



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

# APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES CILÍNDRICOS RECTOS

## CONTENIDO

	Pág
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	i
<b>PREFACIO</b>	iii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	v
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN</b>	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estructura de la tesis	4
<b>CAPÍTULO 2: ESTADO DEL ARTE</b>	7
2.1 Aplicaciones	7
2.2 Teorías de diseño del perfil del diente	22
2.3 Procesos de manufactura	38
<b>CAPÍTULO 3: LEYES DE DESPLAZAMIENTO Y CURVAS PRIMITIVAS</b>	43
3.1 Ley de desplazamiento de un engranaje no circular	44
3.2 Curvas armónicas	47
3.3 Curvas de Bézier no paramétricas	48
3.4 Curvas B-spline no paramétricas	54
3.5 Ley de desplazamiento de las ruedas elípticas	61
3.6 Ley para ruedas con periodos de rotación diferentes	63
3.7 Obtención de las curvas primitivas	65
3.8 Radio de curvatura de las curvas primitivas	67
3.9 Vector tangente de las curvas primitivas	71
3.10 Longitud de las curvas primitivas	73

	Pág
3.11 Casos de estudio	74
3.11.1 Ley de desplazamiento armónica	75
3.11.2 Curva de Bézier	77
3.11.3 Curva B-spline	79
3.11.4 Ruedas elípticas	81
3.11.5 Ruedas con relación de periodos de rotación doble	82
<b>CAPÍTULO 4: PERFIL DEL DIENTE</b>	<b>85</b>
4.1 Principio de diseño	87
4.2 Generación del perfil del diente	87
4.3 Curvas de addendum y de dedendum	94
4.4 Radio de curvatura del perfil del diente	98
4.5 Ubicación del dentado	99
4.6 Obtención de la curva base	100
4.7 Influencia del radio de curvatura sobre las curva base	111
4.8 Mínimo número de dientes	113
4.9 Casos de estudio	114
4.9.1 Ruedas dentadas	114
4.9.2 Estudio de la curva base	116
4.9.2.1 Curva base: Ley armónica	119
4.9.2.2 Curva base: Curva de Bézier	121
4.9.2.3 Curva base: Ruedas elípticas	122
4.9.2.4 Curva base: Engranaje con relación de periodos de rotación doble	124
4.9.3 Mínimo número de dientes	125
<b>CAPÍTULO 5: RECUBRIMIENTO Y LÍNEA DE ENGRANE</b>	<b>127</b>
5.1 Intervalo de contacto y arco de acción	128
5.2 Recubrimiento en los engranajes no circulares	130
5.3 Obtención de la línea de engrane	134
5.4 Curvatura relativa entre los perfiles en contacto	136
5.5 Velocidad de deslizamiento	138
5.6 Casos de estudio	139
5.6.1 Recubrimiento	139

	Pág	
5.6.2	Influencia del ángulo de presión en el recubrimiento de un engranaje no circular	142
5.6.3	Influencia del número de dientes en el recubrimiento de un engranaje no circular	144
5.6.4	Curvatura relativa	146
5.6.5	Velocidad de deslizamiento específica	149
<b>CAPÍTULO 6: FUERZAS EN LOS ENGRANAJES NO CIRCULARES</b>	<b>153</b>	
6.1	Análisis cinetostático de los engranajes no circulares	153
6.1.1	Par en el eje de la rueda conductora	154
6.1.2	Fuerza generada en el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas	156
6.1.3	Reacciones en los pivotes fijos de las rueda dentadas	158
6.2	Análisis cinetostático del mecanismo de doble manivela	159
6.2.1	Análisis cinemático del mecanismo de doble manivela	159
6.2.2	Análisis cinetostático del mecanismo de doble manivela	162
6.3	Comparación de las reacciones en los apoyos y del par entre un mecanismo articulado y un engranaje no circular con idéntica ley de movimiento	165
<b>CAPÍTULO 7: COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL DEL PAR</b>	<b>173</b>	
7.1	Descripción del montaje	173
7.2	Modelo dinámico del sistema: engranajes no circulares	176
7.3	Modelo dinámico del sistema: mecanismo articulado	179
7.4	Evaluación experimental de las resistencias pasivas en el conjunto motor-reductor	182
7.5	Par generado por un motor de corriente continua	183
7.6	Resultados	184
7.6.1	Obtención de la velocidad angular mediante la lectura del contador del encoder	184
7.6.2	Evaluación experimental de las resistencias pasivas en el conjunto motor-reductor	186
7.6.3	Determinación de la inercia del reductor	187
7.6.4	Validación del par motor en el engranaje no circular	188
7.6.5	Validación del par motor en el mecanismo articulado	191
<b>CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>195</b>	
8.1	Conclusiones	195

	Pág
8.2 Aportaciones de la tesis	200
8.3 Recomendaciones	202
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	203
<b>ANEXOS</b>	209
A.1 Síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje cinemáticamente equivalente al mecanismo articulado	211
A.1.1 Cinemática del mecanismo de doble manivela	211
A.1.2 Síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular	215
A.2 Equilibrado de un cuadrilátero articulado	223
A.2.1 Método de los vectores linealmente independientes	223
A.2.2 Diseño del mecanismo de doble manivela	225