



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## CAPÍTULO 3

### LEYES DE DESPLAZAMIENTO Y CURVAS PRIMITIVAS

El diseño de un engranaje no circular, entendido como el proceso de definir las curvas primitivas y posteriormente generar el perfil completo del diente, tiene como punto de partida tres posibilidades [27]: i) se conocen las expresiones polares de las curvas primitivas, ii) se conoce la relación entre las posiciones angulares de las ruedas y iii) se conoce la relación de velocidades angulares; en las tres alternativas también se requiere la distancia entre centros. Las alternativas de diseño ii) y iii) son equivalentes y se obtienen mediante la derivación o integración de la otra.

La mayor parte de los trabajos publicados sobre el diseño de engranajes no circulares están relacionados con la primera alternativa, en concreto con el diseño y aplicación de las ruedas elípticas y las excéntricas; sin embargo, este diseño no garantiza el cumplimiento de una relación deseada entre las posiciones o las velocidades angulares de la rueda conductora y conducida.

Mediante engranajes no circulares es posible obtener una ley de desplazamiento determinada, relación entre el ángulo de giro del eslabón conducido y el ángulo de giro del eslabón conductor de un mecanismo, que permita generar alguna función de forma continua y exacta o cumplir como etapa conductora de un mecanismo complejo que demande una cinemática de precisión, sin necesidad de mecanismos complejos de control. Por este motivo, en este trabajo se utiliza la segunda alternativa como punto de partida para el diseño de la curva primitiva y de los dientes del engranaje no circular.

En este capítulo se analizan algunas leyes de desplazamiento y se presentan las curvas primitivas de las ruedas que en su engrane cumplen estas leyes de desplazamiento. Después de definir la ley de desplazamiento, es necesario obtener las curvas primitivas del engranaje y calcular algunos de sus parámetros que la caracterizan: radio de curvatura, vector tangente y

longitud. Para esto se implementa un proceso analítico que utiliza el ángulo de giro de la rueda conductora como única variable independiente de entrada.

La continuidad de la ley de desplazamiento afecta significativamente al radio de curvatura de la curva primitiva. Valores grandes del radio de curvatura se corresponden con regiones planas en la geometría de la curva primitiva; cambios del radio de curvatura entre valores positivos y negativos producen cambios de concavidad en la geometría de la curva primitiva lo que puede presentar inconvenientes en el proceso de corte con cremallera. En este capítulo se presenta el radio de curvatura de la curva primitiva de ambas ruedas en función de la ley de desplazamiento y sus derivadas. De esta forma se justifican las condiciones en las que se presentan cambios de curvatura o curvaturas infinitas a partir de la ley de desplazamiento del engranaje.

### 3.1 LEY DE DESPLAZAMIENTO DE UN ENGRANAJE NO CIRCULAR

En la figura (3.1) se muestran las curvas primitivas de dos ruedas no circulares que giran en direcciones opuestas alrededor de sus respectivos centros de rotación  $O_1$  y  $O_2$  y con una distancia entre centros  $-d-$  que es un parámetro conocido. En el apartado (3.7) se obtienen las expresiones de las curvas primitivas que satisfacen una ley de desplazamiento requerida; en la figura (3.1) se representan las variables que se utilizan en estos modelos. Para el modelo se definen los sistemas coordenados  $O_1X_1Y_1$  y  $O_2X_2Y_2$  fijos, respectivamente, a las ruedas 1 y 2.

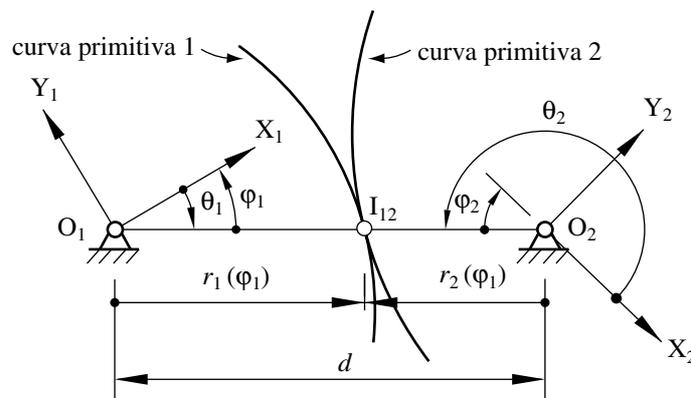


Figura 3.1 Sistemas coordenados

Es necesario diferenciar entre el ángulo de giro  $-\varphi_1$  de la rueda conductora y la variable  $\theta_1$ , coordenada polar que determina la posición del centro instantáneo de rotación con respecto a la rueda 1. Por ejemplo, si se toma al eje  $X_1$  en la dirección  $O_1O_2$  para  $\varphi_1 = 0$  rad, los ángulos  $\varphi_1$  y  $\theta_1$  son iguales pero de sentido contrario. La misma diferencia se establece para las variables  $\varphi_2$  y  $\theta_2$ ; estas variables están relacionadas mediante  $\theta_2 = \pi + \varphi_2$ .

En un engranaje no circular, la ley de desplazamiento es una función  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ , siendo  $\varphi_1$  el ángulo de giro de la rueda conductora y  $\varphi_2$  el ángulo de giro, en sentido contrario, de la rueda conducida y se toma  $f(0) = 0$ . La continuidad de esta función queda garantizada dentro del intervalo de definición si se elige adecuadamente.

La primera derivada de la ley de desplazamiento puede ser una función periódica, con lo que se obtienen ruedas dentadas de geometría cerrada, o ser válidas solo durante un ciclo; éstas últimas generalmente producen ruedas dentadas con geometría abierta –ver figura (2.2).

En primer lugar se analizan leyes de desplazamiento que correspondan al caso en que ambas ruedas, conductora y conducida, tienen el mismo periodo de rotación con lo que se cumple  $(\varphi_2 + 2\pi k) = f(\varphi_1 + 2\pi k)$ , siendo  $k$  un número entero. Así pues, puede diseñarse libremente la ley de desplazamiento en el intervalo  $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq 2\pi \text{ rad}$  y extender la definición para vueltas sucesivas de la rueda conductora mediante la siguiente expresión, equivalente a una definición por tramos en los intervalos  $2\pi k \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq 2\pi(k+1) \text{ rad}$ :

$$\varphi_2 = 2\pi \text{Mod}[\varphi_1, 2\pi] + f_{\text{diseño}}(\text{Residue}[\varphi_1, 2\pi]) \quad (3.1)$$

siendo *Mod* la parte entera entre  $\varphi_1$  y  $2\pi$  y *Residue* el resultado después de restarle la parte entera.

La función de diseño debe ser monótona creciente y con continuidad en su primera derivada,  $C^1$ , como mínimo, aunque siempre es preferible al menos continuidad  $C^2$ . Con una función monótona creciente se evitan formas indeseadas de la curva primitiva, un cambio de giro en la rueda conducida y un radio negativo de las curvas primitivas. Estas condiciones se obtienen dentro del intervalo de definición  $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq 2\pi \text{ rad}$  eligiendo adecuadamente las funciones de diseño. Debe garantizarse también la continuidad en los puntos de unión de los tramos adyacentes; esto se cumple si:

$$f_{\text{diseño}}(2\pi) = 2\pi; \quad \frac{d^k}{d\varphi_1^k} f_{\text{diseño}}(0) = \frac{d^k}{d\varphi_1^k} f_{\text{diseño}}(2\pi) \quad (3.2)$$

siendo  $k$  el grado de continuidad requerido.

La relación de transmisión  $\tau$ , relación entre la velocidad angular de la rueda conducida y la velocidad angular de la rueda conductora, usada habitualmente en los engranajes, se obtiene a partir de la ley de desplazamiento:

$$\tau(\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{df(\varphi_1)}{d\varphi_1} = f'(\varphi_1) \quad (3.3)$$

El signo ' representa la derivada con respecto a la variable  $\varphi_1$ . En la expresión (3.3), las variables  $\omega_1$  y  $\omega_2$  representan, respectivamente, las velocidades angulares de la rueda conductora y conducida.

Para los casos en que los periodos de rotación de la rueda conductora y conducida son diferentes, en las que  $n$  vueltas de la rueda conductora coinciden con  $m$  vueltas de la rueda conducida, se define inicialmente la función  $f_{\text{diseño}}(\varphi_1)$ , función con la continuidad apropiada y monótona creciente en el intervalo  $0 \leq \varphi_1 < 2\pi/m$  con rango  $0 \leq \varphi_2 < 2\pi/n$ , y posteriormente se establece la siguiente relación:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) = (2\pi/n) \text{Mod}[\varphi_1, 2\pi/m] + f_{\text{diseño}}(\text{Residue}[\varphi_1, 2\pi/m]) \quad (3.4)$$

Al reemplazar en la expresión (3.4),  $\varphi_1 = 2\pi n$ , que corresponde con el caso en que la rueda conductora da  $n$  vueltas, se obtiene  $\varphi_2 = 2\pi m$  lo que equivale a  $m$  vueltas de la rueda conducida.

Se obtienen ruedas de geometría cerrada y se garantiza la continuidad en los puntos de unión de los tramos adyacentes, si la función de diseño cumple:

$$f_{\text{diseño}}(2\pi/m) = 2\pi/n; \quad \frac{d^k}{d\varphi_1^k} f_{\text{diseño}}(0) = \frac{d^k}{d\varphi_1^k} f_{\text{diseño}}(2\pi/m) \quad (3.5)$$

siendo  $k$  el grado de continuidad requerido.

En los siguientes apartados se analizan algunas leyes de desplazamiento; en este caso se utilizan funciones armónicas, curvas de Bézier no paramétricas y curvas B-spline no paramétricas. Debido a la gran cantidad de trabajos relacionados con el diseño de engranajes elípticos, se plantean las expresiones que permiten obtener su ley de desplazamiento tomando como parámetros de diseño la distancia entre sus puntos focales y la longitud del semieje mayor; estas expresiones se obtienen a partir de su geometría y de relaciones cinemáticas. Finalmente se estudia un ejemplo de una ley de desplazamiento de un engranaje con una relación de periodos de rotación doble utilizando una curva de Bézier no paramétrica de grado 6 y continuidad  $C^3$ .

Para cada una de las leyes de desplazamiento estudiadas se presenta la relación de transmisión  $-\tau(\varphi_1)$  por su importancia cinemática y dinámica. Se presentan la segunda y tercera derivada de la ley de desplazamiento con respecto a  $\varphi_1$  por su influencia en el radio de curvatura de la curva primitiva, tema de estudio del apartado (3.8).

### 3.2 CURVAS ARMÓNICAS

Las propiedades de las funciones armónicas permiten satisfacer plenamente los requerimientos de continuidad y monotonía creciente de las leyes de desplazamiento. Se obtiene una función monótona creciente y se cumple con la condición  $(\varphi_2 + 2\pi k) = f(\varphi_1 + 2\pi k)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  si se define una ley de desplazamiento como la suma de  $\varphi_1$  y de una función periódica de  $\varphi_1$ , por ejemplo:

$$f(\varphi_1) = \varphi_1 + A \sin(\varphi_1) \quad (3.6)$$

siendo  $A$  la amplitud de la función seno. Con esta definición, la ley de desplazamiento es continua e infinitamente derivable por lo que presenta todo tipo de ventajas desde el punto de vista dinámico. Para satisfacer la condición de función creciente, su primera derivada debe ser positiva; esta condición se satisface si la amplitud de la función seno es menor a la unidad  $-|A| < 1$  ya que  $f'(\varphi_1) = 1 + A \cos(\varphi_1)$ .

Las leyes de desplazamiento definidas mediante funciones armónicas presentan el inconveniente de tener un único parámetro de diseño, la amplitud  $A$  de la función seno, lo que

limita la posibilidad de satisfacer cualquier ley de desplazamiento o velocidad angular entre las ruedas conductora y conducida.

En la figura (3.2) se presentan la ley de desplazamiento, la relación de transmisión y la segunda y tercera derivada de la ley de desplazamiento que se obtienen a partir de la curva armónica –dada por (3.6)– con una amplitud  $A=0,6$ .

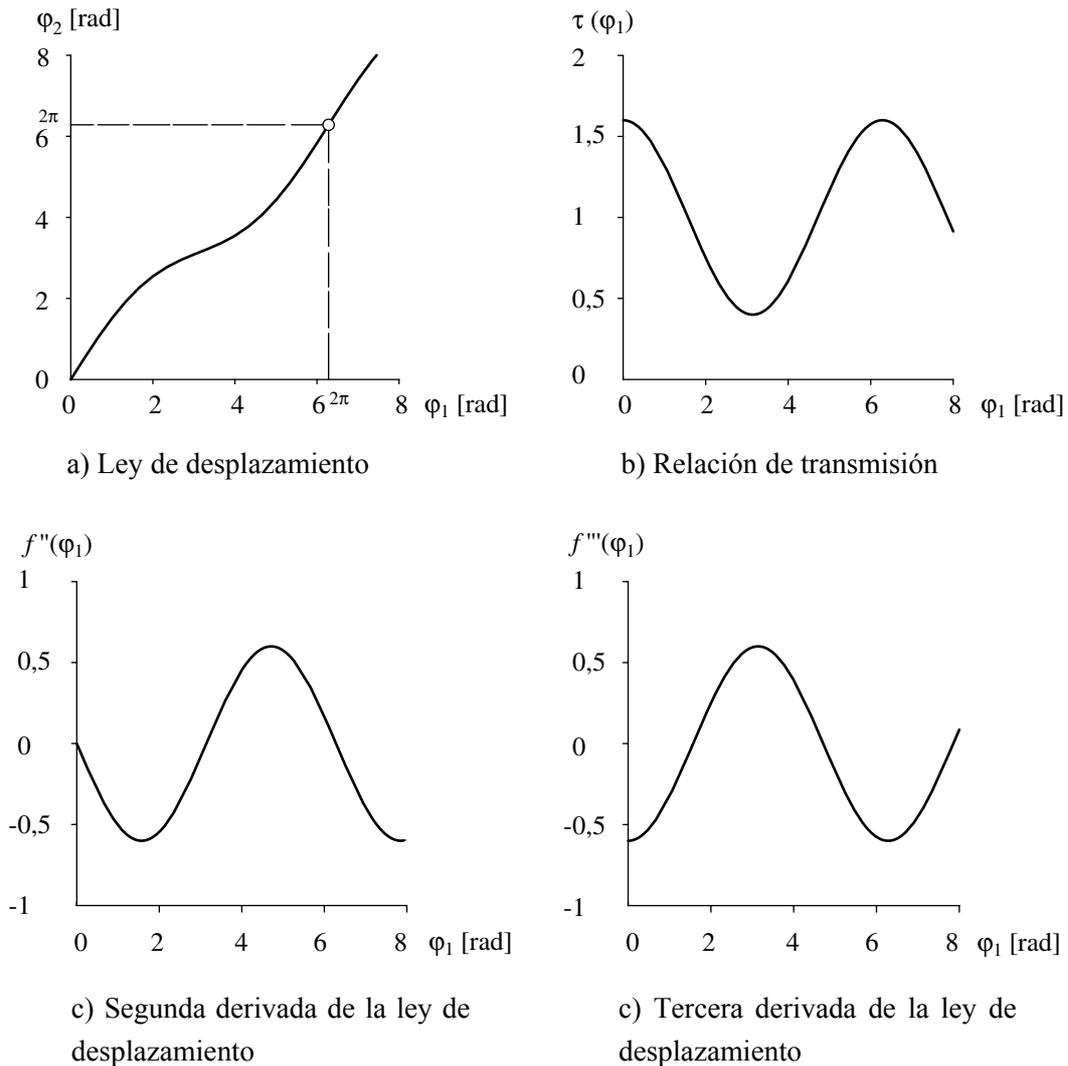


Figura 3.2 Curvas cinemáticas para la curva armónica

### 3.3 CURVAS DE BÉZIER NO PARAMÉTRICAS

Las curvas de Bézier no paramétricas –funciones polinómicas definidas sobre la base de los polinomios de Bernstein– son una alternativa a la utilización de funciones polinómicas

definidas sobre la base monomial. La sencillez en la especificación de condiciones de continuidad y su definición intuitiva las hacen muy útiles en el diseño de leyes de desplazamiento de engranajes no circulares [59].

Un polinomio  $b(u)$  de grado  $n$  se expresa en la base de monomios o canónica  $(1, u, u^2, u^3, \dots)$  como la combinación lineal:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \quad (3.7)$$

donde  $a_i$  son los coeficientes del polinomio en la base de monomios.

Esta base no resulta recomendable en la definición de curvas por tramos por los siguientes motivos [59]:

- Problemas de estabilidad numérica, especialmente si  $n$  es elevado. Pequeños errores en el cálculo de los coeficientes, inevitables en cálculos numéricos, dan origen a variaciones inaceptables del valor de la función fuera del entorno  $u=0$  y a discontinuidades en las uniones.
- Los coeficientes  $a_i$  no tienen ningún significado geométrico. Una modificación de un coeficiente no produce ningún efecto intuitivo sobre la forma de la función  $b(u)$ .
- La imposición de condiciones de continuidad en la unión entre dos curvas no es trivial, ya que involucra todos los coeficientes de una de ellas, incluso en el caso de continuidad  $C^0$ .

Se propone diseñar leyes de desplazamiento, para el caso en que los periodos de rotación de ambas ruedas son coincidentes, utilizando curvas de Bézier no paramétricas para solucionar los problemas mencionados de la base monomial. Las funciones que se obtienen están definidas únicamente en un intervalo por lo que es necesario garantizar la continuidad entre tramos adyacentes; en el interior del intervalo la continuidad queda garantizada por tratarse de funciones polinómicas.

Una curva de Bézier de grado  $n$  se obtiene a partir de los *polinomios de Bernstein* que constituyen una base. Sobre un dominio unitario, los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son [59, 60]:

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{donde } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3.8)$$

La curva de Bézier se define como:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad \text{con } u \in [0, 1] \quad (3.9)$$

donde los  $n+1$  coeficientes  $b_i$  se denominan ordenadas de Bézier. Para cada ordenada  $b_i$  se define un punto  $\mathbf{b}_i$  de coordenadas  $(i/n, b_i)$  denominado punto de control y el conjunto de los puntos de control definen el *polígono de control* de la curva.

La utilización de las curvas de Bézier para definir una ley de desplazamiento  $f(\varphi_1)$  de la variable independiente  $\varphi_1$  entre 0 rad y  $2\pi$  rad,  $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ , y el hecho de que las curvas de Bézier  $b(u)$  se definan en un dominio unitario  $u \in [0, 1]$ , hace que se utilice un cambio lineal de variable. La variable  $u$  se relaciona con el ángulo girado por la rueda conductora mediante:

$$u = \frac{\varphi_1}{2\pi} \quad (3.10)$$

La derivada con respecto a  $u$  –  $b'(u)$  – de un polinomio  $b(u)$  de grado  $n$  es un polinomio de grado  $n-1$ . En la base de Bernstein, se puede comprobar que los coeficientes  $b'_i$  de la derivada se obtienen como [59]:

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

En la figura (3.3) se presenta como ejemplo la derivada de una curva cúbica ( $n = 3$ ), que es una curva parabólica.

La derivada  $b'(u)$ , en  $u = 0$  y en  $u = 1$ , se calcula mediante:

$$b'(0) = b'_0 = n(b_1 - b_0); \quad b'(1) = b'_{n-1} = n(b_n - b_{n-1}) \quad (3.12)$$

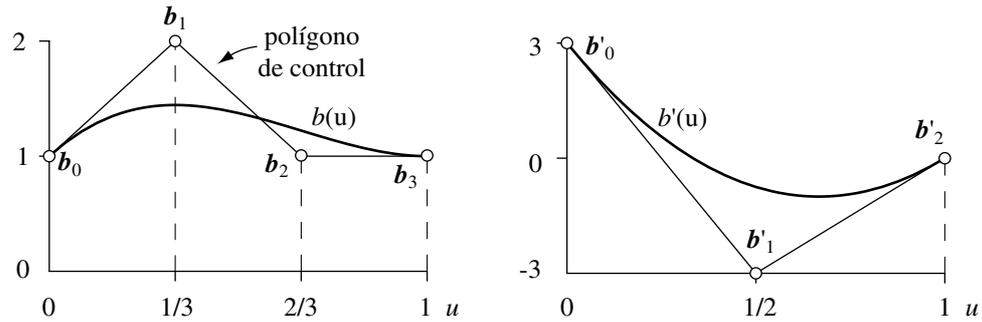


Figura 3.3 Derivada de una curva de Bézier no paramétrica (grado  $n = 3$ ) [59]

La relación entre la derivada  $f'(u)$  con respecto a  $u$  y la derivada  $f'(\varphi_1)$  con respecto a  $\varphi_1$  es:

$$f'(\varphi_1) = f'(u)u'(\varphi_1) = \frac{f'(u)}{2\pi} \tag{3.13}$$

La continuidad de la ley de desplazamiento entre tramos adyacentes queda garantizada por la selección de los puntos de control de la curva de Bézier. Si se impone que la continuidad sea  $C^2$  las ordenadas  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  de una curva de Bézier de grado  $n$ , deben hacer cumplir:

- Las condiciones de periodicidad y de continuidad  $C^0$ ; éstas se satisfacen si se cumple:

$$b(0) = 0; \quad b(2\pi) = 2\pi \tag{3.14}$$

En los extremos del intervalo de definición, hay un único polinomio de la base de polinomios de Bernstein de valor no nulo [59, 60]; el valor de la curva de Bézier en estos extremos se define por las ordenadas  $b_0$  y  $b_n$ , por lo que se tiene:

$$b_0 = 0; \quad b_n = 2\pi \tag{3.15}$$

- La condición de continuidad  $C^1$ ; ésta se satisface si adicionalmente se cumple:

$$b'(0) = b'(2\pi) \tag{3.16}$$

De la combinación de las expresiones (3.12) y (3.13) se obtiene:

$$b'(0) = b'_0 = \frac{n}{2\pi}(b_1 - b_0); \quad b'(2\pi) = b'_{n-1} = \frac{n}{2\pi}(b_n - b_{n-1}) \quad (3.17)$$

De las dos últimas expresiones se obtiene la condición entre las primeras y últimas ordenadas de los puntos de control con las que se satisface la condición de continuidad  $C^1$ :

$$b_1 - b_0 = b_n - b_{n-1} \quad (3.18)$$

- La condición de continuidad  $C^2$ ; ésta se satisface si adicionalmente se cumple:

$$b''(0) = b''(2\pi) \quad (3.19)$$

La segunda derivada de una curva de Bézier de grado  $n$  es otra curva de Bézier de grado  $n-2$ ; las ordenadas del nuevo vector de control  $-b''_i-$  se obtienen a partir de las ordenadas del vector de control de la primera derivada de la curva de Bézier  $-b'_i-$  mediante la combinación de las expresiones (3.12) y (3.13). Después de organizar términos se obtiene la segunda derivada de la curva de Bézier en los extremos:

$$b''(0) = b''_0 = \frac{n-1}{2\pi}(b'_1 - b'_0); \quad b''(2\pi) = b''_{n-2} = \frac{n-1}{2\pi}(b'_{n-1} - b'_{n-2}) \quad (3.20)$$

Reemplazando los coeficientes  $b'_i$  por los coeficientes  $b_i$  en la expresión (3.20), se obtiene:

$$b''(0) = b''_0 = \frac{n-1}{2\pi} \left( \frac{n}{2\pi}(b_2 - b_1) - \frac{n}{2\pi}(b_1 - b_0) \right) = \frac{n(n-1)}{(2\pi)^2} (b_2 - 2b_1 + b_0) \quad (3.21)$$

$$b''(2\pi) = b''_{n-1} = \frac{n-1}{2\pi} \left( \frac{n}{2\pi}(b_n - b_{n-1}) - \frac{n}{2\pi}(b_{n-1} - b_{n-2}) \right) = \frac{n(n-1)}{(2\pi)^2} (b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2})$$

De la combinación de las expresiones (3.19) y (3.21) se obtiene la condición adicional con la que se satisface la continuidad  $C^2$ :

$$b_2 - 2b_1 + b_0 = b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} \quad (3.22)$$

En la figura (3.4) se muestra la curva de Bézier de grado 6 que se obtiene tomando el conjunto de ordenadas  $\{b_i\} = \{0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,8, 0,9, 1,0\} 2\pi$  que cumple la condición de

continuidad  $C^2$  entre tramos adyacentes. Así mismo, en la misma figura se muestra la relación de transmisión resultante y la segunda y tercera derivadas de la ley de desplazamiento.

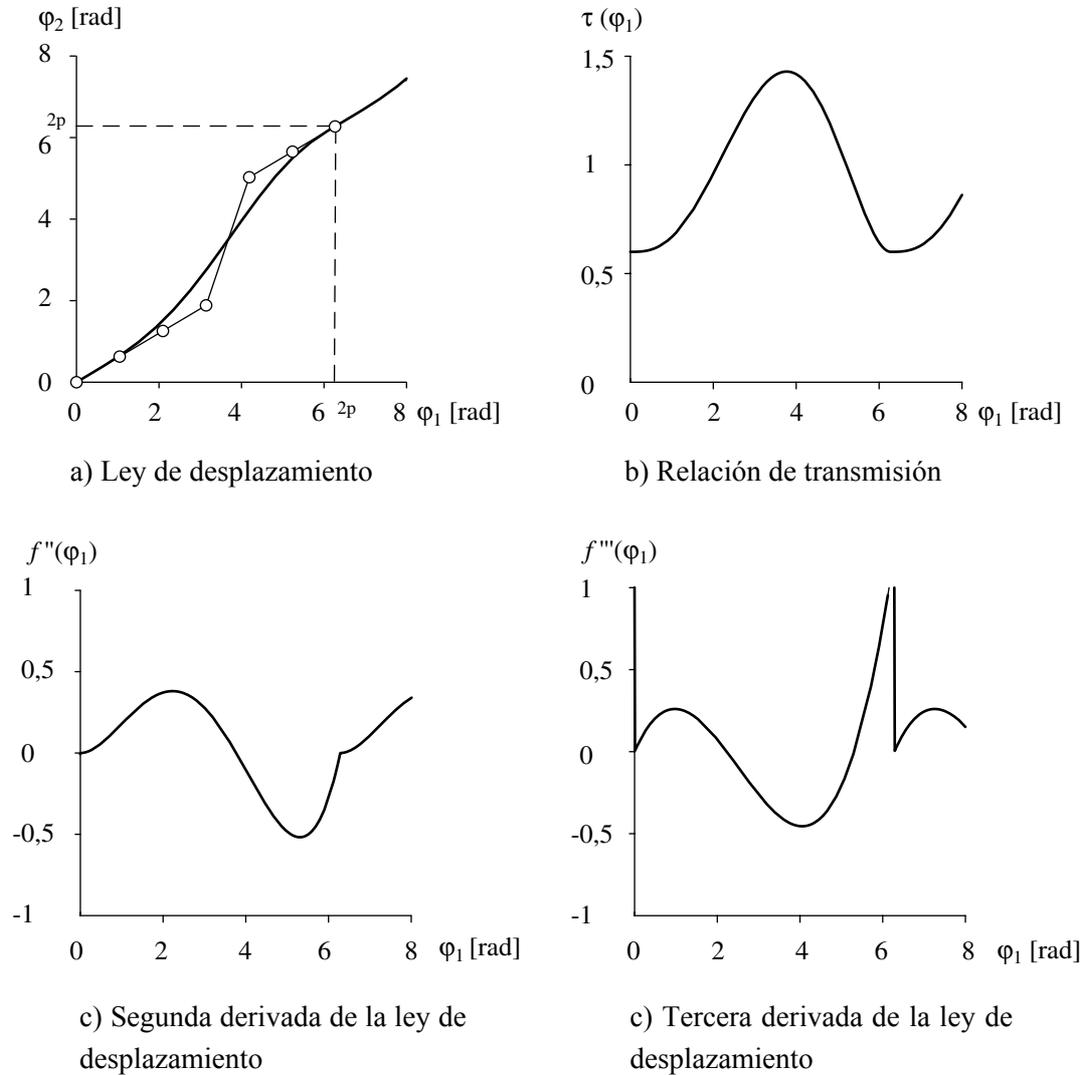


Figura 3.4 Curvas cinemáticas para la función de Bézier

La función de Bézier que se obtiene con los puntos de control elegidos, solo tiene continuidad  $C^2$ . Por esta razón, la tercera derivada de la ley de desplazamiento es discontinua en  $\varphi_1 = 0$  rad y en  $\varphi_1 = 2\pi$  rad; esta característica afecta la continuidad del radio de curvatura de las ruedas dentadas tal como se estudiará en el apartado (3.8).

### 3.4 CURVA B-SPLINES NO PARAMÉTRICA

Un spline clásico de orden  $n+1$  es una curva que se define a partir de  $m$  tramos polinomiales, cada uno de grado  $n$ , que se unen en sus extremos de tal manera que la curva resultante tiene continuidad  $C^{n-1}$  en estos puntos [61]. Los puntos extremos de cada tramo polinomial se denominan nodos. Un spline en el intervalo  $[u_a, u_b]$  tiene dos nodos no internos y  $m-1$  nodos internos  $-u_{c,i}-$  situados entre  $u_a < u_{c,i} < u_b$  con  $i = 1, 2, \dots, m-1$ .

La definición de un spline requiere conocer  $m \cdot (n+1)$  coeficientes que se obtienen al imponer:

- a) Condiciones de continuidad en los nodos internos. De la condición de continuidad  $C^{n-1}$  en todos los nodos internos, se obtienen  $(m-1) \cdot (n)$  condiciones de continuidad.
- b) Condiciones de paso (situación de los nodos internos). La condición de continuidad impone que los extremos de los tramos coincidan sin especificar donde. La ubicación de los nodos internos impone  $m-1$  condiciones de paso.
- c) Condiciones de contorno. Al establecer la posición de los nodos externos, 2 condiciones, quedan  $m(n+1) - ((m-1)(n) + (m-1) + 2) = n-1$  condiciones que se utilizan para determinar las derivadas de los nodos extremos.

La distribución de condiciones se puede modificar siempre y cuando se conserve el número de condiciones. Los splines tienen la ventaja de ser fáciles de entender y las condiciones que se imponen son relativamente fáciles de implementar. Sin embargo, presentan algunos inconvenientes derivados de las bases monomiales [61]:

- a) Son monótonamente crecientes en todo el intervalo de definición, excepto el de grado 0; así pues se pueden presentar problemas numéricos debido a grandes valores.
- b) El cambio de una condición afecta, en principio, a todo el spline.
- c) El aumento del número de condiciones impuestas, grado de libertad de diseño, se consigue aumentando el grado de los polinomios para un mismo número de tramos y nodos internos; esto aumenta el inconveniente a).

Las curvas B-spline no paramétricas son polinomios que se obtienen cuando se utiliza una base de polinomios B-spline  $N_i^k$ ; cada base es de grado  $n$  [61]:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{m+1} b_i N_i^k(u); \quad u_a \leq u \leq u_b \quad (3.23)$$

siendo  $b_i$  las ordenadas de los  $m+1$  vértices del polígono de control; estos vértices son los puntos de control.

Las bases  $N_i^k$  se determinan por una formulación recurrente [61]:

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$N_i^k(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u)$$

$$k = 2, \dots, n+1; \quad i = 1, \dots, (m+1)+(n+1) - k \quad (3.24)$$

En esta formulación se adopta el convenio  $0/0=0$  [61].

Los elementos  $u_i$  son elementos de un vector de nodos que satisfacen  $u_i \leq u_{i+1}$ . Un nodo puede estar repetido  $r$  veces y se le denomina de multiplicidad  $r$ . El número total de nodos debe ser  $(m+1)+(n+1)$  [61], siendo  $(m+1)$  el número de puntos de control.

Una curva B-spline es un spline polinomial de grado  $n$  que satisface las siguientes condiciones [61]:

- Es una función de grado  $n$  en cada intervalo  $u_i \leq u \leq u_{i+1}$ .
- Es una función que tiene como mínimo continuidad  $C^{n-1}$  en todo el rango.

Fundamentalmente se utilizan tres tipos de vector de nodos: uniforme, abierto uniforme o no uniforme.

En un vector de nodos uniforme, éstos están equiespaciados.

En un vector de nodos abierto uniforme, los nodos extremos tienen multiplicidad  $n+1$  y los internos están uniformemente espaciados. (Si al menos el número de puntos de control es

igual al orden de la base B-spline, ésta se reduce a la base de Bernstein). Si se utiliza un vector de nodos abierto la curva cumple dos propiedades muy interesantes [61]:

- Pasa por el primer y por el último punto de control.
- En estos puntos es tangente al polígono de control.

Un vector de nodos no uniforme, los nodos internos están distribuidos no uniformemente ó con múltiples nodos internos.

Para que se cumplan las condiciones adecuadas al definir leyes de desplazamiento  $f(\varphi)$ , los puntos de control se sitúan en el eje de las abscisas según las *abscisas de Greville*  $-\xi_i-$  definidas mediante [62]:

$$\xi_i = \frac{1}{n}(u_{i+1} + \dots + u_{i+n}) \quad (3.25)$$

La ley de desplazamiento definida así es al menos  $C^{n+1-r}$  en los nodos de multiplicidad  $r$ . Si  $r = n+1$  los nodos coinciden con la abscisa de un punto de control y la curva pasa por aquel punto.

Los vértices del polígono de control  $-b_i-$  se obtienen mediante la definición de los puntos de control con coordenadas  $(\xi_i, b_i)$  donde  $b_i$  son los elementos del vector de ordenadas del polígono de control.

La derivada de una curva B-spline no-paramétrica de grado  $n$  con  $m+1$  puntos de control es otra curva B-spline no-paramétrica de grado  $n-1$  con  $m$  puntos de control. La derivada de una curva B-spline se puede obtener a partir de su polígono de control. Las nuevas ordenadas  $b'_i$  de los puntos de control de la derivada se calculan mediante [62]:

$$b'_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} \quad (3.26)$$

En la figura (3.5.a) se presenta una curva B-spline de grado  $n=3$ , con un vector de nodos  $\{u_i\} = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ ; los vértices del polígono de control tienen como vector de ordenadas  $\{b_i\} = \{0, 1, 2, 2, 1, 0\}$  y abscisas  $\{\xi_i\} = \{0, 1/9, 1/3, 2/3, 8/9, 1\}$ . La figura

(3.5.b) presenta su derivada, que es una curva B-spline de grado  $n=2$ , con un vector de nodos  $\{u'_i\} = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$ ; los vértices del nuevo polígono de control tiene como ordenadas al vector  $\{b'_i\} = \{9, 4,5, 0, -4,5, -9\}$ , estos se calculan mediante la expresión (3.26), y como abscisas al vector  $\{\xi'_i\} = \{0, 1/6, 1/2, 5/6, 1\}$ , que se calculan mediante la expresión (3.25) y tomando al vector de nodos  $\{u'_i\}$ .

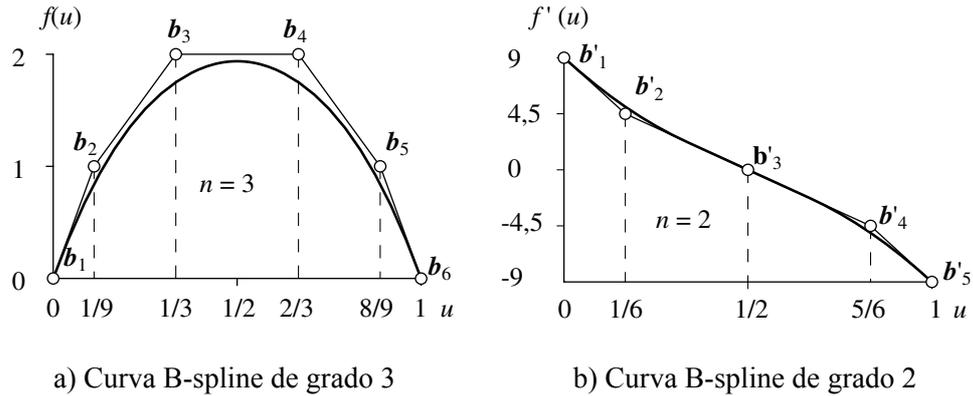


Figura 3.5 Derivada de una curva B-spline no paramétrica [62]

Es posible definir una ley de desplazamiento a partir de una curva B-spline, con el grado de continuidad apropiado en el intervalo  $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq 2\pi \text{ rad}$ , y obtener una función con continuidad entre los tramos adyacentes y que garantice la correspondencia entre los periodos de rotación entre las ruedas conductora y conducida tal como se estudió en el apartado (3.1). El grado de continuidad entre tramos adyacentes depende de la elección de las ordenadas del polígono de control, de manera similar al caso de las curvas de Bézier.

La continuidad  $C^0$  de la ley de desplazamiento entre tramos adyacentes, se garantiza si se cumple:

$$f(0) = 0, f(2\pi) = 2\pi \tag{3.27}$$

Las curvas B-spline tienen en los extremos del intervalo de definición, un único polinomio de la base de polinomios de valor no nulo, por lo que se tiene:

$$b_1 = 0, b_{m+1} = 2\pi \tag{3.28}$$

La continuidad  $C^1$  entre tramos adyacentes de la ley de desplazamiento se garantiza si adicionalmente se cumple:

$$f'(0) = f'(2\pi) \quad (3.29)$$

De la combinación de la expresiones (3.26) y (3.29) se obtiene:

$$f'(0) = b'_1 = \frac{b_2 - b_1}{\xi_2 - \xi_1}; \quad f'(2\pi) = b'_m = \frac{b_{m+1} - b_m}{\xi_{m+1} - \xi_m} \quad (3.30)$$

De la combinación de las dos últimas expresiones se obtiene la condición entre las dos primeras y dos últimas ordenadas de los puntos de control con las que se satisfacen la condición de continuidad  $C^1$  entre los tramos adyacentes:

$$\frac{b_2 - b_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{b_{m+1} - b_m}{\xi_{m+1} - \xi_m} \quad (3.31)$$

Si la primera derivada tiene un vector de nodos abierto uniforme, la expresión (3.31) se simplifica mediante:

$$b_2 - b_1 = b_{m+1} - b_m \quad (3.32)$$

La condición de continuidad  $C^2$  entre tramos adyacentes se satisface si adicionalmente se cumple:

$$f''(0) = f''(2\pi) \quad (3.33)$$

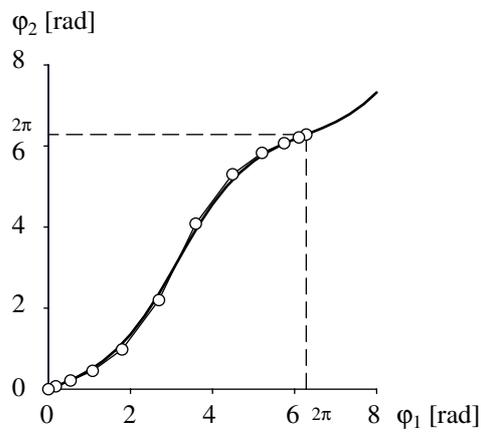
La segunda derivada de una curva B-spline de grado  $n$  con  $m+1$  puntos de control, es otra curva B-spline de grado  $n-2$  con  $m-1$  puntos de control; las ordenadas del nuevo vector de control  $-b''_i-$  se obtienen a partir de las ordenadas,  $-b'_i-$  y abscisas  $-\xi'_i-$  del vector de control de la primera derivada de la curva B-spline; esto se obtiene mediante la combinación de las expresiones (3.26) y (3.33). Después de organizar términos se obtiene la segunda derivada de la curva B-spline en los extremos:

$$f''(0) = b''_1 = \frac{b'_2 - b'_1}{\xi'_2 - \xi'_1}; \quad f''(2\pi) = b''_{m-1} = \frac{b'_m - b'_{m-1}}{\xi'_m - \xi'_{m-1}} \quad (3.34)$$

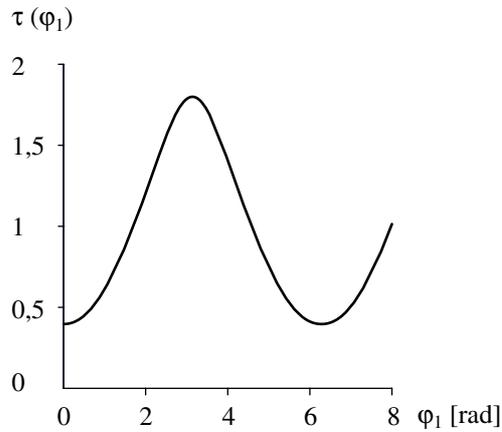


los puntos de control es  $\{b_i\}=\{0, 0,011333, 0,0346, 0,0728, 0,156, 0,35, 0,65, 0,844, 0,9272, 0,9654, 0,988666, 1\}2\pi$ .

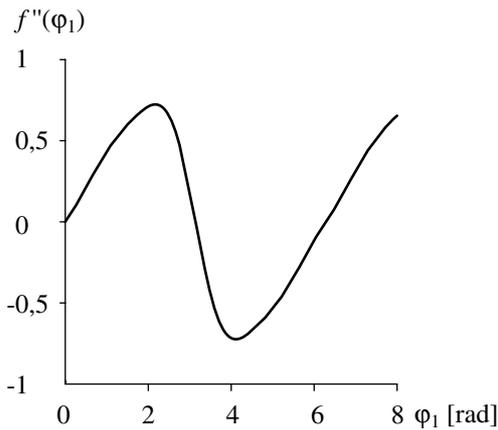
En la figura (3.6) se representan la ley de desplazamiento, la relación de transmisión y la segunda y tercera derivadas de la ley de desplazamiento obtenida mediante la curva B-spline propuesta. Con la función que se define a partir de la curva B-spline con los nodos y ordenadas seleccionados, se obtiene continuidad en las tres primeras derivadas de la ley de desplazamiento.



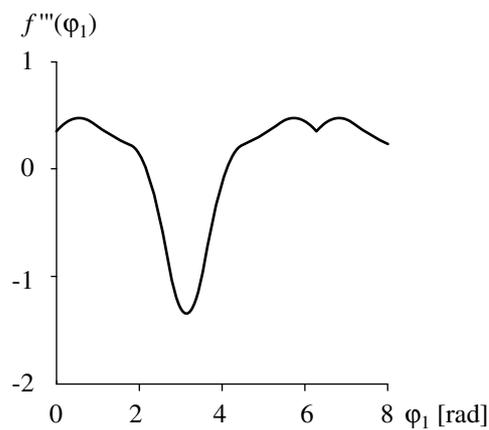
a) Ley de desplazamiento



b) Relación de transmisión



c) Segunda derivada de la ley de desplazamiento



d) Tercera derivada de la ley de desplazamiento

Figura 3.6 Curvas cinemáticas para la curva B-spline

### 3.5 LEY DE DESPLAZAMIENTO DE LAS RUEDAS ELÍPTICAS

La mayor parte de trabajos publicados hasta ahora sobre engranajes no circulares están relacionados con el diseño o la aplicación de las ruedas elípticas. Comúnmente se utilizan engranajes elípticos en máquinas automáticas, máquinas empaquetadoras, mecanismos de retorno rápido, bombas y medidoras de caudal [1].

En esta sección se obtienen, basándose en la geometría de las elipses, las relaciones que permiten definir la ley de desplazamiento y la relación de transmisión de un engranaje elíptico tomando como parámetros de diseño la distancia entre centros, que coincide con el eje mayor de la elipse, y la distancia focal.

Se obtienen dos ruedas dentadas idénticas si se utiliza una elipse como la curva primitiva de ambas ruedas y se localizan en los puntos focales sus respectivos centros de rotación. La elipse, mostrada en la figura (3.7), tiene una distancia focal  $2c$  y el eje mayor mide  $2a$ . Los radios  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias desde los focos hasta un punto P ubicado sobre la elipse.

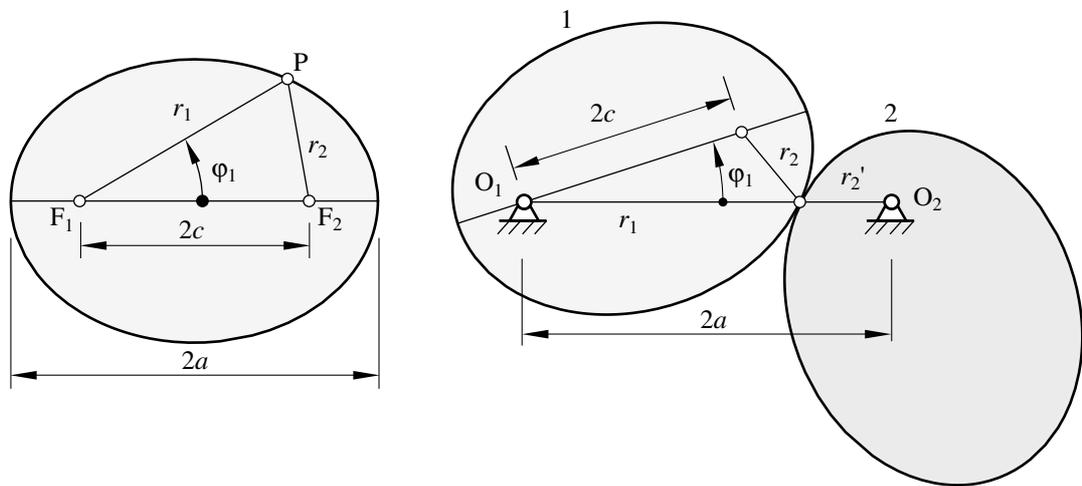


Figura 3.7 Relaciones geométricas de la ruedas elípticas

A partir de la geometría presentada en la figura (3.7) y de las relaciones geométricas de las elipses, se obtienen las siguientes relaciones entre los radios  $r_1$  y  $r_2$ :

$$r_2^2 = r_1^2 + (2c)^2 - 2(2c)r_1 \cos\phi_1 \tag{3.40}$$

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (3.41)$$

Al despejar  $r_1$  de la expresión (3.41) y reemplazar el resultado en la expresión (3.40), se obtiene  $r_2$  que determina la ubicación del punto de contacto entre las elipses con respecto al centro de rotación de la rueda conducida:

$$r_2 = \frac{8ac \cos \varphi_1 - 4(a^2 + c^2)}{4c \cos \varphi_1 - 4a} \quad (3.42)$$

La relación de transmisión puede definirse a partir de la relación entre los radios:

$$\tau(\varphi_1) = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2a}{r_2} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi_1} \quad (3.43)$$

La ley de desplazamiento se obtiene mediante la integración, con respecto a  $\varphi_1$ , de la relación de transmisión:

$$f(\varphi_1) = \begin{cases} 2 \arctan \left( K \tan \left( \frac{\varphi_1}{2} \right) \right); & 0 \leq \varphi_1 < \pi \\ 2 \arctan \left( K \tan \left( \frac{\varphi_1}{2} \right) \right) + 2\pi; & \varphi_1 \geq \pi \end{cases} \quad (3.44)$$

siendo  $K = (a + c)/(a - c)$  la relación entre el máximo y el mínimo radio de la curva primitiva elíptica.

La función *arctan* se define, por defecto, en el rango  $-\pi \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq \pi \text{ rad}$ ; de acuerdo con las características de la ley de desplazamiento mencionadas en el apartado (3.1) ésta debe ser continua en el intervalo  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ , lo que justifica la definición de la ley de desplazamiento del engranaje elíptico dada por la expresión (3.44).

En la figura (3.8) se representan la ley de desplazamiento, la relación de transmisión de dos curvas elípticas idénticas con un semieje mayor  $a = 0,8$  y con una semidistancia focal  $c = 0,5$ , así como la segunda y tercera derivada de la ley de desplazamiento. La ley de desplazamiento obtenida y sus tres primeras derivadas son continuas en todo el intervalo.

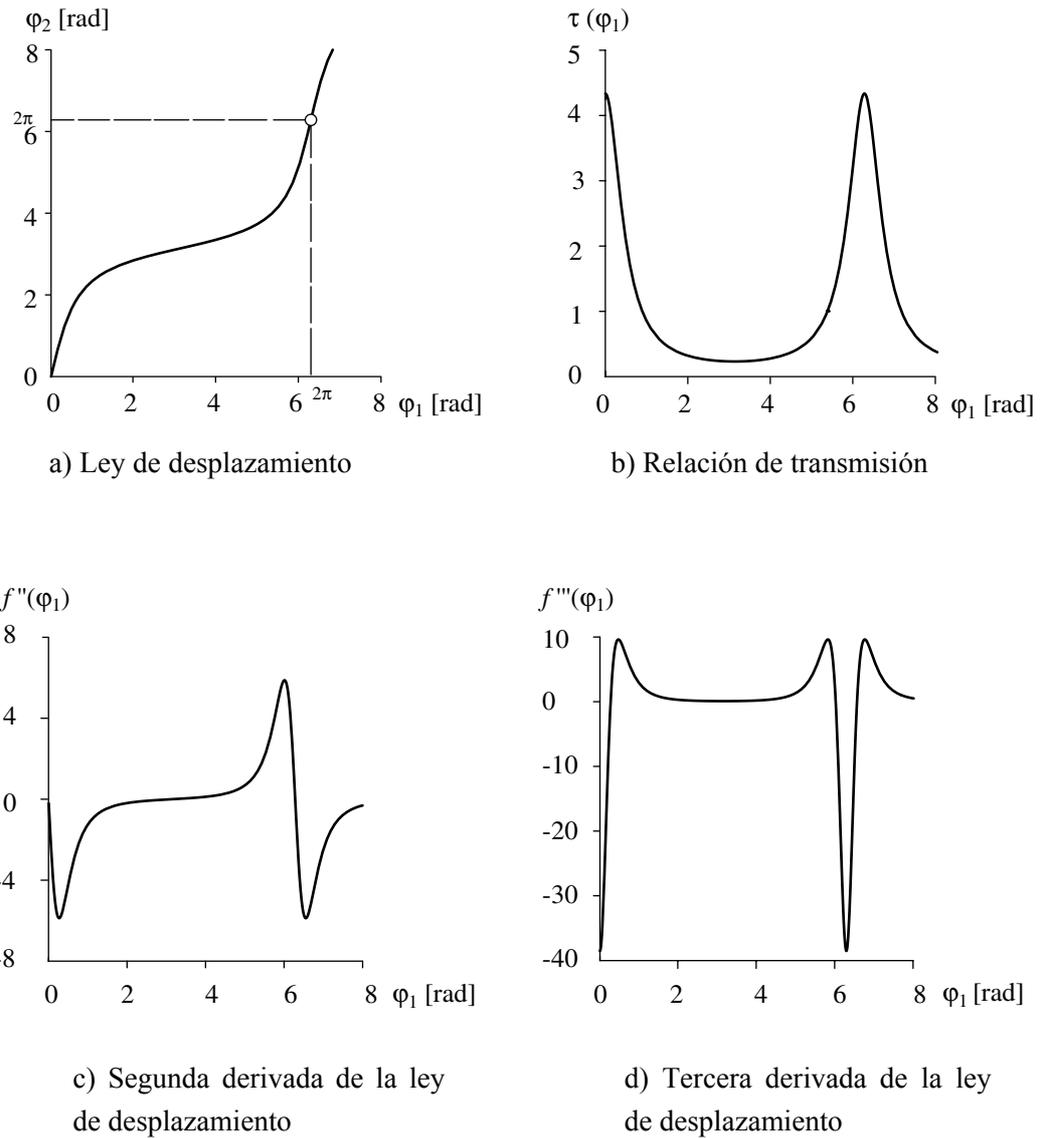


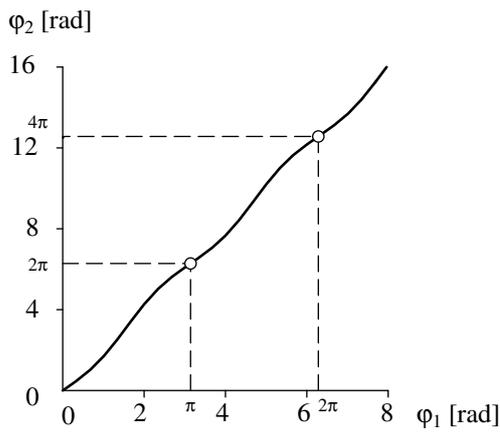
Figura 3.8 Curvas cinemáticas para unas ruedas elípticas con un semieje mayor  $a = 0,8$  y con una semidistancia focal  $c = 0,5$

### 3.6 LEY PARA RUEDAS CON PERIODO DE ROTACIÓN DIFERENTE

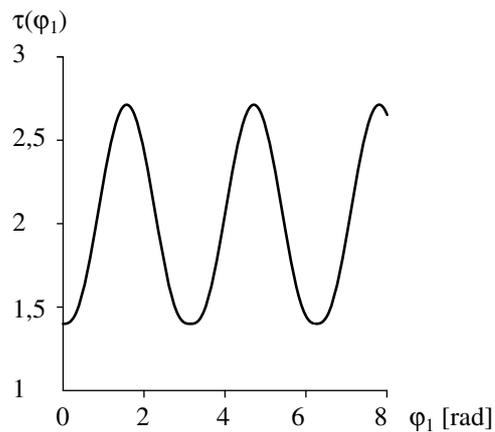
Se obtienen unas ruedas dentadas con relación de periodos entera si se cumple con la continuidad adecuada dentro del rango de diseño y adicionalmente se define la ley de desplazamiento de tal forma que sea continua entre los tramos adyacentes de acuerdo con la expresión (3.5). A modo de ejemplo, se utiliza una curva de Bézier de grado 7 con continuidad  $C^3$  entre tramos adyacentes para obtener la ley de desplazamiento de un engranaje no circular con una relación entre los periodos de rotación de las ruedas conductora y

conducida de 1:2. Las ordenadas elegidas de los puntos de control de la función de diseño son  $\{0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,7, 0,8, 0,9, 1\} 2\pi$ , definidas en el rango  $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 < \pi \text{ rad}$ .

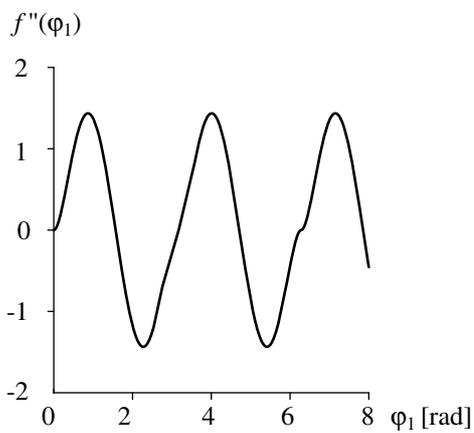
En la figura (3.9) se presentan la ley de desplazamiento correspondiente con la curva de Bézier obtenida con el vector de puntos de control elegido, la relación de transmisión resultante y la segunda y tercera derivada de la ley de desplazamiento.



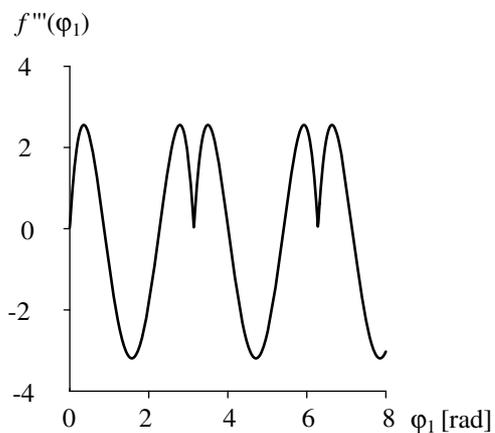
a) Ley de desplazamiento



b) Relación de transmisión



c) Segunda derivada de la ley de desplazamiento



d) Tercera derivada de la ley de desplazamiento

Figura 3.9 Curvas cinemáticas para unas ruedas con relación de periodos de rotación 1:2 a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c)  $f''(\varphi_1)$ , d)  $f'''(\varphi_1)$

De la figura (3.9) se puede observar el cumplimiento de la condición (3.5) para garantizar la continuidad entre tramos adyacentes. La definición de la ley de desplazamiento, a partir de la función de diseño, en el rango  $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 < 2\pi \text{ rad}$ , se define mediante:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) = \begin{cases} b(\varphi_1) & 0 \leq \varphi_1 < \pi \\ b(\varphi_1 - \pi) + 2\pi & \pi \leq \varphi_1 < 2\pi \end{cases} \quad (3.45)$$

### 3.7 OBTENCIÓN DE LAS CURVAS PRIMITIVAS

En este apartado se plantean las expresiones de la curva primitiva de un engranaje no circular conocida previamente la ley de desplazamiento del engrane y la distancia entre los centros de rotación de las ruedas dentadas. Observando la figura (3.1), se puede establecer la siguiente relación:

$$r_1(\varphi_1) + r_2(\varphi_1) = d \quad (3.46)$$

La condición de rodadura pura establece que:

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad (3.47)$$

Así pues, la relación de transmisión  $-\tau-$  se obtiene mediante:

$$\tau(\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (3.48)$$

Al derivar la ley de desplazamiento con respecto al tiempo y después de aplicar la regla de cadena, se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{d}{dt} f(\varphi_1) = \frac{df(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1 = f' \dot{\varphi}_1 \quad (3.49)$$

Mediante la combinación entre las expresiones (3.48) y (3.49) se establece una relación entre la ley de desplazamiento y la relación de transmisión:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = f'(\varphi_1) = \frac{r_1}{r_2} \quad (3.50)$$

De la combinación entre las expresiones (3.46) y (3.50) se obtienen las siguientes expresiones:

$$r_1(\varphi_1) = \frac{f'(\varphi_1)}{1 + f'(\varphi_1)} d; \quad r_2(\varphi_1) = \frac{1}{1 + f'(\varphi_1)} d \quad (3.51)$$

Las curvas primitivas de las ruedas dentadas son los lugares geométricos de las sucesivas posiciones de los centros instantáneos de rotación relativos  $-I_{12}$  en los sistemas de referencias fijos a cada una de las ruedas. Así pues, dichas curvas primitivas quedan definidas por los vectores  $O_1I_{12}$  y  $O_2I_{12}$  expresados en su sistema coordenado correspondiente.

$$O_1I_{12} = \left\{ \begin{array}{l} r_1 \cos(-\varphi_1) \\ r_1 \sin(-\varphi_1) \end{array} \right\}_{O_1X_1Y_1}; \quad O_2I_{12} = \left\{ \begin{array}{l} r_2 \cos(\pi + \varphi_2) \\ r_2 \sin(\pi + \varphi_2) \end{array} \right\}_{O_2X_2Y_2} \quad (3.52)$$

En representación compleja:

$$\mathbf{r}_1 = r_1 e^{j(-\varphi_1)}; \quad \mathbf{r}_2 = r_2 e^{j(\pi + \varphi_2)} \quad (3.53)$$

De la expresión (3.53), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{r}_1 = r_1(\varphi_1) e^{j\theta_1(\varphi_1)}, \quad \theta_1(\varphi_1) = -\varphi_1 \quad (3.54)$$

$$\mathbf{r}_2 = r_2(\varphi_1) e^{j\theta_2(\varphi_1)}, \quad \theta_2(\varphi_1) = \pi + f(\varphi_1) \quad (3.55)$$

Mediante las expresiones (3.54) y (3.55) se obtiene el centro instantáneo de rotación relativo, entre las ruedas conductora y conducida, referido al sistema de coordenadas respectivo fijo a cada una de las ruedas. Estas expresiones permiten construir las curvas primitivas en función del ángulo de giro de la rueda conductora. Cuando la rueda conductora gira el ángulo  $\varphi_1$ , el punto de contacto, respecto al sistema coordenado fijo a la rueda conductora, se encuentra a una distancia  $r_1(\varphi_1)$  –expresión (3.51)– y en una posición angular  $\theta_1(\varphi_1) = -\varphi_1$  –expresión (3.54). El punto de contacto de la rueda conducida, respecto al sistema coordenado fijo a la rueda conducida, se encuentra a una distancia  $r_2(\varphi_1)$  –expresión (3.51)– y en una posición

angular  $\theta_2(\varphi_1) = \pi + f(\varphi_1)$  –expresión (3.55). Ambas distancias y ambos argumentos se obtienen una vez que se defina la ley de desplazamiento del engranaje y dependen de una única variable independiente: el ángulo de giro de la rueda conductora durante su rotación.

### 3.8 RADIO DE CURVATURA DE LAS CURVAS PRIMITIVAS

En la figura (3.10) se representa una curva primitiva que se define por el vector  $\mathbf{r}(\varphi)$  en un punto J cuya coordenada angular se define mediante el ángulo  $\theta(\varphi)$ ; en esta figura, también se representan los vectores tangente  $-\mathbf{t}(\varphi)$ – y normal  $-\mathbf{n}(\varphi)$ – de la curva.

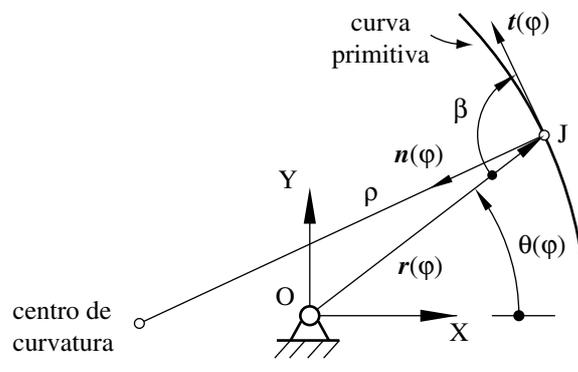


Figura 3.10 Radio de curvatura de la curva primitiva

El radio de curvatura de la curva primitiva  $-\rho-$  se calcula mediante [63, 64]:

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^2}{r''|_n}; \text{ con } r''|_n = \frac{|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}'|} \quad (3.56)$$

o:

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'|} \quad (3.57)$$

La notación compleja del vector  $\mathbf{r}(\varphi)$  es:

$$\mathbf{r}(\varphi) = r(\varphi)e^{j\theta(\varphi)} \quad (3.58)$$

La primera y la segunda derivada de  $r(\varphi)$  con respecto a  $\varphi$  son:

$$\mathbf{r}' = r' e^{j\theta(\varphi)} + jr\theta' e^{j\theta(\varphi)} = (r' + jr\theta') e^{j\theta(\varphi)} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{r}'' = (r'' + jr'\theta' + jr\theta'') e^{j\theta(\varphi)} + (r' + jr\theta') j\theta' e^{j\theta(\varphi)} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{r}'' = \left[ (r'' - r\theta'^2) + j(2r'\theta' + r\theta'') \right] e^{j\theta(\varphi)} \quad (3.61)$$

El modulo del vector  $\mathbf{r}'$  es:

$$|\mathbf{r}'| = \left[ (r')^2 + (r\theta')^2 \right]^{1/2} \quad (3.62)$$

El denominador de la expresión (3.57) es:

$$|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'| = (r'' - r\theta'^2)r\theta' - (2r'\theta' + r\theta'')r' \quad (3.63)$$

Simplificando términos se obtiene:

$$|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'| = r''r\theta' - r^2\theta'^3 - 2r'\theta'^2 - r\theta''r' \quad (3.64)$$

La expresión final para el radio de curvatura se obtiene al reemplazar las expresiones (3.62) y (3.64) en la expresión (3.57):

$$\rho = \frac{\left[ (r')^2 + (r\theta')^2 \right]^{3/2}}{r''r\theta' - r^2\theta'^3 - 2r'\theta'^2 - r\theta''r'} \quad (3.65)$$

La función  $\theta(\varphi_1)$  y sus derivadas para la curva primitiva de ambas ruedas son:

$$\theta_1(\varphi_1) = -\varphi_1; \quad \theta_1'(\varphi_1) = -1; \quad \theta_1''(\varphi_1) = 0 \quad (3.66)$$

$$\theta_2(\varphi_2) = \pi + \varphi_2; \quad \theta_2'(\varphi_2) = 1; \quad \theta_2''(\varphi_2) = 0 \quad (3.67)$$

Al reemplazar a  $\theta(\varphi)$  por  $\theta_1(\varphi_1)$  y a  $r(\varphi)$  por  $r_1(\varphi_1)$  en la expresión (3.65) se obtiene el radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora:

$$\rho_1 = \frac{(r_1'^2 + r_1^2)^{3/2}}{r_1'^2 + 2r_1'^2 - r_1''r_1} \quad (3.68)$$

Para calcular el radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conducida, es necesario realizar algunas operaciones previas. En la expresión (3.65),  $r'$  y  $r''$  representan, para el caso de la rueda conducida, las derivadas de  $r_2$  con respecto a  $\varphi_2$ ; éstas se obtienen al aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} \frac{1}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}} = \frac{r_2'}{f'} \quad (3.69)$$

$$\frac{d^2r_2}{d\varphi_2^2} = \frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi_1^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}\right)^2} - \frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} \frac{\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_1^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2}}{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}\right)^2} = \frac{r_2''}{(f')^2} - \frac{r_2' f''}{(f')^3} \quad (3.70)$$

El radio de curvatura de la curva primitiva para la rueda conducida se obtiene al reemplazar las expresiones (3.67), (3.69) y (3.70) en la expresión (3.65):

$$\rho_2 = \frac{\left((r_2'/f')^2 + r_2^2\right)^{3/2}}{-r_2 \left(r_2''/(f')^2 - r_2' f''/(f')^3\right) + r_2^2 + 2(r_2'/f')^2} \quad (3.71)$$

Las derivadas con respecto a  $\varphi_1$  de  $r_1(\varphi_1)$  y  $r_2(\varphi_1)$  en función de la ley de desplazamiento, se obtienen al derivar las expresiones dadas por (3.51):

$$r_1' = \frac{d}{d\varphi_1} \left( \frac{f'}{1+f'} d \right) = \frac{f''(1+f') - f' f''}{(1+f')^2} d = \frac{f''}{(1+f')^2} d \quad (3.72)$$

$$r_2' = \frac{d}{d\varphi_1} \left( \frac{1}{1+f'} d \right) = \frac{-f''}{(1+f')^2} d \quad (3.73)$$

$$r_1'' = \frac{d}{d\varphi_1} \left( \frac{f''}{(1+f')^2} d \right) = \frac{f'''(1+f')^2 - f'' 2(1+f') f''}{(1+f')^4} d = \frac{f'''(1+f') - 2f''^2}{(1+f')^3} d \quad (3.74)$$

$$r_2'' = \frac{d}{d\varphi_1} \left( -\frac{f''}{(1+f')^2} d \right) = -\frac{f'''(1+f') - 2f''^2}{(1+f')^3} d \quad (3.75)$$

Al reemplazar a  $r_1$  –expresión (3.51)– y sus derivadas –expresiones (3.72) y (3.74)– en la expresión del radio de curvatura –dado por (3.68)– y después de simplificar la expresión resultante se obtiene el radio de curvatura de la rueda conductora en función de la ley de desplazamiento:

$$\rho_1 = \frac{(1+f')^3 \left( \frac{f'^2 + 2f'^3 + f'^4 + f''^2}{(1+f')^4} \right)^{3/2}}{f'^2 + f'^3 + 2f''^2 - f'f'''} d \quad (3.76)$$

El radio de curvatura de la curva primitiva influye en su geometría; valores infinitos del radio de curvatura se corresponden con regiones planas en la curva primitiva; el cambio de signo del radio de curvatura se corresponde con cambios de concavidad. Un análisis de la expresión (3.76) permite establecer las singularidades del radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora, basado en la ley de desplazamiento y sus derivadas. Estas singularidades se presentan si el radio de curvatura dado por (3.76) es infinito o negativo.

El numerador del radio de curvatura dado por (3.76) es positivo y mayor que cero, ya que  $f'$  representa la relación de transmisión entre las velocidades angulares de la rueda conducida y conductora por lo que es positivo. Un valor nulo o negativo de  $f'$  implica que mientras la rueda conductora gira en un solo sentido la rueda conducida se detiene o cambia de sentido. Se presenta un radio de curvatura infinito si el denominador es cero y si el denominador es negativo implica un cambio de concavidad de la curva primitiva. Por otra parte, un valor infinito de la segunda o tercera derivada implica un radio de curvatura nulo. La geometría de la curva primitiva no presenta singularidades si se cumple la condición de curvatura de la rueda conductora  $-f_{c1}$ – dada por:

$$f_{c1} = f'^2 + f'^3 + 2f''^2 - f'f''' > 0 \quad (3.77)$$

Como puede observarse, esta condición para la rueda conductora depende de las tres primeras derivadas de la ley de desplazamiento con respecto a  $\varphi_1$ . Los primeros tres términos de la expresión (3.77) son positivos; por lo tanto, las singularidades del radio de curvatura de la rueda conductora dependen principalmente de las características de la tercera derivada de la

ley de desplazamiento. Valores relativamente altos de  $f'''$  pueden producir un radio de curvatura infinito o negativo.

Similarmente, es posible obtener el radio de curvatura de la rueda conducida en función de la ley de desplazamiento; para ellos basta reemplazar a  $r_2$  –expresión (3.51)– y sus derivadas –expresiones (3.73) y (3.75)– en la expresión (3.71); después de simplificar el resultado se obtiene el radio de curvatura de la rueda conducida:

$$\rho_2 = \frac{(1+f')^3 \left( \frac{f'^2 + 2f'^3 + f'^4 + f''^2}{(1+f')^4} \right)^{3/2}}{f'^3 + f'^4 - f''^2 + f' f'''} d \quad (3.78)$$

El radio de curvatura de la rueda conducida difiere del radio de curvatura de la rueda conductora en el denominador. La curva primitiva de la rueda conducida no presenta singularidades en su geometría si se cumple a condición de curvatura de la rueda conducida – $f_{c2}$ – dada por:

$$f_{c2} = f'^3 + f'^4 - f''^2 + f' f''' > 0 \quad (3.79)$$

La justificación de las singularidades de la curva primitiva y de su radio de curvatura, tanto de la rueda conductora como de la conducida, se obtienen a partir de las tres primeras derivadas de la ley de desplazamiento mediante, respectivamente, las condiciones (3.77) y (3.79).

### 3.9 VECTOR TANGENTE DE LAS CURVAS PRIMITIVAS

El vector tangente unitario – $t$ – de la curva primitiva –figura (3.10)– se determina al derivar con respecto a  $\theta$  al vector  $r(\varphi)$  [63, 64]. El vector tangente de la curva primitiva de la rueda conductora se obtiene al derivar, con respecto a  $\theta$ , la expresión (3.54):

$$\frac{d r_1}{d \theta_1} = \frac{d}{d \varphi_1} \left( r_1 e^{j \theta_1} \right) \frac{d \varphi_1}{d \theta_1} = \left( r_1' e^{j \theta_1} + (j \theta_1') r_1 e^{j \theta_1} \right) (-1) = (-r_1' + j r_1) e^{j \theta_1} \quad (3.80)$$

La notación del vector tangente unitario – $t_1$ – se expresa al normalizar la expresión (3.80):

$$\mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1 / d\theta_1}{|d\mathbf{r}_1 / d\theta_1|} = \frac{(-r_1' + jr_1) e^{j\theta_1}}{\sqrt{r_1'^2 + r_1^2}} \quad (3.81)$$

El vector tangente de la curva primitiva de la rueda conducida se obtiene al derivar el vector  $\mathbf{r}_2$  –dado por la expresión (3.55)– con respecto a  $\theta_2$ :

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{d\theta_2} = \frac{d}{d\varphi_1} (r_2 e^{j\theta_2}) \frac{d\varphi_1}{d\theta_2} = (r_2' e^{j\theta_2} + (j\theta_2') r_2 e^{j\theta_2}) \left( \frac{1}{f'} \right) = \left( \frac{r_2'}{f'} + jr_2 \right) e^{j\theta_2} \quad (3.82)$$

La notación del vector tangente unitario  $\mathbf{t}_2$  se expresa al normalizar la expresión (3.82):

$$\mathbf{t}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2 / d\theta_2}{|d\mathbf{r}_2 / d\theta_2|} = \frac{(r_2' / f' + jr_2) e^{j\theta_2}}{\sqrt{(r_2' / f')^2 + r_2^2}} \quad (3.83)$$

En la figura (3.10) se presenta el ángulo  $\beta$ ; con el ángulo suplementario de  $\beta$  se obtiene la orientación del vector tangente  $\mathbf{t}$  con respecto al vector posición  $\mathbf{r}$ . En el caso de la rueda conductora, el argumento del vector  $\mathbf{r}_1(\varphi_1)$  viene dado por  $\theta_1$ . La orientación del vector unitario  $\mathbf{t}_1(\varphi_1)$  se obtiene como el argumento de su representación compleja dada por la expresión (3.81), que es el resultado de la multiplicación de dos números complejos,  $(-r_1' + jr_1)$  y  $e^{j\theta_1}$ ; así pues, el argumento del vector tangente es la suma del argumento del número complejo  $(-r_1' + jr_1)$  y  $\theta_1$ . De acuerdo con las propiedades de los números complejos, el ángulo entre el vector  $\mathbf{t}_1(\varphi_1)$  con respecto al vector  $\mathbf{r}_1(\varphi_1)$  es el argumento de  $(-r_1' + jr_1)$  por lo que el ángulo  $\beta_1$  se obtiene mediante:

$$\beta_1 = \pi - \arctan \left( \frac{r_1(\varphi_1)}{-r_1'(\varphi_1)} \right) \quad (3.84)$$

El cálculo del ángulo  $\beta_2$  para la rueda conducida, en función del ángulo de giro de la rueda conductora  $\varphi_1$  se obtiene de la siguiente expresión:

$$\beta_2(\varphi_1) = \pi - \arctan \left( \frac{r_2(\varphi_1)}{r_2'(\varphi_1) / f'(\varphi_1)} \right) \quad (3.85)$$

Al reemplazar las expresiones (3.51) y (3.72) en la expresión de  $\beta_1$ , dada por la expresión (3.84), se obtiene:

$$\beta_1(\varphi_1) = \pi - \arctan \left( \frac{\frac{f'(\varphi_1)}{1+f'(\varphi_1)}}{\frac{-f''(\varphi_1)}{(1+f'(\varphi_1))^2}} \right) = \pi - \arctan \left( \frac{f'(\varphi_1)(1+f'(\varphi_1))}{-f''(\varphi_1)} \right) \quad (3.86)$$

Si se reemplaza las expresiones (3.51) y (3.73) en la expresión de  $\beta_2$  se obtiene idéntico resultado lo que pone de manifiesto la bondad de la formulación presentada; esta igualdad se debe a la condición de rodadura pura entre ambas curvas primitivas.

En los engranajes no circulares el ángulo  $\beta$  es variable y toma valores alrededor de  $\pi/2$ . El numerador del argumento de la función *arctan* de la expresión (3.86) es positivo ya que depende de la relación de transmisión  $-f' > 0$ . Si  $f'' > 0$ , el argumento es negativo y la función *arctan* pertenece al segundo cuadrante por lo que el ángulo  $\beta_1$  es menor que  $\pi/2$ ; si  $f'' < 0$ , el argumento es positivo, la función *arctan* pertenece al primer cuadrante y  $\beta_1$  es mayor que  $\pi/2$ ; si  $f''$  es cero, el ángulo  $\beta_1$  es igual a  $\pi/2$ . En los engranajes circulares la segunda derivada de la ley de desplazamiento es cero  $-f'' = 0$  – por lo que el vector tangente es perpendicular al radio.

### 3.10 LONGITUD DE LAS CURVAS PRIMITIVAS

La longitud de la curva primitiva se determina mediante una integral de línea [63, 64]; en el caso de la rueda conductora se tiene:

$$L_1 = \int |dr_1| = \int \left| \frac{dr_1}{d\varphi_1} \right| d\varphi_1 \quad (3.87)$$

Al reemplazar en la expresión (3.87) el módulo de  $r_1' = \frac{dr_1}{d\varphi_1}$  –expresión (3.62)– se obtiene:

$$L_1 = \int_0^{2\pi} \left( r_1'^2 + r_1^2 \right)^{1/2} d\varphi_1 \quad (3.88)$$

La longitud de la curva primitiva de la rueda conducida se determina mediante:

$$L_2 = \int \left| d\mathbf{r}_2 \right| = \int \left| \frac{d\mathbf{r}_2}{d\varphi_2} \right| d\varphi_2 \quad (3.89)$$

Al combinar la expresión (3.62) con la expresión (3.69) y después de reemplazar en la expresión (3.89) se obtiene la longitud de la curva primitiva de la rueda conducida:

$$L_2 = \int \left( \left( \frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} \frac{1}{\partial \varphi_2 / \partial \varphi_1} \right)^2 + r_2^2 \right)^{1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 \quad (3.90)$$

Después de simplificar convenientemente (3.90), se tiene la expresión final de la longitud de la curva primitiva de la rueda conducida:

$$L_2 = \int_0^{2\pi} \left( r_2'^2 + (r_2 f') \right)^{1/2} d\varphi_1 \quad (3.91)$$

Al calcular las longitudes de las curvas primitivas, de la rueda conductora mediante la expresión (3.87) y de la conducida mediante la expresión (3.91), éstas deben ser iguales si los periodos de rotación de ambas ruedas son idénticos o conservar la relación entre los periodos de rotación.

### 3.11 CASOS DE ESTUDIO

En este apartado, se obtienen las curvas primitivas para cada uno de los engranajes que cumple las leyes de desplazamiento que se estudiaron en los apartados (3.2) a (3.6) así como el radio de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida.

Los vectores que definen la curva primitiva para las ruedas conductora y conducida  $-\mathbf{r}_1(\varphi_1)$  y  $\mathbf{r}_2(\varphi_1)$  se pueden calcular analíticamente, mediante un programa de cálculo simbólico que utiliza el ángulo de giro de la rueda conductora  $-\varphi_1$  como variable independiente. El procedimiento utiliza las expresiones (3.51) para determinar los radios de las curvas primitivas, en función del ángulo  $\varphi_1$ , y la ley de desplazamiento define el ángulo de giro de la

rueda conducida. Los vectores  $r_1(\varphi_1)$  y  $r_2(\varphi_1)$  definen las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida y se representan, respectivamente, en los sistemas coordenados  $OX_1Y_1$  y  $OX_2Y_2$  mostrados en la figura (3.1).

El radio de curvatura de la curva primitiva influye en las características de la curva base y en la formación de puntos singulares del diente cercanos a la curva primitiva lo que limita la altura permisible del diente. Los puntos singulares del pie del diente corresponden a aquellos donde aparece un segundo ramal del diente en el proceso de diseño; *la altura permisible del diente* es la máxima altura del pie del diente con que se puede cortar el diente sin que se formen en él puntos singulares. En el capítulo 4 se estudia la curva base y la formación de los puntos singulares.

Los radios de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida se calculan mediante las expresiones (3.68) y (3.71) en función del ángulo de giro de la rueda conductora; las expresiones (3.54) y (3.55) determinan las coordenadas geométricas de las ruedas conductora y conducida, respecto a su respectivo sistema de referencia, que corresponden a un ángulo de giro de la rueda conductora. Un radio de curvatura de la curva primitiva infinito se corresponde con regiones planas en la curva primitiva; en las regiones con radios de curvatura relativamente pequeños pueden obtenerse alturas permisibles del diente relativamente pequeñas.

### 3.11.1 Ley de desplazamiento armónica

En la figura (3.11.a) se presentan las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida del engranaje que cumple la ley de desplazamiento dada por la función armónica que se analizó previamente en el apartado (3.2). En la figura (3.11.b) y (3.11.c) se presentan, respectivamente, el radio de curvatura de la curva primitiva de las ruedas conductora y conducida.

La curva primitiva de la rueda conductora presenta una región plana, alrededor de  $\theta_1 = \pi$  rad, que se corresponde con las singularidades de su radio de curvatura en esta región –figura (3.11.b). El radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conducida tiene un comportamiento relativamente suave, lo que está acorde con la geometría de su curva primitiva –figura (3.11.c).

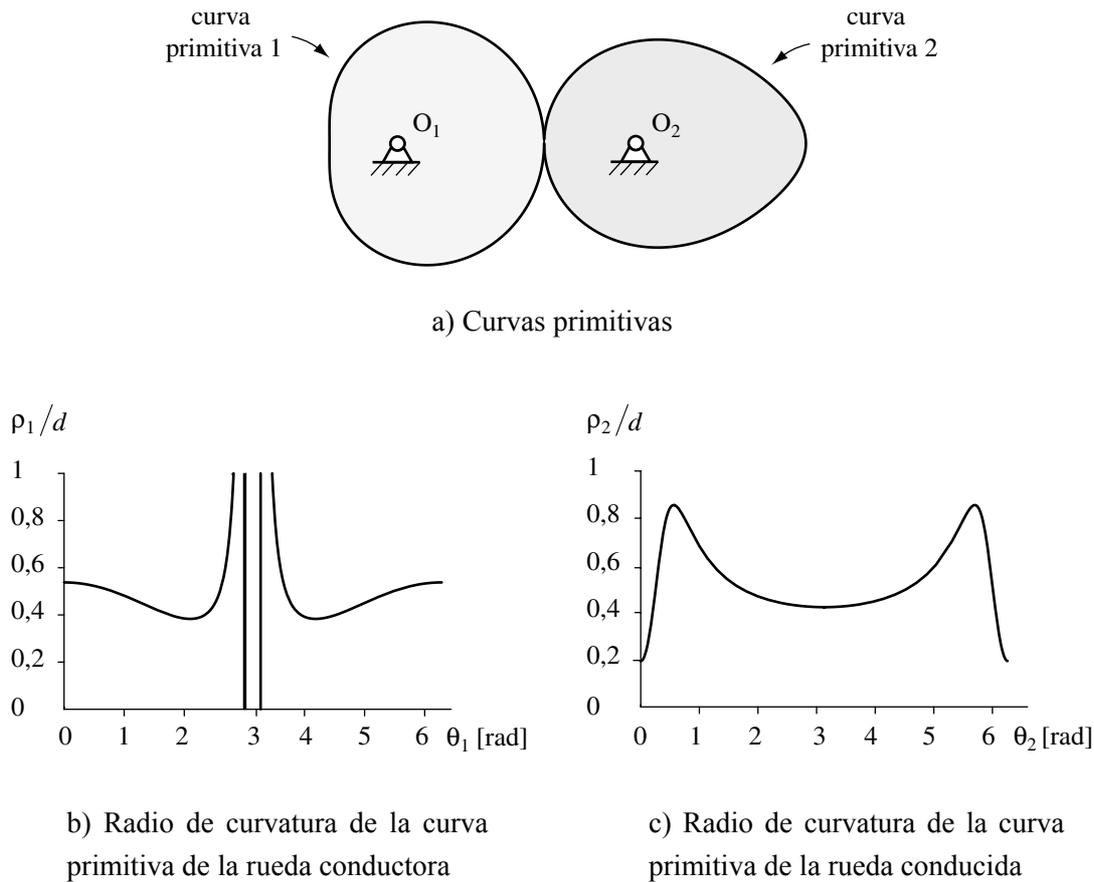


Figura 3.11 Curvas primitivas y radio de curvatura de las ruedas dentadas del engranaje que satisface la ley armónica del apartado 3.2

En la figura (3.12.a) se presenta la condición de curvatura de la rueda conductora  $-f_{c1}$  dada por la expresión (3.77). La condición de curvatura de la rueda conductora es igual a cero en  $\theta_1 = 3,018$  rad y en  $\theta_1 = 3,265$  rad en los que se obtienen radios de curvatura infinitos. En el intervalo  $3,018 \text{ rad} < \theta_1 < 3,265 \text{ rad}$ , tal como se observa en la figura (3.12.c), la condición de curvatura toma valores negativos relativamente pequeños con lo que se obtienen radios de curvaturas negativos muy grandes. Estos cambios de curvatura con valores tan altos se corresponden con una región cóncava-convexa con zonas planas de la curva primitiva.

En la figura (3.12.b) se observa que la condición de curvatura para la rueda conducida  $-f_{c2}$  dada por la expresión (3.79), es positiva en todo el rango, por lo que su radio de curvatura es continuo y no se presentan singularidades en su curva primitiva.

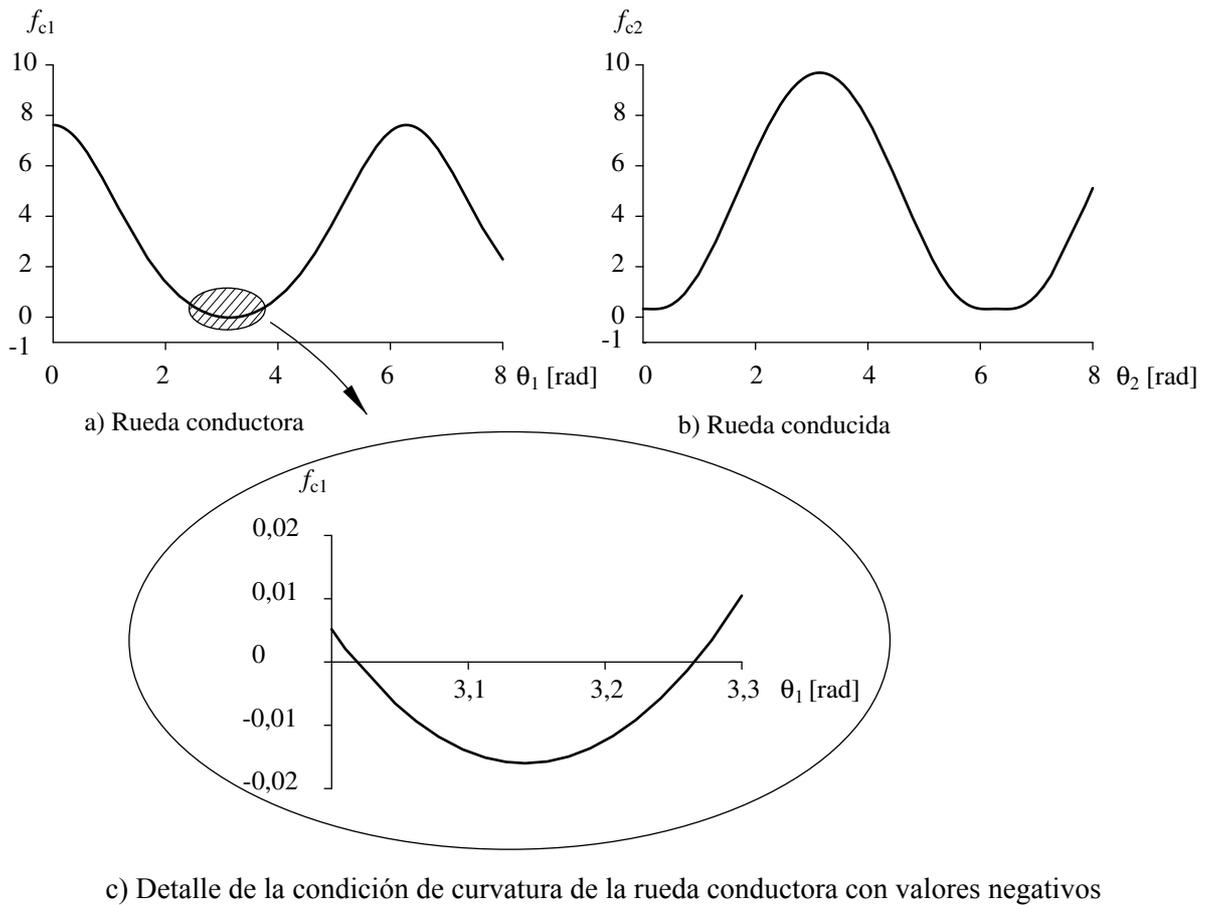


Figura 3.12 Condición de curvatura de las ruedas dentadas del engranaje que cumple la curva armónica del apartado 3.2

### 3.11.2 Curva de Bézier

En el apartado (3.3) se describió una ley de desplazamiento mediante una curva de Bézier; en este apartado se presentan las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida del engranaje que satisface esta ley de desplazamiento. Las curvas primitivas de ambas ruedas, en la posición  $\varphi_1 = 0$  rad, se presentan en la figura (3.13.a). En las figuras (3.13.b) y (3.13.c) se presentan el radio de curvatura de la curva primitiva de las ruedas conductora y conducida.

El radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora –figura (3.13.b)– es discontinua en  $\theta_1 = 0$  rad y en  $\theta_1 = 2\pi$  rad y la rueda conducida –figura (3.13.c)– presenta discontinuidad en  $\theta_2 = \pi$  rad, consecuencia del grado de continuidad entre tramos adyacentes de la ley de desplazamiento,  $C^2$ ; en la figura (3.4.d) se observa la discontinuidad de la tercera derivada de la ley de desplazamiento en  $\varphi_1 = 0$  rad y en  $\varphi_1 = 2\pi$  rad que produce estas

discontinuidades en los radios de curvatura de ambas curvas primitivas. Se puede obtener continuidad de los radios de curvatura en todo el rango si al menos la ley de desplazamiento cumple con una continuidad  $C^3$  entre tramos adyacentes.

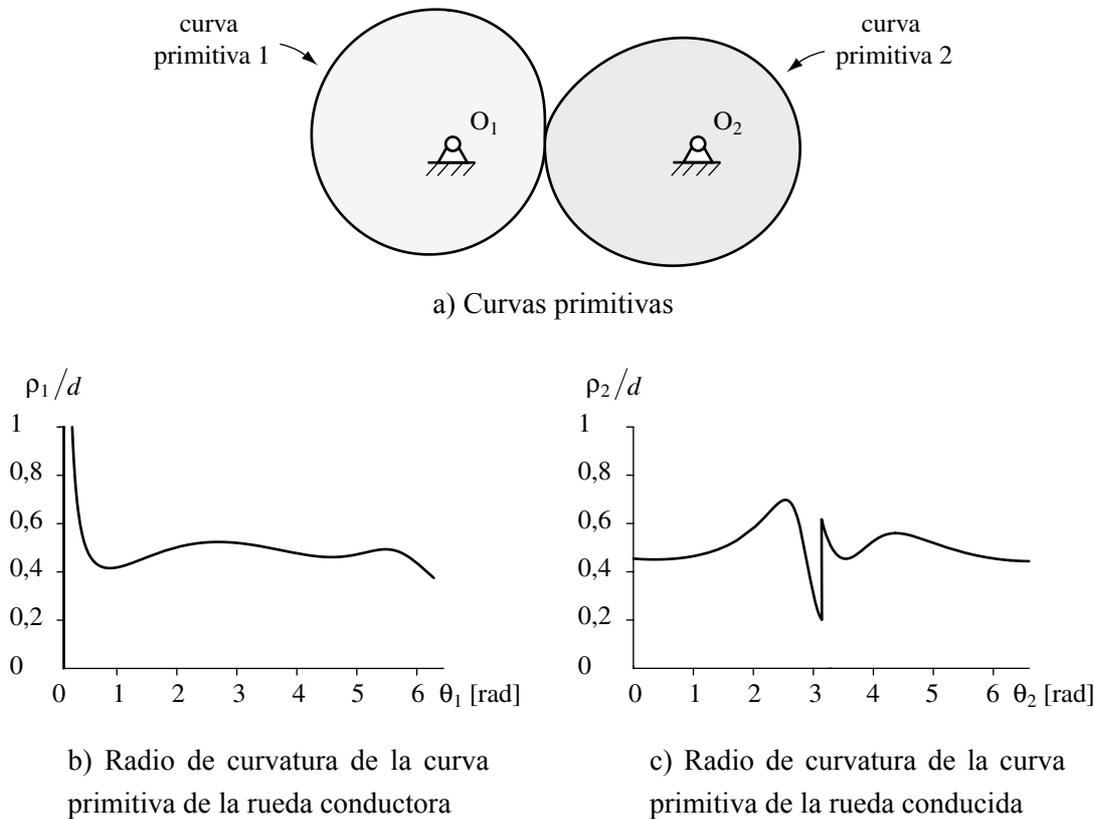


Figura 3.13 Curvas primitivas y radio de curvatura de las ruedas dentadas del engranaje que satisface la ley de desplazamiento de la curva de Bézier del apartado 3.3

En la figura (3.14) se presentan la condición de curvatura de las ruedas conductora y conducida  $-f_{c1}$  y  $f_{c2}$  dadas por las expresiones (3.77) y (3.79). La condición de curvatura de la rueda conductora, toma valores negativos en el intervalo  $0 \text{ rad} < \theta_1 < 0,112 \text{ rad}$  y es cero en  $\theta_1 = 0,112 \text{ rad}$  por lo que se presenta un radio de curvatura infinito en esta posición y radios de curvaturas negativos en este intervalo. El cambio de curvatura no presenta problemas para el proceso de generación ya que toma valores relativamente altos  $-\infty < \rho_1 < -4d$ . La condición de curvatura de la curva conducida es positiva para cualquier  $\theta_2$  por lo que presenta radios de curvaturas finitos y no presenta cambios de curvatura; sin embargo, presenta una discontinuidad en la posición  $\theta_2 = \pi \text{ rad}$ , correspondiente con  $\varphi_1 = 0 \text{ rad}$  y  $\varphi_1 = 2\pi \text{ rad}$ .

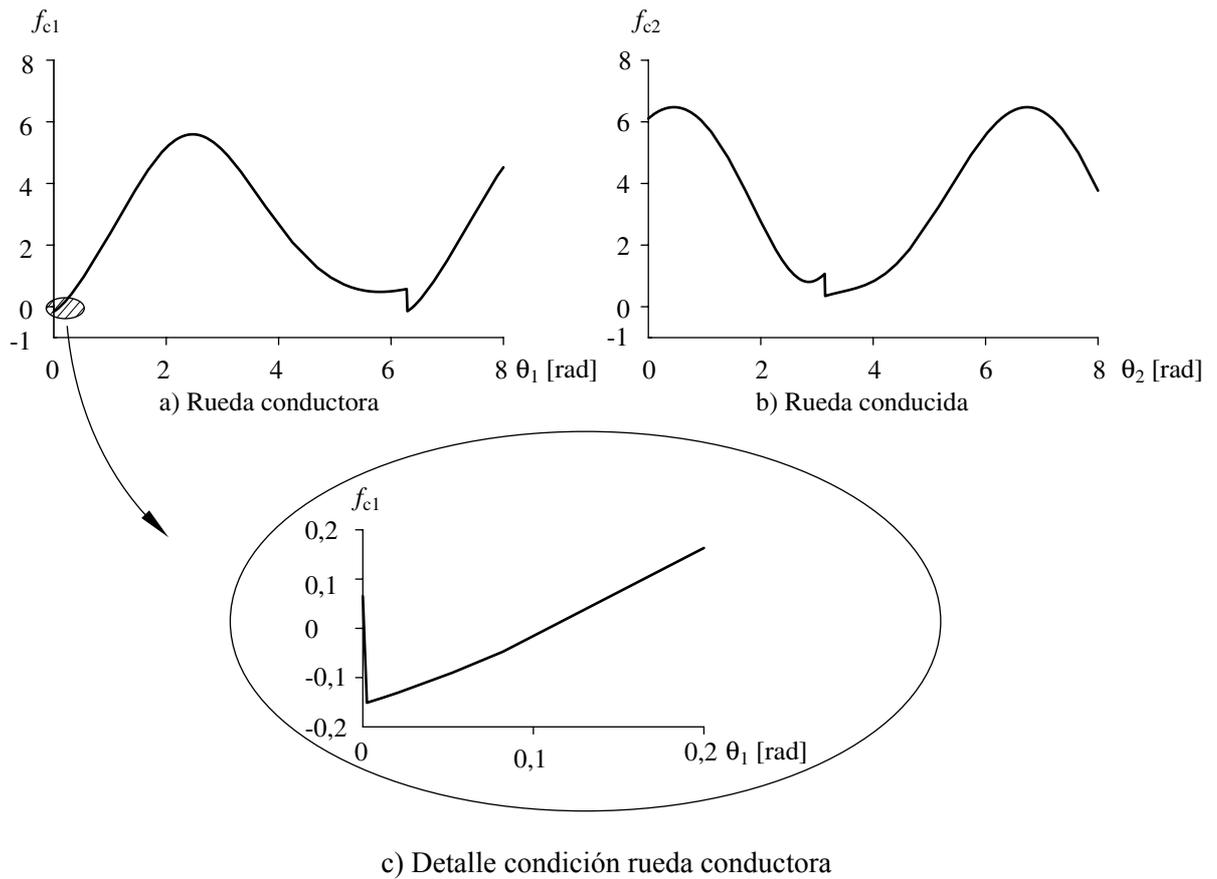
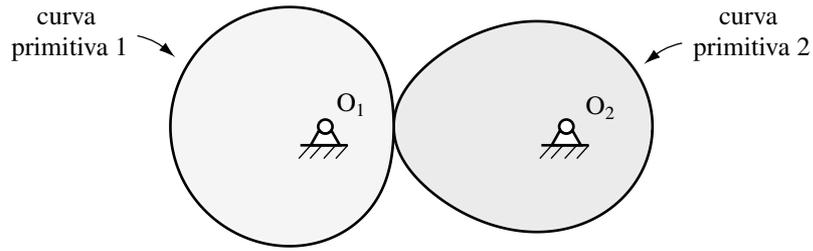


Figura 3.14 Condición de curvatura de la curva de Bézier

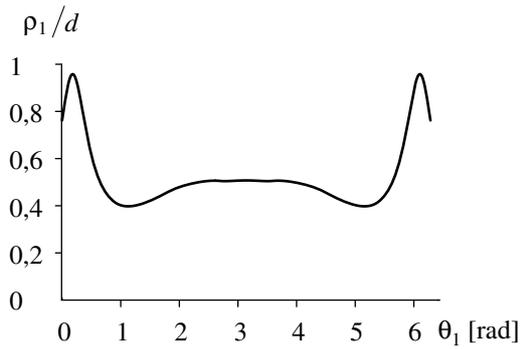
### 3.11.3 Curva B-spline

En la figura (3.15) se presentan las curvas primitivas de la ley de desplazamiento definida mediante la curva B-spline paramétrica que se estudió en el apartado (3.4); también se presentan los radios de curvatura de las curvas primitivas.

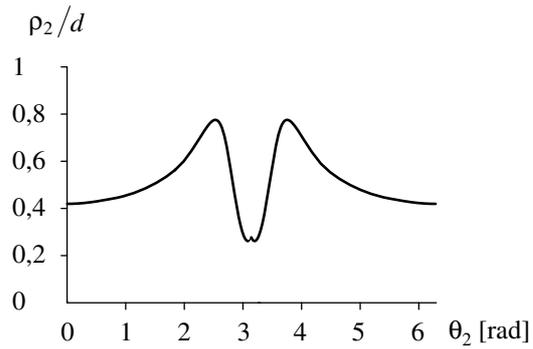
La continuidad del radio de curvatura depende de la ley de desplazamiento y de sus tres primeras derivadas, tal como se estudió en el apartado (3.8). Como se manifestó previamente en el apartado (3.4), el grado de continuidad de las curvas B-spline de grado  $n$  es al menos  $C^{n-1}$  en toda la curva. La ley de desplazamiento de la curva B-spline del apartado (3.4) de grado 5 tiene, por lo tanto, continuidad  $C^4$  en el intervalo, lo cual influye en que el radio de curvatura de ambas ruedas sea continuo. La condición de curvatura para el engranaje que cumple la curva de B-spline, que se estudió en el apartado (3.4), toma valores positivos en todo el rango para ambas ruedas; esto justifica que el radio de curvatura no presente singularidades, tal como se observa en la figura (3.16).



a) Curvas primitivas

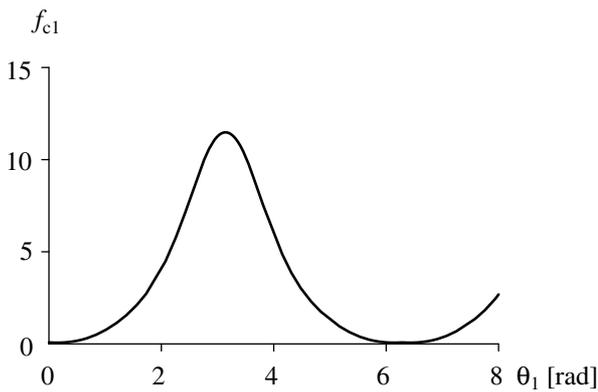


b) Radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora

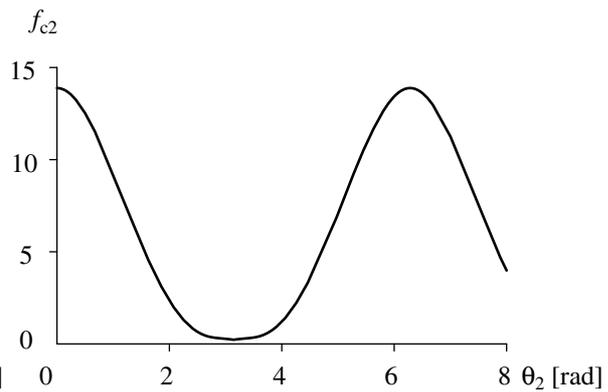


c) Radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conducida

Figura 3.15 Curvas primitivas y radios de curvatura de las ruedas dentadas del engranaje que satisface la ley de desplazamiento dado por la curva B-spline del apartado 3.4



a) Rueda conducida



b) Rueda conductora

Figura 3.16 Condición de curvatura curva Bspline

### 3.11.4 Ruedas elípticas

En la figura (3.17.a) se presentan las ruedas elípticas cuya ley de desplazamiento se estudió en el apartado (3.5) con una distancia entre centros unitaria. Los radios de curvatura de la rueda conductora y conducida se presentan en las figuras (3.17.b) y (3.17.c). La ley de desplazamiento del engranaje elíptico y sus derivadas son funciones continuas ya que quedan definidas por funciones trigonométricas; por lo tanto, el radio de curvatura de cada rueda es una función continua.

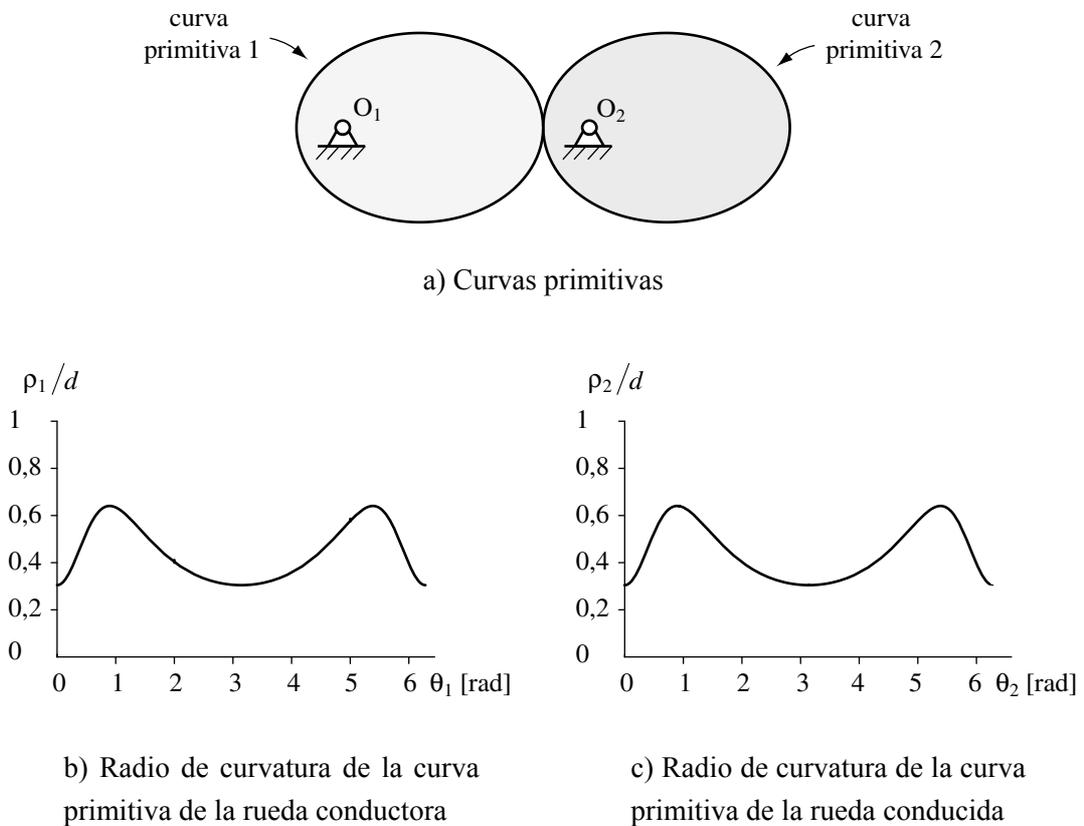


Figura 3.17 Curvas primitivas y radio de curvatura del engranaje elíptico del apartado 3.5

Con un engranaje elíptico se obtienen dos ruedas idénticas en las que ambas ruedas giran alrededor de uno de sus polos. En la figura (3.17), se observa que las curvas primitivas de ambas ruedas son idénticas y por ende, el radio de curvatura de la curva primitiva de ambas ruedas son idénticos.

La condición de curvatura de ambas ruedas para el engranaje elíptico se presenta en la figura (3.18). En las figuras (3.18.c) y (3.18.d) se presenta un detalle de la condición de curvatura en la región con valores pequeños; de esta forma se comprueba que tiene valores positivos en todo el rango.

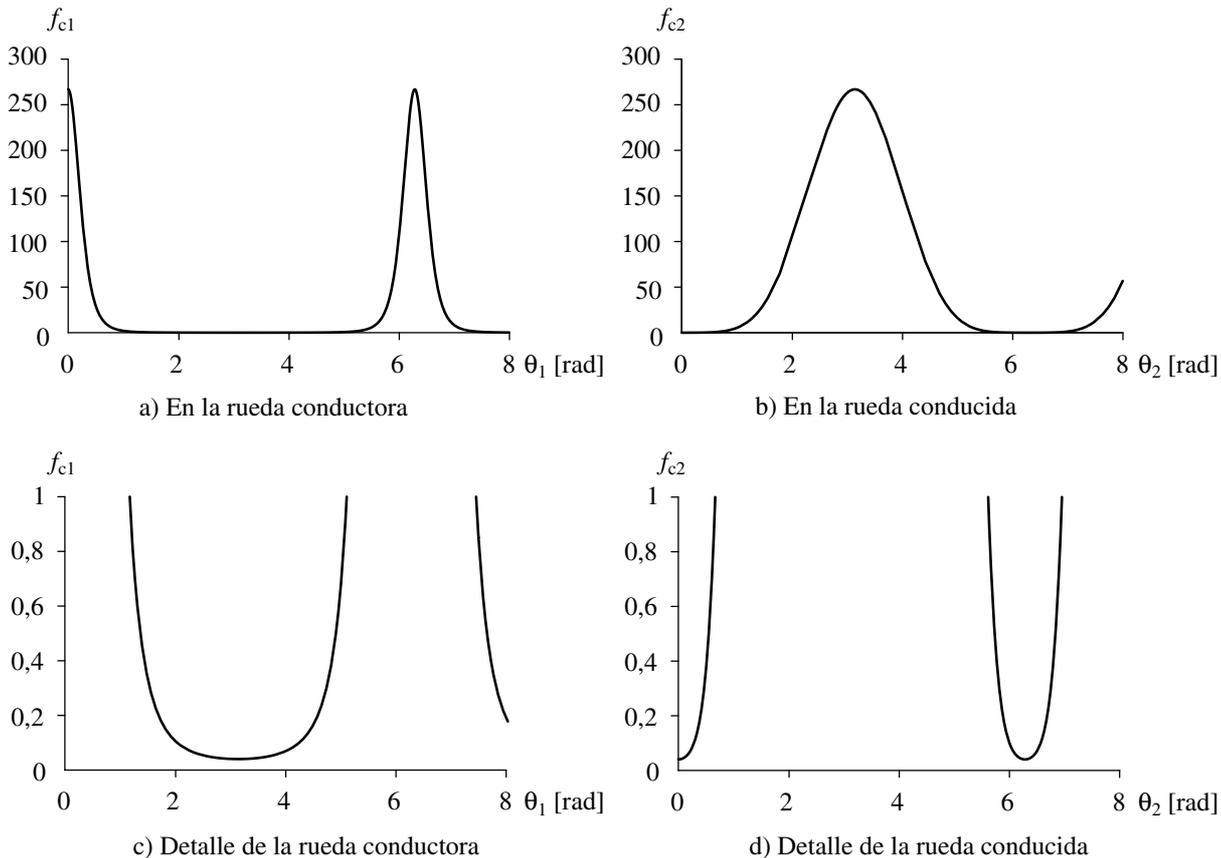


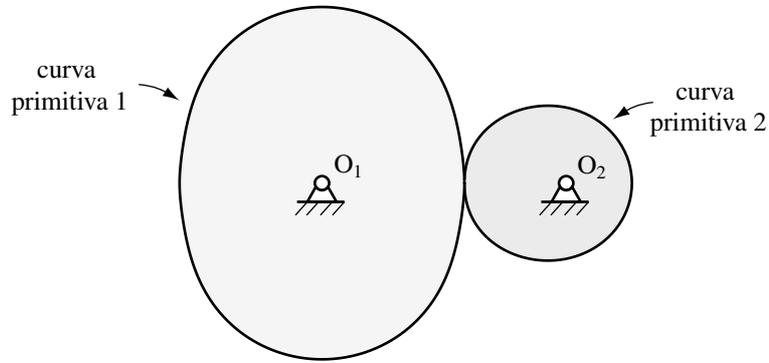
Figura 3.18 Condición de curvatura para el engranaje elíptico

### 3.11.5 Ruedas con relación de periodos de rotación doble

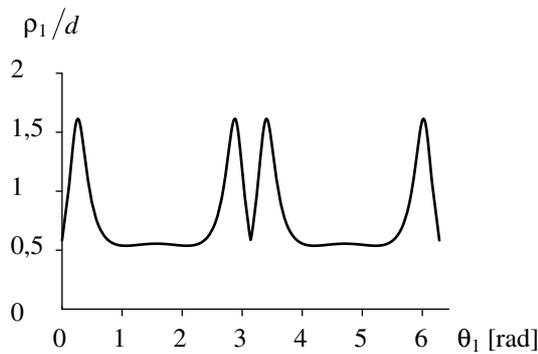
En el apartado (3.6) se realizó el estudio de una ley de desplazamiento para un engranaje con relación entre los periodos de rotación de la rueda conductora y conducida de 1:2; la figura (3.19.a) muestra las curvas primitivas de las ruedas que cumplen esta ley de desplazamiento.

Los radios de curvatura de las ruedas conductora y conducida, se presentan, respectivamente, en las figuras (3.19.b) y (3.19.c). El grado de continuidad entre tramos adyacentes de la ley de desplazamiento es  $C^3$  por lo que los radios de curvatura no presentan valores infinitos. Se

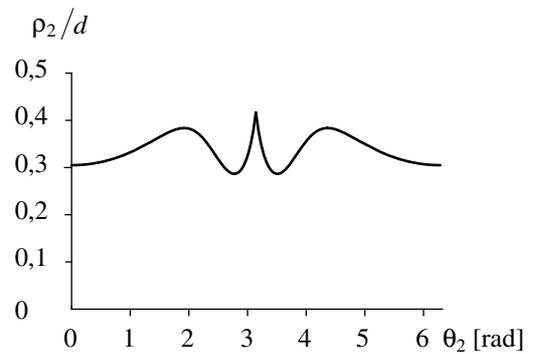
observan cambios bruscos de los radios de curvatura de la rueda conductora y conducida en  $\theta_1 = \pi$  rad, rueda conductora, y en  $\theta_2 = \pi$  rad en la rueda conducida.



a) Curvas primitivas



b) Radio de curvatura de la rueda conductora



c) Radio de curvatura de la rueda conducida

Figura 3.19 Curvas primitivas y radio de curvatura de las ruedas dentadas del engranaje con relación de periodos doble del apartado 3.6

En la figura (3.20) se presenta la condición de curvatura para las ruedas conductora y conducida. La condición de continuidad es positiva en todo el rango lo que implica que el radio de curvatura no presenta cambios de curvatura ni valores infinitos. El cambio brusco que se observa en  $\theta_1 = 0$  rad,  $\pi$  rad y  $2\pi$  rad se justifica por el cambio brusco de la tercera derivada de la ley de desplazamiento en  $\varphi_1 = 0$  rad,  $\pi$  rad y  $2\pi$  rad –figura (3.9).

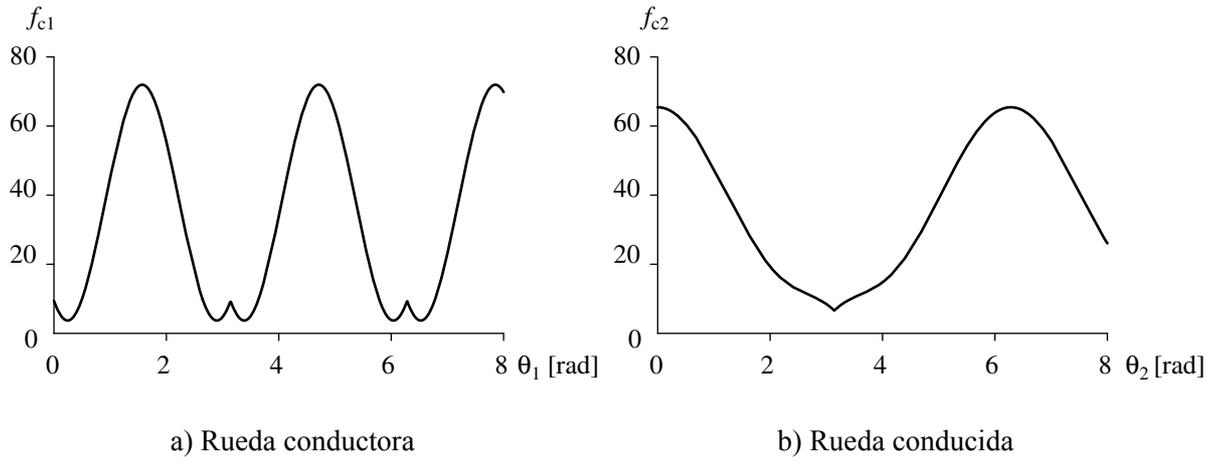


Figura 3.20 Condición de curvatura para el engranaje con relación de periodos doble del apartado 3.6