por tanto, para un tramo **q** (q = 1..10) será

$$t_q - t_{q+1} \qquad i_q(t) = K_q\, e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq})$$

con

$$\tau_q = \frac{L_q}{R} \qquad I_{0q} = \frac{-\,u_{Aq}}{R} \qquad t_{11} = t_1 + T$$

$$\underline{U}_h = U_h \angle_{\varphi_h} \qquad \underline{I}_{hq} = I_{hq} \angle_{\varphi_{Ihq}} \qquad \underline{I}_{hq} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_{hq}}$$

$$\underline{Z}_{hq} = R + j\,h\,\omega\,L_q$$

4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio (condiciones finales) son los pasos por cero de la onda para los tramos 4 y 9, la igualdad con $\pm I_S$ para los tramos 1, 2, 6 y 7 y la igualdad con $\pm I_P$ para los tramos 3, 5, 8 y 10.

$$i_1(t_2) = I_S \qquad i_2(t_3) = I_S \qquad i_3(t_4) = I_P$$

$$i_4(t_5) = 0 \qquad i_5(t_6) = -\,I_P \qquad i_6(t_7) = -\,I_S$$

$$i_7(t_8) = -\,I_S \qquad i_8(t_9) = -\,I_P \qquad i_9(t_{10}) = 0$$

$$i_{10}(t_1 + T) = I_P$$

4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las diez incógnitas, t_1 a t_{10}.

$$f_q(t_{q+1}) = K_q\, e^{-t_{q+1}/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\,\omega\, t_{q+1} + \varphi_{Ihq}) + I_q = 0$$

con

$$I_1 = I_2 = -I_S \qquad I_3 = I_{10} = -I_P \qquad I_4 = I_9 = 0$$

$$I_5 = I_8 = I_P \qquad I_6 = I_7 = I_S$$

Simplificando la ecuación de f_{10}

$$f_{10}(t_1) = K_{10}\, e^{-T/\tau_{10}}\, e^{-t_1/\tau_{10}} + I_{0\,10} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_{h10}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih10}) + I_{10} = 0$$

5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad vendrán expresadas por

$$i_{q+1}(t_{q+1}) = i_q(t_{q+1}) \qquad i = 1\,..\,9$$

y la de periodicidad

$$i_1(t_1) = i_{10}(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad obtenemos

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) = I_S \qquad i_3(t_3) = i_2(t_3) = I_S \qquad i_4(t_4) = i_3(t_4) = I_P$$

$$i_5(t_5) = i_4(t_5) = 0 \qquad i_6(t_6) = i_5(t_6) = -I_P \qquad i_7(t_7) = i_6(t_7) = -I_S$$

$$i_8(t_8) = i_7(t_8) = -I_S \qquad i_9(t_9) = i_8(t_9) = -I_P \qquad i_{10}(t_{10}) = i_9(t_{10}) = 0$$

$$i_1(t_1) = i_{10}(t_1 + T) = I_P$$

por tanto

$$i_q(t_q) = -I_{q-1} \qquad q = 2..10$$

$$i_1(t_1) = -I_{10}$$

5.1. Determinación de constantes

Las constantes K_1 a K_{10} se determinarán, en función de t_1 a t_{10}, despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$i_q(t_q) = K_q\, e^{-t_q/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\,\omega\, t_q + \varphi_{Ihq}) = -I_{q-1} \qquad q = 2..10$$

$$i_1(t_1) = K_1\, e^{-t_1/\tau_1} + I_{01} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{h1}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih1}) = -I_{10}$$

$$K_q = e^{t_q/\tau_q}\left[-I_{q-1} - I_{0q} - \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\,\omega\, t_q + \varphi_{Ihq})\right] \qquad q = 2..10$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau_1}\left[-I_{10} - I_{01} - \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{h1}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih1})\right]$$

6. Elección del valor inicial

Como en el otro caso de fluorescente con reactancia saturable, tomaremos, para los valores de t_5 y t_{10}, una simplificación del circuito que vendrá dada por las condiciones de que la tensión de alimentación del fluorescente es senoidal (no tiene componentes armónicas) y el valor de U_E es cero. En las condiciones descritas el circuito equivalente del fluorescente se convierte en un simple circuito R-L serie, de forma que la intensidad será puramente senoidal; para los valores de t_2, t_3, t_7 y t_8 tomaremos los puntos en que esta intensidad toma el valor $\pm I_S$ y para los valores de t_1, t_4, t_6 y t_9 tomaremos los puntos en que esta intensidad toma el valor $\pm I_P$.

$$t_5 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{I14}\right) \qquad t_{10} = t_5 + \frac{T}{2}$$

$$t_3 = \frac{\left(arccos\frac{I_S}{\sqrt{2}\,I_{14}}\right) - \varphi_{I14}}{\omega} \qquad t_8 = t_3 + \frac{T}{2}$$

$$t_4 = \frac{\left(arccos\frac{I_P}{\sqrt{2}\,I_{14}}\right) - \varphi_{I14}}{\omega} \qquad t_9 = t_4 + \frac{T}{2}$$

$$t_1 = \left(t_5 - \frac{T}{2}\right) + (t_5 - t_4) = 2\,t_5 - \frac{T}{2} - t_4 \qquad t_6 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$t_2 = \left(t_5 - \frac{T}{2}\right) + (t_5 - t_3) = 2\,t_5 - \frac{T}{2} - t_3 \qquad t_7 = t_2 + \frac{T}{2}$$

7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, Cos(n\,\omega\,t) + b_n\, Sin(n\,\omega\,t)\right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Cos(n\,\omega\,t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Sin(n\,\omega\,t)\,dt$$

Separando los tramos de la función

$$a_n = \sum_{q=1}^{10}\left[\frac{2}{T}\int_{t_q}^{t_{q+1}} i_q(t)\, Cos(n\,\omega\,t)\,dt\right] \qquad b_n = \sum_{q=1}^{10}\left[\frac{2}{T}\int_{t_q}^{t_{q+1}} i_q(t)\, Sin(n\,\omega\,t)\,dt\right]$$

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_q(t) = K_q\, e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq}\right)$$

por tanto podemos integrar por separado los dos primeros términos y las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{qnH} = \int K_q\, e^{-t/\tau_q}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_q\, e^{-t/\tau_q}}{\dfrac{1}{\tau_q^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\frac{1}{\tau_q}\, Cos\, n\,\omega\, t \;+\; n\,\omega\, Sin\, n\,\omega\, t\right)$$

$$A_{qnC} = \int I_{0q}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{I_{0q}}{n\,\omega}\, Sin\, n\,\omega\, t$$

$$A_{qnP} = \int \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq}\right)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{hq}\left(\frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} - n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h-n)} + \frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} + n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h+n)}\right) \qquad h \neq n$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{nq}\left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Inq}}{2} + \frac{Sin\left(2\, n\,\omega\, t + \varphi_{Inq}\right)}{4\, n\,\omega}\right) \qquad h = n$$

$$B_{qnH} = \int K_q\, e^{-t/\tau_q}\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_q\, e^{-t/\tau_q}}{\dfrac{1}{\tau_q^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\, n\,\omega\, Cos\, n\,\omega\, t \;-\; \frac{1}{\tau_q}\, Sin\, n\,\omega\, t\right)$$

$$B_{qnC} = \int I_{0q}\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = -\,\frac{I_{0q}}{n\,\omega}\, Cos\, n\,\omega\, t$$

$$B_{qnP} = \int \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq}\right)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{hq} \left(\frac{-Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} + n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} - n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{nq} \left(\frac{-Cos(2\,n\,\omega\, t + \varphi_{Inq})}{4\,n\,\omega} - \frac{t\,Sin\,\varphi_{Inq}}{2} \right) \qquad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \sum_{q=1}^{10} \frac{2}{T} \left[A_{qnH}(t_{q+1}) + A_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{qnP}(t_{q+1}) - A_{qnH}(t_q) - A_{qnC}(t_q) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{qnP}(t_q) \right]$$

$$b_n = \sum_{q=1}^{10} \frac{2}{T} \left[B_{qnH}(t_{q+1}) + B_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{qnP}(t_{q+1}) - B_{qnH}(t_q) - B_{qnC}(t_q) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{qnP}(t_q) \right]$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j\,b_n)$$

8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica ya que las ondas de intensidad y de tensión de arco también presentan simetría. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos		**5**
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	5	
Tramos de segundo orden	0	
Número de incógnitas		**5**
Número de ecuaciones de cambio		**5**

Número de constantes			**5**
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad			**5**
	Ecuaciones de continuidad	4	
	Ecuaciones de periodicidad	1	

8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de cinco tramos ya que la del otro semiperiodo podrá obtenerse a partir de ésta. Además consideraremos que

$t_1 - t_2$	$u_{A1} = U_E$	$i > 0$	$I_S > \|i\| > I_P$	$L_1 = L_P$
$t_2 - t_3$	$u_{A2} = U_E$	$i > 0$	$\|i\| > I_S$	$L_2 = L_S$
$t_3 - t_4$	$u_{A3} = U_E$	$i > 0$	$I_S > \|i\| > I_P$	$L_3 = L_P$
$t_4 - t_5$	$u_{A4} = U_E$	$i > 0$	$\|i\| < I_P$	$L_4 = L_N$
$t_5 - t_6$	$u_{A5} = -U_E$	$i < 0$	$\|i\| < I_P$	$L_5 = L_N$

Las expresiones correspondientes, para un tramo **q** (q = 1..5) serán

$$t_q - t_{q+1} \qquad i_q(t) = K_q\, e^{-t/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq})$$

y para los demás tramos **q** (q = 6..10) serán

$$t_q - t_{q+1} \qquad i_q(t) = -\, i_q\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

con

$$u(t) = \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_h)$$

$$\tau_q = \frac{L_q}{R} \qquad I_{0q} = \frac{-u_{Aq}}{R} \qquad t_6 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$\underline{U}_h = U_h \lfloor \varphi_h \qquad \underline{I}_{hq} = I_{hq} \lfloor \varphi_{Ihq} \qquad \underline{I}_{hq} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{\underline{Z}}_{hq}}$$

$$\underline{\underline{Z}}_{hq} = R + j\, h\, \omega\, L_q$$

8.2. Sistema a resolver

En este caso el sistema a resolver estará formado por

$$f_q(t_{q+1}) = K_q\, e^{-t_{q+1}/\tau_q} + I_{0q} + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\, \omega\, t_{q+1} + \varphi_{Ihq}) + I_q = 0 \qquad q = 1..5$$

con

$$I_1 = I_2 = -I_S \qquad I_3 = -I_P$$

$$I_4 = 0 \qquad I_5 = I_P$$

Simplificando la ecuación de f_5

$$f_5(t_1) = K_5\, e^{-T/(2\tau_5)}\, e^{-t_1/\tau_5} + I_{05} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, I_{h5}\, Cos(h\, \omega\, t_1 + \varphi_{Ih5}) + I_5 = 0$$

8.3. Determinación de constantes

$$K_q = e^{t_q/\tau_q}\left[-I_{q-1} - I_{0q} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos(h\, \omega\, t_q + \varphi_{Ihq}) \right] \qquad q = 2..5$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau_1}\left[I_5 - I_{01} - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, I_{h1}\, Cos\left(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih1}\right)\right]$$

8.4. Elección del valor inicial

$$t_5 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{I14}\right)$$

$$t_3 = \frac{\left(arccos\frac{I_S}{\sqrt{2}\, I_{14}}\right) - \varphi_{I14}}{\omega} \qquad t_4 = \frac{\left(arccos\frac{I_P}{\sqrt{2}\, I_{14}}\right) - \varphi_{I14}}{\omega}$$

$$t_1 = \left(t_5 - \frac{T}{2}\right) + (t_5 - t_4) = 2\, t_5 - \frac{T}{2} - t_4 \qquad t_2 = \left(t_5 - \frac{T}{2}\right) + (t_5 - t_3) = 2\, t_5 - \frac{T}{2} - t_3$$

8.5. Descomposición armónica

$$A_{qnH} = \int K_q\, e^{-t/\tau_q}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_q\, e^{-t/\tau_q}}{\frac{1}{\tau_q^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\frac{1}{\tau_q}\, Cos\, n\,\omega\, t + n\,\omega\, Sin\, n\,\omega\, t\right)$$

$$A_{qnC} = \int I_{0q}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{I_{0q}}{n\,\omega}\, Sin\, n\,\omega\, t$$

$$A_{qnP} = \int \sqrt{2}\, I_{hq}\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq}\right)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{hq}\left(\frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} - n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h - n)} + \frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} + n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h + n)}\right) \qquad h \neq n$$

$$A_{qnP} = \sqrt{2}\, I_{nq}\left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Inq}}{2} + \frac{Sin\left(2\, n\,\omega\, t + \varphi_{Inq}\right)}{4\, n\,\omega}\right) \qquad h = n$$

$$B_{qnH} = \int K_q\, e^{-t/\tau_q}\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_q\, e^{-t/\tau_q}}{\dfrac{1}{\tau_q^2} + n^2\, \omega^2} \left(-\, n\,\omega\, Cos\, n\,\omega\, t\; - \frac{1}{\tau_q}\, Sin\, n\,\omega\, t \right)$$

$$B_{qnC} = \int I_{0q}\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = -\, \frac{I_{0q}}{n\,\omega}\, Cos\, n\,\omega\, t$$

$$B_{qnP} = \int \sqrt{2}\; I_{hq}\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq}\right)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2}\; I_{hq} \left(\frac{-\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} + n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ihq} - n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{qnP} = \sqrt{2}\; I_{nq} \left(\frac{-\, Cos(2\, n\,\omega\, t + \varphi_{Inq})}{4\, n\,\omega} - \frac{t\, Sin\, \varphi_{Inq}}{2} \right) \qquad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \sum_{q=1}^{5} \frac{4}{T} \left[A_{qnH}(t_{q+1}) + A_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{qnP}(t_{q+1}) - A_{qnH}(t_q) - A_{qnC}(t_q) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{qnP}(t_q) \right]$$

$$b_n = \sum_{q=1}^{5} \frac{4}{T} \left[B_{qnH}(t_{q+1}) + B_{qnC}(t_{q+1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{qnP}(t_{q+1}) - B_{qnH}(t_q) - B_{qnC}(t_q) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{qnP}(t_q) \right]$$

con

$$t_6 = t_1 + \frac{T}{2}$$

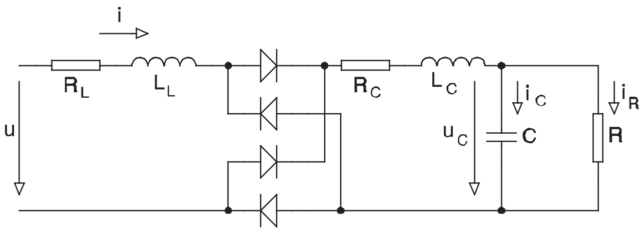
y, entonces,

$$\underline{I}_{\,n} = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_n - j\, b_n \right)$$

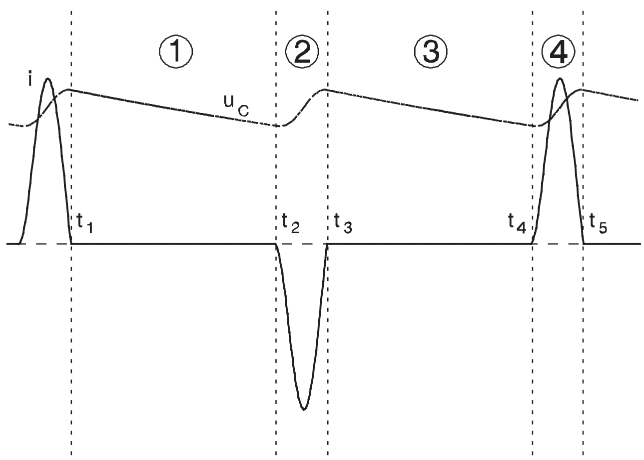
10. Fuente de alimentación

1. Modelo físico

El modelo de una fuente de alimentación será (ver figura) un rectificador ideal en puente con un condensador de filtro (C) que alimenta una carga que, en régimen permanente, representaremos mediante una resistencia (R) ya que se encuentra en el lado de corriente continua. Tendremos en cuenta la resistencia y la reactancia presentes tanto en el lado de continua (R_C y L_C) como en el de alterna (R_L y L_L).



El modelo representado tendrá dos formas de trabajo diferentes según si el rectificador conduce o no conduce; además deberá tenerse en cuenta el signo de la intensidad por lo que deberemos considerar cuatro tramos. En la figura siguiente se han representado, para un caso concreto, la intensidad del circuito (i) y la tensión en el condensador (u_C) y se han indicado los cuatro tramos.



Estos tramos se caracterizarán por

$t_1 - t_2$ $\qquad$ $i = 0$ $\qquad$ Descarga de C sobre R

$t_2 - t_3$	$i < 0$	Carga de C
$t_3 - t_4$	$i = 0$	Descarga de C sobre R
$t_4 - t_5$	$i > 0$	Carga de C

Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos		**4**
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	2	
Tramos de segundo orden	2	
Número de incógnitas		**4**
Número de ecuaciones de cambio		**4**
Número de constantes		**6**
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad		**6**
Ecuaciones de continuidad	5	
Ecuaciones de periodicidad	1	

2. Ecuaciones de los tramos

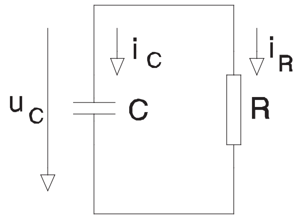
En este caso el sistema tiene dos variables dinámicas por lo que habrá que tratar las expresiones de ambas. Consideraremos que estas variables son la intensidad (i) y la tensión en el condensador (u_C). En los desarrollos siguientes consideraremos que

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2\,\pi\, f \qquad\qquad T = \frac{1}{f}$$

2.1. Tramos 1 y 3

Los tramos 1 y 3 son formalmente idénticos, así pues los trataremos conjuntamente. Dado que el rectificador no conduce durante estos tramos, el esquema se simplifica, como se muestra en la figura adjunta.

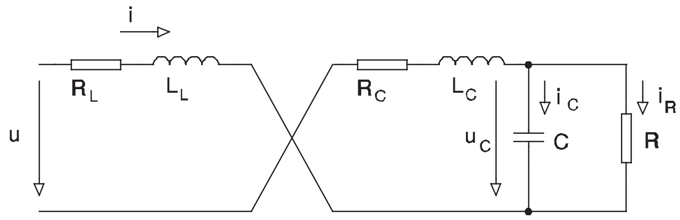


Las expresiones correspondientes serán las siguientes.

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) = 0 \qquad C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} = 0$$

2.2. Tramo 2

Durante el tramo 2 el rectificador conduce a partir de la semionda negativa de la tensión de alimentación, teniendo en cuenta que consideramos un rectificador ideal, el esquema se simplifica, como se muestra en la figura.



Las expresiones correspondientes serán las siguientes.

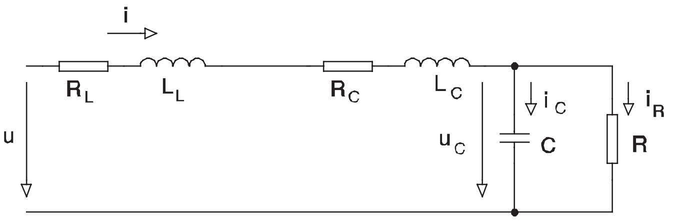
$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E\frac{di}{dt} - u_C(t) \qquad i(t) = -C\frac{du_C}{dt} - \frac{u_C(t)}{R}$$

con

$$R_E = R_L + R_C \qquad L_E = L_L + L_C$$

2.3. Tramo 4

Durante el tramo 4 el rectificador conduce a partir de la semionda positiva de la tensión de alimentación, teniendo en cuenta que consideramos un rectificador ideal, el esquema se simplifica, como se muestra en la figura adjunta.



Las expresiones correspondientes serán las siguientes.

$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E \frac{di}{dt} + u_C(t) \qquad i(t) = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{R}$$

con

$$R_E = R_L + R_C \qquad L_E = L_L + L_C$$

3. Solución de las ecuaciones

3.1. Tramos 1 y 3

Se trata de la descarga de un condensador, así pues la solución será la siguiente.

$$i(t) = 0 \qquad u_C(t) = K\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = RC$$

por tanto, para cada tramo será

$$t_1 - t_2 \qquad i_1(t) = 0 \qquad u_{C1}(t) = K_1\, e^{-t/\tau}$$

$$t_3 - t_4 \qquad i_3(t) = 0 \qquad u_{C3}(t) = K_3\, e^{-t/\tau}$$

3.2. Tramos 2 y 4

Dado que las expresiones de ambos tramos sólo difieren en el signo que lleva el término $u_C(t)$, haremos un cambio de variable sobre las expresiones.

$$u_R(t) = -u_C(t) \qquad t_2 \le t \le t_3 \qquad\qquad u_R(t) = u_C(t) \qquad t_4 \le t \le t_5$$

$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E \frac{di}{dt} + u_R(t) \qquad\qquad i(t) = C\frac{du_R}{dt} + \frac{u_R(t)}{R}$$

que, despejando las derivadas, se convierten en

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L_E}\, u(t) - \frac{R_E}{L_E}\, i(t) - \frac{1}{L_E}\, u_R(t) \qquad\qquad \frac{du_R}{dt} = \frac{1}{C}\, i(t) - \frac{1}{RC}\, u_R(t)$$

que podemos escribir en forma matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ u_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_E}{L_E} & -\frac{1}{L_E} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ u_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Para hallar la solución completa de la ecuación debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

3.2.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ u_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_E}{L_E} & -\frac{1}{L_E} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ u_R \end{pmatrix}$$

y, para resolverla, deberemos hallar las raíces del polinomio característico.

$$|\lambda\, I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \dfrac{R_E}{L_E} & \dfrac{1}{L_E} \\ -\dfrac{1}{C} & \lambda + \dfrac{1}{R\,C} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{L_E + R_E\,R\,C}{L_E\,R\,C}\,\lambda + \frac{R + R_E}{L_E\,R\,C} = 0$$

cuya solución será

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,\frac{L_E + R_E\,R\,C}{L_E\,R\,C} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_E^2 - 2\,L_E\,R_E\,R\,C + R_E^2\,R^2\,C^2 - 4\,L_E\,R^2\,C}{L_E^2\,R^2\,C^2}}$$

el radicando será el discriminante (D)

$$D = \frac{L_E^2 - 2\,L_E\,R_E\,R\,C + R_E^2\,R^2\,C^2 - 4\,L_E\,R^2\,C}{L_E^2\,R^2\,C^2}$$

y llamamos

$$\mu = -\frac{1}{2}\,\frac{L_E + R_E\,R\,C}{L_E\,R\,C} \qquad\qquad \epsilon = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$$

Según el signo del discriminante la solución tendrá aspecto diferente. Así si el discriminante es negativo la solución será oscilante y las dos raíces serán complejas conjugadas, siendo μ su parte real y ε su parte imaginaria; mientras que si es positivo la solución será aperiódica (no oscilante) y las dos raíces serán reales de valor

$$\lambda_1 = \mu + \epsilon \qquad\qquad \lambda_2 = \mu - \epsilon$$

3.2.1.1. Caso aperiódico

Si las raíces son reales la solución de la homogénea presentará el siguiente aspecto

$$u_R = K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_2\, e^{\lambda_2 t} \qquad\qquad i = K_{1p}\, K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_2\, e^{\lambda_2 t}$$

donde las constantes de proporcionalidad K_{1p} y K_{2p} se deducen sustituyendo u_R e i en la expresión

$$i(t) = C\frac{d\,u_R}{dt} + \frac{u_R(t)}{R}$$

obteniéndose

$$K_{1p} = \frac{1}{R} + \lambda_1\, C \qquad\qquad K_{2p} = \frac{1}{R} + \lambda_2\, C$$

3.2.1.2. Caso oscilante

Si las raíces son complejas la solución de la homogénea presentará el siguiente aspecto

$$u_R = K_1\, e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon\, t + K_2) \qquad\qquad i = K_p\, K_1\, e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon\, t + K_2 + \beta)$$

Descomponemos la segunda ecuación para hacer desaparecer el ángulo β.

$$i = K_p\, K_1\, e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon\, t + K_2)\, Cos(\beta) - K_p\, K_1\, e^{\mu\, t}\, Sin(\epsilon\, t + K_2)\, Sin(\beta)$$

$$i = K_1\, e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\epsilon\, t + K_2) - K_{pi}\, Sin(\epsilon\, t + K_2)\right]$$

con

$$K_{pr} = K_p\, Cos(\beta) \qquad\qquad K_{pi} = K_p\, Sin(\beta)$$

donde las constantes de proporcionalidad K_{pr} y K_{pi} se deducen a partir de la expresión

$$i(t) = C\frac{d\,u_R}{dt} + \frac{u_R(t)}{R}$$

obteniéndose

$$K_{pr} = \frac{1}{R} + \mu\, C \qquad\qquad K_{pi} = \epsilon\, C$$

3.2.2. Solución particular

Las componentes de la solución particular las determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \lfloor \varphi_h \qquad \underline{U}_h = R_E \underline{I}_h + j h \omega L_E \underline{I}_h + \underline{U}_{Rh} = (R_E + j h \omega L_E) \underline{I}_h + \underline{U}_{Rh}$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_{Rh}}{R} + j h \omega C \underline{U}_{Rh} = \underline{Y}_h \underline{U}_{Rh} = I_h \lfloor \varphi_{Ih} \qquad \underline{Y}_h = \frac{1}{R} + j h \omega C = Y_h \lfloor \varphi_{Yh}$$

$$\underline{U}_h = \left[1 + \underline{Y}_h (R_E + j h \omega L_E)\right] \underline{U}_{Rh} = \underline{M}_h \underline{U}_{Rh}$$

$$\underline{U}_{Rh} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{M}_h} = U_{Rh} \lfloor \varphi_{Rh} \qquad \underline{M}_h = 1 + \underline{Y}_h \left(R_E + j h \omega L_E\right) = M_h \lfloor \varphi_{Mh}$$

La solución particular será, por tanto

$$u_R(t) = \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_{Rh} \,Cos\left(h \omega t + \varphi_{Rh}\right) \qquad i(t) = \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h \,Cos\left(h \omega t + \varphi_{Ih}\right)$$

3.2.3. Solución completa

La ecuación completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular. Se tendrán dos casos según si la solución es oscilante o aperiódica. En ambos casos debe tenerse en cuenta que

$$D = \frac{L_E^2 - 2 L_E R_E R C + R_E^2 R^2 C^2 - 4 L_E R^2 C}{L_E^2 R^2 C^2}$$

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{L_E + R_E R C}{L_E R C} \qquad \epsilon = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$$

$$\lambda_1 = \mu + \epsilon \qquad \lambda_2 = \mu - \epsilon$$

$$t_5 = t_1 + T$$

$$\underline{U}_h = U_h \lfloor \varphi_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_{Ch}}{R} + j\,h\,\omega\,C\,\underline{U}_{Ch} = \underline{Y}_h \underline{U}_{Ch} = I_h \lfloor \varphi_{Ih}$$

$$\underline{Y}_h = \frac{1}{R} + j\,h\,\omega\,C = Y_h \lfloor \varphi_{Yh}$$

$$\underline{U}_{Ch} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{M}_h} = U_{Ch} \lfloor \varphi_{Ch}$$

$$\underline{M}_h = 1 + \underline{Y}_h \left(R_E + j\,h\,\omega\,L_E\right) = M_h \lfloor \varphi_{Mh}$$

3.2.3.1. Caso aperiódico (D > 0)

La solución completa vendrá dada por las siguientes expresiones:

$$u_R(t) = K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_2\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_{Rh}\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Rh}\right)$$

$$i(t) = K_{1p}\, K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_2\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

por tanto, para cada tramo será

$t_2 - t_3$

$$u_{C2}(t) = -\,K_{21}\, e^{\lambda_1 t} - K_{22}\, e^{\lambda_2 t} - \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ch}\right)$$

$$i_2(t) = K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

$t_4 - t_5$

$$u_{C4}(t) = K_{41}\, e^{\lambda_1 t} + K_{42}\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ch}\right)$$

$$i_4(t) = K_{1p}\, K_{41}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

con

$$K_{1p} = \frac{1}{R} + \lambda_1 \; C \qquad\qquad K_{2p} = \frac{1}{R} + \lambda_2 \; C$$

3.2.3.2. Caso oscilante (D < 0)

La solución completa vendrá dada por las siguientes expresiones:

$$u_R(t) = K_1 \; e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon \; t + K_2) + \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; U_{Rh}\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Rh})$$

$$i(t) = K_1 \; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\epsilon \; t + K_2) - K_{pi}\, Sin(\epsilon \; t + K_2)\right] + \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; I_h\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})$$

por tanto, para cada tramo será

$t_2 - t_3$

$$u_{C2}(t) = -\, K_{21} \; e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon \; t + K_{22}) - \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; U_{Ch}\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ch})$$

$$i_2(t) = K_{21} \; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\epsilon \; t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin(\epsilon \; t + K_{22})\right] + \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; I_h\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})$$

$t_4 - t_5$

$$u_{C4}(t) = K_{41} \; e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon \; t + K_{42}) + \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; U_{Ch}\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ch})$$

$$i_4(t) = K_{41} \; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\epsilon \; t + K_{42}) - K_{pi}\, Sin(\epsilon \; t + K_{42})\right] + \sum_{h=1}^{h_{\text{máx}}} \sqrt{2}\; I_h\; Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})$$

con

$$K_{pr} = \frac{1}{R} + \mu \; C \qquad\qquad K_{pi} = \epsilon \; C$$

4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio de los tramos impares deberán indicar que la conducción del rectificador se inicia cuando la tensión en el lado de alterna supera la del lado de continua, es decir cuando la tensión de red (rectificada) y la tensión del condensador se igualan. En los tramos pares se debe poner de manifiesto que la conducción termina al paso por cero de la onda de intensidad. Así pues tendremos

$$u_{C1}(t_2) = -u(t_2) \qquad i_2(t_3) = 0$$

$$u_{C3}(t_4) = u(t_4) \qquad i_4(t_1 + T) = 0$$

4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las cuatro incógnitas, t_1 a t_4.

$$f_1(t_2) = u_{C1}(t_2) + u(t_2) = 0 \qquad f_2(t_3) = i_2(t_3) = 0$$

$$f_3(t_4) = u_{C3}(t_4) - u(t_4) = 0 \qquad f_4(t_1) = i_4(t_1 + T) = 0$$

4.1.1. Caso aperiódico

$$f_1(t_2) = K_1\, e^{-t_2/\tau} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) = 0$$

$$f_2(t_3) = K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t_3} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t_3} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ih}) = 0$$

$$f_3(t_4) = K_3\, e^{-t_4/\tau} - \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h) = 0$$

$$f_4(t_1) = K_{1p}\, K_{41}\, e^{\lambda_1 (t_1 + T)} + K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 (t_1 + T)} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, (t_1 + T) + \varphi_{Ih}) = 0$$

Simplificando la ecuación de f_4

$$f_4(t_1) = K_{1p}\, K_{41}\; e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_1 t_1} + K_{2p}\, K_{42}\; e^{\lambda_2 T} e^{\lambda_2 t_1} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\; I_h\; Cos\left(h\,\omega\; t_1 + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

4.1.2. Caso oscilante

$$f_1\left(t_2\right) = K_1\; e^{-t_2/\tau} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\; U_h\; Cos\left(h\,\omega\; t_2 + \varphi_h\right) = 0$$

$$f_2(t_3) = K_{21}\; e^{\mu\, t_3}\left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon\; t_3 + K_{22}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon\; t_3 + K_{22}\right)\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\; I_h\; Cos\left(h\,\omega\; t_3 + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

$$f_3\left(t_4\right) = K_3\, e^{-t_4/\tau} - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\; U_h\; Cos\left(h\,\omega\; t_4 + \varphi_h\right) = 0$$

$$f_4(t_1) = K_{41}\; e^{\mu\,(t_1+T)}\left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon\,(t_1+T) + K_{42}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon\,(t_1+T) + K_{42}\right)\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,(t_1+T) + \varphi_{Ih}\right)$$

Simplificando la ecuación de f_4

$$f_4(t_1) = K_{41}\; e^{\mu\,T} e^{\mu\,t_1}\left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon\,(t_1+T) + K_{42}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon\,(t_1+T) + K_{42}\right)\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\; t_1 + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad serán

$$u_{C2}\left(t_2\right) = u_{C1}\left(t_2\right) \qquad u_{C3}\left(t_3\right) = u_{C2}\left(t_3\right) \qquad u_{C4}\left(t_4\right) = u_{C3}\left(t_4\right)$$

$$i_2\left(t_2\right) = i_1\left(t_2\right) \qquad i_4\left(t_4\right) = i_3\left(t_4\right)$$

y la de periodicidad

$$u_{C1}(t_1) = u_{C4}(t_1 + T)$$

Observemos que si relacionamos las condiciones de cambio con las de continuidad y periodicidad obtenemos

$$u_{C1}(t_1) = u_{C4}(t_1 + T) \qquad u_{C2}(t_2) = u_{C1}(t_2) = -u(t_2) \qquad u_{C3}(t_3) = u_{C2}(t_3)$$

$$u_{C4}(t_4) = u_{C3}(t_4) = u(t_4) \qquad i_2(t_2) = i_1(t_2) = 0 \qquad i_4(t_4) = i_3(t_4) = 0$$

5.1. Determinación de constantes

Las constantes K_1, K_{21}, K_{22}, K_3, K_{41} y K_{42} se determinarán, en función de t_1, t_2, t_3 y t_4, despejándolas de las condiciones de continuidad y periodicidad (condiciones iniciales de cada tramo).

5.1.1. Caso aperiódico

Las condiciones iniciales escritas en forma desarrollada son

$$K_1\, e^{-t_1/\tau} = K_{41}\, e^{\lambda_1 (t_1 + T)} + K_{42}\, e^{\lambda_2 (t_1 + T)} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ch})$$

$$-K_{21}\, e^{\lambda_1 t_2} - K_{22}\, e^{\lambda_2 t_2} - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}) = -\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h)$$

$$K_3\, e^{-t_3/\tau} = -K_{21}\, e^{\lambda_1 t_3} - K_{22}\, e^{\lambda_2 t_3} - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ch})$$

$$K_{41}\, e^{\lambda_1 t_4} + K_{42}\, e^{\lambda_2 t_4} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch}) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h)$$

$$K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t_2} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t_2} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) = 0$$

$$K_{1p}\, K_{41}\, e^{\lambda_1 t_4} + K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 t_4} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}) = 0$$

de donde

$$K_{21} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) + K_{2p}\left[\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch})\right]}{(K_{2p} - K_{1p})\, e^{\lambda_1 t_2}}$$

$$K_{22} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) + K_{1p}\left[\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch})\right]}{(K_{1p} - K_{2p})\, e^{\lambda_2 t_2}}$$

$$K_3 = -\, e^{t_3/\tau}\left(K_{21}\, e^{\lambda_1 t_3} + K_{22}\, e^{\lambda_2 t_3} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ch})\right)$$

$$K_{41} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}) + K_{2p}\left[\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch})\right]}{(K_{2p} - K_{1p})\, e^{\lambda_1 t_4}}$$

$$K_{42} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}) + K_{1p}\left[\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch})\right]}{(K_{1p} - K_{2p})\, e^{\lambda_2 t_4}}$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau}\left(K_{41}\, e^{\lambda_1 (t_1 + T)} + K_{42}\, e^{\lambda_2 (t_1 + T)} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ch})\right)$$

5.1.2. Caso oscilante

Las condiciones iniciales escritas en forma desarrollada son

$$K_1\, e^{-t_1/\tau} = K_{41}\, e^{\mu\,(t_1+T)}\, Cos\left(\epsilon\,(t_1+T) + K_{42}\right) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ch}\right)$$

$$-K_{21}\, e^{\mu\, t_2}\, Cos\left(\epsilon\, t_2 + K_{22}\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}\right) = -\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h\right)$$

$$K_3\, e^{-t_3/\tau} = -K_{21}\, e^{\mu\, t_3}\, Cos\left(\epsilon\, t_3 + K_{22}\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ch}\right)$$

$$K_{41}\, e^{\mu\, t_4}\, Cos\left(\epsilon\, t_4 + K_{42}\right) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch}\right) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h\right)$$

$$K_{21}\, e^{\mu\, t_2}\left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon\, t_2 + K_{22}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon\, t_2 + K_{22}\right)\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

$$K_{41}\, e^{\mu\, t_4}\left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon\, t_4 + K_{42}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon\, t_4 + K_{42}\right)\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

descomponiendo los términos oscilantes de pulsación ε, se observan términos con K_{q1} Cos K_{q2} y con K_{q1} Sin K_{q2} que pueden ser convertidos a números complejos

$$\underline{K}_q = K_{q1} \angle K_{q2} = K_{q1}\, Cos\, K_{q2} + j\, K_{q1}\, Sin\, K_{q2} = K_{qr} + j\, K_{qi}$$

de donde podremos despejar K_{qr} y K_{qi}

$$K_{2r} = \frac{e^{-\mu\, t_2}}{K_{pi}} \left[\left(K_{pr}\, Sin(\epsilon\, t_2) + K_{pi}\, Cos(\epsilon\, t_2)\right) \left(\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}\right) \right) + \right.$$

$$\left. + Sin(\epsilon\, t_2) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}\right) \right]$$

$$K_{2i} = \frac{e^{-\mu\, t_2}}{K_{pi}} \Bigg[\left(K_{pr}\, Cos(\varepsilon\, t_2) - K_{pi}\, Sin(\varepsilon\, t_2)\right) \left(\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}\right) \right) + \\ + Cos(\varepsilon\, t_2) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}\right) \Bigg]$$

$$K_3 = e^{t_3/\tau} \left[-K_{21}\, e^{\mu\, t_3}\, Cos(\varepsilon\, t_3 + K_{22}) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ch}\right) \right]$$

$$K_{4r} = \frac{e^{-\mu\, t_4}}{K_{pi}} \Bigg[\left(K_{pr}\, Sin(\varepsilon\, t_4) + K_{pi}\, Cos(\varepsilon\, t_4)\right) \left(\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch}\right) \right) + \\ + Sin(\varepsilon\, t_4) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}\right) \Bigg]$$

$$K_{4i} = \frac{e^{-\mu\, t_4}}{K_{pi}} \Bigg[\left(K_{pr}\, Cos(\varepsilon\, t_4) - K_{pi}\, Sin(\varepsilon\, t_4)\right) \left(\sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h\right) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ch}\right) \right) + \\ + Cos(\varepsilon\, t_4) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}\right) \Bigg]$$

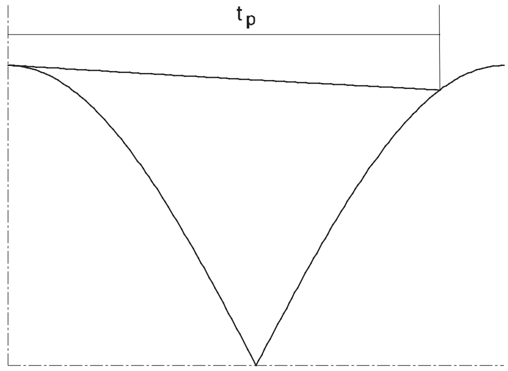
$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left[K_{41}\, e^{\mu\,(t_1 + T)}\, Cos(\varepsilon\,(t_1 + T) + K_{42}) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ch}\right) \right]$$

6. Elección del valor inicial

La primera aproximación de la solución la hallaremos a partir de una simplificación. En este caso consideraremos que no hay armónicos de tensión y que existe simetría de semionda.

Dado que el modelo está pensado para trabajar como parte de un flujo de cargas, consideraremos que los valores de R_E y L_E son pequeños puesto que sólo contemplan los valores de resistencia e inductancia en el interior de la fuente ya que los de la red se consideran exteriores al nudo de conexión de la misma.

La determinación del instante t_2 de inicio de la conducción la determinaremos a partir del gráfico siguiente en el que suponemos que el condensador se empieza a descargar a partir del instante de tiempo t_m correspondiente al máximo de la tensión de alimentación y con una tensión inicial igual a la de dicho máximo.



$$t_m = -\frac{\varphi_1}{\omega} \qquad\qquad t_2 = t_p - \frac{\varphi_1}{\omega}$$

Para hallar el valor de t_p deberemos resolver la ecuación

$$e^{-t_p/\tau} + Cos(\omega\ t_p) = 0 \qquad\qquad \frac{T}{4} < t_p < \frac{T}{2}$$

Para resolver la ecuación puede utilizarse, por ejemplo, el método de la bisección que en este caso es muy adecuado ya que el valor de la función en el inicio del intervalo de solución (T/4) es positivo y negativo en el final del intervalo (T/2).

En las condiciones expuestas, el final de la conducción se producirá aproximadamente en el punto t_m. Después de muchas pruebas con el modelo se ha visto que es conveniente inicializar ligeramente antes de t_m, por ello se propone

$$t_1 = -\frac{\varphi_1}{\omega} - \frac{T}{200}$$

y, entonces

$$t_3 = \frac{T}{2} + t_1 \qquad\qquad t_4 = \frac{T}{2} + t_2$$

7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma