

2 ESTADO DEL ARTE EN EL DISEÑO DE LOS MECANISMOS LEVA PALPADOR

Con base a las consideraciones que describen Cardona y Clos, [2001] para el proceso de diseño de un mecanismo leva palpador (definición de la ley de desplazamiento, obtención del perfil de la leva y comprobación del perfil), en éste capítulo se realiza un análisis del estado del arte del proceso; se muestra el diseño de la ley de desplazamiento utilizando curvas de Bézier; se estudia la obtención del perfil de la leva utilizando el método analítico de Cardona y Clos, [2001]; se analiza la comprobación del perfil de la leva estudiando su radio de curvatura para palpadores circulares de traslación por ser estos los estudiados en esta tesis y se analiza la teoría de contacto y los esfuerzos en la superficie todo aplicado al caso levas.

2.1 DISEÑO DE LAS LEYES DE DESPLAZAMIENTO

Para diseñar la ley de desplazamiento $s(\theta)$ de los mecanismos leva palpador, la mayoría de autores consultados [Chen, 1982; Mabie y Reinholtz, 1987; Shigley y Uicker, 1988; Koloc y Vlácavík, 1993; Wilson y Sadler, 1993; Norton, 1995; 2000; 2002; Erdman y Sandor, 1998; Calero y Carta, 1999]; describen y utilizan para éste fin el uso de polinomios algebraicos con base canónica y polinomios trigonométricos con base Fourier como los indicados en las ecuaciones 2.1 y 2.2:

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^n a_i \theta^i = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \dots + a_n \theta^n \quad (2.1)$$

$$s(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^m [s_i \cdot \sin(i \cdot \theta) + c_i \cdot \cos(i \cdot \theta)] \quad (2.2)$$

pero estudios recientes llevados a cabo por Reyes, [2000] en su tesis doctoral “*técnicas de diseño geométrico asistido por ordenador para Mecanismos Leva-palpador*”, muestran que no es adecuado definir la ley de desplazamientos del palpador con polinomios de base canónica o de base Fourier puesto que aunque son fáciles de manipular presentan las siguientes desventajas:

- Los coeficientes a_i , c_i y s_i de las ecuaciones 2.1 y 2.2 no tienen significado geométrico. Por lo tanto la modificación de un determinado coeficiente no produce un efecto intuitivo sobre la forma de la función, ésto trae consigo que obtener curvas de características deseadas por medio de la manipulación de los coeficientes sea un proceso difícil.
- Los coeficientes de los polinomios se obtienen al solucionar un sistema de ecuaciones que se origina de las restricciones particulares que debe cumplir la ley de desplazamiento; por lo tanto el diseño de la ley requiere un planteamiento y solución particular para cada caso, lo que ocasiona que sea engorroso automatizar el proceso.
- La base canónica de polinomios algebraicos no garantiza estabilidad numérica especialmente si el grado n del polinomio es elevado.
- La imposición de las condiciones de continuidad en la unión entre los tramos D, S y B de la ley de desplazamiento resulta laborioso.

Reyes, [2000] igualmente muestra en su tesis doctoral que la definición de la ley de desplazamiento del palpador por medio de la base de polinomios de Bernstein presenta ventajas frente a la utilización de la base de monomios, éstas ventajas se describen al final del siguiente apartado, una vez se ha definido el planteamiento de la curva de Bézier.

2.1.1 Curva de Bézier

La definición de la ley de desplazamiento del palpador [Cardona y Clos, 2000 y Zayas, 2001] puede realizarse utilizando curvas de Bézier no paramétricas. Una curva de Bézier no paramétrica de grado n es una combinación lineal de polinomios de la base de Bernstein $B_i^n(u)$ sobre un dominio unitario

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}; \quad i = 0, \dots, n \quad (2.3)$$

donde

$$\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!};$$

con las siguientes propiedades:

- satisfacen la fórmula recursiva

$$i \in \{0, \dots, n\}: B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u), \quad \text{con } B_0^0 = 1$$

- son una partición de la unidad $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$

- positividad $B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0,1]$

- simetría $B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$

- presentan un máximo para la abscisa $u = \frac{i}{n}$

- constituye una base numérica estable

en ésta base una función polinómica $b(u)$ de grado n se expresa de la siguiente manera:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0,1] \quad (2.4)$$

donde los $n+1$ coeficientes b_i se denominan ordenadas de Bézier; el gráfico de la función $b(u)$ se llama curva de Bézier no Paramétrica, cada ordenada b_i define un punto \mathbf{b}_i de coordenadas $\mathbf{b}_i = (i/n, b_i)$ denominado punto de control y dada su definición se encuentran equiespaciados en el eje de las abscisas.

En la ecuación 2.4 el polinomio $B_i^n(u)$ se puede interpretar como la influencia de b_i en la curva $b(u)$. Esta influencia es máxima para $u = i/n$ donde $B_i^n(u)$ presenta su máximo valor, coincidiendo con la abscisa del punto \mathbf{b}_i esto hace que la representación gráfica de la curva tienda a ser próxima a la del polígono de control (Figura 2.1), por lo tanto al desplazar verticalmente un punto \mathbf{b}_i modificando el valor de su ordenada, la curva tiende a seguirlo deformándose en sus proximidades.

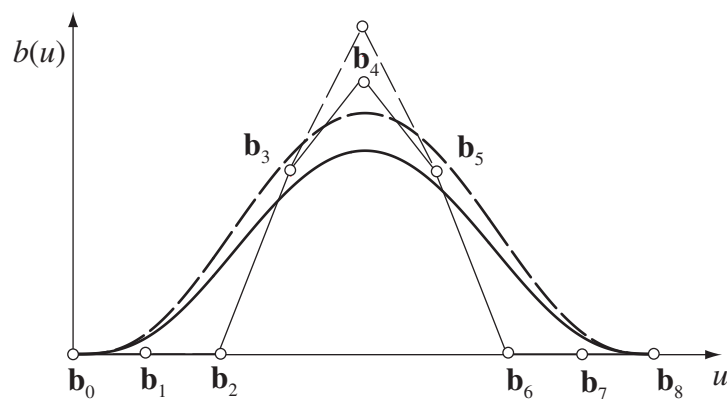


Figura 2.1 Curva de Bézier. Tomado de Zayas, [2001]

Para definir una función $b(\theta)$ de la variable independiente θ definida en el dominio no unitario $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$ con la utilización de las curvas de Bézier $b(u)$ es necesario realizar en la ecuación 2.4 el cambio lineal de variable siguiente

$$\theta \in [\theta_i, \theta_f] \rightarrow u \in [0,1]$$

$$u(\theta) = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_f - \theta_i} \quad (2.5)$$

la derivada de $b(\theta)$ respecto a θ se calcula

$$\frac{db(u(\theta))}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{du(\theta)}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{1}{\theta_f - \theta_i} \quad (2.6)$$

la derivada $b'(u)$ de un polinomio $b(u)$ de grado n es un polinomio de grado $n' = n - 1$; en la base Bernstein se puede comprobar que los coeficientes b'_i de la derivada se obtienen como

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2.7)$$

ésto indica que las derivadas r -ésimas en los extremos $u = 0$, $u = 1$ solo dependen de los $r + 1$ puntos de control mas próximos, es decir, en $u = 0$ sólo depende de los coeficientes $b_0 \dots b_r$ y en $u = 1$ de los coeficientes $b_{n-r} \dots b_n$, por lo tanto, la imposición de condiciones de continuidad r -ésima en la unión entre dos curvas resulta más sencilla en la base de Bernstein que en la base canónica o monomial, ya que solo se ven involucrados $r + 1$ coeficientes de cada curva.

Con base a lo descrito anteriormente, se puede decir que las dos ventajas principales que presentan las curvas de Bézier y que describe Reyes, [2000] en su trabajo son:

- Naturaleza intuitiva: de la figura 2.1 se puede observar que la curva tiende a seguir el polígono de control, desplazándose siempre con base a la ubicación de éste. Esto hace que se pueda tener una naturaleza intuitiva sobre la ley de desplazamiento de la leva, caso que no ocurre con los polinomios algebraicos.
- Facilidad de continuidad con los tramos rectos: para la unión de una curva de Bézier con una recta, para conseguir una continuidad C^r deseada, es suficiente que los $r + 1$ puntos de control más próximos a la unión se encuentren sobre la prolongación de la recta.

Las curvas de Bézier no paramétricas constituyen una buena herramienta para generar las curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración o sobreaceleración, no obstante presentan ciertas limitaciones [Reyes, 2000]:

- En la unión de dos curvas no se garantiza continuidad C^r de manera automática.
- El grado de la curva depende del número de puntos de control. Si la curva tiene una forma compleja su grado ha de ser elevado y el desplazamiento de los puntos de control centrales produce pocos cambios en la forma de la curva.
- Falta de control local, es decir, el desplazamiento de un punto de control afecta a toda la curva.
- Las abscisas de los puntos de control son fijas.

2.2 OBTENCIÓN DEL PERFIL DE LEVAS

Los métodos de obtención del perfil de levas se dividen en gráficos y analíticos. Aunque se hace referencia a los métodos gráficos, en esta tesis solo se desarrolla el método analítico de obtención del perfil según Cardona y Clos, [2001] para palpadores de rodillo.

El desarrollo del método gráfico se encuentra en casi la totalidad de las referencias consultadas [Kozhevnikov, 1981; Chen, 1982; Mabie y Reinholtz, 1987; Wilson y Sadler, 1993; Erdman y Sandor, 1998; Calero y Carta, 1999, entre otros] a modo de resumen se puede decir que el método consiste en realizar una inversión cinemática del mecanismo leva palpador, en la cual la leva se considera fija y la guía del palpador móvil, el perfil de la leva es la envolvente del haz de curvas definidas por las distintas posiciones del palpador.

En la actualidad los métodos gráficos de diseño de levas han sido sustituidos por los métodos de diseño analítico. Este proceso ha sido facilitado por el uso de los ordenadores, obteniéndose ventajas respecto al diseño gráfico. La primera ventaja es que una vez se han programado las expresiones para la generación de los perfiles de levas se pueden obtener los perfiles y otras informaciones del diseño en un tiempo mucho menor que con el método gráfico. Además el proceso iterativo de diseño para obtener el perfil con las características geométricas deseadas se hace más rápido, simulando el comportamiento de los mecanismos antes de fabricarlos. Una segunda ventaja es la precisión numérica del ordenador, la cual es muy superior a la precisión lograda con el método de diseño gráfico, lo que contribuye a disminuir el error del diseño final de la leva. Una tercera ventaja es que el ordenador utilizado para diseñar la leva también puede suministrar la información necesaria para la fabricación de la misma con máquinas de control numérico.

2.2.1 Método analítico de obtención del perfil de levas

Los métodos analíticos de obtención del perfil se exponen utilizando como ejemplo los mecanismos de leva de disco con palpador plano (Figura 1.3c) o con palpador de rodillo (Figura 1.2b). En esta sección se mencionan algunos de los diferentes enfoques desarrollados en las referencias consultadas.

Un primer enfoque es el presentado por Rothbart, [1956] y por Erdman y Sandor, [1998], en él se utiliza el método analítico-geométrico, se dibuja el mecanismo leva palpador y se sitúan los ángulos y las distancias requeridas según el tipo de mecanismo que se está analizando, una vez hecho esto se deducen las expresiones para la determinación de las coordenadas

cartesianas o polares del perfil de leva. Los autores exponen casos de mecanismos de levas con palpadores planos y circulares.

Chakraborty y Dhande, [1977] muestran un método analítico vectorial donde los autores utilizan un conjunto de sistemas de coordenadas tridimensionales para analizar la geometría de las superficies en contacto, basado en conceptos de curvatura desde el punto de vista de la geometría diferencial. En el cálculo se establecen matrices de transformación de coordenada que permiten obtener la expresión del perfil de la leva.

Chen, [1982] y Wilson y Sadler, [1993] utilizan también el método analítico geométrico y se basan en la teoría de la envolvente para obtener las expresiones matemáticas que definen el perfil de leva.

González-Palacios y Angeles, [1993] exponen un método analítico vectorial para la síntesis de las superficies de mecanismos de levas planos y espaciales, basado en la teoría del tornillo; en su trabajo utilizan unas magnitudes llamadas duales escalares, vectores, matrices y las superficies de los elementos se obtienen a través de la aplicación de la geometría de superficies regladas.

En Koloc y Vlácavík, [1993] se muestra un método analítico vectorial que utiliza coordenadas polares para definir el radio vector de posición del punto de contacto leva palpador, luego se define la inversión cinemática del mecanismo y a partir de aquí se hallan unas expresiones que permiten definir el perfil de la leva y sus características geométricas como por ejemplo su radio de curvatura.

Shigley y Uicker, [1988]; Norton, [1995; 2002] y Mabie y Reinholtz, [2000], utilizan el método analítico vectorial, en su análisis colocan dos vectores ortogonales que definen las coordenadas cartesianas del punto de contacto leva palpador con respecto a un sistema de coordenadas fijo incrustado en el eje de giro de la leva. En su trabajo expresan dos ecuaciones de lazo vectorial que se igualan para definir las coordenadas de los puntos del perfil como función del ángulo de giro de la leva y se aplica para el caso de palpadores de geometría sencilla: circular y plano. El anexo 1 muestra las leyes de desplazamiento del movimiento

armónico (Figura A1-1) y las leyes de desplazamiento del movimiento cicloidal (Figura A1-2) desarrolladas por Klomok y Muffley, [1955] y utilizadas en las referencias Shigley y Uicker, [1988] y Mabie y Reinholtz, [2000].

Cardona y Clos, [2001] utilizan el método analítico vectorial para obtener el perfil de la leva. A continuación se presenta el procedimiento analítico de obtención de perfil de leva, basado en el enfoque expuesto por Cardona y Clos, [2001] para mecanismos de levas con palpador, circular.

Cuando los palpadores tienen movimiento de traslación, la ley general $d(\theta)$ de desplazamiento es

$$d(\theta) = s(\theta) + d_0 \quad (2.8)$$

donde $s(\theta)$ es la ley de desplazamiento especificada y d_0 es un parámetro que depende del radio base R_b de la leva y del valor de la excentricidad ε del palpador (Figura 1.2), para el palpador circular el parámetro d_0 que interviene en la función es

$$d_0 = \sqrt{(R_b + R_r)^2 - \varepsilon^2} \quad (2.9)$$

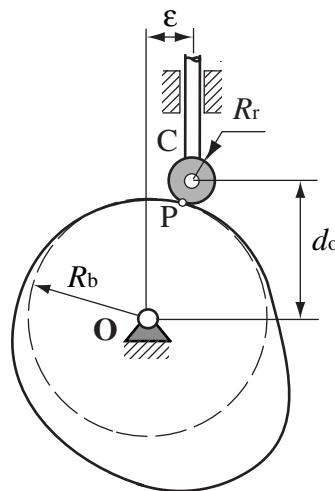


Figura 2.2 Parámetro d_0 en mecanismo leva palpador circular

En el caso de un palpador circular de centro C y radio de rodillo R_r , el perfil de la leva es la envolvente de un haz de circunferencia. La trayectoria que describen los centros de esas circunferencias es la curva de paso y su posición se calcula según la figura 2.3 como

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ d(\theta) \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (2.10)$$

en la base fija x,y la ecuación paramétrica de la curva de paso es

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \cos \theta + d(\theta) \sin \theta \\ -\varepsilon \sin \theta + d(\theta) \cos \theta \end{Bmatrix}_{x,y} \quad (2.11)$$

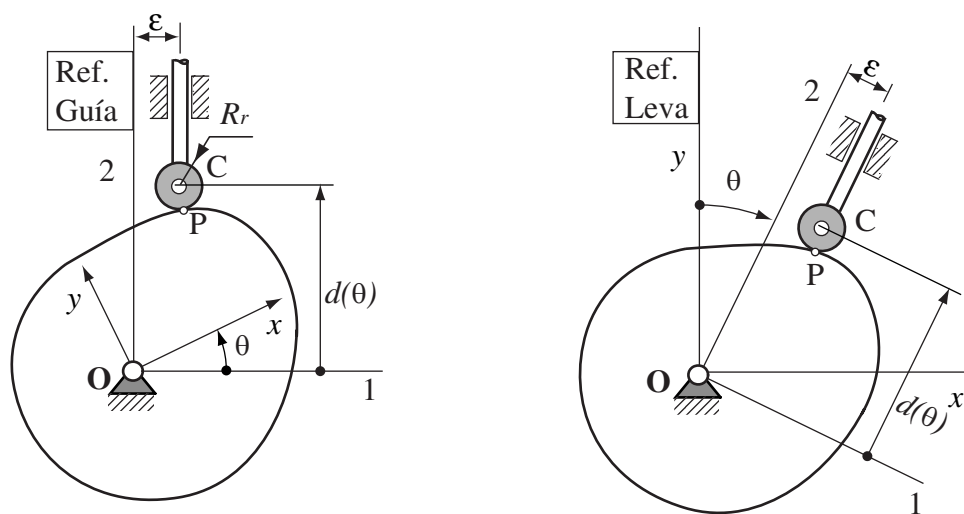


Figura 2.3 *Inversión cinemática. Adaptado de Zayas, [2001]*

el perfil de la leva $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$, equivale al lugar geométrico de los puntos situados a una distancia R_r de la curva de paso en la dirección de su normal $\mathbf{n}(\theta)$ interior y dirigida hacia el área que encierra la curva; la ecuación paramétrica del perfil es

$$\overline{\mathbf{OP}}(\theta) = \overline{\mathbf{OC}}(\theta) + R_r \cdot \mathbf{n}(\theta) \quad (2.12)$$

para calcular la normal unitaria interior a la curva de paso $\mathbf{n}(\theta)$, se necesita el vector tangente a la curva $\mathbf{t}(\theta)$ que se calcula

$$\mathbf{t}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \overline{\mathbf{OC}}(\theta) = \begin{Bmatrix} (d'(\theta) - \varepsilon) \sin \theta + d(\theta) \cos \theta \\ (d'(\theta) - \varepsilon) \cos \theta - d(\theta) \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

entonces

$$\mathbf{n}(\theta) = [\mathbf{R}_{-90^\circ}] \frac{\mathbf{t}(\theta)}{|\mathbf{t}(\theta)|} \quad (2.14)$$

donde $[\mathbf{R}_{-90^\circ}]$ es la matriz de rotación que impone un giro de 90° en sentido horario

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 COMPROBACIÓN DEL PERFIL

Como se menciona en el apartado 1.7, la comprobación del perfil constituye el último paso del proceso de diseño geométrico y dimensionamiento de una leva, para ello es necesario determinar el ángulo de presión y el radio de curvatura.

2.3.1 Ángulo de presión

En la bibliografía consultada, [Shigley y Uicker, 1988; Norton, 2000; Rothbart, 1956; Wilson y Sadler, 1993; Koloc y Vlákavík, 1993; Mabie y Reinholtz, 2000; Chen, 1982 y Erdman y Sandor, 1993] el ángulo de presión se define como el ángulo comprendido entre el eje del vástago del palpador (dirección del movimiento del palpador) y la línea de acción de la fuerza normal (dirección normal común) ejercida por la leva sobre el palpador.

Como criterio de diseño los autores especifican que es necesario tener en cuenta la ecuación 1.1 para mantener el ángulo de presión en valores inferiores a 30° para palpadores de traslación, debido a que la experiencia ha puesto de manifiesto que valores pequeños de ángulo de presión evitan cargas laterales excesivas (componente de la fuerza perpendicular al vástago) sobre el eje del palpador.

E.C. Varnum, [1956] desarrollo un nomograma utilizado en las referencias Mabie y Reinholtz, [2000] y Shigley y Uicker, [1988], para el cálculo del ángulo de presión de palpadores de traslación con ley de desplazamiento diseñadas por movimientos armónicos y cicloidales (Figura 2.4). El nomograma relaciona el radio primario de la leva R_0 , el desplazamiento máximo del palpador L y el ángulo de giro β de la leva utilizado para realizar el desplazamiento máximo.

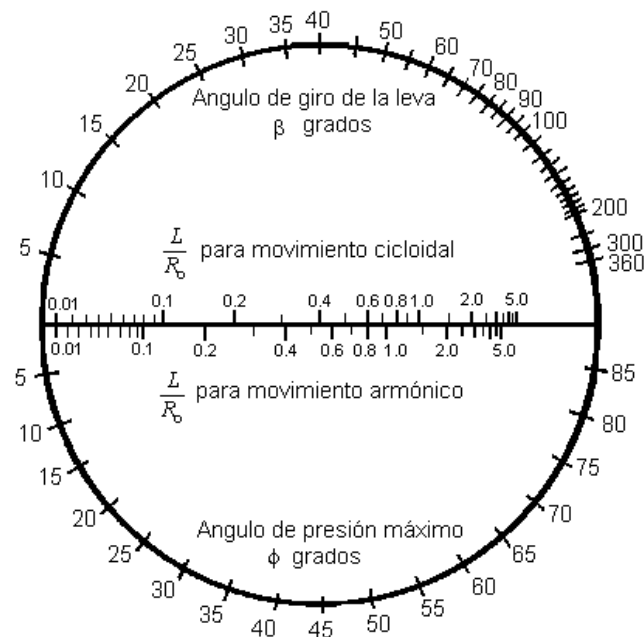


Figura 2.4 Nomograma para el cálculo del ángulo de presión en los mecanismos leva palpador con movimiento cicloidal y armónico. Tomado de Mabie y Reinholtz, [2000]

Para utilizar el nomograma se debe determinar la relación L/R_0 , ésta en conjunto con el valor del ángulo de giro de la leva, sirve para leer el valor del ángulo de presión máximo. El

nomograma indica ángulos de presión de hasta 90° , si bien sólo son aceptables para el diseño los que no sobrepasan los 30° .

Normalmente la bibliografía básica consultada tiene información de valores de ángulos de presión de levas con leyes de desplazamiento diseñadas por movimientos armónicos y cicloidales, pero para leyes de desplazamiento diseñadas por curvas de Bézier no se han encontrado referencias.

2.3.2 Radio de curvatura

Es común encontrar varios métodos para determinar el valor del radio de curvatura de las levas; diferentes autores muestran su procedimiento según el enfoque que utilizan para el diseño de la ley de desplazamiento. En Chen, [1982] se muestra el método del polo de velocidades, el método de las variables complejas y el método aproximado de Krasnikov, analizando los casos de palpadores de translación y de rotación; en Wilson y Sadler, [1993] se calcula a partir de sustituir en la expresión paramétrica obtenida de cálculo diferencial las derivadas correspondientes de las expresiones para el cálculo de las coordenadas del perfil obteniendo las ecuaciones del radio de curvatura según el tipo de palpador; en Shigley y Uicker, [1988]; Norton, [1995, 2002]; y Mabie y Reinholtz, [2000] se utiliza el mismo procedimiento, a través de dos ecuaciones de cierre vectorial para llegar a las mismas expresiones de cálculo.

Para el caso de palpadores de rodillo de translación, los autores Chen, [1982], Shigley y Uicker, [1988] y Mabie y Reinholtz, [2000] muestran gráficos para calcular el valor del radio de curvatura mínimo del perfil en función de las leyes de desplazamiento cicloidales, armónicas y del radio primario de la leva. El anexo 2 muestra éstos gráficos, los cuales fueron desarrollados por Ganter y Uicker, [1979]; la figura A2-1 muestra para las leyes de desplazamiento armónicas y la figura A2-2 para las leyes de desplazamiento cicloidales. Los gráficos relacionan el radio primario de la leva R_0 , el desplazamiento máximo del palpador L , el radio del rodillo del palpador circular R_r y el ángulo de giro β de la leva utilizado para realizar el desplazamiento máximo.

A continuación se exponen las expresiones de cálculo del radio de curvatura para el caso de palpador circular con movimiento de traslación [Zayas, 2001].

El radio de curvatura del perfil de la leva $r_c(\theta)$ y el de la curva de paso $r_{cp}(\theta)$ difieren en el radio del rodillo R_r (Figura 2.5), ya que la primera curva es la offset de la segunda

$$r_c(\theta) = r_{cp}(\theta) - R_r \quad (2.15)$$

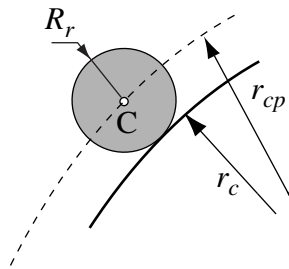


Figura 2.5 Radio de curvatura de la curva de paso

para calcular el radio de curvatura $r_{cp}(\theta)$ de la curva de paso se deriva la ecuación 2.10 respecto a θ en la base móvil 1,2

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ d(\theta) \end{Bmatrix}_{(x,y)} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} d(\theta) \\ d'(\theta) - \varepsilon \end{Bmatrix}_{(x,y)} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} 2d'(\theta) - \varepsilon \\ d''(\theta) - d(\theta) \end{Bmatrix}_{(x,y)} \quad (2.16)$$

parametrizando en sentido horario de manera que la componente normal (hacia el interior) de la derivada se expresa como

$$\overline{\mathbf{OC}}''|_n(\theta) = \frac{\overline{\mathbf{OC}}''(\theta) \times \overline{\mathbf{OC}}'|_{eje3}}{|\overline{\mathbf{OC}}'(\theta)|} \quad (2.17)$$

$$\overline{\mathbf{OC}}''|_n(\theta) = (d'(\theta) - \varepsilon) (2d'(\theta) - \varepsilon) - d(\theta) (d''(\theta) - d(\theta)) \quad (2.18)$$

sustituyendo la ecuación 1.15 y 1.16 en $r_c = \frac{|\overline{OC'}|^2}{OC''|_n}$ se tiene

$$r_{cp}(\theta) = \frac{\left(d^2(\theta) + (d'(\theta) - \varepsilon)^2\right)^{3/2}}{(d'(\theta) - \varepsilon)(2d'(\theta) - \varepsilon) - d(\theta)(d''(\theta) - d(\theta))} \quad (2.19)$$

que es equivalente a

$$r_{cp}(\theta) = \frac{\left[(R_o + s)^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \right]^{3/2}}{(R_o + s)^2 + 2\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 - (R_o + s)\left(\frac{d^2s}{d\theta^2}\right)} \quad (2.20)$$

que aparece en las referencias que utilizan leyes de desplazamiento tradicionales.

2.4 TEORÍA DE CONTACTO APLICADA AL CASO LEVAS

Si se considera un cilindro que rueda sobre la superficie de una leva bajo la acción de la fuerza normal constante o variable y si la fuerza ocasiona una deflexión en la huella de contacto sin exceder el punto de fluencia, una vez pasa el cilindro la superficie regresará a su geometría original; en la próxima revolución el cilindro deflexionará de nuevo la huella de contacto, estos esfuerzos resultantes en la huella son los que se conocen como esfuerzos de contacto o esfuerzos de hertz en honor a Heinrich Hertz quien realizó el primer estudio analítico completo.

Los esfuerzos de contacto para el caso de cilindros paralelos (caso levas) se pueden estudiar con dos hipótesis posibles: hipótesis del esfuerzo plano, cuando los cilindros son axialmente cortos e hipótesis de deformación plana cuando son axialmente largos.

2.4.1 Esfuerzos de contacto a rodadura pura

A partir de Timoshenko y Goodier, [1951]; Niemann, [1981] y Norton, [1998] se considera que a rodadura pura los esfuerzos en la dirección normal son a compresión, máximos en la superficie y van disminuyendo con la profundidad al ir alejándose de la línea central (Eje Z de la figura 1.13). En la línea central los esfuerzos principales son:

$$\sigma_x = -P_{\text{máx}} \quad (2.21)$$

$$\sigma_z = -P_{\text{máx}}$$

$$\sigma_y = -2\nu P_{\text{máx}}$$

el esfuerzo cortante máximo resulta del análisis del círculo de Mohr y esta sobre el eje de las Z por debajo de la superficie:

$$\tau = 0,304P_{\text{máx}} \quad (2.22)$$

$$z_{\tau_{\text{máx}}} = 0,786a$$

2.4.2 Esfuerzos de contacto a rodadura con fuerza tangencial

Cuando en un mecanismo leva palpador de rodillo se presenta el caso de carga combinada: fuerza normal (rodamiento) y fuerza tangencial (deslizamiento), el estado de esfuerzos se distorsiona comparativamente con el caso a rodadura pura (Figura 2.6), esto se debe a la carga tangencial, por lo tanto es de esperar que un pequeño deslizamiento ocasione una pequeña distorsión y que grandes deslizamientos ocasione distorsiones mayores. Los deslizamientos en los mecanismos levas palpador generalmente son producidos por variaciones en las velocidades de giro de la leva o por mal arranque del mecanismo.

En Timoshenko y Goodier, [1951] y Johnson, [1985] se observa que los aspectos geométricos de la teoría de contacto (relación de radios y área de la huella de contacto) no varían de rodadura pura a carga combinada.

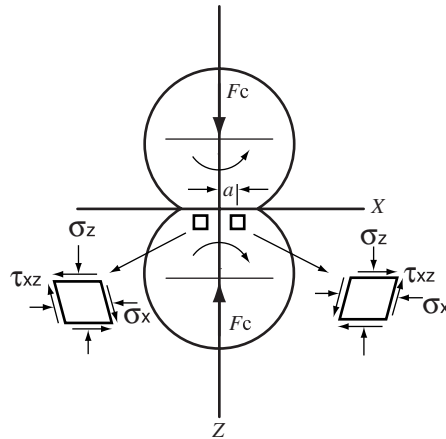


Figura 2.6 Esfuerzos de contacto a rodadura con fuerza tangencial

En Hills et al. [1993] y Norton, [1998] se encuentran definidas las ecuaciones de distribución de esfuerzos de Smith y Lui, [1953] para el caso de cilindro sobre cilindro y los esfuerzos se muestran como componentes independientes según se presenten o no. La fuerza tangencial o deslizante esta representada con el subíndice t y la fuerza normal esta representada con el subíndice n. Para obtener el estado completo de esfuerzos se debe sumar la carga a deslizamiento más la carga normal en sus respectivas direcciones, como se muestra en la ecuación 2.23. Si se trata de rodillos axialmente cortos como las levas, el estudio de los esfuerzos se puede considerar bidimensional, en caso contrario debe desarrollarse de forma tridimensional.

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} \quad (2.23)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t}$$

2.4.2.1 Esfuerzos en la superficie de contacto

Para evaluar los esfuerzos en la superficie a una profundidad $z = 0$, de Smith y Lui, [1953] y Norton, [1998] se tiene los esfuerzos:

- Para $|x| \leq a$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_n} &= -P_{\text{máx}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & \sigma_{x_n} &= 0 & \sigma_{z_n} &= \sigma_{x_n} & \tau_{xz_n} &= 0 \\ \sigma_{x_t} &= -2f_{\text{máx}} \frac{x}{a} & \sigma_{z_t} &= 0 & & & & \\ \tau_{xz_t} &= -f_{\text{máx}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & \tau_{xz_t} &= 0 & & & & \end{aligned} \quad (2.24)$$

- Para $x > a$

$$\sigma_{x_t} = -2f_{\text{máx}} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \quad (2.25)$$

- para $x < -a$

$$\sigma_{x_t} = -2f_{\text{máx}} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \quad (2.26)$$

donde $P_{\text{máx}}$, a y x son las definidas en el apartado 1.8 y $f_{\text{máx}}$ es la fuerza tangencial unitaria definida por:

$$f_{\text{máx}} = \mu P_{\text{máx}} \quad (2.27)$$

2.4.2.2 Esfuerzos por debajo de la superficie de contacto

Smith y Lui, [1953] también definieron los esfuerzos por debajo de los puntos de contacto donde la carga tangencial tiene un efecto significativo en la distribución de los esfuerzos, en Johnson, [1985]; Jacobson y Kalker, [2000] y Norton, [1998] se muestra el desarrollo de la formulación, la ecuación 2.28 muestra la componente normal y la ecuación 2.29 la componente tangencial para cilindros axialmente cortos.

- Esfuerzos a carga normal:

$$\sigma_{x_n} = -\frac{z}{\pi} \left[\frac{a^2 + 2x^2 + 2z^2}{a} \alpha - \frac{2\pi}{a} - 3x\psi \right] P_{\text{máx}}$$

$$\sigma_{z_n} = -\frac{z}{\pi} [a\psi - x\alpha] P_{\text{máx}}$$

(2.28)

$$\tau_{xz_n} = -\frac{1}{\pi} z^2 \alpha P_{\text{máx}}$$

- Esfuerzos a carga tangencial:

$$\sigma_{x_t} = -\frac{1}{\pi} \left[(2x^2 - 2a^2 - 3z^2) \alpha + 2\pi \frac{x}{a} + 2(a^2 - x^2 - z^2) \frac{x}{a} \psi \right] f_{\text{máx}}$$

$$\sigma_{z_t} = -\frac{1}{\pi} z^2 \alpha f_{\text{máx}} \quad (2.29)$$

$$\tau_{xz_t} = -\frac{1}{\pi} \left[(a^2 + 2x^2 + 2z^2) \frac{z}{a} \psi - 2\pi \frac{z}{a} - 3xz\alpha \right] f_{\text{máx}}$$

donde los factores α y ψ están dados por:

$$\alpha = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4a^2}{k_1} \right)}}}} \quad (2.30)$$

$$\psi = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4a^2}{k_1} \right)}}}} \quad (2.31)$$

y k_1 y k_2 por:

$$k_1 = (a+x)^2 + z^2 \quad (2.31)$$

$$k_2 = (a-x)^2 + z^2$$

2.4.3 Deformación en el contacto

La deformación δ se conoce como, el cambio de longitud por unidad de longitud y se define

$$\frac{l_F - l_I}{l_I} = \frac{\delta_n}{l_I} \quad (2.32)$$

donde l_I es la longitud inicial, l_F la longitud final deformada y δ la diferencia de las dos longitudes, el subíndice n indica que la deformación ocurre en la dirección normal (que para el caso de la formulación antes definida es la dirección $z-z$) generalmente debido a fuerzas de tensión o compresión. Es deseable que cuando se presente deformación esta ocurra en la región elástica del material para evitar que existan deformaciones permanentes en la superficie.

En Arvid, [1947] se muestra la expresión empírica 2.33 normalmente utilizada para el estudio de la deformación normal en el contacto entre cilindros cortos como es el caso de las levas.

$$\delta = 0,0003 \varepsilon_E^{2,7} \frac{F_c}{l^{0,8}} \quad (2.33)$$

donde ε_E es una constante del material definida como

$$\varepsilon_E = \sqrt[3]{\frac{113883 \left(\frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_2}{1-\nu^2} \right)}{\left(\frac{E_1}{1-\nu^2} \cdot \frac{E_2}{1-\nu^2} \right)}} \quad (2.34)$$

y E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poissón.