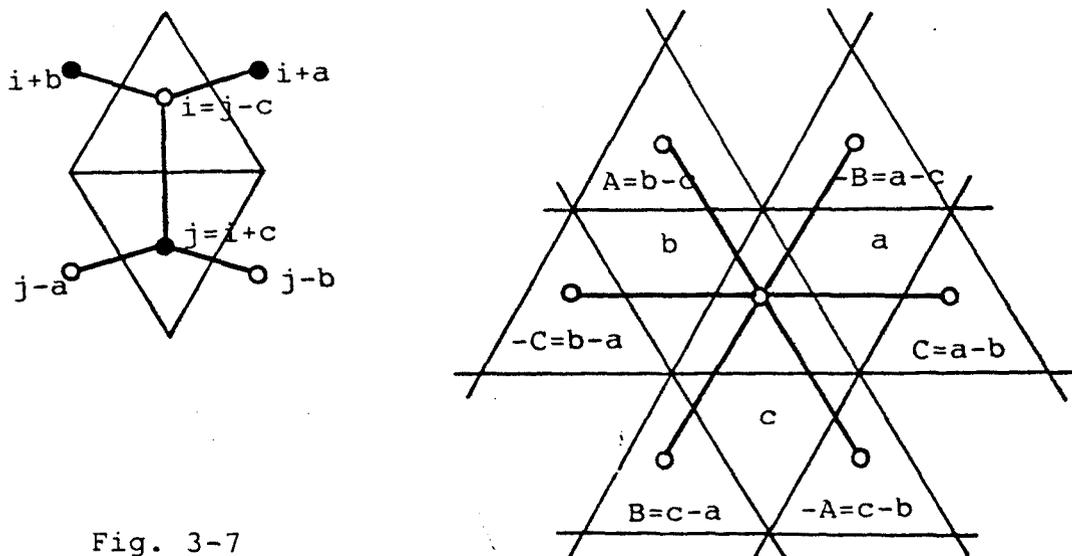


Fig. 3-7

Como antes, los automorfismos $i \rightarrow i+\alpha$ para α par y $i \rightarrow i+\beta$ para β impar, permiten el estudio de estos grafos desde cualquier vértice, lo haremos desde el 0.

Puesto que a, b, c son impares, estos grafos

son bipartitos. En consecuencia, los vértices de V_0 están a distancia par del vértice 0, mientras que los vértices de V_1 están a distancia impar, y el orden máximo m_k de un grafo con diámetro k es el doble del número de vértices en V_0 (cuando k es impar) o V_1 (cuando k es par) a distancia $\leq k-1$ del vértice 0. Entonces, como existen $3p$ vértices a distancia $p (\geq 1)$ del vértice 0, obtenemos con $p=2n$,

$$m_k = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^l 6n \right) = 2 + 6l(1+l) = \frac{3k^2 + 1}{2} \quad (3.14)$$

cuando $k=2l+1$ es impar y, con $p=2n-1$,

$$m_k = 2 \left(\sum_{n=1}^l 3(2n-1) \right) = 6l^2 = \frac{3k^2}{2} \quad (3.15)$$

cuando $k=2l$ es par. Demostraremos que esta cota es alcanzable para k impar, pero no para k par $k > 2$.

Observemos, en primer lugar, que dentro de V_0 o V_1 usamos pasos $\pm A, \pm B, \pm C$, donde

$$A \equiv b-c, \quad B \equiv c-a, \quad C \equiv a-b \pmod{m} \quad (3.16)$$

están relacionados por

$$A+B+C \equiv 0 \pmod{m} \quad (3.17)$$

El grafo es conexo si y sólo si todos los vértices pares pueden alcanzarse desde el vértice 0 y esto sucede si y sólo si

$$(A, B, C, m) = (A, B, m) = (b-c, c-a, m) = 2 \quad (3.18)$$

Esto sugiere utilizar los resultados de la sección 3.2.2.

Cuando $k=2l+1$ es posible alcanzar los $3l^2+3l+1$ vértices pares como máximo en l A, B o C pasos, es decir, como máximo en $2l$ a, b o c pasos, y entonces, un paso adicional (por ejemplo c) permite obtener todos los vérti-

ces impares. Como en la sección 3.2.2 se puede tomar, por ejemplo:

$$A=b-c=2(3l+1), \quad B=c-a=2, \quad C=a-b=-2(3l+2)$$

y tomando $c=1$ resulta

$$a=-1, \quad b=6l+3=3k, \quad c=1$$

El hecho que, además de $c=1$, se pueda tomar siempre $a=-1$ nos dice que estos grafos son anillos con cuerdas. Por ejemplo, para $k=3$ obtenemos el grafo de Heawood de la Figura 3-8.

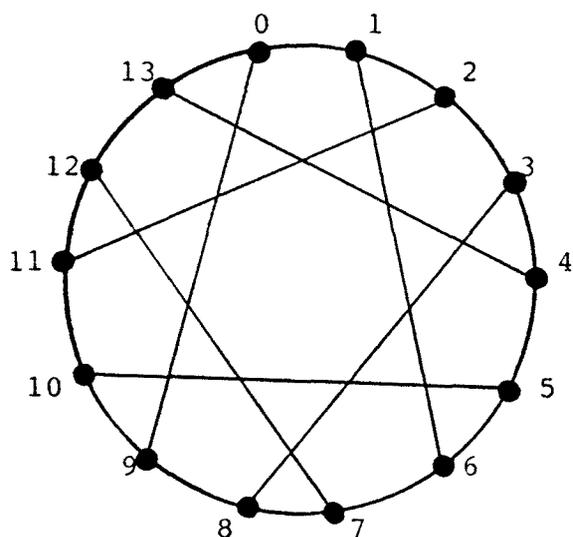


Fig. 3-8

Analogamente, cuando $k=2l$ se puede utilizar el último paso para alcanzar todos los vértices pares a partir de los vértices impares que están a distancia $\leq k-1=2l-1$. Para usar el modelo de adyacencia hexagonal de la sección 3.2.2, asociamos un hexágono a cada par de vértices adyacentes $j \in V_1, j-c \in V_0$, ver Figura 3-9. El primer paso permite alcanzar los tres hexágonos correspondientes a $j=a, j=b$ y $j=c$. Entonces, los $2l-2=2(l-1)$ pasos adicionales se usan como $l-1$ pasos A, B o C para alcanzar los otros $3l^2$ hexágonos (Figura 3-9). La correspondiente baldosa tesela el plano, pero las ecuaciones para la distribución de los ceros son (ver Figura 3-10):

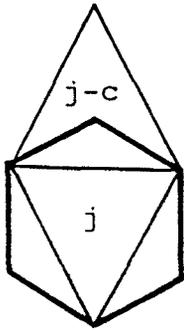
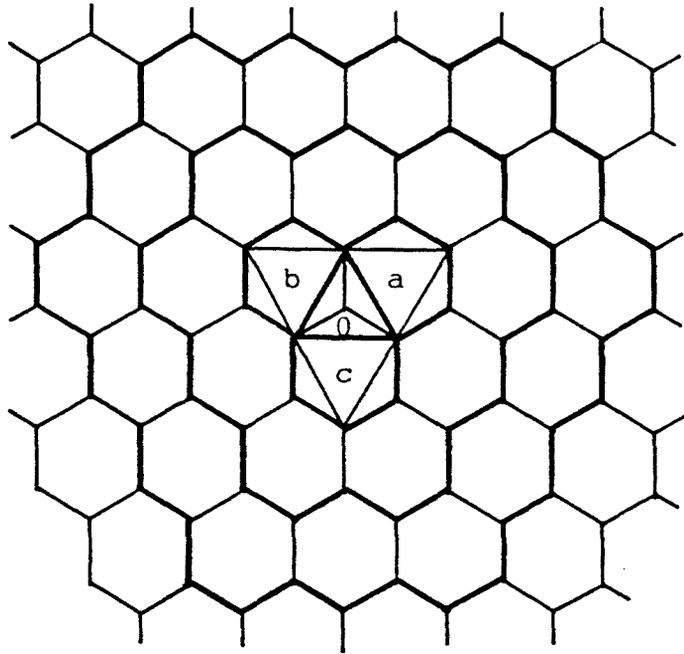


Fig. 3-9



$$\begin{aligned} \frac{k}{2} A - \frac{k}{2} B &\equiv 0 \pmod{m_k} \\ \frac{k}{2} B - \frac{k}{2} C &\equiv 0 \pmod{m_k} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Entonces, las soluciones de (3.17) y (3.19) vienen dadas por:

$$(A, B, C) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} k^2/4 & k^2/4 & k^2/4 \\ k & -k/2 & -k/2 \\ k/2 & k/2 & -k \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

de donde, para cualesquiera α , β y γ , se tiene

$$(A, B, C, m) = k$$

y, por tanto, la cota $m_k = \frac{3k^2}{2}$ no es alcanzable para $k > 2$.

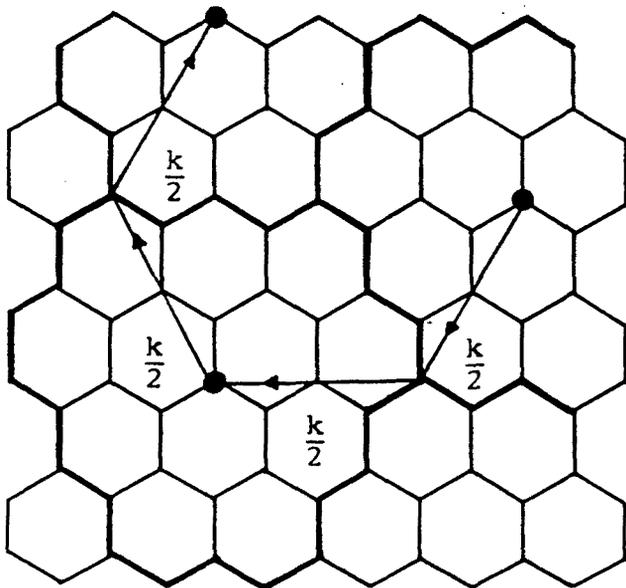


Fig. 3-10

En este caso, el mejor resultado se obtiene al usar la baldosa de la Figura 3-11, obtenida suprimiendo una fila de hexágonos adyacentes, que corresponde a $m=(3/2)k^2-k$. Las ecuaciones para la distribución de ceros son ahora:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} A - \left(\frac{k}{2} - 1\right) B &\equiv 0 \pmod{m} \\ \frac{k}{2} B - \frac{k}{2} C &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned} \quad (3.21)$$

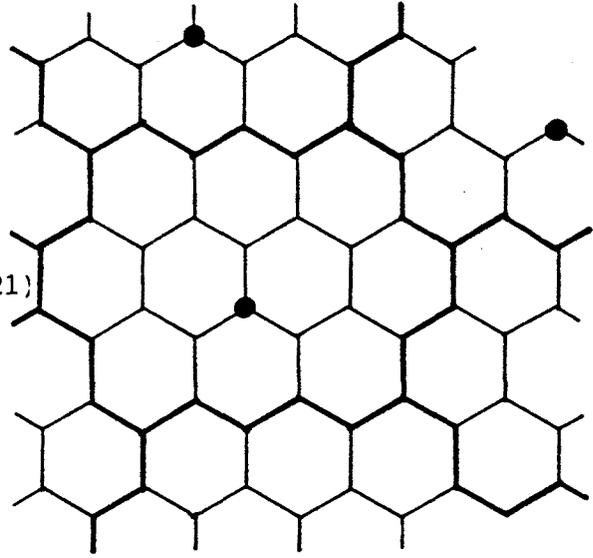


Fig. 3-11

y sus soluciones vienen dadas por

$$(A, B, C) = (\alpha, \beta, \gamma) 2 \begin{pmatrix} (k^2-2k)/4 & k^2/4 & k^2/4 \\ k & -k/2 & -k/2 \\ (k/2)-1 & k/2 & -(k-1) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

para α, β y γ enteros cualesquiera. Por ejemplo, para $\alpha=0, \beta=-2$ y $\gamma=1$ obtenemos los valores

$$A=b-c=-3k-2, \quad B=c-a=3k, \quad C=a-b=2$$

que trivialmente satisfacen (3.18). Tomando $a=1$ se tiene

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=3k+1$$

y los grafos resultantes son anillos con cuerdas.

Estos valores de m mejoran los dados en $|2|$, que son $m_k=k^2+2k-6$ para k impar y ≥ 5 , y $m_k=k^2+3k-12$ para k par y ≥ 8 .

Finalmente remarquemos que una involución $i \rightarrow \beta-i, \beta$ impar, permite, por identificación de V_0 y

V_1 , la construcción de grafos (no regulares) con orden $m/2$ y diámetro $k-1$, ver [16] para esta técnica.

3.2.4 Grafos $BG(a,b,c)$

Como en el apartado anterior, consideramos grafos con un número par de vértices, $V=V_0 \cup V_1$, $V_0=\{0,2,\dots,m/2\}$ y $V_1=\{1,3,\dots,m-1\}$.

Cada vértice $i \in V_0$ es adyacente a los vértices $i-a, i+b, i-c, i+c \pmod{m}$ y cada vértice $j \in V_1$ es adyacente a los vértices $j+a, j-b, j+c, j-c \pmod{m}$, para a, b y c impares distintos. Por tanto, estos grafos son bipartitos de grado cuatro.

Para asociar estos grafos con teselaciones del plano, representamos cada vértice por un triángulo equilátero, como se muestra en la Figura 3-12.

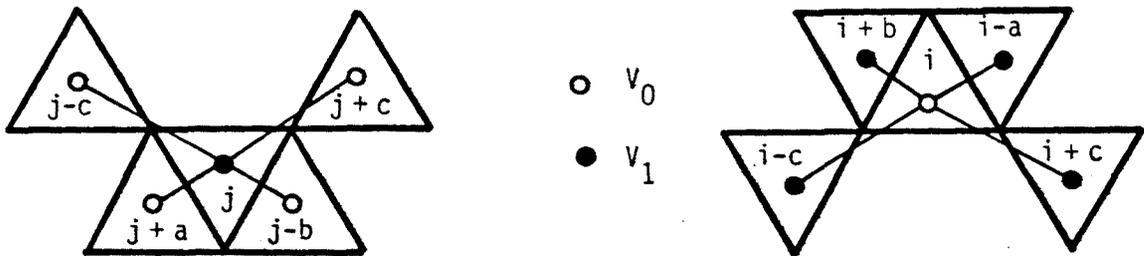


Fig. 3-12

Observando el camino de la Figura 3-13, vemos que los pasos a, b y c deben cumplir la condición

$$2(a+b+c) \equiv 0 \pmod{m} \quad (3.23)$$

es decir, $a+b+c \equiv 0 \pmod{m/2}$. Puesto que a, b y c son impares, $m/2$ también debe ser impar y

$$a+b+c = (2\gamma+1) \frac{m}{2} \quad (3.24)$$

para algún entero γ .

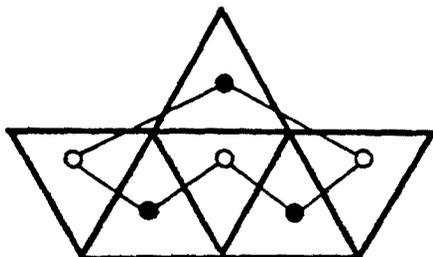


Fig. 3-13

A partir de todos los vértices pares, y utilizando, por ejemplo, la adyacencia $i \rightarrow i+b$, alcanzamos todos los vértices impares. Entonces, la existencia de un camino entre cualquier par de vértices pares es suficiente para que el grafo sea conexo. La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es

$$\text{mcd}(\pm(a+b), \pm a \pm c, \pm b \pm c, \pm 2c, m) = 2 \quad (3.25)$$

Sea $(\alpha, \beta) = \text{mcd}(\alpha, \beta)$. Puesto que

$$(\alpha, \beta) / (\alpha + \beta, \alpha - \beta) / (2\alpha, 2\beta) = 2(\alpha, \beta)$$

tenemos, para α y β impares

$$(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 2(\alpha, \beta)$$

Por tanto, la condición (3.25) es equivalente a $(2a, 2b, 2c, m) = 2$ ó

$$(a, b, c, m/2) = 1 \quad (3.26)$$

(Usando (3.24), esta condición es equivalente a $(a, b, m/2) = 1$, y, como a, b y c son impares, a $(a, b, c, m) = 1$).

Debido a los automorfismos $i \rightarrow i+\alpha$ y $i \rightarrow \beta-i$, para α par y β impar, estos grafos son vértice-simétricos. (Realmente, el último automorfismo es una polaridad, es decir, un automorfismo involutivo de un grafo bipartito que intercambia los dos conjuntos de vértices). Esto permite el estudio del diámetro desde cualquier vértice, como

en las familias anteriores, lo haremos desde el 0.

Puesto que estos grafos son bipartitos, los vértices de V_0 están a distancias pares del vértice 0, mientras que los vértices de V_1 están a distancias impares del 0. Por lo tanto, el orden máximo m_k de un grafo con diámetro k es el doble del número de vértices de V_0 (cuando k es impar) o V_1 (cuando k es par) a distancia $< k-1$ del vértice 0.

El número de vértices a distancia $p=1,2,3,4,5,\dots$ del vértice 0 es como máximo 4,12,20,26,33,...., ver Figura 3-14, esto es $7p-2$, salvo para $p=1,3$ que se alcanzan 4 y 20 vértices respectivamente.

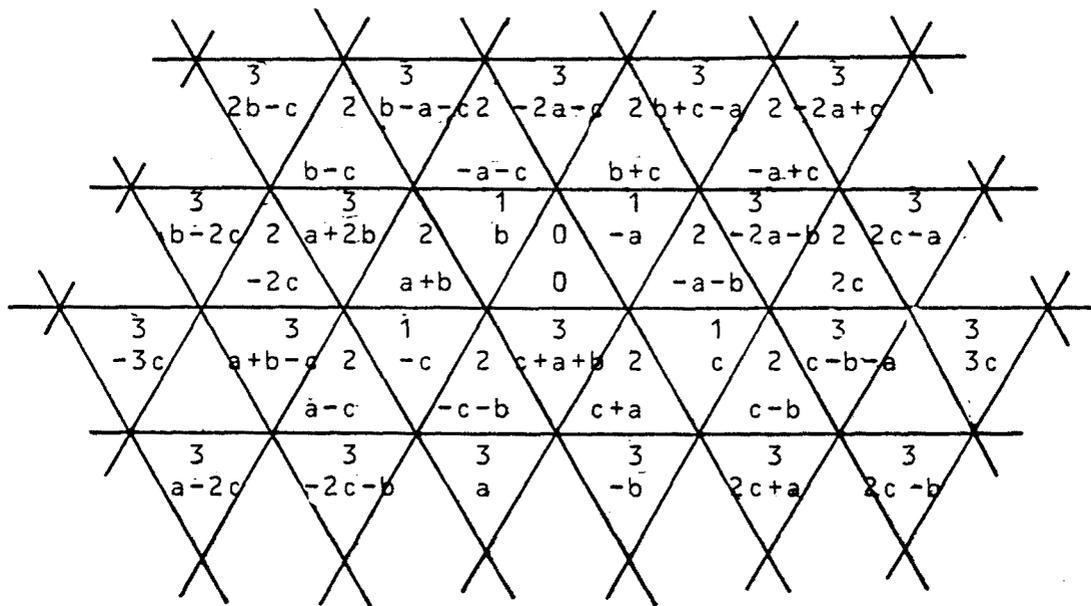


Fig. 3-14

Entonces, para $k > 3$ obtenemos:

- Cuando $k=2l+1$, con $p=2n$

$$m_k = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^l (7(2n)-2) \right) = 14l^2 + 10l + 2 = \frac{7k^2 - 4k + 1}{2} \quad (3.27)$$

- Cuando $k=2l$, con $p=2n-1$

$$m_k = 2 \sum_{n=1}^l (7(2n-1)-2) = 14l^2 - 4l = \frac{7k^2 - 4k}{2} \quad (3.28)$$

Observemos que $m_k/2$ es impar si k es impar y si $k \equiv 2 \pmod{4}$. Veremos que en estos dos casos se alcanzan las cotas anteriores.

Grafos con diámetro impar

La Figura 3-15 muestra la teselación del plano que se obtiene en este caso

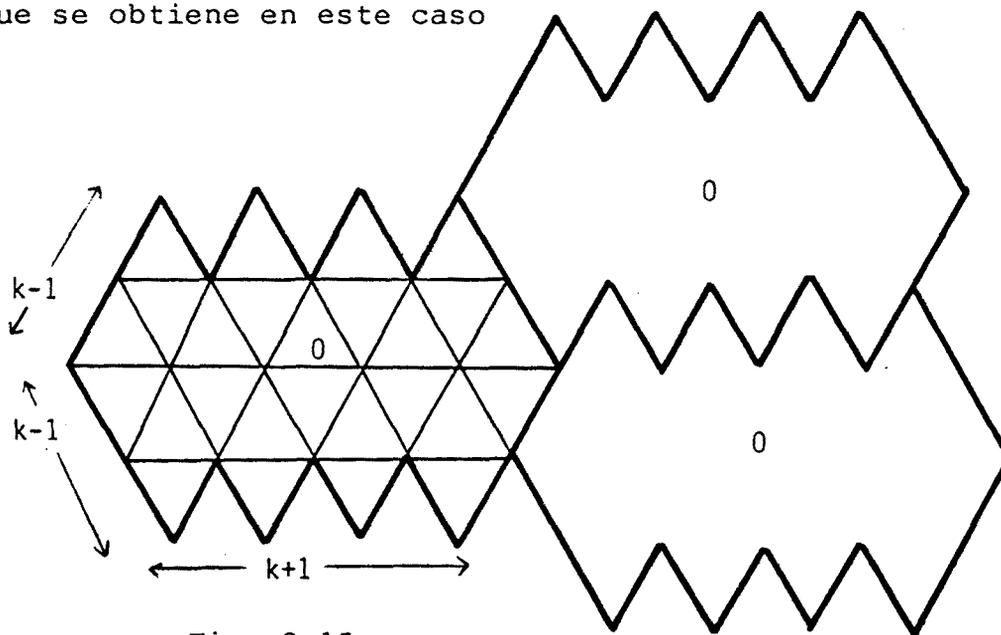


Fig. 3-15

Las ecuaciones para la distribución de ceros son

$$\begin{aligned} \frac{m_k}{2} a + \frac{m_k}{2} b &\equiv 0 \pmod{m_k} \\ (3k-1)a + (3k-2)b - c &\equiv 0 \pmod{m_k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

que, junto con las condiciones (3.24) y (3.26) caracterizan los valores admisibles de a , b y c .

Hemos de hallar soluciones del sistema (3.29),

(3.24):

$$\begin{pmatrix} \frac{m_k}{2} & \frac{m_k}{2} & 0 \\ 3k-1 & 3k-2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\gamma+1 \end{pmatrix} m_k$$

para ciertos enteros α , β y γ . Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es m_k , obtenemos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k+2 & m_k & \frac{m_k}{2} \\ 6k & -m_k & -\frac{m_k}{2} \\ -2 & 0 & \frac{m_k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\gamma+1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

y, esto es (mod m_k)

$$a = (-6k+2)\alpha + \frac{m_k}{2}, \quad b = 6k\alpha - \frac{m_k}{2}, \quad c = -2\alpha + \frac{m_k}{2}$$

Eligiendo $\alpha = -(m_k+2)/4$, obtenemos los valores

$$a = \frac{m_k}{2} + 3k - 1, \quad b = -3k, \quad c = 1$$

que trivialmente satisfacen (3.26).

En particular, para $k=3$ el grafo óptimo tiene $m=26$ vértices, y puede obtenerse con $a=-5$, $b=-9$ y $c=1$, ver Figura 3-16. Este grafo pertenece a una familia general de grafos asociados con geometrías finitas, ver Delorme [15], y es el mayor grafo bipartito conocido, de grado cuatro y diámetro tres.

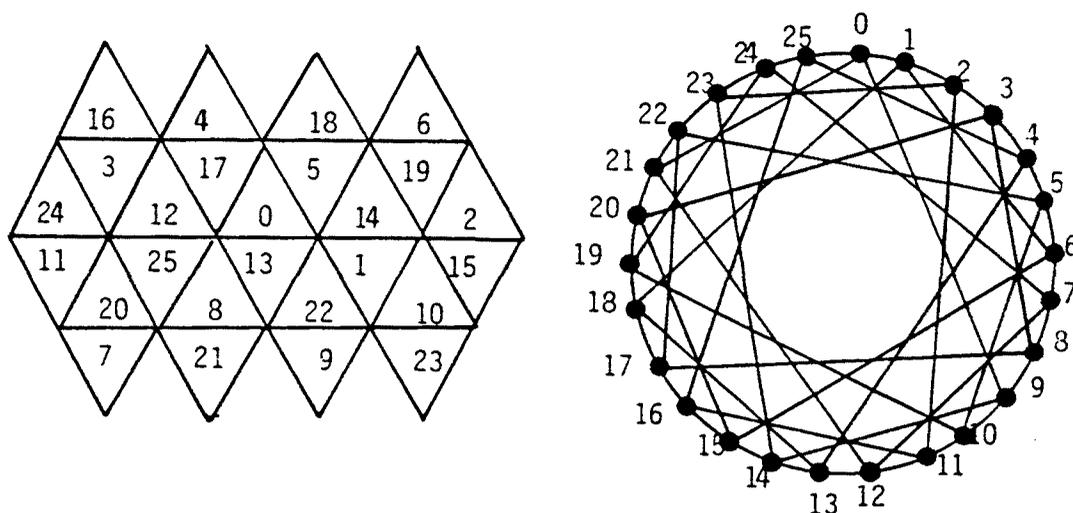


Fig. 3-16

Grafos con diámetro par

En primer lugar consideramos el caso $k \equiv 2 \pmod{4}$, donde la cota $m_k = (7k^2 - 4k)/2$ es alcanzada. La Figura 3-17 muestra la correspondiente teselación del plano. Las ecuaciones para la distribución de ceros son:

$$\frac{m_k}{k} a + \frac{m_k}{k} b \equiv 0 \pmod{m_k}$$

$$\frac{3k-2}{2} a + (k-1)b - \frac{k}{2} c \equiv 0 \pmod{m_k} \quad (3.31)$$

Resolviendo el sistema (3.31), (3.24) obtenemos, por ejemplo, los valores

$$a = -\frac{m_k + 3k - 2}{2}, \quad b = \frac{m_k - 4k + 2}{2}, \quad c = \frac{m_k}{2} + k$$

los cuales satisfacen (3.26).

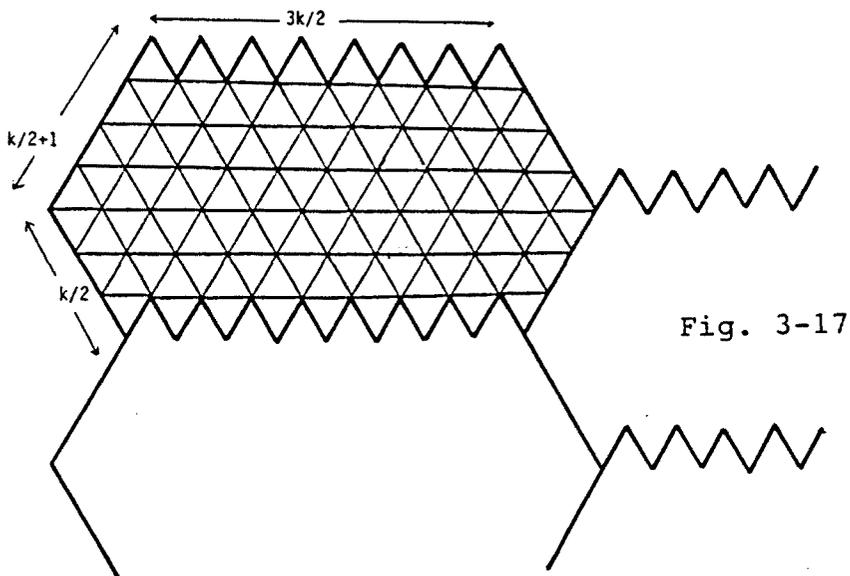
Quando $k=4$ la cota dada no es alcanzable ya que $m_k/2$ es par. En este caso, el mejor resultado se

obtiene usando la teselación de la Figura 3-18, que corresponde a

$$m_k = \frac{7k^2 - 8k - 4}{2} \quad (3.32)$$

Las ecuaciones para la distribución de ceros son ahora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3k}{2} - 2\right)a + (k-1)b - \left(\frac{k}{2} - 1\right)c &\equiv 0 \pmod{m_k} \\ (k-3)a + \left(\frac{3k}{2} - 2\right)b - \left(\frac{k}{2} + 1\right)c &\equiv 0 \pmod{m_k} \end{aligned} \quad (3.33)$$

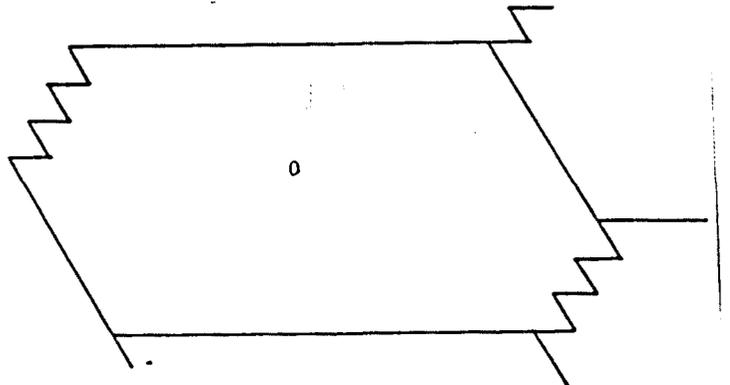


Resolviendo el sistema (3.33), (3.24), obtenemos, por ejemplo:

$$a = \frac{m_k}{2} - \frac{7}{2}k - 2, \quad b=1, \quad c = \frac{7}{2}k + 1$$

satisfaciéndose la condición (3.26).

Fig. 3-18



3.3 DIGRAFOS ASOCIADOS CON TESELACIONES

3.3.1 Digrafos de doble lazo

Sea un digrafo con conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}_m$. Decimos que es un digrafo de doble lazo si cada vértice i es adyacente a los vértices $i+a$ y $i+b$ (mod m), para ciertos enteros distintos a y b , $1 \leq a, b \leq m-1$. Denotaremos estos digrafos por $DLD(a,b)$. En la Figura 3-19 se muestra el digrafo de doble lazo con $m=12$ vértices, obtenido con $a=1$ y $b=5$. Como cada vértice es adyacente desde los vértices $i-a$ y $i-b$ (mod m), el digrafo es regular de grado dos.

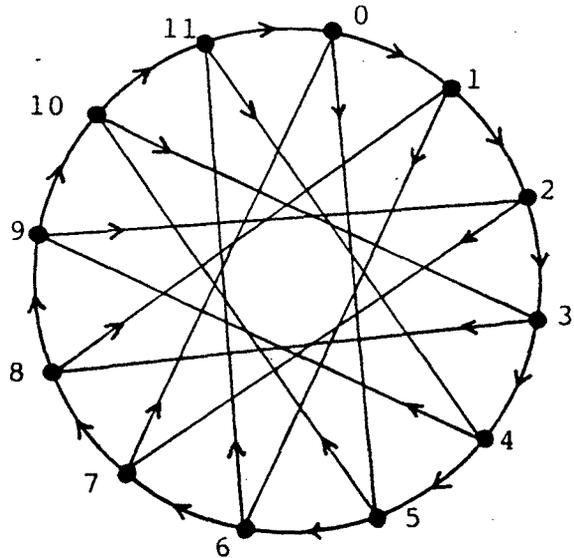


Fig. 3-19

Debido al automorfismo $i \rightarrow i+\alpha$, $0 < \alpha \leq m-1$, estos digrafos son vértice-simétricos, por tanto podemos estudiar su diámetro desde el 0.

Los vértices que sucesivamente son alcanzados desde el vértice 0 pueden situarse en el plano tal como

muestra la Figura 3-20. El orden máximo de un digrafo con diámetro k sería

$$m_k = 1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (3.34)$$

si todos los números $pa+qb$, con $p, q \geq 0$ y $p+q \leq k$, fuesen distintos módulo m_k . Veremos que esta cota no puede alcanzarse para $k > 1$.

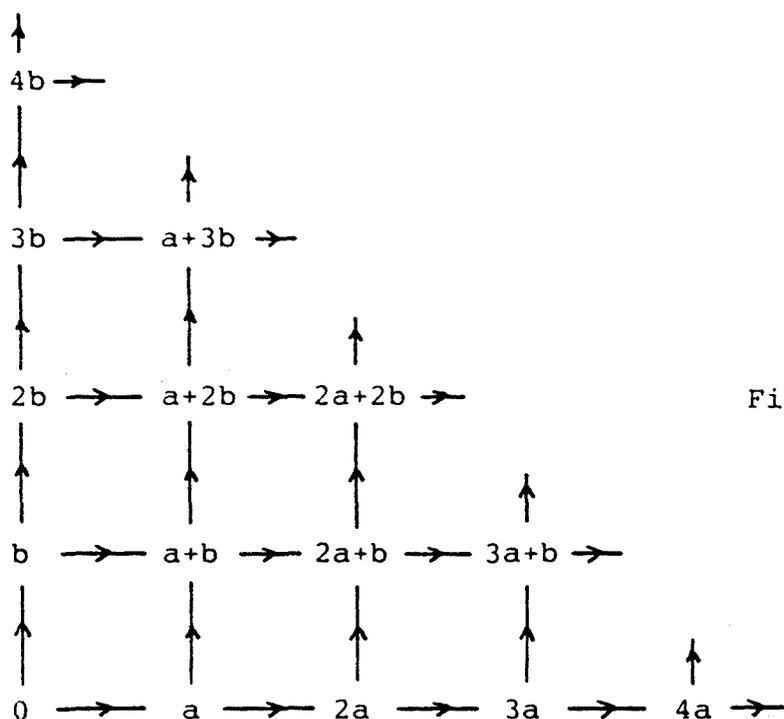


Fig. 3-20

Antes de proceder a nuestro estudio notemos que, como en el caso de grafos de doble lazo, una condición necesaria y suficiente para que el digrafo sea conexo es

$$(a, b, m) = \text{mcd}(a, b, m) = 1 \quad (3.35)$$

Cuando se satisface esta condición, también obtenemos una teselación periódica del plano por una baldosa que contiene m cuadrados numerados de 0 a $m-1$. Por tanto, se deduce que la cota (3.34) no es alcanzable, ya que la correspondiente baldosa no tesela el plano. En [43] se demuestra que las baldosas óptimas (es decir,

con orden máximo para un diámetro dado) que teselan el plano tienen forma de L, ver Figura 3-21, con dimensiones que "aproximadamente" satisfacen $l=h=2x=2y$. Estos valores, que implican $k=3x-2$ y $m=3x^2=(k+2)^2/3$, corresponden a una baldosa que no puede generarse para $x>1$ puesto que las ecuaciones para la distribución de ceros

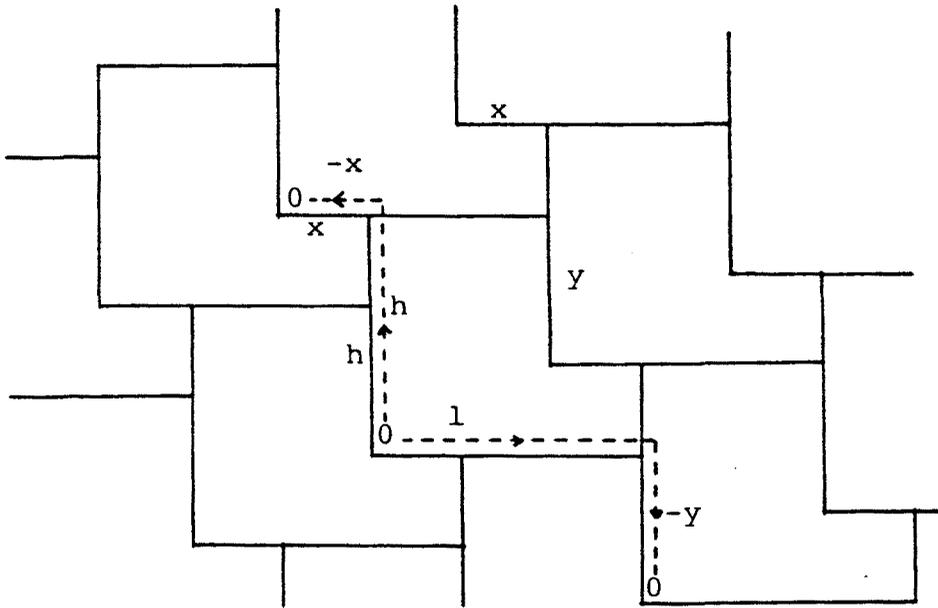


Fig. 3-21

$$\begin{aligned} la-yb &\equiv 0 \pmod{m} \\ -xa+hb &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned} \quad (3.36)$$

conducen a

$$(a,b) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} h & x \\ y & l \end{pmatrix} = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & 2x \end{pmatrix}$$

y, por tanto, para cualesquiera α, β , $(a,b,m)=x$, lo que contradice (3.35). Sin embargo, el valor $m = \lceil (k+2)^2/3 \rceil - 1$ puede alcanzarse utilizando las baldosas de la Figura 3-22 que se pueden generar con $a=1$ y $b=2k-9x+2$, ver [21].

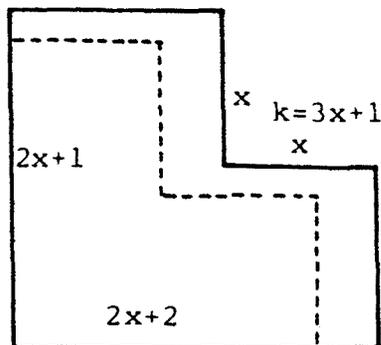
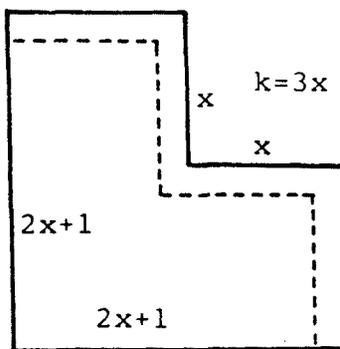
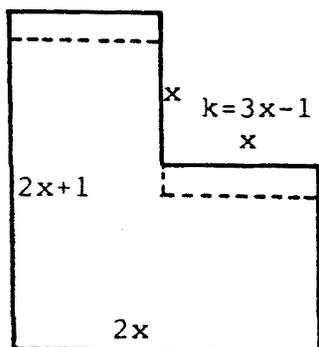


Fig. 3-22

3.3.2 Digrafos bipartitos

Consideramos digrafos bipartitos con conjunto de vértices $V=V_0 \cup V_1$, con $V_0=\{0,2,4,\dots,m-2\}$ y $V_1=\{1,3,\dots,m-1\}$, y cada vértice $i \in V_0$ es adyacente a los vértices (módulo m) $i+a, i+b \in V_1$ para ciertos enteros impares distintos a y b , y cada vértice $j \in V_1$ es adyacente a los vértices $j+c, j+d \in V_0$, para enteros impares distintos c y d tales que

$$a+b+c+d \equiv 0 \pmod{m} \tag{3.37}$$

Denotaremos estos digrafos por $BD(a,b,c,d)$. Después veremos que no supone restricción estudiar el diámetro desde el vértice 0. Tomemos el modelo plano de la Figura 3-23.

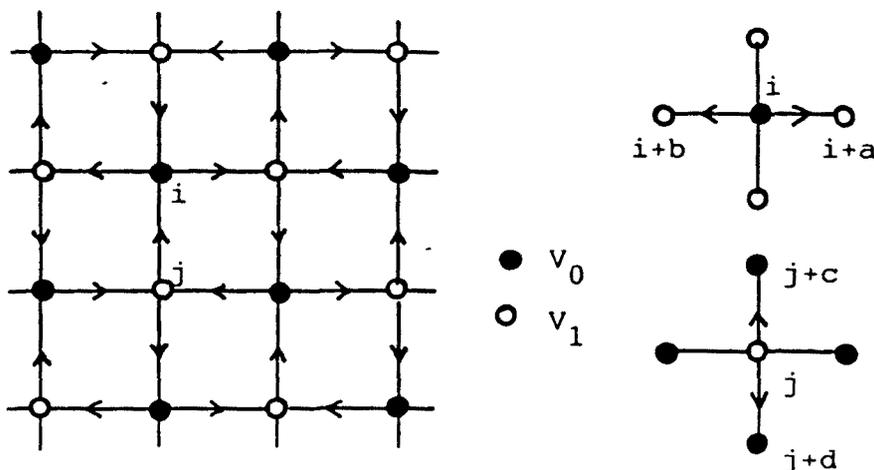


Fig. 3-23

Puesto que estos digrafos son bipartitos, el orden máximo m_k de un digrafo con diámetro k es el doble del número de vértices en V_0 (cuando k es impar) o V_1 (cuando k es par) a distancia $\leq k-1$ del vértice 0. Puesto que existen $2p$ vértices a distancia p (> 1) del 0, se tiene, con $p=2n$

$$m_k = 2\left(1 + \sum_{n=1}^l 4n\right) = 2(2l^2 + 2l + 1) = k^2 + 1 \quad (3.38)$$

cuando $k=2l+1$ es impar y, con $p=2n-1$

$$m_k = 2\left(\sum_{n=1}^l (4n-2)\right) = 4l^2 = k^2 \quad (3.39)$$

cuando $k=2l$ es par. Demostraremos que estas cotas pueden alcanzarse.

En primer lugar observemos que, como consecuencia de (3.37), entre vértices de V_0 o V_1 usamos pasos $\pm A$, $\pm B$ dados por

$$A = a + c = -(b + d) \quad , \quad B = b + c = -(a + d) \quad (3.40)$$

El digrafo es conexo si y sólo si todos los vértices pares pueden alcanzarse desde el 0, y esto ocurre si y sólo si

$$(A, B, m) = 2 \quad (3.41)$$

Esta observación sugiere aplicar los resultados de la sección 3.2.1.

Cuando $k=2l+1$ podemos usar los l pasos dobles A , B para alcanzar los $2l^2 + 2l + 1$ vértices pares y entonces, usando pasos a (o b) alcanzamos todos los vértices impares. Por ejemplo podemos tomar

$$A = 2l = k-1 \quad , \quad B = 2(l+1) = k+1$$

fijando $b=1$, a partir de (3.40) obtenemos

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = k, \quad d = -k$$

La teselación del plano así obtenida se muestra en la Figura 3-24 .

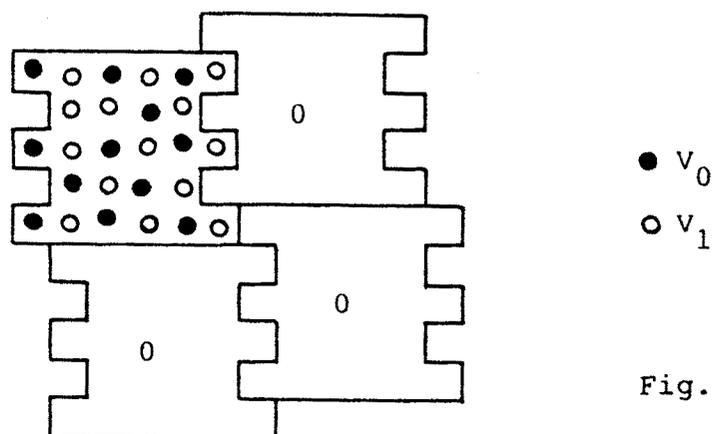


Fig. 3-24

Cuando $k=2l$ tenemos la teselación de la Figura 3-25. Las ecuaciones para la distribución de ceros son

$$\begin{aligned} lA-(l+1)B &\equiv 0 \pmod{m} \\ lA+(l-1)B &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned} \quad (3.42)$$

y sus soluciones vienen dadas por

$$(A,B) = (\alpha, \beta) 2 \begin{pmatrix} l-1 & -1 \\ l+1 & 1 \end{pmatrix}$$

para cualesquiera α y β . Por ejemplo

$$A=2l+2= k+2 \quad , \quad B=2l= k \quad (3.43)$$

satisfacen (3.41) y, de (3.40) podemos obtener

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=k+1, \quad d=-(k+1)$$

En ambos casos, además de los automorfismos $i \rightarrow i+\alpha$ para α par, los digrafos óptimos encontrados poseen los automorfismos $i \rightarrow ci+\beta$ para β impar, que intercambian V_0 y V_1 . Por tanto no supone restricción estudiar

el diámetro desde el 0, y su valor es realmente k .

Para el mismo diámetro y grado, estos digrafos tienen orden mayor que los de doble lazo considerados en la sección anterior. Las construcciones de la siguiente sección constituyen una mejora adicional.

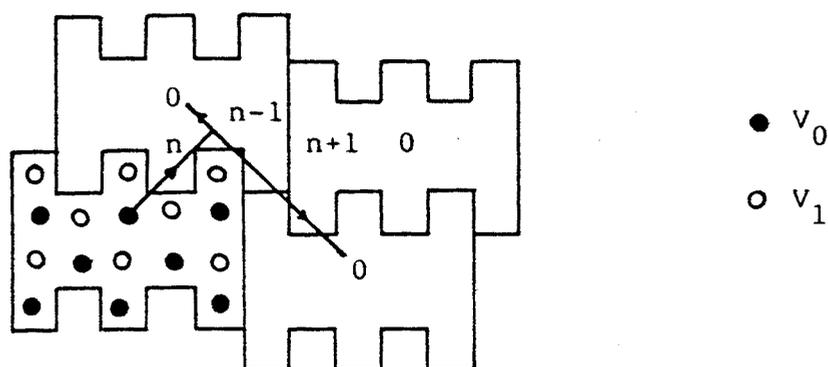


Fig. 3-25

3.3.3 Digrafos 4-partitos

Ahora estudiamos digrafos con el modelo de adyacencia de la Figura 3-26. Esto requiere que el digrafo tenga orden $m=4$. Consideramos el conjunto de vértices $V=V_0UV_1UV_2UV_3$, $V_j=\{i, 0 \leq i \leq m-1, i \equiv j \pmod{m}\}$, y cada vértice i perteneciente a V_j es adyacente a los vértices $i+a_j$, $i+b_j \pmod{m}$, donde $a_j \equiv 3$ y $b_j \equiv 1 \pmod{4}$ y

$$a_0+a_1+a_2+a_3 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_0+b_1+b_2+b_3 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a_0+a_2 \equiv b_0+b_2 \pmod{m}$$

condiciones que pueden expresarse como

$$a_0+a_2 \equiv -(a_1+a_3) \equiv b_0+b_2 \equiv -(b_1+b_3) \pmod{m} \quad (3.44)$$

Denotaremos estos digrafos por $QD(a_i, b_i)$.

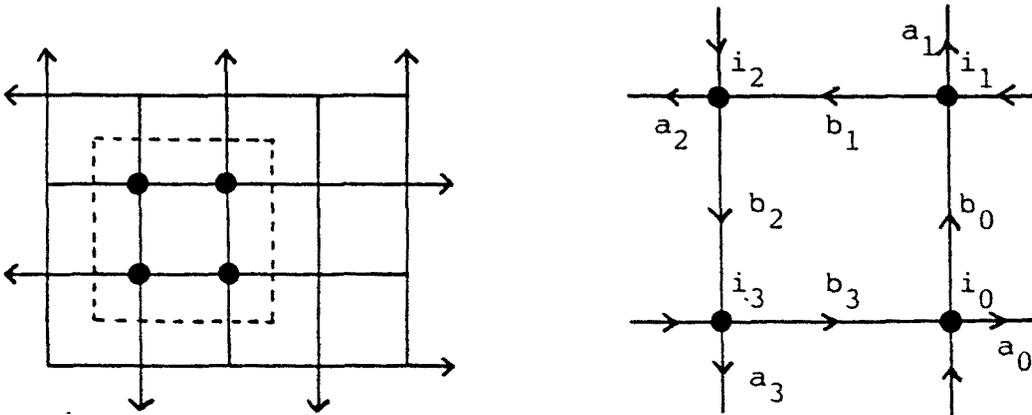


Fig. 3-26

De nuevo, no supone restricción estudiar el diámetro desde el vértice 0. Para $n > 4$ existen $4(n-1)$ vértices a distancia n del vértice 0, $2(n-1)$ en V_0 y $2(n-1)$ en V_2 cuando n es par, y $2(n-1)$ en V_1 y $2(n-1)$ en V_3 cuando n es impar. Considerando el digrafo como bipartito, si tiene diámetro $k (> 4)$ su orden máximo es

$$m_k = \begin{cases} 2(k-1)^2 & k \text{ impar} \\ 2((k-1)^2+1) & k \text{ par} \end{cases} \quad (3.45)$$

Demostraremos que estos valores son alcanzables.

Cuando k es impar, $k=2p+1$, es suficiente ver que los $(k-1)^2$ vértices pares están a distancia $\leq 2p$ del vértice 0. La Figura 3-27 muestra la teselación asociada (sólo se muestran los vértices pares). Esta es la misma teselación de la sección anterior para k par, que puede obtenerse como en (3.43), con

$$A = a_0 + b_3 = 4p + 4 = 2k + 2, \quad B = b_0 + a_1 = 4p = 2k - 2$$

Usando (3.44) obtenemos, por ejemplo

$$\begin{aligned} a_0 &= 3, & a_1 &= 2k - 3, & a_2 &= -2k + 1, & a_3 &= -1 \\ b_0 &= 1, & b_1 &= -3, & b_2 &= -2k + 3, & b_3 &= 2k - 1 \end{aligned}$$

Cuando k es par, $k=2p$, podemos alcanzar los $(k-1)^2+1$ vértices impares desde el vértice 0 en $k-1=2p-1$

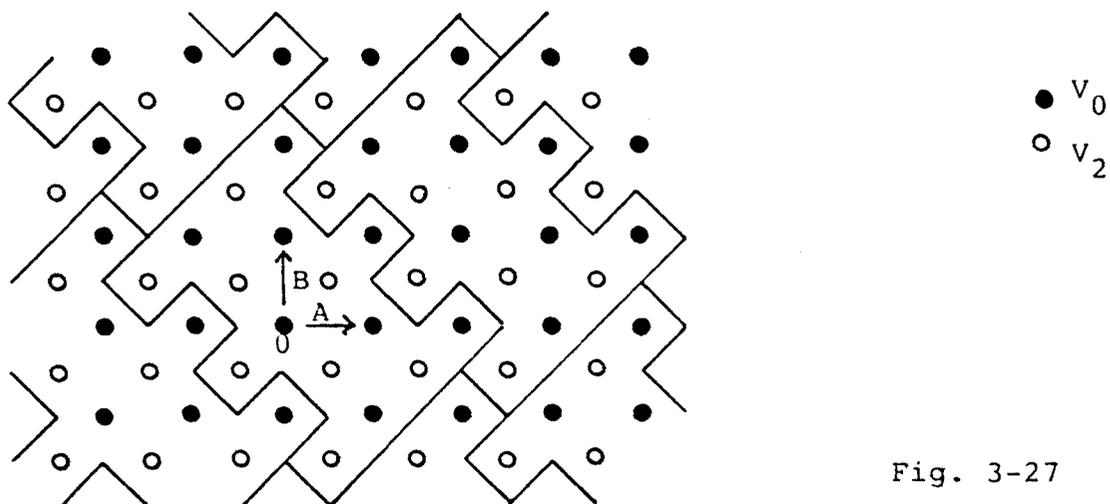


Fig. 3-27

pasos ($p-1$ pasos dobles después de un paso inicial a_0 o b_0). La Figura 3-28 muestra la teselación asociada (sólo se muestran los vértices impares). De nuevo se obtiene la teselación de la sección precedente para k impar, que puede obtenerse, por ejemplo, con pasos

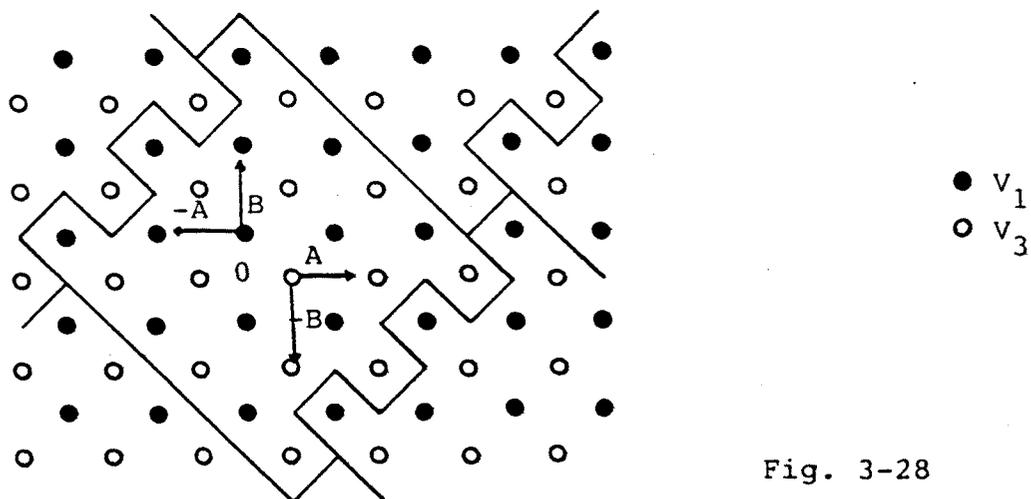


Fig. 3-28

$$A = a_0 + b_3 = 4(p-1) = 2k-4 \quad , \quad B = b_0 + a_1 = 4p = 2k$$

Usando (3.44) podemos tomar en este caso

$$\begin{aligned} a_0 &= -3 \quad , \quad a_1 = 2k+1 \quad , \quad a_2 = -2k+1 \quad , \quad a_3 = 1 \\ b_0 &= -1 \quad , \quad b_1 = 3 \quad , \quad b_2 = -2k-1 \quad , \quad b_3 = 2k-1 \end{aligned}$$

3.3.4 Digrafos asociados a teselaciones hexagonales

Siguiendo con los digrafos regulares, además de cuadrados podemos considerar hexágonos como posible representación plana de sus vértices. En la Figura 3-29 se utiliza esta representación para un digrafo en el que cada vértice i es adyacente a los vértices (mod m) $i+a$, $i+b$ y $i+(a+b)$, $1 \leq a, b \leq m-1$.

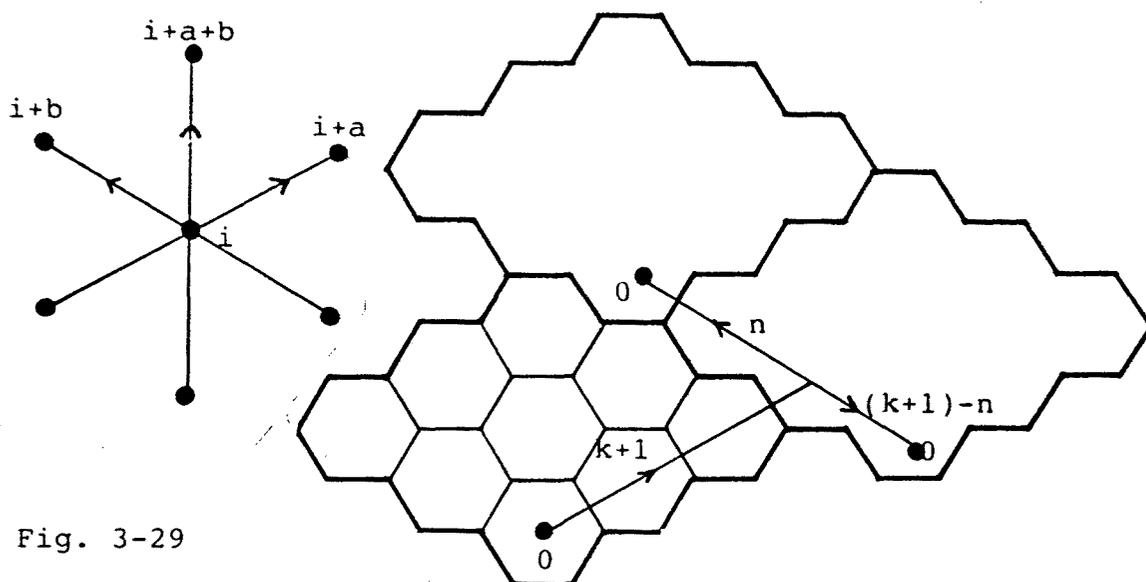


Fig. 3-29

El orden máximo de un digrafo con diámetro k es

$$m_k = \sum_{p=0}^k (2p+1) = (k+1)^2 \quad (3.46)$$

y es conexo si y sólo si

$$(a, b, m) = 1 \quad (3.47)$$

Las baldosas óptimas mostradas en la Figura 3-29

teselan el plano y las ecuaciones para la distribución de ceros son

$$\begin{aligned}(k+1)a+nb &\equiv 0 \pmod{m} \\ (k+1)a+(k+1-n)b &\equiv 0 \pmod{m}\end{aligned}\tag{3.48}$$

para cualquier valor de n . Una posible solución que satisface (3.47) es

$$a=1, \quad b=k+1$$

tomando $n=k$.

CAPITULO IV

DIAMETRO DE UNA FAMILIA DE DIGRAFOS
CIRCULANTES

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo consideramos una familia de digrafos circulantes con pasos $\pm a$ y b , y estudiamos el mismo problema planteado en el capítulo III, es decir, hallar el número máximo de vértices que puede tener un digrafo de la familia dado su diámetro k .

Como consecuencia de que dos de los pasos son opuestos, estos digrafos admiten una representación geométrica en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 . En la representación propuesta, cada digrafo se asocia con una baldosa en forma de T, y el estudio de estas baldosas conduce a las soluciones óptimas [31].

En la sección 4.2 justificamos, basándonos en los razonamientos hechos en el capítulo III, que la cota máxima teórica no es alcanzable. En la sección 4.3 demostramos que, con el modelo geométrico dado, siempre es posible asociar al digrafo una baldosa en forma de T. Por último en la sección 4.4, hallamos las baldosas óptimas, es decir, las que están asociadas a digrafos con orden máximo para valores dados del diámetro k .

4.2 DIGRAFOS 3-CIRCULANTES

Consideramos el digrafo 3-circulante $D_N(\pm a, b)$, con $1 \leq a \leq \lfloor m/2 \rfloor$. En la Figura 4-1 se muestra $D_7(\pm 1, 3)$, donde las líneas representan pares de arcos opuestos.

Como en las familias consideradas en el capítulo anterior, la simetría del digrafo permite estudiar el diámetro desde cualquier vértice, lo que haremos desde el 0.

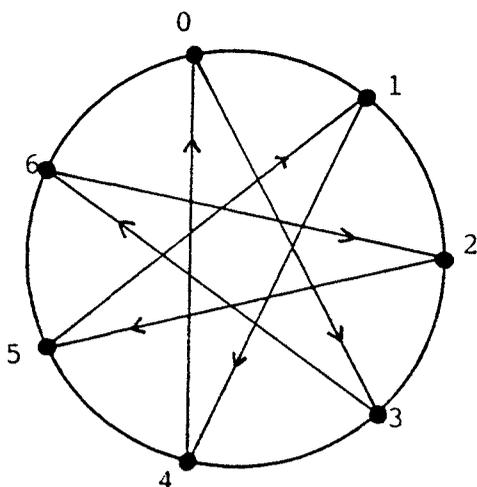


Fig. 4-1

Desde este vértice, en un paso alcanzamos los vértices $\pm a$ y $b \bmod N$; en dos pasos $\pm 2a$, $\pm a+b$, $2b \bmod N$; en tres pasos $\pm 3a$, $\pm 2a+b$, $\pm a+2b$, $3b \bmod N$, y así sucesivamente. Entonces el orden máximo en un digrafo con diámetro k sería

$$N=1+3+5+7+\dots+(2k+1)=(k+1)^2 \quad (4.1)$$

si los números $pa+qb$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ y $|p|+q \leq k$ fuesen todos distintos módulo N .

En este caso, la condición necesaria y suficiente para que alcanzar todos los vértices desde el 0 es

$$(a, b, N) = 1 \quad (4.2)$$

Los vértices que alcanzamos sucesivamente a partir del 0, pueden situarse en el plano tal como muestra la Figura 4-2. En base a esta representación geométrica y, debido a las observaciones hechas en el capítulo III, se deduce que la cota $N=(k+1)^2$ no es alcanzable para $k > 1$, ya que la correspondiente baldosa no tesela el plano, como se muestra en la Figura 4-3 para $k=3$.

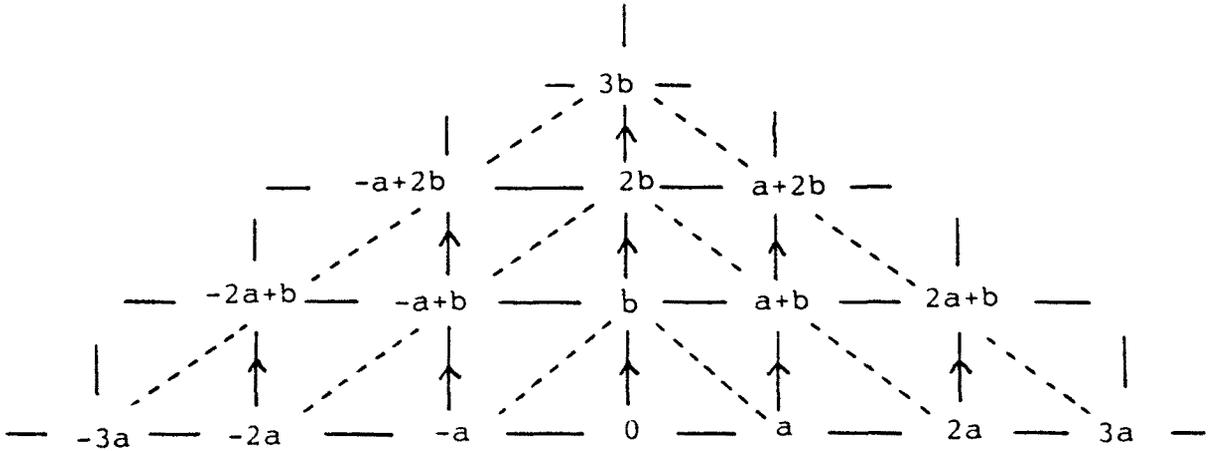


Fig. 4-2

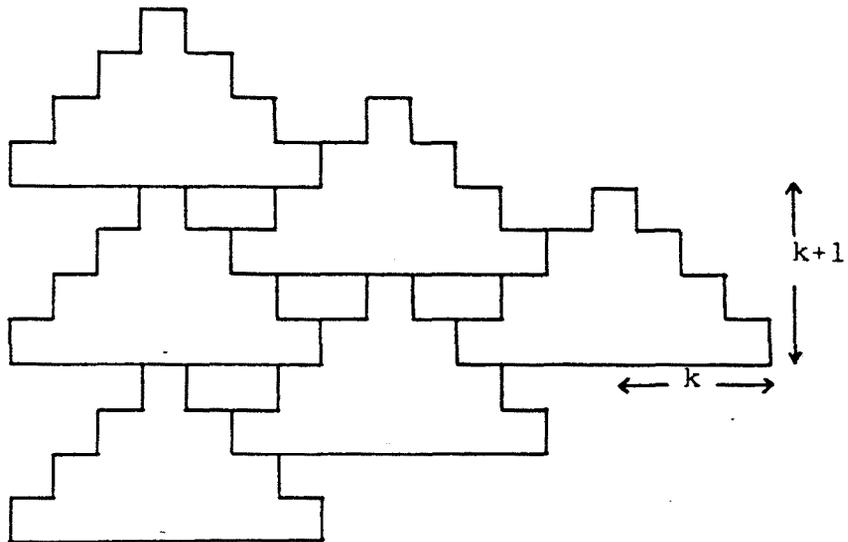


Fig. 4-3

4.3 FORMA DE LAS BALDOSAS

Suponiendo $(a,b,N)=1$, para construir la baldosa asociamos a un cuadrado numerado con el 0 los cuadrados numerados de 1 a $N-1$ que estén a la menor distancia posible de él.

Demostraremos que siempre es posible hacer esta construcción de modo que la baldosa obtenida tenga la forma mostrada en la Figura 4-4, donde $m, m', n, n' \geq 0$

En cada punto (x,y) , si el valor r todavía no ha aparecido lo escribimos, en caso contrario lo dejamos en blanco. Acabamos cuando hemos encontrado todos los valores de r , $r=0,1,\dots,N-1$.

Veamos que la baldosa así construida tiene la forma indicada.

Observemos que con esta construcción, si (x_0,y_0) está en blanco y $x_0 > 0$ [resp. $x_0 < 0$] entonces todos los puntos reticulares del conjunto $\{(x,y) / x \geq x_0, y \geq y_0\}$ [resp. $\{(x,y) / x \leq x_0, y \geq y_0\}$] también están en blanco. Análogamente, si $(0,y_0)$ está en blanco todos los puntos en $\{(x,y) / y \geq y_0\}$ están en blanco.

Por ejemplo, en la Figura 4-6 el punto $(2,1)$, que tiene asignado el valor 11, está en blanco ya que $(-2,0)$ tiene el mismo valor. Entonces $(2,2)$ también estará en blanco por tener asignado el mismo valor que $(-2,1)$.

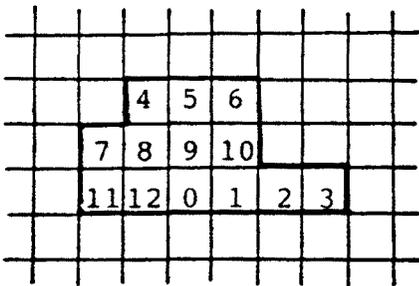


Fig. 4-6

En general, cuando dos puntos reticulares (x,y) , (x',y') tengan asignado el mismo valor, es decir, $xa+yb \equiv x'a+y'b \pmod{N}$, diremos que son congruentes y escribiremos

$$(x,y) \equiv (x',y') \quad (4.3)$$

En consecuencia la baldosa tiene la forma

mostrada en la Figura 4-7.

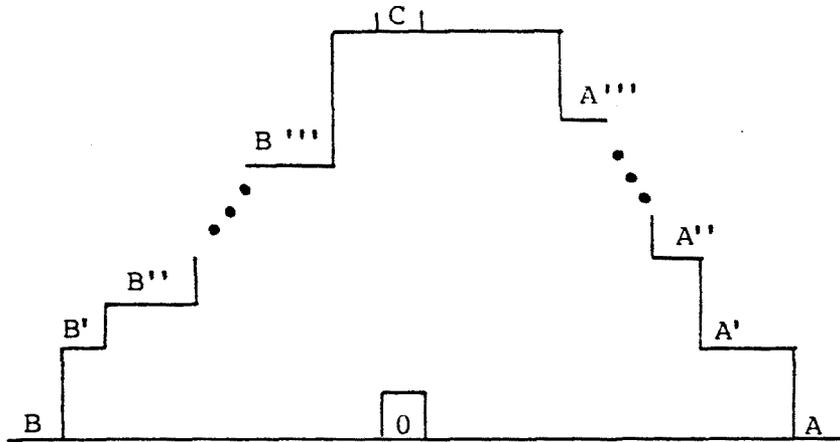


Fig. 4-7

Sea $A=(\ell,0)$ el primer punto en blanco en el semieje positivo de las x 's. Entonces existen $p,q \in \mathbb{Z}$ tales que $|p|+q < \ell$ y $pa+qb \equiv \ell a \pmod{N}$. Supongamos $p > 0$ y consideremos el punto $(\ell-1,0)$, se cumpliría $(p-1)a+qb \equiv (\ell-1)a \pmod{N}$ y $(p-1)+q < \ell-1$; por tanto el punto $(\ell-1,0)$ estaría en blanco, lo que contradice la elección de $p > 0$.

En consecuencia, redefiniendo p como $-p$,

$$(\ell,0) \equiv (-p,q), \quad |p|+q < \ell, \quad p \geq 0 \quad (4.4)$$

Análogamente, si $B=(-\ell',0)$ es el primer punto en blanco en el semieje negativo de las x 's, se tiene:

$$(-\ell',0) \equiv (p',q'), \quad |p'|+q' \leq \ell', \quad p' \geq 0 \quad (4.5)$$

Sea ahora $C=(0,h)$ el primer punto en blanco en el eje y . Existen $r,s \in \mathbb{Z}$ tales que $|r|+s \leq h$ y $ra+sb \equiv hb \pmod{N}$. Supongamos $s > 0$, tendríamos $|r|+s-1 \leq h-1$ y se cumpliría $ra+(s-1)b \equiv (h-1)b \pmod{N}$; entonces $(0,h-1)$ estaría

en blanco, lo que contradice la elección de $s > 0$. Por tanto:

$$(0,h) \equiv (r,0), \quad |r| < h \quad (4.6)$$

Con un razonamiento similar se deduce que, para que en la baldosa no se produzcan repeticiones, cada uno de los puntos A', A'', A''', \dots ha de ser congruente con $(-\ell'+1,0)$; esto implica que existe como máximo un punto en blanco A' , ya que en caso contrario los puntos $A'-(1,0), A''-(1,0), \dots$ serían congruentes. Además se cumple que $A' = (p', q') + (1, 0)$.

De forma análoga existe como máximo un punto en blanco B' , con $B' \equiv (\ell-1, 0)$ y $B' = (-p, q) + (-1, 0)$.

En base a estos razonamientos, se deduce que la forma de la baldosa es la mostrada en la Figura 4-8.

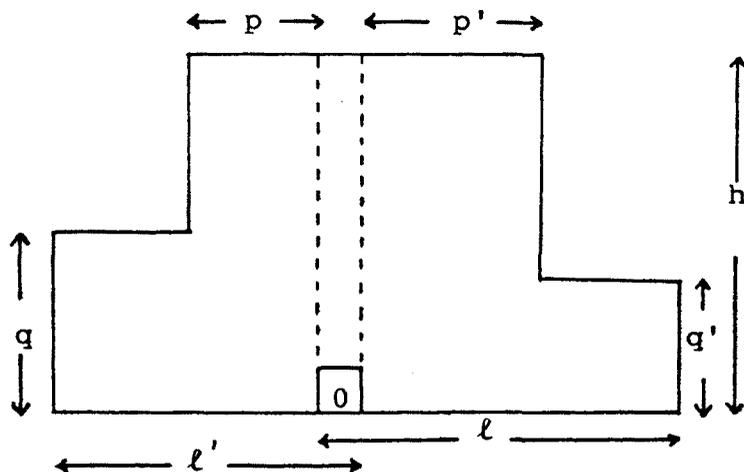


Fig. 4-8

Por último, para ver que la baldosa tiene la forma representada en la Figura 4-4 sólo falta demostrar que:

$$h=q+q' \quad (4.7a)$$

ó

$$q=q'=0 \quad (\Leftrightarrow l-p'=l'-p=1) \quad (4.7b)$$

Sumando las expresiones (4.4) y (4.5) se tiene $(l-l',0) \equiv (-p+p',q+q')$ o, equivalentemente,

$$(l-l'+p-p',0) \equiv (0,q+q') \quad (4.8)$$

Según la expresión (4.6), $(0,0) \equiv (r,-h)$, que sumado a (4.8) da

$$(l-l'+p-p',0) \equiv (r,q+q'-h) \quad (4.9)$$

Ahora, el punto $(l-l'+p-p',0) = ((l-p')-(l'-p),0)$ está dentro de la baldosa ya que

$$-l' < -(l'-p) < (l-p') - (l'-p) < l-p' < l$$

Si $q+q'-h \geq 0$, el punto $(r,q+q'-h)$ también está dentro de la baldosa ya que, trivialmente, $-l' < r < l$ y $0 < q+q'-h < \min q, q'$. Entonces, como en la baldosa no hay repeticiones, la congruencia (4.9) ha de ser una igualdad y por tanto se verifica (4.7a).

Si $q+q'-h < 0$, el punto $(0,q+q')$ está en la baldosa y, razonando como en el caso anterior, (4.8) implica (4.7b). Además es fácil comprobar que en este caso $l=l'$.

Por tanto, queda demostrado que todo digrafo circulante $D_N(\pm a, b)$ puede asociarse con una baldosa del plano en forma de T. Basándonos en los razonamientos hechos en los capítulos II y III, los pasos a y b que generan una baldosa con dimensiones m, m', n, n', l, l' , deben satisfacer:

$$\begin{cases} (t-m')a - nb \equiv 0 & \text{mod } N \\ (m'-m)a + hb \equiv 0 & \text{mod } N \end{cases} \quad (4.10)$$

donde $h=n+n'$ y $t=l+l'-1$. Ver Figura 4-9.

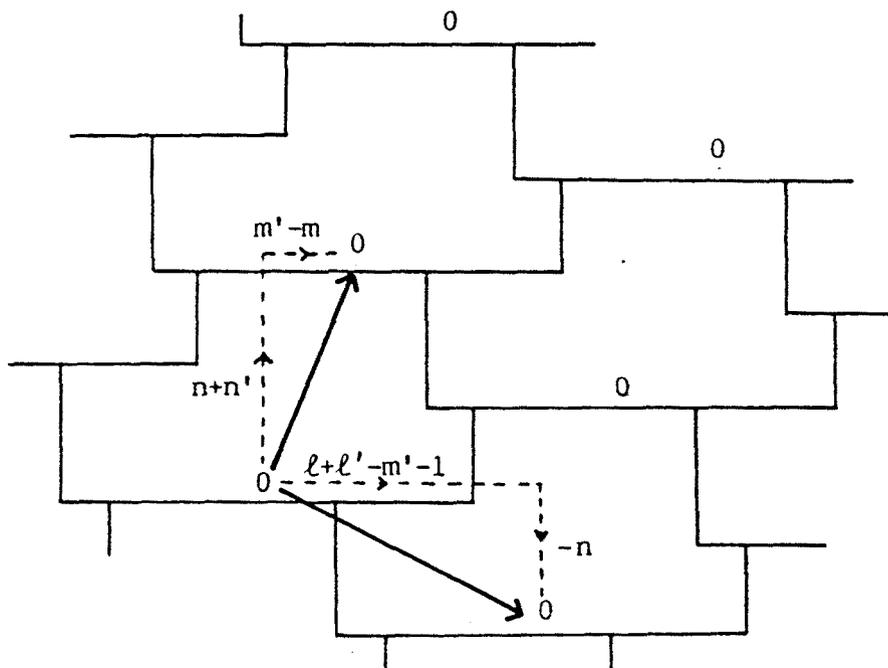


Fig. 4-9

Observemos que el sistema (4.10) tiene soluciones no triviales ya que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = h(t-m') + n(m'-m) = N \equiv 0 \pmod{N} \quad (4.11)$$

En este caso, la condición necesaria y suficiente para que existan pasos a y b es:

$$(t-m', n, m'-m, h) = 1 \quad (4.12)$$

4.4 BALDOSA OPTIMA (orden máximo)

Volviendo al problema planteado, interesa conocer cuáles son las baldosas que corresponden a digrafos con orden máximo para valores dados del diámetro k .

Los vértices de la baldosa que están a mayor distancia del 0 son los situados en las esquinas señaladas de la Figura 4-4; así el parámetro k viene dado por

$$k = \max (\ell + n' - 2, h + \ell - m - 2, \ell' + n - 2, h + \ell' - m' - 2) \quad (4.13)$$

El problema considerado equivale a hallar la baldosa que tenga área máxima para un valor fijo de este parámetro.

Observemos primero que una condición necesaria para maximizar el área es que las cuatro esquinas señaladas estén a distancia k , tal como se muestra en la Fig 4-10.

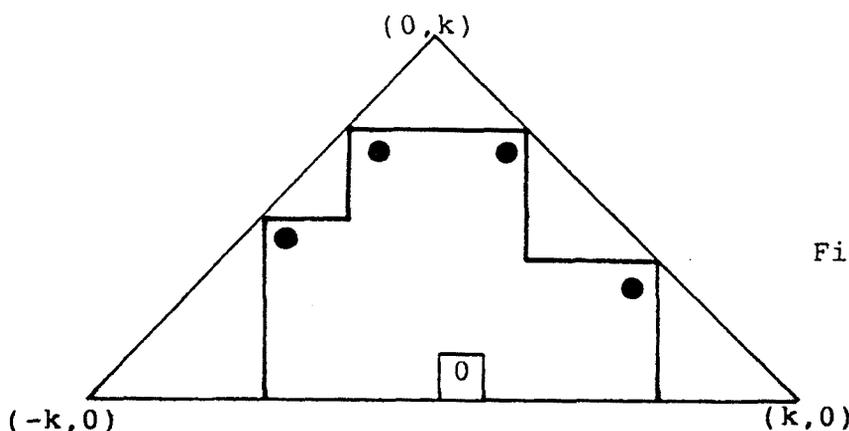


Fig. 4-10

Por tanto se ha de verificar

$$\begin{cases} m=n \\ m'=n' \end{cases} \quad \begin{cases} \ell + n' - 2 = k \\ \ell' + n - 2 = k \end{cases} \quad (4.14)$$

Consideremos una versión continua del problema. Dados h, t, n reales positivos, se ha de maximizar la función

$$N = h(t - m') + n(m' - m) = ht - h^2 - 2n^2 + 2hn,$$

con la condición $k = \frac{t+h-3}{2}$ constante.

Por el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene el máximo de N para $h=2n=t/2$.

Entonces, para cada valor de k , el valor máximo de N se obtendría para

$$p = \frac{k}{3} + \frac{1}{2}, \quad t = \frac{4k}{3} + 2, \quad h = \frac{2k}{3} + 1,$$

y sería

$$N = \left(\frac{2k}{3} + 1 \right) \left(k + \frac{3}{2} \right)$$

Como sólo nos interesan valores enteros, el número máximo de vértices de un digrafo con diámetro k sería

$$N = \left\lfloor \left(\frac{2k}{3} + 1 \right) \left(k + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor \quad (4.15)$$

Para demostrar que esta cota es alcanzable, distinguimos tres casos:

a) $k=3s$

$$N = \left\lfloor (2s+1) \left(3s + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor = 6s^2 + 6s + 1 \quad (4.16)$$

Se puede obtener una baldosa con $k=3s$ y área $N=6s^2+6s+1$, tomando dimensiones

$$m'=n'=s, \quad m=n=s+1, \quad \ell=2s+2, \quad \ell'=2s+1 \quad (4.17)$$

Además, unos pasos asociados a esta baldosa son

$$a=1, \quad b=6s+3 \quad (4.18)$$

b) $k=3s-1$

$$N = \left\lfloor \left(\frac{2}{3}(3s-1)+1 \right) \left(3s-1 + \frac{3}{2} \right) \right\rfloor = 6s^2 + 2s \quad (4.19)$$

Esta baldosa es construible con dimensiones

$$m=m'=n=n'=s, \quad \ell=\ell'=2s+1 \quad (4.20)$$

y pasos

$$a=s, \quad b=3s+1 \quad (4.21)$$

c) $k=3s-2$

$$N = \left[\left(\frac{2}{3}(3s-2)+1 \right) \left(3s-2 + \frac{3}{2} \right) \right] = 6s^2 - 2s \quad (4.22)$$

Esta baldosa es construible con dimensiones

$$m=m'=n=n'=s, \quad \ell=\ell'=2s \quad (4.23)$$

y pasos

$$a=s, \quad b=3s-1 \quad (4.24)$$

CAPITULO V

DIAMETRO , DISTANCIA MEDIA Y
VULNERABILIDAD

5.1 INTRODUCCION

Otros problemas que aparecen en el diseño de redes de interconexión, son los que corresponden a la minimización del diámetro y la distancia media entre vértices, y a la vulnerabilidad (cómo aumenta el diámetro al suprimir un vértice o una arista) del grafo que las modela.

En este capítulo estudiamos estos problemas para los grafos y digrafos de doble y triple lazo y para los digrafos bipartitos y 4-partitos definidos en el capítulo III. Como en los capítulos anteriores, el uso de las teselaciones del plano asociadas a estos grafos, facilita el estudio.

En todos los casos, salvo en los grafos de triple lazo, obtenemos una fórmula cerrada para el mínimo diámetro y la mínima distancia media de un grafo con un orden m dado [32].

5.2 GRAFOS DE DOBLE LAZO

Como ya se ha mencionado en el capítulo III, las propiedades de estos grafos han sido estudiadas en [8]. En este artículo y en [24] se demuestran las siguientes proposiciones:

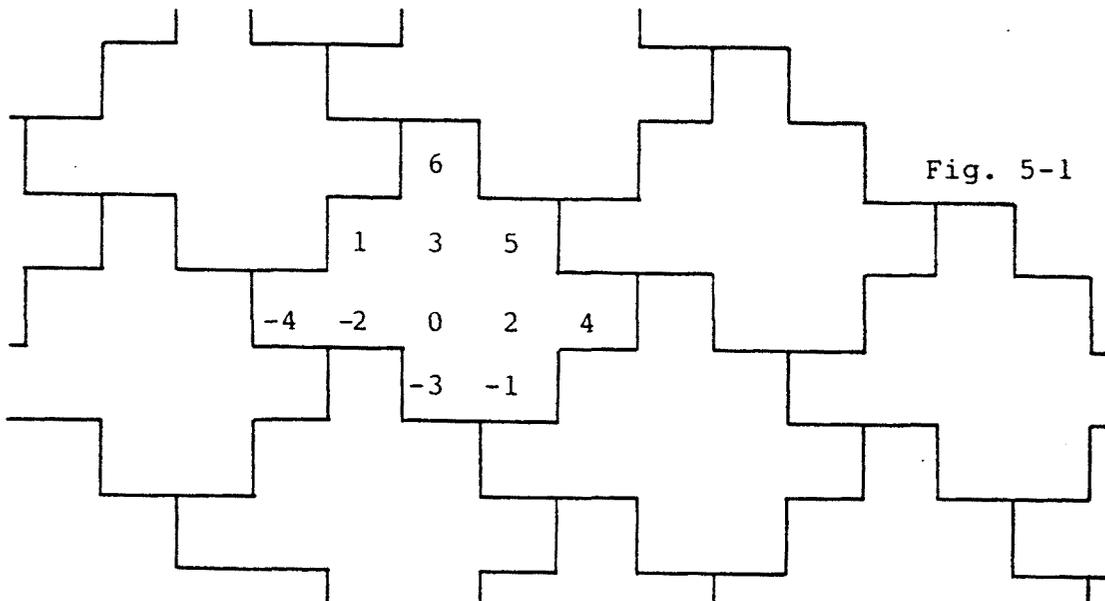
Proposición 5.2.1:

El mínimo diámetro de un grafo de doble lazo con m vértices es $k_m = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{2m-3}}{2} \right\rfloor$. Este diámetro se obtie-

ne considerando el grafo de doble lazo con $a=k_m$ y $b=k_m+1$.

Geoméricamente, para construir el grafo con m vértices y diámetro k_m , basta considerar la baldosa óptima con m_k vértices y suprimir m_k-m vértices en las diagonales extremales SE-NO; de esta forma se obtiene una baldosa con m vértices que también tesela el plano.

En la Figura 5-1 se muestra la baldosa correspondiente a $m=11$.



Proposición 5.2.2:

La distancia media de un grafo de doble lazo con orden m satisface

$$\bar{k}_m = \frac{k_m(1-2(k_m^2-1))}{3(m-1)}, \text{ donde } k_m = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2m-3}}{2} \right\rfloor$$

Esta cota es alcanzable para todo m , considerando el grafo de doble lazo con $b=a+1$ y, o bien $a=k_m$ ó $a=k_m-1$.

Geoméricamente, si $m > 2k_m^2 - 1$, la baldosa con distancia media mínima se obtiene suprimiendo cuadrados de las diagonales extremales (que corresponden a vértices a distancia k_m) del $D_m(k_m, k_m+1)$ con $m = 2k_m^2 + 2k_m + 1$ (ver Figura 5-2 para $m=17$). Análogamente, para $m \leq 2k_m^2 + 1$, la

baldosa se obtiene añadiendo cuadrados en las diagonales extremales de la baldosa asociada al $D_m(k_m-1, k_m)$ con $2k_m^2+2k_m+1$ vértices (ver Figura 5-3 para $m=19$).

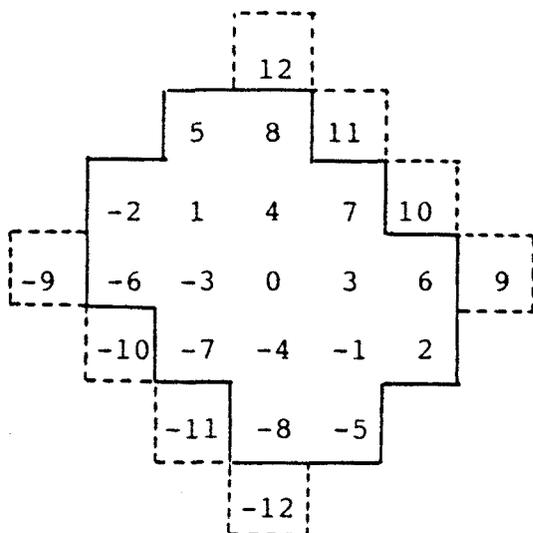


Fig. 5-2

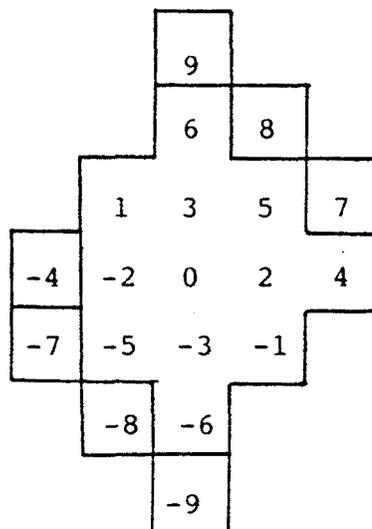


Fig. 5-3

Proposición 5.2.3:

El diámetro obtenido por supresión de un vértice o una arista en $D_m(k, k+1)$ es como máximo $k+1$.

Para demostrar esta proposición es necesario conocer el encaminamiento de estos grafos. Para buscar el camino mínimo entre dos vértices i y j , basta determinar p y q tales que $j-i=pk+q(k+1)$ con p y q enteros y $|p|+|q|$ mínimo. Entonces existen $\binom{|p|+|q|}{|p|}$ caminos mínimos de i a j consistiendo de $|p|$ pasos k y $|q|$ pasos $k+1$.

Según esto, la distancia entre dos vértices puede

crecer sólo si existe un único camino mínimo entre ellos, es decir $p=0$ ó $q=0$, y el vértice (o el arco) suprimido está en este camino. Se demuestra que siempre existe un camino alternativo de longitud $\leq k+1$.

En [10] se demuestra que estos grafos tienen buena conectividad.

5.3 DIGRAFOS DE DOBLE LAZO

Esta familia de digrafos ha sido estudiada detalladamente en [21]. En esta sección enunciaremos y comentamos los resultados obtenidos en este artículo.

Como ya se ha dicho, siempre es posible asociar a estos digrafos una baldosa en forma de L. Estas baldosas quedan determinadas por sus dimensiones x , y , l , h (ver Figura 5-4), entonces para un orden m dado, se han de hallar

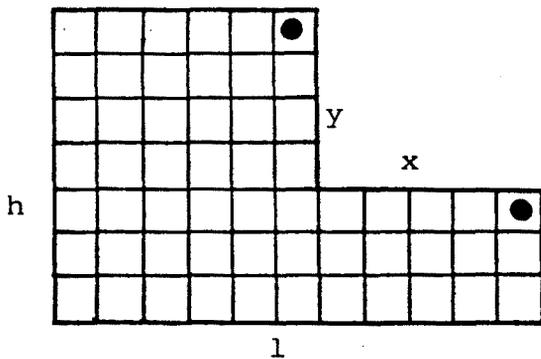


Fig. 5-4

enteros x , y , l , h tales que la baldosa tenga área $m=lh-xy$ y el diámetro y/o la distancia media entre vértices del digrafo sean mínimos.

Los vértices a mayor distancia del 0 son los situados en las esquinas señaladas de la Figura 5-4, por

tanto el diámetro del digrafo es

$$k = \{\max h+1-x-2, h+1-y-2\} \quad (5.1)$$

La fórmula para la distancia media es

$$\bar{k} = \frac{1}{m} \left(\left(\frac{1h}{2} - xy \right) (1+h-2) + \frac{1}{2} xy(x+y-2) \right) \quad (5.2)$$

Considerando una versión continua de este problema de minimización, se obtiene

$$k_{\min} = \sqrt{3m} - 2$$

$$\bar{k}_{\min} = \frac{5}{9} \sqrt{3m} - 1$$

Las baldosas óptimas son simétricas, con dimensiones $l=h=2x=2y$ y, por tanto, $m=3x^2$. Para el problema discreto, esto sólo tiene sentido si m es tres veces el cuadrado de un entero. Existen otras razones que hacen el caso discreto más complicado: Primero, ni el diámetro ni la distancia media crecen con m ; segundo, para algunos valores de m existen baldosas que minimizan el diámetro o la distancia media, pero no ambos simultáneamente.

En [21] se demuestra que una condición necesaria y suficiente para que existan pasos a y b asociados a una baldosa determinada es

$$(x, y, l, h) = 1 \quad (5.3)$$

Esto impide la construcción de algunas baldosas, en particular, la baldosa óptima, ya que

$$(x, y, l, h) = (x, x, 2x, 2x) = x \neq 1$$

El hecho de que la baldosa óptima no pueda construirse con pasos a y b , quiere decir que

$$k \geq \lfloor \sqrt{3m} \rfloor - 1 \quad \bar{k} \geq \frac{5}{9} \sqrt{3m} - 1 \quad (5.4)$$

y los resultados numéricos dan (para $m < 256$)

$$k \leq \lfloor \sqrt{3m} \rfloor \quad \bar{k} < \frac{5}{9}(\sqrt{3m} - 1) \quad (5.5)$$

Por tanto, en los digrafos de doble lazo, en lugar de tener una fórmula cerrada para k y \bar{k} , se tienen acotaciones de estos parámetros.

La resolución analítica de estos problemas de optimización es muy difícil. Para algunos valores de m (por ejemplo los de la Tabla I) puede darse una demostración analítica, mientras para otros sólo puede obtenerse la solución mediante una exploración exhaustiva con ordenador.

| N | l | h | x | y | k | $m\bar{k}$ | a | b |
|----------------------------------|------|------|-----|-----|------|--|---|-------|
| $3x^2$ | 2x-1 | 2x+1 | x-1 | x+1 | 3x-1 | $5x^3 - 3x^2 + x$ | 1 | 3x-1 |
| $3x^2+x$ | 2x | 2x+1 | x | x+1 | 3x-1 | $5x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ | 1 | 3x |
| $3x^2+2x$ | 2x | 2x+1 | x | x | 3x-1 | $5x^3 + 2x^2 - x$ | 1 | -3x |
| $3x^2+2x+1$ | 2x | 2x+1 | x-1 | x+1 | 3x | $5x^3 + 2x^2 + 2x$ | 1 | 3x+1 |
| $3x^2+3x+1$ | 2x+1 | 2x+1 | x | x+1 | 3x | $5x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{23}{2}x$ | 1 | 3x+2 |
| $3x^2+4x+1$ | 2x+1 | 2x+1 | x | x | 3x | $5x^3 + 7x^2 + 2x$ | 1 | -3x-2 |
| $3x^2+4x+2$ | 2x+1 | 2x+1 | x-1 | x+1 | 3x+1 | $5x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ | 1 | 3x+3 |
| $3x^2+5x+2$ | 2x+2 | 2x+1 | x | x+1 | 3x+1 | $5x^3 + \frac{19}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 1$ | 1 | 3x+4 |
| $3x^2+6x+2$ ($=3(x+1)^2-1$) | 2x+2 | 2x+1 | x | x | 3x+1 | $5x^3 + 12x^2 + 7x + 1$ | 1 | -3x+4 |

Tabla I

Un hecho importante es que, en casi todos los casos, existe una solución con $a=1$. Es decir, entre todos pares (a,b) que minimizan el diámetro o la distancia media

entre vértices para un valor dado de m , existe un par (l,b) , salvo para algunos valores excepcionales de m , el primero de los cuales es $m=450$.

En consecuencia, la obtención de una estructura óptima de doble lazo a partir de un lazo simple puede llevarse a cabo sin más que añadir un nuevo "lazo" (en realidad es un lazo si $(b,m)=1$).

En relación a la vulnerabilidad, en [21], se demuestra el siguiente resultado

Proposición 5.3.1:

El diámetro del digrafo obtenido por supresión de un vértice o una arista en un digrafo de doble lazo con diámetro k , es como máximo $k+1$.

Como en la proposición 5.2.3, este resultado es teórico. Corresponde al caso en que el fallo de un nodo en la red local es conocido por todos los demás, de hecho, el fallo de un nodo se conoce cuando un nodo adyacente a él lo quiere utilizar para enviar un mensaje. El diámetro real puede ser alrededor de $4/3$ veces el diámetro del digrafo.

5.4 GRAFOS DE TRIPLE LAZO

El problema de minimización del diámetro de un grafo de triple lazo con un orden m dado, ha sido resuelto para algunos valores de m (ver la Tabla II). Para otros valores la solución se obtiene mediante una exploración exhaustiva con ordenador, que se utiliza también para obtener la mínima distancia media.

| ORDEN | DIAMETRO | a | b |
|-------------------------------|----------|---|------|
| $m_k - k = 3k^2 + 2k + 1$ | k | 1 | 3k |
| $m_k - 2k = 3k^2 + k + 1$ | k | 1 | 3k-1 |
| $m_k - 3k = 3k^2 + 1$ | k | 1 | 3k-2 |
| $m_k - 4k = 3k^2 - k + 1$ | k | 1 | 3k-3 |
| $m_k - 5k = 3k^2 - 2k + 1$ | k | 1 | 3k-4 |
| $m_k - 1 = 3k^2 + 3k$ | k+1 | 1 | 3k+1 |
| $m_k - (k+1) = 3k^2 + 2k$ | k | 1 | 3k |
| $m_k - 2(k+1) = 3k^2 + k - 1$ | k | 1 | 3k-1 |
| $m_k - 3(k+1) = 3k^2 - 2$ | k | 1 | 3k-2 |
| $m_k - 4(k+1) = 3k^2 - k - 3$ | k | 1 | 3k-3 |
| $m_k - k + 1 = 3k^2 + 2k + 2$ | k+1 | 1 | 3k |

Tabla II

Estudiemos ahora el efecto de la supresión de un vértice (o una arista) en el diámetro de estos grafos.

Proposición 5.4.1:

El diámetro del grafo obtenido por supresión de un vértice (o una arista) en un $TLG(a,b,c)$ con diámetro k es como máximo $k+1$.

Demostración:

La distancia puede crecer sólo si existe un único camino de longitud k entre los vértices i y j , y el vértice suprimido (o arco) está en dicho camino, es decir, si el camino sólo tiene pasos de tipo a , b ó c . Sin perder generalidad podemos suponer que el vértice su-

primido v pertenece a un camino que sólo tiene pasos de tipo a. Entonces, podemos reemplazar el subcamino $v-a, v, v+a$ por $v-a, v-a-b, v-b, v-b-c=v+a$. Similarmente, podemos reemplazar la arista $v, v+a$ por el subcamino $v, v-c, v-c-b$. En cualquier caso, la distancia crece como máximo en una unidad. (Ver Figura 5-5).

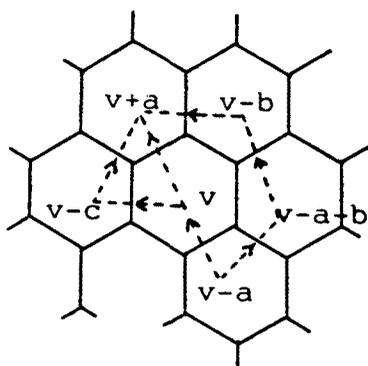


Fig. 5-5

5.5 DIGRAFOS DE TRIPLE LAZO

La siguiente proposición da una fórmula para calcular el mínimo diámetro de estos digrafos.

Proposición 5.5.1:

El mínimo diámetro de un $TLG(a,b,c)$ con m vértices es $k_m = \lfloor \sqrt{m-1} \rfloor$. Este diámetro se obtiene considerando $a=1$ y $b=k_m+1$.

Demostración:

Notemos que el entero k_m debe ser tal que

$$m_{k-1} < m \leq m_k$$

es decir,

$$k_m^2 < m \leq (k_m+1)^2$$

o equivalentemente

$$-1 + \sqrt{m-1} < k_m \leq \sqrt{m-1}$$

y, por tanto,

$$k_m = \lfloor \sqrt{m-1} \rfloor \tag{5.6}$$

Además, con la elección de $a=1$ y $b=k_m+1$, los vértices que están a distancia menor o igual que k_m del vértice 0, son todos los enteros comprendidos entre 0 y $k_m(k_m+2) \geq m-1$, de aquí se deduce que la baldosa correspondiente a m_k contiene todos los enteros módulo m . Entonces, a partir de esta baldosa es posible obtener la baldosa asociada a un digrafo de orden m suprimiendo elementos de la diagonal SO-NE. (Ver Figura 5-6 para $m=12$)

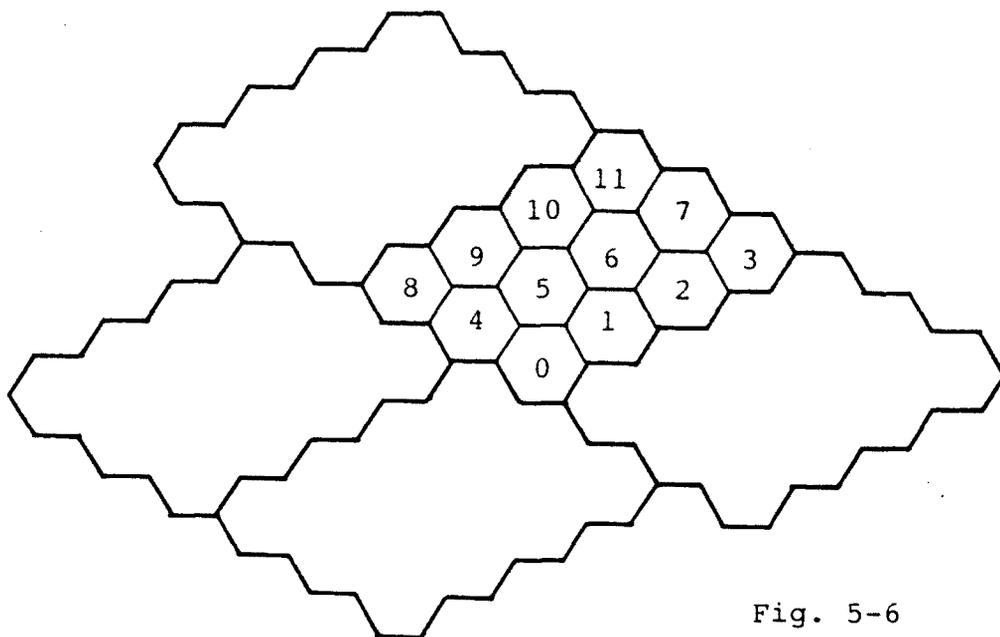


Fig. 5-6

Proposición 5.5.2:

La distancia media de un TLD(a,b,c) de orden m es

$$\bar{k}_m \geq k_m \left(1 + \frac{5-3k_m-2k_m^2}{6(m-1)} \right)$$

donde $k_m = \lfloor \sqrt{m-1} \rfloor$. Esta cota se alcanza para todo m considerando un digrafo con $a=1$ y, o bien $b=k_m$ ó $b=k_m+1$.

Demostración:

Puesto que el digrafo es vértice simétrico,

la distancia media puede expresarse como:

$$\bar{k}_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} d(0, i) \quad (5.7)$$

A partir de la teselación, es fácil ver que existen como máximo $2j+1$ vértices a distancia j del vértice 0 ($1 < j < k_m - 1$), y entonces

$$(m-1)\bar{k}_m \geq \sum_{j=1}^{k_m-1} j(2j+1) + k_m(m-k_m^2)$$

es decir,

$$(m-1)\bar{k}_m \geq 2 \frac{(k_m-1)^3}{3} + (k_m-1)^2 + \frac{k_m-1}{3} + k_m \frac{k_m-1}{2} + k_m(m-k_m^2)$$

y, por tanto,

$$\bar{k}_m \geq k_m \left(1 + \frac{5-3k_m-2k_m^2}{6(m-1)} \right) \quad (5.8)$$

Para demostrar que esta cota es alcanzable distinguimos dos casos:

a) $m \leq k_m^2 + k_m + 1$. Si consideramos el digrafo de triple lazo de m vértices con $a=1$ y $b=k_m$, los vértices i tales que $i < k_m^2 (=m_{k-1})$ están como máximo a distancia k_m-1 del vértice 0, y existen exactamente $2j+1$ vértices a distancia j de este vértice ($j \leq k_m-1$). Sólo falta probar que los restantes vértices están a distancia exactamente k_m del vértice 0. Un vértice i es adyacente a los vértices $i+k_m$, $i+1$, $i+k_m+1$, entonces, el conjunto de "vecinos" de los vértices $i < k_m^2$ contiene todos los vértices j tales que $j < k_m^2 + k_m + 1$. Por tanto, los vértices j que verifican $k_m^2 \leq j \leq k_m^2 + k_m$ están a distancia k_m .

b) $m \geq k_m^2 + k_m - 1$. En el digrafo de triple lazo de m vértices con $a=1$ y $b=k_m+1$, los vértices i tales que

$i > (k_m - 1)(k_m + 1) + k_m$ están a distancia k_m del vértice 0. Entonces, como $m \geq k_m^2 + k_m - 1$, la distribución de los vértices a distancia j ($j < k_m$) del vértice 0 es la misma que en el digrafo que tiene $(k_m + 1)^2$ vértices con $a=1$ y $b=k_m+1$, y existen exactamente $2j+1$ vértices a distancia j , mientras que los vértices restantes están a distancia k_m .

Proposición 5.5.3:

El diámetro del digrafo obtenido por supresión de un vértice (o una arista) en un $TLD(a,b,c)$ con diámetro k es como máximo $K+1$.

Demostración:

Supongamos que se suprime un vértice en un camino de longitud $\leq k$ entre vértices i y j . Entonces, la distancia $d(i,j)$ puede crecer sólo si no existe otro camino de longitud k entre ellos. En tal caso, el camino sólo tiene pasos de tipo a , b ó c . Sin perder generalidad podemos suponer que el camino sólo tiene pasos de tipo a y el vértice inicial es $-c$ (ó $-b$). Entonces construimos un camino alternativo al vértice $ma-c$ ($ma-b$) de la siguiente manera: después de un paso de tipo c (ó b) existe siempre un camino de longitud $\leq k$ desde este nuevo vértice (el vértice 0) hasta el vértice final, que no atraviesa el vértice suprimido (o arista). Ver Figura 5-7.

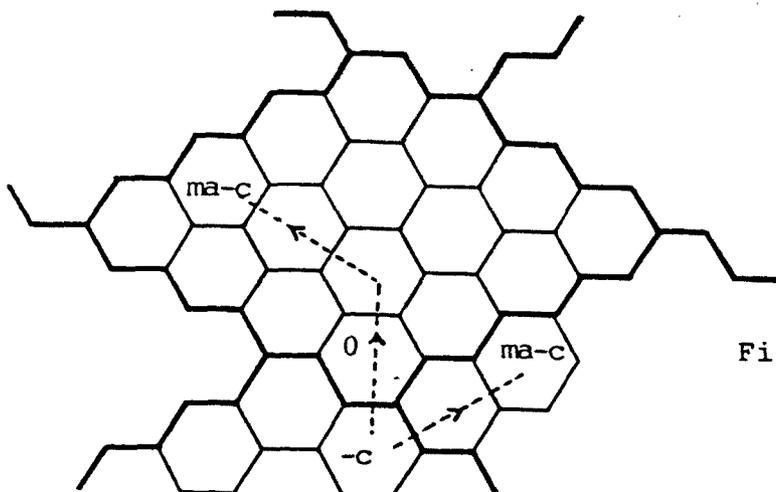


Fig. 5-7

5.6 DIGRAFOS BIPARTITOS

El diámetro mínimo de estos digrafos está dado por la siguiente proposición

Proposición 5.6.1:

El diámetro mínimo de un $BD(a,b,c,d)$ con m vértices es $k_m = \lceil \sqrt{m-1} \rceil$. Este diámetro se obtiene considerando $a=-b=-1$ y $c=-d=k_m$ si k_m es impar, y $a=-b=-1$, $c=-d=k_m+1$ si k_m es par.

Demostración:

El entero k_m debe satisfacer

$$m_{k-1} < m \leq m_k$$

Consideramos dos casos

a) k_m impar:

$$(k_m - 1)^2 < m \leq k_m^2 + 1$$

$$(k_m - 1)^2 \leq m - 1 \leq k_m^2$$

$$\sqrt{m-1} \leq k_m \leq 1 + \sqrt{m-1}$$

b) k_m par:

$$(k_m - 1)^2 < m \leq k_m^2$$

$$(k_m - 1)^2 \leq m - 1 < k_m^2$$

$$\sqrt{m-1} < k_m \leq 1 + \sqrt{m-1}$$

Entonces, en ambos casos $k_m = \lceil \sqrt{m-1} \rceil$ (5.9)

Ya hemos visto que es posible tomar, entre vértices de V_0 ó V_1 , pasos dobles $\pm A$, $\pm B$ con $A=a+c=-(b+d)$, $B=b+c=-(a+d)$, y considerar el grafo de doble lazo de orden $m/2$ y diámetro $k_m/2$ (k_m par) ó $(k_m-1)/2$ (k_m impar) con pasos $\pm A$ y $\pm B$. Usando los resultados de la proposición 5.2.1, se deduce que los pasos para alcanzar el diámetro

mínimo en estos digrafos bipartitos son

$$\begin{aligned} a=-b=-1, & \quad c=-d=k_m+1, & \quad k_m \text{ par} \\ a=-b=-1, & \quad c=-d=k_m, & \quad k_m \text{ impar} \end{aligned}$$

Para la distancia media se tienen los siguientes resultados

Proposición 5.6.2:

La distancia media de un BD(a,b,c,d) de orden m verifica

$$\begin{aligned} \bar{k}_m &\geq \frac{-3m-4k_m+6mk_m+3k_m^2-2k_m^3}{6(m-1)}, & \quad k_m \text{ par} \\ \bar{k}_m &\geq \frac{3-3m-4k_m+6mk_m+3k_m^2-2k_m^3}{6(m-1)}, & \quad k_m \text{ impar} \end{aligned}$$

donde k_m es el diámetro mínimo del digrafo.

Esta cota se alcanza para todo m considerando un BD(a,b,c,d) con

$$\begin{aligned} a=-b=k_m-1, & \quad c=-d=1, & \quad k_m \text{ par} \\ a=-b=-1, & \quad c=-d=k_m, & \quad k_m \text{ impar} \end{aligned}$$

Demostración:

La distancia media mínima se alcanza cuando todos los vértices están a la menor distancia posible del 0. Entonces, por consideraciones geométricas en la teselación, para un diámetro dado $k_m > 2$, existen $2j$ vértices a distancia j del vértice 0 ($j \leq k_m - 2$) y los vértices restantes están a distancias k_m y $k_m - 1$, de acuerdo con:

$$a) \quad k_m \text{ par. A distancia } k_m \text{ existen } \frac{m}{2} - \left(1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m-2} 2j \right)$$

vértices de V_0 , y a distancia $k_m - 1$ existen $\frac{m}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^{k_m - 3} 2j$ vértices de V_1 .

Entonces:

$$(m-1)\bar{k}_m \geq \sum_{j=1}^{k_m - 2} 2j^2 + k_m m - \frac{m}{2} - k_m \left(1 + \sum_{j=1}^{k_m - 2} 2j\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^{k_m - 3} 2j \quad (5.10)$$

b) k_m impar. A distancia k_m existen $\frac{m}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impar}}}^{k_m - 2} 2j$ vértices de V_1 , y a distancia $k_m - 1$ existen $\frac{m}{2} - \left(1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m - 3} 2j\right)$ vértices de V_0 .

Entonces:

$$(m-1)\bar{k}_m \geq \sum_{j=1}^{k_m - 2} 2j^2 + k_m m - \frac{m}{2} - k_m \left(1 + \sum_{j=1}^{k_m - 2} 2j\right) + 1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m - 3} 2j \quad (5.11)$$

Realizando todos los cálculos se obtienen los resultados establecidos.

Los pasos correspondientes a la baldosa con mínima distancia media se hallan utilizando los resultados de mínima distancia media en un grafo de doble lazo con $m/2$ vértices, dados en la proposición 5.2.2. Geométricamente, si k_m es par, la baldosa se obtiene a partir de la baldosa correspondiente al digrafo $BD(k_m - 1, -(k_m - 1), 1, -1)$ con $m = (k_m - 1)^2 + 1$ vértices, añadiendo cuadrados en las columnas extremales, y si k_m es impar, a partir de la baldosa correspondiente al digrafo $BD(-1, 1, k_m, -k_m)$ con $m = k_m^2$ vértices, suprimiendo cuadrados de las filas extremales.

En relación a la vulnerabilidad, utilizando la teselación se puede demostrar que el diámetro del di-

grafo obtenido al suprimir un vértice (o un arco) en el digrafo $BD(a,b,c,d)$ con diámetro k y orden máximo m_k es como máximo $k+2$.

Diversos casos estudiados permiten conjeturar que este resultado es válido para digrafos $BD(a,b,c,d)$ con cualquier número de vértices m .

5.7 DIGRAFOS 4-PARTITOS

Para esta familia de digrafos veremos que también se obtienen fórmulas cerradas para el diámetro mínimo y la distancia media mínima de un digrafo con un orden dado. Como en la familia de digrafos bipartitos de la sección anterior, conjeturamos cómo aumenta el diámetro cuando suprimimos un vértice o una arista.

Proposición 5.7.1:

El diámetro mínimo de un digrafo $QD(a_i, b_i)$ con m vértices es $k_m = 1 + \lceil \sqrt{m/2 - 1} \rceil$. El digrafo con este diámetro es construible con pasos:

$$\left. \begin{array}{l} a_0=3, \quad a_1=2k-1, \quad a_2=-2k+3, \quad a_3=-5 \\ b_0=1, \quad b_1=1, \quad b_2=-2k+5, \quad b_3=2k-7 \end{array} \right\} k_m \text{ par}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0=3, \quad a_1=2k+1, \quad a_2=-2k+1, \quad a_3=-5 \\ b_0=1, \quad b_1=1, \quad b_2=-2k+3, \quad b_3=2k-5 \end{array} \right\} k_m \text{ impar}$$

Demostración:

El entero k_m debe verificar

$$m_{k-1} < m \leq m_k$$

y, como antes, distinguimos dos casos:

a) k_m par:

$$2(k_m - 2)^2 < m \leq 2((k_m - 1)^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} (k_m - 2)^2 &< \frac{m}{2} \leq (k_m - 1)^2 + 1 \\ (k_m - 2)^2 &\leq \frac{m}{2} - 1 \leq (k_m - 1)^2 \\ 1 + \sqrt{m/2 - 1} &\leq k_m \leq 2 + \sqrt{m/2 - 1} \end{aligned}$$

b) k_m impar:

$$\begin{aligned} 2((k_m - 2)^2 + 1) &< m \leq 2(k_m - 1)^2 \\ (k_m - 2)^2 &< \frac{m}{2} \leq (k_m - 1)^2 \\ (k_m - 2)^2 &\leq \frac{m}{2} - 1 < (k_m - 1)^2 \\ 1 + \sqrt{m/2 - 1} &< k_m \leq 2 + \sqrt{m/2 - 1} \end{aligned}$$

Entonces, en ambos casos:

$$k_m = 1 + \lceil \sqrt{m/2 - 1} \rceil. \quad (5.12)$$

Los valores de a_i y b_i , $0 \leq i \leq 3$, para construir un digrafo con diámetro mínimo se calculan en base a la observación de que en un digrafo $QD(a_i, b_i)$ con diámetro impar (par), los vértices pares (impares) forman la misma teselación que un digrafo $BD(a, b, c, d)$ con diámetro par (impar).

Proposición 5.7.2:

La distancia media de un $QD(a_i, b_i)$ de orden m verifica

$$\begin{aligned} \bar{k}_m &\geq \frac{-3m + 6mk_m - 32k_m^2 + 18k_m^3 - 4k_m^3}{6(m-1)}, & k_m \text{ par} \\ \bar{k}_m &\geq \frac{-6 - 3m + 6mk_m - 32k_m^2 + 18k_m^3 - 4k_m^3}{6(m-1)}, & k_m \text{ impar} \end{aligned}$$

donde k_m es el diámetro mínimo del digrafo.

Esta cota se alcanza para todo m , considerando el digrafo $QD(a_i, b_i)$ con

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 3, & a_1 &= 2k - 1, & a_2 &= -2k + 3, & a_3 &= -5 \\ b_0 &= 1, & b_1 &= 1, & b_2 &= -2k + 5, & b_3 &= 2k - 7 \end{aligned} \right\} k_m \text{ par}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0=3, \quad a_1=-2k+5, \quad a_2=2k+1, \quad a_3=-9 \\ b_0=1, \quad b_1=-4k+1, \quad b_2=2k+3, \quad b_3=2k-5 \end{array} \right\} k_m \text{ impar}$$

Demostración:

La demostración se basa en consideraciones geométricas, y sigue el desarrollo de la demostración de la proposición 5.6.2. Para un diámetro dado k_m , existen $4(j-1)$ vértices a distancia j ($1 < j \leq k_m - 2$, $j \neq 4$), 2 vértices a distancia 1 y 11 vértices a distancia 4 del vértice 0. Para los restantes vértices debemos considerar dos casos:

a) k_m par. A distancia k_m existen $\frac{m}{2} - \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m-2} 4(j-1)$ vértices pares, y existen $\frac{m}{2} - (2 + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impar}}}^{k_m-3} 4(j-1))$ vértices impares a distancia $k_m - 1$.

Entonces, la distancia media verifica

$$(m-1)\bar{k}_m \geq \sum_{j=2}^{k_m-2} 4j(j-1) + k_m m - \frac{m}{2} - 2k_m - k_m \sum_{j=2}^{k_m-2} 4(j-1) + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impar}}}^{k_m-3} 4(j-1) \quad (5.13)$$

b) k_m impar. Existen $\frac{m}{2} - (2 + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impar}}}^{k_m-2} 4(j-1))$ vértices impares a distancia k_m del vértice 0 y, existen

$$\frac{m}{2} - \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m-3} 4(j-1) \text{ vértices pares a distancia } k_m - 1.$$

Entonces la distancia media verifica

$$(m-1)\bar{k}_m \geq -2 + \sum_{j=2}^{k_m-2} 4j(j-1) + k_m m - \frac{m}{2} - 2k_m - k_m \sum_{j=2}^{k_m-2} 4(j-1) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ par}}}^{k_m-3} 4(j-1)$$

y se obtienen los resultados establecidos.

Los pasos correspondientes al digrafo con mínima distancia media se obtienen utilizando la relación existente entre un digrafo $QD(a_i, b_i)$ y un $BD(a, b, c, d)$ (ver sección 3.3.3), y los resultados de la proposición 5.6.2.

Como en el caso de los digrafos bipartitos, se puede demostrar que el diámetro de un digrafo 4-partito obtenido al suprimir un vértice (o un arco) en el digrafo $QD(a_i, b_i)$ con diámetro k y m_k vértices, es como máximo $k+4$. También conjeturamos que este resultado es válido para digrafos 4-partitos de cualquier orden.

CONCLUSIONES

En esta Tesis se ha estudiado un método general para la obtención de redes fiables y con buenos algoritmos de encaminamiento. Este método consiste en modelar dichas redes mediante grafos que pueden asociarse a determinadas teselaciones periódicas del plano. Consecuencia de esta representación geométrica es la simplificación del estudio de los parámetros relacionados con la distancia, así como de los algoritmos de encaminamiento.

Básicamente, las aportaciones realizadas son:

- a) Formulación matemática del método, y desarrollo de los resultados teóricos que facilitan su aplicación.
- b) Resolución de problemas de optimización planteados en el estudio de ciertas familias de redes de interconexión. Dichas redes habían sido propuestas en razón a sus buenas prestaciones.
- c) Diseño de nuevas topologías para redes de interconexión, inspiradas en las ya conocidas y con prestaciones similares o superiores, y caracterización de las mismas utilizando el citado método.

En relación a la segunda aportación, el estudio de los grafos óptimos en cuanto a número de vértices fijado el diámetro, para dos familias de grafos cúbicos, conduce a los grafos de Petersen generalizados y a los de anillos con cuerdas, habiéndose obtenido valores del orden de $4k^2$ y $3/2k^2$, respectivamente.

Respecto a nuevas construcciones, la consideración de digrafos bipartitos nos permite construir digrafos 2-regulares con un número de vértices del orden de k^2 y, en el caso de grafos 4-partitos, obtenemos digrafos 2-regulares y con un número de vértices del orden de $2k^2$.

Una posible generalización del trabajo realizado en esta Tesis consistiría en el diseño de redes modeladas mediante grafos asociados con teselaciones del espacio o, más generalmente asociados con teselaciones de espacios R^n con $n > 2$. Aunque la formulación matemática del método, así como los resultados teóricos obtenidos, también serían aplicables en estos casos, su solución exigiría la determinación de ciertas formas concretas que teselen dichos espacios.

BIBLIOGRAFIA

- |9| N.Biggs. "Algebraic Graph Theory", Cambridge Tracts in Math., vol 67, London: Cambridge Univ. Press, (1974).
- |10| F.T.Boesch y J.K.Wang. "Reliable circulant network with minimum transmission delay", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol C-32, nº 12, Dic 1985.
- |11| B.Bollobas. "Graph Theory. An Introductory Course", New York, Springer-Verlag, (1979).
- |12| T.G.Boreham, T.Z.Bouwer y R.W.Frucht. "A useful family of bicubic graphs", Graphs and Combinatorics, Lec.Not.in Math. 406, Springer (1974), pp 213-225.
- |13| H.S.M.Coxeter. "Self-dual configurations and regular graphs", Bull. Amer. Math. Soc., vol 56, (1950), pp 413-455.
- |14| P.J.Davis "Circulant Matrices", John Wiley & Sons, (1979).
- |15| C.Delorme. "Grands graphes de degré et diamètre donnés". Por aparecer en J. Européen de Combinatoire.
- |16| C.Delorme. "Large bipartite graphs with given degree and diameter", Por aparecer en J. Graph Theory.
- |17| N.Deo. "Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science", Prentice-Hall, (1974).
- |18| M.A.Fiol. "Aplicaciones de la Teoría de Grafos al diseño de redes de interconexión de multiprocesadores", Tesis Doctoral, Barcelona 1982.

- |19| M.A.Fiol, M.Valero, J.L.A.Yebra, I.Alegre y T.Lang. "Optimization of double-loop structures for local networks", XIX International Symposium MIMI'82, Paris 29 Jun - 2 Jul, (1982).

- |20| M.A.Fiol, J.L.A.Yebra, M.Valero, I.Alegre y T.Lang. "Optimization of double and multiple—loop structures for local networks", XX ISMM International Symposium MIMI'82, Cambridge, USA, 7-9 Jul. 1982.

- |21| M.A.Fiol, J.L.A.Yebra, I.Alegre y M.Valero. "A discrete optimization problem in local networks and data alignment", Por aparecer en IEEE Trans. on Comput.

- |22| A.G.Granrov, L.Kleinrock y M.Gerla. "A highly reliable distributed loop network Architecture", Proc 1980 Int. Symp. Fault-Tolerant Computing, Kyotot, Oct. 1980.

- |23| F.Harary. "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969).

- |24| G.Illiades. "Optimisation des réseaux à double boucle" DEA Dissertation, LRI, Univ. Paris-Sud, 1984.

- |25| Kenan E. Sahin. "Message-based response routing with Selcuk networks", IEEE Trans. on Comput., vol C-23, nº12, Dic 1974.

- |26| D.H.Lawrie. "Acces and alignment of data in array processor", IEEE Trans. on Comput., vol C-24, pp 1145-1155, Dic 1975.

- |27| F.T.Leighton. "Circulants and the characterization of vertex-transitive graphs", J. of Research of the National Bureau of Standards, vol 88, nº6, Nov.Dic. 1983, pp 395-402.

- |28| M.T.Liu. "Distributed Loop Computer Networks", Advances in Computer, vol 17, Academic Press,(1978).

- |29| P.Morillo, M.A.Fiol y J.Fabrega. "The diameter of directed graphs associated to plane tessellations" Ars Combinatoria 20-A, (1985), pp 17-27.

- |30| P.Morillo, M.A.Fiol y J.L.A.Yebra. "A new family of graphs associated with plane tessellations", Ars Combinatoria 20-A, (1985),pp 163-171.

- |31| P.Morillo y M.A.Fiol. "El diámetro de ciertos digrafos circulantes de triple paso", sometido a Stochastica.

- |32| P.Morillo, F.Comellas y M.A.Fiol. "Diameter, mean distance and vulnerability of some graphs related to plane tessellations",sometido a Graphs and Combinatorics.

- |33| M.Newman. "Integral Matrices", Academic Press, New York and London, (1972).

- |34| C.S.Raghavendra, M.Gerla y A.Avizienis. "Reliable loop topologies for large local computer networks", IEEE Trans. on Comput., vol C-34, pp 46-55, En.1985.

- |35| C.S.Raghavendra y J.A.Silvester. " Double loop network architectures-A performance study", IEEE Trans. Commun., vol COM-33, pp 185-187, Feb 1985.

- [36] H.J.Siegel, R.J.McMillen y P.T. Mueller. "A survey of interconnection methods for reconfigurable parallel processing systems", Proc. Nat. Comput. Conf., vol 48, AFIPS 1979, pp 529-542.
- [37] H.S.Stone. "Mathematical Structures and Their Applications", Science Research Associates, (1973).
- [38] R.C.Swanson. "Interconnections for parallel memories to unscramble p-ordered vectors", IEEE Trans. on Comput., vol C-23, n^o11, Nov. 1974, pp 1105-1115.
- [39] J.Turner. "Point-symmetric graphs with a prime number of points", J. of Combinatorial Theory 3, (1967), pp 136-145.
- [40] M.E.Watkins. "A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs", J. Combinat. Theory, vol. 6, (1969), pp 152-164.
- [41] A.T.White. "Graphs, Groups and Surfaces", Mathematics Studies 8, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [42] J.Wolf, B.Weide y M.T.Liu. "Analysis and simulation of the distributed double loop computer network". Proc. Computer Networking Symp. NBS, Dic 1979, pp 82-98.
- [43] C.K.Wong y D.Coppersmith. "A combinatorial problem related to multimodule memory organizations". J. Assoc. Comput. Machin., vol 21, pp 392-402,(1974).

- [44] J.L.A.Yebra, M.A.Fiol, P.Morillo e I.Alegre. "The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations", *Ars Combinatoria*, 20-B, (1985), pp 159-171.



BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATÉ
Cordi Girona, 1 i 3 Campus Nord
Edifici B1
08034 BARCELONA