

## CAPÍTULO VII ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO DEL MOTOR DE CHAPAS

### 7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se deducirán unas expresiones que permitan hallar en cualquier punto del motor con rotor de chapas (sea entrehierro, rotor o estator), la inducción magnética, la densidad de corriente y la tensión inducida.

Para proceder a este análisis se han seguido unas pautas para la confección de las ecuaciones. Así en primer lugar se deducen las ecuaciones que permiten hallar el campo magnético creado por el estator en cualquier punto del rotor. Seguidamente se vuelven a realizar los cálculos para otro punto del rotor. Conocidas estas dos inducciones, es posible hallar la tensión entre estos dos puntos, y con esta tensión se halla la densidad de corriente que se genera en las chapas del rotor al estar sometidas al campo magnético del estator. A partir de aquí es posible obtener el resto de las magnitudes requeridas.

La deducción de estas expresiones conlleva una cierta dificultad, por lo que aparte de ser deducidas se acompañará una breve explicación del proceso de obtención.

### 7.2 ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO DEL MOTOR A 3000rpm CON ROTOR DE CHAPAS TIPO A

El motor analizado es el motor de dos polos con rotor de chapas magnéticas tipo A, el cual ha sido considerado en conjunto como el más equilibrado en sus prestaciones. Para este motor se han determinado las ecuaciones analíticas, que una vez validadas, servirán de base para conocer el comportamiento electromagnético del mismo.

#### 7.2.1 Campo electromagnético creado por las ranuras del estator ( $\beta s$ )

En un momento de funcionamiento cualquiera, por las ranuras del estator circulan unas corrientes con un sentido determinado. Estas intensidades crean en su entorno un campo magnético de dirección y sentido acorde con las propias corrientes que lo originan.

Las líneas del campo magnético<sup>{L-6}</sup> creadas por cada una de las ranuras del estator cortará las chapas del rotor en un punto cualquiera  $P$ , definido por las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$  como queda reflejado en la siguiente figura.

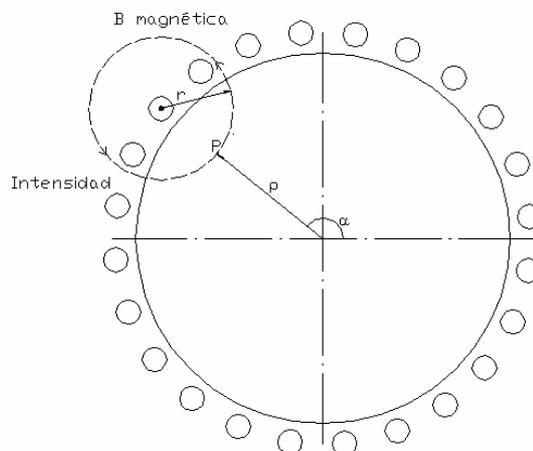


Figura 7.1. Campo magnético creado por la corriente de una ranura del estator en un punto  $P$ .

La intensidad de cada ranura del estator vendrá determinada por:

$$|\bar{I}_e| = |\bar{B}_e| \cdot \mathfrak{R}_m \cdot S_{flujos} \quad [7.1]$$

Donde:

$I_e$  = intensidad que circula por una ranura del estator ( $A$ )

$B_e$  = campo magnético creado por la intensidad  $I_e$  en un punto  $P$ , del motor ( $T$ )

$R_m$  = reluctancia magnética del circuito magnético creado ( $H^{-1}$ )

$S_{flujos}$  = superficie que atraviesa el flujo magnético ( $m^2$ )

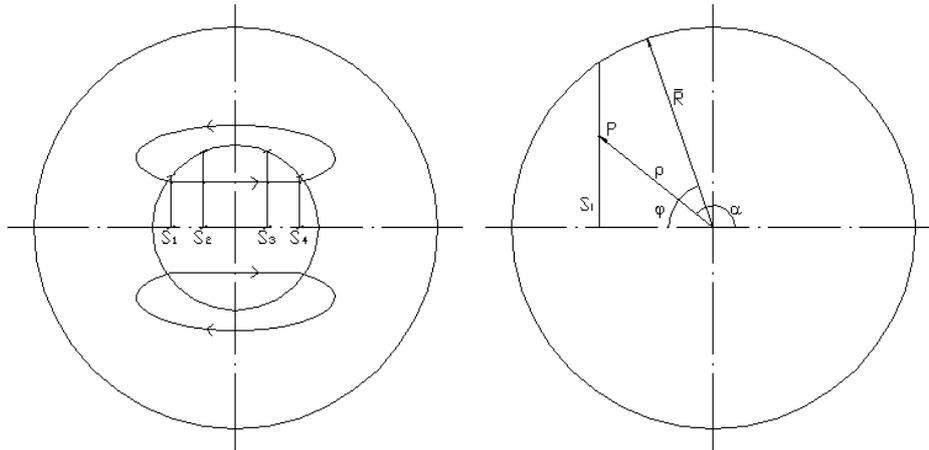


Figura 7.2. Determinación gráfica de la superficie que atraviesa el flujo magnético.

La sección que atraviesa el flujo magnético en un momento determinado vendrá determinada por la siguiente ecuación.

$$S_{flujos} = R \cdot \text{sen } \varphi \cdot L_{rotor} \quad [7.2]$$

Donde  $L_{rotor}$  es la longitud del núcleo de chapas del rotor en metros. Aparte, podemos escribir:

$$R \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \cos \alpha \quad [7.3]$$

$$\text{sen } \varphi = \sqrt{1 - \frac{\rho^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R^2}} \quad [7.4]$$

Con lo que podemos deducir la expresión para la sección que atraviesa el flujo magnético:

$$S_{flujos} = \sqrt{R^2 - (\rho \cdot \cos \alpha)^2} \cdot L_{rotor} \quad [7.5]$$

Por su parte, la reluctancia magnética<sup>{L-16}</sup> en  $H^{-1}$ , vendrá definida por:

$$\mathfrak{R}_m = \frac{1}{\mu_o \cdot \mu_r} \frac{L}{S_{flujos}} \quad [7.6]$$

Donde:

$L$  = longitud del recorrido del flujo magnético ( $m$ ).

$\mu_o = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  permeabilidad magnética del aire ( $H/m$ ).

$\mu_r$  = permeabilidad magnética relativa del material.

Si multiplicamos la sección que atraviesa el flujo magnético por la reluctancia obtenemos la expresión.

$$S_{\text{flujo}} \cdot \mathfrak{R}_m = \frac{1}{\mu_o \cdot \mu_r} \frac{L}{S_{\text{flujo}}} S_{\text{flujo}} = \frac{L}{\mu_o \cdot \mu_r} \quad [7.7]$$

Con lo que la intensidad (en  $A$ ) que circulará por una ranura vendrá dada por:

$$|\bar{I}_e| = |\bar{B}_e| \cdot \frac{L}{\mu_o \cdot \mu_r} \quad [7.8]$$

Lo que permite expresar la inducción magnética (en  $T$ ) de la siguiente forma.

$$|\bar{B}_e| = |\bar{I}_e| \frac{\mu_o \cdot \mu_r}{L} \quad [7.9]$$

Esta expresión no ofrecería problema si solamente existiera un material en el trayecto del flujo magnético, pero esto no es así ya que coexisten en este trayecto aire y chapa magnética. La chapa magnética del rotor, a efectos de cálculo, puede considerarse semejante a la chapa del estator sin ocasionar errores en los resultados de estas ecuaciones.

Por tanto, resulta imprescindible conocer la longitud que existirá de aire<sup>(L-16)</sup> y de chapa magnética en el recorrido de las líneas de flujo que pasan por el punto  $P$ , escogido.

$$L_{\text{aire}} = n_v \cdot e_{\text{aire}} + 2 \cdot \delta \quad [7.10]$$

Donde:

$L_{\text{aire}}$  = longitud del recorrido del flujo magnético por el aire ( $m$ ).

$n_v$  = número de chapas que atraviesan las líneas del flujo magnético.

$e_{\text{aire}}$  = espesor del aire entre dos chapas magnéticas ( $m$ ).

$\delta$  = espesor del entrehierro ( $m$ ).

Para la determinación del número de chapas que atraviesan las líneas del flujo magnético, nos puede ayudar la siguiente figura.

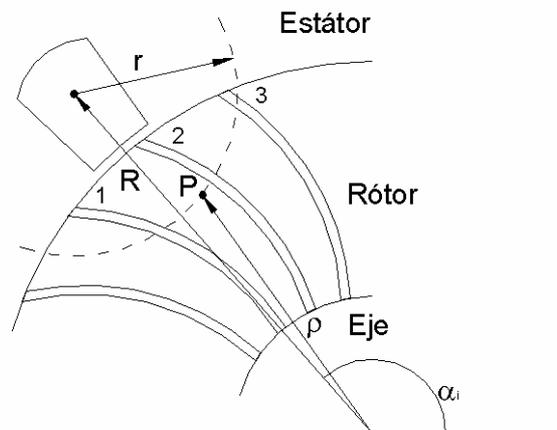


Figura 7.3. Determinación gráfica del número de chapas ( $n_v$ ), atravesadas por las líneas de flujo magnético que pasan por un punto  $P$ .

El número total de chapas magnéticas del núcleo del rotor es un dato, por lo que resulta sencillo determinar cuantas chapas existirán en un radian.

$$n_{chapas-radian} = \frac{n_{chapas-totales}}{2 \cdot \pi} \quad [7.11]$$

Debemos conocer ahora el ángulo en radianes que abarcará la línea de flujo magnético que pasa por el punto  $P$ , por lo que será necesaria la determinación de los ángulos ( $\beta_1$  y  $\beta_2$ ).

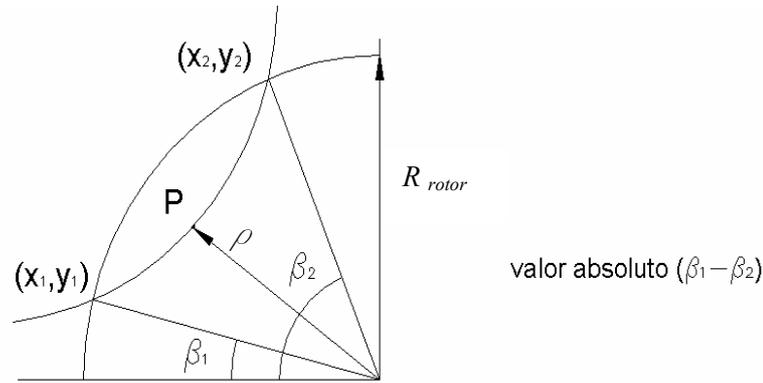


Figura 7.4. Condiciones geométricas que permitan la determinación del número de chapas  $n_v$ .

La circunferencia que marca el núcleo del rotor esta definida por:

$$x^2 + y^2 = R_{rotor}^2 \quad [7.12]$$

Mientras que la circunferencia que forma la línea del flujo magnético que pasa por el punto  $P$ , analizado es:

$$(R \cdot \cos \alpha_i - x)^2 + (R \cdot \sen \alpha_i - y)^2 = r^2 \quad [7.13]$$

Con la resolución de estas dos ecuaciones obtenemos los pares de puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , con lo que ya será posible la determinación de los ángulos ( $\beta_1$  y  $\beta_2$ ).

$$\beta_{1-grados} = \text{Arctg} \left( \frac{y_1}{x_1} \right) \text{ En grados. } \beta_{1-radianes} = \beta_{1-grados} \frac{2 \cdot \pi}{360} \text{ En radianes} \quad [7.14]$$

$$\beta_{2-grados} = \text{Arctg} \left( \frac{y_2}{x_2} \right) \text{ En grados. } \beta_{2-radianes} = \beta_{2-grados} \frac{2 \cdot \pi}{360} \text{ En radianes} \quad [7.15]$$

Ahora ya es posible determinar el número de chapas  $n_v$  que es atravesado por una línea del flujo magnético que pasa por el punto  $P$ .

$$n_v = \frac{n_{chapas-total}}{2 \cdot \pi} (\beta_1 - \beta_2) \quad [7.16]$$

Con lo que queda determinada la longitud de aire que se encuentra en una línea de flujo magnético que pasa por un punto  $P$ , originada por una ranura  $i$ . Mientras que la longitud de las chapas magnéticas atravesadas por el flujo magnético es:

$$L_{chapas} = 2 \cdot \pi \cdot r - (n_v \cdot e_{aire} + 2 \cdot \delta) \quad [7.17]$$

Donde:

$L_{chapas}$  = longitud del recorrido del flujo magnético por las chapas magnéticas ( $m$ ).

$r$  = radio de la circunferencia que envuelve desde la ranura analizada al punto  $P$  ( $m$ ).

Así, la inducción magnética<sup>{L-16}</sup> (en  $T$ ), originada por la corriente que circula por una ranura del estator sobre un punto  $P$ , será:

$$|\vec{B}_i| = \frac{|\vec{I}_i|}{\mathfrak{R}_m \cdot S} = \frac{|\vec{I}_i|}{\frac{L_{total}}{\mu_o \cdot \mu_r}} = \frac{|\vec{I}_i|}{\frac{L_{aire}}{\mu_o} + \frac{L_{Fe}}{\mu_o \cdot \mu_{rFe}}} \quad [7.18]$$

Ecuación de la cual se conocen todos los términos.

Las ecuaciones de las longitudes del rotor y del estator están determinadas por la distancia  $r$ , del punto analizado a la ranura del estator considerada. Esta distancia es función del ángulo  $\alpha$ , y del radio  $\rho$ , pudiéndose escribir la siguiente relación mediante el teorema del coseno.

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot R \cdot \cos(\alpha - \alpha_i)} \quad [7.19]$$

Siendo los ángulos y distancias los mostrados en la siguiente figura:

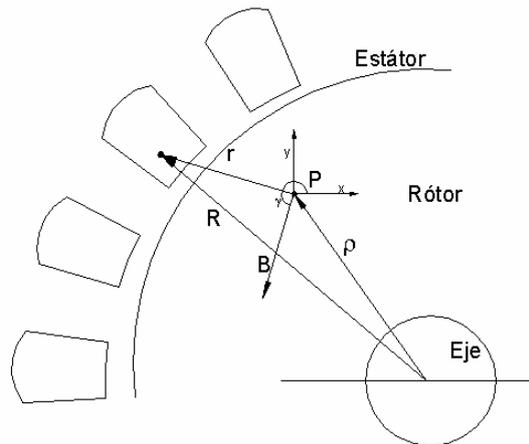


Figura 7.5. Relaciones trigonométricas del punto  $P$ , considerado respecto a la ranura del estator.

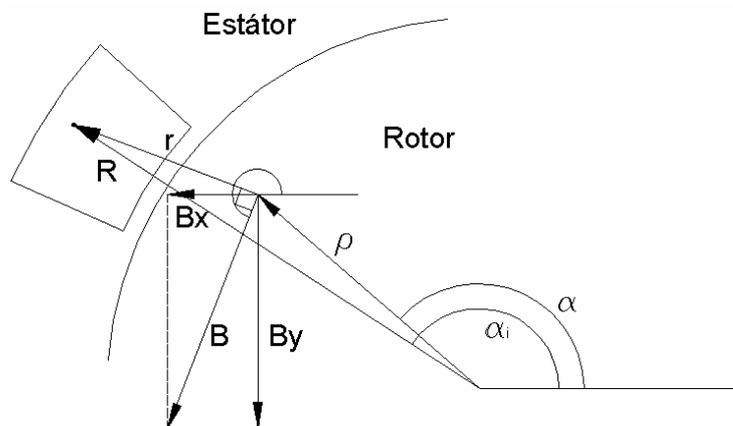


Figura 7.6. Relaciones trigonométricas que permiten obtener las componentes cartesianas del campo magnético en el punto  $P$ .

Por lo que tendremos para la posición particular dada en la figura 7.6, las siguientes relaciones trigonométricas:

$$r \cdot \cos(\gamma - 90^\circ) = R \cdot \cos \alpha_i - \rho \cdot \cos \alpha \quad [7.20]$$

$$r \cdot \text{sen}(\gamma - 90^\circ) = R \cdot \text{sen} \alpha_i - \rho \cdot \text{sen} \alpha \quad [7.21]$$

Y de aquí podemos deducir el  $\cos \gamma$ , y el  $\text{sen} \gamma$ .

$$\cos \gamma = \frac{R \cdot \text{sen} \alpha_i - \rho \cdot \text{sen} \alpha}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R \cdot \rho \cdot \cos(\alpha - \alpha_i)}} \quad [7.22]$$

$$\text{sen} \gamma = \frac{R \cdot \cos \alpha_i - \rho \cdot \cos \alpha}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R \cdot \rho \cdot \cos(\alpha - \alpha_i)}} \quad [7.23]$$

Conocidos estos ángulos y el módulo del campo magnético dado en la ecuación [7.18], podemos deducir las dos componentes rectangulares que lo forman, así como el campo magnético total.

$$|\bar{B}_{xi}| = |\bar{B}_i| \cdot \cos \gamma_i \quad [7.24]$$

$$|\bar{B}_{yi}| = |\bar{B}_i| \cdot \text{sen} \gamma_i \quad [7.25]$$

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{xi} + j\bar{B}_{yi} \quad [7.26]$$

Con lo que ya tenemos determinado el campo magnético en el punto  $P$ , originado por la corriente que circula por la ranura  $i$ , del estator. Pero el punto  $P$ , no sólo estará afectado por el campo magnético originado por la intensidad de esta ranura  $i$ , sino que estará afectado por el resto de las intensidades que circulan por las 36 ranuras que forman el estator. Aparte, estas intensidades no estarán en fase como corresponde a un sistema de alimentación trifásico equilibrado. Es decir, al existir tres fases, existen tres intensidades diferentes.

- Fase R:  $i(t) = \bar{I}_{\max} \cdot \cos wt \quad [7.27]$

- Fase S:  $i(t) = \bar{I}_{\max} \cdot (\cos wt - 120^\circ) = -\left(\frac{1}{2}\right)\bar{I}_{\max} \cdot \cos wt + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{I}_{\max} \text{sen} wt \quad [7.28]$

- Fase T:  $i(t) = \bar{I}_{\max} \cdot (\cos wt - 240^\circ) = -\left(\frac{1}{2}\right)\bar{I}_{\max} \cdot \cos wt - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{I}_{\max} \text{sen} wt \quad [7.29]$

Estas intensidades afectarán de forma diferente a cada ranura del estator, creando unos campos magnéticos en concordancia. Así para la componente en  $x$ , del campo magnético tendremos [7.30].

$$|\bar{B}_{x-total}| = \left( \sum_{i=1}^{i=6} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \sum_{i=19}^{i=24} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i \right) + \left( \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i \right)$$

Que ordenando términos nos quedará [7.31]:

$$\begin{aligned} |\bar{B}_{x-total}| = & \left[ \sum_{i=1}^{i=6} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \sum_{i=19}^{i=24} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i \right] \\ & + \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{xi}| \cos \gamma_i \right] \end{aligned}$$

Por tanto, finalmente podemos expresar la componente de la inducción total en x, como:

$$\bar{B}_{x-total} = |\bar{B}_g| \cos wt + |\bar{B}_m| \text{senwt} \quad [7.32]$$

Y para la componente en y, tendremos [7.33]:

$$\begin{aligned} |\bar{B}_{y-total}| = & \left( \sum_{i=1}^{i=6} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \sum_{i=19}^{i=24} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( -\frac{1}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( -\frac{1}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( -\frac{1}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \right. \\ & \left. \left( -\frac{1}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i \right) + \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i \right) \end{aligned}$$

Que ordenando términos nos queda [7.34]:

$$\begin{aligned} |\bar{B}_{y-total}| = & \left[ \sum_{i=1}^{i=6} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \sum_{i=19}^{i=24} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i \right] + \\ & + \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=7}^{i=12} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=13}^{i=18} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=25}^{i=30} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sum_{i=31}^{i=36} |\bar{B}_{yi}| \text{sen} \gamma_i \right] \end{aligned}$$

Finamente, podremos expresar la componente total de la inducción en y, de la forma:

$$\bar{B}_{y-total} = |\bar{B}'_g| \cos wt + |\bar{B}'_m| \text{senwt} \quad [7.35]$$

Siendo la expresión del campo magnético total creado por el estator sobre un punto P:

$$\bar{B}_{total}(t) = \sqrt{\bar{B}_{x-total}^2 + \bar{B}_{y-total}^2} \quad [7.36] \quad \alpha_{B_{total}}(t) = \text{Artg} \frac{B_{total-y}}{B_{total-x}} \quad [7.37]$$

Todo este proceso que nos ha permitido determinar la inducción magnética total creada por el estator en un punto P, debe volverse a repetir para otro punto Q, situado asimismo en el interior del rotor. El cálculo de la inducción total en un segundo punto es necesario para la determinación de la f.e.m inducida y de la intensidad ya que permite la derivada de los campos totales en cada uno de los puntos, lo que nos permitirá obtener la diferencia de tensión entre los dos puntos, y finalmente gracias a este voltaje, hallar la intensidad que circula por este sector.

### 7.2.2 Fuerza electromotriz creada por el campo magnético originado en el estator (Es)

El campo magnético del estator origina un flujo magnético senoidal, que induce según la ley de Faraday-Lenz una fuerza electromotriz<sup>{L-4}</sup> en cada punto del motor, y en concreto de las chapas del rotor. Esta f.e.m inducida vendrá determinada por la expresión dada para la corriente que circula por la ranura, i.

$$\bar{E}_i = -N \frac{\partial \phi}{\partial t} = -N \cdot S_{flujo} \left( \frac{\partial B_p}{\partial t} - \frac{\partial B_q}{\partial t} \right) \quad [7.38]$$

La sección de las chapas es prácticamente constante, ya que al girar el motor al mismo tiempo que el flujo magnético, prácticamente no existe variación de la superficie atravesada ( $S_{flujo}$ ) por el flujo, considerándose asimismo por ahora que  $N=1$ .

$$\frac{\bar{E}_{total}}{S_{chapas}} = -\frac{\partial \bar{B}_{total}}{\partial t} = -\frac{\bar{B}_{total}}{|I|} \frac{\partial i}{\partial t} = -k \frac{\partial i}{\partial t} \quad [7.39]$$

Por tanto, vemos que lo que realmente varía respecto al tiempo es la intensidad,  $i$ .

$$i(t) = I_{max} \cdot \cos \omega t \quad [7.40]$$

$$\bar{B}_i(t) = k \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t = B_{i,max} \cdot \cos \omega t \quad [7.41]$$

De forma que:

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} = \frac{\bar{B}_{i,max}}{I_{max}} \frac{\partial i}{\partial t} = k \frac{\partial i}{\partial t} \quad [7.42]$$

Siendo la densidad de corriente<sup>{L-16}</sup>  $J_i$ , que circula por el punto  $P$ .

$$\bar{J}_i = \frac{\bar{E}_i}{\bar{Z}_{chapa}} = \frac{\bar{E}_i}{S_{flujos} \cdot (R_{chapa} + jX_{L-chapa})} \quad [7.43]$$

Donde la superficie considerada para el flujo magnético  $S_{flujos}$  es la mostrada en la figura siguiente.

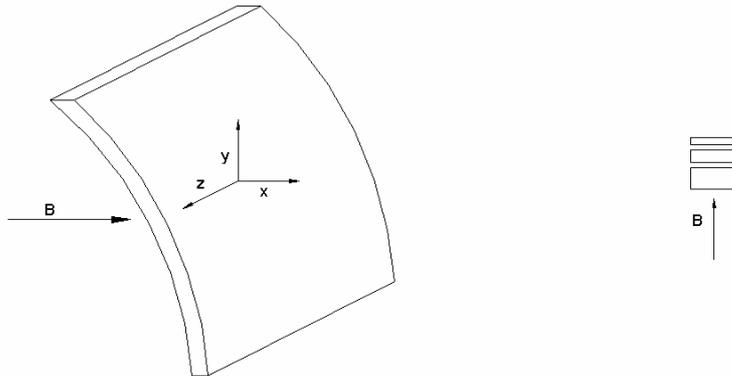


Figura 7.7. Superficie atravesada por una línea de flujo magnético que pasa por el punto  $P$ .

La resistencia de las chapas<sup>{L-16}</sup> puede determinarse de forma experimental, o bien por medio de la siguiente expresión.

$$R_{chapa} = \rho_{chapa} \cdot \frac{L_{chapa}}{S_{chapa}} \quad [7.44]$$

Siendo la sección de una chapa que atraviesa la intensidad, la que se refleja en la siguiente figura.

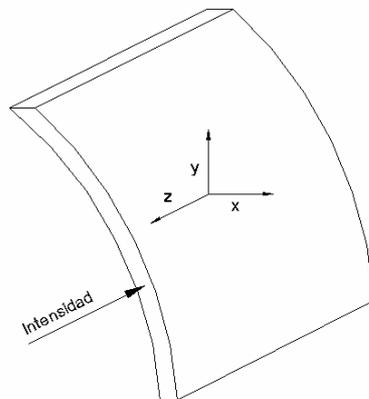


Figura 7.8. Sección equivalente de una chapa al paso de la intensidad

De esta ecuación [7.44] conocemos todos los términos excepto la inductancia  $L_{chapa}$  la cual resulta problemática de cálculo.

Para evitar el cálculo directo de la inductancia  $L_{chapa}$  recurrimos a otra expresión en la que la densidad de corriente es función de la conductividad de las chapas  $\sigma_{chapa}$  y la fuerza electromotriz.

$$\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} = \sigma_{chapa} (-\nabla \bar{V}) = \sigma_{chapa} (-\nabla \bar{V}) = -\sigma_{chapas} \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad [7.45]$$

Donde la conductividad de las chapas, una vez conocido el material, es perfectamente determinable por catálogo, oscilando su valor entre 3 y 6 (MS/m). Por otra parte, las tensiones  $V$ , deben definirse en función de las coordenadas polares  $(\rho, \alpha)$ .

Para hallar la f.e.m ( $E$ ), podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$|\bar{E}| = \int \frac{\partial}{\partial t} |\bar{B}_{Total}| \cdot dS_{flujos} + \int (\bar{V}_e \wedge \bar{B}_{total}) dL_{rotor} \quad [7.46]$$

Siendo la superficie atravesada por el flujo:

$$S_{flujos} = \sqrt{R^2 - (\rho \cdot \cos \alpha)^2} \cdot L_{rotor} \quad [7.47]$$

Por tanto, tendremos:

$$S_{flujos} = L_{rotor} \sqrt{(R^2 - x^2)} \quad [7.48]$$

Siendo el número de chapas entre los puntos  $P$  y  $Q$ :

$$N = \left( \frac{170(\alpha_p - \alpha_q)}{2 \cdot \pi} \right) \quad [7.49]$$

Por otra parte el diferencial de superficie será:

$$dS_{flujos} = \frac{L_{rotor}}{2 \cdot \sqrt{(R^2 - x^2)}} (-2 \cdot x) \cdot dx \quad [7.50]$$

Y la velocidad  $V_e$ , puede expresarse como:

$$\bar{V}_e = s \cdot w \cdot \rho \cdot (-\bar{u}_\varphi) \quad [7.51]$$

Donde:

$s$  = deslizamiento del motor.

$w$  = pulsación de la red.

$u_\varphi$  = vector unitario en la dirección indicada en la figura 7.9.

Con estas relaciones podemos expresar la velocidad en el punto  $P$ , en función de  $(x, y)$  de la siguiente forma [7.52].

$$\bar{V}_e = s \cdot w \cdot \rho \cdot (-\bar{u}_\varphi) = (s \cdot w \cdot \rho \cdot \sin(180^\circ - \alpha)), (s \cdot w \cdot \rho \cdot \cos(180^\circ - \alpha)) = (s \cdot w \cdot \rho \cdot \sin \alpha), (s \cdot w \cdot \rho \cdot \cos \alpha) = ((s \cdot w \cdot y), (s \cdot w \cdot x))$$

Ahora ya es posible definir la f.e.m inducida<sup>[L-6]</sup> en función de los parámetros conocidos [7.53].

$$|\bar{E}| = \int \frac{\partial}{\partial t} |\bar{B}_{Total}| \cdot dS_{flujos} + \int (\bar{V}_e \wedge \bar{B}_{total}) dL_{rotor} = \int \frac{\partial}{\partial t} |\bar{B}_{total(x,y)}| \frac{L_{rotor}}{2 \cdot \sqrt{(R^2 - x^2)}} (-2 \cdot x) \cdot dx + \int \left[ \begin{pmatrix} swy \\ swx \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} |\bar{B}_{x-total}| \\ |\bar{B}_{y-total}| \\ 0 \end{pmatrix} \right] dL_{rotor}$$

Como la segunda integral es constante (ecuación [7.46]), tendremos en definitiva para la f.e.m inducida [7.54]:

$$|\bar{E}| = \int \frac{\partial}{\partial t} |\bar{B}_{Total}| \cdot dS_{fujio} + \int (\bar{V} \wedge \bar{B}_{total}) dL_{rotor} = \int \frac{\partial}{\partial t} |\bar{B}_{total(x,y)}| \left[ \frac{L_{rotor}}{2 \cdot \sqrt{(R^2 - x^2)}} (-2 \cdot x) \cdot dx + [s \cdot w \cdot y \cdot |\bar{B}_{y-total}| - s \cdot w \cdot x \cdot |\bar{B}_{x-total}|] \right]$$

Es decir, sólo es necesario calcular la primera integral, la cual no ofrece mayores problemas.

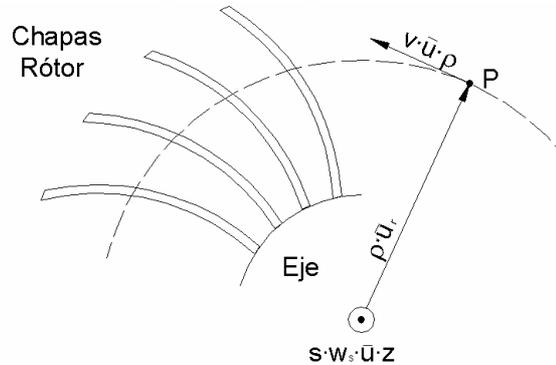


Figura 7.9. Relaciones trigonométricas para hallar la velocidad periférica en el punto P.

Conocida la f.e.m ( $E$ ) y la conductividad<sup>{L-16}</sup> de la chapa ( $\sigma$ ), es posible calcular la densidad de corriente que atravesara la chapa siendo esta:

$$\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} = \sigma_{chapa} (-\nabla \bar{V}) \quad [7.55]$$

Por lo que la intensidad que pasará por la chapa será.

$$|\bar{I}_{chapa}| = |\bar{J}_{chapa}| \cdot S_{chapa} \cdot N \quad [7.56]$$

Y conociendo la intensidad que pasa a través de la chapa podremos hallar la impedancia de la misma:

$$|\bar{Z}_{chapa}| = \frac{|\bar{E}_{chapa}|}{|\bar{I}_{chapa}|} \quad [7.57]$$

La cual puede expresarse en función de la resistencia y reactancia de las chapas.

$$|\bar{Z}_{chapa}| = \sqrt{R_{chapa}^2 + X_{chapa}^2} \quad [7.58]$$

Y como la resistencia de la chapa es conocida mediante la ecuación:

$$R_{chapa} = \rho_{chapa} \cdot \frac{L_{chapa}}{S_{chapa}} \quad [7.59]$$

Podremos determinar la reactancia inductiva de la chapa, y finalmente la inductancia de la misma:

$$X_{chapa} = \sqrt{|\bar{Z}|^2 - R^2} \quad [7.60] \quad L_{chapa} = \frac{X_{chapa}}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad [7.61]$$

Con lo que quedan definidos todos los términos electromagnéticos de las chapas.

### 7.2.3 Campo electromagnético creado por el rotor ( $\beta r$ )

Una vez determinado el campo magnético creado por las corrientes del rotor sobre los puntos P y Q, definidos y la f.e.m que este campo magnético induce en el rotor, pasamos a calcular el campo que genera esta f.e.m en el rotor<sup>{L-3}</sup>.

El problema de este cálculo pasa por asimilar las chapas con su curvatura característica a una serie de segmentos rectos que pasarían por su centro. Esta aproximación, disminuye enormemente la dificultad del análisis sin perjudicar prácticamente los resultados. Así, el perfil de una chapa puede asimilarse al conjunto de segmentos que muestra la figura 7.10.

Donde las  $L_i$ , son las longitudes de cada segmento y las  $k_i$ , son las corrientes que se generan en cada segmento. Finalmente  $R_{est}$  es el radio del estator.

La aportación de  $k_3$  es insignificante ya que toda la corriente se concentra en la parte superior de la chapa, por lo que puede despreciarse esta aportación sin que los resultados vean mermada su precisión.

De forma general podemos escribir para los dos primeros segmentos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 10^\circ & L_1 &= \text{constante} & k_1 &= \text{constante} \\ \alpha_2 &= 50^\circ & L_2 &= \text{constante} & k_2 &= \text{constante} \end{aligned} \quad [7.62]$$

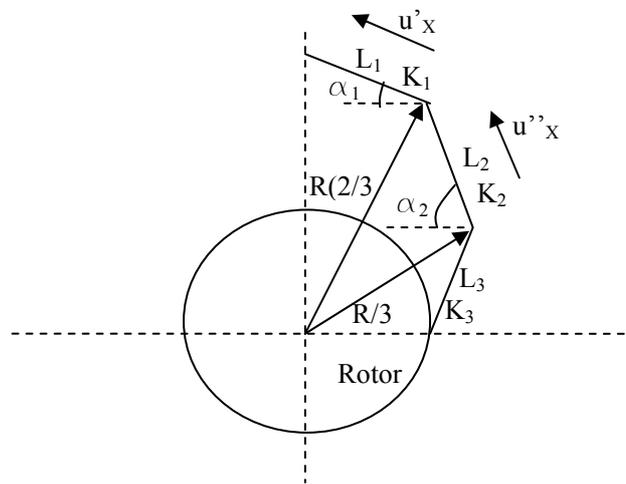


Figura 7.10. Parámetros de cálculo para la obtención de la inducción magnética en el rotor de chapas.

Siendo los campos magnéticos<sup>(L-40)</sup> creados por cada uno de los segmentos en los que se ha dividido la curva de las chapas (se dan los dos primeros segmentos con sus componentes en (x)):

$$|\overline{H}_{1-x}| = \frac{k_1 \cdot L_1}{2 \cdot x_1} \cdot \overline{u}_{x1} = \frac{k_1 \cdot L_1}{2 \cdot x_1} \cdot (-\cos \alpha_1, \text{sen} \alpha_1) \quad [7.63]$$

$$|\overline{H}_{2-x}| = \frac{k_2 \cdot L_2}{2 \cdot x_2} \cdot \overline{u}''_x = \frac{k_2 \cdot L_2}{2 \cdot x_2} \cdot (\cos \alpha_2, \text{sen} \alpha_2) \quad [7.64]$$

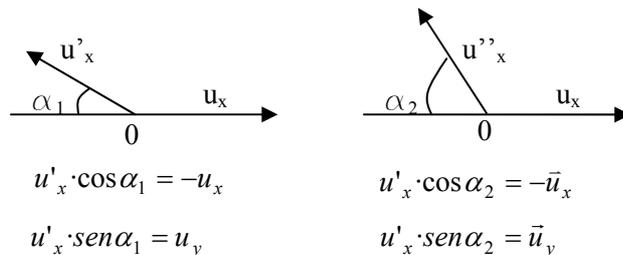


Figura 7.11. Detalle de los vectores unitarios con sus ángulos y sus relaciones trigonométricas.

Donde: 
$$x_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [7.65]$$

Por tanto podemos escribir:

$$(x_2, y_2) = (R_{eje}, \sqrt{\left(\frac{1}{3}R^2 - R_{eje}^2\right)}) + (x_1, y_1) \quad [7.66]$$

Y de forma general tendremos:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \left[ (R_{eje} - L_2 \cdot \cos \alpha_2), \sqrt{\left(\frac{1}{3}R^2 - R_{eje}^2\right)} + (L_2 \cdot \sen \alpha_2) \right] \quad [7.67]$$

Quedando la ecuación para el primer segmento (1):

$$(x, y) = (-x_1 \cdot \cos \alpha_1, y_1 \cdot \sen \alpha_1) + \left[ (R_{eje} - L_2 \cdot \cos \alpha_2), \sqrt{\left(\frac{1}{3}R^2 - R_{eje}^2\right)} + (L_2 \cdot \sen \alpha_2) \right] \quad [7.68]$$

$$x_1 = \frac{(R_{eje} - L_2 \cdot \cos \alpha_2) - x}{\cos \alpha_1} \quad [7.69]$$

Y para el segundo segmento (2), tendremos:

$$(x, y) = (-x_2 \cdot \cos \alpha_2, y_2 \cdot \sen \alpha_2) + \left[ (R_{eje}), \sqrt{\left(\frac{1}{3}R^2 - R_{eje}^2\right)} \right] \quad [7.70]$$

$$x_2 = \frac{(R_{eje} - x)}{\cos \alpha_2} \quad [7.71]$$

Con lo que extrayendo el módulo e implementando obtendremos:

$$|\bar{H}_i| = |\bar{H}_1| + |\bar{H}_2| = \frac{K_1 \cdot L_1}{2 \cdot |\bar{x}_1|} \cdot (-\cos \alpha_1, \sen \alpha_1) + \frac{K_2 \cdot L_2}{2 \cdot |\bar{x}_2|} \cdot (-\cos \alpha_2, \sen \alpha_2) \quad [7.72]$$

Finalmente, como este rotor de chapas tipo *A*, contiene 150 chapas, cada una de ellas girará un ángulo expresado en grados de valor:

$$\frac{360^\circ}{150} = 4^\circ \quad \text{Por lo que: } \alpha_{i1} = \alpha_i + 4^\circ \quad [7.73]$$

Siendo la aportación de corriente  $k_i$ , que cada segmento dará en función de  $(r, t)$ :

$$|\bar{H}_T| = \sum |\bar{H}_i| = \sum_{i=1}^{i=150} \left[ \frac{K_i \cdot L_i}{2 \cdot |\bar{x}_i|} \cdot (-\cos \alpha_i, \sen \alpha_i) + \frac{K_2 \cdot L_2}{2 \cdot |\bar{x}_2|} \cdot (-\cos \alpha_2, \sen \alpha_2) \right] = \frac{|\bar{B}_T|}{\mu_o \cdot \mu_{chapas}} \quad [7.74]$$

Finalmente, se anexa el algoritmo de cálculo implementado en Maple<sup>{L-57}</sup>, que permite hallar las magnitudes electromagnéticas deducidas anteriormente. En este algoritmo, se indican en forma de texto, los pasos a seguir y las ecuaciones empleadas en su confección, lo que permite un seguimiento más cómodo del método.