

## CAPITULO II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 CONSIDERACIONES GENERALES

En este capítulo y en primer lugar se darán los fundamentos básicos de electromagnetismo. Posteriormente, el principio teórico de los elementos finitos también en máquinas eléctricas será expuesto, siendo utilizado este método para la resolución de los circuitos magnéticos analizados mediante el programa FEMM.

Finalmente, una breve introducción de los diversos tipos de motores de inducción trifásicos completará y servirá de nexo de unión entre este capítulo y los posteriores dedicados ya más a temas específicos de la tesis.

### 2.2 FUNDAMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO

En esta sección se detallarán las ecuaciones y teoremas más utilizados en el cálculo electromagnético de las máquinas eléctricas<sup>{L-1}</sup>.

#### 2.2.1 Ecuaciones de Maxwell

Cuatro son las ecuaciones de Maxwell que expresan las leyes de los fenómenos electromagnéticos. Están formadas por cinco vectores y un escalar. Siendo sus símbolos y unidades las siguientes:

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Intensidad de campo eléctrico.} & \bar{E} \quad \left[ \frac{V}{m} \right] \quad [2.1] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Intensidad de campo magnético.} & \bar{H} \quad \left[ \frac{AV}{m} \right] \quad [2.2] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Densidad de flujo eléctrico.} & \bar{D} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad [2.3] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Densidad de flujo magnético.} & \bar{B} \quad \left[ \frac{Wb}{m^2} \right] \quad [2.4] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Densidad de corriente eléctrica.} & \bar{J} \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad [2.5] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & \text{Densidad de carga eléctrica.} & \sigma \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad [2.6] \end{array}$$

También son cuatro las leyes que explican los fenómenos electromagnéticos, denominándose al conjunto, ecuaciones de Maxwell.

- Ley de Faraday.
- Ley de Gauss del campo eléctrico.
- Ley de Ampere generalizada.
- Ley de Gauss del campo magnético.

#### 2.2.1.1 Ley de Faraday

La expresión que define de forma general la ley de Faraday, esta dada por:

$$\oint_{I(A)} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\delta}{\delta t} \iint_{A(I)} \bar{B} \cdot d\bar{A} \quad [2.7]$$

Donde  $\bar{E}$ , es la intensidad de campo eléctrico y  $\bar{B}$ , la densidad de flujo magnético. Aplicando el teorema de Stokes, transformamos la ecuación de su forma integral a su forma diferencial.

$$\iint_{A(t)} (\nabla \wedge \bar{E}) \cdot d\bar{A} = -\frac{\delta}{\delta t} \iint_{A(t)} \bar{B} \cdot d\bar{A} \quad [2.8]$$

$$\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad [2.9]$$

### 2.2.1.2 Ley de Gauss del campo eléctrico

La forma integral de la ley de Gauss para definir el campo eléctrico es:

$$\oiint_{A(V)} \bar{D} \cdot d\bar{A} = \iiint_{V(A)} \rho \cdot dV \quad [2.10]$$

Aplicando el teorema de la divergencia, transformamos la ecuación anterior en su expresión diferencial:

$$\iiint_{V(A)} \nabla \cdot \bar{D} \cdot dV = \iiint_{V(A)} \rho \cdot dV \quad [2.11]$$

Donde  $\bar{D}$  es la densidad de flujo eléctrico y  $\rho$ , la densidad de carga eléctrica.

### 2.2.1.3 Ley de Ampere generalizada con el concepto de desplazamiento de Maxwell

La forma integral de la ley de Ampere, teniendo presente la corriente de desplazamiento, es la siguiente:

$$\oint_{(A)} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A(t)} \bar{J} \cdot d\bar{A} + \iint_{A(t)} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \quad [2.12]$$

Aplicando el teorema de Stokes obtendremos su expresión diferencial.

$$\iint_{(A)} (\nabla \wedge \bar{H}) \cdot d\bar{A} = \iint_{A(t)} \bar{J} \cdot d\bar{A} + \iint_{A(t)} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \quad [2.13]$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad [2.14]$$

### 2.2.1.4 Ley de Gauss del campo magnético

La forma integral de la ley de Gauss aplicada al campo magnético es:

$$\oiint_{A(V)} \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0 \quad [2.15]$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la expresión anterior, obtendremos:

$$\iiint_{V(A)} \nabla \cdot \bar{B} \cdot dV = 0 \quad [2.16]$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad [2.17]$$

### 2.2.2 Ecuaciones de campos potenciales

Partimos de la siguiente identidad del cálculo vectorial<sup>[L-3]</sup> .

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla} \zeta = 0 \quad [2.18]$$

La ecuación anterior indica que todo campo cuyo rotacional sea nulo puede expresarse como gradiente de otro campo, el campo potencial escalar:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \wedge \bar{A} = 0 \quad [2.19]$$

Asimismo, la ecuación vectorial anterior expresa que todo campo cuya divergencia sea nula puede definirse como un rotacional de otro campo, el campo potencial vector. Haciendo uso de estas identidades que se derivan del cálculo vectorial, puede definirse la densidad de campo magnético y la intensidad de campo eléctrico en función de los campos potenciales.

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad [2.20]$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} \quad [2.21]$$

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \bar{\nabla} \wedge \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) = 0 \quad [2.22]$$

$$\bar{\nabla} \wedge \left( \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad [2.23]$$

Por tanto, para el campo eléctrico tendremos:

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} \cdot U - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad [2.24]$$

Y para el campo magnético:

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} \quad [2.25]$$

Siendo  $U$ , el potencial escalar del campo eléctrico, mientras que  $A$ , es el potencial vector del campo magnético. El potencial vector  $A$ , no está determinado de manera única, ya que su divergencia no está definida. Para fijar una referencia del potencial vector se utilizan normalmente las siguientes condiciones:

- Condición de Coulomb:  $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0 \quad [2.26]$

- Condición de Lorenz:  $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad [2.27]$

Donde  $\mu$ , es la permeabilidad definida en (T·m/AV) y  $\varepsilon$ , es la constante dieléctrica en (H/m) del medio donde se producen los efectos electromagnéticos.

### 2.2.3 Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell en el análisis de las máquinas eléctricas

Los dos parámetros más importantes que definen estas ecuaciones<sup>[L-6]</sup> son la tensión inducida en el rotor y el par mecánico, con los dos vectores de fuerza:  $\bar{E}$ , para el campo eléctrico y  $\bar{H}$ , para el

campo magnético. La relación entre los dos vectores de fuerza y la densidad del campo eléctrico y magnético viene definida por las propiedades del medio electromagnético, es decir, por la conductividad eléctrica  $\sigma$ , y su permeabilidad absoluta  $\mu$ , de la siguiente forma:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (\sigma, \varepsilon, \mu) \quad [2.28]$$

Los parámetros electromagnéticos del medio son tensores. Su naturaleza provoca un desfase espacial entre los vectores intensidad y densidad de campo. Para entender y resolver de forma más sencilla, las propiedades del medio se aplican escalares en un análisis macroscópico de la materia. Por tanto, las expresiones de la ecuación anterior, se relacionan mediante una cantidad escalar denominada constante en el tiempo y en el espacio.

Además de los vectores de flujo y densidades de corriente, en un campo eléctrico y magnético, también podemos definir cantidades escalares. El flujo de un vector a través de una superficie es igual al producto escalar del vector y del área de la superficie que atraviesa. Por tanto, podemos escribir las siguientes cantidades escalares para el campo eléctrico y magnético.

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \psi = \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad [2.29]$$

La conductividad de los conductores eléctricos (metales) es mucho mayor que la conductividad del aire, lo que provoca que la corriente eléctrica fluya completamente a través de un conductor (metal). No obstante, la diferencia entre la permeabilidad del aire y del hierro, a pesar de todo, no es tan radical como la diferencia que existe entre la conductividad del aire y el material conductor, lo que provoca la existencia de una componente del flujo magnético que circulará a través del aire, paralelo al flujo en el hierro.

Existen unas diferencias fundamentales entre el campo magnético y el campo eléctrico. Entre las más importantes está la forma de las líneas de campo que, en el campo eléctrico, van desde la carga positiva a la carga negativa, mientras que, en el campo magnético, las líneas de fuerza se cierran sobre sí mismas.

La ley de Ampère nos permite definir en su forma diferencial este hecho.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad [2.30]$$

No obstante, para el análisis de máquinas eléctricas, es más común su expresión en su forma integral:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = F \left( \frac{Av}{m} \right) \quad [2.31]$$

La ley de Ampere, indica que la suma de todas las caídas de fuerza magnetomotriz ( $F$ ), a través de un anillo cerrado en un campo magnético, es igual a la corriente total que envuelve al anillo. La continuidad de la ley de Ampere, nos ayuda a definir las condiciones frontera para las líneas de flujo en una máquina eléctrica. Las condiciones frontera relacionan los valores de los vectores de campo magnético con las permeabilidades del hierro y del aire. Cuando las condiciones frontera son conocidas, puede encontrarse la distribución de las líneas de flujo en dos casos típicos: conductores en el entrehierro y un conductor dentro de una ranura. La distribución de flujo en la máquina nos determinará el valor de las reactancias principales y de las reactancias de dispersión.

#### 2.2.4 Condiciones de contorno

Las condiciones que los campos eléctricos y magnéticos deben satisfacer en una zona interfacial, entre dos materiales distintos, se deducen a partir de las ecuaciones de Maxwell.

En cualquier zona interfacial entre dos medios puede constituirse una superficie con forma de "cubo cuadrado".

Aplicando la forma integral de la ley de Gauss del campo magnético sobre un volumen encerrado por este cubo descrito, tendremos:

$$\oint_A \bar{B} \cdot d\bar{A} = \oint_{A1} \bar{B} \cdot \bar{n}_1 \cdot d\bar{A} + \oint_{A2} \bar{B} \cdot \bar{n}_2 \cdot d\bar{A} + \oint_{A3} \bar{B} \cdot \bar{n}_3 \cdot d\bar{A} \quad [2.32]$$

Si  $h$ , tiende a cero, el último término se anula, y  $A_1$ , tiende a  $A_2$ , geoméricamente. Teniendo en cuenta los sentidos opuestos de  $n_1$ , y  $n_2$ , se llega a la primera condición de contorno.

$$B_{n1} = B_{n2} \quad [2.33]$$

Esta condición nos indica que las componentes normales de densidad de flujo magnético han de ser iguales para los dos medios.

La componente tangencial del campo eléctrico puede analizarse de modo igualmente sencillo. Aplicando la forma integral de la ley de Faraday sobre una espira rectangular sobre la interfacial entre los dos medios:

$$\oint_A \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(t)} \bar{B} \cdot d\bar{A} \quad [2.34]$$

Se obtiene:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{2n} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(t)} \bar{B} \cdot d\bar{A} \quad [2.35]$$

Donde, el subíndice  $t$ , se refiere a la componente tangencial de  $E$ , mientras que el subíndice  $n$ , se refiere a la componente normal de  $E$ .

Si  $h_1$ , y  $h_2$ , tienden a cero, los cuatro últimos términos del lado izquierdo de la ecuación anterior y el integrando del lado derecho se anulan, obteniéndose, de esta forma, la segunda condición de contorno:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad [2.36]$$

Esta condición indica que la componente tangencial de  $E$ , debe ser continua al atravesar la zona interfacial.

La condición en la frontera sobre la componente normal de densidad de flujo eléctrico puede caracterizarse, igual que la componente normal de densidad de flujo magnético, aplicando la forma integral de la ley de Gauss, a un volumen con forma de "cubo cuadrado" en la zona interfacial.

$$\oint_{A(V)} \bar{D} \cdot d\bar{A} = \iiint_{V(A)} \rho \cdot dV \quad [2.37]$$

Si  $h$ , tiende a cero, obtendremos:

$$(D_{n1} - D_{n2}) = \rho_s \quad [2.38]$$

Donde  $\rho_s$ , es la densidad de carga superficial en la zona interfacial. El hecho de que, en general, la densidad de carga superficial no sea cero, introduce alguna complejidad dependiendo de la conductividad de los materiales.

Para dos materiales que tengan conductividad nula (dos dieléctricos) la densidad de carga superficial es cero. Por tanto, las componentes normales de densidad de flujo eléctrico son iguales.

Si uno de los materiales tiene una conductividad infinita, se anula una de las componentes normales comportando la igualdad de la otra componente normal con la densidad de carga superficial. Por ejemplo, si la conductividad del material (2) fuese infinita se obtendría:

$$D_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad D_{1n} = \rho_s \quad [2.39]$$

Cuando la conductividad de los materiales es finita y diferente de cero, puede llegarse a la siguiente igualdad entre las componentes normales de intensidad de campo eléctrico:

$$\left( \epsilon_1 + j \frac{\sigma_1}{\omega} \right) E_{1n} = \left( \epsilon_2 + j \frac{\sigma_2}{\omega} \right) E_{2n} \quad [2.40]$$

La condición final en la frontera es la impuesta sobre la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico  $H$ . Esta condición frontera se obtiene aplicando la forma integral de la ley de Ampere sobre una espira.

$$\oint_{l(A)} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_{A(l)} \bar{J} \cdot d\bar{A} + \iint_{A(l)} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \quad [2.41]$$

La condición en la frontera resultante es entonces:

$$(H_{1t} - H_{2t}) = j \perp \quad [2.42]$$

Donde  $H_{1t}$  y  $H_{2t}$  son las componentes tangenciales de la intensidad de campo magnético, mientras que  $j \perp$ , es la componente de la densidad de corriente superficial perpendicular a la dirección de la componente de  $H$ , que está igualando. Esta densidad de corriente representa una corriente finita en una capa infinitesimal. La densidad de corriente superficial es cero, a menos que la conductividad sea infinita, en consecuencia, para una conductividad finita.

$$(H_{1t} = H_{2t}) \quad [2.43]$$

### 2.2.5 Aplicación de las ecuaciones de Maxwell para problemas en régimen magnetostático

Los problemas magnetoestáticos<sup>(L-2)</sup> se caracterizan porque los campos no varían con el tiempo. Bajo estas circunstancias, la intensidad de campo magnético  $H$ , y el flujo de densidad magnética  $B$ , presentan el siguiente comportamiento definido por las ecuaciones:

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad [2.44]$$

Teniendo presente que la relación entre la densidad de flujo magnético y la intensidad de campo magnético para cada material es:

$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H} \quad [2.45]$$

La intensidad de campo magnético  $H$ , puede expresarse en función del campo vectorial  $A$ . Ya que su divergencia es cero, la expresión de flujo magnético en función de la intensidad de campo magnético se transforma en:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu}(\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \quad [2.46]$$

En la ecuación de la ley de Ampere, incluyendo la corriente de desplazamiento que es el segundo término que aparece en esta ecuación, puede anularse, ya que en los problemas de máquinas eléctricas esta corriente puede despreciarse a bajas frecuencias. La corriente de desplazamiento sólo es relevante para frecuencias elevadas. Por tanto, la ecuación de la ley de Ampere se simplifica de la siguiente forma:

$$(\bar{\nabla} \wedge \bar{H}) = \bar{J} \quad [2.47]$$

Sustituyendo la ecuación la ley de Ampere en la ecuación anterior, obtenemos:

$$(\bar{\nabla} \wedge \bar{H}) = \bar{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu}(\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) \right) = \bar{J} \quad [2.48]$$

Y para un material isotropo, la ecuación anterior se transforma en:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J} \quad [2.49]$$

Donde el campo vectorial  $A$ , es un vector de tres componentes. Sin embargo, cuando trabajamos en dos dimensiones, dos de estas componentes son cero, adquiriendo magnitud únicamente, la componente perpendicular al plano.

La formulación de los campos vectoriales estáticos en dos dimensiones, en función de los potenciales correspondientes, responde a una ecuación elíptica de dos variables conocida como la ecuación de Poisson.

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + c = 0 \quad [2.50]$$

Donde  $f$ , es el potencial vector magnético;  $c$ , es igual a la densidad de corriente, y  $a$ , es igual a la inversa de la permeabilidad del medio, que es la reluctancia.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu J \quad [2.51]$$

Una vez obtenido el valor del potencial vector magnético, es posible encontrar las variables de densidad de flujo, intensidad de campo y densidad de corriente. La solución de la ecuación anterior se realizará, en nuestro caso, mediante el empleo de métodos con elementos finitos.

### 2.3 TEORÍA DE ELEMENTOS FINITOS

La formulación variacional del problema de las máquinas eléctricas<sup>{1-5}</sup> comporta normalmente una equivalencia entre la solución de la ecuación diferencial de Poisson y la función que optimiza una función que, en general, es una función de Lagrange del sistema:

$$F = \iint_D \left[ \frac{1}{2\mu_r} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right) - \mu_o AJ \right] ds - \int_C A \frac{\partial A}{\partial n} dl \quad [2.52]$$

El dominio  $D$ , se descompone en elementos finitos  $D_e$  en los que el potencial vector  $\bar{A}$  es aproximado en función de los potenciales nodales. La acomodación de los elementos a la geometría del modelo en estudio se obtendrá mediante elementos finitos de dos tipos:

- Curvilíneos.
- Lineales.

Por su adaptación a cualquier configuración geométrica, en el estudio bidimensional, son comúnmente utilizados los elementos triangulares (haciendo que la malla sea más densa, podemos realizar una mejor aproximación a la geometría real).

Como función de aproximación del potencial puede admitirse un elemento lineal:

$$A = \int_{j=1}^3 P_j A_j \quad [2.53]$$

Donde:  $P_j$  = polinomio de primer grado.  
 $A_j$  = valor en el punto nodal del potencial vector.

El funcional  $F^{(e)}$  asociado a cada elemento, discretizado por el método de Galerkin, queda expresado matemáticamente. Las formas matriciales de los funcionales se obtienen cuando todas las derivadas parciales respecto a los potenciales nodales son nulas:

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad [2.54]$$

En consecuencia, disponemos de un sistema de ecuaciones algebraicas que, una vez resueltas, nos permitirán solucionar el problema.

### 2.3.1 Desarrollo de métodos matriciales

La aproximación del potencial <sup>{R-57}</sup> es la siguiente:

$$F^{(e)} = \iint_{D_e} \frac{1}{2\mu_r} \left| \bar{\nabla} \cdot A^{(e)} \right|^2 dx \cdot dy - \iint_{D_e} \mu_o J^{(e)} A^{(e)} dx \cdot dy - \int_C A^{(e)} \frac{\partial A^{(e)}}{\partial n} dl \quad [2.55]$$

Siendo:

$$\bar{\nabla} A^{(e)} = \frac{\partial A^{(e)}}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial A^{(e)}}{\partial y} \bar{j} \quad [2.56]$$

Entonces tendremos:

$$\bar{\nabla} A^{(e)} = \sum_{j=1}^3 A_j^{(e)} \bar{\nabla} P_j^{(e)} \quad [2.57]$$

Finalmente, obtendremos la aproximación del potencial como:



$$F^{(e)} = \frac{1}{2\mu_r} \iint_{De} \left[ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 A_i^{(e)} \cdot A_j^{(e)} (\nabla P_i^{(e)}) (\nabla P_j^{(e)}) \right] dx dy - \mu_o J \iint_{De} P_j^{(e)} A_j^{(e)} dx dy - \oint_C A^{(e)} \frac{\partial A^{(e)}}{\partial n} dl \quad [2.58]$$

La primera de las integrales corresponde a la energía magnética. En los dominios donde no existen fuentes de corriente puede definirse esta energía como:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2\mu_r} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[ A_i^{(e)} A_j^{(e)} \iint_{De} (\nabla P_i^{(e)}) (\nabla P_j^{(e)}) dx dy \right] \quad [2.59]$$

La expresión anterior puede abreviarse utilizando la siguiente expresión:

$$S_{ij}^{(e)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iint_{De} (\nabla P_i^{(e)}) (\nabla P_j^{(e)}) dx dy \quad [2.60]$$

Introduciendo la expresión anterior en la expresión de la ley de Ampere obtendremos:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2\mu_r} [A]^T [S^{(e)}] [A] \quad [2.61]$$

Así las expresiones desarrolladas de la ecuación de la ley de Ampere en forma de matriz adoptan la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad [2.62]$$

Si ahora resolvemos el sistema de ecuaciones de la matriz anterior obtendremos:

$$A(x, y) = [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \frac{A_1}{2D_{(e)}} + [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \frac{A_2}{2D_{(e)}} + [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \frac{A_3}{2D_{(e)}} \quad [2.63]$$

Y disponiendo la ecuación anterior en forma de sumatorio:

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^3 A_i \cdot \alpha_i(x, y) \quad [2.64]$$

Siendo cada uno de los coeficientes incógnita  $\alpha_i$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2D} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad [2.65]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2D} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad [2.66]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2D} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad [2.67]$$

Expresando en forma matricial el valor del potencial vector, tendremos:

$$A^{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad [2.68]$$

Conocidos los valores de los potenciales vectores en los nodos de un elemento, podemos determinar el potencial vector en cualquier punto de este elemento.

Para el elemento finito considerado ( $e$ ), la matriz  $[S^{(e)}]$  de la ecuación es de fácil determinación. Los subíndices para cualquier otro elemento se obtienen sistemáticamente por permutación de los mismos.

### 2.3.2 Unión de los elementos finitos

La energía magnética total, es la suma de las energías magnéticas de cada uno de los elementos finitos.

$$W^{(e)} = \frac{1}{2\mu_r} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[ \sum_{e_n} \iint_{De} (\nabla P_i^{(e)n}) (\nabla P_j^{(e)n}) dx dy \right] A_i^{(e)n} A_j^{(e)n} \quad [2.69]$$

Las energías magnéticas de los elementos finitos ( $e$ )<sub>1</sub>, y ( $e$ )<sub>2</sub>, son respectivamente:

$$W^{e_1} = \frac{1}{2\mu_r} [A_{dis}^{e_1}]^T [S_{dis}^{e_1}] [A_{dis}^{e_1}] \quad [2.70]$$

$$W^{e_2} = \frac{1}{2\mu_r} [A_{dis}^{e_2}]^T [S_{dis}^{e_2}] [A_{dis}^{e_2}] \quad [2.71]$$

La energía magnética de los dos elementos finitos será la suma de las dos expresiones parciales de la energía magnética de cada elemento finito. La expresión matricial general, para la reunión de  $n$ , elementos finitos será la siguiente.

$$W = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \end{bmatrix} \quad [2.72]$$

Siendo la matriz:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(e)1} & S_{12}^{(e)1} & S_{13}^{(e)1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}^{(e)1} & S_{22}^{(e)1} & S_{23}^{(e)1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^{(e)1} & S_{32}^{(e)1} & S_{33}^{(e)1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{(e)2} & S_{45}^{(e)2} & S_{46}^{(e)2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54}^{(e)2} & S_{55}^{(e)2} & S_{56}^{(e)2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{64}^{(e)2} & S_{65}^{(e)2} & S_{66}^{(e)2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{(n-2)(n-2)}^{(e)n/3} & S_{(n-2)(n-1)}^{(e)n/3} & S_{(n-2)(n)}^{(e)n/3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{(n-1)(n-2)}^{(e)n/3} & S_{(n-1)(n-1)}^{(e)n/3} & S_{(n-1)(n)}^{(e)n/3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{(n)(n-2)}^{(e)n/3} & S_{(n)(n-1)}^{(e)n/3} & S_{(n)(n)}^{(e)n/3} \end{bmatrix} \quad [2.73]$$

Por tanto tendremos:

$$W = \frac{1}{2\mu_r} [A]_{dis}^T \cdot [S]_{dis} \cdot [A]_{dis} \quad [2.74]$$

Asimismo, La reunión de los elementos disjuntos da lugar a un cuadrilátero. La continuidad de los potenciales está garantizada, al ser iguales los potenciales en los nodos comunes a dos elementos contiguos.

El efecto del cambio de numeración y la condición de igualdad del potencial vector en los nodos del dominio global, pueden ser expresados matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix}_{dis} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}_{unión} \quad [2.75]$$

Que mediante una generalización tendremos:

$$[A]_{dis} = [C] \cdot [A]_{unión} \quad [2.76]$$

Finalmente, y a partir de las ecuaciones anteriores, obtendremos:

$$W = \frac{1}{2\mu_r} [A]_{unión}^T \cdot [S] \cdot [A]_{unión} \quad [2.77]$$

Es decir, en forma de matriz:

$$[S] = [C]^T \cdot [S]_{dis} \cdot [C] \quad [2.78]$$

## 2.4 MOTORES ASÍNCRONOS TRIFÁSICOS

En los siguientes apartados se exponen de forma resumida los fundamentos teóricos más importantes que definen a los motores asíncronos trifásicos actualmente utilizados, los cuales tienen su representación en el presente trabajo de investigación.

En capítulos posteriores algunos de estos conceptos se ampliarán con el rigor necesario que exige esta investigación. Por ahora sólo es una introducción básica de estos motores, ampliamente conocidos, que nos permitirá comprobar los problemas que aún están por resolver y las aportaciones que esperamos conseguir con este nuevo motor de chapas.

### 2.4.1 Motores asíncronos trifásicos con rotor de jaula de ardilla

El motor asíncrono con rotor de jaula de ardilla<sup>[L-17]</sup> es el más difundido entre los motores empleados actualmente en la industria.

La construcción del motor asíncrono es simple. En la parte fija del motor, el estator (1), se dispone el devanado trifásico (2), que se alimenta con corriente alterna trifásica. Los inicios de las tres fases de este devanado se montan en un tablero común fijado a la parte exterior del cuerpo (3) del motor. Como

por los devanados del estator fluye la corriente alterna, por el estator pasará un flujo magnético alterno. Para reducir las corrientes parásitas que surgen en el estator debido a la disposición de las chapas, éste se construye con chapas de acero aleado de entre 0,35 y 0,5 mm de espesor, estando las chapas aisladas entre ellas con barniz resistente a las altas temperaturas y roces internos. Las chapas, con ranuras estampadas para alojar el devanado, se unen una entre sí mediante pernos, aislados del estator. El núcleo armado del estator va fijado en el cuerpo de aluminio inyectado (8) del motor como se muestra en la siguiente figura.

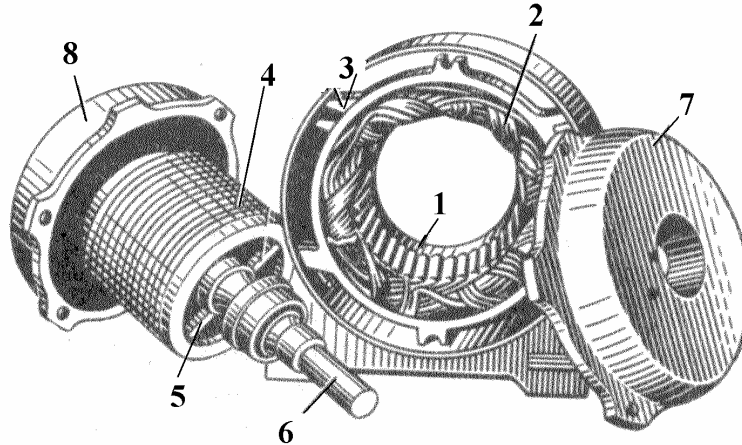


Figura 2.1. Detalles del motor asíncrono trifásico con rotor de jaula de ardilla

La parte móvil del motor, el rotor (4), es armada también de chapas de acero. En las ranuras del rotor se colocan barras de aluminio que se sueldan por ambos extremos a los anillos de aluminio (5). El devanado del rotor, por su aspecto exterior sin las chapas del rotor, parece una jaula de ardilla, dando nombre al motor. Actualmente en la mayor parte de los motores, la jaula de ardilla se construye de aluminio moldeado a presión en las ranuras del rotor.

El árbol del rotor (6) gira con los cojinetes fijados en las cajas (7) y (8). Por medio de pernos, las cajas se fijan al cuerpo del motor. Para el arranque del motor es necesaria la conexión del estator a la red, lo que provoca el giro del rotor. Durante la puesta en marcha, el motor absorbe de la red una corriente de entre 5 y 7 veces mayor que la corriente nominal. Las grandes corrientes de arranque de los motores producen fuertes caídas de tensión en la red, lo que se refleja perjudicialmente en el funcionamiento de otras máquinas eléctricas conectada a la misma.

En el momento del arranque, cuando la frecuencia de la corriente del rotor es igual a la del estator, la reactancia inductiva del devanado del rotor es grande y el ángulo de desfase  $\psi_2$  (entre la f.e.m.  $E_2$  y la corriente del rotor  $I_2$ ) también es grande. Este es el principal motivo por el que el par inicial de arranque es pequeño. Para aumentar el par de arranque tendríamos que aumentar la resistencia activa del circuito del devanado del rotor. Pero esto provocaría un mayor calentamiento del devanado y la disminución del rendimiento del motor. Para mejorar las características de arranque de los motores asíncronos con rotor de jaula de ardilla se emplean motores con dos devanados de jaula de ardilla en el rotor y motores con ranura profunda.

En el motor de doble jaula, están alojadas dos jaulas: una, de arranque, cuya resistencia activa es grande y la reactancia inductiva pequeña, y otra, de trabajo, que dispone de una resistencia activa pequeña y de una reactancia inductiva grande. Las barras de la jaula de arranque suelen fabricarse de latón al manganeso. Para la jaula de trabajo se utiliza cobre, siendo la sección de la jaula de trabajo mayor que la de la jaula de arranque. Seleccionando el material y las secciones de las jaulas correctamente se obtiene una resistencia de la jaula de arranque cuatro o cinco veces mayor que la de la jaula de trabajo. Entre las barras de las jaulas de arranque y las de trabajo hay un espacio muy pequeño, cuyas dimensiones determinan la inductancia de la jaula interior de trabajo.

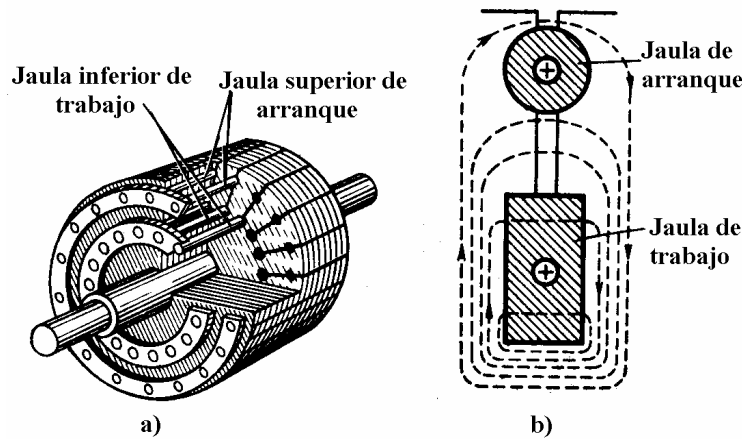


Figura 2.2. Rotor de doble jaula. a) Aspecto general del rotor b) Corte de una ranura

La forma de funcionar del motor de doble jaula es sencilla. En el momento de poner en marcha el motor, cuando la frecuencia de las corrientes del rotor es igual a la frecuencia de la red, el flujo magnético de dispersión de la jaula de trabajo es grande y, por tanto, la inductancia de la misma es también grande. Debido a esto, el desfase de la corriente de la jaula de trabajo y de la fuerza contraelectromotriz (f.c.m.), inducida en ésta será grande, y el par de arranque que crea la jaula, pequeño. Como se dispone de una gran resistencia activa y pequeña inductancia en la jaula de arranque, la corriente y la f.c.m. inducidas en ésta tendrán un desfase insignificante y el par de arranque que desarrolla será grande. Por consiguiente, al poner en marcha el motor, el par de arranque se produce preferentemente a cuenta de la jaula de arranque.

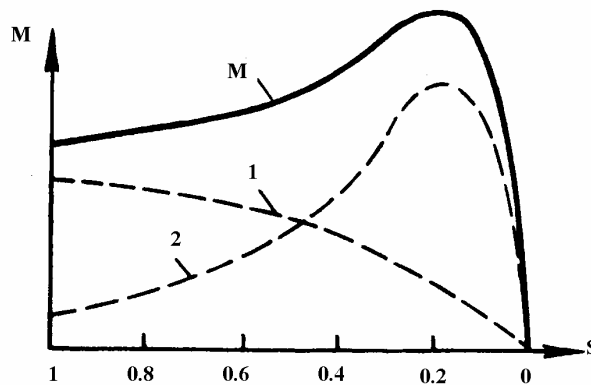


Figura 2.3. Curva del par en un motor de doble jaula en función del deslizamiento. Obsérvese el efecto de las dos jaulas, la de arranque (1) y la jaula de trabajo (2).

Al aumentar la velocidad del motor, la frecuencia de las corrientes del rotor disminuye, y la reactancia inductiva de las jaulas ejerce cada vez menos influencia sobre el trabajo del motor, y por tanto la distribución de las corrientes en las jaulas se determina sólo por su resistencia activa. Pero como ha indicado anteriormente, la resistencia activa de la jaula de trabajo es varias veces menor que la resistencia de la jaula de arranque. Por consiguiente, durante el trabajo normal del motor la mayor parte de la corriente pasa por jaula de trabajo y el par nominal se produce preferentemente a cuenta de esta jaula.

La figura anterior muestra el par de arranque en función de la magnitud del deslizamiento de un motor de doble jaula. En el diagrama, la curva (1) muestra la variación del par que crea el devanado de arranque; la curva (2), muestra la variación del par que crea el devanado de trabajo. La suma de los

valores instantáneos de los pares de los dos devanados forma la curva  $M$  del par del motor de doble jaula

Más sencillo en su fabricación es el rotor cuyas dos jaulas están inyectadas de aluminio. En la figura 2.4, se muestra el aspecto exterior y la sección parcial de un rotor con doble jaula de aluminio. El motor de doble jaula es entre un 20 y un 30% más caro que el motor asíncrono con rotor de jaula de ardilla de construcción corriente.

Además, de los motores de doble jaula, se utilizan los motores con ranura profunda. La relación entre la longitud de la ranura y su anchura esta en la relación de 10 a 12. En el momento del arranque la parte inferior de la ranura está sometida a un número de líneas magnéticas del flujo de dispersión mayor que la parte superior de la misma. Lo que conlleva que la reactancia inductiva de la parte inferior de la ranura sea mayor que la reactancia inductiva de la parte superior. Este aumento hace que aumente el flujo de corriente en la parte superior de la ranura disminuyendo en su parte inferior. La densidad de la corriente en las capas superiores de las barras de las ranuras aumenta, lo que equivale a la reducción de la sección de las barras y al aumento de la resistencia activa del devanado de las ranuras. Como es sabido, esto lleva al incremento del par de arranque del motor. Además, el aumento de la reactancia inductiva del devanado del rotor provoca la disminución de la corriente de arranque. Al aumentar la velocidad, el motor adquiere propiedades que corresponden a su construcción normal.

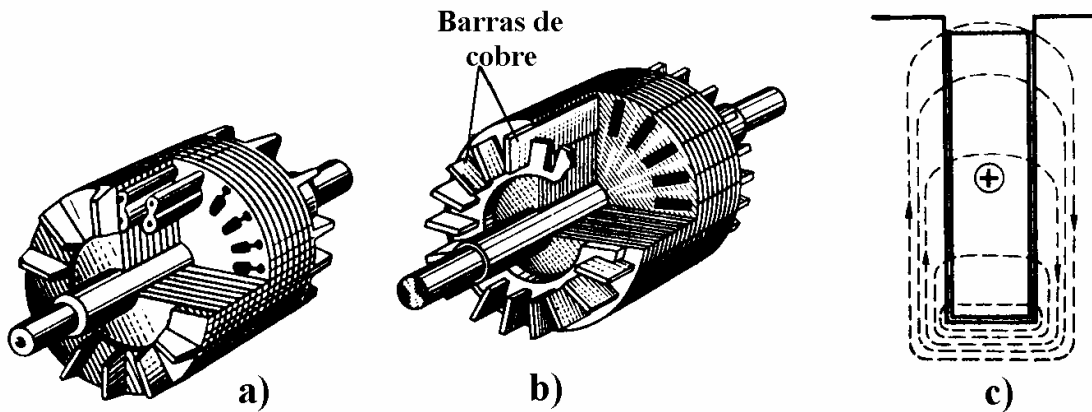


Figura 2.4. a) Rotor con doble jaula de aluminio. b) y c) Rotor con ranura profunda.

### 2.4.1.1 Motor asíncrono de rotor bobinado

Analizando las deficiencias de los motores asíncronos con rotor de jaula, conviene señalar que es difícil, a frecuencia constante, regular su velocidad de rotación ya que su corriente de arranque es grande. Una variante de motor asíncrono que intenta solventar estos problemas es el motor con rotor bobinado.

La estructura del estator de este motor y su devanado no se diferencian de la del estator de un motor con rotor de jaula convencional, las diferencias las tenemos que buscar en la construcción del rotor.

El motor de rotor bobinado tiene un rotor en el cual están alojados, igual que en el estator, tres devanados de fase montados en estrella. Los extremos de los devanados de fase del rotor se unen a tres anillos rozantes de cobre, fijados en el árbol del rotor y aislados tanto entre sí, como del núcleo de acero del rotor.

Anteriormente se ha indicado que al introducir la resistencia activa en el circuito del rotor, disminuye la corriente de arranque del motor y aumenta el par de arranque del mismo. Para este fin los motores de rotor bobinado disponen de un reóstato de arranque unido con el devanado del rotor mediante escobillas dispuestas sobre los anillos rozantes. Al poner en marcha el motor, se añade la resistencia total del reóstato. A medida que la velocidad de rotación del rotor aumenta la resistencia del reóstato

disminuye gradualmente y, cuando, al fin, el motor alcanza su velocidad nominal, la resistencia del reóstato se elimina completamente, poniéndose el reóstato en cortocircuito.

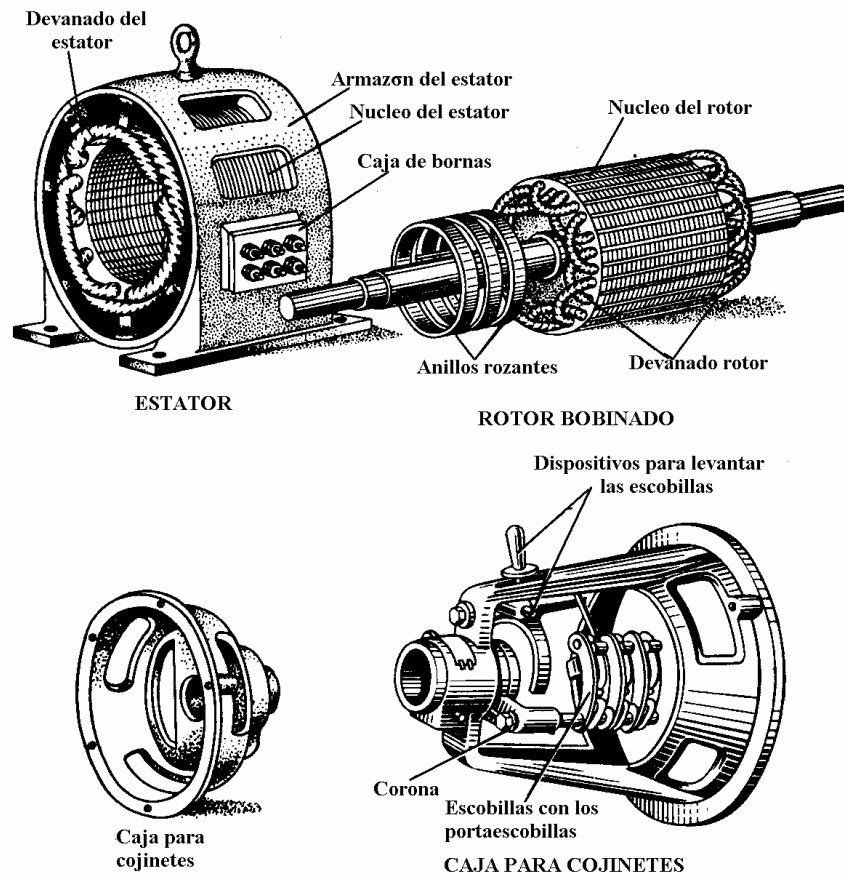


Figura 2.5. Motor asíncrono con rotor bobinado. Secciones y detalles de su forma constructiva.

En algunas construcciones de motores de rotor bobinado existe un dispositivo que permite cerrar los anillos rozantes o colectores y levantar las escobillas.

### 2.4.1.2 Propiedades de los motores asíncronos y su empleo

Las ventajas de los motores asíncronos con rotor de jaula son:

- velocidad aproximadamente constante para diferentes cargas.
- posibilidad de soportar grandes sobrecargas.
- sencillez en la construcción.
- sencillez de arranque y posibilidad de automatización.
- $\cos \varphi$  y rendimientos más altos que en los motores de rotor bobinado.
- Ausencia de contactos móviles.

En cuanto a las desventajas podemos citar:

- dificultad en regular el número de revoluciones.
- gran corriente de arranque.
- $\cos \varphi$  bajo, cuando la carga es pequeña.
- sensibilidad a las oscilaciones de la tensión.

Prácticamente, los motores asíncronos con rotor de jaula de ardilla se emplean cuando no se necesita regular la velocidad de rotación del motor y cuando las potencias de los motores no son grandes.

Las ventajas de los motores asincrónicos de rotor bobinado son:

- gran par de arranque inicial.

- posibilidad de grandes sobrecargas.
- velocidad aproximadamente constante, con cargas diferentes.
- menor corriente de arranque en comparación con los motores de jaula de ardilla.
- posibilidad de utilizar dispositivos de arranque automáticos.

Mientras que entre los inconvenientes destacamos:

- sensibilidad a las oscilaciones de la tensión.
- $\cos \varphi$  y rendimientos menores que en los motores de jaula de ardilla.
- $\cos \varphi$  bajo en caso de cargas pequeñas.
- Necesidad de mantenimiento periódico.

En definitiva, los rotores de los motores asíncronos convencionales están formados por chapas magnéticas empiladas sobre el eje de la máquina. El campo magnético rotatorio creado por el estator genera unas fuerzas electromotrices paralelas al eje y por tanto perpendiculares a las chapas del rotor, estas corrientes no pueden circular si las chapas quedan eléctricamente aisladas entre sí, siendo necesario el concurso de los anillos de la jaula de ardilla convencional para cerrar el circuito eléctrico y conducir las corrientes rotoricas.

En la actualidad es posible encontrar numerosas variantes de estos motores convencionales, persiguiendo cada una de ellas unas prestaciones determinadas. De forma general, es posible englobar estas variantes en unos pocos modelos básicos.

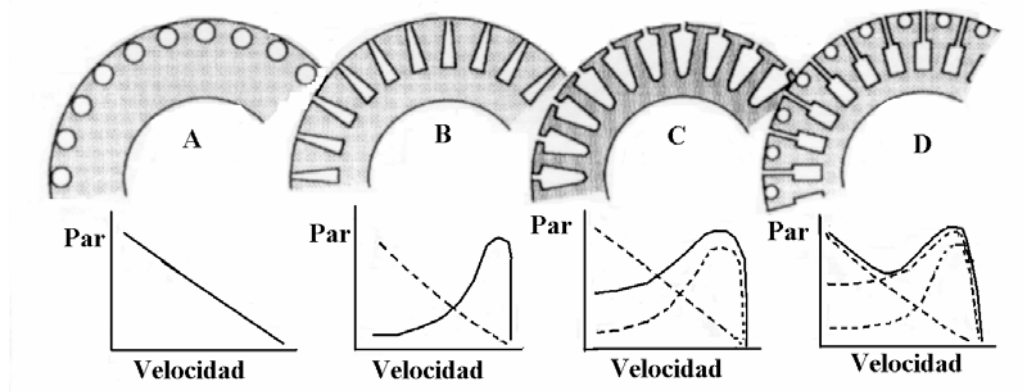


Figura 2.6. Configuraciones típicas de motores asíncronos.

- Bobinado de simple jaula con gran resistencia y mínima inductancia.
- Jaula de ranura profunda de poca resistencia y reactancia progresiva con el deslizamiento.
- Ranura de baja resistencia y baja reactancia.
- Finalmente existen otras configuraciones de doble o triple jaula que combinan las características de las disposiciones anteriores, con valores de resistencia y reactancia para cada una de las jaulas, logrando así curvas de Par-Velocidad adaptadas a muy diversas aplicaciones. Normalmente en estas disposiciones dobles se combina la jaula interior de mínima resistencia y reactancia muy elevada para deslizamientos menores que el del par nominal, con la jaula exterior de gran resistencia y mínima reactancia para deslizamientos mayores, incluso a rotor parado

En todas estas disposiciones, las corrientes circulan por los conductores de la jaula, mientras que los campos magnéticos circulan por las chapas. El funcionamiento de estos motores depende principalmente del campo magnético, de la corriente y del radio del conductor al eje.

En la siguiente tabla podemos observar las características de arranque de algunos motores de jaula. Las propiedades de arranque se dan en forma de relación entre los valores de arranque y los valores nominales.



Motor jaula normal		Motor de doble jaula		Motor con ranura profunda	
$I_{arrq}/I_n$	$M_{arrq}/M_n$	$I_{arrq}/I_n$	$M_{arrq}/M_n$	$I_{arrq}/I_n$	$M_{arrq}/M_n$
4-7	0.8-1.2	3.3-5.5	1-2	4-4.8	1.2-1.5

Tabla II.I. Características de arranque de los motores con rotor de jaula de ardilla.

### 2.4.2 Motores asíncronos trifásicos con rotor macizo

El rotor de este motor<sup>{L-45}</sup> representa un cilindro ferromagnético macizo. Semejante rotor desempeña simultáneamente el papel de circuito magnético y de circuito de corriente. El campo magnético giratorio penetra a una profundidad determinada en el cuerpo del rotor e induce en él unas corrientes en remolino. Estas corrientes al interactuar con el campo magnético forman un momento electromagnético. A causa del efecto superficial, las corrientes en remolino circulan por una capa relativamente fina a la profundidad de penetración del campo electromagnético en el cuerpo del rotor. La profundidad equivalente de penetración depende de la frecuencia de magnetización del rotor. Como ejemplo, para un motor que con una frecuencia de 50 Hz la profundidad equivalente de penetración durante el arranque ( $s = 1$ ) sea de sólo 1 o 3 mm, en régimen de funcionamiento ( $s = 0.05$ ), ésta aumentará hasta aproximadamente unos 15 mm.

En general, en una aproximación lineal, la profundidad de penetración varía inversamente proporcional a  $(s)^{1/2}$ . Esto conduce a la correspondiente variación de la sección de la capa, por la cual fluyen las corrientes en remolino, la resistencia óhmica del rotor macizo,  $R'_2 = R'_{20} \cdot (s)^{1/2}$ , donde  $R'_{20}$  es la resistencia óhmica reducida para  $s = 1$ , y  $X'_2$  su inductancia de dispersión. Como resultado de esta manifestación del efecto pelicular, el momento de arranque en el motor con rotor macizo es bastante grande ( $M_{arr}/M_{nom} = 1.5 \dots 2.0$ ), y solamente cede en prestaciones respecto al motor de jaula por sus propiedades de funcionamiento: el rendimiento y el factor de potencia. Esto se explica por el hecho de que en el régimen nominal para deslizamientos de 0,1 a 0,5 la profundidad de penetración de la corriente y el flujo en el cuerpo del rotor es bastante pequeña, y la resistencia eléctrica para la corriente y la resistencia magnética para el flujo son grandes, a causa de lo cual, el motor tiene grandes pérdidas eléctricas en el rotor y una fuerte corriente magnetizante.

Para mejorar las características de funcionamiento, en algunas ocasiones se fijan a las dos superficies extremas del rotor cilíndrico unos anillos de cobre en cortocircuito. Los anillos de cobre tienen una resistencia eléctrica específica considerablemente menor que el cuerpo de acero del rotor, y desempeñan el mismo papel que los anillos extremos de cortocircuito de la jaula de ardilla. Como resultado la resistencia óhmica del inducido macizo disminuye a costa del aumento de la conductibilidad eléctrica de las partes extremas. Con este fin en los micromotores se recurre al recubrimiento de la superficie exterior del rotor macizo con una capa fina de cobre de 0,1 a 0,3 mm de espesor. Además se puede lograr mejorar las características de funcionamiento eligiendo un material para el rotor macizo, que posea la conductibilidad eléctrica y la permeancia óptimas. En este sentido, últimamente se han obtenido aleaciones que poseen una gran conductibilidad eléctrica y menor permeabilidad magnética que en el acero, con el empleo de las cuales la profundidad de penetración del campo disminuye esencialmente y mejoran los índices técnicos.

El uso del rotor macizo, que posee una gran resistencia mecánica, permite construir motores asíncronos para frecuencias bastante elevadas de rotación (hasta 100000 rpm). Estos motores se destinan para la alimentación desde fuentes de elevada frecuencia (400 Hz ...1500 Hz) y hallan aplicación en accionamientos eléctricos especiales, por ejemplo, en los dispositivos giroscópicos.

A pesar de los buenos requisitos tecnológicos de la estructura, los motores con rotor macizo por ahora no se usan en el accionamiento eléctrico industrial, lo que está justificado exclusivamente por sus índices energéticos demasiado bajos en los regímenes de funcionamiento

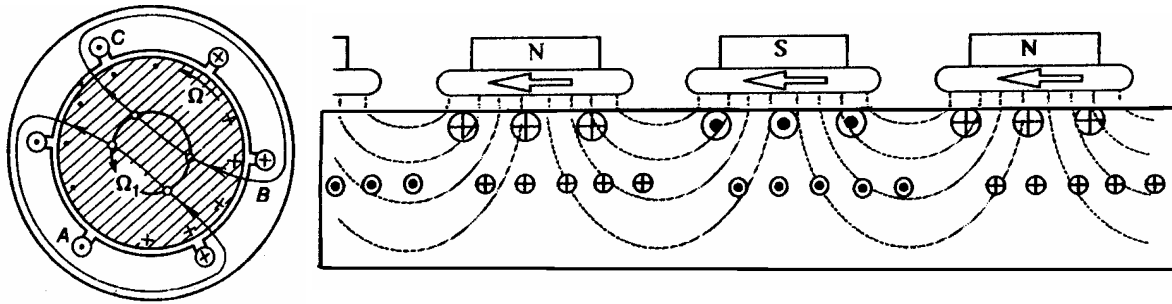


Figura 2.7. Circulación de las corrientes y líneas de campo magnético en el motor con rotor macizo.

En resumen, los popularmente denominados "Motor-Par", son motores asíncronos trifásicos con el estátor construido de forma clásica, pero en los cuáles el rotor está constituido por un cilindro macizo de hierro dulce (con reducido ciclo de histéresis). Con este tipo de rotor se consigue una mayor sección útil para el paso del flujo, debido a la inexistencia de ranuras, ahorrándose un 5% del factor de empilado por aislamiento entre chapas. Uno de sus inconvenientes lo constituye el hecho de que las líneas de campo magnético pasan por su seno, alcanzando profundidades considerables, y creando por tanto, fuerzas electromotrices (f.e.m.) más débiles.

La repercusión inmediata de una determinada corriente circulando a mayor profundidad es su menor participación en la creación de par debido principalmente a:

- La menor distancia al eje de la máquina.
- Por poseer mayor reactancia disminuyendo el factor de potencia, aunque las pérdidas en el cobre se mantienen en los mismos valores como si se tratara de corrientes que circulan por la periferia del rotor.

La figura anterior expresa este fenómeno, observándose que las corrientes interiores son menores, estando asimismo estas corrientes retrasadas en el sentido del desplazamiento.

### 2.4.3 Motores asíncronos trifásicos con rotor hueco de material amagnético

El rotor de este motor<sup>{L-45}</sup> presenta un cilindro hueco de paredes finas (3), fabricado de material conductor amagnético, generalmente de aleaciones de aluminio. El rotor hueco gira en el espacio entre los circuitos de los estatores exterior (1) e interior (2), en uno de los cuales (en el caso representado el exterior) existe un devanado trifásico. El momento electromagnético que actúa sobre el rotor se forma como resultado de la interacción del campo giratorio con las corrientes en remolino inducidas en el rotor.

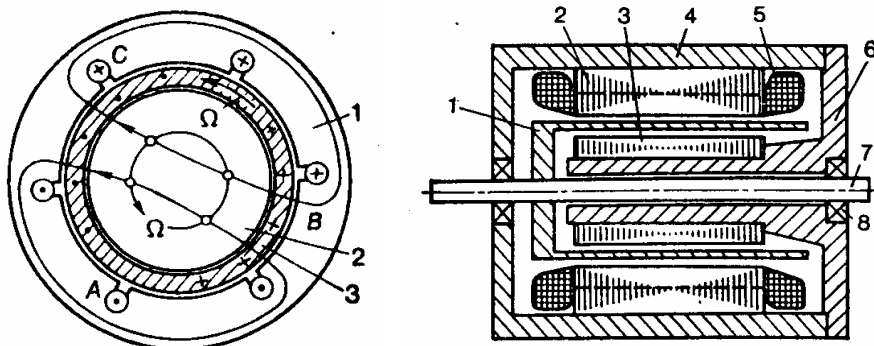


Figura 2.8. Motor asíncrono con rotor hueco amagnético. Corrientes y campo magnético.

El motor con rotor hueco amagnético se aplica principalmente como motor operador en diversos dispositivos automáticos. Contribuye a la amplia divulgación de los motores su propiedad muy valiosa, de disponer de un muy pequeño momento de inercia del rotor.

Son motores pequeños que se fabrican desde unos vatios de potencia hasta un máximo de 2 kW. En cuanto a frecuencias desde los 50 hasta 1000 Hz son comunes, pasando por 200 Hz, 400 Hz, o 500 Hz.

A diferencia del motor con rotor macizo ferromagnético el espesor de las paredes del rotor hueco amagnético es muchas veces menor que la profundidad de penetración incluso a la hora de poner en marcha el motor. Por esta razón, las corrientes en remolino para cualquier deslizamiento se distribuyen por el espesor de las paredes del rotor prácticamente en forma uniforme, y su resistencia óhmica reducida  $R'_2$  no depende del deslizamiento. Además la reactancia de dispersión del rotor hueco  $X'_2$  es muy pequeña pudiéndose despreciar al efectuar los cálculos del motor.

La resistencia óhmica reducida del rotor hueco  $R'_2$  es fácil de calcular si se desprecian las resistencias de sus partes extremas y se imagina al mismo formado por  $Z_2$  barras elementales. La resistencia óhmica de cada una de estas barras  $R_b = (\rho \cdot l / e \cdot t_{z2})$ , donde  $l$ , es la longitud del rotor,  $e$ , el espesor de las paredes del rotor y  $t_{z2}$ , la extensión de la barra elemental en la dirección tangencial. De lo que podemos deducir:

$$R'_2 = 2 \cdot \rho \cdot l \cdot m_1 (w_1 \cdot k_v)^2 / (\pi \cdot R \cdot e) \quad [2.79]$$

Donde  $R$  es el radio del rotor hueco, y  $m_1$ ,  $w_1$  y  $k_v$ , son respectivamente, el número de fases, el de espiras y el coeficiente de devanado del bobinado del estator.

A pesar que el espesor de las paredes del rotor hueco se elige el mínimo posible (máximo de 1mm), el espacio amagnético entre los estatores interior y exterior resulta bastante grande (unos 1.5mm). Por esta razón la corriente magnetizante en estos motores es notablemente mayor que en los motores de jaula, alcanzando valores de un 80% o 90% del valor de la intensidad nominal. Esto conduce a la disminución del factor de potencia a valores de  $\cos \varphi = 0.4$ , al aumento de la pérdidas eléctricas en el devanado primario y a la disminución del rendimiento hasta valores máximos del 40% en regímenes nominales.

#### 2.4.4 Motores asíncronos trifásicos con rotor de chapas en espiral

Si configuramos ahora un rotor mediante chapas conformadas en hélice<sup>{R-1}</sup>, colocadas en disposición radial alrededor del eje, es posible conseguir que los campos magnéticos creados en el estator queden confinados más en la periferia del rotor, induciéndose f.e.m. periféricas y corrientes a lo largo de las propias chapas, únicamente activas en su periferia.

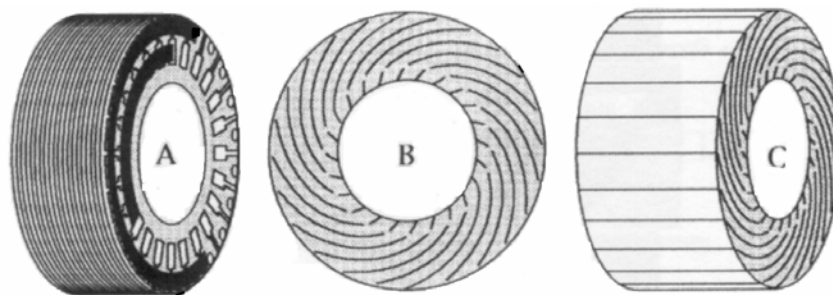


Figura 2.9. Diversas configuraciones de rotores. a) Jaula de ardilla. b) y c) Rotor de chapas en espiral

Las corrientes periféricas, con el rotor de chapas, disponen de más sección para circular si las comparamos con las corrientes de un rotor de jaula de ardilla convencional. La siguiente figura muestra a efectos explicativos una representación plana desarrollada de la disposición de las chapas, en vez de conformadas en forma de ángulo para diferenciar las dos zonas, una por donde pasan las corrientes activas, sirviendo la otra para recibir las corrientes posibles de retorno (una propuesta de corrientes de retorno).

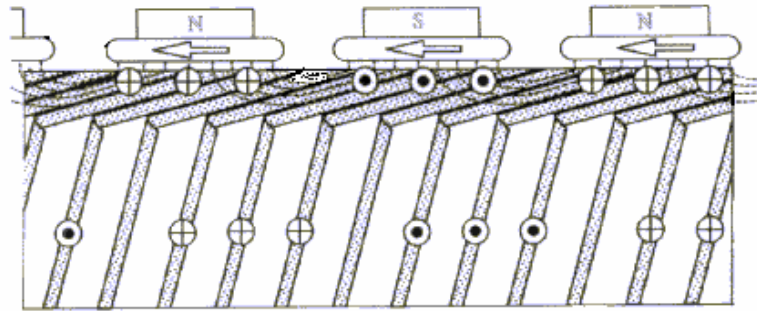


Figura 2.10. Sección plana desarrollada de un rotor con chapas en espiral. La figura muestra los caminos para las corrientes activas y corrientes de retorno.

No obstante las corrientes de retorno pueden establecerse en dos variantes:

- Variante (A), mediante anillos de cortocircuito. Con este tipo de construcción la única resistencia rotórica que debe tenerse en consideración, es la correspondiente a las zonas exteriores de las chapas magnéticas que constituyen el rotor. Esto es debido a que el aro de cortocircuito puede construirse teóricamente de mucha sección, siendo su resistencia totalmente despreciable frente a la resistencia que ofrecen las capas superficiales de las chapas. Esta solución es la más laboriosa de fabricación, pero es la variante que da mejores resultados.

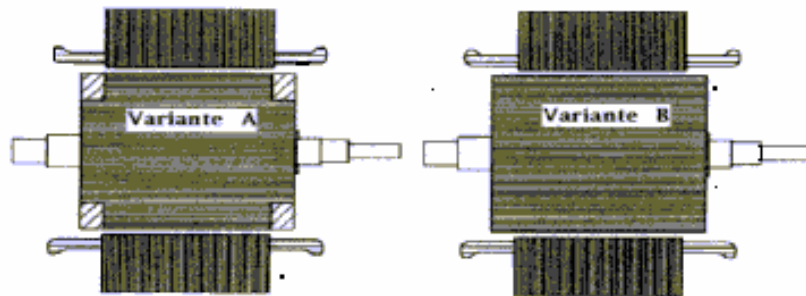


Figura 2.11. Variantes de rotor de chapas. A) Con aros en cortocircuito. B) Sin aros en cortocircuito.

- En la segunda variante (B), es una parte de las propias chapas la utilizada como camino de retorno para las corrientes no generadoras de par. En este modelo la zona de las corrientes activas generadoras de par se encuentra confinada en la periferia de las chapas, al quedar éstas afectadas por el campo magnético, quedando suficiente sección de chapa para el camino de retorno de las corrientes no generadoras de par, no aumentándose así la resistencia del bobinado rotorico al ser éste de muy elevada sección.



Figura 2.12. Algunos de los rotores y estatores empleados.

En función de lo expuesto, en la presente tesis se han construido varias variantes de inducidos, todos ellos formados por un conjunto de chapas magnéticas dispuestas radialmente con las testas aplicadas directamente sobre el eje. Estas chapas cubren completamente la superficie cilíndrica exterior del eje. Para eliminar los espacios libres que resultarían de aumentar la distancia radial, dado que el espesor de las chapas es constante, se han inclinado las chapas arrollándose unas sobre las otras, resultando un rotor formado por un conjunto de chapas en espiral

De esta forma, el flujo que se genera en los bobinados del estator, concretamente el campo magnético giratorio, incide de forma inclinada respecto a las chapas, produciendo en las mismas unas corrientes parásitas que al circular en presencia del flujo mencionado generan unos pares antagónicos. El par externo es mayor que el par interno, debido a que se produce a una distancia radial mucho mayor, resultando un momento neto de rotación de valor igual a la diferencia de los pares mencionados.

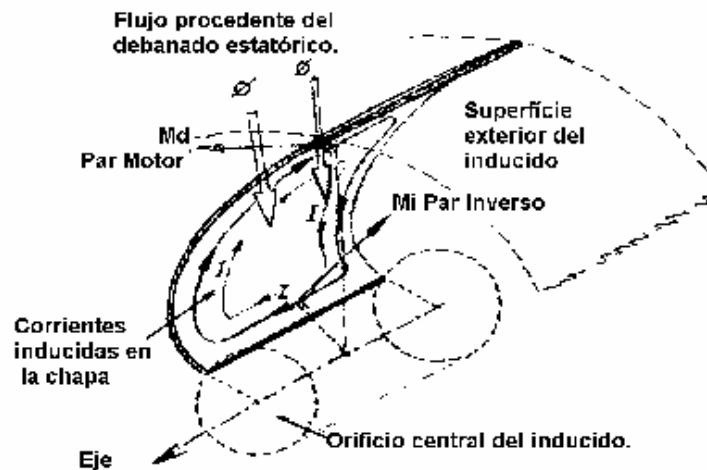


Figura 2.13. Disposición del par, corrientes parásitas y campo magnético en el interior de las chapas.

### 2.4.4.1 Aspectos constructivos

Para la construcción de los inducidos de los prototipos propuestos se sigue un proceso radicalmente diferente al que procede para la construcción de un rotor de jaula de ardilla convencional.

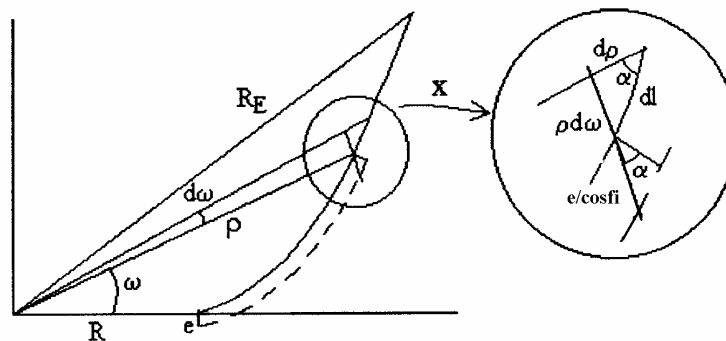


Figura 2.14. Gráfico de razones geométricas de las chapas del rotor.

Ya se ha indicado que en estos nuevos inducidos las chapas no tienen ranura alguna, por consiguiente para que éstas estén perfectamente acopladas y no queden espacios de aire entre las mismas, su silueta ha de tener un perfil bien definido. Este perfil se consigue por conformación con un utillaje o matriz que deforme cada pieza o chapa dándole la forma precisa que se describe a continuación.

Si consideramos un rotor inducido de radio interior  $R$ , formado por  $n$  chapas de espesor  $e$ , siendo este espesor muy pequeño en comparación con  $R$  y con un radio exterior  $R_E$ , dispondremos de las relaciones trigonométricas mostradas en la figura 2.14.

**2.4.4.1.1 Cálculo de la longitud de las chapas en función del radio interior  $R$ , y del exterior  $R_E$** 

Igualando los perímetros de espesor de chapa en los radios  $R$  interno y  $R_E$  externo, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$2 \cdot \pi \cdot R = e \cdot n \quad [2.80] \quad 2 \cdot \pi \cdot \rho = \frac{e \cdot n}{\cos \alpha} \quad [2.81]$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{R}{\rho} = \cos \alpha \quad [2.82]$$

En el triángulo diferencial, teniendo presente que los dos ángulos " $\alpha$ " son iguales, por lados perpendiculares tendremos:

$$dl = \frac{d\rho}{\cos \alpha} \quad \text{Es decir} \quad dl = \frac{\rho \cdot d\rho}{R} \quad [2.83]$$

Si ahora integramos, podemos llegar a la expresión:

$$[L] = \left[ \frac{\rho^2}{2 \cdot R} \right]_R^{R_E} \quad \text{Es decir} \quad L = \frac{(R_E^2 - R^2)}{2 \cdot R} \quad [2.84]$$

Expresión que nos relaciona la longitud de cada chapa en función del radio interior  $R$ , y del radio exterior  $R_E$ .

**2.4.4.1.2 Cálculo del radio de curvatura de las chapas**

No es suficiente para determinar la forma exacta de la disposición de las chapas del rotor, con conocer su longitud en función de los radios externo e interno. Es necesario además conocer otro parámetro, el radio de curvatura de las chapas en función del ángulo que vayan tomando las mismas en cada momento (curvatura de la chapa en cada longitud diferencial). Si partimos de las identidades anteriores, tendremos en coordenadas polares:

$$\cos \alpha = \frac{R}{\rho} \quad \text{y} \quad \text{tag} \alpha = \frac{(\rho \cdot dw)}{d\rho} \quad [2.85]$$

Por tanto ahora ya es posible obtener la ecuación diferencial en polares que debemos integrar entre los límites de  $R$  y  $R_E$ , para obtener en cada punto de la chapa, la curvatura deseada que cumpla con los objetivos previstos.

$$\frac{d\rho}{dw} = \frac{\rho}{\text{tag} \alpha} = \frac{\rho}{\left( \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)} = \frac{(\rho \cdot \cos \alpha)}{\text{sen} \alpha} = \frac{\rho \cdot \left( \frac{R}{\rho} \right)}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{R}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 \right)}} = \frac{R \cdot \rho}{\sqrt{(R^2 - \rho^2)}} = \rho' \quad [2.86]$$

La resolución de esta ecuación diferencial, en polares nos determina la siguiente relación:

$$w = \sqrt{\frac{(R^2 - \rho^2)}{R^2}} - \text{Arctanh} \frac{1}{\sqrt{\frac{(R^2 - \rho^2)}{R^2}}} \quad [2.87]$$

Ecuación que nos permite obtener la curvatura de la chapa en cada punto como muestra la siguiente tabla confeccionada con varios valores que nos permiten dibujar perfectamente la curva.

MÓDULO (mm)	ÁNGULO (grados)	EJE X (mm)	EJE Y (mm)	MÓDULO (mm)	ÁNGULO (grados)	EJE X (mm)	EJE Y (mm)
150	0,00	150,0	0,0	370	63,11	167,3	330,0
155	0,32	155,0	0,9	380	66,61	150,9	348,8
160	0,90	160,0	2,5	390	70,13	132,6	366,8
165	1,64	164,9	4,7	400	73,66	112,5	383,9
170	2,49	169,8	7,4	410	77,21	90,7	399,8
175	3,43	174,7	10,5	420	80,77	67,3	414,6
180	4,45	179,5	14,0	430	84,35	42,4	427,9
185	5,54	184,1	17,9	440	87,93	15,9	439,7
190	6,68	188,7	22,1	450	91,53	-12,0	449,8
195	7,88	193,2	26,7	460	95,13	-41,1	458,2
200	9,12	197,5	31,7	470	98,75	-71,5	464,5
205	10,40	201,6	37,0	480	102,37	-102,8	468,9
210	11,72	205,6	42,7	490	106,01	-135,1	471,0
215	13,08	209,4	48,6	500	109,6	-168,1	470,9
220	14,46	213,0	54,9	510	113,3	-201,7	468,4
225	15,87	216,4	61,5	520	116,9	-235,6	463,5
230	17,30	219,6	68,4	530	120,6	-269,9	456,2
235	18,76	222,5	75,6	540	124,3	-304,1	446,3
240	20,24	225,2	83,0	550	127,9	-338,2	433,7
245	21,75	227,6	90,8	560	131,6	-371,9	418,6
250	23,26	229,7	98,7	570	135,3	-405,2	400,9
255	24,80	231,5	107,0	580	139,0	-437,7	380,6
260	26,35	233,0	115,4	590	142,7	-469,2	357,6
265	27,92	234,2	124,1	600	146,4	-500,0	332,2
270	29,50	235,0	133,0	610	150,1	-528,7	304,2
275	31,10	235,5	142,0	620	153,8	-556,2	273,9
280	32,70	235,6	151,3	630	157,5	-582,0	241,1
285	34,32	235,4	160,7	640	161,2	-605,9	206,2
290	35,95	234,8	170,3	650	164,9	-627,6	169,1
295	37,59	233,8	180,0	660	168,6	-646,7	132,0
300	39,24	232,4	189,8	670	172,4	-664,1	89,1
305	40,90	230,5	199,7	680	176,1	-678,4	46,4
310	42,56	228,3	209,7	690	179,8	-690,0	2,3
315	44,24	225,7	219,8	700	183,5	-698,7	-43,2
320	45,92	222,6	229,9	710	187,3	-704,3	-89,9
325	47,61	219,1	240,1	720	191,0	-706,8	-137,4
330	49,31	215,1	250,2	730	194,7	-706,0	-185,8
335	51,02	210,8	260,4	740	198,5	-701,8	-234,6
340	52,73	205,9	270,6	750	202,2	-694,3	-283,7
345	54,44	200,6	280,7	760	206,0	-683,3	-332,8
350	56,17	194,9	290,7	770	209,7	-668,7	-381,7
355	57,90	188,7	300,7	780	213,5	-650,7	-430,1
360	59,63	182,0	310,6	790	217,2	-629,2	-477,8
365	61,37	174,9	320,4	800	221,0	-604,1	-524,5

Tabla II.II. Coordenadas polares y cartesianas de la curvatura de la chapa del rotor.

Con la ecuación hallada podemos representar gráficamente los perfiles de las chapas que conformarán el rotor. Nótese que a medida que aumentamos el diámetro exterior del eje del rotor las chapas también aumentan su radio de curvatura, pudiéndose obtener por tanto distintas configuraciones con solo aumentar el diámetro exterior del rotor.

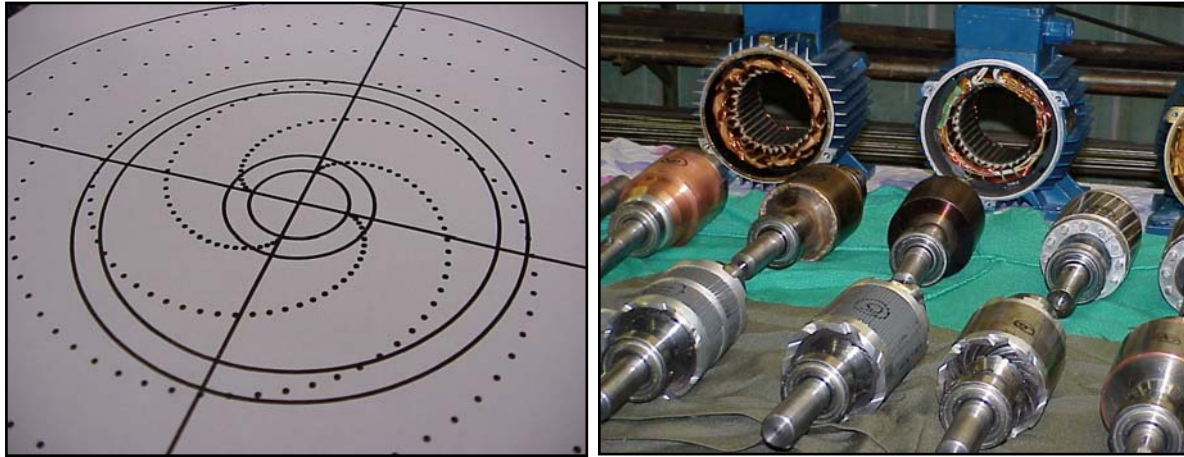


Figura 2.15. Curvatura exacta de las chapas en función del radio y detalle de algunos rotores.