

Separando los tramos de la función

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \cos(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_1+T} i_2(t) \cos(n \omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} i_1(t) \sin(n \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_1+T} i_2(t) \sin(n \omega t) dt$$

Recordemos que las funciones de intensidad tienen dos términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_1(t) = K_{11} e^{\mu t} [K_{pr} \cos(\epsilon t + K_{12}) - K_{pi} \sin(\epsilon t + K_{12})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

$$i_2(t) = K_{21} e^{\mu t} [K_{pr} \cos(\epsilon t + K_{22}) - K_{pi} \sin(\epsilon t + K_{22})] + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh})$$

por tanto podemos integrar por un lado el primer término y, por otro, las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{t \cos \varphi_{lh}}{2} + \frac{\sin(2 n \omega t + \varphi_{lh})}{4 n \omega} \right) \quad h = n$$

$$A_{1nH} = \int K_{11} e^{\mu t} [K_{pr} \cos(\epsilon t + K_{12}) - K_{pi} \sin(\epsilon t + K_{12})] \cos n \omega t dt$$

$$\begin{aligned}
A_{1nH} = & \frac{K_{11} \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_{12}) + (\epsilon - n \omega) \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_{12})] + \right. \\
& + \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_{12}) + (\epsilon + n \omega) \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_{12})] - \\
& - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_{12}) - (\epsilon + n \omega) \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_{12})] - \\
& \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_{12}) - (\epsilon - n \omega) \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_{12})] \right]
\end{aligned}$$

$$A_{2nP} = A_{1nP}$$

$$A_{2nH} = \int K_{21} \theta^{\mu t} [K_{pr} \text{Cos}(\epsilon t + K_{22}) - K_{pi} \text{Sin}(\epsilon t + K_{22})] \text{Cos} n \omega t dt$$

$$\begin{aligned}
A_{2nH} = & \frac{K_{21} \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_{22}) + (\epsilon - n \omega) \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_{22})] + \right. \\
& + \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_{22}) + (\epsilon + n \omega) \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_{22})] - \\
& - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_{22}) - (\epsilon + n \omega) \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_{22})] - \\
& \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_{22}) - (\epsilon - n \omega) \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_{22})] \right]
\end{aligned}$$

$$B_{1nP} = \int \sqrt{2} I_h \text{Cos}(h \omega t + \varphi_{lh}) \text{Sin}(n \omega t) dt$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\text{Cos}(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\text{Cos}(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{1nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\text{Cos}(2n\omega t + \varphi_{lh})}{4n\omega} - \frac{t \text{Sin} \varphi_{lh}}{2} \right) \quad h = n$$

$$B_{1nH} = \int K_{11} \theta^{\mu t} [K_{pr} \text{Cos}(\epsilon t + K_{12}) - K_{pi} \text{Sin}(\epsilon t + K_{12})] \text{Sin} n\omega t dt$$

$$B_{1nH} = \frac{K_{11} \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n\omega)t + K_{12}) - (\epsilon + n\omega) \text{Cos}((\epsilon + n\omega)t + K_{12})] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n\omega)t + K_{12}) - (\epsilon - n\omega) \text{Cos}((\epsilon - n\omega)t + K_{12})] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n\omega)t + K_{12}) + (\epsilon - n\omega) \text{Sin}((\epsilon - n\omega)t + K_{12})] + \right. \\ \left. + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n\omega)t + K_{12}) + (\epsilon + n\omega) \text{Sin}((\epsilon + n\omega)t + K_{12})] \right]$$

$$B_{2nH} = \int K_{21} \theta^{\mu t} [K_{pr} \text{Cos}(\epsilon t + K_{22}) - K_{pi} \text{Sin}(\epsilon t + K_{22})] \text{Sin} n\omega t dt$$

$$B_{2nH} = \frac{K_{21} \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n\omega)t + K_{22}) - (\epsilon + n\omega) \text{Cos}((\epsilon + n\omega)t + K_{22})] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n\omega)t + K_{22}) - (\epsilon - n\omega) \text{Cos}((\epsilon - n\omega)t + K_{22})] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n\omega)t + K_{22}) + (\epsilon - n\omega) \text{Sin}((\epsilon - n\omega)t + K_{22})] + \right. \\ \left. + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n\omega)t + K_{22}) + (\epsilon + n\omega) \text{Sin}((\epsilon + n\omega)t + K_{22})] \right]$$

$$B_{2nP} = B_{1nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \frac{2}{T} \left( A_{1nH}(t_2) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{1nP}(t_2) - A_{1nH}(t_1) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{1nP}(t_1) + A_{2nH}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_1 + T) - A_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_2) \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left( B_{1nH}(t_2) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{1nP}(t_2) - B_{1nH}(t_1) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{1nP}(t_1) + B_{2nH}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_1 + T) - B_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_2) \right)$$

$$I_n = I_n |\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j b_n)$$

## 8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica puesto que las ondas de intensidad y de tensión de arco también presentan simetría. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>1</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	0	
Tramos de segundo orden (Sólo caso oscilante)	1	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>1</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio</b>		<b>1</b>
<b>Número de constantes</b>		<b>2</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>2</b>
Ecuaciones de continuidad	0	
Ecuaciones de periodicidad	2	

### 8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de un solo tramo ( $t_1 - t_2$ ) ya que la del otro semiperiodo podrá obtenerse a partir de ésta. Las expresiones correspondientes serán

$$t_1 - t_2 \quad i_1(t) = K_1 e^{\mu t} [K_{Pr} \cos(\epsilon t + K_2) - K_{Pr} \sin(\epsilon t + K_2)] + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

$$u_{C1}(t) = K_1 e^{\mu t} \cos(\epsilon t + K_2) + U_E + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} U_{Ch} \cos(h \omega t + \varphi_{Ch})$$

$$t_2 - t_3 \quad i_2(t) = -i_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$u_{C2}(t) = -u_{C1}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

con

$$u(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h) \quad \mu = -\frac{1}{2} \frac{R}{L} \quad D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{LC}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{|D|}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$t_3 = t_1 + T$$

$$K_{Pr} = \mu C$$

$$K_{Pr} = \epsilon C$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h}$$

$$\underline{I}_h = I_h \angle \varphi_{Ih}$$

$$\underline{Z}_h = R + j \left( h \omega L - \frac{1}{h \omega C} \right)$$

$$\underline{U}_{Ch} = \underline{X}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{U}_{Ch} = U_{Ch} \angle \varphi_{Ch}$$

$$\underline{X}_h = -j \frac{1}{h \omega C}$$

## 8.2. Sistema a resolver

En este caso el sistema a resolver está formado por una única ecuación.

$$f(t_1) = K_1 e^{\mu(t_1 + T/2)} \left[ K_{Pr} \cos\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_2\right) - K_{Pl} \sin\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_2\right) \right] + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos\left(h \omega \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \varphi_{lh}\right) = 0$$

Simplificando la ecuación de f

$$f(t_1) = K_1 e^{\mu T/2} e^{\mu t_1} \left[ K_{Pr} \cos\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_2\right) - K_{Pl} \sin\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_2\right) \right] - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

## 8.3. Determinación de constantes

Tomando

$$\underline{K} = K_{1,K_2} = K_1 \cos K_2 + j K_1 \sin K_2 = K_r + j K_l$$

se tiene

$$K_r e^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pl} \sin(\epsilon t_1)] + K_l e^{\mu t_1} [-K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pl} \sin(\epsilon t_1)] + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh}) = 0$$

$$K_r e^{\mu t_1} \cos(\epsilon t_1) - K_l e^{\mu t_1} \sin(\epsilon t_1) + U_E = -K_r e^{\mu(t_1 + T/2)} \cos\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)\right) + K_l e^{\mu(t_1 + T/2)} \sin\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)\right) - U_E$$

que puede escribirse en forma matricial para facilitar la resolución

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_r \\ K_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ -2 U_E \end{pmatrix}$$

con

$$B_{11} = e^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) - K_{Pi} \sin(\epsilon t_1)] \quad B_{12} = -e^{\mu t_1} [K_{Pr} \cos(\epsilon t_1) + K_{Pi} \sin(\epsilon t_1)]$$

$$B_{21} = e^{\mu t_1} \cos(\epsilon t_1) + e^{\mu(t_1+T/2)} \cos\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)\right) \quad B_{22} = -e^{\mu t_1} \sin(\epsilon t_1) - e^{\mu(t_1+T/2)} \sin\left(\epsilon\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)\right)$$

$$S_1 = - \sum_{\substack{h=1 \\ h-2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t_1 + \varphi_{lh})$$

Sistema de ecuaciones que deberá resolverse cada vez que se deseen encontrar las constantes en un nuevo punto  $t_1$  y entonces sustituir en

$$K_{1|K_2} = K_r + j K_i$$

#### 8.4. Elección del valor inicial

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{l1} \right)$$

#### 8.5. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la onda de intensidad, dada la simetría, tendrá sólo armónicos impares.

$$A_{nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{\text{Sin}(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\text{Sin}(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{t \text{Cos} \varphi_{lh}}{2} + \frac{\text{Sin}(2 n \omega t + \varphi_{lh})}{4 n \omega} \right) \quad h = n$$

$$A_{nH} = \int K_1 \theta^{\mu t} [K_{pr} \text{Cos}(\epsilon t + K_2) - K_{pi} \text{Sin}(\epsilon t + K_2)] \text{Cos} n \omega t dt$$

$$A_{nH} = \frac{K_1 \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_2) + (\epsilon - n \omega) \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_2)] + \right. \\ \left. + \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_2) + (\epsilon + n \omega) \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_2)] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_2) - (\epsilon + n \omega) \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_2)] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_2) - (\epsilon - n \omega) \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_2)] \right]$$

$$B_{nH} = \int K_1 \theta^{\mu t} [K_{pr} \text{Cos}(\epsilon t + K_2) - K_{pi} \text{Sin}(\epsilon t + K_2)] \text{Sin} n \omega t dt$$

$$B_{nH} = \frac{K_1 \theta^{\mu t}}{2} \left[ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_2) - (\epsilon + n \omega) \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_2)] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_2) - (\epsilon - n \omega) \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_2)] - \right. \\ \left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon - n \omega) t + K_2) + (\epsilon - n \omega) \text{Sin}((\epsilon - n \omega) t + K_2)] + \right. \\ \left. + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n \omega)^2} [\mu \text{Cos}((\epsilon + n \omega) t + K_2) + (\epsilon + n \omega) \text{Sin}((\epsilon + n \omega) t + K_2)] \right]$$

$$B_{nP} = \int \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{lh}) \sin(n \omega t) dt$$

$$B_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\cos(h \omega t + \varphi_{lh} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\cos(h \omega t + \varphi_{lh} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{nP} = \sqrt{2} I_h \left( \frac{-\cos(2 n \omega t + \varphi_{lh})}{4 n \omega} - \frac{t \sin \varphi_{lh}}{2} \right) \quad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \frac{4}{T} \left( A_{nH} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} A_{nP} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) - A_{nH}(t_1) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max})/2} A_{nP}(t_1) \right)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \left( B_{nH} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} B_{nP} \left( t_1 + \frac{T}{2} \right) - B_{nH}(t_1) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max})/2} B_{nP}(t_1) \right)$$

$$\underline{I}_n = I_n \Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j b_n)$$



---

## 8. Fluorescente con reactancia saturable

---

Se trata de la lámpara fluorescente ya estudiada pero considerando que la reactancia (balasto) es saturable dentro del margen de variación de la intensidad.

### 1. Modelo físico

El modelo del arco eléctrico será el mismo estudiado anteriormente y debemos estudiar el modelo de la reactancia.

Por razones de simplicidad consideraremos que la inductancia tiene dos valores diferentes según el valor de la intensidad.

$$L = L_N \quad |i| < I_S \qquad L = L_S < L_N \quad |i| > I_S$$

Así, si consideramos la intensidad a partir del paso por cero ascendente, irá aumentando de valor hasta llegar a  $I_S$ ; entonces se reducirá  $L$  y la intensidad aumentará más. Una vez alcanzado el máximo, la intensidad irá disminuyendo hasta alcanzar  $I_S$ ; instante en que aumentará  $L$  y la intensidad disminuirá más hasta alcanzar el paso por cero.

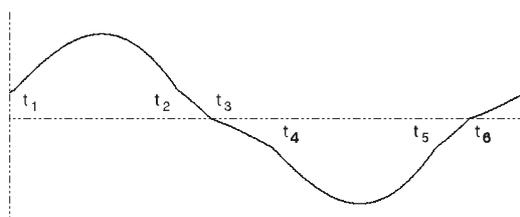
Así pues la onda de intensidad tendrá tres tramos por semiperiodo, es decir en total los seis tramos que se describen a continuación.

$t_1 - t_2$	$u_{A1} = U_E$	$i > 0$	$ i  > I_S$	$L_1 = L_S$
$t_2 - t_3$	$u_{A2} = U_E$	$i > 0$	$ i  < I_S$	$L_2 = L_N$
$t_3 - t_4$	$u_{A3} = -U_E$	$i < 0$	$ i  < I_S$	$L_3 = L_N$
$t_4 - t_5$	$u_{A4} = -U_E$	$i < 0$	$ i  > I_S$	$L_4 = L_S$
$t_5 - t_6$	$u_{A5} = -U_E$	$i < 0$	$ i  < I_S$	$L_5 = L_N$
$t_6 - t_7$	$u_{A6} = U_E$	$i > 0$	$ i  < I_S$	$L_6 = L_N$

Este modelo da lugar a una aproximación bastante tosca de la onda de intensidad. Si se desea una mejor aproximación, puede usarse el modelo en diez tramos que se presenta en el siguiente capítulo.

En la figura puede verse un ejemplo de la forma de onda de intensidad para esta carga. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>6</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	6	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>6</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio</b>		<b>6</b>
<b>Número de constantes</b>		<b>6</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>6</b>
Ecuaciones de continuidad	5	
Ecuaciones de periodicidad	1	



Los valores de  $L_N$  y  $L_S$  pueden obtenerse trazando la curva de saturación de la reactancia y hallando las dos rectas que mejor aproximen la curva. La pendiente de estas dos rectas nos permitirá obtener los valores de inductancia, mientras que el punto en que se cortan las dos rectas nos dará el valor de  $I_S$ .

## 2. Ecuaciones de los tramos

La ecuación genérica que representa todos los tramos será

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

con

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

### 3. Solución de las ecuaciones

Para hallar la solución completa de la ecuación de cada tramo debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

#### 3.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

cuya solución será del tipo

$$i(t) = k e^{-t/\tau}$$

y el valor de  $\tau$  puede hallarse por sustitución

$$\tau = \frac{L}{R}$$

#### 3.2. Solución particular

Dado que la ecuación general

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

tiene un término constante ( $u_A$ ) y términos senoidales (componentes de  $u$ ) aplicaremos el principio de superposición.

Para la componente continua tendremos

$$0 = R \cdot I_{DC} + u_A$$

$$I_{DC} = \frac{-u_A}{R}$$

y para las demás componentes la determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{U}_h = R \underline{I}_h + j h \omega L \underline{I}_h = \underline{Z}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \angle \varphi_{Ih} \qquad \underline{Z}_h = R + j h \omega L = Z_h \angle \varphi_{Zh}$$

La solución particular será, por tanto

$$i(t) = \frac{-U_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

### 3.3. Solución completa

La solución completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = k e^{-t/\tau} - \frac{U_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

por tanto, para un tramo  $q$  ( $q = 1..6$ ) será

$$t_q - t_{q+1} \qquad i_q(t) = K_q e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{Ihq})$$

con

$$\tau_q = \frac{L_q}{R} \qquad I_{0q} = \frac{-U_{Aq}}{R} \qquad t_7 = t_1 + T$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h \qquad \underline{I}_{hq} = I_{hq} \angle \varphi_{Ihq} \qquad \underline{I}_{hq} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_{hq}}$$

$$\underline{Z}_{hq} = R + j h \omega L_q$$

## 4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio (condiciones finales) son los pasos por cero de la onda para los tramos 2 y 5 y la igualdad con  $\pm I_S$  para los demás.

$$\begin{array}{lll} i_1(t_2) = I_S & i_2(t_3) = 0 & i_3(t_4) = -I_S \\ i_4(t_5) = -I_S & i_5(t_6) = 0 & i_6(t_1 + T) = I_S \end{array}$$

### 4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las seis incógnitas,  $t_1$  a  $t_6$ .

$$f_q(t_{q+1}) = K_q e^{-t_{q+1}/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t_{q+1} + \varphi_{hq}) + I_q = 0$$

con

$$I_1 = I_6 = -I_S \quad I_2 = I_5 = 0 \quad I_3 = I_4 = I_S$$

Simplificando la ecuación de  $f_6$

$$f_6(t_1) = K_6 e^{-T/\tau_6} e^{-t_1/\tau_6} + I_{06} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{h6} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{h6}) + I_6 = 0$$

## 5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad vendrán expresadas por

$$i_{q+1}(t_{q+1}) = i_q(t_{q+1}) \quad i = 1 \dots 5$$

y la de periodicidad

$$i_1(t_1) = i_6(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad obtenemos

$$\begin{aligned} i_2(t_2) = i_1(t_2) = I_S & & i_3(t_3) = i_2(t_3) = 0 & & i_4(t_4) = i_3(t_4) = -I_S \\ i_5(t_5) = i_4(t_5) = -I_S & & i_6(t_6) = i_5(t_6) = 0 & & i_1(t_1) = i_6(t_1 + T) = I_S \end{aligned}$$

por tanto

$$i_q(t_q) = -I_{q-1} \quad q = 2..6$$

$$i_1(t_1) = -I_6$$

## 5.1. Determinación de constantes

Las constantes  $K_1$  a  $K_6$  se determinarán, en función de  $t_1$  a  $t_6$ , despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$i_q(t_q) = K_q e^{-t_q/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t_q + \varphi_{hq}) = -I_{q-1} \quad q = 2..6$$

$$i_1(t_1) = K_1 e^{-t_1/\tau_1} + I_{01} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{h1} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{h1}) = -I_6$$

$$K_q = e^{t_q/\tau_q} \left[ -I_{q-1} - I_{0q} - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t_q + \varphi_{hq}) \right] \quad q = 2..6$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau_1} \left[ -I_6 - I_{01} - \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{h1} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{h1}) \right]$$

## 6. Elección del valor inicial

En este caso tomaremos, para los valores de  $t_3$  y  $t_6$ , una simplificación del circuito que vendrá dada por las condiciones de que la tensión de alimentación del fluorescente es senoidal (no tiene componentes armónicas) y el valor de  $U_E$  es cero. En las condiciones descritas el circuito equivalente del fluorescente se convierte en un simple circuito R-L serie, de forma que la intensidad será puramente senoidal; para los valores de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_4$  y  $t_5$  tomaremos los puntos en que esta intensidad toma el valor  $\pm I_S$ .

$$t_3 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{112} \right) \qquad t_6 = t_3 + \frac{T}{2}$$

$$t_2 = \frac{\left( \arccos \frac{I_S}{\sqrt{2} I_{12}} \right) - \varphi_{112}}{\omega} \qquad t_5 = t_2 + \frac{T}{2}$$

$$t_1 = \left( t_3 - \frac{T}{2} \right) + (t_3 - t_2) = 2 t_3 - \frac{T}{2} - t_2 \qquad t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$$

## 7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t))$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \cos(n \omega t) dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t) \sin(n \omega t) dt$$

Separando los tramos de la función

$$a_n = \sum_{q=1}^6 \left[ \frac{2}{T} \int_{t_q}^{t_{q+1}} i_q(t) \cos(n \omega t) dt \right] \qquad b_n = \sum_{q=1}^6 \left[ \frac{2}{T} \int_{t_q}^{t_{q+1}} i_q(t) \sin(n \omega t) dt \right]$$

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_q(t) = K_q e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{hq})$$

por tanto podemos integrar por separado los dos primeros términos y las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{qnH} = \int K_q e^{-t/\tau_q} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_q e^{-t/\tau_q}}{\frac{1}{\tau_q^2} + n^2 \omega^2} \left( -\frac{1}{\tau_q} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{qnC} = \int I_{0q} \cos(n \omega t) dt = \frac{I_{0q}}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{qnP} = \int \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{hq}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{hq} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{hq} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \quad h \neq n$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{t \cos \varphi_{hq}}{2} + \frac{\sin(2 n \omega t + \varphi_{hq})}{4 n \omega} \right) \quad h = n$$

$$B_{qnH} = \int K_q e^{-t/\tau_q} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_q e^{-t/\tau_q}}{\frac{1}{\tau_q^2} + n^2 \omega^2} \left( -n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau_q} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{qnC} = \int I_{0q} \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_{0q}}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$B_{qnP} = \int \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{hq}) \sin(n \omega t) dt$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{-\cos(h\omega t + \varphi_{l_{hq}} + n\omega t)}{2\omega(h+n)} + \frac{\cos(h\omega t + \varphi_{l_{hq}} - n\omega t)}{2\omega(h-n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{-\cos(2n\omega t + \varphi_{l_{hq}})}{4n\omega} - \frac{t \sin \varphi_{l_{hq}}}{2} \right) \quad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \sum_{q=1}^6 \frac{2}{T} \left[ A_{qnH}(t_{q+1}) + A_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{qnP}(t_{q+1}) - A_{qnH}(t_q) - A_{qnC}(t_q) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} A_{qnP}(t_q) \right]$$

$$b_n = \sum_{q=1}^6 \frac{2}{T} \left[ B_{qnH}(t_{q+1}) + B_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{qnP}(t_{q+1}) - B_{qnH}(t_q) - B_{qnC}(t_q) - \sum_{h=1}^{h_{\max}} B_{qnP}(t_q) \right]$$

y, entonces,

$$I_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j b_n)$$

## 8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica puesto que las ondas de intensidad y de tensión de arco también presentan simetría. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>3</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	3	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>3</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio</b>		<b>3</b>

<b>Número de constantes</b>		<b>3</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>3</b>
Ecuaciones de continuidad	2	
Ecuaciones de periodicidad	1	

### 8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de tres tramos ya que la del otro semiperiodo podrá obtenerse a partir de ésta. Además consideraremos que

$$t_1 - t_2 \quad u_{A1} = U_E \quad i > 0 \quad |i| > I_S \quad L_1 = L_S$$

$$t_2 - t_3 \quad u_{A2} = U_E \quad i > 0 \quad |i| < I_S \quad L_2 = L_N$$

$$t_3 - t_4 \quad u_{A3} = -U_E \quad i < 0 \quad |i| < I_S \quad L_3 = L_N$$

Las expresiones correspondientes, para un tramo  $q$  ( $q = 1..3$ ) serán

$$t_q - t_{q+1} \quad i_q(t) = K_q e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{\substack{h=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} I_{hq} \text{Cos}(h \omega t + \varphi_{hq})$$

y para los demás tramos  $q$  ( $q = 4..6$ ) serán

$$t_q - t_{q+1} \quad i_q(t) = -i_q \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

con

$$u(t) = \sum_{\substack{h=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} \sqrt{2} U_h \text{Cos}(h \omega t + \varphi_h)$$

$$t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$t_7 = t_1 + T$$

$$\tau_q = \frac{L_q}{R}$$

$$I_{0q} = \frac{-U_{Aq}}{R}$$

$$Z_{hq} = R + j h \omega L_q$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h \qquad I_{hq} = I_{hq} \angle \varphi_{Ihq} \qquad I_{hq} = \frac{U_h}{Z_{hq}}$$

## 8.2. Sistema a resolver

En este caso el sistema a resolver estará formado por

$$f_q(t_{q+1}) = K_q e^{-t_{q+1}/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{m\acute{a}x}+1)/2} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t_{q+1} + \varphi_{Ihq}) + I_q = 0 \qquad q=1..3$$

con

$$I_1 = -I_3 = -I_S \qquad I_2 = 0 \qquad t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$$

Simplificando la ecuación de  $f_3$

$$f_3(t_1) = K_3 e^{-T/(2\tau_3)} e^{-t_1/\tau_3} + I_{03} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{m\acute{a}x}+1)/2} \sqrt{2} I_{h3} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ih3}) + I_3 = 0$$

## 8.3. Determinación de constantes

$$K_q = e^{t_q/\tau_q} \left[ -I_{q-1} - I_{0q} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{m\acute{a}x}+1)/2} \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t_q + \varphi_{Ihq}) \right] \qquad q=2..3$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau_1} \left[ I_3 - I_{01} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{m\acute{a}x}+1)/2} \sqrt{2} I_{h1} \cos(h \omega t_1 + \varphi_{Ih1}) \right]$$

#### 8.4. Elección del valor inicial

$$t_3 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_{112} \right) \qquad t_2 = \frac{\left( \arccos \frac{I_s}{\sqrt{2} I_{12}} \right) - \varphi_{112}}{\omega}$$

$$t_1 = \left( t_3 - \frac{T}{2} \right) + (t_3 - t_2) = 2 t_3 - \frac{T}{2} - t_2$$

#### 8.5. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la onda de intensidad, dada la simetría, tendrá sólo armónicos impares.

$$A_{qnH} = \int K_q e^{-t/\tau_q} \cos(n \omega t) dt = \frac{K_q e^{-t/\tau_q}}{\frac{1}{\tau_q^2} + n^2 \omega^2} \left( -\frac{1}{\tau_q} \cos n \omega t + n \omega \sin n \omega t \right)$$

$$A_{qnC} = \int I_{0q} \cos(n \omega t) dt = \frac{I_{0q}}{n \omega} \sin n \omega t$$

$$A_{qnP} = \int \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{hq}) \cos(n \omega t) dt$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{hq} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} + \frac{\sin(h \omega t + \varphi_{hq} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{t \cos \varphi_{hq}}{2} + \frac{\sin(2 n \omega t + \varphi_{hq})}{4 n \omega} \right) \qquad h = n$$

$$B_{qnH} = \int K_q e^{-t/\tau_q} \sin(n \omega t) dt = \frac{K_q e^{-t/\tau_q}}{\frac{1}{\tau_q^2} + n^2 \omega^2} \left( -n \omega \cos n \omega t - \frac{1}{\tau_q} \sin n \omega t \right)$$

$$B_{qnC} = \int I_{0q} \sin(n \omega t) dt = -\frac{I_{0q}}{n \omega} \cos n \omega t$$

$$B_{qnP} = \int \sqrt{2} I_{hq} \cos(h \omega t + \varphi_{hq}) \sin(n \omega t) dt$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{-\cos(h \omega t + \varphi_{hq} + n \omega t)}{2 \omega (h + n)} + \frac{\cos(h \omega t + \varphi_{hq} - n \omega t)}{2 \omega (h - n)} \right) \quad h \neq n$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2} I_{hq} \left( \frac{-\cos(2 n \omega t + \varphi_{hq})}{4 n \omega} - \frac{t \sin \varphi_{hq}}{2} \right) \quad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \sum_{q=1}^3 \frac{4}{T} \left[ A_{qnH}(t_{q+1}) + A_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} A_{qnP}(t_{q+1}) - A_{qnH}(t_q) - A_{qnC}(t_q) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} A_{qnP}(t_q) \right]$$

$$b_n = \sum_{q=1}^3 \frac{4}{T} \left[ B_{qnH}(t_{q+1}) + B_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} B_{qnP}(t_{q+1}) - B_{qnH}(t_q) - B_{qnC}(t_q) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{\max}+1)/2} B_{qnP}(t_q) \right]$$

con

$$t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j b_n)$$



---

## 9. Fluorescente con reactancia saturable (v.2)

---

Teniendo en cuenta que el modelo del fluorescente con reactancia saturable estudiado da lugar habitualmente a formas de onda con cambios bruscos de pendiente, se propone un nuevo modelo con tres valores de inductancia.

### 1. Modelo físico

El modelo del arco eléctrico será el mismo estudiado anteriormente y debemos estudiar el nuevo modelo de la reactancia que tiene tres valores diferentes según el valor de la intensidad.

$$L = L_N \quad |i| < I_P$$

$$L = L_P < L_N \quad I_S > |i| > I_P$$

$$L = L_S < L_P \quad |i| > I_S$$

Así, si consideramos la intensidad a partir del paso por cero ascendente, irá aumentando de valor hasta llegar a  $I_P$ ; entonces se reducirá  $L$  y la intensidad aumentará más hasta alcanzar  $I_S$ ; momento en que se volverá a reducir  $L$  y la intensidad seguirá aumentando. Una vez alcanzado el máximo, la intensidad irá disminuyendo hasta alcanzar  $I_S$ ; instante en que aumentará  $L$  y la intensidad disminuirá más hasta alcanzar  $I_P$ ; momento en que volverá a aumentar  $L$  y la intensidad disminuirá aún más hasta alcanzar el paso por cero.

Así pues la onda de intensidad tendrá cinco tramos por semiperiodo, es decir en total los diez tramos que se describen a continuación.

$$t_1 - t_2 \quad u_{A1} = U_E \quad i > 0 \quad I_S > |i| > I_P \quad L_1 = L_P$$

$$t_2 - t_3 \quad u_{A2} = U_E \quad i > 0 \quad |i| > I_S \quad L_2 = L_S$$

$$t_3 - t_4 \quad u_{A3} = U_E \quad i > 0 \quad I_S > |i| > I_P \quad L_3 = L_P$$

$$t_4 - t_5 \quad u_{A4} = U_E \quad i > 0 \quad |i| < I_P \quad L_4 = L_N$$

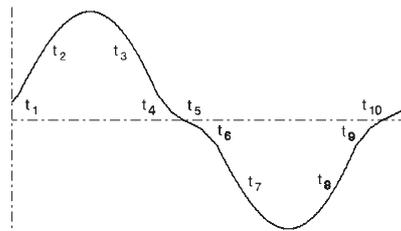
$$t_5 - t_6 \quad u_{A5} = -U_E \quad i < 0 \quad |i| < I_P \quad L_5 = L_N$$

$t_6 - t_7$	$u_{A6} = -U_E$	$i < 0$	$I_S >  i  > I_P$	$L_6 = L_P$
$t_7 - t_8$	$u_{A7} = -U_E$	$i < 0$	$ i  > I_S$	$L_7 = L_S$
$t_8 - t_9$	$u_{A8} = -U_E$	$i < 0$	$I_S >  i  > I_P$	$L_8 = L_P$
$t_9 - t_{10}$	$u_{A9} = -U_E$	$i < 0$	$ i  < I_P$	$L_9 = L_N$
$t_{10} - t_{11}$	$u_{A10} = U_E$	$i > 0$	$ i  < I_P$	$L_{10} = L_N$

Los valores de  $L_N$ ,  $L_P$  y  $L_S$  pueden obtenerse trazando la curva de saturación de la reactancia y hallando las dos rectas que mejor aproximen la curva en sus extremos y una tercera para cubrir la zona intermedia. La pendiente de estas tres rectas nos permitirá obtener los valores de inductancia y los puntos en que se cortan los valores de  $I_P$  e  $I_S$ .

En la figura puede verse un ejemplo de la forma de onda de intensidad para esta carga. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

<b>Número de tramos</b>		<b>10</b>
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	10	
Tramos de segundo orden	0	
<b>Número de incógnitas</b>		<b>10</b>
<b>Número de ecuaciones de cambio</b>		<b>10</b>
<b>Número de constantes</b>		<b>10</b>
<b>Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad</b>		<b>10</b>
Ecuaciones de continuidad	9	
Ecuaciones de periodicidad	1	



## 2. Ecuaciones de los tramos

La ecuación genérica que representa todos los tramos será

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

con

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} U_h \cos(h \omega t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

## 3. Solución de las ecuaciones

Para hallar la solución completa de la ecuación de cada tramo debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

### 3.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

cuya solución será del tipo

$$i(t) = k e^{-t/\tau}$$

y el valor de  $\tau$  puede hallarse por sustitución.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

### 3.2. Solución particular

Dado que la ecuación general

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + u_A$$

tiene un término constante ( $u_A$ ) y términos senoidales (componentes de  $u$ ) aplicaremos el principio de superposición.

Para la componente continua tendremos

$$0 = R \cdot I_{DC} + u_A \qquad I_{DC} = \frac{-u_A}{R}$$

y para las demás componentes la determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \angle \varphi_h$$

$$\underline{U}_h = R \underline{I}_h + j h \omega L \underline{I}_h = \underline{Z}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \angle \varphi_{Ih} \qquad \underline{Z}_h = R + j h \omega L = Z_h \angle \varphi_{Zh}$$

La solución particular será, por tanto

$$i(t) = \frac{-u_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$

### 3.3. Solución completa

La solución completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = k e^{-t/\tau} - \frac{u_A}{R} + \sum_{h=1}^{h_{\max}} \sqrt{2} I_h \cos(h \omega t + \varphi_{Ih})$$