

### 3 LEYES DE DESPLAZAMIENTO

En el capítulo dos se expone el método de obtención de las leyes de desplazamiento diseñadas por curvas de Bézier para mecanismos leva palpador según el planteamiento de Cardona y Clos, [2001] y en éste capítulo se define el grado y la continuidad de la curva de Bézier en estudio y se describen los diferentes tramos de unión que van a conformar el movimiento final del mecanismo leva palpador.

#### 3.1 LEYES DE DESPLAZAMIENTO POR TRAMOS

Las curvas de Bézier se adaptan al diseño de la ley de desplazamiento del palpador en función del movimiento de la leva debido a la suavidad y flexibilidad que presentan, éstas leyes pueden ser diseñadas por tramos de unión o por trayectos completos de movimiento de la leva (giro total de la leva), los dos métodos indistintamente tienen óptimos resultados de diseño siempre y cuando los puntos de control y la continuidad sean las correctas. En ésta tesis se utiliza el diseño por tramos de unión con el fin de comparar con las leyes de desplazamiento de los métodos tradicionales (movimiento armónico y cicloidal) mostrados en el anexo 1.

Las curvas de Bézier permiten tener un buen control sobre las tres primeras derivadas de la ley de desplazamiento, que son las que intervienen en la descripción cinemática y dinámica del mecanismo. La primera derivada temporal de la función desplazamiento es la velocidad del palpador de la leva, la segunda derivada es la aceleración y la tercera derivada es la sobreaceleración del sistema, siendo la segunda derivada la encargada de intervenir en el análisis dinámico del mecanismo y la tercera derivada la que esta más íntimamente

relacionada con la generación de vibraciones del sistema. Si existen discontinuidades en la tercera derivada, puede presentarse un problema serio en las levas de alta velocidad debido a las vibraciones producidas en el mecanismo las cuales pueden conducir a un acelerado fallo superficial por fatiga.

Para asegurar un amplio análisis de las leyes de desplazamiento, en ésta tesis se estudia las curvas de Bézier de grados 4, 5, 6, 7, 8 y 9 con continuidades  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$  según el tramo de unión en estudio; la selección de estos tipos de curvas se debe a la conveniencia que se tiene de comparar diferentes leyes de desplazamiento con el fin de obtener conclusiones respecto a la bondad o no de utilizar un grado de curva de Bézier u otro.

### 3.2 DEFINICIÓN DE LOS TRAMOS DE UNIÓN

Con el fin de estudiar y analizar las diferentes leyes de desplazamiento y el diseño final del mecanismo leva palpador, los tramos de unión seleccionados para el estudio se adaptan a cualquier necesidad de diseño de la leva ya sea de desplazamiento máximo  $L$ , o de ángulo de giro  $\beta$  para el cual se produce el desplazamiento máximo. Los tramos escogidos para el estudio son:

- Movimiento de transición de altura de subida completa.
- Movimiento de empalme de media subida inicio.
- Movimiento de empalme de media subida llegada.

El tramo de movimiento de transición de altura de subida completa se estudia para las curvas de Bézier de grados 5, 7 y 9 y continuidad  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$  respectivamente. El tramo movimiento de empalme de media subida al inicio se estudia para las curvas de Bézier de grados 4, 6 y 8 con continuidades  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$  y por último el tramo movimiento de empalme de media subida llegada se estudia para las curvas de Bézier de grados 4, 6 y 8 con continuidades  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$ . Los dos últimos tramos se estudian para movimientos en los cuales se desea empalmar con tramos de velocidad constante. Las leyes de desplazamiento

para los tramos de unión de bajada o retorno no se muestran debido a que el comportamiento es similar a los de subida.

Las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 muestran las curvas de Bézier de grados 5, 7 y 9 y al mismo tiempo se muestran los puntos de control que se adaptan al movimiento de transición de altura de subida completa; la variable  $u$  se define como  $u = \theta/\beta$  y la  $b'$  indica derivada con respecto a  $\theta$ .

$$\begin{aligned}
 b(u) &= L[10u^3 - 15u^4 + 6u^5] & ; & & b_i = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\} \\
 b'(u) &= \frac{L}{\beta}[30u^2 - 60u^3 + 30u^4] \\
 b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[60u - 180u^2 + 120u^3] \\
 b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[60 - 360u + 360u^2]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 b(u) &= L[35u^4 - 84u^5 + 70u^6 - 20u^7] & ; & & b_i = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \\
 b'(u) &= \frac{L}{\beta}[140u^3 - 420u^4 + 420u^5 - 140u^6] \\
 b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[420u^2 - 1680u^3 + 2100u^4 - 840u^5] \\
 b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[840u - 5040u^2 + 8400u^3 - 4200u^4]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 b(u) &= L[126u^5 - 420u^6 + 540u^7 - 315u^8 + 70u^9] & ; & & b_i = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \\
 b'(u) &= \frac{L}{\beta}[630u^4 - 2520u^5 + 3780u^6 - 2520u^7 + 630u^8] \\
 b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[2520u^3 - 12600u^4 + 22680u^5 - 17640u^6 + 5040u^7] \\
 b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[7560u^2 - 50400u^3 + 113400u^4 - 105840u^5 + 35280u^6]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6 muestran las curvas de Bézier de grados 4, 6 y 8 y continuidades  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$  y los puntos de control que se adaptan al movimiento de empalme de media subida inicio.

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[2u^3 - u^4] & ; & \quad b_i = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[6u^2 - 4u^3] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[12u - 12u^2] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[12 - 24u]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[5u^4 - 6u^5 + 2u^6] & ; & \quad b_i = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[20u^3 - 30u^4 + 12u^5] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[60u^2 - 120u^3 + 60u^4] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[120u - 360u^2 + 240u^3]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[14u^5 - 28u^6 + 20u^7 - 5u^8] & ; & \quad b_i = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[70u^4 - 168u^5 + 140u^6 - 40u^7] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[280u^3 - 840u^4 + 840u^5 - 280u^6] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[840u^2 - 3360u^3 + 4200u^4 - 1680u^5]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Las ecuaciones 3.7, 3.8 y 3.9 muestran las curvas de Bézier de grados 4, 6 y 8 y continuidades  $C^2$ ,  $C^3$  y  $C^4$  y los puntos de control que se adaptan al movimiento de empalme de media subida llegada.

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[2u^1 - 2u^3 + u^4] & ; & & b_i = \{0 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[2 - 6u^2 + 4u^3] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[12u + 12u^2] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[12 + 24u]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[2u - 5u^4 + 6u^5 - 2u^6] & ; & & b_i = \{0 \quad 1/3 \quad 2/3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[2 - 20u^3 + 30u^4 - 12u^5] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[-60u^2 + 120u^3 - 60u^4] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[-120u + 360u^2 - 240u^3]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
b(u) &= L[2u^1 - 14u^5 + 28u^6 - 20u^7 + 5u^8] & ; & & b_i = \{0 \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 3/4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \\
b'(u) &= \frac{L}{\beta}[2 - 70u^4 + 168u^5 - 140u^6 + 40u^7] \\
b''(u) &= \frac{L}{\beta^2}[-280u^3 + 840u^4 - 840u^5 + 280u^6] \\
b'''(u) &= \frac{L}{\beta^3}[-840u^2 + 3360u^3 - 4200u^4 + 1680u^5]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.2.1 Movimiento transición de altura de subida completa

Como se muestra en la sección 1.4.5, al producirse un giro completo de la leva, el palpador ejecuta una serie de movimientos que consisten en subidas, bajadas y detenciones. La figura 3.1 muestra el movimiento de subida completa para las diferentes leyes de desplazamiento en estudio, en la figura se observa la variación de la pendiente dependiendo del grado de la curva. Las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 representan las derivadas respecto al ángulo de giro  $\theta$  y si la velocidad angular es constante representan respectivamente la velocidad, aceleración y sobreaceleración.

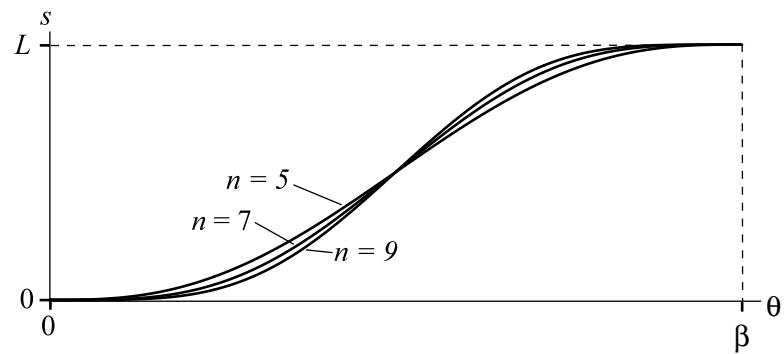


Figura 3.1 Curva de desplazamiento en movimiento de subida completa

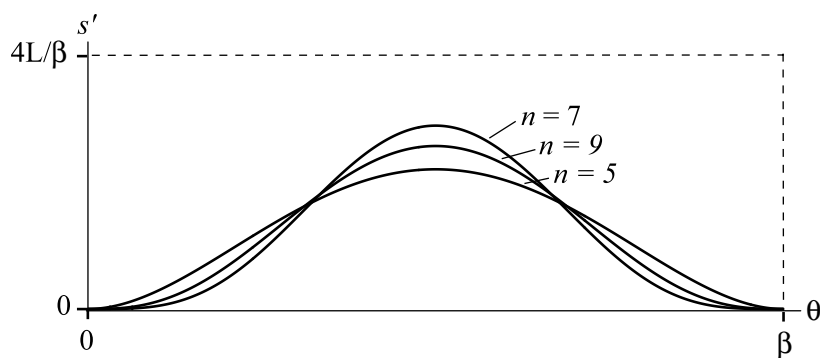


Figura 3.2 Curva de  $ds/d\theta$  (velocidad) en movimiento de subida completa

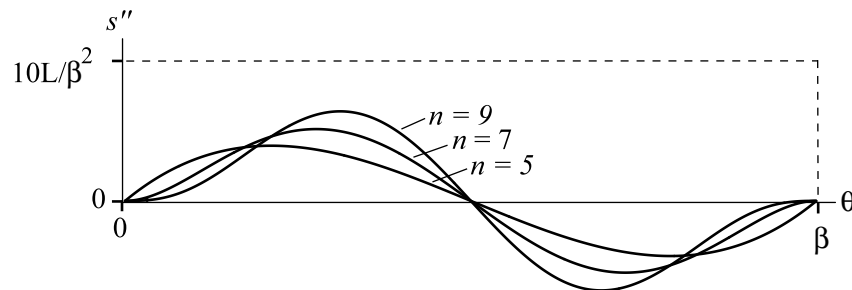


Figura 3.3 Curva de  $d^2s/d\theta^2$  (aceleración) en movimiento de subida completa

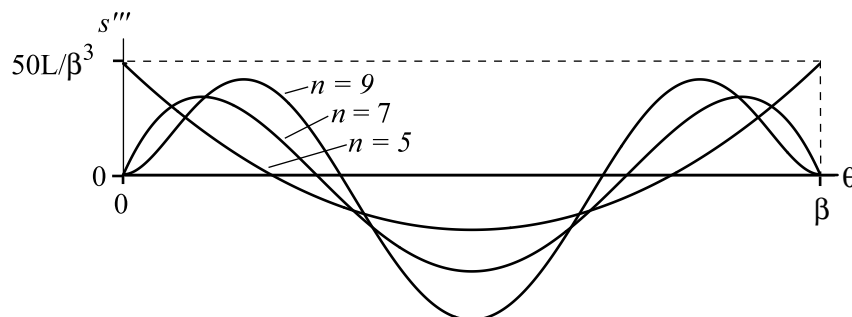


Figura 3.4 Curva de  $d^3s/d\theta^3$  (sobreaceleración) en movimiento de subida completa

### 3.2.2 Movimiento de empalme de media subida inicio

Este tipo de movimiento se utiliza para el caso en que no se requiere desplazar el palpador hasta su posición más alta, sino que solo se quiere llevar el palpador de una velocidad cero a una velocidad deseada de diseño.

La figura 3.5 muestra el movimiento de empalme de subida al inicio para las diferentes leyes de desplazamiento en estudio, en la figura se observa la variación de la pendiente dependiendo del grado de la curva. Las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 son respectivamente la velocidad, aceleración y sobreaceleración.

### 3.2.3 Movimiento de empalme de media subida llegada

Este tipo de movimiento se utiliza para el caso en que se requiere que el palpador pase de un valor de velocidad constante conocido al punto máximo de desplazamiento  $L$ . En la figuras 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12 se muestra la curva de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración para las diferentes leyes de desplazamiento en estudio.

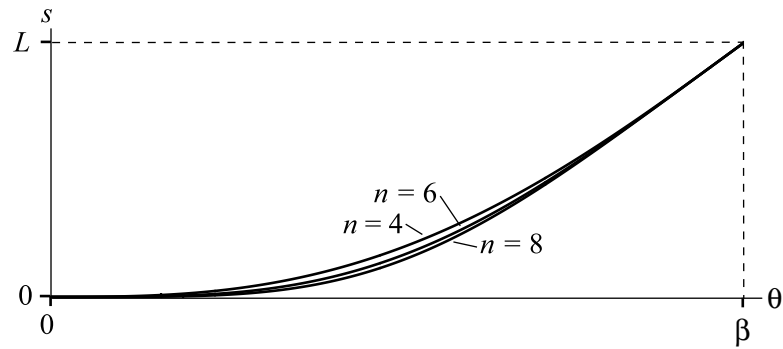


Figura 3.5 Curva de desplazamiento en movimiento de empalme media subida inicio

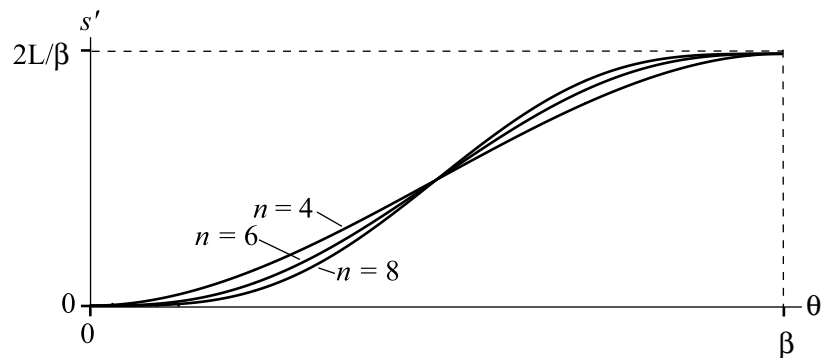


Figura 3.6 Curva de  $ds/d\theta$  (velocidad) movimiento de empalme de media subida inicio

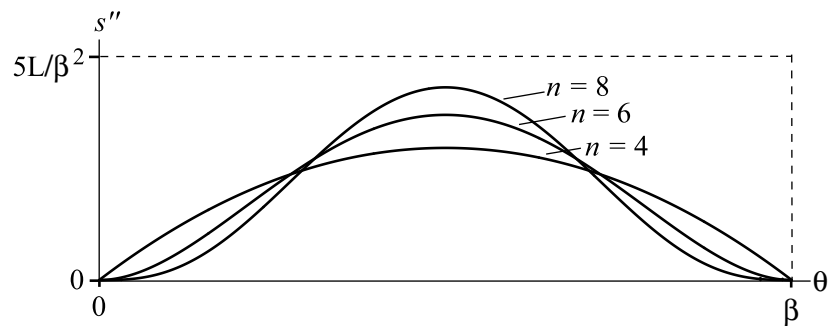


Figura 3.7 Curva de  $d^2s/d\theta^2$  (aceleración) movimiento de empalme de media subida inicio

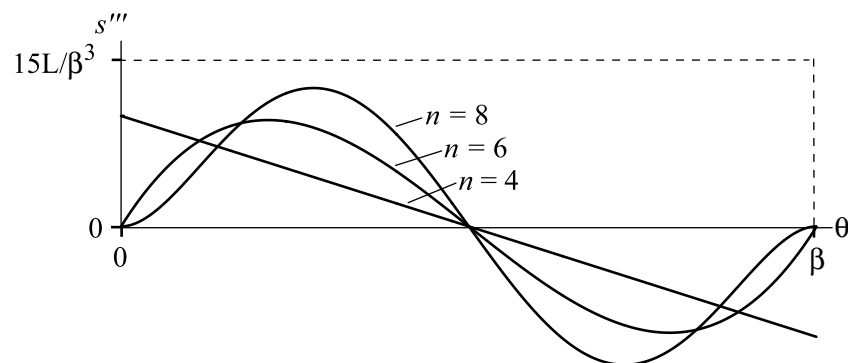


Figura 3.8 Curva de  $d^3s/d\theta^3$  (sobreaceleración) movimiento de empalme de media subida inicio



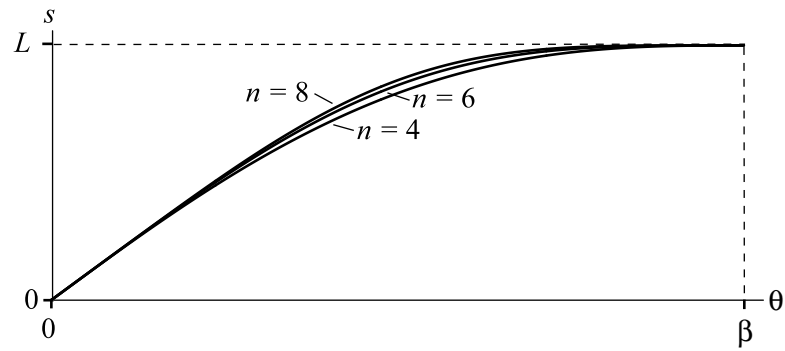


Figura 3.9 Curva de desplazamiento en movimiento empalme media subida llegada

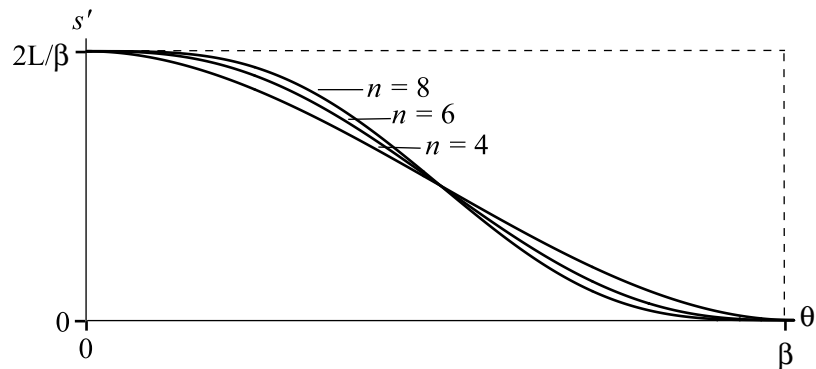


Figura 3.10 Curva de  $ds/d\theta$  (velocidad) movimiento empalme de media subida llegada

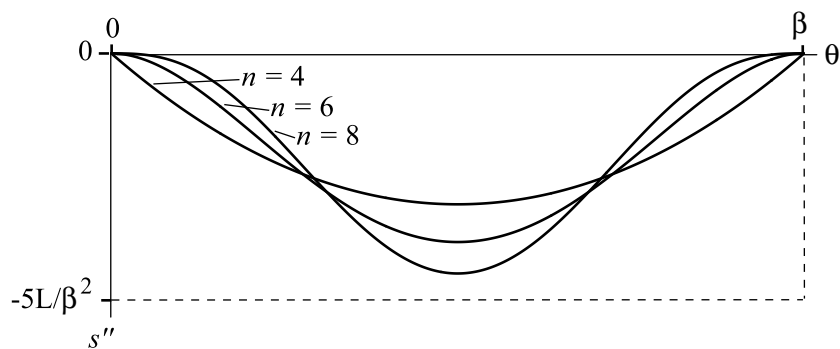


Figura 3.11 Curva de  $d^2s/d\theta^2$  (aceleración) movimiento empalme de media subida llegada

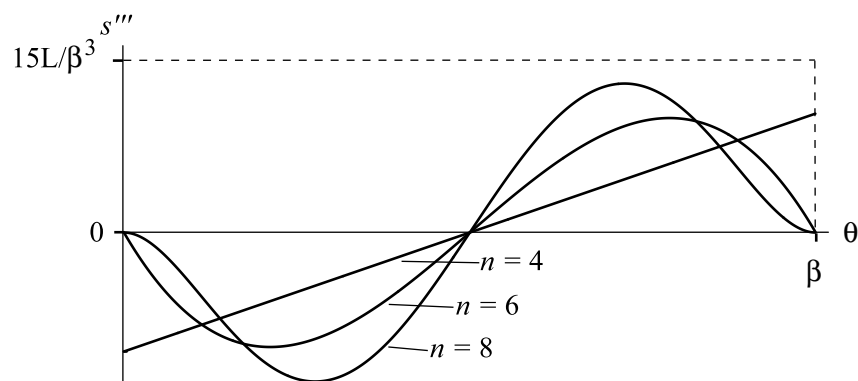


Figura 3.12 Curva de  $d^3s/d\theta^3$  (sobreaceleración) movimiento empalme media subida llegada