

**Modelización por circuitos lineales a tramos**

# **P A R T E II**



---

## 4. Descripción del método

---

### 1. Introducción

Como ya se ha comentado anteriormente, se trata de descomponer la onda de intensidad en varios tramos de forma que en cada uno de ellos la carga pueda ser considerada como lineal. El planteamiento del método puede utilizarse en aplicaciones diferentes. Estas aplicaciones serán de tipo lineal cuando los instantes de cambio de un tramo al siguiente vengan impuestos por las condiciones de funcionamiento y será no lineal cuando dichos instantes deban determinarse a partir de las propias expresiones halladas para los tramos.

En las cargas de tipo electrónico el cambio de un tramo a otro va generalmente ligado a las conmutaciones (naturales o forzadas) de los semiconductores. El funcionamiento del circuito consiste en tantos fenómenos transitorios como tramos, definidos cada uno de ellos únicamente dentro del tramo correspondiente.

Este método, a diferencia del análisis en el dominio del tiempo, puede dar lugar a resultados erróneos cuando, por ejemplo a causa de la distorsión de tensión, las características de funcionamiento del circuito en una situación dada no se correspondan con los tramos definidos en el modelo.

### 2. Caso lineal

Una aplicación típica de este método en forma lineal es el análisis de onduladores de tensión alimentando motores de inducción. Se toma un periodo de la onda moduladora y se observan los diferentes estados que toma el circuito ondulator. Cada vez que un transistor del puente cambia de estado se produce un cambio de tramo pero debemos tener en cuenta que los instantes de cambio de tramo vienen fijados por el circuito de control.

Para cada tramo debe analizarse el circuito, simplificando aquellas partes que permanecen desconectadas durante el tiempo de duración del tramo a causa de que los transistores que las conectan están bloqueados. El circuito correspondiente a cada tramo da lugar a un sistema de una o más ecuaciones diferenciales de régimen transitorio (tantas como el orden que tenga el circuito correspondiente al tramo) válidas sólo durante el tramo correspondiente. La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales dará lugar a un sistema de expresiones de tensiones y/o intensidades con tantas constantes como ecuaciones.

Para la determinación de las constantes deben aplicarse las condiciones iniciales. Si en el instante  $t_q$  finaliza el tramo  $q-1$  y comienza el tramo  $q$ , debemos considerar que el valor de cada variable dinámica del tramo  $q$  en el instante  $t_q$  debe coincidir con el valor de la misma variable del tramo  $q-1$  en el mismo instante  $t_q$ . Estas expresiones dan lugar a las ecuaciones de continuidad.

En el primer tramo, el valor de cada variable en el inicio del tramo se iguala con el de la misma variable al final del último tramo; teniendo en cuenta que ambos instantes están separados exactamente un periodo (de la onda moduladora). Estas expresiones dan lugar a las ecuaciones de periodicidad (si sólo hay una variable a considerar, se obtendrá una única ecuación de periodicidad).

### 3. Caso no lineal

El método es parecido al anterior pero en este caso los instantes  $t_q$  de cambio entre tramos no son conocidos y, por tanto, deben determinarse. Para ello deben encontrarse las condiciones que rigen el cambio de un tramo al siguiente; estas condiciones de cambio suelen venir fijadas por la igualdad de una variable dinámica con otra variable o constante del circuito.

Se tienen pues unas ecuaciones de las variables dinámicas de cada tramo que, a su vez, aparecen en las expresiones de las condiciones de cambio de tramo; con lo cual la obtención de los instantes de cambio debe hacerse resolviendo un sistema no lineal.

#### 3.1. Determinación de los tramos

La determinación de los tramos suele ser relativamente fácil a partir de la forma de onda de la intensidad en un tramo. Normalmente, se ha realizado la simulación con PSPICE para obtener las formas de onda de tensión de alimentación e intensidad en el circuito y, a partir de ellas, hacer la descomposición en tramos. En los casos en que no sea factible hacerlo así, la propia descripción de la carga da una idea del procedimiento a seguir; así en la fuente de alimentación trifásica la descomposición en tramos se ha realizado a partir de la superposición de las intensidades correspondientes a las tres fases mientras que en la lámpara de descarga con salto de tensión se ha hecho a partir de la tensión de arco.

En cada caso, se ha llamado  $t_1$  al primer tiempo que se ha encontrado, al siguiente  $t_2$ , y así sucesivamente; finalizando al encontrar un tiempo que diste exactamente un periodo de  $t_1$ . Seguidamente se ha numerado como tramo 1 el que va de  $t_1$  a  $t_2$ , como tramo 2 el que va de  $t_2$  a  $t_3$  y así sucesivamente.

#### 3.2. Ecuaciones de los tramos y solución de las mismas

Una vez determinados los tramos deben representarse los circuitos correspondientes a la configuración existente en cada tramo y escribirse las expresiones de las ecuaciones diferenciales que representan cada circuito. El orden de este circuito (número de condensadores e inductancias independientes entre sí) nos dará el número de ecuaciones diferenciales a plantear. En las cargas estudiadas puede haber, según el orden, tramos con dos, una o ninguna ecuación.

A continuación deberán resolverse las ecuaciones diferenciales de cada tramo para hallar las expresiones de las variables dinámicas (tensiones de condensadores y corrientes de inductancias) del circuito. La determinación de las soluciones puede hacerse por transformada de Laplace [14] pero en este trabajo se ha realizado directamente. Dado que se trata de transitorios habrá que hallar, para cada tramo, la solución completa a partir de la solución de la ecuación homogénea y una solución particular.

Las expresiones halladas llevarán las correspondientes constantes de integración. Para cada tramo el número de constantes, que deberán determinarse, coincide con el orden de las ecuaciones del tramo.

---

### 3.3. Condiciones de cambio

Los instantes de tiempo en que se produce el cambio de un tramo al siguiente (tiempos de conmutación) no son conocidos; por ello deberán encontrarse las condiciones que marcan el cambio de tramo (condiciones finales de cada tramo). Los casos más típicos son que la corriente en una inductancia valga cero o que la tensión de un condensador tome un determinado valor.

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada nos darán el sistema no lineal a resolver para obtener los tiempos de conmutación. Habrá normalmente tantos tiempos de conmutación como tramos y, por ello, el orden del sistema no lineal a resolver coincidirá con el número de tramos. La afirmación anterior tiene como excepción aquellos casos (como el de la lámpara de descarga con salto de tensión) en los que uno o más tramos tengan una anchura prefijada de antemano.

### 3.4. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las expresiones de las variables de estado en cada tramo suelen llevar constantes, tantas como variables dinámicas haya en el tramo, que deberán determinarse. Para la determinación de constantes se impondrán las condiciones de continuidad de las variables de estado. En cada tramo los valores de las variables dinámicas en el inicio del tramo deberán coincidir con los valores de las mismas variables en el final del tramo anterior. En el primer tramo los valores de las variables deben coincidir con los del final del último tramo (condición de periodicidad).

Las ecuaciones de continuidad tienen, de entrada, expresiones complicadas en ambos miembros y, en cambio, las de cambio sólo tienen expresiones complicadas en uno de los miembros. Cuando las condiciones de cambio se refieren a variables dinámicas nos encontraremos que las condiciones de continuidad igualan el valor al inicio del tramo con el valor al final del tramo anterior que es a su vez la condición de cambio (final) del tramo anterior. Entonces las condiciones de continuidad y periodicidad se simplifican y, por ello, la determinación de constantes es más sencilla.

El conjunto de ecuaciones de continuidad y periodicidad debe coincidir en número con el de las constantes de integración que aparecen en las soluciones de las ecuaciones de los tramos. El número de ecuaciones de periodicidad coincide con el orden del primer tramo, el resto de ecuaciones (hasta igualar el número de constantes) serán de continuidad.

### 3.5. Inicializaciones

Al realizar las inicializaciones debe tenerse en cuenta que el método de h-Newton requiere que las condiciones iniciales correspondan a una situación físicamente real del circuito, por ejemplo la situación de reposo. Por lo que respecta a las tensiones pueden utilizarse las inicializaciones que propone Sainz [41] pero para los tiempos de conmutación no siempre es sencillo hallar estas condiciones.

Para la lámpara de descarga, por ejemplo, se verá que cuando la potencia consumida es muy pequeña aumenta el número de tramos de la onda y, por tanto, no es conveniente aplicar esta condición. En este caso se ha propuesto una inicialización partiendo de unas condiciones del circuito en las que la carga es lineal.

Para el programa de flujo de cargas se ha implementado una inicialización del sistema en dos fases. Inicialmente se parte de los criterios de inicialización descritos para cada carga en el modelo correspondiente y, con esta inicialización, se determinan los tiempos de conmutación para cada carga aislada y alimentada a la tensión que le corresponde al estar la red descargada (tensión de reposo). En la segunda fase se toman los tiempos de conmutación obtenidos en la fase anterior como inicializaciones y se inicializan las demás variables del flujo de cargas con el valor que les corresponde a la situación de red descargada.

De esta forma se consigue una inicialización más adecuada de las cargas no lineales y, por el hecho de tratarlas individualmente en la primera fase, se puede, en caso de conflictos, informar al usuario de cual es la carga problemática para que verifique si sus parámetros son correctos.

### 3.6. Formas de onda y descomposición armónica

El método del flujo armónico de cargas requiere conocer la descomposición armónica de las intensidades de las cargas no lineales. Dado que se han hallado las expresiones de las funciones de intensidad en cada tramo pueden calcularse los valores de la intensidad en un número adecuado de puntos dentro de un periodo y aplicarse la transformada rápida de Fourier.

Pero dado que el flujo armónico de cargas es de resolución lenta por ser iterativo y por la complejidad de las funciones a evaluar es conveniente no cargarlo con otro cálculo iterativo como es la descomposición armónica. Por ello se ha preferido hallar directamente las expresiones matemáticas de la descomposición armónica de la intensidad. Su uso redundará en una evolución más rápida de los cálculos a costa de un aumento de la longitud del programa.

### 3.7. Derivación

La misma filosofía de reducción del tiempo de cálculo que se ha aplicado para la descomposición armónica podría aplicarse también para la derivación. En este caso no se ha considerado conveniente puesto que deberían hallarse las expresiones de las derivadas de las funciones con respecto a todas las variables que, aunque muchas de ellas sean intrínsecamente nulas, aún quedará un número importante de expresiones que, a menudo, no son sencillas.

Así pues se ha preferido utilizar la derivación numérica. La expresión utilizada para determinar un elemento cualquiera del jacobiano es

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(X + \delta_j) - f_i(X)}{\delta} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \delta, x_{j+1}, \dots, x_m) - f_i(X)}{\delta}$$

con lo que en cada iteración debe calcularse el valor de la función en  $m+1$  puntos mientras se va llenando el jacobiano.

---

## 4. Aplicaciones

Entre las aplicaciones del método de modelización por circuitos lineales a tramos destaca la modelización de las cargas para el flujo armónico de cargas [23][39][41] que es la que se ha tomado como base en todo el trabajo.

Los modelos obtenidos también pueden utilizarse para otras finalidades, por ejemplo para estudiar la dependencia de los armónicos de corriente con respecto a los de la tensión de alimentación o respecto a diferentes parámetros [14][15].

En la misma línea puede estudiarse la reducción (compensación) del contenido armónico que se produce al agrupar varias cargas no lineales respecto al que se obtendría por simple suma o por suma vectorial [16][45]. También puede utilizarse para el estudio y comparación de las formas de onda de intensidad con ondas reales; en este sentido pueden utilizarse programas de optimización para determinar los parámetros del modelo que mejor aproximan una onda real.





---

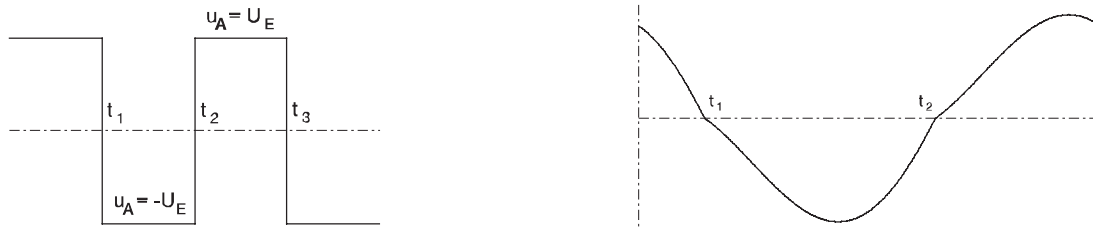
## 5. Lámparas de descarga

---

Este modelo se ha desarrollado para representar a las lámparas de descarga (fluorescentes, vapor de mercurio, vapor de sodio, halogenuros metálicos, etc.) con balasto de reactancia. Más adelante se verán modelos más exactos para algunos casos particulares.

### 1. Modelo físico

Para encontrar la intensidad absorbida por una lámpara de descarga debemos modelizar primero el arco eléctrico y luego tener en cuenta el balasto. La tensión en bornes del arco puede aproximarse mediante una onda cuadrada, como se representa en la figura de la izquierda. La figura de la derecha presenta un ejemplo de la forma de onda de intensidad correspondiente a este tipo de carga.



Por tanto tendremos dos tramos y el cambio entre un tramo y otro se producirá cuando la intensidad cambie de signo, por tanto, al paso por cero de ésta. Habrá pues dos incógnitas introducidas por el modelo,  $t_1$  y  $t_2$ . Los tramos serán

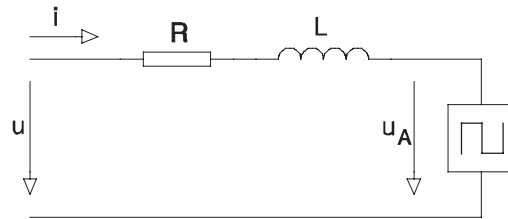
$$t_1 - t_2 \quad u_A = -U_E \quad i < 0$$

$$t_2 - t_3 \quad u_A = U_E \quad i > 0$$

Así pues podemos decir que la tensión valdrá

$$u_A = U_E \operatorname{Sgn}(i)$$

Para tener en cuenta el fenómeno de la tensión de arco, representaremos el arco eléctrico mediante una fuente de tensión de valor  $u_A$ . El modelo de la lámpara completa constará del balasto en serie con el arco. El balasto estará formado por una resistencia (R) en serie con una inductancia (L), como se muestra en la figura siguiente.



Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>2</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	2	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>2</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio</b>		<b>2</b>
<b>Número de constantes</b>		<b>2</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>2</b>
Ecuaciones de continuidad	1	
Ecuaciones de periodicidad	1	

Los valores de  $R$  y  $L$  pueden obtenerse por medición sobre el balasto con un puente de medida de impedancias o por medidas de tensión e intensidad en corriente continua y en corriente alterna. Para la determinación del valor de  $U_E$  debemos medir el valor medio de la tensión de arco, por ejemplo midiendo la tensión en bornes del arco con un voltímetro de cuadro móvil con rectificador, cuya lectura deberá dividirse por 1.11 (corrección de factor de forma).

Puede obtenerse también una aproximación de dichos valores ( $R$ ,  $L$  y  $U_E$ ), a partir de los datos impresos en el balasto ( $P$ ,  $U$ ,  $f$ ,  $I$ ,  $\cos\varphi$ ), utilizando el procedimiento siguiente:

$$Z_T = \frac{U}{I}$$

$$X = Z_T \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$L = \frac{X}{2\pi f}$$

$$R_T = Z_T \cos \varphi$$

$$R_A = \frac{P}{I^2}$$

$$R = R_T - R_A$$

$$U_E = \frac{P}{I}$$

## 2. Ecuaciones de los tramos

La ecuación genérica que representa todos los tramos, que se obtiene a partir del esquema presentado, será

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

con

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

## 3. Solución de las ecuaciones

Para hallar la solución completa de la ecuación de cada tramo debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

### 3.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

cuya solución será del tipo

$$i(t) = k e^{-t/\tau}$$

y el valor de  $\tau$  puede hallarse por sustitución.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

### 3.2. Solución particular

Dado que la ecuación general

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

tiene un término constante ( $u_A$ ) y términos senoidales (componentes de  $u$ ) aplicaremos el principio de superposición.

Para la componente continua tendremos

$$0 = R \cdot I_{DC} + u_A \qquad I_{DC} = \frac{-u_A}{R}$$

y para las demás componentes la determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{U}_h = R \underline{I}_h + j h \omega L \underline{I}_h = \underline{Z}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \angle \varphi_{Ih} \qquad \underline{Z}_h = R + j h \omega L = Z_h \angle \varphi_{Zh}$$

La solución particular será, por tanto

$$i(t) = \frac{-u_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

### 3.3. Solución completa

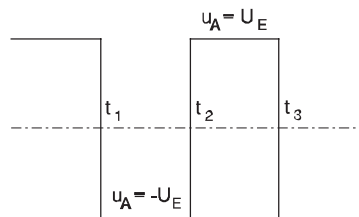
La solución completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = k e^{-t/\tau} - \frac{u_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

por tanto, para cada tramo será

$$t_1 - t_2 \quad i_1(t) = K_1 e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$t_2 - t_3 \quad i_2(t) = K_2 e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$



con

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$t_3 = t_1 + T$$

$$I_0 = \frac{U_E}{R}$$

$$I_h = \frac{U_h}{Z_h}$$

$$Z_h = R + j h \omega L$$

$$U_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$I_h = I_h \angle \varphi_{lh}$$

## 4. Condiciones de cambio

Debe haber dos condiciones de cambio puesto que hay dos tramos; estas condiciones son

$$i_1(t_2) = 0$$

$$i_2(t_1 + T) = 0$$

#### 4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las dos incógnitas,  $t_1$  y  $t_2$ .

$$f_1(t_2) = i_1(t_2) = 0$$

$$f_2(t_1) = i_2(t_1 + T) = 0$$

$$f_1(t_2) = K_1 e^{-t_2/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$f_2(t_1) = K_2 e^{-(t_1+T)/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega (t_1 + T) + \varphi_{lh}) = 0$$

Simplificando la ecuación de  $f_2$

$$f_2(t_1) = K_2 e^{-T/\tau} e^{-t_1/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

### 5. Condiciones de continuidad y periodicidad

La ecuación de continuidad será

$$i_2(t_2) = i_1(t_2)$$

y la de periodicidad

$$i_1(t_1) = i_2(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad podemos simplificar estas últimas pues obtenemos

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) = 0$$

$$i_1(t_1) = i_2(t_1 + T) = 0$$

## 5.1. Determinación de constantes

Las constantes  $K_1$  y  $K_2$  se determinarán, en función de  $t_1$  y  $t_2$ , despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$i_1(t_1) = K_1 e^{-t_1/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

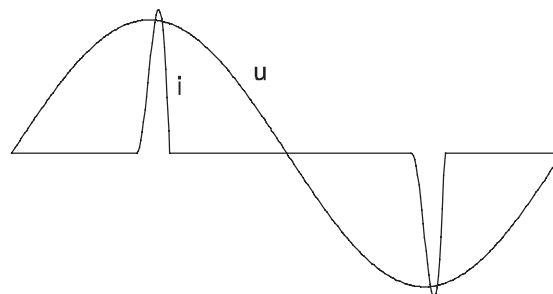
$$i_2(t_2) = K_2 e^{-t_2/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left[ -I_0 - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) \right]$$

$$K_2 = e^{t_2/\tau} \left[ I_0 - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_2 + \varphi_{lh}) \right]$$

## 6. Elección del valor inicial

Como ya se ha comentado anteriormente, en el método de h-Newton conviene, en general, partir de un caso en el que la corriente consumida sea casi nula; a continuación se expondrán los motivos que justifican no hacerlo así en este caso. Para tener una corriente muy pequeña, sin variar las constantes de tiempo, debemos hacer grande la tensión de arco. Cuando la tensión de arco es lo suficientemente alta, el circuito de la lámpara de descarga no conducirá. Para valores de la tensión de arco elevados sin llegar al estado de no conducción, la forma de onda de la intensidad es como la de la figura,



en la que podemos observar cuatro tramos en la onda de intensidad, dos de ellos nulos (conducción discontinua), en lugar de dos.

Por tanto, en lugar de utilizar unas condiciones iniciales que correspondan a una situación conocida del modelo, se partiría de otras correspondientes a un modelo distinto y con un número de tramos (y, por tanto, de incógnitas) diferente, cosa que no tiene mucho sentido y que supone una complicación más a añadir al método de cálculo.

Además debe tenerse en cuenta que en las lámparas de descarga comerciales la intensidad puede considerarse siempre en dos tramos por lo que carece de sentido utilizar la inicialización descrita y se propone la que se presenta a continuación.

En este caso tomaremos una simplificación del circuito que vendrá dada por las condiciones de que la tensión de alimentación de la lámpara de descarga es senoidal (no tiene componentes armónicas) y el valor de  $U_E$  es cero.

En las condiciones descritas el circuito equivalente de la lámpara de descarga se convierte en un simple circuito R-L serie, de forma que la intensidad será puramente senoidal.

$$i(t) = \sqrt{2} I_1 \text{Cos}(\omega t + \varphi_{II})$$

El valor de la intensidad será nulo en  $t_1$  y en  $t_2$  y, dada la simetría de la onda senoidal, tendremos

$$\sqrt{2} I_1 \text{Cos}(\omega t_1 + \varphi_{II}) = 0 \qquad \omega t_1 + \varphi_{II} = \frac{\pi}{2} \qquad t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{II} \right)$$

y, entonces,

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

## 7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Cos}(n \omega t) + b_n \text{Sin}(n \omega t))$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \text{Cos}(n \omega t) dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \text{Sin}(n \omega t) dt$$



Separando los tramos de la función

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \cos(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_1+T} i_2(t) \cos(n \omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \sin(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_1+T} i_2(t) \sin(n \omega t) dt$$

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_1(t) = K_1 e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$i_2(t) = K_2 e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

por tanto podemos integrar por separado los dos primeros términos y las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{1nC} = \int I_0 \cos(n \omega t) dt = \frac{I_0}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left( \frac{t \cos \varphi_{In}}{2} + \frac{\sin(2n\omega t + \varphi_{In})}{4n\omega} \right) \quad h = n$$

$$A_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \cos(n\omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -\frac{1}{\tau} \cos n\omega t + n\omega \sin n\omega t \right)$$

$$A_{2nC} = \int -I_0 \cos(n\omega t) dt = -\frac{I_0}{n\omega} \sin n\omega t = -A_{1nC}$$

$$A_{2nP} = A_{1nP}$$

$$B_{1nH} = \int K_1 e^{-t/\tau} \sin(n\omega t) dt = \frac{K_1 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -n\omega \cos n\omega t - \frac{1}{\tau} \sin n\omega t \right)$$

$$B_{1nC} = \int I_0 \sin(n\omega t) dt = -\frac{I_0}{n\omega} \cos n\omega t$$

$$B_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h\omega t + \varphi_{Ih}) \sin(n\omega t) dt$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\cos(h\omega t + \varphi_{Ih} + n\omega t)}{2\omega(h+n)} + \frac{\cos(h\omega t + \varphi_{Ih} - n\omega t)}{2\omega(h-n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_n \left( \frac{-\cos(2n\omega t + \varphi_{In})}{4n\omega} - \frac{t \sin \varphi_{In}}{2} \right) \quad h = n$$

$$B_{2nH} = \int K_2 e^{-t/\tau} \sin(n\omega t) dt = \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -n\omega \cos n\omega t - \frac{1}{\tau} \sin n\omega t \right)$$

$$B_{2nC} = \int -I_0 \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_0}{n \omega} \cos n \omega t = -B_{1nC}$$

$$B_{2nP} = B_{1nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \frac{2}{T} \left( A_{1nH}(t_2) + A_{1nC}(t_2) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{1nP}(t_2) - A_{1nH}(t_1) - A_{1nC}(t_1) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{1nP}(t_1) + A_{2nH}(t_1 + T) + \right. \\ \left. + A_{2nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{2nP}(t_1 + T) - A_{2nH}(t_2) - A_{2nC}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{2nP}(t_2) \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left( B_{1nH}(t_2) + B_{1nC}(t_2) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{1nP}(t_2) - B_{1nH}(t_1) - B_{1nC}(t_1) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{1nP}(t_1) + B_{2nH}(t_1 + T) + \right. \\ \left. + B_{2nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{2nP}(t_1 + T) - B_{2nH}(t_2) - B_{2nC}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{2nP}(t_2) \right)$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j b_n)$$

## 8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica ya que las ondas de intensidad y de tensión de arco también presentan simetría. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>1</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	1	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>1</b>

<b>Número de ecuaciones de cambio</b>	<b>1</b>
<b>Número de constantes</b>	<b>1</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>	<b>1</b>
Ecuaciones de continuidad	0
Ecuaciones de periodicidad	1

### 8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de un solo tramo ( $t_1 - t_2$ ) ya que la del otro semiperiodo podrá obtenerse a partir de ésta. Las expresiones correspondientes serán

$$t_1 - t_2 \quad i_1(t) = K e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{1h})$$

$$t_2 - t_3 \quad i_2(t) = -i_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

con

$$u(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h) \quad I_0 = \frac{U_E}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{2} \quad t_3 = t_1 + T$$

$$I_h = \frac{U_h}{Z_h} \quad U_h = U_{h \angle \varphi_h} \quad Z_h = R + j h \omega L$$

$$I_h = I_{h \angle \varphi_{1h}} \quad \omega = 2 \pi f \quad T = \frac{1}{f}$$

## 8.2. Sistema a resolver

En este caso el sistema a resolver estará formado por una única ecuación.

$$f(t_1) = K e^{-(t_1 + (T/2))/\tau} + I_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos\left(h \omega \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \varphi_{lh}\right) = 0$$

Simplificando la ecuación de f

$$f(t_1) = K e^{-T/2\tau} e^{-t_1/\tau} + I_0 - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

## 8.3. Determinación de constantes

$$K = e^{t_1/\tau} \left[ -I_0 - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) \right]$$

## 8.4. Elección del valor inicial

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{l1} \right)$$

## 8.5. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la onda de intensidad, dada la simetría, tendrá sólo armónicos impares.

$$A_{nH} = \int K e^{-t/\tau} \cos(n \omega t) dt = \frac{K e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -\frac{1}{\tau} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{nC} = \int I_0 \cos(n \omega t) dt = \frac{I_0}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{nP} = \sqrt{2} I_n \left( \frac{t \cos \varphi_{ln}}{2} + \frac{\sin(2 n \omega t + \varphi_{ln})}{4 n \omega} \right) \quad h = n$$

$$B_{nH} = \int K e^{-t/\tau} \sin(n \omega t) dt = \frac{K e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2 \omega^2} \left( -n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{nC} = \int I_0 \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_0}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$B_{nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \sin(n \omega t) dt$$

$$B_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\cos(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\cos(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{nP} = \sqrt{2} I_n \left( \frac{-\cos(2 n \omega t + \varphi_{ln})}{4 n \omega} - \frac{t \sin \varphi_{ln}}{2} \right) \quad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \frac{4}{T} \left( A_{nH} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + A_{nC} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} A_{nP} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) - A_{nH}(t_1) - A_{nC}(t_1) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} A_{nP}(t_1) \right)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \left( \mathbf{B}_{nH} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + \mathbf{B}_{nC} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{B}_{nP} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) - \mathbf{B}_{nH}(t_1) - \mathbf{B}_{nC}(t_1) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \mathbf{B}_{nP}(t_1) \right)$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_n - j \mathbf{b}_n)$$





---

## 6. Lámparas de descarga con salto de tensión

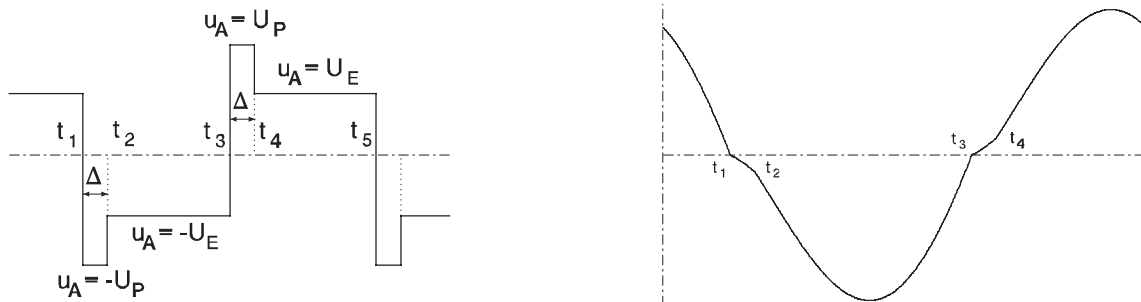
---

Este modelo se ha desarrollado para representar aquellas lámparas de descarga en que la tensión de arco no parece constante sino que presenta un valor inicialmente elevado para descender a los pocos instantes. Muchas lámparas fluorescentes y de vapor de sodio a alta presión, por ejemplo, corresponderían a este tipo.

### 1. Modelo físico

En el modelo que se utilice, dadas las características del método de modelización por circuitos lineales a tramos, la variación de la tensión de arco debe depender únicamente de la comparación de variables con determinados umbrales o del tiempo. En este caso la única forma utilizable consistirá en hacer el cambio de un nivel de tensión a otro cuando haya transcurrido un cierto tiempo desde el inicio del intervalo.

La modelización de la tensión de arco se hará como muestra la figura de la izquierda, en la que hay un primer pico de valor  $U_p$  durante un tiempo  $\Delta$ , fijo, y luego una tensión estable de valor  $U_E$  menor que  $U_p$ . La figura de la derecha presenta un ejemplo de onda de intensidad correspondiente a este modelo.



Para facilitar la modelización se han definido cuatro tramos, caracterizados por

$$t_1 - t_2 \quad u_A = -U_P \quad i < 0$$

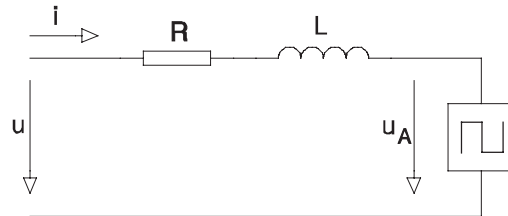
$$t_2 - t_3 \quad u_A = -U_E \quad i < 0$$

$$t_3 - t_4 \quad u_A = U_P \quad i > 0$$

$$t_4 - t_5 \quad u_A = U_E \quad i > 0$$

pero sólo habrá dos incógnitas ( $t_1$  y  $t_3$ ) puesto que los otros dos cambios de tramo vienen fijados por la anchura de pulso  $\Delta$ .

El modelo de la lámpara completa constará del balasto en serie con el arco. El balasto, al igual que en el caso anterior, estará formado por una resistencia (R) en serie con una inductancia (L), como se muestra en la figura siguiente.



Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>4</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	4	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>2</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio (verdaderas)</b>		<b>2</b>
<b>Número de constantes</b>		<b>4</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>4</b>
Ecuaciones de continuidad	3	
Ecuaciones de periodicidad	1	

La determinación de los valores de R, L y  $U_E$  puede hacerse de la misma forma que en el modelo anterior. Para la determinación de la tensión de pico ( $U_p$ ) y de la duración del mismo ( $\Delta$ ) deberá utilizarse un osciloscopio.

## 2. Ecuaciones de los tramos

La ecuación genérica que representa todos los tramos será

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

con

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

### 3. Solución de las ecuaciones

Para hallar la solución completa de la ecuación de cada tramo debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

#### 3.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

cuya solución será del tipo

$$i(t) = k e^{-t/\tau}$$

y el valor de  $\tau$  puede hallarse por sustitución.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

#### 3.2. Solución particular

Dado que la ecuación general

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

tiene un término constante ( $u_A$ ) y términos senoidales (componentes de  $u$ ) aplicaremos el principio de superposición.