$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, Cos(n\,\omega\,t) + b_n \, Sin(n\,\omega\,t)\right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Cos(n\,\omega\,t)\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Sin(n\,\omega\,t)\, dt$$

Separando los tramos de la función

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t)\, Cos(n\,\omega\,t)\, dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t)\, Cos(n\,\omega\,t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t)\, Sin(n\,\omega\,t)\, dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t)\, Sin(n\,\omega\,t)\, dt$$

donde los términos correspondientes a los tramos 1 (t_1 a t_2) y 3 (t_3 a t_4) no aparecen puesto que la intensidad en ellos es nula.

7.1. Caso aperiódico (D>0)

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_2(t) = K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h \, Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih})$$

$$i_4(t) = K_{1p}\, K_{41}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 t} + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h \, Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih})$$

por tanto podemos integrar por un lado los dos primeros términos y por otro las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{2nH} = \int \left(K_{1p}\, K_{21}\; e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t}\right) Cos(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$A_{2nH} = \frac{K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t}(\lambda_1\, Cos\, n\,\omega\; t + n\,\omega\; Sin\, n\,\omega\; t)}{\lambda_1^2 + n^2\,\omega^2} + \frac{K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t}(\lambda_2\, Cos\, n\,\omega\; t + n\,\omega\; Sin\, n\,\omega\; t)}{\lambda_2^2 + n^2\,\omega^2}$$

$$A_{2nP} = \int \sqrt{2}\; I_h\; Cos\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\right)\; Cos\,(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{Sin\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\; t\right)}{2\,\omega\,(h - n)} + \frac{Sin\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\; t\right)}{2\,\omega\,(h + n)}\right) \qquad h \neq n$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Ih}}{2} + \frac{Sin\left(2\, n\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\right)}{4\, n\,\omega}\right) \qquad h = n$$

$$A_{4nH} = \int \left(K_{1p}\, K_{41}\; e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 t}\right) Cos(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$A_{4nH} = \frac{K_{1p}\, K_{41}\, e^{\lambda_1 t}(\lambda_1\, Cos\, n\,\omega\; t + n\,\omega\; Sin\, n\,\omega\; t)}{\lambda_1^2 + n^2\,\omega^2} + \frac{K_{2p}\, K_{42}\, e^{\lambda_2 t}(\lambda_2\, Cos\, n\,\omega\; t + n\,\omega\; Sin\, n\,\omega\; t)}{\lambda_2^2 + n^2\,\omega^2}$$

$$A_{4nP} = A_{2nP}$$

$$B_{2nH} = \int \left(K_{1p}\, K_{21}\; e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t}\right) Sin(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$B_{2nH} = \frac{K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t}(\lambda_1\, Sin\, n\,\omega\; t - n\,\omega\; Cos\, n\,\omega\; t)}{\lambda_1^2 + n^2\,\omega^2} + \frac{K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t}(\lambda_2\, Sin\, n\,\omega\; t - n\,\omega\; Cos\, n\,\omega\; t)}{\lambda_2^2 + n^2\,\omega^2}$$

$$B_{2nP} = \int \sqrt{2}\; I_h\; Cos\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\right)\; Sin\,(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\,t)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\,t)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-Cos(2\,n\,\omega\,t + \varphi_{Ih})}{4\,n\,\omega} - \frac{t\,Sin\,\varphi_{Ih}}{2} \right) \qquad h = n$$

$$B_{4nH} = \int \left(K_{1p}\,K_{41}\,e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\,K_{42}\,e^{\lambda_2 t} \right) Sin(n\,\omega\,t)\,dt$$

$$B_{4nH} = \frac{K_{1p}\,K_{41}\,e^{\lambda_1 t}(\lambda_1\,Sin\,n\,\omega\,t - n\,\omega\,Cos\,n\,\omega\,t)}{\lambda_1^2 + n^2\,\omega^2} + \frac{K_{2p}\,K_{42}\,e^{\lambda_2 t}(\lambda_2\,Sin\,n\,\omega\,t - n\,\omega\,Cos\,n\,\omega\,t)}{\lambda_2^2 + n^2\,\omega^2}$$

$$B_{4nP} = B_{2nP}$$

Así pues tendremos que las componentes seran

$$a_n = \frac{2}{T}\left(A_{2nH}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} A_{2nP}(t_3) - A_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} A_{2nP}(t_2) + A_{4nH}(t_1+T) + \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} A_{4nP}(t_1+T) - A_{4nH}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} A_{4nP}(t_4) \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(B_{2nH}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} B_{2nP}(t_3) - B_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} B_{2nP}(t_2) + B_{4nH}(t_1+T) + \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} B_{4nP}(t_1+T) - B_{4nH}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{m\acute{a}x}} B_{4nP}(t_4) \right)$$

$$\underline{I}_n = I_n \angle \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n - j\,b_n)$$

7.2. Caso oscilante (D<0)

Recordemos que las funciones de intensidad tienen dos términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_2(t) = K_{21}\, e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\varepsilon\; t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin(\varepsilon\; t + K_{22})\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})$$

$$i_4(t) = K_{41}\, e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\varepsilon\; t + K_{42}) - K_{pi}\, Sin(\varepsilon\; t + K_{42})\right] + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})$$

por tanto podemos integrar por un lado el primer término y por otro las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{2nP} = \int \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih})\; Cos(n\,\omega\; t)\, dt$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{Sin(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\; t)}{2\,\omega\,(h - n)} + \frac{Sin(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\; t)}{2\,\omega\,(h + n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Ih}}{2} + \frac{Sin(2\, n\,\omega\; t + \varphi_{Ih})}{4\, n\,\omega} \right) \qquad h = n$$

$$A_{2nH} = \int K_{21}\, e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos\,(\varepsilon\, t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin\,(\varepsilon\, t + K_{22})\right] Cos\, n\,\omega\; t\; d\,t$$

$$\begin{aligned}
A_{2nH} = \frac{K_{21}\, e^{\mu\, t}}{2} \Bigg[& \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\varepsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\left((\varepsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right) + (\varepsilon - n\,\omega)\; Sin\left((\varepsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] + \\
& + \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\varepsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\left((\varepsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right) + (\varepsilon + n\,\omega)\; Sin\left((\varepsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] - \\
& - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\varepsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\left((\varepsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right) - (\varepsilon + n\,\omega)\; Cos\left((\varepsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] - \\
& - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\varepsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\left((\varepsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right) - (\varepsilon - n\,\omega)\; Cos\left((\varepsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] \Bigg]
\end{aligned}$$

$$A_{4nP} = A_{2nP}$$

$$A_{4nH} = \int K_{41}\; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos\,(\epsilon\, t + K_{42}) - K_{pi}\, Sin\,(\epsilon\, t + K_{42})\right] Cos\, n\,\omega\; t\;\, d\,t$$

$$A_{4nH} = \frac{K_{41}\; e^{\mu\, t}}{2}\left[\frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{42}\big) + (\epsilon - n\,\omega)\; Sin\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{42}\big)\right] + \right.$$

$$+ \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{42}\big) + (\epsilon + n\,\omega)\; Sin\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{42}\big)\right] -$$

$$- \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{42}\big) - (\epsilon + n\,\omega)\; Cos\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{42}\big)\right] -$$

$$\left. - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{42}\big) - (\epsilon - n\,\omega)\; Cos\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{42}\big)\right]\right]$$

$$B_{2nH} = \int K_{21}\; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos\,(\epsilon\, t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin\,(\epsilon\, t + K_{22})\right] Sin\, n\,\omega\; t\;\, d\,t$$

$$B_{2nH} = \frac{K_{21}\; e^{\mu\, t}}{2}\left[\frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\big) - (\epsilon + n\,\omega)\; Cos\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\big)\right] - \right.$$

$$- \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\big) - (\epsilon - n\,\omega)\; Cos\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\big)\right] -$$

$$- \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\big) + (\epsilon - n\,\omega)\; Sin\big((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\big)\right] +$$

$$\left. + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\big) + (\epsilon + n\,\omega)\; Sin\big((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\big)\right]\right]$$

$$B_{2nP} = \int \sqrt{2}\; I_h\; Cos\big(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\big)\; Sin\,(n\,\omega\; t)\; dt$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-\,Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\,t\right)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\,t\right)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-\,Cos\left(2\,n\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)}{4\,n\,\omega} - \frac{t\,Sin\,\varphi_{Ih}}{2} \right) \qquad h = n$$

$$B_{4nH} = \int K_{41}\; e^{\mu\,t}\left[K_{pr}\,Cos\,(\epsilon\,t + K_{42}) - K_{pi}\,Sin\,(\epsilon\,t + K_{42})\right] Sin\,n\,\omega\,t\;dt$$

$$\begin{aligned}
B_{4nH} = \frac{K_{41}\;e^{\mu\,t}}{2} \Bigg[& \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\;Sin\left((\epsilon + n\,\omega)\;t + K_{42}\right) - (\epsilon + n\,\omega)\;Cos\left((\epsilon + n\,\omega)\;t + K_{42}\right)\right] - \\
& - \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\;Sin\left((\epsilon - n\,\omega)\;t + K_{42}\right) - (\epsilon - n\,\omega)\;Cos\left((\epsilon - n\,\omega)\;t + K_{42}\right)\right] - \\
& - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\;Cos\left((\epsilon - n\,\omega)\;t + K_{42}\right) + (\epsilon - n\,\omega)\;Sin\left((\epsilon - n\,\omega)\;t + K_{42}\right)\right] + \\
& + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\;Cos\left((\epsilon + n\,\omega)\;t + K_{42}\right) + (\epsilon + n\,\omega)\;Sin\left((\epsilon + n\,\omega)\;t + K_{42}\right)\right] \Bigg]
\end{aligned}$$

$$B_{4nP} = B_{2nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \frac{2}{T}\left(A_{2nH}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_3) - A_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_2) + A_{4nH}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{4nP}(t_1 + T) - A_{4nH}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{4nP}(t_4) \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(B_{2nH}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_3) - B_{2nH}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_2) + B_{4nH}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{4nP}(t_1 + T) - B_{4nH}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{4nP}(t_4) \right)$$

$$\underline{I}_n = I_n \lfloor \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n - j\,b_n\right)$$

8. Simplificaciones por simetría

En caso de que la tensión de alimentación tenga simetría de semionda el desarrollo se simplifica ya que la onda de intensidad también presenta simetría y la tensión en el condensador se repite cada medio periodo. La tensión de alimentación, dada la simetría, carecerá de armónicos pares. Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos		**2**
Tramos sin ecuación diferencial	0	
Tramos de primer orden	1	
Tramos de segundo orden	1	
Número de incógnitas		**2**
Número de ecuaciones de cambio		**2**
Número de constantes		**3**
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad		**3**
Ecuaciones de continuidad	2	
Ecuaciones de periodicidad	1	

8.1. Solución completa de las ecuaciones

En este caso se tendrá una onda de dos tramos ya que la del otro semiperiodo podrá obtenerse a partir de ésta. En todos los tramos tendremos

$$u(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_h) \qquad T = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2\,\pi\, f$$

8.1.1. Tramo 1

$t_1 - t_2$ $\qquad i_1(t) = 0 \qquad u_{C1}(t) = K_1\, e^{-t/\tau}$

$t_3 - t_4$ $\qquad i_3(t) = -\,i_1\left(t - \frac{T}{2}\right) = 0 \qquad u_{C3}(t) = u_{C1}\left(t - \frac{T}{2}\right)$

con

$$\tau = R\,C$$

8.1.2. Tramo 2

En este tramo hay dos posibles soluciones según el signo del discriminante. Por tanto hallaremos

$$D = \frac{L_E^2 - 2\,L_E\,R_E\,R\,C + R_E^2\,R^2\,C^2 - 4\,L_E\,R^2\,C}{L_E^2\,R^2\,C^2}$$

$$\mu = -\frac{1}{2}\,\frac{L_E + R_E\,R\,C}{L_E\,R\,C} \qquad \epsilon = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$$

$$\lambda_1 = \mu + \epsilon \qquad \lambda_2 = \mu - \epsilon$$

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2} \qquad \underline{U}_h = U_h \lfloor \varphi_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_{Ch}}{R} + j\,h\,\omega\,C\,\underline{U}_{Ch} = \underline{Y}_h\,\underline{U}_{Ch} = I_h \lfloor \varphi_{Ih} \qquad \underline{Y}_h = \frac{1}{R} + j\,h\,\omega\,C = Y_h \lfloor \varphi_{Yh}$$

$$\underline{U}_{Ch} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{M}_h} = U_{Ch} \lfloor \varphi_{Ch} \qquad \underline{M}_h = 1 + \underline{Y}_h\left(R_E + j\,h\,\omega\,L_E\right) = M_h \lfloor \varphi_{Mh}$$

8.1.2.1. Caso aperiódico (D > 0)

$t_2 - t_3$

$$u_{C2}(t) = -K_{21}\,e^{\lambda_1 t} - K_{22}\,e^{\lambda_2 t} - \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\,U_{Ch}\,Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ch}\right)$$

$$i_2(t) = K_{1p}\,K_{21}\,e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\,K_{22}\,e^{\lambda_2 t} + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\,I_h\,Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

$t_4 - t_5$ $\qquad i_4(t) = -i_2\left(t - \frac{T}{2}\right) \qquad\qquad u_{C4}(t) = u_{C2}\left(t - \frac{T}{2}\right)$

con

$$K_{1p} = \frac{1}{R} + \lambda_1\, C \qquad\qquad K_{2p} = \frac{1}{R} + \lambda_2\, C$$

8.1.2.2. Caso oscilante (D < 0)

$t_2 - t_3$

$$u_{C2}(t) = -K_{21}\, e^{\mu\, t}\, Cos(\epsilon\, t + K_{22}) - \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ch})$$

$$i_2(t) = K_{21}\, e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos(\epsilon\, t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin(\epsilon\, t + K_{22})\right] + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{max}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih})$$

$t_4 - t_5$ $\qquad i_4(t) = -i_2\left(t - \frac{T}{2}\right) \qquad\qquad u_{C4}(t) = u_{C2}\left(t - \frac{T}{2}\right)$

con

$$K_{pr} = \frac{1}{R} + \mu\, C \qquad\qquad K_{pi} = \epsilon\, C$$

8.2. Sistema a resolver

El sistema a resolver dependerá de si la solución es oscilante o aperiódica.

8.2.1. Caso aperiódico

$$f_1(t_2) = K_1\, e^{-t_2/\tau} + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) = 0$$

$$f_2(t_1) = K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 (t_1 + (T/2))} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 (t_1 + (T/2))} + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \varphi_{Ih}\right) = 0$$

Simplificando la ecuación de f_2

$$f_2(t_1) = K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 T/2}\, e^{\lambda_1 t_1} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 T/2}\, e^{\lambda_2 t_1} - \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih}) = 0$$

8.2.2. Caso oscilante

$$f_1(t_2) = K_1\, e^{-t_2/\tau} + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) = 0$$

$$\begin{aligned} f_2(t_1) = K_{21}\, e^{\mu (t_1 + (T/2))} \left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_{22}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_{22}\right)\right] + \\ + \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \varphi_{Ih}\right) = 0 \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación de f_2

$$\begin{aligned} f_2(t_1) = K_{21}\, e^{\mu T/2}\, e^{\mu t_1} \left[K_{pr}\, Cos\left(\epsilon \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_{22}\right) - K_{pi}\, Sin\left(\epsilon \left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + K_{22}\right)\right] - \\ - \sum_{\substack{i=1\\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih}) = 0 \end{aligned}$$

8.3. Determinación de constantes

8.3.1. Caso aperiódico

$$K_{21} = \frac{1}{(K_{2p} - K_{1p})\, e^{\lambda_1 t_2}} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) + K_{2p} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}) \right) \right]$$

$$K_{22} = \frac{1}{(K_{1p} - K_{2p})\, e^{\lambda_2 t_2}} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) + K_{1p} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}) \right) \right]$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left(- K_{21}\, e^{\lambda_1 (t_1 + (T/2))} - K_{22}\, e^{\lambda_2 (t_1 + (T/2))} + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ch}) \right)$$

8.3.2. Caso oscilante

Tomando

$$\underline{K}_2 = K_{21} \angle K_{22} = K_{21}\, Cos\, K_{22} + j\, K_{21}\, Sin\, K_{22} = K_{2r} + j\, K_{2i}$$

se tiene

$$K_{2r} = \frac{e^{-\mu\, t_2}}{K_{pi}} \left[(K_{pr}\, Sin(\epsilon\, t_2) + K_{pi}\, Cos(\epsilon\, t_2)) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ch}) \right) + Sin(\epsilon\, t_2) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) \right]$$

$$K_{2i} = \frac{e^{-\mu t_2}}{K_{pi}} \left[\left(K_{pr}\, Cos(\epsilon\, t_2) - K_{pi}\, Sin(\epsilon\, t_2) \right) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_h\, Cos\left(h\, \omega\, t_2 + \varphi_h \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\, \omega\, t_2 + \varphi_{Ch} \right) \right) + Cos(\epsilon\, t_2) \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\, \omega\, t_2 + \varphi_{Ih} \right) \right]$$

$$K_1 = e^{t_1/\tau} \left[K_{21}\, e^{\mu\,(t_1 + (T/2))}\, Cos\left(\epsilon \left(t_1 + \frac{T}{2} \right) + K_{22} \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} \sqrt{2}\, U_{Ch}\, Cos\left(h\, \omega\, t_1 + \varphi_{Ch} \right) \right]$$

8.4. Elección del valor inicial

El método será el mismo que se ha propuesto anteriormente. Así pues se tendrá

$$t_1 = -\frac{\varphi_1}{\omega} - \frac{T}{200} \qquad\qquad t_2 = t_p - \frac{\varphi_1}{\omega}$$

Para hallar el valor de t_p deberemos resolver la ecuación

$$e^{-t_p/\tau} + Cos\left(\omega\, t_p \right) = 0 \qquad\qquad \frac{T}{4} < t_p < \frac{T}{2}$$

Para resolver la ecuación puede utilizarse, por ejemplo, el método de la bisección que en este caso es muy adecuado ya que el valor de la función en el inicio del intervalo de solución (T/4) es positivo y negativo en el final del intervalo (T/2).

8.5. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la onda de intensidad, dada la simetría, tendrá sólo armónicos impares.

8.5.1. Caso aperiódico (D>0)

$$A_{nH} = \int \left(K_{1p}\, K_{21}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p}\, K_{22}\, e^{\lambda_2 t} \right) Cos(n\, \omega\, t)\, dt$$

$$A_{nH} = \frac{K_{1p} K_{21} e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 \, Cos\, n\, \omega\, t + n\, \omega\, Sin\, n\, \omega\, t)}{\lambda_1^2 + n^2\, \omega^2} + \frac{K_{2p} K_{22} e^{\lambda_2 t} (\lambda_2 \, Cos\, n\, \omega\, t + n\, \omega\, Sin\, n\, \omega\, t)}{\lambda_2^2 + n^2\, \omega^2}$$

$$A_{nP} = \int \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih})\, Cos(n\, \omega\, t)\, dt$$

$$A_{nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{Sin(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih} - n\, \omega\, t)}{2\, \omega\, (h-n)} + \frac{Sin(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih} + n\, \omega\, t)}{2\, \omega\, (h+n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$A_{nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Ih}}{2} + \frac{Sin(2\, n\, \omega\, t + \varphi_{Ih})}{4\, n\, \omega} \right) \qquad h = n$$

$$B_{nH} = \int \left(K_{1p} K_{21}\, e^{\lambda_1 t} + K_{2p} K_{22}\, e^{\lambda_2 t} \right) Sin(n\, \omega\, t)\, dt$$

$$B_{nH} = \frac{K_{1p} K_{21} e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 \, Sin\, n\, \omega\, t - n\, \omega\, Cos\, n\, \omega\, t)}{\lambda_1^2 + n^2\, \omega^2} + \frac{K_{2p} K_{22} e^{\lambda_2 t} (\lambda_2 \, Sin\, n\, \omega\, t - n\, \omega\, Cos\, n\, \omega\, t)}{\lambda_2^2 + n^2\, \omega^2}$$

$$B_{nP} = \int \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih})\, Sin(n\, \omega\, t)\, dt$$

$$B_{nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{-\,Cos(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih} + n\, \omega\, t)}{2\, \omega\, (h+n)} + \frac{Cos(h\, \omega\, t + \varphi_{Ih} - n\, \omega\, t)}{2\, \omega\, (h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{-\,Cos(2\, n\, \omega\, t + \varphi_{Ih})}{4\, n\, \omega} - \frac{t\, Sin\, \varphi_{Ih}}{2} \right) \qquad h = n$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \frac{4}{T} \left[A_{nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - A_{nH}(t_2) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{nP}(t_2) \right]$$

$$b_n = \frac{4}{T}\left[B_{nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - B_{nH}(t_2) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{nP}(t_2) \right]$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \lfloor \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n - j\, b_n)$$

8.5.2. Caso oscilante (D<0)

$$A_{nP} = \int \sqrt{2}\ I_h\ Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih})\ Cos(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$A_{nP} = \sqrt{2}\ I_h \left(\frac{Sin(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h-n)} + \frac{Sin(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\, t)}{2\,\omega\,(h+n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$A_{nP} = \sqrt{2}\ I_h \left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{Ih}}{2} + \frac{Sin(2\,n\,\omega\, t + \varphi_{Ih})}{4\,n\,\omega} \right) \qquad h = n$$

$$A_{nH} = \int K_{21}\ e^{\mu\, t} \left[K_{pr}\, Cos\,(\epsilon\, t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin\,(\epsilon\, t + K_{22}) \right] Cos\, n\,\omega\, t\ dt$$

$$\begin{aligned} A_{nH} = \frac{K_{21}\, e^{\mu\, t}}{2} \Bigg[& \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2} \left[\mu\, Cos((\epsilon - n\,\omega)\, t + K_{22}) + (\epsilon - n\,\omega)\, Sin((\epsilon - n\,\omega)\, t + K_{22}) \right] + \\ & + \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2} \left[\mu\, Cos((\epsilon + n\,\omega)\, t + K_{22}) + (\epsilon + n\,\omega)\, Sin((\epsilon + n\,\omega)\, t + K_{22}) \right] - \\ & - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2} \left[\mu\, Sin((\epsilon + n\,\omega)\, t + K_{22}) - (\epsilon + n\,\omega)\, Cos((\epsilon + n\,\omega)\, t + K_{22}) \right] - \\ & - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2} \left[\mu\, Sin((\epsilon - n\,\omega)\, t + K_{22}) - (\epsilon - n\,\omega)\, Cos((\epsilon - n\,\omega)\, t + K_{22}) \right] \Bigg] \end{aligned}$$

$$B_{nP} = \int \sqrt{2}\; I_h\; Cos\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\right)\; Sin\left(n\,\omega\; t\right)\, dt$$

$$B_{nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-\,Cos\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\; t\right)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos\left(h\,\omega\; t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\; t\right)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{nP} = \sqrt{2}\; I_h \left(\frac{-\,Cos\left(2\,n\,\omega\; t + \varphi_{Ih}\right)}{4\,n\,\omega} - \frac{t\,Sin\,\varphi_{Ih}}{2} \right) \qquad h = n$$

$$B_{nH} = \int K_{21}\; e^{\mu\, t}\left[K_{pr}\, Cos\,(\epsilon\, t + K_{22}) - K_{pi}\, Sin\,(\epsilon\, t + K_{22})\right] Sin\, n\,\omega\; t\; dt$$

$$\begin{aligned} B_{nH} = \frac{K_{21}\, e^{\mu\, t}}{2} \Bigg[& \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\left((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right) - (\epsilon + n\,\omega)\; Cos\left((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] - \\ & - \frac{K_{pr}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Sin\left((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right) - (\epsilon - n\,\omega)\; Cos\left((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] - \\ & - \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon - n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\left((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right) + (\epsilon - n\,\omega)\; Sin\left((\epsilon - n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] + \\ & + \frac{K_{pi}}{\mu^2 + (\epsilon + n\,\omega)^2}\left[\mu\; Cos\left((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right) + (\epsilon + n\,\omega)\; Sin\left((\epsilon + n\,\omega)\; t + K_{22}\right)\right] \Bigg] \end{aligned}$$

Así pues tendremos que las componentes serán (sólo para n impar)

$$a_n = \frac{4}{T}\left[A_{nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - A_{nH}(t_2) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} A_{nP}(t_2) \right]$$

$$b_n = \frac{4}{T}\left[B_{nH}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{nP}\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - B_{nH}(t_2) - \sum_{\substack{i=1 \\ h=2i-1}}^{(h_{máx}+1)/2} B_{nP}(t_2) \right]$$

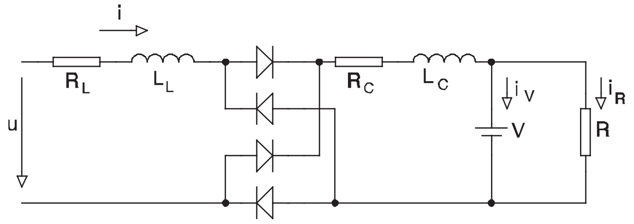
y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \lfloor \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n - j\,b_n\right)$$

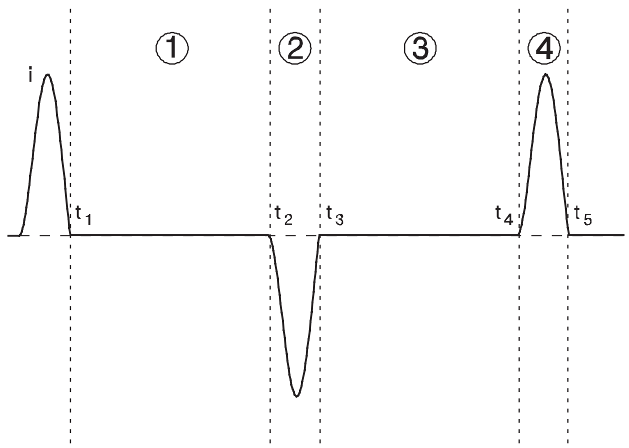
11. Cargador de baterías

1. Modelo físico

El modelo de un cargador de baterías será (ver figura) un rectificador ideal en puente con una fuente de tensión (batería) como carga. Tendremos en cuenta la resistencia y la reactancia presentes tanto en el lado de continua (R_C y L_C) como en el de alterna (R_L y L_L). La resistencia R representa la carga conectada a la batería (si la hay) y la autodescarga de la batería.



El modelo representado tendrá dos formas de trabajo diferentes según si el rectificador conduce o no conduce; además deberá tenerse en cuenta el signo de la intensidad por lo que deberemos considerar cuatro tramos. En la figura siguiente se han representado, para un caso concreto, la intensidad del circuito (i) y se han indicado los cuatro tramos.



Estos tramos se caracterizarán por

$t_1 - t_2$	$i = 0$	$t_3 - t_4$	$i = 0$
$t_2 - t_3$	$i < 0$	$t_4 - t_5$	$i > 0$

Este circuito es parecido al de la fuente de alimentación pero, en este caso, la tensión en el circuito de continua es constante y sólo hay una variable dinámica (la intensidad **i**). Además se hace innecesario estudiar la intensidad batería-carga en los tramos de no conducción.

Las características del modelo se presentan en el recuadro siguiente

Número de tramos		**4**
Tramos sin ecuación diferencial	2	
Tramos de primer orden	2	
Tramos de segundo orden	0	
Número de incógnitas		**4**
Número de ecuaciones de cambio		**4**
Número de constantes		**2**
Número de ecuaciones de continuidad y periodicidad		**2**
Ecuaciones de continuidad	2	
Ecuaciones de periodicidad	0	

2. Ecuaciones de los tramos

En los desarrollos siguientes consideraremos que

$$u(t) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_h)$$

$$\omega = 2\,\pi\, f \qquad\qquad T = \frac{1}{f}$$

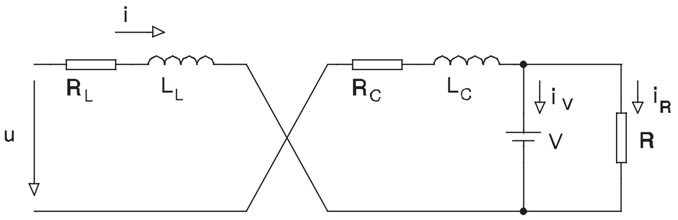
2.1. Tramos 1 y 3

Los tramos 1 y 3 son formalmente idénticos, así pues los trataremos conjuntamente. Dado que el rectificador no conduce durante estos tramos, la expresión correspondiente será

$$i(t) = 0$$

2.2. Tramo 2

Durante el tramo 2 el rectificador conduce a partir de la semionda negativa de la tensión de alimentación, teniendo en cuenta que consideramos un rectificador ideal, el esquema se simplifica, como se muestra en la figura.



La expresión que nos interesa será

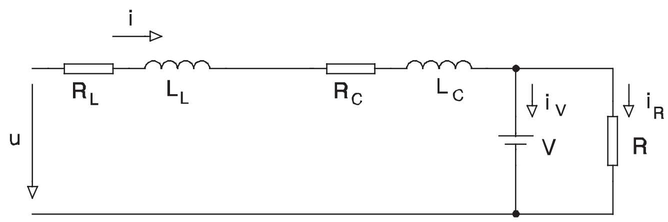
$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E \frac{di}{dt} - V$$

con

$$R_E = R_L + R_C \qquad\qquad L_E = L_L + L_C$$

2.3. Tramo 4

Durante el tramo 4 el rectificador conduce a partir de la semionda positiva de la tensión de alimentación, teniendo en cuenta que consideramos un rectificador ideal, el esquema se simplifica, como se muestra en la figura adjunta.



La expresión que nos interesa será

$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E \frac{di}{dt} + V$$

con

$$R_E = R_L + R_C \qquad\qquad L_E = L_L + L_C$$

3. Solución de las ecuaciones

Dado que las expresiones de los tramos 2 y 4 sólo difieren en el signo de V, haremos un cambio de variable sobre las expresiones.

$$U_E = -V \qquad t_2 \le t \le t_3 \qquad\qquad U_E = V \qquad t_4 \le t \le t_5$$

$$u(t) = R_E\, i(t) + L_E \frac{di}{dt} + U_E$$

Para hallar la solución completa de la ecuación debe resolverse la ecuación homogénea y hallarse una solución particular.

3.1. Solución de la homogénea

La ecuación homogénea será

$$\frac{di}{dt} = \frac{-R_E}{L_E}\, i(t)$$

cuya solución será del tipo

$$i(t) = k\, e^{-t/\tau}$$

y el valor de τ puede hallarse por sustitución.

$$\tau = \frac{L_E}{R_E}$$

3.2. Solución particular

Dado que la ecuación general

$$u(t) = R_E \cdot i(t) + L_E \frac{d\,i}{d\,t} + U_E$$

tiene un término constante (U_E) y términos senoidales (componentes de u) aplicaremos el principio de superposición.

Para la componente continua tendremos

$$0 = R_E \cdot I_{DC} + U_E \qquad\qquad I_{DC} = \frac{-U_E}{R_E}$$

y para las demás componentes la determinaremos fasorialmente tomando

$$\underline{U}_h = U_h \lfloor \varphi_h$$

$$\underline{U}_h = R_E \underline{I}_h + j\,h\,\omega\,L_E \underline{I}_h = \underline{Z}_h \underline{I}_h$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} = I_h \lfloor \varphi_{Ih} \qquad\qquad \underline{Z}_h = R_E + j\,h\,\omega\,L_E = Z_h \lfloor \varphi_{Zh}$$

La solución particular será, pues

$$i(t) = \frac{-U_E}{R_E} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

3.3. Solución completa

La ecuación completa se obtendrá como suma de la homogénea más la particular y valdrá

$$i(t) = k\,e^{-t/\tau} - \frac{U_E}{R_E} + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih}\right)$$

por tanto, para cada tramo será

$t_1 - t_2 \qquad i_1(t) = 0$

$t_2 - t_3 \qquad i_2(t) = K_2\, e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih})$

$t_3 - t_4 \qquad i_3(t) = 0$

$t_4 - t_5 \qquad i_4(t) = K_4\, e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{max}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih})$

con

$$\tau = \frac{L_E}{R_E} \qquad t_5 = t_1 + T \qquad I_0 = \frac{V}{R_E}$$

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_h} \qquad \underline{Z}_h = R_E + j\,h\,\omega\, L_E$$

$$\underline{U}_h = U_h\,\lfloor\varphi_h \qquad \underline{I}_h = I_h\,\lfloor\varphi_{Ih}$$

4. Condiciones de cambio

Las condiciones de cambio de los tramos impares deberán indicar que la conducción del rectificador se inicia cuando la tensión en el lado de alterna supera la del lado de continua, es decir cuando la tensión de red (rectificada) y la tensión del condensador se igualan. En los tramos pares se debe poner de manifiesto que la conducción termina al paso por cero de la onda de intensidad. Así pues tendremos

$$u(t_2) = -V \qquad i_2(t_3) = 0$$

$$u(t_4) = V \qquad i_4(t_1 + T) = 0$$

4.1. Sistema a resolver

Las condiciones de cambio expresadas en forma de función igualada a cero y desarrollada, formarán el sistema no lineal a resolver para obtener las cuatro incógnitas, t_1 a t_4.

$$f_1(t_2) = u(t_2) + V = 0 \qquad f_2(t_3) = i_2(t_3) = 0$$

$$f_3(t_4) = u(t_4) - V = 0 \qquad f_4(t_1) = i_4(t_1 + T) = 0$$

$$f_1(t_2) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_h) + V = 0$$

$$f_2(t_3) = K_2\, e^{-t_3/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_3 + \varphi_{Ih}) = 0$$

$$f_3(t_4) = \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, U_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_h) - V = 0$$

$$f_4(t_1) = K_4\, e^{-(t_1+T)/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\,(t_1 + T) + \varphi_{Ih}) = 0$$

Simplificando la ecuación de f_4

$$f_4(t_1) = K_4\, e^{-T/\tau}\, e^{-t_1/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_1 + \varphi_{Ih}) = 0$$

5. Condiciones de continuidad y periodicidad

Las ecuaciones de continuidad serán

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) = 0 \qquad i_4(t_4) = i_3(t_4) = 0$$

y no hay ecuación de periodicidad.

5.1. Determinación de constantes

Las constantes K_2 y K_4 se determinarán, en función de t_2 y t_4, despejándolas de las condiciones de continuidad (condiciones iniciales de cada tramo).

$$i_2(t_2) = K_2\, e^{-t_2/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) = 0$$

$$i_4(t_4) = K_4\, e^{-t_4/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}) = 0$$

$$K_2 = e^{t_2/\tau}\left[-I_0 - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_2 + \varphi_{Ih}) \right]$$

$$K_4 = e^{t_4/\tau}\left[I_0 - \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos(h\,\omega\, t_4 + \varphi_{Ih}) \right]$$

6. Elección del valor inicial

La inicialización la realizamos siempre considerando un caso idealizado, simétrico y sin armónicos. Para este caso se han diseñado y ensayado varios métodos para inicializar el cálculo.

Finalmente se ha encontrado que el método que daba mejores resultados consistía en inicializar considerando que el tiempo transcurrido entre el inicio del pulso y el máximo de la tensión de alimentación es el mismo que el que va de dicho máximo hasta el fin del pulso y corresponde a un valor predeterminado. Como se verá más adelante, esta suposición no se corresponde demasiado con la realidad pero da lugar a una inicialización que conduce rápidamente hacia la solución.

Así pues tomaremos unas condiciones iniciales en las que el inicio de la conducción estará T/20 antes del máximo de la senoide y el final estará T/20 después del mismo.

$$t_1 = -\frac{\varphi_1}{\omega} + \frac{T}{20} \qquad t_2 = \frac{T}{2} - \frac{\varphi_1}{\omega} - \frac{T}{20}$$

$$t_3 = \frac{T}{2} - \frac{\varphi_1}{\omega} + \frac{T}{20} \qquad t_4 = T - \frac{\varphi_1}{\omega} - \frac{T}{20}$$

7. Descomposición armónica

La descomposición armónica de la intensidad, puesto que no habrá componente continua, permite representarla en la forma

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, Cos(n\,\omega\, t) + b_n\, Sin(n\,\omega\, t)\right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt \qquad\qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(t)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt$$

Separando los tramos de la función

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_2}^{t_3} i_2(t)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt + \frac{2}{T} \int_{t_4}^{t_1+T} i_4(t)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt$$

donde los términos correspondientes a los tramos 1 (t_1 a t_2) y 3 (t_3 a t_4) no aparecen ya que la intensidad en ellos es nula.

Recordemos que las funciones de intensidad tienen tres términos, uno de los cuales es un sumatorio

$$i_2(t) = K_2\, e^{-t/\tau} + I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih}\right)$$

$$i_4(t) = K_4\, e^{-t/\tau} - I_0 + \sum_{h=1}^{h_{máx}} \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih}\right)$$

por tanto podemos integrar por separado los dos primeros términos y las diferentes componentes del sumatorio.

$$A_{2nH} = \int K_2\, e^{-t/\tau}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_2\, e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\frac{1}{\tau}\, Cos\, n\,\omega\, t\, +\, n\,\omega\, Sin\, n\,\omega\, t \right)$$

$$A_{2nC} = \int I_0\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{I_0}{n\,\omega}\, Sin\, n\,\omega\, t$$

$$A_{2nP} = \int \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih}\right)\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h - n)} + \frac{Sin\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\, t\right)}{2\,\omega\,(h + n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$A_{2nP} = \sqrt{2}\, I_n \left(\frac{t\, Cos\, \varphi_{In}}{2} + \frac{Sin\left(2\, n\,\omega\, t + \varphi_{In}\right)}{4\, n\,\omega} \right) \qquad h = n$$

$$A_{4nH} = \int K_4\, e^{-t/\tau}\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_4\, e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\frac{1}{\tau}\, Cos\, n\,\omega\, t\, +\, n\,\omega\, Sin\, n\,\omega\, t \right)$$

$$A_{4nC} = \int -I_0\, Cos(n\,\omega\, t)\, dt = -\frac{I_0}{n\,\omega}\, Sin\, n\,\omega\, t = -A_{2nC}$$

$$A_{4nP} = A_{2nP}$$

$$B_{2nH} = \int K_2\, e^{-t/\tau}\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = \frac{K_2\, e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2\,\omega^2}\left(-\, n\,\omega\, Cos\, n\,\omega\, t\, -\frac{1}{\tau}\, Sin\, n\,\omega\, t \right)$$

$$B_{2nC} = \int I_0\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt = -\frac{I_0}{n\,\omega}\, Cos\, n\,\omega\, t$$

$$B_{2nP} = \int \sqrt{2}\, I_h\, Cos\left(h\,\omega\, t + \varphi_{Ih}\right)\, Sin(n\,\omega\, t)\, dt$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\, I_h \left(\frac{-Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} + n\,\omega\,t)}{2\,\omega\,(h+n)} + \frac{Cos(h\,\omega\,t + \varphi_{Ih} - n\,\omega\,t)}{2\,\omega\,(h-n)} \right) \qquad h \neq n$$

$$B_{2nP} = \sqrt{2}\, I_n \left(\frac{-Cos(2\,n\,\omega\,t + \varphi_{In})}{4\,n\,\omega} - \frac{t\,Sin\,\varphi_{In}}{2} \right) \qquad h = n$$

$$B_{4nH} = \int K_4\, e^{-t/\tau}\, Sin(n\,\omega\,t)\,dt = \frac{K_4\, e^{-t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + n^2\,\omega^2} \left(-\,n\,\omega\,Cos\,n\,\omega\,t - \frac{1}{\tau}\,Sin\,n\,\omega\,t \right)$$

$$B_{4nC} = \int -I_0\,Sin(n\,\omega\,t)\,dt = \frac{I_0}{n\,\omega}\,Cos\,n\,\omega\,t = -\,B_{2nC}$$

$$B_{4nP} = B_{2nP}$$

Así pues tendremos que las componentes serán

$$a_n = \frac{2}{T}\left(A_{2nH}(t_3) + A_{2nC}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_3) - A_{2nH}(t_2) - A_{2nC}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{2nP}(t_2) + A_{4nH}(t_1 + T) + \right.$$
$$\left. + A_{4nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{4nP}(t_1 + T) - A_{4nH}(t_4) - A_{4nC}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} A_{4nP}(t_4) \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(B_{2nH}(t_3) + B_{2nC}(t_3) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_3) - B_{2nH}(t_2) - B_{2nC}(t_2) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{2nP}(t_2) + B_{4nH}(t_1 + T) + \right.$$
$$\left. + B_{4nC}(t_1 + T) + \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{4nP}(t_1 + T) - B_{4nH}(t_4) - B_{4nC}(t_4) - \sum_{h=1}^{h_{máx}} B_{4nP}(t_4) \right)$$

y, entonces,

$$\underline{I}_n = I_n \lfloor \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_n - j\,b_n)$$