



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA

Directores

Dr. Salvador Cardona Foix
Dra. Lluïsa Jordi Nebot

Barcelona, 2006

ANEXO A.1

SÍNTESIS DE LA LEY DE DESPLAZAMIENTO DE UN ENGRANAJE NO CIRCULAR MEDIANTE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

En el capítulo 6 se comparan la fluctuación del par motor y las reacciones en los apoyos en un mecanismo de doble manivela y en un engranaje no circular con igual ley de desplazamiento e iguales condiciones de operación; en ambos mecanismos se considera que el eslabón conductor gira a velocidad angular constante y que en el eslabón conducido actúa un par resistente constante. Después de definir las dimensiones del mecanismo de doble manivela y estudiar la cinemática del eslabón conducido en función de la posición angular del eslabón conductor, se utiliza un procedimiento de optimización que minimiza una función objetivo que se define en función de la ley de desplazamiento y de la velocidad y aceleración angular del eslabón conducido de ambos mecanismos.

A pesar de tener una solución analítica de la ley de desplazamiento del mecanismo articulado, se decide tomar una curva de Bézier que la aproxime; la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular, determinación de las ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier, se realiza mediante un procedimiento de optimización basado en los algoritmos genéticos; en este anexo se describe este procedimiento.

A.1.1 CINEMÁTICA DEL MECANISMO DE DOBLE MANIVELA

La figura (A.1.1) presenta un mecanismo de cuatro eslabones con cuatro articulaciones, siendo el eslabón 1 el elemento conductor, el eslabón 2 el acoplador, el eslabón 3 representa el eslabón conducido y el eslabón 4 representa el bastidor. Para satisfacer las condiciones de Grashoff de un mecanismo de doble manivela [71, 72], se eligen las siguientes dimensiones del mecanismo articulado: $L_1 = 75$ mm, $L_2 = 75$ mm, $L_3 = 100$ mm y $L_4 = 25$ mm.

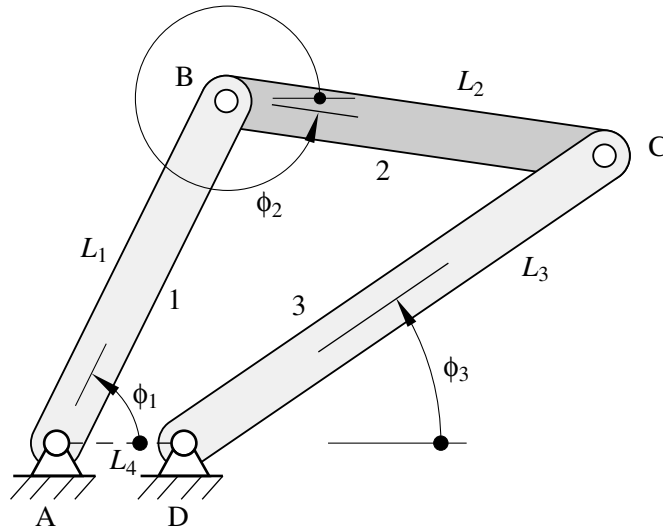


Figura A.1.1 Mecanismo articulado de cuatro eslabones

El vector $\mathbf{q} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T$ es el vector de coordenadas generalizadas que da la configuración del mecanismo para cualquier posición. El vector de condiciones de enlace $-\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ es el formado por el conjunto de ecuaciones que imponen las restricciones geométricas del mecanismo:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}) &= L_1 \cos \phi_1 + L_2 \cos \phi_2 - L_3 \cos \phi_3 - L_4 = 0 \\ f_2(\mathbf{q}) &= L_1 \sin \phi_1 + L_2 \sin \phi_2 - L_3 \sin \phi_3 = 0 \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

El vector \mathbf{q} usualmente es subdivido en un vector de coordenadas independientes $\{q_i\} = \{\phi_1\}$ y en un vector de coordenadas dependientes $\{q_d\} = \{\phi_2, \phi_3\}^T$. La posición angular del eslabón de salida $-\phi_3-$ en función de la posición angular del eslabón de entrada $-\phi_1-$ se obtiene mediante la siguiente expresión [59]:

$$\tan \frac{\phi_3}{2} = \frac{2 \sin \phi_1 \pm \sqrt{(2 \sin \phi_1)^2 - 4(c_1 + c_4 - \cos \phi_1(1 + c_3))(-c_1 + c_4 + \cos \phi_1(1 - c_3))}}{2(-c_1 + c_4 + \cos \phi_1(1 - c_3))} \tag{A.1.2}$$

En la expresión (A.1.2) las variables c_1 , c_3 y c_4 son parámetros unidimensionales entre las dimensiones de los eslabones: $c_1 = L_4 / L_1$; $c_3 = L_4 / L_3$; $c_4 = (L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 + L_4^2) / (2L_1L_3)$

Para el análisis de velocidades se deriva el sistema de ecuaciones de enlace geométricas $f(q)$ con respecto al tiempo y se obtiene un sistema de ecuaciones cinemáticas lineales para las velocidades generalizadas:

$$\frac{d}{dt} f(q) = \frac{\partial f}{\partial q} = J_q \dot{q} = 0 \quad (A.1.3)$$

siendo $J_q = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right\}$ la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones:

$$J_q = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \phi_1 & -L_2 \sin \phi_2 & L_3 \sin \phi_3 \\ L_1 \cos \phi_1 & L_2 \cos \phi_2 & -L_3 \cos \phi_3 \end{bmatrix} \quad (A.1.4)$$

Para determinar todas las velocidades generalizadas en una cierta configuración accesible del mecanismo, se ha de resolver este sistema de ecuaciones lineales, que tiene tantas variables como velocidades generalizadas n y tantas ecuaciones como ecuaciones de enlace. Para resolverlo se procede a hacer una partición del conjunto de velocidades generalizadas en velocidades generalizadas independientes $-\{\dot{q}_i\} = \{\omega_1\}$ – y en las velocidades generalizadas dependientes $-\{\dot{q}_d\} = \{\omega_2, \omega_3\}^T$:

$$\begin{aligned} [J_{q,d} \mid J_{q,i}] \begin{Bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{q}_i \end{Bmatrix} = 0 &= [J_{q,d}] \{\dot{q}_d\} + [J_{q,i}] \{\dot{q}_i\} \\ \{\dot{q}_d\} &= -[J_{q,d}]^{-1} \cdot [J_{q,i}] \cdot \omega_1 \\ \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -L_2 \sin \phi_2 & L_3 \sin \phi_3 \\ L_2 \cos \phi_2 & -L_3 \cos \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_1 \sin \phi_1 \\ L_1 \cos \phi_1 \end{bmatrix} \omega_1 \end{aligned} \quad (A.1.5)$$

El análisis de aceleraciones del mecanismo articulado, una vez hecho el análisis de velocidades, se obtiene al derivar con respecto al tiempo la expresión de las velocidades generalizadas. Para esto, se vuelve a derivar con respecto al tiempo la expresión (A.1.3) con lo que se obtiene:

$$J_q \dot{q} + J_q \ddot{q} = 0 \quad (A.1.6)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, se procede a hacer una partición del conjunto de aceleraciones en un vector de aceleraciones generalizadas independientes $-\{\ddot{q}_i\} = \{\alpha_{\phi 1}\}$ – y en un vector de aceleraciones generalizadas dependientes $-\{\ddot{q}_d\} = \{\alpha_{\phi 2}, \alpha_{\phi 3}\}^T$.

$$\begin{aligned}
 & [J_{q,d}] \{\ddot{q}_d\} + [J_{q,d}] \{\dot{q}_d\} + [J_{q,i}] \{\dot{q}_i\} = 0 \\
 & \{\ddot{q}_d\} = -[J_{q,d}]^{-1} \left([J_{q,d}] \{\dot{q}_d\}^T + [J_{q,i}] \{\dot{q}_i\}^T \right) \\
 & \begin{Bmatrix} \alpha_{\phi_2} \\ \alpha_{\phi_3} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -L_2 \sin \phi_2 & L_3 \sin \phi_3 \\ L_2 \cos \phi_2 & -L_3 \cos \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \\
 & \left(\begin{bmatrix} -L_2 \cos \phi_2 \omega_{\phi_2} & L_3 \cos \phi_3 \omega_{\phi_3} \\ -L_2 \sin \phi_2 \omega_{\phi_2} & L_3 \sin \phi_3 \omega_{\phi_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{\phi_2} \\ \omega_{\phi_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \cos \phi_1 \\ -L_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \omega_{\phi_1}^2 \right) \tag{A.1.7}
 \end{aligned}$$

Mediante las expresiones (A.1.2), (A.1.5) y (A.1.7), se calculan la posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido en cada una de las posiciones angulares del eslabón conductor. La figura (A.1.2) presenta estas variables considerando que el eslabón conductor gira con velocidad angular constante, $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$.

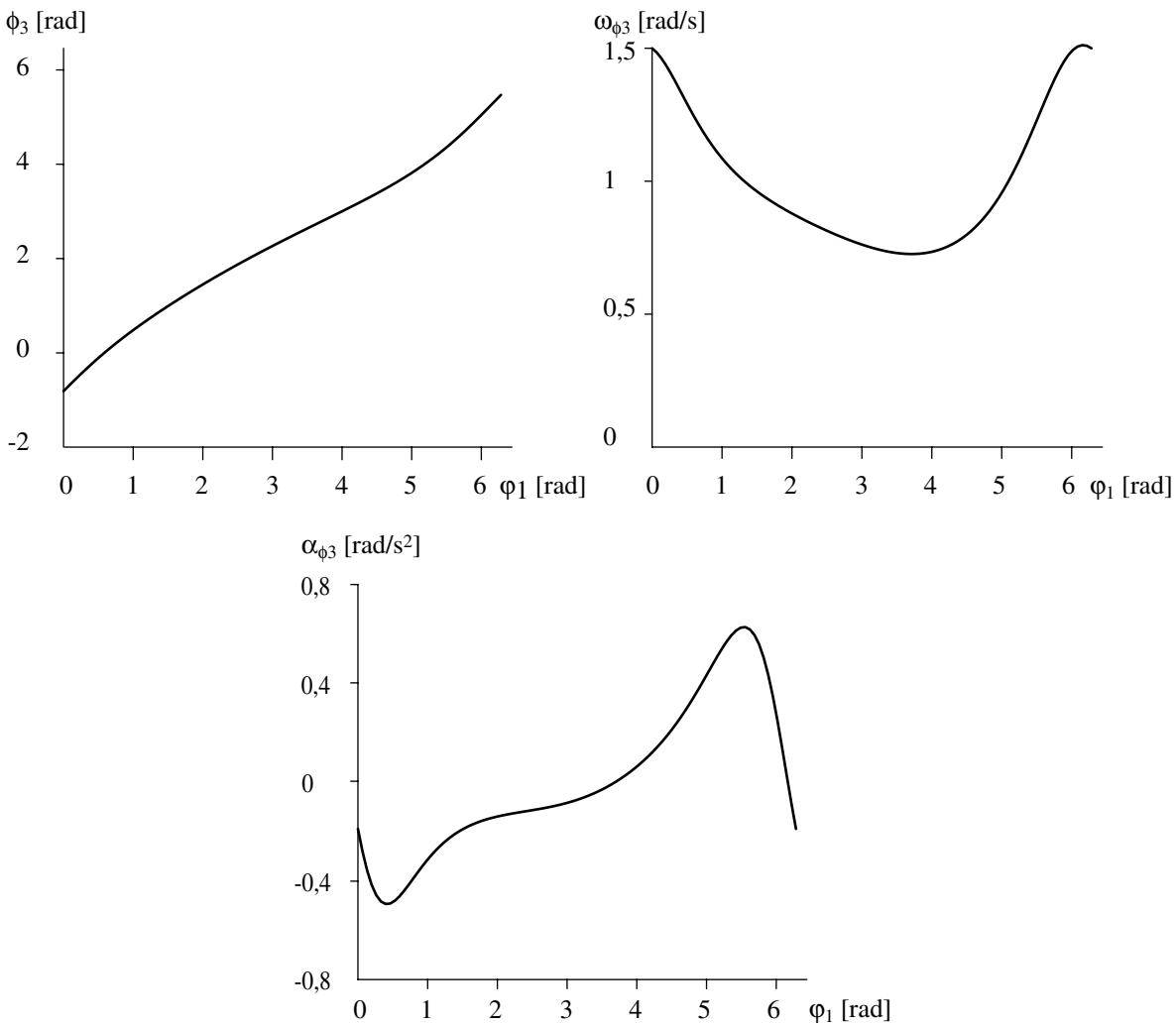


Figura A.1.2 Cinemática del eslabón conducido

A.1.2 SÍNTESIS DE LA LEY DE DESPLAZAMIENTO DEL ENGRANAJE NO CIRCULAR

Después de estudiar la configuración del mecanismo articulado y de determinar las velocidades y aceleraciones angulares de sus eslabones con $\omega_1 = 1$ rad/s, se procede a definir una ley de desplazamiento del engranaje no circular tal que se obtenga un comportamiento cinemático (posición, velocidad y aceleración angular en función del ángulo de giro del eslabón de entrada) similar entre la rueda conducida del engranaje no circular y el eslabón conducido del mecanismo de doble manivela.

Se utiliza una curva de Bézier no paramétrica de grado $n = 15$ con continuidad C^3 en la unión entre tramos adyacentes en la definición de la ley de desplazamiento del engranaje no circular; esta ley de desplazamiento requiere la definición de 16 puntos de control. Algunos puntos de control se escogen para satisfacer el grado de continuidad impuesto.

El primer y el último punto de control se eligen para satisfacer la condición de correspondencia entre los periodos de rotación de las ruedas conducida y conductora, un giro de la rueda conductora se corresponde con un giro de la rueda conducida. Esta correspondencia es posible si se eligen el primer y último punto de control tal que $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$ y $\mathbf{b}_{15} = (2\pi, 2\pi)$. La velocidad angular del eslabón conducido se calcula, una vez resuelta la configuración del mecanismo, mediante la expresión (A.1.5); de acuerdo con las propiedades de las curvas de Bézier, las velocidades angulares en las posiciones $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_1 = 2\pi$ se satisfacen a partir de la condición de continuidad C^1 y de la elección de las ordenadas b_1 y b_{14} , que se calculan mediante la expresión (2.16). De manera similar, las ordenadas b_2 y b_{13} se eligen para satisfacer, respectivamente, la aceleración angular del eslabón conductor en $\varphi_1 = 0$ rad y en $\varphi_1 = 2\pi$ rad; éstas se calculan mediante la expresión (2.20). Para satisfacer el grado de continuidad propuesto, C^3 , una de las dos ordenadas b_3 ó b_{12} puede tomar un valor arbitrario pero la otra ordenada es dependiente del valor previamente elegido. Las relaciones que permiten el cumplimiento de la continuidad C^3 son:

$$\begin{aligned} b_1 - b_0 &= b_n - b_{n-1} \\ b_2 - 2b_1 + b_0 &= b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} \\ b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0 &= b_n - 3b_{n-1} + 3b_{n-2} - b_{n-3} \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

De acuerdo con las justificaciones presentadas previamente, 7 de las 16 ordenadas, las tres primeras y las últimas cuatro, pueden ser calculadas o son dependientes. La ley de desplazamiento depende del valor de las otras 9 ordenadas $\{b_3, b_4, \dots, b_{11}\}$ que constituyen el conjunto de variables de diseño de la curva de Bézier. El diseño de la ley de desplazamiento se obtiene mediante un procedimiento de optimización, basado en los métodos propios de los algoritmos genéticos, que minimiza el error entre las curvas cinemáticas de los eslabones conducidos del mecanismo de doble manivela y del engranaje no circular. La función objetivo que evalúa el error entre las curvas cinemáticas de ambos mecanismos viene dada por la siguiente expresión:

$$E = \sum_{k=1}^{np} \left(w_p \left| \phi_{3,k} - (f(\varphi_{1,k}) + \phi_{3,0}) \right| + w_v \left| \omega_{\phi_{3,k}} - \omega_1 f'(\varphi_{1,k}) \right| + w_a \left| \alpha_{\phi_{3,k}} - \omega_1^2 f''(\varphi_{1,k}) \right| \right) \quad (\text{A.1.9})$$

donde:

- np : es el número de posiciones angulares de la manivela del mecanismo articulado que se utilizan en el proceso de optimización; se eligen 24 posiciones uniformemente distribuidas entre $0 \text{ rad} \leq \varphi_1 \leq 2\pi \text{ rad}$;
- w_p, w_v, w_a : son los coeficientes de pesos de los errores de posición, velocidad y aceleración angular entre los eslabones de salida de ambos mecanismos; teniendo en cuenta que la velocidad angular del eslabón conductor es constante e igual a 1, se decide tomar como 1 todos los coeficientes;
- $\phi_{3\phi,k}, \omega_{3\phi,k}, \alpha_{3\phi,k}$: representan la posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido del mecanismo articulado correspondientes con la k -ésima posición angular del eslabón de entrada; el cálculo de estas variables se realiza, respectivamente, mediante las expresiones (A.1.2), (A.1.5) y (A.1.6);
- $\phi_{3,0}$: es la posición angular del eslabón de salida correspondiente a la posición angular de la manivela en 0° , $\phi_{3,0} = -0,8128^\circ$; en la definición de la ley de desplazamiento del engranaje circular se decide tomar $f(0) = 0$;
- ω_1 : es la velocidad angular del eslabón conductor, $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$;
- $f(\varphi_1), f'(\varphi_1), f''(\varphi_1)$: son la ley de desplazamiento y su primera y segunda derivada con respecto a φ_1 .

En los procedimientos propios de los algoritmos genéticos se define una población formada por un conjunto de individuos (cromosomas) cada uno de los cuales está formado por un conjunto de parámetros (genes) que definen el sistema estudiado. Cada individuo es una

posible solución del problema y su bondad como tal se valora por medio de la función objetivo [74, 75, 76].

La población evoluciona con el objetivo de obtener una mejor solución al problema planteado. Esta tarea puede ser alcanzada mediante los procedimientos propios de la reproducción natural como la selección, el cruzamiento, la mutación y otras operaciones genéticas [74, 75, 76]. En el procedimiento que se implementa se decide utilizar los procedimientos de selección, cruzamiento y mutación como procedimientos independientes.

El primer paso en la estrategia del método de optimización, es la generación de una población inicial [74, 75, 76]. En el procedimiento que se implementa en la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular, la población inicial es un conjunto de individuos cada uno de los cuales está formado por un conjunto de valores iniciales de las variables de diseño que se eligen aleatoriamente dentro del rango de diseño: $[b_2, b_{13}]$. Para la solución del problema, se decide trabajar con una población de cinco individuos.

Todos los genes, en el problema particular que se estudia constituyen las ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier, se agrupan en un vector que representa un cromosoma:

$$X = \{b_3, b_4, \dots, b_{11}\}$$

La selección es el proceso en el que se copia un individuo de acuerdo con el valor de la función objetivo, de tal manera que el individuo con mejor valoración de la función objetivo de la población tiene la mayor probabilidad de pertenecer a la siguiente generación [74]. El valor de la función objetivo de algunos individuos los excluye de la siguiente generación y generalmente son reemplazados por el individuo de mejor comportamiento. En el procedimiento desarrollado, los individuos de la población son ordenados de menor a mayor valor de su función objetivo. Los tres primeros individuos se conservan sin ninguna modificación. El cuarto y quinto individuos se reemplazan por el individuo de mejor comportamiento y después se modifican aleatoriamente el 50% de sus genes; el nuevo valor de los genes modificados se eligen aleatoriamente dentro del rango de diseño.

Después de la operación de selección, se aplica la operación de cruzamiento. En esta operación se cambian algunos de los genes de un individuo por los genes de otro,

generalmente por los del individuo de mejor comportamiento. El cambio de genes se realiza mediante un proceso aleatorio y el porcentaje de genes que se permuta puede ser un valor fijo o variable [74]. En la figura (A.1.3) se presenta un ejemplo de la operación de cruzamiento para una población con individuos con cinco genes. En el ejemplo de la figura, el segundo y cuarto gen del individuo k se reemplazan por los respectivos genes del individuo de mejor comportamiento.

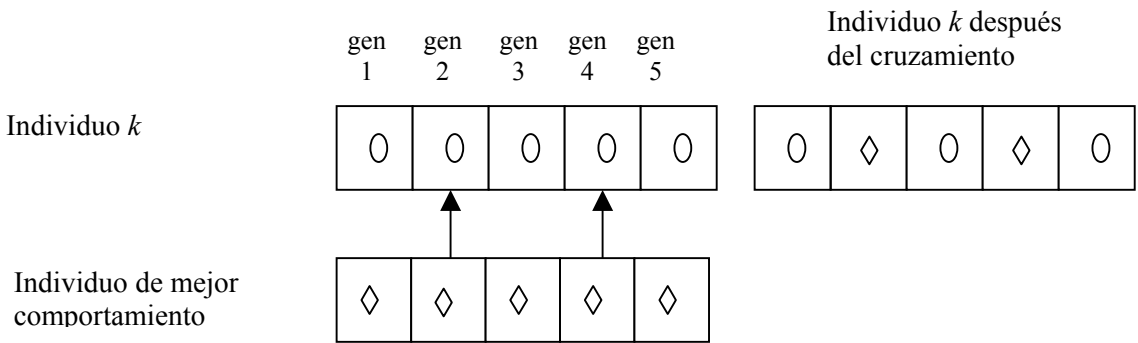


Figure A.1.3 Ejemplo de una operación de cruzamiento

En el procedimiento que se implementa, se decide conservar los genes del individuo de mejor comportamiento y cambiar el 40% de los genes de los individuos restantes. Estos genes se reemplazan por el gen respectivo del individuo de mejor comportamiento. La elección de los genes que se cambian se elige mediante una operación aleatoria:

$$\text{If} \left[\text{Round} \left[\text{random} - 0,1 \right] \right] = 1, \quad \text{gen}_{k,j} = \text{gen}_{k,1} \tag{A.1.9}$$

siendo $\text{gen}_{k,j}$ el valor del gen k del individuo j y random un número aleatorio dentro del intervalo $[0, 1]$ con media 0,5 de acuerdo a una distribución normal. En esta operación, se toma un número aleatorio en el intervalo $[0, 1]$; si éste es mayor que 0,6 ocurre el reemplazo del gen k del individuo j por el gen k del individuo 1; si es igual o menor que 0,6 el gen no se modifica.

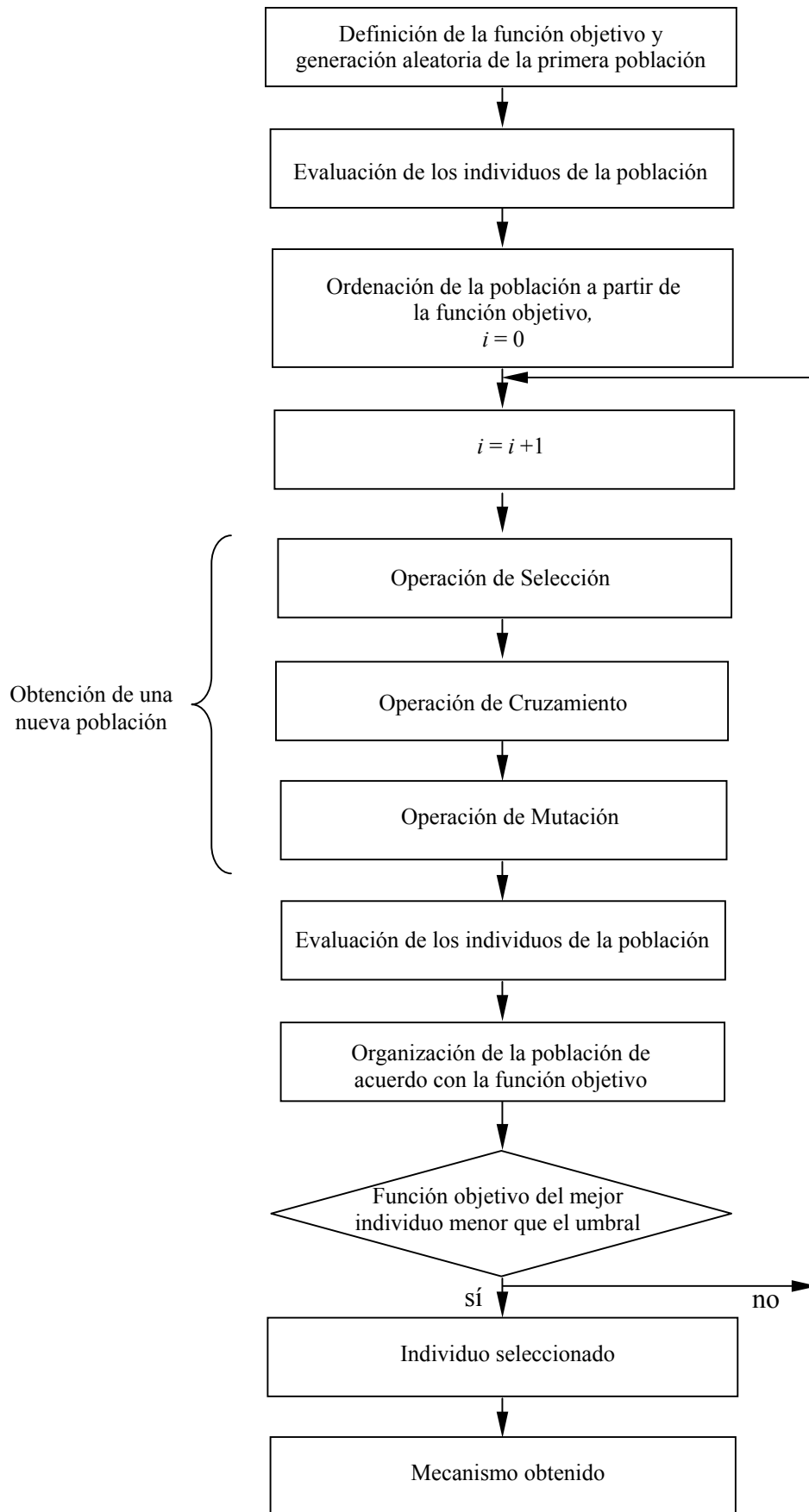


Figura A.1.4 Diagrama de flujo para la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular

Después de la operación de cruzamiento, se implementa la operación de mutación. La operación de mutación es una variación aleatoria del valor de un gen que generalmente se realiza sumando a éste una cantidad aleatoria con distribución normal media nula y desviación tipo $\sigma_{\text{mutación } k}$ [74].

Se define la siguiente operación en la implementación de la operación mutación:

$$gen_{j,k,\text{nuevo}} = gen_{j,k,\text{viejo}} + (\text{random} - 0,5)\sigma_{\text{mutación } k} \quad (\text{A.1.10})$$

donde:

$gen_{j,k,\text{nuevo}}$ es el valor nuevo del gen j del individuo k después de la mutación;

$gen_{j,k,\text{viejo}}$ es el valor del gen j del individuo k antes de la mutación;

$\sigma_{\text{mutación } k}$ es la variación máxima del gen k ; en este trabajo se asigna el 0,5% del valor del rango de diseño.

Cada gen debe estar dentro del rango de diseño $[b_2, b_{13}]$; mediante la implementación de dos operaciones simples consecutivas se impone esta restricción:

$$gen_{j,k} = \min(gen_{j,k}, b_{13}); \quad gen_{j,k} = \max(gen_{j,k}, b_2); \quad (\text{A.1.11})$$

En la figura (A.1.4) se presenta el diagrama de flujo de la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular. Después de definir la función objetivo, se generan los cinco individuos de la primera población, cada uno se evalúa y se organizan de acuerdo a la función objetivo. Con esta primera población se genera la siguiente población mediante las operaciones de selección, cruzamiento y mutación; los individuos de esta nueva población se evalúan y se organizan de manera similar a la primera.

Si la función objetivo del mejor individuo es mayor al umbral de aceptación elegido, en el procedimiento utilizado se decide como 0,1, se genera una nueva población. Este ciclo de generación se repite hasta que la función objetivo del menor individuo sea menor al umbral de aceptación. Cuando se obtiene esta condición se utilizan los genes del mejor individuo, ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier, para definir la ley de desplazamiento del engranaje no circular. La figura (A.1.5) muestra los puntos de control de la solución final, la curva de Bézier resultante y su polígono de control.

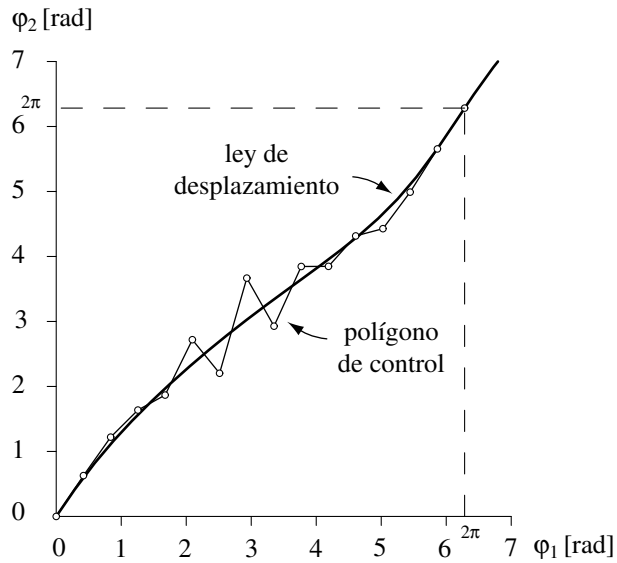


Figure A.1.5 Ley de desplazamiento del engranaje no circular

La figura (A.1.6) muestra la comparación entre las curvas cinemáticas del mecanismo articulado y el engranaje no circular. El error en las curvas cinemáticas es muy pequeño y se considera que el diseño es lo suficiente aproximado. La ley de desplazamiento del engranaje no circular y la relación entre las posiciones angulares de los eslabones conductor y conducido del mecanismo de doble manivela están decaladas. En los requisitos de diseño de la ley de desplazamiento y en la posterior obtención del perfil completo de los dientes, es conveniente cumplir con la condición $f(0)=0$, ya que la ley de desplazamiento representa una relación entre los ángulos de giro de las ruedas conductora y conducida; la ley de desplazamiento del mecanismo de doble manivela representa la relación entre las posiciones angulares de los eslabones conductor y conducido.

En la figura (A.1.7) se muestran las curvas primitivas y las ruedas dentadas de engranaje no circular que cumplen la ley de desplazamiento que se obtiene del proceso de optimización. El número de dientes de ambas ruedas es 32 y el ángulo de presión de la cremallera que se utiliza en el modelo de generación de los dientes es de 25° ; la distancia entre centros del engranaje es de 175 mm.

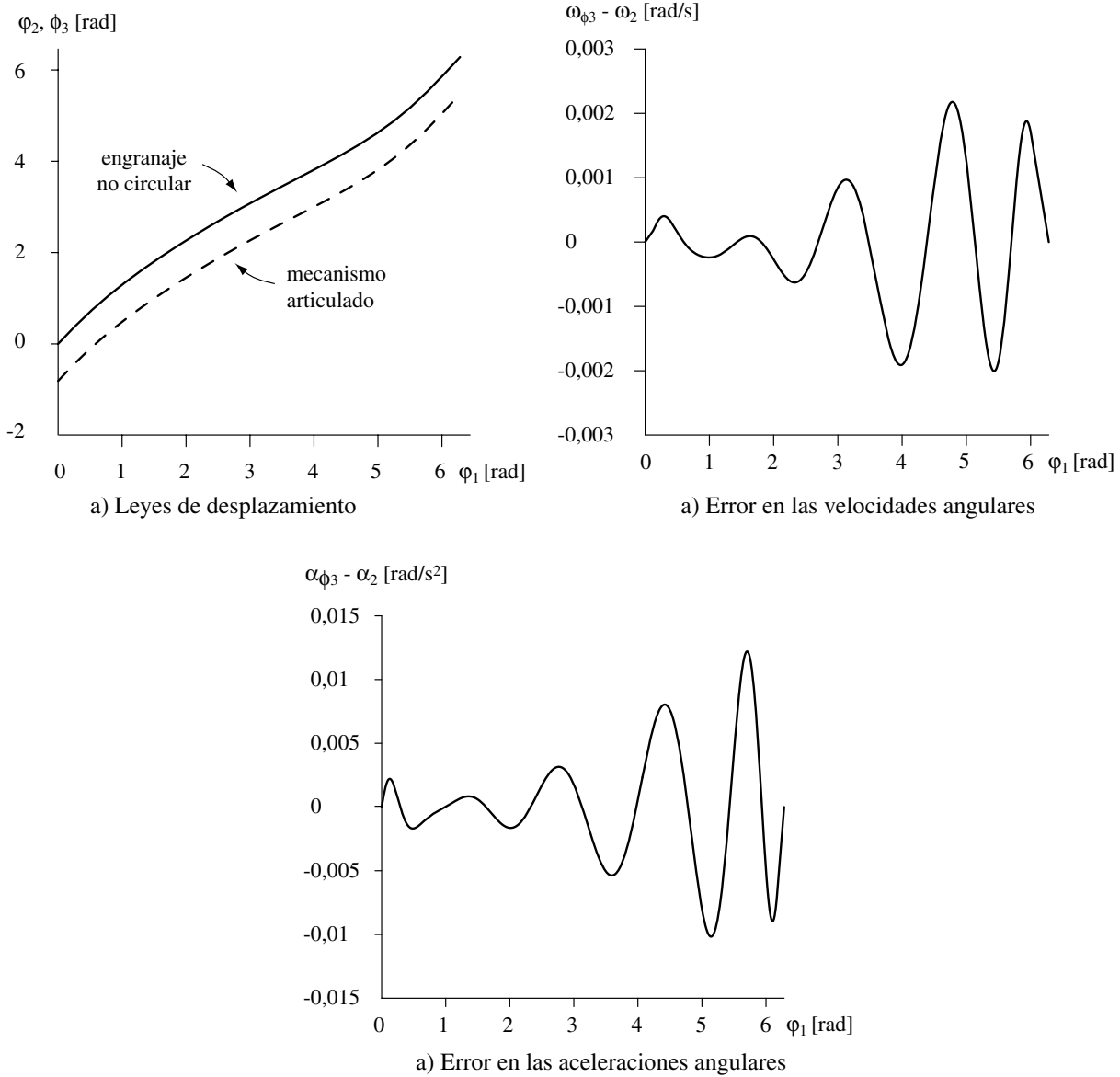


Figure A.1.6 Curvas cinemáticas del engranaje no circular y del mecanismo de doble manivela

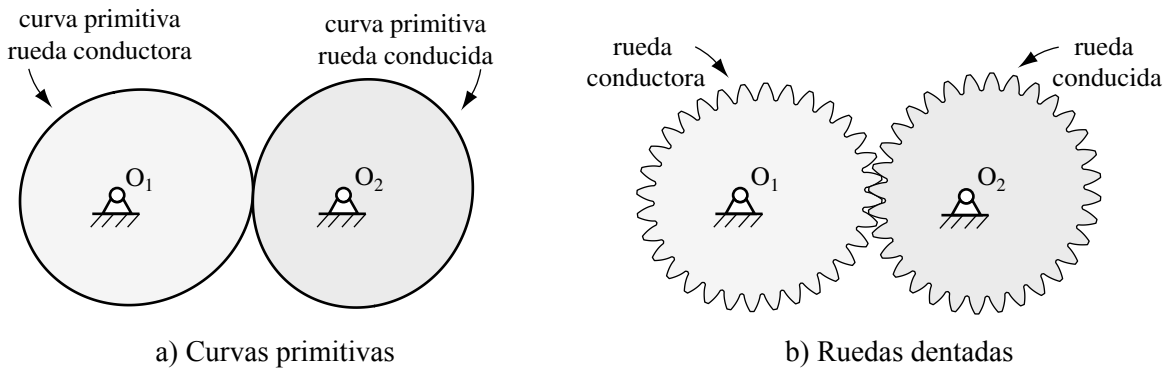


Figure A.1.7 Engranaje no circular