



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## **CAPÍTULO 2**

### **ESTADO DEL ARTE**

Los primeros métodos de manufactura de engranajes no circulares por generación aproximaban la curva primitiva, en torno al punto de tangencia, con una circunferencia y procedían a realizar el proceso de corte de los dientes de igual forma que en un engranaje circular. Usualmente este método de generar los dientes era poco preciso, los perfiles de los dientes no eran conjugados y solo podían utilizarse en operaciones de baja velocidad. La poca aplicación, hasta hace unos años, de los engranajes no circulares se debe tanto a que los diseñadores no habían reconocido su potencial de utilización como elementos en un mecanismo como a la escasez de fabricantes con capacidad de cortar los dientes dentro del proceso de manufactura de los engranajes. El poco éxito de la utilización de los engranajes no circulares también se puede atribuir a la gran cantidad de cálculos necesarios para un diseño exacto y una manufactura apropiada.

#### **2.1 APLICACIONES**

Ejemplos habituales de aplicaciones de engranajes no circulares son el mecanismo para la generación de una función y el mecanismo de etapa de entrada a uno más complejo. En las aplicaciones que requieren un movimiento con velocidad no uniforme a lo largo de un ciclo es habitual utilizar mecanismos articulados con pares inferiores. Frente a ellos, los engranajes no circulares presentan la ventaja de tener una transmisión definida de manera continua, ser de tamaño compacto y poder ser balanceados fácilmente. En los engranajes no circulares, el eslabón conducido puede girar continuamente sin cambios de sentido cuando la rueda conductora gira en un mismo sentido, lo que es un punto a favor en comparación con los mecanismos de levas; éstos solo producen movimiento cíclico alternativo. Adicionalmente, las velocidades de deslizamiento en los engranajes no circulares son menores ya que están limitadas por la dimensión del diente.

Comúnmente se utilizan engranajes elípticos en máquinas automáticas, máquinas empaquetadoras, mecanismos de retorno rápido, bombas y medidoras de caudal –figura (2.1). Se utilizan engranajes en forma oval en el medidor Bopp y Reuter [1], instrumento para medir el caudal de descarga de un fluido en un proceso.

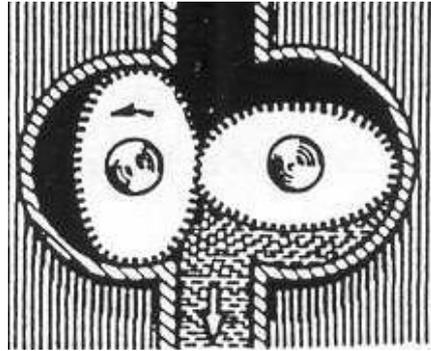


Figura 2.1 Medidor de caudal [1]

En la figura (2.2) se presenta una rueda dentada no circular utilizada para transformar la rotación entre ejes paralelos para un ciclo que excede una revolución del engranaje. Las ruedas realizan, durante el ciclo, un movimiento de translación axial adicional al movimiento de rotación.

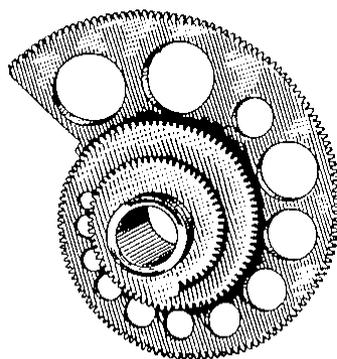


Figura 2.2 Rueda dentada para transmisión de movimiento axial y giratorio [1]

Los engranajes no circulares tienen aplicación dentro de las actuales exigencias de los procesos de conformado de metales. Voelkner [2] presenta como mejora dentro del proceso

de manufactura el uso de los engranajes no circulares en el mecanismo conductor, ya que se puede definir una función del desplazamiento del punzón de una prensa en función del tiempo dependiendo de las características particulares del proceso –figura (2.3). Así se puede obtener una prensa mecánica sin la complejidad de procesos de control.

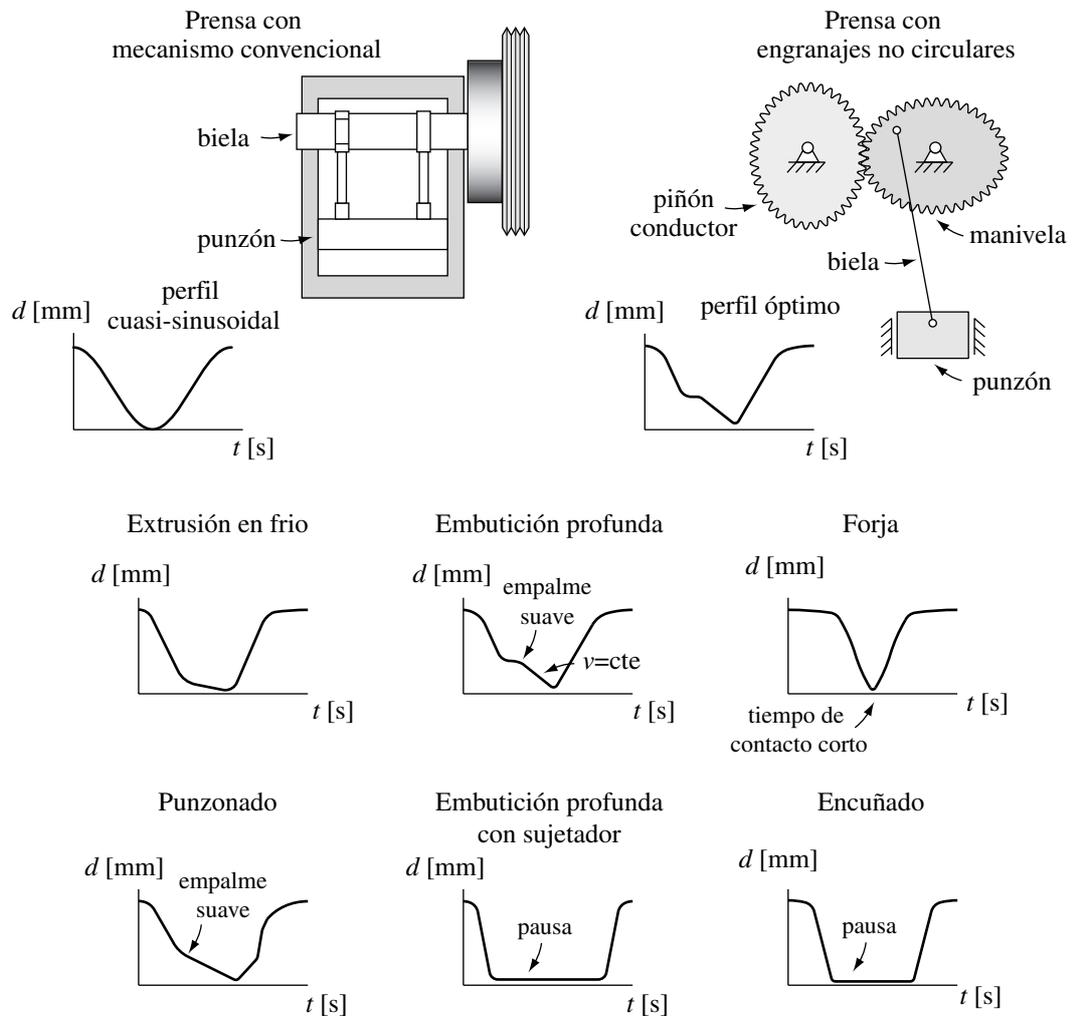


Figura 2.3 Desplazamiento del punzón en prensas mecánicas con engranajes no circulares para distintos procesos de conformado [2]

Un número creciente de aplicaciones de procesos de forja en la industria automotriz, que demandan precisión, está limitado por las máquinas de forja convencionales ya que éstas no son lo suficientemente rápidas para ser utilizadas en los procesos de forja en caliente. Doege et al. [3, 4] implementaron un diseño numérico de un engranaje no circular para ser utilizado en el mecanismo conductor de una prensa que garantiza un menor tiempo en el ciclo de alta

presión y, por lo tanto, una menor carga térmica de la herramienta. La figura (2.4) presenta la comparación entre la cinemática óptima del diseño desarrollado comparada con la cinemática de una prensa tradicional; ambas prensas tienen un ciclo de operación de 1s. La aplicación del nuevo mecanismo permite reducir el tiempo de alta presión; mientras que las prensas tradicionales requieren un tiempo de 75 ms, el nuevo concepto de prensa utilizando engranajes no circulares disminuye el tiempo a 39 ms. Esto produce un mejor comportamiento en la curva de temperatura con lo que se puede tener mejor calidad de la pieza y conservar en buen estado las matrices y las herramientas de corte.

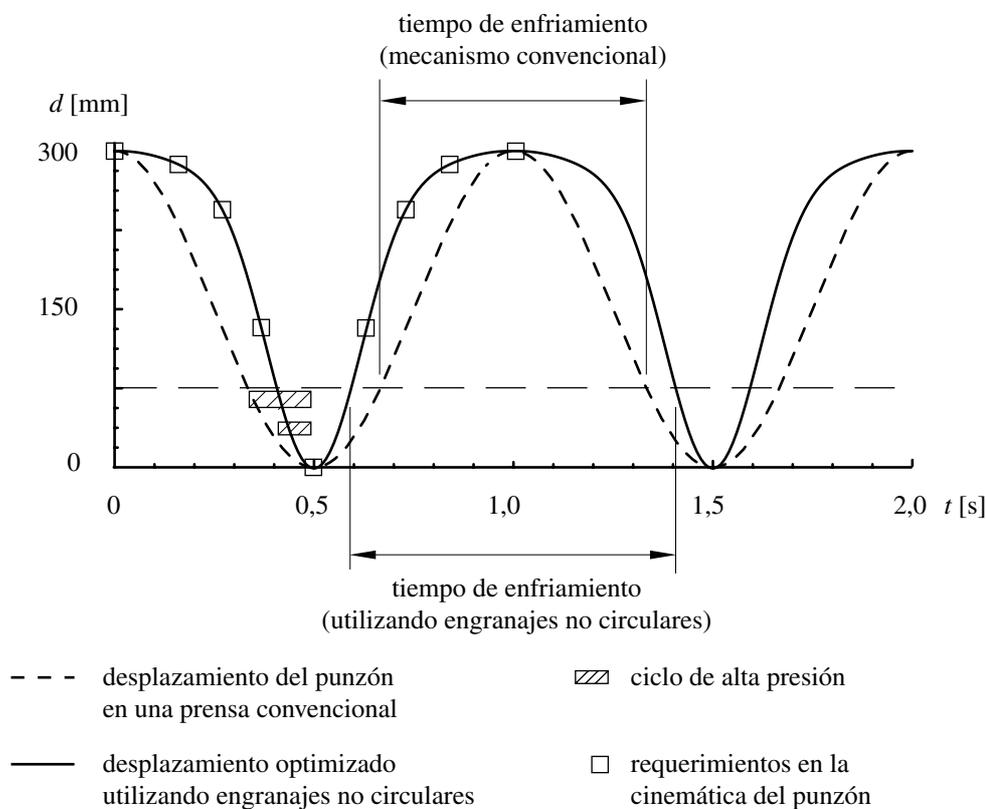


Figura 2.4 Optimización cinemática de una prensa utilizando engranajes no circulares [3]

Dooner [5] realiza el estudio de los engranajes no circulares como elementos que permiten reducir las fluctuaciones de velocidad angular debido a las fluctuaciones del par resistente. Para ello generalmente se realiza el montaje de un volante de inercia en el eje cuyo tamaño depende de la variación de velocidad permisible. Sin embargo, es posible también instalar el volante en el eje de la rueda conducida de un engranaje no circular diseñado para suavizar el par resistente total. El diseño del engranaje no circular depende de la variación del par

resistente. Las fluctuaciones del par resistente y las fluctuaciones de par debido a los engranajes no circulares se suman para reducir la fluctuación total resultante. En la figura (2.5) se presenta el montaje para un mecanismo que requiere ser balanceado.

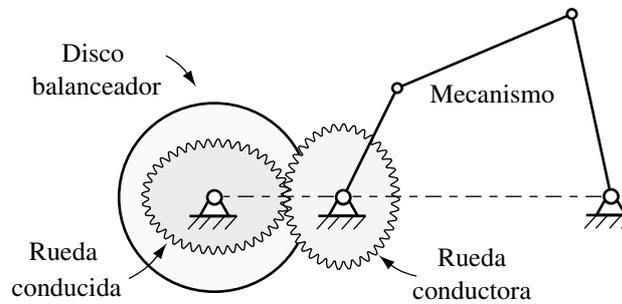


Figura 2.5 Mecanismo balanceador con engranajes no circulares [5]

Yao y Yan [6] proponen la utilización de engranajes no circulares para balancear mecanismos de cinco eslabones –figura (2.6.a)– en los que reemplazan los engranajes circulares por engranajes no circulares. En su trabajo, los autores proponen dos etapas en el diseño. En la primera etapa obtienen la síntesis del mecanismo articulado de cinco eslabones, que satisface una tarea específica para un número limitado de puntos de precisión. Luego optimizan la relación de transmisión del engranaje no circular, que reemplazará al engranaje circular, para reducir las fluctuaciones del par motor; la relación de transmisión en los puntos de precisión elegidos es unitaria. En la figura (2.6.b) se observa la disminución de las fluctuaciones del par motor al utilizar engranajes no circulares en el mecanismo articulado de cinco eslabones.

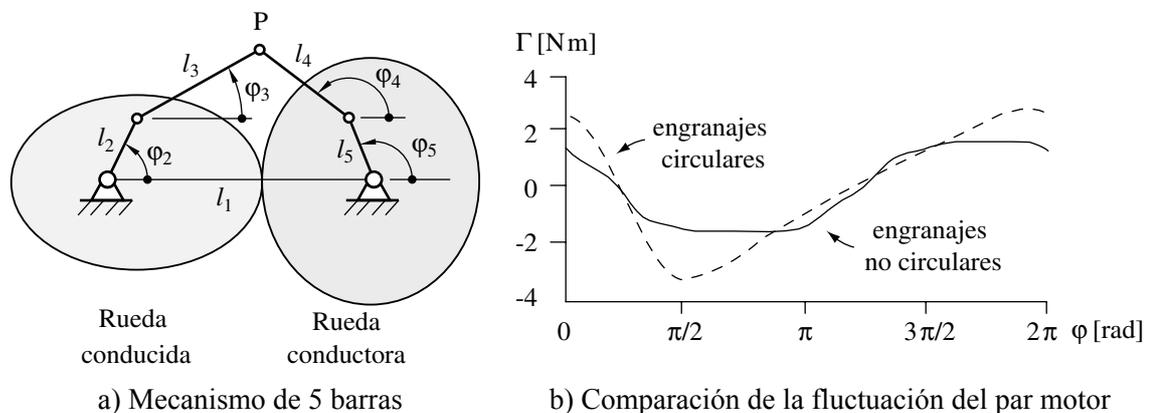


Figura 2.6 Disminución de la fluctuación del par usando engranajes no circulares [6]

Han [7] estudia el balanceo de mecanismos especiales para los cuales el autor propone el uso de engranajes no circulares para disminuir la fluctuación del par motor. En su trabajo, a manera de ejemplo, estudia el balanceo de un mecanismo RSSR.

Ogura [8] balancea un motor de combustión interna de un solo cilindro mediante un engranaje excéntrico; el autor diseñó un aparato especial [9] para medir las componentes vertical y horizontal de la fuerza y para medir el momento que se transmite al chasis; en sus trabajos remarca la notable disminución de las fuerzas excitantes con el diseño propuesto.

Kochev [10] estudió el balanceo activo de los mecanismos articulados para equilibrar las fuerzas y los momentos debido a la dinámica del mismo y para reducir las fluctuaciones del par motor; el autor menciona a los engranajes no circulares como uno de los elementos con los que se puede alcanzar el balanceo propuesto. Kochev [11] también estudió el balanceo del mecanismo articulado a partir de las fluctuaciones de la velocidad del eslabón conductor del mecanismo; la fluctuación de la velocidad de este eslabón se reduce al utilizar un eslabón con mayor inercia. El autor propone utilizar ya sea engranajes no circulares o un motor con control de velocidad a través de microcontroladores para obtener el movimiento deseado.

Liu et al. [12] presentan un estudio para utilizar engranajes no circulares en un reductor, que forma parte de un mecanismo diseñado para generar oscilaciones no sinusoidales. El reductor es instalado entre un electromotor y una leva excéntrica. Este oscilador se utilizó en un proceso de fundición de acero. Las ventajas del oscilador se verificaron mediante los resultados experimentales obtenidos en la planta, los cuales demostraron que se redujeron la profundidad de las marcas del molde sobre los lingotes en el proceso y se mejoró la calidad de la superficie de la fundición.

Existen trabajos donde se propone la utilización de engranajes no circulares en el mecanismo de la dirección de los automóviles. Emura y Arakawa [13] analizan un mecanismo que incluye unos engranajes elípticos que controlan cada una de las llantas; Dooner [14] propone un mecanismo de ocho eslabones como alternativa. Los engranajes no circulares se utilizan para regular los desplazamientos relativos de dos eslabones extremos del mecanismo que soportan las llantas. En la figura (2.7) se presenta el mecanismo propuesto por Dooner.

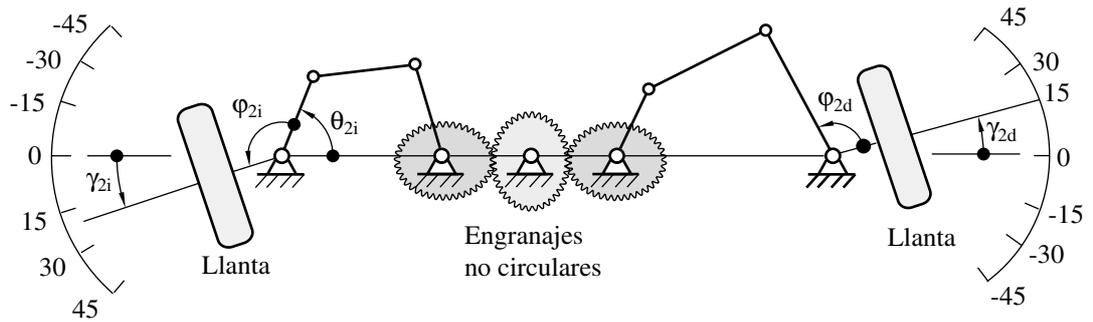


Figura 2.7 Aplicación en la dirección de un automóvil [14]

Guo y Zhang [15] presentan un estudio de la cinemática de los engranajes excéntricos que tienen aplicación en la maquinaria agrícola, específicamente en el tren planetario de los mecanismos de una cosechadora de arroz. Aún no existe una solución analítica de la relación entre los desplazamientos angulares de los engranajes excéntricos; la contribución de los autores consiste en presentar una solución numérica y confirmar los resultados obtenidos al compararlos con las medidas directas de un tren planetario con engranajes excéntricos. La figura (2.8) presenta el engranaje planetario excéntrico propuesto por los autores que consiste en cuatro ruedas dentadas excéntricas y el brazo H; la rueda 1 es fija.

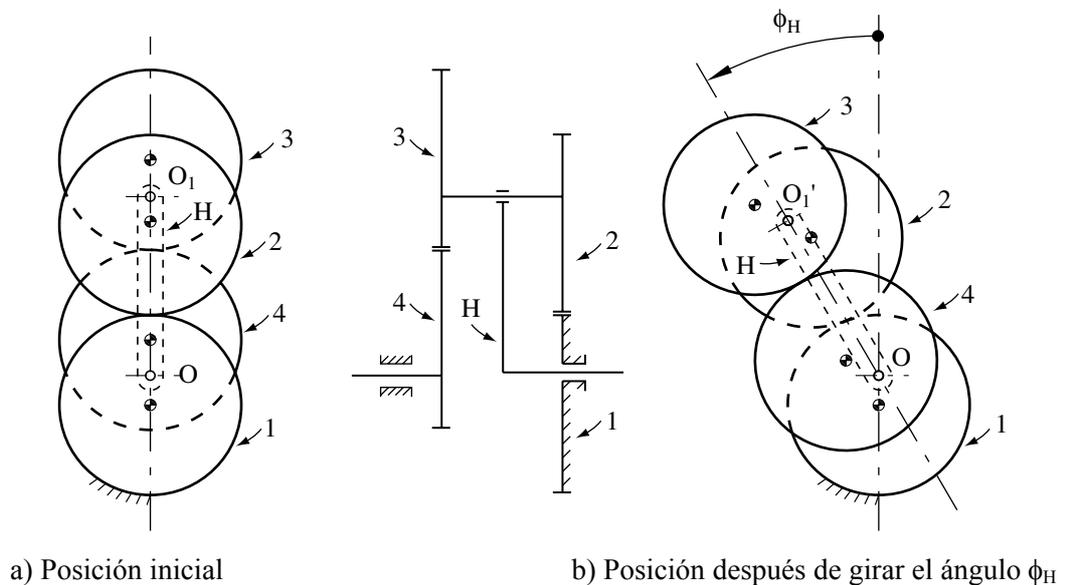
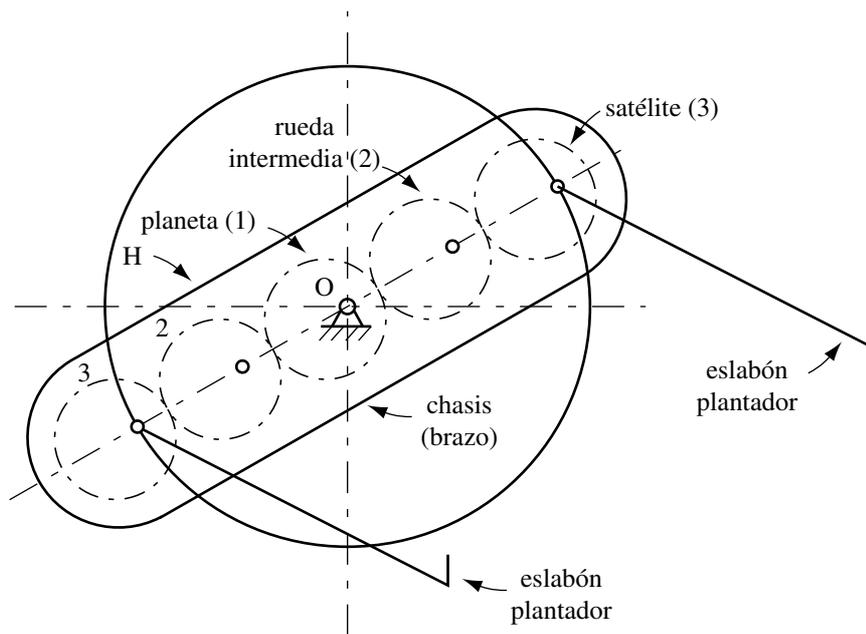
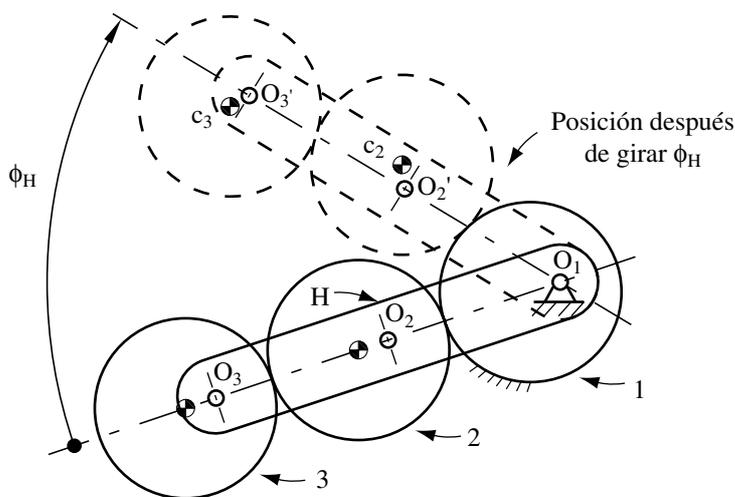


Figura 2.8 Tren planetario excéntrico [15]

La figura (2.9.a) presenta un mecanismo de la cosechadora de arroz con un tren planetario que incluye ruedas excéntricas. El mecanismo consiste en cinco ruedas dentadas excéntricas, un chasis y dos componentes plantadores. El centro de giro de los cinco engranajes excéntricos es soportado por el brazo o chasis. La rueda 1 (planeta) es fija; el chasis (actúa como el brazo H) es el componente de entrada de movimiento y gira alrededor del centro de giro O de la rueda 1.



a) Mecanismo de la cosechadora de arroz



b) Tren planetario con ruedas excéntricas

Figura 2.9 Esquema del tren planetario propuesto [15]

Los dos satélites 3, en los que se encuentran los componentes plantadores, son los componentes de salida. La figura (2.9.b) presenta los movimientos de un engranaje planetario excéntrico conformado por tres ruedas excéntricas en los que, debido a la simetría del tren planetario, los autores estudian el funcionamiento del mecanismo.

En la figura (2.10) se presenta un mecanismo pistón biela manivela propuesto por Jhonson [16] en el que utiliza unos engranajes elípticos con el fin de obtener un movimiento más uniforme de la guía deslizante E comparada con el que se obtiene con una manivela que gira con velocidad angular constante. Con una manivela normal, la guía obtiene un movimiento rectilíneo que inicia desde un estado de reposo, la velocidad se incrementa gradualmente hasta el centro de la carrera y entonces decrece hasta regresar a cero en el lado opuesto de la carrera. Con el engranaje elíptico, cuando el piñón C se acerca a la posición extrema izquierda, la velocidad angular del engranaje conducido y de la manivela aumentan, debido a que el radio del engranaje conductor aumenta gradualmente. Cuando se inicia el retorno, la velocidad angular del engranaje conducido y de la manivela disminuyen gradualmente, porque el radio del engranaje conductor disminuye; cuando la manivela se encuentra en la posición en que se obtiene la mayor velocidad del piñón, la velocidad angular de la manivela es mínima, ya que se encuentra engranada por la parte de menor radio del engranaje conductor. Cuando la manivela se aleja de su posición central, la manivela es gradualmente acelerada de tal manera que la velocidad del piñón disminuye menos de lo que lo haría cuando la manivela gira a velocidad angular constante. El autor propone este mecanismo para prensas pequeñas. Con el mecanismo propuesto, la carrera de la guía deslizante es dos veces la carrera del piñón C o cuatro veces la longitud de la manivela.

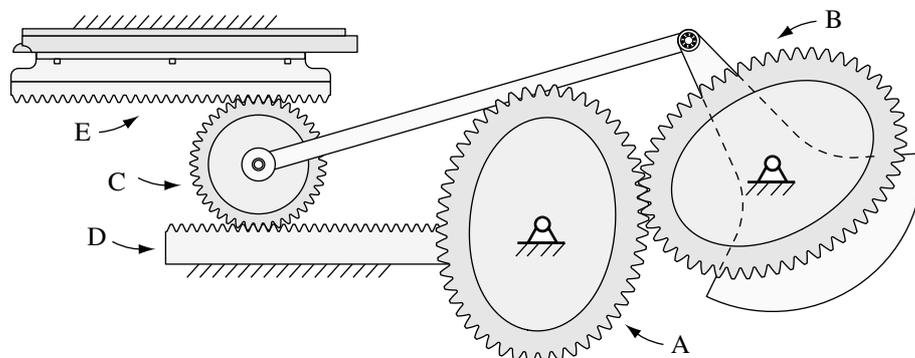


Figura 2.10 Aplicación de engranajes elípticos [16]

Jhonson [16] propuso la aplicación de engranajes elípticos en la operación de la válvula de alimentación (slide valve) de una estampadora de vapor (steam stamp) como las que se utilizaban para triturar rocas. En este caso, el movimiento variable del engranaje se utiliza para el control del movimiento de la válvula para admitir vapor por encima del pistón durante casi toda la carrera de descenso, mientras que, en la carrera de ascenso, se utiliza solo el vapor necesario para retornar el pistón, con el fin de reducir el consumo de vapor.

Jhonson [16] propuso un diseño de un mecanismo de retorno rápido en el que combina engranajes elípticos y excéntricos con unos engranajes circulares concéntricos, tal como se muestra en la figura (2.11). Las ruedas A y B están instaladas en el mismo eje. El piñón pequeño A es concéntrico con su eje y engrana con la rueda circular partida F. El piñón grande B es excéntrico y engrana con la rueda partida elíptica H.

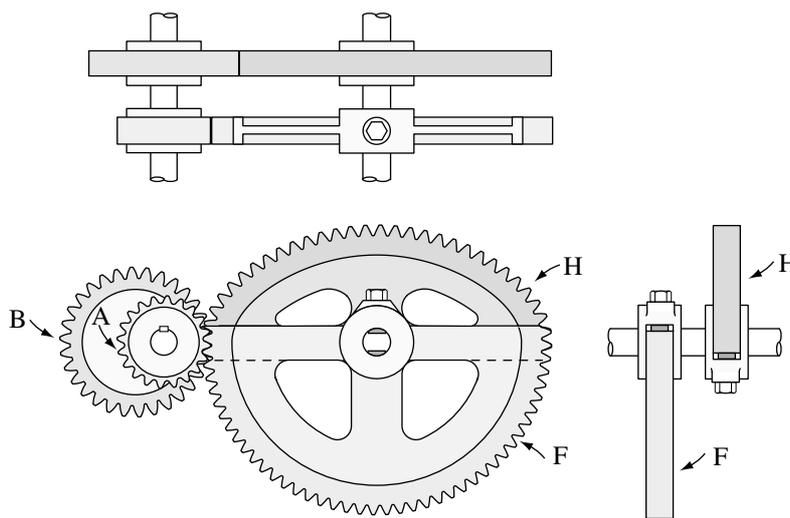


Figura 2.11 Combinación de engranajes elípticos – excéntricos con circulares [16]

Por diferencia de diámetros, la rueda A da dos revoluciones por media revolución de la rueda semi-circular F y la rueda excéntrica B da una revolución por media revolución de la rueda elíptica H. Cuando la rueda excéntrica conduce a la elíptica, el eje conducido incrementa la velocidad hasta un valor máximo y luego disminuye gradualmente hasta que el piñón concéntrico A conduce a la rueda semi-circular F girando a velocidad angular constante. Con esta combinación, una revolución del eje conducido se corresponde con tres revoluciones del eje conductor. Si esta configuración de ruedas dentadas se aplica en un mecanismo de retorno rápido, la carrera de trabajo puede ocurrir cuando el piñón A es el conductor, debido a la

velocidad relativamente suave y uniforme. Cuando la rueda excéntrica es la conductora, la velocidad del eje conducido es gradualmente acelerado y, después de alcanzar su máximo, se reduce a la velocidad de corte, por lo que la herramienta sería rápidamente retornada a la posición inicial para la siguiente carrera de trabajo.

Cleghorn y Shaw [17] al igual que Ferguson y Kerr [18] proponen un diseño de una transmisión continuamente variable utilizando engranajes no circulares; Cleghorn y Shaw estudiaron el par transmitido y las características de velocidad y eficiencia; Ferguson y Kerr estudiaron la eficiencia de la transmisión considerando los parámetros del engranaje, la relación de transmisión y el flujo de potencia.

Cleghorn y Shaw [17] estudian diferentes alternativas para el diseño de la transmisión. Uno de las variables de diseño es la relación de transmisión de los engranajes no circulares; los autores utilizan una relación de transmisión con variación lineal desde una relación de transmisión mínima hasta su máximo valor. En la curva de descenso estudian la combinación con una curva de retorno lineal o una curva de retorno sinusoidal. En la figura (2.12) se presentan las curvas primitivas cuando se utiliza el modelo lineal en ambos intervalos, con una relación de transmisión mínima de 0,5 y con una relación máxima de 1,5. Estos autores utilizan dos engranajes no circulares con idéntica ley de desplazamiento para alcanzar intervalos de velocidad angular constante. La salida de la velocidad angular del conjunto de engranajes pueden sumarse o restarse mediante un tren planetario.

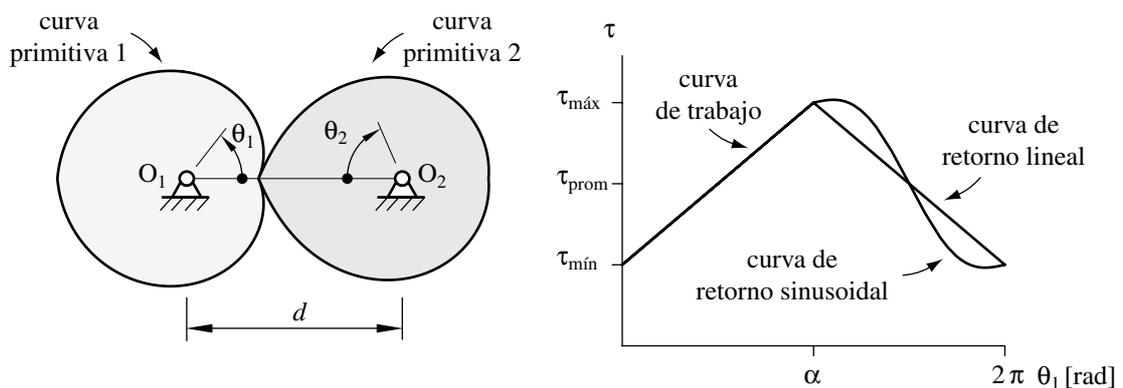
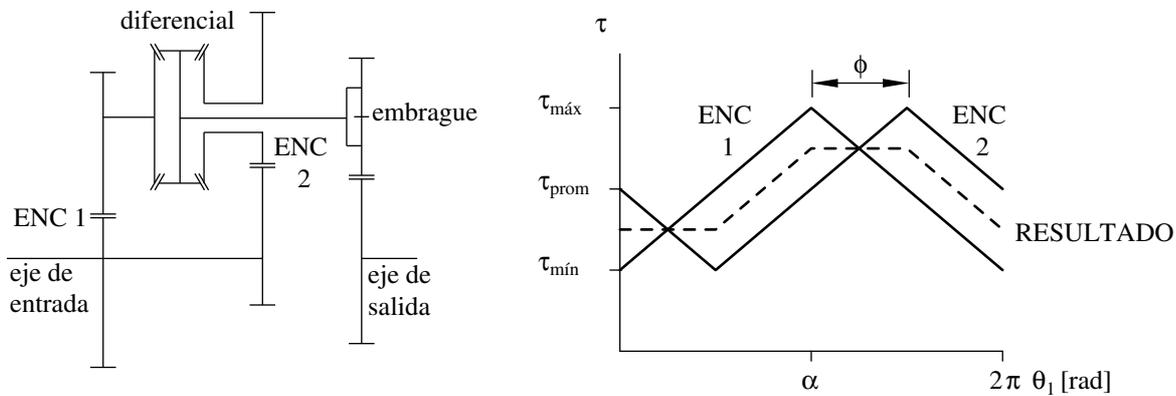


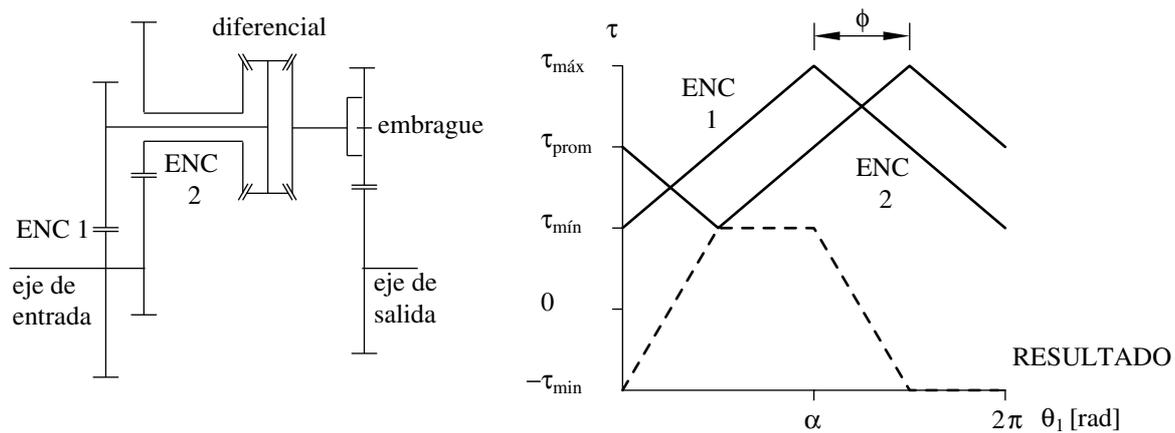
Figura 2.12 Relación de transmisión para la transmisión continuamente variable [17]

La amplitud de la porción constante de la velocidad resultante depende del ajuste del ángulo de fase  $-\phi$  entre los dos engranajes no circulares. Cleghorn y Shaw obtienen intervalos de

velocidad angular constante a la salida, cuando utilizan diferenciales con los engranajes no circulares. En la figura (2.13) se presentan dos de los generadores que los autores proponen en su estudio.



a) salida mediante brazo



b) salida mediante rueda cónica

Figura 2.13 Engranajes no circulares y esquema del generador [17]

Dooner, Yoon y Seireg [19] proponen utilizar engranajes no circulares en los trenes planetarios para reducir la potencia recirculante –que se define en este tipo de mecanismos– y así disminuir el tamaño e incrementar la eficiencia de la transmisión. En la figura (2.14) se presenta un diagrama esquemático de la transmisión propuesta por los autores. En el modelo propuesto por Dooner et al., el eje de salida se corresponde con el eje del planeta –P1– de un diferencial. En su diseño, proponen utilizar un controlador, que no es mostrado en el esquema



Mundo [25] estudia un engranaje planetario que genere relaciones de transmisión variable. El autor utiliza tres engranajes no circulares en una disposición tal como se ilustra en la figura (2.15). La relación de transmisión entre la velocidad angular de la corona y del satélite  $-\tau_{cs} = \omega_c / \omega_s -$  y entre la velocidad angular del satélite y del planeta  $-\tau_{sp} = \omega_s / \omega_p -$  se presentan en la figura (2.16).

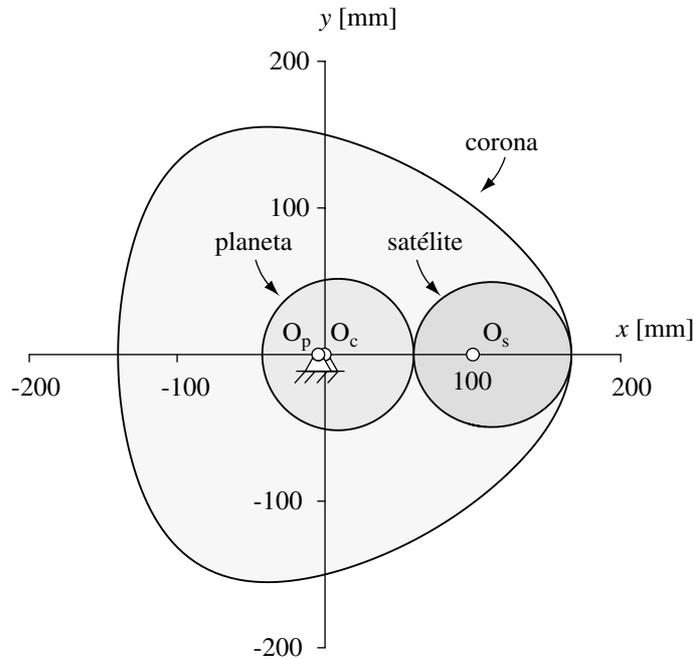


Figura 2.15 Curvas primitivas de un tren planetario con relación de transmisión variable [25]

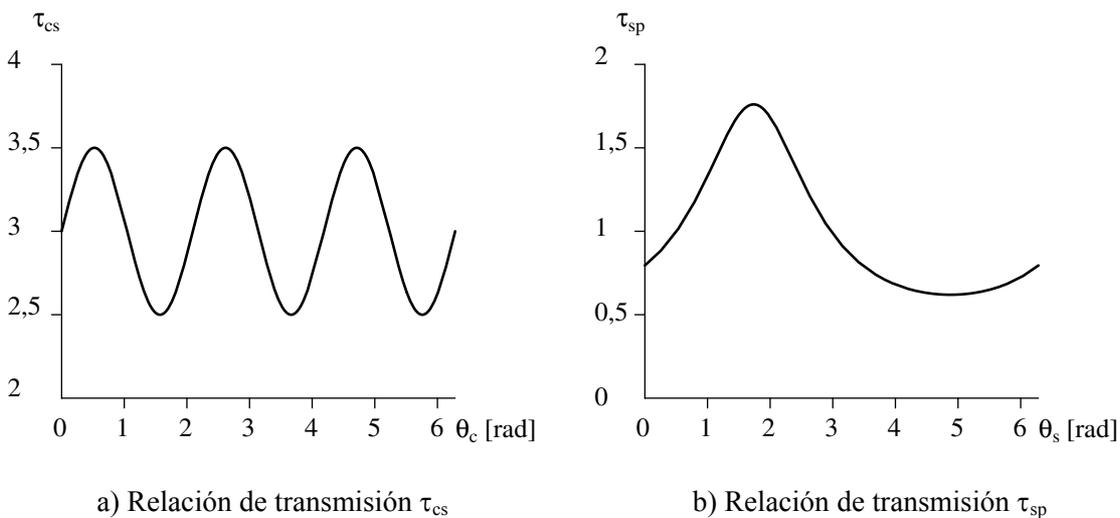


Figura 2.16 Relaciones de transmisión entre las ruedas dentadas [25]

En la figura (2.15) se observa que el centro de rotación de la corona es diferente del centro de rotación del planeta. La distancia entre los centros de rotación del planeta y del satélite en la configuración mostrada no es una variable de diseño y se obtiene de la siguiente restricción de la relación de transmisión entre el satélite y el planeta dada por:

$$\int_0^{2\pi} \tau_{sp}(\theta_s) d\theta_s = \int_0^{2\pi} \frac{\Delta_{sp} - R_s(\theta_s)}{R_s(\theta_s)} d\theta_s = 2\pi \quad (2.1)$$

siendo  $\Delta_{sp}$  la distancia entre centros del satélite y del planeta,  $R_s(\theta_s)$  la distancia desde el centro de rotación del satélite al centro de velocidad relativo entre el satélite y el planeta. Mundo presenta un diseño de un mecanismo en las bicicletas de alto rendimiento. El tren planetario se diseña para optimizar la máxima potencia del humano; debido a características fisiológicas y biomecánicas del cuerpo humano, el par que produce un ciclista cuando pedalea –a lo largo de un ciclo de rotación del pedal– es variable. El autor diseñó el tren planetario de la figura (2.17) para disminuir las fluctuaciones del par, basado en los estudios del comportamiento del par de salida en función de la posición angular del pedal.

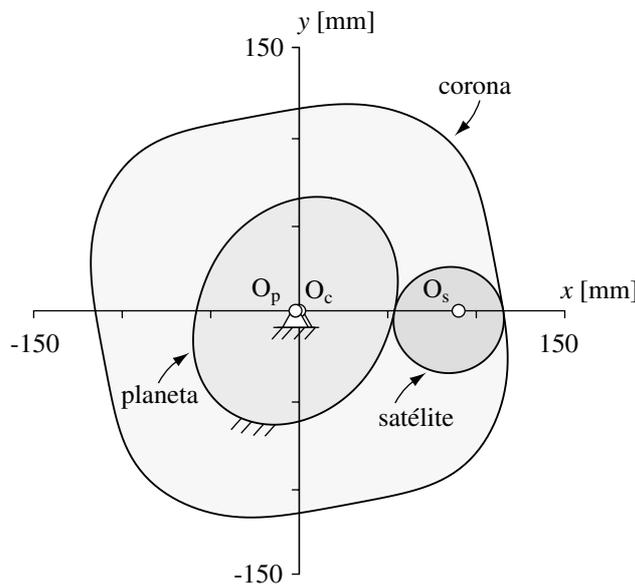


Figura 2.17 Curvas primitivas del tren planetario óptimo, según Mundo [25]

Morikawa et al. [26] proponen un mecanismo manivela biela pistón, de un motor de combustión interna con ignición por chispa, en el que adaptan un engranaje elíptico para mover rápidamente al pistón cuando se encuentra cerca del punto muerto superior; de esta forma evitan el golpeteo cuando se tienen altas relaciones de compresión.

## 2.2 TEORÍAS ACERCA DEL DISEÑO DEL PERFIL DEL DIENTE Y DE LAS CURVAS PRIMITIVAS

Chironis y Sclater [27] formulan tres posibilidades como punto de partida para el diseño de las ruedas dentadas de un engranaje no circular: i) se conoce las ecuaciones polares de las curvas primitivas, ii) se conoce la relación entre las posiciones angulares de las ruedas y iii) se conoce la relación de velocidades angulares; en las tres alternativas también se requiere la distancia entre centros. Los autores presentan las expresiones básicas para obtener las curvas primitivas de engranajes elípticos que giran alrededor de sus focos y también para el caso en que giran alrededor de su centro geométrico. Adicionalmente, presentan las relaciones para obtener engranajes excéntricos, en espiral logarítmico y para producir un desplazamiento angular proporcional a la función seno del ángulo de entrada.

Olsson [28] recopila numerosos trabajos relacionados con los engranajes no circulares que abarcan incluso los presentados en el siglo XIX; el autor estudia los engranajes elípticos y otros engranajes no circulares y afirma que las curvas base de las ruedas elípticas son elipses con focos idénticos.

Kuczewski [29] hizo una propuesta para el diseño de dos engranajes elípticos. En su estudio, el autor propone utilizar dos ruedas conjugadas idénticas. La ecuación de las curvas primitivas de las ruedas elípticas es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.2)$$

donde  $a$  y  $b$  son los semiejes de la elipse. Las ruedas giran alrededor de sus focos,  $F_1$  y  $F_1'$ . Cuando la rueda izquierda gira  $\beta_1$ , la rueda derecha gira el ángulo conjugado  $\beta_2$  –figura (2.18). En su trabajo, Kuczewski propuso un diseño basado en la idea de generar un perfil de evolvente desde una curva base elíptica. Para encontrar la curva base y superar el inconveniente del ángulo de presión variable, creó una rueda circular –de diámetro  $d$ – con igual perímetro que la rueda elíptica:

$$(a + b)\pi = \pi d \quad (2.3)$$

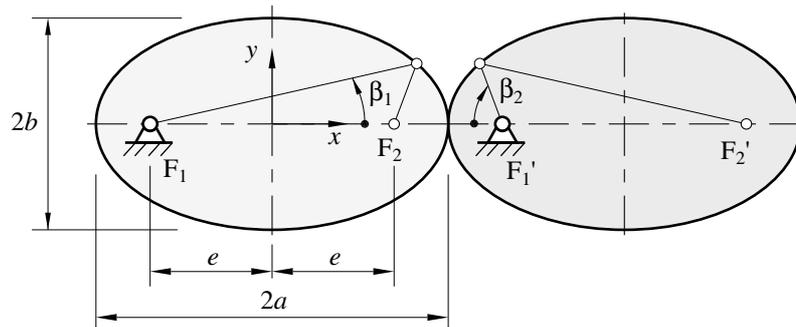


Figura 2.18 Movimientos conjugados de un engranaje elíptico [29]

A continuación, calculó la distancia entre las circunferencias primitiva y base:

$$h = \frac{d - d_b}{2} \tag{2.4}$$

siendo  $d_b$  el diámetro de la circunferencia base de la rueda circular equivalente:

$$d_b = d \cos \alpha \tag{2.5}$$

y  $\alpha$  es el ángulo de presión deseado.

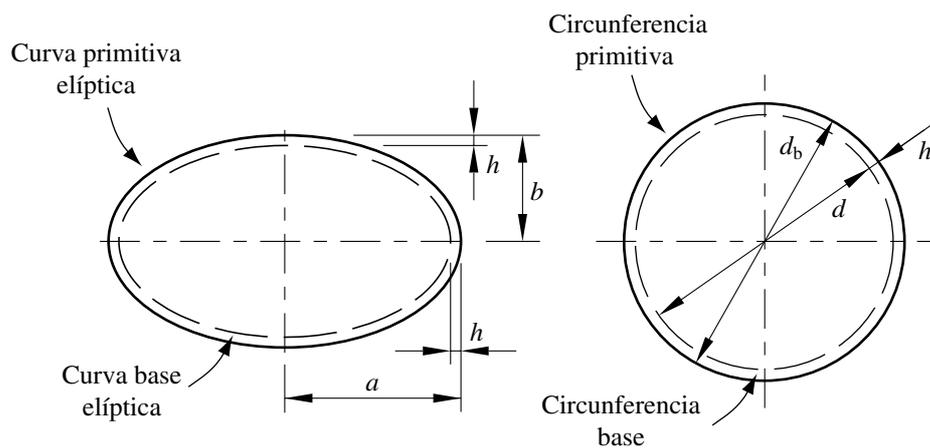


Figura 2.19 Rueda equivalente [29]

Para determinar la curva base, el autor restó la distancia  $h$  a la longitud de los semiejes,  $a$  y  $b$ , de la curva primitiva elíptica. El perfil del diente se crea al generar el perfil como la curva

evolvente a partir de la curva base elíptica resultante. En la figura (2.19) se representa la curva base elíptica que resulta de estos procedimientos.

Bloomfield [30] consideró el caso de obtener una rueda dentada dividiendo la curva primitiva en segmentos con radio de curvatura aproximadamente constante. El diente en cada segmento se corta separadamente como si fuera una porción de una rueda circular con diferentes diámetros. En la figura (2.20) se presenta este procedimiento para los dientes 1 y 10, cortados como si pertenecieran a una rueda circular con radios  $\rho_A$  y  $\rho_B$  respectivamente.

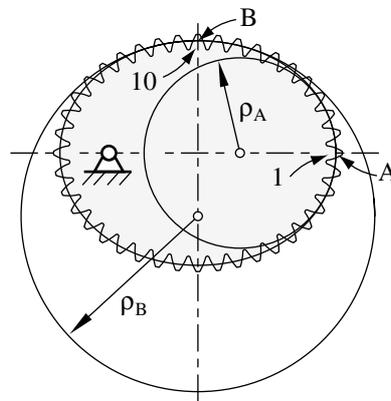


Figura 2.20 Representación local de un engranaje no circular por el engranaje circular respectivo [1]

Litvin [1, 31] realizó una extensión de la teoría de la generación del perfil del diente por curvas de evolvente. En su trabajo, Litvin presenta un estudio profundo de la teoría de engrane. Un gran aporte de este trabajo es el estudio de las condiciones en que se generan puntos singulares sobre el perfil del diente en el proceso de generación. Litvin centra su estudio en el análisis de las velocidades relativas y la ecuación de engrane entre la rueda y la herramienta de corte. En el proceso de generación, los puntos singulares aparecen cuando la velocidad de deslizamiento del punto de contacto entre la herramienta y el diente, a lo largo del perfil del diente, es cero. El autor estudia la generación del perfil del diente mediante la simulación del proceso de corte con cremallera y con piñón cortador.

Chang et al. [32] profundizaron el trabajo de Litvin en la manufactura por corte con cremallera de una rueda elíptica. La cremallera tiene un perfil estándar de acuerdo a la norma AGMA 201.02 (1974). En su trabajo, incluye el redondeo del pie del diente y la holgura entre

los dientes en la curva primitiva. Los autores utilizan el estudio de Litvin sobre la aparición de puntos singulares en el perfil del diente para limitar los parámetros de la cremallera. Los autores consideran el proceso de manufactura como un proceso en el que se presenta un movimiento de rodadura pura de la cremallera sobre la curva primitiva elíptica. En la figura (2.21) se presenta el mecanismo generador del diente. En el proceso de generación, el eje  $Y_c$  coincide con la dirección del vector tangente de la curva primitiva elíptica en el centro instantáneo de rotación I.

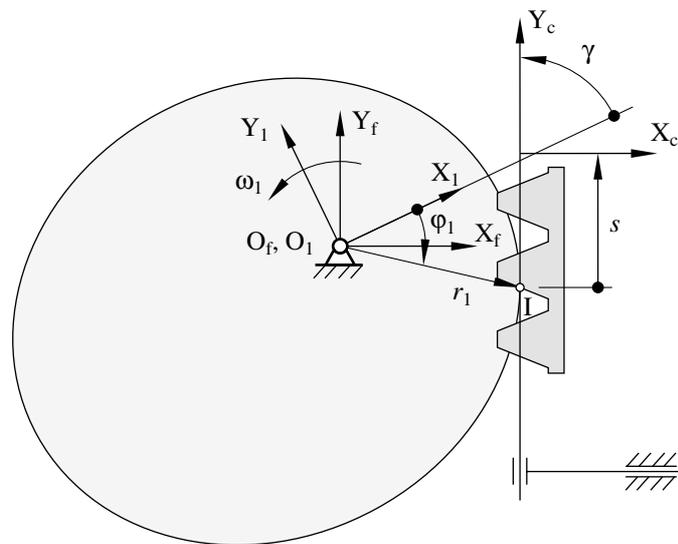


Figura 2.21 Mecanismo generador del diente [32]

Bair [33, 34] presenta un estudio donde diseña unos engranajes elípticos con pocos dientes para una bomba de aceite. En este trabajo se aplican la teoría de engrane y la generación por cremallera. A diferencia del trabajo de Chang, el autor estudia el efecto del desplazamiento de la cremallera. Bair analiza en sus estudios la generación de puntos singulares y considera la condición en que se producen dientes en forma de punta.

Bair [35] y Chen y Tsay [36] presentan una propuesta para obtener el perfil del diente para unos engranajes elípticos utilizando una cremallera cuyo perfil de diente se obtiene por arcos circulares. El perfil del diente de la cremallera propuesto por los autores genera los dientes de una rueda elíptica con perfiles cóncavos y convexos. La compleja geometría del perfil del diente y los parámetros de diseño como ángulo de presión en cada punto, módulo, eje mayor y el radio de los arcos circulares pueden producir interferencia o crear dientes puntiagudos;

estos problemas se tienen en cuenta en el procedimiento propuesto. Los autores afirman que los dientes generados por su método tienen menores esfuerzos de contacto, mayor capacidad de carga y mejores condiciones de lubricación que los obtenidos por el perfil de evolvente.

Chang y Tsay [37] investigaron la generación de engranajes no circulares utilizando como herramienta un piñón cortador con el fin de mecanizar aquellos engranes que tienen curvas primitivas con formas cóncavas y convexas donde el mecanizado por cremallera es limitado. Los autores proponen un modelo matemático para obtener el perfil en el que consideran, simultáneamente, la trayectoria de la herramienta de corte representado en el sistema coordenado de la rueda y la ecuación de los perfiles conjugados. Los autores analizan la interferencia y la condición de convexidad de las curvas primitivas para elegir el módulo del piñón cortador; además determinan el mínimo número de dientes del engranaje no circular basado en la condición de interferencia.

Figliolini y Angeles [38, 39] realizan la síntesis del engranaje elíptico y de su cremallera previa definición del ángulo de presión, de la curvatura máxima y de la distancia entre centros. En su propuesta obtienen la evolvente de curvas primitivas con regiones cóncavas y convexas. Los autores se basan en el trabajo de Chang y Tsay [37] para generar el perfil del diente de una rueda elíptica con diferentes periodos de rotación y para elegir el piñón cortador adecuado que evite el contacto múltiple cuando se presentan curvas cóncavas y convexas. Los autores hacen énfasis en utilizar el radio de curvatura mínimo de las curvas primitivas como criterio de diseño debido a que permite determinar problemas de interferencia, múltiples puntos de contacto y analizar la concavidad.

Bair [40] obtiene la simulación del proceso de corte de un engranaje elíptico, cuyo centro de rotación es su centro geométrico, en la que utiliza como herramienta de corte un piñón cortador. El modelo matemático del engranaje elíptico se basa en la ecuación de engrane y en el mecanismo de generación de la rueda dentada. En la figura (2.22) se presenta el mecanismo generador del diente; en el proceso de generación, el piñón cortador gira alrededor del eje Z y se traslada de forma que las curvas primitivas del piñón cortador y de la rueda generada son tangentes en el centro instantáneo de rotación I. El autor comprueba que no se formen puntos singulares en el perfil ni dientes puntiagudos durante el proceso de generación.

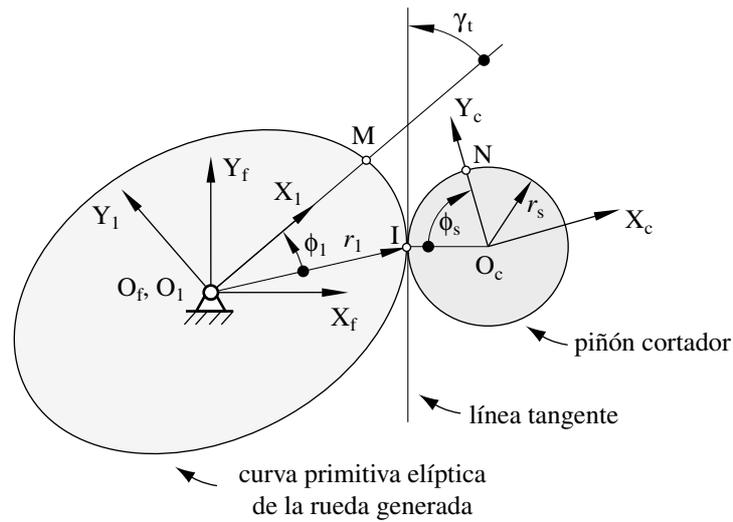


Figura 2.22 Generación del diente por tallado por generación [40]

Litvin [1] estudia la modificación de curvas primitivas elípticas basándose en las siguientes ideas:

- (i) Considerar un punto M de la curva primitiva elíptica –figura (2.23.a)– dado por el vector de posición:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathbf{r}_1(\phi_1), \quad 0 \leq \phi_1 \leq \pi \tag{2.6}$$

- (ii) Obtener el punto M<sub>m</sub> de la curva primitiva modificada como:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M}_m = \mathbf{r}_{1,m} \left( \frac{\phi_1}{m_I} \right), \quad 0 \leq \phi_1 \leq \pi, \quad |\mathbf{r}_{1,m}| = |\mathbf{r}_1| \tag{2.7}$$

- (iii) Modificar la parte inferior mediante un procedimiento similar con el que se modificó la parte superior, generalmente con  $m_I \neq m_{II}$ , ver figura (2.23.b).

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M}_m = \mathbf{r}_{1,m} \left( \frac{\phi_1}{m_{II}} \right), \quad \pi \leq \phi_1 \leq 2\pi, \quad |\mathbf{r}_{1,m}| = |\mathbf{r}_1| \tag{2.8}$$

En la figura (2.23.c) se presentan la curva primitiva elíptica y la elíptica modificada.

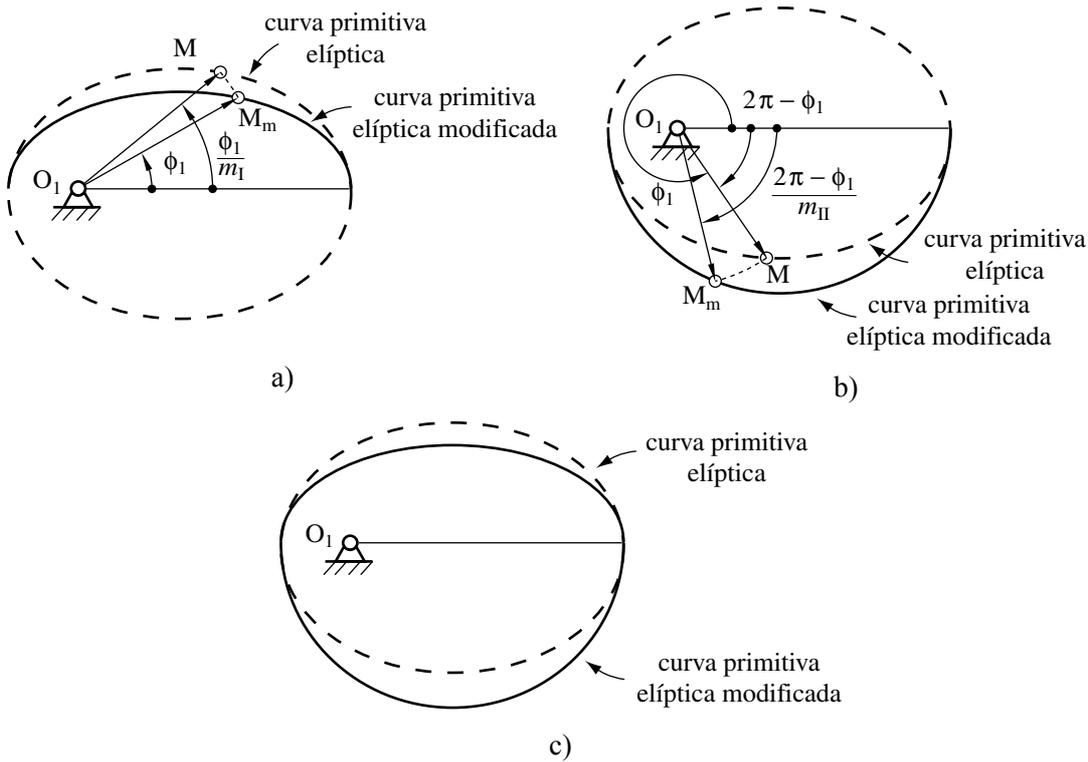
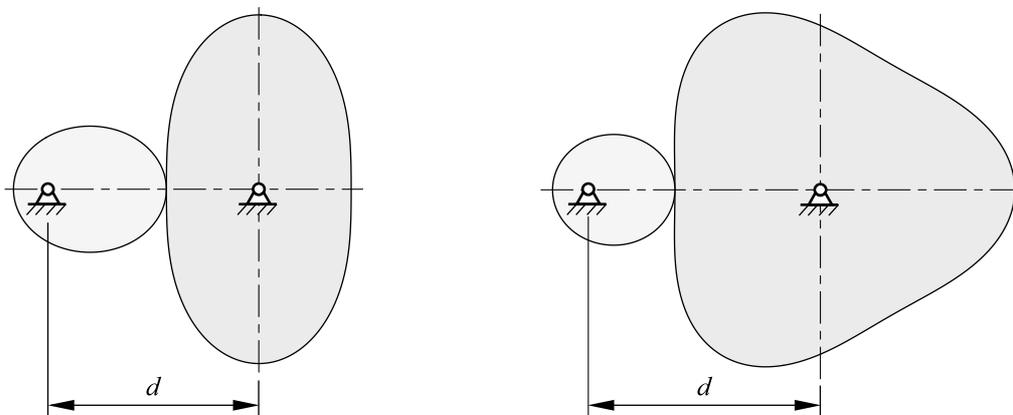


Figura 2.23 Curvas primitivas modificadas [1]

Litvin [1] combina curvas primitivas elípticas con curvas primitivas elípticas modificadas de tal forma que la rueda conducida gire una vuelta por múltiples vueltas de la rueda conductora. En la figura (2.24) se presentan los casos de la combinación para 2 y 3 vueltas de la rueda elíptica por cada vuelta de la rueda elíptica modificada. El autor comprobó, en sus trabajos, que las curvas primitivas de las ruedas conducidas son elipses modificadas.



a) Dos vueltas de la rueda elíptica      b) Tres vueltas de la rueda elíptica

Figura 2.24 Combinación de curvas primitivas elípticas con curvas no circulares

Chironis y Sclater [27] estudian las ecuaciones que permiten obtener un engranaje compuesto de una rueda excéntrica y un engranaje no circular –figura (2.25).

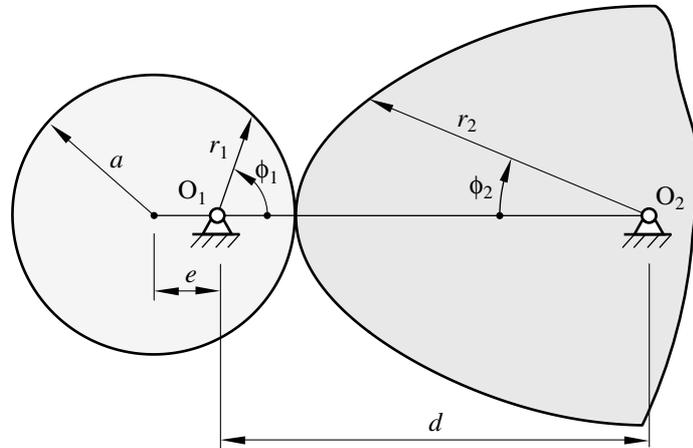


Figura 2.25 Rueda excéntrica y rueda no circular [1]

Las ecuaciones básicas para esta configuración son:

$$r_1(\phi_1) = (a^2 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{1/2} - e \cos \phi_1; \quad r_2(\phi_1) = d - r_1(\phi_1); \quad \phi_2(\phi_1) = \int_0^{\phi_1} \frac{r_1}{d - r_1} d\phi_1 \quad (2.9)$$

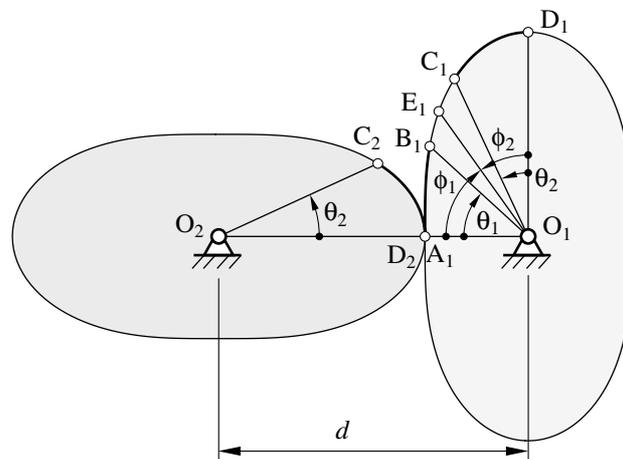
Litvin [1] también estudia las ecuaciones de un engranaje excéntrico con una rueda no circular que da  $n$  vueltas por vuelta de la rueda excéntrica. La curva primitiva de la rueda no circular es una curva cerrada si se cumple:

$$\frac{2\pi}{n} = \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\phi_1)}{d - r_1(\phi_1)} d\phi_1 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{d - (a^2 - e^2 \sin^2 \phi_1) + e \cos \phi_1} - 1 \right) d\phi_1 \quad (2.10)$$

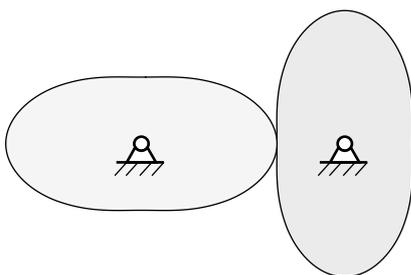
Con la solución de (2.10) se determina la distancia entre centros  $-d-$  que debe ser resuelta numéricamente.

Existen trabajos que estudian la generación de curvas primitivas no circulares idénticas. Tong y Yang [41] proponen un método, al cual denominaron *diseño directo del perfil*, para generar curvas primitivas idénticas con geometría diferente de las elípticas y de las exponenciales.

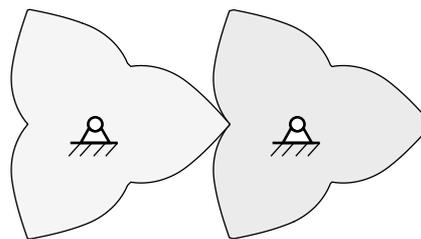
Estos autores estudian la generación de curvas primitivas, con diferentes números de lóbulos, y las condiciones geométricas para obtener continuidad  $C^1$  en las puntas y raíces de los lóbulos. En la figura (2.26.a) se presentan dos curvas primitivas no circulares idénticas. El segmento  $A_1B_1$  de la curva primitiva 1, engrana con el segmento  $D_2C_2$  de la curva primitiva 2. Debido a que las curvas primitivas son idénticas, el segmento  $D_1C_1$  de la curva primitiva 1 es el mismo del segmento  $D_2C_2$  de la curva primitiva 2. Los puntos  $B_1$  y  $C_1$  son coincidentes en el punto  $E_1$ , por lo que debe cumplirse  $r_1(\phi_1) = r_2(\phi_2) = d/2$ , siendo  $\phi_1$  el ángulo  $A_1O_1E_1$  y  $\phi_2$  el ángulo  $D_1O_1E_1$ . Para satisfacer la condición de un número entero de lóbulos, los ángulos subtendidos por la mitad del perfil del lóbulo  $A_1D_1$  —es decir,  $\phi_1 + \phi_2$ — debe ser igual a  $\pi/N$ , siendo  $N$  el número de lóbulos. En la figura (2.26) se presentan curvas primitivas con dos y tres lóbulos obtenidos por los autores.



a) Diseño de las curvas primitivas no circulares idénticas



b) curvas primitivas con 2 lóbulos



c) curvas primitivas con 3 lóbulos

Figura 2.26 Curvas primitivas idénticas [41]

Yang, Tong y Ling [42] utilizan una *función de desviación* en la generación del perfil del diente en unas ruedas no circulares con curvas primitivas idénticas, obteniendo así un perfil diferente al perfil de involuta. Los autores definen la función de desviación como la distancia

entre el punto de contacto y el correspondiente centro instantáneo de rotación relativo de las curvas primitivas. En otras palabras, la función de desviación mide la cantidad de desviación desde un punto del perfil del diente generado hasta la curva primitiva original. En la función de desviación, la posición angular del perfil original es la variable de entrada independiente y determina su cantidad de desviación. En la figura (2.27) se presentan dos curvas primitivas no circulares idénticas marcadas como  $p_1$  y  $p_2$ ; Yang et al. obtuvieron estas curvas utilizando el método propuesto en [41]. Las curvas  $g_1$  y  $g_2$  son los perfiles generados correspondientes. En la configuración mostrada en la figura (2.27),  $P$  es el punto de contacto entre los dos rotores  $p_1$  y  $p_2$  y  $G$  es el punto de contacto entre los perfiles generados. El método de diseño de la función de desviación genera el perfil  $G(\theta_1)$  como una curva offset de la curva  $P(\theta_1)$  a una distancia  $e(\theta_1)$ , tal como se muestra en la figura (2.27).

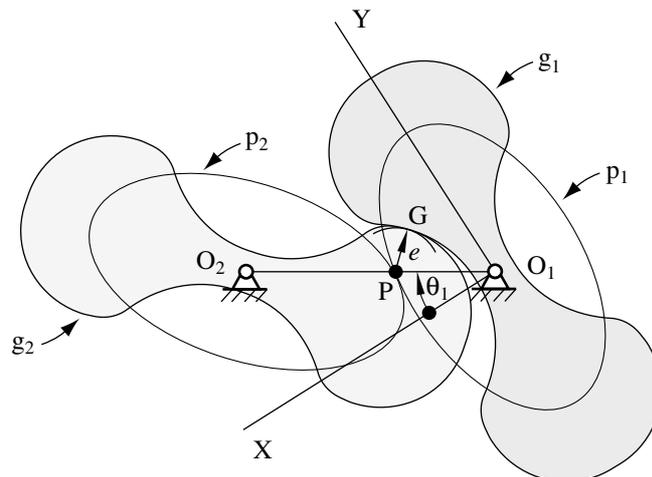


Figura 2.27 Curvas primitivas y perfil generado por la función de desviación [41]

Lozzi [43] estudió la curva base asociada con las curvas primitivas de un engranaje no circular; el autor obtuvo el perfil del diente por dos métodos: desenrollando una cuerda de la curva base y por el trazo del punto que se mueve a lo largo de una recta que gira sin deslizar sobre la curva base. Lozzi propuso cuatro posibles curvas base asociadas a la curva primitiva en función del método con que obtiene la línea de acción –figura (2.28); éstas se obtienen por la combinación de dos factores: i) el primer factor considera si la línea de acción forma un ángulo constante ya sea con la línea de centros –el autor lo denominó PAC– o con la tangente de la curva primitiva –PAT; en un engranaje circular se cumplen ambas definiciones; ii) el segundo factor considera el inicio de la línea de acción; en un engranaje circular la curva base

es tangente a la línea de acción en el punto de inicio –E– y el radio desde el centro de rotación al punto de inicio es normal a la línea de acción –N; las cuatro curvas que el autor obtuvo las denominó: i) PAC–E, ii) PAT–E, iii) PAC–N y iv) PAT–N. El perfil del diente del engranaje no circular lo obtuvo mediante un algoritmo computacional producto de una combinación de métodos numéricos y construcciones geométricas.

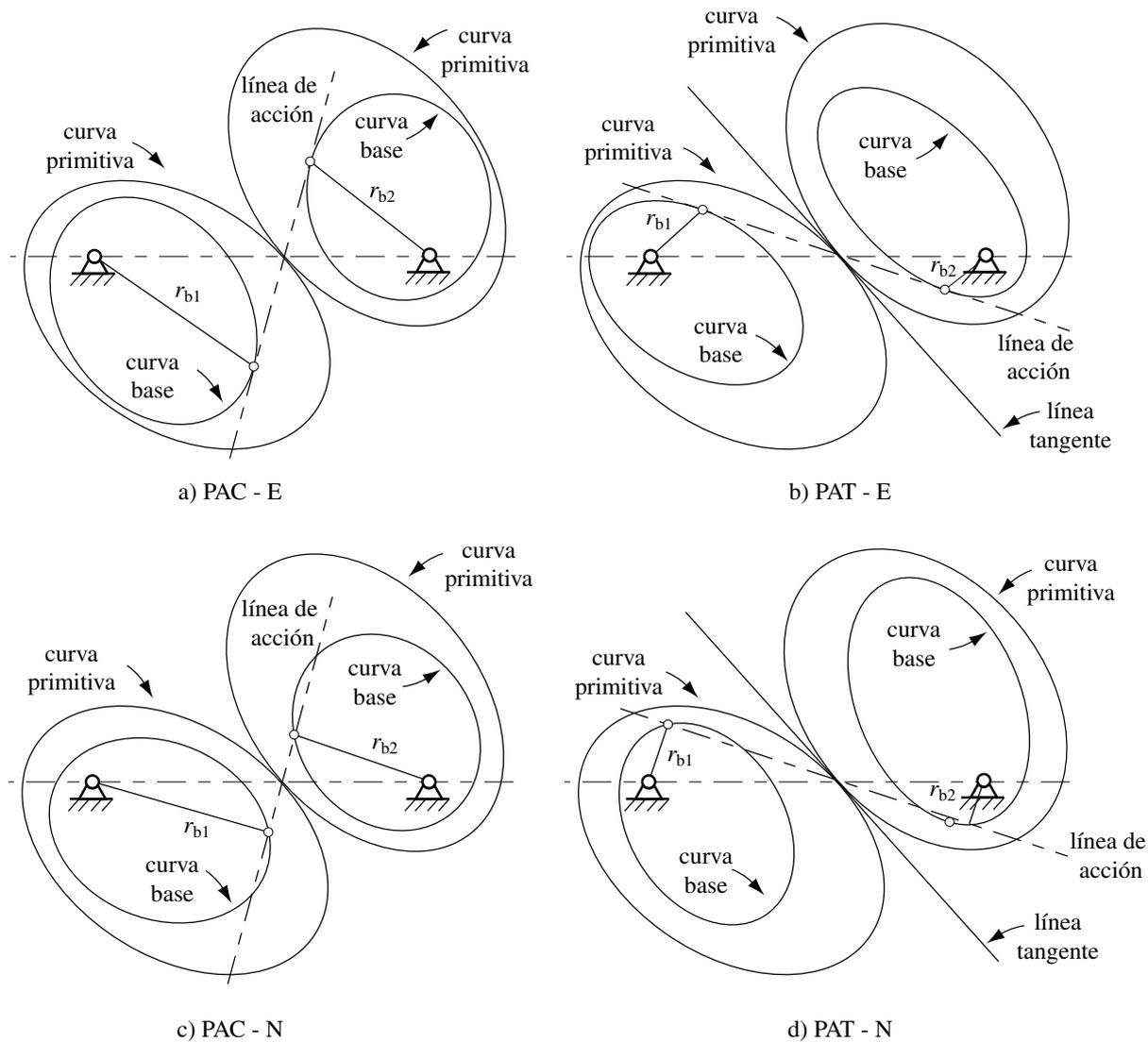


Figura 2.28 Curvas base de un engranaje no circular según Lozzi [43]

Litvin [1] obtiene la curva evoluta del flanco del diente de un engranaje no circular a partir de la curva evoluta de la curva primitiva. La figura (2.29) muestra la curva primitiva b-b, y su curva evoluta a-a. El punto  $C_i$  es el punto de la evoluta del flanco del diente. Litvin establece

que el radio de curvatura  $A_iC_i$  de la evoluta del flanco del diente y el radio de curvatura  $A_iB_i$  de la curva primitiva forman el ángulo  $\alpha$  y están relacionados por la expresión:

$$l_i = \rho_i \cos \alpha \tag{2.11}$$

siendo  $l_i = A_iC_i$  y  $\rho_i = A_iB_i$ .

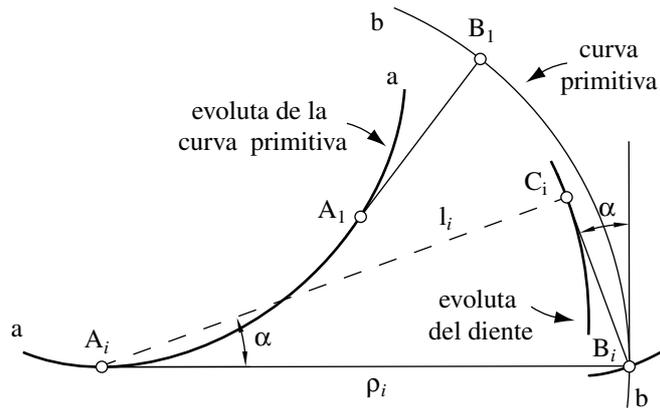


Figura 2.29 Curva evoluta del diente [1]

En el caso de un engranaje circular, la curva evoluta de ambos flancos es la curva base [1]. Los flancos derecho e izquierdo del diente de un engranaje no circular tienen diferente curva evoluta, tal como se presenta en la figura (2.30). El punto O es el centro de curvatura de la curva primitiva en el punto K; D e I son los puntos correspondientes de la curva evoluta del flanco derecho e izquierdo que contienen al punto K.

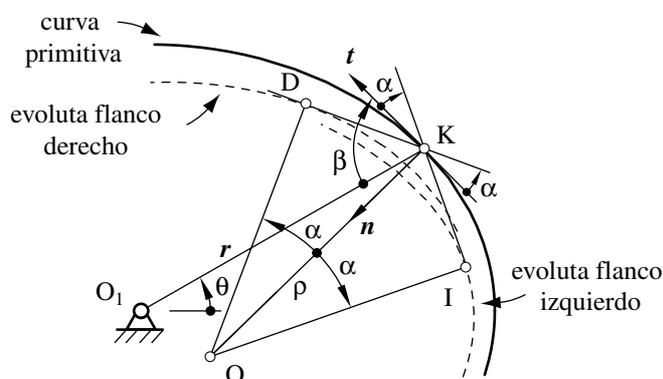


Figura 2.30 Curva primitiva, curva evoluta de ambos flancos del diente [1]

Figliolini y Angeles [44] obtienen la síntesis de las curvas bases de los engranajes elípticos de múltiples lóbulos, con perfil de diente evolvente, empleando un método similar al método con que se obtiene la circunferencia base de los engranajes circulares. En la figura (2.31) se observa un perfil de diente  $\tau$  de una rueda, circular o no circular, que se genera considerando la curva envolvente de la línea  $\eta$ , que es fija a la línea epicíclica  $\varepsilon$ , durante el movimiento de rodadura pura de  $\varepsilon$  sobre la curva primitiva no circular P.

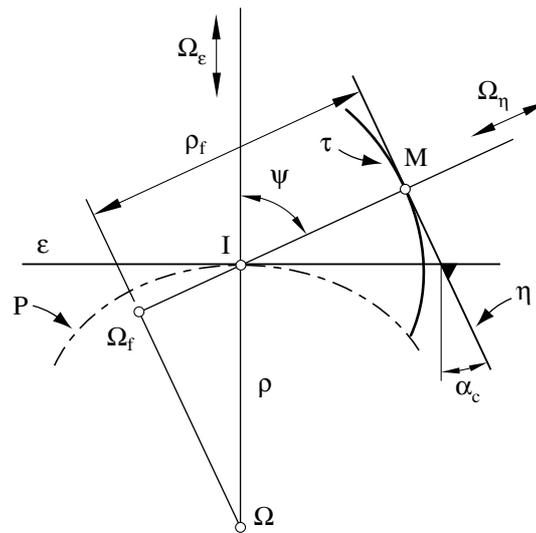


Figura 2.31 Curva evolventa del perfil [44]

Los autores obtienen la curva base como el lugar geométrico de los centros de curvatura  $\Omega_f$  del perfil del diente evolvente  $\tau$  con radio de curvatura  $\rho_f$ . La distancia  $I\Omega_f$ , que coincide con el radio de curvatura  $\rho_f$  del perfil de diente de evolvente cuando el punto M es coincidente con I, puede obtenerse mediante el teorema de Euler-Savary [45], dado por:

$$\left( \frac{1}{I\Omega_f} + \frac{1}{I\Omega_\eta} \right) \cos \psi = \frac{1}{\rho_\varepsilon} + \frac{1}{\rho} \quad (2.12)$$

siendo I el centro instantáneo de rotación relativo de la línea epicíclica  $\varepsilon$  sobre la curva primitiva P;  $\Omega_f$  es el centro de curvatura del perfil de diente;  $\Omega_\eta$  es el centro de curvatura del perfil conjugado  $\eta$ ;  $\rho$  y  $\rho_\varepsilon$  son, respectivamente, los radios de curvatura en el punto I de la curva primitiva P y de la línea epicíclica  $\varepsilon$ .

Teniendo en cuenta que  $\alpha_c = \pi/2 - \psi$  y que  $I\Omega_f = \rho_f$  cuando M coincide con I, y que  $\varepsilon$  y  $\eta$  son líneas rectas, es decir  $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$  y  $I\Omega_\eta \rightarrow \infty$ , la expresión (2.12) se simplifica en la siguiente:

$$\rho_f = \rho \sin \alpha_c \tag{2.13}$$

Wu y Chang [46] diseñan el perfil del diente para un engranaje elíptico por el desarrollo de una evolvente a partir de una curva base; los autores limitan la dimensión del diente por las curvas de addendum y dedendum apropiadas. Los autores concluyen que cada flanco del diente presenta una curva base diferente y éstas no son curvas elípticas.

Dooner [47] obtuvo la curva base al determinar el lugar geométrico cuyas tangentes pasan por los puntos de la curva primitiva; estas tangentes son las líneas de engranaje que varía su posición y orientación en cada punto de la curva primitiva de la rueda dentada. El autor utilizó la *ecuación diferencial de Clairaut* para determinar este lugar geométrico. La familia de curvas es la solución general de la ecuación diferencial y la curva tangente a esta familia de curvas es referida como la solución singular [47]. La familia de curvas  $f(x, y, \theta)$  se encuentran al girar al vector tangente de la curva primitiva, el ángulo de presión –figura (2.32). La familia de curvas viene dado por:

$$f(x, y, \theta) = 0 \tag{2.14}$$

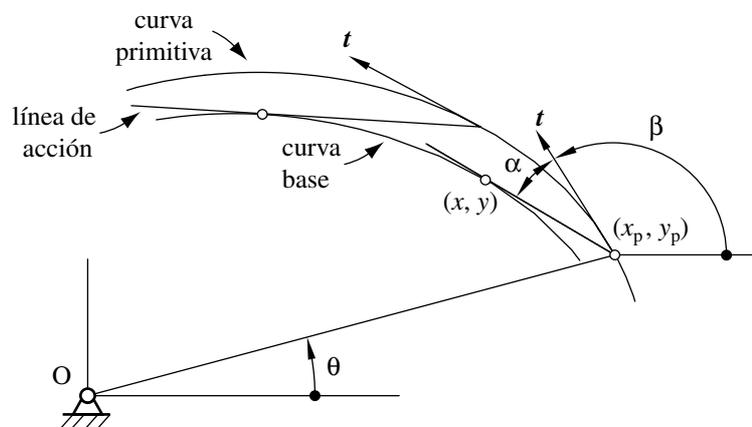


Figura 2.32 Curva envolvente de las líneas de engranaje (curva base) [47]

La familia de curvas debe diferenciarse con respecto al parámetro  $\theta$ :

$$\frac{\partial f(x, y, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.15)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2.14) y (2.15) se obtiene la ecuación paramétrica de la curva envolvente a las líneas de acción con que Dooner obtuvo la curva base –figura (2.32).

La mayor parte de estos trabajos parten de una forma geométrica de la curva primitiva, con lo cual no se puede garantizar la obtención de una ley de desplazamiento o relación de transmisión requerida. Mediante engranajes no circulares es posible obtener una ley de desplazamiento determinada que permita generar alguna función de forma continua y exacta o cumplir como etapa conductora de un mecanismo complejo que demande una cinemática de precisión, sin necesidad de mecanismos complejos de control.

Danieli [48] obtiene engranajes no circulares a partir de la relación de transmisión  $-\tau$  de un mecanismo articulado de cuatro eslabones. El autor propone un método para determinar el perfil del diente en una rueda de radio variable, caracterizado por un ángulo de presión constante, por medio de un procedimiento numérico, que integra la ecuación diferencial que describe el desplazamiento del punto de contacto a lo largo de la línea de acción durante el proceso de engrane. El proceso tiene un algoritmo que determina el cambio de signo en la derivada del radio para detener el proceso de generación; según el autor éste es el punto en el cual se producen los puntos singulares del perfil del diente, por su similitud con la condición en los engranajes circulares.

Cardona y Jordi [49] utilizaron la coordenada angular de la rueda conductora como coordenada independiente para elaborar un procedimiento analítico que genera las curvas primitivas y los perfiles de los dientes a partir de la ley de desplazamiento; como ejemplo diseñan un engranaje no circular que cumple una ley de desplazamiento dado por una curva de Bézier de orden 6 y con continuidad  $C^2$ . En el proceso de diseño, el perfil del diente se genera a partir de dos cremalleras de dientes rectos conjugadas –figura (2.33). Conceptualmente cada cremallera engrana con una rueda de tal manera que se mantiene la tangencia entre las cuatro curvas primitivas, mientras cada cremallera realiza el corte de la rueda correspondiente.

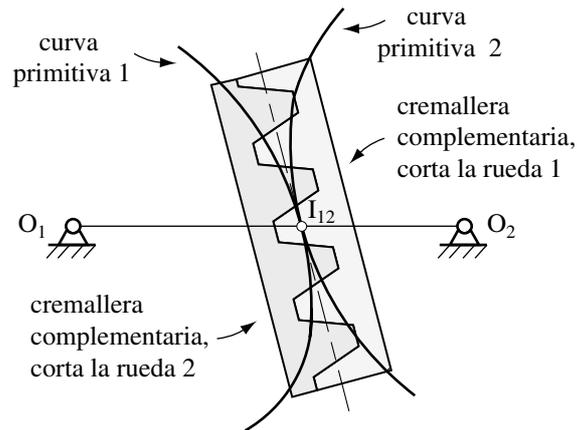


Figura 2.33 Cremalleras complementarias [49]

Danieli y Mundo [50] diseñan engranajes no circulares basados en el mismo proceso de [48] en los que el ángulo de presión para cada diente es constante pero, en su propuesta, varía entre diente y diente. Los autores diseñan un engranaje helicoidal no circular para incrementar el recubrimiento. El volumen primitivo de la rueda la obtuvieron por la extrusión de la curva primitiva, en la que los dientes envuelven este volumen, con una espiral dando los mismos beneficios que un engranaje helicoidal tradicional. Para lograr este objetivo, los autores obtienen un conjunto de secciones de cada rueda dentada con un plano normal al eje de rotación, en los que el ángulo de referencia para la generación de cada diente es compensado en cada sección.

Dooner [47] define como *función de transmisión* la relación entre la posición angular del eslabón de entrada y la correspondiente posición angular del eslabón de salida. En el proceso de diseño de los engranajes no circulares, Dooner utiliza la relación entre los desplazamientos angulares instantáneos de la salida que corresponden a los desplazamientos angulares instantáneos de la entrada. El autor obtiene el perfil del diente como la curva evolvente del punto de la cuerda que se desenrolla de una curva evoluta, la curva base. El método con el que el autor obtiene las curvas base se describió previamente.

Tsay y Fong [51] proponen utilizar series de Fourier en la aproximación, ya sea de la curva primitiva o de la relación de transmisión, en la fase de diseño de las curvas primitivas de los engranajes no circulares. Los autores obtienen el engranaje no circular en un proceso de simulación de corte por cremallera, similar al proceso desarrollado por Chang et al. [32].

Fanghella [52] presenta un método para la síntesis de engranajes no circulares que satisfacen una ley de movimiento dada; el método de síntesis se basa en la extensión del perfil cicloidal al caso de las curvas primitivas del engranaje no circular. La derivada de la ley de movimiento son funciones periódicas por lo que el autor propone utilizar la combinación lineal de funciones armónicas en la representación de la ley de movimiento. En su trabajo, el autor considera el ángulo de presión y el recubrimiento en la evaluación funcional del engranaje.

Arakawa y Emura [53] realizan un análisis del recubrimiento en los engranajes no circulares donde consideran tres tipos de recubrimientos: recubrimiento instantáneo, recubrimiento promedio y recubrimiento equivalente.

Barkah, Shafiq y Dooner [54] obtienen un algoritmo que genera el mallado del perfil de un diente de una rueda no circular para un análisis estático utilizando el método de los elementos finitos; los autores calculan los esfuerzos del filete del diente, bajo el criterio de Von Mises, para cada posición de giro del engranaje.

## 2.3 MANUFACTURA

Inicialmente, los engranajes no circulares se generaban mediante aplicaciones de máquinas que simulaban el engrane de la rueda no circular con la herramienta [1]. Un método tradicional de fabricación consiste en la utilización de fresas modificadas [55].

Olsson [28] dio algunos consejos para el corte del perfil del diente utilizando máquinas herramientas operadas manualmente. El autor utilizó una fresa madre para el corte de los dientes; en el proceso de corte, orientaba la fresa madre tangencialmente alrededor de la curva primitiva de la rueda.

Cunningham [56] implementó un control numérico a una cortadora de engranajes Fellows 72 para el corte de las ruedas dentadas de un engranaje no circular. También se utilizó un sistema rueda maestra y seguidor para sincronizar la herramienta respecto al disco –figura (2.34).

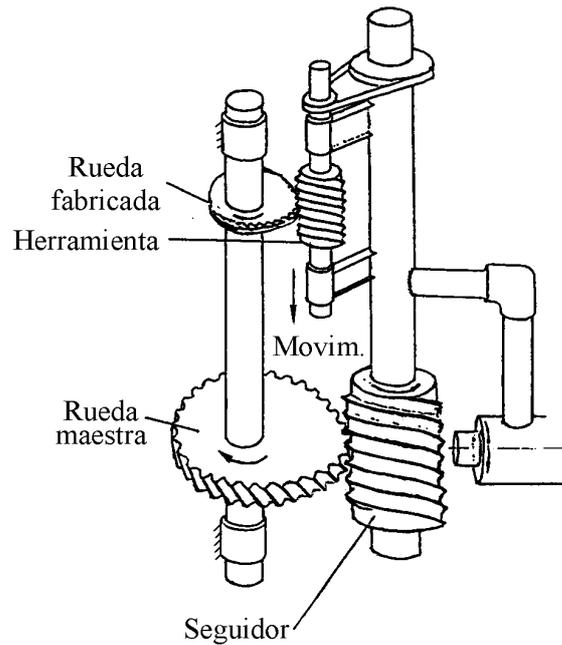


Figura 2.34 Sistema rueda maestra seguidor [55]

Holmes et al. [57] cortan los dientes de un engranaje elíptico utilizando una fresadora equipada con un cabezal divisor. El método utiliza una fresa de forma para el corte de los dientes en la que el disco es montado en su centro geométrico sobre un cabezal divisor. El cabezal divisor, especialmente preparado, controla el ángulo en el que el disco requiere ser reubicado para el corte de cada diente. La figura (2.35) muestra una máquina Fellow donde una rueda maestra 1 engrana con una cremallera maestra; en esta máquina, la cremallera 3 corta a la rueda 4.

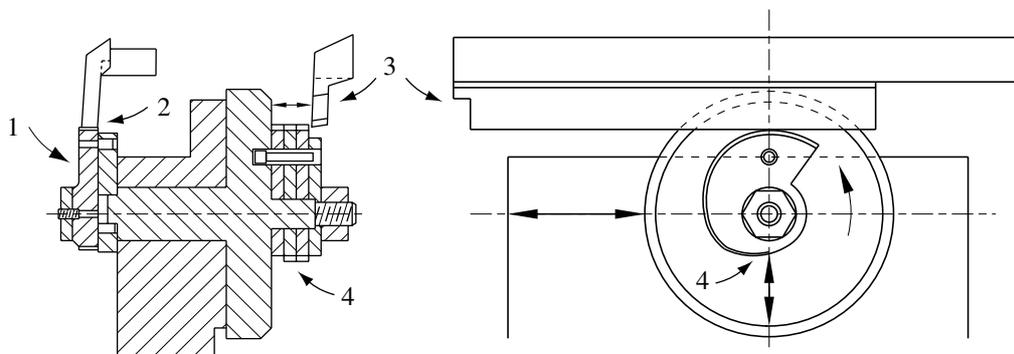


Figura 2.35 Generación de engranajes no circulares por aplicación de una rueda maestra no circular y una cremallera [1]

El equipo desarrollado por Bopp y Reuter –figura (2.36)– se basa en la simulación del engranaje de un tornillo sin fin no circular maestro –c– con un tornillo sin fin –f– que es idéntico a la fresa madre –d; la rueda no circular que se corta es designada por a; la leva –b– y el seguidor –e– forman el mecanismo de leva diseñado para la simulación de la distancia entre centros requerida. La principal dificultad de estos procesos fue la necesidad de manufacturar ruedas maestras no circulares. Un método de generación de ruedas no circulares que no necesita la aplicación de ruedas maestras, se obtiene por máquinas CNC.

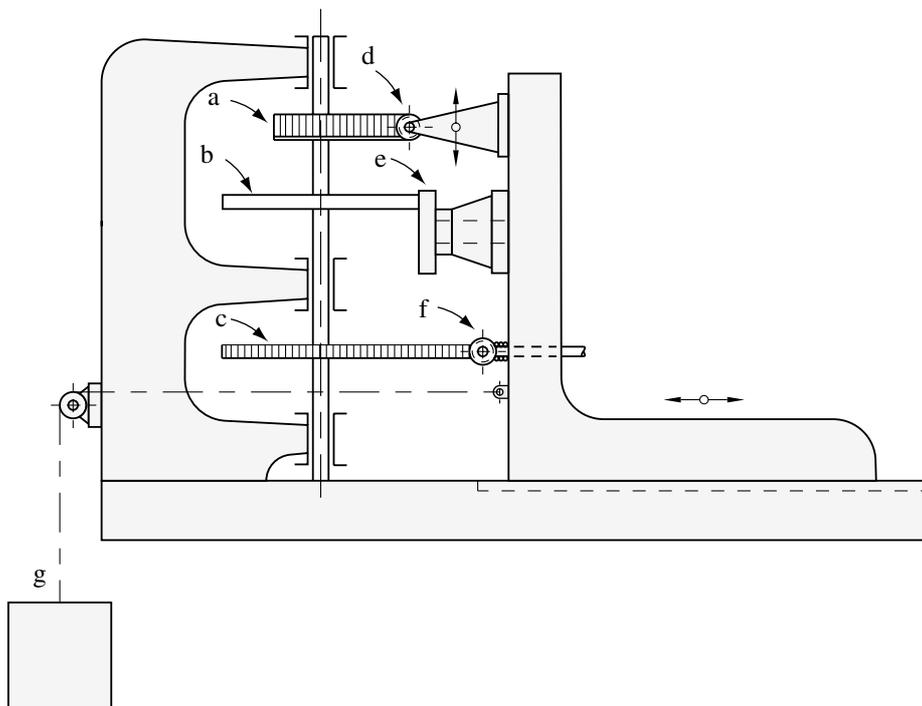


Figura 2.36 Generación por aplicación de un engranaje sin fin no circular [1]

Kuczewski [29] realizó la manufactura de las ruedas elípticas en un sistema convencional CAD/CAM y propuso este método para pequeñas cantidades debido al tiempo de operación. Sin embargo, el autor hizo énfasis en utilizar una máquina de electroerosión por hilo con CNC cuando se tienen otras formas de ruedas dentadas. Para producción continua, el autor propone fabricar una matriz en la máquina CNC para el proceso de conformado de metalurgia de polvo. También recomienda utilizar la fabricación por inyección para engranajes plásticos.

Egge [58] utilizó un engranaje elíptico en un motor stirling con el fin de disminuir las pérdidas por fricción en el mecanismo; para el corte de las ruedas elípticas implementó una

rutina en MasterCam que describe la rueda para su posterior corte en una máquina de electroerosión por hilo –figura (2.37).

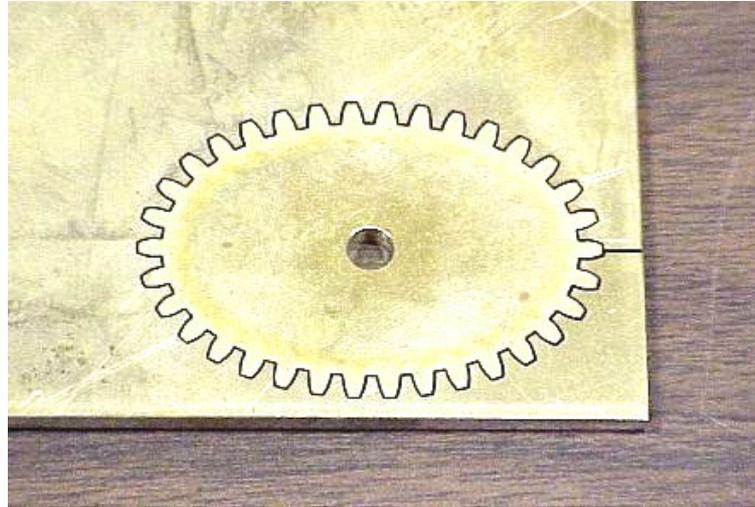


Figura 2.37 Corte de los dientes de una rueda elíptica utilizando una máquina de electroerosión por hilo [58]

Danieli [48] fabricó sus engranajes no circulares en una fresadora CNC. Cardona y Jordi [49] realizaron la manufactura de unos engranajes no circulares en un centro de mecanizado CNC –figura (2.38).

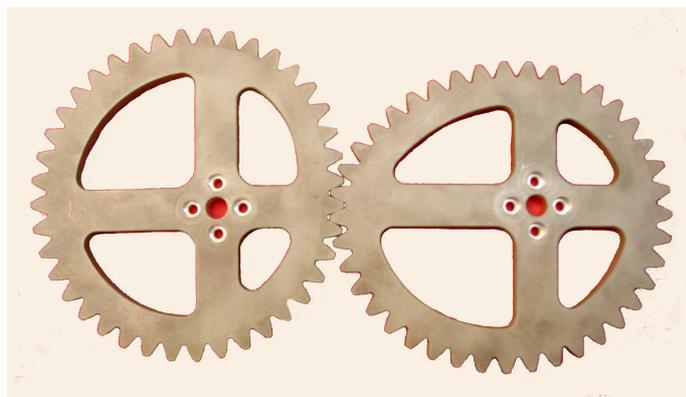


Figura 2.38 Ruedas mecanizadas por CNC [49]

Danieli y Mundo [50] en el proceso de manufactura de los engranajes elípticos helicoidales, primero diseñan el engranaje helicoidal no circular, después generan el sólido con un programa CAD, Pro-Engineer, y utilizan una máquina de prototipaje rápido para obtener las ruedas dentadas –figura (2.39).

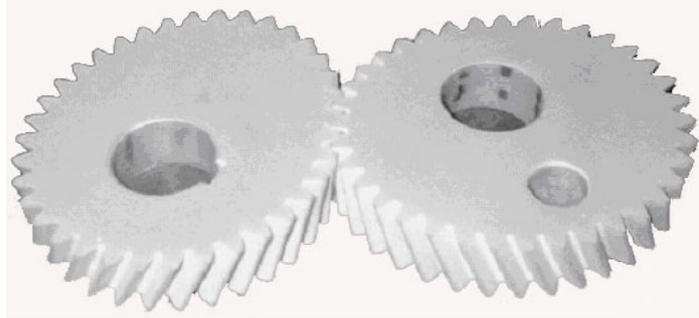


Figura 2.39 Ruedas helicoidales no circulares construidas por una máquina de prototipaje rápido [50]

Dooner [14] integra el diseño con la manufactura mediante un programa computacional *INGEAR* desarrollado por Dooner y Seireg [55]; con este programa, el autor codificó los archivos requeridos para el corte de los dientes en un torno de control numérico y en una máquina de prototipaje rápido –figura (2.40).

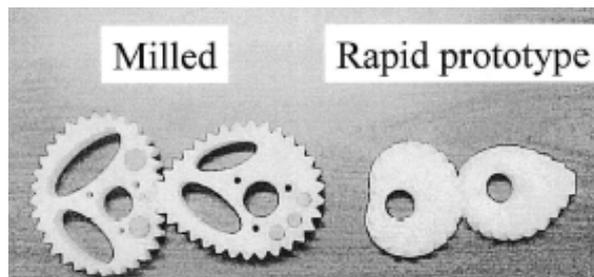


Figura 2.40 Prototipaje rápido y CNC [14]