**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

# APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES CILÍNDRICOS RECTOS

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores
**Dr. Salvador Cardona Foix**
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

# ANEXO A.2

## EQUILIBRADO DE UN CUADRILÁTERO ARTICULADO

Cuando un eslabón está en movimiento, transmite fuerzas a su alrededor. Si este eslabón está desbalanceado, sus fuerzas de inercia contribuyen a la generación de vibraciones, ruido, desgaste y, por lo tanto, a problemas de fatiga. Si un mecanismo es balanceado completamente, la suma vectorial de las fuerzas de inercia que actúan sobre la estructura es cero. En un mecanismo articulado, se puede reducir el efecto de estas fuerzas, mas no eliminar completamente, debido a la existencia de eslabones que se mueven sin tener un apoyo fijo. Un método para obtener este resultado es el *método de los vectores linealmente independientes* [59, 71], que permite redistribuir las masas de los eslabones de tal forma que los términos dependientes del tiempo de la función que describe el movimiento del centro de masas de los eslabones móviles del cuadrilátero articulado sean cero.

### A.2.1 MÉTODO DE LOS VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

En la figura (A.2.1) se representa un cuadrilátero articulado con los respectivos centros de masas de los eslabones móviles, representados por $G_1$, $G_2$ y $G_3$. De la geometría del mecanismo se obtiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_3 + \boldsymbol{L}_4 \qquad \text{(A.2.1)}$$

La representación compleja, en el sistema coordenado OXY, de la anterior expresión es:

$$L_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1} + L_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2} = L_4 + L_3 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_3} \qquad \text{(A.2.2)}$$

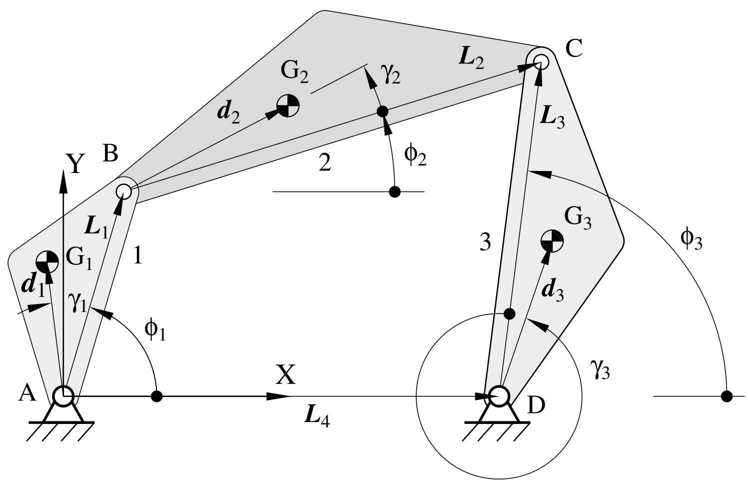



Figura A.2.1 Descripción de las variables

El centro de masas de los elementos móviles del cuadrilátero articulado es:

$$\boldsymbol{L}_s = \frac{m_1 \boldsymbol{d}_1 + m_2\left(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{d}_2\right) + m_3\left(\boldsymbol{L}_4 + \boldsymbol{d}_3\right)}{m} \tag{A.2.3}$$

siendo $m$ la masa del conjunto de eslabones móviles del mecanismo y $\boldsymbol{L}_s$ el vector que posiciona el centro de masas de los eslabones móviles del cuadrilátero articulado con respecto al origen del sistema coordenado OXY. La representación compleja de (A.2.3) viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{L}_s = \frac{m_1 d_1 e^{j(\phi_1+\gamma_1)} + m_2\left(L_1 e^{j\phi_1} + d_2 e^{j(\phi_2+\gamma_2)}\right) + m_3\left(L_4 + d_3 e^{j(\phi_3+\gamma_3)}\right)}{m} \tag{A.2.4}$$

En la expresión (A.2.4) se elimina el término $\phi_2$ mediante el reemplazo de (A.2.2):

$$\boldsymbol{L}_s = \frac{m_1 d_1 e^{j(\phi_1+\gamma_1)} + m_2\left(L_1 e^{j\phi_1} + d_2 e^{j\gamma_2}\left[\frac{L_4}{L_2} + \frac{L_3}{L_2}e^{j\phi_3} - \frac{L_1}{L_2}e^{j\phi_1}\right]\right) + m_3\left(L_4 + d_3 e^{j(\phi_3+\gamma_3)}\right)}{m} \tag{A.2.5}$$

Si se agrupan los términos que dependen del tiempo, $\phi_1$ y $\phi_3$, se obtiene:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}\left( m_1 d_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_1} + m_2 L_1 - m_2 \frac{L_1}{L_2} d_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} \right) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_3}\left( m_2 d_2 \frac{L_3}{L_2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} + m_3 d_3 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_3} \right) + \left( m_3 L_4 + m_2 \frac{L_4}{L_2} d_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} \right)}{m} \tag{A.2.6}$$

Si los coeficientes de $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi 1}$ y $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi 3}$ se anulan, el centro de masas de los eslabones móviles estaría en reposo y por lo tanto la $\sum F_{\text{exteriores}} = 0$ ya que $a$(G) = 0. De la aplicación de esta condición se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} m_1 d_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_1} + m_2 L_1 - m_2 \frac{L_1}{L_2} d_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} = 0 \\ m_2 d_2 \frac{L_3}{L_2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} + m_3 d_3 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_3} = 0 \end{gathered} \tag{A.2.7}$$

De acuerdo con (A.2.7), el balanceo del mecanismo articulado se obtiene con un adecuado diseño de la geometría y de la masa de los eslabones móviles. Cualquier combinación de contrapesos de balanceo y ubicación del centro de masas puede ser utilizada si se cumple la expresión (A.2.7).

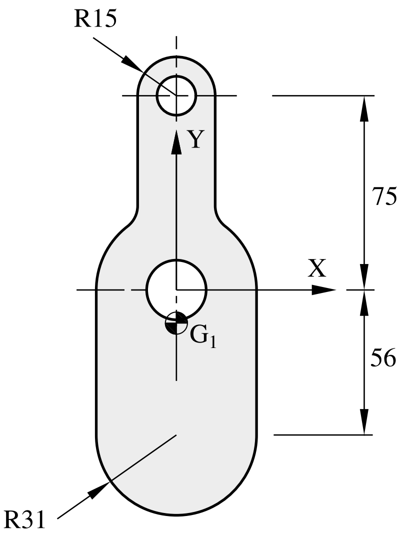
## A.2.2 DISEÑO DEL MECANISMO DE DOBLE MANIVELA

En la tabla (A.2.1) se presentan las propiedades de los eslabones del mecanismo de doble manivela que se diseña teniendo en cuenta el balanceo del mecanismo. La longitud del eslabón fijo es de 25 mm.

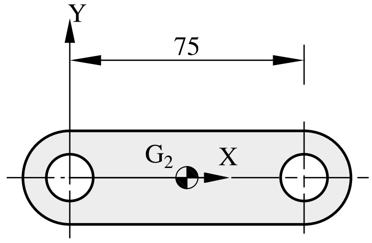
Tabla A.2.1 Propiedades de los eslabones del mecanismo de doble manivela

| Eslabón | Masa [kg] | Longitud [mm] | Momento de Inercia, respecto a CM [kg mm$^2$] | Posición del centro de masas [mm] |
|---|---|---|---|---|
| Manivela | 0,20757 | 75 | 483,78 | (0, -12,8) |
| Acoplador | 0,0729 | 75 | 59,57 | (37,5, 0) |
| Eslabón conducido | 0,27025 | 100 | 928,71 | (0, -13,1) |

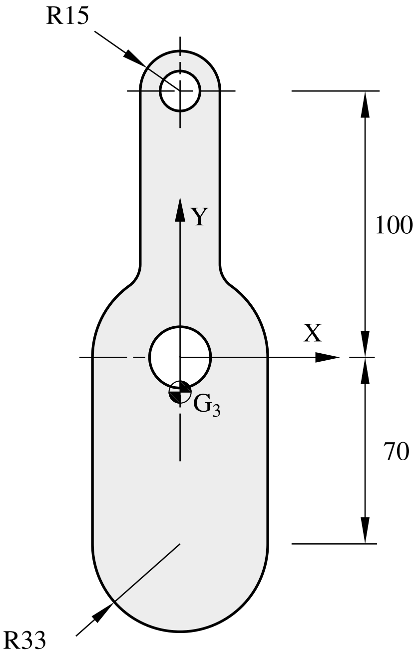
La figura (A.2.2) presenta los eslabones móviles del mecanismo de doble manivela con el propósito de ilustrar la distancia entre apoyos, la ubicación del centro de masas y el sistema local de coordenadas para su ubicación.




a) Manivela




b) Acoplador




c) Eslabón conducido

Figura A.2.2 Diseño de los eslabones del mecanismo de doble manivela

En la figura (A.2.3) se presenta la trayectoria del centro de masas de los eslabones móviles del cuadrilátero articulado; se observa que la variación de la trayectoria es pequeña y se considera que con el diseño de sus eslabones se obtiene un equilibrado adecuado.

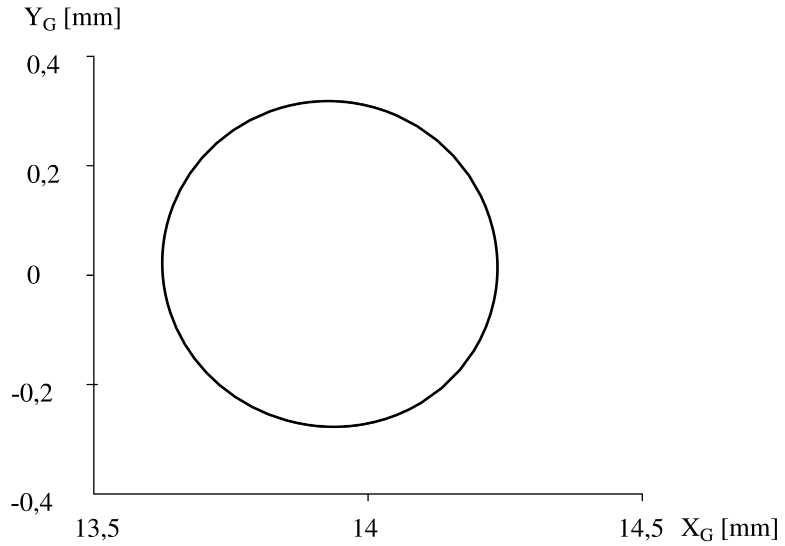



Figura A.2.3 Trayectoria del centro de masas de los eslabones móviles del cuadrilátero articulado

En la figura (A.2.4) se presenta el diagrama polar del vector fuerza de inercia residual, $\sum -m_i \mathbf{a}_{\mathrm{G}i}$, del cuadrilátero articulado bajo las condiciones establecidas en el apartado (5.3): el eslabón conductor gira a velocidad angular constante –$\omega_1$ = 13,823 rad/s– y existe un par resistivo constante en el eslabón conducido –$\Gamma_D$ = 2 Nm.

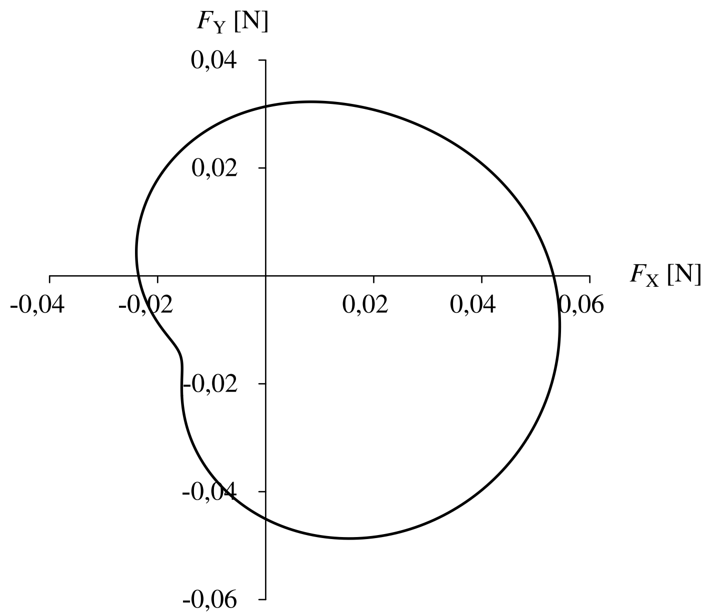



Figura A.2.4 Variación polar de la fuerza de inercia total del mecanismo

La fuerza de inercia residual es muy pequeña en comparación con las reacciones en los apoyos fijos mostradas en la figura (6.10) del apartado (6.3); este resultado permite observar la ventaja del método de balanceo que se utiliza.

Con este método de balanceo se obtiene que la suma de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo es constante; sin embargo, las fuerzas individuales que se transmiten a las articulaciones fijas varían con el tiempo. La magnitud de estas fuerzas puede ser mayor en el mecanismo balanceado, debido a la adición de contrapesos, que en el caso desbalanceado. En general, estas fuerzas producen un momento en el bastidor variable con el tiempo.

En el caso del equilibrado del cuadrilátero articulado en el que los eslabones no pueden ser modificados, se obtiene un resultado equivalente al adicionar dos contrapesos, unidos a los dos eslabones móviles. Generalmente, es más conveniente seleccionar los eslabones conductor y conducido [71].