Capítulo 16

Errores

Resumen.

En este capítulo se analizan los errores no estadísticos cometidos en la interpretación de los registros de radar de subsuelo, tanto aleatorios como sistemáticos.

Las medidas realizadas se han separado en directas e indirectas. Las primeras, se utilizan para estimar la magnitud de una variable a partir de su comparación con un valor patrón. Las segundas son medidas sobre un parámetro que, a su vez, depende de una o más variables directas.

Errores aleatorios.

Para las variables directas, una estimación de este error es el de lectura o de resolución instrumental. En los parámetros indirectos es un error ocasionado por cada uno de los cometidos en las medidas directas de las variables implicadas, realizando la aproximación de que los errores son lo suficientemente pequeños para que se puedan asimilar a las derivadas parciales de la función. Se ha analizado este efecto en:

- *El tiempo de propagación. Generalmente es una variable directa, pero en ocasiones se obtiene indirectamente realizando lecturas sobre los radargramas impresos en papel. En este caso, las variables directas son la*

longitud del registro y del intervalo hasta la llegada de la reflexión (medidas en mm) y el rango.

· *La velocidad.*

- *Estimada a partir de medidas directas de distancias y tiempos.*

- *Calculada mediante registros hiperbólicos donde las medidas directas son los puntos (x,2t) de la hipérbola.*

· *La permitividad.*

- *Calculada a partir de la velocidad con y sin aproximación de pequeñas pérdidas.*

- *Estimada comparando la amplitud de la onda reflejada en el medio y en una superficie metálica (por coeficientes de reflexión). Las variables directas son estas amplitudes, medidas sobre el papel en mm o sobre la pantalla del ordenador en píxels.*

- *Obtenida mediante modelos físicos (o geotécnicos) del medio estudiado, donde las variables directas son las permitividades de cada uno de los elementos componentes, la porosidad, la saturación y el porcentaje de cada elemento de la matriz.*

· *El factor de pérdidas, calculado a partir de la conductividad, la permitividad dieléctrica relativa y la pulsación de la onda.*

· *El factor de atenuación.*

- *A partir de amplitudes.*

- *A partir de los parámetros electromagnéticos del medio y de la pulsación de la onda.*

· *Las amplitudes esperadas de la señal en cada punto de su trayectoria, considerando conocida la atenuación que se produce, para los casos de medios absorbentes y no absorbentes.*

Se han obtenido expresiones que permiten estimar este tipo de error y relaciones gráficas que muestran su dependencia con la frecuencia, la conductividad y permitividad del medio.

Errores sistemáticos.

Una de las causas de estos errores son las teorías o modelos aplicados incorrectamente al medio analizado. Se han analizado dos casos:

· *El cometido cuando se aplica la aproximación de pequeñas pérdidas sobre el modelo de la propagación de ondas, obteniendo una relación simplificada de fácil manejo para calcular la velocidad. Se ha analizado el resultado sobre dos parámetros: la velocidad y la profundidad.*

- *Para la velocidad, se han obtenido las relaciones que proporcionan el error absoluto y el error relativo de la velocidad estimada sin considerar la aproximación. En los dos casos son funciones que dependen de la permitividad, la conductividad y la frecuencia.*

- *Para la profundidad, se ha obtenido el error absoluto cometido que depende linealmente del tiempo de propagación y es una función de la permitividad, la conductividad y la frecuencia; también se ha obtenido el error relativo de la profundidad estimada sin realizar la aproximación de pequeñas pérdidas, que depende de las tres últimas variables.*

· *El error cometido cuando en el modelo que proporciona la velocidad de propagación se utilizan valores de la permitividad hallados en la literatura u obtenidos con ensayos sobre zonas concretas, ya sea porque el valor que se ha tomado difiere del que realmente presenta el medio (primer caso) o por no considerar las posibles variaciones laterales de la permitividad (segundo caso). En este caso se ha estudiado el error en:*

- *La velocidad, dependiendo de la conductividad, de la frecuencia, de la permitividad relativa y de la diferencia entre* e_r *utilizada y la que realmente presenta el medio. Se han obtenido expresiones gráficas para el error absoluto y para el error relativo.*

- *La profundidad, dependiendo de las mismas variables que la velocidad en el caso del error relativo y además del tiempo de propagación en el caso del error absoluto.*

16.1 Introducción

En estudios con radar de subsuelo es habitual estimar la velocidad partiendo de hipótesis que simplifican la complejidad de las ecuaciones. Con estas velocidades se obtiene la profundidad de los reflectores.

Casi todos los ensayos que se realizan están pensados para obtener como resultado final la velocidad de propagación en el medio o la permitividad relativa, dos parámetros que están relacionados entre sí, siendo sencillo calcular uno si se dispone del otro.

Conocer el error asociado a cada cálculo y el debido a las aproximaciones realizadas, permite dar un rango de validez a los resultados de la prospección. Los errores se pueden clasificar según características en errores sistemáticos, errores aleatorios y errores ilegítimos (Giamberardino, 197?). En el anexo 6 se explican brevemente los errores aleatorios asociados a una variable o a una función de varias variables estimada indirectamente a partir de las medidas experimentales de éstas.

En este capítulo se analizan los errores asociados a una única variable y se realiza una estimación de los errores cometidos al calcular una magnitud que depende de más de una variable, debidos a:

- Obtención indirecta de parámetros a partir de medidas experimentales que llevan un error instrumental asociado.

- Obtención de parámetros utilizando ecuaciones simplificadas al aplicar la aproximación de pequeñas pérdidas y otras hipótesis para facilitar los cálculos.

Dentro del primer apartado se obtiene el error analítico al estimar los siguientes parámetros:

1) **La velocidad:**
    a) A partir de distancias y tiempos de propagación conocidos.
    b) A partir de las hipérbolas generadas en objetos de pequeño tamaño.

2) **La permitividad:**
    a) A partir de la velocidad.
    b) A partir de la medida de la amplitud de la onda reflejada.
    c) A partir de modelos físicos de los medios.

3) **El factor de pérdidas**, conociendo la pulsación de la onda, la conductividad y la permitividad relativa del medio.

4) **El factor de atenuación** partiendo de las medidas de amplitud de la señal y la distancia.

5) **Las amplitudes** en cada punto, partiendo del factor de atenuación y de la expansión geométrica.

En el segundo apartado se analiza:

1) El error que se comete en la velocidad al utilizar la ecuación simplificada por pequeñas pérdidas (capítulo 4), en función de:
    a) La conductividad y la permitividad del material.
    b) La pulsación de la onda y la permitividad relativa.
    c) La permitividad relativa y su error.

2) El error cometido al estimar la profundidad cuando se utiliza la ecuación simplificada.

Para los parámetros medidos directamente, se ha considerado el error instrumental (tiempo y distancia). Para la frecuencia el error considerado es la semianchura del espectro, considerando las frecuencias de corte de la banda aquellas para las que la potencia es la mitad del pico máximo, tal como las define Duke (1990).

16.2. Parámetros calculados de forma directa.

Las variables obtenidas con medidas experimentales pueden separarse en estadísticas y no estadísticas. Dentro de las variables consideradas estadísticas, se diferencia entre aquellas para las cuales los errores estándar y cuadrático medio tienen un significado estadístico real (el número de medidas supera las 100) y las que se representan con estos errores como una definición convencional de los resultados experimentales aunque sin perder de vista que los errores han perdido su significado inicial (cuando el número de medidas se sitúa entre 10 y 100 (Giamberardino, 197?)). Cuanto mayor es el tamaño de una muestra, mejor es la estimación del error típico o estándar. Toda la bibliografía sobre el tema indica métodos para estimar el tamaño de la muestra (Box, Hunter y Hunter, 1988; Martinez, Maciá y Pérez, 1988).

En todos los ensayos hay una serie de parámetros que se obtienen a partir de medidas directas y que se utilizan para calcular los demás. Estos parámetros son las distancias, el tiempo, la amplitud, la frecuencia, la conductividad y la permeabilidad magnética. En este apartado se comentan los errores que se consideran asociados con cada una de estas variables:

- Espesores (separación entre la antena y el reflector):

  La distancia es una variable no estadística ya que en cada ensayo se determina una única vez. Se le asocia un error de ± 0.5 cm, incluyendo en éste los errores casuales y sistemáticos.

- Medidas de longitud sobre el radargrama en papel:

  En algunos ensayos, se determina el tiempo de propagación midiendo sobre el radargrama en papel la distancia al arribo de la reflexión. En este caso, el error asociado con la longitud medida (l) es el error de sensibilidad del aparato de medida, siendo $\Delta l = \pm 0.5$ mm.

- Amplitud medida sobre el radargrama en papel:

Se considera de $\Delta A = \pm 0.5$ mm.

- Tiempos de propagación determinados con el georradar:

  El error de sensibilidad del aparado en este caso es de 0.05 ns, tomando por ello el error asociado a esta medida como $\Delta t = \pm 0.05$ ns.

- Conductividad:

  Para este parámetro se considera un error del 5% de la medida obtenida.

- Permeabilidad relativa:

  En todo momento se ha considerado la aproximación de medios dieléctricos no magnéticos, μ_r=1. En el caso de medios magnéticos, el realizar esta aproximación ocasionaría un error sistemático. Considerando los valores tabulados de permeabilidad magnética (Carmichael, 1989) se puede considerar que este error puede ser de $\Delta\mu_r = \pm 0.1$.

- Frecuencia:

  Se le asocia un error de un 10% de la semianchura de banda, determinado a partir de observaciones de la frecuencia central en los espectros de amplitud.

16.3. Parámetros calculados de forma indirecta.

Gran parte de las magnitudes medidas en ensayos y trabajos de campo son funciones indirectas que se calculan a partir de las medidas experimentales de otras variables. Es el caso, por ejemplo, de la velocidad cuando se calcula a partir de las medidas de tiempo y espesor.

En todas estas magnitudes intervienen parámetros que llevan asociado un cierto error máximo o instrumental (si la variable no es estadística) o una desviación típica y un error cuadrático medio (si la variable es estadística). La explicación acerca del cálculo de errores de estas magnitudes se desarrolla en el anexo 6.

En el caso de tener alguna variable estadística, el error que se considera asociado a ésta es su desviación típica. El tratamiento general que se da a estos parámetros es no estadístico (ver anexo 6).

16.3.1. Tiempo de propagación.

El tiempo de propagación se calcula de forma indirecta cuando se obtiene midiendo la longitud de registro sobre papel desde la reflexión de interés hasta el punto de llegada de la reflexión. En este caso depende del rango del registro, R (ns), de la longitud total del registro, L (mm sobre el papel) y de la distancia entre el origen de tiempos y el punto de llegada de la reflexión, l (en mm sobre el papel). Suponiendo que en R y en L no se comete error de medida, el error asociado al tiempo es (ecuación A6.30):

$$\Delta \mathrm{t} = \frac{R}{L}\Delta l \qquad (16.1)$$

16.3.2. Velocidad.

La velocidad de propagación es un parámetro fundamental para interpretar registros de radar de subsuelo al permitir convertir los tiempos dobles de propagación en distancias. Se puede obtener de diferentes maneras:

- Partiendo de espesores y tiempos conocidos.
- Utilizando las hipérbolas generadas en elementos de tamaño pequeño debido al efecto del haz de emisión de la antena.

En este apartado se analizan los errores aleatorios cometidos al obtener la velocidad a partir de medidas experimentales para cada uno de los dos métodos comentados.

A partir de tiempos dobles y espesores conocidos.

La velocidad se obtiene a partir de la ecuación 7.1. Para estimar el error cometido al calcular la velocidad (Δv), se analiza el error experimental de apreciación asociado a las medidas de tiempo doble (Δt) y distancia (Δx). Con la ecuación A6.30 se obtiene una expresión para el error buscado:

$$\Delta v = \pm \frac{2}{t}\left\{\Delta x + \frac{x}{t}\Delta t\right\} \qquad (16.2)$$

A partir de hipérbolas.

La velocidad de propagación de la onda se calcula con las reflexiones hipérbolicas generadas en objetos de pequeño tamaño (ecuación 11.12). Excepto la velocidad, todos los demás parámetros que aparecen en la expresión se miden sobre el radargrama.

El error en la velocidad (Δv) calculada de esta manera depende del error cometido en: la posición de la antena (Δx), los tiempos dobles de propagación (ΔT) y el tiempo doble de propagación cuando la antena está situada en la vertical del objeto anómalo (ΔT_0). Este punto se identifica en los registros porque se trata del máximo de la hipérbola. La expresión para el error en la velocidad, en función de estos parámetros es:

$$\Delta v = \frac{2}{\sqrt{T^2 - T_0^2}}\left\{\Delta x + \frac{2x}{T^2 - T_0^2}\left(T\,\Delta T + T_0\,\Delta T_0\right)\right\} \qquad (16.3)$$

Siendo T el tiempo doble de propagación y T_0 el tiempo doble de propagación desde la vertical del objeto.

Ejemplo.

En el capítulo 11 se ha utiliza este método para determinar la velocidad de propagación en el subsuelo bajo la catedral de Valencia. Se ha trabaja con dos radargramas que presentan estas hipérbolas. Una de ellas se ha producido por la reflexión en una tumba desconocida, sita bajo el pavimento de la catedral (Figura 11.17). Los parámetros obtenidos han sido v=7.2 cm/ns y T_0=32.6 ns. El número de puntos de muestreo de n = 10 es pequeño, lo que hace aconsejable analizar el error no estadístico de esta velocidad.

La distancia sobre la superficie (x) va desde x=0 cm cuando la antena se sitúa sobre la vertical de la tumba a x = 130.0 ± 0.5 cm cuando la antena se sitúa en el punto más extrema en la que se registra la tumba.

El error en la determinación del tiempo sobre el papel es de $\Delta t = \pm 0.1$ ns (ecuación 16.1). El tiempo de propagación es de 32.6 ± 0.1 ns para t_0 y de 49.0±0.1 ns para el punto más alejado considerado (x=130 m).

Con estos valores la expresión 16.3 proporciona un error de ±0.1 cm/ns, lo que quiere decir que la velocidad calculada es v=7.2 ± 0.1 cm/ns.

16.3.3. Permitividad.

La permitividad de un medio es otro parámetro fundamental en la interpretación de los datos de radar. Se puede obtener de diversas formas:

- Utilizando la velocidad y considerando la aproximación de pequeñas pérdidas (P<<1)(capítulo 4).
- A partir de la velocidad sin realizar la aproximación de pequeñas pérdidas.
- Analizando la amplitud de las reflexiones.
- Con modelos geotécnicos de los medios.

A partir de la velocidad con P<<1.

La ecuación 4.4 permite estimar ε_r partiendo de la velocidad (v) utilizando la aproximación de pequeñas pérdidas, para un medio no magnético. En este caso la permitividad depende de la velocidad de la onda en el vacío (c=30 cm/ns) y de la velocidad (v). El error no estadístico asociado con la permitividad ($\Delta\varepsilon_r$) se expresa por (ecuación A6.30):

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{2c^2}{v^3}\ \Delta v \qquad (16.4)$$

Utilizando la expresión del error de la velocidad (ecuación 16.2) la expresión 16.4 se puede escribir en función de las variables medidas experimentalmente: el tiempo y la distancia. Queda:

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{c^2}{2x^3}T^2\left\{\Delta x + \frac{x}{T}\Delta T\right\} \qquad (16.5)$$

Ejemplo.

En el caso 2 del capítulo 10 se analiza la permitividad efectiva de un suelo agrícola, resultando ser de ε_r=12. Las variables experimentales son:

- Espesor del material: x = 37.0 ± 0.5 cm.
- Tiempo doble de propagación: T = 8.5 ± 0.1 ns.
- Velocidad de propagación v = 8.7 ± 0.2 cm/ns (ecuación 16.2).

Con ellas se obtiene $\Delta\varepsilon_r$ = ± 0.7. El resultado final es, pues: ε_r = 12.0±0.7.

En este caso se ha estimado el error aleatorio. El error sistemático que proviene de la simplificación utilizada se analiza más adelante.

A partir de la velocidad sin considerar pequeñas pérdidas.

Con medios de conductividad alta no es correcto utilizar la ecuación 4.4. El el caso más general, la expresión 10.19 relaciona la permitividad relativa efectiva

(ε_r) con la permeabilidad magnética relativa del medio (μ_r), la velocidad de propagación (v), la conductividad del material (σ) y la pulsación del campo electromagnético (ω).

El error experimental cometido en la determinación de la permitividad efectiva relativa, con la ecuación 10.19, tiene la siguiente expresión:

$$\Delta\varepsilon_r = \pm\left(\frac{c}{\mu_r v}\right)^2\left\{\Delta\mu_r + \frac{2\mu_r}{v}\Delta v\right\} + \left(\frac{\sigma v}{2c\omega\varepsilon_0}\right)^2\left\{\frac{\Delta\mu_r}{2} + \frac{\Delta v}{v} + \frac{\mu_r\Delta\sigma}{\sigma} + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right\} \quad (16.6)$$

Ejemplo:

Se analiza el caso anterior. La antena utilizada es la de 900 MHz (3101 de GSSI). El espectro de amplitud tiene un ancho de banda de 900 MHz para un espesor de material de 37 cm (tabla 10.16). La conductividad es de 25 mS/m. Con estas variables y sus errores asociados se obtiene que $\Delta e_r = \pm 2$, siendo por ello el valor experimental de la constante dieléctrica de ε_r=12±2.

<u>A partir de la amplitud de las reflexiones.</u>

La ecuación 11.7 relaciona ε_r con las amplitudes de las reflexiones, medidas sobre las trazas en papel. Los registros se obtienen con la misma antena y utilizando los mismos parámetros de adquisición en todos los casos.

Este método induce un error importante en el parámetro ε_r porque, al estar las amplitudes elevadas al cuadrado, un pequeño error en su determinación origina una importante variación de la permitividad.

La expresión del error $\Delta\varepsilon_r$ resulta:

$$\Delta\varepsilon_r = 4\frac{A_M^2 + A_m^2}{\left(A_M^2 - A_m^2\right)^2}\left\{A_M\Delta A_M\left[1 - \frac{A_M^2 + A_m^2}{A_M^2 - A_m^2}\right] + A_m\Delta A_m\left[1 + \frac{A_M^2 + A_m^2}{A_M^2 - A_m^2}\right]\right\} (16.7)$$

Siendo A_M la amplitud debida a la reflexión en el metal (capítulo 11) y A_m la debida a la reflexión en el medio que se quiere caracterizar.

Ejemplo.

En el ejemplo mostrado en el capítulo 11 para el estudio de un suelo húmedo, tomando las amplitudes que resultan cuando la distancia antena - reflector es de 30 cm:

- Para la reflexión en la superficie del suelo: $A_m = 14 \pm 0.5$ mm.
- Para la reflexión en la superficie metálica: $A_M = 19 \pm 0.5$ mm.

El error que proporciona la ecuación 16.7 es de $\Delta\varepsilon_r = \pm 0.7$. El resultado experimental de la permitividad calculada es de $\varepsilon_r = 11.0 \pm 0.7$.

<u>A partir de modelos geotécnicos y físicos de medios.</u>

En el capítulo 6 se han presentado diferentes modelos utilizados para representar los medios en los que se trabaja. Estos modelos dependen, principalmente, de la porosidad, de la saturación y de los materiales de la matriz que, a menudo, se pueden clasificar a partir de su granulometría. En el capítulo 11 se ha comprobado que, utilizando estos modelos, si se conocen los parámetros geotécnicos mencionados, se puede obtener una estimación indirecta de la permitividad relativa del medio.

Se analiza a continuación el error cometido utilizando un modelo CRIM (capítulo 6) para cuatro componentes: arena, arcilla, agua y aire (ecuación 6.3), considerando que las variables utilizadas se han obtenido a partir de medidas experimentales directas (figura 11.2).

La permitividad relativa depende en este caso de:

- La porosidad del medio.
- La saturación.
- El porcentaje de arcilla.
- Las permitividades relativas del aire, agua, arena y arcilla.

Como se desconoce en este caso el error aleatorio asociado a cada una de estas variables, se toma como un 10% del su valor.

En este caso, el error asociado con la permitividad relativa se expresa por (ver el capítulo 6 para la descripción de las variables):

$$\Delta\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon_m}\ (\ 2\left\{(1-S_a)\sqrt{\varepsilon_0} + S_a\sqrt{\varepsilon_a} - P_a\sqrt{\varepsilon_{arc}} - (1-P_a)\sqrt{\varepsilon_{are}}\right\}(\Delta\phi) +$$
$$+ 2\phi(\sqrt{\varepsilon_a} - \sqrt{\varepsilon_0})(\Delta S_a) + \phi(1-S_a)\varepsilon_0^{-3/2}(\Delta\varepsilon_0) + \phi S_a\varepsilon_a^{-3/2}(\Delta\varepsilon_a) +$$
$$+ (1-\phi)P_a\varepsilon_{arc}^{-3/2}(\Delta\varepsilon_{arc}) + (1-\phi)(1-P_a)\varepsilon_{are}^{-3/2}(\Delta\varepsilon_{are})\ ) \tag{16.8}$$

Ejemplo.

Con la expresión 16.8 y los valores de las variables que se muestran en el apartado 11.3 el error que se obtiene para la permitividad de la muestra E3 (tabla 11.1) es de $\Delta\varepsilon_r = \pm 7$. La permitividad relativa experimental tiene que expresarse, en este caso como: $\varepsilon_r = 25 \pm 7$.

16.3.4. Factor de pérdidas.

El factor de pérdidas (ecuación 4.8) es un parámetro calculado reiteradamente durante los análisis con radar de subsuelo, porque permite determinar si, para la frecuencia utilizada, el medio puede considerarse dieléctrico.

Depende de la conductividad, de la permitividad efectiva del medio y de la pulsación del campo electromagnético. El error que se comete al estimar este parámetro de forma indirecta tiene la siguiente expresión:

$$\Delta P = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma} + \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right) \tag{16.9}$$

Ejemplo.

Se analiza el error cometido al estimar P en el caso 2 del capítulo 10, para diferentes valores de la frecuencia (entre 10 y 1000 MHz) y un mismo medio. El resultado se muestra en la gráfica de la figura 16.1. Se observa que el error en el

factor de pérdidas disminuye al aumentar la frecuencia. Para valores mas altos de la frecuencia se obtienen valores más pequeños del factor de pérdidas.

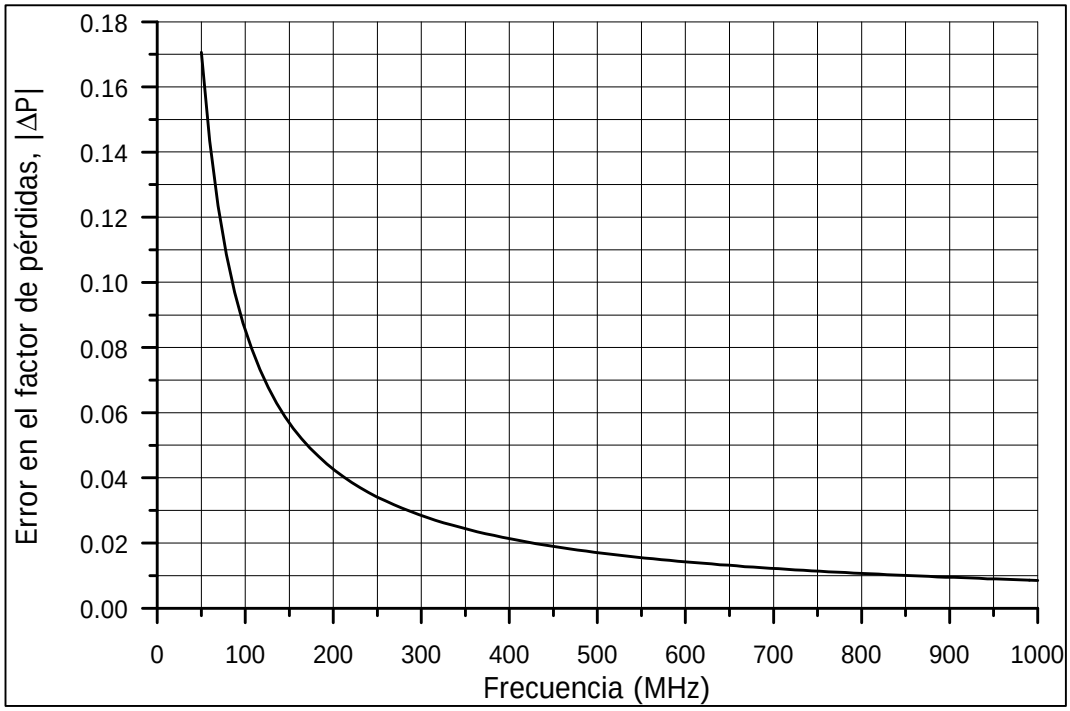

Figura 16.1. Error en el factor de pérdidas en función de la frecuencia. La conductividad es de 25 mS/m y la permitividad relativa de 12.

Como ejemplo numérico, en el caso 2 del capítulo 10, para la antena de 900 MHz se había calculado un factor de pérdidas de P = 0.067 para una frecuencia de 550 MHz. Con la gráfica de la figura 16.1, calculada para este medio, se obtiene que para la frecuencia de 550 MHz el error en el factor de pérdidas es de $\Delta P = \pm 0.014$. Esto quiere decir que el factor de pérdidas calculado de forma indirecta se tiene que presentar como $P = 0.07 \pm 0.014$. Se trata de un error importante.

Para esta misma antena y el mismo medio, con una frecuencia central de 900 MHz, el factor de pérdidas es de P=0.041. El error que, para esta frecuencia, nos indica la gráfica de la figura 16.1 es de $\Delta P = \pm 0.0095$, quedando el factor de pérdidas como: $P = 0.041 \pm 0.0095$.

16.3.5. Factor de atenuación.

A partir de las amplitudes.

El factor de atenuación se calcula en los ensayos de laboratorio a partir de las amplitudes relativas[1] medidas a diferentes distancias, utilizando la ecuación 10.10. Despejando de esta expresión se obtiene el valor de α:

$$\alpha = -r^{-1} \ln\left(r \frac{A_r}{A_{0r}} \right) \tag{16.10}$$

Donde r es la trayectoria de la onda que equivale a dos veces la separación entre la antena y la superficie reflectora, A_r es la amplitud relativa de la onda reflejada y A_{0r} la amplitud relativa de la onda inicial, una constante que se obtiene a partir de la regresión por mínimos cuadrados y que es inversamente proporcional a la amplitud de la onda directa.

Para calcular el error asociado al coeficiente de atenuación se calculan las derivadas parciales de la expresión 16.10 respecto a las variables experimentales (ecuación A6.30).

Las amplitudes relativas de la reflexión e inicial son parámetros obtenidos indirectamente a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{A}{A_d} \\ A_{0r} &= \frac{A_0}{A_d} \end{aligned} \tag{16.11}$$

Siendo A_0 una constante relacionada con la amplitud inicial y A y A_d las amplitudes de la reflexión y de la onda directa respectivamente, medidas experimentalmente. El error no estadístico asociado con A_r y con A_{0r} de la ecuación 16.11 es:

[1]Las amplitudes relativas son adimensionales y se obtienen dividiendo la amplitud de cada reflexión por la de la onda directa (se desconoce la amplitud de la onda inicial).

$$\Delta A_r = \frac{1}{A_d}\left\{\Delta A + \frac{A}{A_d}\,\Delta A_d\right\} = \frac{1}{A_d}\left\{\Delta A + A_r\,\Delta A_d\right\}$$
$$\Delta A_{0r} = \frac{A_0}{A_d^2}\Delta A_d \qquad (16.12)$$

La expresión para estimar el error máximo no estadístico del factor de atenuación resulta:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{r^2}\left|\ln\left(r\frac{A_r}{A_{0r}}\right)-1\right|\Delta r + \frac{1}{r\,A}\,\Delta A + \frac{2}{r\,A_d}\,\Delta A_d \qquad (16.13)$$

Ejemplo.

Como ejemplo se analiza el error no estadístico para el factor de atenuación obtenido con la antena de 1 GHz en el caso 2 del capítulo 10.

El medio es un suelo caracterizado por γ_n=1.60±0.07 gr/cm^3, S_a=0.36±0.04 y n=0.46±0.024. El factor de atenuación obtenido mediante regresión es de α=1.93 m^{-1} (tabla 10.16). La desviación típica obtenida en la regresión es de σ=±0.13 m^{-1} y el número de muestras utilizado es de m=5. Como es un valor inferior a 10, el error estándar estimado no es representativo y hay que calcular el error máximo no estadístico para cada dato.

El factor de atenuación estimado es de α = 1.93 m^{-1} para la antena 1 GHz (tabla 10.16). La amplitud medida para la reflexión a una separación de 0.14 m (distancia de propagación de 0.28 m) es de 46 mm, la de la onda directa es de 68 mm y el valor obtenido para la constante A_0 es de 0.343 (tabla 10.16).

Con la ecuación 16.13 se obtiene $\Delta\alpha$ = ± 0.1 m^{-1}. El factor de atenuación experimental se representa como α = 1.9 ± 0.1 m^{-1}. Se trata de un error del mismo orden de magnitud que el error estándar obtenido a partir de la regresión de las cinco medidas. Este error se puede calcular para cada una de las distancias, obteniendo valores distintos en cada caso. En la gráfica 16.2 se presentan estos errores sobre la atenuación.

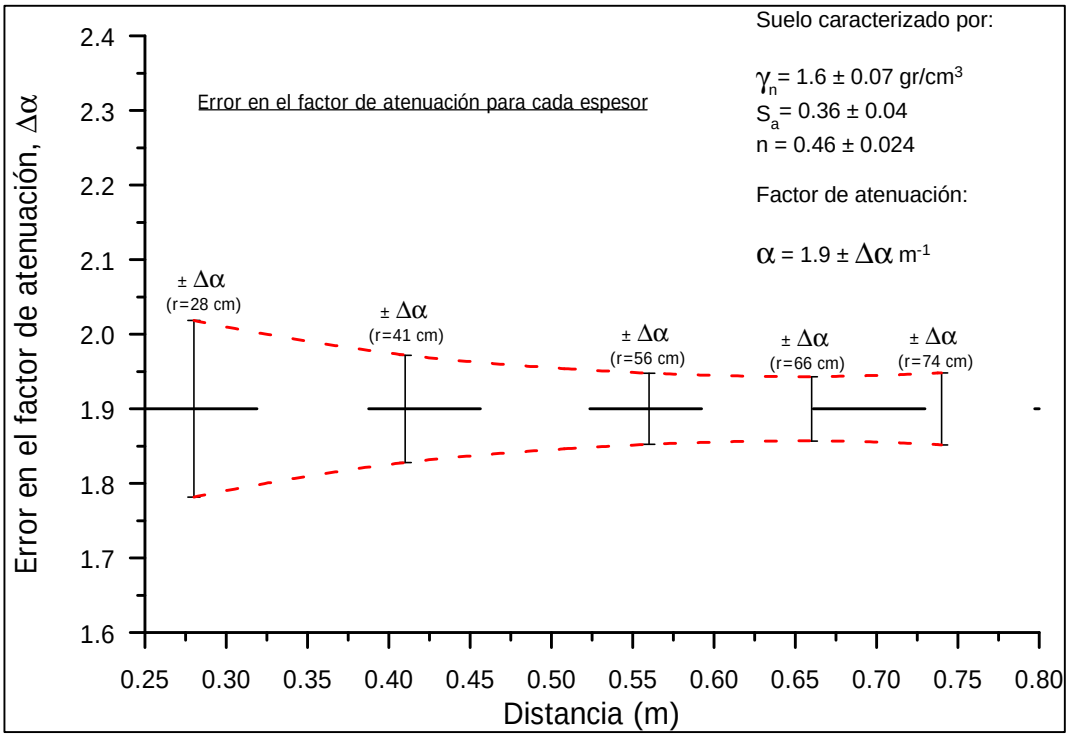

Figura 16.2. Errores estimados para el factor de atenuación a cada distancia.

A partir de la ecuación de a.

También se puede calcular α conociendo las características del medio y las frecuencias de la señal. En este caso, se considera que el factor de atenuación depende de la pulsación del campo electromagnético y de dos parámetros del medio: la conductividad y la permitividad relativa. No se considera dependencia de α con la permeabilidad magnética, lo que quiere decir que se desprecian las pérdidas magnéticas (un análisis sobre el significado de las pérdidas magnéticas puede encontrarse, por ejemplo, en Olhoeft y Capron, 1994).

El error en α se determina a partir de las ecuaciones 4.9 y A6.30.

Ejemplo.

Se calcula el error sobre el factor de atenuación obtenido para el agua (capítulo 9) utilizando la caracterización electromagnética del medio. El valor de este factor es de $\alpha = 8.5\ m^{-1}$. Las variables experimentales son:

- La conductividad del agua: $\sigma = 400 \pm 20$ mS/m.
- La pulsación de la radiación empleada: f = 450 ± 45 MHz.
- La permitividad efectiva relativa del agua: $\varepsilon_r = 79 \pm 8$.

Con estos valores se obtiene la siguiente expresión para $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = 3 \cdot 10^{-11}\ \Delta\omega + 5.264 \cdot 10^{-2}\ \Delta\varepsilon_r + 20.925\ \Delta\sigma \qquad (16.14)$$

El factor de atenuación resultante es, en este caso, de $\alpha = 8.5 \pm 0.8\ m^{-1}$.

16.3.6. Amplitud de la onda a partir de la atenuación estimada.

Medio absorbente.

En ocasiones, conocida la función de atenuación de la onda, interesa predecir la amplitud en un determinado punto de la trayectoria. En muchos casos, esta función se puede aproximar por el efecto de la expansión geométrica y la absorción del medio. La amplitud en este caso viene dada con la ecuación 10.10.

Las variables que pueden introducir errores en la predicción de la amplitud a una distancia determinada son: la distancia del frente de ondas a la antena, el factor de atenuación (α) y el factor de expansión geométrica (d). Este último factor se puede considerar igual a la unidad para ondas internas.

La expresión para el error ΔA es:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \pm A\left\{\left(r^{-1}d + \alpha\right)\Delta r + r\ \Delta\alpha + \ln r\ \Delta d\right\} = \\ &= \pm r^{-d}\ e^{-\alpha r}\left\{\left(r^{-1}d + \alpha\right)\Delta r + r\ \Delta\alpha + \ln r\ \Delta d\right\} \end{aligned} \qquad (16.15)$$

Ejemplo.

Para la atenuación de la amplitud durante la propagación en agua, con la expresión 16.15 y utilizando las variables del apartado anterior se llega a:

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm\left\{\left(r^{-1} + 8.5\right)0.5 + 0.84\,r + 0.1\ln r\right\} \qquad (16.16)$$

Que proporciona el error relativo al valor de la amplitud como una función de la distancia para un factor de atenuación de α = 8.5 ± 0.8 m^{-1}. En la figura 16.3 se presenta la gráfica que representa esta dependencia del error relativo de la amplitud con la distancia.

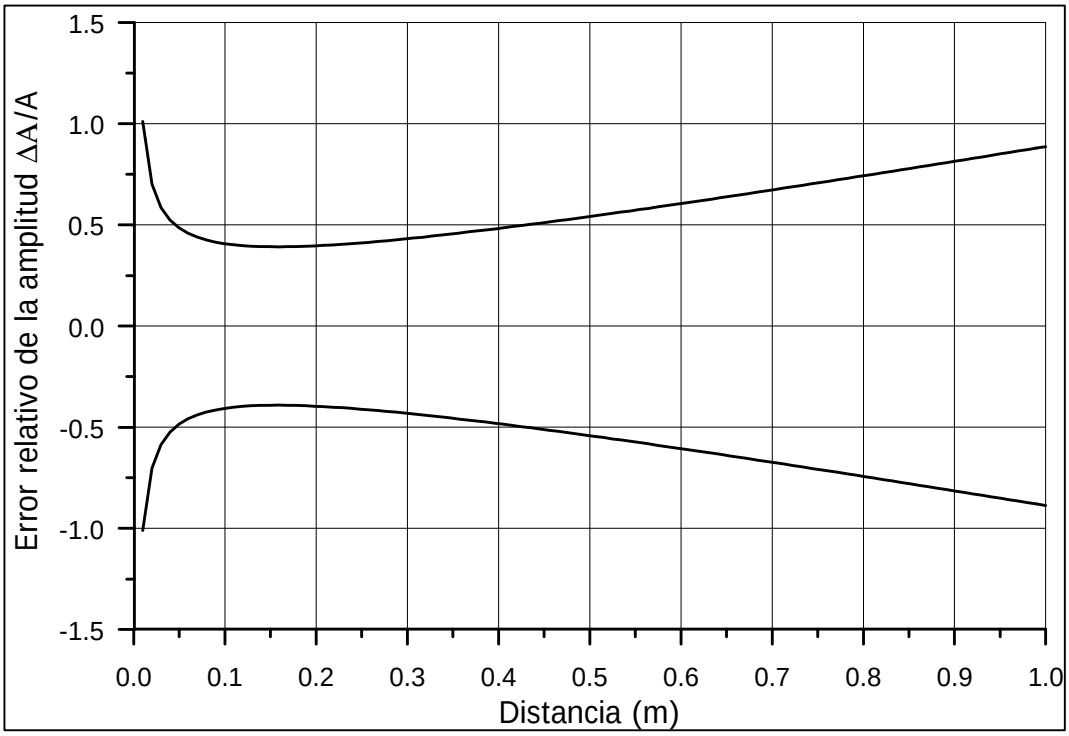

Figura 16.3. Error en la amplitud relativa (dividida por la amplitud de la onda directa) frente a la distancia recorrida por la radiación.

<u>Medio no absorbente.</u>

Cuando los medios son no absorbentes, la atenuación de la amplitud se produce sólo por expansión geométrica. Este es el caso de los ensayos realizados en aire (capítulo 8). En este caso se trabaja con la ecuación 8.4. La amplitud depende de *d* (factor de atenuación geométrica) y de r (distancia). El error asociado a la ecuación 8.4 es:

$$\Delta A = \pm r^{-d}\left\{r^{-1}\, d\,\Delta x + \ln r\;\Delta d\right\} \qquad (16.17)$$

Ejemplo.

En los ensayos con la antena de 900 Mhz (3101 de GSSI) se ha obtenido un valor cercano a la unidad para *d*. En la figura 16.4 se representa el error asociado a cada amplitud a partir de la ecuación 16.17 junto con las amplitudes experimentales medidas.

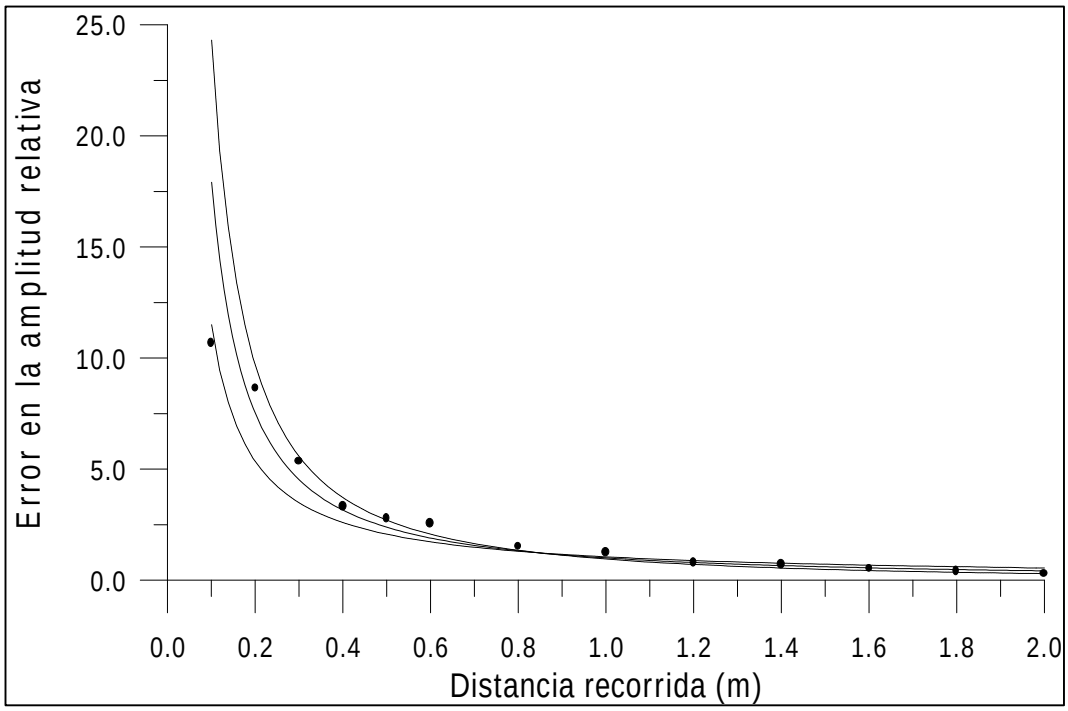

Figura 16.4. Datos experimentales para el aire (con la antena 3101 de GSSI). La línea continua representa la regresión de estos valores, y las líneas discontinuas la banda de errores esperada para cada distancia. Los puntos son las amplitudes medidas experimentalmente.

16.4. Errores sistemáticos. Modelos simplificados.

Dentro de los errores sistemáticos se analizan los efectos que produce la utilización de modelos de propagación simplificados sobre la velocidad y la profundidad.

En este apartado se estima la validez de estas aproximaciones, analizando el error introducido en función de las características de la antena, del medio, y de los errores aleatorios asociados al análisis.

También se consideran los errores que se comenten al calcular la profundidad y la velocidad a partir de las permitividades.

16.4.1. Error en la velocidad al utilizar la fórmula simplificada.

Para transformar los tiempos dobles de propagación en profundidades, se suele considerar que como el medio es un dieléctrico de bajas pérdidas, se puede utilizar la velocidad definida en la ecuación 4.4, calculada con un valor de la permitividad relativa representativo del medio (generalmente extraído de la literatura para materiales similares a los del caso estudiado). En algún caso se realizan ensayos para obtener este parámetro o, directamente, la velocidad.

Al utilizar la ecuación 4.4 se están asumiendo dos supuestos importantes:

- El medio es perfectamente dieléctrico, por lo tanto $\sigma = 0$.
- Las pérdidas magnéticas son nulas (μ_r=1).

La segunda hipótesis es cierta en un gran número de casos, pero no ocurre lo mismo con la primera, que depende de las características del medio y de la frecuencia utilizada.

Para analizar el error cometido al aplicar esta primera hipótesis se compara la velocidad aparente (v_A) calculada con la ecuación 4.4 con la velocidad (v)

obtenida a partir de la ecuación 3.25. El error relativo en la velocidad, Err(v) se obtiene como el cociente entre las dos velocidades (Fruhwirth y Schmöller, 1996):

$$\mathrm{Err(v)} = \frac{v_A}{v} \tag{16.18}$$

Introduciendo las expresiones 4.4 y 3.25 en la ecuación 16.18, se llega a la siguiente expresión para este error sistemático:

$$\mathrm{Err(v)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2\right)^{1/2}+1\right]} \tag{16.19}$$

El porcentaje de error cometido en la velocidad aparente, relativo a la velocidad v es:

$$\mathrm{Err(v)\%} = \left(1-\frac{v_A}{v}\right)\cdot 100 \tag{16.20}$$

Las ecuaciones 16.19 y 16.20 dependen de la pulsación de la onda, de la conductividad del medio y de la permitividad.

<u>Error sistemático con la conductividad.</u>

La figura 16.5 es una gráfica que muestra la variación de Err(v) con la permitividad del medio para diferentes valores de la conductividad. Se ha calculado con la ecuación 16.19 para una frecuencia constante de 500 MHz.

Se observa que el error es mayor para valores de la permitividad relativa más próximos a la unidad y para conductividades altas.

Con la ecuación 16.20 se obtiene el porcentaje de error relativo a la velocidad v sin aproximación de pequeñas pérdidas (figura 16.6). Esto proporciona una medida de la desviación sobre cada valor de la velocidad debido a la aproximación de pequeñas pérdidas.

Las gráficas de las figuras 16.5 y 16.6 indican lo que se desvia v_A d v. Por ejemplo, en un medio con permitividad relativa de 1, si la conductividad es de 10 mS/m, la diferencia entre v_A y v es del 12%. Para la misma conductividad y una permitividad de 2 esta diferencia es del 3.6%. Pasa a ser del 1.7% para una permitividad de 3. Si ε_r =9, la diferencia es aproximadamente del 0.16% y para ε_r=15 del 0.071%. En general el error disminuye rápidamente al aumentar la permitividad del medio y por lo tanto es menor para velocidades de propagación más bajas.

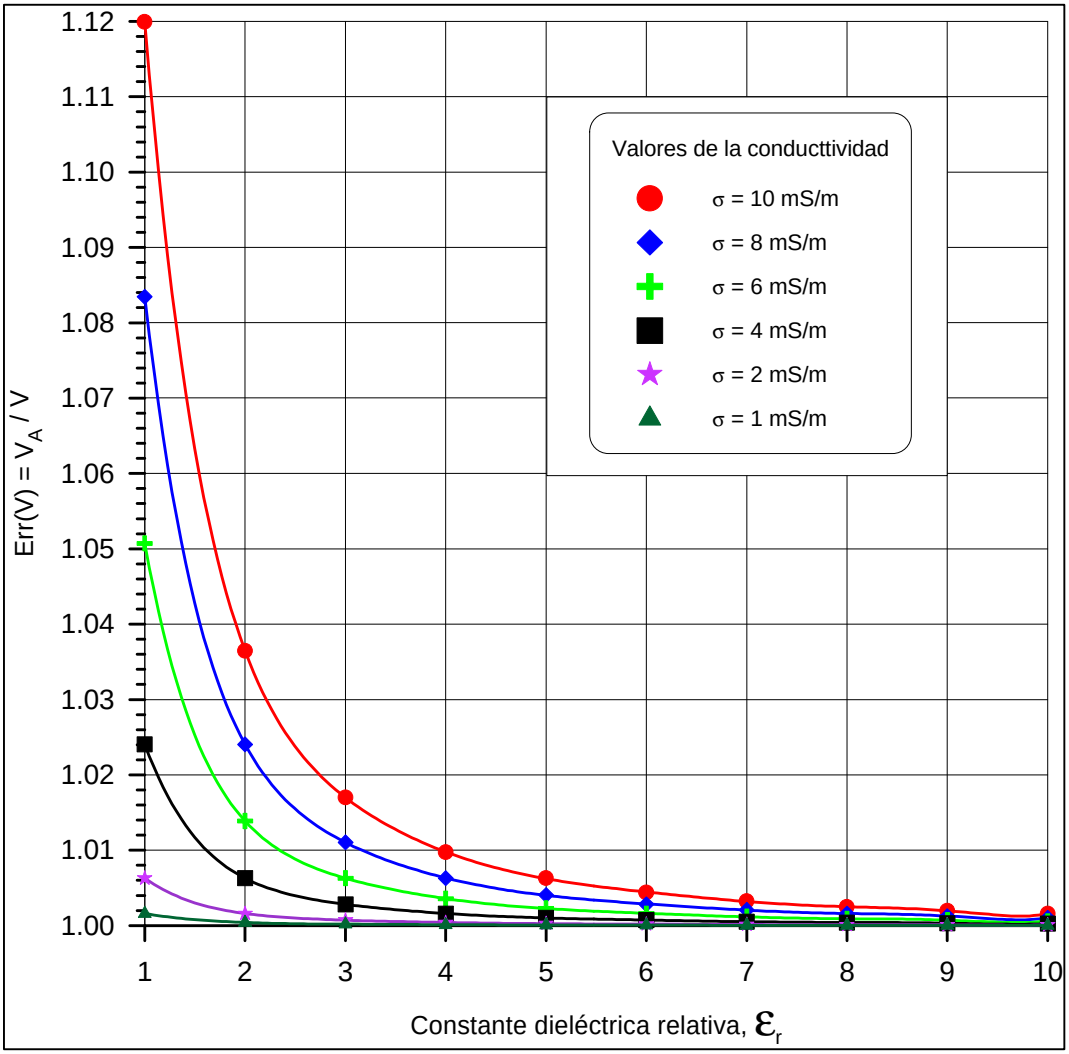

Figura 16.5. Error sistemático en la velocidad con la permitividad relativa del medio, para diferentes valores de la conductividad y una frecuencia constante de 500 MHz y una permeabilidad magnética de m_r=1.

También se aprecia que, para un valor más elevado de la conductividad esta diferencia es mayor. Por ejemplo, en el caso de una ε_r=1 es del 12% si la conductividad es de 10 mS/m, pero pasa a ser de 8.3% si σ=8 mS/m, de 5.1% si σ=6 mS/m y de 0.16% si σ=1mS/m.

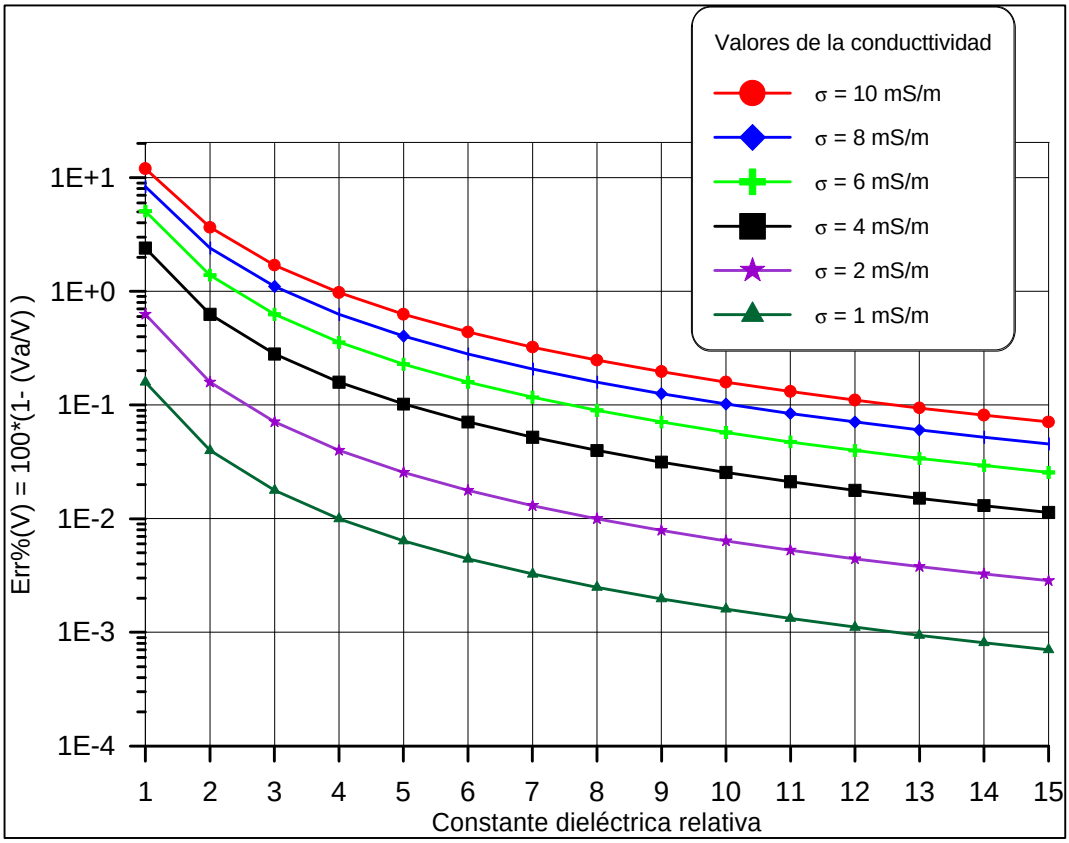

Figura 16.6. Diferencia porcentual entre v_A y v (ecuación 16.20). Dependencia con la permitividad relativa del medio, para diferentes valores de la conductividad. La frecuencia considerada es de 500 Mhz y la permeabilidad magnética, la unidad.

Los resultados muestran que la aplicación de la aproximación considerada es más delicada cuando la conductividad del medio es alta, sobre todo si además el medio presenta velocidades elevadas. Se observa que por encima de ε_r=5 y por debajo de σ=10 mS/m la diferencia analizada es inapreciable para las medidas que se efectúan.

Error sistemático con la frecuencia.

Para analizar el efecto de la frecuencia en el error sistemático se representan para una conductividad constante las ecuaciones 16.18 y 16.19, variando en cada caso

la frecuencia. En la figura 16.7, las gráficas mostradas se han calculado para σ=6mS/m. En los dos casos, el error es mayor para las frecuencias más bajas. Por encima de los 100 MHz el error es prácticamente despreciable, sobre todo en el caso de medios con permitividades relativas por encima de 4. Para la resolución de este método, en estos casos, el valor de v se puede considerar igual al de v_A (gráfica 16.7.b).

Estos resultados indican que con antenas de baja frecuencia es necesario analizar cuidadosamente el medio porque la aproximación por pequeñas pérdidas puede introducir un error relativamente importante. Para las frecuencias utilizadas en la mayor parte de los casos prácticos presentados en esta tesis, el error es prácticamente despreciable, sobre todo teniendo en cuenta que usualmente se trabaja en medios de permitividad relativa por encima de 4 o de 5, siendo habituales materiales con permitividades por encima de 12 y llegando incluso a valores de 15 y 16.

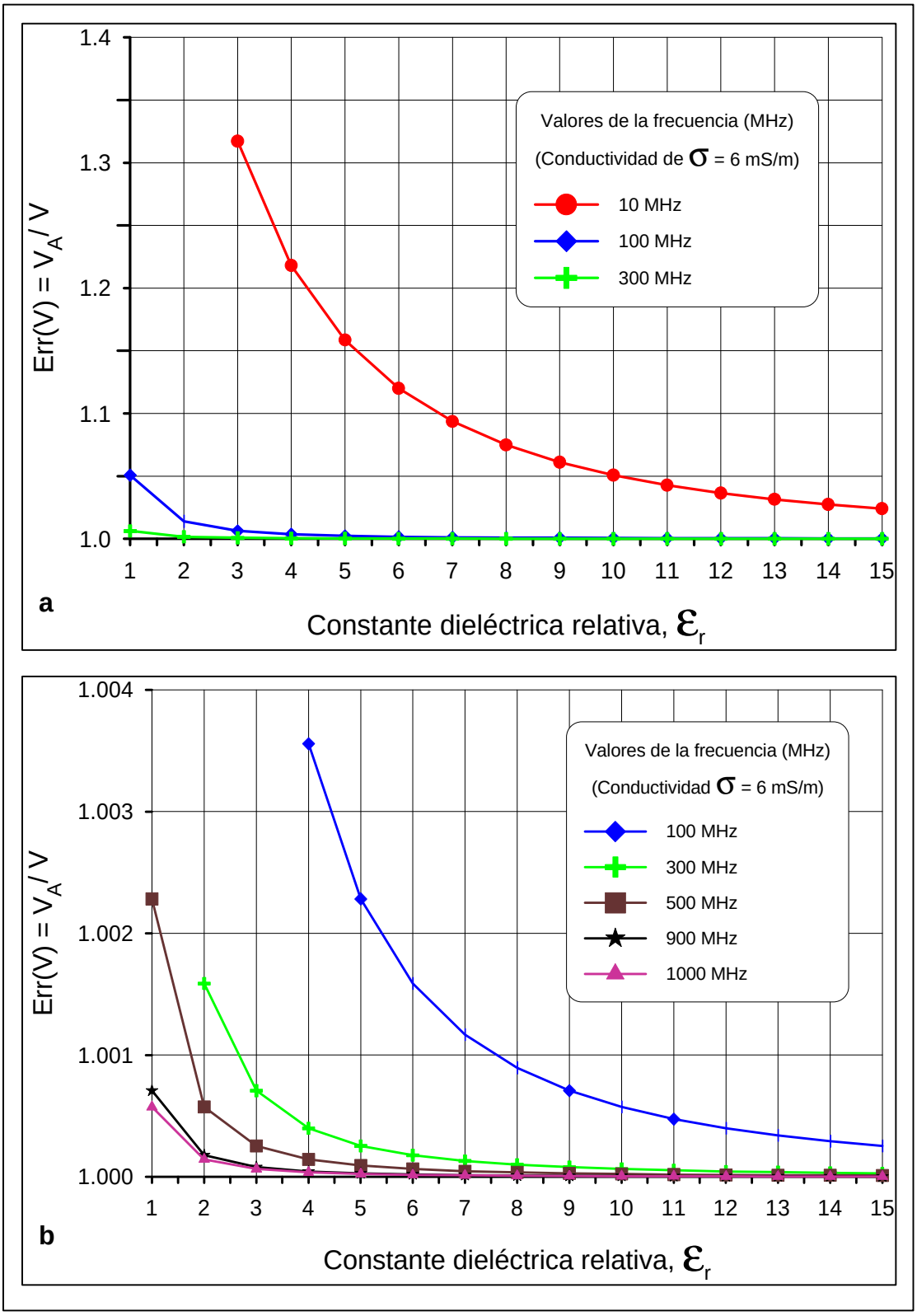

Figura 16.7. Relación de la diferencia entre v_A y v con la permitividad (ecuaciones 16.18 y 16.19) para diferentes frecuencias, dada una conductividad de 6 mS/m. a) Comparación una frecuencia baja (10 MHz) y dos frecuencias medias (100 y 300 MHz). b) Comparación de tres frecuencias medias con dos altas para GPR (900 y 1000 GHz).

16.4.2. Error sistemático en la profundidad.

La distancia a la superficie reflectora se calcula con los tiempos dobles de propagación y la velocidad estimada. Por ello, el error sistemático asociado con la velocidad también afecta la profundidad en toda interpretación.

Se analiza el efecto que tiene la velocidad en los espesores estimados, despreciando los errores asociados al tiempo y considerando que:

$$\mathrm{Err}(x) = t \cdot \mathrm{Err}(v) \tag{16.21}$$

Con la ecuación 16.19 queda:

$$\mathrm{Err}(x) = t\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2\right)^{1/2}+1\right]} = t \cdot a \tag{16.22}$$

Para valores fijos de los parámetros del medio y de la frecuencia, la ecuación 16.22 es una recta que depende del tiempo, de pendiente el error calculado para la velocidad (ecuación 16.22).

16.4.3. Variación de la velocidad y profundidad con la diferencia entre la permitividad del medio y la utilizada.

Para obtener velocidades y profundidades se puede proceder de dos formas:

- Realizando ensayos directos. Los errores casuales asociados con estos ensayos se han tratado al inicio de este capítulo. Como el valor obtenido de este modo se suele extrapolar a todo el medio analizado, si existen cambios laterales de velocidad, se comete un error sistemático asociado a un parámetro inexacto.

- Utilizando valores de la literatura para ε_r. Estos valores pueden diferir de los que presenta el medio estudiado, de manera que al calcular las

velocidades y profundidades se comete un error sistemático debido a la diferencia entre la permitividad real y la utilizada, $Err(\varepsilon_r)$.

A continuación, se analiza el error relativo para cada valor de la velocidad en función de la permitividad, para diferentes valores de $Err(\varepsilon_r)$, que se puede expresar como:

$$Err(v) = \frac{c\varepsilon_r^{-3/2}}{2} Err(\varepsilon_r) \tag{16.23}$$

Para la profundidad se considera la expresión:

$$Err(h) = \frac{t\,c}{2\sqrt{\varepsilon_r^3}} Err(\varepsilon_r) \tag{16.24}$$

Donde h es la profundidad y t el tiempo de propagación.

No se ha considerado error aleatorio cometido en la medida del tiempo de propagación. Se observa que el error en la profundidad es lineal respecto al error cometido al obtener la permitividad.

Las ecuaciones 16.23 y 16.24 dependen del valor utilizado para la permitividad y del error cometido en la misma, calculado como la diferencia entre la permitividad real del medio y la utilizada.

En la gráfica de la figura 16.8, se presenta la relación entre en cociente del error en la velocidad y la velocidad calculada, con la permitividad utilizada considerando diferentes valores de $Err(\varepsilon_r)$:

$$\frac{Err(v)}{v} = \frac{1}{2}\frac{Err(\varepsilon_r)}{\varepsilon_r} \tag{16.25}$$

Se muestran las curvas referidas a errores de la permitividad entre ±1 y ±6. Si el medio presenta una permitividad homogénea, el error sistemático cometido por esta causa al calcular la velocidad viene determinado por las gráficas de la figura

16.7 y depende de la permitividad utilizada y de la diferencia entre ésta y la permitividad que realmente presenta el medio.

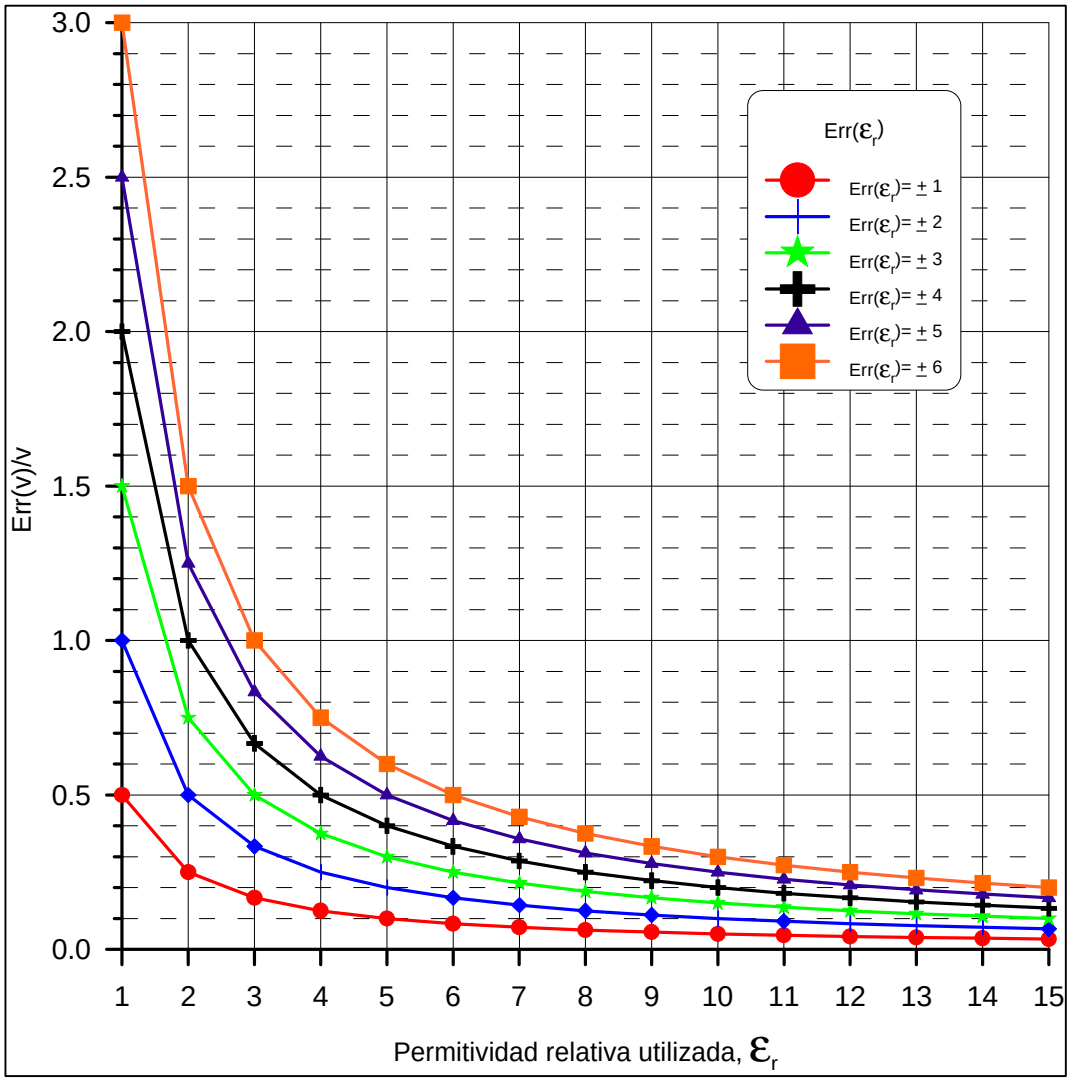

Figura 16.8. Error relativo de la velocidad con la permitividad del medio y para diferentes valores del error cometido al calcular o estimar la permitividad.

También se puede obtener una expresión gráfica del error cometido al determinar la distancia a una superficie reflectora, Err(h), con la permitividad efectiva del medio y el valor de Err(ε_r) (ecuación 16.24). Esta gráfica se muestra en la figura 16.9.

Los errores más pequeños se cometen para diferencias Err(ε_r) pequeñas. También se observa que el error para un mismo Err(ε_r) es menor cuanto mayor es la

permitividad relativa del medio (que corresponde a velocidades menores). La gráfica de la figura 16.8 se ha calculado considerando que la superficie reflectora está situada a una distancia de 100 ns (tiempo doble). La construcción de este tipo de representaciones aproxima el error cometido para tiempos fijos de propagación de la señal.

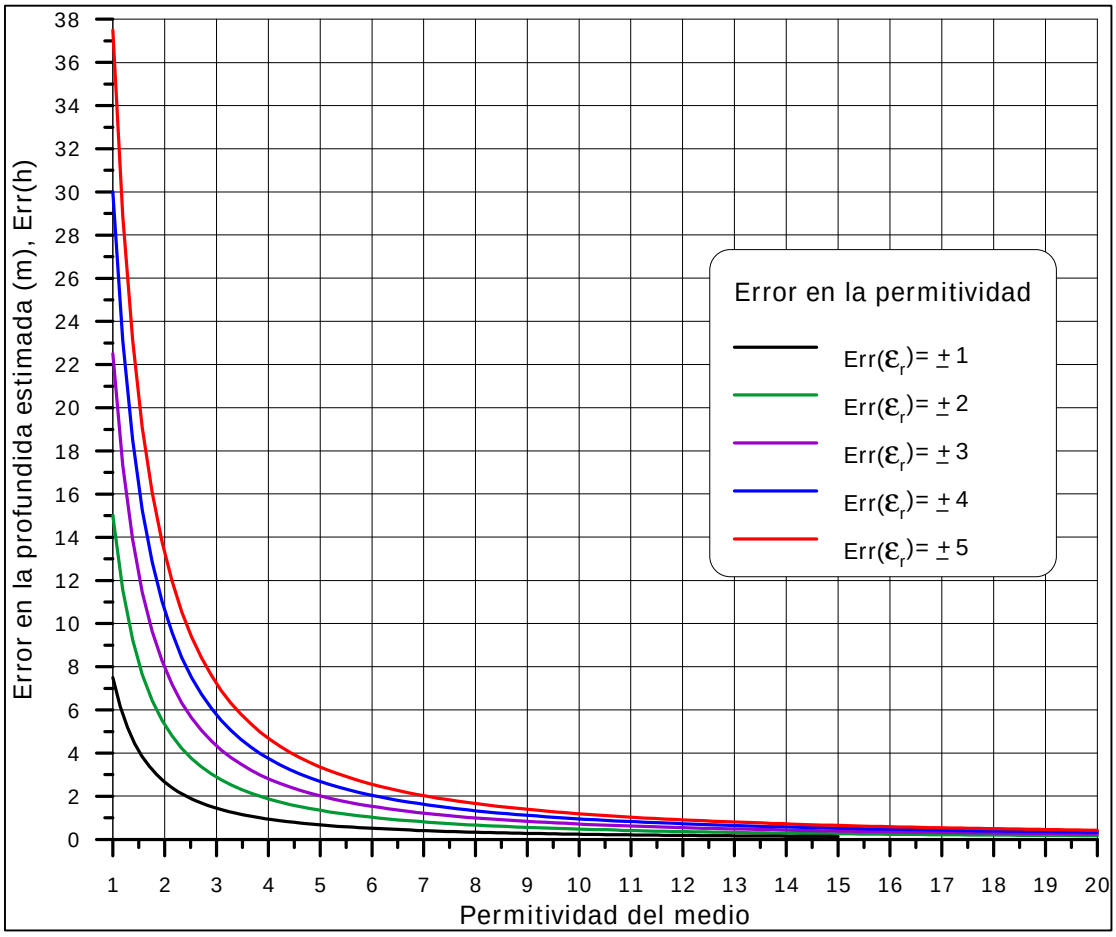

Figura 16.9. Errores en la distancia para un tiempo de propagación de 100 ns, con la permitividad del medio para diferentes errores en la estimación de dicha permitividad.

En la figura 16.9 (calculada para un tiempo doble t=100 ns) se puede ver que en general, para un mismo Err(ε_r), el error sobre la profundidad disminuye al aumentar la permitividad del medio. Por ejemplo, para ε_r=1 y un Err(ε_r)=±1 el error al determinar la profundidad puede ser de 7.5 m sobre una profundidad de 15 m, es decir, el cociente del error sobre la profundidad es de 0.5. Para el mismo tiempo de propagación, el error es de 2.7 m sobre una profundidad de 10.6 m si la permitividad de 2 con un error asociado de ±1, siendo la profundidad en este caso

de 10.6 m. Cuando ε_r=12±1, el error en la profundidad es de 0.2 m y el espesor son 4.3 m, por lo que el cociente es de 0.047. Estos ejemplos se recogen en la tabla 16.1.

t (ns)	e_r	Err(e_r)	h (m)	Err(h) (m)	Err(h)/h
100	1	± 1	15	7.5	0.5
100	2	± 1	10.6	2.7	0.25
100	12	± 1	4.3	0.2	0.047
100	12	± 2	4.3	0.4	0.093
100	12	± 3	4.3	0.5	0.116
100	12	± 5	4.5	0.9	0.209

Tabla 16.1. Ejemplos de errores y errores relativos asociados a profundidades para diferentes permitividades y valores de Err(e_r) (figura 16.9). El tiempo t es tiempo doble.

Es interesante considerar el error relativo a la profundidad calculado como el cociente de Err(h) entre h:

$$\frac{\mathrm{Err(h)}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Err}(\varepsilon_r)}{\varepsilon_r} \tag{16.26}$$

Esta relación, análoga a la obtenida para la velocidad, se representa en la figura 16.10. Las curvas de esta figura se pueden utilizar para cualquier tiempo de propagación, siendo útiles para realizar una estimación rápida del error cometido durante un estudio práctico al estimar profundidades partiendo de permitividades calculadas o de valores hallados en la literatura.

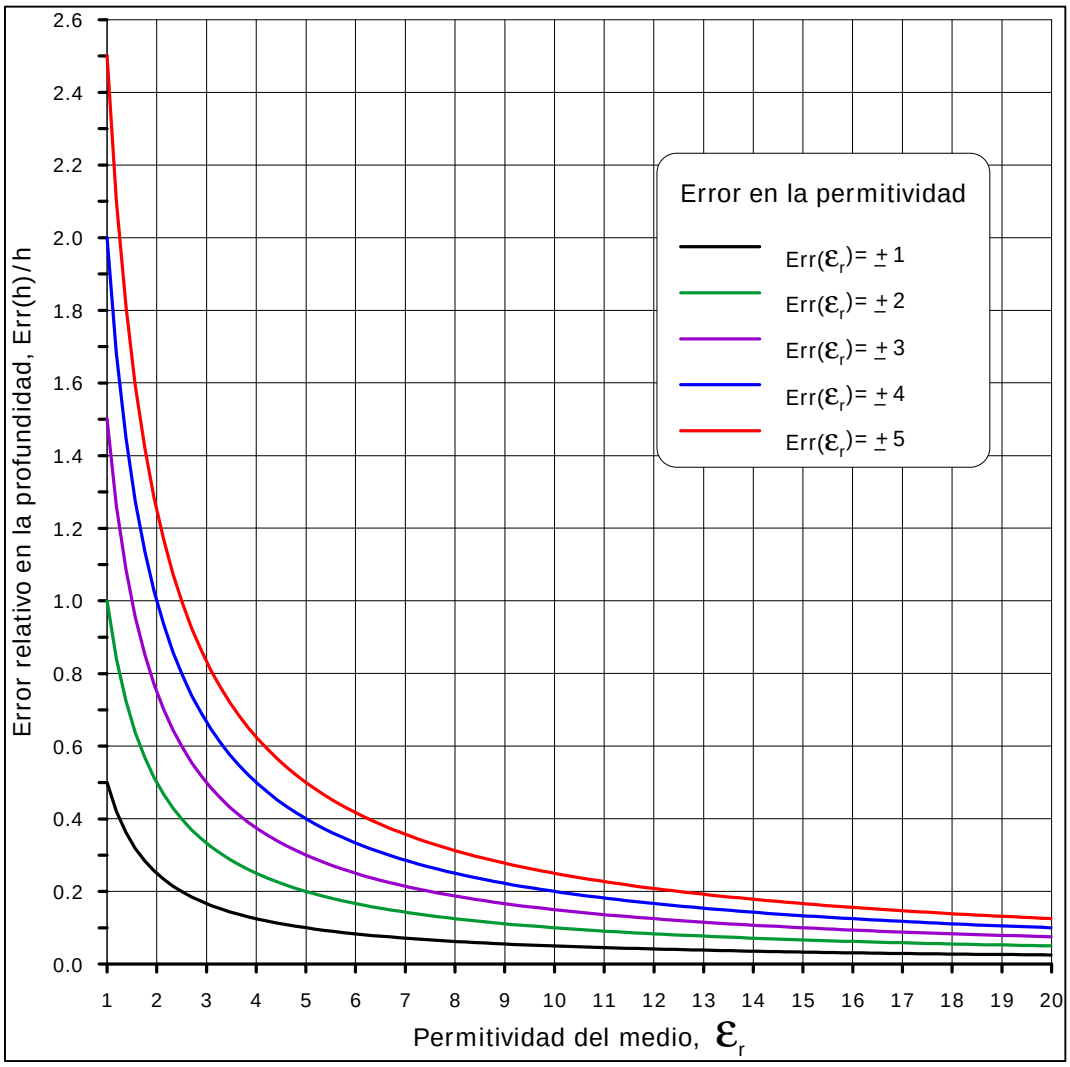

Figura 16.10. Error relativo en la profundidad con la permitividad relativa del medio y su error.

16.5. Conclusiones.

Para los errores aleatorios o casuales no estadísticos asociados con diferentes parámetros, se han obtenido expresiones que permiten una estimación rápida de dichos errores en función de los errores instrumentales. Se ha observado que, en muchos casos, estos errores son similares a los errores estándar calculados estadísticamente en los diferentes ensayos realizados.

Para los errores sistemáticos ocasionados por la aproximación de pequeñas pérdidas, se observa que el modelo resultante tiene menos error si la conductividad del medio es pequeña y la permitividad elevada. También se observa una dependencia importante de los errores sistemáticos con la frecuencia. Para frecuencias altas este error es menor, mientras que resulta importante para frecuencias bajas (10 MHz). Se han obtenido representaciones gráficas del error en la velocidad y en la profundidad donde puede apreciarse que por encima de ε_r=5 y por debajo de σ=10 mS/m si se trabaja con frecuencias de 100 MHz o superiores la diferencia entre los dos modelos (el aproximado y el no aproximado) es despreciable.

Para diferencias pequeñas entre ε_r estimada y ε_r real, hay que ir con cuidado en medios de alta velocidad (baja permitividad), donde el error en la distancia puede alcanzar un 50% con una diferencia de Err(ε_r)=±1 si el medio presenta una permitividad relativa de ε_r=1 (aire). En caso de valores de Err(ε_r) por encima de ±2, el error es superior al valor de la profundidad calculado. Para medios de baja velocidad con permitividades relativas por encima de 14, el error en la profundidad es inferior en todo momento al 20%, incluso cuando la diferencia de permitividades es elevada (±5). Con Err(ε_r)=±1 el máximo error es del 50% y se alcanzan valores inferiores al 10% a partir de ε_r=5. Estos cálculos indican que es necesario seleccionar cuidadosamente la velocidad o la permitividad para obtener una interpretación fina del medio.