

## Reconocimiento

El trabajo de una persona siempre recoge múltiples apoyos de los que le rodean. Por eso quiero ahora dar a conocer mi agradecimiento a todos aquellos de los que recibí su ayuda en algún momento desde el día, hace ya siete años, en que entré en el departamento de Estadística e Investigación Operativa a iniciar mis estudios de Doctorado.

Que estas líneas sirvan para expresar mi profunda gratitud al profesor Narcís Nabona; me siento honrado por haber tenido un excelente tutor y director de tesis, de quien he recibido las mejores enseñanzas en el plano académico y fuera de él.

Por supuesto, gracias, Susana.



## Índice de contenidos

<b>1</b>	<b>SOBRE EL PROBLEMA DE COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA.</b>	<b>15</b>
1.1.	El mercado de los sistemas de potencia	15
1.2.	Demanda de energía	16
1.3.	Fuentes de energía	18
1.3.1.	Los combustibles fósiles y nuclear	20
1.3.2.	Las energías renovables	22
1.3.3.	La importación de energía	23
1.3.4.	La energía hidráulica	24
1.4.	Coordinación hidrotérmica	29
1.4.1.	Problemas a largo plazo	31
1.4.2.	Adquisición de combustibles	31
1.4.3.	Jerarquía en la coordinación hidrotérmica	32
<b>2</b>	<b>DEFINICIÓN Y ANTECEDENTES.</b>	<b>34</b>
2.1.	Principales términos empleados	34



## Índice de figuras

Figura 1.1 : Representación de la carga en el tiempo. ....	16
Figura 1.2 : Representación de la curva monótona de carga. ....	16
Figura 1.3 : Cubrimiento de una curva monótona de producción . ....	18
Figura 1.4 : Esquema de mini-central de agua fluyente. ....	25
Figura 1.5 : Situación de la energía hidráulica en España. ....	25
Figura 1.6 : Generación hidráulica (G) y pluviosidad (Pl) en España. ....	27



## Introducción

El proyecto de tesis titulado “*Aspectos estocásticos en la coordinación hidrotérmica a largo plazo*” es el resultado de un trabajo de investigación enmarcado en el campo de la generación de electricidad y trata, más concretamente, de los principales aspectos de características indeterministas relacionados con la generación y coordinación hidrotérmica a largo plazo, tal como su mismo título resume. Es, por lo tanto, un proyecto directamente comprometido con la investigación aplicada en un sector estratégico de la economía.

El trabajo está situado en el dominio de la Investigación Operativa, dentro de la rama conocida como optimización estocástica; en consecuencia, se presenta estrechamente vinculado al área de las ciencias de la Estadística. El objetivo principal está planteado en investigar un modelo apropiado para el tema que permita desarrollar aplicaciones de minimización de los costes relacionados con la producción de energía eléctrica. Esta localización implica ciertamente simplificaciones en lo relativo al proceso físico-mecánico de generación de electricidad, en beneficio de una visión global obligada si se tiene en cuenta que el periodo de estudio tiene una magnitud temporal en torno al año, mientras que el número de centrales térmicas e hidráulicas que el problema considera es propio de las situaciones reales que se presentan en una compañía eléctrica.

Dentro de lo que se conoce como optimización estocástica existen un buen número de métodos establecidos. A partir de los trabajos del profesor Nabona, el método multiartículo entra dentro de este círculo, con su aplicación en problemas de optimización de la generación hidroeléctrica a largo plazo. El ánimo inicial en la investigación que este trabajo describe —pero que no culmina— se puede plantear como:

- realizar un estudio sobre el cálculo de distribuciones multiartículo para las aportaciones naturales
- determinar una estimación del error que el método introduce, teniendo en cuenta que se trata de una aproximación sobre las distribuciones de partida

Sin embargo, estos simples puntos de partida tuvieron que ser replanteados cuando se les unieron otros de evidente necesidad, y de ambiciones más elevadas, como elaborar una formalización concerniente a las variables aleatorias de bloques, íntimamente relacionadas con la teoría multiartículo, o extender ésta a un método para resolver el problema de coordinación hidrotérmica a largo plazo. Todos ellos se pueden unificar en un objetivo prioritario, perseguido por el trabajo que se describe en esta memoria, que es la consolidación de la teoría en el ámbito de la optimización estocástica.

¿Qué se entiende por consolidación? En primer lugar, demostrar que el método está respaldado por una teoría robusta. También, que esta teoría es suficiente para modelizar los sistemas que se consideran en los problemas eléctricos citados. Finalmente, que las soluciones halladas para tales problemas son verosímiles y pueden ser de utilidad al usuario que demanda una herramienta sofisticada para la evaluación de costes en parques hidrotérmicos con horizontes a largo plazo.

## Aportaciones de la tesis

En síntesis, la principal aportación de la tesis es haber logrado un avance significativo en el terreno de la optimización estocástica —más concretamente, en el terreno de la coordinación hidrotérmica a largo plazo— mediante la aplicación combinada de técnicas multiartículo y variables de bloques. Puesto que el campo de investigación en el entorno de la optimización con variables aleatorias de bloques es muy amplio todavía, esta contribución tiene aspiraciones a ser un paso importante hacia la madurez del método multiartículo.

Particularmente, deben destacarse los siguientes aspectos:

- descripción y estudio exhaustivo desde el punto de vista estadístico de la distribución de probabilidad genérica conocida como *de bloques*; ya utilizada en trabajos previos, en esta memoria se pretende categorizarla como variable aleatoria propia. De este proceso se desprende una metodología para estimar variables de bloques a partir de una muestra procedente de una variable cualquiera.
- cálculo de expresiones de la generación hidráulica esperada para la validación de una aproximación en uso. La comparación posterior sobre casos concretos evidencia una cierta sobreestimación en el cálculo de la generación por parte de la versión inicial. Estas expresiones reducen el sesgo en la estimación de la generación hidráulica esperada, aunque son alternativas menos eficientes computacionalmente.
- construcción de un procedimiento que permite simular políticas de largo plazo aplicables a una cuenca hidráulica. El proceso genera valores de aportaciones naturales condicionadas entre sí, y permite verificar si la política obtenida mediante la minimización de una función de coste probable de producción genera costes aceptables.
- desarrollo de técnicas específicas para un programa de coordinación hidrotérmica a través de curvas potencia-energía parametrizadas por factores indeterministas, entre los que se cuenta la generación hidráulica representada como distribución de bloques.
- desarrollo de un método para hallar la distribución de la suma de una variable de bloques y otra cualquiera independiente de la primera por el procedimiento de la convolución, y aplicación del mismo a distribuciones de la potencia en fallo hidráulica con la carga del sistema. A partir del mismo se construye una nueva función de coste probable de producción que no depende, como las anteriores, solamente de la

esperanza de la generación hidráulica.

- desarrollo e implementación de un modelo de optimización de la generación hidráulica a largo plazo basado en la nueva función de coste probable de producción, y que tiene en cuenta límites de potencia y de generación hidráulica.
- un aspecto que nunca se había abordado hasta ahora ha sido una comparativa de resultados teniendo en cuenta la influencia que presenta el número de bloques con que son representadas las variables. Las pruebas efectuadas no son taxativas en cuanto a este aspecto, pero proporcionan una información sumamente interesante.

## Breve presentación de la memoria

Los últimos párrafos de esta introducción servirán para presentar brevemente el contenido de los capítulos que componen la memoria de la tesis.

En el capítulo 1 se hace una presentación general del problema desarrollado en la memoria, así como de los elementos que aparecen en el entorno que rodea al mismo.

El capítulo 2 está dedicado a mostrar una panorámica sobre los métodos relacionados con la optimización estocástica en problemas eléctricos, y a definir y formular los dos problemas que suponen el centro del trabajo: optimización de la generación hidráulica y coordinación hidrotérmica a largo plazo. El capítulo también sirve para exponer la propuesta de un método multiartículo que permite buscar una solución a tales problemas teniendo en cuenta su estocasticidad intrínseca.

Los capítulos 3 a 6 giran alrededor de las variables de bloques. Se definen desde el punto de vista probabilista y estadístico, aportando métodos de estimación que son utilizados en algunas fases relacionadas con los citados problemas como, por ejemplo, la preparación de las aportaciones naturales a las características del método multiartículo.

En el capítulo 7 se describe la idea de política multiartículo, sobre la base de una red de flujos representando una cuenca hidráulica replicada temporalmente, por cuyos arcos circulan cantidades aleatorias de agua, representadas según una ley de probabilidad de bloques.

El capítulo 8 sirve para introducir expresiones alternativas para el cálculo de la esperanza de la generación hidráulica, según determinada política, expresiones que son comparadas con la opción definida inicialmente en el capítulo 7.

En el capítulo 9 se describen técnicas de simulación empleadas para someter a prueba una política multiartículo; las diferentes alternativas presentadas para el cálculo de la esperanza de la generación son testeadas mediante simulación.

El capítulo 10 está dedicado a explicar las técnicas multiartículo empleadas para

resolver el problema de coordinación hidrotérmica a largo plazo.

El capítulo 11 es el marco en el que se explica el mecanismo de convolución de variables de bloques con una variable cualquiera. El tema significa abordar la consideración del carácter estocástico de la generación hidráulica en relación con la carga del sistema. Posteriormente, en el capítulo 12, el método desarrollado da pie a una nueva formulación del problema de optimización de la generación hidráulica, expuesto junto con pruebas validatorias del funcionamiento del método.

Finalmente, en el capítulo 13 se exponen las principales conclusiones derivadas de la investigación realizada, junto con propuestas sobre posibles extensiones del trabajo.

## CAPÍTULO 1

# SOBRE EL PROBLEMA DE COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA

### 1.1 El mercado de los sistemas de potencia

La satisfacción de la demanda eléctrica implica un elaborado proceso de generación, transporte y distribución de la energía eléctrica hasta los puntos de consumo. Teniendo en cuenta que este proceso se lleva a cabo a nivel nacional, o incluso internacional, se comprende que detrás exista una compleja estructura que necesita una planificación constante de los medios disponibles y a prever. La implantación predominante de la energía eléctrica en la sociedad actual obliga a las compañías que se encargan de su gestión a suministrar electricidad a sus usuarios con la máxima fiabilidad, debiendo por otra parte cubrir el objetivo de que su actividad sea económicamente viable. El compromiso entre calidad y coste que aparece, junto con las dimensiones que el negocio de la electricidad trae consigo, obliga a que todo el sistema sea llevado adelante en el control más exigente. La siguiente es una clásica perspectiva que muestra cuáles son las escalas de tiempo más comunes empleadas en la planificación de sistemas de potencia:

- muy largo plazo: a partir de un cierto número de años (p.ej. 5) hasta 20 años o más. Su principal objetivo es establecer planes de expansión conforme a las predicciones para el crecimiento de la demanda.
- medio-largo plazo: a partir de un año. Se establecen políticas de operaciones para la compra de combustibles, la generación y el mantenimiento de las plantas.
- corto plazo: el horizonte abarca hasta una semana. Se programa la asignación de las unidades de producción y el despacho económico.
- tiempo real: se incluyen las operaciones necesarias para el control automático de generación, la simulación de operaciones y la vigilancia de la seguridad de la operación.

En esta secuencia, la información proveniente de la etapa superior es utilizada convenientemente. Por ejemplo, la planificación a corto plazo debe basarse en las directrices que la planificación a largo plazo ha encontrado, como puedan ser restricciones de generación para la semana entrante.

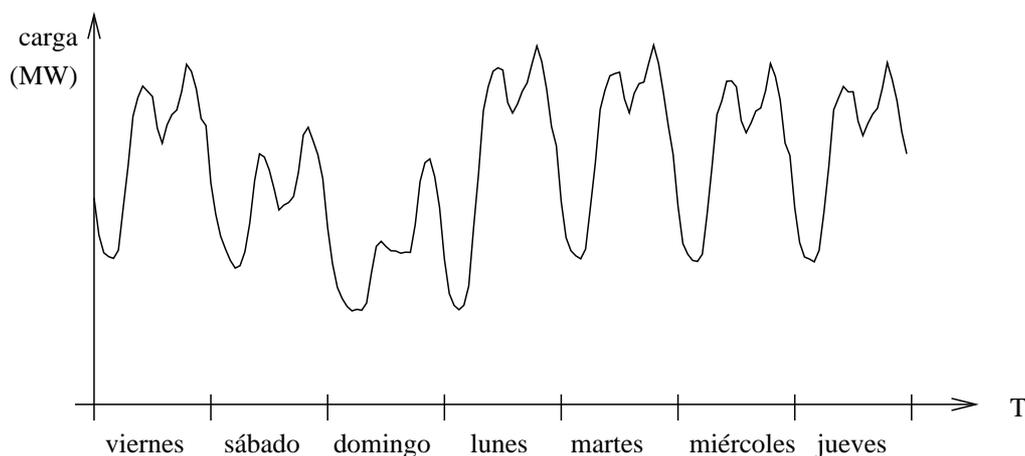
El uso de los ordenadores en el campo eléctrico ha tenido como consecuencia primera la aceleración de los cálculos que antes requerían tiempos extremadamente largos, pero

también ha supuesto la posibilidad de abordar problemas que antes ni tan sólo se podían plantear. Entre estos, la minimización de los costes que aparecen en varias partes del proceso de producción, problemas que debido a la magnitud de los casos reales son en general de grandes dimensiones. Hoy día, los ordenadores resultan tan imprescindibles como lo es la misma electricidad, pues ayudan en la toma de decisiones proporcionando políticas óptimas de cara a la planificación del sistema.

En este trabajo se aborda el problema de la coordinación hidrotérmica a medio-largo plazo. Previa a la descripción más particular de este problema, se ofrece una visión general relativa a algunos de los aspectos que están implicados dentro del tema.

## 1.2 Demanda de energía

El consumo que realiza el usuario se trata como el valor medio de la carga que una instalación eléctrica absorbe en un lapso de tiempo, y que recibe el nombre de *demanda*. Por tanto, la demanda se mide en unidades de potencia, generalmente MW, y se consideran intervalos de una hora, un día, etc.

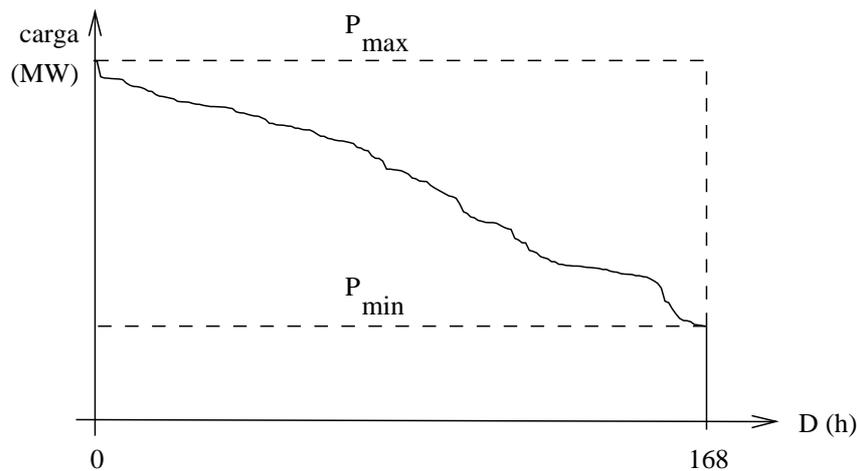


**Figura 1.1 :** Representación de la carga en el tiempo. Los datos corresponden a una semana de febrero de 1992 en España.

La más acusada característica de la demanda es su variabilidad. La carga es diferente cada año —crece en tiempos de bonanza económica—, cada mes —principalmente por razones meteorológicas, pero también por la presencia de periodos vacacionales—, cada día de la semana —marcadamente entre los laborables y los fines de semana—, y cada hora —mayor durante la jornada de trabajo. El ejemplo de la Fig. 1.1 —una denominada *curva de carga*— correspondiente a un caso real, sirve para mostrar cómo es la variabilidad horaria y diaria en una semana de febrero. A pesar de las variaciones de la demanda, ésta no tiene un comportamiento propiamente aleatorio, debido a una serie de variables que determinan en gran manera la demanda final.

Entre estas variables explicativas, destacan los factores ambientales, los hábitos de consumo y la tendencia económica. El factor ambiental que más incide en la demanda

es claramente la temperatura, que se traduce en un mayor o menor uso de calefacción o refrigeración. En otro orden de cosas podemos nombrar la laboralidad, un ciclo de consumo al que todo el mundo, industrias y particulares, está sujeto, y que se repite diaria, semanal y anualmente. Por esta causa se explican los picos de carga presentes a media mañana y a media tarde, o que el sábado y el domingo sean días con una carga media sensiblemente menor. Por último, un factor que es aprovechado en la previsión a más largo plazo es la actividad económica. Así, se observa que tras una recuperación económica hay un incremento de la demanda extendido sobre toda la anualidad. El conocimiento bastante cercano de estas pautas permite que las previsiones a corto plazo sean razonablemente acertadas, lo cual es muy deseable cuando se pretende planificar con el menor coste posible la generación que tiene que cubrir la demanda.

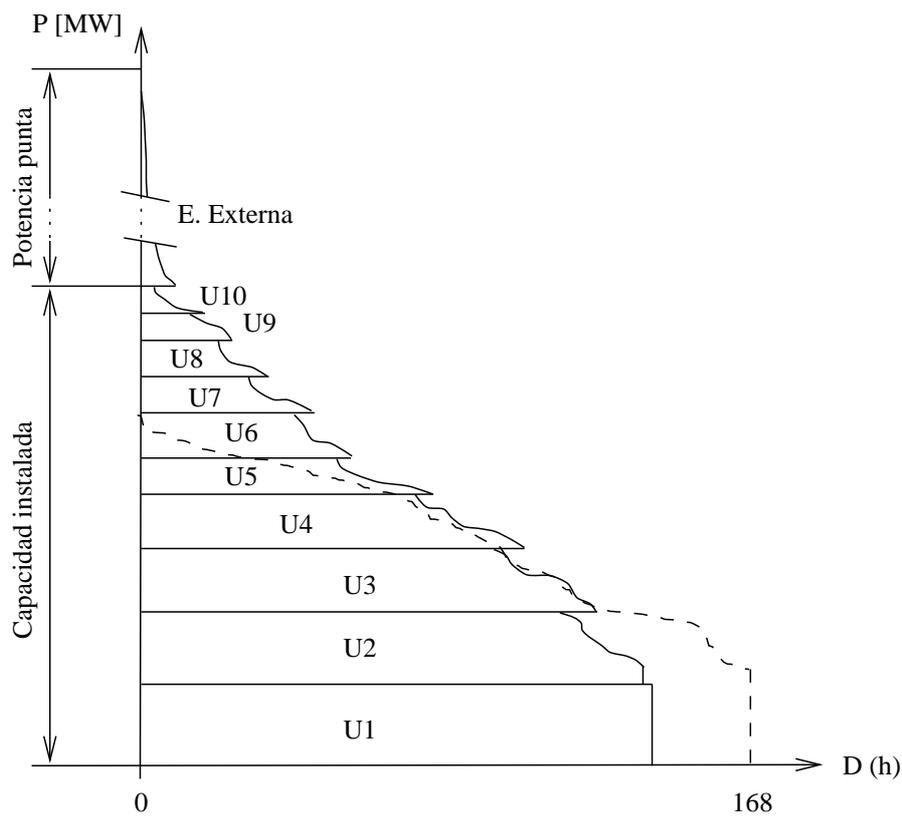


**Figura 1.2 :** Representación de la curva monótona de carga. Los datos corresponden a la misma semana de la Fig. 1.1.

La información de la curva de carga es demasiado prolija en los detalles de variación horaria, diaria, semanal, etc., y no resulta conveniente a fin de realizar programaciones a largo plazo. Para ello se adopta la *monótona de carga*, construida a partir de la curva de carga a base de ordenar los valores de carga de mayor a menor, disponiéndolos sobre un eje de duraciones. Véase en la Fig. 1.2 la curva correspondiente al ejemplo anterior, sobre un eje que contempla hasta 168 horas. Bajo ambas curvas, el área representa la energía total que se ha consumido durante el periodo considerado.

Cuando se estudia la demanda de energía en un horizonte a largo plazo, puede convenir tomar la potencia de carga como una variable aleatoria, cuya distribución de probabilidad viene dada por la monótona. Sin embargo, aunque siempre la potencia generada debe igualar la carga que se necesita (incluyendo pérdidas), la monótona de carga no refleja la producción, debido a que no todas las unidades están funcionando siempre, aunque fuera deseable debido a su eficiencia. O bien porque necesitan pararse por mantenimiento, o bien porque inevitablemente puede surgir una avería, hay que considerar unas duraciones inferiores a las del periodo que se trata. Por la misma razón, la capacidad máxima la generación de la que dispone una compañía eléctrica para cubrir la carga máxima no coincide con ésta, sino que debe sobrepasarla ampliamente si se desea garantizar la calidad del servicio.

En consecuencia, la producción puede representarse como una monótona alterada de manera que contemple la posibilidad de incidencias que puedan inhabilitar una parte de los recursos de generación; debe cubrir un área igual al área bajo la monótona de carga, de aquí que se entienda que la satisfacción de la demanda equivale a asignar a cada unidad de generación una fracción de la superficie que abarca la monótona de producción. Sin embargo, no se puede dejar de lado la posibilidad de fallo conjunto en un cierto lapso de tiempo de un número de unidades tal que el resto de las unidades no tenga capacidad suficiente para cubrir la demanda correspondiente al lapso, lo cual se traduce en una cierta porción de la carga que no puede ser atendida. Por esta razón, la monótona de producción presenta una punta superior a la monótona de carga. El criterio seguido normalmente para ordenar de la manera más económica las unidades térmicas consiste en dar prioridad en la franja de las potencias base a las unidades más eficientes, las que previsiblemente producirán el MWh más barato, pero también las que no estarán sujetas a las fluctuaciones de la demanda para las que no están preparadas —la operación de parada y arranque suele ser onerosa. Suelen ocupar estas plazas las grandes térmicas y nucleares. Luego siguen las unidades menores, con mayores costes pero con mejor disponibilidad. Las últimas unidades que deben ubicarse son las de respuesta rápida, como las de turbinas a gas. En la punta aparece la zona correspondiente a demanda no servida, que debe ser cubierta con energía importada de otras compañías.



**Figura 1.3 :** Cubrimiento de una curva monótona de producción . En línea discontinua aparece la curva monótona de carga.

Con la Fig. 1.3 se puede observar un esquema de cómo quedaría el cubrimiento de la

demanda del ejemplo anterior disponiendo 10 unidades de generación.

Cuando intervienen centrales hidráulicas, esta descripción resulta ser menos adecuada, ya que es difícil asignar a la generación hidráulica el lugar que le corresponde. Por su “coste” es evidente que debería ubicarse en el primer lugar; sin embargo, debido a que el agua es un recurso limitado, la operación normal consiste en utilizar esta energía para terminar de cubrir los momentos de máxima demanda, es decir, la punta de la monótona. Este tema será tratado ampliamente en este trabajo.

### 1.3 Fuentes de energía

Como existe una bibliografía abundante que trata el tema directamente o en relación a otros temas eléctricos, reseñaremos sólo unas pocas referencias que se han consultado para elaborar la descripción que sigue, además de las que van apareciendo en el texto referidas a puntos concretos: [ORIL93], [McMU76], [TAYL83].

#### 1.3.1 Los combustibles fósiles y nuclear

Estos combustibles alimentan las llamadas *centrales térmicas*, ya que su funcionamiento consiste en generar calor (por combustión o por fisión) que absorbe un fluido motor (generalmente, vapor de agua); la expansión de este fluido provoca que la energía calorífica se convierta en energía mecánica, la cual se transforma en electricidad cuando pone en funcionamiento la turbina de un generador. Los tipos de combustible más comunes son:

- carbón
- fuel
- gas natural
- uranio enriquecido

Generalmente, los yacimientos no se encuentran en el lugar de producción (es sobre todo el caso de los derivados del petróleo), por lo que suponen un coste añadido de transporte de la materia prima desde el punto de extracción. Pueden precisar de un cierto tratamiento previo: refinado del petróleo, enriquecimiento del uranio para convertirlo en isotopo  $U_{238}$ , presurización del gas (y el proceso inverso) para hacer rentable el transporte de este material. Son recursos agotables. Tienen abundantes efectos nocivos sobre el medio ambiente: desprenden dióxido de carbono, que favorece el calentamiento de la atmósfera, óxidos de azufre y de nitrógeno; como necesitan un medio refrigerante, a veces se ubican cerca de los ríos, y pueden modificar la temperatura del agua, en perjuicio del ecosistema fluvial. Aunque no provocan contaminación química, las centrales nucleares son continuo motivo de polémica, debido al potencial peligro que supone la contaminación radioactiva. La producción de electricidad por esta vía, siendo muy eficiente, se encarece notablemente debido a la exigencia de cada vez mayores medidas de seguridad; por otra parte, no se puede estimar aún el impacto económico que supondrá la desmantelación de las instalaciones cuando lleguen al final de su vida útil, así como el tratamiento de los residuos radioactivos de larga duración.

Aunque existen bastantes países que no dependen de estas fuentes de energía, ya que poseen una sobrada capacidad hidráulica —como es el caso de Noruega o Brasil—, la mayoría de las naciones apoyan su consumo en centrales de producción térmica. Dentro de las limitaciones que vienen impuestas por condicionantes económicos, sociales y medio-ambientales, su ubicación no exige un emplazamiento idóneo, como las centrales hidráulicas. Su producción está asegurada (salvo paradas por mantenimiento o imprevistos) mientras se mantenga una reserva de combustible lo cual, dentro del primordial objetivo de calidad del servicio que debe ofrecer una compañía eléctrica, es sinónimo de garantía. Esta característica facilita la planificación de la producción de energía, que se vería sujeta tan sólo a variaciones en el precio del combustible o a eventuales fallos de las unidades.

El papel que desempeñan las centrales térmicas —por lo menos, las que tienen por su capacidad una presencia significativa— es ser la base del sostenimiento de la demanda. Su puesta en marcha y apagado son operaciones costosas y lentas, deben trabajar por encima de un mínimo técnico y generalmente a pleno rendimiento, ya que es donde alcanzan la máxima eficiencia. Las unidades más sencillas se colocan por encima de las centrales básicas: no son tan eficientes, pero tienen mejor capacidad de maniobra para adaptarse a las modificaciones de la carga. Entre éstas, en el Plan Energético Nacional [PEN91] se destacan especialmente las de turbinas a gas, por dos razones: tecnológicas, al haber alcanzado un nivel de operación que permite su implantación y uso eficaz; y económicas. La existencia de grandes reservas de gas en el Magreb y en los países del Este europeo y la construcción de gasoductos va a permitir la expansión en el estado de modernas centrales de gas, las cuales son más operativas y mucho menos contaminantes que las de otros tipos de combustible fósil.

### 1.3.2 Las energías renovables

Entran dentro de este apartado:

- la energía solar
- la energía hidráulica
- la energía eólica
- la energía geotérmica
- el aprovechamiento de la biomasa y de los residuos sólidos urbanos

Excepto la energía hidráulica convencional (generada en cursos fluviales y que es tratada con mayor detalle en un apartado posterior), las demás tienen una presencia testimonial dentro del espectro energético de la mayoría de los países, aunque las sucesivas crisis en las que cae el sector desde el año 1973 hacen crecer el interés por este tipo de energías.

En general, sólo pueden manifestarse en determinados puntos en los que se concentran una serie de condiciones óptimas: lugares con una alta disponibilidad media de vientos, o con un gran número de horas anuales de insolación, o con cierta actividad geotérmica superficial; por su disponibilidad dependiente de factores no controlables por el hombre, resulta complicada la planificación de estos medios de producción. Entre las hidráulicas se

cuentan —casi anecdóticamente— las centrales mareomotrices, que precisan de un estuario o ría apropiado que sirva para embalsar una gran cantidad de agua, pero con una boca estrecha en la que construir el dique, y al mismo tiempo una gran diferencia de alturas entre la pleamar y la bajamar. El paradigma de central mareomotriz se encuentra en Francia, en el estuario del Rance.

Por contra, el aprovechamiento de la biomasa y de los residuos sólidos urbanos sería aplicable sin restricciones, y además solucionaría otros problemas, al ayudar a la limpieza de los bosques, previniendo sobre el peligro de los incendios forestales, y eliminando una parte de los residuos que se generan en las ciudades. Su incidencia en la balanza energética es escasa, y seguramente siempre será una fuente de energía menor aunque se prevee un importante alza en los próximos años.

La mayoría de estos recursos no están más que en fase experimental (dejamos aparte la explotación de la energía del agua), aunque quizá destaque el potencial de la energía eólica, que dispone en España de unos cuantos centros ya conectados a la red de distribución. La expansión de la energía solar está muy limitada debido al escaso rendimiento que se obtiene y a la carestía de los materiales; actualmente, su interés reside principalmente en el precalentamiento de agua de instalaciones domésticas.

### 1.3.3 La importación de energía

Por último, aunque es evidentemente de una naturaleza distinta, un recurso del que toda compañía eléctrica puede disponer para satisfacer la demanda es la importación de energía del mercado exterior. Es el más caro de los recursos, pero es imprescindible para asegurar el suministro interno en condiciones extremas.

Conviene distinguir entre la importación de energía con carácter de emergencia (que denominaremos comúnmente *energía externa*), y los intercambios establecidos entre compañías en forma de contratos.

Para las empresas del sector eléctrico es una práctica habitual la adquisición de energía a otro productor, como una alternativa simple a la construcción de una central propia, lo cual es una obra que debe acometerse cuando existan unas mínimas garantías de su rentabilidad futura. En general, el vendedor realiza su oferta para un cierto periodo de tiempo, y los precios de la energía pueden variar según la magnitud de la adquisición. Por ejemplo, un determinado contrato tiene vigencia durante el mes de julio y el coste que supone para la compañía compradora viene dado por unas zonas definidas, en cada una de las cuales la energía tiene un precio diferente (y decreciente, para que sea más atractivo).

De alguna manera, se reconocen ciertas similitudes entre un contrato de compra de energía y una unidad térmica propia: en ambos tipos se contempla una capacidad máxima y también una probabilidad de servicio. Por todo ello, es posible considerar un tratamiento uniforme extensible a contratos y unidades propias. Una empresa compradora ha de evaluar juntamente con el parque térmico que posee los contratos que se le ofertan a la hora de establecer la procedencia de la energía que debe satisfacer la demanda a la que debe hacer frente. Desde otro ángulo, una empresa interesada en ofertar parte de su producción tiene que incluir un incremento de su demanda debido a la energía susceptible de ser

exportada. La valoración de la energía o la cantidad de la misma que entra en la transacción son aspectos que precisan para su justa estimación de herramientas analíticas capaces de integrar los contratos en el marco general del mercado de sistemas de potencia.

En Europa del Norte se encuentra un buen ejemplo que muestra las ventajas de un mercado abierto. Los países escandinavos potencian la utilización coordinada de sus recursos, dado que sus perfiles son notablemente diferentes: Noruega utiliza fuentes predominantemente hidráulicas, Finlandia y Suecia poseen un parque mixto hidro-nuclear-fósil, y Dinamarca se basa enteramente en el uso de centrales térmicas de combustible fósil. Como se muestra en [BOTN94], la utilización coordinada multinacional de sus recursos representa evidentes ventajas económicas.

En otro plano, todavía en el continente europeo, el marco de la Unión Europea ofrecerá con toda seguridad una oportunidad para el crecimiento del transporte internacional de la energía eléctrica.

A nivel nacional, el intercambio entre las compañías eléctricas que operan en el estado va a aumentar de manera sustancial a raíz de la progresiva liberalización que se producirá en el sector, si bien estos trasvases de energía deberían producirse no tanto con carácter de urgencia, sino más bien como operaciones que buscarían el beneficio mutuo (por poner un ejemplo: una compañía que posea producción nuclear cede energía en horario nocturno a otra con capacidad de bombeo, que se la retorna en horario punta).

#### 1.3.4 La energía hidráulica

La energía del agua es un recurso especialmente favorecido. El agua es un elemento no contaminante, fácilmente manipulable, como lo prueba el hecho mismo de la existencia desde hace varios siglos de tecnología hidráulica. La turbinación, el procedimiento empleado para generar electricidad a partir de ella, no degrada la calidad de ésta. Permite obtener energía eléctrica con un alto rendimiento, que puede llegar a superar el 95%; esta alta rentabilidad se debe a que la energía potencial del agua se transforma directamente en electricidad sin tener que producir calor, tal como hacen las centrales térmicas. Tras una considerable inversión inicial, consistente en la construcción del pantano y la dotación de maquinaria, obtiene rendimientos con costes variables nulos; de hecho, un embalse está amortizando los costes fijos que supuso su construcción durante una parte importante de su vida útil. Por otro lado, gracias al ciclo de la lluvia, el agua es un recurso renovable, por lo que puede aliviar de una manera significativa, o incluso notable, la costosa factura energética de un país que pueda disponer de este recurso. Numerosos textos especializados se hacen eco de estas ventajas, aunque también se señalan algunos inconvenientes asociados al desarrollo de la hidroelectricidad, como por ejemplo los derivados de la construcción del embalse en el medio ambiente, lo cual supone de partida anegar un valle con la pérdida de un ecosistema (ver, por ejemplo, [RAAB85] o [GULL91]).

Para que se pueda captar la energía potencial hidráulica, es necesaria una cierta altura de caída para una cierta masa de agua capaz de poner en marcha un mecanismo giratorio que, a su vez, induce una corriente en un generador. Esto queda claramente reflejado en

la expresión:

$$W = m g h \quad (\text{J})$$

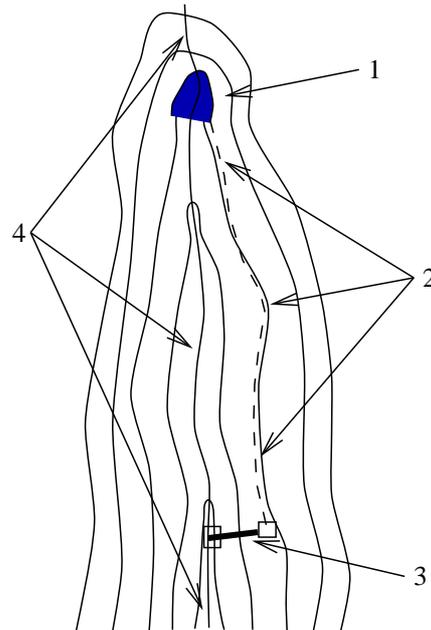
Es decir, la diferencia de energía potencial del agua,  $W$ , expresada en *Joules*, es función de  $m$ , la masa de agua en Kg. descargada desde una altura de  $h$  metros, siendo la gravedad  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ . Los límites para la producción de electricidad vienen impuestos por la cantidad de agua y por el salto disponibles: por esta razón, se encuentran construcciones hidráulicas de dimensiones muy dispares, desde las enormes centrales del Amazonas, que tienen una capacidad superior a los 12000 MW a las mini-centrales de uso local, que no superan 1 MW de potencia. Evidentemente, las mayores obras son las que tienen las mejores oportunidades de alcanzar los mejores rendimientos; sin embargo, ya se ha desarrollado tecnología como para producir turbinas suficientemente avanzadas que puedan ubicarse en situaciones más modestas, alcanzando sin embargo rendimientos muy satisfactorios. Es una aproximación de la que haremos uso posteriormente escribir:

$$P = \rho g Q h \quad (\text{KW})$$

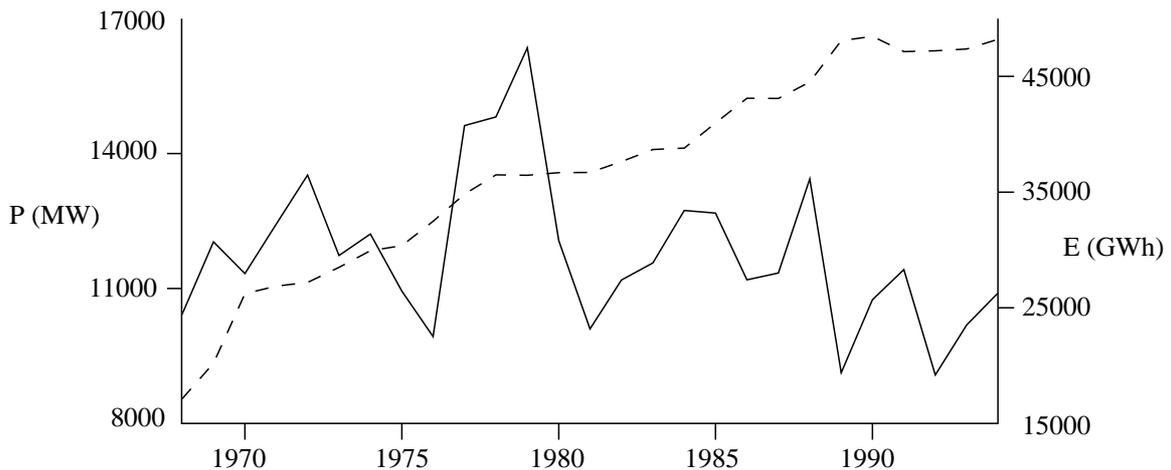
donde por  $P$  se expresa la *potencia* instantánea eléctrica que se obtiene por el trabajo derivado de la descarga de un caudal  $Q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) de una altura  $h$ .  $\rho$  viene a significar el rendimiento global tras las pérdidas que supone el rozamiento o la disipación de energía; en el trabajo realizado se ha adoptado constante, aunque una alternativa más precisa podría emplear una eficiencia variable con el volumen de agua descargada y la cota de descarga.

La electricidad debe ser generada en el mismo instante de su consumo, pues no puede ser almacenada, cuando se considera dentro de las magnitudes que se manejan en el mercado eléctrico. Puesto que la carga varía notablemente durante el transcurso del día, el precio del MW no es constante; en un escenario ideal, cuando existe superávit de energía (en las llamadas horas valle, fundamentalmente horas nocturnas, y también en fin de semana) debería poderse guardar el exceso para su uso en las horas punta (a grandes rasgos, las horas diurnas de los días laborables). Con esta solución, la planificación de los grupos productores sería sencilla: trabajar siempre en régimen óptimo.

Una de las mejores cualidades de la energía hidráulica es su capacidad de almacenamiento, en forma de energía potencial. El carbón, el gas o el uranio también tienen energía potencial, pero a diferencia de las centrales térmicas, las centrales hidráulicas son capaces de generar electricidad o variar su producción en pocos minutos (a esta característica se le llama *flexibilidad*). Por esta razón se adjetiva a los embalses de gran capacidad como *sistemas de regulación*, ya que tienen una gran importancia en los momentos de mayor carga, cuando pueden complementar a las centrales básicas, sustituyendo a las menos operacionales y más caras unidades térmicas. Existen también embalses que no se atienen a esta función, ya que debido a su pequeño tamaño tienen poca o nula función reguladora: son los llamados embalses *de agua fluyente* o mini-centrales, que básicamente se limitan a producir electricidad más o menos continuamente. Aunque se encuentran en un número importante a lo largo de muchos ríos, su baja capacidad hace que su peso en el total del producible (por lo menos, en el estado español) sea bastante reducido. En la Fig. 1.4 se muestra el esquema de un tipo de mini-central que consigue una ganancia de cota mediante una conducción paralela, la cual lleva el agua hasta el punto de descarga.



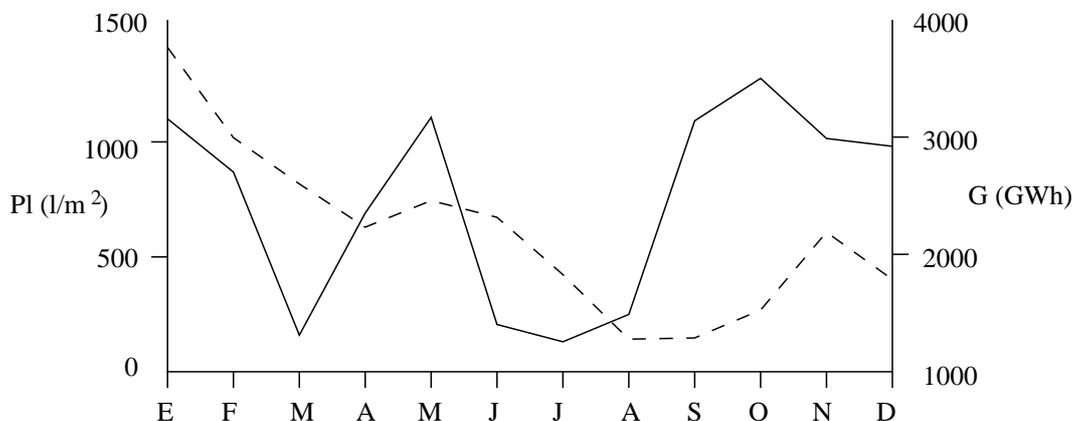
**Figura 1.4 :** Esquema de mini-central de agua fluyente. 1) Presa y embalse (sin capacidad regulatoria). 2) Conducción que desciende con una pendiente más suave que la del río. 3) Tubería de descarga. 4) Río.



**Figura 1.5 :** Situación de la energía hidráulica en España. En línea continua, producción bruta; en línea discontinua, potencia instalada. Datos de 1968 a 1994.

Al hacer su aparición las centrales reversibles es cuando se hace mayor el grado de adecuación entre la capacidad de regular la oferta y la demanda de la carga y la existencia de los embalses. Una central hidroeléctrica reversible dispone de un sistema de turbinas y alternadores capaces de girar en ambos sentidos; de esta manera puede hacer uso del excedente de potencia en horas de bajo consumo para bombear agua con destino a un embalse aguas arriba. Así, el embalse deja de ser un elemento pasivo, dependiente de las aportaciones naturales que recibe, ya que puede intervenir activamente para incrementar sus reservas. Las principales características de las centrales con capacidad de bombeo, adaptando de un texto de talante introductorio [JARA88], son:

- Permiten absorber energía sobrante
- Transforman la energía de horas valle en energía de horas punta; la plusvalía que esto supone justifica por sí misma el consumo de energía para el bombeo
- Consiguen una garantía de potencia instalada, pues para disponer de agua es preciso haber bombeado previamente, logrando mayor grado de autonomía de los caudales naturales



**Figura 1.6 :** Generación hidráulica (G) y pluviosidad (PI) en España. En línea discontinua, producción bruta; en línea continua, precipitaciones. Datos de 1994.

La expansión actual de la energía hidráulica se presenta hipotecada por su característica más acusada: su naturaleza indeterminista. Como en última instancia, su producción depende del azar de las aportaciones naturales, resultaría arriesgado confiar excesivamente en su capacidad de generación. Por ejemplo, en España había en 1994 16540 MW de potencia hidráulica instalada, pero la participación que ha tenido en la producción bruta ha variado tremendamente, desde un 13% en 1989, es decir, 19387 GWh, hasta un 45% en 1979 —47473 GWh—, en el que fue un año hidrológico excepcional (datos de [REE95]). La Fig. 1.5 ilustra históricamente este hecho: mientras la potencia instalada va en aumento, la generación oscila, esencialmente dependiendo de las aportaciones del año. Pero a nivel mensual, la política de generación viene dada por otros dictados aparte de la pura disponibilidad de agua. El primer objetivo es evidentemente satisfacer la parte de la demanda (mayor en los meses de invierno) que aparece en la punta de la monótona de carga; pero también es necesario encontrar un equilibrio económico entre el agua que será turbinada inmediatamente y la que permanecerá almacenada en el embalse. Esta gestión es especialmente delicada cuando las precipitaciones escasean. A modo de ejemplo véase la Fig. 1.6, en la que aparece la precipitación (en l/m<sup>2</sup>) y la producción (en GWh) medidas en España durante los meses de 1994.

En resumen, los siguientes puntos establecen cuáles son las coordenadas de la situación de la energía hidráulica:

- ◊ el alto grado de sofisticación técnica e ingenieril conseguido, que ha llevado a alcanzar los mejores rendimientos en cuanto a generación de energía.
- ◊ la escasez de emplazamientos óptimos para la construcción de grandes presas, que son las que pueden resultar más rentables, sin que causen graves deterioros en su entorno.

- ◇ el creciente impulso social que tienen las fuentes de energía no contaminantes.
- ◇ el permanente interés económico que supone una fuente de energía no dependiente del exterior.

Todos estos puntos confluyen en una necesidad: puesto que las centrales hidráulicas son centrales con limitación de energía, es necesario aprovechar mejor los recursos hídricos. En los países de la zona mediterránea, esta necesidad se agudiza debido a la posibilidad de ciclos de extrema sequedad, como el que dejó a finales del año 1995 los embalses de la península bajo mínimos. En el Plan Energético Nacional 1991-2000 [PEN91] se comenta que la potencia hidráulica instalada apenas aumentará esta década debido a sus limitadas posibilidades de expansión.

De todos modos, el PEN insiste especialmente en el alto potencial que se encuentra en la producción de electricidad a cargo de mini-centrales, instalaciones con potencia inferior a los 5 MW. A lo largo de este siglo se prodigaron como medio de obtener la energía necesaria para alimentar lugares poco accesibles o incluso pequeñas industrias que de esta manera funcionaban autónomas, [UNES88]. El equipamiento que precisan es sencillo, y a menudo ni siquiera necesitan represar el río. Puesto que se ha hecho evidente el grado de infrautilización de estas instalaciones, hoy día recobran interés por varias razones: reaprovechamiento de los antiguos emplazamientos; previa recuperación, su mantenimiento puede ser automatizado de manera que los costes sean abordables, y escaso o nulo impacto medio-ambiental de este tipo de centrales. Se estima, dentro del Plan de Ahorro y Eficiencia Energética, que se conseguirán los siguientes objetivos en la presente década:

	Pot. instalada (MW)	Generación (GWh/año)
1990	457.84	1378.68
2000	1236.84	3852.68

Existe un vasto campo de investigación en lo que se refiere al estudio de la planificación de los embalses de regulación dentro de un entorno indeterminista, con evidente interés económico. Por ejemplo, si una gestión más eficiente logra un incremento medio de la producción hidráulica de 100 GWh en un año —lo que significa un 0.4% del producible del año 1994—, esto se traduciría en un ahorro de combustible valorado en más de 500 Mpts (tomando el coste del KWh a partir de carbón igual a 5.19 pts., según precios de 1994 reflejados en [REE95]).

## 1.4 Coordinación hidrotérmica

Con la coordinación hidrotérmica se pretende encontrar una distribución de la producción hidráulica y térmica de forma que la demanda de energía quede cubierta durante el periodo de consideración. Se suele diferenciar entre coordinación a corto plazo y a largo plazo. La duración del periodo tomado en corto plazo no suele ir más allá de una semana, pues el criterio que distingue entre un tipo y otro es la posibilidad de hacer predicciones fiables para las aportaciones que se presentarán en el periodo, y el plazo de una semana marca un límite razonable para considerar estas predicciones como información

determinísticamente aceptable. Si la longitud de ese periodo se mide en meses o años estaríamos frente a un problema de *largo plazo* (puede haber una etapa a *medio plazo*, pero sus características no serían más que las de un caso intermedio, un cierto desconocimiento de la situación, pero con menor variabilidad).

Es necesario destacar que los problemas de coordinación hidrotérmica pueden ser de enormes dimensiones y gran complejidad numérica. La zona de estudio puede contar con un gran número de centrales hidráulicas y térmicas; el cálculo de la generación hidráulica trae consigo relaciones no lineales que, en ocasiones, son no convexas, con lo que garantizar el óptimo del problema no sería posible. Además, se suelen incorporar —especialmente, a corto plazo— aspectos de muy importante consideración: pérdidas en la red de transmisión, reserva rodante, etc. Todo ello considerando un horizonte de tiempo que se suele discretizar y dividir en fracciones, en cada una de las cuales se replica la situación espacial del problema, localizando éste en un determinado intervalo (una cierta hora, un cierto mes), pero cuya solución no se puede obtener independientemente de la de los otros intervalos, a causa de las relaciones temporales que intervienen conjuntamente sobre varios de ellos.

#### 1.4.1 Problemas a largo plazo

Sin embargo, la característica específica del problema a largo plazo, y también la más difícil, reside en el tratamiento de:

- la disponibilidad de las unidades térmicas,
- la demanda de energía, y
- las aportaciones naturales (agua),

magnitudes todas ellas aleatorias.

En realidad, la naturaleza estocástica de estas variables no las hace ser unas incógnitas, sino que tenemos de ellas un conocimiento parcial en forma de distribuciones de probabilidad. Como, por otro lado, este conocimiento procede de la recopilación histórica de datos, resulta que no sólo no es completo sino que, inherentemente, el error se mezcla con la información. De todas maneras, este es el procedimiento usual en el tratamiento de situaciones que presentan incertidumbre. En particular, la considerable variabilidad de las aportaciones naturales, que procede de complejos fenómenos meteorológicos difíciles de anticipar, supone tener que introducir en el modelo una representación adecuada del azar de este importante factor que incide directamente en la cantidad de generación producible. Otra cuestión son las demás magnitudes, ya que las posibilidades de fallo de las unidades térmicas o la carga demandada para un cierto periodo de tiempo siguen comportamientos más regulares y mejor estudiados y, por tanto, una parte de la variabilidad en estos aspectos puede ser convenientemente asumida.

#### 1.4.2 Adquisición de combustibles

Los problemas de coordinación hidrotérmica determinan valores óptimos para variables tales como los niveles de los embalses, los volúmenes descargados o la generación

de las unidades térmicas, pero también pueden ser útiles como herramienta para la toma de decisiones. No hablamos ahora de decisiones estructurales, como construcción de una central o la expansión de la red, que comportan grandes inversiones, sino de la posibilidad de plantear escenarios que pueden presentarse en un plazo breve.

Un caso concreto se refiere a la política de adquisición de combustibles con los que alimentar las plantas térmicas. Una cierta fracción de las necesidades energéticas a cubrir puede estar libre de compromisos —combustible nacional, etc.—, de manera que la compañía eléctrica pueda adquirir combustible de importación en las mejores condiciones que pueda conseguir. Se distinguirían tres vías:

- la compra bajo demanda. En los momentos en que se ofrece combustible se adquiere la cantidad necesaria de acuerdo con la previsión de consumo.
- contratos *take-or-pay*. Se fija con anterioridad una cantidad máxima y un precio que se paga tanto si se consume el combustible como si no.
- adquisición puntual. Se trataría de la compra esporádica de una cantidad, por lo general considerable, de combustible.

La solución de un problema de coordinación hidrotérmica a largo plazo bajo diferentes supuestos supone un criterio adecuado para la valoración de las distintas opciones, ya que cada solución aporta una estimación del coste de la alternativa asumida.

### 1.4.3 Jerarquía en la coordinación hidrotérmica

Un resultado obtenido por la resolución de un problema de coordinación hidrotérmica a largo plazo permite obtener una previsión fiable y racional de los costes de producción para un periodo futuro en una compañía con un parque mixto de generación.

Además del evidente interés que presenta para la gestión económica de la compañía el conocimiento de esta previsión de costes de producción, la solución de problemas de largo plazo proporciona un horizonte en el que encuadrar los problemas a corto plazo. La consideración de varios meses o años por delante es indispensable para tener en cuenta restricciones multi-intervalo que de otra manera pasarían desapercibidas, como son restricciones de emisión de contaminantes, de gestión de combustibles o la misma capacidad regulatoria de los embalses.

Pueden diferenciarse dos niveles en la coordinación a largo plazo:

- el futuro.
- el inmediato.

El primero de ellos tiene por fin determinar efectos de determinados contratos de abastecimiento de combustible, mantenimientos de unidades y otros aspectos de macrogestión del sistema. El inicio del periodo de estudio no se sitúa próximamente (podemos pensar en unos cuantos meses de anticipación), extendiéndose hasta unos pocos años (pongamos un total de dos años).

En el nivel de largo plazo inmediato, un programa puede empezar con un intervalo que se supone próximo en el tiempo (uno o dos días, por ejemplo), y de la misma longitud que

el periodo total del programa de corto (pongamos, una semana). La solución adoptada tras la ejecución del largo plazo futuro determina algunos factores que son dejados de consideración, como la cuestión de los combustibles. El periodo de estudio inmediato se alarga convenientemente, de manera que pueda tenerse en cuenta para el presente la posible incidencia de operaciones futuras. Así, la solución de los problemas a largo plazo proveen de restricciones adicionales al de corto plazo, como puedan ser:

- volúmenes finales para los embalses.
- producción de energía.
- descargas totales.
- cantidad de combustible que debe ser consumido.

Hay que precisar que, puesto que el problema a largo plazo tiene un enfoque indeterminista, para poder aplicar una solución en los términos que son usados en corto plazo es necesario que en el momento de resolver éste se tenga una buena previsión de los factores aleatorios que intervienen, concretamente de las aportaciones. Con esta información debe poderse determinar las magnitudes que interesan al problema de corto plazo (por ejemplo, la generación exacta que se debe despachar para toda la semana).



## CAPÍTULO 2

### DEFINICIÓN Y ANTECEDENTES

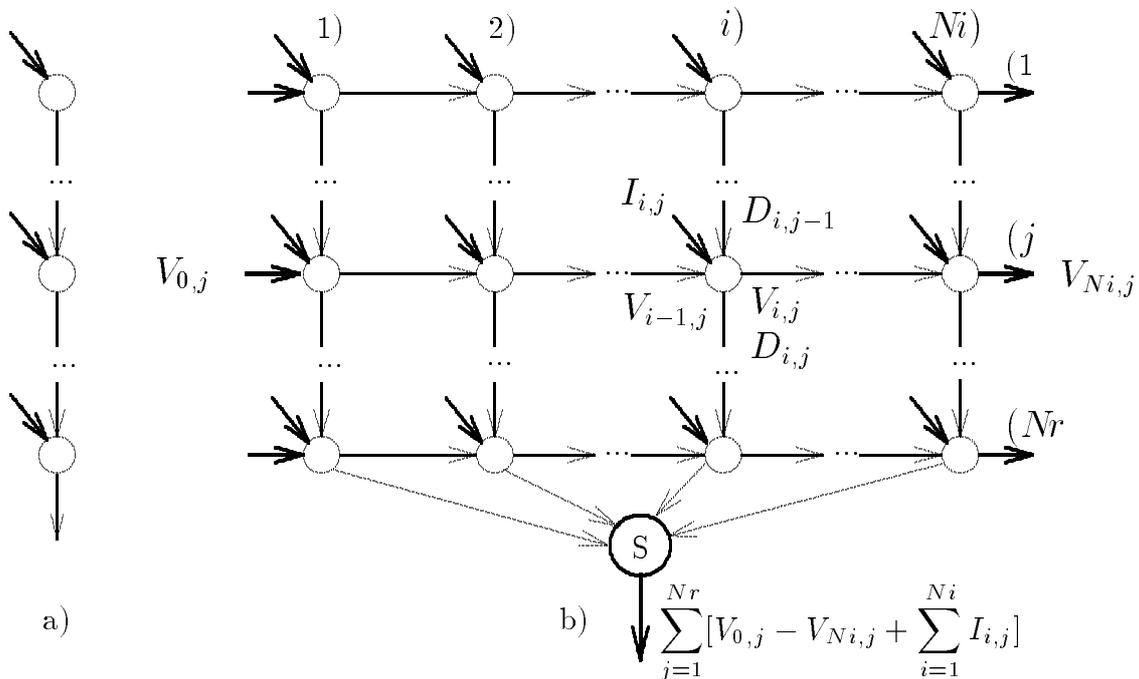
#### 2.1 Principales términos empleados

Tras la presentación del problema de la coordinación hidrotérmica efectuada en el capítulo 1, comenzamos la formulación de este problema definiendo algunos términos que van a aparecer y que tienen un especial significado.

- ★ *Periodo*: por periodo se entiende el espacio de tiempo que abarca el problema.
- ★ *Intervalo*: un intervalo es una fracción del periodo de estudio. Habiendo dividido todo el periodo, la solución del problema estará constituida por magnitudes referidas a los intervalos.
- ★ *Red hidráulica*: la estructura formada por un conjunto de nodos —los embalses— y un conjunto de arcos dirigidos —los canales de conducción del agua— que representan el sistema fluvial a considerar en el problema.
- ★ *Red hidráulica replicada*: la estructura formada por la red hidráulica replicada tantas veces como intervalos se consideren. A esta red hay que añadir una serie de arcos que conectan las réplicas entre sí.
- ★ *Red térmica (replicada)*: la estructura formada con las unidades del parque térmico a considerar como nodos y los arcos que unen cada unidad consigo misma de un intervalo al siguiente para establecer el balance de combustible disponible, además de los que más adelante se introducirán.
- ★ *Inyecciones*: entradas o salidas de flujo en la red previamente fijadas. Como inyecciones se cuentan:
  - *los volúmenes iniciales y finales*, que representan la capacidad de cada embalse al principio y al final, respectivamente, del periodo.
  - *las aportaciones*, el flujo de agua de procedencia natural que un embalse recibe (precipitaciones, escorrentías, etc.).
  - las cantidades de *combustible* potencialmente adquiribles.
- ★ *Arco*. Se distinguen varios tipos:
  - *de descarga*: aquel que transporta agua y es capaz de generar electricidad por medio de una turbina.

- *de vertido*: aquel que representa el agua que se vierte de un embalse por la saturación de éste y sin aprovechamiento energético.
  - *de bombeo*: aquel que modeliza el agua que es bombeada desde un embalse a otro aguas arriba, con el consiguiente consumo de energía.
  - *de volumen*: arco que representa el agua que permanece en un embalse al final (o al principio) de un intervalo. También se les conoce como *de almacenamiento*.
  - *de combustible residual*: arco que simboliza el combustible almacenado al final de un intervalo y, por tanto, disponible para posteriores intervalos.
  - *de energía*: aquel que representa la generación de una unidad térmica a lo largo de un intervalo. Estos arcos son de tipo “raíz” [KENN80], ya que uno de sus extremos no va a parar a ningún nodo.
- ★ *Coste probable de producción*: función que en términos de la hidrogenación expresa la expectativa del coste de producción teniendo en cuenta la aleatoriedad de la demanda y de la indisponibilidad de las unidades térmicas.
- ★ *Energía externa*: se denomina así a una cantidad de energía que debe importarse por imposibilidad de satisfacer la demanda con los propios recursos (incluidos los contratos establecidos con otras compañías).
- ★ *Orden de mérito*: ordenación de las unidades de generación de acuerdo a un criterio económico que rige su posición de entrada en la monótona de generación.

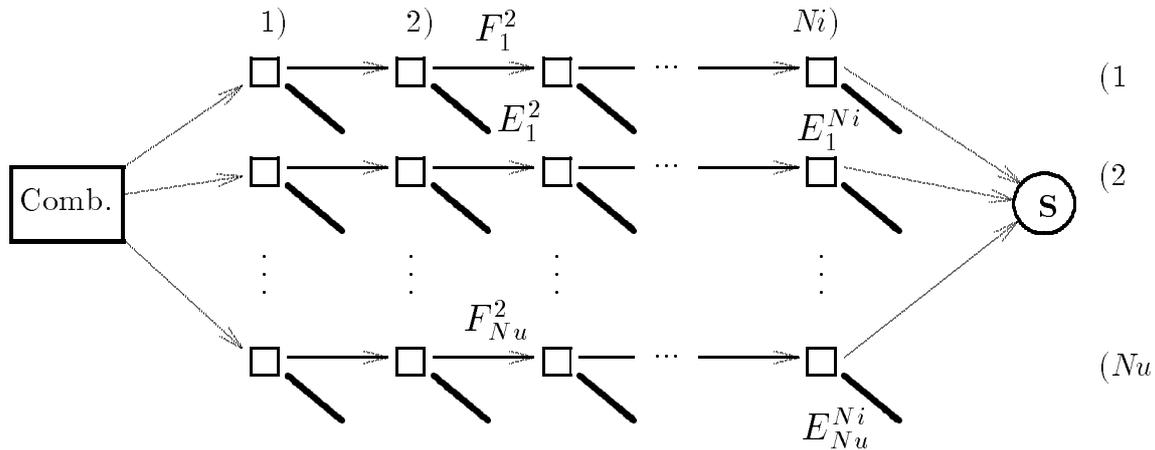
Debe hacerse notar que la división del periodo en intervalos es una solución habitual frente a la imposibilidad práctica de determinar funciones continuas de variación de las magnitudes hidrotérmicas a optimizar.



**Figura 2.1 :** a) Red hidráulica. b) Red hidráulica replicada.

La Fig. 2.1.a) muestra un ejemplo de una red hidráulica formada por una serie de

embalses en cascada. Los arcos verticales que aparecen son de descarga, y llevan agua de un embalse a otro situado inmediatamente aguas abajo (quien, a su vez, sólo recibe agua del único que tiene inmediatamente aguas arriba). No se han representado otros arcos, como vertidos o bombeos. Las líneas oblicuas son aportaciones naturales. En la figura b), dicha red se ha replicado temporalmente, apareciendo los arcos de almacenamiento, y un nodo pozo **S** que hace el papel de sumidero al cual va a parar el balance de las entradas y salidas en la red, es decir, el balance neto de almacenamiento de agua en cada embalse  $j$ , lo que se representa en la Fig. 2.1 como  $V_{0,j} - V_{Ni,j}$  y las aportaciones.



**Figura 2.2 :** Red térmica replicada.

La Fig. 2.2 ilustra el concepto de red térmica replicada: las unidades hacen una adquisición de combustible al principio del periodo (los arcos que salen del “almacén” de combustible situado a la izquierda en la Fig. 2.2), y cada intervalo gastan parte de este combustible, dejando un residual para intervalos posteriores. Los arcos horizontales representan el combustible residual, y las líneas oblicuas gruesas se asimilan al producible de una unidad en un intervalo, teniendo en cuenta un rendimiento y conversión de unidades (de toneladas de combustible a MWh). Se incluye igualmente un sumidero **S** el cual recoge los excedentes de combustible al final del periodo.

La función de coste probable de producción (CPP) se interpreta como una reducción de coste derivada del uso de energía hidráulica, a consecuencia de la disminución del gasto de combustibles. Desde este punto de vista, se adopta el criterio de que una generación hidráulica nula se corresponde con reducción cero y que una generación no nula da lugar a un valor de la CPP negativo. Lógicamente, la CPP debe ser una función monótona decreciente dentro de un dominio factible de hidrogenación.

El orden de mérito es, en nuestro caso, un orden fijo que responde al coste correspondiente a cada unidad para producir una unidad de energía. Bajo este criterio, parece claro que, en principio, ninguna unidad debiera intervenir antes que la precedente hubiera alcanzado su potencia máxima. Sin embargo, hay situaciones bajo las cuales el orden de carga debe ser diferente del orden de mérito, por ejemplo, cuando una unidad no puede alcanzar su máxima potencia por falta de combustible. En ese caso, la unidad limitada se desplaza más abajo —en el sentido de las unidades más caras— en el orden de mérito,

o bien se particiona en subunidades que quedan intercaladas en posiciones inferiores, con objeto de que la menor duración de uso permita producir a máxima capacidad.

## 2.2 Estocasticidad del problema

El indeterminismo presente en los varios aspectos (demanda, disponibilidad de unidades, aportaciones de agua) que intervienen en los problemas de largo plazo resulta insoslayable, pues desde hace varias décadas se ha evidenciado que estos problemas no tienen una solución satisfactoria cuando se les aplica un tratamiento de tipo determinista, ni aun en el caso de que se utilicen valores representativos tales como promedios, medianas, etc., extraídos de la información histórica disponible.

En lo que sigue haremos un repaso de las contribuciones que diversos autores han hecho en este campo, haciendo hincapié en aquellas que suponen una mayor influencia en el presente trabajo.

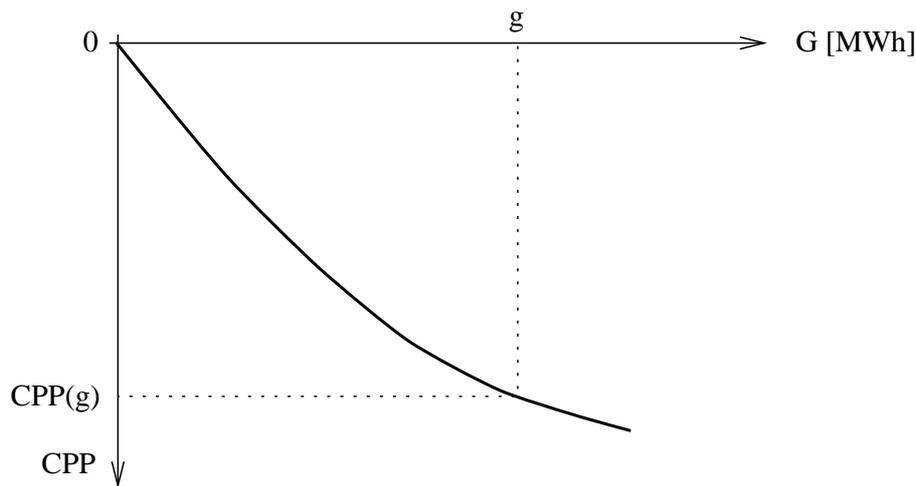
### 2.2.1 Obtención de la monótona de generación

El tratamiento de la carga del sistema y la demanda de energía, junto con la posible indisponibilidad de las unidades, se puede solventar mediante el uso de la monótona de producción, también llamada *de generación*. La técnica de la obtención de esta monótona es muy conocida, pues se viene utilizando desde hace treinta años, [BALÉ67]. [BOOT72] es un artículo que, sin aportar nada nuevo al trabajo [BALÉ67], contribuyó a la difusión de dicha técnica en el ámbito anglosajón, cuando el trabajo de Balériaux et al. aún no había alcanzado popularidad. Basado en el método de la convolución, se calcula la distribución de probabilidad de la suma de la carga y de la potencia en fallo de las unidades térmicas, bajo el supuesto de que la carga y la indisponibilidad de estas unidades son acontecimientos independientes. Realizando secuencialmente convoluciones con las unidades dispuestas en orden de mérito económico, pueden calcularse diversos indicadores tal como cuál es la contribución media a la producción de cada una de ellas, la probabilidad de pérdida de carga (conocido en la literatura como LOLP: *loss of load probability*), el tiempo probable durante el que no sea posible satisfacer la demanda (LOLE: *loss of load expectation*), o una estimación de la energía externa que habrá que importar (EUE: *expected unserved energy*). Dos muestras de la bibliografía que hacen referencia a estos conceptos con notable precisión son [WANG94] y [ANDE90].

Esta técnica ha sido seguida de muchas variantes, que han supuesto en la práctica procedimientos alternativos. Entre ellos se encuentra el método de los momentos, basado en el desarrollo en serie de la función de densidad de una variable gaussiana, suponiendo que las condiciones del Teorema Central del Límite son aplicables. Este teorema establece las hipótesis para que la suma de un gran número de variables aleatorias cualesquiera pueda considerarse como gaussiana. El llamado método de los cumulantes es otro método muy extendido que tiene bastantes puntos en común con el anterior. Aparecen descritos en los trabajos [RAU80] y [STRE80], entre otras referencias, y también cuentan con una larga secuela de seguidores que aportan su particular visión; por ejemplo, en [SING91] se

utilizan distribuciones *gamma* en vez de normales. Existen principalmente dos variantes a la hora de expandir la función en serie, que son el desarrollo de Gram-Charlier y el desarrollo de Edgeworth, aunque no presentan diferencias importantes entre ellos. Son métodos considerados como más rápidos que el de Balériaux et al., pero pueden adolecer de imprecisiones, ya que en general la serie se debe truncar a un número moderado de términos, y los cálculos implicados suelen concentrarse en la cola de la distribución, allí donde la imprecisión es mayor. Otro método para realizar el proceso de convolución [ALLA81] usa el procedimiento de la Transformada Rápida de Fourier, que tiene la ventaja de limitar el tiempo de ejecución a una tasa lineal con el número de puntos a ser convolucionados. De todas maneras, si no se requiere que el procedimiento de convolución intervenga de manera intensiva (dentro de un proceso iterativo, por ejemplo), la ganancia de tiempo de cálculo en los computadores actuales puede ser insignificante.

A menudo, la monótona se representa con un número pequeño de niveles de potencia, por ejemplo [SHER85], [MACE96], y otros autores más implicados en fiabilidad de sistemas, en donde el uso de monótonas también es habitual. En problemas a largo plazo, esta discretización de la potencia ha encontrado su justificación por el empleo de técnicas como el uso de escenarios o la programación dinámica, que precisan generalmente de una simplificación del conjunto de estados del sistema.



**Figura 2.3 :** Función de coste probable de producción.

La técnica descrita en [BALÉ67] tenía originalmente por objeto convolucionar la carga prevista con la potencia en fallo de unidades térmicas. El tratamiento no consideraba unidades hidráulicas. Con posterioridad, Viramontes y Hamilton [VIRA78] describen un método para incluir la producción hidráulica, ubicando ésta en diferentes posiciones entre las unidades térmicas: de esta manera genera una función de coste de producción dependiente de la cantidad de hidrogenación que, obviamente, es una función decreciente (ver Fig. 2.3). La opción de simular distintas ubicaciones de la unidad hidráulica permite evitar la cuestión no resuelta de cuál es la posición apropiada de una unidad hidráulica dentro del orden de mérito válido para unidades térmicas, pero la principal objeción que se puede hacer al método expuesto en [VIRA78] es que asigna una disponibilidad de 1 a la capacidad hidráulica, lo cual no es aceptable dado su carácter indeterminista.

En el capítulo dedicado a simulación probabilística de la producción de [WANG94] se analiza detalladamente el problema de la inclusión de unidades hidráulicas (de generación y de bombeo), señalando explícitamente que la simulación con unidades hidráulicas resulta computacionalmente inabordable, por lo que propone algunas simplificaciones:

- combinar todas las unidades hidráulicas en una sola
- ignorar el factor de fallo de las unidades hidráulicas
- buscar una posición idónea en la monótona de carga para modificar ésta, teniendo en cuenta posteriormente sólo las unidades térmicas

Pueden encontrarse otros trabajos que incorporan la energía hidráulica en la convolución de la monótona, aunque sin profundizar excesivamente en su carácter estocástico; así, en [MACE96] se le da un tratamiento semejante a una unidad térmica. [PÉRE96] emplea un procedimiento semejante al de Viramontes y Hamilton para determinar funciones de coste de producción, convolucionando con la hidrogenación esperada. En general, las plantas hidráulicas no se contemplan en su propia dimensión indeterminista. Lo normal es acudir a ellas para el descrestado de la monótona o para sustituir las unidades más caras, [CONT90]. En [NAB95], la contribución hidráulica se descompone en una parte determinista y una estocástica; la primera sirve para descrestar la monótona de generación y de la segunda se toma su esperanza, que se coloca entre las unidades térmicas. En el capítulo 10 de esta tesis se explica más detalladamente el mecanismo empleado. En el capítulo 8 se introduce una técnica pensada en incorporar los aspectos estocásticos de la energía hidráulica en un método aplicable para resolver el problema LTHGO.

Hay que mencionar que algunos autores consideran que el empleo de la monótona de generación no es apropiado por:

- la pérdida del sentido lineal del tiempo
- una imprecisa modelización de las operaciones con las plantas hidráulicas
- unas imprecisas estimaciones de la producción de energía y costes de combustible de las unidades marginales

si bien estas opiniones son mejor comprendidas cuando se hacen desde el punto de vista del despacho a medio plazo; una alternativa usual es el empleo de técnicas de simulación de fallos, mediante el método de Monte Carlo, [SCUL92], [PANG91], los cuales son ejemplos que incluyen una aproximación a los sistemas de corto plazo, ya que contemplan un esquema para la asignación de unidades. En el estado del arte actual, no se suele llegar a tal nivel de detalle cuando el estudio cubre un periodo largo, dejando la determinación de las operaciones más precisas para la coordinación a corto plazo.

## 2.2.2 Tratamiento de las aportaciones naturales

### 2.2.2.1 Dependencia de las aportaciones

Los embalses con capacidad de regulación reciben grandes cantidades de agua con origen de carácter aleatorio: precipitaciones, deshielo, escorrentías, etc. Provieniendo siempre en última instancia de fenómenos meteorológicos, esta clase de aportaciones resulta

especialmente complicada de incluir en los métodos de coordinación debido al escaso conocimiento que se tiene de estos fenómenos. Ello impide contar con técnicas de estimación de aportaciones futuras lo suficientemente fiables; la variabilidad intrínseca de las aportaciones sólo se puede reducir en previsiones a corto plazo. Por otra parte, la cantidad de aportaciones que recibe un punto de la red hidráulica puede estar ligado a las aportaciones en otros puntos y también con otros intervalos. La dependencia parcial establecida en estos términos sería otro factor de complejidad introducido por las aportaciones.

En consecuencia, la dificultad de encontrar un modelo estocástico apropiado —a diferencia de lo que sucede con la carga o la disponibilidad de las unidades térmicas— es uno de los más duros problemas que afronta la coordinación hidrotérmica a largo plazo.

El modelo hidráulico también resulta ser más complejo que su equivalente térmico a causa de que las descargas de un embalse son recogidas por los que se encuentran aguas abajo. Este acoplamiento hidráulico (y la correlación de las aportaciones) es dejado de lado cuando se consideran técnicas de *agregación*, suponiendo que todas las plantas hidráulicas se concentran en una equivalente. Este es el tratamiento de [CONT90], [CRUZ95] o de [VIRA78]. [SHER85] identifica cadenas de embalses en cascada para agregarlos en una sola planta. El método, llamado en general *representación compuesta*, presenta importantes inconvenientes:

- No pueden imponerse restricciones particulares de cada embalse
- La desagregación o aplicación de la solución óptima a cada embalse no es inmediata.

En uno de estos trabajos, [CRUZ95], la desagregación se realiza de forma “no paralela”, es decir, sin suponer paralelismo en la operación de cada embalse, mediante la aplicación de unas reglas no lineales de funcionamiento obtenidas a partir de registros históricos.

#### 2.2.2.2 Métodos aplicados para la temporalidad

Las dependencias temporales se han considerado en algunos casos, [RØTT92], [SHER85], haciendo uso de modelos autorregresivos de orden 1, es decir:

$$I_i = z_{i-1}I_{i-1} + \xi_i$$

donde  $z_{i-1}$  es el coeficiente de autorregresión para el instante  $i$ , y  $\xi_i$  un término estocástico independiente respecto de otros intervalos. Los parámetros de este modelo se determinan mediante técnicas de series temporales empleando el conjunto de aportaciones históricas. Para conocer más acerca de estas técnicas puede consultarse el texto clásico de Box, Jenkins y Reinsel [BOXJ94].

#### 2.2.2.3 Panorámica

En un trabajo fechado en 1991, [REZN91], se muestra una panorámica de los principales métodos que se emplean en la modelización estocástica de operaciones con embalses dirigidas a varios objetivos, entre ellos por supuesto el de la generación de energía. Algunos de los métodos que aparecen descritos son:

- Programación estocástica lineal. Modelo lineal, que adopta variables discretizadas, y

aportaciones siguiendo una cadena de Markov de primer orden.

- Programación estocástica lineal con recurso (“with recourse”). La solución se obtiene a través de decisiones que se toman por etapas, en las que se asignan valores a las variables aleatorias que intervienen en la formulación.
- Programación lineal con restricciones probabilísticas (“chance-constrained”). Traslada la variabilidad del problema a condiciones en las restricciones de forma  $P(Tx \geq p) \geq \alpha$ , donde  $x$  sería el vector de decisión y  $\alpha$  un vector constante.
- Programación estocástica dinámica (SDP). Un método muy popular, por su capacidad para resolver situaciones complejas o no lineales. El proceso de optimización se desarrolla a través de un proceso de decisión multi-etapa, que contempla probabilidades condicionadas entre dos intervalos consecutivos.

Hay que señalar que la programación lineal con restricciones probabilísticas posee el inconveniente de tener que fijar unos niveles de riesgo  $\alpha$ , sin conocer previamente el coste que esta decisión pueda suponer. Con esta técnica se alinean algunos autores, como [PÉRE96]. Las técnicas restantes pueden tener problemas computacionales; en situaciones reales, la dimensión del modelo llega a ser intratable si no se limita radicalmente el número de situaciones a considerar y la discretización que se aplica a las variables que intervienen en el problema. Por esta razón, es corriente que los valores que pueden tomar las variables de los modelos que siguen estas técnicas se reduzcan a dos o tres diferentes, considerados como representativos del total, aunque ello suponga que las soluciones alcanzadas adolezcan de una importante deficiencia descriptiva. Aún así, se cuentan abundantes referencias de autores que optan por alguno de los métodos apuntados: por la SDP, [VIRA78], [CONT90], [SHER85]. [GORE92] y [RÖTT92] optan por una forma especial, la *programación dinámica dual*, en la que la inclusión del dual de un subproblema en la formulación de los costes supone una modelización alternativa que consigue evitar la discretización de estados.

#### 2.2.2.4 Programación con escenarios

Bajo la denominación de “programación con escenarios” (SO) se pueden encontrar un buen número de trabajos que abordan la estocasticidad de un problema de esta manera. El método de los escenarios se puede tomar como una manera de implementar la programación estocástica lineal con recurso, sin destacar más que algunas diferencias que se localizarían a nivel de modelización. Un escenario es una asignación posible de las variables aleatorias del problema; bajo esta situación, el problema en cuestión se resuelve de forma determinista. Según Dembo, [DEMB91], se trata de encontrar una política *factible* que sea un compromiso entre todas las soluciones determinadas bajo los diferentes escenarios. Hemos enfatizado la palabra “factible” por su especial significado, que en el texto de Dembo quiere decir:

- $x$  es *factible* cuando
  - satisface las restricciones deterministas,  $A_d x = b_d$ ,  $x > 0$ , y
  - minimiza  $\sum_s p_s \|A_s x - b_s\|$  ( $p_s$  es la probabilidad asociado al escenario  $s$ )

La descripción de una aplicación del método de los escenarios llevado al campo de la generación hidráulica se encuentra en [ÁLVA94], trabajo realizado por M. Álvarez, C.M.

Cuevas, L.F. Escudero, J.L. de la Fuente, C. García y F.J. Prieto, en donde se propone una implementación paralela a usar con una red de ordenadores interconectados.

Dembo apunta algunas características que, a su juicio, distinguen la programación estocástica dinámica de la optimización con escenarios:

- o La SDP está forzada a agregar embalses, mientras que la SO debe agregar futuros escenarios de aportaciones.
- o En la SPD, las variables de decisión se discretizan, y se emplea un algoritmo de enumeración para hallar una solución óptima, recorriendo recursivamente el horizonte de tiempo dividido en etapas. Las variables en la SO pueden ser continuas, y participan en una serie de problemas deterministas más un solo problema de coordinación.

#### 2.2.2.5 Contribución del presente trabajo

Las técnicas descritas hasta aquí presentan características “explosivas”: de una manera u otra, tienen que explicitar diferentes posibles situaciones con lo que fácilmente los problemas alcanzan dimensiones inmanejables, a no ser que recurran a importantes simplificaciones en el modelo (agregación, discretización). Frente a esta situación está la técnica multiartículo, [NAB93], [NAB95], la cual se basa en el empleo de variables aleatorias representadas por un conjunto de artículos que se mueven juntos por una red común. Concretamente, las aportaciones naturales, las descargas, vertidos y bombeos, y los volúmenes almacenados en el embalse en cada intervalo son variables aleatorias, y cada arco que representa una de estas magnitudes sirve de canal por el que viajan  $K$  variables escalares, que son en definitiva los  $K$  artículos que definen una variable estocástica del problema. Si  $A$  representa la matriz de incidencias de una red, un problema de flujo multiartículo por tal red debe incluir restricciones de este estilo:

$$AX^k = R^k, \quad k = 0, \dots, K - 1$$

El flujo por redes multiartículo es bastante especializado, aunque cada vez con mayor frecuencia se van observando referencias tratando el tema. El texto [KENN80] incluye descripciones de tres procedimientos que pueden utilizarse para resolver el problema lineal de flujo por una red multiartículo: particionamiento primal, descomposición dictada por precios y descomposición dictada por recursos. Basado en el primero de estos métodos se ha diseñado el programa PPRN [CAST94], que ha sido utilizado en algunas partes de este trabajo. El uso de programas especializados en redes multiartículo es especialmente interesante, ya que aprovechan la estructura especial de las restricciones para disminuir la dimensión de la base de trabajo, pudiendo obtener importantes ganancias en el tiempo de ejecución para la resolución de problemas, frente a otros programas de optimización general, como Minos [MURT83]. Aún así, para este trabajo de tesis Minos ha sido la principal herramienta empleada, a causa de que el esfuerzo predominante se ha efectuado sobre la modelización de los problemas que nos ocupan.

Como los modelos concretos se describen en detalle en posteriores capítulos, diremos aquí solamente que la solución multiartículo a uno de los problemas reseñados se corresponde con una *política*, determinada por las distribuciones obtenidas para el flujo en los arcos de la red hidráulica replicada, y que se aplica cuando se conocen previsiones de las

aportaciones naturales, además de la situación inicial de nivel en los embalses. Naturalmente, esta política proporciona un marco a largo plazo sobre el que efectuar decisiones más precisas en la coordinación a corto plazo. Transcurrido el horizonte de tiempo del que se ocupa la coordinación a corto plazo, es necesario actualizar la política de largo plazo solucionando de nuevo el problema con las nuevas previsiones.

La distribución de probabilidad del flujo que viaja por un arco es del tipo que conocemos como de *bloques rectangulares*, ya que no se ha encontrado una denominación alternativa en la literatura. Los capítulos 3-6 tratan en detalle de la definición matemática y propiedades estadísticas de este tipo de variables aleatorias, basadas en una función de distribución lineal a trozos. Los puntos  $X^{0k}$  que determinan los segmentos de la función de distribución de una variable  $X$  cumplen:

$$P(X \leq X^{0k}) = \frac{k}{K-1}, \quad k = 0, \dots, K-1$$

y estos  $K$  puntos son los que se corresponden con cada artículo. El capítulo 7 sirve para presentar en su forma definitiva los conceptos que relacionan el tratamiento de la estocasticidad y el uso de una red multiartículo.

## 2.3 Formulación

### 2.3.1 Coordinación hidrotérmica

El problema de coordinación hidrotérmica a largo plazo (LTHTC), siguiendo de cerca la propuesta que aparece en [NAB95], utiliza las redes hidráulica y térmica replicadas, y se puede formular inicialmente como:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{Ni} y_X^i E_X^i + \sum_{j=1}^{Nu} y_j Z_j \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad P_j^i \leq \bar{P}_j \quad i = 1 \dots Ni, j = 1 \dots Nu \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{Nu} E_j^i + G_i = \hat{E}^i \quad i = 1 \dots Ni \quad (2.3)$$

$$P^i = \Phi_i(E^i, G_i) \quad i = 1 \dots Ni \quad (2.4)$$

$$G_i = \Gamma_i(X_i, V_{i-i}, V_i) \quad i = 1 \dots Ni \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_j = F_j^1 + \varepsilon_j E_j^1 \\ F_j^{i-1} = F_j^i + \varepsilon_j E_j^i \quad i = 2 \dots Ni \end{array} \right\} \quad j = 1 \dots Nu \quad (2.6)$$

$$\sum_{a \in A_n} X_{i,a} + V_{i-i,n} + I_{i,n} = \sum_{a \in \Omega_n} X_{i,a} + V_{i,n} \quad i = 1 \dots Ni, n = 1 \dots Nr \quad (2.7)$$

$$X_{i,a} \leq \bar{X}_a \quad \text{para todo arco } a, i = 1 \dots Ni$$

$$V_{i,n} \leq \overline{V}_n \quad i = 1 \dots Ni, n = 1 \dots Nr \quad (2.8)$$

donde:

- $Ni$ : número de intervalos
- $Nu$ : número de unidades térmicas
- $Nr$ : número de embalses
- $y_j$ : coste de una unidad de combustible adquirido por la unidad  $j$
- $y_X^i$ : coste de una unidad de energía externa importada durante el intervalo  $i$
- $E_X^i$ : energía externa importada durante el intervalo  $i$
- $P_j^i$ : potencia de la unidad  $j$  a lo largo del intervalo  $i$  (limitada por su capacidad  $\overline{P}_j$ )
- $E_j^i$ : energía producida por la unidad  $j$  a lo largo del intervalo  $i$
- $\varepsilon_j$ : eficiencia de la unidad  $j$  en generación.
- $G_i$ : energía de procedencia hidráulica en el intervalo  $i$
- $\widehat{E}^i$ : demanda de energía en el intervalo  $i$
- $\Phi_i(\cdot)$ : una función por concretar que relaciona para cada intervalo  $i$  la generación térmica e hidráulica con la potencia.
- $\Gamma_i(\cdot)$ : una función por concretar que a partir de los arcos  $X$  de descarga y los volúmenes en cada embalse obtiene el valor de la generación hidráulica para el intervalo  $i$ .
- $F_j^i$ : combustible residual de la unidad  $j$  al final del intervalo  $i$
- $A_n$ : conjunto de arcos de la red hidráulica que inciden en el  $n$ -ésimo embalse
- $\Omega_n$ : conjunto de arcos de la red hidráulica que salen del  $n$ -ésimo embalse
- $V_{i,n}$ : arco de volumen del  $n$ -ésimo embalse al final del intervalo  $i$ , con capacidad máxima  $\overline{V}_n$ ;
  - si  $i=0$ , volumen inicial
  - si  $i=Ni$ , volumen final
- $I_{i,n}$ : aportación del  $n$ -ésimo embalse durante el intervalo  $i$  (parámetro indeterminista).
- $X_{i,a}$ : un arco de la red hidráulica replicada (del intervalo  $i$ ), diferente de los de volumen, con capacidad máxima  $\overline{X}_a$ . Se pueden distinguir:
  - los arcos de descarga,  $D_{i,a}$
  - los arcos de bombeo,  $B_{i,a}$
  - los arcos de vertido,  $S_{i,a}$

La función objetivo (2.1) hace intervenir los costes implicados, suponiendo sólo costes por gasto de combustible y por compra de energía externa con carácter de emergencia. La restricción (2.2) se refiere a una restricción de potencia para las unidades térmicas para no superar su capacidad; (2.3) expresa la condición de cumplimiento de la demanda de energía. (2.4) y (2.5) expresan implícitamente la relación que tienen la potencia de las unidades y la generación hidráulica con las variables independientes. (2.6) establece una relación de balance entre el combustible y la generación obtenida. Las ecuaciones (2.7) son las ecuaciones de balance de la red hidráulica replicada, mientras (2.8) se refiere a las cotas superiores sobre las variables hidráulicas.

La formulación que aparece en (2.1)-(2.8) es más bien un esquema sobre el que conviene

realizar algunos comentarios:

- No se han diferenciado explícitamente las variables independientes de lo que podrían ser solamente expresiones dependientes de aquellas. Por ejemplo,  $P_j^i$  es función de otras variables, pero su modelización quedaría fuera de lo que es un esquema general; asimismo con  $G_i$ , y otras variables.
- También se han hecho ciertas relajaciones que han permitido una presentación más simple: por ejemplo, podrían haberse incluido restricciones sobre la potencia hidráulica, o  $Nf$  combustibles diferentes a disposición de las plantas térmicas.
- Por la misma razón, se ha obviado la formulación de restricciones de naturaleza anexa al problema, impuestas por razones medio-ambientales, seguridad, etc.
- Es necesario remarcar que algunos parámetros y variables del problema son intrínsecamente estocásticos, como  $I_{i,n}$ , aunque la formulación planteada no lo destaca. En general, para abordar aspectos estocásticos es necesario un replanteamiento profundo del modelo.
- Dicha formulación, en fin, tiene el propósito de concentrar la atención en los puntos esenciales:
  - \* la procedencia del coste
  - \* la satisfacción de la demanda, cumpliendo las restricciones de capacidad
  - \* la anterior restricción liga el factor hidráulico con el térmico
  - \* el equilibrio de flujos en las redes térmica e hidráulica

### 2.3.2 Optimización de la generación hidráulica

El problema de la optimización de la generación hidráulica a largo plazo (LTHGO) intenta hallar valores apropiados para las variables de la parte hidráulica, minimizando una función de reducción del coste probable de producción según la generación hidráulica que sustituye la modelización detallada de la parte térmica que se da en un modelo acoplado como el mostrado para el problema LTHTC.

Formularemos en una primera aproximación el problema LTHGO de esta manera:

$$\min \quad \Psi(X, V) = \sum_{i=1}^{N_i} \Psi_i(X_i, V_{i-1}, V_i) \quad (2.9)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in A_n} X_{i,a} + V_{i-1,n} + I_{i,n} = \sum_{a \in \Omega_n} X_{i,a} + V_{i,n} \quad (2.10)$$

$$i = 1 \dots N_i, n = 1 \dots N_r$$

$$X_{i,a} \leq \overline{X}_a \quad \text{para todo arco } a, i = 1 \dots N_i$$

$$V_{i,n} \leq \overline{V}_n \quad i = 1 \dots N_i, n = 1 \dots N_r \quad (2.11)$$

siendo  $\Psi_i(\cdot)$  una función para el  $i$ -ésimo intervalo que devuelve el coste probable de producción, teniendo en cuenta los valores de las descargas, los bombeos y los volúmenes iniciales y finales de cada embalse en el intervalo. Al igual que el anterior, este modelo divide el periodo en  $N_i$  intervalos. Como esta formulación ha de ser considerada nuevamente

como un esquema, debe precisarse que los aspectos estocásticos no aparecen reflejados, así como otros puntos de interés, como la limitación de la potencia y generación hidráulica según la oferta y la demanda presente. El enfoque que se ofrece es igualmente cercano al que aparece en el artículo [NAB93], el cual presenta la metodología que es la base del trabajo realizado y que se describe en esta tesis.

Cuando se escoge un modelo desacoplado, se estaría asumiendo que:

- los mantenimientos de las unidades térmicas están determinados.
- igualmente se conocen los contratos de compra y adquisición de combustible.
- no hay limitación en la disponibilidad y uso de los combustibles.

Con estos supuestos, es posible optimizar en primer lugar la generación hidráulica, y después pasar a optimizar la parte térmica, teniendo en cuenta el resultado de la etapa anterior e intentando satisfacer la demanda de la manera más económica posible. El modelo acoplado no necesita efectuar estos dos pasos ya que considera todas las variables a la vez, pero resulta ser un modelo bastante más complicado de programar y de resolver.



## CAPÍTULO 3

### VARIABLES ALEATORIAS DE BLOQUES

#### 3.1 Definición

Conocidos un valor entero positivo  $K$  y un vector  $\Pi' = (\pi_1, \dots, \pi_{K-1})$  de  $K-1$  valores reales que cumplen las propiedades:

- $\pi_i \geq 0, i = 1 \dots K - 1$
- $\sum_{i=1}^{K-1} \pi_i = 1$

se define la variable aleatoria real  $X$  como *variable aleatoria de  $K-1$  bloques rectangulares* (o simplemente *de bloques*) si tiene una función de densidad como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\pi_1}{X^{01} - X^0} & X^0 < x < X^{01} \\ \frac{\pi_2}{X^{02} - X^{01}} & X^{01} < x < X^{02} \\ \dots & \\ \frac{\pi_{K-1}}{X^{0K-1} - X^{0K-2}} & X^{0K-2} < x < X^{0K-1} \\ \text{no definida} & x = X^{0i}, \quad i = 0 \dots K - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.1)$$

Destacaremos que la notación  $X^0, X^{01}, \dots, X^{0K-1}$  va a constituir una característica de las variables aleatorias de bloques; más adelante precisaremos su significado. La función de distribución de la variable  $X$ ,  $F_X(x)$  se encuentra del modo usual, por integración de  $f_X(x)$  en el intervalo  $(-\infty, x]$ , el cual se reduce a  $[X^0, x]$  de acuerdo con el dominio de definición de (3.1). La función de distribución de una variable de bloques es siempre una

función lineal definida a trozos en los segmentos  $(X^{0i-1}, X^{0i})$ , para  $i$  de 1 a  $K-1$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\pi_1}{X^{01} - X^0}(x - X^0) & X^0 \leq x < X^{01} \\ \pi_1 + \frac{\pi_2}{X^{02} - X^{01}}(x - X^{01}) & X^{01} \leq x < X^{02} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{K-2} \pi_i + \frac{\pi_{K-1}}{X^{0K-1} - X^{0K-2}} & X^{0K-2} \leq x < X^{0K-1} \\ 0 & x < X^0 \\ 1 & x \geq X^{0K-1} \end{cases} \quad (3.2)$$

Aunque  $f_X$  no está definida en los puntos  $X^0, X^{01}, \dots, X^{0K-1}$ , podremos asignar a dichos puntos un valor en la función de distribución gracias a que ésta es por definición:

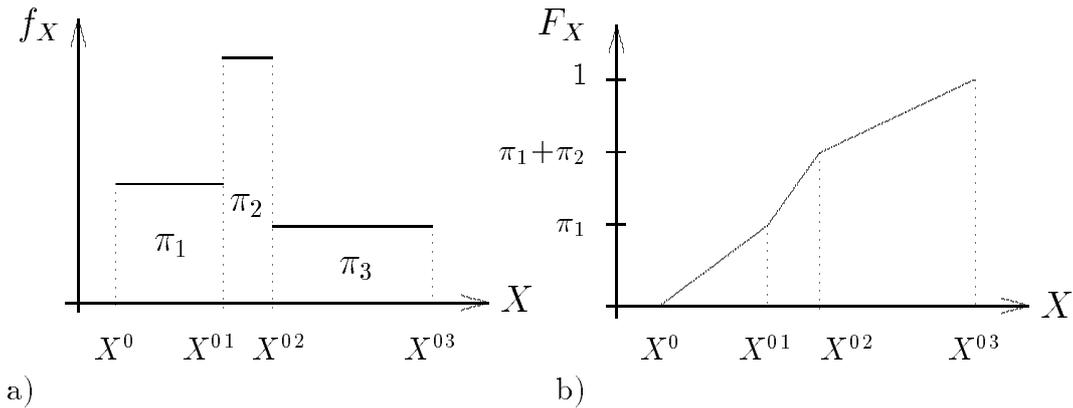
$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

donde  $P$  viene a ser la probabilidad del espacio de probabilidad  $(\Omega, \xi, P)$  asociado a  $X$ . De aquí se deduce que  $F_X$  es continua por la derecha en todo el dominio, y si  $X^{0i-1} < X^{0i}$  entonces también es continua por la izquierda en  $X^{0i}$ . En las expresiones (3.1) y (3.2) aparecen los símbolos  $X^0, X^{01}, \dots, X^{0K-1}$ , que se denominarán *cuantiles* debido a la propiedad:

$$P(X \leq X^{0i}) = \sum_{j=1}^i \pi_j \quad (3.3)$$

Dado que las cantidades  $\pi$  son positivas, entonces los cuantiles deben estar ordenados según se indica a continuación:

$$X^0 \leq X^{01} \leq \dots \leq X^{0K-1}$$



**Figura 3.1 :** Distribución de una variable de bloques. a) Función de densidad de una variable de bloques. b) Función de distribución asociada.

Véase en la Fig. 3.1 un ejemplo gráfico de función de densidad y función de distribución de una variable de bloques, con la característica forma de rectángulos yuxtapuestas.

puestos de  $f_X$ , y la de línea quebrada de  $F_X$ .

### 3.2 Momentos

El operador *esperanza* (abreviado  $E[\cdot]$ ) aplicado a una variable aleatoria continua  $X$  que posea función de densidad viene dado por la expresión:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.4)$$

Si en (3.4) se utilizan las potencias de  $X$ , las variables  $X^2$ ,  $X^3$ , ...,  $X^n$  en general, entonces la expresión se convierte en:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx, \quad n \geq 1 \quad (3.5)$$

donde  $E[X^n]$  se denomina *momento de orden  $n$ -ésimo*.

A la hora de calcular los momentos de una variable aleatoria de bloques, hay que prestar atención al hecho de que su dominio de definición está formado por una serie de segmentos consecutivos. Por tanto, la integral de (3.5) se puede resolver fácilmente creando particiones según dichos segmentos. Es decir, sea  $X$  una variable aleatoria de  $K-1$  bloques y con función de densidad definida como en (3.1) a través de un conjunto de cuantiles  $\{X^{0i}, i = 0 \dots K-1\}$ . Entonces, para hallar el momento de orden  $n$  de  $X$ :

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_{i=1}^{K-1} \int_{X^{0i-1}}^{X^{0i}} x^n f_X(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{K-1} \int_{X^{0i-1}}^{X^{0i}} x^n \frac{\pi_i}{X^{0i} - X^{0i-1}} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i}{X^{0i} - X^{0i-1}} ((X^{0i})^{n+1} - (X^{0i-1})^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nos interesan particularmente los momentos de primer y segundo orden. Entonces, tomando (3.6) y simplificando queda:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i (X^{0i} + X^{0i-1}) \\ E[X^2] &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i ((X^{0i})^2 + (X^{0i-1})^2 + X^{0i} X^{0i-1}) \end{aligned}$$

De hecho, estos son términos particulares de la expresión general:

$$E[X^n] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i \left[ \sum_{j=0}^n (X^{0i-1})^j \cdot (X^{0i})^{n-j} \right]$$

Y con esto definimos ya la *esperanza* y la *variancia* de  $X$  de la manera usual:

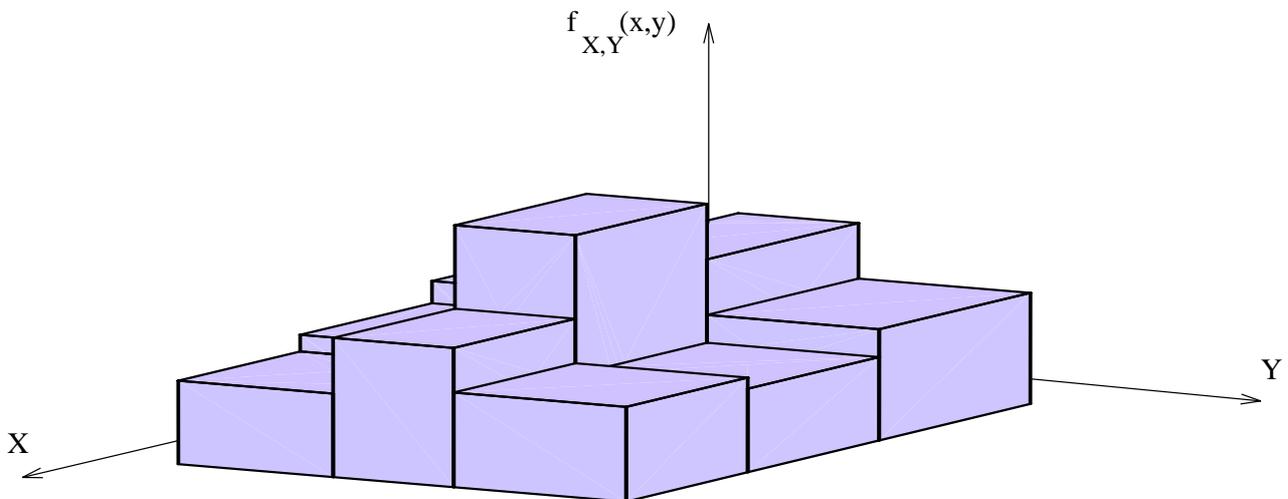
$$\mu_X \equiv E[X] \quad (3.7)$$

$$\sigma_X^2 \equiv \text{Var}[X] \equiv E[X^2] - (E[X])^2 \quad (3.8)$$

### 3.3 Dos variables de bloques

Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias de bloques. Por razones de simplicidad, consideraremos que ambas son de  $K-1$  bloques y comparten el mismo vector de probabilidades  $\Pi$ . Se define la *función de densidad conjunta*  $f_{X,Y}(x,y)$  como:

$$f_{X,Y}(x,y) = r^{i,j} \quad \text{para } i,j \text{ tal que } \begin{cases} X^{0i-1} < x < X^{0i} \\ Y^{0j-1} < y < Y^{0j} \\ \text{con } 1 \leq i, j \leq K-1 \end{cases} \quad (3.9)$$



**Figura 3.2 :** Función de densidad conjunta de dos variables de bloques.

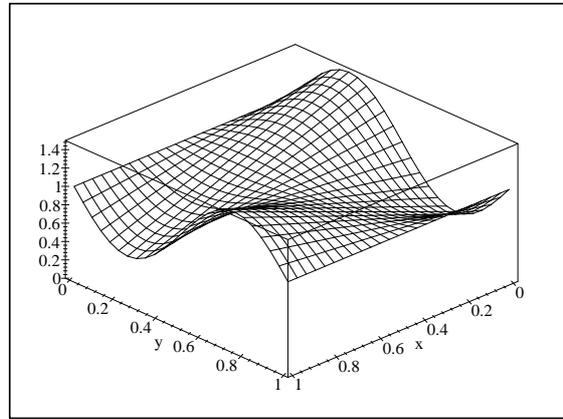
La definición de esta función está claramente inspirada en la forma de las funciones de densidad univariantes, y es su lógica extensión a un dominio de dos dimensiones. Como se puede apreciar en el ejemplo gráfico de la Fig. 3.2, la función de densidad bivalente tiene la forma de un conjunto de paralelepípedos dispuestos sobre una malla rectangular determinada por los cuantiles de  $X$  e  $Y$ , y de altura  $r^{i,j}$ . Al igual que en el caso univariante,

$f_{X,Y}(x,y)$  no está definida en los puntos que están sobre los cuantiles, aunque esto no impide que dicha función sea integrable, con lo cual tiene sentido hablar de la probabilidad:  $P(\{X \leq x \cap Y \leq y\})$  o, lo que es lo mismo, de la función de distribución conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) dv du$$

La adopción de (3.9) como la forma de la función de densidad conjunta de variables de bloques tiene el propósito de aportar una cierta facilidad al tratamiento de algunos problemas, pero no establece que sea la única forma que puede presentar la función de densidad conjunta de este tipo de variables. Por poner un ejemplo, la siguiente función *no constante*:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 + (a - 2ax) \sin(2\pi y), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (0 < |a| \leq 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



**Figura 3.3 :** Ejemplo de función de densidad conjunta no constante.

que aparece representada en la Fig. 3.3, da lugar a dos funciones de densidad marginal (por integración respecto  $X$  o respecto  $Y$ ) que corresponden a sendas variables uniformes  $[0,1]$ , y que claramente entran dentro de la clase de variables de bloques —con  $K=2$ .

A continuación se enuncian tres propiedades aplicables cuando se tienen dos variables aleatorias de bloques con función de densidad conjunta  $f_{X,Y}$  tal como en (3.9):

$$\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{K-1} r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1}) = 1 \quad (3.10)$$

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^{K-1} r^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) = \frac{\pi_i}{(X^{0i} - X^{0i-1})} = r^i \quad i = 1 \dots K - 1 \quad (3.11)$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K-1} r^{i,j}(X^{0i} - X^{0i-1}) = \frac{\pi_j}{(Y^{0j} - Y^{0j-1})} = r^{i,j} \quad j = 1 \dots K-1 \quad (3.12)$$

La primera propiedad (3.10) se refiere al hecho de que bajo una curva de densidad bivariable se encierra un volumen de una unidad. Solucionando la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v) dv du$  se llega trivialmente a que tal volumen es la suma de los volúmenes de cada bloque, que es la expresión que aparece a la izquierda de la igualdad en (3.10). La segunda y tercera propiedades equivalen a decir que las distribuciones marginales deben ser iguales a las distribuciones de  $X$  e  $Y$ , y los términos que aparecen con el sumatorio en (3.11) y (3.12) son los que resultan de solucionar las integrales correspondientes (consultar el apéndice 1 al final del documento).

Estas  $2K-1$  ecuaciones no son totalmente independientes. Por ejemplo, es sencillo comprobar que las  $K-1$  ecuaciones de (3.11) se pueden transformar en:

$$(X^{0i} - X^{0i-1}) \sum_{j=1}^{K-1} r^{i,j}(Y^{0j} - Y^{0j-1}) = \pi_i,$$

y que, puesto que por hipótesis  $\sum \pi_i$  es igual a 1, la suma de todos los términos de la izquierda en este conjunto de ecuaciones también es 1, resultando ser exactamente lo que postula la ecuación (3.10). A idéntico resultado llegamos utilizando las ecuaciones (3.12), de donde se deduce que entre estas  $K-1$  ecuaciones y aquellas otras también existe un grado de dependencia lineal.

De lo anterior se deduce que existen  $2K-3$  ecuaciones linealmente independientes y  $(K-1)^2$  incógnitas  $r^{i,j}$ . Admitamos por un momento que se conocen perfectamente las variables  $X$  e  $Y$  pero que nada se sabe de su función de densidad conjunta. Para un caso no trivial, con  $K > 2$ , tendríamos  $(K-2)^2$  grados de libertad para mover nuestras incógnitas, obteniendo infinitas soluciones válidas para  $f_{X,Y}$ . El resultado es perfectamente normal, puesto que en general las distribuciones marginales no determinan la distribución conjunta; solamente en el caso en que  $X$  e  $Y$  sean independientes, entonces y sólo entonces se cumple que:  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ , o sea:

$$r^{i,j} = \frac{\pi_i \pi_j}{(X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})}$$

El caso que no habíamos considerado de  $K=2$ , teniendo en cuenta cómo son por definición (3.1) y (3.9) tales funciones, fuerza a que las dos variables sean independientes; es por ello el único caso en que el sistema planteado resultaría ser compatible y determinado.

A partir de la definición de *covariancia* de dos variables  $X$  e  $Y$ , que se puede encontrar en el apéndice 1, para dos variables de bloques se llega a:

$$\text{Cov}[X, Y] = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{K-1} r^{i,j}(X^{0i} - X^{0i-1})(X^{0i} + X^{0i-1} - 2\mu_X)(Y^{0j} - Y^{0j-1})(Y^{0j} + Y^{0j-1} - 2\mu_Y) \quad (3.13)$$

Tomando la expresión de (3.13), se puede obtener un indicador estandarizado entre  $-1$  y  $1$  como es el *coeficiente de correlación lineal*:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.14)$$

Finalmente, expresaremos cuál es la forma que resulta para las funciones condicionadas. Puesto que:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},$$

en el caso de que se suponga un valor  $y$  entre  $Y^{0j-1}$  y  $Y^{0j}$ , entonces:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{r^{i,j}}{\pi_j}(Y^{0j} - Y^{0j-1}), \quad X^{0i-1} < x < X^{0i}$$

Hay que hacer notar que el hecho de disponer de información relativa a una de las variables —a la  $Y$  en este caso—, puede modificar sensiblemente las probabilidades iniciales asociadas a un acontecimiento:

$$\begin{aligned} P(X^{0i-1} < x < X^{0i}) &= \pi_i \\ P(X^{0i-1} < x < X^{0i} | Y^{0j-1} < y < Y^{0j}) &= \frac{r^{i,j}}{\pi_j}(Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es decir, una variable de bloques condicionada sigue presentando una forma como la de la Fig. 3.1.a), pero el área del rectángulo  $i$  no será ya  $\pi_i$ , a no ser que ambas variables sean independientes. En este caso se cumple que:

$$r^{i,j} = \frac{\pi_i}{X^{0i} - X^{0i-1}} \times \frac{\pi_j}{Y^{0j} - Y^{0j-1}}$$

y, en consecuencia, (3.15) se simplifica en el valor  $\pi_i$ , que es la probabilidad inicial.

### 3.4 Comentario final sobre la notación

Los llamados cuantiles de una variable de bloques  $X$  se denotan, tal como se ha dicho con anterioridad, con el nombre de la variable y una especie de exponente que representa su posición; este número siempre empieza con  $0$ , y puede seguirle una cifra entre  $1$  y  $K - 1$  (se exceptúa el primer caso, que se escribe sin segunda cifra,  $X^0$ ).

La potenciación de un cuantil se denota siempre con preferencia para el identificador del cuantil, tal como en  $(X^{0k})^n$ .

A lo largo de este documento se empleará preferiblemente esta notación. Sin embargo, existe la costumbre de usar la diferencia de cuantiles consecutivos, puesto que aparecen con frecuencia (ejemplos son (3.10), (3.11) o (3.12)). Estas diferencias tienen también asociada una notación: se conoce como  $X^j$  a la diferencia  $X^{0j} - X^{0j-1}$ . Evidentemente, existe

ambigüedad entre este significado y la potencia de una variable aleatoria. Sin embargo, el contexto permite identificar sin problemas en cada ocasión el significado concreto (uno es un valor numérico y otro es una variable aleatoria). El uso de las diferencias va a ser más abundante que el de variables elevadas a una potencia. Por otra parte, en ningún lado aparece la potenciación de unas diferencias y, aunque así fuera, se aclararía debidamente.



## CAPÍTULO 4

### ESTIMACIÓN DE CUANTILES DE VARIABLES DE BLOQUES

#### 4.1 Introducción

En este capítulo se verán diversos métodos de estimación de los cuantiles de variables de bloques, comparándolos entre sí. El interés de estos estimadores radica principalmente en que se pueden considerar como los parámetros que determinan las variables de bloques, una vez que el número de artículos  $K$  y las probabilidades por bloque  $\Pi$  han sido fijados (y que, por tanto, a todos los efectos tomaremos como constantes).

Recordemos que se parte de una muestra aleatoria simple proveniente de una variable aleatoria  $X$ , y que dicha muestra se denotará como  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $n$  será el tamaño de la muestra. Algunos de los métodos desarrollados pueden aplicarse simultáneamente sobre un vector de  $m$  variables,  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ ; en este caso, se denota la muestra aleatoria como una matriz  $((x_{1,1}, \dots, x_{n,1}), \dots, (x_{1,m}, \dots, x_{n,m}))$ .

Partiendo de que asumimos que  $X$  es una variable aleatoria de bloques, con  $K$  y  $\Pi$  conocidos, hallaremos unos estimadores de las cantidades desconocidas  $X^0, X^{01}, \dots, X^{0K-1}$ , a las que a partir de ahora también llamaremos *parámetros de  $X$* . Los estimadores de los cuantiles serán expresados como  $(\hat{X}^0, \hat{X}^{01}, \dots, \hat{X}^{0K-1})$ . En general, el símbolo  $\hat{\cdot}$  acompaña a un símbolo  $\theta$  para denotar que  $\hat{\theta}$  es un estimador del parámetro  $\theta$ , siguiendo una postura muy extendida en los textos escritos sobre estadística. En el mismo sentido nos referiríamos si tuviéramos un vector de variables.

Por su condición de extremos, los estimadores  $\hat{X}^0$  y  $\hat{X}^{0K-1}$  se conocerán conjuntamente con el nombre de *estimadores externos*, y al conjunto formado por el resto de los estimadores se le denominará conjunto de los *estimadores internos*. Las propiedades de los estimadores desarrollados serán comentadas a partir de las pruebas numéricas llevadas a cabo.

## 4.2 Algunas propiedades de los estimadores

A continuación se ofrece un sucinto resumen referido a estimadores de parámetros poblacionales. Para una lectura complementaria puede acudir a una numerosa bibliografía sobre Teoría de la Estadística, por ejemplo [HOPO71].

Un estadístico  $d$  es una función de una muestra: se expresa como  $d(x_1, \dots, x_n)$ . Cada elemento de la muestra, denotado como  $x_i$ , es un valor aleatorio, cuya distribución es idéntica a la de todos los demás elementos. Un *estimador* de un parámetro  $\theta$ , del que depende una familia de variables aleatorias especificadas genéricamente como  $X$ , es un estadístico que trata de estimar al parámetro  $\theta$ . De esta definición (que no pretende ser rigurosa) se desprende que un estimador es una variable aleatoria, pues es función de variables aleatorias.

Una primera propiedad deseable en un estimador  $d$  es la siguiente:

$$E[d(x_1, \dots, x_n)] = \theta,$$

según la cual se diría que el estimador  $d$  es *insesgado*. Algunos estimadores se llaman *asintóticamente* insesgados cuando cumplen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[d(x_1, \dots, x_n)] = \theta$$

La segunda propiedad de interés de un estimador es su *eficiencia*, que usualmente se utiliza en términos comparativos. Así, siendo  $d$  y  $d'$  estimadores de un parámetro  $\theta$ , se dice que  $d$  es más eficiente que  $d'$  si la variancia de  $d$  es menor que la variancia de  $d'$ . Por tanto, parece que deberíamos procurar hallar el estimador máximo eficiente, o simplemente *eficiente*, aquel que presenta la mínima variancia. Se ha demostrado que la variancia de un estimador insesgado eficiente, cuando se cumplen determinadas condiciones de regularidad de  $f_X$ , viene dada por:

$$B(\theta) = \frac{1}{n \cdot E \left[ \frac{\partial \log f_X(x|\theta)}{\partial \theta} \right]^2} \quad (4.1)$$

La expresión (4.1) fue obtenida por Cramér, Frechet y Rao, y puede verse su demostración en numerosos textos (por ejemplo, [RICE88]). Sin embargo, no sirve para proporcionar una cota inferior a la variancia de los estimadores propuestos, ya que no podemos demostrar que éstos sean insesgados y además estamos delante de unas funciones que presentan discontinuidades. Por otra parte, la complejidad de los estimadores es un obstáculo insalvable para intentar encontrar una solución analítica de la variancia del estimador.

### 4.3 Método clásico

Sea  $X$  una variable aleatoria que posea función de distribución  $F_X$ . El cuantil de nivel  $\alpha$ ,  $q_\alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , se puede estimar a partir de una muestra  $(x_1, \dots, x_n)$  mediante el siguiente procedimiento:

- 1 Sean  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$  los estadísticos de orden de la muestra, es decir:  $x_{(1)}$  es el valor mínimo,  $x_{(2)}$  es el segundo más pequeño, etc.
- 2 Sea  $t$  igual a  $(n-1) \cdot \alpha + 1$ . Sea  $\tau$  igual a  $[t]$ , y sea  $p$  igual a  $t - \tau$ .
- 3 Se define  $\hat{q}_\alpha$  como  $(1-p) \cdot x_{(\tau)} + p \cdot x_{(\tau+1)}$ .

Los símbolos  $[\cdot]$  significan “parte entera por defecto”. Resulta un método natural, rápido y sencillo de implementar. Sin embargo, el cálculo de la función de densidad del estimador,  $f_{\hat{q}_\alpha}$ , indispensable para hallar  $E[\hat{q}_\alpha]$  y  $\text{Var}[\hat{q}_\alpha]$ , es bastante complejo, por lo que la comprobación de sus propiedades, aplicado el estimador a las variables de bloques, se ha efectuado vía simulación.

Únicamente para los casos más simples,  $\hat{q}_0$  y  $\hat{q}_1$ , se puede llegar fácilmente a una expresión. Estos casos resultan de interés, pues se corresponden con  $\hat{X}^0$  y  $\hat{X}^{0K-1}$ .

#### 4.3.1 Sesgo de los estimadores $\hat{X}^0$ y $\hat{X}^{0K-1}$

Consideremos en primer lugar  $\hat{X}^{0K-1}$  como estimador igual a  $\text{MAX}(x_1, \dots, x_n)$ , donde  $x_i$  ( $i = 1, n$ ) se distribuyen como variables de  $K-1$  bloques, independientes e idénticas todas ellas. Tomaremos valores sencillos de  $K$  y supondremos que el vector  $\Pi$  es conocido para cada  $K$ . La función de distribución de  $\hat{X}^{0K-1}$  es, si  $K = 2$ :

$$F_{\hat{X}^{0K-1}}(u) = \left( \frac{u - X^0}{X^{01} - X^0} \right)^n, \quad X^0 \leq u \leq X^{01}$$

Si  $K = 3$  tendríamos:

$$F_{\hat{X}^{0K-1}}(u) = \begin{cases} \left( \pi_1 \frac{u - X^0}{X^{01} - X^0} \right)^n, & X^0 \leq u < X^{01} \\ \left( \pi_1 + \pi_2 \frac{u - X^{01}}{X^{02} - X^{01}} \right)^n, & X^{01} \leq u \leq X^{02} \end{cases}$$

De aquí deducimos la expresión de la función de densidad. Para  $K = 2$ :

$$f_{\hat{X}^{0K-1}}(u) = \frac{n}{X^{01} - X^0} \left( \frac{u - X^0}{X^{01} - X^0} \right)^{n-1}, \quad X^0 \leq u \leq X^{01}$$

Para  $K = 3$ :

$$f_{\widehat{X}^{0K-1}}(u) = \begin{cases} \frac{n\pi_1}{X^{01} - X^0} \left( \pi_1 \frac{u - X^0}{X^{01} - X^0} \right)^{n-1}, & X^0 \leq u < X^{01} \\ \frac{n\pi_2}{X^{02} - X^{01}} \left( \pi_1 + \pi_2 \frac{u - X^{01}}{X^{02} - X^{01}} \right)^{n-1}, & X^{01} \leq u \leq X^{02} \end{cases}$$

Por fin, la esperanza del estimador, con dos artículos, es:

$$E[\widehat{X}^{01}] = X^0 + \frac{(X^{01} - X^0)n}{n+1}$$

y, con tres artículos:

$$E[\widehat{X}^{02}] = X^{01} - (X^{01} - X^0) \frac{\pi_1^n}{n+1} + (X^{02} - X^{01}) \left[ \frac{n}{n+1} - \frac{\pi_1}{n+1} \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right]$$

Introducimos el sesgo del estimador  $\widehat{X}^{0K-1}$  como:

$$X^{0K-1} - E[\widehat{X}^{0K-1}];$$

se puede comprobar que la siguiente expresión es una buena aproximación del sesgo que posee la estimación del máximo por el método descrito:

$$\frac{(K-1)(X^{0K-1} - X^{0K-2})}{n+1} \quad (4.2)$$

De hecho, es exacta para el caso más sencillo. Cuando  $K = 3$ , podemos desprestigiar aquellos términos que estén afectados por el coeficiente  $\pi_1^n$ , que se puede considerar insignificante si  $n$  es suficientemente grande:

$$E[\widehat{X}^{02}] \approx X^{01} + \frac{X^{02} - X^{01}}{n+1} \left[ n - \frac{\pi_1}{1 - \pi_1} \right]$$

Siempre que  $\pi_1$  no se acerque al valor 1 (con lo que se cancelaría un denominador), la expresión anterior no varía excesivamente; si se tomase  $\pi_1 = \frac{1}{2}$ , obtendríamos que el sesgo con  $K=3$  se aproxima por:

$$X^{02} - X^{01} - \frac{X^{02} - X^{01}}{n+1}(n-1) = 2 \frac{X^{02} - X^{01}}{n+1}$$

Con un procedimiento parecido se obtiene cuando  $K=4$  la siguiente aproximación de

la esperanza del estimador  $\text{MAX}(x_1, \dots, x_n)$ :

$$E[\widehat{X}^{03}] \approx \frac{-X^{02} - nX^{03} + \pi_1 X^{03} + n\pi_1 X^{03} + \pi_2 X^{03} + n\pi_2 X^{03}}{(n+1)\pi_3}$$

que conduce a la expresión del sesgo del estimador:

$$\frac{X^{03} - X^{02}}{(n+1)\pi_3}$$

Admitiendo que  $\pi_3$  es igual a  $\frac{1}{3}$ , es decir, cuando se adopta el criterio de que  $\pi_i$  sea igual a  $\frac{1}{K-1}$ , la expresión (4.2) aparece otra vez.

Aunque la complicación de la expresión de  $E[\widehat{X}^{0K-1}]$  crece a medida que aumenta  $K$ , por lo que una demostración formal no se ha llevado a cabo, se ha podido comprobar empíricamente que el sesgo para  $K > 4$ , cuando se sigue el criterio mencionado anteriormente, también se aproxima notablemente según la expresión (4.2).

Resulta interesante calcular cuál es la variancia de  $\text{MAX}(x_1, \dots, x_n)$ ; expondremos solamente el caso con  $K=2$ , debido a su relativa sencillez. Aquí, utilizando que  $\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X]$ , se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\text{Var}[\widehat{X}^{01}] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} (X^{01} - X^0)^2$$

Vale la pena destacar que la variancia desciende con una velocidad bastante poco frecuente, del orden de  $O(n^{-2})$ . Se ha comprobado empíricamente que la variancia de los estimadores MIN y MAX se puede aproximar por:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{X}^0] &\approx \frac{(K-1)^2 (X^{01} - X^0)^2}{n^2} \\ \text{Var}[\widehat{X}^{0K-1}] &\approx \frac{(K-1)^2 (X^{0K-1} - X^{0K-2})^2}{n^2} \end{aligned}$$

Esto, más adelante, en las pruebas numéricas realizadas, se verá que se traduce en la práctica en que la variancia de los estimadores extremos (el máximo, y también el mínimo) es bastante menor que la del resto.

En lo que se refiere al estimador  $\widehat{X}^0$ , que equivale a  $\text{MIN}(x_1, \dots, x_n)$ , la expresión general de la función de densidad del estimador es:

$$f_{\widehat{X}^0}(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} \frac{dF_X}{du}(u)$$

Por ejemplo, para  $K = 2$  se obtendría:

$$f_{\widehat{X}^0}(u) = \frac{n}{(X^{01} - X^0)^n} (X^{01} - u)^{n-1}$$

La esperanza del estimador viene dada por:

$$E[\widehat{X}^0] = \frac{X^{01} + X^0 n}{n + 1}$$

Y el sesgo resultante sería:

$$E[\widehat{X}^0] - X^0 = \frac{X^{01} - X^0}{n + 1}$$

Nótese que en esta ocasión el sesgo se ha definido de signo opuesto que para el estimador  $\widehat{X}^{0K-1}$ . Esto es así con el fin de que el sesgo sea una expresión positiva.

De la misma manera que hemos hecho para encontrar la expresión (4.2), para un caso general con  $K$  artículos, una aproximación al sesgo del estimador  $\widehat{X}^0$  es:

$$\frac{(K - 1)(X^{01} - X^0)}{n + 1} \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Método clásico con innovación

De lo expuesto anteriormente, se desprende que los dos estimadores del mínimo y el máximo respectivamente son sesgados o, por decirlo con propiedad, asintóticamente insesgados, pues al tener  $n$  en el denominador, está claro que el sesgo decrece y tiende a cero si crece el tamaño de la muestra. Con las aproximaciones propuestas (4.2) y (4.3) se pueden modificar los estimadores para conseguir unos prácticamente sin sesgo. Como los valores de los parámetros son desconocidos, se usarán los mismos que se han estimado; así:

$$\begin{aligned} \widehat{X}^{0K-1} - \frac{\widehat{X}^{0K-1} - \widehat{X}^{0K-2}}{n + 1}(K - 1) &= \text{Supremo}(x_1, \dots, x_n) \left(1 + \frac{K - 1}{n + 1}\right) - \frac{K - 1}{n + 1} \widehat{X}^{0K-1} \\ \widehat{X}^0 - \frac{\widehat{X}^{01} - \widehat{X}^0}{n + 1}(K - 1) &= \text{Infimo}(x_1, \dots, x_n) \left(1 + \frac{K - 1}{n + 1}\right) - \frac{K - 1}{n + 1} \widehat{X}^{01} \end{aligned} \quad (4.5)$$

A (4.4) nos referiremos como el estimador con corrección de  $X^{0K-1}$ , y a (4.5) nos referiremos como el estimador con corrección de  $X^0$ .

Hay que aclarar que estas innovaciones hacen aumentar la variancia inicial, ya que la variancia del estimador del cuantil adyacente afecta a la que teníamos en un principio, aproximadamente en  $\left(\frac{K-1}{n+1}\right)^2 \cdot \text{Var}[\cdot]$ . En presencia de unas distribuciones que no estén afectadas de grandes irregularidades (esto se puede describir con una situación en la que se tengan bloques muy estrechos con otros muy alargados) puede decirse que aun con tamaños de muestra pequeños la mengua del sesgo compensa el incremento de la dispersión, y que a medida que  $n$  crece tienden a igualarse rápidamente las variancias de los estimadores sin corrección y con corrección.

## 4.4 Método de la máxima verosimilitud

El estimador máximo verosímil (MV) de los cuantiles de una variable  $X$  puede ser formulado tal como sigue:

$$\min_{\Theta} \sum_{i=1}^n -\log(f_X(x_i|\Theta)) \quad (4.6)$$

$$\text{s.t. } X^{0k-1} \leq X^{0k} \quad k = 1 \dots K-1 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} X^0 &\leq \text{Infimo}(x_1, \dots, x_n), \\ X^{0K-1} &\geq \text{Supremo}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $f_X(x_i|\Theta)$  que aparece en (4.6) es la función de densidad de  $X$ , poniendo de manifiesto que depende de los parámetros  $\Theta$ , es decir, de los cuantiles  $X^{0k}$ ,  $k = 0 \dots K-1$ . Las restricciones (4.7) imponen el orden obligatorio en que deben estar situados los cuantiles, y con (4.8) se obliga a que el cuantil menor sea como mucho como la menor de las observaciones, y el cuantil mayor como poco como la mayor de las observaciones.

También sería posible imponer como restricción lo siguiente:

$$\begin{aligned} X^0 &= \text{Infimo}(x_1, \dots, x_n) \cdot (1 + \Delta) - \Delta \cdot X^{01}, \\ X^{0K-1} &= \text{Supremo}(x_1, \dots, x_n) \cdot (1 + \Delta) - \Delta \cdot X^{0K-2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\Delta$  es  $(K-1)/(n+1)$ . Las dos expresiones de (4.9) provienen de (4.4) y (4.5). Con ello quiere mostrarse que otro tipo de restricciones pueden figurar en la formulación del problema (MV), pudiendo ser útil para corregir una tendencia de algún estimador, o simplemente para añadir una restricción estructural del problema que deba resolverse.

Teniendo en cuenta que las funciones de densidad de las variables de bloques son constantes a trozos, la función objetivo (4.6) puede expresarse también como:

$$\sum_{k=1}^{K-1} -n_k \cdot \log \left( \frac{\pi_k}{\widehat{X}^{0k} - \widehat{X}^{0k-1}} \right) \quad (4.10)$$

siendo  $n_k$  el número de observaciones contenidas en el intervalo  $(\widehat{X}^{0k-1}, \widehat{X}^{0k})$ .

Ahora bien, la función objetivo del problema (MV) *no es continua*; en (4.10) se pone de manifiesto. Si un estimador varía levemente de manera tal que rebasa el valor contenido en alguna observación de la muestra, entonces un intervalo aumenta en uno el número de observaciones que contiene, variando bruscamente la función objetivo respecto del valor que tenía anteriormente. Por tal razón, la solución del problema (MV) necesita técnicas especiales que permitan resolver un problema de tales características.

En principio, algunas pruebas se han efectuado mediante funciones no preparadas para resolver problemas no continuos [NAG90]. Sin embargo, las soluciones no son bastante

satisfactorias, aparte de que suele llegarse al final a causa de inestabilidad numérica, y no por haber alcanzado un óptimo. Por otra parte, los resultados encontrados no parecen ser los más idóneos: el resultado tipo es aquel en el que  $\hat{X}^0$  y  $\hat{X}^{01}$  se sitúan muy cerca el uno del otro, y cerca del mínimo observado (con un error muy importante en la estimación de  $X^{01}$ ); otro tanto sucede con  $\hat{X}^{0K-1}$  y  $\hat{X}^{0K-2}$ .

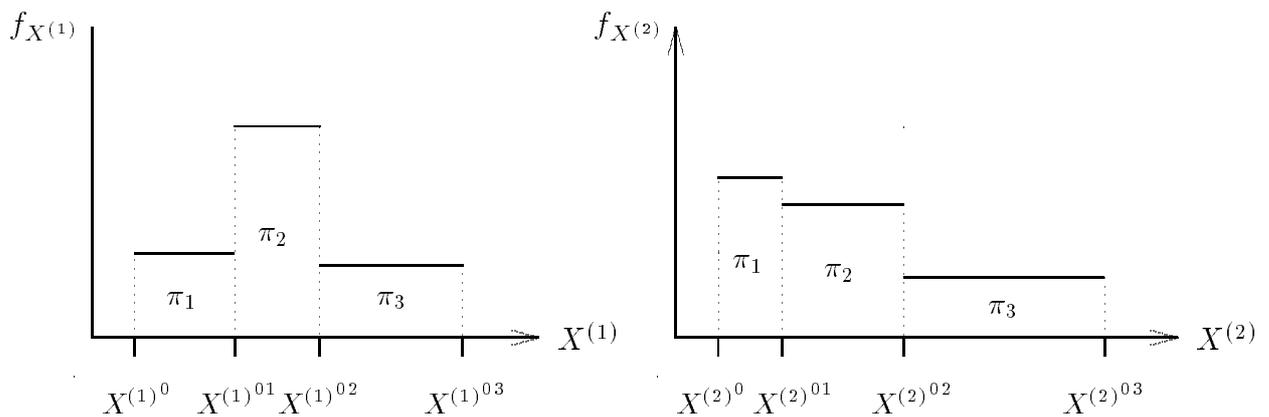
Por tanto, este método no puede por ahora llevarse adelante, en espera de alguna técnica que pueda ser adoptada y que permita solucionar adecuadamente este problema.

## 4.5 Métodos de estimación de cuantiles por mínimos cuadrados

En esta parte se describen varios métodos alternativos al clásico. Ambos se basan en el método de los momentos, pues intentan encontrar una solución que ajuste lo mejor posible (según un criterio de mínimos cuadrados [MC]) los indicadores de tendencia y dispersión muestrales con los poblacionales.

Concretando más, se suponen  $m$  variables aleatorias  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ , de cada una de las cuales se conoce una muestra aleatoria simple. Suponiendo que las  $m$  variables están (no idénticamente) distribuidas como variables de  $K-1$  bloques, se busca encontrar como solución del problema una estimación de los cuantiles de cada variable  $X^{(j)}$ ,  $j = 1, m$ . La naturaleza del problema real puede introducir importantes relaciones que hagan que el problema no sea separable en  $m$  subproblemas, relaciones que se incorporan como restricciones a la formulación original. Este punto marca una diferencia sobre el método clásico, que ha de determinar los cuantiles para cada variable separadamente.

### 4.5.1 Primer método MC (QP1)



**Figura 4.1 :** Ejemplo correspondiente a dos intervalos, con sendas variables.

Por ejemplo, supongamos una secuencia de  $n \cdot m$  valores; cada valor corresponde a una observación relativa a un cierto intervalo (de entre  $m$  considerados). Los intervalos se repiten cíclicamente hasta  $n$  veces. Se considera que cada intervalo está asociado a una variable aleatoria: así,  $X^{(j)}$  es la variable asociada al  $j$ -ésimo intervalo. En la Fig. 4.1 se

refleja una situación simple, en la que solamente se trata con dos intervalos. Se pretende encontrar una solución (es decir, los cuantiles que definen a cada variable) tal que cumpla:

- a) la esperanza hallada para la variable  $j$  esté en un entorno de la media observada de los valores correspondientes al intervalo  $j$ ,  $\bar{x}_j$ .
- b) la variancia hallada para la variable  $j$ ,  $s_j^2$ , esté próxima a la variancia observada de los valores correspondientes al intervalo  $j$ .

Decimos que los  $m$  intervalos constituyen un periodo; entonces, queremos tener en cuenta una restricción adicional que imponga que la suma de las esperanzas de las variables de los  $m$  intervalos sea igual a la media observada para un periodo,  $\bar{x}$ . Por otra parte, tenemos una restricción estructural que, aunque evidente, es necesario explicitar: el valor del cuantil  $X^{0k-1}$  debe ser menor que el del cuantil  $X^{0k}$  para toda variable  $X$ .

La siguiente es la formulación de este problema (QP1):

$$\min_X \sum_{j=1}^m \left( Var \left[ X^{(j)} \right] - s_j^2 \right)^2 \quad (4.11)$$

$$\text{s.t.} \quad \left| E \left[ X^{(j)} \right] - \bar{x}_j \right| \leq \varepsilon_j \quad j = 1 \dots m \quad (4.12)$$

$$\sum_{j=1}^m E \left[ X^{(j)} \right] = \bar{x} \quad (4.13)$$

$$\left( X^{(j)} \right)^{0k-1} \leq \left( X^{(j)} \right)^{0k} \quad j = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots K - 1 \quad (4.14)$$

$$0 \leq \left( X^{(j)} \right)^0 \quad j = 1 \dots m \quad (4.15)$$

En (4.11), denotamos por  $X$  el vector de variables del problema a optimizar (QP1), de dimensión  $m \cdot K$  y que, más propiamente, se debería reescribir como  $\hat{X}$ , pues equivale al conjunto de estimadores de los parámetros desconocidos, correspondientes a los cuantiles que han de ser determinados. El símbolo  $s_j^2$  se refiere a la variancia muestral de las observaciones correspondientes al  $j$ -ésimo intervalo. En (4.12) utilizamos  $\bar{x}_j$  como la media muestral para el  $j$ -ésimo intervalo.  $s_j^2$  y  $\bar{x}_j$  vienen dadas por las conocidas expresiones:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,j}$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{i,j} - \bar{x}_j)^2$$

$\varepsilon_j$  es una magnitud que acota la distancia máxima entre dicho valor y su homólogo dependiente de la variable  $X^{(j)}$ . Un valor aceptable, ya que tiene en cuenta la escala de la variable y la cantidad de información disponible en la muestra, puede ser:

$$\varepsilon_j = \frac{s_j}{\sqrt{n}}$$

(4.13) hace referencia a la restricción que se ha introducido aparte, en donde  $\bar{x}$  se toma

como la media del periodo. (4.14) es el grupo de restricciones que hace que el orden de los cuantiles se mantenga. Finalmente, por la naturaleza del problema, en (4.15) se definen los cuantiles menores como positivos y, con ello, cada variable (aunque estos límites no son estructurales y pueden variar).

### 4.5.2 Segundo método MC (QP2)

El método propuesto formulado con QP1 puede mejorarse utilizando las expresiones (4.4) y (4.5). Tales expresiones se recogen en forma de restricciones, de la misma manera que aparecen en la formulación del método de máxima verosimilitud, en (4.9). La adición de estas  $2m$  restricciones supone en la práctica una reducción en la dimensión del problema.

Por lo demás, se sigue utilizando el mismo entorno descrito en el apartado anterior y, de hecho, la formulación de (QP2) es muy semejante a la de (QP1):

$$\min_X \sum_{j=1}^m \left( Var [X^{(j)}] - s_j^2 \right)^2 \quad (4.16)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} (X^{(j)})^0 &= \text{Infimo}(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \\ &\cdot (1 + \Delta) - \Delta \cdot (X^{(j)})^{01} \quad j = 1 \dots m \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} (X^{(j)})^{0K-1} &= \text{Supremo}(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \\ &\cdot (1 + \Delta) - \Delta \cdot (X^{(j)})^{0K-2} \quad j = 1 \dots m \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$(4.12)$$

$$(4.13)$$

$$(4.14)$$

$$(4.15)$$

donde  $\Delta$  se sigue suponiendo  $(K - 1)/(n + 1)$ . También sería apropiado incluir unas cotas acerca de los cuantiles mínimo y máximo, siguiendo el estilo de las que aparecen en (4.8).

### 4.5.3 Tercer método MC (QP3)

Mientras los dos anteriores pueden considerarse muy próximos, ya que el modelo (QP2) añade una serie de restricciones al (QP1), el tercer método cuenta con un punto de partida diferente.

En primer lugar, la función objetivo se convierte en la minimización de la *discrepancia* entre la función de distribución real (que depende de las variables) y la empírica (que es función de la muestra). En segundo lugar, y como consecuencia del cambio de función objetivo, pasan a ser restricciones no lineales los términos relativos a la variancia.

El resto de la formulación del problema puede seguir las líneas de cualquiera de las versiones anteriores, ya que pueden integrarse o no las ecuaciones (4.4) y (4.5) de manera libre, dando lugar a métodos distintos. A continuación se ofrece una formulación para este método:

$$\min_X \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left( F_{X^{(j)}}(x_{i,j} | X^{(j)}) - \widehat{F}_{X^{(j)}}(x_{i,j}) \right)^2 \quad (4.19)$$

$$\text{s.t.} \quad \left| \text{Var} \left[ X^{(j)} \right] - s_j^2 \right| \leq \epsilon_j \quad j = 1 \dots m \quad (4.20)$$

$$(4.12)$$

$$(4.13)$$

$$(4.17)$$

$$(4.18)$$

$$(4.14)$$

$$(4.15)$$

Por  $\widehat{F}_{X^{(j)}}(x_{i,j})$  se entiende la función de distribución empírica de  $X^{(j)}$ , que se obtiene a partir de la muestra:

$$\widehat{F}_{X^{(j)}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[-\infty, x]}(x_{i,j})$$

donde

$$I_{[-\infty, x]}(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{i,j} \leq x \\ 0, & \text{si } x_{i,j} > x \end{cases}$$

La restricción (4.20) incluye una constante  $\epsilon_j$  que se puede definir según el grado de restrictividad que se desee. En nuestras pruebas se ha usado  $\epsilon_j = 5 \cdot 10^{-3} s_j^2$ . Las restricciones que aparecen en (4.12) también se han hecho más restrictivas, modificando el valor de  $\epsilon_j$ .

#### 4.5.4 Cuarto método MC (QP4)

El último de los métodos que se presenta puede servir para introducir una reflexión: las modelizaciones del problema posibles son múltiples, y se pueden incorporar en todo momento ligeras o importantes variaciones que suponen un método de estimación diferente. Por tanto, con el cuarto método no se está buscando añadir un elemento más de complicación a una lista que nunca se acabaría, sino más bien mostrar que los métodos MC también se pueden servir del método clásico para compensar sus mutuas debilidades.

El que llamamos QP4 utiliza el resultado de una estimación clásica para basarse en esta solución como punto de referencia; intentando no alejarse de este punto, las restricciones del modelo que hayan sido violadas se factibilizan. De esta manera, pueden mantenerse condiciones relativas a los momentos de las variables, o constricciones multi-intervalo.

Una posible formulación del método QP4 es la siguiente:

$$\min_X G(X | \mathcal{X}_c) \quad (4.21)$$

$$\text{s.t.} \quad (4.20)$$

$$(4.12)$$

(4.13)

(4.14)

(4.15)

donde  $G(X|\mathcal{X}_c)$  es una función que expresa una medida de la proximidad del punto  $X$  al punto  $\mathcal{X}_c$ , la solución obtenida según el método clásico. Un ejemplo que se ha probado sería:

$$G(X|\mathcal{X}_c) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\left( (X^{(j)})^{0i} - (\mathcal{X}_c^{(j)})^{0i} \right)^2}{\max(U, \mathcal{X}_c^{(j)0i})}$$

El denominador representa un escalado que se aplica sobre los diferentes términos con el fin de uniformizar la magnitud de los sumandos que componen  $G(X|\mathcal{X}_c)$ , e impedir un peso excesivo a cargo de los cuantiles con mayor valor absoluto. El escalar  $U > 0$  debe ser usado como una precaución al estimar cuantiles de pequeño valor. Aunque depende de la magnitud de los datos,  $U=1$  puede ser usado para casos corrientes.

Señalar, por último, que para cualquiera de estos problemas carecemos de una expresión algebraica que proporcione la solución óptima, ya que todos ellos constan de una función objetivo no lineal, con restricciones lineales o no lineales y cotas en algunas variables), y que estos problemas se resuelven mediante métodos iterativos. De aquí que hallar analíticamente la expresión de la esperanza o la variancia de los estimadores sea prácticamente imposible, por lo que este análisis se contemplará empíricamente (y, en consecuencia, sólo de manera aproximada e incompleta).

## 4.6 Comparación de los métodos de estimación

El procedimiento empleado parte de que tenemos una distribución concreta, totalmente conocida. Así, sea  $K$  el número de cuantiles considerados ( $K-1$  bloques) y  $\Pi$  el vector de probabilidades asociadas a cada bloque, y sean  $X^0, \dots, X^{0K-1}$  valores reales conocidos definiendo a una variable aleatoria  $X$ . En lo que sigue no podremos generalizar, pero expondremos algunas conclusiones que pudieran tener interés globalmente, aun cuando en realidad sólo son particulares de cada ejemplo concreto.

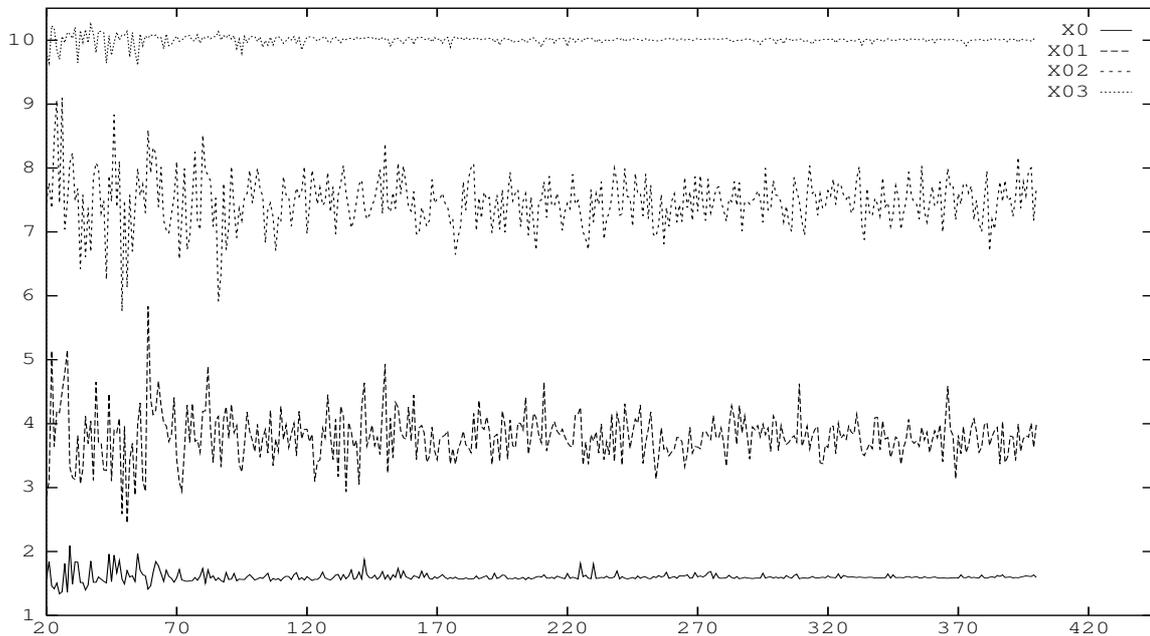
A partir de  $X$  se puede fácilmente generar una muestra aleatoria simple del tamaño que sea. Basta con utilizar repetidamente este procedimiento:

1] Obtener un valor  $\alpha$  proveniente de una distribución uniforme en  $[0, 1]$ .

2] Calcular  $F_X^{-1}(\alpha)$ . Como  $F_X$  es una función lineal a trozos, entonces su inversa también es lineal a trozos y, por tanto, sencilla de calcular. A partir de la muestra hallada, una estimación de los cuantiles se halla mediante cualquiera de los métodos explicados, y en principio no tienen por qué coincidir. Sin embargo, parece que para llevar a cabo la más mínima comparación es necesario efectuar un cierto número de veces la estimación con diversas muestras, para poder apreciar así las diferencias o los rasgos comunes que puedan existir.

Por ejemplo, querríamos hacer una comprobación de la evolución de los estimadores

clásicos dependiendo del tamaño de la muestra, el cual interviene directamente en la calidad de la estimación. Obtendremos una serie de muestras con tamaños variables, desde un valor discreto como 20 hasta uno que se pueda considerar como suficientemente grande, como 400.



**Figura 4.2 :** Ejemplos de estimador clásico, con muestras de tamaño variable. En abscisas, el tamaño de muestra; en ordenadas, los cuantiles estimados (cada serie corresponde a un parámetro diferente).

En el ejemplo que aparece en la Fig. 4.2 se utilizó la variable definida por los cuantiles  $\{1.6, 3.8, 7.5, 10\}$  y las probabilidades  $\Pi' = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ . Se diferencian los estimadores extremos (máximo y mínimo) de los estimadores internos (el resto) en:

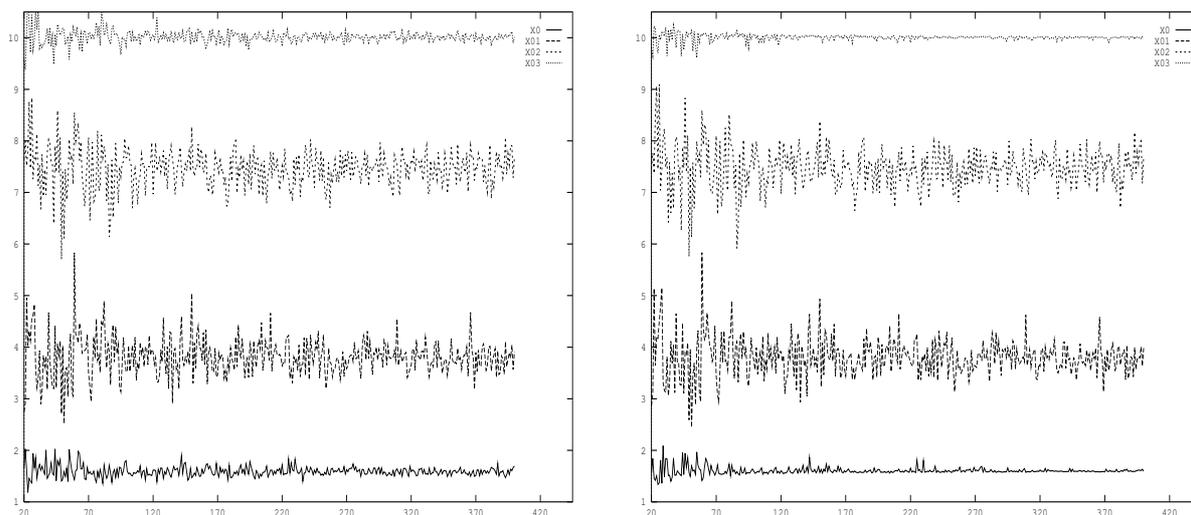
- la menor variancia de los extremos
- la oscilación de la tendencia, presente en los internos, pero ausente en los extremos.

Evidentemente, el mínimo de una muestra no puede oscilar alrededor del mínimo teórico que puede adoptar la variable, sino que se mantiene por encima. Con un razonamiento parecido se justifica la posición del máximo. Además, ya habíamos visto en (4.2) y (4.3) cuál era el sesgo esperado, que, expresado en términos positivos, sería aproximadamente:

$$\text{sesgo } \hat{X}^0 = \frac{3.8 - 1.6}{n + 1}; \quad \text{sesgo } \hat{X}^{0K-1} = \frac{10 - 7.5}{n + 1}$$

es decir, estos estimadores son asintóticamente insesgados.

Otro tanto se podría hacer con los otros métodos. Las figuras Fig. 4.3 a) y b) muestran los mismos resultados según (QP1) —(4.11)-(4.15)— y (QP2) —(4.16)-(4.18), (4.12)-(4.15). Con el fin de llevar a cabo la comparación con el método clásico, se supone que sólo se tiene una muestra ( $m = 1$ ), por lo que la restricción (4.12) resulta ser redundante —pues (4.13) es más restrictiva—.



**Figura 4.3 :** Estimación con muestras de tamaño variable. a) Ejemplo del estimador QP1. b) Ejemplo del estimador QP2. En abcisas, el tamaño de muestra; en ordenadas, los cuantiles estimados.

Una de las apreciaciones importantes es que la variancia de los estimadores extremos parece ser sensiblemente menor cuando se emplea el método QP2, que lleva implementado el mecanismo de corrección del sesgo ya explicado. Sin embargo, la información obtenida gráficamente no es más que orientativa. Sería preferible algún tipo de información numérica, con el que poder contrastar, o incluso inferir, las diferencias entre los métodos.

Tabla 4.I.a. Comparación de QP1, QP2 y clásico (sin innovación).

Ctil.	Valor real	Media QP1	Media QP2	Media Cl.	Var. QP1	Var. QP2	Var. Cl.
0	1.6000	1.622	1.611	1.737	0.035	0.024	0.022
1	3.8000	3.866	3.877	4.012	0.394	0.425	0.375
2	7.5000	7.489	7.486	7.369	0.338	0.391	0.333
3	10.0000	10.005	9.999	9.859	0.043	0.018	0.016

Tabla 4.I.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP1	QP2	Clásico
0	1.6000	0.0354	0.0242	0.0412
1	3.8000	0.3985	0.4309	0.4200
2	7.5000	0.3383	0.3910	0.3500
3	10.0000	0.0426	0.0176	0.0357

Una posible manera es generar diversas muestras, todas ellas del mismo tamaño, a fin de obtener estimaciones independientes de los parámetros. Por ejemplo, utilizando la misma distribución anterior de  $X$ , y generando 300 muestras de 50 observaciones cada una, se puede obtener información relativa a la *estimación media*, y también a la *variancia*

de la estimación. Por otra parte, de aquí se calcula un único indicador que engloba ambas informaciones, el *error cuadrático medio* (ECM), que viene definido por:

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}[\hat{\theta}] + \text{Sesgo}^2[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}] + (\text{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2$$

En la tabla 4.I aparece una primera comparación entre tres de los métodos introducidos.

De esta tabla, y de otras muchas más que se han analizado, se desprenden algunas ideas difíciles de justificar, pero cuya presencia se puede calificar como de insistente. Por ejemplo, la diferenciación entre los estimadores internos y los externos, siendo éstos últimos más eficientes, si se pudieran comparar entre sí. Obsérvese en la tabla 4.I.b que el ECM de los estimadores externos es unas diez veces menor que el de los internos. Por supuesto, estas magnitudes no se pueden generalizar a otros casos, pero sí es cierto que siempre se presenta una marcada diferencia.

Por otro lado, se puede analizar el origen del error cuadrático medio viendo en la tabla 4.I.a la descomposición en estimación media y variancia. Es de destacar que el método clásico sin innovación posee (o parece poseer) un sesgo notable. Ya se ha demostrado para los estimadores externos que este sesgo existe y es inversamente dependiente de  $n$ .

Tabla 4.II.a. Comparación de QP1, QP2 y clásico (con innovación).

Ctil.	Valor real	Media QP1	Media QP2	Media Cl.	Var. QP1	Var. QP2	Var. Cl.
0	1.6000	1.613	1.612	1.602	0.026	0.017	0.017
1	3.8000	3.794	3.795	3.967	0.387	0.434	0.389
2	7.5000	7.456	7.460	7.332	0.414	0.465	0.415
3	10.0000	10.010	9.997	10.005	0.045	0.019	0.019

Tabla 4.II.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP1	QP2	Clásico
0	1.6000	0.0261	0.0175	0.0170
1	3.8000	0.3872	0.4339	0.4171
2	7.5000	0.4161	0.4668	0.4435
3	10.0000	0.0449	0.0193	0.0191

Las tablas 4.II.a y 4.II.b muestran otros resultados aplicados al mismo ejemplo, pero con el método clásico adaptado imponiendo las expresiones (4.4) y (4.5) para eliminar el sesgo de los estimadores externos. Para QP1 y QP2, los resultados no sufren variaciones destacables respecto al ejemplo de la tabla 4.I. También interesa mostrar algún resultado relativo al método QP3, que aparece en las tablas 4.III.a y 4.III.b.

No se aprecian, de momento, aspectos particulares que valga la pena comentar sobre el QP3; parece que se comporta como los otros métodos MC, y no es fácil destacar determinadas virtudes o defectos a pesar de su muy diferente implementación. Vemos que es relativamente sencillo llegar a estimaciones aceptables para los parámetros extremos, para los cuales sabemos incluso aproximar la variancia del estimador.

Sin embargo, no se ha encontrado un procedimiento para mejorar las estimaciones de los parámetros internos. Una de las técnicas que podía resultar adecuada, el *Jackknife*

Tabla 4.III.a. Comparación de QP3, QP2 y clásico (con innovación).

Ctil.	Valor real	Media QP3	Media QP2	Media Cl.	Var. QP3	Var. QP2	Var. Cl.
0	1.6000	1.604	1.605	1.597	0.017	0.017	0.017
1	3.8000	3.865	3.855	3.990	0.393	0.398	0.384
2	7.5000	7.436	7.446	7.360	0.472	0.478	0.333
3	10.0000	9.990	9.989	9.995	0.024	0.024	0.023

Tabla 4.III.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP3	QP2	Clásico
0	1.6000	0.0169	0.0169	0.0170
1	3.8000	0.3973	0.4009	0.4202
2	7.5000	0.4756	0.4804	0.3525
3	10.0000	0.0238	0.0238	0.0233

de Quenouille [QUEN56] es aplicable si un estimador  $\hat{\theta}$  presenta sesgo de orden  $n^{-1}$ . Básicamente, se trata de particionar la muestra en  $p$  fragmentos de  $m$  observaciones cada una (así,  $n = p \cdot m$ ) y realizar unas estimaciones auxiliares llamadas *pseudovalores* ( $V_j$ ,  $j=1, p$ ). Tomando la muestra y desechando un fragmento cada vez, se utiliza el estimador sesgado para encontrar  $\hat{\theta}_j$ , y el pseudovalor  $j$ -ésimo se halla mediante:

$$V_j = p \cdot \hat{\theta} - (p - 1)\hat{\theta}_j$$

Finalmente, el estimador Jackknife  $\hat{\theta}_{JK}$  es el promedio de los pseudovalores. Es fácil comprobar que este estimador elimina el sesgo de orden  $n^{-1}$ , aunque no el de otros órdenes. No obstante, los resultados obtenidos no han sido satisfactorios, en el sentido de que el sesgo continúa presente y, por otra parte, se acentúa la variancia del estimador, lo cual no es deseable en absoluto.

Una posible interpretación podría ser que los estimadores de los parámetros internos tienen intrínsecamente una gran variancia. El posible sesgo de estos estimadores tal vez no sea significativo frente a la dispersión presente y, en todo caso, la prueba realizada con la técnica de Jackknife haya servido para mostrar que, caso de existir, el sesgo dependiente del tamaño de la muestra no es muy relevante.

En la tabla 4.IV viene expuesto un caso con más artículos que sirve, de paso, para ejemplificar cómo puede venir dada la variancia de un estimador interno. Se puede ver claramente que la menor corresponde a  $\hat{X}^{04}$ ; seguidamente, están las de  $\hat{X}^{05}$  y  $\hat{X}^{03}$ ,  $\hat{X}^{02}$  y  $\hat{X}^{06}$ , y  $\hat{X}^{07}$  y  $\hat{X}^{01}$ . Se puede interpretar que esto es debido a las distancias existentes entre los cuantiles adyacentes, en tanto que, cuanto mayor es esta distancia, mayor será la variancia del estimador:

- $\hat{X}^{01}$ :  $80 - 50 = 30$
- $\hat{X}^{02}$ :  $85 - 70 = 15$
- $\hat{X}^{03}$ :  $87.5 - 80 = 7.5$
- $\hat{X}^{04}$ :  $90 - 85 = 5$
- $\hat{X}^{05}$ :  $95 - 87.5 = 7.5$

Tabla 4.IV.a. Comparación con  $K = 9$  (500 muestras de  $n=50$ ).

Ctil.	Valor real	Media QP3	Media QP2	Media Cl.	Var. QP3	Var. QP2	Var. Cl.
0	50.0000	50.499	50.606	50.566	11.800	11.134	11.592
1	70.0000	70.731	70.045	70.301	43.322	78.916	28.260
2	80.0000	80.060	85.473	79.695	11.726	24.161	10.957
3	85.0000	84.720	87.174	84.575	5.149	20.804	4.759
4	87.5000	87.552	87.422	87.510	2.404	19.989	2.188
5	90.0000	90.285	87.656	90.428	4.272	20.332	4.167
6	95.0000	94.883	89.534	95.319	13.808	24.939	11.527
7	105.0000	104.239	105.185	104.704	38.605	81.229	22.772
8	125.0000	124.684	124.535	124.611	12.016	11.420	11.630

Tabla 4.IV.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP3	QP2	Clásico
0	50.0000	12.0489	11.5019	11.9128
1	70.0000	43.8563	78.9182	28.3510
2	80.0000	11.7296	54.1094	11.0495
3	85.0000	5.2276	25.5315	4.9397
4	87.5000	2.4071	19.9952	2.1886
5	90.0000	4.3533	25.8270	4.3500
6	95.0000	13.8218	54.8160	11.6288
7	105.0000	39.1843	81.2628	22.8597
8	125.0000	12.1164	11.6364	11.7812

- $\hat{X}^{06}$ :  $105 - 90 = 15$
- $\hat{X}^{07}$ :  $125 - 95 = 30$

En este caso, las distancias entre cuantiles son más pequeñas cuanto más cerca del centro. Si fuera el caso contrario —por ejemplo, si la distribución simulada fuera  $\{52.5, 55, 60, 70, 85, 100, 110, 115, 117.5\}$ , pongamos— entonces se observaría que las variancias más grandes serían las de los estimadores centrales. En realidad, puede comprobarse mediante experimentación que actúan más factores: puede ser que la posición sea determinante, o bien que no sólo los cuantiles adyacentes influyan en la estimación de uno concreto. Por ejemplo, supongamos que se simula la estimación de los parámetros de  $\{25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65\}$ . En este caso se puede comprobar que las variancias de los estimadores aumentan respecto a la mayor posición central del cuantil, tal como se aprecia en las tablas 4.V.a y 4.V.b. El número de artículos  $K$  también es otro factor a tener en cuenta: en general, parece que cuanto más grande es  $K$ , mayor será la variancia de los estimadores implicados.

Finalmente, con la tabla 4.VI se muestran unos resultados comparando los métodos QP3, QP4 y el clásico. Se ha dejado de lado esta vez el QP2 ya que parece que presenta alguna desventaja respecto de los otros con los que se ha expuesto, espacio que aprovecha para su demostración el último método, QP4. La tabla pone de relieve que sus características no difieren gran cosa de las del método en que se basa, el clásico. El ECM entre los tres métodos resulta ser semejante, algo peor en la columna correspondiente al QP3 debido fundamentalmente a su mayor variancia.

En cuanto a la diferenciación entre los métodos, podemos prescindir de los métodos

Tabla 4.V.a. Comparación con  $K=9$  y cuantiles equiespaciados.

Ctil.	Valor real	Media QP3	Media QP2	Media Cl.	Var. QP3	Var. QP2	Var. Cl.
0	25.0000	25.097	25.400	25.033	0.717	0.639	0.705
1	30.0000	30.278	28.345	30.683	3.757	1.558	3.980
2	35.0000	35.364	37.605	35.594	7.202	8.627	6.432
3	40.0000	40.086	41.254	40.218	7.319	7.985	7.123
4	45.0000	45.107	45.091	45.083	8.634	8.236	7.813
5	50.0000	49.989	48.872	49.881	8.189	8.235	7.180
6	55.0000	54.909	52.639	54.656	6.544	8.205	5.733
7	60.0000	59.700	61.629	59.376	3.870	1.622	3.482
8	65.0000	64.866	64.563	64.917	0.637	0.560	0.627

Tabla 4.V.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP3	QP2	Clásico
0	25.0000	0.7259	0.7988	0.7061
1	30.0000	3.8339	4.2970	4.4467
2	35.0000	7.3347	15.4127	6.7848
3	40.0000	7.3268	9.5576	7.1701
4	45.0000	8.6457	8.2444	7.8202
5	50.0000	8.1887	9.5073	7.1936
6	55.0000	6.5522	13.7808	5.8515
7	60.0000	3.9606	4.2775	3.8714
8	65.0000	0.6554	0.7508	0.6340

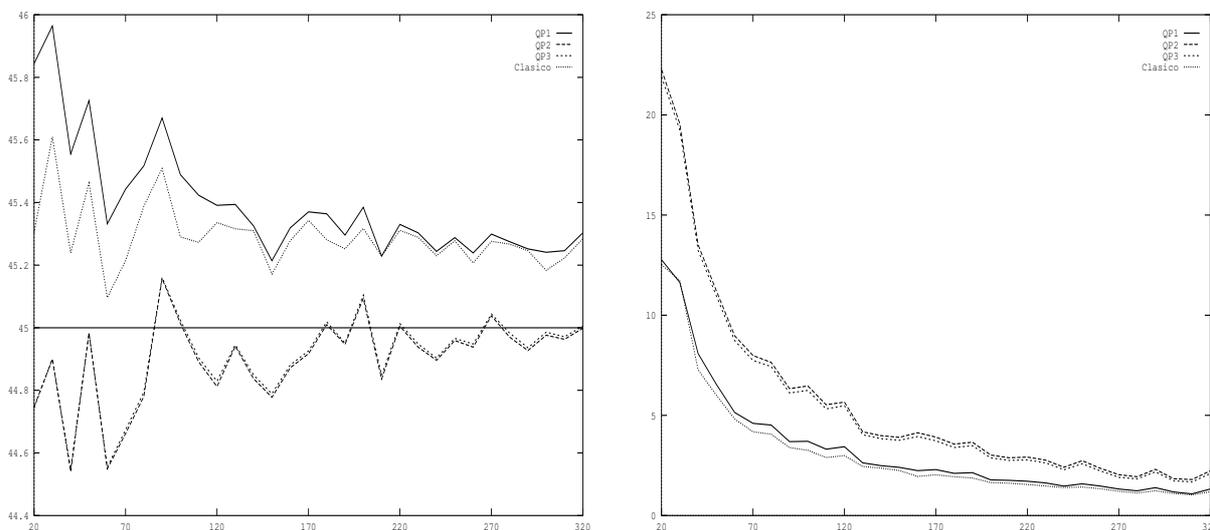
Tabla 4.VI.a. Comparación de QP3, QP4 y clásico (con innovación).

Ctil.	Valor real	Media QP3	Media QP4	Media Cl.	Var. QP3	Var. QP4	Var. Cl.
0	1.6000	1.589	1.569	1.571	0.089	0.087	0.087
1	3.8000	4.087	4.211	4.219	1.031	0.991	0.987
2	7.5000	7.326	7.442	7.455	1.600	1.505	1.497
3	10.0000	10.337	10.480	10.500	2.784	2.751	2.797
4	15.0000	14.661	14.719	14.745	5.042	3.940	3.988
5	19.0000	18.949	18.876	18.904	3.337	3.154	3.159
6	23.5000	23.388	23.069	23.101	3.973	3.252	3.208
7	30.0000	29.784	29.804	29.823	1.144	1.124	1.120

Tabla 4.VI.b. Error Cuadrático Medio.

Ctil.	Valor real	QP3	QP4	Clásico
0	1.6000	0.0890	0.0877	0.0876
1	3.8000	1.1139	1.1596	1.1631
2	7.5000	1.6298	1.5087	1.4994
3	10.0000	2.8972	2.9807	3.0467
4	15.0000	5.1567	4.0191	4.0529
5	19.0000	3.3395	3.1690	3.1682
6	23.5000	3.9853	3.4371	3.3676
7	30.0000	1.1908	1.1629	1.1514

que no incorporan la corrección del sesgo para el mínimo y el máximo; hay que hacer notar que los resultados del QP2 —en este caso— lo dejan con bastante desventaja respecto a los otros (presenta un ECM bastante más grande en todos los estimadores internos). Es posible, al menos las pruebas realizadas lo sugieren, que el QP2 sea sensible a la longitud de las colas de la distribución, en el sentido de que si estos bloques son alargados, la estimación de todos los cuantiles queda sensiblemente afectada, tal como se aprecia en los registros de media y variancia correspondientes al método.



**Figura 4.4 :** Las cuatro estimaciones del cuantil  $X^{0.2} = 45$ , con  $n$  variable. a) Medias de los estimadores. b) Variancias respectivas (en abcisas, el tamaño  $n$  de la muestra).

Otra relación importante es el tamaño de las muestras,  $n$ . En todos los ejemplos expuestos,  $n$  era igual a 50. Si este valor aumenta, entonces la variancia de los estimadores descende. En las figuras Fig. 4.4 a) y b) se muestra un ejemplo obtenido a partir de la generación de muestras con tamaños variando entre 20 y 320; para cada valor de  $n$  se hicieron 400 estimaciones utilizando los tres métodos MC y el clásico con innovación, pudiéndose calcular de esta manera un valor medio y una variancia dependiente de  $n$ . Este proceder es muy diferente del que se expuso al principio de la sección, dando lugar a las Fig. 4.2 y Fig. 4.3; en aquella ocasión sólo se utilizaba para cada tamaño de muestra una sola observación.

La variable utilizada en el ejemplo de la Fig. 4.4 viene dada por  $\{20, 36, 45, 62\}$ . En el gráfico a) se muestra la evolución de la estimación media de  $X^{0.2} = 45$ . No se muestran resultados de QP4 por su notable semejanza con los del método clásico. En este ejemplo concreto, quienes mejor convergencia consiguen son los métodos QP2 y QP3, los cuales realizan prácticamente idénticas estimaciones; se observa que con valores altos de  $n$  se acercan notablemente al valor de 45, señalado con una línea horizontal. Por contra, las estimaciones medias de los métodos QP1 y clásico adaptado no son demasiado buenas. Muy posiblemente, las estimaciones no son insesgadas, ni siquiera asintóticamente. Sin embargo, estas conclusiones no son aplicables a otros ejemplos.

En el gráfico b) aparece la secuencia de variancias observadas. La mayor es siempre la del estimador por el método QP2, muy parecida a la del QP3, y después, con poca diferencia entre ellos, QP1 y clásico. Se puede comprobar que, aparte de una cierta componente aleatoria, la variancia decrece inversamente proporcional a  $n$ , lo cual también se puede decir de la variancia de los estimadores de  $X^{01}$ . En cambio, el decrecimiento de la variancia de los estimadores externos es sensiblemente más rápido, del orden de  $O(n^{-2})$ .

¿De dónde se obtienen estas conclusiones? Los puntos obtenidos por simulación pueden suponerse procedentes de un modelo geométrico como  $y = a \cdot n^b$ , que puede transformarse en un modelo lineal tomando logaritmos:  $\log y = \log a + b \cdot \log n$ . Resolviendo para  $X^{02}$ , los valores de  $b$ , que es el coeficiente que determina la velocidad del descenso de la variancia, son -0.908, -0.930, -0.948 y -0.924, según los métodos QP1, QP2, QP3 y Clásico respectivamente, es decir, todavía un poco por debajo del orden  $O(n^{-1})$ . Para  $X^0$ , tenemos -1.60, -1.96, -1.96 y -1.95. Únicamente el QP1 muestra una tasa de descenso que no pueda ser considerada cuadrática.

En conclusión, se han mostrado las características de varios métodos para estimar los parámetros de variables de bloques, entre los que se distinguen fundamentalmente de dos tipos, los basados en estadísticos de orden, también llamados en este texto clásicos, y los que utilizan un mecanismo de mínimos cuadrados [MC]. A cualquiera de los dos se les puede incluir una variante que modifica la manera de estimar los cuantiles extremos (la innovación), reduciendo significativamente el sesgo. Las pruebas realizadas (claramente insuficientes, pues en este terreno las herramientas analíticas son muy limitadas) se han centrado en la comparación de las estimaciones y de las variancias de las estimaciones en condiciones simuladas. Aunque los métodos MC permiten estimar los parámetros de  $m$  variables a la vez, bajo ciertas restricciones que pueden convertir el problema en no separable, en todos los casos se ha supuesto que  $m=1$ . El resultado de las pruebas no es claramente determinante, pero utilizando el criterio del mínimo Error Cuadrático Medio, parece bastante ventajoso el método clásico con innovación, que aparte de conseguir los mejores valores de variancia, es bastante robusto frente a distribuciones “difíciles”. También hay que destacar de esta clase de métodos su sencillez y velocidad. De los métodos MC, aunque no son tan robustos, se puede destacar que obtienen por lo general estimaciones menos sesgadas, aunque su variabilidad supone un importante inconveniente.



## CAPÍTULO 5

### ESTIMACIÓN DE F.D.C. DE DOS VARIABLES DE BLOQUES

#### 5.1 Introducción y motivación

En el presente capítulo se describen las técnicas empleadas en el problema de estimación de una función de densidad conjunta (FDC) de dos variables de  $K-1$  bloques, y constituye la continuación natural del capítulo anterior, estimación de funciones de densidad de una variable. Igualmente, se presenta un método de resolución y diferentes pruebas numéricas que prueban la efectividad del procedimiento.

Los procedimientos descritos en el capítulo 4 están claramente orientados al cálculo de distribuciones de variables de bloques a partir de datos históricos, en particular, de las aportaciones naturales que cada embalse de una cuenca hidráulica recibe, información que se precisa para resolver los problemas hidrotérmicos descritos en los capítulos 7, 8, 10 y 12. El contenido de este capítulo tiene su fundamento en los métodos que utilizan una función de densidad conjunta de dos variables de bloques, específicamente el capítulo 9. En él, la FDC es empleada dentro de un proceso de simulación con la solución de un problema de optimización para tener en cuenta la relación existente entre las aportaciones de intervalos consecutivos.

Se establecen los siguientes criterios: partimos de una muestra aleatoria de dos variables apareadas, que llamaremos  $X$  e  $Y$ . No hay ninguna hipótesis relativa a la dependencia o independencia entre tales variables. Dicha muestra se conoce como:  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ . Las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  siguen una distribución de bloques, con los parámetros  $K$  y  $H$  comunes. Dichas distribuciones se denotan como es usual:  $\{X^0, \dots, X^{0K-1}\}$  e  $\{Y^0, \dots, Y^{0K-1}\}$ , y son totalmente conocidas. Se busca obtener una función que estime a la función de densidad conjunta de  $X$  e  $Y$ ,  $f_{X,Y}(x, y)$ . En realidad, como se observa en la ecuación (3.9), la función de densidad conjunta (en adelante, sólo FDC) viene determinada principalmente por las cantidades  $r^{i,j}$ , dado que otra de las hipótesis de partida es que conocemos la forma analítica de la FDC. Por tanto, nuestro problema se va a reducir a encontrar estimadores de  $r^{i,j}$ . Llamaremos  $R$  a la matriz de valores reales positivos que representa la FDC de dos variables:  $R = \{r^{i,j} | 1 \leq i, j \leq K-1\}$ .  $\hat{R}$  es como denotaremos a una estimación de  $R$ ; o  $\hat{r}^{i,j}$  si estamos refiriéndonos a cada uno de sus elementos estimadores de  $r^{i,j}$ .

## 5.2 Aproximaciones

En primer lugar, veremos cómo se pueden encontrar primeras aproximaciones a los valores de  $r^{i,j}$ . La primera de ellas consiste en trasladar los valores de la muestra como si fueran puntos en la porción del plano que determinan  $[X^0, X^{0K-1}] \times [Y^0, Y^{0K-1}]$ . Con la notación  $[a, b] \times [c, d]$  se expresa el lugar geométrico de los puntos  $(x, y)$  tales que  $a \leq x \leq b$  y  $c \leq y \leq d$ , el cual denominaremos *rectángulo*.

El rectángulo anterior se halla dividido en  $(K - 1)^2$  regiones delimitadas por los cuantiles de  $X$  e  $Y$ . Llamando  $n_{i,j}$  al número de puntos situados en la región  $(i, j)$ , es decir, entre  $X^{0i-1}$  y  $X^{0i}$ , e  $Y^{0j-1}$  e  $Y^{0j}$ , encontramos las frecuencias observadas de los puntos en cada región:

$$f_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n}$$

De aquí, calculamos el valor correspondiente a la densidad en la región  $(i, j)$ :

$$(r^{i,j})^* = \frac{f_{i,j}}{(X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})} \quad (5.1)$$

La aproximación que aparece en (5.1) resulta ser un método sencillo e intuitivo, que sin embargo no puede considerarse un estimador completo, ya que los resultados obtenidos no cumplen en general las restricciones (3.11) y (3.12), aunque sí se cumple (3.10). Por tanto, (5.1) no proporciona una solución válida, aunque sí un punto de partida desde el que se puede hallar un estimador que cumpla tales restricciones —y la notación  $(r^{i,j})^*$  indica que (5.1) no es una estimación, de otra manera lo expresaríamos como  $\hat{r}^{i,j}$ .

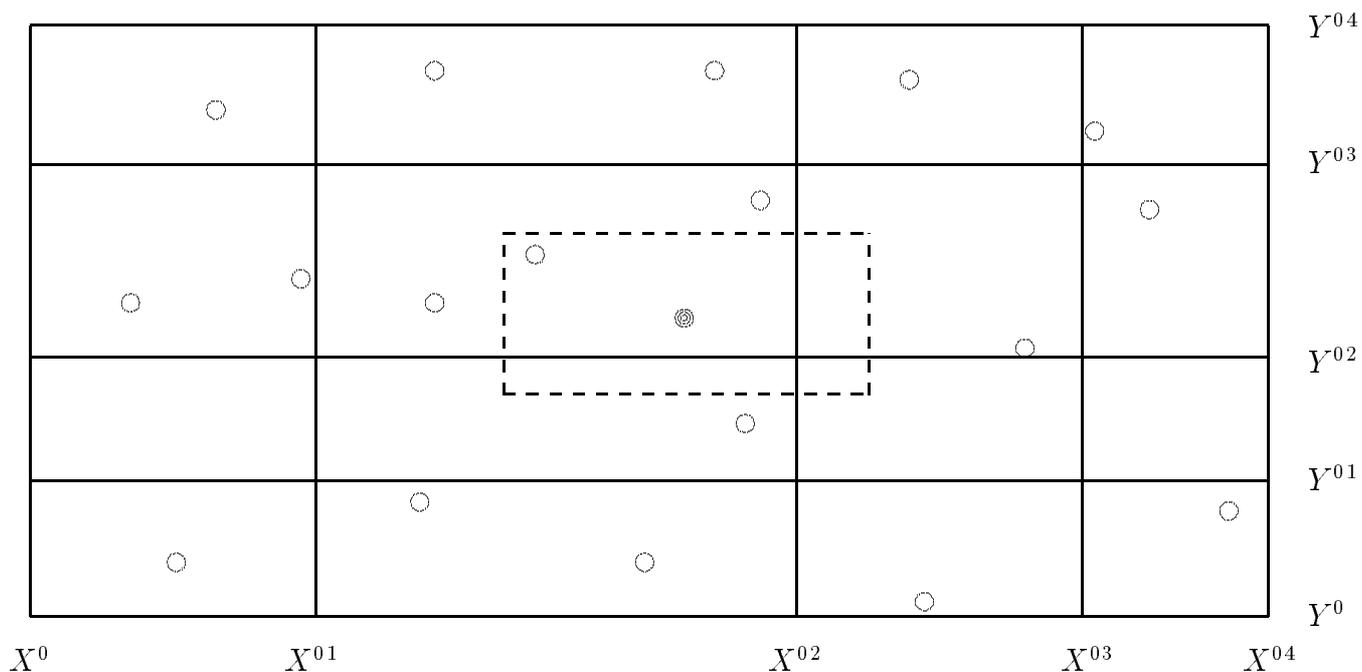
Una generalización de este primer método sería considerar una cierta *área de influencia* alrededor de cada punto observado. De esta manera, se pretende “suavizar” el resultado, pues el peso de cada observación no tiene por qué recaer únicamente en la región que contiene dicho punto, lo cual puede interpretarse como una concesión a la variabilidad presente en los datos. Este mecanismo es una adaptación de los métodos de estimación de densidades mediante estimadores de kernel (ver, por ejemplo, una publicación que trata extensamente sobre este tema, [SCOT92]). En la Fig. 5.1 aparece un ejemplo ilustrado.

En este trabajo se supone que el área de influencia de un punto  $(x, y)$  es la intersección del rectángulo definido por  $[X^0, X^{0K-1}] \times [Y^0, Y^{0K-1}]$  y un rectángulo centrado en dicho punto, con lo cual este área no puede salirse de los márgenes impuestos por los límites dados por las variables. Las dimensiones del rectángulo centrado en  $(x, y)$  son  $\alpha \cdot \sigma_X$  y  $\alpha \cdot \sigma_Y$ , donde  $\alpha$  es un escalar positivo, y  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$  las desviaciones estándar respectivas de  $X$  e  $Y$ . Si  $\alpha$  es 0, entonces el método se identifica con la aproximación (5.1).

Sea  $R^{i,j}$  la región comprendida entre  $X^{0i-1}$  y  $X^{0i}$ , e  $Y^{0j-1}$  e  $Y^{0j}$ . Denotamos por  $A_{(l)}$  el área de influencia del punto  $(x_l, y_l)$ , con  $l=1, n$ . Por tanto,

$$A_{(l)} = \left( \left[ x_l - \frac{\alpha}{2}\sigma_X, x_l + \frac{\alpha}{2}\sigma_X \right] \times \left[ y_l - \frac{\alpha}{2}\sigma_Y, y_l + \frac{\alpha}{2}\sigma_Y \right] \right) \cap ([X^0, X^{0K-1}] \times [Y^0, Y^{0K-1}])$$

El símbolo  $\cap$  se utiliza para representar la intersección de rectángulos, con su significado obvio. El algoritmo para calcular la segunda aproximación a la densidad de una FDC



**Figura 5.1 :** Muestra (marcada con círculos) en el plano de las variables  $X$  e  $Y$ . Alrededor del punto negro se han marcado con líneas discontinuas los límites del área de influencia de dicho punto.

(con parámetro  $\alpha$ ) es:

- [0] Inicializar  $f_{i,j} = 0$ , para  $1 \leq i, j \leq K-1$ .
- [1] Para  $l = 1, n$ :
  - [1.1] Sea  $S = \text{Area}(A_{(l)})$ .
  - [1.2] Para cada región  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq K-1$ :
    - [1.2.1] Sea  $T = \text{Area}(R^{i,j} \cap A_{(l)})$ .
    - [1.2.2] Incrementar  $f_{i,j}$  con  $T/S$
- [2] Calcular, para  $1 \leq i, j \leq K-1$ :

$$(r^{i,j})^* = \frac{f_{i,j}}{n(X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})} \quad (5.2)$$

Las mismas consideraciones hechas para (5.1) son válidas para (5.2). Por tanto, para conseguir una estimación correcta, es necesario un paso más, en el cual se realiza el *reajuste* de las variables con el objetivo de factibilizar las restricciones (3.11) y (3.12).

### 5.3 Reajuste de la aproximación

En esta etapa se obtendrá un resultado factible de acuerdo a las restricciones (3.11) y (3.12), que a continuación se recuerdan:

$$\sum_{j=1}^{K-1} \hat{r}^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) = \frac{\pi_i}{(X^{0i} - X^{0i-1})} \quad i = 1 \dots K-1$$

$$\sum_{i=1}^{K-1} \hat{r}^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) = \frac{\pi_j}{(Y^{0j} - Y^{0j-1})} \quad j = 1 \dots K - 1$$

donde las variables se denotan por  $\hat{R} = \{\hat{r}^{i,j}\}$ . De todas maneras, si consideramos que el punto obtenido en la etapa de aproximación  $R^*$  es *fundamentalmente bueno* en cuanto a su valor como estimador de la FDC, va a ser importante que la solución final sea un punto cercano al anterior, además de factible. La principal cuestión que surge entonces es: ¿Cómo denotar que un punto está cerca de otro en el espacio de las variables? La solución no es trivial, pues existen bastantes opciones. Adoptando el criterio de tomar el cuadrado de la distancia euclídea entre puntos de  $\mathbb{R}^{(K-1)(K-1)}$ , la solución:

$$\sum_{i,j=1}^{K-1} ((r^{i,j})^* - \hat{r}^{i,j})^2$$

no es apropiada, pues siendo las variables inversamente proporcionales a las diferencias de cuantiles, obtendríamos una suma de valores desproporcionados. La solución adoptada consiste en escalar cada variable por el área de su región respectiva: en otras palabras, transformamos las variables en probabilidades, ya que esta transformación, lineal y por tanto sencilla, equivale a hallar el volumen encerrado bajo la FDC en cada región. Evidentemente, cada probabilidad es un valor entre 0 y 1, por tanto es de esperar que calcularemos nuestra distancia a partir de una suma de términos homogéneos. En consecuencia, la expresión resultante es:

$$\mathcal{D}(R^*, \hat{R}) = \sum_{i,j=1}^{K-1} ((X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})(r^{i,j})^* - (X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})\hat{r}^{i,j})^2 \quad (5.3)$$

Por consiguiente, se formula el problema de *reajuste de la aproximación* (RP) como sigue. Dados  $K$ ,  $\Pi$ , los cuantiles de dos variables  $X$  e  $Y$  de  $K-1$  bloques y una aproximación  $R^*$  de la FDC, la solución de:

$$\min_{\hat{R}} \mathcal{D}(R^*, \hat{R}) \quad (5.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{K-1} \hat{r}^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) = \frac{\pi_i}{(X^{0i} - X^{0i-1})} \quad i = 1 \dots K - 1 \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^{K-1} \hat{r}^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) = \frac{\pi_j}{(Y^{0j} - Y^{0j-1})} \quad j = 1 \dots K - 2 \quad (5.5)$$

$$\hat{R} \geq \underline{0} \quad (5.6)$$

es una estimación de la FDC desconocida  $f_{X,Y}(x,y)$ . Para ello, se ha elegido el criterio de minimizar (5.3), sujeto a las condiciones estructurales de una FDC, que vienen dadas por (5.4) y (5.5), además de la condición de no negatividad (5.6). Notar que como consecuencia de que existe un grado de dependencia lineal en las ecuaciones (3.11) y (3.12) podemos eliminar una ecuación, como se ha hecho, de (5.5).

Existe una última posibilidad que ha sido bastante utilizada, aunque se ha visto en la

práctica que sus efectos no son sensiblemente diferentes a los del problema (RP) expuesto arriba. Consiste en tomar en consideración la correlación muestral y la correlación teórica, e incorporar el cuadrado de la diferencia a la función objetivo (5.3), es decir:

$$\left( \rho(\hat{R}|X, Y) - \frac{1}{s_X s_Y} \sum_{l=1}^n (x_l - \bar{x})(y_l - \bar{y}) \right)^2$$

La expresión de  $\rho(\hat{R}|X, Y)$  aparece en (3.14);  $s_X$  y  $s_Y$  indican desviación estándar de las muestras de  $X$  e  $Y$  respectivamente;  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son las respectivas medias muestrales. Esta expresión pone el acento en forzar la verosimilitud del resultado respecto la relación lineal entre las variables, resumida en el estadístico correlación. Sin embargo, se ha visto en pruebas realizadas que no se aprecian diferencias importantes; la función objetivo (5.3) consigue unos resultados de  $\rho$  muy semejantes a los obtenidos mediante la incorporación del término de arriba a la función objetivo.

## 5.4 Pruebas numéricas y comparación de resultados

En este apartado se describe cómo se ha realizado el examen de los estadísticos descritos anteriormente. Diremos mejor que poseemos una familia de estadísticos, dependiendo del parámetro  $\alpha$  utilizado en la aproximación previa al reajuste. Se trata de establecer mediante ejemplos unas ideas que quizás no se puedan presentar de otra manera, debido al necesario paso de reajuste. La existencia de este paso, de naturaleza iterativa, complica en gran manera el análisis teórico del estimador. Por consiguiente, se hace necesario acudir a la experiencia computacional.

### 5.4.1 Obtención de una situación inicial

Parece interesante cubrir una gran cantidad de casos con los que poder experimentar, pero no parece tan sencillo encontrar un ejemplo aplicable. Decimos esto porque si el objetivo es simular la estimación de una FDC, necesitamos previamente:

- $K$  y  $\Pi$ .
- La especificación de dos variables,  $X$  e  $Y$ .
- La especificación de una FDC de  $X$  e  $Y$ .

Pero es necesario que: 1) las marginales de la FDC sean  $X$  e  $Y$ , y 2) la FDC esté bien definida. No es trivial encontrar solución a estos problemas, porque es necesario manejar muchos factores a la vez (para un caso con  $K > 2$ , tenemos  $(K-2)^2$  grados de libertad para mover libremente nuestras variables). Por tanto, se ha optado por la obtención aleatoria de FDC. El mecanismo es el siguiente:

- 1) Elegir un valor de  $K > 2$ .
- 2) Tomar como probabilidad el vector  $\left\{ \frac{1}{K-1}, \dots, \frac{1}{K-1} \right\}$ .
- 3) Generar una distribución de probabilidad de  $K-1$  bloques para  $X$  y otra para  $Y$ .
- 4) Buscar una FDC de  $(K-1)(K-1)$  regiones que tenga como marginales  $f_X$  y  $f_Y$ .

La manera de generar una distribución univariante para  $X$  es muy sencilla. Basta con generar  $K$  números reales de manera uniforme y disponerlos en orden; de esta manera, el menor será  $X^0$ , el siguiente  $X^{01}$ , y así hasta  $X^{0K-1}$ . De la misma forma operamos con  $Y$ . En nuestro caso, trabajamos con valores reales en el intervalo  $[0,10]$ .

Obtener aleatoriamente una función  $f_{X,Y}$  sigue un procedimiento bastante distinto. Hay que tener en cuenta que se trata de encontrar un conjunto  $R$  que se identifica con las densidades en cada región del plano acotado por los cuantiles de  $X$  e  $Y$ , y que cumpla con las restricciones (3.11) y (3.12). Una primera solución consiste en construir un problema para encontrar un punto factible a estas restricciones. Podemos omitir la función objetivo, o simplemente definir una idénticamente igual a  $\mathbf{0}$ , y confiar en que, dado un punto inicial cualquiera (posiblemente infactible), el algoritmo de optimización sabrá hallar una solución válida, que dependerá del azar empleado en el cálculo del punto inicial.

Sin embargo, los algoritmos usuales no proporcionan soluciones satisfactorias. Sucede que estos algoritmos suelen encontrar bastantes valores de las variables en sus límites. Como las variables están acotadas inferiormente por cero, esto significa que una cantidad importante de regiones no presentan densidad. En realidad, lo conveniente sería que los valores de  $R$  fueran estrictamente positivos, pero esta condición no es directamente imponible si no es a base de crear artificialmente unas cotas inferiores positivas, completamente arbitrarias en todo caso.

La solución viene dada utilizando un tipo de algoritmo totalmente distinto. Los métodos de punto interior [ARBE93] buscan una solución a problemas del tipo:

$$\begin{aligned} \min_r \quad & f(r) \\ \text{s.t.} \quad & r \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

llegando a la solución óptima a través de una secuencia de puntos estrictamente interior a  $S$ . Por tanto, utilizando una función objetivo *inocua* como  $\mathbf{0}$ , las restricciones (5.4) y (5.5), la no negatividad de las variables y un punto inicial generado al azar, se garantiza una solución cuando el problema dual del anterior es factible y tiene solución igual a 0. Una referencia útil es [VAND92], en donde aparece la especificación de las rutinas empleadas para este problema.

#### 5.4.2 Procedimiento de simulación

Una vez se ha determinado una FDC y sus funciones marginales  $X$  e  $Y$ , se inicia el procedimiento de simulación. Un punto fundamental es saber generar una muestra de tamaño  $n$  para dos variables, conocida su distribución conjunta  $f_{X,Y}$ . Para ello, describimos el siguiente método:

- 1 Obtener una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de la variable  $X$ . Asignar a  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- 2 Para  $l = 1, n$ :
  - 2.1 Obtener una muestra aleatoria de tamaño 1 utilizando la función de densidad  $f_{Y|X=x_i}$ . Asignar a  $y_i$ .

La función de densidad condicionada  $f_{Y|X=x_i}$  viene dada por la expresión que figura en (3.15), y extraer una muestra de sólo una observación no tiene nada de particular respecto a hacerlo con varias observaciones.

Con esto puede considerarse que podemos generar un número cualquiera de experimentos. Ejemplos de simulaciones que pueden darse son:

- Repetir  $N$  veces la estimación utilizando muestras de tamaño  $n$  fijo.
- Estimar cada vez con un tamaño  $n$  creciente, para observar el comportamiento asintótico del método.

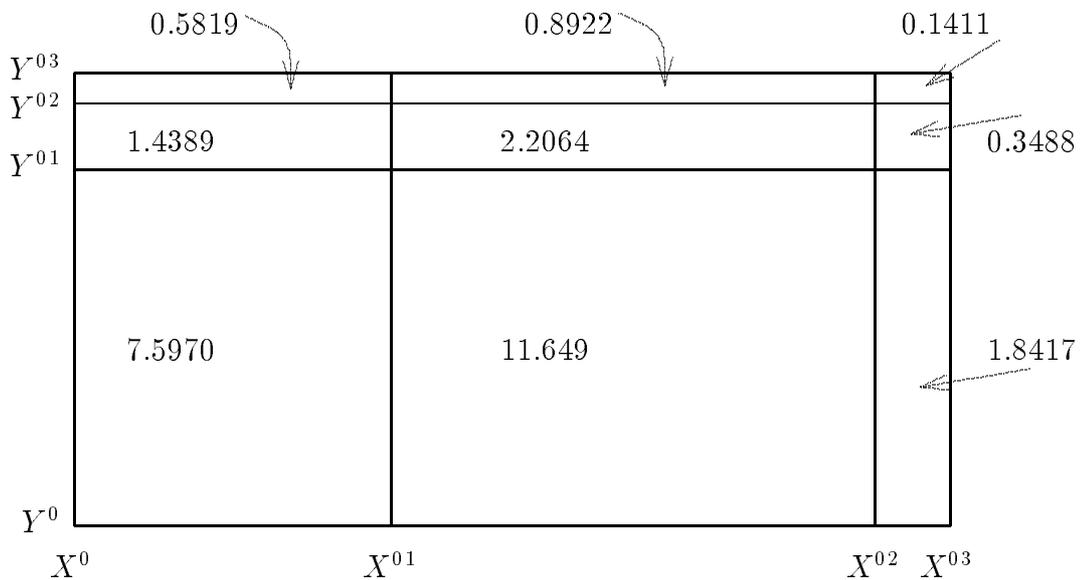
### 5.4.3 Análisis del estimador

En este apartado describiremos un ejemplo y expondremos unas breves conclusiones. Hay que decir que estas conclusiones no pueden ser determinantes en modo alguno, ya que se basan en la observación de unos cuantos casos comunes.

El siguiente ejemplo utiliza un valor de  $K$  igual a 4. Las distribuciones marginales, dadas por los cuantiles considerados, son:

$$X = \{2.041198, 4.618146, 8.569570, 9.194283\}$$

$$Y = \{1.652905, 4.601046, 5.159442, 5.385240\}$$



**Figura 5.2 :** Plano  $X$  e  $Y$  del ejemplo, con las regiones dibujadas proporcionalmente, y el área de cada región adjunta.

En la Fig. 5.2 aparece un esquema del plano obtenido por el cruce de estos parámetros. Para cada región se especifica el área de ésta. Obsérvese la disparidad existente entre la región más grande y la más pequeña (unas 80 veces menor). Sobre este dominio se va a construir la FDC, que viene dada en la tabla 5.I (primera fila bajo la cabecera). Se ha hallado un valor de  $\rho$  igual a -0.310179.

Una vez disponibles todos estos elementos, se extrajeron 400 muestras de  $(X, Y)$  con 50 individuos, y con ellas se estimó  $f_{X,Y}$  400 veces. El resultado de este proceso se puede ver, de manera muy resumida, en la tabla I; en ella aparecen, por columnas, los respectivos elementos correspondientes a la región  $(i, j)$ , y por filas, la densidad en cada región ( $R$ ), la probabilidad expresada en porcentaje de obtener un par  $(X, Y)$  en cada

Tabla 5.I. Resultados de la estimación de  $f_{X,Y}$  con 400 muestras de  $n=50$ .

$i, j$	1,1	2,1	3,1	1,2	2,2	3,2	1,3	2,3	3,3
$R$	0.00650	0.00826	0.10193	0.08502	0.04600	0.31390	0.27773	0.15200	0.25589
$P(\%)$	4.938	9.622	18.773	12.234	10.151	10.949	16.161	13.561	3.611
$Sg_1$	0.08444	-0.03455	-0.00444	-0.01451	0.03416	-0.01542	-0.01484	-0.00088	0.06995
$Sg_2$	0.24491	0.49461	-0.31777	0.15353	0.12632	-0.28857	-0.19110	-0.44509	2.52819
$V_1$	0.00127	0.00067	0.02949	0.04264	0.01975	0.75667	0.28654	0.11505	2.93048
$V_2$	0.00087	0.00033	0.00532	0.01378	0.00510	0.07220	0.03696	0.01165	0.19680

región ( $P$ ); etiquetado como " $Sg_1$ ", el sesgo ponderado, es decir, el valor medio del sesgo de la estimación expresado en proporción al verdadero valor del parámetro:

$$\frac{\widehat{r}^{i,j} - r^{i,j}}{r^{i,j}},$$

donde la estimación se ha realizado utilizando el método de aproximación simple (5.1). La fila señalada con " $Sg_2$ " utiliza el método (5.2), donde el parámetro  $\alpha$  empleado en esta ocasión valía 1.0. Las últimas dos filas recogen la variancia de las estimaciones según ambos métodos (el subíndice se refiere como antes al método empleado); la variancia aparece escalada con un factor de 100.

El primer comentario que se puede extraer del ejemplo es que el sesgo parece ser notablemente mayor con el segundo método de aproximación que con el primero. Esta misma observación se puede hacer con otros ejemplos. El sesgo de la primera fila puede ajustarse dentro de un orden de magnitud del 1% (con un máximo del 8%), frente a un orden del 20% (con un máximo del 250%) en la segunda fila. No se puede decir que el sesgo apreciable se disponga de acuerdo con algún patrón reconocible fácilmente. Por lo menos, no se ha visto nada especial entre, por ejemplo, los estimadores de las regiones internas, o las laterales, o las que hacen esquina. En cuanto a las variancias, la comparación se invierte, pues el método más favorecido es claramente el segundo.

Podemos decir que, en general, las regiones de superficie pequeña tendrán densidades grandes (bajo el supuesto de que las probabilidades son de parecida magnitud en cada región). El ejemplo lo tenemos en los dos casos extremos: la región (3,3) es la menor, pero tiene una de las mayores densidades (0.25589); la región (2,1) es la mayor, y su densidad es la segunda más baja de entre todas (0.00826). Hay que decir que este efecto no es intencionado, puesto que el algoritmo de punto interior no lo tiene en cuenta; más bien se trata de una peculiaridad del azar, que tiende a repartir uniformemente la probabilidad entre todas las regiones, sin descartar la posibilidad de que en alguna ocasión se produzcan desequilibrios importantes. Un sesgo especialmente grande (252.8%) se ha producido en la región (3,3). No es descabellado sugerir que las regiones de pequeño tamaño pueden conllevar cierta inestabilidad en la estimación del parámetro asociado, aunque esto no sea más que una hipótesis que habría que justificar. Sí es evidente que existe una relación inversa entre el área de una región y la variancia de la estimación.

Cabe decir, en este punto, que se han examinado algunos casos para observar la influencia del parámetro  $\alpha$  en la estimación. Para ello, se ha realizado una estimación reiterada del mismo caso variando  $\alpha$  desde 0 hasta valores del estilo de 1 ó 2 (lo que

significa que el área de influencia de cada individuo llega a alcanzar una desviación tipo a su alrededor). Valorando en distintos puntos intermedios la dispersión de las estimaciones de la densidad (para ello se ha calculado el valor promedio de las desviaciones tipo de las estimaciones  $\hat{r}^{i,j}$ ), se ha visto con claridad que este indicador de la dispersión de los estimadores decrece mientras  $\alpha$  aumenta (el decrecimiento no sería lineal, en cualquier caso, sino convexo). Puede justificarse teniendo en cuenta que cuanto más grande sea el área de influencia, más puntos diferentes participan en la estimación de la densidad de una determinada región; como se da que la aproximación (5.2) no es más que un promedio, mayor número de puntos significa una disminución de la variancia. Desde luego, este argumento no es más que algo intuitivo; tampoco se puede olvidar que tras la etapa de aproximación está la etapa de reajuste, y no sabemos si ésta modifica sustancialmente la primera estimación (infactible). En cuanto a la existencia de sesgo, con experiencias que operan de manera semejante, podemos comprobar que el sesgo (una indicación global) crece rápidamente cuando  $\alpha$  se aleja de cero, aunque este aumento se desacelera posteriormente.

En principio, no resulta fácil deducir más a partir de este procedimiento. Teniendo en cuenta que las pruebas hechas a propósito utilizaban un tamaño de prueba constante, la primera conclusión sería: un método con  $\alpha$  suficientemente grande suele ser un estimador con menor variancia que si  $\alpha = 0$ , pero el sesgo que presenta es grande, comparado con el obtenido con el método (5.2). En consecuencia, a pesar de la mayor variancia, lo más apropiado parece ser hacer una estimación preliminar con la aproximación (5.1).

#### 5.4.4 Comportamiento asintótico

Con el ejemplo que se muestra a continuación, se expone un resultado corriente de estimación de la FDC, poniendo el acento esta vez en la variación del tamaño de la muestra,  $n$ .

Las dos variables X e Y con las que se ha trabajado son:

$$X = \{2.427490, 2.443455, 3.984514, 4.129069\}$$

$$Y = \{0.042942, 1.717926, 6.403825, 8.472136\}$$

Se ha calculado la siguiente distribución de probabilidades para cada región:

$p^{i,j}$	$[X^0, X^{01}]$	$[X^{01}, X^{02}]$	$[X^{02}, X^{03}]$
$[Y^0, Y^{01}]$	0.070049	0.154083	0.109216
$[Y^{01}, Y^{02}]$	0.203242	0.042718	0.087415
$[Y^{02}, Y^{03}]$	0.060042	0.136530	0.136703

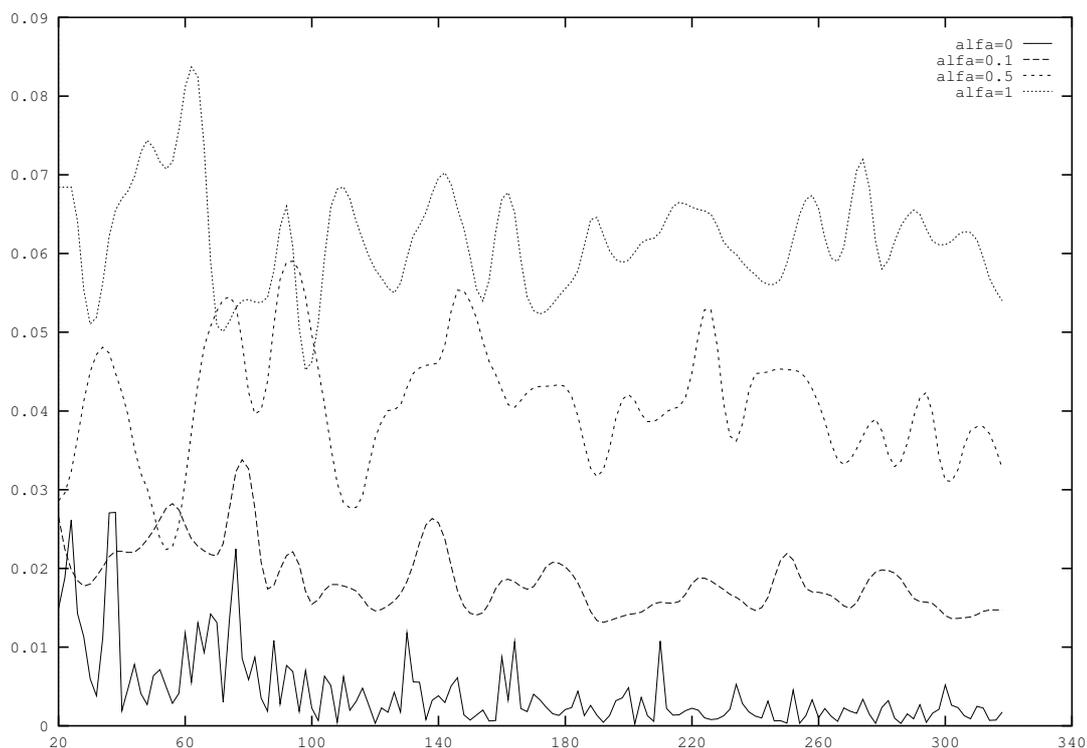
con lo que se obtiene una correlación  $\rho$  igual a 0.0550753. Las pruebas realizadas han consistido en estimar la densidad  $R$  a partir de muestras con tamaños entre 20 y 320 observaciones. Con el objeto de representar gráficamente el resultado obtenido, se ha usado la siguiente expresión para medir la *discrepancia* existente entre la densidad real  $R$  y la estimación  $\hat{R}_n$ :

$$D(R, \hat{R}_n) = \frac{1}{(K-1)(K-1)} \sum_{i,j=1}^{K-1} \frac{(\hat{p}^{i,j} - p^{i,j})^2}{p^{i,j}} \quad (5.7)$$

donde  $p^{i,j}$  y  $\hat{p}^{i,j}$  son las probabilidades en cada región; respectivamente, las iniciales que se han mostrado anteriormente y las estimadas, que se hallan multiplicando la densidad ( $r^{i,j}$ , o  $\hat{r}^{i,j}$ ) por el área de cada región  $(X^{0i} - X^{0i-1})(Y^{0j} - Y^{0j-1})$ .

La expresión (5.7) es válida como criterio de aproximación de la estimación a la densidad real: la introducción de las probabilidades proporciona una mejora en la estabilidad del conjunto. Para normalizar cada sumando, se considera el cociente por el valor de la probabilidad  $p^{i,j}$ . En nuestro caso, esto siempre es posible, dado que el algoritmo de punto interior que calcula una FDC inicial nunca dará valores nulos.

A notar que la expresión D da una medida global del sesgo apreciado en la estimación con cada muestra. Ya habíamos hecho notar con muestras de tamaño constante que el sesgo era sensiblemente menor con  $\alpha = 0$ .



**Figura 5.3 :** Resultados de D para el ejemplo expuesto, con valores de  $\alpha=0, 0.1, 0.5$  y  $1$ , y  $n$  (en abcisas) entre  $20$  y  $320$ .

En la Fig. 5.3 se pone de manifiesto: 1) que la influencia de  $\alpha$  sobre el sesgo se manifiesta de la misma manera si  $n$  varía. 2) que el sesgo tiende a decrecer con tamaños de muestra crecientes, aunque no de la misma manera.

En efecto, si algún descenso parece ser efectivo en este ejemplo es el que proviene del cálculo más sencillo, señalado por una línea continua, y también cuando  $\alpha=0.1$ . Las restantes trayectorias son principalmente oscilación aleatoria alrededor de un valor netamente positivo. De hecho, la experiencia muestra que únicamente cuando  $\alpha = 0$  hay una convergencia real (D tiende a 0); en otros casos, siempre existe un nivel que no puede rebasarse, en general más bajo cuanto menor es  $\alpha$ .

El tamaño de muestra también incide en la variabilidad de la estimación. En este caso, puesto que para cada  $n$  sólo figura un valor de  $D$ , hay que apreciar el descenso de la variabilidad en la reducción de la amplitud de la oscilación a medida que crece  $n$ . En realidad, la gráfica no es una referencia muy fiel, ya que para mejorar la presentación de los valores con  $\alpha > 0$  se ha sometido a estas secuencias a un alisado que, sin embargo, no afecta a la tendencia (este alisado se ha obtenido con la instrucción `Rsmooth` de Minitab [MINI92] que realiza el suavizado de una serie tomando la mediana de grupos de valores consecutivos). El aspecto real de tales secuencias presenta un aspecto menos sinuoso, con un incremento de valores fuera de banda, con lo que no se destacan las diferencias entre los resultados obtenidos con distintos valores de  $\alpha$ .

Cabe decir que el caso expuesto no es representativo de todas las situaciones posibles. En realidad, puede ser un ejemplo de una *mala* situación. Hay otras, con las que nos hemos encontrado con frecuencia durante las pruebas realizadas, en las que no se distinguen diferencias importantes entre  $D$  con  $\alpha = 0$  y  $\alpha > 0$  (dentro del rango de  $n$  contemplado). Si observamos los valores de los cuantiles de  $X$ , notaremos que la diferencia entre  $X^{01}$  y  $X^0$  es relativamente pequeña. En general, con distribuciones que no presentan estas características no se aprecian diferencias tan acusadas. Sin embargo, establecer alguna relación entre los factores en juego y el resultado final no es viable aún, por lo que es difícil establecer cuáles son los parámetros que participan principalmente en la estimación de la densidad, y más aún cuantificar esta participación.



## CAPÍTULO 6

### OPERACIONES CON VARIAS VARIABLES DE BLOQUES

#### 6.1 Introducción

El capítulo que sigue tiene un carácter particular. Por un lado, es eminentemente práctico, a pesar del título *Operaciones con varias variables de bloques*, que puede dar la impresión de que se va a introducir una teoría necesariamente compleja, sin ser ése en absoluto el fin que se busca. Por otro lado, se trata de una extensión de la teoría de las variables de bloques en cierta manera independiente del tema principal de la tesis, que es la generación hidrotérmica a largo plazo. Por expresarlo propiamente, no es que este capítulo descuide el tema central, sino que se trata de una ramificación sugerida por el mismo tema, aunque por el momento no se vislumbren perspectivas de aplicación inmediata.

La citada sugerencia se puede expresar de la siguiente manera. Puesto que la generación es una función de variables de bloques, observemos qué ocurre cuando se operan entre sí este tipo de variables. El planteamiento tiene un interés notable ya que, como veremos, se asume como una simplificación que la generación también sigue una ley de probabilidad de bloques. No vamos a profundizar excepto en unos casos bien concretos, que son la suma de dos variables, el cuadrado de la suma y el producto de dos variables. Con estos ejemplos se pone de manifiesto que las variables de bloques son lo suficientemente sencillas como para que sea accesible operar con ellas (lo cual no es cierto para la práctica totalidad de otros tipos de variables, excepto bajo ciertas condiciones como cuando hay independencia entre variables). Sin embargo, en esta parte no se ha llegado a determinar totalmente la forma completa de la generación (una forma bastante compleja, en la que intervienen tres variables, usualmente dos de ellas en forma cúbica).

A lo largo del capítulo se desarrollan unas expresiones generales para la función de densidad de variables que son una función concreta del tipo de las que se nombra más arriba. A continuación, se expone un ejemplo particular, que se refiere a funciones con una variable uniforme y una variable triangular con cierto grado de dependencia. Se resuelve este caso completamente y, finalmente, se comparan resultados con los obtenidos suponiendo que las variables originales fueran de bloques, utilizando un estadístico conocido generalmente como ISE.

Si bien se carece de una experiencia exhaustiva con otros casos (que, por otra parte, no son fáciles de reproducir, debido a la dificultad antes comentada de operar con variables cualesquiera), el ejemplo pretende dar la idea de que las variables de bloques son una

herramienta útil para “imitar” otras distribuciones. Con variables de bloques, por ejemplo, se puede conseguir una forma analítica de la función de densidad de una variable a partir de una muestra, tal como se muestra en la sección de resultados computacionales. Con el fin de realizar comparaciones, se incluyen resultados alternativos obtenidos mediante un estimador kernel. Es de destacar que el método expuesto utiliza toda la información conjunta de las dos variables, pues no precisa de una muestra, tal como opera el estimador kernel.

## 6.2 Suma de dos variables

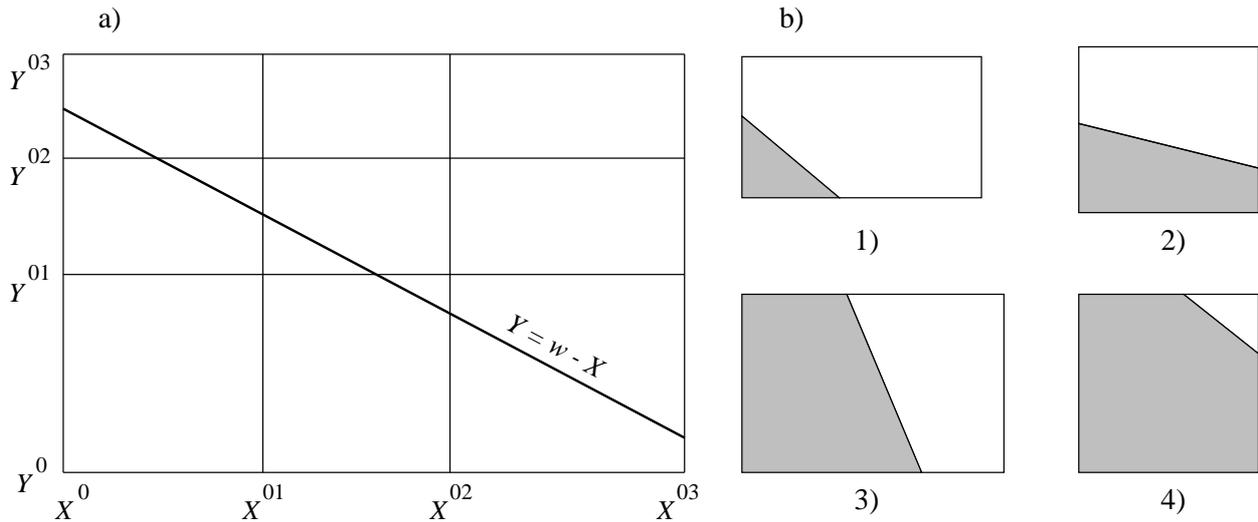
Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias de  $K-1$  bloques, con probabilidades  $(\pi_1, \dots, \pi_{K-1})$  comunes a ambas variables. Sea  $f_{X,Y}$  la FDC de  $X$  e  $Y$ . Definimos la variable aleatoria  $W = X + Y$ . Se trata de averiguar cuál es la función de distribución y la función de densidad de  $W$ . Por definición de  $F_W(w)$ :

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(X + Y \leq w) = P(Y \leq w - X)$$

lo que lleva a considerar el volumen de  $f_{X,Y}$  que queda a un lado del plano  $Y = w - X$  (más concretamente, del lado que se extiende hacia  $-\infty$ ). Un ejemplo gráfico se muestra en la figura (4.1.a), considerando solamente la visión en un espacio  $X - Y$ . Simplifiquemos dicho plano, teniendo en cuenta que es equivalente en su lugar hablar de la recta  $Y = w - X$  en un espacio de dos dimensiones. En la figura (4.1.b) aparece una descomposición en casos de las posibles maneras en que un bloque puede quedar *cortado* por dicha recta (con pendiente -1). Podemos describirlas como: 1) cortando la esquina inferior (izquierda, se entiende). 2) cortando de izquierda a derecha. 3) cortando de arriba abajo. 4) cortando la esquina superior (derecha, se entiende). Evidentemente, un bloque también puede quedar intacto, y distinguiremos dos posibles situaciones: 1) cuando la recta  $Y = w - X$  pasa sobre la esquina superior. 2) cuando la recta  $Y = w - X$  pasa bajo la esquina inferior. En el primer caso, todo el volumen del bloque es tomado en consideración; en el segundo caso, el bloque es enteramente dejado de lado.

En la Fig. 6.1 aparece una descomposición en casos de las posibles maneras en que un bloque puede quedar *cortado* por dicha recta (con pendiente -1). Podemos describirlas como: 1) cortando la esquina inferior (izquierda, se entiende). 2) cortando de izquierda a derecha. 3) cortando de arriba abajo. 4) cortando la esquina superior (derecha, se entiende). Evidentemente, un bloque también puede quedar intacto, y distinguiremos dos posibles situaciones: 1) cuando la recta  $Y = w - X$  pasa sobre la esquina superior. 2) cuando la recta  $Y = w - X$  pasa bajo la esquina inferior. En el primer caso, todo el volumen del bloque es tomado en consideración; en el segundo caso, el bloque es enteramente dejado de lado.

Por tanto, una manera de calcular  $F_W(w)$  consiste en hallar para cada región del plano  $X-Y$  determinado por los cuantiles de las variables la porción de área que queda por debajo de la recta  $Y = w - X$ , multiplicando esta superficie por la densidad de dicha región (que es constante, por definición de FDC). La suma de todos estos términos compone el volumen a que equivale la probabilidad pedida.



**Figura 6.1 :** Suma de dos variables de bloques. a) Plano  $X$ - $Y$ , representando para un valor de  $w$  concreto la recta que limita la región  $X+Y \leq w$ . b) Los cuatro posibles tipos de corte de un bloque (la zona gris es el área de interés).

### 6.2.1 Integración de bloques truncados por una recta

Supongamos un bloque perteneciente a la FDC de dos variables  $X$  e  $Y$ ; identificaremos a este bloque como  $(i, j)$  cuando coincida su base con la región  $[X^{0i-1}, X^{0i}] \times [Y^{0j-1}, Y^{0j}]$ . Llamaremos *bloque truncado* de  $(i, j)$  según  $w$  a la región geométrica que resulta de la intersección del bloque  $(i, j)$  con el conjunto  $\{(x, y) | y \leq w - x\}$ .

El cálculo del volumen de un bloque truncado equivale a la integración de los puntos encerrados en dicha región. Es evidente que, puesto que la altura del bloque es constante, tal volumen es fácilmente resoluble hallando previamente el área de la base del bloque truncado. De acuerdo a la clasificación hecha al principio del apartado, obtendremos los siguientes valores para el volumen del bloque truncado  $(i, j)$  según  $w$ .

#### 6.2.1.1 Caso 1

Este caso se presenta cuando  $X^{0i-1} + Y^{0j-1} \leq w \leq \min(X^{0i-1} + Y^{0j}, X^{0i} + Y^{0j-1})$ . Notemos que la base del bloque truncado es un triángulo rectángulo. La base del triángulo es  $w - Y^{0j-1} - X^{0i-1}$ ; la altura es idéntica (puesto que la pendiente de la recta es -1). En consecuencia, definimos el volumen buscado como:

$$V_{i,j}(w) = \frac{r^{i,j}}{2} (w - Y^{0j-1} - X^{0i-1})^2 \quad (6.1)$$

donde, siguiendo la notación habitual,  $r^{i,j}$  indica la densidad en la región  $(i, j)$ .

#### 6.2.1.2 Caso 2

Este caso se presenta cuando  $X^{0i} + Y^{0j-1} \leq w \leq X^{0i-1} + Y^{0j}$ . El área buscada es un trapecio con alturas desiguales. Descompondremos esta superficie en dos partes: el rectángulo inferior y el triángulo superior. La base de ambas figuras es  $X^{0i} - X^{0i-1}$ . La

altura del rectángulo es  $w - X^{0i} - Y^{0j-1}$ ; razonando como antes, vemos que la altura del triángulo coincide con su base. Por tanto, esta vez se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} V_{i,j}(w) &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( w - X^{0i} - Y^{0j-1} + \frac{X^{0i} - X^{0i-1}}{2} \right) \\ &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( w - Y^{0j-1} - \frac{X^{0i} + X^{0i-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

### 6.2.1.3 Caso 3

Este caso se presenta cuando  $X^{0i-1} + Y^{0j} \leq w \leq X^{0i} + Y^{0j-1}$ . Al igual que antes, se obtiene un trapecio, pero con bases irregulares. Realizando una descomposición en rectángulo más triángulo llegamos a:

$$\begin{aligned} V_{i,j}(w) &= r^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) \left( w - Y^{0j} - X^{0i-1} + \frac{Y^{0j} - Y^{0j-1}}{2} \right) \\ &= r^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) \left( w - X^{0i-1} - \frac{Y^{0j} + Y^{0j-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

### 6.2.1.4 Caso 4

Este caso se presenta cuando  $X^{0i} + Y^{0j} \geq w \geq \max(X^{0i-1} + Y^{0j}, X^{0i} + Y^{0j-1})$ . Observamos que es inmediato encontrar la solución substrayendo al área de todo el bloque la superficie del triángulo que queda sobre la recta  $Y = w - X$ . Así:

$$V_{i,j}(w) = r^{i,j} \left( (Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1}) - \frac{(Y^{0j} + X^{0i} - w)^2}{2} \right) \quad (6.4)$$

Podemos hacer notar en este punto que los casos 1 y 4 son funciones cuadráticas de  $w$ , mientras los casos 2 y 3 se tratarían de funciones lineales.

### 6.2.1.5 Cuando la recta $Y = w - X$ no corta la región $(i, j)$

Conviene dejar claro que estos casos también son de interés, aunque sean los más sencillos. Si se da que  $w \leq X^{0i-1} + Y^{0j-1}$  entonces no hay volumen a considerar:

$$V_{i,j}(w) = 0 \quad (6.5)$$

La última posibilidad es que  $w \geq X^{0i} + Y^{0j}$ ; en ese caso:

$$V_{i,j}(w) = r^{i,j} ((Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1})) \quad (6.6)$$

Está claro que, definida como en (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) y (6.6),  $V_{i,j}(w)$  se trata de una función definida a trozos que calcula el volumen de un bloque truncado según el parámetro  $w$ .

### 6.2.2 Propiedades de $V_{i,j}$

Supondremos que por el bloque  $(i, j)$  nos referimos al que viene determinado por los cuantiles  $X^{0i-1}, X^{0i}, Y^{0j-1}, Y^{0j}$ .

Propiedad 1.  $V_{i,j}(w)$  es continua para todo  $w$ .

Para demostrarlo, supondremos que el bloque  $(i, j)$  tiene unas dimensiones tales que, si  $w$  se incrementara, del caso 1 se pasaría al 2, y de éste al 4. Esto supone, por tanto, que  $(X^{0i-1} + Y^{0j} \geq X^{0i} + Y^{0j-1})$ . La otra posibilidad es pasar del caso 1 al 3 y de aquí al 4. De cualquier modo, las esquinas  $(X^{0i-1}, Y^{0j-1})$  y  $(X^{0i}, Y^{0j})$  son extremos absolutos en la suma de  $X$  e  $Y$ , por lo que los casos 1 y 4 son obligados.

Primeramente, las expresiones (6.1)–(6.6) son continuas. Queda por ver qué ocurre en los puntos en que se ponen en contacto. Empezaremos mostrando que cuando  $w$  tiende a  $X^{0i-1} + Y^{0j-1}$ , según la expresión (6.1),  $V_{i,j}$  tiende a cero, coincidiendo con la expresión (6.5):

$$V_{i,j}(X^{0i-1} + Y^{0j-1}) = \frac{r^{i,j}}{2} (X^{0i-1} + Y^{0j-1} - Y^{0j-1} - X^{0i-1})^2 = 0$$

Supongamos ahora que  $w$  se acerca a  $X^{0i} + Y^{0j-1}$ ; según (6.1):

$$\begin{aligned} V_{i,j}(X^{0i} + Y^{0j-1}) &= \frac{r^{i,j}}{2} (X^{0i} + Y^{0j-1} - Y^{0j-1} - X^{0i-1})^2 \\ &= \frac{r^{i,j}}{2} (X^{0i} - X^{0i-1})^2 \end{aligned}$$

De acuerdo con (6.2):

$$\begin{aligned} V_{i,j}(X^{0i} + Y^{0j-1}) &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( X^{0i} + Y^{0j-1} - Y^{0j-1} - \frac{X^{0i} + X^{0i-1}}{2} \right) \\ &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( X^{0i} - \frac{X^{0i} + X^{0i-1}}{2} \right) \\ &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( \frac{X^{0i} - X^{0i-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

A continuación haremos lo propio cuando  $w$  está cerca de  $X^{0i-1} + Y^{0j}$ . La expresión (6.2) nos da:

$$\begin{aligned} V_{i,j}(X^{0i-1} + Y^{0j}) &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( X^{0i-1} + Y^{0j} - Y^{0j-1} - \frac{X^{0i} + X^{0i-1}}{2} \right) \\ &= r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \left( Y^{0j} - Y^{0j-1} - \frac{X^{0i} - X^{0i-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

Siguiendo (6.4):

$$\begin{aligned} V_{i,j}(X^{0i-1} + Y^{0j}) &= r^{i,j} \left( (Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1}) - \frac{(Y^{0j} + X^{0i} - (X^{0i-1} + Y^{0j}))^2}{2} \right) \\ &= r^{i,j} \left( (Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1}) - \frac{(X^{0i} - X^{0i-1})^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Está claro que haciendo factor común con  $X^{0i} - X^{0i-1}$  llegamos al resultado anterior.

Por último, si  $w$  tiende al extremo superior derecho, esto es, a  $X^{0i} + Y^{0j}$ , según (6.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} V_{i,j}(X^{0i} + Y^{0j}) &= r^{i,j} \left( (Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1}) - \frac{(Y^{0j} + X^{0i} - (X^{0i} + Y^{0j}))^2}{2} \right) \\ &= r^{i,j} ((Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1})) \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la continuidad de  $V_{i,j}$ . La demostración para el caso complementario sigue prácticamente los mismos pasos que para éste.

Propiedad 2.  $V_{i,j}(w)$  es derivable para todo  $w$ .

Seguiremos admitiendo el mismo supuesto que en la anterior propiedad. Puesto que las expresiones (6.5) y (6.6) no dependen de  $w$ , hay que esperar que, según (6.1),  $V_{i,j}$  empiece con pendiente nula, y otro tanto según (6.4) en el final de  $V_{i,j}$ . Derivando ambas expresiones:

$$V'_{i,j}(w) = r^{i,j} (w - Y^{0j-1} - X^{0i-1}) \quad (\text{caso 1})$$

$$V'_{i,j}(w) = r^{i,j} (w - Y^{0j} - X^{0i}) \quad (\text{caso 4})$$

las cuales se anulan en  $X^{0i-1} + Y^{0j-1}$  y  $X^{0i} + Y^{0j}$ , respectivamente.

La comprobación de la continuidad de la derivada en los demás puntos de contacto es sencilla:

$$V'_{i,j}(w) = r^{i,j} (X^{0i} - X^{0i-1}) \quad (\text{caso 2})$$

Inmediatamente comprobamos que, en el caso 1,  $V'_{i,j}(X^{0i} + Y^{0j-1})$  es igual a la función (constante)  $V'_{i,j}$  del caso 2, que, por otra parte, equivale a  $V'_{i,j}(X^{0i-1} + Y^{0j})$  usando el caso 4. Un proceso parecido se haría con el supuesto complementario, usando la siguiente expresión:

$$V'_{i,j}(w) = r^{i,j} (Y^{0j} - Y^{0j-1}) \quad (\text{caso 3})$$

### 6.2.3 Función de distribución y función de densidad de $W$

Visto lo anterior, ahora podemos decir:

$$F_W(w) = \sum_{\forall(i,j)} V_{i,j}(w) \quad (6.7)$$

$F_W(w)$  es continua y derivable, ya que es suma de funciones continuas y derivables. Por tanto, su derivada existe, por lo que podremos hablar con propiedad de la función de densidad de  $W$ ,  $f_W(w)$ .

Además, se observa que  $F_W(w)$  es una función de segundo grado, ya que es suma de funciones que, como mucho, son polinomios de grado dos. De aquí deducimos que la función de densidad de  $X + Y$  es una función lineal continua a trozos, a diferencia de como eran originalmente  $X$  e  $Y$ , variables con distribución de bloques.

### 6.2.3.1 Caracterización de $F_W$

Con el objeto de hacer más eficiente una implementación computacional del cálculo de la función de distribución  $F_W(w)$ , vamos a hallar una expresión alternativa para (6.7). Por ello, definimos:

$$U = \{u_l | u_l = X^{0i} + Y^{0j}, 1 \leq i, j \leq K - 1\}$$

Supondremos que los elementos de  $U$  están en orden creciente. La lista  $U$  tiene como mucho  $K^2$  valores, pero si dos de ellos están repetidos, sólo es necesario considerar uno. De esta manera, tendremos:

$$X^0 + Y^0 = u_1 < u_2 < \dots < u_\kappa = X^{0K-1} + Y^{0K-1}$$

donde  $\kappa$  es la cardinalidad de  $U$  y es, como se ha dicho, menor o igual que  $K^2$ .

$U$  contiene todos los puntos de contacto que se han empleado para definir las funciones  $V_{i,j}$ . Son, por decirlo así, los puntos “difíciles” (donde se pierde la continuidad de la segunda derivada). Sin embargo, entre dos puntos  $u_l$  y  $u_{l+1}$ ,  $F_W$  se puede determinar por una única ecuación cuadrática, suma de todas las ecuaciones que intervienen para  $u_l \leq w \leq u_{l+1}$ . Podemos decir, pues:

$$F_W(w) = a_l w^2 + b_l w + c_l, \quad u_l \leq w \leq u_{l+1} \quad (6.8)$$

con  $a_l$ ,  $b_l$  y  $c_l$ ,  $l = 1, \kappa - 1$ , coeficientes reales que se obtendrían de las expresiones (6.1)–(6.6).

Ahora bien, un procedimiento sencillo para encontrar los coeficientes citados es:

**0** Asignar  $F1 = 0$ ,  $v = u_1$ ,  $f = 0$ .

**1** Para  $l = 1, \kappa - 1$ :

**1.1** Asignar  $w = u_{l+1}$ .

**1.2** Calcular  $F_W(w)$  usando (6.7) y asignar a  $F2$ .

**1.3** Hallar los valores de  $a_l$ ,  $b_l$  y  $c_l$  tales que:

$$a_l v^2 + b_l v + c_l = F1$$

$$a_l w^2 + b_l w + c_l = F2$$

$$2a_l v + b_l = f$$

Se resuelve fácilmente, obteniéndose que:

$$a_l = ((v - w) * f + F2 - F1) / (v - w)^2$$

$$b_l = f - 2a_l v$$

$$c_l = F2 - w(a_l w + b_l)$$

**1.4** Actualizar  $f = 2 a_l w + b_l$ ,  $v = w$ ,  $F1 = F2$ .

La idea que subyace en este procedimiento se plasma en el paso **1.3**: allí se calculan los coeficientes de cada segmento mediante el conocimiento del valor de la función en los extremos y de la derivada en uno de ellos. Ahora resulta sencillo expresar la forma de la función de densidad de la suma de  $X$  e  $Y$ :

$$f_W(w) = 2a_l w + b_l, \quad u_l \leq w \leq u_{l+1} \quad (6.9)$$

### 6.3 Cuadrado de suma de dos variables

Supongamos que nos interesamos por la ley de  $Z$ , donde  $Z = W^2$  y  $W$  es una variable con función de distribución tal como (6.8). También podemos expresar  $Z$  como  $(X + Y)^2$ . Es un cálculo directo que:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(W^2 \leq z) = P(|W| \leq \sqrt{z}) \\ &= P(-\sqrt{z} \leq W \leq \sqrt{z}) = F_W(\sqrt{z}) - F_W(-\sqrt{z}) = \\ &= a_l z + b_l \sqrt{z} + c_l - (a_m z - b_m \sqrt{z} + c_m), \quad u_l \leq \sqrt{z} \leq u_{l+1}, u_m \leq -\sqrt{z} \leq u_{m+1} \end{aligned}$$

Con tal de simplificar los cálculos, admitamos que  $W \geq 0$ . De esta manera, la anterior expresión queda como:

$$F_Z(z) = a_l z + b_l \sqrt{z} + c_l, \quad u_l \leq \sqrt{z} \leq u_{l+1} \quad (6.10)$$

La función de densidad para  $Z$  es:

$$f_Z(z) = a_l + \frac{b_l}{2\sqrt{z}}, \quad u_l \leq \sqrt{z} \leq u_{l+1} \quad (6.11)$$

Por construcción, es inmediato que  $F_Z$  es continua. Para demostrar que también es derivable (o lo que es equivalente, que  $f_Z$  es continua), hacemos notar que  $F_W$  lo es:

$$F'_W(w) = F'_W(w^-) = F'_W(w^+)$$

De esta manera, expresamos con  $w^-$  “cuando tiende a  $w$  por la izquierda”, y con  $w^+$  “cuando tiende a  $w$  por la derecha”. Nos interesa tomar  $w$  como uno de los puntos pertenecientes a  $U$ ; por tanto, las expresiones de  $F'_W$  son diferentes:

$$2a_{l-1}u_l + b_{l-1} = 2a_l u_l + b_l$$

Consideremos una lista  $V$  equivalente a  $U$ :

$$V = \{v_l | v_l = (X^{0i} + Y^{0j})^2, 1 \leq i, j \leq K - 1\}$$

De hecho,  $v_l = u_l^2$ . Dividiendo por  $2u_l$ :

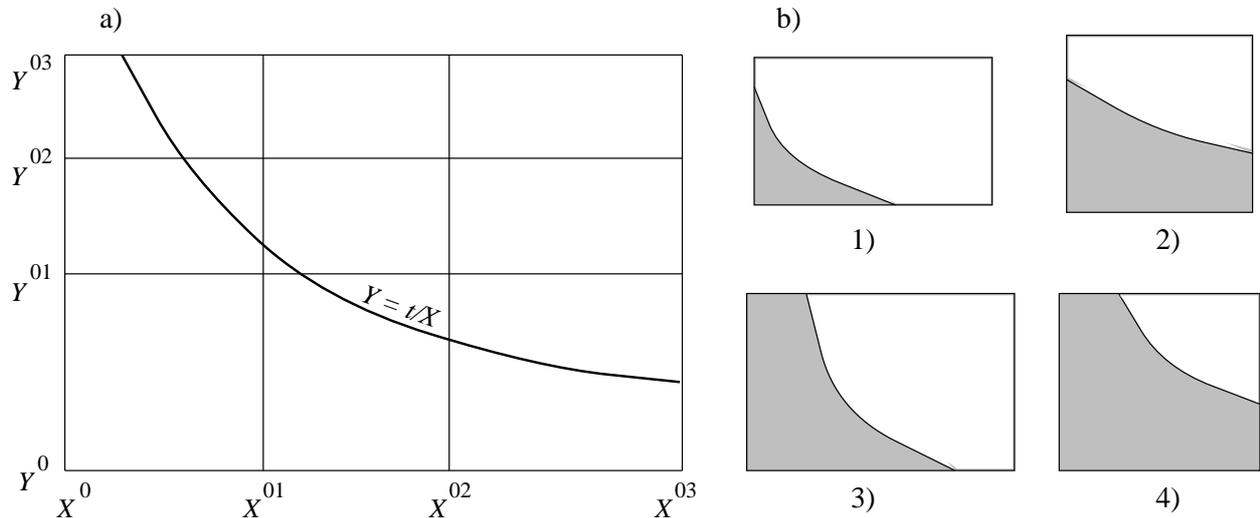
$$\begin{aligned} a_{l-1} + \frac{b_{l-1}}{2u_l} &= a_l + \frac{b_l}{2u_l} = \\ a_{l-1} + \frac{b_{l-1}}{2\sqrt{v_l}} &= a_l + \frac{b_l}{2\sqrt{v_l}} = \\ F'_Z(v_l^-) &= F'_Z(v_l^+) = F'_Z(v_l) \end{aligned}$$

De esta manera, queda demostrado que  $f_Z$  es una función continua.

## 6.4 Producto de dos variables

Sean  $X$  e  $Y$  dos variables de bloques al igual que en apartados anteriores, y sea  $T = XY$ . Para hallar la función de distribución de  $T$ , realizamos los siguientes pasos:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(XY \leq t) = P(Y \leq t/X)$$



**Figura 6.2 :** Producto de dos variables de bloques. a) Plano  $X$ - $Y$ , representando para un valor de  $t$  concreto la curva que limita la región  $XY \leq t$ . b) Los cuatro posibles tipos de corte de un bloque (la zona gris es el área de interés).

Hemos asumido que  $X > 0$ ; también supondremos que  $Y > 0$  con el fin de poder garantizar que  $T$  sea positiva. Por tanto, el plano  $X$ - $Y$  queda dividido por ecuaciones de la familia  $t/X$ , y la probabilidad buscada debe hallar el volumen encerrado bajo la FDC de  $X$  e  $Y$  restringido por la inecuación  $Y \leq t/X$  —véase a título de ejemplo la figura representada en Fig. 6.2.a). En la Fig. 6.2.b) se muestran las 4 posibles maneras en las que podemos encontrar un bloque recortado por la citada inecuación. Podemos utilizar la misma terminología que para el caso  $X + Y$ .

Se procede de la misma manera. Puesto que la densidad  $f_{X,Y}$  es constante en cada región, se calcula de acuerdo con cada caso una expresión para el área limitada por los

cuantiles  $X^{0i-1}, X^{0i}, Y^{0j-1}, Y^{0j}$  y la curva  $t/X$ . Una vez hecho esto, tenemos que  $F_T(t)$  es la suma de los volúmenes calculados según el parámetro  $t$ .

#### 6.4.1 Integración de bloques truncados por curvas $t/X$

##### 6.4.1.1 Caso 1

El primer caso podemos definirlo mediante:  $X^{0i-1} \cdot Y^{0j-1} \leq t \leq \min(X^{0i-1} \cdot Y^{0j}, X^{0i} \cdot Y^{0j-1})$ . El área de interés puede expresarse como:

$$\int_{X^{0i-1}}^{t/Y^{0j-1}} \frac{t}{X} dX - \left( \frac{t}{Y^{0j-1}} - X^{0i-1} \right) Y^{0j-1}$$

donde el término que subtrae se refiere al área incluida por la integral que no pertenece a la región  $(i, j)$ . La solución, finalmente, puede ponerse como:

$$S_{i,j}(t) = r^{i,j} \left( t \left( \log \left[ \frac{t}{X^{0i-1} \cdot Y^{0j-1}} \right] - 1 \right) + X^{0i-1} \cdot Y^{0j-1} \right) \quad (6.12)$$

##### 6.4.1.2 Caso 2

Éste viene dado si  $X^{0i} \cdot Y^{0j-1} \leq t \leq X^{0i-1} \cdot Y^{0j}$ . Análogamente, el área puede definirse por:

$$\int_{X^{0i-1}}^{X^{0i}} \frac{t}{X} dX - (X^{0i} - X^{0i-1}) Y^{0j-1}$$

lo cual da lugar a:

$$S_{i,j}(t) = r^{i,j} \left( t \log \left[ \frac{X^{0i}}{X^{0i-1}} \right] - (X^{0i} - X^{0i-1}) Y^{0j-1} \right) \quad (6.13)$$

##### 6.4.1.3 Caso 3

El tercer caso se tiene presente cuando  $X^{0i-1} \cdot Y^{0j} \leq t \leq X^{0i} \cdot Y^{0j-1}$ . Notar que en este caso conviene descomponer el resultado buscado en el rectángulo de la izquierda y el área que está estrictamente bajo la curva:

$$\int_{t/Y^{0j}}^{t/Y^{0j-1}} \frac{t}{X} dX - \left( \frac{t}{Y^{0j-1}} - \frac{t}{Y^{0j}} \right) Y^{0j-1} + (Y^{0j} - Y^{0j-1}) \left( \frac{t}{Y^{0j}} - X^{0i-1} \right)$$

Simplificando este resultado obtenemos:

$$S_{i,j}(t) = r^{i,j} \left( t \log \left[ \frac{Y^{0j}}{Y^{0j-1}} \right] - (Y^{0j} - Y^{0j-1}) X^{0i-1} \right) \quad (6.14)$$

##### 6.4.1.4 Caso 4

Este caso se presenta cuando  $X^{0i} \cdot Y^{0j} \geq t \geq \max(X^{0i-1} \cdot Y^{0j}, X^{0i} \cdot Y^{0j-1})$ . Se plantea

de manera semejante al caso 3:

$$\int_{t/Y^{0j}}^{X^{0i}} \frac{t}{X} dX - \left( X^{0i} - \frac{t}{Y^{0j}} \right) Y^{0j-1} + (Y^{0j} - Y^{0j-1}) \left( \frac{t}{Y^{0j}} - X^{0i-1} \right)$$

por lo que se llega a:

$$S_{i,j}(t) = r^{i,j} \left( -t \left( \log \left[ \frac{t}{X^{0i} \cdot Y^{0j}} \right] - 1 \right) + X^{0i-1} \cdot Y^{0j-1} - X^{0i} \cdot Y^{0j-1} - X^{0i-1} \cdot Y^{0j} \right) \quad (6.15)$$

#### 6.4.1.5 Cuando la curva $Y = t/X$ no corta la región $(i, j)$

Estos casos son totalmente equivalentes a (6.5) y (6.6), solamente variando en lo que respecta a la condición de aplicación:

$$S_{i,j}(t) = 0, \quad t \leq X^{0i-1} \cdot Y^{0j-1} \quad (6.16)$$

$$S_{i,j}(t) = r^{i,j} ((Y^{0j} - Y^{0j-1})(X^{0i} - X^{0i-1})), \quad t \geq X^{0i} \cdot Y^{0j} \quad (6.17)$$

### 6.4.2 Función de distribución y función de densidad de $T$

Por tanto,  $S_{i,j}(t)$  es una función definida a trozos para todo  $t$  (en este caso, nos hemos limitado a  $t$  positivo). Puede demostrarse que para cualquier par  $(i, j)$ ,  $S_{i,j}$  es una función continua y derivable. También que dentro de su dominio natural empieza y acaba con pendiente nula. Por todo ello, puede decirse que la función de distribución de  $T$  se expresa como:

$$F_T(t) = \sum_{\forall(i,j)} S_{i,j}(t) \quad (6.18)$$

Si preparamos una lista  $Q$  compuesta de todos los posibles valores que se pueden obtener multiplicando los cuantiles de  $X$  con los de  $Y$ , y disponiéndolos en orden, de manera que:

$$X^0 \cdot Y^0 = q_1 < q_2 < \dots < q_{\kappa'} = X^{0K-1} \cdot Y^{0K-1}$$

( $\kappa' \leq K^2$ ) entonces, (6.18) puede escribirse como:

$$F_T(t) = \alpha_l t \log t + \beta_l t + \gamma_l, \quad q_l \leq t \leq q_{l+1} \quad (6.19)$$

donde  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$  y  $\gamma_l$  son coeficientes a determinar. Asimismo, la función de densidad de  $T$  es:

$$f_T(t) = \alpha_l (\log t + 1) + \beta_l, \quad q_l \leq t \leq q_{l+1} \quad (6.20)$$

#### 6.4.2.1 Caracterización de $F_T$

A continuación se describe un procedimiento para determinar los coeficientes  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$  y  $\gamma_l$ ,  $l=1, \kappa'-1$ . El método precisa poder evaluar en los puntos de contacto  $q_l$  las expresiones (6.12) a (6.17).

$$\boxed{0} \text{ Asignar } F_1 = 0, p = q_1, f = 0.$$

1] Para  $l = 1, \kappa' - 1$ :

1.1] Asignar  $t = q_{l+1}$ .

1.2] Calcular  $F_T(t)$  usando (6.18) y asignar a  $F2$ .

1.3] Hallar los valores de  $\alpha_l, \beta_l$  y  $\gamma_l$  tales que:

$$\alpha_l p \log p + \beta_l p + \gamma_l = F1$$

$$\alpha_l t \log t + \beta_l t + \gamma_l = F2$$

$$\alpha_l (\log p + 1) + \beta_l = f$$

La solución de este sistema (lineal) es:

$$\alpha_l = ((p - t) * f + F2 - F1) / (p - t + t \log(\frac{t}{p}))$$

$$\beta_l = f - \alpha_l (1 + \log p)$$

$$\gamma_l = F1 - p\beta_l - p \log p \alpha_l$$

1.4] Actualizar  $f = \alpha_l (\log t + 1) + \beta_l, p = t, F1 = F2$ .

## 6.5 Ejemplo

En los anteriores apartados se han desarrollado una serie de expresiones correspondientes a casos muy particulares: suma, producto, cuadrado de la suma de dos variables aleatorias. El hecho es que no se puede obrar de una manera más general: no es directo desarrollar una expresión para la función de densidad de  $f(X, Y)$ , siendo  $f$  una función cualquiera de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ , ni siquiera en las condiciones más favorables (como, por ejemplo, continuidad o monotonía de  $f$ ). Aun así, hay que valorar que el esfuerzo realizado no ha sido excesivo, que es posible llegar a resultados analíticos *exactos* y que la dificultad del proceso no radica especialmente en la complejidad de la variable. Puede que sea necesario un mayor esfuerzo computacional para evaluar una cierta función de densidad, pero este esfuerzo sólo depende de  $K$ . Y puede admitirse que una gran variedad de distribuciones pueden aproximarse con un número relativamente pequeño de bloques. Sin embargo, en el caso de la gran mayoría de leyes de distribución de probabilidad, no es inmediato encontrar para un par de variables no independientes una expresión de, por ejemplo, la densidad del producto de ambas.

En lo que sigue se va a desarrollar un ejemplo consistente en la comparación de la verdadera función de densidad del cuadrado de la suma de dos variables aleatorias conocidas (una uniforme y una triangular) con la función resultante cuando se opera a partir de dos variables de bloques. Otro tanto haremos con el producto de las dos variables antes citadas.

Para definir las dos variables de bloques que han de corresponderse con cada una de las originales, y la función de densidad conjunta, se conoce una muestra aleatoria apareada de ambas variables. A partir de esta información se estimarán todos los parámetros que sean necesarios. Este ejemplo se presenta de esta manera para poder comparar un método que parte necesariamente de una muestra, como es el estimador kernel, con el analítico. Además, aunque se podrían haber estimado directamente del modelo los parámetros más apropiados para ajustar las variables de bloques y su FDC, se prefiere trabajar con la muestra ya que es un enfoque que guarda más semejanza con una posible situación real (en la que desconoce el modelo de origen, generalmente).

### 6.5.1 Solución analítica de $(X + Y)^2$

Supongamos que  $X$  y  $X1$  son variables aleatorias independientes y que siguen una ley uniforme  $U[0,1]$ . Concretamente, la función de densidad de  $X$  y  $X1$  vale 1 para  $0 \leq x \leq 1$  y 0 en el resto. Llamamos  $Y$  a  $X + X1$ . Entonces,  $Y$  sigue una distribución triangular:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & y \leq 0 \text{ o } y \geq 2 \end{cases}$$

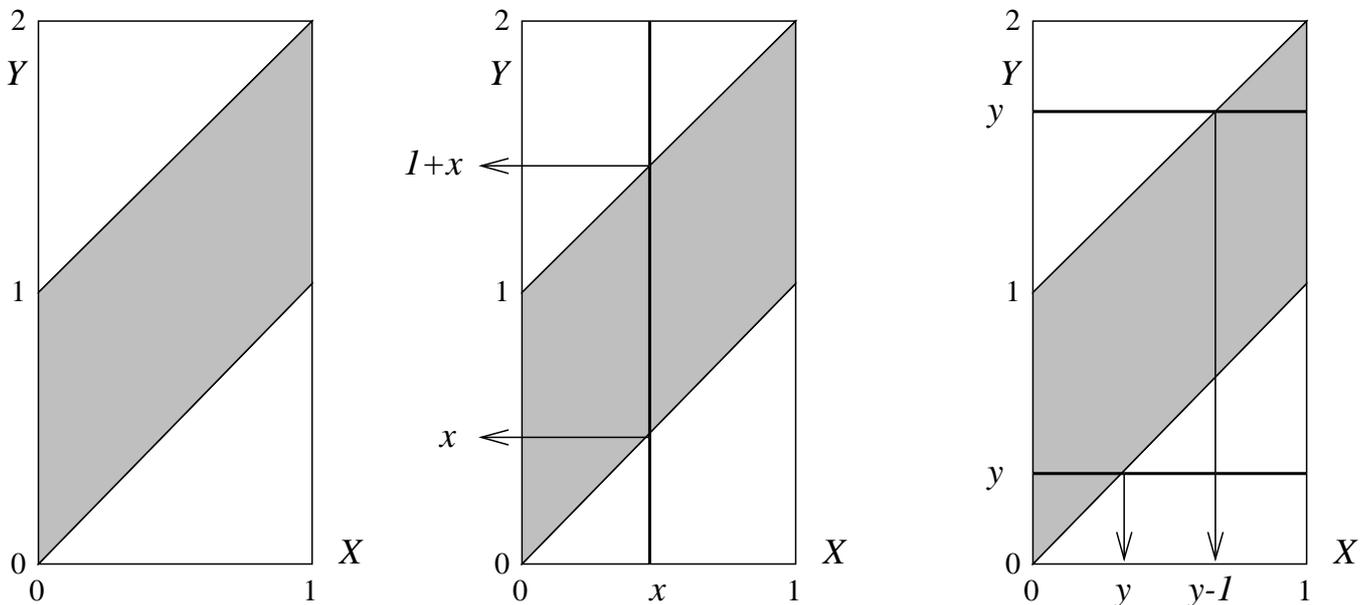
La FDC de  $X$  e  $Y$  es:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1 + x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos comprobarlo hallando las distribuciones marginales, y viendo que coinciden con las anteriores:

$$\int_0^2 f_{X,Y}(x, y) dy = \int_x^{1+x} 1 dy = 1, \text{ suponiendo } 0 \leq x \leq 1$$

$$\int_0^1 f_{X,Y}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 1 dx = y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \int_{y-1}^1 1 dx = 2 - y & \text{si } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



**Figura 6.3 :** FDC de  $X$  e  $Y$  del ejemplo. Sobre el área en gris la densidad vale 1; sobre el área en blanco vale 0.

La Fig. 6.3 muestra la planta de  $f_{X,Y}(x, y)$ , y unas indicaciones acerca del modo de resolver tales integrales.

Apuntaremos algunos de los momentos de ambas variables:

- $E[X] = 1/2$
- $E[Y] = 1$
- $\sigma_X^2 = 1/12$
- $\sigma_Y^2 = 1/6$
- $\text{Cov}[X, Y] = 1/12$
- $\rho_{X, Y} = \sqrt{2}/2$

Consideremos ahora  $W = X + Y$ . Observamos que  $W$  varía en el rango  $[0, 3]$ . Podemos llegar sin dificultad a determinar la función de distribución  $F_W$ :

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w^2}{4} & 0 \leq w \leq 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{w-1}{2} & 1 \leq w \leq 2 \\ 1 - \frac{(3-w)^2}{4} & 2 \leq w \leq 3 \\ 1 & 3 < w \end{cases}$$

Finalmente, sea  $Z = W^2$ . Es inmediato que  $F_Z$  tiene la siguiente expresión, pues deriva de la anterior:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z}{4} & 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{z}-1}{2} & 1 \leq z \leq 4 \\ 1 - \frac{(3-\sqrt{z})^2}{4} & 4 \leq z \leq 9 \\ 1 & 9 < z \end{cases} \quad (6.21)$$

Diferenciando (6.21) obtenemos la función de densidad de  $(X + Y)^2$ :

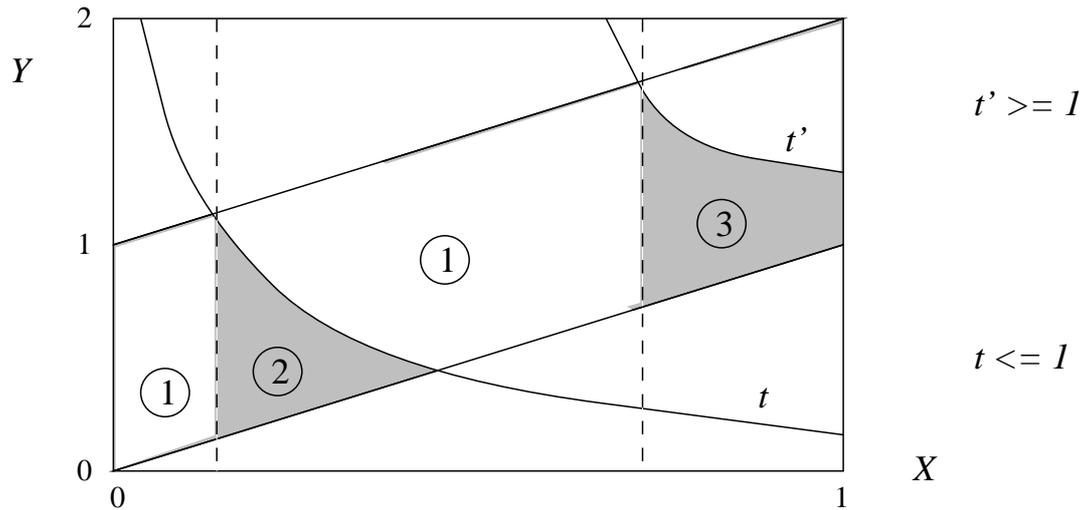
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \text{ ó } 9 < z \\ \frac{1}{4} & 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{z}} & 1 \leq z \leq 4 \\ \frac{3-\sqrt{z}}{4\sqrt{z}} & 4 \leq z \leq 9 \end{cases} \quad (6.22)$$

De esta expresión es posible deducir la esperanza de  $Z$ , que resulta ser  $8/3$ . Comprobémoslo:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[WW] = \text{Var}[W] + E^2[W] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y] + E^2[X + Y] \\ &= 1/12 + 1/6 + 2/12 + (1/2 + 1)^2 = 8/3 \end{aligned}$$

### 6.5.2 Solución analítica de $X \cdot Y$

Sigue una exposición que tiene el fin de encontrar la distribución de la variable  $T = X \cdot Y$ , cuando  $X$  e  $Y$  son tales como se ha descrito en la sección anterior. Para ello,



**Figura 6.4 :** FDC de  $X$  e  $Y$  del ejemplo, con las curvas  $t/X$  y  $t'/X$ .

nos ayudaremos de la ilustración de la Fig. 6.4, en donde aparecen representadas las dos situaciones típicas que es posible encontrar. En la figura se representa la planta de  $f_{X,Y}$ , y sobre ella hay dos fragmentos de curvas,  $t/X$  y  $t'/X$ , suponiendo que  $t \leq 1$  y  $t' \geq 1$ . Nuestro propósito es evaluar  $F_T(t)$  y  $F_T(t')$ , es decir, calcular el volumen encerrado por la FDC bajo las curvas mencionadas o, lo que es lo mismo, encontrar cuál es la superficie delimitada bajo las curvas, que será proporcional al volumen.

Queda claro que ambos casos son situaciones distintas. Cuando  $t \leq 1$ , el área buscada se descompone en un paralelogramo ① (en esta ocasión, el menor de los dos) y un área de forma cuasi-triangular ②. Si  $t \geq 1$ , tenemos también un paralelogramo ① (mayor que antes) y un área ③ limitada por tres segmentos rectos y un segmento curvo. Para  $0 \leq t \leq 2$ , el área del paralelogramo ① es el producto de la altura (según el eje  $Y$ ), que vale 1, con la base,  $b$ . La base se calcula como la solución del sistema:

$$\begin{cases} by = t \\ b + 1 = y \end{cases} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{4t+1} - 1}{2}$$

El área ② es la solución de:

$$\int_b^{\sqrt{t}} \left( \frac{t}{x} - x \right) dx$$

que viene dada por:

$$1/4 - \sqrt{4t+1}/4 + t \log \left[ \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}-1} \right]$$

teniendo en cuenta el requisito de  $0 \leq t \leq 1$ .

Análogamente hallamos como solución al área de ③, si  $1 \leq t \leq 2$ :

$$\int_b^1 \left( \frac{t}{x} - x \right) dx = t/2 - 1/4 - \sqrt{4t+1}/4 - t \log \left[ \frac{\sqrt{4t+1}-1}{2} \right]$$

Por tanto, se obtiene finalmente el siguiente resultado para  $F_T(t)$  y  $f_T(t)$ :

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\sqrt{4t+1}-1}{4} + t \log \left[ \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}-1} \right] & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{\sqrt{4t+1}-3}{4} + t/2 - t \log \left[ \frac{\sqrt{4t+1}-1}{2} \right] & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases} \quad (6.23)$$

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ y } t > 2 \\ \log \left[ \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}-1} \right] & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{4t+1}} + \frac{1}{2} - \frac{2t}{\sqrt{4t+1}(\sqrt{4t+1}-1)} - \log \left[ \frac{\sqrt{4t+1}-1}{2} \right] & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (6.24)$$

Si utilizamos (6.24) para hallar  $E[X \cdot Y]$ , obtendríamos  $7/12$ , que fácilmente se puede comprobar que es el valor correcto:

$$E[X \cdot Y] = \text{Cov}[X, Y] + E[X]E[Y] = 1/12 + 1/2 \cdot 1 = 7/12$$

### 6.5.3 Muestra utilizada

Como se ha avanzado en un principio, para estimar tanto las variables de bloques como la FDC se ha procedido a generar una muestra de dos variables con 100 observaciones cada una de la manera que se ha descrito en la sección *Solución analítica de  $(X + Y)^2$* . La muestra concreta que se ha observado presenta las siguientes características:

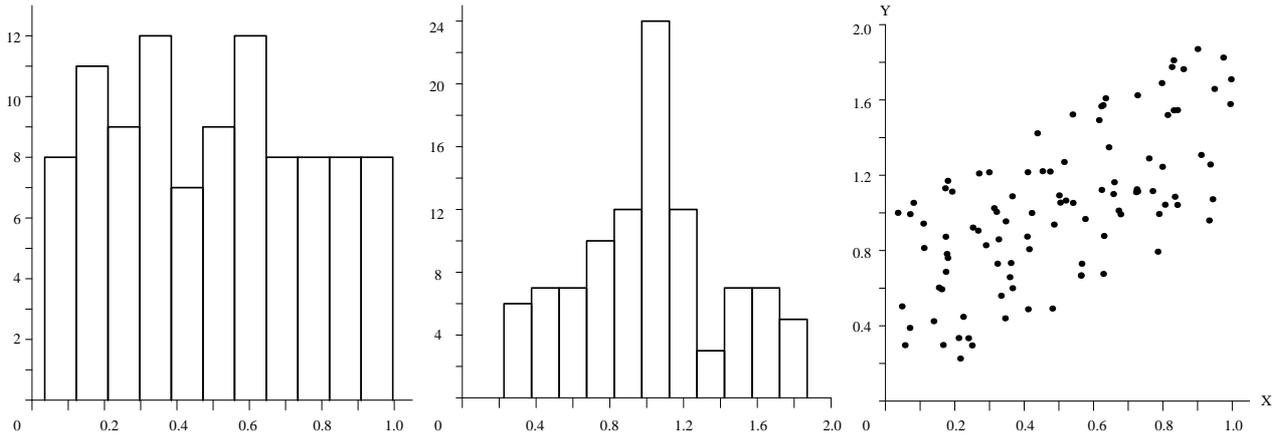
- Media de  $X$ : 0.4977
- Media de  $Y$ : 1.0257
- Media de  $(X + Y)^2$ : 2.6955
- Media de  $X \cdot Y$ : 0.5824
- Variancia de  $X$ : 0.07453
- Variancia de  $Y$ : 0.15864
- Correlación  $r_{X,Y}$ : 0.66744

En la Fig. 6.5 aparecen: a) el histograma de  $X$ . b) el histograma de  $Y$ . c) el diagrama bivalente de  $X$  e  $Y$ , mostrando su distribución conjunta.

Evidentemente, puesto que las muestras de  $X$  e  $Y$  son aleatorias, los histogramas no son más que aproximaciones a sus funciones de densidad. De la misma manera, las distribuciones de bloques que de las muestras se deducen no tienen porqué ser las mejores distribuciones que aproximan a, en este caso, una ley uniforme y una ley triangular. Por tanto, se es consciente de que en las pruebas que se han llevado a cabo los resultados están afectados de imprecisiones desde el principio.

### 6.5.4 Valoración de la estimación

#### 6.5.4.1 Estimador kernel



**Figura 6.5 :** Muestra utilizada en la prueba. a) histograma de la muestra de  $X$ .  
b) histograma de la muestra de  $Y$ . c) diagrama de dispersión  $Y-X$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una muestra aleatoria proveniente de una variable  $X$  cualquiera, con  $f_X$  desconocida. Un *estimador kernel* de  $f_X$  es una función tal como:

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

donde  $k(\cdot)$  recibe el nombre de *función kernel*. Generalmente, los únicos requisitos exigidos a  $k(\cdot)$  son que sea una función positiva y cuya integral valga 1; por esta razón, la función kernel suele ser la función de densidad de una variable tipificada, como por ejemplo una normal, una triangular o una uniforme.  $h$  es un real positivo que determina la amplitud de la banda de influencia de la función kernel. Es decir, si  $h$  es grande, muchos puntos intervienen en la valoración de la densidad en  $x$ ; si  $h$  es pequeño, sólo intervienen los más inmediatamente cercanos.

Acerca de los estimadores kernel puede encontrarse una extensa profundización en [SCOT92]. En este trabajo se emplean únicamente a efectos comparativos. Puesto que se determinan las variables de bloques a partir de una muestra, tal como la que se ha presentado en el apartado anterior, consideraremos que la función  $f_Z$ , o la  $f_T$ , que se derivan por cálculo analítico son unas posibles estimaciones de la densidad de  $Z = (X+Y)^2$  y  $T = XY$ , respectivamente. Por ello, hallaremos para cada caso funciones estimadas mediante kernel con las muestras  $\{(x_1 + y_1)^2, \dots, (x_n + y_n)^2\}$ , o  $\{x_1 y_1, \dots, x_n y_n\}$ .

Finalmente, indicar que la función kernel empleada en nuestro caso es:

$$k(x) = \begin{cases} 1 + \cos(2\pi x) & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

#### 6.5.4.2 ISE

Se define la integral del error cuadrático ISE (por *Integrated Squared Error*) para  $X$  [SCOT92] como:

$$\text{ISE}\{X\} = \int (\hat{f}_X - f_X)^2 dx$$

Utilizaremos esta definición como criterio de aproximación de la estimación  $\hat{f}_X$  al verdadero valor  $f_X$ . En nuestro caso, las diferentes estimaciones que trataremos son las que vienen dadas según los estimadores kernel (una familia dependiente de  $h$ ) o según las expresiones que aparecen en (6.11) y (6.20), que serán confrontadas con (6.22) y (6.24). El estimador ISE permite obtener una medida global de la discrepancia de una cierta estimación de la función de densidad; queda claro que nuestro caso es una situación anormal, puesto que  $f_X$  está plenamente determinada. Nuestro objetivo principal va a ser, de cualquier manera, establecer comparaciones entre un procedimiento usual, como es el del estimador kernel, y una aplicación derivada del uso de variables de bloques. El procedimiento sirve, de paso, para poner a prueba la utilidad de este tipo de variables.

### 6.5.5 Resultados computacionales

En esta sección se muestran y comentan los resultados obtenidos con el ejemplo que nos ocupa. Puede ser útil traer a la memoria que en el presente ejemplo hemos empleado una distribución uniforme  $X$  y una distribución triangular  $Y$  parcialmente dependientes entre sí tal como se refleja en la Fig. 6.3. Se dispone de una muestra de 100 observaciones que ha servido para realizar una caracterización de  $X$  y de  $Y$  usando variables de bloques, estimándose igualmente la FDC.

En primer lugar, consideramos las tablas 6.I y 6.II. Estas tablas contienen información relativa a pruebas realizadas con funciones de densidad estimadas siguiendo los pasos descritos en la primera parte de la sección, tras un cierto cálculo usando variables de bloques. Aparecen en la tabla 6.I el ISE de  $Z = (X + Y)^2$ , y en la tabla 6.II el ISE de  $T = XY$ , teniendo en cuenta que  $X$  e  $Y$  son variables de  $K-1$  bloques, bajo diferentes condiciones: 1) con  $K$  variando entre 4 y 9. 2) suponiendo que las variables de bloques han sido estimadas según diversos procedimientos, que han sido descritos en detalle en el capítulo 4 *Estimación de cuantiles de variables de bloques*. La estimación de la densidad conjunta de  $X$  e  $Y$  se ha obtenido con  $\alpha=0$ , el mecanismo más sencillo y más eficiente descrito en el capítulo 5 *Estimación de funciones de densidad conjunta* . . . .

Tabla 6.I. ISE $\{Z\}$  según  $K$  y el método de estimación de  $X$  e  $Y$ .

$K$	QP1	QP2	QP3	Clásico
4	0.010326	0.055298	0.011450	0.007789
5	0.009329	0.007577	0.007252	0.007191
6	0.008681	0.011507	0.008038	0.007486
7	0.012840	0.012441	0.011856	0.011095
8	0.015454	0.018280	0.014320	0.011404
9	0.017768	0.029608	0.018208	0.014632

De estas tablas se pueden hacer varias lecturas. De lo que no hemos de estar tentados es de comparar entre sí los ISE de  $Z$  y de  $T$ ; esto sería un error, ya que  $f_Z$  y  $f_T$  son bastante diferentes en magnitud, y el ISE se calcula a partir del cuadrado de la diferencia entre  $\hat{f}$  y  $f$ . Una lectura posible es, para  $Z$  o para  $T$ , y dado un método de estimación, reseguir la evolución según el valor de  $K$  (en sentido vertical); otra lectura es, para  $Z$  o

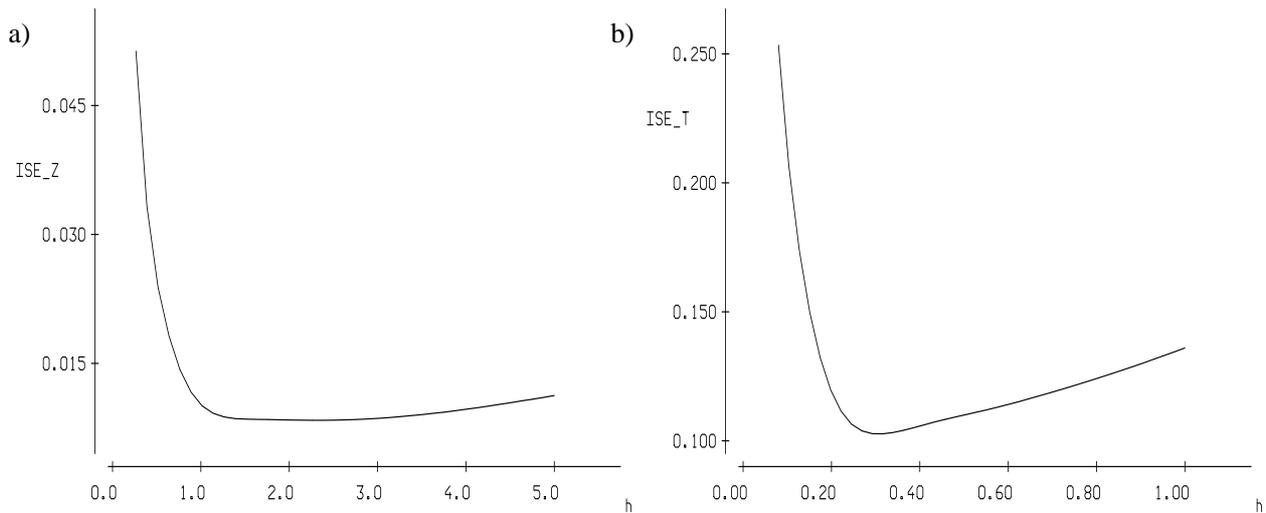
Tabla 6.II.  $ISE\{T\}$  según  $K$  y el método de estimación de  $X$  e  $Y$ .

$K$	QP1	QP2	QP3	Clásico
4	0.150773	0.193698	0.113732	0.116739
5	0.135833	0.103910	0.100276	0.105628
6	0.133079	0.124733	0.097591	0.113248
7	0.126686	0.130840	0.107795	0.108903
8	0.128280	0.153587	0.118037	0.103646
9	0.124728	0.161547	0.118701	0.114871

para  $T$ , fijado  $K$ , observar el resultado dependiendo del método de estimación (en sentido horizontal).

Leyendo horizontalmente las tablas, notaremos que los mejores resultados siempre se obtienen con los métodos clásico y QP3; en particular, el mejor  $ISE\{Z\}$  para todos los valores de  $K$  resulta del clásico. A la inversa, los peores resultados están con el método QP2, y también con el QP1.

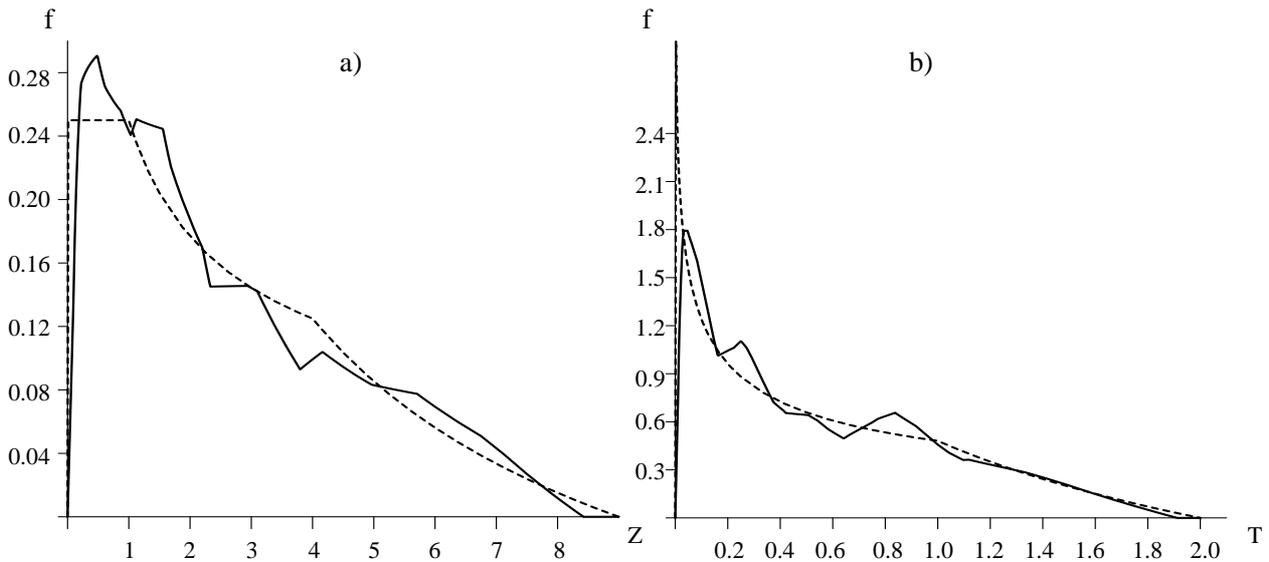
Leyendo verticalmente, se observa que los mejores resultados suelen presentarse con  $K = 5$  y  $K = 6$ ; por contra, los valores de  $K$  menos afortunados son 4 y 9.



**Figura 6.6 :** Comparación del método multiartículo con el método kernel. a)  $ISE\{Z\}$  frente  $h$  usando estimador kernel. b)  $ISE\{T\}$  frente  $h$  usando estimador kernel.

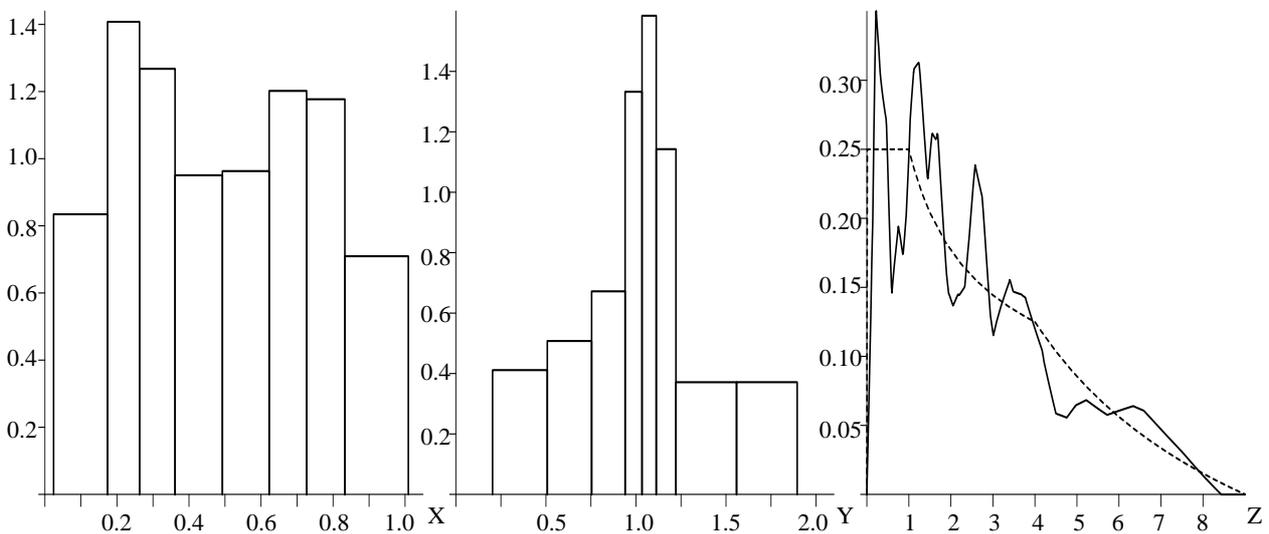
En términos absolutos, el mejor resultado obtenido para  $f_Z$  proviene del método clásico, con 5 artículos:  $ISE=0.007191$ ; análogamente, se tiene con  $f_T$  un  $ISE=0.097591$ , en la columna del método QP3, fila  $K=6$ . En la Fig. 6.6 se muestran para diversos valores de  $h$  los resultados del ISE utilizando el estimador kernel. Se puede calcular, aunque no se ha buscado una gran precisión, que el mínimo  $ISE\{Z\}$  vale 0.0083810266 para  $h$  próximo a 2.29; de la misma manera, el mínimo de  $ISE\{T\}$  vale 0.10266 para  $h$  próximo a 0.312.

En la Fig. 6.7 se representan las soluciones de  $\hat{f}_Z$  y  $\hat{f}_T$  obtenidas mediante cálculo de variables de bloques; ambas soluciones se corresponden con las que hemos destacado



**Figura 6.7 :** Comparación de resultados. a) En línea continua,  $\hat{f}_Z$ ; en línea discontinua,  $f_Z$ . b) En línea continua,  $\hat{f}_T$ ; en línea discontinua,  $f_T$ .

anteriormente como mejores resultados. También se representan las respectivas soluciones verdaderas  $f_Z$  y  $f_T$ . Para la representación gráfica de estas funciones, se han usado las expresiones (6.11), (6.20), (6.22) y (6.24) respectivamente. Respecto al caso contemplado con  $K=5$ , haremos notar que se ha obtenido una correlación  $\rho_{X,Y}$  de 0.649914, y un valor de  $E[(X + Y)^2]$  igual a 2.690712. En cuanto al caso  $K=6$ , la correlación es de 0.658182, y  $E[X \cdot Y]$  vale 0.582280. Todos estos valores pueden compararse con los valores poblacionales o con los valores muestrales bastante favorablemente.



**Figura 6.8 :** Un caso con  $K=9$  a)  $\hat{f}_X$ . b)  $\hat{f}_Y$ . c) En línea continua,  $\hat{f}_Z$ ; en línea discontinua,  $f_Z$ .

Vale la pena señalar que el hecho de aumentar el número de bloques a las variables  $X$  e  $Y$  no significa mejores resultados, más bien al contrario. La causa inmediata puede radicar

en las irregularidades de las distribuciones estimadas. Se observa que cuando interviene una cantidad relativamente grande de bloques, la función de densidad de la variable que se ha estimado presenta un aspecto notablemente “accidentado” (dependiendo del método de estimación, este efecto es más acusado o menos); puede justificarse pensando que la densidad, la altura de cada bloque, es inversamente proporcional a la amplitud del bloque. La variabilidad de la densidad queda muy afectada, aun si la variabilidad en la estimación del cuantil no es grande, pero ya apuntamos que se ha observado, empíricamente, que la variabilidad de los cuantiles aumenta con  $K$ . Hay que suponer que las distribuciones de funciones de las variables, como las que se han mostrado, serán tan o más irregulares que las originales. En nuestro caso, tenemos que  $\hat{f}_Z$  o  $\hat{f}_T$  con un valor de  $K$  alto son funciones con gran número de oscilaciones alrededor de la verdadera función de densidad, lo cual hace que el ISE aumente. La Fig. 6.8 es un ejemplo de lo que se ha dicho. Obsérvese que las distribuciones de bloques, calculadas con  $K=9$  y el método clásico, no son todo lo regulares que se podría esperar (si bien es cierto que existe una muestra por medio y, por tanto, hay factores aleatorios que introducen cierto nivel de ruido). El resultado de  $Z$  a partir de tales distribuciones se muestra a la derecha.

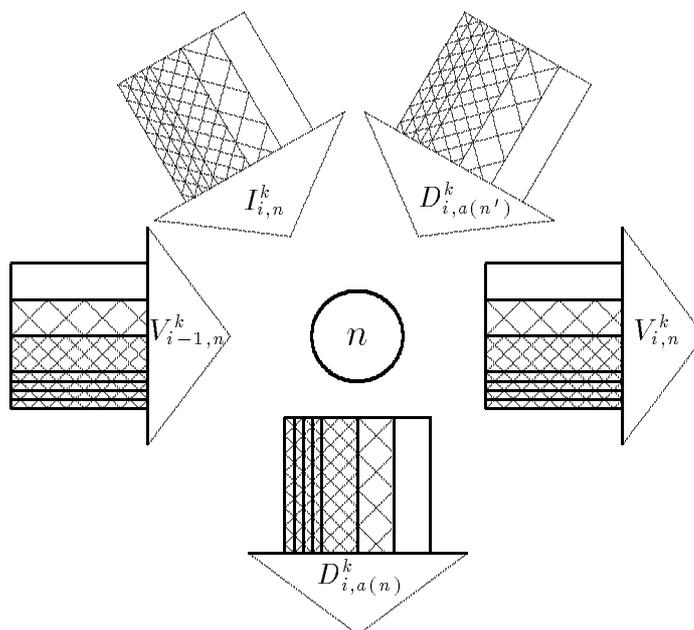


## CAPÍTULO 7

## RED MULTIARTÍCULO Y ESTOCASTICIDAD

## 7.1 Variables multiartículo en una red hidráulica

La característica principal de una red multiartículo no es que su topología sea especial, sino que cada uno de sus arcos sirve de medio por el que circulan varios objetos. El flujo de estos objetos que comparten el mismo arco es competitivo, ya que la capacidad total del arco limita al mismo tiempo a todos ellos. Por lo demás, cada artículo es independiente del resto, pues en la práctica puede pensarse en que existen  $K$  réplicas de la misma red que no se comunican entre sí, cada una de las cuales está asociada a un artículo.



**Figura 7.1 :** Arcos multiartículo incidentes en un nodo  $n$ . Los arcos más oscuros estarían asociados a  $X^0$ ; el siguiente tono a  $X^1$ , hasta el más claro que lo estaría a  $X^{K-1}$ .

Con la Fig. 7.1 se ilustra esta idea. Tenemos un cierto nodo  $n$  el cual representa a un embalse de una cuenca hidrográfica. Supongamos que se considera la red replicada, y que

tomamos el intervalo  $i$ . Este nodo recibe unas aportaciones naturales  $I_{i,n}$  y la descarga procedente de otro nodo  $n'$  situado aguas arriba,  $D_{i,a(n')}$ . Él mismo descarga aguas abajo a través de un canal  $D_{i,a(n)}$ . Por fin, a principio del intervalo, el embalse contiene un volumen  $V_{i-1,n}$ , y al final de  $V_{i,n}$ . En resumen, en este nodo, la ecuación de balance se escribe:

$$I_{i,n} + D_{i,a(n')} + V_{i-1,n} = D_{i,a(n)} + V_{i,n}$$

Con la representación multiartículo, se entiende que cada uno de estos arcos sigue una distribución de probabilidad de  $K$  bloques. Refiriéndonos a un arco genérico  $X$ , se considerarán como variables, por un lado, el valor mínimo de la distribución, es decir,  $X^0$ , y por otro las diferencias entre los cuantiles, que vendrían a ser las respectivas anchuras de cada bloque, es decir,  $X^{0k} - X^{0k-1}$ , o más abreviadamente,  $X^k$ , para  $k = 1, \dots, K-1$ . De modo que la anterior ecuación de balance es sustituida por:

$$\begin{aligned} I_{i,n}^0 + D_{i,a(n')}^0 + V_{i-1,n}^0 &= D_{i,a(n)}^0 + V_{i,n}^0 \\ I_{i,n}^1 + D_{i,a(n')}^1 + V_{i-1,n}^1 &= D_{i,a(n)}^1 + V_{i,n}^1 \\ &\dots \\ I_{i,n}^{K-1} + D_{i,a(n')}^{K-1} + V_{i-1,n}^{K-1} &= D_{i,a(n)}^{K-1} + V_{i,n}^{K-1} \end{aligned}$$

A partir de ahora utilizaremos la notación establecida, según la cual las variables que se definan como variables aleatorias de bloques tienen  $K-1$  bloques con probabilidades respectivas  $\pi_1, \dots, \pi_{K-1}$ .

### 7.1.1 Dependencia total entre las variables

Tal como se indica en el ejemplo de arriba, dado un cierto número de variables de bloques, se postula que la ecuación de balance se cumple para los cuantiles (o para las diferencias de cuantiles, que viene a ser igual). Interesa aclarar en qué condiciones se está imponiendo que la suma de variables aleatorias de bloques sigue una distribución de bloques.

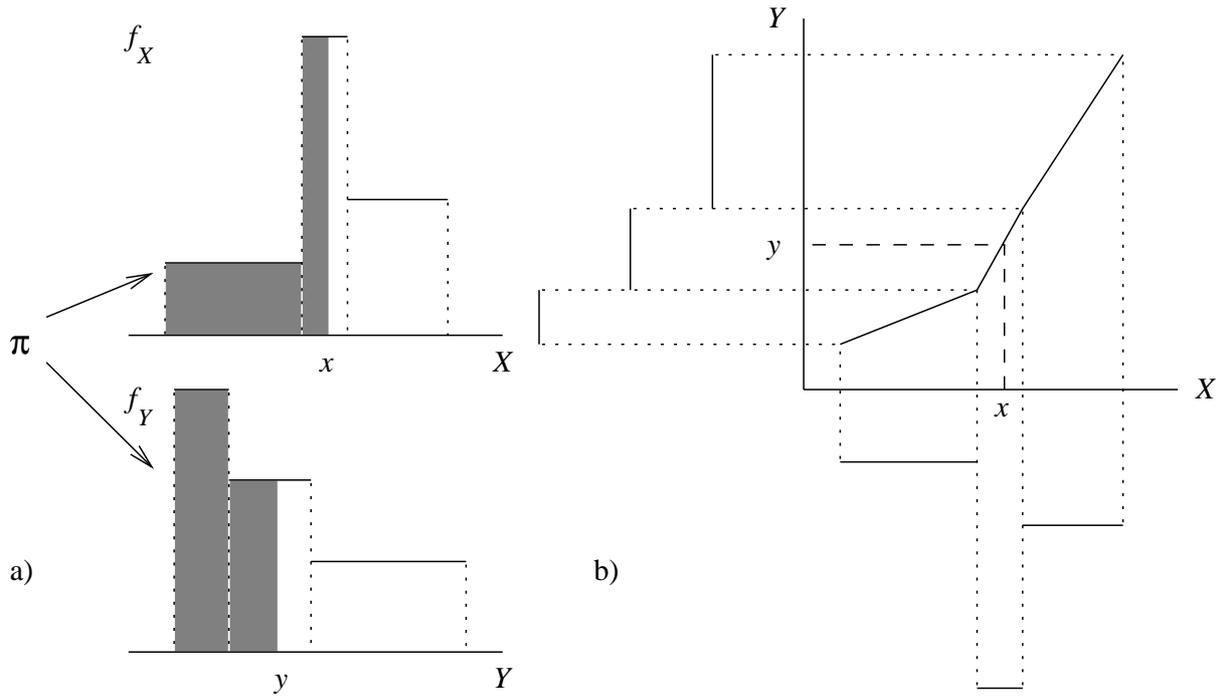
Sean  $X, Y, Z$  variables de  $K$  bloques tales que  $X + Y = Z$ . Además, se supone cierto que:

$$\begin{aligned} X^0 + Y^0 &= Z^0 \\ X^{01} + Y^{01} &= Z^{01} \\ &\dots \\ X^{0K-1} + Y^{0K-1} &= Z^{0K-1} \end{aligned}$$

Puede comprobarse que si  $X$  e  $Y$  son totalmente dependientes este enunciado resulta ser cierto. Cuando se dice que son *totalmente dependientes* nos estamos refiriendo a que ambas variables mantienen una relación funcional entre ellas, de modo que si se conoce una de ellas la otra deja de ser aleatoria y puede ser determinada con exactitud.

En el caso de variables de bloques, dicha relación viene dada por la expresión:

$$Y_{|X=x} = y = Y^{0k-1} + \frac{Y^k}{X^k}(x - X^{0k-1}), \quad X^{0k-1} \leq x \leq X^{0k}$$



**Figura 7.2 :** Dependencia total entre variables de bloques. a) la probabilidad  $\pi$  (el área oscura bajo las funciones de densidad) determina sobre las variables  $X$  e  $Y$  los valores  $x$  e  $y$  respectivamente. b) Representación de la relación funcional entre  $X$  e  $Y$ .

$Y|_{X=x}$  se lee “ $Y$  condicionado por la variable  $X$  que toma el valor de  $x$ ”. En este caso, la relación es positiva, adjetivo que se asumirá de aquí en adelante. La Fig. 7.2 ilustra acerca del concepto de dependencia total; obsérvese que la relación entre las variables es una línea quebrada.

Es sencillo comprobar que  $F_X(x) = F_Y(y)$ , para valores  $x$  e  $y$  ligados según la anterior expresión:

$$\frac{x - X^{0k-1}}{X^k} = \frac{y - Y^{0k-1}}{Y^k}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{k-1} \pi_{\kappa} + \frac{x - X^{0k-1}}{X^k} \pi_k = \sum_{\kappa=1}^{k-1} \pi_{\kappa} + \frac{y - Y^{0k-1}}{Y^k} \pi_k$$

$$P(X \leq x) = P(Y \leq y)$$

También es cierto para  $F_Z(z)$ , siendo  $z = x + y$ :

$$P(Z \leq z) = P\left(X + Y \leq x + Y^{0k-1} + \frac{Y^k}{X^k}(x - X^{0k-1})\right)$$

$$= P\left(X + Y^{0k-1} + \frac{Y^k}{X^k}(X - X^{0k-1}) \leq x + Y^{0k-1} + \frac{Y^k}{X^k}(x - X^{0k-1})\right)$$

$$= P\left(X \left(1 + \frac{Y^k}{X^k}\right) \leq x \left(1 + \frac{Y^k}{X^k}\right)\right)$$

$$= P(X \leq x)$$

### 7.1.1.1 Significado de la dependencia total entre variables

La interpretación literal de la hipótesis de dependencia entre las variables de flujo por la red hidráulica replicada representa que dicho flujo viene determinado por un único nivel de probabilidad, cuya validez se extendería a todos los arcos, desde el primer intervalo al último.

Llevado este enunciado a la práctica, es innegable que se trata de una hipótesis no realista, puesto que el factor que en este caso introduce el azar en el modelo, las aportaciones, no se comporta así. La justificación que ofrecemos parte de que la dependencia total no es más que el grado más extremo que se contempla para la relación entre variables. La dependencia puede entenderse como una medida que transcurre de modo “continuo” desde este grado máximo hasta la ausencia de relación o independencia. Cuando las variables que se van a considerar en la práctica mantienen una relación elevada, el error que esto significa puede suponerse no tiene porqué ser significativo.

En efecto, cuando la cuenca hidrográfica que se trata se ubica en una región no excesivamente extensa, es razonable defender una dependencia fuerte de las aportaciones en los distintos puntos de medición. En primer lugar, porque no se observan estas aportaciones puntualmente, sino a lo largo de un intervalo de bastante duración. Por otro lado, no se deben confundir las aportaciones con las precipitaciones: existen bastantes factores más que contribuyen a eliminar la posible singularidad de algún punto de aportación, como son las corrientes subterráneas. En consecuencia, una fuerte precipitación local tiene incidencia en un área bastante mayor que aquella en la que se registra.

En cuanto a la relación entre variables de diferentes intervalos, las expresiones anteriores ponen de manifiesto que las variables que intervienen son los volúmenes en un embalse antes y después de un mismo intervalo. Es de suponer que la localidad temporal consiguiente es un factor que incide en una fuerte dependencia entre ambas variables.

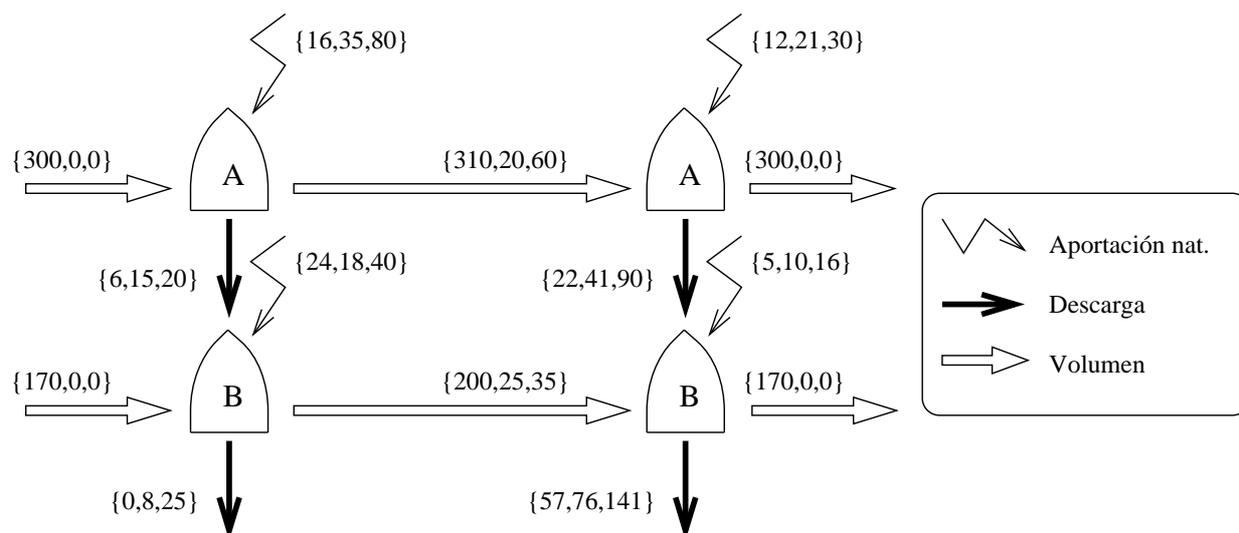
### 7.1.2 Política de flujos

Una determinada asignación de las variables de la red es factible si satisface las ecuaciones de balance en cada nodo, (2.7),(2.10). La versión multiartículo de esta restricción debe escribirse así:

$$\sum_{a \in A_n} X_{i,a}^k + V_{i-i,n}^k + I_{i,n}^k = \sum_{a \in \Omega_n} X_{i,a}^k + V_{i,n}^k \quad \begin{cases} k = 0 \dots K - 1 \\ i = 1 \dots Ni \\ n = 1 \dots Nr \end{cases} \quad (7.1)$$

Una asignación factible determinista indicaría una distribución de flujo por los arcos de la red, pero la interpretación de un flujo factible por una red indeterminista es más compleja, puesto que no se especifica un flujo determinado, sino que para cada arco se tiene una variable aleatoria. El flujo concreto por la red es dependiente de las aportaciones en cada embalse pero, conocidas éstas, la regla de la dependencia entre los arcos determina unos flujos dictados según las distribuciones de probabilidad de las variables. Por esta razón, una distribución factible para el flujo en términos de variables de bloques recibe el nombre de *política*.

El ejemplo que aparece en la Fig. 7.3 ilustra acerca de lo que supone para una red multiartículo una política. Se ha supuesto  $K=3$ , dos embalses y dos intervalos, con los



**Figura 7.3 :** Ejemplo de política de flujos.

valores impresos entre llaves de las aportaciones  $\{I^0, I^1, I^2\}$ , las descargas  $\{D^0, D^1, D^2\}$  y los volúmenes  $\{V^0, V^1, V^2\}$  para cada embalse e intervalo. También puede interpretarse la información que allí aparece en términos de cuantiles, a base de acumular los valores representados; entonces, la distribución de la descarga en A en el primer intervalo viene dada por los valores  $\{6, 21, 41\}$ , y en el segundo intervalo por  $\{22, 63, 153\}$ . Nótese así mismo que en cada nodo de la red replicada y para cada artículo se cumple la ecuación (7.1), por ejemplo, en B, segundo intervalo:

- $k = 0$ :  $200+22+5 = 170+57$
- $k = 1$ :  $25+41+10 = 0+76$
- $k = 2$ :  $35+90+16 = 0+141$

La ecuación de balance se cumple también asumiendo dependencia total para cualquier nivel de probabilidad. Por ejemplo, si las aportaciones se correspondieran al nivel 0.4 se obtendrían los siguientes valores para cada arco (asumiendo que  $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$ ):

- $I_{1,A} = 44 = 16 + 35 \cdot 0.4/\pi_1$
- $I_{1,B} = 38.4$
- $I_{2,A} = 28.8$
- $I_{2,B} = 13$
- $D_{1,A} = 18$
- $D_{1,B} = 6.4$
- $D_{2,A} = 54.8$
- $D_{2,B} = 117.8$
- $V_{1,A} = 326$
- $V_{1,B} = 220$

## 7.2 La variable de generación hidráulica

Si la expresión de la potencia eléctrica producida por un salto de agua que se dio en el capítulo 1, que a continuación se recuerda:

$$P = \rho g Q h \quad (7.2)$$

se aplica a variables aleatorias, o a funciones de variables aleatorias, la potencia en sí sigue también una distribución de probabilidad.

El caudal  $Q$  está asociado a una variable de descarga, y la altura  $h$  deriva de las variables de volumen en el embalse. Al ser la expresión (7.2) claramente no lineal, aun asumiendo que las variables que intervienen son totalmente dependientes, se obtiene que la distribución de  $P$  no es una distribución de bloques. Por ejemplo, si  $X$  es de bloques e  $Y = X^2$ , entonces:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \sum_{\kappa=1}^{k-1} \pi_{\kappa} + \frac{\sqrt{y} - X^{0k-1}}{X^k} \pi_k \implies$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy} = \frac{\pi_k}{X^k} \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad X^{0k-1} \leq \sqrt{y} \leq X^{0k}$$

Se comprueba que la función de densidad de  $Y$  no se compone de varios segmentos constantes, como es característico en las variables de bloques, sino de curvas de grado  $y^{-1/2}$ .

La metodología que sigue es la que se expone en un artículo precedente de los otros que usan el método multiartículo, [NAB88]. De él apuntaremos las siguientes ideas consideradas básicas:

- $h_n$  se denomina *salto equivalente* entre el volumen inicial y el volumen final del  $n$ -ésimo embalse en el intervalo  $i$  (por simplicidad, no haremos más esta precisión de aquí en adelante).
- $h_n$  es el salto que corresponde al centro de gravedad de la masa de agua correspondiente a los volúmenes  $V_{i-1,n}$  y  $V_{i,n}$  en el embalse  $n$ :

$$h_n \times (V_{i,n} - V_{i-1,n}) = \int_{V_{i-1,n}}^{V_{i,n}} CV_n(v) dv$$

en donde  $CV_n(v)$  es una función conocida como “Cota-Volumen” que aproxima el nivel del embalse dado el volumen  $v$  de agua embalsada. Se considera generalmente un polinomio cúbico, aunque en algunas publicaciones se llega a utilizar el cuarto grado.

- Suponiendo que la expresión de  $CV_n(\cdot)$  es:

$$CV_n(v) = c_{0,n} + c_{1,n}v + c_{2,n}v^2 + c_{3,n}v^3$$

la expresión del desnivel equivalente  $h_n$  es:

$$h_n = c_{0,n} + \frac{c_{1,n}}{2}(V_{i-1,n} + V_{i,n}) + c_{2,n} \left( \frac{(V_{i,n} - V_{i-1,n})^2}{3} + V_{i-1,n}V_{i,n} \right) + \frac{c_{3,n}}{4}(V_{i-1,n} + V_{i,n})(V_{i-1,n}^2 V_{i,n}^2) \quad (7.3)$$

- A continuación se definen unos pseudo-cuantiles  $h_n^{0k}$  utilizando la expresión (7.3) en función de los cuantiles de los volúmenes inicial y final. Los llamamos así porque aunque se pueda considerar el desnivel como una variable, no se han definido a través de su distribución de probabilidad propia. Con ello quedaría:

$$h_n^{0k} = c_{0,n} + \frac{c_{1,n}}{2}(V_{i-1,n}^{0k} + V_{i,n}^{0k}) + c_{2,n} \left( \frac{(V_{i,n}^{0k} - V_{i-1,n}^{0k})^2}{3} + V_{i-1,n}^{0k}V_{i,n}^{0k} \right) + \frac{c_{3,n}}{4}(V_{i-1,n}^{0k} + V_{i,n}^{0k})((V_{i-1,n}^{0k})^2 (V_{i,n}^{0k})^2) \quad (7.4)$$

- Obtenemos los valores correspondientes de potencia, a través de la expresión (7.2):

$$H_a^{0k} = \rho_a g Q_a^{0k} h_n^{0k} \quad (7.5)$$

La variable  $Q_a$  se refiere a caudal instantáneo que desciende por el canal de descarga  $a$  (obviamente,  $a \in \Omega(n)$ ). Es equivalente a la descarga  $D_a$  dividida por la duración del intervalo; en caso de utilizar la descarga, nuestra variable se entiende que es generación hidráulica:

$$G_a^{0k} = \rho_a g D_a^{0k} h_n^{0k} \quad (7.6)$$

- Por último, se considera que  $G_a$  es una variable aleatoria de bloques, donde sus cuantiles son  $G_a^{0k}$ ,  $k = 0 \dots K-1$ , y con las respectivas áreas por bloque  $\pi_k$ ,  $k = 1 \dots K-1$

Estimar de alguna manera el error que supone el empleo de esta aproximación frente al uso de otra expresión más precisa ha sido uno de los problemas que en esta tesis se ha afrontado. El desarrollo de posible opciones y resultados obtenidos se muestran en el capítulo 8.

### 7.3 Función objetivo en la optimización de la hidrogenación

La función  $\Psi(\cdot)$  que aparece en la función objetivo (2.9), en la introducción del capítulo 2 al problema de la optimización de la generación hidráulica, es una función de coste probable de producción dependiente de la generación  $G$ . Por ser ésta una magnitud aleatoria, lo es el coste derivado de  $G$ . Por esta razón  $\Psi(\cdot)$  se interpreta como el coste probable de producción *esperado*, bajo la asunción de que la esperanza matemática del coste es un indicador adecuado y que su minimización conduce a la determinación de una política de flujos en la red económicamente atractiva.

Una modelización adecuada para el coste probable de producción, señalada en [NAB93], es una función cuadrática convexa para la variable generación; no se considera término independiente, al ser irrelevante en el proceso de optimización. Designando como  $C$  al coste

probable de producción, podemos escribir:

$$\begin{aligned} E[C] \equiv \Psi(X, V) &= E \left[ \sum_{i=1}^{Ni} \lambda_{1,i} G_i(X, V) + \lambda_{2,i} G_i^2(X, V) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ \lambda_{1,i} \sum_{\forall a} E[G_{i,a}(X, V)] + \lambda_{2,i} E \left[ \left( \sum_{\forall a} G_{i,a}(X, V) \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.7)$$

La esperanza es un operador estadístico lineal; por esta razón, la parte cuadrática de la esperanza de  $C$  es una expresión de desarrollo complicado. Aun así, podemos escribir:

$$E \left[ \left( \sum_{\forall a} G_{i,a}(X, V) \right)^2 \right] = \sum_{\forall a} E \left[ (G_{a,i})^2 \right] + 2 \sum_{\forall a} \sum_{a' \neq a} E[G_{a,i} \cdot G_{a',i}] \quad (7.8)$$

Bajo la hipótesis de que  $G_{a,i}$  sigue una ley de probabilidad de bloques, obtenemos las siguientes expresiones:

$$E[G_{a,i}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_k (G_{a,i}^{0k} + G_{a,i}^{0k-1}) \quad (7.9).a$$

$$E \left[ (G_{a,i})^2 \right] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_k \left( (G_{a,i}^{0k})^2 + (G_{a,i}^{0k-1})^2 + G_{a,i}^{0k} G_{a,i}^{0k-1} \right) \quad (7.9).b$$

Aunque la expresión de la esperanza de productos cruzados de la generación en puntos diferentes no es trivial, ya que implica el conocimiento de la relación bivalente de  $G_{a,i}$  y  $G_{a',i}$ , aspecto que no está contemplado en la política y que no se deriva necesariamente de ella. Ya implementada en primeras versiones del método, una posibilidad que se sugiere es:

$$E[G_{a,i} \cdot G_{a',i}] = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_k \left( 2 \left( G_{a,i}^{0k-1} G_{a',i}^{0k-1} + G_{a,i}^{0k} G_{a',i}^{0k} \right) + \left( G_{a,i}^{0k-1} G_{a',i}^{0k} + G_{a,i}^{0k} G_{a',i}^{0k-1} \right) \right) \quad (7.9).c$$

Podemos ver que (7.9).c se corresponde con la suposición de dependencia total entre cualesquiera dos variables de generación del mismo intervalo. Asumiendo dependencia total en dos variables de bloques  $G_a, G_{a'}$  podríamos escribir:

$$\begin{aligned} E[G_a \cdot G_{a'}(G_a)] &= \sum_{k=1}^{K-1} \int_{G_a^{0k-1}}^{G_a^{0k}} x \left( G_{a'}^{0k-1} + \frac{G_{a'}^k}{G_a^k} (x - G_a^{0k-1}) \right) \frac{\pi_k}{G_a^k} dx \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{K-1} \pi_k \left( 3 G_a^{0k-1} G_{a'}^k + 3 G_{a'}^{0k-1} G_a^k + 6 G_a^{0k-1} G_{a'}^{0k-1} + 2 G_{a'}^k G_a^k \right) \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que (7.9).c es la misma expresión que aparece arriba, teniendo en cuenta que  $G_{a,i}^{0k} = G_{a,i}^{0k-1} + G_a^k$ .

### 7.3.1 Alternativas a la función de coste

La formulación de la función objetivo que aparece en las expresiones (7.7), (7.8) y (7.9) no es la única posibilidad que se ofrece para dotar al problema de la optimización de la generación hidráulica de una función de coste. Como una parte esencial del trabajo de esta tesis, se han investigado planteamientos alternativos con un doble fin:

- Por un lado, estudiar la desviación que las aproximaciones utilizadas han podido provocar en la estimación del valor real del coste.
- Por otro, desarrollar nuevas funciones de coste, computacionalmente competitivas con la anterior, y que supongan una mejora substancial en el tratamiento de la estocasticidad presente en la generación.

El primer punto se justifica por la necesidad de valorar el error cometido por las hipótesis empleadas al construir la función de coste descrita anteriormente; dentro de estas hipótesis incluimos también la de dependencia total, si bien de forma parcial. La aditividad de los artículos en cada nodo de la red precisa que esta hipótesis sea básica. Sin embargo, se pueden plantear formas alternativas de dependencia entre las variables que intervienen en la expresión de la generación (volumen inicial, volumen final y descarga) que den lugar a diferentes maneras de evaluar la esperanza de  $C$ . De esta manera se generan expresiones que sustituyen a las que figuran en (7.9), manteniendo el esquema general de (7.7) y (7.8). La explicación relativa a estas diferentes formulaciones de la función objetivo aparece en el capítulo 8; la pretensión de ser una referencia para la formulación inicial se justifica mediante un desarrollo estricto de las expresiones relativas a la esperanza de  $G$  y  $G^2$ .

Con el segundo punto, el objetivo es la obtención de una nueva formulación para la función objetivo. Una expresión de la curva de coste probable de producción que tiene un solo grado de libertad, como la anterior, resulta limitada, puesto que la generación hidráulica es una variable aleatoria, y debe aplicarse sobre la anterior curva considerando sólo la generación esperada. Por consiguiente, parece oportuno dejar de lado el esquema dado por (7.7) y probar nuevas opciones, manteniendo en lo posible la eficiencia computacional en la evaluación del coste y sus derivadas, un aspecto que las funciones más “estrictas” del punto anterior no mantienen entre sus objetivos primordiales. Acerca de los resultados obtenidos en esta dirección, el capítulo 12 está dedicado a mostrar los principios del método y los resultados que se han derivado.



## CAPÍTULO 8

# MODELOS ALTERNATIVOS PARA LA GENERACIÓN ESPERADA

### 8.1 Motivación

El propósito del capítulo 8 es presentar diferentes opciones para la evaluación de las expresiones  $E[G]$ ,  $E[G^2]$ ,  $E[G_i G_j]$  que aparecieron en el capítulo 7 interviniendo en la función objetivo del problema de optimización de la hidrogenación.

La presentación de estas alternativas se justifica por la necesidad de llevar adelante algún tipo de validación del modelo descrito anteriormente, aunque sin salirse del entorno multiartículo, el marco general de este trabajo. En particular, y como se ha señalado previamente, se han utilizado determinadas asunciones con el propósito de simplificar el tratamiento del problema; la que da lugar al análisis que sigue es la que establece que la generación hidráulica posee unos cuantiles que se derivan de los respectivos cuantiles de la descarga y del volumen  $y$ , por ende, la distribución de la generación también es de bloques. Es sumamente interesante, por tanto, una comprobación de la sensibilidad del modelo; qué ocurre si la hipótesis anterior no se relaja y no se hacen supuestos acerca de la distribución de  $G$ . En realidad, el enfoque *exacto* del problema (obtener la *auténtica* distribución de probabilidad de la hidrogenación) no es posible sin utilizar nuevas hipótesis y, por esta razón, el capítulo se dedica a exponer diferentes escenarios y resolver el interrogante según el planteamiento adoptado.

Una consecuencia que se abre en este punto es la necesidad de disponer de instrumentos que permitan validar una política concreta, o bien comparar dos soluciones de distinta procedencia. Este tema resulta ser bastante complejo, pero nace en el momento en que se necesita realizar la comparación entre los resultados de dos métodos diferentes, como puedan ser el original y una variante. El camino elegido es la ejecución de un número generalmente elevado de simulaciones de la generación hidráulica, intentando reproducir con la máxima verosimilitud los factores externos que actúan sobre la red. El procedimiento se describirá en el capítulo 9 en el que además se incluirán resultados derivados de la materia que se desarrolla en este capítulo.

En general, la simulación de una política en un entorno realista está envuelta de dificultades añadidas, que hacen que los resultados que se obtienen no tengan la fiabilidad deseada. El origen mismo de estas dificultades podemos localizarlo en la interpretación que se hace de la política. Sin embargo, la simulación de soluciones tiene gran importancia,

puesto que debe basarse en procedimientos prácticos que, partiendo de la política obtenida —expresada como distribuciones de bloques de los flujos por los arcos de la red—, generan las directrices que debieren guiar la administración del agua en los embalses de la cuenca. De esta manera se puede comprobar por vía empírica la precisión de la función objetivo calculando el valor esperado de la generación hidráulica.

## 8.2 Supuestos considerados

### 8.2.1 La generación como variable aleatoria

A lo largo de este capítulo vamos a desviarnos ligeramente de la notación utilizada a lo largo del trabajo con el fin de conseguir una escritura más aligerada de símbolos. Con este fin, usaremos:

- o para designar la hidrogenación obtenida en determinado arco de algún embalse en cierto intervalo, el símbolo  $G$  (sin indicación adicional).  $G$  no sigue una distribución de bloques.
- o en el caso del producto de generación en dos arcos de descarga, no se utilizará la notación del subíndice  $i$  o  $j$ , para evitar confusión ya que estos símbolos, en este capítulo, tienen destinado otro uso. En su lugar, escribiremos  $E[G_1 G_2]$ , entendiéndose que de esta manera no hay pérdida de generalidad.
- o para designar la descarga por el mencionado arco,  $d$ , sin más indicación, excepto para especificar un cuantil determinado:  $d^0, d^{0.1}$ , etc.
- o de la misma manera,  $v$  significará el volumen del embalse al inicio del intervalo, y  $V$  el volumen final (en vez de  $V_{i-1}$  y  $V_i$  respectivamente).
- o la función cota-volumen se expresará como:

$$CV(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

- o por último, se desestima la presencia de las constantes que intervienen en la expresión de la generación, es decir,  $\rho$  y  $g$ . Por ello, asumiremos que  $G$  es igual a:

$$G = h(v, V)d$$

donde  $h(\cdot)$  es la expresión del desnivel equivalente, que ya aparecía en (7.3).

$d, v$  y  $V$  son variables de  $K - 1$  bloques con probabilidades  $\pi_1, \dots, \pi_{K-1}$ . Pueden ser, por poner un ejemplo clarificador, algunas de las variables que intervienen en un problema de optimización de la hidrogenación. Según (7.7), el interés reside en calcular el coste esperado (la reducción del coste derivado del ahorro por uso de generación hidráulica, más precisamente), expresión que se reduce a evaluar la esperanza de  $G$  y  $G^2$ , además de la esperanza de los productos cruzados de generaciones en diversos puntos.

En este preciso punto es donde se introduce una variante. El enfoque original contempla  $G$  como una variable de bloques, tal como ya se ha mencionado. Sin embargo, el cálculo de la esperanza de una variable de la que no se conoce su distribución sino su relación funcional con otras variables, éstas sí conocidas, viene dado por la siguiente

integral múltiple:

$$E[\mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)] = \int \dots \int \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

donde  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias,  $\mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$  es una función de ellas y  $f_{X_1, \dots, X_n}$  denota la función conjunta de densidad entre las variables. En nuestro caso sabemos que  $\mathcal{F}(\cdot)$  se corresponde con:

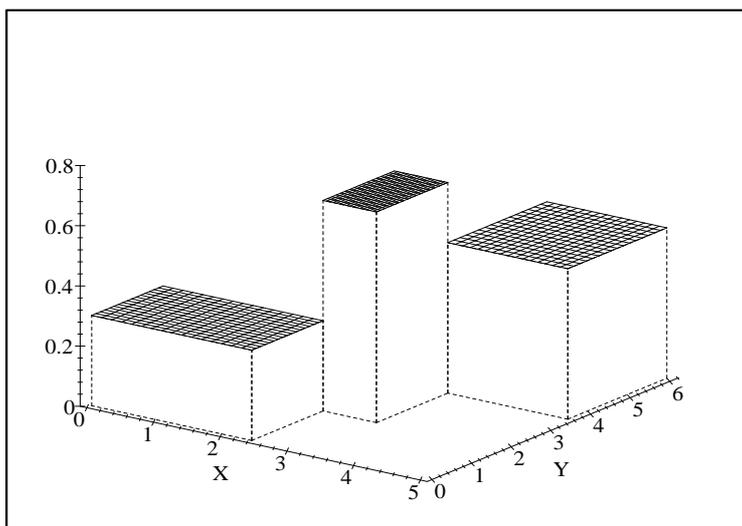
$$G = \left[ c_0 + \frac{c_1}{2}(v + V) + \frac{c_2}{3}(V - v)^2 + c_2 v V + \frac{c_3}{4}(v^2 + V^2)(v + V) \right] d, \quad (8.1)$$

pero, puesto que el modelo multiartículo no incluye información acerca de las relaciones entre las variables, no se puede derivar el valor exacto de una expresión relativa a la esperanza de la generación. En realidad, la hipótesis del modelo establece que la dependencia entre todas las variables es de dependencia total, ya que esto favorece la aditividad de los artículos en cada nodo de la red. Sin embargo, existe la duda razonable de que esto sea tal como se postula; en este caso, hay lugar para considerar diferentes grados de dependencia entre las variables, cada uno de los cuales se traduce, en suma, en distintas maneras de evaluar  $E[G]$  y  $E[G^2]$ .

Hay que decir en este punto que el caso de  $E[G_1 G_2]$ , el producto de la generación en dos arcos diferentes pero en el mismo intervalo, supondría realizar hipótesis acerca de las relaciones entre seis variables (tres de “1” y tres de “2”), lo cual ha sido dejado fuera de este estudio. Sin embargo, se ofrecerá más tarde una solución para abordar el cálculo de este término.

En consecuencia, se incluye a continuación un desarrollo detallado que se refiere a tres posibles asunciones relativas a la dependencia entre las variables  $v$ ,  $V$  y  $d$ :

- independencia
- dependencia diagonal
- dependencia total entre  $v$  y  $V$ ; dependencia diagonal entre  $d$  y los volúmenes



**Figura 8.1 :** Función de densidad conjunta de  $X$  e  $Y$ .  $X$  e  $Y$  son variables diagonalmente dependientes.

Independencia significa que  $f_{d,v,V}(\cdot) = f_d(\cdot)f_v(\cdot)f_V(\cdot)$ . Dependencia diagonal supone que la función de densidad conjunta está formada por bloques con densidad  $r^{i,j}$  nula cuando  $i \neq j$ . Si se consideran tres variables, la idea es similar:  $f_{d,v,V}(\cdot)$  está formada por hiperbloques de altura  $r^{i,j,k}$  diferentes de cero solamente si  $i = j = k$ . Podemos dar una idea con la representación de la función de densidad de dos variables, que aparece en la Fig. 8.1.

### 8.2.2 Independencia entre las tres variables

En este caso, la hipótesis de independencia abarca no sólo a las variables globalmente (lo que se denota como  $f_{d,v,V}(\cdot) = f_d(\cdot)f_v(\cdot)f_V(\cdot)$ ), sino que además son mutuamente independientes, es decir, se cumple —no se deriva de lo anterior— que  $f_{d,v}(\cdot) = f_d(\cdot)f_v(\cdot)$ ,  $f_{d,V}(\cdot) = f_d(\cdot)f_V(\cdot)$  y  $f_{v,V}(\cdot) = f_v(\cdot)f_V(\cdot)$ .

Existe una importante propiedad de las variables aleatorias independientes que servirá de base para el desarrollo de esta sección. Dice así:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

De aquí que nos interese expresar (8.1) de la manera apropiada para extraer provecho de esta propiedad. Expandiendo los productos que aparecen, obtenemos:

$$G = \left( c_0 + \frac{c_1}{2}(v + V) + \frac{c_2}{3}(v^2 + 2vV + V^2) + \frac{c_3}{4}(v^3 + v^2V + vV^2 + V^3) \right) d \quad (8.2)$$

Tomando esperanzas en (8.2):

$$E[G] = \left( c_0 + \frac{c_1}{2}(E[v] + E[V]) + \frac{c_2}{3}(E[v^2] + E[v]E[V] + E[V^2]) + \frac{c_3}{4}(E[v^3] + E[v^2]E[V] + E[v]E[V^2] + E[V^3]) \right) E[d] \quad (8.3)$$

lo cual no es una expresión muy complicada: como vemos, el operador esperanza sólo se aplica a potencias de una variable, lo que conocemos con el nombre de *momentos*. Como se indica en la expresión (3.6), el momento de orden  $n$  de una variable  $X$  es igual a:

$$E[X^n] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i \left( (X^{0i-1})^n + (X^{0i-1})^{n-1} X^{0i} + \dots + X^{0i-1} (X^{0i})^{n-1} + (X^{0i})^n \right)$$

Veremos que la misma técnica sirve para calcular la esperanza de  $G^2$ . Para ello, hay

que elevar al cuadrado (8.2) y agrupar el resultado según los términos  $v$  y  $V$ :

$$\begin{aligned}
G^2 = & \left( c_0^2 + c_0 c_1 v + \frac{c_1^2 v^2}{4} + \frac{2c_0 c_2 v^2}{3} + \frac{c_0 c_3 v^3}{2} + \frac{c_1 c_2 v^3}{3} + \frac{c_3 c_1 v^4}{4} + \frac{c_2^2 v^4}{9} + \frac{c_3 c_2 v^5}{6} + \right. \\
& \frac{c_3^2 v^6}{16} + c_0 c_1 V + \frac{c_1^2 v V}{2} + \frac{2c_0 c_2 v V}{3} + \frac{c_0 c_3 v^2 V}{2} + \frac{2c_1 c_2 v^2 V}{3} + \frac{c_3 c_1 v^3 V}{2} + \frac{2c_2^2 v^3 V}{9} + \\
& \frac{c_3 c_2 v^4 V}{3} + \frac{c_3^2 v^5 V}{8} + \frac{c_1^2 V^2}{4} + \frac{2c_0 c_2 V^2}{3} + \frac{c_0 c_3 v V^2}{2} + \frac{2c_1 c_2 v V^2}{3} + \frac{c_3 c_1 v^2 V^2}{2} + \\
& \frac{c_2^2 v^2 V^2}{3} + \frac{c_3 c_2 v^3 V^2}{2} + \frac{3c_3^2 v^4 V^2}{16} + \frac{c_0 c_3 V^3}{2} + \frac{c_1 c_2 V^3}{3} + \frac{c_3 c_1 v V^3}{2} + \\
& \frac{2c_2^2 v V^3}{9} + \frac{c_3 c_2 v^2 V^3}{2} + \frac{c_3^2 v^3 V^3}{4} + \frac{c_3 c_1 V^4}{4} + \frac{c_2^2 V^4}{9} + \frac{c_3 c_2 v V^4}{3} + \\
& \left. \frac{3c_3^2 v^2 V^4}{16} + \frac{c_3 c_2 V^5}{6} + \frac{c_3^2 v V^5}{8} + \frac{c_3^2 V^6}{16} \right) d^2
\end{aligned} \tag{8.4}$$

A partir de (8.4), es inmediato encontrar la expresión de  $E[G^2]$ .

### 8.2.2.1 Derivación de los momentos

Puesto que este cálculo está destinado a ser utilizado en la evaluación del coste esperado de cierta política, como parte de una función objetivo que debe ser minimizada, es fundamental obtener la expresión exacta de las derivadas de  $E[G]$  y  $E[G^2]$  respecto las variables del problema, con el fin de acelerar la convergencia del proceso iterativo de optimización.

A continuación se expone cuáles son estas expresiones aunque, debido a la relativa complejidad de las soluciones que aparecen en (8.2) y (8.4), sólo se dará detalle en términos generales.

Debemos distinguir para una variable aleatoria  $X$ , sea  $d$ ,  $v$  o  $V$ , dos tipos de variables:  $X^0$  por un lado y  $X^j$  por otro, donde  $j = 1..K - 1$ . Puesto que las variables aleatorias no se mezclan dentro del mismo operador, la principal dificultad está en derivar (3.6) respecto las variables ( $X^0$  y  $X^j$ ). Las expresiones resultantes son:

$$\frac{\partial E[X^n]}{\partial X^0} = \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i \left[ \sum_{l=0}^{n-1} (X^{0i-1})^l (X^{0i})^{n-l-1} \right] \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial E[X^n]}{\partial X^j} = \sum_{i=j+1}^{K-1} \pi_i \left[ \sum_{l=0}^{n-1} (X^{0i-1})^l (X^{0i})^{n-l-1} \right] + \frac{\pi_j}{n+1} \sum_{l=0}^{n-1} [(n-l)(X^{0j-1})^l (X^{0j})^{n-l-1}] \tag{8.6}$$

Como se ve, la implementación de (8.5) y (8.6) es bastante simple y puede ganarse eficiencia manteniendo una estructura con todas las potencias necesarias de cada cuantil. Sin embargo, es evidente que en este caso, ni la sencillez de programación ni la eficiencia total están entre sus cualidades.

### 8.2.3 Dependencia diagonal entre las tres variables

Cuando consideramos la función de densidad conjunta de bloques:

$$f_{d,v,V}(d, v, V) = r^{i,j,k} \begin{cases} d^{0i-1} \leq d \leq d^{0i} \\ v^{0j-1} \leq v \leq v^{0j} \\ V^{0k-1} \leq V \leq V^{0k} \end{cases}$$

diremos que  $f_{d,v,V}$  es *diagonal* si los únicos valores  $r^{i,j,k}$  diferentes de cero son  $r^{1,1,1}, \dots, r^{K-1,K-1,K-1}$ . En esta situación, está claro que las variables no son independientes; este tipo de dependencia se designará como *dependencia diagonal*.

En consecuencia, vemos que  $r^{i,i,i}$  es igual a  $\pi_i / (d^i v^i V^i)$  (podemos pensar en ello como un hiperbloque de volumen  $\pi_i$ , “base”  $d^i v^i V^i$  y “altura”  $r^{i,i,i}$ ).

Asumiendo dependencia diagonal, se cumple que:

$$P(d^{0i-1} \leq d \leq d^{0i} \cap v^{0i-1} \leq v \leq v^{0i} \cap V^{0i-1} \leq V \leq V^{0i}) = \pi_i, \quad i = 1 \dots K - 1$$

pero también:

$$\begin{aligned} P(d^{0i-1} \leq d \leq d^{0i} \cap v^{0i-1} \leq v \leq v^{0i}) &= \\ P(v^{0i-1} \leq v \leq v^{0i} \cap V^{0i-1} \leq V \leq V^{0i}) &= \\ P(d^{0i-1} \leq d \leq d^{0i} \cap V^{0i-1} \leq V \leq V^{0i}) &= \pi_i, \quad i = 1 \dots K - 1 \end{aligned}$$

Para proceder con el cálculo que nos llevará a una expresión de la generación esperada, debemos expandir (8.2) en forma de sumas de productos de las variables  $v$ ,  $V$  y  $d$ , obteniendo:

$$G = c_0 d + \frac{c_1}{2}(vd + Vd) + \frac{c_2}{3}(v^2 d + 2vVd + V^2 d) + \frac{c_3}{4}(v^3 d + v^2 Vd + vV^2 d + V^3 d) \quad (8.7)$$

Como, en general, no podemos decir que  $E[XY] = E[X]E[Y]$  en este supuesto, tomando esperanzas derivamos la siguiente expresión, que no puede ser simplificada utilizando propiedades estadísticas:

$$\begin{aligned} E[G] = c_0 E[d] + \frac{c_1}{2}(E[vd] + E[Vd]) + \frac{c_2}{3}(E[v^2 d] + E[vVd] + E[V^2 d]) + \\ \frac{c_3}{4}(E[v^3 d] + E[v^2 Vd] + E[vV^2 d] + E[V^3 d]) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Por tanto, es obligado calcular cada esperanza por medio de su definición. Si se observa (8.8), se pone de manifiesto que las variables se hallan combinadas como productos de  $d$  con potencias de  $v$  y  $V$ . Esto significa que el cálculo que deberá hacerse es:

$$E[v^l V^m d] = \int \int \int \mathbf{v}^l \mathbf{V}^m \mathbf{d} f_{v,V,d}(\mathbf{v}, \mathbf{V}, \mathbf{d}) d\mathbf{v} d\mathbf{V} d\mathbf{d} \quad (8.9)$$

Hay que señalar que las variables de integración se han escrito en negrita, tal como  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{d}$ , con el fin de distinguirlas de las variables aleatorias (que tienen el mismo nombre). Los valores de  $l$  y  $m$  puede verse que van de 0 a 3, aunque nunca en una combinación cuya

suma supere a 3. Teniendo en cuenta la estructura diagonal de la función de densidad conjunta, se sigue que (8.9) puede descomponerse en  $K - 1$  sumas de integrales:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v^l V^m d] &= \sum_{i=1}^{K-1} \int_{v^{0i-1}}^{v^{0i}} \int_{V^{0i-1}}^{V^{0i}} \int_{d^{0i-1}}^{d^{0i}} \mathbf{v}^l \mathbf{V}^m \mathbf{d} f_{v,V,d}(\mathbf{v}, \mathbf{V}, \mathbf{d}) d\mathbf{v} d\mathbf{V} d\mathbf{d} = \\ &= \sum_{i=1}^{K-1} \int_{v^{0i-1}}^{v^{0i}} \int_{V^{0i-1}}^{V^{0i}} \int_{d^{0i-1}}^{d^{0i}} \mathbf{v}^l \mathbf{V}^m \mathbf{d} \frac{\pi_i}{v^i V^i d^i} d\mathbf{v} d\mathbf{V} d\mathbf{d} \end{aligned}$$

donde hemos empleado la notación abreviada de  $v^i$  por  $v^{0i} - v^{0i-1}$ , y de la misma manera para el resto de variables. La solución de esta integral no es excesivamente compleja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v^l V^m d] &= \\ &= \frac{1}{2(l+1)(m+1)} \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i}{v^i V^i d^i} ((v^{0i})^{l+1} - (v^{0i-1})^{l+1}) ((V^{0i})^{m+1} - (V^{0i-1})^{m+1}) \times \\ &\quad ((d^{0i})^2 - (d^{0i-1})^2) = \\ &= \frac{1}{2(l+1)(m+1)} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i (d^{0i} + d^{0i-1}) \left( \sum_{j=0}^l (v^{0i})^j (v^{0i-1})^{l-j} \right) \left( \sum_{j=0}^m (V^{0i})^j (V^{0i-1})^{m-j} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Si seguimos el mismo procedimiento,  $G^2$  se expresaría como suma de productos de  $v$ ,  $V$  y  $d$  (en este caso, el factor descarga aparecerá al cuadrado, igual que  $G$ ); por tanto,  $\mathbb{E}[G^2]$  resultaría de una combinación de términos evaluando  $\mathbb{E}[v^l V^m d^2]$ , que resulta ser muy similar al resultado anterior:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v^l V^m d^2] &= \frac{1}{3(l+1)(m+1)} \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i ((d^{0i})^2 + d^{0i} d^{0i-1} + (d^{0i-1})^2) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{j=0}^l (v^{0i})^j (v^{0i-1})^{l-j} \right) \left( \sum_{j=0}^m (V^{0i})^j (V^{0i-1})^{m-j} \right) \end{aligned} \quad (8.11)$$

donde  $l$  y  $m$  pueden tomar valores hasta 6 (y más precisamente, cualquier combinación tal que  $l + m \leq 6$ ).

A modo de conclusión del caso que nos ocupa, es interesante resaltar que  $\mathbb{E}[G]$  y  $\mathbb{E}[G^2]$  comparten una estructura similar del tipo:

$$\sum_{i=1}^{K-1} \pi_i \Phi(c, v^{0i}, v^{0i-1}, V^{0i}, V^{0i-1}, d^{0i}, d^{0i-1})$$

donde  $\Phi(\cdot)$  es una función (obviamente, una específica para cada caso). La estructura a la que se alude se compone de una suma de  $K - 1$  términos, compuesto cada uno de ellos por valores que proceden del cuantil presente y del precedente. La anterior expresión se entiende como una consecuencia de la hipótesis de dependencia diagonal, que permite efectuar una separación efectiva entre bloques, aunque no es particular de este caso sino

que también puede encontrarse en otros. Basándose en esta propiedad se ha construido un procedimiento gracias al cual se crea el código que implementa robusta y eficazmente estas expresiones, y que también es útil para encontrar las derivadas. Este método se describe más adelante, dentro de este mismo capítulo.

#### 8.2.4 Dependencia total entre $v$ y $V$ , y diagonal con $d$

Dependencia total entre  $v$  y  $V$ , tal como se explicó en el capítulo 7, significa en la práctica que una de las variables desaparece, ya que no se considera aleatoria si la otra está interviniendo en el problema y es conocida. Mediante una relación funcional dada, que en el caso de las variables de bloques es:

$$v = v^{0i-1} + \frac{v^i}{V^i}(V - V^{0i-1}), \quad V^{0i-1} \leq V \leq V^{0i} \quad (8.12)$$

la variable  $v$  queda absolutamente representada por la variable  $V$ . Por otro lado, se supone que  $V$  y  $d$  tienen una función de densidad conjunta de estructura diagonal. En el resto de esta sección, éste va a ser el tratamiento adoptado para las variables.

En primer lugar, se observa que el desnivel equivalente  $h$  es ahora una expresión que sólo depende de  $V$ . Podemos escribirlo como  $r_0 + r_1V + r_2V^2 + r_3V^3$ , para  $V^{0i-1} \leq V \leq V^{0i}$ , siendo los coeficientes  $r_j$ :

$$\begin{aligned} r_0 &= c_0 + c_1v^{0i-1} + c_2(v^{0i-1})^2 + c_3(v^{0i-1})^3 - \frac{c_3(V^{0i-1})^3(v^i)^3}{(V^i)^3} + \frac{c_2(V^{0i-1})^2(v^i)^2}{(V^i)^2} + \\ &\quad \frac{3c_3v^{0i-1}(V^{0i-1})^2(v^i)^2}{(V^i)^2} - \frac{c_1V^{0i-1}v^i}{V^i} - \frac{2c_2v^{0i-1}V^{0i-1}v^i}{V^i} - \frac{3c_3(v^{0i-1})^2V^{0i-1}v^i}{V^i} \\ r_1 &= c_1 + c_2v^{0i-1} + c_3(v^{0i-1})^2 + \frac{3c_3(V^{0i-1})^2(v^i)^3}{(V^i)^3} - \frac{2c_2V^{0i-1}(v^i)^2}{(V^i)^2} - \\ &\quad \frac{6c_3v^{0i-1}V^{0i-1}(v^i)^2}{(V^i)^2} + \frac{c_3(V^{0i-1})^2(v^i)^2}{(V^i)^2} + \frac{c_1v^i}{V^i} + \frac{2c_2v^{0i-1}v^i}{V^i} + \\ &\quad \frac{3c_3(v^{0i-1})^2v^i}{V^i} - \frac{c_2V^{0i-1}v^i}{V^i} - \frac{2c_3v^{0i-1}V^{0i-1}v^i}{V^i} \\ r_2 &= c_2 + c_3v^{0i-1} - \frac{3c_3V^{0i-1}(v^i)^3}{(V^i)^3} + \frac{c_2(v^i)^2}{V^i} + \frac{3c_3v^{0i-1}(v^i)^2}{(V^i)^2} - \\ &\quad \frac{2c_3V^{0i-1}(v^i)^2}{(V^i)^2} + \frac{c_2v^i}{V^i} + \frac{2c_3v^{0i-1}v^i}{V^i} - \frac{c_3V^{0i-1}v^i}{V^i} \\ r_3 &= c_3 + \frac{c_3(v^i)^3}{(V^i)^3} + \frac{c_3(v^i)^2}{(V^i)^2} + \frac{c_3v^i}{V^i} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Se puede observar que la subexpresión  $v^i/V^i$  aparece frecuentemente en (8.13), lo cual podría llegar a ser un serio problema al desarrollar una expresión para  $E[G]$ , a causa del riesgo de que cualquiera de las variables  $V^i$  tomase un valor cero. Sin embargo, es posible demostrar que en esta operación no puede haber cancelación de un denominador cuando

se opera con:

$$E[G] = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i}{d^i V^i} \int_{d^{0i-1}}^{d^{0i}} \int_{V^{0i-1}}^{V^{0i}} (r_0 + r_1 \mathbf{V} + r_2 \mathbf{V}^2 + r_3 \mathbf{V}^3) \mathbf{d} d \mathbf{V} d \mathbf{d} \quad (8.14)$$

Como se verá a continuación, aunque la esperanza de  $G$  no se simplifica sustancialmente, lo hace lo suficiente como para que desaparezcan todas las subexpresiones  $v^i/V^i$ .

Se observa que (8.14) se descompone en  $K - 1$  grupos que se suman, consecuencia de la relación diagonal entre las variables  $V$  y  $d$ , y que cada integral está afectada de un coeficiente  $\frac{\pi_i}{d^i V^i}$ , que es el valor de  $f_{d,V}(\cdot)$  en cada bloque.

Haciendo notar que, dentro de cada intervalo  $[V^{0i-1}, V^{0i}]$ , los coeficientes  $r_j$ ,  $j = 0 \dots 3$  no dependen de  $V$ , lo que sigue es equivalente a (8.14):

$$E[G] = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i}{d^i V^i} \sum_{j=0}^3 r_j \int_{d^{0i-1}}^{d^{0i}} \int_{V^{0i-1}}^{V^{0i}} \mathbf{V}^j \mathbf{d} d \mathbf{V} d \mathbf{d}$$

Ahora podemos agrupar respecto los coeficientes  $c_x$ ,  $x = 0 \dots 3$ , y definimos para cada uno:

$$c_0 \leftrightarrow \rho_{0,i} = 1$$

$$c_1 \leftrightarrow \rho_{1,i} = v^{0i-1} + V^{0i-1} + \frac{v^i + V^i}{2}$$

$$c_2 \leftrightarrow \rho_{2,i} = (v^{0i-1})^2 + v^{0i-1} V^{0i-1} + (V^{0i-1})^2 + v^{0i-1} v^i + \frac{V^{0i-1} v^i}{2} + \frac{(v^i)^2}{3} + \frac{v^{0i-1} V^i}{2} + V^{0i-1} V^i + \frac{v^i V^i}{3} + \frac{(V^i)^2}{3}$$

$$c_3 \leftrightarrow \rho_{3,i} = \frac{(V^i)^3}{4} + v^{0i-1} \left[ (V^{0i-1})^2 + v^{0i-1} \left( v^{0i-1} + V^{0i-1} + \frac{3v^i}{2} + \frac{V^i}{2} \right) + v^i \left( V^{0i-1} + v^i + \frac{2V^i}{3} \right) + \left( V^{0i-1} + \frac{V^i}{3} \right) V^i \right] + V^{0i-1} \left[ (V^i)^2 + V^{0i-1} \left( V^{0i-1} + \frac{3V^i}{2} \right) \right] + v^i \left[ V^{0i-1} \left( \frac{V^{0i-1}}{2} + \frac{2V^i}{3} \right) + \frac{(V^i)^2}{4} + v^i \left( \frac{V^{0i-1}}{3} + \frac{v^i + V^i}{4} \right) \right]$$

Finalmente, se tiene la esperanza de la generación mediante:

$$E[G] = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i (d^{0i-1} + d^{0i})}{2} \times \left[ c_0 \rho_{0,i} + \frac{c_1}{2} \rho_{1,i} + \frac{c_2}{3} \rho_{2,i} + \frac{c_3}{4} \rho_{3,i} \right] \quad (8.15)$$

De una manera similar, se podría hallar  $E[G^2]$ , resolviendo y simplificando a partir

de la expresión:

$$E[G^2] = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi_i}{d^i V^i} \int_{d^{0i-1}}^{d^{0i}} \int_{V^{0i-1}}^{V^{0i}} (r_0 + r_1 \mathbf{V} + r_2 \mathbf{V}^2 + r_3 \mathbf{V}^3)^2 \mathbf{d}^2 d\mathbf{V} dd$$

pero, teniendo en cuenta el enorme tamaño del resultado, es preferible no mostrar completamente éste:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K-1} \left\{ \frac{\pi_i}{210} (210(c_0)^2 + 420c_0c_1v^{0i-1} + 210(c_1)^2(v^{0i-1})^2 + 420c_0c_2(v^{0i-1})^2 + 420c_1c_2(v^{0i-1})^3 + \right. \\ 420c_0c_3(v^{0i-1})^3 + 210(c_2)^2(v^{0i-1})^4 + 420c_1c_3(v^{0i-1})^4 + 420c_2c_3(v^{0i-1})^5 + \\ 210(c_3)^2(v^{0i-1})^6 + 420c_0c_1V^{0i-1} + 420(c_1)^2v^{0i-1}V^{0i-1} + 420c_0c_2v^{0i-1}V^{0i-1} + \\ \dots \\ 140c_2c_3v^i(V^i)^4 + 210(c_3)^2v^{0i-1}v^i(V^i)^4 + 350(c_3)^2V^{0i-1}v^i(V^i)^4 + \\ 90(c_3)^2(v^i)^2(V^i)^4 + 70c_2c_3(V^i)^5 + 70(c_3)^2v^{0i-1}(V^i)^5 + \\ \left. 210(c_3)^2V^{0i-1}(V^i)^5 + 60(c_3)^2v^i(V^i)^5 + 30(c_3)^2(V^i)^6 \right\} ((d^{0i})^2 + d^{0i}d^{0i-1} + (d^{0i-1})^2) \end{aligned}$$

lo cual es sólo un 6% de la expresión completa.

### 8.3 Implementación de grandes expresiones y derivadas

De no ser por la ayuda de los ordenadores, la obtención de fórmulas tales como las que han precedido en secciones previas sería un duro y tedioso ejercicio expuesto con casi toda seguridad al riesgo de cometer un error indetectable. La mayor parte de las expresiones que han hecho su aparición en este capítulo han sido obtenidas con *Mathematica*, un popular programa dedicado al cálculo simbólico y numérico [WOLF91].

La estructura de  $E[G]$  y  $E[G^2]$ , especialmente en los casos segundo y tercero, permite un uso eficiente de esta herramienta, y obtener resultados parciales según un bloque  $i$ . El programa ha demostrado su utilidad también en la verificación de resultados que habían sido producidos "a mano". Pero donde se ha obtenido el máximo aprovechamiento de herramientas informáticas aplicadas al problema que nos ocupa ha sido en la generación de código Fortran que implementa las operaciones que conducen al cálculo de  $E[G]$  y  $E[G^2]$ . En este caso el programa se debe al autor, y aunque no es útil para analizar cualquier tipo de expresión algebraica, sí es más que suficiente como para abordar las que se presentan en este terreno.

Aunque *Mathematica* puede escribir en lenguaje Fortran una expresión algebraica cualquiera, no resulta una solución satisfactoria, ya que no produce código optimizado ni está adecuado para tratar grandes expresiones. Por otro lado, está la cuestión de que junto con la evaluación de los componentes de las esperanzas hay que considerar la evaluación de las derivadas; cuestión en la que es de esperar el aprovechamiento de subexpresiones comunes que intervienen en ambas partes. Por todo esto parece apropiado crear un programa dedicado a generar partes de la función objetivo a partir de una expresión deducida

por *Mathematica* con el objetivo de conseguir la máxima eficiencia del código final.

Como el primer caso (variables independientes) puede considerarse lo bastante simple como para que su tratamiento no automático sea suficiente, nos referiremos en lo sucesivo solamente a los otros dos casos (dependencia diagonal, y dependencia total y diagonal), que comparten una estructura semejante e incluyen una dificultad adicional teniendo en cuenta la complejidad del resultado a tratar.

Ambos casos tienen en común que  $E[G]$  y  $E[G^2]$  pueden ser calculados en  $K - 1$  pasos, cada uno de ellos (digamos el  $i$ -ésimo) tomando en cuenta sólo las variables  $X^{0i-1}$  y  $X^i$ , donde con  $X$  nos estamos refiriendo a volúmenes iniciales  $v$ , volúmenes finales  $V$  o descargas  $d$ . (8.10), (8.11) y (8.15) son resultados que muestran este hecho.

De estas expresiones, se puede observar que  $E[G]$  está relacionado con una suma de términos tal como:

$$M c_x (v^{0i-1})^t (v^i)^w (V^{0i-1})^y (V^i)^z [d^{0i-1} + d^{0i}]$$

donde  $M$  es un número,  $x$  es un índice entre 0 y 3, así como  $t, w, y, z$ , aunque dependiendo de  $x$ : es decir, mientras se cumpla que  $t + w + y + z = x$ . Nótese que no vale la pena tener en cuenta el factor  $(d^{0i-1} + d^{0i})$ : resulta ser un factor común a todos los términos y puede ser obviado de este tratamiento para ser considerado con posterioridad. De la misma manera, se tiene que  $E[G^2]$  es una suma de términos como:

$$M c_x c_{x'} (v^{0i-1})^t (v^i)^w (V^{0i-1})^y (V^i)^z [(d^{0i-1})^2 + (d^{0i})^2 + d^{0i-1} d^{0i}],$$

donde  $M$  es otra vez un número,  $x$  y  $x'$  toman valor de entre 0 y 3, y  $t, w, y, z$  son enteros que pueden variar entre 0 y 6, nuevamente dependiendo de la combinación  $(x, x')$ : más exactamente, de acuerdo con la ecuación  $t + w + y + z = x + x'$ . El factor relativo a la descarga puede ser dejado de lado hasta el final.

Esta estructuración se ha adoptado porque es la que usa *Mathematica* al manejar expresiones algebraicas. Así, tras la definición de un cierto método, se ha procedido a combinar, generar y simplificar una determinada expresión teóricamente asociada a un bloque  $i$ . Cuando por fin se obtiene el resultado final, *Mathematica* produce una salida a un fichero; por ejemplo:

`b0+12*b0*b1*v1+5*b1^2*v1*V1+7*b0*b2*V1^2+3*b1*b2*v1*V1^2+8*b0*b3*v1*V1^3`  
que se corresponde con la expresión (evidentemente es sólo una muestra ilustrativa):

$$c_0 + 12c_0c_1v^i + 5c_1^2v^iV^i + 7c_0c_2(V^i)^2 + 3c_1c_2v^i(V^i)^2 + 8c_0c_3v^i(V^i)^3$$

El programa desarrollado lee el fichero generado por *Mathematica* de acuerdo con el formato explicado. Se supone la siguiente equivalencia de símbolos:

- $v0 \leftrightarrow v^{0i-1}$
- $v1 \leftrightarrow v^i$
- $V0 \leftrightarrow V^{0i-1}$
- $V1 \leftrightarrow V^i$
- $bx \leftrightarrow c_x$

A continuación, se organiza según los coeficientes  $c_x$ . Normalmente, algunas subex-

presiones aparecen repetidas veces, por lo que deben detectarse y generar código Fortran para su implementación. Afortunadamente, las subexpresiones que se dan presentan una estructura muy favorable. Por ejemplo, si un término contiene  $v^i(V^i)^3$ , entonces existirán otros términos que usan las subexpresiones  $v^i(V^i)^2$  y  $(V^i)^3$ , e incluso  $v^iV^i$  y  $(V^i)^2$ .

Tras identificar las expresiones comunes, que se asocian a variables auxiliares, se crea un código acorde con los estándares de Fortran:

```
w__01 = 12*b0*b1
w__02 = 7*b0*b2
w__11 = 5*b1*b1
w__03 = 8*b0*b3
w__12 = 3*b1*b2
w0002 = V1*V1
w0011 = V1*y1
w0003 = w0002*V1
w0012 = w0002*y1
w0013 = w0003*y1
s_0 = b0
s_01 = w__01*(y1)
s_02 = w__02*(w0002)
s_11 = w__11*(w0011)
s_03 = w__03*(w0013)
s_12 = w__12*(w0012)
```

En este momento hay que recordar que Fortran no es un lenguaje que diferencie entre mayúsculas y minúsculas; por esta razón,  $v^i$  se identifica con la variable llamada y1 en la salida Fortran, mientras que  $V^i$  se asocia a V1.

La obtención de derivadas es un paso casi directo. Por ejemplo, derivar respecto  $v^i$  da lugar a la siguiente expresión parcial:

$$Mw c_x(v^{0i-1})^t(v^i)^{w-1}(V^{0i-1})^y(V^i)^z[d^{0i-1} + d^{0i}]$$

y respecto  $v^j$ , con  $j < i$ , se tiene:

$$Mt c_x(v^{0i-1})^{t-1}(v^i)^w(V^{0i-1})^y(V^i)^z[d^{0i-1} + d^{0i}]$$

ya que  $v^{0i-1} = v^0 + v^1 + \dots + v^{i-1}$ . Para  $j > i$ , claramente la derivada es cero. En cuanto a las derivadas respecto las variables de descarga, se trata de un cálculo trivial:

$$\frac{\partial E[G]}{\partial d^j} = \begin{cases} 2 M c_x(v^{0i-1})^t(v^i)^w(V^{0i-1})^y(V^i)^z, & \text{si } j < i \\ M c_x(v^{0i-1})^t(v^i)^w(V^{0i-1})^y(V^i)^z, & \text{si } j = i \end{cases}$$

Un procedimiento similar se seguiría si se considerasen términos relacionados con  $E[G^2]$ . En nuestro ejemplo, el código resultante para la codificación de las derivadas es:

```
z01y1 = w__01
z02V1 = w__02*(2*V1)
```

```

z11y1 = w__11*(V1)
z11V1 = w__11*(y1)
z03y1 = w__03*(w0003)
z03V1 = w__03*(3*w0012)
z12y1 = w__12*(w0002)
z12V1 = w__12*(2*w0011)

```

Finalmente, se tiene la suma de los términos correspondientes:

```

suma = s_0 + s_01 + s_02 + s_11 + s_03 + s_12
z_y1 = z01y1 + z11y1 + z03y1 + z12y1
z_V1 = z02V1 + z11V1 + z03V1 + z12V1

```

Las variables que se generan llevan un nombre apropiado a su significado; a continuación se describe cómo se usan estas variables:

$w\_xx'$ : es igual a  $M c_x c_{x'}$

$wtywz$ : es igual a  $(v^{0i-1})^t (V^{0i-1})^y (v^i)^w (V^i)^z$

$s\_x$ : es igual a  $M_0 c_x \sum_n M_n Var_x$ , donde  $Var_x$  es una variable relativa a  $E[G]$  asociada a  $x$ .

$s\_xx'$ : es igual a  $M_0 c_x c_{x'} \sum_n M_n Var_{x,x'}$ , donde  $Var_{x,x'}$  es una variable relativa a  $E[G^2]$  asociada a  $x$  y  $x'$ . En estos dos casos,  $M_n, n \geq 0$  son constantes

$z\_x Tn$ : derivada de los términos en  $c_x$  respecto  $T^n$

$zxx' Tn$ : derivada de los términos en  $c_x c_{x'}$  respecto  $T^n$

$z\_Tn$ : derivada total respecto  $T^n$

En estas expresiones se debe asumir:

\*  $x, x'$ , valores entre 0 y 3.

\*  $T$ , se refiere a la variable:  $v$  o  $V$ , según sea  $y$  o  $V$ .

\*  $n$ , se refiere a  $0i - 1$  si  $n=0$  o  $i$  si  $n=1$ .

por ejemplo,  $z\_y1$  contiene la suma de términos relacionados con la derivada respecto  $v^i$ .

**suma**: es igual a la suma de los términos que componen la expresión inicial

El ejemplo que ilustra esta parte es un caso muy simplificado que no considera las variables  $v^{0i-1}$  y  $V^{0i-1}$ . En caso de que estuvieran presentes aparecerían los símbolos que hacen referencia a  $v^j$  y  $V^j$ , con  $j < i$ . Es importante notar que, cuando se considera cierto índice  $i$ , las derivadas para cualquiera de los índices  $j$  menores que  $i$  son las mismas (pero a medida que se incrementa  $i$  se van diferenciando los distintos índices: así, el valor 0 es el que interviene más veces, y el  $K - 1$  el menos usado).

El algoritmo que genera el código construye posibles factorizaciones de cada término leído. Cuando un factor determinado es semejante a un término que aparece en otra parte de la expresión tratada se produce una coincidencia que es aprovechada para producir código común. De esta manera se va generando una secuencia de instrucciones que busca el mínimo esfuerzo computacional en cuanto a número de operaciones a efectuar. La salida de este programa es un fragmento de código Fortran que puede ser fácilmente insertado en una subrutina (esto es aconsejado, manteniendo los nombres usados como variables

locales). En la función objetivo puede haber una instrucción de llamada a la subrutina, generalmente ubicada dentro de un bucle con el índice variando desde 1 hasta  $K - 1$ . Puesto que no hay errores, se dispone de los gradientes correctos desde la primera ejecución (eliminando una pesada etapa de depuración en la codificación de las derivadas). Además, al no existir operaciones duplicadas, el código que se ha obtenido es muy eficiente, aunque la expresión matemática de partida fuera tan complicada como las que se han presentado a lo largo de este capítulo.

## 8.4 Consideraciones sobre $E[G_1G_2]$

En las secciones precedentes se ha abordado el problema de cómo plantear el cálculo de la esperanza de  $G$  y  $G^2$ , que son partes del problema de hallar el coste esperado para una política de flujos dada. Como se comentó, queda pendiente el cálculo de  $E[G_1G_2]$ . Todos estos componentes quedan ligados al coste por la expresión:

$$E[C] = \sum_{i=1}^{Ni} \lambda_{1,i} E[G_i] + \lambda_{2,i} \left( \sum_{\forall "1"} E[(G_{1,i})^2] + 2 \sum_{\forall "1"} \sum_{\forall "2" \neq "1"} E[G_{1,i}G_{2,i}] \right) \quad (8.16)$$

que se deduce de (7.7) y (7.8). La suma que se extiende a "1" y a "2" tiene el fin de determinar los productos cruzados de los distintos puntos de generación presentes en la cuenca, ya que se entiende que  $G_i = \sum_{\forall "1"} G_{1,i}$ . Continuando con la notación simplificada que mantenemos en este capítulo, haremos abstracción del intervalo  $i$  en lo sucesivo.

El trabajo hecho en este terreno no ha profundizado tanto como en lo que concierne a las esperanzas de  $G$  y  $G^2$ : la justificación de esta resistencia es la complicación que supone manejar seis variables a la vez, las del punto de generación "1" y las del punto "2". La vía escogida ha sido calcular el término  $E[G_1G_2]$  por una aproximación que consideramos es bastante buena. Conocemos que una de las propiedades de las variables aleatorias es:

$$E[G_1G_2] = E[G_1]E[G_2] + \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \quad (8.17)$$

siendo  $\sigma_1$  la desviación estándar de  $G_1$  y  $\sigma_2$  la desviación estándar de  $G_2$ , que pueden ser deducidas sin problemas como veremos.  $\rho_{1,2}$ , en cambio, es el parámetro de correlación entre las generaciones "1" y "2". No se deriva de la distribución de las variables sino de la distribución conjunta de las seis variables a que hemos hecho referencia y, por ello mismo, no es conocido ni puede ser deducido. Sin embargo puede adoptarse como valor aproximado. En este sentido, tomar como aproximación el valor de la correlación de cada par de generaciones no es adoptar una hipótesis más problemática que realizar ciertas suposiciones acerca de la dependencia de las variables; con una gran seguridad puede decirse que es preferible incluso, ya que la correlación es un parámetro bien conocido. Una propiedad de la correlación que resulta muy útil es que está estandarizada entre -1 y 1. Por otro lado, a partir de observaciones históricas de generación puede hallarse una estimación válida. Aunque está claro que la elección de uno u otro valor de  $\rho_{1,2}$  condiciona a la función objetivo y, por tanto, al óptimo, creemos que la influencia de este factor es mínima, ya que afecta sólo al producto de desviaciones estándar, dentro de la expresión  $E[G_1G_2]$ , y ésta a su vez es una parte del término cuadrático de la función de coste, la cual está dominada,

según se aprecia generalmente en casos reales, por el término lineal y no por el cuadrático (en otras palabras,  $\lambda_2$  suele tener poco peso).

Por otro lado, hemos dicho que es fácil calcular la desviación estándar de la generación, mediante:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[G^2] - \mathbb{E}[G]^2}$$

Nótese que disponemos de los métodos que se han descrito en las secciones precedentes para calcular exactamente las esperanzas de  $G$  y de  $G^2$ .

El cálculo de las derivadas de las expresiones (8.17) es trivial, ya que conocemos las derivadas de  $\mathbb{E}[G_1]$  y  $\mathbb{E}[G_1^2]$ , para cada arco de descarga. Vamos a adoptar la notación:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathbb{E}[G] &\equiv \frac{\partial \mathbb{E}[G]}{\partial x} \\ \nabla_x \mathbb{E}[G^2] &\equiv \frac{\partial \mathbb{E}[G^2]}{\partial x}\end{aligned}$$

Para conocer el gradiente según una componente  $x_1$  (una variable que intervenga en la generación por el arco "1"):

$$\frac{\partial \mathbb{E}[G_1 G_2]}{\partial x_1} = \nabla_{x_1} \mathbb{E}[G_1] \mathbb{E}[G_2] + \rho_{1,2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \sigma_2 \quad (8.18)$$

donde

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sigma_1} (\nabla_{x_1} \mathbb{E}[G_1^2] - 2\mathbb{E}[G_1] \nabla_{x_1} \mathbb{E}[G_1]) \quad (8.19)$$

y similarmente para  $x_2$ . Una observación: como se desprende de (8.19), la desviación estándar de la generación no puede tomar el valor de cero, ya que obtendríamos una anulación de denominador (un gradiente no acotado). Lo cual es equivalente a que no debe darse en ningún punto de generación una distribución de probabilidad constante. Para solventar este problema, la manera más eficaz es imponer un pequeño límite inferior a las variables de descarga  $d^k$ , con  $k > 0$ . No es necesario imponer esta cota a  $d^0$ , ya que el valor mínimo de la distribución no tiene incidencia en la dispersión de la variable ni, estrictamente hablando, tampoco es preciso que la descarga esté acotada en todos los artículos; basta que alguno de los bloques no sea nulo. Por ello, y teniendo en cuenta la generalizada asimetría de este tipo de distribuciones (en suma, dependientes de las aportaciones naturales, que típicamente poseen una desviación notable en su rango superior), una recomendación útil es aplicar la limitación inferior de las variables de descarga únicamente a la variable  $d^{K-1}$  de cada punto de descarga.



## CAPÍTULO 9

# SIMULACIÓN DE LA GENERACIÓN HIDRÁULICA

### 9.1 Introducción

La simulación es una técnica que combina la modelización matemática de un sistema con el diseño y ejecución de experimentos llevados a cabo en un ordenador. Usualmente, un modelo matemático no puede describir globalmente el comportamiento de todo el sistema a causa de su complejidad, por lo que el procedimiento de simulación clásico reproduce secuencialmente los pasos que se dan en el proceso. En otro orden de cosas, a la complicación intrínseca del sistema es corriente que se le una la participación de elementos con características estocásticas, cuyo tratamiento estricto no suele ser simple. Esta dificultad se solventa en simulación mediante: *i*) el uso de valores obtenidos aleatoriamente. *ii*) la repetición a gran escala del experimento. Para más información acerca del tema puede consultarse [LAW91].

En nuestro entorno, la presencia de una entrada aleatoria de agua en cada punto de aportación supone un motivo que hace útil el empleo de la simulación. Sin embargo, debe precisarse que ésta no participa en el problema más que como herramienta para verificar una cierta política, más concretamente, para comprobar la coherencia entre el valor del coste esperado calculado por una expresión algebraica a partir de tal política y los valores provenientes de la simulación. En este sentido, la simulación no sería una herramienta adicional en el proceso de búsqueda de la gestión óptima de los recursos hidráulicos, sino un mecanismo de validación de la propia técnica multiartículo.

Los resultados que aparecen en el presente capítulo se plantean en primer lugar sobre un caso esquemático, en el que participa únicamente un embalse y un intervalo. Sobre él se analizan las diferentes opciones que se han presentado, es decir, la original y las tres variantes del capítulo 8. A continuación se ofrecen resultados concernientes a un caso real, una cuenca con 6 embalses y doce intervalos. Un punto necesariamente destacable es que las variables que van a definir el estado del sistema, las distintas descargas y volúmenes, deben entrar como distribuciones de bloques, y que la salida de este sistema es el valor esperado de la generación en tales condiciones. Mientras los valores que adoptan los cuantiles de aquellas variables son relativamente arbitrarios en el caso sencillo, es necesario un punto factible cuando se considera la cuenca real. Por ello, en este caso se adopta un punto proveniente de la resolución de un problema de la generación hidráulica.

## 9.2 Caso simple

### 9.2.1 Descripción del entorno

En esta parte se ha hecho abstracción de la red hidráulica hasta reducirla a su mínima expresión: un lugar en el que se produce una descarga de agua con un volumen inicial y un volumen final. En rigor, también es necesario conocer las características de ese lugar, como la manera en que varía la cota del teórico embalse dependiendo del volumen de agua almacenada, y, por supuesto, cómo valorar económicamente la generación que tiene lugar.

Consideraremos, al igual que en el capítulo 8, que  $d, v$  y  $V$  designan respectivamente la descarga por el único arco existente, el volumen inicial y el volumen final. Se prescinde de otros arcos de entrada en el embalse, lo cual no se debe interpretar como que no hay aportaciones naturales sino que se ha hecho con el propósito de no tener que imponer ninguna restricción de balance al nodo: así, cualquier situación es factible.

Los mencionados arcos  $d, v$  y  $V$  representan variables de  $K - 1$  bloques, y para los tests que se han llevado a cabo se ha adoptado que el área de cada bloque sea la misma, lo que equivale a decir que  $H = \{\frac{1}{K-1}, \dots, \frac{1}{K-1}\}$ .

Una vez fijado  $K$  deben determinarse los valores de:

- $d^0, d^{01}, \dots, d^{0K-1}$
- $v^0, v^{01}, \dots, v^{0K-1}$
- $V^0, V^{01}, \dots, V^{0K-1}$

que, como se ha comentado, no tienen otra restricción que la de ser valores coherentes (es decir, crecientes). A partir de las distribuciones de estas variables se realizará la simulación que, en pocas palabras, consistirá en la extracción de valores de descarga, volumen inicial y volumen final, el cálculo de la generación y el consecuente coste asociado. El caso simple fija los cuantiles de las variables al azar, mediante el procedimiento que a continuación se describe (para una variable genérica  $X$ ):

- 1 Generar  $K$  números provenientes de una distribución uniforme  $[a, b]$ .
- 2 Ordenar los  $K$  números, asignando el menor a  $X^0$ , el siguiente a  $X^{01}$ , etc.

En nuestro caso, se ha adoptado arbitrariamente que  $a=0$  y  $b=100$ . La elección de una distribución uniforme también ha sido arbitraria.

Los coeficientes de variación de la cota respecto al volumen, ignorando el término independiente  $c_0$  que es irrelevante, se han prefijado como sigue:

- $c_1 = 0.5$
- $c_2 = -0.002$
- $c_3 = 6 \cdot 10^{-6}$

En cuanto a los coeficientes de la función de coste respecto la hidrogenación  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se han asignado tal como:

- $\lambda_1 = -1.4$
- $\lambda_2 = 1.75 \cdot 10^{-4}$

### 9.2.2 Extracción de valores de las variables aleatorias

El mecanismo a seguir para generar valores que se suponen distribuidos según determinadas leyes de probabilidad depende en gran medida de cómo las variables consideradas están relacionadas entre sí. En nuestro caso concreto, esta relación se encuentra en la forma de la función de densidad conjunta de  $d, v$  y  $V$ .

La asunción más sencilla es la de independencia; simplemente, cada variable genera una muestra de observaciones de manera separada de las demás, de acuerdo con el siguiente algoritmo:

- 0 Para obtener una muestra de tamaño  $N$  de una variable  $X$ , repetir 1 y 2  $N$  veces:
- 1 Generar  $\alpha$  de una distribución uniforme  $[0, 1]$ .
- 2 Calcular  $F_X^{-1}(\alpha)$ .

Como  $F_X(\cdot)$  es una función lineal a trozos, su inversa también lo es, de modo que el paso 2 no tiene ninguna complicación computacional.

Para manejar la asunción de dependencia, se ha planteado la siguiente situación: tal como se expuso en el capítulo 8, hay dependencia diagonal entre la descarga y los volúmenes, por tanto, se asume que  $f_{d,v}(\cdot)$  es diagonal. En cuanto a la relación entre los volúmenes inicial y final, en lugar de adoptar sólo dos posiciones (dependencia total o diagonal), se generará una función de densidad conjunta sujeta a un parámetro que permitirá un gran control sobre la dependencia entre  $v$  y  $V$ . Este parámetro es la correlación  $\rho_{v,V}$ .

El procedimiento a utilizar que da lugar a una muestra de  $X$  y de  $Y$ , conociendo la función  $f_{X,Y}(\cdot)$  es:

- 0 Para obtener una muestra  $\{x_i, y_i\}$  de tamaño  $N$  de un par de variables  $(X, Y)$ , repetir 1 y 2  $N$  veces:
- 1 Tomar  $x_i$  de la distribución de  $X$  según el algoritmo anterior.
- 2 Encontrar  $f_{Y|X=x_i}(\cdot)$ , y determinar un valor  $y_i$  proveniente de esta distribución.

Para un valor  $x$  perteneciente al intervalo  $(X^{0i-1}, X^{0i})$ , la función de densidad de  $Y$  condicionada por  $x$  es:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{r^{i,j}}{\pi_i} X^i, \quad Y^{0j-1} < y < Y^{0j}$$

Nótese que esta distribución se corresponde con la misma forma de las variables de bloques, pero que no cumple en general que el área de sus bloques coincida con los valores de  $\Pi$ :

$$\int_{Y^{0j-1}}^{Y^{0j}} f_{Y|X=x}(y) dy \neq \pi_j$$

Por supuesto, este algoritmo no se aplicaría en el caso de que las variables fueran totalmente dependientes, ya que la determinación de las observaciones correspondientes a la segunda variable se haría por medio de la relación funcional existente entre ellas.

Finalmente, tiene un interés especial indicar la manera en que se obtienen las funciones

de densidad conjunta de forma general. Como las distribuciones marginales ya se han obtenido previamente, el fin es hallar los valores de la densidad de probabilidad  $r^{i,j}$  de cada región que viene delimitada por los cuantiles de  $X$  e  $Y$ . Las restricciones son, además de las que aparecen en (3.11) y (3.12), una restricción más que es la igualdad entre la correlación y un valor  $\rho$  conocido. En suma, se trata de hallar un punto  $\mathbf{r}$  factible en la región que definen:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{K-1} r^{i,j} X^i (X^{0i} + X^{0i-1} - 2\mu_X) Y^j (Y^{0j} + Y^{0j-1} - 2\mu_Y) &= 4\sigma_X \sigma_Y \rho \\ \sum_{j=1}^{K-1} r^{i,j} Y^j &= \frac{\pi_i}{X^i} & i = 1 \dots K-1 \\ \sum_{i=1}^{K-1} r^{i,j} X^i &= \frac{\pi_j}{Y^j} & j = 1 \dots K-2 \\ r^{i,j} &\geq 0 & i, j = 1 \dots K-1 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, todas las restricciones son lineales. La postura adoptada ha sido utilizar un paquete estándar de optimización capaz de resolver problemas lineales. Cualquiera de los programas aplicables usa algún método en una llamada *fase 0* en la que busca un punto factible a las restricciones lineales. A partir de allí se dedica a optimizar la función objetivo. Como en nuestro caso no existe esta función, utilizaremos sólo la fase 0 o bien asignaremos al problema una función objetivo inofensiva que garantice que el problema se detenga en el primer punto factible; tal función debe ser una constante, como por ejemplo  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{r}$ . Se garantiza que cada vez que resolvemos este problema hallamos una función de densidad diferente dando como punto inicial —generalmente infactible— una asignación de valores al azar.

Sin embargo, ocurre con los programas que siguen la metodología *Simplex* que los resultados que devuelven no son satisfactorios, a causa de una cierta e indeseada abundancia de valores nulos en la solución. Es un resultado lógico, ya que normalmente la fase 0 consiste en la minimización de la infactibilidad y, por ello, se obtiene un punto que cumple las condiciones de un óptimo, concretamente, una solución básica. Como la base tiene tamaño  $2(K-1)$  y el número de variables es superior,  $(K-1)^2$ , hay siempre una cantidad de variables que se encuentran en su límite inferior, 0, única posibilidad para las variables no básicas.

Desde luego, el resultado es correcto; sin embargo, es bastante inconveniente, ya que implica que en bastantes regiones, la probabilidad de generar un valor para la muestra allí es nula. La solución empleada ha sido sustituir el método clásico por un algoritmo de programación por Punto Interior. Los métodos de punto interior se basan en una secuencia de puntos estrictamente interior a la región factible; por ello, no es normal que un punto factible se encuentre próximo a su límite, 0 en nuestro caso. Para las pruebas que siguen se ha hecho uso del programa LOQO [VAND92].

### 9.2.3 Procedimiento

El algoritmo de simulación para un solo embalse se expone brevemente en los siguientes

cinco pasos:

- 1] Sea  $N$  el tamaño de muestra deseado, o número de extracciones. Conocidos  $K, \rho$  y en general todos los parámetros necesarios, inicializar las distribuciones de  $d, v$  y  $V$ .
- 2] Generar las muestras  $\{d_i\}, \{v_i\}$  y  $\{V_i\}$ , con  $i = 1 \dots N$ , de acuerdo con las distribuciones conjuntas de las variables.
- 3] Para cada  $i = 1 \dots N$ : evaluar  $g_i$ , generación resultante de  $d_i, v_i$  y  $V_i$ ; hallar  $\lambda_1 g_i + \lambda_2 g_i^2$ , el  $i$ -ésimo coste de producción térmico (sea  $\tau_i$ ).
- 4] Bajo la hipótesis original planteada en el Cap. 7, calcular  $\mu_C^* = \lambda_1 E[G] + \lambda_2 E[G^2]$ . Aceptar o rechazar la hipótesis de que la muestra  $\{\tau_i\}$  pueda proceder de una distribución con media  $\mu_C^*$ .
- 5] Repetir 4] bajo otras hipótesis.

Conviene precisar que la hipótesis a la que se refiere el punto 4] establece que la generación es una variable de bloques cuyos parámetros se pueden definir a partir de los de la descarga y los volúmenes, en concreto, en §7.2. Las hipótesis planteables en el punto 5] aparecen descritas en el cap. 8:

- Caso a): dependencia total entre  $v$  y  $V$ ; dependencia diagonal entre  $d$  y los volúmenes (§8.2.4)
- Caso b): independencia (§8.2.2)
- Caso c): dependencia diagonal (§8.2.3)

Las pruebas de inferencia sobre la esperanza de  $C$  que se realizan en los pasos 4] y 5] son un procedimiento estadístico bien establecido, resolubles mediante los siguientes pasos:

- Plantear las hipótesis:

$$\begin{array}{ll} H_0 : E[C] = \mu_C^* & \text{Hipótesis Nula} \\ H_1 : E[C] \neq \mu_C^* & \text{Hipótesis Alternativa} \end{array}$$

- Escoger el *nivel de confianza*  $\alpha$ , también llamado *riesgo de primera especie* (p.ej. 0.05)
- Calcula la media muestral  $\bar{\tau}$  y la desviación estándar muestral  $s_\tau$ . Sea:

$$Z = \frac{\mu_C^* - \bar{\tau}}{s_\tau / \sqrt{N}}$$

- $Z$  sigue una distribución de probabilidad normal estandarizada; si  $|Z| > |Z_\alpha|$  entonces se rechaza  $H_0$ ; de otro modo, no se rechaza (en nuestro caso,  $Z_{0.05} = -1.96$ ).

### 9.2.4 Resultados

Presentaremos a continuación algunos resultados que se han derivado de las pruebas llevadas a cabo. Se muestran de manera resumida al haber efectuado un número muy elevado de simulaciones, pues se ha tenido muy en cuenta un efecto inherente a las pruebas de contraste de hipótesis. El hecho es que el nivel  $\alpha$  lleva aparejado un determinado riesgo

de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta, por lo que realizar una sola prueba puede no ser ilustrativo. Es por esta razón que se ha considerado apropiado multiplicar el número de pruebas hasta repetirlas  $P$  veces, de las cuales se desprende:

- el número de rechazos para la media del coste de producción térmico.
- la suma de los niveles de significación obtenidos
- La media de los cocientes  $\mu_C^*/\bar{\tau}$

información que cada hipótesis que se pone a prueba puede devolver, y que resulta útil para establecer comparaciones. Aclaremos que el nivel de significación (o  $p$ -value) es la probabilidad de obtener una muestra con una media más desfavorable que  $\bar{\tau}$ , cuando  $H_0$  es cierta. Se cumple que si  $\alpha > p$ -value podemos rechazar  $H_0$  en idénticas condiciones que como se expuso anteriormente. Por otro lado, la media de  $\mu_C^*/\bar{\tau}$  da una idea del sesgo presente en la evaluación de  $E[C]$ , dejando aparte si este sesgo es significativo o no.

Expondremos resumidamente la información extraída de tres tipos de pruebas, de acuerdo con los tres tipos de alternativas desarrolladas en el capítulo 8.

Tomemos un ejemplo que permite situarse en el contexto. Se asume en este caso relación total entre  $v$  y  $V$  y dependencia diagonal entre  $d$  y  $V$ ; con  $K=4$  y  $N=2000$ , una posible salida sería:

Discharge	{	54.36	71.13	82.81	95.90}		
Volume1	{	1.29	41.91	42.21	63.23}		
Volume2	{	3.47	11.26	20.28	33.73}		
Expect. G-1:		-1178.95		Expect. G-2:		-1161.28	
Sample mean:		-1147.13;		Variance:		257664.0	
T-1:	2.80	P=0.00511				X	
T-2:	1.25	P=0.21282				.	

En este ejemplo aparecen en primer lugar los cuantiles de las distribuciones de las tres variables; después, los costes esperados  $\mu_C^*$  calculados según el procedimiento original (G-1) o el alternativo (G-2); de aquí en adelante, el procedimiento G-1 estará asociado al que se describió en el capítulo 7, y el G-2 puede ser uno de los casos  $a$ ,  $b$  o  $c$  del capítulo 8. Estos van a ser comparados con la media de  $N = 2000$  valores generados,  $\bar{\tau} = 1147.13$ ; también se indica la variancia, cuya raíz cuadrada retornaría el valor de  $s_\tau$ . T-1 y T-2 son los respectivos costes normalizados (que antes hemos indicado como  $Z$ ), y P es el nivel de significación. Obsérvese que el primer contraste ha sido rechazado por tener un nivel inferior a 0.05 (por eso aparece un signo X), mientras que el segundo ha sido aceptado. La interpretación que se haría de este resultado es que el valor de 1178.95 está demasiado lejos como para ser aceptado como coste térmico esperado, de acuerdo con los valores muestrales, pero no hay evidencias en contra del valor 1161.28. Repetir esta prueba con los mismos métodos pero con diferentes asignaciones para las distribuciones de  $v$ ,  $V$  y  $d$  serviría para reforzar nuestra conclusión, tal como se muestra en la tabla siguiente:

Se han efectuado  $P=100$  pruebas de tamaño  $N=2000$  cada una, con diferente número de bloques para las distribuciones de las variables. Parece claro que el sistema de generación de datos favorece especialmente al segundo método, que raramente rechaza los valores de  $\mu_C^*$  propuestos (alrededor de un 5% de las veces, que es la tasa esperada). Por contra, el primer método registra un comportamiento diferente, pues depende claramente de  $K$ :

Tabla 9.I. Caso a)

$K$	Ratio		Suma p-value		# rechazos	
	G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2
3	1.040599	1.000429	11.11165	50.62354	67	5
4	1.024616	0.999848	22.17593	48.67862	49	8
5	1.019131	1.002053	29.54305	50.09479	33	4
6	1.012227	1.000392	40.25681	52.25046	8	2

se observa que cuando  $K$  aumenta, mejoran sus cifras hasta ponerse a la par con las del método alternativo. Una segunda prueba más exhaustiva, que aparece en la Tabla 9.II, intenta ser también más restrictiva, aumentando el tamaño de las muestras con  $K$ . En esta tabla, y en las otras tres que siguen, se ha mantenido el valor de  $P=100$  pruebas.

Tabla 9.II. Caso a)

$N$	$K$	Ratio		Suma p-value		# rechazos	
		G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2
10000	3	1.042801	0.999286	3.83357	49.53453	91	4
20000	4	1.027123	1.000021	1.93139	50.78265	94	4
30000	5	1.016650	0.999433	6.30738	51.37643	84	3
40000	6	1.011579	0.999706	7.23030	44.44348	78	8
50000	7	1.009236	1.000108	6.97549	49.50433	77	7
60000	8	1.006309	0.999838	16.34015	53.50723	61	8
70000	9	1.005832	1.000227	13.77641	51.15615	61	4
80000	10	1.004775	1.000021	16.34651	52.36673	52	3

Una vez más se debe apuntar que hay muy pocos rechazos con la implementación alternativa. En el otro extremo, la tabla demuestra que con un tamaño suficientemente grande, pueden rechazarse fácilmente la mayor parte de los valores que proporciona la primera versión. Vale la pena subrayar el hecho de que los resultados con G-2 varían insensiblemente tanto con  $K$  como con  $N$ , lo cual no ocurre con G-1. También es remarkable un apreciable sesgo para G-1, dependiente del número de bloques, en cuanto es mayor cuanto más pequeño es  $K$ , con un valor que se puede estimar entre un 0.5% y un 4.3%. Esto significa que el coste de producción térmico esperado es sobreestimado por este sistema de evaluación; sin embargo, un incremento en el número de bloques de las distribuciones incrementa la “precisión” del cálculo en gran manera. Respecto al segundo método, los valores obtenidos, oscilando alrededor del valor 1, no hacen sospechar acerca de un cálculo sesgado.

Todas estas impresiones, es necesario decirlo, se han basado en valores muy altos de  $N$ , lo cual ha sido preciso para destacar significativamente las diferencias existentes. Este hecho no anula las conclusiones apuntadas, pero sugiere una proximidad *real* entre las dos implementaciones.

Table 9.III. Caso b)

$N$	$K$	Ratio		Suma p-value		# rechazos	
		G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2
10000	3	1.080612	0.999780	0.11469	48.45388	100	10
20000	4	1.081000	1.000202	0.99152	46.65814	99	8
30000	5	1.083692	1.000167	0.46483	47.44538	98	3
40000	6	1.084519	0.999485	0.00021	49.93533	100	2
50000	7	1.090016	1.000657	0.00000	51.79674	100	5
60000	8	1.104108	0.999999	0.33181	50.74212	99	6
70000	9	1.101098	0.999859	0.00000	53.60552	100	5
80000	10	1.107568	1.000200	0.00000	46.83300	100	3

La Tabla 9.III tiene la misma estructura que la 9.II, pero se refiere a un procedimiento que genera observaciones de acuerdo con el caso b), es decir, con independencia entre  $v$ ,  $V$  y  $d$ . Consecuentemente, la implementación de G-2 es ahora la que se describe en el correspondiente apartado del capítulo 8. Las conclusiones que se refieren a este método se pueden tomar del caso que se ha analizado previamente: el valor resultante de la evaluación de  $\mu_C^*$  no es discordante con la muestra obtenida, como lo prueba el bajo nivel de rechazos o la suma del nivel de significación, aproximadamente alrededor de 50. También es indiferente al número de bloques empleado. En cambio, la evaluación de  $\mu_C^*$  a cargo del procedimiento original se muestra mucho menos apropiada. El número de rechazos es casi absoluto, y el sesgo no decrece con  $K$  —como antes—, con un exceso de 10% aprox. sobre el valor medio estimado. La conclusión inmediata es: si se supusiera independencia entre las variables, este sistema sería muy inapropiado para hallar el coste esperado.

La siguiente tabla asume dependencia diagonal entre las tres variables y, por tanto, el procedimiento implementado bajo G-2 es el que corresponde. Se puede observar que estos resultados no difieren excesivamente de los de la tabla 9.II, lo cual no es tan extraño, puesto que se trata de dos casos con muchos aspectos en común. En efecto, no es difícil ver que la relación diagonal entre  $v$  y  $V$  lleva consigo un considerable grado de dependencia entre las variables.

Se puede apuntar una primera conclusión: la expresión original para calcular el coste de producción esperado descrita con anterioridad parece incluir un cierto sesgo respecto la media muestral, en el sentido del exceso, y dependiendo del número de bloques empleados para representar las distribuciones de probabilidad y de la asunción utilizada para generar los datos. Cuando se acoge a la asunción de independencia, el sesgo es considerable, pero si los datos son dependientes en alto grado, la diferencia puede reducirse aumentando  $K$ .

La siguiente tabla contiene los resultados de un experimento con estas características: i)  $K$  se mantiene constante (igual a 5). ii)  $N$  varía según una relación geométrica. iii) las observaciones se generan de acuerdo con una hipótesis diferente de la implementación alternativa G-2. El diseño utilizado en la Tabla 9.V tiene el propósito de comparar el sistema original con el sistema del caso c), respecto de dos maneras de generar datos basados en distribuciones no diagonales; para ello se utiliza el procedimiento de punto

Tabla 9.IV. Caso c)

$N$	$K$	Ratio		Suma p-value		# rechazos	
		G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2
10000	3	1.045909	0.999937	2.79728	48.59382	91	7
20000	4	1.027094	1.000721	3.44854	54.78838	94	2
30000	5	1.015970	1.000104	2.73832	50.61538	89	3
40000	6	1.011125	1.000252	4.87190	47.80997	83	3
50000	7	1.008484	0.999815	9.94658	47.98484	69	4
60000	8	1.006236	0.999508	14.34798	50.91880	63	7
70000	9	1.004723	0.999778	20.34309	55.77815	51	7
80000	10	1.004763	1.000218	17.18331	52.85756	45	2

interior descrito anteriormente, empleando los valores de  $\rho_{v,V}=0.5$  (a la izquierda) y de  $\rho_{v,V}=0.85$  (a la derecha). La distribución de  $d$  y  $v$  es diagonal.

Tabla 9.V. Pruebas con  $K=5$  bajo el caso c)

$N$	$\rho=0.5$				$\rho=0.85$			
	Suma p-val.		# rech.		Suma p-val.		# rech.	
	G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2	G-1	G-2
100	29.58	33.95	30	29	39.54	43.07	14	10
200	26.24	30.90	40	34	36.26	38.65	22	16
400	18.15	25.59	53	46	33.67	36.18	27	18
800	14.18	24.56	56	49	21.95	33.34	43	30
1600	9.51	11.04	80	67	15.44	33.61	55	36
3200	6.36	9.50	82	76	15.76	28.23	61	38
6400	7.09	5.92	82	84	11.58	22.02	74	50
12800	4.26	4.85	91	87	3.13	17.36	90	59
25600	2.82	3.70	92	88	3.94	19.09	85	54
51200	3.95	4.37	95	91	0.32	13.23	97	65

Esta tabla revela con claridad que ambos métodos se encuentran con problemas si tratan con unos datos que no se distribuyen de acuerdo con lo esperado, lo cual no es tampoco un efecto sorprendente, sobre todo cuando se utilizan tamaños de muestra elevados. Mientras que los dos métodos se comportan de manera similar frente a la correlación 0.5, destaca una leve ventaja del segundo si se tiene mayor correlación. Podemos hallar una justificación teniendo en cuenta que la dependencia diagonal implica generalmente una correlación alta, con lo que el segundo supuesto ( $\rho_{v,V}=0.85$ ) se colocaría en una posición algo más favorable para esta implementación, especialmente en las situaciones menos restrictivas (cuando  $N$  es menor).

En resumen, a través de varios ejemplos, se ha visto que la expresión del coste probable de producción tal como se ha definido en el capítulo 7 no tiene una correspondencia clara ni con un caso de independencia entre las variables, ni tampoco considerando dependencia positiva o negativa; por lo que parece, la situación más cercana es la presencia de una fuerte relación entre las variables, y quizá aun así se dé todavía un ligero exceso en la estimación del coste esperado. Por otro lado, podemos indicar que un incremento en el número  $K$  en ocasiones lleva consigo una mejora sustancial en la estimación de  $E[C]$ , que se hace patente en los indicadores utilizados como el número de rechazos sobre el total de pruebas.

Por último, señalar que entre las evidentes limitaciones de estos experimentos se encuentra la de que no se ha podido estudiar la relación entre diferentes puntos de generación, circunstancia que impide, como caso más destacable, el no haber podido extraer consecuencias sobre el cálculo de la esperanza del producto de generaciones cruzadas. Este punto, y otros, se dejan para la siguiente sección, dedicada a la simulación de la generación en una red con varios embalses e intervalos.

## 9.3 Caso real

### 9.3.1 Introducción

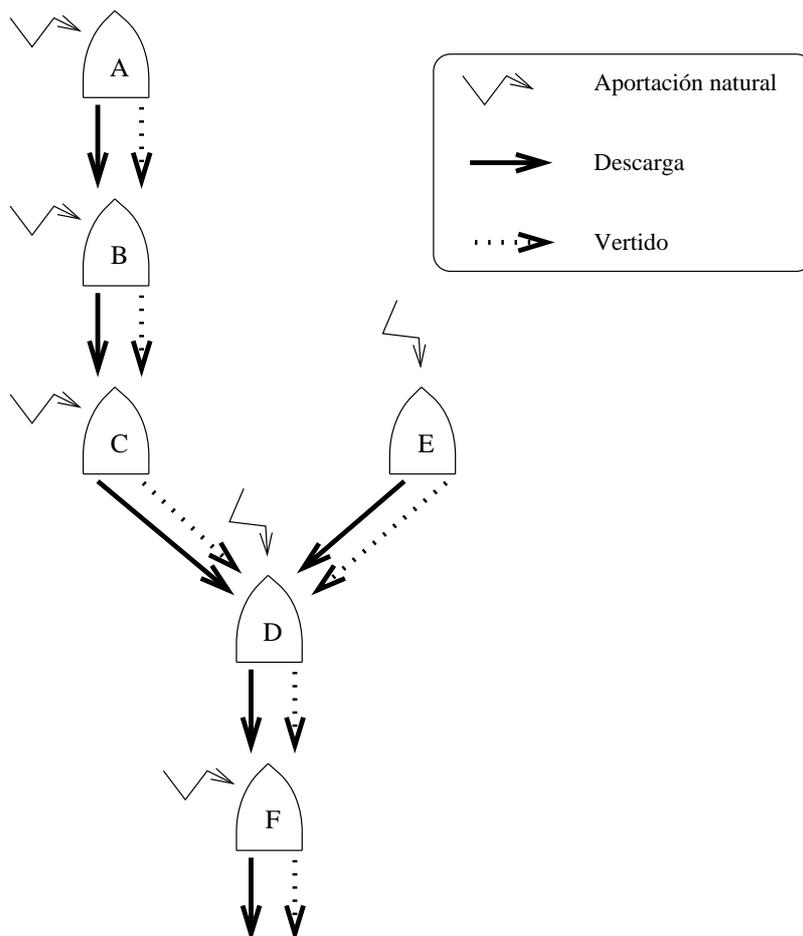
Bajo el título de “caso real” se presentan los resultados obtenidos usando una cuenca hidráulica de dimensiones suficientemente cercanas a las que se podrían presentar en un caso como los que han de afrontar las compañías eléctricas. No es la única diferencia con el apartado anterior, ni quizás la más importante. Mientras en el caso simple los valores de las distribuciones de probabilidad de las descargas y los volúmenes se producían al azar, ahora son el resultado de la optimización sobre dicha cuenca de una función objetivo que representa el coste probable de producción, codificada de diferentes maneras, de acuerdo con las alternativas presentadas en el capítulo 8. Y, por último, la simulación que se lleva a cabo se trata de un procedimiento bastante más complejo; por ello mismo, ha parecido conveniente separar las implementaciones de la parte de simulación de la de optimización.

Se cuenta con tres programas diferentes para optimizar el CPP, dependiendo de cuál es la codificación de  $E[G]$  y  $E[G^2]$ :

- **mbgg**: la primera versión, que implementa el procedimiento descrito en el cap. 7
- **mbgj**: versión que asume independencia entre las variables
- **mbgk**: versión que asume dependencia diagonal entre la descarga y los volúmenes, con dependencia total entre éstos.

Todos ellos utilizan el paquete Minos [MURT83] para obtener el mínimo en cada problema. No hay versión para el caso que resta (dependencia total entre descarga y volúmenes) porque se ha observado que no se trata de un caso que se diferencie significativamente del tercero que se ofrece aquí, tal como se podía esperar. Algunas pruebas realizadas comparando sólo los términos lineales de la generación se han manifestado en este sentido.

### 9.3.2 Descripción de la cuenca hidráulica



**Figura 9.1 :** Esquema de la cuenca del ejemplo.

La figura Fig. 9.1 muestra cuál es la topología de la red que se ha utilizado. Se compone de seis embalses, cada uno de ellos con un arco de descarga y uno de vertido. Todos reciben aportaciones naturales, cuya descripción estadística aparece resumida en la tabla 9.VI.

Se ha tomado un periodo de un año, dividido por meses naturales, lo que da lugar a 12 intervalos, el primero de ellos correspondiendo a enero. Las variables multi-artículo del problema tienen  $K - 1$  bloques, habiéndose ejecutado cada caso con  $K = 3 \dots 8$ . Las probabilidades de cada bloque se han escogido tales que fueran iguales ( $\Pi = \left\{ \frac{1}{K-1}, \dots, \frac{1}{K-1} \right\}$ ). Las distribuciones de bloques de las aportaciones naturales se han derivado para cada valor de  $K$  de acuerdo con el procedimiento de obtención de cuantiles sujeto a restricciones que aparece en el capítulo 4. Precisamente, las restricciones que se refieren a la media y a la variancia de cada distribución son las que garantizan la mínima diferencia entre las variables de bloques y la información histórica de las aportaciones.

Este caso produce un problema de optimización con  $210K$  variables y  $210+73K$  restricciones lineales. La función objetivo, excepto un término que penaliza vertidos indeseables y que se ha dejado de lado puesto que no resulta significativo, representa exactamente el coste esperado de producción térmica para un problema de optimización

Tabla 9.VI. Valores descriptivos de las aportaciones (en  $\text{hm}^3$ )

Mes	A		B		C		D		E		F	
	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.
Enero	106.51	85.67	17.23	20.86	104.30	109.33	74.51	96.48	44.65	39.43	70.83	91.61
Febr.	126.70	150.46	22.13	29.64	122.49	135.50	82.05	125.21	58.53	62.51	92.76	130.09
Marzo	98.66	105.50	15.89	23.88	64.02	69.80	26.76	44.89	29.73	29.88	34.74	50.67
Abril	75.36	72.67	8.95	12.65	48.86	44.80	14.33	26.46	25.52	22.79	51.59	134.72
Mayo	56.36	40.91	4.90	7.73	37.60	38.68	6.52	10.29	25.11	25.46	11.71	16.60
Junio	42.00	30.87	3.99	5.23	15.04	11.58	2.39	4.62	14.07	11.57	4.60	4.84
Julio	25.04	29.38	6.12	7.17	5.78	12.22	0.54	2.06	11.07	9.16	1.89	3.40
Agos.	29.03	34.26	3.56	4.25	2.43	3.00	0.38	1.64	9.18	8.85	3.45	9.40
Sept.	46.21	44.44	2.59	5.29	5.16	3.81	2.86	5.42	8.95	9.43	1.49	3.85
Oct.	52.61	18.79	5.47	7.88	30.81	47.43	12.49	17.51	15.05	17.28	7.80	16.32
Nov.	66.27	28.27	6.37	6.24	62.44	56.03	35.44	38.84	25.82	22.97	37.65	63.80
Dic.	105.70	145.49	18.40	26.42	112.73	152.61	85.56	151.52	48.95	57.78	82.40	145.22

hidráulica. Este valor es el que va a ser puesto a prueba mediante el procedimiento de simulación; concretamente, cada simulación produce un intervalo de confianza para la esperanza del coste, y es de esperar que este intervalo contenga al coste esperado.

### 9.3.3 Procedimiento de simulación de redes hidráulicas

Someter una cierta política de flujos a simulación tiene fundamentalmente una doble motivación. La primera es comprobar hasta qué punto coinciden los resultados experimentales (aceptando que el mecanismo de simulación que se va a presentar entra dentro del campo de la experimentación) con el resultado *teórico* que representa el cálculo analítico del coste esperado de producción térmica  $E[C]$ , hallado de diversas maneras por los programas antes citados. Como derivación de este motivo, no es menos interesante verificar cuál de los tres programas encuentra valores más parecidos a los simulados. Sin embargo, para respetar la dirección inicial que se dio a la investigación en este campo, debe quedar claro que el objetivo es delimitar si la codificación original de  $E[C]$  —claramente más eficiente— presenta desviaciones importantes respecto la desconocida y auténtica esperanza del coste (que ha de ser suplantada por otros procedimientos, *verbi gratia*, simulación o una propuesta de codificación de  $E[C]$  más rigurosa).

La segunda motivación responde a una voluntad de clarificar el sentido de lo que constituye una política de flujos. De una manera semejante a las dificultades que se presentan cuando se ha de modelizar un sistema con características aleatorias, la interpretación de los resultados que aporta la solución de tales modelos no suele ser trivial; y los modelos multiartículo no son una excepción. La naturaleza de las variables de salida (distribuciones de probabilidad de bloques) puede resultar extraña, aunque es una consecuencia lógica de las características del problema mismo. Construir un procedimiento de simulación implica aplicar una idea muy precisa de cómo se debe utilizar una determinada política para hallar, a través de ella, volúmenes y descargas con los que derivar la generación hidráulica de la que se encontrará finalmente el coste. Por supuesto, estos volúmenes y descargas se refieren a intervalos largos de tiempo, y no serían apropiados para llevarlos al campo de la operación de los embalses; para esto se requiere resolver un problema en la escala del

corto plazo. Además, hay que llamar la atención sobre un punto: en un problema a largo plazo en un futuro inmediato, el primer intervalo es especial, porque en sus resultados se va a basar el problema de corto plazo, y los restantes intervalos sólo delimitan un marco para considerar el futuro posterior. Con el diseño de simulación que se ha efectuado, no existe esta diferencia entre los intervalos; en todos ellos se aplica la política de la misma manera, para todos se genera y de todos se extrae el coste subsiguiente. La razón para haber escogido esta opción es que la magnitud que se minimiza es, al fin y al cabo, el coste esperado total, por lo tanto resulta ser la opción más lógica.

Una de las características que ha contribuido más a la popularidad de la simulación frente a otros modelos matemáticos más analíticos es que permite incluir un gran nivel de precisión en el modelo. Por lo tanto, existen ciertas hipótesis que no tienen porqué ser mantenidas, de la misma manera que se pueden incluir aspectos del sistema que, a la hora de codificar la función de coste esperado, no pueden ser considerados. El caso más claro es la relación entre las variables de aportación natural. Está claro que, dado un punto de aportación, la serie de valores de aportación en este punto intervalo tras intervalo marca una cierta relación en el tiempo, aunque esta relación no es de dependencia total, como se postula en el modelo multiartículo. Si mantuviéramos escrupulosamente esta hipótesis en el modelo de simulación, bastaría que fuera conocido un valor de cualquiera de las variables para que todas las demás estuvieran fijadas. En su lugar, cuando se simula una política se ha procurado estar en una posición más cercana a la real: por ello, las aportaciones en un intervalo dependen de las del anterior, pero sólo parcialmente.

Tal vez esta postura no sea correcta, pero indudablemente tampoco lo sería conservar una hipótesis que sólo tiene sentido en un modelo de optimización. Por lo menos, adoptando este planteamiento, el modelo de simulación intenta acercarse en la medida de lo posible a la situación real; si no fuera así no sería un referente aceptable para estudiar la validez de los resultados de las funciones de  $E[C]$ .

Veremos en primer lugar cómo se considera la dependencia parcial entre las aportaciones de diferentes intervalos. A continuación se describe el procedimiento para ajustar los valores de las descargas y los volúmenes, y finalmente el algoritmo de simulación.

### 9.3.3.1 Aportaciones condicionadas

Los valores de los cuantiles de las aportaciones,  $I_{i,n}^{0k}$  (para un intervalo  $i$ , un embalse  $n$  y un artículo  $k$ ), pueden hallarse de distintas formas, según se expone en el capítulo 4; el procedimiento QP4 que se describe allí ha servido para generar los valores de las distribuciones que se utilizan en el ejemplo con el que se ilustra el uso de la simulación, aunque otros procedimientos son semejantes.

Una vez determinadas las distribuciones de bloques de estas variables, se estiman las funciones de densidad conjunta (FDC). Las FDC se utilizan para hallar la distribución de probabilidad de una de ellas cuando se sabe que las demás variables están fijadas. En nuestro caso sólo se van a considerar FDC de dos variables, aportaciones de intervalos consecutivos y en el mismo punto, a pesar de que existen argumentos para justificar que la dependencia de estas variables se remonta varios intervalos atrás. De todas maneras, estimar FDC de más de dos variables exigiría disponer de muchas observaciones y, en este aspecto, la información suele ser muy escasa. En cuanto a las aportaciones en el mismo intervalo, se mantiene la hipótesis de dependencia total.

Las FDC de cada par de variables se calculan por los procedimientos de Reajuste de la Aproximación (RP) descritos en el capítulo 5. Por tanto, se dispone de las distintas funciones:

$$f_{I_{i-1,n}, I_{i,n}}(x, y), \quad i = 1 \dots Ni, \quad n = 1 \dots Nr$$

La expresión de la función de densidad condicionada es, como ya se ha expresado antes:

$$f_{I_{i,n}|I_{i-1,n}=x}(y) = \frac{f_{I_{i-1,n}, I_{i,n}}(x, y)}{f_{I_{i-1,n}}(x)}$$

Se recuerda que la variable condicionada tiene una función de densidad de  $K - 1$  bloques, pero si las dos variables no son independientes entonces no comparte con  $I_{i,n}$  el mismo vector  $\Pi$  de probabilidades (en otras palabras, las alturas de los bloques pueden ser diferentes, ya que sus anchuras son fijas). Por tanto, los valores  $I_{i,n}^{0k}|I_{i-1,n} = x$  dejan de ser cuantiles de las probabilidades  $\pi_1, \pi_1 + \pi_2, \dots$  y, en consecuencia, en cada embalse se estarían sumando volúmenes de agua que no corresponden a la misma probabilidad. A causa de este hecho se producen desajustes que es necesario reparar. Este es uno de los más complicados problemas que aparecen al desarrollar el modelo de simulación (y debido a la *innovación* introducida con el ánimo de hacer más realista el modelo).

Podemos exponer con un ejemplo la situación. Supongamos una cuenca con dos embalses, R1 y R2, estando R1 aguas arriba respecto R2. Ambos descargan agua que puede ser utilizada para generar electricidad, y el agua proveniente de R1 va a parar a R2. En determinado intervalo consideramos que el estado del sistema viene dado por las variables multiartículo:

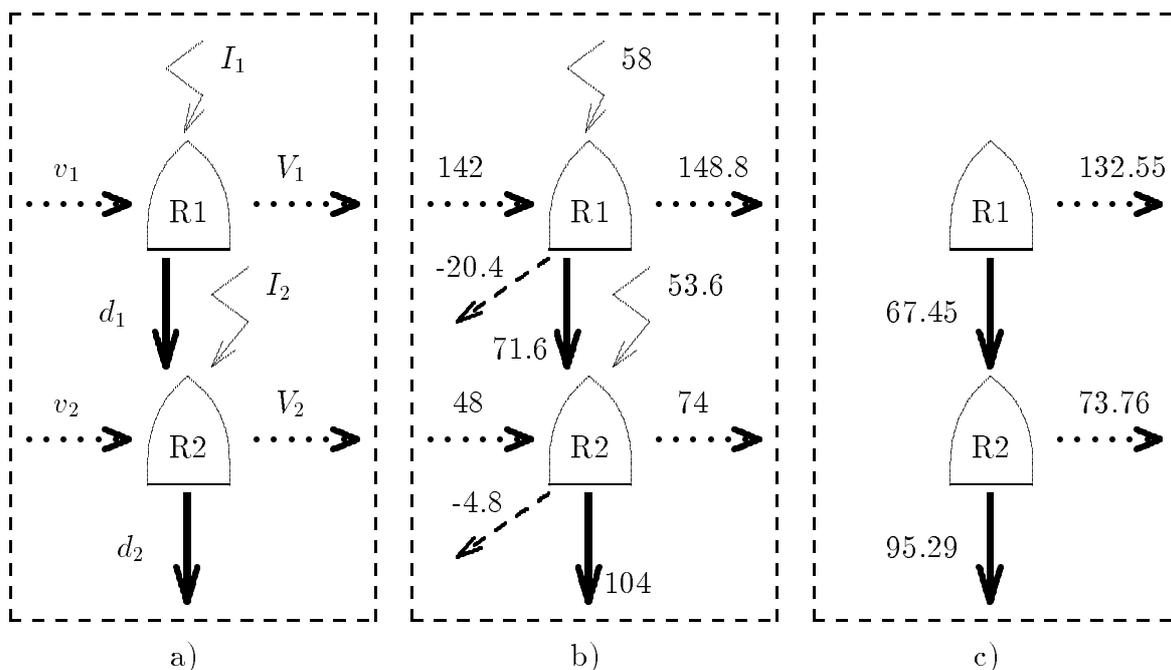
- descarga,  $d_1$  y  $d_2$
- aportación,  $I_1$  y  $I_2$
- volumen inicial,  $v_1$  y  $v_2$
- volumen final,  $V_1$  y  $V_2$

Las unidades de las variables son unidades de volumen respecto la longitud del intervalo (por ejemplo,  $\text{Hm}^3$ ).

La Fig. 9.2.a) puede servir para situar estos arcos dentro del sistema. Los valores que tienen asignados los cuantiles de las variables son:

- $d_1$ : {36, 58, 75, 90}
- $d_2$ : {40, 80, 110, 130}
- $I_1$ : {26, 53, 65, 88}
- $I_2$ : {19, 42, 56, 68}
- $v_1$ : {120, 133, 164, 190}
- $v_2$ : {45, 50, 54, 62}
- $V_1$ : {110, 128, 154, 188}
- $V_2$ : {60, 70, 75, 90}

Como resulta evidente,  $K$  es igual a 4; las probabilidades por bloque se suponen igual a  $\frac{1}{3}$ , excepto para las aportaciones. Debido a que se suponen condicionadas por los respectivos valores de aportación en el intervalo anterior, el vector  $\Pi$  que les corresponde ha variado:



**Figura 9.2 :** Ejemplo de aplicación de una política. a) cuenca de dos embalses con sus arcos. b) aplicación estricta (los arcos negativos son consecuencia de la falta de balance). c) resultado del ajuste.

– para  $I_1$  :  $\{0.475, 0.3, 0.225\}$

– para  $I_2$  :  $\{0.2\bar{7}, 0.3\bar{8}, 0.\bar{3}\}$

Supongamos además que los volúmenes iniciales  $v_1$  y  $v_2$  vienen fijados por el ajuste realizado en el intervalo anterior, siendo estos valores 142 y 48 respectivamente.

La simulación de las descargas correspondientes a este intervalo empezaría generando valores acordes con las diferentes distribuciones de probabilidad presentes en el sistema. Puesto que asumimos que son totalmente dependientes, partimos de un solo valor de probabilidad ( $\alpha$ ), a partir del cual hallaremos los diversos cuantiles de cada variable. En la Fig. 9.2.b) se muestran los valores que resultan con  $\alpha = 0.6$ . No es complicado hallar un cuantil de una variable de bloques; por ejemplo:

– para  $V_1$ :  $0.6 = 0.\bar{3} + 0.2\bar{6} = \pi_1 + 0.8\pi_2 \longrightarrow 110 + (128 - 110) + 0.8(154 - 128) = 148.8$

– para  $I_1$ :  $0.6 = 0.475 + 0.125 = \pi_1 + 0.41\bar{6}\pi_2 \longrightarrow 26 + (53 - 26) + 0.41\bar{6}(65 - 53) = 58$

Los arcos oblicuos que parten de R1 y R2 contienen el defecto de balance en cada nodo, puesto que los valores obtenidos no son factibles, debido a que las aportaciones han sido modificadas por condicionamiento y los volúmenes iniciales están fijados. Así:

– R1:  $142 + 58 - 71.6 - 148.8 = -20.4$

– R2:  $48 + 71.6 + 53.6 - 104 - 74 = -4.8$

Puesto que las variables libres son las descargas y volúmenes finales, buscamos una solución de compromiso pero que se mantenga tan cerca como sea posible del nivel  $\alpha$ . En términos de probabilidad, esto es posible expresarlo a través de las funciones de distribución de  $d_1, d_2, V_1$  y  $V_2$  (que son variables aleatorias), tal como:

$$\min_X (F_{d_1}(x_1) - \alpha)^2 + (F_{d_2}(x_2) - \alpha)^2 + (F_{V_1}(x_3) - \alpha)^2 + (F_{V_2}(x_4) - \alpha)^2$$

lo cual se entiende como la minimización de la distancia (dada por la norma euclídea) entre el nivel deseado  $\alpha$  y la probabilidad que devuelve la función de distribución en los distintos puntos  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  (correspondientes a  $d_1, d_2, V_1$  y  $V_2$ ). Usar esta expresión tiene la ventaja de que la probabilidad uniformiza el residuo que corresponde a cada arco, lo cual no sucede con el flujo, que puede afectar a la función objetivo de manera irregular si hay presentes grandes diferencias de magnitud entre los diversos arcos.

Las incógnitas  $X$  de este problema están sujetas a las ecuaciones de balance de flujo de la red, y también a los límites que acotan a cada variable (flujo y volumen máximo y mínimo). Para este sencillo problema consideraremos estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 200 \\x_2 + x_4 - x_1 &= 101.6\end{aligned}$$

La solución aparece representada en la Fig. 9.2.c). La función objetivo en el óptimo es igual a 0.05965, y las variables han tomado los siguientes valores:

- $x_1=67.45$ .  $F_{d_1}(x_1) = 0.5186$
- $x_2=95.29$ .  $F_{d_2}(x_2) = 0.5032$
- $x_3=132.55$ .  $F_{V_1}(x_3) = 0.3917$
- $x_4=73.76$ .  $F_{V_2}(x_4) = 0.5839$

Se puede proponer otra solución, que consiste en minimizar una función de los flujos estandarizados. Para ello hay que dividir el valor del flujo por la desviación estándar de cada variable. Esto no garantiza que obtengamos el punto más cercano al nivel  $\alpha$ ; sin embargo, es una alternativa que con mucho menos esfuerzo computacional consigue resultados casi equivalentes (téngase en mente que, aunque los problemas a resolver son de muy pequeñas dimensiones, se trata de un gran número de ellos). Podemos plantear esta segunda visión de la siguiente forma:

$$\min_X \left( \frac{x_1 - F_{d_1}^{-1}(\alpha)}{\sigma_{d_1}} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - F_{d_2}^{-1}(\alpha)}{\sigma_{d_2}} \right)^2 + \left( \frac{x_3 - F_{V_1}^{-1}(\alpha)}{\sigma_{V_1}} \right)^2 + \left( \frac{x_4 - F_{V_2}^{-1}(\alpha)}{\sigma_{V_2}} \right)^2$$

siendo  $F_X^{-1}(\cdot)$  la función inversa de la función de distribución de la variable  $X$ . Nótese que, puesto que  $\alpha$  está fijado, estos valores son constantes (además, son los obtenidos como consecuencia de una aplicación estricta de la política). Por tanto, la función resultante es una forma cuadrática, mientras que la función anterior podía ser una función mucho peor. Más adelante se tratará este aspecto con detalle. Acabemos este ejemplo diciendo que la minimización de este problema da lugar al óptimo  $\{67.15, 95.51, 132.85, 73.24\}$ , que devolvería si se aplicase a la primera función un valor sólo ligeramente superior: 0.060886.

### 9.3.3.2 Reajuste de los arcos

Como el ejemplo del apartado anterior ha dejado ver, el paso principal del algoritmo de simulación es compatibilizar los flujos de los arcos con las condiciones impuestas por las aportaciones (y quizá otras). En general, los arcos de descarga, bombeo, vertido y los de almacenamiento no tendrán unos valores apropiados si son proporcionados por la política aplicada al pie de la letra, tomando valores  $x_i$  tal que  $P(X_i \leq x_i) = \alpha$  para cada arco  $i$ , dado que las distribuciones de las aportaciones han sido alteradas por el grado de

dependencia parcial existente entre sí. En consecuencia, no habría balance en el flujo de cada nodo, y la solución no sería aceptable en modo alguno.

La solución que se ha buscado a este problema se ha encontrado en diferentes formas, unas más satisfactorias que otras. Se pueden plantear bajo los siguientes ángulos:

- desde el punto de vista computacional:
  - podemos elegir entre la minimización de la norma del residuo de la probabilidad,
  - o entre la minimización de la norma del residuo de variables estandarizadas.
- desde el punto de vista estratégico:
  - se reajusta el flujo en cada intervalo iterativamente,
  - o se reajusta en una sola vez para todos los intervalos.

El primer punto de vista encuentra una referencia clara en el ejemplo presentado más arriba. En cuanto al segundo, se trata de las dos opciones naturales que se pueden dar, aunque resulta difícil establecer a priori cuál ofrece más ventajas. En pocas palabras, se trata de ver si es mejor resolver muchos problemas pequeños, o uno solo y mayor. De todos modos, hay que dejar claro que no son dos opciones equivalentes, puesto que con la primera, al calcular los valores óptimos de los volúmenes finales en un intervalo, se están fijando los volúmenes iniciales del siguiente intervalo. Este efecto que introduce una cierta jerarquía entre intervalos no se produce con la segunda opción, en la que cada arco de volumen interviene como variable libre en el balance de dos intervalos.

De todas formas, puesto que la resolución conjunta de todo el periodo se asemeja más a la forma de operar de la función objetivo del problema de minimización del CPP, y también por haber observado que se produce una cierta eficiencia computacional al resolver problemas más grandes, nuestras preferencias se han dirigido hacia la segunda alternativa.

Veamos a continuación cómo se aborda el problema de la representación de la función de distribución de una variable de bloques, cuestión que surge cuando se trata la modelización bajo la primera forma de minimización de la norma del residuo. Supongamos que tenemos  $Na$  arcos en la cuenca hidráulica real,  $Nr$  embalses y  $Ni$  intervalos, y  $\mathbf{x}$  representa el vector de variables a optimizar. Si resolvemos un intervalo cada vez, el problema se plantea de la siguiente manera:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{Na+Nr} \left( \bar{F}_{X_i} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) - \alpha \right)^2 \quad (9.1)$$

$$\text{s.t. } B\mathbf{x} = S \quad (9.2)$$

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \quad (9.3)$$

donde  $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$  es una aproximación de  $F_{X_i}(\cdot)$ , de la que se hablará más adelante;  $B$  expresa la matriz de incidencias nodos-arcos de la cuenca hidráulica, sin considerar volúmenes iniciales ni aportaciones, los cuales aparecen en el término  $S$ .  $\alpha$  es un valor aleatorio entre 0 y 1 generado por el simulador y, finalmente (9.3) pone cotas inferiores y superiores a las variables, teniendo en cuenta los valores máximos y mínimos de sus distribuciones.

Si la opción es resolver el problema sobre la cuenca hidráulica replicada temporal-

mente, entonces escribiremos:

$$\min_{\mathbf{x}^*} \sum_{i=1}^{N^*} \left( \overline{F}_{X_i} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) - \alpha_{N(i)} \right)^2 \quad (9.4)$$

$$\text{s.t. } B^* \mathbf{x}^* = S^* \quad (9.5)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^* \leq \mathbf{x}^* \leq \overline{\mathbf{x}}^* \quad (9.6)$$

siendo  $N^* = Na \cdot Ni + Nr(Ni - 1)$ , y  $x^*, B^*, S^*$  y los demás símbolos los correspondientes al problema extendido a todo el periodo. Para beneficiar la estabilidad numérica en la evaluación de  $\overline{F}_{X_i}(\cdot)$  se ha optado por centrar y reducir cada variable, lo cual se efectúa substrayendo la media  $\mu_i$  y dividiendo por la desviación estándar  $\sigma_i$ . La probabilidad  $\alpha_{N(i)}$  depende del intervalo al que se refiera el arco  $i$  (lo cual se denota según  $N(i)$ ); se supone para las volúmenes que están incluidos en el intervalo en el que son volumen final.

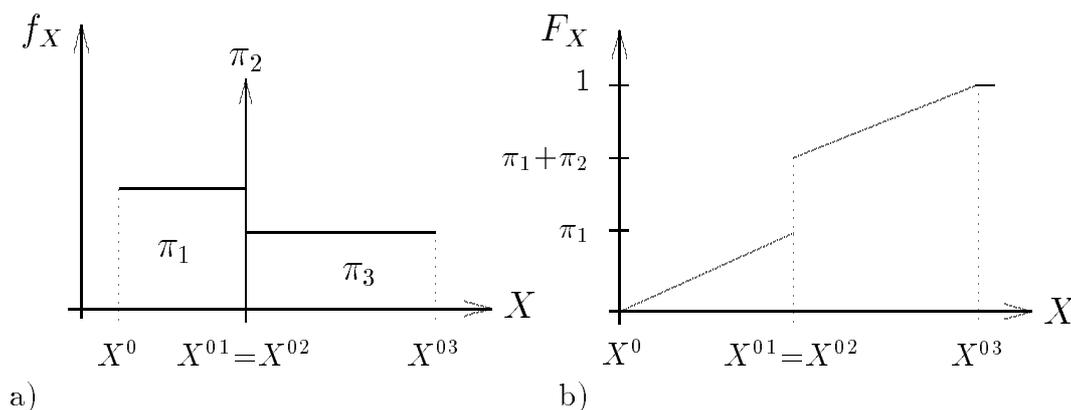
La razón por la que no se utiliza  $F_{X_i}(\cdot)$  es porque no se trata de una función diferenciable, con lo que la resolución de los problemas anteriores se encontraría con muchas dificultades. Por esta causa se ha construido una aproximación continua y derivable de la función de distribución de una variable de bloques, formada a partir de segmentos lineales alternados con funciones no lineales. Estas funciones son polinomios cúbicos, cuyos coeficientes se pueden determinar fácilmente a partir de los siguientes supuestos:

- el polinomio es una función dada por  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$
- los puntos sobre los que se quiere que este polinomio esté definido son el intervalo  $[x_1, x_2]$  (con  $x_1 < x_2$ )
- el valor del polinomio en los extremos del intervalo,  $x_1$  y  $x_2$ , es  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente
- el valor de la pendiente del polinomio en los extremos del intervalo es  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente

Puesto que la evaluación de  $\overline{F}_X(\cdot)$  en los segmentos no lineales lleva consigo un cierto error (solamente la estimación es correcta en los segmentos lineales), se debe intentar que el dominio de definición  $[x_1, x_2]$  de cada curva sea lo más pequeño posible. La asignación de los coeficientes  $c_i, i = 0 \dots 3$  procede de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2(b_2 - b_1) + (x_1 - x_2)(p_1 + p_2)}{(x_1 - x_2)^3} \\ c_2 &= -\frac{(p_1 + 2p_2)x_1^2 + 3(b_2 - b_1)(x_1 + x_2) + (p_1 - p_2)x_1x_2 - (p_2 + 2p_1)x_2^2}{(x_1 - x_2)^3} \\ c_1 &= \frac{x_1x_2(x_1(2p_1 + p_2) + 6(b_2 - b_1) - x_2(2p_2 + p_1)) + p_2x_1^3 - p_1x_2^3}{(x_1 - x_2)^3} \\ c_0 &= -\frac{x_1^3(x_2p_2 - b_2) - x_2^3(x_1p_1 - b_1) + x_1x_2(3(x_1b_2 - x_2b_1) + x_1x_2(p_1 - p_2))}{(x_1 - x_2)^3} \end{aligned} \quad (9.7)$$

La función de distribución  $F_X(\cdot)$  de una variable de bloques  $X$  tiene la expresión que aparece en (3.2) y la forma que ilustra la Fig. 3.1.b). Las discontinuidades en la derivada a las que se ha hecho mención sólo se dan en los cuantiles  $X^{0k}, k = 0 \dots K - 1$ , pero también es posible que en uno de estos puntos  $F_X(\cdot)$  pierda la continuidad si se produce una acumulación de probabilidad puntual. Cuando esto ocurre, se tiene que  $X^{0k-1} = X^{0k}$



**Figura 9.3 :** Variables de bloques con acumulación de probabilidad. a) función de densidad. b) función de distribución.

para un cierto  $k$ , lo que equivale a decir que  $X^k = 0$ .

En la Fig. 9.3 se aprecia a qué nos estamos refiriendo. La figura a) representa una función de densidad en la que coinciden el cuantil  $\pi_1$  y el cuantil  $\pi_1 + \pi_2$ ; como este punto resulta tener una probabilidad igual a  $\pi_2$ , representamos su densidad —infinita— como un impulso. En la figura b) la misma idea es representada a través de la función de distribución de dicha variable, en la que destaca el salto en el punto en cuestión, dado que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_X(X^{01} - \varepsilon) = \pi_1$$

$$F_X(X^{01}) = F_X(X^{02}) = \pi_1 + \pi_2$$

Las discontinuidades en la derivada son relativamente simples de salvar y, de hecho, es suficiente con un segmento parabólico. No es difícil comprobar que en las ecuaciones (9.7) se anula el coeficiente de tercer grado  $c_3$  si se dan las siguientes condiciones:

- $F_X(\cdot)$  es continua en  $X^{0k}$
- $X^{0k} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ , es decir, el cuantil está en el centro del intervalo dominio de la curva

Este hecho tiene su importancia ya que, en general, la distancia entre  $x_1$  y  $x_2$  es muy reducida y, en consecuencia, los coeficientes de cada polinomio (que son inversamente proporcionales al cubo de esta distancia) toman valores grandes, pudiendo ser causa de inestabilidad numérica en su tratamiento posterior. Con el empleo de formas cuadráticas, este riesgo pasa a ser mínimo.

El mayor problema viene cuando se produce una acumulación de probabilidad. En ese caso hay que recurrir forzosamente al ajuste de una curva de tercer grado. Como es habitual que se generen políticas de flujos con coincidencia de cuantiles (y es un efecto inevitable, ya que en el óptimo abundan las variables que se encuentran en su cota mínima de 0), se ha observado que el uso de este tipo de aproximación de la función de distribución, si bien obtiene resultados válidos, conlleva una cierta “lentitud” en la resolución de los problemas, y no pocas veces se acaba el proceso sin cumplir las condiciones que se exigen a un mínimo local.

Por tanto, el método que ha merecido más confianza es el que se puede plantear de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{i=1}^{Na+Nr} \left( \frac{x_i - F_{X_i}^{-1}(\alpha)}{\sigma_{X_i}} \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & (9.2) \\ & (9.3) \end{aligned} \quad (9.8)$$

o bien, según el modelo extendido temporalmente:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{i=1}^{N^*} \left( \frac{x_i - F_{X_i}^{-1}(\alpha_{N(i)})}{\sigma_{X_i}} \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & (9.5) \\ & (9.6) \end{aligned} \quad (9.9)$$

que poseen la buena cualidad de tener como función objetivo una expresión cuadrática convexa. Evidentemente, estos problemas son resueltos con muchísima mayor rapidez y garantía que aquellos.

### 9.3.3.3 Algoritmo de simulación

El núcleo de un simulador es un procedimiento que se repite un cierto número de veces, y que produce resultados independientes entre sí partiendo de la misma situación inicial. En nuestro caso debemos contar con toda la información relativa a la cuenca hidráulica, incluyendo una política (no importa si es óptima o no) y las distribuciones de probabilidad para las aportaciones, con sus FDC, lo que podemos considerar como la información principal.

Este proceder repetitivo produce una muestra aleatoria simple de valores de coste. Debido a la implementación del simulador, no es evidente que el coste que se genera de esta manera sea el mismo *coste* que los programas de optimización de la hidrogenación intentan minimizar, actuando sobre su esperanza. En efecto, la función objetivo (cualquiera de ellas) de estos programas es una codificación de una expresión matemática que identificamos como *esperanza del CPP*. Estrictamente hablando, para calcular la esperanza de una variable es necesario conocer su función de densidad y hallar una determinada integral. Sabiendo que nuestras expresiones de la esperanza del coste no son más que meras aproximaciones, supone tomarse un poco de libertad denotar como  $E[C]$  este valor. Hasta ahora este enfoque no resultaba incoherente; sin embargo, ahora conviene precisar un poco mejor. Por esta razón, al valor de la función objetivo (supuestamente, el coste térmico de producción esperado) le llamaremos  $\tilde{c}$ . Y entenderemos que  $\mathcal{C}$  es la variable aleatoria de coste según se ha implementado en el simulador, y que por simulación somos capaces de extraer valores de esta variable, los cuales denotamos como  $c_r$ . Así:

$$\Omega = \{c_r \mid r = 1 \dots Nc\}$$

es una muestra de valores extraídos de  $\mathcal{C}$  mediante  $Nc$  repeticiones del simulador. Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, entonces con las observaciones de  $\Omega$  se

puede hallar un intervalo de confianza para la esperanza de  $\mathcal{C}$ :

$$\left[ \bar{c}_{Nc} - 1.96 \frac{s_c}{\sqrt{Nc}}, \bar{c}_{Nc} + 1.96 \frac{s_c}{\sqrt{Nc}} \right]$$

donde  $\bar{c}_{Nc}$  es la media muestral de  $\Omega$ , y  $s_c$  su desviación estándar. Dentro de este intervalo se espera encontrar, en el 95% de las ocasiones, el valor de  $\tilde{c}$ , si es que nuestra codificación de  $E[C]$  es correcta.

Expondremos a continuación un esquema de algoritmo para el núcleo del simulador cuando se consideran separadamente los intervalos:

- 0 Se supone que estamos en la repetición  $r$  ( $1 \leq r \leq Nc$ ):
- 1 Inicializar el contador de intervalo  $i$  a 1; inicializar el coste  $c_r = 0$ ; inicializar  $\mathbf{v}$  con el volumen inicial, conocido para cada embalse.
- 2 Obtener un valor  $\alpha$  de una distribución  $U[0, 1]$ ; extraer el cuantil  $\alpha$  de cada distribución de aportaciones correspondientes al intervalo  $i$ .
- 3 Hallar el flujo para  $\mathbf{V}$  y todos los arcos que forman parte de la cuenca, de acuerdo con la política presente.
- 4 Calcular  $g$ , suma de las generaciones producidas por cada arco de descarga, usando  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{V}$  como volumen inicial y final en el intervalo  $i$  respectivamente.
- 5 Incrementar  $c_r$  con el coste de producción dado por  $\lambda_{1,i}g + \lambda_{2,i}g^2$ .
- 6 Si  $i = Ni$  entonces retornar  $c_r$  y **final**. Si no, seguir con el paso 7.
- 7 Encontrar la distribución condicional de las aportaciones naturales del intervalo  $i + 1$  respecto a los valores presentes de aportación; tomar  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{V}$ ; incrementar  $i$  en 1; volver al paso 2.

Se entiende que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{V}$  siguen teniendo el sentido que se les ha asignado en el capítulo 8, si bien en este contexto son un vector de dimensión  $Nr$ , como sugiere el hecho de que aparezcan en negrita. Podemos señalar que es en el paso 3 donde se resuelve el problema que puede venir dado por (9.1)-(9.3) o por (9.8),(9.2),(9.3), según sea el método empleado para reajustar los flujos.

Exponemos a continuación cómo se calcula un cuantil de una distribución de bloques:

- 0 Para determinar el cuantil  $q_\alpha$  de una variable de bloques  $X$ :
- 1 Encontrar  $j$  tal que:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \pi_k \leq \alpha < \sum_{k=1}^j \pi_k$$

2] Calcular:

$$q_\alpha = \sum_{k=0}^{j-1} X^k + \frac{\alpha - \sum_{k=1}^{j-1} \pi_k}{\pi_j} X^j$$

El esquema basado en el sistema alternativo es como sigue:

0] Se supone que estamos en la iteración  $r$  ( $1 \leq r \leq Nc$ ):

1] Para  $i = 1 \dots N_i$  repetir:

1.1] Obtener un valor  $\alpha_i$  de una distribución  $U[0, 1]$ ; extraer el cuantil  $\alpha_i$  de cada distribución de aportaciones correspondientes al intervalo  $i$ . Si  $i = 1$  escogemos la distribución de partida; si no, la distribución condicionada de las aportaciones (calculada en la iteración anterior).

1.2] Encontrar la distribución condicional de las aportaciones naturales del intervalo  $i + 1$  respecto a los valores presentes de aportación.

2] Hallar el flujo para los arcos de la cuenca replicada (incluyendo los de almacenamiento), de acuerdo con la política presente.

3] Inicializar el coste  $c_r = 0$ ; para  $i = 1 \dots N_i$  repetir:

3.1] Calcular  $g$ , suma de las generaciones producidas por cada arco de descarga y los volúmenes  $\mathbf{V}_{i-1}$  y  $\mathbf{V}_i$ .

3.2] Incrementar  $c_r$  con el coste de producción dado por  $\lambda_{1,i}g + \lambda_{2,i}g^2$ .

4] Retornar  $c_r$  y final.

En este caso, la notación más apropiada es la original, en la que se indexa a los arcos de volumen respecto al intervalo; indicar nuevamente que se trata de vectores de dimensión  $Nr$ . Por otro lado, el paso 2] es el lugar en donde se resuelven los problemas descritos según (9.4)-(9.6) o por (9.9),(9.5),(9.6).

Sobre ambos esquemas se puede hacer una observación. Cuando un procedimiento de simulación se ejecuta, asume que conoce las distribuciones de probabilidad de los fenómenos aleatorios que intervienen en el sistema que está siendo simulado o, por lo menos, una aproximación de ellas. En todo caso, el procedimiento utiliza algún método para generar valores que se supone proceden de tales distribuciones, lo cual no es ningún problema puesto que los métodos empleados (por ejemplo, para una variable normal, una gamma o una beta) son perfectamente fiables. En el modelo que nos ocupa, las variables interaccionan entre sí, ya que están sometidas a unas restricciones de balance de flujo, de modo que el clásico procedimiento de generar los valores al azar no es válido, a pesar de que generarlos a partir de una variable de bloques no presenta la menor dificultad. Actualmente, las extracciones de las variables de flujo (sin contar con las aportaciones) proceden del resultado de un problema de optimización. La duda que trae consigo el procedimiento presentado es si se puede garantizar que las variables implicadas se generan aleatoriamente y, por tanto, son completamente representativos los valores de coste así obtenidos. Los resultados que se ofrecen no permiten responder con claridad esta cuestión ya que, si bien se ha comprobado que existe algún sesgo de signo indeterminado en la media de los valores generados, es

posible que los costes finales resulten ser efectivamente representativos de los costes reales. Por otra parte, este defecto que se comenta afecta al objetivo primordial, que era verificar la desviación de la codificación del coste de producción esperado.

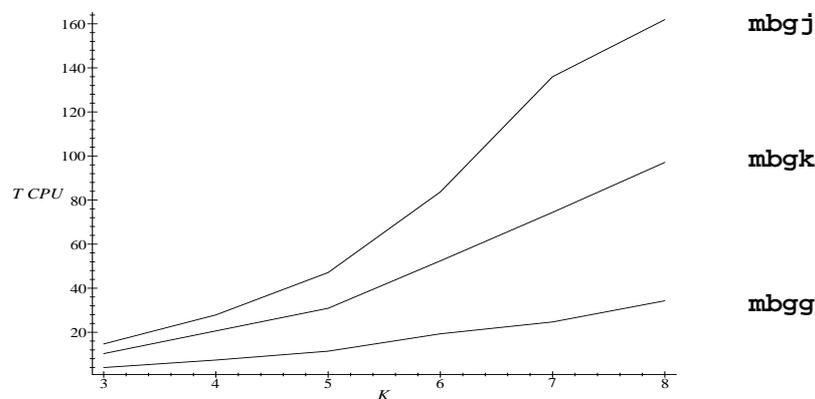
### 9.3.4 Resultados computacionales

Las tablas 9.VII-9.IX presentan la primera visión relativa al comportamiento de los programas que han optimizado la situación descrita anteriormente, y un paso de simulación posterior, mostrando:

- el valor del óptimo de la respectiva función objetivo  $\tilde{c}$ , y
- un intervalo de confianza para el coste medio, deducido a partir de la política óptima resultante.

El valor de  $\rho$  (la correlación entre generaciones del mismo intervalo para calcular la esperanza del producto) utilizado en los programas `mbgj` y `mbgk` ha sido de 1. Como veremos, no parece interesante probar con otros valores, al menos en el caso tomado como ejemplo.

El método de simulación ha considerado el procedimiento expresado en (9.9), (9.5), (9.6). Las simulaciones que han dado lugar a los intervalos de confianza han empleado todas ellas 5000 extracciones de coste, a partir de las cuales se ha calculado el intervalo. La elección de este valor ha sido arbitraria; sin embargo, se ha tenido en cuenta principalmente que se tratara de un valor elevado, con el fin de conseguir una dispersión limitada en el intervalo de confianza.



**Figura 9.4 :** Tiempos de ejecución (segs.) de los programas para hallar el óptimo.

La primera conclusión que cobra fuerza es que la versión `mbgg` obtiene unos resultados cuya evaluación de la función objetivo es netamente diferente de los correspondientes a las otras dos versiones, e independientemente del número de artículos empleado. Se observa que las primeras soluciones son del orden de  $-1.9 \cdot 10^{10}$ , mientras que el resto fluctúan alrededor de  $-1.6 \cdot 10^{10}$ . Sin embargo, los intervalos de confianza obtenidos —bastante similares— prueban que las soluciones en sí no deben ser muy distintas, y que lo más verosímil es que la diferencia se deba a la manera de evaluar el CPP. Por otra parte, los tiempos de ejecución más rápidos son, como se esperaba, los de `mbgg`, seguido por `mbgk` y

por mbgj; en media, mbgg es 2.77 veces más rápido que mbgk, y 4.36 veces más que mbgj (ver Fig. 9.4).

Tabla 9.VII. Resultados de mbgg e intervalos de confianza

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-1.92562 \cdot 10^{10}$	$(-1.58902 \cdot 10^{10}, -1.54912 \cdot 10^{10})$
4	$-1.88142 \cdot 10^{10}$	$(-1.58484 \cdot 10^{10}, -1.54732 \cdot 10^{10})$
5	$-1.90217 \cdot 10^{10}$	$(-1.62216 \cdot 10^{10}, -1.58669 \cdot 10^{10})$
6	$-1.91574 \cdot 10^{10}$	$(-1.61996 \cdot 10^{10}, -1.58575 \cdot 10^{10})$
7	$-1.92081 \cdot 10^{10}$	$(-1.63587 \cdot 10^{10}, -1.60234 \cdot 10^{10})$
8	$-1.92619 \cdot 10^{10}$	$(-1.65154 \cdot 10^{10}, -1.61851 \cdot 10^{10})$

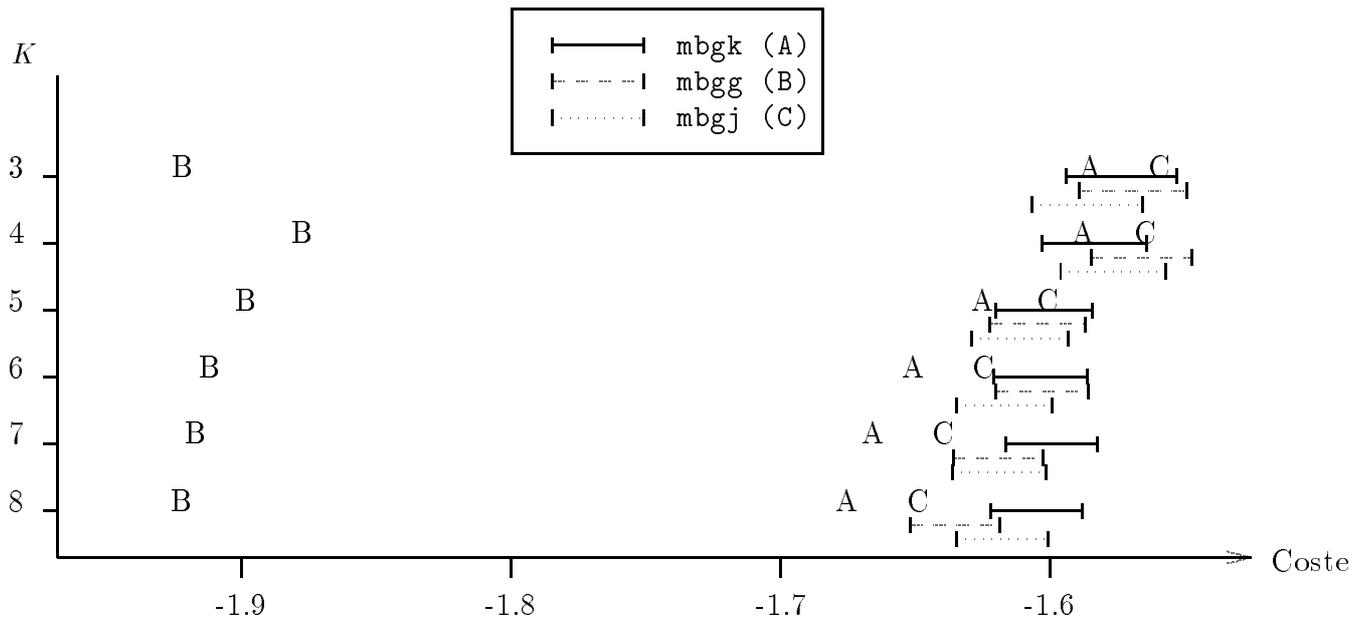
Tabla 9.VIII. Resultados de mbgj ( $\rho = 1$ ) e intervalos de confianza

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-1.56368 \cdot 10^{10}$	$(-1.60645 \cdot 10^{10}, -1.56576 \cdot 10^{10})$
4	$-1.56866 \cdot 10^{10}$	$(-1.59593 \cdot 10^{10}, -1.55711 \cdot 10^{10})$
5	$-1.60485 \cdot 10^{10}$	$(-1.62897 \cdot 10^{10}, -1.59300 \cdot 10^{10})$
6	$-1.62876 \cdot 10^{10}$	$(-1.63437 \cdot 10^{10}, -1.59906 \cdot 10^{10})$
7	$-1.64362 \cdot 10^{10}$	$(-1.63603 \cdot 10^{10}, -1.60128 \cdot 10^{10})$
8	$-1.65275 \cdot 10^{10}$	$(-1.63442 \cdot 10^{10}, -1.60053 \cdot 10^{10})$

Tabla 9.IX. Resultados de mbgk ( $\rho = 1$ ) e intervalos de confianza

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-1.58936 \cdot 10^{10}$	$(-1.59396 \cdot 10^{10}, -1.55303 \cdot 10^{10})$
4	$-1.59200 \cdot 10^{10}$	$(-1.60301 \cdot 10^{10}, -1.56410 \cdot 10^{10})$
5	$-1.62914 \cdot 10^{10}$	$(-1.62013 \cdot 10^{10}, -1.58424 \cdot 10^{10})$
6	$-1.65516 \cdot 10^{10}$	$(-1.62076 \cdot 10^{10}, -1.58604 \cdot 10^{10})$
7	$-1.66987 \cdot 10^{10}$	$(-1.61640 \cdot 10^{10}, -1.58263 \cdot 10^{10})$
8	$-1.67963 \cdot 10^{10}$	$(-1.62204 \cdot 10^{10}, -1.58819 \cdot 10^{10})$

En la Fig. 9.5 se muestra la misma información que en las tablas 9.VII-IX (aunque los valores numéricos se hallan escalados por un factor  $\cdot 10^{10}$ ); Las letras A, B y C se refieren al valor de  $\tilde{c}$ , y los segmentos dibujados reproducen los respectivos intervalos de confianza para cada uno de los valores de  $K$ . Así, los segmentos con línea continua están asociados a la letra A y a la salida de mbgk, los que aparecen con línea discontinua corresponden a la B y a mbgg, y los de línea punteada a la C y a mbgj. Resulta evidente la diferencia entre los óptimos de mbgg y los restantes.



**Figura 9.5 :** Resultados de la optimización e intervalos de confianza. Las letras A, B y C se corresponden respectivamente con los resultados de **mbgk**, **mbgg** y **mbgj** ( $\rho = 1$ ); los segmentos son los intervalos de confianza respectivos.

Si bien la impresión de que el método original infravalora el coste de producción térmica es correcta, vale la pena apuntar que los otros dos métodos tampoco parecen evaluar correctamente, al menos, según lo que establecen los intervalos de confianza encontrados por el procedimiento de simulación. Según los resultados obtenidos, el valor  $\tilde{c}$  procedente de **mbgj** entra dentro del intervalo de confianza con  $K=4, 5$  y  $6$ , mientras que el óptimo de **mbgk** sólo entra con  $K=3$  y  $4$ . Nuestra experiencia nos ha mostrado que con cuencas más pequeñas se pueden obtener resultados todavía menos convincentes, si bien es difícil establecer si la causa se debe al tamaño de la cuenca, a las aportaciones presentes o más bien a la magnitud de la política (si el método de simulación carece, por construcción, de la robustez precisa, alguno de estos puntos puede afectarle negativamente). También el azar de la simulación puede intervenir de manera importante, obteniendo intervalos diferentes y trastocando los resultados anteriores. No obstante, la variabilidad de la simulación es limitada, de modo que con el tamaño de muestra escogido se pueden hacer conclusiones con una base suficientemente sólida. Conviene tener presente que la variabilidad observable en los intervalos de la Fig. 9.5 es falsa, ya que cada caso (según programa o número  $K$ ) se basa en una solución diferente, la propia, por lo cual no son comparables.

Respecto a los modelos alternativos, se ha de notar que el valor del CPP devuelto por **mbgk**, que adopta la hipótesis de dependencia fuerte entre las variables, siempre está por debajo del de **mbgj**, el cual supone una hipótesis de independencia entre las variables. Tal como se observó en la simulación del caso simple, en el principio del capítulo, el modelo con dependencia parcial es un caso intermedio entre el que ofrece valores más grandes (negativos, en términos de coste) para la implementación original y los menores para el caso que trata con independencia. Con respecto a la referencia que supone el intervalo de confianza, este último es el caso que resulta mejor estimado.

Es interesante hacer notar cómo influye el uso de  $K$  en el resultado de los programas. Si exceptuamos el que proviene de tres artículos, *mbgg* consigue óptimos similares, ligeramente crecientes —en valor absoluto— pero tendiendo aparentemente a algún valor estable. Un análisis semejante se desprende de los resultados de las versiones *mbgj* y *mbgk*. En cualquier caso, las soluciones obtenidas con un número pequeño de artículos se manifiestan como las más sensibles y posiblemente son las que contienen el mayor error. Tres o cuatro artículos pueden ser insuficientes, aunque de la experiencia ganada por los años se tiene la impresión de que incrementar el valor de  $K$  a valores mayores que los que aquí aparecen no compensaría el coste derivado en tiempo y recursos computacionales requeridos para resolver problemas de esta clase; cuestión aparte es que, en problemas hidráulicos, no abundan los datos históricos (en este ejemplo, las distribuciones de aportaciones se han derivado a partir de una recopilación de 19 años),

Puesto que la simulación no parte de que la política en consideración es óptima o no, es posible adoptar una función diferente que la del coste  $\mathcal{C}$ . En este caso resulta ilustrativo mostrar el coste separado en dos partes: la primera corresponde a la componente lineal, asociada a los coeficientes  $\lambda_1$ , que sólo toma en cuenta la esperanza de la generación. Lo denotaremos como  $\lambda_1 E[G]$ . La segunda parte es la componente cuadrática, ligada a los coeficientes  $\lambda_2$ , que considera las esperanzas del cuadrado de la generación y también del producto de generaciones. Se denotará como  $\lambda_2 E[G^2]$ . A continuación, se muestran los resultados obtenidos con nuevas simulaciones, a partir de las mismas políticas, pero teniendo en cuenta separadamente las componentes de coste (las simulaciones anteriores, las de primer grado y las de segundo grado son independientes); en las tablas 9.X a XII aparecen los datos referidos a la componente lineal, y en las tablas 9.XIII a XV las de la componente cuadrática.

Tabla 9.X. Término lineal de *mbgg* e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_1 E[G]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-2.51924 \cdot 10^{10}$	$(-2.30621 \cdot 10^{10}, -2.23349 \cdot 10^{10})$
4	$-2.42789 \cdot 10^{10}$	$(-2.26534 \cdot 10^{10}, -2.19338 \cdot 10^{10})$
5	$-2.42835 \cdot 10^{10}$	$(-2.31482 \cdot 10^{10}, -2.24493 \cdot 10^{10})$
6	$-2.42445 \cdot 10^{10}$	$(-2.29915 \cdot 10^{10}, -2.23069 \cdot 10^{10})$
7	$-2.41675 \cdot 10^{10}$	$(-2.28957 \cdot 10^{10}, -2.22090 \cdot 10^{10})$
8	$-2.42190 \cdot 10^{10}$	$(-2.26865 \cdot 10^{10}, -2.20138 \cdot 10^{10})$

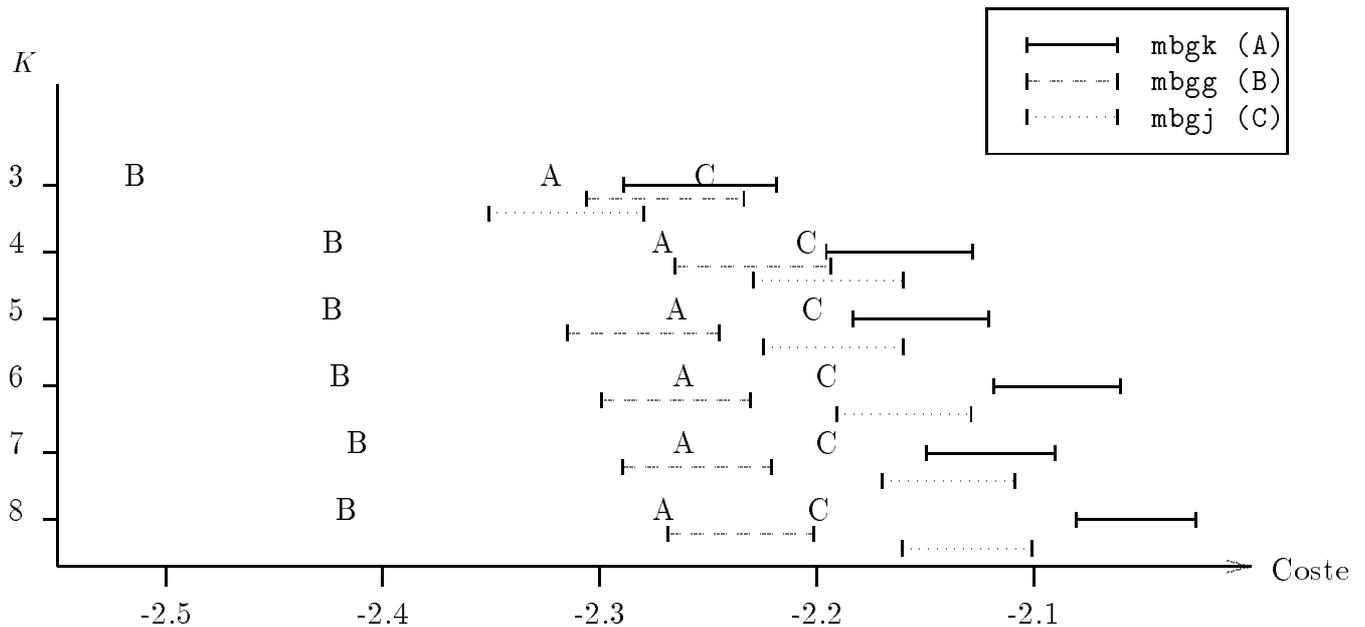
Las Fig. 9.6 y 9.7 muestran gráficamente los resultados expuestos en forma tabular. El análisis de la parte lineal tiene interés, ya que esta componente es dominante sobre la parte cuadrática, generalmente de bastante menor peso. El esquema observado en la Fig. 9.5 se reproduce de forma parecida en la Fig. 9.6, si bien hay que destacar que la distancia existente entre las soluciones de *mbgg* por un lado y *mbgj* y *mbgk* por el otro no está tan marcada (efecto incrementado por el hecho de que los dos métodos llamados alternativos también se distancian entre sí). Se respeta el orden B-A-C que ya se había hecho notar antes. Así mismo, los intervalos de confianza se han ampliado considerablemente (señal de que ha aumentado la variancia del “coste” lineal). De hecho, es lógico que sea así: el coste es el resultado de la suma de dos términos de signos opuestos, y muy relacionados

Tabla 9.XI. Término lineal de mbgj e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_1 E[G]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-2.25688 \cdot 10^{10}$	$(-2.35127 \cdot 10^{10}, -2.27966 \cdot 10^{10})$
4	$-2.21010 \cdot 10^{10}$	$(-2.22905 \cdot 10^{10}, -2.16028 \cdot 10^{10})$
5	$-2.20703 \cdot 10^{10}$	$(-2.22477 \cdot 10^{10}, -2.15998 \cdot 10^{10})$
6	$-2.20046 \cdot 10^{10}$	$(-2.19103 \cdot 10^{10}, -2.12898 \cdot 10^{10})$
7	$-2.20083 \cdot 10^{10}$	$(-2.16975 \cdot 10^{10}, -2.10863 \cdot 10^{10})$
8	$-2.20462 \cdot 10^{10}$	$(-2.16063 \cdot 10^{10}, -2.10100 \cdot 10^{10})$

Tabla 9.XII. Término lineal de mbgk e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_1 E[G]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$-2.32765 \cdot 10^{10}$	$(-2.28926 \cdot 10^{10}, -2.21848 \cdot 10^{10})$
4	$-2.27625 \cdot 10^{10}$	$(-2.19567 \cdot 10^{10}, -2.12824 \cdot 10^{10})$
5	$-2.26987 \cdot 10^{10}$	$(-2.18337 \cdot 10^{10}, -2.12062 \cdot 10^{10})$
6	$-2.26628 \cdot 10^{10}$	$(-2.11841 \cdot 10^{10}, -2.06003 \cdot 10^{10})$
7	$-2.26638 \cdot 10^{10}$	$(-2.14980 \cdot 10^{10}, -2.09021 \cdot 10^{10})$
8	$-2.27581 \cdot 10^{10}$	$(-2.08058 \cdot 10^{10}, -2.02530 \cdot 10^{10})$



**Figura 9.6 :** Término lineal del CPP e intervalos de confianza. Las letras A, B y C se corresponden respectivamente con los resultados de mbgk, mbgg y mbgj ( $\rho = 1$ ); los segmentos son los intervalos de confianza respectivos.

entre ellos (de manera semejante a como lo serían  $-E[G]$  y  $E[G^2]$ ). Como su relación es, en términos estadísticos, negativamente correlacionada, resulta que la variancia de la suma

Tabla 9.XIII. Término cuadrático de mbgg e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_2 E[G^2]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$0.59361 \cdot 10^{10}$	( $0.67227 \cdot 10^{10}$ , $0.70669 \cdot 10^{10}$ )
4	$0.54646 \cdot 10^{10}$	( $0.65500 \cdot 10^{10}$ , $0.69281 \cdot 10^{10}$ )
5	$0.52617 \cdot 10^{10}$	( $0.65691 \cdot 10^{10}$ , $0.69399 \cdot 10^{10}$ )
6	$0.50870 \cdot 10^{10}$	( $0.61618 \cdot 10^{10}$ , $0.65251 \cdot 10^{10}$ )
7	$0.49594 \cdot 10^{10}$	( $0.58651 \cdot 10^{10}$ , $0.62333 \cdot 10^{10}$ )
8	$0.49571 \cdot 10^{10}$	( $0.58156 \cdot 10^{10}$ , $0.61796 \cdot 10^{10}$ )

Tabla 9.XIV. Término cuadrático de mbgj e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_2 E[G^2]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$0.69320 \cdot 10^{10}$	( $0.66145 \cdot 10^{10}$ , $0.69334 \cdot 10^{10}$ )
4	$0.64144 \cdot 10^{10}$	( $0.60930 \cdot 10^{10}$ , $0.64194 \cdot 10^{10}$ )
5	$0.60219 \cdot 10^{10}$	( $0.56617 \cdot 10^{10}$ , $0.59661 \cdot 10^{10}$ )
6	$0.57170 \cdot 10^{10}$	( $0.51481 \cdot 10^{10}$ , $0.54312 \cdot 10^{10}$ )
7	$0.55721 \cdot 10^{10}$	( $0.50733 \cdot 10^{10}$ , $0.53606 \cdot 10^{10}$ )
8	$0.55187 \cdot 10^{10}$	( $0.48560 \cdot 10^{10}$ , $0.51243 \cdot 10^{10}$ )

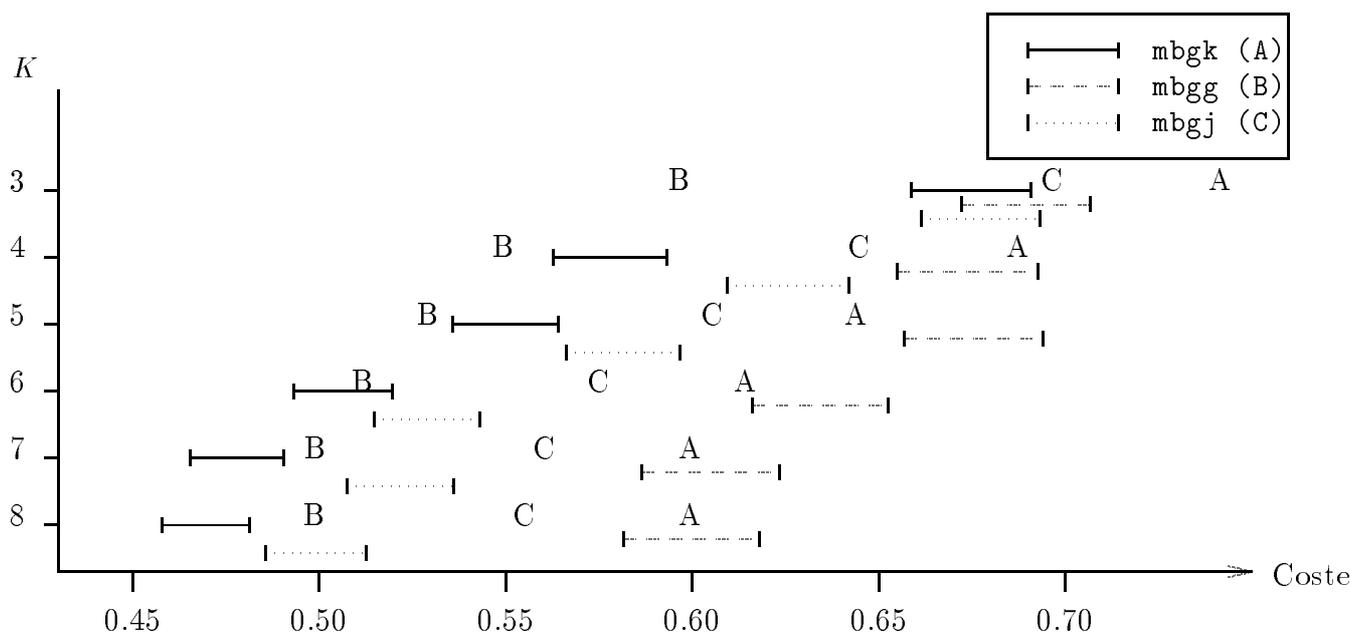
Tabla 9.XV. Término cuadrático de mbgk e intervalos de confianza

$K$	$\lambda_2 E[G^2]$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )
3	$0.73828 \cdot 10^{10}$	( $0.65859 \cdot 10^{10}$ , $0.69070 \cdot 10^{10}$ )
4	$0.68425 \cdot 10^{10}$	( $0.56279 \cdot 10^{10}$ , $0.59321 \cdot 10^{10}$ )
5	$0.64072 \cdot 10^{10}$	( $0.53569 \cdot 10^{10}$ , $0.56394 \cdot 10^{10}$ )
6	$0.61111 \cdot 10^{10}$	( $0.49318 \cdot 10^{10}$ , $0.51943 \cdot 10^{10}$ )
7	$0.59651 \cdot 10^{10}$	( $0.46537 \cdot 10^{10}$ , $0.49050 \cdot 10^{10}$ )
8	$0.59618 \cdot 10^{10}$	( $0.45782 \cdot 10^{10}$ , $0.48132 \cdot 10^{10}$ )

es menor que la variancia de las partes.

Con excepción del caso con sólo tres artículos, es notable el que los valores de  $\lambda_1 E[G]$  de cada caso no parezcan depender apenas de  $K$ . Aproximadamente, encontramos para mbgg un término  $-2.42 \cdot 10^{10}$ , para mbgj un término  $-2.20 \cdot 10^{10}$ , y para mbgk un término  $-2.27 \cdot 10^{10}$ . En cuanto a los intervalos de confianza, no resultan ser una estimación demasiado buena: tan sólo en dos casos de mbgj el intervalo contiene a la componente lineal. Visualmente, el método mbgk se encuentra bastante más lejos de su intervalo que en el caso ilustrado en la Fig. 9.5, lo cual no ocurre con el método de la hipótesis de independencia.

A la hora de interpretar la componente cuadrática, observamos una gráfica muy dispersa, tanto en lo que se refiere a los valores de la función objetivo como a los intervalos de confianza: ningún programa presenta una secuencia de valores centrados, pues manifiestan una tendencia clara a decrecer cuando  $K$  aumenta, tendencia tal vez estacionaria para los valores de  $K$  más altos. Como este efecto ya se había observado sobre  $\tilde{c}$ , y teniendo



**Figura 9.7 :** Término cuadrático del CPP e intervalos de confianza. Las letras A, B y C se corresponden respectivamente con los resultados de `mbgk`, `mbgg` y `mbgj` ( $\rho = 1$ ); los segmentos son los intervalos de confianza respectivos.

en cuenta la señalada constancia de  $\lambda_1 E[G]$ , podemos constatar que el origen de aquella tendencia se debe al cálculo de lo que denotamos como  $\lambda_2 E[G^2]$ . De todos modos, no se dispone de ninguna hipótesis acerca de por qué este valor tiende a disminuir si aumenta el número de artículos: no hay que olvidar que cada caso es un óptimo de un problema diferente y que, por ello, son difícilmente comparables entre sí.

Las secuencias respectivas de los intervalos de confianza siguen un patrón muy similar al de las componentes cuadráticas. Esto confirma al menos que las políticas correspondientes devuelven efectivamente menores valores en la componente cuadrática a medida que  $K$  crece (dentro del rango considerado). Sin embargo, es muy destacable lo siguiente: en primer lugar, se observa que los distintos métodos ahora se disponen en el orden B-C-A; no en el anterior B-A-C, ni tampoco en la otra posibilidad lógica, teniendo en cuenta que estos valores se encuentran en el semieje opuesto, C-A-B. En segundo lugar, se aprecia un considerable desfase entre los valores de la componente cuadrática y el intervalo para los métodos `mbgg` (como se podía esperar), y también para el `mbgk`. La estimación por intervalo para la componente  $\lambda_2 E[G^2]$  según el tercer método, sin ser aceptable, es bastante más precisa que la de estos dos.

Nuevamente, no resulta sencillo señalar si estos resultados se encuentran afectados por la magnitud de las soluciones de partida, por las dimensiones del problema o por un posible sesgo del simulador (independientemente del otro sesgo, el que presentan los métodos de evaluación del CPP). Mediante el control de los valores que se generan para cada arco en la red, puede estudiarse con posterioridad la verosimilitud de la generación de variables a partir de la media y variancia muestrales (existen métodos más apropiados para aceptar si una muestra se genera de acuerdo a una distribución dada, pero el sistema implementado es suficiente para detectar sesgo si se da). Como se conoce por la política la

distribución de bloques de cada variable y, por tanto, su media y variancia teórica, puede verificarse a través de técnicas estadísticas de contrastes de hipótesis si para cada muestra —de valores de descarga, volumen, aportación, etc.— son aceptables como auténticos los citados valores teóricos.

En principio, sólo se ha contrastado la esperanza, y en la tabla 9.XVI se muestran unos ejemplos de los resultados obtenidos en una simulación concreta. De los resultados analizados en las experiencias llevadas a cabo, se pueden extraer dos ideas precisas:

- o las aportaciones se generan correctamente; de lo que se deduce la consistencia del mecanismo de generación a partir de distribuciones condicionadas. Esto también significa que se dan las condiciones iniciales (estocásticas) previstas.
- o las variables restantes, en su mayor parte, no se generan adecuadamente.

A continuación se aclararán estas primeras conclusiones. Diremos primero que el criterio utilizado para calificar de adecuada o no adecuada una muestra es el resultado de un contraste de hipótesis, mediante la observación del *nivel de significación*, que interviene como una medida de la verosimilitud de que dicha muestra proceda de una variable con esperanza igual al valor que se está sometiendo a prueba, la esperanza de la variable de bloques. Para nuestros propósitos, hubiera sido suficiente un nivel de significación mayor que el 5% para aceptar. Sin embargo, el número relativamente alto de experiencias realizadas unido a la posible variabilidad del método de reajuste provocan unos niveles insuficientes, lo cual no significa que los valores de la media sean intolerables desde otros puntos de vista diferentes del estadístico.

La tabla 9.XVI muestra algunos resultados procedentes de una simulación con  $K=7$ . Pertenecen a la política determinada por `mbgk` para el segundo intervalo. Los códigos que preceden al nombre del arco corresponden a su tipo: D si son de descarga, V si son de vertido, A si son de aportación, M si son de almacenamiento (al final del intervalo). ZZZ es equivalente a un embalse situado aguas abajo, fuera de la cuenca. Algunos valores del nivel de significación son de signo negativo, aunque ello se debe a un simple error de precisión numérica ya que su mínimo es 0. Se aprecia que las únicas muestras con una media aceptable son las de las aportaciones; el resto registra diferencias que unas veces son a favor de la media muestral y otras de la esperanza. En el caso de la variancia, se ha observado que la muestral suele ser menor que la que en teoría le corresponde, especialmente si ésta es un valor elevado.

Estas discrepancias posiblemente introducen un factor perturbador en los resultados del simulador, lo cual nos obliga a examinar éstos con mucha prudencia. La coherencia presente en los datos de las aportaciones permite suponer que las diferencias observadas no se deben a un déficit de agua entrante en cada embalse. Sin embargo, resulta muy difícil establecer los efectos que puedan tener las irregularidades en la asignación de valores a los arcos de la red, ya que las variables se hallan muy relacionadas entre sí a causa de sus conexiones por causa de la red. Si una variable de descarga tiene déficit en media, ello no implica necesariamente un decremento en la generación, ya que el agua no turbinada permanece en el embalse aumentando con ello el salto. Con bastante seguridad, la variancia del CPP calculado por simulación es menor de lo que debiera ser, puesto que en muchas variables se produce este hecho; entonces, la amplitud del intervalo de confianza es menor de lo que tendría que ser y, tal vez, aceptaríamos algunos casos que en principio se rechazarían.

Tabla 9.XVI. Ejemplo de contrastes sobre la media de los arcos

Int.	Arco	Media muestr.	Media teór.	Var. muestr.	Var. teór.	P-value
2	V:A→B	67.272	50.622	17218.599	17938.166	$2.22045 \cdot 10^{-15}$
2	D:A→B	196.306	214.152	24708.290	25917.984	$-3.77476 \cdot 10^{-15}$
2	V:B→C	112.957	86.707	47547.932	52626.391	$-3.9968 \cdot 10^{-15}$
2	D:B→C	208.497	218.686	10804.561	10463.950	$4.69702 \cdot 10^{-12}$
2	V:C→D	135.986	105.994	65653.948	78642.945	$-2.66454 \cdot 10^{-15}$
2	D:C→D	353.564	371.214	55022.884	59463.832	$1.08096 \cdot 10^{-7}$
2	V:E→D	42.497	25.953	4721.702	4715.013	$4.44089 \cdot 10^{-16}$
2	D:E→D	0.003	0.002	0.000	0.000	$4.66294 \cdot 10^{-14}$
2	V:D→F	258.467	204.050	228883.061	291456.062	$3.10862 \cdot 10^{-15}$
2	D:D→F	125.347	134.101	35696.989	48584.207	0.00105951
2	V:F→ZZZ	283.908	226.507	266100.785	359138.469	$3.9968 \cdot 10^{-15}$
2	D:F→ZZZ	190.415	205.581	64236.371	86425.141	$2.36542 \cdot 10^{-5}$
2	A: →A	263.578	264.775	78862.748	78672.109	0.763176
2	A: →B	41.395	42.643	3827.142	4031.682	0.153861
2	A: →C	168.096	171.815	33713.233	34434.730	0.152151
2	A: →E	78.624	79.466	5748.335	5826.511	0.432492
2	A: →D	69.858	71.805	13648.198	14244.136	0.238622
2	A: →F	90.091	93.231	15793.291	16753.008	0.0773112
2	M: A→	87.208	87.209	0.000	0.000	0
2	M: B→	1108.971	1184.122	26584.568	44750.312	$-2.22045 \cdot 10^{-16}$
2	M: C→	165.958	165.959	0.000	0.000	$3.33067 \cdot 10^{-16}$
2	M: E→	611.965	659.171	16964.171	31527.619	$-4.44089 \cdot 10^{-16}$
2	M: D→	2470.084	2598.741	91451.018	198743.125	0
2	M: F→	258.078	258.470	5.478	7.544	$2.22045 \cdot 10^{-16}$

De todas maneras, y a modo de conclusión, el ejemplo presente muestra con suficiente contundencia que existe un notable desfase en la manera de calcular el coste probable de producción térmica suponiendo la generación hidráulica como variables de bloques o sin suponerlo, tal como hacen los dos métodos alternativos presentados. Si bien es cierto que éstos dependen de un parámetro  $\rho$  que se supone es la correlación lineal entre generaciones en diversos puntos de la cuenca, el cual se ha asumido que es 1 en todo el ejemplo, otros valores no nos cambiarían la conclusión; en todo caso la reafirmarían, ya que un valor de  $\rho$  más pequeño (no puede ser mayor de 1) aumentaría las diferencias. Y, por otra parte, ya se ha visto en el análisis de la componente lineal (tablas 9.X-XII, Fig. 9.6) que este desfase es real aun sin considerar este parámetro.

Admitiendo hasta cierto punto el arbitraje del simulador propuesto, los intervalos de confianza obtenidos señalan que los dos métodos alternativos que se han probado retornan una estimación del CPP más verosímil que el método original. Tal como aparece documentado aquí, el método implementado en mbgj resultaría ser el más ajustado a los experimentos realizados. Esto no deja de ser sorprendente, ya que que el supuesto de la

independencia parecía ajustarse poco a la hipótesis de dependencia total (en la que, al fin y al cabo, se basa el método del reajuste de flujos) o, por lo menos, parecía a priori más adecuado el método de variables parcialmente dependientes que el anterior.

Tampoco se tiene la experiencia necesaria que permita afirmar que la constatación de este hecho en este caso particular pueda extenderse a otros casos. En cuencas de menores dimensiones se aprecia un fenómeno de características similares, y es muy posible que el exceso del método original sea general. De todos modos, no puede dejarse de lado el hecho de que esta implementación es la más eficiente, y de que sus políticas óptimas parecen similares a las de los otros métodos, al menos, a la luz de lo que muestran las respectivas simulaciones.

## CAPÍTULO 10

# COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA Y MODELO MULTIARTÍCULO

### 10.1 Introducción y notación empleada

El modelo multiartículo al que se dedica este capítulo para el problema de la coordinación hidrotérmica a largo plazo es un método descrito en [NAB95], en el que se describe de manera general el entorno que rodea este modelo. En esta sección se pretende incidir en los aspectos más cercanos al tema de la tesis, es decir, a los que se refieren a la modelización de la aleatoriedad presente en el problema que, como ya se ha destacado, se trata del indeterminismo en la demanda de potencia, en la indisponibilidad de las unidades y en la cantidad de aportaciones naturales que reciben los embalses.

El trabajo del que estamos hablando dedica especialmente su atención a proporcionar un tratamiento preciso a una condición fundamental en problemas de coordinación: en cada intervalo la monótona de carga debe ser recubierta exactamente con la producción térmica e hidráulica, atendiendo a las restricciones propias de cada unidad. El procedimiento usado es novedoso, ya que emplea una curva llamada “Curva Potencia-Energía” derivada de la monótona, y variable según las condiciones de generación térmica e hidráulica. A través de esta función, las condición citada puede ser modelizada con facilidad como restricciones no lineales.

Aunque la red hidráulica esté modelizada con detalle, distinguiendo entre los diferentes arcos de descarga que pueden obtener electricidad, se supone a la hora de integrar esta generación con la carga y la generación térmica que en cada intervalo tenemos una única variable que representa la suma de toda la hidrogenación producida. Supondremos, pues, una super-unidad hidráulica que en ese contexto engloba toda la producción hidráulica.

#### 10.1.1 Símbolos empleados

En la siguiente relación se enumeran y definen los símbolos que aparecen en el texto. Algunos de ellos se citan en su forma específica para un intervalo o bien en forma general (sin explicitar el índice  $i$  usado para designar al intervalo concreto) cuando no se estime necesario para la explicación destacar este aspecto.

- \*  $\mathbf{b}_i$ : puntos de Bézier de la Curva Potencia-Energía.
- \*  $E_j, (E_j^i)$ : Contribución media de producción a cargo de la  $j$ -ésima unidad (en el

- intervalo  $i$ -ésimo).
- ★  $E_X, (E_X^i)$ : Demanda media de energía externa (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $\widehat{E}, (\widehat{E}^i)$ : Demanda de energía (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $F_j, (F_{f,j}^i)$ : Combustible ( $f$ ) disponible para la  $j$ -ésima unidad en posteriores intervalos (al  $i$ -ésimo).
  - ★  $G; G^0; G_\Delta$ : Generación hidráulica; generación hidráulica determinista; generación hidráulica indeterminista (con subíndice  $i$  se refieren particularmente al  $i$ -ésimo intervalo).
  - ★  $K$ : Número de artículos para las distribuciones de bloques.
  - ★  $M_{sg}(\cdot)$ : función de la potencia que representa una monótona suavizada de carga [en horas].
  - ★  $Nf$ : Número de combustibles.
  - ★  $Ni$ : Número de intervalos.
  - ★  $Nu$ : Número de unidades térmicas.
  - ★  $P_\Delta, (P_\Delta^i)$ : Potencia de la generación hidráulica estocástica (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $\widehat{P}, (\widehat{P}^i)$ : Potencia punta (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $\overline{P}_j$ : Capacidad de la  $j$ -ésima unidad.
  - ★  $\overline{P}_h$ : Capacidad máxima hidráulica.
  - ★  $P_{min}, (P_{min}^i)$ : Nivel mínimo de carga en el sistema (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $PE(\cdot), (PE_i(\cdot))$ : Curva Potencia-Energía (del intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $\pi_1, \dots, \pi_{K-1}$ : Probabilidades para las variables con distribución de bloques.
  - ★  $T, (T^i)$ : duración del ( $i$ -ésimo) intervalo.
  - ★  $T_G, (T_G^i)$ : duración de la base de la monótona suavizada de generación.
  - ★  $T_X, (T_X^i)$ : máxima duración esperada con fallo de potencia (en el intervalo  $i$ -ésimo).
  - ★  $Z_j(Z_{f,j}^i)$ : Suministro de combustible ( $f$ ) realizado a la  $j$ -ésima unidad (en el intervalo  $i$ -ésimo).

Este punto parece indicado para recordar que  $T_X$  equivale a la LOLE, y que ésta se encuentra asociada a la LOLP mediante la expresión:  $LOLE = T \cdot LOLP$ .

## 10.2 Representación de oferta y demanda de potencia

Mediante los procedimientos presentados en el capítulo 2, la previsión de la carga demandada para un intervalo, en forma de monótona, se convoluciona con la potencia en fallo de cada unidad del parque térmico, originando la monótona de generación. La convolución es un conocido procedimiento que, dadas dos variables aleatorias independientes  $X$  e  $Y$  con funciones de densidad conocidas, da lugar a  $f_Z(\cdot)$ , donde  $Z = X + Y$ , de la siguiente manera:

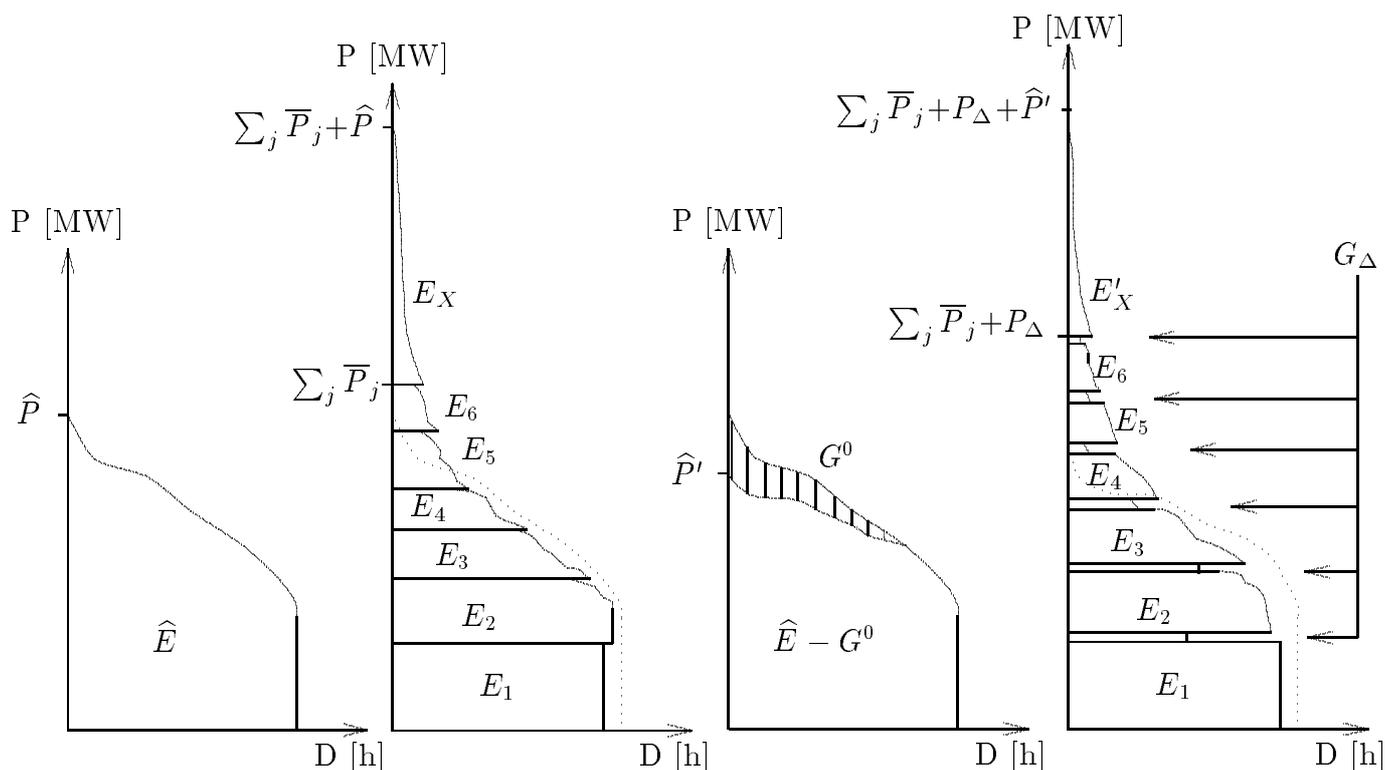
$$f_Z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w) f_Y(u-w) dw$$

Operando iterativamente con la distribución de probabilidad de servicio de cada unidad térmica, se obtiene la monótona de generación. Esta puede imaginarse dividida

en secciones, cada una de las cuales representa la contribución media esperada que cada unidad puede producir ( $E_j$ , para la  $j$ -ésima unidad). Si el área de la monótona de carga es  $\hat{E}$ , entonces:

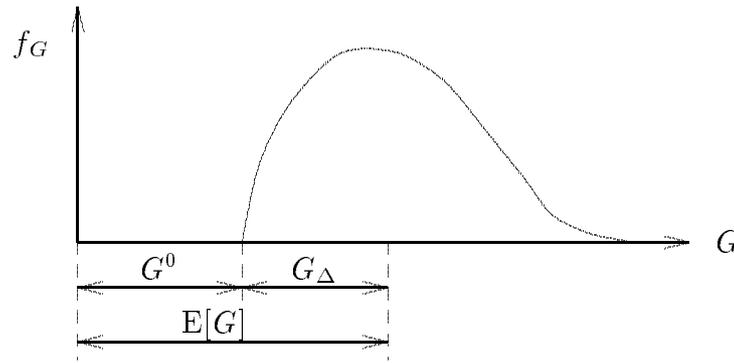
$$\hat{E} = \sum_{j=1}^{Nu} E_j + E_X$$

donde  $E_X$  es una cantidad de energía externa que debe ser importada para cubrir el caso de una eventual insuficiencia de producción propia.



**Figura 10.1 :** Proceso de transformación de la monótona. a) Monótona de carga. b) Monótona de generación. c) Monótona de carga descrestada con hidrogenación determinista  $G^0$ . d) Monótona de generación, a partir de la monótona descrestada, incluyendo hidrogenación estocástica  $G_\Delta$ .

Este primer paso se ilustra con la Fig. 10.1, a) y b). La nueva monótona presenta una extremidad en el punto de la ordenada de potencia  $\sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j + \hat{P}$ . Si sólo se dispusiera de unidades térmicas —con combustible ilimitado—, una solución factible de un problema de optimización de la generación debe procurar un recubrimiento de la monótona de generación de acuerdo con el orden de mérito económico definido y que respete las capacidades de las unidades. En general, mientras los componentes del parque térmico estén sujetos al riesgo de una avería, no se puede obviar la posibilidad de una importación de energía de emergencia; por tanto, ese extremo superior no puede ser recubierto por medios propios. El método que se describe tiene en consideración que es preciso recurrir a la importación de energía, en tanto supone un coste variable, ya que el recubrimiento



**Figura 10.2 :** Generación asegurada y generación indeterminista

óptimo de la monótona de cada intervalo con unidades propias se limita a la zona que queda por debajo de  $\sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j$ .

La inclusión de generación hidráulica tiene por efecto disminuir tanto el área dada por  $E_X$  como la producción de algunas unidades térmicas, al quedar sustituida su generación por producción de origen hidráulico. Sin embargo, el procedimiento para averiguar la contribución hidráulica no es el mismo que el de las unidades térmicas. Se distinguen dos partes: una generación asegurada, que se denota como  $G^0$ ; otra indeterminista, que tiene como esperanza  $G_\Delta$ . Si la generación hidráulica es una variable aleatoria  $G$ , entonces se tiene:  $E[G] = G^0 + G_\Delta$  (ver Fig. 10.2).

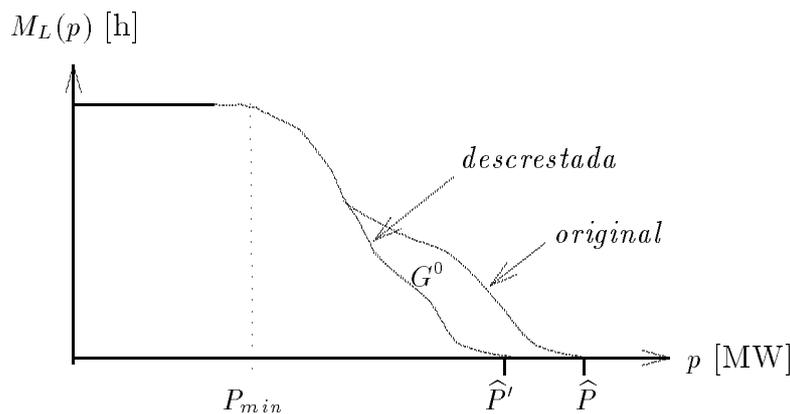
La parte correspondiente a  $G^0$  sirve para decrestar la monótona de carga ( Fig. 10.1.c)). Con ello se consigue rebajar la potencia punta a un nivel inferior  $\hat{P}'$  y disminuir la demanda de energía a  $\hat{E} - G^0$ . Seguidamente, puede obtenerse una nueva monótona de generación en la que se incluye generación de origen hidráulico ( Fig. 10.1.d)). Debido a que la hidrogenación no tiene un lugar claramente definido en el orden de mérito característico de las unidades térmicas y a que es necesario respetar la capacidad hidráulica  $\bar{P}_h$ , la generación indeterminista se encuentra repartida entre todas las posiciones posibles. El objetivo del problema de coordinación hidrotérmica que se presenta es hallar el recubrimiento de la monótona de generación de cada intervalo que sea más económico, ubicando de la mejor manera la producción térmica y la hidráulica en el perfil que definen la demanda de potencia y las características de las unidades propias.

### 10.3 Tratamiento de la generación hidráulica

En la presente sección se describe en detalle cuál ha sido el procedimiento empleado para incluir la hidrogenación en el mecanismo de la monótona de generación, ya que contiene diferencias notables respecto del que clásicamente se usa para las unidades térmicas.

#### 10.3.1 Generación determinista

Tal como aparece en la Fig. 10.3 (con la monótona traspuesta), la generación determinista  $G^0$  causa una disminución de la carga en las horas punta, que en el caso concreto de la punta de la monótona se produce desde  $\hat{P}$  a  $\hat{P}'$ . De esta manera está garantizado el uso más económico de la hidrogenación [WANG94]. El desplazamiento que tiene lugar



**Figura 10.3 :** Descrestado de la monótona con  $G^0$ .

en la parte superior de lo monótona está limitado a no ser mayor que  $\bar{P}_h$ , la capacidad hidráulica disponible.

### 10.3.2 Generación indeterminista

La generación hidráulica se adopta como una variable aleatoria de bloques, al igual que las variables de las que procede: las descargas y los volúmenes iniciales y finales en el intervalo. Esta idea no es más que una aproximación, ya que las funciones no lineales de variables de bloques no siguen el mismo tipo de distribución; ni siquiera las funciones lineales, a menos que su grado de dependencia sea total. Sin embargo, la hipótesis de dependencia total es intrínseca al modelo, y en consecuencia resulta conveniente llevarla hasta el terreno de la generación. Sobre este particular se puede señalar que la distribución de la generación hidráulica como variable aleatoria se entiende de la misma manera que se ha descrito en el capítulo 7.

Así, asumimos que los cuantiles de  $G$  son  $\{G^0, G^{01}, \dots, G^{0K-1}\}$ ; por otra parte, tenemos que  $G_\Delta$  no es más que la esperanza de  $G - G^0$ :

$$G_\Delta = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{K-1} \pi_k (G^{0k} + G^{0k-1}) \right] - G^0 \quad (10.1)$$

Para integrar  $G_\Delta$  en el proceso de la convolución sería necesario conocer la potencia disponible, la distribución de probabilidad de fallo y la posición de la super-unidad hidráulica dentro del orden de mérito, características ninguna de las cuales está determinada para la hidrogeneración. La diferencia fundamental entre la generación térmica y la hidráulica es que aquella tiene como techo su capacidad máxima (siempre que se pueda suponer que el combustible no está limitado); en cambio, la segunda depende de la disponibilidad de agua descargable y del estado de los embalses: no siempre es posible obtener la máxima potencia. De aquí se desprende la segunda característica: la potencia en fallo de las unidades hidráulicas (o, en nuestro caso, de la super-unidad) no adopta un conjunto discreto de valores como lo hace en el caso de una unidad térmica, y la distribución de probabilidad de la potencia en fallo es continua en consecuencia. En tercer lugar, a causa de la dificultad en valorar el precio de la energía eléctrica, la cuestión de dónde ubicar una unidad hidroeléctrica resulta en la práctica indecidible.

Frente a estos problemas, el enfoque que se toma consiste en:

- o considerar un área determinada  $G_\Delta$  (energía esperada) que debe aparecer en la monótona de generación. Es lógica esta condición, pues la generación hidráulica es por su propia naturaleza limitada en recursos y, por tanto, en energía.
- o segregar la producción hidráulica en  $Nu$  porciones, cada una de las cuales se situará inmediatamente después de cada unidad térmica (nos referiremos a cada porción como *pseudo-unidad*).
- o tener en cuenta que la potencia conjunta de las pseudo-unidades, junto con la potencia proveniente de la generación determinista, debe estar limitada por la máxima capacidad existente  $\bar{P}_h$ ; es decir:

$$P_\Delta = \sum_{j=1}^{Nu} P_{\Delta j} \leq \bar{P}_h - \frac{G^0}{T} \quad (10.2)$$

siendo  $P_{\Delta j}$  la potencia asignada a la  $j$ -ésima pseudo-unidad hidráulica, y  $T$  la duración del intervalo presente; la expresión  $G^0/T$  es la potencia media determinista, un valor menos restrictivo y más apropiado que la potencia máxima  $\hat{P} - \hat{P}'$ .

Puede observarse que el valor de  $P_\Delta$  depende de dónde y cuánta energía  $G_{\Delta j}$  ( $j = 1, \dots, Nu$ ) se ubique en sus posiciones entre las unidades térmicas.

- o definir la disponibilidad de las pseudo-unidades como:

$$\frac{G_\Delta}{G^{0K-1} - G^0} \quad (10.3)$$

A partir de la adopción de valores de compromiso para la potencia y la disponibilidad hidráulicas, se aprecia que la solución seguida opta por dar un carácter similar al de las unidades térmicas.

### 10.3.3 Aproximación de la parte superior de la monótona de generación

La cantidad de energía media deficitaria  $E_X$  y la máxima duración de fallo esperada  $T_X$  son dos importantes parámetros a conocer en el presente método de coordinación hidrotérmica. Su estimación se efectúa tras obtener un modelo aceptable que proporciona valores verosímiles según las condiciones que el problema presenta. Se ha visto que estas condiciones pueden reducirse a los siguientes factores:

- $G^0$
- $Y = \bar{P}_h - \frac{G^0}{T} - P_\Delta + \sum_{j \in \mathcal{L}} (\bar{P}_j - P_j)$ , término que representa conjuntamente el decremento de potencia respecto la capacidad de origen hidráulico o de origen térmico. Para ese grupo se considera un subconjunto de las unidades de generación,  $\mathcal{L}$ , en el que se cuentan los contratos y las unidades con limitación de combustible.

El modelo adoptado para  $E_X$  es:

$$E_X = \frac{aY^2}{G^0 - b} + c; \quad (10.4)$$

la misma forma resulta válida para  $T_X$ :

$$T_X = \frac{dY^2}{G^0 - e} + f. \quad (10.5)$$

$a, b, c, d, e, f$  son constantes dependientes de cada intervalo, que son estimadas a través del ajuste del respectivo modelo con las observaciones extraídas por simulación. Este procedimiento obtiene valores reales de déficit de energía y tiempo de fallo tras la convolución de la carga del intervalo en consideración con la potencia en fallo de las unidades térmicas; se incluye la generación hidráulica determinista a través del descrestado de la monótona de carga, y para la indeterminista se adopta un valor de disponibilidad de 0.5, una capacidad igual a  $\bar{P}_h - \frac{G^0}{T}$  y distintas posiciones entre las unidades térmicas. El valor 0.5 adoptado para la disponibilidad es un valor de compromiso, ya que depende del propio valor de los cuantiles de la generación; puede derivarse de (10.3) si se asume que  $\pi_k = 1/K$  para un caso en que  $G^1 = \dots = G^{K-1}$ . Como puede comprobarse, la disponibilidad de la hidrogenación es muy inferior a la que suelen tener normalmente las unidades térmicas.

Los valores generados para  $G^0$  oscilan entre 0 y una cantidad suficientemente grande  $\text{MAXG0} = 0.9\bar{P}_h \cdot T$ . Los valores para  $Y$  se toman entre 0 y una cantidad  $\text{MAXY}$  que se determina como suma de:

- la potencia máxima de los contratos vigentes en el intervalo.
- la diferencia entre  $\bar{P}_j$  y la máxima potencia que puede alcanzar la unidad  $j \in \mathcal{L}$  (con combustible limitado), imponiendo que puede estar en funcionamiento durante todo el intervalo.
- $\bar{P}_h - \frac{G^0}{T}$

Se supone que el decremento de potencia  $Y$  se reparte de manera equivalente entre todas las unidades afectadas. En ausencia de producción hidráulica y de unidades con decremento de potencia, sólo se estiman los coeficientes  $c$  y  $f$  mediante una simple convolución de todas las unidades.

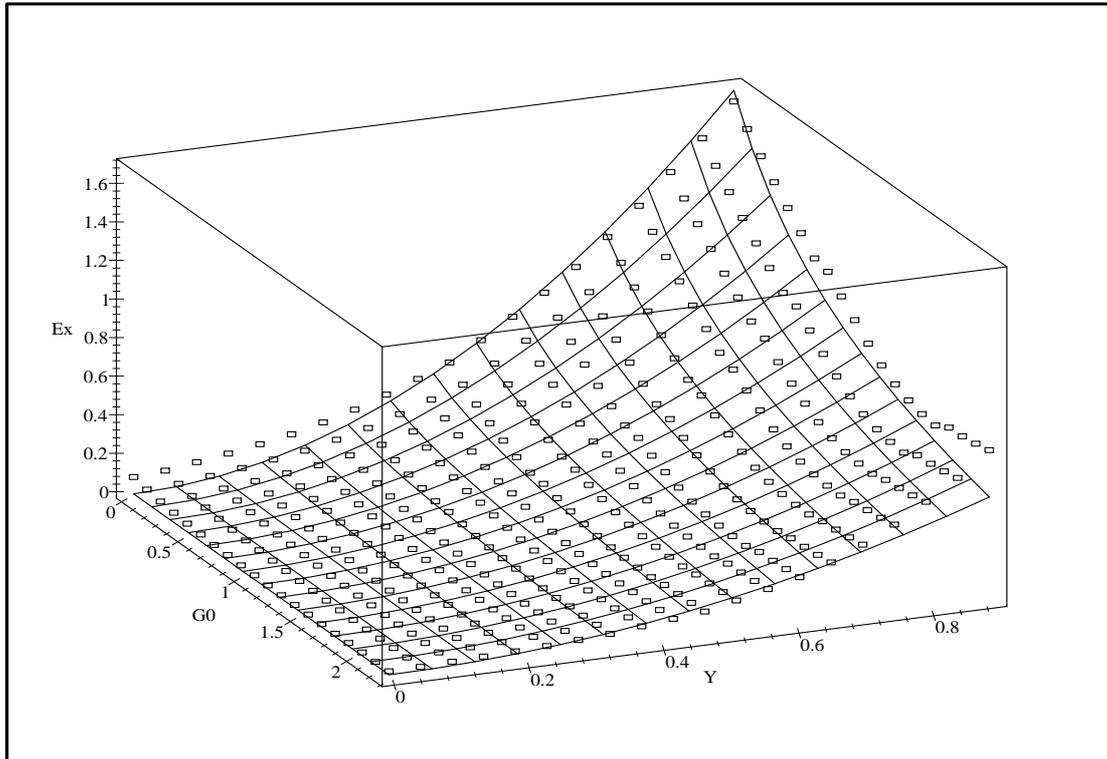
Con cada par de valores  $(g^0, y)$  de entre los factibles se halla el correspondiente resultado  $(e_X, t_X)$  procedente de las condiciones impuestas por los factores anteriores. Las pruebas computacionales que se han llevado a cabo obtienen una matriz de  $S \times S$  resultados ( $S=20$ , particularmente), con los que se llevan a término los respectivos ajustes de los modelos a fin de determinar los parámetros  $a, b$  y  $c$  por un lado, y  $d, e$  y  $f$  por otro. El ajuste de ambos modelos se hace por mínimos cuadrados, resolviendo:

$$\min_{a,b,c} \sum_{r=1}^S \sum_{s=1}^S \left( \frac{ay_r^2}{g_s^0 - b} + c - (e_X)_{r,s} \right)^2 \quad (10.6)$$

$$\min_{d,e,f} \sum_{r=1}^S \sum_{s=1}^S \left( \frac{dy_r^2}{g_s^0 - e} + f - (t_X)_{r,s} \right)^2 \quad (10.7)$$

En ambos, el término independiente está acotado inferiormente por 0; las demás variables se han dejado libres. La resolución de (10.6) y (10.7) se realiza usando la rutina E04KDF de la librería numérica NAG [NAG90].

La Fig. 10.4 muestra un ejemplo de ajuste realizado para  $E_X$ . Los valores hallados



**Figura 10.4 :** Ajuste de  $E_X$ . Los puntos de forma cuadrada son observaciones, y la malla es la función (10.4) encontrada.

son:  $a = 2.1665519$ ,  $b = -1.0133147$ ,  $c = 0$ . El número de puntos utilizados es de 400, el residuo (el valor de la función de (10.6) en el óptimo) es de 1.354884 y el 50% de los errores se encuentran entre -0.044 y 0.024. La figura pone de manifiesto que el grado de ajuste es satisfactorio. Aunque otros modelos son posibles (por ejemplo, una forma cuadrática), el que aparece arriba parece más robusto; por ejemplo, de manera implícita incorpora una propiedad no obvia, como es el hecho de que si  $G^0$  aumenta su valor, tanto  $E_X$  como  $T_X$  tienden a cero, lógicamente. En el caso de nuestros modelos, la asíntota sería  $c$  o  $f$  respectivamente, parámetros que en algunos casos toman un valor diferente de 0, aunque en la mayoría de casos probados la norma es la anulación.

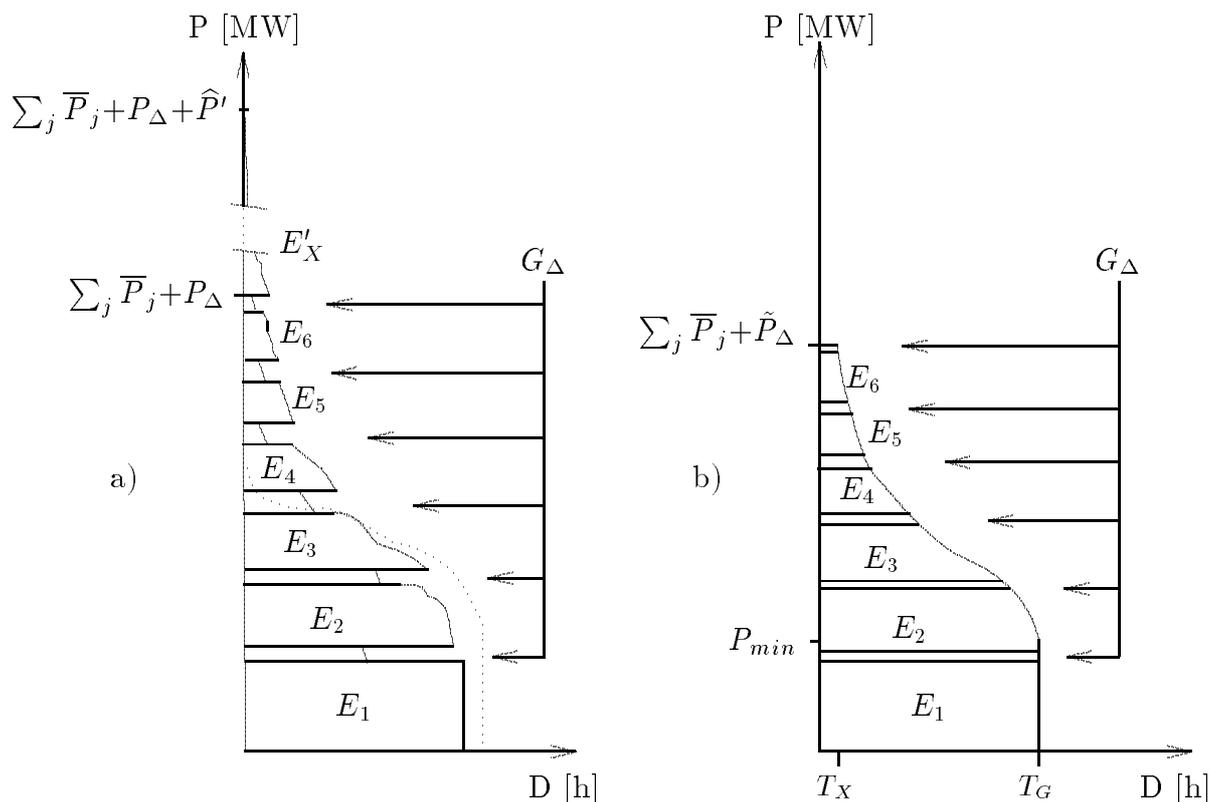
## 10.4 Representación de la curva monótona de generación

Por su misma naturaleza iterativa, la convolución de la carga con la potencia en fallo de las unidades da lugar a una monótona de generación con discontinuidades en los puntos  $\overline{P}_1, \overline{P}_1 + P_{\Delta 1}, \dots, \sum \overline{P}_j, \sum \overline{P}_j + \sum P_{\Delta j}$  (ver Fig. 10.1.c). Mantener su forma original sería complicado y computacionalmente ineficiente, por lo que parece aconsejable tomar una aproximación más apropiada para el empleo de los clásicos métodos de optimización, los cuales asumen el uso de restricciones continuas y derivables.

El equivalente de la monótona de generación es la *monótona suavizada de generación* (m.s.g.), de la que es interesante remarcar las siguientes características:

- la m.s.g. es una curva continua.

- el incremento en la disponibilidad de las pseudo-unidades hidráulicas se compensa con una disminución de la potencia de  $P_\Delta$  a  $\tilde{P}_\Delta$ .
- tiene perfil recto desde la potencia 0 a la potencia mínima  $P_{min}$ ; desde aquí hasta  $\sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j + \tilde{P}_\Delta$  es una cierta función continua.
- la m.s.g. no está definida por encima de  $\sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j + \tilde{P}_\Delta$
- la punta tiene una duración igual a  $T_X$ .
- su base tiene una duración  $T_G$ , calculada promediando las disponibilidades de las primeras unidades en el orden de mérito, y multiplicando por  $T$ .



**Figura 10.5 :** Suavización de la monótona de carga. a) Monótona de generación, con hidrogenación estocástica  $G_\Delta$ . b) monótona suavizada de generación.

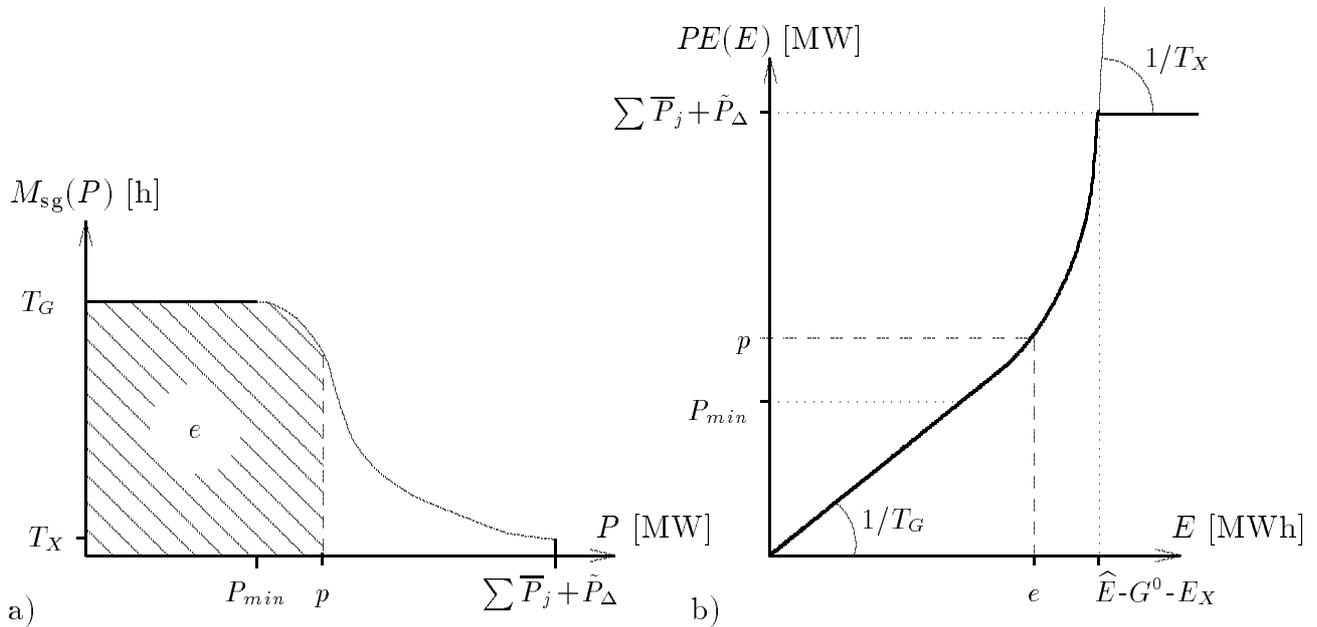
La Fig. 10.5 ilustra las citadas propiedades de la m.s.g. Es a partir de esta curva de la que parte el concepto que es básico en el presente modelo, la Curva Potencia-Energía (CPE), la cual se define a continuación.

#### 10.4.1 Curva Potencia-Energía

Sea  $M_{sg}(p)$  una función que representa una determinada curva monótona de generación suavizada. Para esta función, el eje de abscisas es el de potencia (carga más potencia en fallo de las unidades), y el de ordenadas equivale a duración. La CPE asociada a

esta monótona es:

$$PE(e) = p, \text{ tal que: } p \geq 0, \quad \int_0^p M_{sg}(u) du = e \quad (10.8)$$



**Figura 10.6 :** Formación de la curva Potencia-Energía. a) Monótona de generación suavizada. b) CPE.

La expresión (10.8) puede describirse con ayuda de la Fig. 10.6. El resultado de evaluar la función  $PE(\cdot)$  con una cantidad  $e$  de energía es hallar la potencia  $p$  tal que el área encerrada bajo la monótona traspuesta que representa  $M_{sg}(\cdot)$ , y entre 0 y  $p$  es igual a  $e$ .

Los siguientes puntos resaltan las principales propiedades de la CPE:

- [1] Sea  $EP(\cdot)$  la función inversa de  $PE(\cdot)$ , es decir:

$$PE^{-1}(\cdot) = EP(\cdot) \iff EP(p) = \int_0^p M_{sg}(u) du$$

- [2] La derivada de la función  $PE(\cdot)$  está relacionada con la duración asociada a cierta potencia:

$$\frac{dPE(e)}{de} = \frac{1}{M_{sg}(PE(e))}$$

o equivalentemente:

$$\frac{dEP(p)}{dp} = M_{sg}(p)$$

- [3] De aquí se deduce fácilmente que:

- [3.1] la parte inicial de la CPE, la que transcurre desde 0 hasta  $T_G P_{min}$ , es una recta

y, por tanto, la ecuación de la CPE en este segmento podría escribirse como:

$$PE(e) = e/T_G, \quad 0 \leq e \leq T_G P_{min}$$

- [3.2] el extremo final de la CPE presenta una pendiente igual a  $1/T_X$ , pendiente que en circunstancias normales suele ser bastante pronunciada, ya que es de esperar que el máximo tiempo con fallo de potencia sea un valor limitado.
- [4] Al ser la m.s.g. estrictamente positiva, tanto la función energía-potencia como su inversa, la CPE, son continuas y estrictamente crecientes.
- [5] Tras imponer una suavización a la monótona de generación, la m.s.g. es continua; en consecuencia, la CPE es derivable en continuidad.
- [6] Puesto que la m.s.g. es una función decreciente, su integral  $EP(\cdot)$  es una función con segunda derivada no positiva, es decir, cóncava; de esto se deriva que la CPE es una función con pendiente creciente, es decir, convexa.
- [7] Las coordenadas del extremo superior de la CPE son:

$$(\hat{E} - G^0 - E_X, \sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j + \tilde{P}_\Delta)$$

dado que  $\hat{E} - G^0 - E_X$  es el área que queda bajo la m.s.g. tras haber descrestado con la hidrogenación determinista y haber descartado la cola asociada con la energía externa.

Conviene finalmente remarcar que la curva potencia-energía viene parametrizada por  $G^0$ ,  $H_\Delta$  y  $E_j$ ,  $j = 1, Nu$ , y que estos parámetros son en realidad algunas de las variables que intervienen en el proceso de optimización del problema.

## 10.5 Modelización de la CPE

Los autores de [NAB95] hacen la propuesta de usar para representar la CPE una función definida por partes: para la porción inicial, una ecuación lineal tal como la que aparece en el punto [3.1], y para la porción convexa, una curva de Bézier, [BÉZ68], [BÖHM84], de cuatro puntos.

### 10.5.1 Propiedades de las curvas de Bézier

Una curva de Bézier es una curva paramétrica en  $t$ , y se puede denotar como  $\mathbf{x}(t)$ , donde:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t) \quad (10.9)$$

siendo:

- $\mathbf{x}(\cdot) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  puntos de  $\mathbb{R}^2$ , llamados *puntos de Bézier*
- $B_0^n(\cdot), B_1^n(\cdot), \dots, B_n^n(\cdot)$ , funciones conocidas como *polinomios de Bernstein* de grado

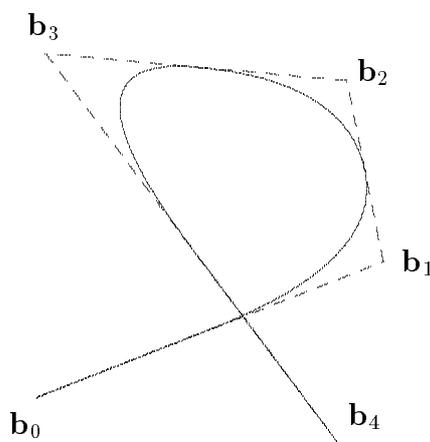
$n$ , definidos como:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Puesto que la curva  $\mathbf{x}(t)$  es una combinación lineal de  $n+1$  puntos, es interesante saber que los polinomios de Bernstein, que dan lugar a los coeficientes de dichos puntos, satisfacen dos importantes propiedades:

- se comprueba que  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$
- cualquier polinomio de Bernstein cumple que  $B_i^n(t) \geq 0$ , si  $t \in [0, 1]$ .

Lo cual da como consecuencia que una curva de Bézier siempre permanece dentro de la envolvente convexa definida por los puntos de Bézier.



**Figura 10.7 :** Ejemplo de curva de Bézier. Se han considerado cinco puntos.

La Fig. 10.7 es un ejemplo de curva de Bézier definida por cinco puntos.

Hay una propiedad que se demuestra fácilmente: la curva de Bézier empieza con  $t=0$  en el punto  $\mathbf{b}_0$  y acaba con  $t=1$  en el punto  $\mathbf{b}_n$ . Es suficiente con comprobar que si  $t=0$ , todos los polinomios de Bernstein se anulan excepto el primero que toma el valor de 1; y para  $t=1$  el único que toma un valor no nulo es el último.

Se halla la tangente a  $\mathbf{x}(t)$  por diferenciación sobre  $t$  de la siguiente manera:

$$D_t \mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 \frac{d}{dt} B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 \frac{d}{dt} B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n \frac{d}{dt} B_n^n(t)$$

Mostraremos solamente las derivadas de los dos primeros polinomios de Bernstein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_0^n(t) &= -n(1-t)^{n-1} \\ \frac{d}{dt} B_1^n(t) &= n(1-t)^{n-1} + n(1-t)^{n-2}t - n^2(1-t)^{n-2}t \end{aligned}$$

De estas expresiones se deduce que para  $t=0$ , el primer polinomio tiene una derivada igual a  $-n$ , y para el segundo es igual a  $n$ . Todos los demás ( $i > 1$ ) anulan la derivada, ya que son polinomios de grado  $i$  como mínimo. Por lo tanto, la tangente a la curva  $\mathbf{x}(t)$

en el punto inicial es el vector  $n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ , lo que equivale a decir que en dicho punto el ángulo de la curva sigue la dirección del segmento delimitado por los dos primeros puntos de Bézier.

Los polinomios de Bernstein cumplen una propiedad que podríamos calificar como *reversibilidad*; se deduce sin problemas que:

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$$

Una consecuencia primera es que si reordenamos los puntos en orden inverso conseguimos una curva de Bézier que se solapa idénticamente sobre la primera. Otra consecuencia que se deriva es que también podemos garantizar que la tangente a la curva en  $\mathbf{b}_n$  coincide con la dirección marcada por éste y por  $\mathbf{b}_{n-1}$ .

Por último, hay que mencionar el algoritmo de de Casteljau para la evaluación de  $\mathbf{x}(t)$ . Consiste en, utilizando puntos auxiliares:

$$\mathbf{b}_i^k(t) = (1-t)\mathbf{b}_{i-1}^{k-1}(t) + t\mathbf{b}_i^{k-1}(t)$$

y sabiendo que  $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ , tomar  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_n^n(t)$ . También se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i \mathbf{b}_0 t^i$$

donde  $\Delta^i$  denota diferenciación hacia delante (*forward differences*), es decir:  $\Delta^0 \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0$ ,  $\Delta^1 \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ ,  $\Delta^2 \mathbf{b}_0 = \Delta^1 \mathbf{b}_1 - \Delta^1 \mathbf{b}_0$ , etc.

El algoritmo de de Casteljau no es computacionalmente eficiente para  $n$  grandes, pero constituye un método muy estable y es una importante herramienta teórica de cara a posteriores investigaciones en su área de interés.

### 10.5.2 Curvas de Bézier aplicadas a la CPE

La forma dependiente de un parámetro de las curvas de Bézier sugiere que, si se quiere adoptar como soporte de una CPE, la primera componente de  $\mathbf{x}(t)$  sea la componente de energía y la segunda la de potencia:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_e(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix}$$

En ese caso, hay que resolver dos cuestiones:

- cómo evaluar  $PE(e)$
- cómo hallar la expresión de  $\frac{dPE(e)}{de}$

La primera cuestión se puede escribir como “encontrar  $t$  tal que  $x_e(t) = e$  y  $PE(e) = x_p(t)$ ”. Si se puede garantizar que existe la función inversa de  $x_e(\cdot)$ , entonces la respuesta es:

$$PE(e) = x_p(x_e^{-1}(e)) \quad (10.10)$$

La segunda da lugar a:

$$\frac{dPE(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{dx_p(x_\epsilon^{-1}(\epsilon))}{d\epsilon} = \frac{dx_p(t)}{d\epsilon}$$

donde queda claro que  $t$  es igual a una expresión dependiente de  $\epsilon$ ,  $x_\epsilon^{-1}(\epsilon)$ . Por la introducción de la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} \frac{dt}{d\epsilon} = \frac{dx_p(t)}{dt} \left[ \frac{dx_\epsilon(t)}{dt} \right]^{-1}$$

puesto que la variable  $\epsilon$  puede ser entendida como la función dependiente de  $t$   $x_\epsilon(t)$ . Finalmente, se tiene:

$$\frac{dx_p(x_\epsilon^{-1}(\epsilon))}{dt} \left[ \frac{dx_\epsilon(x_\epsilon^{-1}(\epsilon))}{dt} \right]^{-1} \quad (10.11)$$

### 10.5.2.1 Demostración de la existencia de inversa para $x_\epsilon(\cdot)$

A continuación, se demuestra que una condición suficiente para que exista la inversa de  $x_\epsilon(\cdot)$  es que los cuatro puntos de Bézier que definen la CPE estén ordenados respecto al eje  $\epsilon$ , es decir:

$$b_{0\epsilon} < b_{1\epsilon} < b_{2\epsilon} < b_{3\epsilon} \quad (10.12)$$

Se adoptará el convenio de que un punto  $\mathbf{b}_i$  es un par de números denotados como  $(b_{i\epsilon}, b_{ip})$ .

Sea la curva de Bézier de cuatro puntos definida de acuerdo a:

$$\begin{pmatrix} x_\epsilon(t) \\ x_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 3\alpha_1 t + 3\alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \\ \beta_0 + 3\beta_1 t + 3\beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Los coeficientes  $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 3$  vienen determinados por el método de de Casteljau, por lo que toman por valor:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = b_{0\epsilon} & \beta_0 = b_{0p} \\ \alpha_1 = b_{1\epsilon} - b_{0\epsilon} & \beta_1 = b_{1p} - b_{0p} \\ \alpha_2 = b_{2\epsilon} - 2b_{1\epsilon} + b_{0\epsilon} & \beta_2 = b_{2p} - 2b_{1p} + b_{0p} \\ \alpha_3 = b_{3\epsilon} - 3b_{2\epsilon} + 3b_{1\epsilon} - b_{0\epsilon} & \beta_3 = b_{3p} - 3b_{2p} + 3b_{1p} - b_{0p} \end{array}$$

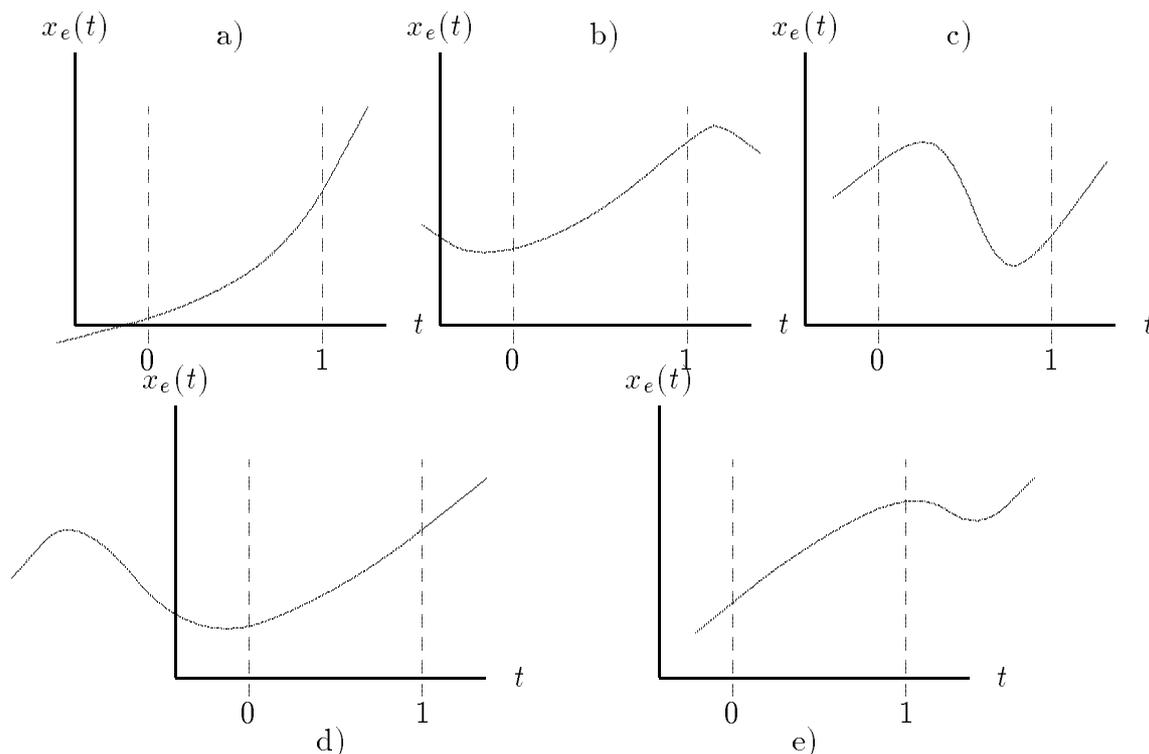
Demostraremos en primer lugar que  $x_\epsilon(t)$  es creciente si  $0 \leq t \leq 1$ . La derivada de  $x_\epsilon(t)$  es:

$$x'_\epsilon(t) = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2$$

Es fácil comprobar que, si  $t=0$ , el resultado es positivo; concretamente, vale  $3\alpha_1 = 3(b_{1\epsilon} - b_{0\epsilon})$  que es, por hipótesis, positivo. Análogamente, para  $t=1$ :

$$x'_\epsilon(1) = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 3(b_{1\epsilon} - b_{0\epsilon}) + 6(b_{2\epsilon} - 2b_{1\epsilon} + b_{0\epsilon}) + 3(b_{3\epsilon} - 3b_{2\epsilon} + 3b_{1\epsilon} - b_{0\epsilon}) = 3(b_{3\epsilon} - b_{2\epsilon})$$

resultado igualmente positivo por la condición de que  $b_{3\epsilon} > b_{2\epsilon}$ . De momento, podemos resumir constatando que  $x_\epsilon(t)$  es un polinomio de tercer grado con pendiente positiva en  $t=0$  y en  $t=1$ .



**Figura 10.8 :** Casos posibles de  $x_e(t)$ . a) Sin extremos. b) Con  $\alpha_3 < 0$ . c) Con los dos extremos dentro de  $[0, 1]$ . d) Con los dos extremos  $< 0$ . e) Con los dos extremos  $> 1$ .

En la Fig. 10.8 puede verse un gráfico que ilustra algunos casos posibles, no todos ellos favorables. Excepto en el caso b), en todos se supone que  $\alpha_3$  es positivo. Si  $\alpha_3 < 0$ , el único caso favorable es trivialmente aquel en el que la función  $x_e(t)$  tiene un mínimo por debajo de 0 y un máximo por encima de 1; de otra manera, no es posible que la función sea creciente en ambos puntos. Como un polinomio de tercer grado no puede tener más extremos, la función crece monótonamente entre 0 y 1.

Por otro lado, si  $\alpha_3 = 0$  entonces está claro que  $x_e(t)$  es creciente entre los dos valores de  $t$ , ya que se trataría de una parábola o una recta. De ahora en adelante, se asume que  $\alpha_3$  es positivo, es decir:

$$b_{3e} - 3b_{2e} + 3b_{1e} - b_{0e} > 0$$

En este caso, sí es posible que la función  $x_e(t)$  no sea creciente dentro del intervalo  $[0, 1]$ ; sin embargo, si así fuera, los dos extremos locales estarían en el interior ( Fig. 10.8.c)). Debemos comprobar que  $x_e(t)$  es creciente estrictamente, porque las posibles raíces de  $x'_e(t)$  o bien son negativas ( Fig. 10.8.c)) o bien son mayores que 1 ( Fig. 10.8.e)).

Las raíces de  $x'_e(t)$  vienen determinadas por la solución de  $x'_e(t) = 0$ :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{-2\alpha_2 \pm \sqrt{4\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_3} \\ &= \frac{-b_{2e} + 2b_{1e} - b_{0e} \pm \sqrt{b_{2e}^2 - b_{2e}b_{1e} - b_{2e}b_{0e} + b_{1e}^2 - b_{3e}b_{1e} + b_{3e}b_{0e}}}{b_{3e} - 3b_{2e} + 3b_{1e} - b_{0e}} \end{aligned}$$

Suponemos que  $t^*$  son soluciones reales. En otro caso, la función  $x_e(t)$  no tendría extremos y sería creciente en toda la recta real ( Fig. 10.8.a)). En primer lugar, se tomará la hipótesis de que  $t^*$  es positivo (denotaremos las dos raíces según el signo del radical como  $t_+^*$  o  $t_-^*$  y tomaremos en cada caso la que interese):

$$0 < t_-^* \iff 0 < -\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} \iff 0 > \alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} \iff 0 > \alpha_2 \quad (10.14)$$

La conclusión a la que se llega es que necesariamente  $\alpha_2$  será negativo. A continuación, tomaremos el supuesto de que  $t^*$  es menor que 1:

$$1 > t_+^* \iff \alpha_3 > -\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} \iff \alpha_2 + \alpha_3 > \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3} > 0 \quad (10.15)$$

La segunda conclusión es que  $\alpha_2 + \alpha_3$  es positivo. Podemos añadir a esta lista de requerimientos la condición de existencia de soluciones reales:

$$\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3 > 0 \quad (10.16)$$

y el hecho de que  $\alpha_2$  se construye por diferenciación a partir de  $b_{0e}, b_{1e}, b_{2e}$ :

$$\alpha_2 = \Delta^2 b_{0e} = \Delta^1 b_{1e} - \Delta^1 b_{0e} = (b_{2e} - b_{1e}) - (b_{1e} - b_{0e})$$

Como por (10.12) las diferencias  $\Delta^1 b_{ie}$  son positivas y  $\alpha_1 = \Delta^1 b_{0e}$ , se tiene que:

$$\alpha_2 + \alpha_1 > 0 \quad (10.17)$$

Pues bien, las condiciones (10.14)-(10.17) no son consistentes, ya que no puede cumplirse a la vez que:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &< \alpha_3 \\ -\alpha_2 &< \alpha_1 \\ \alpha_2^2 &> \alpha_1\alpha_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al ser creciente en los extremos del intervalo  $[0,1]$  y no poseer extremos en el interior de ese intervalo,  $x_e(t)$  es creciente para  $t \in [0, 1]$ . Puesto que es creciente, posee inversa, es decir, para cualquier valor  $e$  entre  $b_{0e}$  y  $b_{3e}$  existe un único valor  $t \in [0, 1]$  tal que  $x_e(t) = e$  ■

### 10.5.3 Evaluación de la CPE

Puesto que la CPE se basa en cuatro puntos, ello da lugar a que tanto el polinomio  $x_e(\cdot)$  como el  $x_p(\cdot)$  sean de tercer grado. Aunque no trivialmente, sí es posible encontrar analíticamente una solución  $t$  a la ecuación:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3 = 0$$

por medio de las ecuaciones que publicara Cardano, matemático del siglo XVI; véase en [CHIL79] una explicación concerniente a la obtención de las raíces de un polinomio cúbico. Mediante el uso de una rutina de la librería matemática Harwell, [HARW89], se obtienen

las soluciones de la ecuación  $x_e(t) = e$ , tras algunas transformaciones:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= e \\ \alpha_0 + 3\alpha_1 t + 3\alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 &= e \\ \frac{\alpha_0 - e}{\alpha_3} + 3\frac{\alpha_1}{\alpha_3} t + 3\frac{\alpha_2}{\alpha_3} t^2 + t^3 &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\alpha_i, i = 0 \dots 3$  dependen de las abcisas de los 4 puntos, siendo:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_{0e} \\ \alpha_1 &= b_{1e} - b_{0e} \\ \alpha_2 &= b_{2e} - 2b_{1e} + b_{0e} \\ \alpha_3 &= b_{3e} - 3b_{2e} + 3b_{1e} - b_{0e} \end{aligned}$$

Un único punto  $t$  entre 0 y 1 se encuentra siempre que se cumpla que  $b_{0e} \leq e \leq b_{3e}$ . El siguiente paso es evaluar  $x_p(t)$ :

$$\begin{aligned} x_p(t) = PE(e) &= \beta_0 + 3\beta_1 t + 3\beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 \\ \beta_0 &= b_{0p} \\ \beta_1 &= b_{1p} - b_{0p} \\ \beta_2 &= b_{2p} - 2b_{1p} + b_{0p} \\ \beta_3 &= b_{3p} - 3b_{2p} + 3b_{1p} - b_{0p} \end{aligned}$$

Conociendo la raíz  $t$ , encontramos la expresión de la derivada de la CPE respecto la variable  $e$ :

$$\frac{dPE(e)}{de} = \frac{3\beta_1 + 6\beta_2 t + 3\beta_3 t^2}{3\alpha_1 + 6\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2} = \frac{\beta_1 + 2\beta_2 t + \beta_3 t^2}{\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \alpha_3 t^2}$$

Los puntos  $\mathbf{b}_i$  no son estáticos, sino que dependen de varios factores que inciden en la monótona de generación. Las características más importantes de la m.s.g. pueden intervenir directa o indirectamente en la definición de los puntos de Bézier; entre ellas:

- la energía demandada  $\hat{E}$
- la capacidad de las unidades  $\bar{P}_j$  y  $\bar{P}_{\Delta j}$
- la generación determinista  $G^0$
- la duración base de la m.s.g.  $T_G$
- la duración de fallo  $T_X$
- la potencia mínima  $P_{min}$
- la energía externa  $E_X$

De esta manera, obtenemos las coordenadas correspondientes al primer y cuarto puntos:

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} P_{min} T_G \\ P_{min} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \hat{E} - G^0 - E_X \\ \sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j + \bar{P}_{\Delta} \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

pero también se introducen relaciones con los puntos 2 y 3. La continuidad en la derivada de la CPE para el punto  $\mathbf{b}_0$  con el tramo recto que lo une el origen obliga, según la propiedad que se ha comprobado anteriormente, a que  $\mathbf{b}_1$  esté en la prolongación de la

recta que une el origen y  $\mathbf{b}_0$ , o sea, a que se cumpla que:

$$b_{1e} = T_G b_{1p} \quad (10.19)$$

Asímismo, la condición de que la CPE debe tener una derivada igual a  $1/T_X$  en  $\mathbf{b}_3$  es un requisito para que:

$$\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 \propto \left( \frac{1}{T_X} \right)$$

Podemos reescribir esta condición de la siguiente manera:

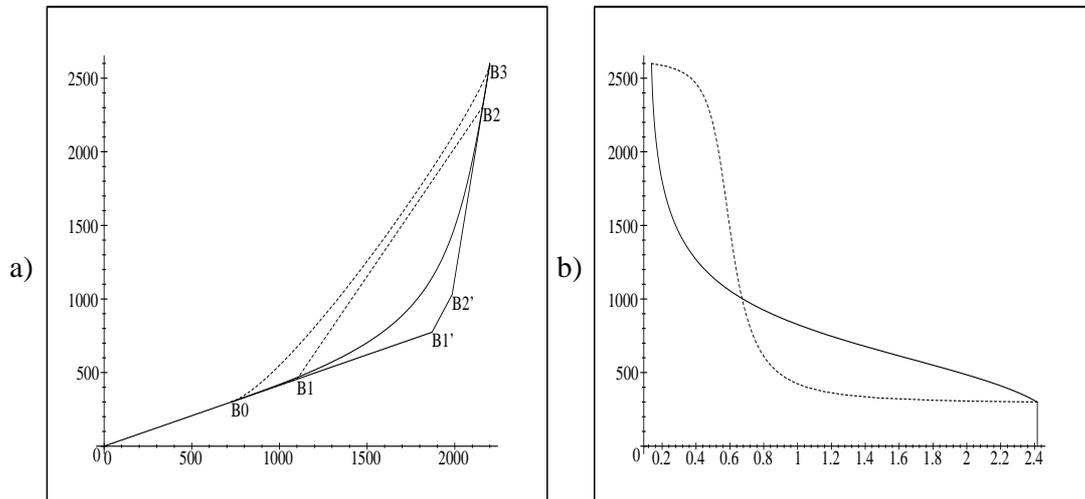
$$\frac{b_{3p} - b_{2p}}{b_{3e} - b_{2e}} = \frac{1}{T_X}$$

$$b_{2p} = b_{3p} - \frac{b_{3e} - b_{2e}}{T_X} \quad (10.20)$$

En consecuencia, quedan por determinar  $b_{1p}$  por la ecuación (10.19) y  $b_{2e}$  por la ecuación (10.20). Es decir, el segundo y tercer punto tiene cada uno un grado de libertad; un aspecto interesante que se deriva de esta conclusión es que el ajuste de la curva de Bézier puede ser optimizado para condiciones particulares mediante la parametrización de tales puntos.

#### 10.5.4 Puntos de Bézier variables

En la sección anterior ya se ha expuesto cómo dependen los extremos de la CPE de las circunstancias que rodean a una determinada monótona de generación. Veremos en el presente apartado una posible modelización de los puntos de Bézier interiores, los cuales pueden desplazarse a lo largo de cierta dirección y respetando ciertas restricciones, lo cual puede ser útil para adecuar lo más posible la forma de la curva de Bézier a la CPE ideal.



**Figura 10.9 :** Variación de una monótona según la posición de los puntos de Bézier. a) Curvas PE y poligonales que unen los respectivos puntos de Bézier: B0-B1'-B2'-B3 —en trazo continuo—, y B0-B1-B2-B3 —en trazo discontinuo—. b) Monótonas respectivas.

La Fig. 10.9 pone de relieve la dependencia entre la posición de los puntos de Bézier y la forma que cobra finalmente la curva monótona derivada de la CPE. Comenzaremos con una exposición de las condiciones que vienen impuestas por la naturaleza del problema:

- La unicidad de  $t$  obliga a que  $b_{0e} < b_{1e} < b_{2e} < b_{3e}$ .
- La lógica indica que también  $b_{0p} < b_{1p} < b_{2p} < b_{3p}$ , si es que se desea que para cada valor de potencia exista un sólo valor de energía.
- $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_3$  están fijados de acuerdo con (10.18).
- También están fijadas las pendientes en  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_3$  y, por tanto, la dirección en la que se encuentran  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$ .
- Como se debe cumplir que  $M_{\text{sg}}(\cdot)$  es decreciente, esto implica que la función  $PE(\cdot)$  es convexa (propiedad [6] de la CPE). Es suficiente con asegurar que los puntos de Bézier configuran una quebrada convexa para garantizar esta propiedad, lo cual se puede expresar como:

$$\frac{1}{T_G} = \frac{b_{1p} - b_{0p}}{b_{1e} - b_{0e}} < \frac{b_{2p} - b_{1p}}{b_{2e} - b_{1e}} < \frac{b_{3p} - b_{2p}}{b_{3e} - b_{2e}} = \frac{1}{T_X} \quad (10.21)$$

Todo ello nos hace ver que los puntos  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$  no pueden sobrepasar un punto  $\mathbf{B}$  dado por la intersección de las rectas sobre las que pueden desplazarse:

$$\begin{aligned} B_p &= B_e/T_G \\ B_p - b_{3p} &= (B_e - b_{3e})/T_X \end{aligned} \implies \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{b_{3e} - b_{3p}T_X}{1 - T_X/T_G} \\ \frac{b_{3e} - b_{3p}T_X}{T_G - T_X} \end{pmatrix}$$

En conclusión,

- $b_{0e} < b_{1e} < B_e < b_{2e} < b_{3e}$
- $b_{0p} < b_{1p} < B_p < b_{2p} < b_{3p}$

es lo mismo que imponer la condición de convexidad para la quebrada.

Dada una monótona de generación, puede determinarse un conjunto de puntos a partir de distintos valores de potencia y el área de la monótona hasta dicho nivel de potencia. Sea, por tanto, el conjunto de estas observaciones  $\mathcal{M} = \{(m_{ei}, m_{pi}), i = 1, \dots, Nm\}$ . A partir de  $\mathcal{M}$  se pueden determinar los valores más adecuados para  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$ , mediante un ajuste por mínimos cuadrados; para ello, se plantea el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Nm} (PE(m_{ei}) - m_{pi})^2 \\ \text{s.t.} \quad & b_{0p} \leq b_{1p} \leq B_p \\ & B_e \leq b_{2e} \leq b_{3e} \end{aligned} \quad (10.22)$$

donde  $\Theta$  es el vector de variables independientes que, en este caso, es igual a  $\{b_{1p}, b_{2e}\}$ , ya que todas las demás son valores conocidos a priori o se pueden determinar a partir de  $\Theta$ .

Tras haber descrito la manera de evaluar la CPE usando una curva de Bézier, es necesario plantear cómo se definen las derivadas de la función objetivo de (10.22) respecto una variable del problema, digamos  $\theta$ . Puede ser conveniente destacar que la expresión de

la pendiente de la CPE respecto la energía es un problema diferente y, en cierta manera, más sencillo. En esta ocasión no es oportuno, ya que los valores de energía están fijados a los valores observados  $m_{ei}$ .

Llamemos  $\varphi(\Theta)$  a la función objetivo de (10.22). Es trivial observar que los componentes del gradiente de  $\varphi(\cdot)$  son de la forma:

$$\sum_{i=1}^{Nm} (PE(m_{ei}) - m_{pi}) \nabla_{\theta} PE(m_{ei})$$

donde  $\nabla_{\theta} PE(m_{ei})$  expresa la derivada parcial de la CPE respecto la variable correspondiente, la que genéricamente llamamos  $\theta$ . Para ser precisos, observemos que la CPE es una función paramétrica sobre  $t$ , es decir, es más apropiado escribir:

$$PE(t, \theta) = \begin{pmatrix} x_e(t, \theta) \\ x_p(t, \theta) \end{pmatrix}$$

Hemos prescindido de la expresión de la energía  $m_{ei}$ , ya que no juega ningún papel en esta parte. Además, se pone de relieve que la CPE depende de la variable  $\theta$  incluyéndola como argumento.

Puesto que  $PE(e) = x_p(x_e^{-1}(e))$ , expresaremos  $\nabla_{\theta} PE(t, \theta)$  tomando la derivada de  $x_p(\cdot)$ . Siendo  $t$  un parámetro de conexión entre las dos componentes de la CPE, pensaremos en la función de potencia como si sólo dependiera de  $\theta$ , es decir,  $x_p(\theta)$ ; por esta razón, buscaremos la expresión de  $\nabla_{\theta} PE(t, \theta)$  a través de lo que se denotará como  $\frac{dx_p}{d\theta}$ .

Así pues, tenemos que:

$$\nabla_{\theta} PE(t, \theta) = \frac{dx_p}{d\theta} = \frac{\partial x_p}{\partial \theta} + \frac{\partial x_p}{\partial t} \frac{dt}{d\theta}$$

y, por otra parte, se tiene que la función  $x_e(\cdot)$  es igual a determinado valor de energía, por lo que diferenciando a ambos lados:

$$\begin{aligned} x_e(t, \theta) = e &\implies \\ \frac{dx_e}{d\theta} = \frac{\partial x_e}{\partial \theta} + \frac{\partial x_e}{\partial t} \frac{dt}{d\theta} = 0 &\implies \\ \frac{dt}{d\theta} = - \frac{\frac{\partial x_e}{\partial \theta}}{\frac{\partial x_e}{\partial t}} \end{aligned}$$

En consecuencia, la derivada buscada se expresa como:

$$\nabla_{\theta} PE(t, \theta) = \frac{\partial x_p}{\partial \theta} - \frac{\partial x_p}{\partial t} \frac{\frac{\partial x_e}{\partial \theta}}{\frac{\partial x_e}{\partial t}} \quad (10.23)$$

Tengamos en cuenta que las subexpresiones parciales de (10.23) son fácilmente calcu-

lables:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_e}{\partial t} &= 3\alpha_3 t^2 + 6\alpha_2 t + 3\alpha_1 \\ \frac{\partial x_p}{\partial t} &= 3\beta_3 t^2 + 6\beta_2 t + 3\beta_1 \\ \frac{\partial x_e}{\partial b_{1p}} &= (3t^3 - 6t^2 + 3t)T_G \\ \frac{\partial x_e}{\partial b_{2e}} &= (-3t^3 + 3t^2) \\ \frac{\partial x_p}{\partial b_{1p}} &= (3t^3 - 6t^2 + 3t) \\ \frac{\partial x_p}{\partial b_{2e}} &= (-3t^3 + 3t^2)/T_X\end{aligned}$$

#### 10.5.4.1 Puntos de Bézier dependientes de la generación

Se puede constatar sin problemas que, dependiendo de cuánta hidrogenación haya intervenido en la convolución y descrestado de la monótona de cargas, el perfil de la m.s.g. es una forma variable. Por esta razón, puede interesar una modelización en la que la posición de los puntos de Bézier sea una función de  $G$ ; concretamente, la generación determinista es con claridad el factor que más incide en la forma de la monótona ya que, aparte de restar una cantidad de energía al total  $\hat{E}$ , el descrestado produce una deformación apreciable en su perfil.

Suponiendo que los puntos que anteriormente formaron el conjunto de variables independientes son ahora funciones conocidas con parámetros a determinar  $\Theta$ . Precisando un poco más,  $\Theta$  procede de la unión disjunta de dos conjuntos de parámetros  $\Theta_p$  y  $\Theta_e$ , que intervienen respectivamente en las expresiones de  $b_{1p}$  y  $b_{2e}$ :

$$\begin{aligned}b_{1p} &= b_{1p}(G^0, \Theta_p) \\ b_{2e} &= b_{2e}(G^0, \Theta_e)\end{aligned}$$

Las expresiones de la derivada de la función objetivo del problema no serán muy diferentes; por aplicación de la regla de la cadena, tal como se han definido  $x_e(\cdot)$  y  $x_p(\cdot)$  en (10.13):

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_e}{\partial \theta_p} &= (3t^3 - 6t^2 + 3t)T_G \frac{\partial b_{1p}}{\theta_p} \\ \frac{\partial x_e}{\partial \theta_e} &= (-3t^3 + 3t^2) \frac{\partial b_{2e}}{\theta_e} \\ \frac{\partial x_p}{\partial \theta_p} &= (3t^3 - 6t^2 + 3t) \frac{\partial b_{1p}}{\theta_p} \\ \frac{\partial x_p}{\partial \theta_e} &= (-3t^3 + 3t^2)/T_X \frac{\partial b_{2e}}{\theta_e}\end{aligned}$$

Un ejemplo podría ser  $(\Theta_p = \{\theta_{p0}, \theta_{p1}, \theta_{p2}\}, \Theta_e = \{\theta_{e0}, \theta_{e1}, \theta_{e2}\})$  y tomar polinomios

de segundo grado para la evolución de los puntos 1 y 2 según el valor de  $G^0$ :

$$\begin{aligned} b_{1p}(G^0) &= \theta_{p2}(G^0)^2 + \theta_{p1}G^0 + \theta_{p0} \\ b_{2e}(G^0) &= \theta_{e2}(G^0)^2 + \theta_{e1}G^0 + \theta_{e0} \end{aligned}$$

El conjunto  $\mathcal{M}$  de observaciones debería ser ampliado para acoger observaciones provenientes de distintos valores de  $G^0$ . Por otro lado, un problema intrínseco de esta técnica es que es difícil asegurar que para cualquier  $G^0$  se satisfacen las condiciones que debe cumplir una CPE modelada como curva de Bézier, que son:

$$\begin{aligned} b_{0p} &\leq b_{1p}(G^0) \leq B_p \\ B_e &\leq b_{2e}(G^0) \leq b_{3e} \end{aligned}$$

Así, para una forma cuadrática como la que figura más arriba habría que establecer un límite superior para  $G^0$  y aplicar tales restricciones a este límite y a 0, pero por otra parte debería procurarse que el posible extremo de cada función apareciera entre las respectivas cotas, lo cual es complejo de resolver, no porque haga intervenir una restricción no lineal (del tipo  $b_{0p} \leq -\theta_{p1}^2/(4\theta_{p2}) + \theta_{p0} \leq B_p$ ) sino porque esta clase de restricciones está condicionada a que dicho extremo esté en el interior del intervalo de generaciones factibles.

## 10.6 Restricciones de generación y potencia usando la CPE

La CPE debe entenderse como un instrumento equivalente a la monótona de generación, aportando la ventaja de poder relacionar de manera simple los dos principales factores interviniendo en el problema de coordinación, la potencia y la energía. Mediante una función  $PE(\cdot)$  se da forma matemática al concepto de recubrimiento de la monótona, lo cual permite llevar las restricciones que ligán la carga con la generación al campo de la programación matemática.

Así, para determinar la potencia generada por la  $j$ -ésima unidad térmica en cierto intervalo del que se ha determinado una curva Potencia-Energía, conociendo las generaciones de las unidades térmicas y de las pseudo-unidades hidráulicas, puede escribirse:

$$P_j = PE \left( E_j + \sum_{m=1}^{j-1} E_m + G_{\Delta m} \right) - PE \left( \sum_{m=1}^{j-1} E_m + G_{\Delta m} \right) \quad (10.24)$$

De esta manera, pueden imponerse a cada unidad límites a su capacidad de generación, empleando la expresión (10.24):

$$P_j \leq \bar{P}_j, \quad j = 1, \dots, Nu \quad (10.25)$$

Considerando el total del parque, tenemos la restricción que se refiere al recubrimiento de la monótona propiamente dicho:

$$PE \left( \sum_{j=1}^{Nu} (E_j + G_{\Delta j}) \right) = \sum_{j=1}^{Nu} P_j + P_{\Delta} \quad (10.26)$$

A través de (10.1) se calcula el valor de  $G_\Delta$ . En consecuencia, la generación hidráulica se comporta como una unidad más, excepto que se trataría de una unidad con limitación de potencia y, sobre todo, de energía.

## 10.7 Restricciones hidráulicas

En la introducción del capítulo 2 al problema de la coordinación hidroeléctrica se postula la existencia y tratamiento de una red hidráulica en el modelo. Esto se traduce en que la topología de dicha red origina unas variables representando los distintos flujos por la misma. Como el modelo incluye una subdivisión del tiempo en intervalos, además se incluyen variables de almacenamiento de agua en los embalses al final de cada intervalo.

La parte hidráulica del modelo de coordinación es común con la que se describe en el capítulo 7, de modo que a continuación sólo se exponen las restricciones necesarias.

Las variables de flujos (descargas, bombeos y volúmenes fundamentalmente) son las variables primarias de la parte hidráulica del modelo; de éstas es de donde se deriva el cálculo que lleva a la determinación de la generación hidráulica.  $G^0, G^{01}, \dots, G_\Delta$  son expresiones intermedias útiles para el desarrollo del problema, pero las verdaderas variables motivo de optimización son aquellas.

De acuerdo con la notación previamente presentada, sea  $V_{i,n}$  el volumen de agua almacenada en el  $n$ -ésimo embalse al final del  $i$ -ésimo intervalo;  $X_{i,a}$  denota un arco de la red hidráulica propiamente dicha, donde  $a$  es un índice generalmente relativo a un conjunto  $A_n$ , arcos con entrada en el embalse  $n$ , o a un conjunto  $\Omega_n$ , arcos con salida del embalse  $n$ . Se excluyen los arcos de aportación natural, que se denotan como  $I_{i,n}$  y que además no forman parte del conjunto de variables del problema, aunque sí intervienen en la formulación de las restricciones.

Así, considerando la naturaleza multiartículo de cada uno de estos elementos, la ecuación de balance en cada nodo  $n$  se escribe como:

$$\sum_{a \in A_n} X_{i,a}^k + V_{i-i,n}^k + I_{i,n}^k = \sum_{a \in \Omega_n} X_{i,a}^k + V_{i,n}^k \quad \begin{array}{l} k = 0 \dots K-1 \\ i = 1 \dots Ni \\ n = 1 \dots Nr \end{array} \quad (7.1)$$

y cada variable está sujeta a restricciones limitando cada artículo, además de restricciones de capacidad mutua dadas por la capacidad del arco:

$$\begin{array}{l} 0 \leq V_{i,n}^k \leq \bar{V}_{i,n}^k \quad (i = 1 \dots Ni - 1) \\ 0 \leq X_{i,a}^k \leq \bar{X}_{i,a}^k \quad (i = 1 \dots Ni) \end{array} \quad \begin{cases} k = 0 \dots K-1 \\ n = 1 \dots Nr \\ a \in A_N \vee a \in \Omega_n \end{cases} \quad (10.27)$$

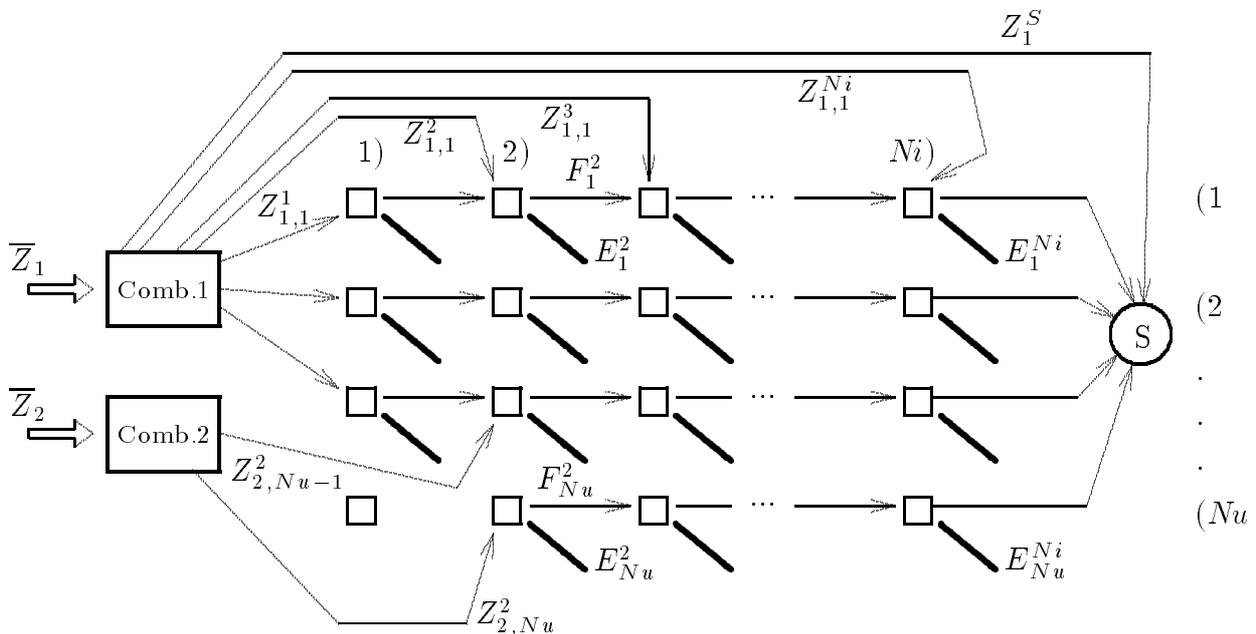
$$\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{K-1} V_{i,n}^k \leq \bar{V}_{i,n} \quad (i = 1 \dots Ni - 1) \\ \sum_{k=0}^{K-1} X_{i,a}^k \leq \bar{X}_{i,a} \quad (i = 1 \dots Ni) \end{array} \quad \begin{cases} n = 1 \dots Nr \\ a \in A_N \vee a \in \Omega_n \end{cases} \quad (10.28)$$

## 10.8 Restricciones de combustible y generación térmica

En el capítulo 2 se presentó el problema de la coordinación hidrotérmica enfocando la sección térmica como una red temporal en la que circulan como flujo cantidades de combustible, parte del cual era consumido en cada intervalo y parte pasaba a ser el stock disponible para posteriores intervalos. La Fig. 2.2 ilustraba este concepto de manera esquemática.

En la realidad suelen producirse situaciones bastante más complejas; por ejemplo:

- No todas las unidades térmicas pueden usar el mismo combustible.
- Algunas unidades son capaces de funcionar con diferentes tipos de combustible.
- La adquisición del combustible puede realizarse en momentos diferentes del que representa el inicio del periodo.



**Figura 10.10 :** Red térmica replicada. Se incluyen varios combustibles y adquisición múltiple.

De aquí que surja la necesidad de ampliar la definición de red térmica con estos nuevos conceptos; la Fig. 10.10 propone un par de situaciones corrientes. Por un lado, el combustible 1 representa un contrato tipo “take-or-pay”: las distintas unidades ligadas a él realizan sus adquisiciones, considerando un máximo  $\bar{Z}_1$ , a lo largo de unos intervalos —en este caso, todo el periodo—, y eventualmente tienen excedentes de combustible que, de todos modos, ya han pagado; el combustible no adquirido va a parar al pozo por el arco  $Z_1^S$ . Por otro lado, el combustible 2 representa una adquisición puntual en el intervalo 2 —como podría ser, por ejemplo, un barco de gas— por un total de  $\bar{Z}_2$  unidades de combustible, del cual se sirven un par de unidades que deben gestionar su consumo y su stock para el resto del periodo (observar que se consume o se guarda todo el combustible, ya que no hay arco que vaya a parar al pozo).

En general, se considera un cierto número  $Nf$  de combustibles (carbón, gas natural, fuel-oil, etc.) que se encuentran asociados a las unidades térmicas con capacidad para consumir determinado combustible, asociación que se pone de manifiesto mediante los arcos que parten de los nodos de los combustibles (a la izquierda en la figura) y que tienen el significado de “suministro”. La variable asociada a un suministro se denota como  $Z_{f,j}^i$ , donde  $f$  es un combustible,  $j$  una térmica e  $i$  el intervalo en el que se materializa dicho suministro (no se representan en la figura todos los arcos que parten del “depósito” inicial por no complicar inútilmente la figura).

Puesto que una determinada unidad puede ser alimentada con varios tipos de combustible, puede recibir varios suministros al mismo tiempo. Por ello, los arcos de combustible residual deben desdoblarse, para permitir el flujo separado de los diferentes combustibles. Debido a limitaciones de almacenamiento, se entiende que todos los combustibles admitidos por una central tienen una restricción común. Es por ello que se entiende la red térmica como una red multiartículo. En este sentido, cada arco  $F_j^i$ , y por la misma razón cada arco de generación  $E_j^i$ , contiene realmente  $Nf$  variables,  $F_{f,j}^i$  y  $E_{f,j}^i$ , con  $f = 1 \dots Nf$ .

Ahora ya se puede reescribir la ecuación (2.6) en los términos de las nuevas variables:

$$F_{f,j}^{i-1} + Z_{f,j}^i = F_{f,j}^i + \varepsilon_j E_{f,j}^i \quad \begin{cases} i = 1 \dots Ni \\ j = 1 \dots Nu \\ f = 1 \dots Nf \end{cases} \quad (10.29)$$

También se pueden considerar límites sobre la generación o sobre el combustible, en varias configuraciones. Por ejemplo:

$$\sum_{f=1}^{Nf} F_{f,j}^i \leq \bar{F}_j, \quad \begin{cases} i = 1 \dots Ni \\ j = 1 \dots Nu \end{cases}$$

es una restricción para la cantidad de combustible que se puede almacenar en cada intervalo para cada unidad térmica, según la máxima capacidad disponible  $\bar{F}_j$ . Puede verse que se trata de la restricción sobre la capacidad mutua del arco multiartículo  $F_j^i$ . Por otra parte,

$$\sum_{f=1}^{Nf} E_{f,j}^i \leq \bar{E}_j^i, \quad \begin{cases} i = 1 \dots Ni \\ j = 1 \dots Nu \end{cases}$$

sería una restricción para la generación eléctrica de una unidad. Puede verse que esta vía permite modelizar adecuadamente restricciones de amplio interés, como por ejemplo la *emisión de contaminantes* (si se admite que el volumen de éstos es proporcional a la generación producida). Además, la inclusión de estas restricciones no es especialmente gravosa, ya que se tratan de restricciones lineales, como la siguiente:

$$\sum_{f \in CF} \sum_{i \in CI} \sum_{j \in CU} \delta_{f,j}^i E_{f,j}^i \leq \overline{CONT}$$

Suponiendo determinados combustibles (contenidos en el conjunto  $CF$ ), determinados intervalos ( $CI$ ) y determinadas térmicas ( $CU$ ), conociendo la característica  $\delta_{f,j}^i$  que permite la transformación de la generación a volumen de contaminantes, podemos imponer que éstos sean inferiores a una determinada cantidad límite  $\overline{CONT}$ .

## 10.9 Formulación ampliada del problema

Con las nuevas consideraciones, el problema de coordinación hidrotérmica quedaría plasmado en los términos siguientes:

$$\min_X \quad \sum_{i=1}^{Ni} \left( \sum_{j=1}^{Nu} \sum_{f=1}^{Nf} y_{f,j}^i Z_{f,j}^i + y_X^i E_X^i \right) \quad (10.30)$$

$$\text{s.t.} \quad P_j^i = PE_i \left( E_j^i + \sum_{m=1}^{j-1} E_m^i + G_{\Delta m}^i \right) - PE_i \left( \sum_{m=1}^{j-1} E_m^i + G_{\Delta m}^i \right) \quad i = 1 \dots Ni, j = 1 \dots Nu \quad (10.31)$$

$$G_{\Delta}^i = \sum_{j=1}^{Nu} G_{\Delta j}^i \quad i = 1 \dots Ni \quad (10.32)$$

$$P_j^i \leq \overline{P_j} \quad i = 1 \dots Ni, j = 1 \dots Nu \quad (10.33)$$

$$\sum_{j=1}^{Nu} E_j^i + G_i = \widehat{E}^i \quad i = 1 \dots Ni \quad (10.34)$$

$$G_i^k = \Gamma_i(X_i^k, V_{i-i}^k, V_i^k) \quad k = 0 \dots K-1, i = 1 \dots Ni \quad (10.35)$$

$$F_{f,j}^{i-1} + Z_{f,j}^i = F_{f,j}^i + \varepsilon_j E_{f,j}^i \quad i = 1 \dots Ni, j = 1 \dots Nu \quad (10.36)$$

$$\sum_{a \in A_n^k} X_{i,a}^k + V_{i-i,n}^k + I_{i,n}^k = \sum_{a \in \Omega_n} X_{i,a}^k + V_{i,n}^k \quad k = 0 \dots K-1, i = 1 \dots Ni, n = 1 \dots Nr \quad (10.37)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} X_{i,a}^k \leq \overline{X}_a \quad \text{para todo arco } a, i = 1 \dots Ni$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} V_{i,n}^k \leq \overline{V}_n \quad i = 1 \dots Ni, n = 1 \dots Nr \quad (10.38)$$

$$X_{i,a}^k \leq \overline{X}_a^k \quad \text{para todo arco } a, k = 0 \dots K-1, i = 1 \dots Ni$$

$$V_{i,n}^k \leq \overline{V}_n^k \quad k = 0 \dots K-1, i = 1 \dots Ni, n = 1 \dots Nr \quad (10.39)$$

Los cambios sobre la formulación aparecida en (2.1-2.8) afectan a la función objetivo (10.30), en la que se integran las nuevas variables de suministro; se explicita la expresión de la potencia de cada unidad térmica con (10.31); la función  $\Gamma(\cdot)$  de la restricción (10.35) es la expresión que aparece en el capítulo 7, donde se encuentran (7.4) y (7.6), la forma según la que se derivan los parámetros de la distribución de la generación hidráulica cuando se asume que sigue una distribución de bloques; finalmente, todas las variables hidráulicas se expresan en forma multiartículo, de manera que el nuevo modelo tiene en consideración el carácter estocástico del problema.

## 10.10 Ejemplos resueltos

Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar acerca de las características del método. Se han elegido teniendo en cuenta que se tratan de casos realistas, aunque de dimensiones moderadas, lo cual es conveniente para el propósito de realizar una exposición en este capítulo.

El primer caso consta de una cuenca con 4 embalses, y un parque térmico de 4 unidades, cuyas características se reflejan en la tabla 10.I. Además, se consideran 3 contratos de compra de energía, cuyas condiciones aparecen en la tabla 10.II. El periodo de estudio se subdivide en 12 intervalos que abarcan desde el mes de enero hasta el mes de diciembre. La carga máxima prevista para cada intervalo varía entre los 1466 MW y los 1857 MW. La capacidad hidráulica se ha supuesto igual a 1000 MW.

Tabla 10.I. Descripción del parque térmico (caso 1).

Unidad	$\bar{P}$ [MW]	$q$	Efic.	Precio [ECU/MWh]
# 1	489	0.07	86.12%	5.544
# 2	207	0.065	34.83%	7.128
# 3	282	0.10	37.45%	9.756
# 4	526	0.10	38.83%	10.188

Tabla 10.II. Descripción de los contratos (caso 1).

Contrato	$\bar{P}$ [MW]	$q$	Precio [ECU/MWh]
# 1	319	0.045	39.12
# 2	335	0.045	39.88
# 3	132	0.065	40.63

$\bar{P}$  significa capacidad de cada unidad o contrato;  $q$  se refiere a la proporción de tiempo en que previsiblemente la unidad o contrato no estará disponible. Se indica además un coeficiente que representa la eficacia en la conversión de energía potencial de los combustibles a energía eléctrica por parte de cada unidad térmica. El precio indicado se refiere a energía potencial para las unidades térmicas, y a energía eléctrica adquirida para los contratos. El coste de la energía externa se ha fijado en 80 ECU por MWh importado, aproximadamente el doble del precio de los contratos, que son la fuente más cara del parque disponible y, por tanto, se ubican en último lugar en el orden de mérito.

Para la representación multiartículo de las variables, se han realizado pruebas con distintos valores de  $K$ , desde 3 hasta 8. De cada una de las ejecuciones se han recogido algunos indicadores de interés, información que se muestra en la tabla 10.III.

La primera columna expresa el coste en ECU estimado en cubrir la demanda con los medios de los que se dispone —incluyendo la hidrogenación—, según la política óptima hallada. Tanto  $G^0$  como  $G_\Delta$  y  $E_X$  representan la suma de energía acumulada a todos los

Tabla 10.III. Resultados del caso 1.

$K$	F. Obj. [ECU]	$G^0$ [MWh]	$G_{\Delta}$ [MWh]	$E_X$ [MWh]	T.cpu [seg.]
3	$1.1603298 \cdot 10^8$	$2.22227 \cdot 10^5$	$2.199548 \cdot 10^6$	1825	17.3
4	$1.1425431 \cdot 10^8$	$2.07731 \cdot 10^5$	$2.302738 \cdot 10^6$	2465	15.6
5	$1.1634727 \cdot 10^8$	$2.13957 \cdot 10^5$	$2.189002 \cdot 10^6$	1668	7.8
6	$1.0840690 \cdot 10^8$	$2.36555 \cdot 10^5$	$2.488162 \cdot 10^6$	1681	18.9
7	$1.1503812 \cdot 10^8$	$2.01332 \cdot 10^5$	$2.236564 \cdot 10^6$	1510	29.0
8	$1.1389304 \cdot 10^8$	$2.48995 \cdot 10^5$	$2.237775 \cdot 10^6$	1444	36.4

intervalos. El error relativo en la función objetivo que estos resultados ponen al descubierto es de un 6.8%, debido al óptimo hallado con  $K=6$ , que se encuentra bastante lejos de los resultados con diferente número de artículos. Sin contar éste, la discrepancia se reduce a un error del 2.1%. Por otro lado, observamos que el coste fluctúa bastante, sin que se manifieste una tendencia creciente o decreciente según  $K$ , como suele ocurrir en los programas de optimización de la hidrogenación.

Respecto a la generación hidráulica, se observa una media de  $2.18 \cdot 10^5$  MWh de generación determinista para el periodo, y una media de  $2.28 \cdot 10^6$  MWh de generación estocástica, respecto a los valores recogidos para los diferentes supuestos en el número  $K$ . Los datos que se refieren a  $E_X$  no varían excesivamente, alrededor de 1765 MWh calculado como la media aritmética de los valores de la tabla. Finalmente, los tiempos de ejecución logrados no vienen determinados de forma importante por el número de artículos —por el número de variables hidráulicas, en suma—, sino más bien por la dificultad de hallar un óptimo local en un problema de perfil no lineal muy acusado. Puede ser significativo que el problema con 5 artículos haya acabado en muy poco tiempo, pero con un óptimo local de peor calidad que el resto (si nos atenemos al valor que devuelve finalmente la función objetivo).

El segundo caso tiene unas dimensiones mayores: la cuenca hidráulica consta de 6 embalses, con una capacidad instalada de 2000 MW. El parque térmico dispone de 7 unidades, y se complementa con 4 contratos de compra de energía. La potencia punta que alcanza la carga mensual también crece: entre 3000 MW y 3800 MW. La información pertinente se muestra en las tablas 10.IV y 10.V. Los resultados se han recogido en la tabla 10.VI.

Tabla 10.IV. Descripción del parque térmico (caso 2).

Unidad	$\bar{P}$ [MW]	$q$	Efic.	Precio [ECU/MWh]
# 1	471	0.07	86.12%	5.364
# 2	489	0.07	86.12%	5.544
# 3	207	0.065	34.83%	7.128
# 4	282	0.10	37.45%	9.756
# 5	526	0.10	38.83%	10.188
# 6	522	0.10	38.66%	10.800
# 7	336	0.045	41.55%	13.176

Tabla 10.V. Descripción de los contratos (caso 2).

Contrato	$\bar{P}$ [MW]	$q$	Precio [ECU/MWh]
# 1	319	0.045	39.12
# 2	330	0.045	39.28
# 3	335	0.045	39.88
# 4	132	0.065	40.63

Tabla 10.VI. Resultados del caso 2.

$K$	F. Obj. [ECU]	$G^0$ [MWh]	$G_{\Delta}$ [MWh]	$E_X$ [MWh]	T.cpu [seg.]
3	$2.1594068 \cdot 10^8$	$7.91250 \cdot 10^5$	$5.883753 \cdot 10^6$	7781	9.6
4	$2.5172235 \cdot 10^8$	$1.07652 \cdot 10^6$	$4.414232 \cdot 10^6$	5047	11.8
5	$2.2711910 \cdot 10^8$	$9.16309 \cdot 10^5$	$5.489615 \cdot 10^6$	8598	11.3
6	$2.5355221 \cdot 10^8$	$6.11630 \cdot 10^5$	$4.756524 \cdot 10^6$	7301	15.1
7	$2.5235045 \cdot 10^8$	$8.86253 \cdot 10^5$	$4.801416 \cdot 10^6$	9081	18.5
8	$2.4725791 \cdot 10^8$	$5.37921 \cdot 10^5$	$4.790657 \cdot 10^6$	2001	34.7

En esta ocasión se vuelven a presentar discrepancias en el coste de la solución óptima, y bastante notables para  $K=3$  y 5. Se puede sospechar que el aumento del coste se debe a la disminución de la generación estocástica (la correlación entre estas dos magnitudes es cercana a -1), aunque se ignora si existe un motivo que justifique esta pérdida de generación para los casos con peor coste. En general, no conviene confiar demasiado en el caso con menor número de artículos, ya que el cálculo de la generación hidráulica no suele ser suficientemente preciso. En cuanto a la prueba con  $K=5$ , parece claro que el superávit de generación hidráulica respecto a los otros casos explica la diferencia de coste, por lo que se puede pensar que se ha generado una política considerablemente eficaz. Los tiempos de ejecución presentan una cierta tendencia dependiente de  $K$ , pero cabe destacar que en este caso se han alcanzado tiempos que se comparan muy favorablemente con los anteriores, teniendo en cuenta que se trata de problemas de mayores dimensiones que los del caso 1.

La tabla siguiente responde a la relevante cuestión de qué ocurre si la demanda aumenta. En esta ocasión, se parte de una situación igual a la del caso 2, excepto que la carga se ha incrementado en un 10% (esta situación será denominada caso 2+).

Tabla 10.VII. Resultados del caso 2, con incremento de carga (2+).

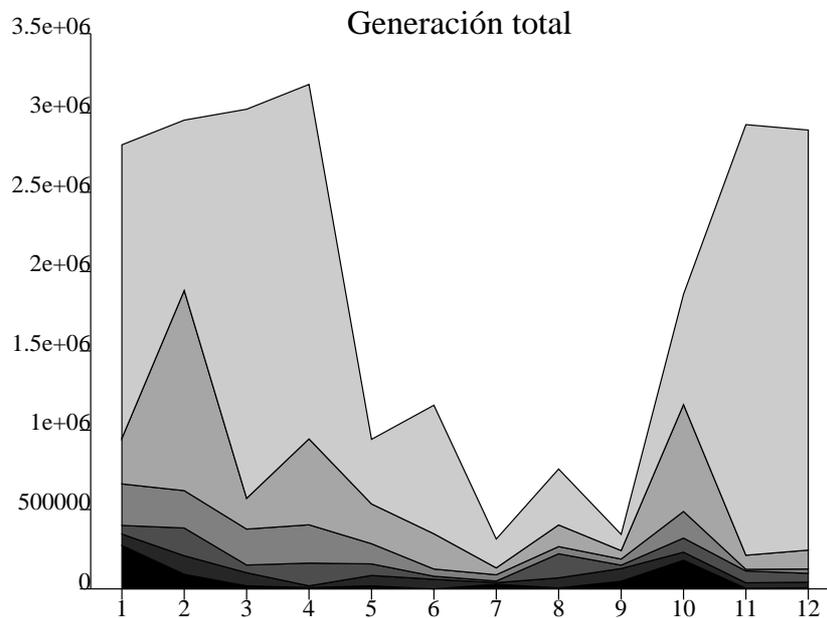
$K$	F. Obj. [ECU]	$G^0$ [MWh]	$G_{\Delta}$ [MWh]	$E_X$ [MWh]	T.cpu [seg.]
3	$3.1094326 \cdot 10^8$	$8.31424 \cdot 10^5$	$4.687250 \cdot 10^6$	6293	12.6
4	$3.0733815 \cdot 10^8$	$8.72007 \cdot 10^5$	$4.705048 \cdot 10^6$	4691	19.5
5	$2.9921124 \cdot 10^8$	$8.55315 \cdot 10^5$	$4.999781 \cdot 10^6$	2845	12.4
6	$3.0937861 \cdot 10^8$	$6.83028 \cdot 10^5$	$4.700077 \cdot 10^6$	2096	22.1
7	$2.8254011 \cdot 10^8$	$8.55626 \cdot 10^5$	$5.545215 \cdot 10^6$	1507	25.3
8	$3.0224201 \cdot 10^8$	$7.73098 \cdot 10^5$	$4.963718 \cdot 10^6$	4275	37.2

Se observa en primer lugar un lógico incremento de la función objetivo. Comparándolo con el caso anterior, se cifra este incremento entre un 12% y un 44%, siendo la media un 25%. La generación hidráulica no ha contribuido más de lo que lo hacía anteriormente, lo que es correcto, pues se espera siempre el máximo apoyo de la hidrogenación, y no han aumentado los recursos hídricos. Es destacable una notable estabilización en las magnitudes de  $G_{\Delta}$ , y especialmente de  $G^0$ . Evidentemente, la causa del aumento del coste, muy superior al 10%, se debe a los incrementos de generación de los contratos y de las unidades más caras, necesarios ya que las unidades más económicas no pueden incrementar su producción al estar ubicadas en la base de la monótona de generación. Los cambios más notables se muestran a continuación (datos correspondientes a  $K=6$ , donde el incremento de coste global asciende a un 22%):

	Tr.# 3	Tr.# 4	Tr.# 5	Tr.# 6	Tr.# 7
Caso 2 [ECU]	$2.9186 \cdot 10^7$	$4.6011 \cdot 10^7$	$6.7544 \cdot 10^7$	$3.9281 \cdot 10^7$	$1.0492 \cdot 10^7$
Caso 2+ [ECU]	$3.2695 \cdot 10^7$	$5.2244 \cdot 10^7$	$8.8237 \cdot 10^7$	$4.9779 \cdot 10^7$	$1.8103 \cdot 10^7$
Incremento	12%	13%	31%	26%	72%

	Cont.# 1	Cont.# 2	Cont.# 3	Cont.# 4
Caso 2 [ECU]	$6.4498 \cdot 10^6$	$3.6298 \cdot 10^6$	$1.5424 \cdot 10^6$	131207
Caso 2+ [ECU]	$1.0200 \cdot 10^7$	$6.931 \cdot 10^6$	$1.7252 \cdot 10^6$	89480
Incremento	58%	91%	19%	-31%

Para finalizar con los ejemplos, se muestran unos resultados gráficos construidos a partir de la información suministrada por la política óptima. Concretamente, se trata del caso con  $K=6$  e incremento del 10% de la carga.



**Figura 10.11 :** Generación hidráulica total del ejemplo. [MWh]

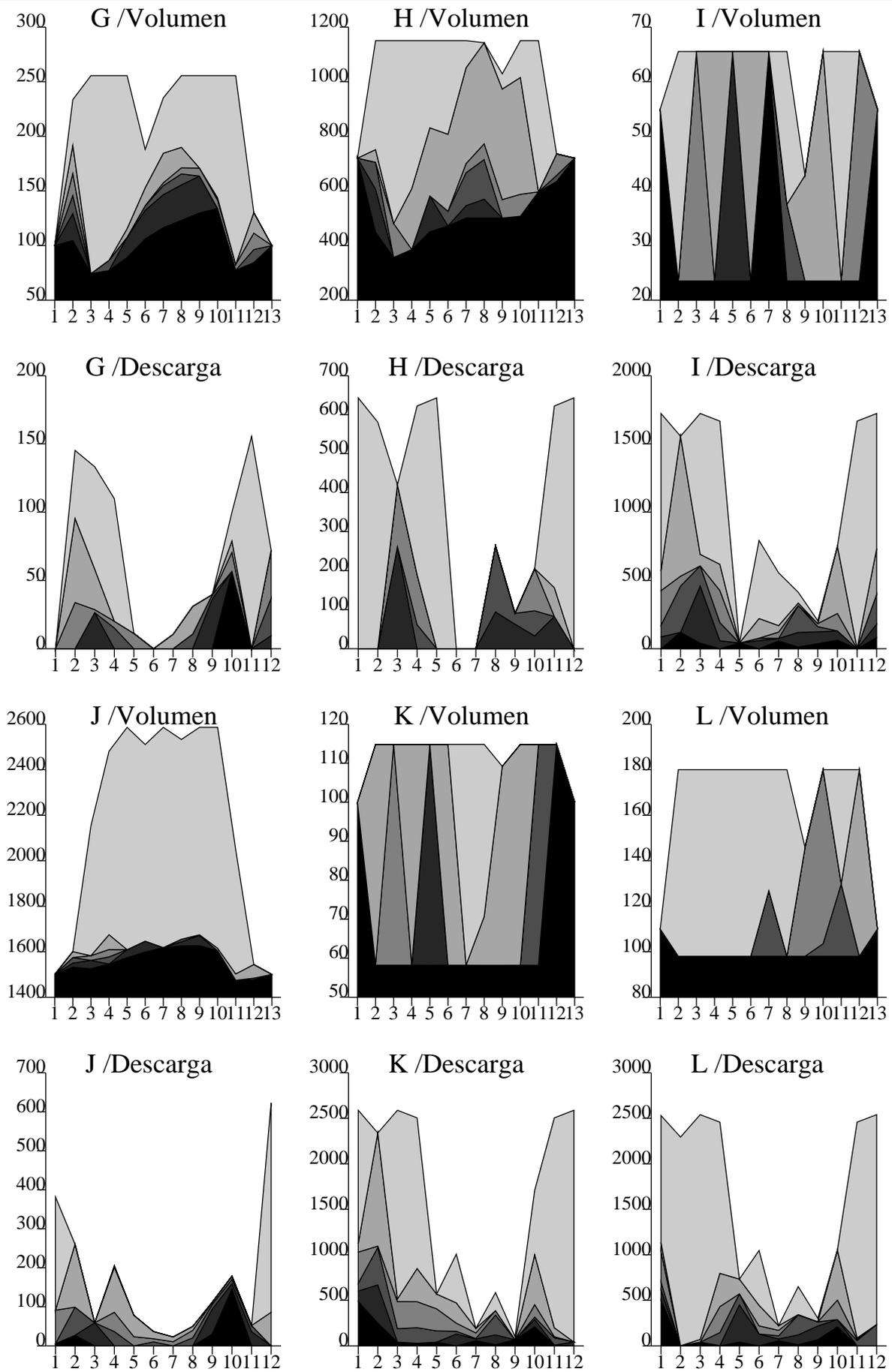


Figura 10.12 : Descargas y volúmenes del ejemplo. [ $\text{Hm}^3$ ]

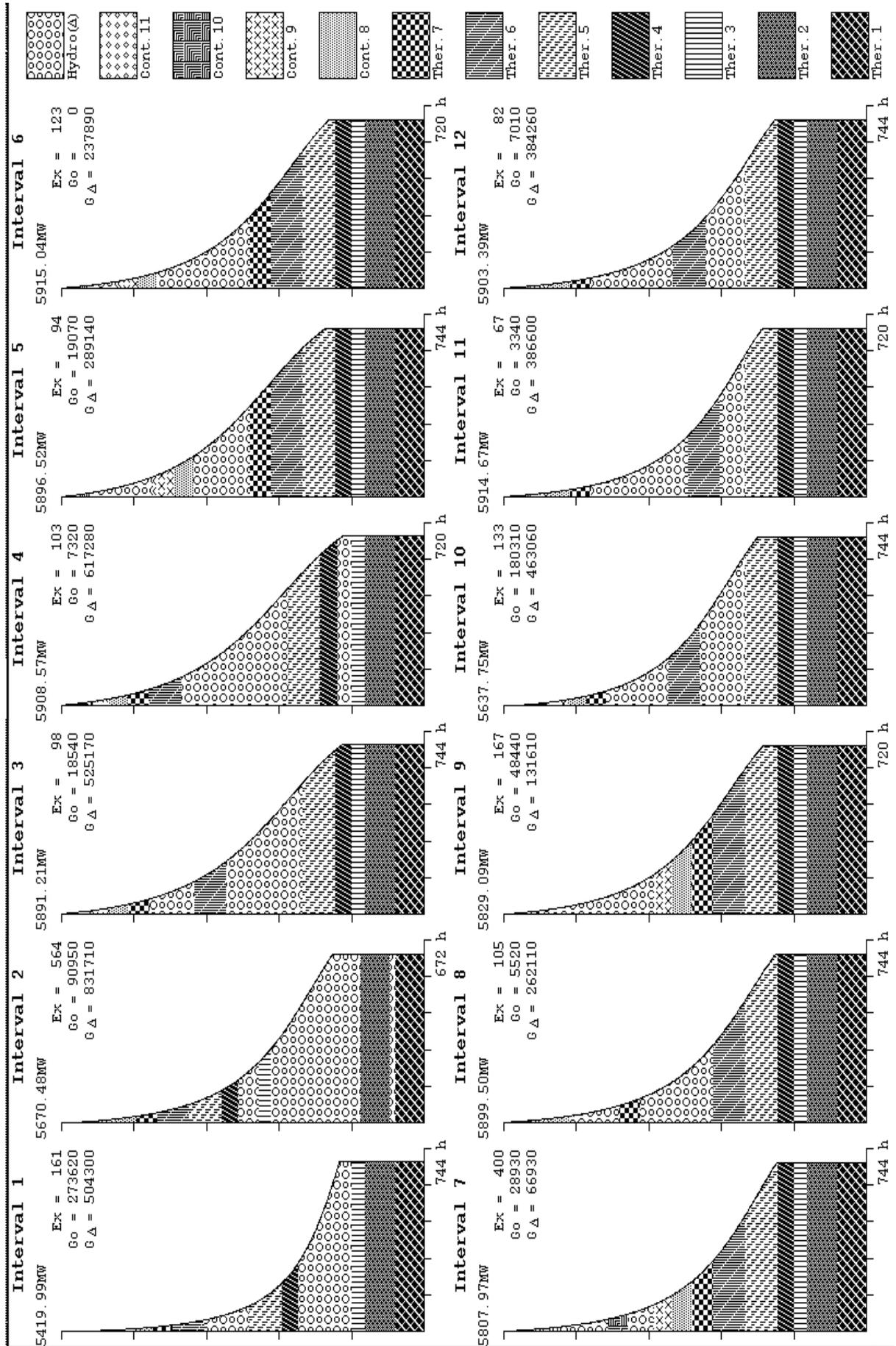


Figura 10.13 : Resultado expresado sobre las monótonas de generación.

En la Fig. 10.12, los seis embalses de la cuenca se designan con las letras G a L (en el capítulo 12 hay más detalles sobre la cuenca). Cada gráfica registra la evolución temporal, bien del volumen de agua almacenada al final de cada intervalo, bien de la cantidad de agua descargada por los arcos de generación. Las distintas tonalidades están asociadas a un artículo, la más oscura al artículo 0 y la más clara al  $K - 1$ . De esta manera pueden representarse las distribuciones que corresponden a cada arco.

La Fig. 10.11 considera la suma de las generaciones en MWh de cada arco, aunque aquí se muestran las diferentes distribuciones por intervalo, no solamente la generación determinista (el artículo 0) y la esperanza del resto, que son los objetos que hasta ahora se han mostrado porque es lo que entiende el modelo hidrotérmico presentado. Destaca especialmente la gran cantidad de generación correspondiente al artículo  $K - 1$ ; ello es debido a la distribución de las aportaciones naturales presentes, que presentan la misma característica. Se debe interpretar como la posibilidad (no muy probable, sin embargo) de alcanzar grandes cotas de generación en el caso de que se presentasen unos niveles de aportaciones tan inusuales. De todos modos, la figura deja en claro que la expectativa de generación es bastante más modesta.

Por último, en la Fig. 10.13 se han dibujado las monótonas de generación de cada intervalo con el cubrimiento resultante, en el que participan además de las unidades térmicas y los contratos, la generación hidráulica estocástica en las posiciones que se han determinado como más idóneas. El valor de potencia indicado sobre el eje de ordenadas corresponde a la punta de la monótona de generación (todas las gráficas se representan a la misma escala). Los valores respectivos de  $E_{X,i}$ ,  $G_i^0$  y  $G_{\Delta,i}$  aparecen para cada intervalo  $i$ . Obsérvese que la posición de la generación estocástica depende de la magnitud de ésta: si es escasa, se ubica en las posiciones altas, rellenando la misma punta y evitando la puesta en marcha de los contratos. Si es abundante, baja hasta las primeras posiciones, en donde la duración disponible permite rebajar la potencia hidráulica, sujeta al límite de la capacidad  $\bar{P}_h$ .



## CAPÍTULO 11

# ANÁLISIS DE LA CONVOLUCIÓN CON UNIDADES HIDRÁULICAS

### 11.1 Introducción

El concepto de monótona de generación, muy asociado al de convolución dentro del tema que nos ocupa, ha sido introducido, nombrado y referenciado en varios capítulos de esta tesis. En el presente se le dedica una atención preferente, pero no sólo para explicar cuál es el conocido procedimiento de convolución de la carga con la distribución de potencia en fallo de una unidad térmica. El centro de interés del capítulo es la descripción detallada de un procedimiento de eficiencia probada para sumar la carga con una variable aleatoria continua que perfectamente puede representar capacidad hidráulica.

A partir de las ideas que se exponen en [WOOD84], las cuales provienen a su vez del texto primordial de Balériaux et al., [BALÉ67], se ha ido desarrollando un entorno en el que se encaja en primer lugar el tema de las unidades térmicas. Sobre ello, se describe un método de evaluación de costes basado en costes no lineales respecto la potencia, al tiempo que se introduce el concepto de *contribución*. Una vez situados en este campo, el siguiente paso es realizar la extensión pertinente en el caso de que la unidad que se considera fuera una unidad hidráulica. El concepto de *contribución*, al igual que el de *distribución de potencia en fallo*, tienen cabida en este terreno, una vez adaptados a las características correspondientes.

El capítulo se ha regido atendiendo a un riguroso planteamiento matemático; se consideran no sólo las características propias de la distribución de probabilidad de la hidrogenación —en las que el marco de las variables de bloques resulta óptimo— sino también la posibilidad de ubicar a esta unidad en cualquier posición del orden de mérito de las unidades térmicas. La explicación se acompaña con ejemplos e ilustraciones que ayudan en su seguimiento.

### 11.2 Símbolos, formulación empleada y algunos conceptos

Como ha convenido en otros capítulos, en éste se va a especializar un tanto la notación, con el fin de evitar que algunos símbolos aparezcan excesivamente recargados, mientras se espera concentrar la atención primordialmente en los aspectos fundamentales del capítulo.

Por supuesto, mientras se pueda mantener, la notación será homogénea con la del resto del trabajo.

En primer lugar, hay que ubicarse en una situación general con las siguientes líneas maestras: se trata de un sistema de potencia que integra una parte térmica y una parte hidráulica, y el entorno temporal es de largo plazo. No se consideran limitaciones de combustible; sí se consideran, obviamente, todas las características estocásticas que han ido apareciendo a lo largo de la tesis: aportaciones naturales, demanda de potencia e indisponibilidad aleatoria de las unidades térmicas.

### 11.2.1 Sobre la monótona de carga

Tomamos un intervalo indeterminado, al cual nos referiremos como uno general, sin necesidad de aludir al resto (y sin necesidad de recordar continuamente que se trata del intervalo  $i$ ). Sea:

★  $Nh$ : duración en horas del intervalo

Cuando nos estemos refiriendo a generación o a energía en este capítulo, siempre será la producción a lo largo de estas  $Nh$  horas. Lo mismo en lo que respecta a la demanda. La monótona de cargas del intervalo va a ser la representación de la estocasticidad de la carga, cuyos valores límites son  $P_{min}$  y  $\hat{P}$  MW. Aunque normalmente la monótona de cargas es una mera ordenación de valores de carga pasados, o una previsión construida a partir de observaciones históricas, aquí vamos a darle un enfoque diferente, con el fin de poder introducir cómodamente esta magnitud en las operaciones matemáticas que se van a llevar a cabo. Por ello, tendremos que:

★  $M_L(p)$  designa a la monótona de cargas como una función de la potencia  $p$ .

Hay que tener presente que  $M_L(\cdot)$  cumple estas propiedades:

- $M_L(p)$  vale  $Nh$  para  $p \leq P_{min}$
- $M_L(p)$  vale 0 para  $p \geq \hat{P}$
- es una función continua y decreciente

Por tanto, puede dársele a  $M_L(p)$  la siguiente interpretación; “duración en horas del tiempo en que se espera tener una carga mayor que  $p$  MW”. Como se puede apreciar, la función  $M_L(\cdot)$  modeliza el comportamiento aleatorio de la carga; sin embargo, puede ser más apropiado utilizar la función:

★  $R_L(p) = \frac{M_L(p)}{Nh}$ : función de fiabilidad de la carga,

que expresa la misma idea pero en términos de probabilidad (es decir, la probabilidad de tener una carga mayor que  $p$ ). A partir de  $R_L(\cdot)$  se derivan sin dificultad las funciones de distribución  $F_L(\cdot)$  y  $f_L(\cdot)$ :

$$F_L(p) = 1 - R_L(p) = \text{Prob}(L \leq p)$$

$$f_L(p) = \frac{d}{dp} F_L(p)$$

Podemos ver sin dificultad que la esperanza de la carga  $L$ ,  $\mathbf{P}$ , concide con la superficie que se encuentra bajo la función de fiabilidad.  $\mathbf{P}$  es, por definición de media de variable

aleatoria:

$$\mathbf{P} = \int_0^{\hat{P}} pf_L(p)dp$$

Como esta expresión puede ser tratada integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[ pF_L(p) \right]_0^{\hat{P}} - \int_0^{\hat{P}} F_L(p)dp &= (\hat{P} - 0) - \int_0^{\hat{P}} (1 - R_L(p))dp = \\ \hat{P} - \int_0^{\hat{P}} dp + \int_0^{\hat{P}} R_L(p)dp &= \int_0^{\hat{P}} R_L(p)dp \end{aligned}$$

De aquí se deduce trivialmente que la energía media que habrá que suministrar,  $\mathbf{E}$ , equivale al área bajo la función  $M_L(\cdot)$  y es igual a  $Nh \cdot \mathbf{P}$ . A lo largo del capítulo iremos viendo que es indiferente referirse a generación esperada o a potencia esperada y, por tanto, aunque el motivo de interés preferente es averiguar cuál va a ser la producción de una unidad térmica o cuál el coste que supone, utilizaremos de manera predominante el cálculo a través de las funciones de probabilidad (y, con ello, ligadas a la potencia).

### 11.2.2 Sobre las unidades térmicas

El carácter estocástico más importante de una unidad térmica es la posibilidad de que no se encuentre disponible para generar electricidad por causas de fuerza mayor, es decir, imprevistas. Así, denotaremos:

★  $q_u$ : probabilidad de que la unidad  $u$  ( $u = 1 \dots Nu$ ) no esté disponible

Teniendo en cuenta que no consideramos limitación de combustible, una unidad puede generar en toda su capacidad de producción  $\bar{P}_u$  si y sólo si está disponible. En términos medios, podemos ver que en todo el intervalo funcionará unas  $q_u \cdot Nh$  horas. Con esto, podemos definir ya una variable  $Pf$ , conocida como *potencia en fallo* y que significará “potencia térmica no disponible”. Puesto que se trata de una variable aleatoria con dos estados posibles, la describiremos totalmente con su función de probabilidad:

$$f_{Pf_u}(x) = \begin{cases} 1 - q_u, & \text{si } x = 0 \\ q_u, & \text{si } x = \bar{P}_u \end{cases} \quad (11.1)$$

Una aproximación que haremos se refiere a la valoración de la generación térmica. Supondremos que el coste de producir  $p$  MW a cargo de la unidad  $u$  sigue una relación cuadrática de la potencia  $p$ , cuyos coeficientes son:

- ★  $z_{1,u}$ : coeficiente lineal
- ★  $z_{2,u}$ : coeficiente cuadrático

Para evaluar el coste de la energía externa se utiliza el mismo procedimiento, con coeficientes que conoceremos como  $z_{1,X}$  y  $z_{2,X}$ .

Esta suposición persigue una mayor precisión a la hora de evaluar el coste que acarrea una unidad térmica, especialmente aquellas que por no estar situadas en la base de la monótona de generación funcionan una parte del intervalo a potencia menor que su capacidad. Sin embargo, de esta manera se plantea una dificultad adicional. Ya que los costes dejan de ser lineales respecto a la generación, podría darse la circunstancia de que

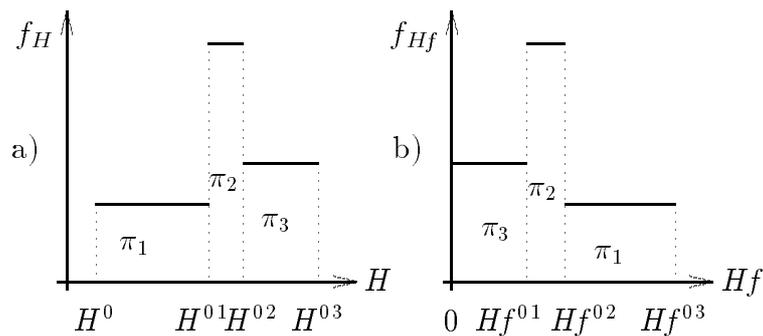
una unidad  $i$  fuera más económica que una unidad  $j$  por debajo de cierta potencia, y a la inversa por encima, con lo que se produce un transtorno en el orden de mérito inicial que la metodología de Balériaux et al. no contempla. Una posible solución sería desdoblar las unidades en conflicto, formando un nuevo orden de mérito en la que estas unidades participarían divididas en tramos intercalados entre las demás: dicho orden se basaría en los costes de las unidades y de los tramos de las unidades particionadas. De esta manera se asegura el recubrimiento óptimo de la monótona. En el presente trabajo, sin embargo, no se ha realizado la implementación que contemple este punto.

### 11.2.3 Sobre la hidrogenación

Denotamos como  $H$  y  $G$  la potencia y la generación hidráulicas respectivamente (con unidades MW y MWh), adoptando nuevamente la potencia como una generación escalada por la duración del intervalo. Se supone una única unidad que reúne la producción de todos los puntos de generación hidráulica del sistema. De acuerdo con la línea de todo el trabajo, se asume que  $H$  (y  $G$ ) es una variable de  $K-1$  bloques, designando con  $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_{K-1}\}$  las probabilidades de cada bloque.  $H^0$  es la llamada potencia hidráulica determinista, pues se supone asegurada; por otro lado, se define:

$$\star \bar{H} = H^{0K-1} - H^0$$

como la capacidad indeterminista hidráulica.



**Figura 11.1 :** Distribuciones de la pot. hidráulica y de la pot. hidráulica no disponible. a)  $f_H(\cdot)$  ( $K=4$ ). b)  $f_{Hf}(\cdot)$ .

La generación determinista tiene un carácter particular, y se considera separadamente, mediante procedimientos que simulan el efecto del descrestado de la monótona. Como consecuencia de esta operación, que tiene por objetivo rebajar la punta de la monótona a fin de evitar que se pongan en funcionamiento las últimas unidades en el orden de mérito, las más caras, la potencia punta que se va a considerar,  $\hat{P}$ , es menor que la potencia punta original, y la función  $M_L(\cdot)$  contiene asimismo las modificaciones que el descrestado ha introducido en el perfil real de la monótona. Se ha elegido este punto de vista teniendo en cuenta que el descrestado es algo que se realiza previamente, y porque puede simplificar notablemente la presentación de los temas que son preferentes en el capítulo.

En cuanto a la parte de potencia indeterminista, definiremos una variable  $Hf$  como  $H^{0K-1} - H$ , y se identificará como *potencia hidráulica no disponible*. Debe entenderse esta nueva variable como el margen de la capacidad hidráulica (no sobre la capacidad máxima, sino sobre el máximo de la distribución) que no llega a utilizarse; una especie de potencia

en fallo para unidades de generación hidráulicas, cuya capacidad de generación está condicionada por la presencia de agua en los embalses. Como se aprecia en la Fig. 11.1, se distribuye igualmente como una variable de bloques, destacando las siguientes propiedades:

- su límite inferior es 0 (no hay potencia no-disponible: se llega al máximo previsible)
- su límite superior es  $\overline{H}$
- la forma de la función de densidad de  $Hf$  es un reflejo lateral de la de  $H$ ; las probabilidades también se han invertido.

Todas estas propiedades son fácilmente comprobables. La probabilidad  $\pi_{K-1}$  que corresponde al último bloque de  $H$  se transforma en:

$$\begin{aligned}\pi_{K-1} &= \text{Prob}(H \geq H^{0K-2}) = \text{Prob}(-H \leq -H^{0K-2}) = \\ & \text{Prob}(H^{0K-1} - H \leq H^{0K-1} - H^{0K-2}) = \text{Prob}(Hf \leq H^{0K-1} - H^{0K-2}) = \pi'_1\end{aligned}$$

es decir,  $H^{0K-1} - H^{0K-2}$  es el  $\pi_{K-1}$ -cuantil de  $Hf$ . Como se trata del primer límite de bloque —aparte de 0— de la nueva variable, podemos asignar un nuevo conjunto de probabilidades  $\Pi'$  asociado a  $Hf$ :

$$\star \pi'_1 = \pi_{K-1}; \pi'_2 = \pi_{K-2}; \dots; \pi'_{K-1} = \pi_1$$

y, en consecuencia, definir sus cuantiles principales como:

$$\star Hf^0 = 0; Hf^{01} = H^{0K-1} - H^{0K-2}; \dots; Hf^{0K-1} = H^{0K-1} - H^0$$

$$\text{Claramente, } \pi'_j = \pi_{K-j}, \text{ y } Hf^{0j} = H^{0K-1} - H^{0K-j-1}.$$

### 11.2.3.1 Hipótesis sobre la potencia hidráulica del modelo

Como consecuencia del uso de las variables de descarga en la optimización de la hidrogenación, se contempla un concepto de generación ligado a la duración del intervalo considerado —una semana, un mes, ... Cuando se reflexiona acerca de la estocasticidad de la generación, solamente se puede poner en relación con acontecimientos que afectan a la globalidad del intervalo: por ejemplo, las aportaciones de toda la semana, o de todo el mes.

La potencia es un concepto de naturaleza distinta, ya que su definición no precisa de un espacio temporal, al tratarse de una magnitud de carácter instantáneo. La aleatoriedad de la potencia hidráulica en un intervalo contempla una dimensión adicional de la que presenta la generación, ya que fluctúa continuamente dependiendo de las condiciones de carga. Es bien conocido que los embalses de regulación funcionan preferiblemente en las horas punta, mientras que a ciertas horas no descargan en absoluto.

Este modelo de largo plazo incurre conscientemente en una simplificación que en cierta medida le resta precisión: la dimensión instantánea de la potencia es parcialmente ignorada, al admitir que la variable  $H$  se define como la generación  $G$  dividida por la duración  $Nh$ . Esta decisión es aceptable en términos de esperanza: en cualquier circunstancia,  $E[G] = Nh \times E[H]$ , pero soslaya otros aspectos, como que es posible adoptar el valor 0 aunque  $G^0 > 0$  (por lo que hemos dicho antes, la potencia hidráulica nula resulta ser bastante normal), así como también es admisible alcanzar la máxima capacidad  $\overline{P}_h$  sin que la  $G^{0K-1}$  sea la máxima generación. Es decir, derivada de la hipótesis anterior, se asume que la capacidad indeterminista es  $\overline{H} = (G^{0K-1} - G^0)/Nh$  cuando posiblemente un valor superior sería más adecuado.

Aunque es prioritario en investigaciones futuras la revisión de estas ideas con el fin de acercarlas más a las circunstancias reales, debe aclararse que la generación hidráulica determinista cuenta ya en el presente modelo con un tratamiento especial, el descrestado, el cual deshace en cierta manera la dependencia entre energía y potencia.

#### 11.2.4 Sobre la monótona de generación

Entendemos por monótona de generación la forma que representa cómo se cubre la demanda de potencia por parte de las unidades implicadas en la generación (entre las que se incluye la hidráulica). Como sabemos, el proceso de cálculo de la monótona de generación se realiza mediante la convolución sucesiva de  $L$  y cada una de las potencias en fallo, ya que se asume que cada una de las variables que interviene posee una función de distribución. Puesto que el proceso es, por naturaleza, iterativo, definimos:

- ★  $J_n$ , variable aleatoria que representa la suma de la carga y la potencia en fallo de las primeras  $n$  unidades en orden de mérito.
- ★  $R^{(n)}(\cdot)$ , función de fiabilidad de  $J_n$ , obtenida tras convolucionar la carga y las primeras  $n$  unidades de la lista de orden de mérito.

Podemos ser generalistas, y admitir que entre estas  $n$  unidades se incluye la hidráulica, o no. Suponemos a priori que la generación hidráulica no tiene posición asignada en la lista, y por ello dejaremos que pueda entrar en cualquier lugar.

Ampliaremos nuestra notación especificando que  $R^{(0)}(p)$  es igual que  $R_L(p)$ , y que  $J_0$  es la carga  $L$ . Además, emplearemos en el sentido usual las funciones  $F^{(n)}(\cdot)$  y  $f^{(n)}(\cdot)$  como funciones de distribución y de densidad respectivamente de la carga más la potencia en fallo.

El símbolo  $Y$  será utilizado, cuando se supone que han entrado  $n$  unidades en convolución con la carga, para designar la suma de capacidades de estas unidades, es decir:

- ★  $Y = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{P}_i + \bar{H}$ , si se incluye hidrogenación.
- ★  $Y = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ , si no se incluye.

Como se verá más adelante, en §11.4.1, la monótona de generación queda exactamente determinada a través de las funciones  $R^{(n)}(\cdot)$ . Si se supone un parque de  $Nu$  unidades, e identificamos con la función  $MG(\cdot)$  a la monótona de generación, se define como:

$$MG(p) = \begin{cases} Nh(1 - q_n)R^{(n-1)}(p), & \sum_{u=1}^{n-1} \bar{P}_u \leq p \leq \sum_{u=1}^n \bar{P}_u \\ NhR^{(Nu)}(p), & \sum_{u=1}^{Nu} \bar{P}_u \leq p \leq \sum_{u=1}^{Nu} \bar{P}_u + \hat{P} \end{cases}$$

La monótona de generación proviene de  $Nu + 1$  segmentos de las funciones  $R^{(0)}(p)$ ,  $R^{(1)}(p)$ ,  $\dots$ ,  $R^{(Nu)}(p)$ , escalados convenientemente por la duración del intervalo  $Nh$  y la disponibilidad de las unidades. En la literatura se entiende el mismo concepto como *carga por cubrir*, que se basa en la construcción de una monótona visible a partir de la entrada

de cada unidad. El procedimiento desplaza al semieje negativo la parte de carga cubierta, con lo que se mantiene en el semieje positivo sólo la parte superior (desde 0 hasta  $\widehat{P}$ ), cada vez menor a medida que se incorporan más unidades.

$J_n$  está definida entre un mínimo,  $P_{min}$ , y un máximo, dado por  $\widehat{P} + Y$ . Por ello, aunque la suma de capacidades supere a la potencia punta, siempre existe la posibilidad de que una cierta carga no pueda ser suministrada debido al fallo conjunto de un número suficiente de unidades. El segmento de  $R^{(n)}(p)$  que queda por encima de  $Y$  es el que viene asociado a la pérdida de carga con  $n$  unidades; si  $n = Nu + 1$  entonces está asociado a la idea de energía externa  $E_X$ . El cálculo de  $E_X$  se deriva de:

$$E_X = Nh \cdot \int_Y^{\widehat{P}+Y} (p - Y) f^{(Nu+1)}(p) dp \quad (11.2)$$

Puede verse que la expresión (11.2) responde a la forma de la esperanza matemática de una variable igual a  $p - Y$  cuando sólo se considera la posibilidad de una potencia  $p$  superior a  $Y$ . Continuaremos esta prueba descartando la constante  $Nh$ ; así, en vez de un valor de energía se hallará un valor de potencia  $P_X$  (un término medio de déficit de potencia).

Integrando por partes encontramos que, en efecto, se llega a determinar la relación con el área encerrada bajo la función  $R^{(Nu+1)}(\cdot)$  y a partir de  $Y$ :

$$\begin{aligned} P_X &= \left[ (p - Y) F^{(Nu+1)}(p) \right]_Y^{\widehat{P}+Y} - \int_Y^{\widehat{P}+Y} F^{(Nu+1)}(p) dp = \\ &= (\widehat{P} + Y - Y) 1 - (Y - Y) F^{(Nu+1)}(Y) - \int_Y^{\widehat{P}+Y} (1 - R^{(Nu+1)}(p)) dp = \\ &= \widehat{P} - \int_Y^{\widehat{P}+Y} dp + \int_Y^{\widehat{P}+Y} R^{(Nu+1)}(p) dp = \int_Y^{\widehat{P}+Y} R^{(Nu+1)}(p) dp \quad \blacksquare \end{aligned}$$

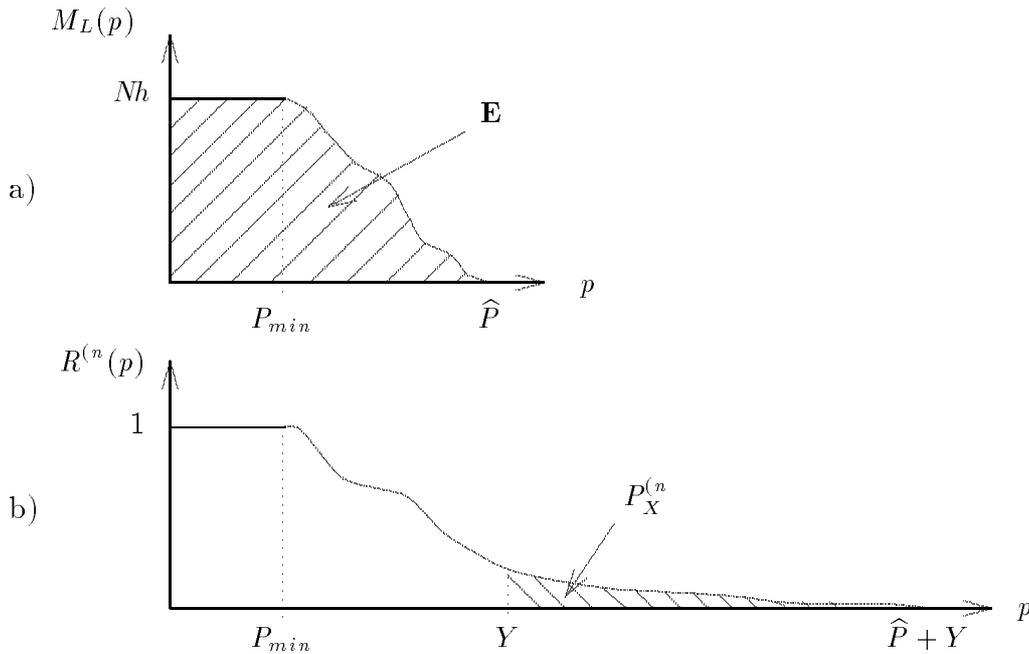
Siguiendo la Fig. 11.2, vemos que la situación inicial es una energía demandada  $\mathbf{E}$  que equivale a la superficie bajo la curva de la monótona (si en vez de considerar la monótona fuera una función de fiabilidad, hablaríamos en términos de potencia). Del total de  $\mathbf{E}$ , una porción no se espera satisfacer con los recursos propios: esta fracción de energía (o de potencia) externa viene dada por el área de la cola superior de la monótona de generación, que es equivalente a la cola de  $R^{(Nu+1)}(p)$ . Se extiende el concepto de carga perdida media con  $n$  unidades de manera inmediata:

$$\star P_X^{(n)} = \int_Y^{\widehat{P}+Y} (p - Y) f^{(n)}(p) dp$$

$$\text{Está claro que } P_X = P_X^{(Nu+1)}.$$

### 11.3 Convolución de unidades de generación con $J_n$

Se llama convolución al procedimiento por el que se obtiene directamente la distribución de probabilidad de la suma de variables aleatorias independientes. En términos



**Figura 11.2 :** Integral de las monótonas. a) Monótona de cargas y demanda esperada **E**. b) Función de fiabilidad de  $J_n$ , con el valor que representa la pérdida media de carga.

concretos, si  $X$  e  $Y$  son variables independientes, la función de densidad de  $Z = X + Y$  proviene de:

$$f_Z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w)f_Y(u-w)dw \quad (11.3)$$

Debe recordarse que el trabajo de Balériaux et al. [BALÉ67] imprimió un impulso decisivo a la utilización de esta técnica dentro del campo de los sistemas de potencia, para derivar la distribución de la suma de la carga y la potencia en fallo de unidades térmicas.

### 11.3.1 Inclusión de una unidad térmica

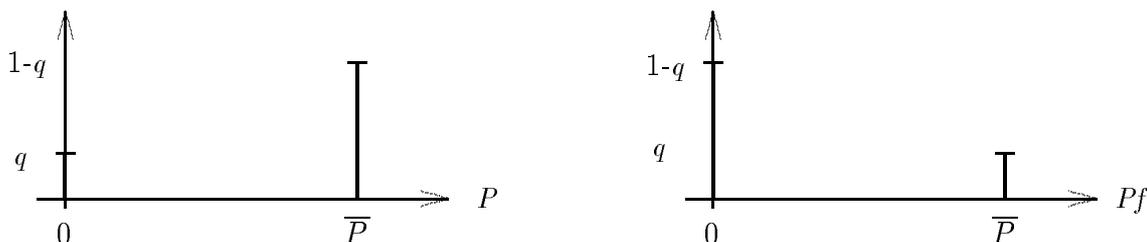
A través de simples transformaciones, (11.3) puede adaptarse para venir en términos de funciones de fiabilidad:

$$\begin{aligned} R_Z(u) &= \int_u^{+\infty} f_Z(t)dt = \int_u^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w)f_Y(t-w)dw dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w) \int_u^{+\infty} f_Y(t-w)dt dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w)R_Y(u-w)dw \end{aligned} \quad (11.4)$$

Como hemos comentado anteriormente, el proceso de obtención de la monótona de generación pasa por hallar sucesivamente  $R^{(1)}(\cdot), R^{(2)}(\cdot), \dots$ , etc. Por lo tanto, es conveniente reescribir (11.4) en los términos de nuestro problema:

$$R^{(n+1)}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{P_{n+1}}(w)R^{(n)}(u-w)dw$$

Hemos supuesto una situación general en la que  $n$  unidades ( $n \geq 0$ ) ya han sido convolucionadas.



**Figura 11.3 :** Funciones de prob. de la potencia disponible y en fallo de una unidad térmica.

Como se tiene que la potencia en fallo  $Pf_{n+1}$  es una variable discreta, tal como se aprecia en la Fig. 11.3, que ilustra la función de probabilidad de la potencia  $P$  y la potencia en fallo de una unidad térmica genérica, la integral anterior se reduce a una suma de sólo dos términos:

$$R^{(n+1)}(u) = \begin{cases} (1 - q_{n+1})R^{(n)}(u) + q_{n+1}, & \text{si } P_{min} \leq u \leq P_{min} + \bar{P}_{n+1} \\ (1 - q_{n+1})R^{(n)}(u) + q_{n+1} \cdot R^{(n)}(u - \bar{P}_{n+1}), & \text{si } P_{min} + \bar{P}_{n+1} \leq u \leq \hat{P} \\ q_{n+1} \cdot R^{(n)}(u - \bar{P}_{n+1}), & \text{si } \hat{P} \leq u \end{cases} \quad (11.5).a$$

si se cumple que  $P_{min} + \bar{P}_{n+1} \leq \hat{P}$ , y:

$$R^{(n+1)}(u) = \begin{cases} (1 - q_{n+1})R^{(n)}(u) + q_{n+1}, & \text{si } P_{min} \leq u \leq \hat{P} \\ q_{n+1}, & \text{si } \hat{P} \leq u \leq P_{min} + \bar{P}_{n+1} \\ q_{n+1} \cdot R^{(n)}(u - \bar{P}_{n+1}), & \text{si } P_{min} + \bar{P}_{n+1} \leq u \end{cases} \quad (11.5).b$$

en caso contrario.

De hecho, el método se ha generalizado en algunos casos en que se debe modelizar a unidades que funcionan por grupos, y cuya avería no significa necesariamente el cese de la generación. En estos casos, se considera una variable aleatoria que asume probabilidad para un cierto número discreto de valores de potencia y, en consecuencia, la integral de convolución da lugar a una expresión en la que interviene igual número de sumandos.

### 11.3.2 Inclusión de una unidad hidráulica

En lo que sigue se va a describir cómo se incorpora la estocasticidad presente en la generación hidráulica a la distribución que forman la carga y la potencia en fallo de las unidades térmicas. Para ello se utiliza un procedimiento particular para convolucionar ambas variables ( $Hf$  y  $J_n$ ), asumiendo como en el apartado anterior que  $n$  ( $n \geq 0$ ) unidades se han convolucionado previamente. Como hemos expuesto inicialmente, se requiere la independencia entre las variables implicadas; en nuestro caso hemos asumido esta hipótesis por dos motivos: en primer lugar, la generación hidráulica depende sustancialmente de las aportaciones naturales; en segundo lugar, la parte de generación hidráulica que está influida por la carga (entra en momentos de alta demanda) es la determinista, la cual se ha eliminado de consideración desde el momento que la distribución de la carga se ha modificado con el descrestado de la monótona de cargas.

Representamos la potencia en fallo hidráulica  $Hf$  mediante su función de densidad, la cual viene a ser:

$$f_{Hf}(x) = \begin{cases} \frac{\pi_{K-1}}{H^{0K-1} - H^{0K-2}} & \text{si } 0 < x < H^{0K-1} - H^{0K-2} \\ \dots & \\ \frac{\pi_2}{H^{02} - H^{01}} & \text{si } H^{0K-1} - H^{02} < x < H^{0K-1} - H^{01} \\ \frac{\pi_1}{H^{01} - H^0} & \text{si } H^{0K-1} - H^{01} < x < H^{0K-1} - H^0 \end{cases} \quad (11.6)$$

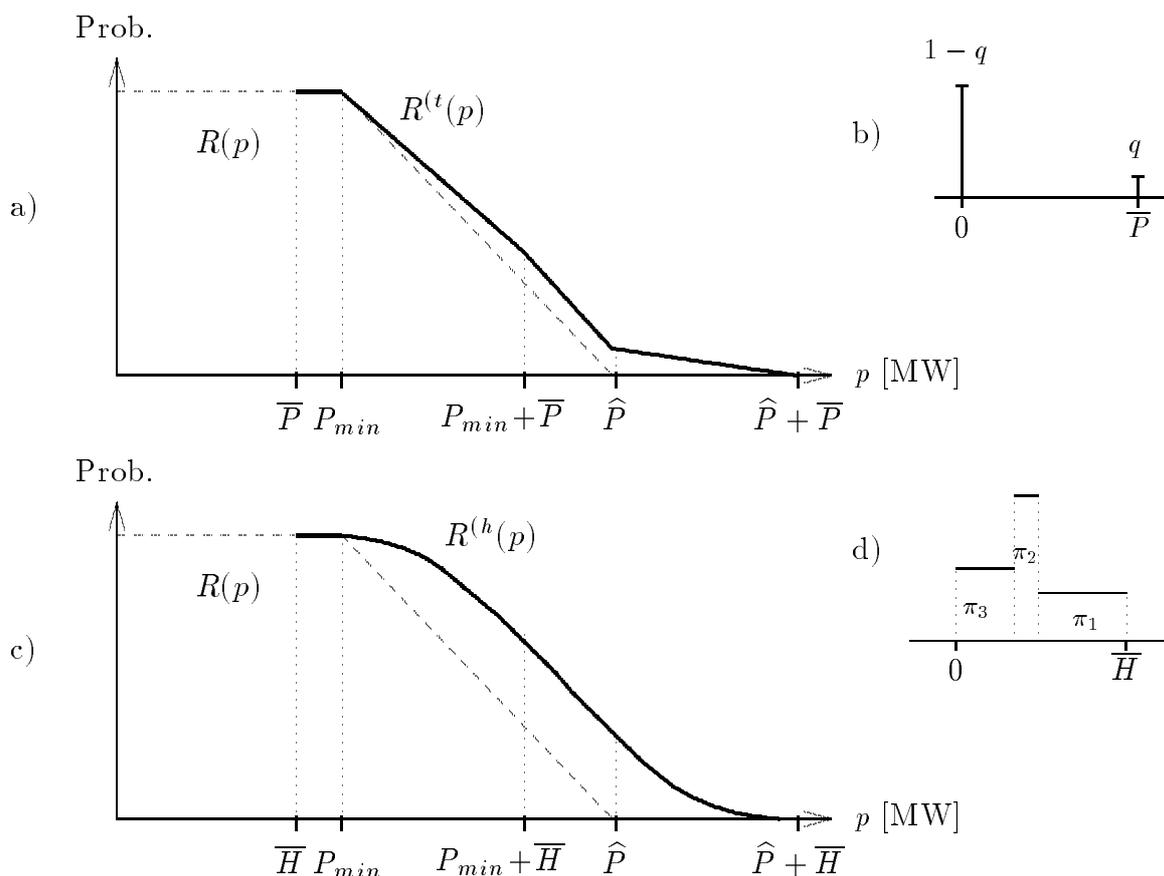
La principal diferencia entre  $Hf$  y  $Pf$  es el carácter continuo de aquella (continuo, en el sentido opuesto a *discreto*, que corresponde a  $Pf$ ), que hace que la convolución entre  $J_n$  y la indisponibilidad de potencia hidráulica necesite de un procedimiento diferente. También del uso de distribuciones continuas resulta una función algo diferente que cuando sólo se convolucionan distribuciones discretas. Pongamos como ejemplo el siguiente caso. La distribución de la carga es una distribución uniforme entre la potencia base  $P_{min}$  y la punta  $\hat{P}$ , y consideramos la convolución sobre esta monótona de una distribución supuestamente perteneciente a una unidad térmica, y de otra distribución que se supone proviene de una unidad hidráulica, con  $K-1$  bloques y capacidad máxima  $\overline{H} = H^{0K-1} - H^0$ . Al no considerar la duración del intervalo (que nos transformaría los datos a unidades de energía), suponemos las magnitudes resultantes como potencias. Los valores adoptados son:

- $\hat{P} = 11$ ,
- $P_{min} = 5$ ,
- $\overline{P} = \overline{H} = 4$ ,
- $q = 0.15$ ,
- $K = 4$ ,
- los cuantiles de  $Hf$ :  $\{0, 2, 8/3, 4\}$  y
- $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$ .

La Fig. 11.4 muestra cómo son las funciones de fiabilidad —aquí asimiladas a las monótonas— de las variables implicadas. En trazo discontinuo, en a) y c),  $R(p)$  se corresponde con la monótona de cargas, un segmento rectilíneo puesto que la densidad de la variable es constante. En a), en trazo grueso aparece el resultado de la convolución con la variable discreta ( $R^{(t)}(p)$ ), mientras que en c)  $R^{(h)}(p)$  representa la convolución con la variable de bloques. b) y d) muestran respectivamente las funciones de probabilidad de  $Pf$  y  $Hf$ . Obsérvese que  $R^{(t)}(p)$  está formada por segmentos rectilíneos, mientras que  $R^{(h)}(p)$  es una curva suave (diferenciable una vez, puesto que en realidad se compone de segmentos cuadráticos).

Si hiciéramos el cálculo de la potencia media con la que cada unidad contribuye a satisfacer la demanda obtendríamos para la térmica 3.4, y para la hidráulica 2.222, diferencia que se justifica evidentemente por la mayor posibilidad de la térmica para alcanzar potencias altas.

Es muy ilustrativo explicar el significado de sumar la carga con la potencia en fallo. Tanto la demanda como la indisponibilidad de generar son claramente variables a las que podemos asignar el mismo sentido, mientras que la generación real recibe el sentido



**Figura 11.4 :** El ejemplo de convolución ilustrado. a) monótona de carga y resultado de convolucionar con la térmica. b) distribución de probabilidad de  $Pf$ . c) monótona de carga y resultado de convolucionar con la hidráulica. d) distribución de probabilidad de  $Hf$ .

opuesto. Como toda compañía eléctrica está obligada a satisfacer la demanda de energía, ésta resulta igual a la aportada por las unidades que componen su parque de generación más un probable resto que ha de importar a causa de eventual insuficiencia de producción del parque propio. La aportación real (hablando en términos de expectativa) de una unidad es menor que su capacidad máxima por la duración  $Nh$  debido a dos factores:

- la unidad no puede generar siempre a máxima capacidad, y
- en ocasiones la demanda es inferior a la capacidad disponible

A esta aportación la llamaremos *contribución*. Es muy importante conocer esta magnitud, pues resulta imprescindible para valorar el coste de producción de cada unidad térmica. Más adelante comprobaremos que no hay que identificar la contribución con la esperanza de  $P$  o  $H$ , precisamente por el segundo de los factores citados anteriormente.

### 11.3.2.1 Procedimiento de convolución con variables de bloques

Conviene partir de (11.3) expresada adecuadamente según las variables que intervienen en el problema:

$$f^{(n+1)}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Hf}(w) f^{(n)}(u - w) dw \quad (11.7)$$

$J_n$  es la suma de la carga  $L$  y la potencia en fallo de  $n$  unidades (supuestamente térmicas, aunque no es necesario hacer hipótesis al respecto), representada en (11.7) mediante su función de densidad  $f^{(n)}(\cdot)$ . Recordemos que esta función es nula fuera del intervalo dado por  $P_{min}$  y  $\hat{P} + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ . En lo que respecta a  $Hf$ , se distribuye solamente entre 0 y  $\bar{H}$ ; por lo tanto, podemos deducir que la variable  $w$  debe respetar los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
 &0 \leq w \leq \bar{H} \\
 &P_{min} \leq u - w \leq \hat{P} + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = P_{sup} \iff \\
 &u - P_{sup} \leq w \leq u - P_{min}
 \end{aligned}$$

En consecuencia, puede verse que la integral anterior queda mejor expresada tomando la intersección de los intervalos anteriores:

$$f^{(n+1)}(u) = \int_{\max(0, u - P_{sup})}^{\min(\bar{H}, u - P_{min})} f_{Hf}(w) f^{(n)}(u - w) dw \tag{11.8}$$

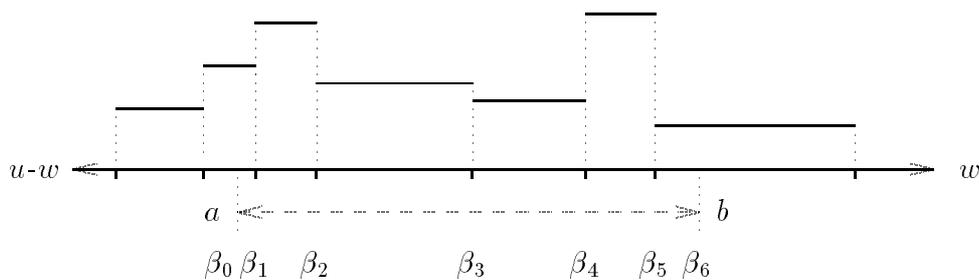
en el que se aprecia que los límites de integración dependen de  $u$ .

A continuación, conoceremos como  $a$  y  $b$  los límites de la integral de (11.8); es decir, suponiendo fijado cierto  $u$ :

- $a = \max(0, u - P_{sup})$
- $b = \min(\bar{H}, u - P_{min})$

Sea, además,  $\mathbf{B}$  el conjunto de valores formado por la unión de  $\{a, b\}$  y los cuantiles de  $Hf$  que caen dentro del intervalo  $(a, b)$ . Expresado de otro modo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \{a, b\} \cup \{Hf^{0i}, 0 \leq i < K, a \leq Hf^{0i} \leq b\} \\
 &= \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{N_j+1}, \text{ tal que } \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N_j+1}\}
 \end{aligned}$$



**Figura 11.5 :** Determinación de  $\mathbf{B}$ .

En el ejemplo de la Fig. 11.5 observamos que, en esta situación, el conjunto  $\mathbf{B}$  estaría compuesto por  $\beta_0$  (dado que es  $a$  en realidad),  $\beta_6$  (que es  $b$ ), más cinco cuantiles que reciben la notación de  $\beta_1, \dots, \beta_5$ .

Es evidente que la función de densidad de  $Hf$  es constante en cada intervalo  $[\beta_{j-1}, \beta_j]$ , e igual a  $\frac{\pi_k}{Hf^k}$ ; el valor de  $k$  corresponde, en lenguaje llano, al del bloque que contiene el intervalo citado. A partir de ahora  $\Lambda_j$  será la densidad de la variable en el intervalo.

Teniendo en cuenta que  $[a, b]$  es la unión disjunta de  $[\beta_0, \beta_1]$ ,  $[\beta_1, \beta_2]$ , etc., resulta inmediato transformar (11.8) en suma de varias integrales, con lo que se consigue:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(u) &= \sum_{j=0}^{Nj} \Lambda_j \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} f^{(n)}(u-w)dw = \sum_{j=0}^{Nj} \Lambda_j \left( -F^{(n)}(u-w) \right)_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^{Nj} \Lambda_j \left( -F^{(n)}(u-\beta_{j+1}) + F^{(n)}(u-\beta_j) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{Nj} \Lambda_j \left( 1 - F^{(n)}(u-\beta_{j+1}) - 1 + F^{(n)}(u-\beta_j) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{Nj} \Lambda_j \left( R^{(n)}(u-\beta_{j+1}) - R^{(n)}(u-\beta_j) \right) \tag{11.9}
 \end{aligned}$$

El resultado anterior es concluyente: para llevar a cabo la convolución con una variable de  $K-1$  bloques sólo es preciso sumar  $Nj+1$  términos; las integrales que en un principio intervenían se han transformado. Como mucho, el número de sumandos será de  $K$ , que es la máxima dimensión que puede alcanzar el conjunto  $\mathbf{B}$ ; podemos ver que el coste es bastante modesto, pues el número de artículos suele ser bajo.

Podemos encontrar una dificultad: qué ocurre si la variable  $Hf$  no tiene una función de distribución continua. En ese caso, como se explicó en el capítulo 9, la densidad de probabilidad en un punto —en el que se acumulan varios cuantiles— es infinita y, por tanto, se obtiene un  $\Lambda_j$  igualmente infinito que no tiene sentido considerar en (11.9).

La solución viene dada de acuerdo con el siguiente razonamiento. Supongamos que  $\beta$  es un punto de acumulación; es decir, es un punto en el que la probabilidad de que  $Hf = \beta$  es estrictamente mayor que 0 (lo cual no ocurre nunca en las distribuciones de variables continuas). Llamamos  $\pi$  a dicha probabilidad  $\text{Prob}(Hf = \beta)$ . El problema no se daría si esta probabilidad en vez de estar concentrada en un solo punto correspondiera a una región alrededor de  $\beta$ , por ejemplo, un intervalo  $[\beta, \beta + \varepsilon]$ . Si se supone un bloque de área  $\pi$  sobre este intervalo, podemos determinar:

$$\int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \frac{\pi}{\varepsilon} f^{(n)}(u-w)dw = \frac{\pi}{\varepsilon} \left( -F^{(n)}(u-w) \right)_{\beta}^{\beta+\varepsilon} = \pi \frac{R^{(n)}(u-\beta-\varepsilon) - R^{(n)}(u-\beta)}{\varepsilon}$$

Imponiendo que  $\varepsilon$  tiende a 0:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \frac{R^{(n)}(u-\beta-\varepsilon) - R^{(n)}(u-\beta)}{\varepsilon} = \pi \cdot f^{(n)}(u-\beta) \tag{11.10}$$

De aquí que, siempre que se dé el hecho de que en un punto se acumulan varios cuantiles, podemos evaluar la probabilidad  $\pi$  correspondiente a tal punto (sumando los valores de  $\Pi$  respectivos), y usar (11.10) en el lugar oportuno de la expresión (11.9).

Puede ser útil para la comprensión de esta parte el siguiente ejemplo. Supóngase que, con  $K=5$ , los cuantiles de  $Hf$  son:  $\{0, 4, 5, 5, 8\}$ . Nótese que  $Hf^{02} = Hf^{03}$ , luego  $\beta = 5$  es un punto con acumulación de probabilidad, con  $\text{Prob}(Hf = 5) = \text{Prob}(Hf^{02} \leq Hf \leq$

$Hf^{03}) = \pi_3$ . Si tuviéramos que resolver la integral  $\int_2^8 f_{Hf}(w)f^{(n)}(u-w)dw$ , en primer lugar hallaríamos:

$$\mathbf{B} = \{2, 4, 5, 8\}$$

y la solución correcta viene dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi_1}{4-0} \left( R^{(n)}(u-4) - R^{(n)}(u-2) \right) + \frac{\pi_2}{5-4} \left( R^{(n)}(u-5) - R^{(n)}(u-4) \right) + \\ & \frac{\pi_4}{8-5} \left( R^{(n)}(u-8) - R^{(n)}(u-5) \right) + \pi_3 \cdot f^{(n)}(u-5) \end{aligned}$$

## 11.4 Cálculo de la contribución

Para satisfacer la demanda a lo largo de un intervalo, la compañía suministradora de electricidad cuenta con tres fuentes principalmente:

- el parque térmico (incluyendo contratos)
- el parque hidráulico
- la importación de energía

Tanto para valorar los costes operacionales de las unidades propias como el coste de la energía externa, es necesario efectuar una estimación de la cantidad de energía media que cada unidad va a aportar. Por otro lado, aunque la energía de origen hidráulico carece de costes variables, veremos una manera de calcular la contribución efectiva de la generación hidráulica representada por una variable de bloques.

### 11.4.1 Contribución de una unidad térmica

En nuestro modelo se ha hecho el supuesto de que el coste instantáneo es una función de tipo cuadrático, sin término independiente, tal como  $z_{1,u}p + z_{2,u}p^2$ . De hecho, aunque no se exprese de forma generalizada, el cálculo subsiguiente no se ve condicionado por esta suposición, y por otro lado tiene la ventaja de que, al no suponer proporcionalidad entre generación y coste, permite exponer un método para encontrar el coste esperado de producción diferente del común, basado normalmente en una relación lineal entre la porción de la monótona correspondiente a cada unidad y el coste que supone tal generación.

Es importante recordar que toda unidad de generación en funcionamiento debe funcionar hasta el punto exacto que la carga demandada le indique. Por esta razón, la potencia de una unidad no tiene porqué ser constante e igual a su capacidad máxima, ya que en determinados momentos es necesario hacer entrar una unidad para que complemente a las unidades base, terminando de cubrir la carga.

La variación en la potencia de una unidad térmica queda recogida en la monótona de generación. De esta manera queda destacada la importancia que tiene el orden de mérito: una unidad ubicada en las primeras posiciones tiene grandes posibilidades de generar siempre que esté disponible a capacidad máxima, pues muy probablemente su intervención no baste para cubrir la demanda. Lógicamente, estas posiciones son ocupadas por las unidades que producen a menor coste. Las unidades que generan la energía a peor precio quedan relegadas al final del orden de mérito; un requisito para estas unidades suele ser que los procesos de encendido y apagado sea rápido y poco costoso, ya que

presumiblemente éstas sean operaciones a realizar con frecuencia.

Para averiguar la contribución de una unidad  $n$  debe calcularse la diferencia entre  $P_X^{(n-1)}$  y  $P_X^{(n)}$ . Recordemos que  $P_X^{(n)}$  significa la pérdida de carga media cuando disponemos de  $n$  unidades dando servicio. Evidentemente, con una unidad menos la pérdida es mayor. La expresión de la contribución sería, por definición:

$$P_X^{(n-1)} - P_X^{(n)} = \int_Y^{\widehat{P}+Y} R^{(n-1)}(u)du - \int_{Y+\overline{P}_n}^{\widehat{P}+Y+\overline{P}_n} R^{(n)}(u)du \quad (11.11)$$

En esta ocasión hemos asumido que  $Y$  es la suma de las capacidades de las primeras  $n-1$  unidades, sin incluir por tanto a la  $n$ -ésima. De todas maneras, podemos eliminar el factor  $Y$  en los pasos intermedios que vamos a realizar mediante un cambio de variable: tomamos  $r(u) = R^{(n-1)}(u+Y)$  y, por otro lado, modificamos en (11.11) los límites de integración. Por último, teniendo en cuenta (11.5), observamos que  $R^{(n)}(\cdot)$  puede ser expresado en términos de  $R^{(n-1)}(\cdot)$ . Con todo ello, escribimos:

$$\begin{aligned} P_X^{(n)} &= \int_{\overline{P}_n}^{P_{min}+\overline{P}_n} ((1-q_n)r(u) + q_n)du + \int_{P_{min}+\overline{P}_n}^{\widehat{P}} ((1-q_n)r(u) + q_n \cdot r(u - \overline{P}_n))du \\ &\quad + \int_{\widehat{P}}^{\widehat{P}+\overline{P}_n} q_n \cdot r(u - \overline{P}_n)du \\ &= (1-q_n) \int_{\overline{P}_n}^{P_{min}+\overline{P}_n} r(u)du + q_n \cdot P_{min} + (1-q_n) \int_{P_{min}+\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du \\ &\quad + q_n \int_{P_{min}}^{\widehat{P}-\overline{P}_n} r(u)du + q_n \int_{\widehat{P}-\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du \\ &= q_n \cdot P_{min} + (1-q_n) \int_{\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du + q_n \int_{P_{min}}^{\widehat{P}} r(u)du \\ &= q_n \cdot P_{min} + \int_{\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du + q_n \int_{P_{min}}^{\overline{P}_n} r(u)du \end{aligned}$$

Nótese que  $q_n \cdot P_{min}$  y  $q_n \int_{P_{min}}^{\overline{P}_n} r(u)du$  son regiones adyacentes bajo la misma función: esto significa que podemos sumar las dos expresiones y reescribir el resultado como un término único:

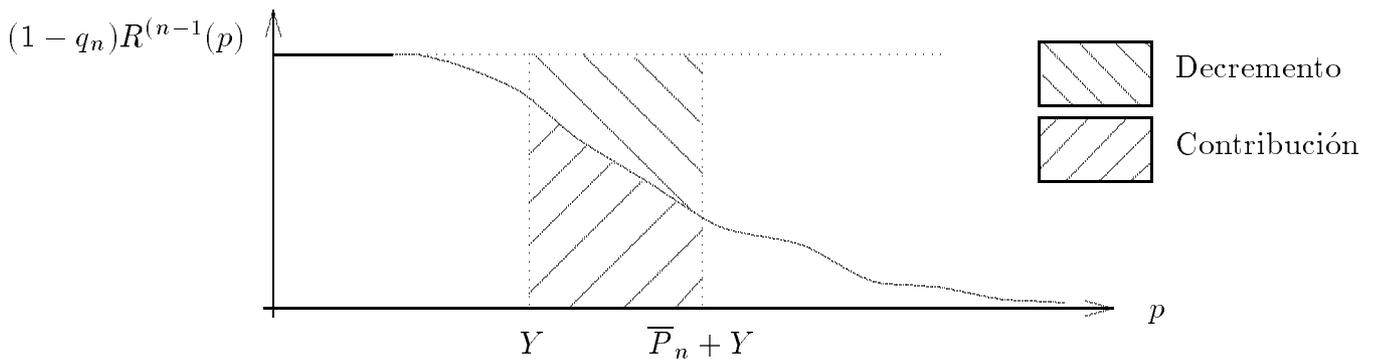
$$q_n \int_0^{\overline{P}_n} r(u)du + \int_{\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du$$

La contribución, en consecuencia, se expresará como:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\widehat{P}} r(u)du - q_n \int_0^{\overline{P}_n} r(u)du - \int_{\overline{P}_n}^{\widehat{P}} r(u)du \\ &= \int_0^{\overline{P}_n} r(u)du - q_n \int_0^{\overline{P}_n} r(u)du = (1 - q_n) \int_0^{\overline{P}_n} r(u)du \\ &= (1 - q_n) \int_Y^{Y+\overline{P}_n} R^{(n-1)}(u)du \end{aligned}$$

Calculemos a continuación cuál es el decremento sufrido por el valor esperado de la generación, restándole la contribución de la unidad:

$$\begin{aligned} (1 - q_n)\overline{P}_n - (1 - q_n) \int_Y^{Y+\overline{P}_n} R^{(n-1)}(u)du &= (1 - q_n) \int_Y^{Y+\overline{P}_n} (1 - R^{(n-1)}(u))du \\ &= (1 - q_n) \int_Y^{Y+\overline{P}_n} F^{(n-1)}(u)du \end{aligned}$$



**Figura 11.6 :** Generación de la última unidad térmica convolucionada.

El significado del resultado final se interpreta fácilmente con el esquema que muestra la Fig. 11.6. Tomemos la función de fiabilidad  $R^{(n-1)}(\cdot)$  o la de distribución  $F^{(n-1)}(\cdot)$ , indiferentemente (puesto que se trata de la misma figura representada invertida o no). Consideremos el producto con la probabilidad de que la unidad se encuentre disponible  $1 - q_n$ , y el intervalo  $[Y, Y + \overline{P}_n]$ . El rectángulo comprendido en esta región equivale a la producción esperada de la unidad en el caso de que no se produzca una falta de carga. En la figura, vemos que este área queda dividida en dos por la función  $(1 - q_n)R^{(n-1)}(\cdot)$ , siendo la inferior la que corresponde a la contribución y la superior al decremento de potencia sobre lo esperado.

Claramente, la contribución de energía de la unidad térmica  $n$  es:

$$E^n = Nh \left( P_X^{(n-1)} - P_X^{(n)} \right) = Nh(1 - q_n) \int_Y^{Y+\overline{P}_n} R^{(n-1)}(u)du$$

Vale la pena recalcar que el resultado deducido es una manera alternativa de calcular

la contribución, y que no precisa de convolucionar la distribución de  $Pf_n$  con la de  $J_{n-1}$ . La demostración aquí descrita también es diferente de la empleada por Balériaux et al., quienes ya señalaron en su artículo [BALÉ67] esta notable interpretación geométrica de la contribución.

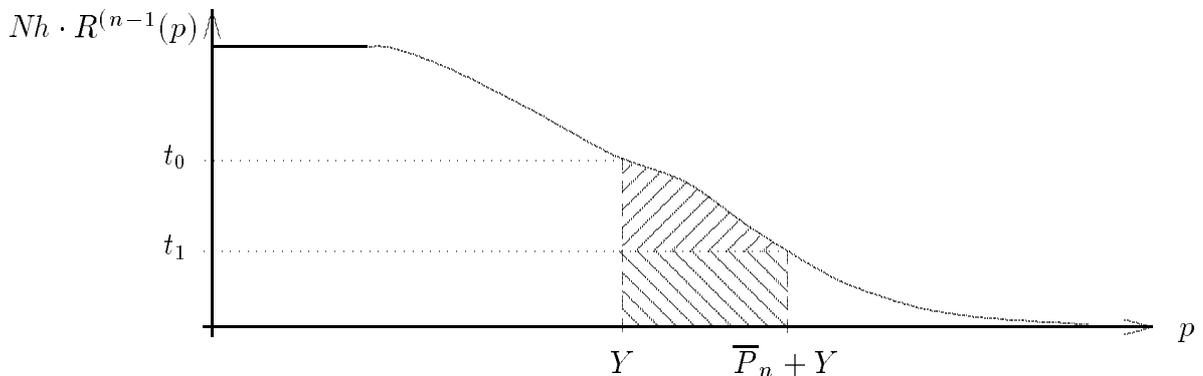
Un modelo que supusiera que los costes son proporcionales a la generación sólo debería calcular  $z_{n,1} \cdot E^{(n)}$ . Un modelo no lineal debe evaluar este coste de una manera considerablemente más compleja. Llamamos  $C^{(n)}$  al coste derivado de la producción de la  $n$ -ésima unidad térmica:

$$C^{(n)} = (1 - q_n) \cdot \int_{Nh \cdot R^{(n-1)}(Y + \bar{P}_n)}^{Nh \cdot R^{(n-1)}(Y)} \left( z_{1,n}(P_{n-1}(t) - Y) + z_{2,n}(P_{n-1}(t) - Y)^2 \right) dt + (1 - q_n) \cdot Nh \cdot R^{(n-1)}(Y + \bar{P}_n) \left( z_{1,n}\bar{P}_n + z_{2,n}\bar{P}_n^2 \right) \quad (11.12)$$

La no linealidad que consideramos puede expresarse diciendo que una hora de generación a potencia  $p$  MW supone un coste igual a  $z_{1,n}p + z_{2,n}p^2$  unidades monetarias. Por tanto, es necesario conocer la distribución de las potencias de generación de la unidad a lo largo del intervalo. Podemos evaluarlas a través de la función  $P_{n-1}(\cdot)$ , que es como vamos a denotar a la función inversa de la  $n - 1$ -ésima monótona o, más precisamente, de  $Nh \cdot R^{(n-1)}(\cdot)$ . Dado un valor de  $t$  horas,  $P_{n-1}(t)$  retorna la mínima potencia (carga más potencia en fallo) presente en una duración no superior a  $t$ . Cuanto mayor es  $t$  menor es esta potencia, y para  $t$  igual a la duración de todo el intervalo la potencia obviamente es  $P_{min}$ . Podemos pensar que hay un tiempo  $t_0$  correspondiente a  $Y$ , y también un tiempo  $t_1 < t_0$  asociado con  $Y + \bar{P}_n$ . Resulta trivial ver que:

- $t_0 = Nh \cdot R^{(n-1)}(Y)$
- $t_1 = Nh \cdot R^{(n-1)}(Y + \bar{P}_n)$

Para tiempos intermedios  $t$ , las potencias resultantes  $P_{n-1}(t)$  menos la capacidad acumulada  $Y$  retorna la potencia que la unidad  $n$  aporta; esta potencia es la necesaria para complementar a las  $n - 1$  previas y satisfacer exactamente la demanda (por ello, es menor que  $\bar{P}_n$ ). En (11.12) es el término que contiene la integral que se extiende a todas las  $t$  entre  $t_1$  y  $t_0$ . Para tiempos menores que  $t_1$ , no basta con la contribución de la  $n$ -ésima unidad: en consecuencia, la potencia que se considera es la máxima. En (11.12) es el segundo término, que ya no precisa ser integrado puesto que la potencia es constante.



**Figura 11.7 :** Evaluación del coste de una unidad térmica. La ilustración muestra cómo se interpretan  $t_0$  y  $t_1$ .

La Fig. 11.7 puede aclarar bastante acerca de la interpretación anterior. Obsérvese la presencia de una región de forma irregular y la de otra de forma rectangular.

De manera similar, es posible calcular el coste que supone la energía importada de otras compañías. Para ello hay que considerar la cola de la función de fiabilidad de la carga y la potencia en fallo de todas las unidades:

$$C_X = \int_0^{Nh \cdot R^{(Nu+1)}(Y)} \left( z_{1,X}(P_{Nu+1}(t) - Y) + z_{2,X}(P_{Nu+1}(t) - Y)^2 \right) dt \quad (11.13)$$

donde ahora  $Y = \sum_{i=1}^{Nu} \bar{P}_i + \bar{H}$ .

#### 11.4.1.1 Conclusión

Si se dispone de un parque de unidades térmicas sin mínimos técnicos ni limitación de combustible para satisfacer una determinada demanda a lo largo de un intervalo, el coste esperado total viene expresado por el siguiente cálculo:

$$C_{\text{total}} = \sum_{n=1}^{Nu} C^{(n)} + C_X$$

#### 11.4.2 Contribución de una unidad hidráulica

Después de haber visto cómo se calcula la distribución de la suma de  $J_n$  con una variable de bloques ( $Hf$ ), a continuación se estudia la manera de hallar la contribución efectiva de potencia de una unidad hidráulica que se incluye tras  $n$  unidades térmicas. En este apartado, cuando empleemos la notación " $n + 1$ " nos estaremos refiriendo a la convolución de la carga con la potencia en fallo de las primeras  $n$  térmicas y una hidráulica, en este orden.

En primer lugar, se define una expresión auxiliar  $Z$  que será útil para encontrar la expresión de la contribución:

$$Z = \int_{P_{\min}}^{\hat{P} + Y + \bar{H}} (u - Y - \bar{H}) f^{(n+1)}(u) du$$

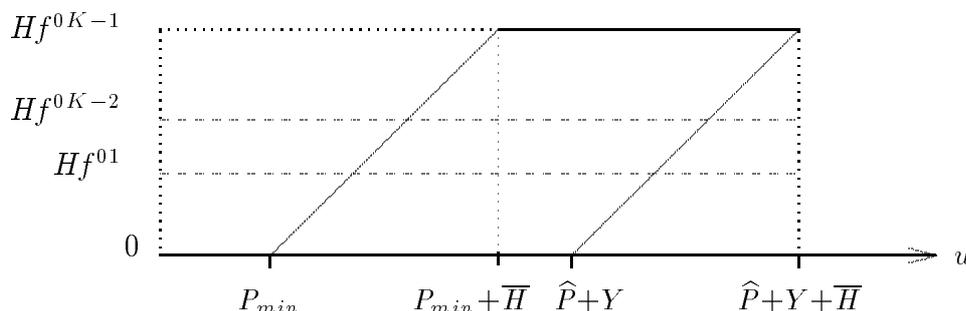
Puede precisarse que  $Z$  es en realidad la esperanza de  $J_{n+1}$  menos la suma de las  $n + 1$  capacidades.

La función de densidad de probabilidad  $f^{(n+1)}(u)$ , que aparece en (11.9):

$$\sum_{j=0}^{N_j} \Lambda_j \left( R^{(n+1)}(u - \beta_{j+1}) - R^{(n+1)}(u - \beta_j) \right)$$

es, en general, una expresión bastante complicada; únicamente si  $K=2$  se trata de un caso suficientemente simple como para permitir su análisis. En esa situación, podemos apreciar que  $\mathbf{B}$  (véase §11.3.2.1) siempre tiene sólo dos valores,  $\beta_0$  y  $\beta_1$ . Concretamente, según

(11.8),  $\beta_0$  puede valer 0 o  $u - \hat{P} - Y$ , y  $\beta_1$  es  $u - P_{min}$  o  $\bar{H}$ , dependiendo de cuánto valga  $u$ . Si  $K$  es mayor que 2, las complicaciones que se originan proceden de la dimensión variable de  $\mathbf{B}$ .



**Figura 11.8 :** Región de trabajo para convolucionar con una variable de  $K - 1$  bloques.

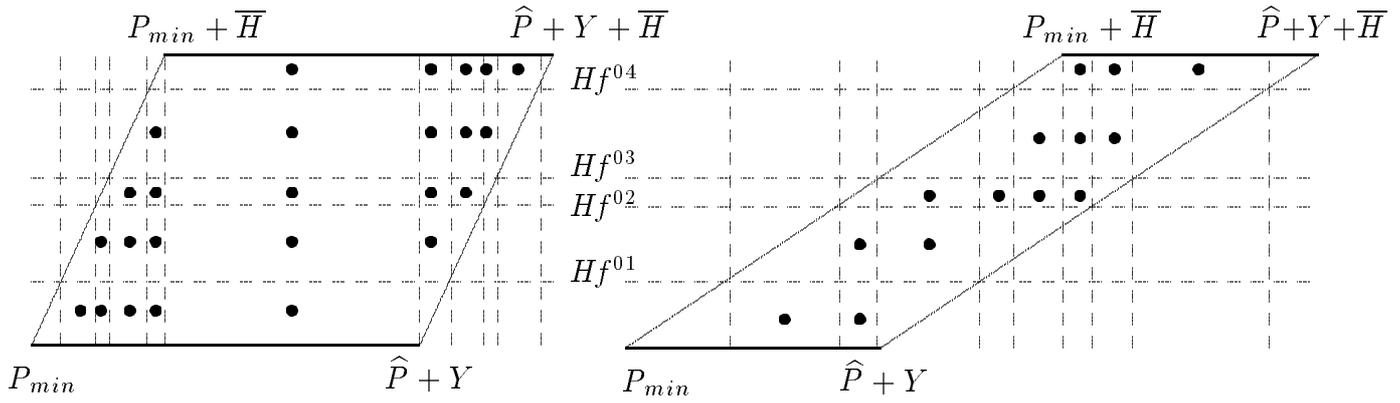
La Fig. 11.8 puede ayudar a la comprensión de esta idea. Tenemos un eje por donde se mueve una variable independiente  $u$ . Las dos líneas continuas oblicuas son rectas que se corresponden con las ecuaciones antes mencionadas,  $u - P_{min}$  y  $u - \hat{P} - Y$  de izquierda a derecha. En la dimensión de la ordenada vemos que las rectas están comprendidas entre 0 y  $\bar{H}$ . Suponiendo que  $K=2$ , para encontrar los límites de integración a usar para una  $u$  dada basta con tomar los puntos de intersección de la figura romboidal con una línea vertical levantada sobre el punto  $u$ . Conocidos estos límites, se integra sobre una función determinada. Suponiendo  $K > 2$ , la diferencia estribaría en que se atraviesa un número variable de cuantiles de  $Hf$ , lo cual significa que cambia la densidad de probabilidad de la variable  $\Lambda_j$  y, por tanto, la función que se está integrando.

Como se aprecia en la figura, la posición de la intersección entre las citadas rectas y los cuantiles de  $Hf$  sirve para particionar el segmento de  $u$  comprendido entre  $P_{min}$  y  $\hat{P} + Y + \bar{H}$ . Por ejemplo, si  $P_{min} + \bar{H}$  es menor que  $\hat{P} + Y$ , se daría la siguiente partición:

- $(P_{min}, P_{min} + Hf^{01})$ ,
- $(P_{min} + Hf^{01}, P_{min} + Hf^{02}), \dots$ ,
- $(P_{min} + Hf^{0K-2}, P_{min} + \bar{H})$ ,
- $(P_{min} + \bar{H}, \hat{P} + Y)$ ,
- $(\hat{P} + Y, \hat{P} + Y + Hf^{01})$ ,
- $(\hat{P} + Y + Hf^{01}, \hat{P} + Y + Hf^{02}), \dots$ ,
- $(\hat{P} + Y + Hf^{0K-2}, \hat{P} + Y + \bar{H})$

Esta opción se puede ilustrar con el esquema de la izquierda de la Fig. 11.9, mostrando una variable  $Hf$  con  $K=5$ . Su característica más elemental es que es fácil de formular, pues el señalado requisito obliga a un único orden de los puntos que determinan la partición: siempre un punto  $P_{min} + Hf^{0j}$  es inferior a cualquier otro  $\hat{P} + Y + Hf^{0k}$ . Si no es así (como en la figura de la derecha), estos puntos se mezclan entre sí, de modo que intentar una descripción general sería algo más complejo. De todos modos, a pesar de sus diferencias formales, se trata de dos casos que no precisan de distinción en la práctica.

Probemos que ambos casos son en realidad el mismo. Para ello, obsérvese que la región de trabajo con forma de paralelogramo se compone de tres tipos de superficies delimitadas



**Figura 11.9 :** Región de trabajo dependiendo de si  $P_{min} + \overline{H} < \widehat{P} + Y$ .

por los cuantiles y las líneas oblicuas:

- Áreas rectangulares (marcadas con un símbolo ●)
- Áreas triangulares (o trapezoidales), con la diagonal por encima
- Áreas triangulares (o trapezoidales), con la diagonal por debajo

Las áreas de la clase B son las que están bordeadas por la recta  $u - P_{min}$ ; las de la clase C limitan con la recta  $u - \widehat{P} - Y$ . Un rectángulo siempre está acotado por un par de cuantiles  $Hf^{0i-1}$  y  $Hf^{0i}$ , que podemos asociar respectivamente con un par  $\beta_j$  y  $\beta_{j+1}$ . Retomando la expresión (11.9), un sumando cualquiera puede ser reescrito de una de las siguientes maneras:

- $\frac{\pi'_i}{Hf^i} (F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) - F^{(n)}(u - Hf^{0i}))$
- $\frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i})$
- $\frac{\pi'_i}{Hf^i} (1 - F^{(n)}(u - Hf^{0i}))$

Considérese en el paso anterior lo siguiente: 1)  $F^{(n)}(u - (u - P_{min})) = F^{(n)}(P_{min}) = 0$ , 2)  $F^{(n)}(u - (u - \widehat{P} - Y)) = F^{(n)}(\widehat{P} + Y) = 1$ . Aplicando estas subexpresiones al primer caso, es posible definir completamente  $f^{(n+1)}(u)$  de la manera siguiente:

- si  $P_{min} + Hf^{0j-1} \leq u \leq P_{min} + Hf^{0j} \rightarrow \beta_i = Hf^{0i}, i = 0 \dots j-1, \beta_j = u - P_{min} \rightarrow$   

$$f^{(n+1)}(u) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\pi'_i}{Hf^i} (F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) - F^{(n)}(u - Hf^{0i})) + \frac{\pi'_j}{Hf^j} F^{(n)}(u - Hf^{0j-1})$$
- si  $P_{min} + \overline{H} \leq u \leq \widehat{P} + Y \rightarrow \beta_i = Hf^{0i}, i = 0 \dots K-1 \rightarrow$   

$$f^{(n+1)}(u) = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\pi'_i}{Hf^i} (F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) - F^{(n)}(u - Hf^{0i}))$$
- si  $\widehat{P} + Y + Hf^{0j-1} \leq u \leq \widehat{P} + Y + Hf^{0j} \rightarrow \beta_0 = u - \widehat{P} - Y, \beta_{i+1-j} = Hf^{0i}, i = j \dots K-1 \rightarrow$   

$$f^{(n+1)}(u) = \frac{\pi'_j}{Hf^j} (1 - F^{(n)}(u - Hf^{0j})) + \sum_{i=j+1}^{K-1} \frac{\pi'_i}{Hf^i} (F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) - F^{(n)}(u - Hf^{0i}))$$

Si resultara que  $P_{min} + \overline{H}$  fuera mayor que  $\widehat{P} + Y$ , la reescritura de  $f^{(n+1)}(u)$  sería algo más complicada; de cualquier modo, es posible hacerlo y para ello se utilizarían las mismas formas que aparecen sobre estas líneas, atendiendo a una ordenación de los puntos más complicada que la expuesta.

Como hemos visto,  $f^{(n+1)}(u)$  interviene en la expresión de  $Z$  definida con anterioridad. Es decir,  $Z$  puede escribirse en términos de las áreas A, B y C, donde cada clase de área origina una parte de la nueva expresión de  $Z$ , tal como se indica a continuación:

$$A) \rightarrow \sum_{i=1}^{K-1} \int_{P_{min} + Hf^{0i}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} \left( F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) - F^{(n)}(u - Hf^{0i}) \right) du \quad (11.14).a$$

$$B) \rightarrow \sum_{i=1}^{K-1} \int_{P_{min} + Hf^{0i-1}}^{P_{min} + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i}) du \quad (11.14).b$$

$$C) \rightarrow \sum_{i=1}^{K-1} \int_{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} \left( 1 - F^{(n)}(u - Hf^{0i}) \right) du \quad (11.14).c$$

(11.14)a-c resulta ser una descomposición de  $Z$  (equivale a la suma de los tres términos). Podemos distinguir en el desarrollo de las integrales anteriores unas estructuras concretas (no asociadas biunívocamente con las clases A, B y C), que se pueden presentar como:

- 1)  $\int (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) du$ , (con signo **positivo**).
- 2)  $\int (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i}) du$ , (con signo **negativo**).
- 3)  $\int (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} du$ , (siempre con signo positivo).

Por tanto, tomando como referencia estas tres clases de integrales, podemos hallar otra manera diferente de reescribir  $Z$ :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^{K-1} \int_{P_{min} + Hf^{0i-1}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) du \\ &\quad - \sum_{i=1}^{K-1} \int_{P_{min} + Hf^{0i}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i}) du \\ &\quad + \sum_{i=1}^{K-1} \int_{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} du \end{aligned} \quad (11.15)$$

A los términos de (11.15) —que aparecen en respectivas líneas— los llamaremos de ahora en adelante “clase 1”, “clase 2” y “clase 3”. Los de las clase 1 y 2 pueden ser ligeramente modificados:

$$\int_{P_{min} + Hf^{0i-1}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i-1}) du = \int_{P_{min}}^{\widehat{P} + Y} (u - \overline{H} - Y + Hf^{0i-1}) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u) du$$

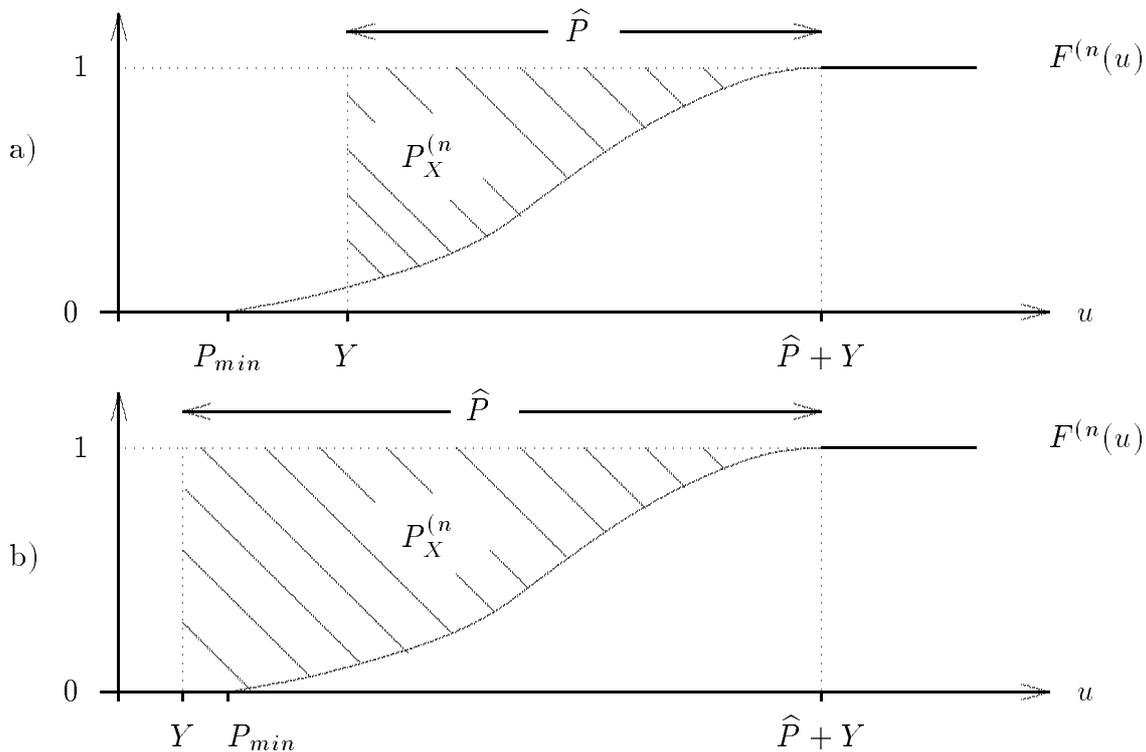
$$\int_{P_{min} + Hf^{0i}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u - Hf^{0i}) du = \int_{P_{min}}^{\widehat{P} + Y} (u - \overline{H} - Y + Hf^{0i}) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u) du$$

Ahora hemos conseguido que ambas clases se puedan escribir sin referencias a la variable  $Hf$  en los límites de la integral, ni en el argumento de la función de distribución  $F^{(n)}(\cdot)$ . Más aún, puesto que se ha conseguido identificar los límites de sendas integrales, es inmediato unificar las clases 1 y 2 en una sola, obteniendo una expresión mucho más simple:

$$Z = \sum_{i=1}^{K-1} \int_{P_{min}}^{\widehat{P} + Y} (-Hf^i) \frac{\pi'_i}{Hf^i} F^{(n)}(u) du + \sum_{i=1}^{K-1} \int_{\widehat{P} + Y + Hf^{0i-1}}^{\widehat{P} + Y + Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} du$$

resultado consecuencia de haber simplificado  $(u - \overline{H} - Y + Hf^{0i-1}) - (u - \overline{H} - Y + Hf^{0i})$  en  $(-Hf^i)$ . Obviamente, la primera integral (lo que queda de las clases 1 y 2, puesto que la tercera clase permanece todavía invariable), se va a simplificar más, al hacerse independiente la integral propiamente dicha del operador sumatorio:

$$- \sum_{i=1}^{K-1} \pi'_i \int_{P_{min}}^{\widehat{P} + Y} F^{(n)}(u) du = (-1) \int_{P_{min}}^{\widehat{P} + Y} F^{(n)}(u) du = - \left( \widehat{P} - P_X^{(n)} + \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du \right) \tag{11.16}$$



**Figura 11.10 :** Esquema para la solución de  $\int F^{(n)}(u) du$ . a)  $Y > P_{min}$ . b)  $Y < P_{min}$ .

Con la ayuda de la Fig. 11.10 puede interpretarse este resultado: contemplamos dos posibilidades, según sea  $Y$  mayor (a) o menor (b) que  $P_{min}$ . En cualquier caso, vemos que

(11.16) refleja, con signo negativo, el área que queda por debajo de la función  $F^{(n)}(\cdot)$  hasta el punto  $\widehat{P} + Y$ .

Ahora se estudiará el término de la llamada clase 3. Una transformación similar da lugar a:

$$\sum_{i=1}^{K-1} \int_{\widehat{P}+Y+Hf^{0i-1}}^{\widehat{P}+Y+Hf^{0i}} (u - \overline{H} - Y) \frac{\pi'_i}{Hf^i} du = \sum_{i=1}^{K-1} \int_{\widehat{P}+Hf^{0i-1}-\overline{H}}^{\widehat{P}+Hf^{0i}-\overline{H}} u \frac{\pi'_i}{Hf^i} du \quad (11.17)$$

Para llegar a una interpretación simple de (11.17), hemos de apreciar que la expresión obtenida tiene la misma estructura que la esperanza matemática de una cierta variable de bloques por determinar; para constatar esto, puede compararse con la expresión general (3.6) y (3.7). A través de los diferentes valores que adopta  $i$  se encuentra que los cuantiles de esta variable son:

$$\begin{aligned} & - \widehat{P} - \overline{H} \\ & - \widehat{P} - \overline{H} + Hf^{01} \\ & - \dots \\ & - \widehat{P} \end{aligned}$$

Llamaremos  $U$  a esta variable. No es muy difícil verificar que  $U$  es una traslación de  $Hf$ , concretamente  $U = Hf + \widehat{P} - \overline{H}$ . Además, teníamos que  $Hf = \overline{H} - H$ : por tanto, deducimos que  $U = \widehat{P} - H$  y, finalmente, que (11.17) es igual a  $\widehat{P} - E[H]$ .

Resumiendo, hemos llegado a concluir que  $Z$  equivale a:

$$Z = \widehat{P} - E[H] - \left( \widehat{P} - P_X^{(n)} + \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du \right) = P_X^{(n)} - E[H] - \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du$$

Puesto que:

$$P_X^{(n+1)} = \int_{Y+\overline{H}}^{\widehat{P}+Y+\overline{H}} (u - Y - \overline{H}) f^{(n+1)}(u) du = Z - \int_{P_{min}}^{Y+\overline{H}} (u - Y - \overline{H}) f^{(n+1)}(u) du$$

se sigue que la contribución de una unidad hidráulica es:

$$\begin{aligned} P_X^{(n)} - P_X^{(n+1)} &= P_X^{(n)} - P_X^{(n)} + E[H] + \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du + \int_{P_{min}}^{Y+\overline{H}} (u - Y - \overline{H}) f^{(n+1)}(u) du \\ &= E[H] + \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du + \int_{P_{min}}^{Y+\overline{H}} (u - Y - \overline{H}) f^{(n+1)}(u) du \end{aligned}$$

#### 11.4.2.1 Conclusión

Aún podemos ir un poco más allá observando ciertos casos particulares. Por ejemplo, si  $Y + \overline{H}$  es menor que  $P_{min}$  (esto en la práctica supone que la unidad hidráulica se posiciona entre las primeras unidades), la contribución a la carga es exactamente la potencia media de generación de la unidad, ya que las integrales que aparecen en la expresión final se anulan.

Otro caso en el que conviene detenerse ocurre si se da que  $Y + \bar{H} \geq P_{min}$  pero  $Y < P_{min}$ ; la contribución se escribiría:

$$E[H] - \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} (Y + \bar{H} - u) f^{(n+1)}(u) du = E[H] - \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u) du$$

Nótese que el cambio de signo proviene de la inversión de  $u - Y - \bar{H}$  por  $Y + \bar{H} - u$ , a fin de contar con un componente positivo en el argumento de la integral. Esta forma prueba que en este caso la contribución sufre de una cierta mengua respecto la generación de potencia esperada. Por último, cuando  $Y \geq P_{min}$ , nos queda la expresión general:

$$E[H] + \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u) du - \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u) du \quad (11.18)$$

la cual da lugar a una interesante conclusión: la contribución es la generación afectada por un incremento y por un decremento de potencia. El decremento procede claramente del posible déficit de carga que repercute en las  $n$  unidades primeras más la unidad hidráulica. El incremento se refiere a una pérdida de carga atribuible a la falta de capacidad de las  $n$  unidades, recuperada parcialmente por la intervención de la unidad hidráulica.

Queda una última conclusión, de carácter más general. Mientras que para unidades térmicas se cuenta con dos maneras posibles de calcular la contribución, a partir de la monótona de generación o según (11.11), una unidad hidráulica no tiene equivalente a través de la monótona. La cuestión pendiente es si se puede encontrar una definición apropiada de monótona de generación cuando interviene una unidad hidráulica, aunque sin duda no es una cuestión de peso puesto que el problema principal, que es determinar la contribución, ya está resuelto.

## 11.5 Ejemplo práctico

Esta sección va a servir para introducir un caso simple que será útil para reflejar los resultados anteriores y poder ilustrarlos con un resultado numérico. Por ello, se van a hacer las siguientes hipótesis:

- $F^{(n)}(u) = (u - P_{min})^2$
- el dominio efectivo de  $u$  es  $[P_{min}, P_{min} + 1]$ ; así, vemos que  $Y < 1$
- $K = 2$  ( $Hf$  sigue una distribución uniforme)
- $H^0 = 0$

La convolución de  $J_n$  y  $Hf$  da lugar a:

$$f^{(n+1)}(u) = \begin{cases} \frac{(u - P_{min})^2}{\bar{H}}, & \text{si } P_{min} \leq u \leq \min(P_{min} + \bar{H}, P_{min} + 1) \\ 2(u - P_{min}) - \bar{H}, & \text{si } P_{min} + \bar{H} \leq u \leq P_{min} + 1 \\ \frac{1}{\bar{H}}, & \text{si } P_{min} + 1 \leq u \leq P_{min} + \bar{H} \\ \frac{1}{\bar{H}}(1 - (u - \bar{H} - P_{min})^2), & \text{si } \max(P_{min} + \bar{H}, P_{min} + 1) \leq u \leq P_{min} + \bar{H} + 1 \end{cases}$$

### 11.5.1 Cálculo del decremento

Se define  $\Delta$  como el decremento de potencia sobre la generación media, es decir, la diferencia entre  $E[H]$  y la contribución esperada a cargo de la unidad hidráulica:

$$\Delta = \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du - \int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u)du$$

En el caso que  $Y < P_{min} < Y + \bar{H}$ :

$$\Delta = \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du = \frac{(\bar{H} + Y - P_{min})^4}{12\bar{H}}$$

Claramente, el decremento es 0 si la capacidad conjunta de las  $n+1$  unidades iguala a la potencia mínima. Es interesante observar que si la capacidad hidráulica aumenta, a causa del exponente de cuarto grado presente en la expresión precedente, se espera inicialmente un pequeño incremento de  $\Delta$  de potencia.

Supóngase a continuación que la capacidad  $Y$  de las  $n$  unidades excede de  $P_{min}$ . Debe distinguirse entre:

- $\bar{H} \leq \hat{P}$ , tomando  $\hat{P}$  como  $P_{min} + 1 - Y$ .
- $\hat{P} \leq \bar{H} \leq 1$
- $\bar{H} \geq 1$ , o de manera equivalente,  $P_{min} + 1 \leq P_{min} + \bar{H}$

Estas tres hipótesis pueden reescribirse como sigue:

- $P_{min} + \bar{H} \leq Y + \bar{H} \leq P_{min} + 1$
- $P_{min} + \bar{H} \leq P_{min} + 1 \leq Y + \bar{H}$
- $P_{min} + 1 \leq Y + \bar{H} \leq P_{min} + \bar{H}$

Continuaremos el ejemplo calculando para cada uno de los tres casos el valor de  $\Delta$ , teniendo en cuenta que es inmediato hallar el término común a todos ellos:

$$\int_{P_{min}}^Y F^{(n)}(u)du = \frac{(Y - P_{min})^3}{3} \quad (11.19)$$

#### 11.5.1.1 Caso a)

En primer lugar, se puede determinar que:

$$\begin{aligned} \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du &= \int_{P_{min}}^{P_{min}+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du + \int_{P_{min}+\bar{H}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du \\ &= \frac{\bar{H}^3}{12} + \frac{Y - P_{min}}{6} \left( (Y + \bar{H} - P_{min})^2 + (Y + \bar{H} - P_{min})(Y - P_{min}) + \bar{H}^2 \right) \end{aligned}$$

Haciendo la diferencia con (11.19) obtenemos:

$$\Delta = \frac{\bar{H}}{12} \left( \bar{H}^2 + 2(P_{min} - Y)(3(P_{min} - Y) - 2\bar{H}) \right) \quad (11.20)$$

lo cual es una expresión de signo positivo, por tanto, acorde con la afirmación de que la contribución es menor que la potencia generada correspondiente a  $H$ .

### 11.5.1.2 Caso b)

Operando con el primer término del decremento nos llevaría a:

$$\begin{aligned} \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u) du &= \int_{P_{min}}^{P_{min}+\bar{H}} F^{(n+1)}(u) du + \int_{P_{min}+\bar{H}}^{P_{min}+1} F^{(n+1)}(u) du + \int_{P_{min}+1}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u) du \\ &= \frac{\bar{H}^3}{12} + \frac{1-\bar{H}}{6} \left( \bar{H}^2 - \bar{H} + 2 \right) + \left\{ \bar{H}^3 - 3\bar{H}^2 + 9\bar{H} - 3 + (\bar{H}(\bar{H} - 2 + P_{min} - Y) - 5)(P_{min} - Y) \right. \\ &\quad \left. - (P_{min} - Y)^2 + (P_{min} - Y)^3 \right\} (\bar{H} - 1 - P_{min} + Y) \frac{1}{12\bar{H}} \\ &= \frac{1}{4\bar{H}} - \frac{2}{3} + \frac{\bar{H}}{2} + \left( \frac{2}{3\bar{H}} - 1 \right) P_{min} + \frac{P_{min}^2}{2\bar{H}} - \frac{P_{min}^4}{12\bar{H}} + \\ &\quad \left( 1 - \frac{2}{3\bar{H}} - \frac{P_{min}}{\bar{H}} + \frac{P_{min}^3}{3\bar{H}} \right) Y + \left( \frac{1}{2\bar{H}} - \frac{P_{min}^2}{2\bar{H}} \right) Y^2 + \frac{P_{min}Y^3}{3\bar{H}} - \frac{Y^4}{12\bar{H}} \end{aligned}$$

De aquí que el decremento resulte ser:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4\bar{H}} - \frac{2}{3} + \frac{\bar{H}}{2} + \left( \frac{2}{3\bar{H}} - 1 \right) P_{min} + \frac{P_{min}^2}{2\bar{H}} + \frac{P_{min}^3}{3} - \frac{P_{min}^4}{12\bar{H}} + \left( 1 - \frac{2}{3\bar{H}} - \frac{P_{min}}{\bar{H}} - P_{min}^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{P_{min}^3}{3\bar{H}} \right) Y + \left( \frac{1}{2\bar{H}} + P_{min} - \frac{P_{min}^2}{2\bar{H}} \right) Y^2 + \left( \frac{P_{min}}{3\bar{H}} - \frac{1}{3} \right) Y^3 - \frac{Y^4}{12\bar{H}} = \\ &= \frac{3 - 8\bar{H} + 6\bar{H}^2 - 8(Y - P_{min}) + 12\bar{H}(Y - P_{min})}{12\bar{H}} + \\ &\quad + \frac{6(Y - P_{min})^2 - 4\bar{H}(Y - P_{min})^3 - (Y - P_{min})^4}{12\bar{H}} \end{aligned}$$

Es interesante comprobar que esta expresión y la que aparece en (11.20) son funciones en  $\bar{H}$  continuas en el punto de unión,  $\bar{H} = P_{min} - 1 - Y$ , en donde ambas dan como valor de decremento:

$$\frac{(1 + P_{min} - Y) (1 - 2P_{min} + 3P_{min}^2 + 2Y - 6P_{min}Y + 3Y^2)}{12}$$

Por otro lado, se puede advertir que la expresión de  $\Delta$  puede escribirse en términos de  $Y - P_{min}$  (y esto es cierto para los casos a) y c) también). Esto nos hace ver que la variable “exceso de capacidad sobre la potencia mínima” es una variable de gran importancia, más

que las mismas  $Y$  y  $P_{min}$  por sí mismas. Llamaremos  $W$  a este término:  $W = Y - P_{min}$ , haciendo notar nuevamente que  $W$  siempre es positiva. Entonces,  $\Delta$  queda como:

$$\frac{3 - 8\bar{H} + 6\bar{H}^2 - 8W + 12\bar{H}W + 6W^2 - 4\bar{H}W^3 - W^4}{12\bar{H}} \quad (11.21)$$

Teniendo en cuenta que  $Y < 1$ ,  $\bar{H} \leq 1$  y  $\bar{H} \geq 1 - W$ , puede constatarse que  $\Delta$  es positivo en todo el dominio correspondiente a este caso.

### 11.5.1.3 Caso c)

Por último, vemos el caso con mayor capacidad hidráulica,  $\bar{H} \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{P_{min}}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du &= \int_{P_{min}}^{P_{min}+1} F^{(n+1)}(u)du + \int_{P_{min}+1}^{Y+\bar{H}} F^{(n+1)}(u)du \\ &= \frac{\bar{H}^4 - 4\bar{H}^3 + 12\bar{H}^2 - 12\bar{H} + 4 + 12\bar{H}(Y - P_{min})}{12\bar{H}} - \\ &\quad - \frac{(Y - P_{min})^4 + 6(Y - P_{min})^2 - 8(Y - P_{min})}{12\bar{H}} \end{aligned}$$

Combinando este término con (11.19), tenemos que  $\Delta$  es:

$$\begin{aligned} &\frac{4 + 12\bar{H}(\bar{H} - 1) - 4\bar{H}^3 + \bar{H}^4 + (12\bar{H} - 8)(Y - P_{min})}{12\bar{H}} + \\ &\quad + \frac{6(Y - P_{min})^2 - 4\bar{H}(Y - P_{min})^3 - (Y - P_{min})^4}{12\bar{H}} \\ &= \frac{4 + 12\bar{H}(\bar{H} - 1) - 4\bar{H}^3 + \bar{H}^4 + (12\bar{H} - 8)W + 6W^2 - 4\bar{H}W^3 - W^4}{12\bar{H}} \quad (11.22) \end{aligned}$$

que, para el caso de  $\bar{H} = 1$ , obtiene:

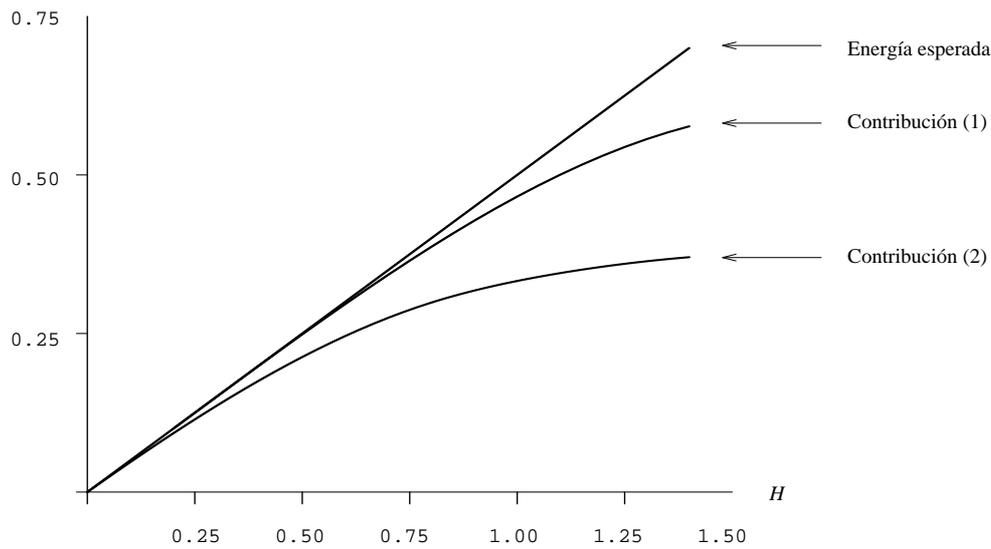
$$\frac{-W^4 - 4W^3 + 6W^2 + 4W + 1}{12}$$

El mismo resultado que si evaluamos (11.21) en  $\bar{H} = 1$ , con lo que se verifica que el decremento es una expresión continua para todo valor de  $\bar{H}$ . Las expresiones (11.21) y (11.22) difieren entre sí por un término igual a:

$$\frac{(\bar{H} - 1)^4}{\bar{H}}$$

con lo que comprobamos no sólo que el decremento en el caso c) es todavía mayor que en el caso b) —lo cual es lógico— sino que además  $\Delta$  aumenta con gran velocidad, una prueba de que una gran capacidad hidráulica puede tener un aprovechamiento muy pobre.

Finalmente, se muestra la representación gráfica de unos casos concretos. Las tres funciones representadas en la Fig. 11.11, respecto a la capacidad hidráulica  $\bar{H}$ , son: la



**Figura 11.11 :** Comparación de la generación esperada con la contribución: (1) asumiendo  $W=-0.2$ , (2) asumiendo  $W=0.2$ . En el eje de abcisas aparece  $\bar{H}$ .

esperanza de la generación ( $\bar{H}/2$ ), en forma de una recta; la contribución suponiendo un caso en el que  $Y$  es menor que la carga mínima, exactamente  $Y = P_{min} - 0.2$  (este caso está señalado con el número 1); la contribución suponiendo que  $Y = P_{min} + 0.2$  (número 2). Obsérvese que el caso (1) no se separa en exceso de la generación esperada, es decir, el decremento  $\Delta$  correspondiente es moderado, incluso insignificante hasta la mitad de la escala considerada. Ello se debe a que el margen de carga  $W$  presente en el caso permite obtener un buen uso de la generación, incluso con capacidades relativamente elevadas. Sin embargo, en el caso (2), la contribución se aleja notablemente de la expectativa de generación, a causa de que la carga es preferentemente atendida por las unidades precedentes y se da un uso bajo de la generación hidráulica. Todo ello constituye un argumento más que reafirma la idea de que el lugar natural para la hidrogenación en el orden de mérito es el primero.

## CAPÍTULO 12

# OPTIMIZACIÓN DE LA HIDROGENERACIÓN

### 12.1 Introducción

Aunque el tema de la optimización de la hidrogenación ha aparecido en otros capítulos anteriores —una formulación inicial en el cap. 2, un planteamiento de partida expuesto en el cap. 7, y unas propuestas para el cálculo de la esperanza de la generación en el cap. 8—, el título resulta apropiado para el contenido que se presenta en éste. En primer lugar, porque está dedicado a la explicación de un nuevo modelo para la resolución del problema que nos ocupa, basado en la técnica de convolución de unidades de generación hidráulica desarrollada en el cap. 11. En segundo lugar, porque los resultados computacionales obtenidos demuestran que se trata de una alternativa al primer método multiartículo, con resultados más robustos y mejores tiempos de ejecución en la obtención del óptimo.

Básicamente, el método consiste en hallar una función de coste probable de producción (CPP) que, a diferencia del enfoque dado por Viramontes y Hamilton [VIRA78], no depende de la esperanza de  $G$  sino que, asumiendo que la generación hidráulica se distribuye como una variable de bloques, viene dada en función de los cuantiles de  $G$ . Este cambio supone algunos cambios importantes en la implementación primitiva aunque, debido al hecho de seguir asumiendo la hipótesis de la distribución de  $G$ , se conserva la estructura original. En el capítulo se dedica igualmente un espacio para la explicación de un procedimiento para estimar la nueva función de CPP.

Finalmente, a través de ejemplos resueltos, se evalúan los resultados obtenidos. Igual que en el caso anterior, se han efectuado pruebas de simulación de las políticas, mediante las cuales se pretende valorar la efectividad del método. También se han generado a partir de los mismos datos funciones de CPP según el método de Viramontes y Hamilton, obteniéndose soluciones sensiblemente diferentes.

### 12.2 Modelo

En el planteamiento del problema que se quiere abordar encontramos las mismas condiciones que las consignadas anteriormente: se tiene una cuenca hidráulica que da origen a una red de embalses y arcos por los que fluye el agua (algunos de los cuales son de generación, es decir, llevan asociados una turbina y un generador). El periodo de tiempo

de estudio se divide en intervalos y, por tanto, la red original se replica temporalmente dando lugar a los arcos de almacenamiento para cada embalse e intervalo. Tenemos unas aportaciones naturales aleatorias que alimentan la red en cada embalse a lo largo de todo el periodo. También se dispone de la información del parque térmico, al que la generación hidráulica complementa, y de la carga de potencia; con ello se deriva una función que a partir de la generación producida en la cuenca obtiene el valor del decremento en el coste de producción consecuencia de la contribución del parque hidráulico. Los símbolos que denotan las magnitudes que intervienen serán los mismos que ya aparecían en los pasados capítulos.

### 12.2.1 Función de coste probable de producción

Como se ha comentado en la introducción, el cambio principal consiste en la sustitución de la función objetivo. La expresión (7.7):

$$\begin{aligned} E[C] \equiv \Psi(X, V) &= E \left[ \sum_{i=1}^{Ni} \lambda_{1,i} G_i(X, V) + \lambda_{2,i} G_i^2(X, V) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ \lambda_{1,i} \sum_{\forall a} E[G_{i,a}(X, V)] + \lambda_{2,i} E \left[ \left( \sum_{\forall a} G_{i,a}(X, V) \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

es una expresión que acaba siendo función de la esperanza de la generación (y de la generación al cuadrado), pero sin que la forma de la distribución intervenga directamente; de hecho, el término cuadrático, relacionado con la variancia, afecta ligeramente al resultado final, pero su influencia es de poco peso.

Como ya se expuso en su momento, se considera que la generación posee las características de una variable de bloques. Es por esto que podemos hablar de unas magnitudes  $G_i^0(X, V)$ ,  $G_i^{01}(X, V)$ , etc., las cuales conocemos como *cuantiles* de la generación en el intervalo  $i$ . Aunque se sabe que estos valores proceden del cálculo que las relaciona con los cuantiles de la descarga y el volumen, tal como queda patente en (7.4), (7.5) y (7.6), de ahora en adelante prescindiremos de la notación tipo  $G_i(X, V)$  para escribir solamente  $G_i$ . Exactamente del mismo modo podemos entender la distribución de  $H$ , ya que se concibe como la variable generación dividida por la duración del intervalo.

Se redefine el coste probable de producción como la siguiente función cuadrática respecto la potencia hidráulica media:

$$\Psi(X, V) = \sum_{i=1}^{Ni} \left( \frac{1}{2} \bar{H}_i' \cdot \mathbf{Q}^i \cdot \bar{H}_i + \mathbf{B}^{i'} \cdot \bar{H}_i \right) \quad (12.1)$$

donde:

- $\bar{H}_i$  significa el vector formado por los cuantiles de  $H_i$ :  $(H_i^0, H_i^{01}, \dots, H_i^{0K-1})$

–  $\mathbf{Q}^i$  es una matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix} q_{1,1}^i & \cdots & q_{1,K}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,K}^i & \cdots & q_{K,K}^i \end{pmatrix}$$

–  $\mathbf{B}^i$  es un vector:

$$\begin{pmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_K^i \end{pmatrix}$$

Los  $(K^2 + 3K)/2$  parámetros que intervienen para cada intervalo deben ser estimados mediante un procedimiento descrito más adelante.

Suponiendo conocidas las derivadas de la potencia respecto las variables independientes del problema, tal como puede encontrarse en [NAB88], el cálculo del gradiente de  $\Psi(\cdot)$  resulta sencillo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (\mathbf{Q}^i \cdot \bar{H}_i + \mathbf{B}^i) \frac{\partial H_i}{\partial x}$$

### 12.2.1.1 Consideraciones sobre el concepto de potencia

En la función  $\Psi(\cdot)$  se hace uso de la variable  $H$  (potencia hidráulica), lo cual se explica por el hecho de que en la convolución es necesario utilizar una variable con significado de potencia. Sin embargo,  $\Psi(\cdot)$  se mide con unidades de coste, lo cual implica un gasto o ahorro de energía, es decir, una generación durante un lapso de tiempo.

Como se explica en el cap. 11, la separación de los conceptos de energía y potencia hidráulica no queda bien definida en nuestro modelo. Exceptuando la parte determinista, la diferenciación entre una y otra se reduce a un cambio de escala a través de la duración del intervalo. Por ello, el carácter estocástico de la potencia no está suficientemente bien plasmado.

Por ello, el sentido que adquiere en este capítulo el concepto de potencia es muy cercano al de generación. Las variables independientes del modelo son descargas producidas a lo largo de un intervalo y, por ello, implican sólo producción de energía. Debe entenderse que el uso del término “potencia” en el texto es en ocasiones equiparable al de “energía” porque implícitamente supone que se aplica a un intervalo de tiempo. Su significado como *potencia instantánea* es reemplazado entonces por el de *potencia media*. A pesar de ello, por coherencia con la notación empleada, prevalecerán las referencias como “potencia”.

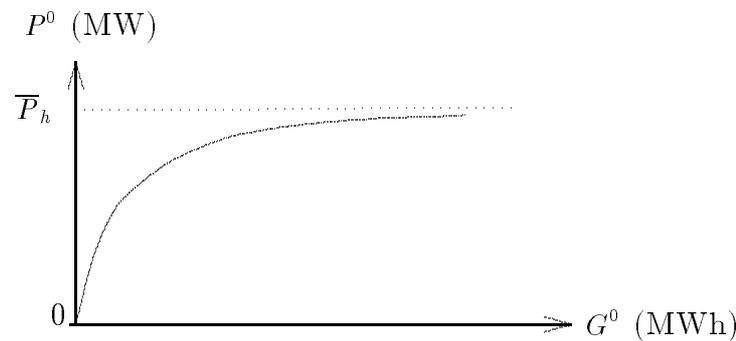
### 12.2.2 Restricciones de potencia y energía

De modo independiente al cambio de la función objetivo, se ha considerado incluir limitaciones a la potencia y a la generación hidráulicas. La restricción de potencia se escribe como:

$$\bar{P}_h \left(1 - e^{u_i G_i^0}\right) + (H_i^{0K-1} - H_i^0) \leq \bar{P}_h \quad i = 1 \dots Ni \quad (12.2)$$

donde:

- $\overline{P}_h$  es la capacidad máxima del parque hidráulico
- $u_i$  es un coeficiente negativo relacionado con la generación determinista



**Figura 12.1 :** Modelo exponencial de la potencia determinista  $P^0$  deducida del descrestado de  $G^0$ .

La expresión de la izquierda de (12.2) se compone de dos términos que se interpretan según corresponda a la potencia de origen determinista o a la de origen estocástico respectivamente. Recordemos que la generación determinista es dejada de consideración tras la operación de descrestado de la monótona de carga (la Fig. 10.3 puede servir para comprobar el efecto de esta operación). El descrestado se desarrolla principalmente en los momentos de punta de carga, y por ello da lugar a un consumo de la capacidad hidráulica disponible de forma no uniforme: describiendo someramente lo que suele ser una situación tipo de este tipo de operación, durante un lapso de tiempo se pone en funcionamiento una gran parte de la capacidad  $\overline{P}_h$ , y durante una cierta porción del intervalo no se utiliza generación de este origen. La parte de la capacidad hidráulica que en el plazo de un intervalo —y, por tanto, no de naturaleza puntual— se atribuye al empleo de  $G_i^0$  se modeliza con una función exponencial; la Fig. 12.1 muestra un gráfico con la representación de la función empleada, en donde se entiende que  $P^0$  es igual a  $\overline{P}_h \left(1 - e^{u_i G_i^0}\right)$ . El coeficiente  $u_i$  que interviene en el exponente se escoge de manera que el crecimiento de la función no sea excesivamente brusco, lo que decrementaría demasiado la capacidad disponible para la generación estocástica, que se representa en el segundo término. Esta parte es la que interviene a través de la convolución de la potencia en fallo hidráulica con la carga y la indisponibilidad de las unidades del parque térmico. El segundo término es igual al cociente  $\frac{G_i^{0K-1} - G_i^0}{Nh_i}$ , y da una estimación de la potencia que podríamos denominar indeterminista.

Por otra parte, en casos en que la potencia hidráulica instalada sea muy grande comparada con la carga que se presenta, es necesario incluir limitaciones contra la posibilidad de una excesiva hidrogenación en algún intervalo. Por ello, en tales casos se puede considerar la presencia de restricciones como:

$$Nh_i \cdot H_i^{0K-1} \leq \widehat{E}_i \quad i = 1 \dots Ni \quad (12.3)$$

donde  $Nh_i$  significa duración en horas del  $i$ -ésimo intervalo.

### 12.2.3 Formulación

La formulación completa del modelo queda como sigue:

$$\min_{X=\{D,V\}} \sum_{i=1}^{Ni} \left( \frac{1}{2} \overline{H}_i(X)' \cdot \mathbf{Q}^i \cdot \overline{H}_i(X) + \mathbf{B}^{i'} \cdot \overline{H}_i(X) \right) \quad (12.1)$$

$$\text{s.t.} \quad AX^k = R^k \quad k = 0, \dots, K-1 \quad (12.4)$$

$$\underline{X}^k \leq X^k \leq \overline{X}^k \quad k = 0 \dots K-1 \quad (12.5)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} X^k \leq T \quad (12.6)$$

$$H_i^{0K-1}(X) - H_i^0(X) - \overline{P}_h \cdot e^{u_i N h_i H_i^0(X)} \leq 0, \quad i = 1 \dots Ni \quad (12.7)$$

$$N h_i \cdot H_i^{0K-1}(X) \leq \widehat{E}_i, \quad i = 1 \dots Ni \quad (12.3)$$

El vector de variables  $X$  comprende no sólo las variables principales del problema, descargas y volúmenes ( $D$  y  $V$ ), sino también aquellas otras que podrían intervenir detallando partes de la cuenca hidráulica como vertidos, trasvases o bombeos, que en esta formulación se omiten por simplicidad. A su vez, el vector de descargas  $D$  comprende los valores  $D_{i,j}^k$ : variable de descarga para el intervalo  $i$ , arco  $j$ , artículo  $k$ , y lo mismo se aplica a las demás variables. La restricción (12.4) se refiere al balance de flujos en cada nodo de la red (donde la matriz  $A$  expresa la topología de la red hidráulica y  $R^k$  es un vector con las inyecciones del artículo correspondiente). (12.5) representa cotas inferiores y superiores para las variables, y (12.6) la restricción de capacidad mutua para cada arco multiartículo. La expresión que aparece en (12.7) es otra forma de escribir la restricción para la potencia hidráulica (12.2). Finalmente aparece la restricción de la hidrogenación de (12.3).

La implementación de este modelo supone la incorporación de restricciones no lineales al modelo anterior, que carecía de ellas. Se han desarrollado tres versiones: una completa, otra sin las restricciones (12.3) y otra sin éstas y sin las restricciones de potencia, todas ellas usando el paquete Minos para obtener el punto óptimo. En las versiones con restricciones no lineales, el jacobiano se ha construido de forma esparsa para una mayor eficiencia en su cálculo.

## 12.3 Estimación de los parámetros de las funciones de CPP

Previamente al proceso mismo de optimización de la generación hidráulica es necesario asignar valores apropiados a las componentes de las matrices  $\mathbf{Q}^i$  y los vectores  $\mathbf{B}^i$ . El procedimiento que efectúa esta asignación ajusta para cada intervalo  $i$  las incógnitas  $q_{j,k}^i$  y  $b_j^i$ ,  $j = 1 \dots K$ ,  $k = j \dots K$ , mediante la técnica de ajuste por minimización del cuadrado de los residuos, lo cual implica tener unas observaciones fidedignas que relacionen los cuantiles de la potencia hidráulica con el decremento de coste de producción.

Prescindiendo de la notación del intervalo que se desea tratar, destaquemos que la

situación se presenta en términos de:

- la monótona de carga  $M_L(\cdot)$ , con su potencia base  $P_{min}$  y su potencia punta  $\hat{P}$
- el parque térmico de  $Nu$  unidades, cada una con su probabilidad de servicio  $1 - q_u$  y su capacidad  $\bar{P}_u$ ; se supone que no hay limitación de combustible ni mínimos técnicos
- el orden de mérito de las unidades térmicas
- el coste de generación de cada unidad, expresado como una función de la potencia  $p$ ,  $z_{1,u}p + z_{2,u}p^2$
- la capacidad de generación del conjunto de embalses de la cuenca  $\bar{P}_h$
- los parámetros estadísticos de las distribuciones de bloques  $K$  y  $\Pi$

### 12.3.1 Problema de mínimo cuadrado del residuo

El método implementado para estimar los componentes de la función de CPP genera observaciones de coste partiendo de un número suficiente de posibles distribuciones de bloques de la potencia hidráulica  $H$ . Como se ha dicho anteriormente, el número de incógnitas a determinar es igual a  $(K^2 + 3K)/2$ . Puesto que el modelo cuadrático es una aproximación del comportamiento real (y desconocido) del coste respecto la distribución de  $H$ , debemos elevar la cantidad de observaciones recogidas muy por encima de este número para obtener un sistema sobredeterminado que nos permita encontrar un ajuste suficientemente robusto. Así, el tamaño de la muestra generada es igual al número de incógnitas por un factor multiplicativo mayor que 1 que libremente podemos asignar; en otros términos:

- ★ Número de observaciones  $\equiv Mr = Fc \times (K^2 + 3K)/2$ , con  $Fc > 1$

El valor que se asigne a  $Fc$  permite escalar las dimensiones del problema sin tener en cuenta el número de artículos que intervienen. Por otro lado, está claro que el coste computacional de la generación de observaciones y del propio ajuste está muy relacionado con la magnitud que se dé a este coeficiente.

Cada observación proviene de la evaluación del decremento del coste respecto de la situación en la que sólo interviene el parque térmico cuando se tiene en cuenta una cierta distribución de la generación. En otros términos: generamos una aplicación:

$$\star [H^0, H^{01}, \dots, H^{0K-1}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

El dominio de esta aplicación es el conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^K$  tales que  $0 \leq H^0 \leq H^{01} \leq \dots \leq H^{0K-1} \leq \bar{P}_h$ . La imagen de la aplicación debe ser el semieje real negativo, ya que no se espera incrementar el coste debido al uso de generación sin coste. Llamaremos  $\Gamma$  a un subconjunto del dominio que contiene los  $Mr$  puntos de los que se derivan las observaciones del coste de producción. Cada punto de  $\Gamma$  se denota como  $h_m, m = 1 \dots Mr$  ( $h_m \in \mathbb{R}^K$ ). A su vez, los costes resultantes se escriben como  $\varphi_m, m = 1 \dots Mr$  ( $\varphi_m \leq 0$ ).

Por tanto, el ajuste de los valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{B}$  se produce minimizando la función:

$$\sum_{m=1}^{Mr} \left( \frac{1}{2} h'_m \cdot \mathbf{Q} \cdot h_m + \mathbf{B}' \cdot h_m - \varphi_m \right)^2 \quad (12.8)$$

Como se puede apreciar, se trata de un ajuste de regresión lineal múltiple sobre

las variables  $q_{j,k}$  y  $b_j$  y sin término independiente. Una formulación equivalente es la minimización de la norma euclídea del vector  $\mathbf{M} \cdot \Theta - \Upsilon$ , donde  $\mathbf{M}$  es una matriz  $Mr \times (K^2 + 3K)/2$  compuesta a partir de los valores de  $\Gamma$ ,  $\Theta$  es el vector de incógnitas y  $\Upsilon$  es el vector con los  $Mr$  costes observados. Como ejemplo ilustrativo, si  $K$  fuera igual a 2 quedaría:

$$\mathbf{M} \cdot \Theta - \Upsilon = \begin{pmatrix} (h_1^0)^2/2 & (h_1^{01})^2/2 & h_1^0 \cdot h_1^{01} & h_1^0 & h_1^{01} \\ (h_m^0)^2/2 & (h_m^{01})^2/2 & h_m^0 \cdot h_m^{01} & h_m^0 & h_m^{01} \\ (h_{Mr}^0)^2/2 & (h_{Mr}^{01})^2/2 & h_{Mr}^0 \cdot h_{Mr}^{01} & h_{Mr}^0 & h_{Mr}^{01} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,2} \\ q_{1,2} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \\ \vdots \\ \varphi_{Mr} \end{pmatrix}$$

La resolución de este problema se efectúa a través de una rutina de minimización de funciones cuadráticas de la librería numérica NAG, E04NCF, que permite restringir el problema y acotar las variables. No se ha hecho uso de esta facultad, aunque se conoce que los valores de  $b_j$  han de ser negativos (el gradiente en 0 de la función CPP debe ser negativo). No se tiene referencia de cuál es el procedimiento usado por la rutina. Una alternativa a esta vía es obtener la descomposición QR de  $\mathbf{M}$  mediante matrices ortogonales de Householder, resolviendo el sistema triangular consiguiente. A pesar de que los resultados obtenidos por la rutina NAG son buenos, este segundo método es interesante si la dimensión  $Mr$  es grande, ya que en tales casos algunos procedimientos dan lugar a matrices mal condicionadas.

### 12.3.2 Generación de cuantiles

Para obtener unos resultados satisfactorios, el conjunto  $\Gamma$  debería estar compuesto por puntos distribuidos uniformemente por todo el dominio factible de valores que componen los cuantiles de una posible variable de potencia, ya que se ignora a priori cuáles son los puntos que se van a evaluar como consecuencia de la búsqueda de la política de flujos óptima. Sin embargo, la parcelación equitativa de un dominio de dimensión mayor que 2 y que además está sometido a la restricción que impone el obligado orden de los cuantiles no es un ejercicio simple. Por ello, se ha optado por la obtención al azar de los cuantiles  $h_m^{0k}$ ,  $k = 0 \dots K - 1$ . Este procedimiento tiene como inconveniente principal el que la repetición de la estimación del CPP no puede partir exactamente de las mismas condiciones iniciales, puesto que los puntos de  $\Gamma$  se generan aleatoriamente y serán diferentes de los que se obtuvieron en otras ocasiones. Ello da lugar a una estimación distinta de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{B}$  cada vez, las cuales lógicamente producen políticas óptimas distintas.

Por otro lado, la experiencia muestra que las matrices  $\mathbf{Q}$  estimadas así no suelen ser definidas positivas, aunque se podrían calificar como *quasi-definidas positivas*, ya que la estructura de valores propios de las matrices muestra algún valor (generalmente uno) negativo y no muy alejado de 0. La garantía de que estas matrices fueran definidas positivas sería deseable para el buen rendimiento del proceso de búsqueda del óptimo de la función objetivo (12.1), pero no es suficiente para asegurar la localización del óptimo global, dado que la expresión de la generación en función de las variables independientes no es una función convexa. Por el momento, no se posee la prueba de que los parámetros que se desean estimar deban corresponder o no a una (desconocida) matriz definida positiva.

Pruebas realizadas repitiendo la estimación de un caso determinado muestran con claridad que el azar que ha intervenido en la creación de  $\Gamma$  se manifiesta por una notable variabilidad de los valores propios resultantes.

Tabla 12.I. Resumen estadístico de los valores propios obtenidos en un caso con 5 artículos.

	$Fc = 50$		$Fc = 150$	
	Media	Desv. est.	Media	Desv. est.
# 1	4.592	1.099	3.982	0.747
# 2	2.021	0.661	1.6089	0.2540
# 3	1.1745	0.2938	0.9965	0.3122
# 4	0.397	0.631	0.3167	0.5145
# 5	-1.356	0.885	-1.210	0.725

La tabla 12.I refleja la idea apuntada, en base a dos muestras de 30 ejecuciones cada una, encaminadas a estimar la función de CPP de un caso con  $K=5$ . Los valores propios han sido previamente ordenados en cada caso, de modo que las muestras están formadas respectivamente por las primeras raíces del polinomio característico, por las segundas, etc. En la izquierda, el factor de sobredimensionado  $Fc$  es 50, lo que quiere decir que el tamaño correspondiente de  $\Gamma$ ,  $Mr$ , es igual a 1000. A la derecha, el número de observaciones es tres veces superior, lo que da lugar tal como se podía esperar a una disminución de la variancia en la estimación de los valores propios, aunque no es el caso del tercer valor propio por una pequeña diferencia. En cuanto al valor medio registrado, se producen notables diferencias estadísticamente significativas en los tres primeros, mientras que en los dos últimos no es así. El caso mostrado no es representativo de otros casos, debido a la importante variabilidad presente en los valores propios. Sin embargo, algunas particularidades comunes sí se han observado, por ejemplo, el mayor valor propio generalmente tiene asociado un vector propio en el que el término de mayor peso corresponde a la variable  $H^0$ .

La Fig. 12.2 contiene representadas 6 matrices  $\mathbf{Q}$  de las estimadas en el experimento anterior, tres de ellas a base de 1000 observaciones y las otras tres con 3000 observaciones. Los círculos negros representan valores  $q_{j,k}$  positivos y los blancos valores negativos; el área de cada círculo es proporcional a su valor. Nuevamente destaca por su magnitud el punto  $q_{1,1}$ , el cual corresponde exclusivamente a la energía descrestada. En general, es notorio que se presentan acusadas diferencias, revelando que la estimación de cada componente de la matriz es poco robusta. Sin embargo, se observa que distintas funciones evaluadas en un punto  $h$  factible difieren relativamente poco entre sí, y no sólo en la parte lineal de (12.1) sino también en la parte cuadrática. Por ejemplo, las seis funciones de las que son parte componente las matrices que aparecen en la Fig. 12.2 retornarían en un punto dado: {160, 280, 500, 740, 1240} [MW] los siguientes valores respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} -12046892 & -11881458 & -11910839 \\ -11901896 & -11952165 & -11925185 \end{array}$$

Si además consideramos que en un problema de optimización típico se evalúan varias funciones de CPP -estimadas independientemente—, tantas como intervalos intervienen,

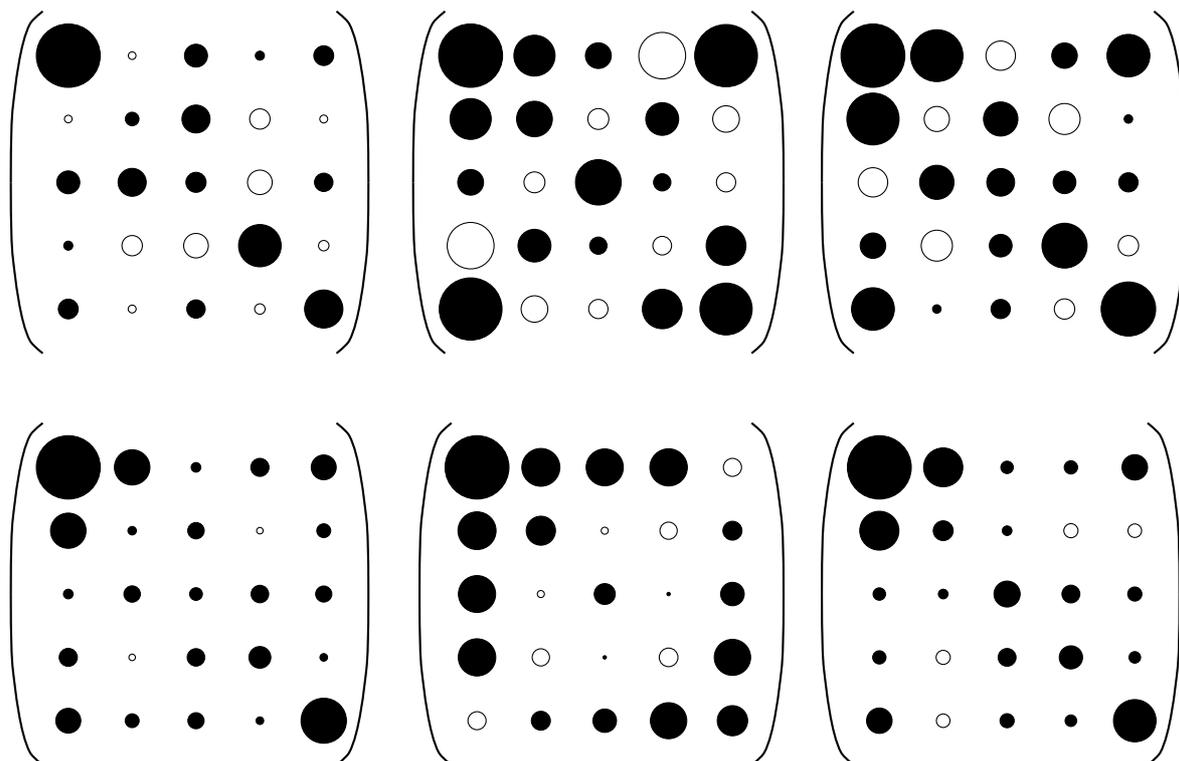


Figura 12.2 : Matrices  $Q$ . Arriba, con  $F_c = 50$ ; abajo, con  $F_c=150$ .

se espera que los diversos errores que cada una de ellas contiene se cancelen mutuamente, disminuyendo la importancia de la discrepancia del resultado.

### 12.3.3 Aleatorización de la muestra $\Gamma$

La representatividad de los valores de potencia escogidos para ser convolucionados como distribuciones de  $H$  es crítica. Como se ha expresado al principio de la sección, es conveniente que el espacio factible quede uniformemente cubierto por el conjunto de puntos integrante de  $\Gamma$ ; de no ser así, la selección irregular de distribuciones de probabilidad utilizadas provocaría un ajuste deficiente del CPP en alguna región del espacio factible.

El hecho de que los cuantiles de una variable estén ligados por una relación de orden, impuesta por su propio significado, impide que puedan ser extraídos al azar simplemente. Si fueran independientes, todo lo que habría que hacer para obtener un punto sería generar  $K$  valores de potencia factibles. Sin embargo, la condición necesaria  $H^0 \leq H^{01} \leq \dots \leq H^{0K-1}$  no se cumpliría en buena parte de los puntos hallados de esta manera. Optar por un método tipo Montecarlo, en el cual se rechazasen los casos desfavorables, no sería una opción eficiente, ya que la probabilidad de encontrar un caso aceptable disminuye rápidamente con el número de artículos: concretamente, como  $(K!)^{-1}$ . Por ejemplo, con 7 artículos, se deberían generar en media unas 5000 distribuciones para encontrar un caso favorable.

Una alternativa mejor consiste en determinar  $K$  valores y ordenarlos, asignándolos respectivamente a  $H^0, H^{01}, \dots, H^{0K-1}$ . De esta manera se consigue efectivamente un punto uniformemente distribuido en la región factible. No obstante, este método tiende a

obtener distribuciones de bloques en donde el máximo es muy alto, próximo a la capacidad hidráulica, y este efecto se acusa especialmente cuanto mayor sea  $K$  (un hecho muy ligado a la estimación del máximo, exposición realizada en el capítulo 4). También es cierto que, por otro lado, el método tiene tendencia a asignar a la potencia  $H^0$  generalmente valores muy bajos. De las dos desviaciones señaladas, la primera puede tener una mayor repercusión, ya que es probable que los puntos de potencia destinados a ser evaluados no estén próximos a su máxima capacidad (en general, la potencia media de funcionamiento de los grupos generadores de un embalse suele ser baja), mientras que es normal que la potencia determinista sea pequeña. Teniendo en cuenta esta reflexión, el sistema anterior se ha planteado como sigue:

- 1 Elegir un valor  $\overline{PH}$  entre 0 y  $\overline{P}_h$ .
- 2 Determinar  $K$  números distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0, \overline{PH}]$ .
- 3 Ordenarlos en orden creciente, y asignarlos respectivamente a  $H^0, H^{01}, \dots, H^{0K-1}$ .

En el paso 1, la elección de  $\overline{PH}$  no tiene porqué ser uniforme en el citado rango; depende de las posibilidades que se entrevean para funcionar a mayor o menor régimen. Tampoco tiene porqué partir de 0. Básicamente, se trata de un esquema en el que se puede intervenir para ajustarlo como convenga a situaciones particulares. De todos modos, también se ha constatado que el sistema citado es suficientemente robusto como para que una variación introducida en el método no origine una severa desviación en la estimación de las funciones de CPP respecto de las halladas sin tal variación.

#### 12.3.4 Posición de la unidad hidráulica entre las unidades térmicas

En el modelo desarrollado, la unidad hidráulica se convoluciona junto con las unidades térmicas con la carga tal como se explicó en el capítulo 11. De esta manera se llega a determinar el ahorro medio derivado del uso de generación hidráulica. Se ha incluido también la opción de considerar diferentes posiciones entre la lista definida por el orden de mérito de las unidades térmicas. Es decir, la unidad hidráulica puede sumarse con la carga en primer lugar, o tras cualquiera de las  $Nu$  unidades térmicas. Pero la indefinición que acompaña a este asunto puede aconsejar que la posición de la generación hidráulica esté en diferentes lugares, por ejemplo, entre las seis primeras unidades térmicas, o entre las seis últimas. En estos casos, el coste derivado se halla promediando los diferentes resultados.

La implementación realizada se ajusta a alguno de los siguientes casos, aunque fácilmente se podrían haber considerado situaciones más generales:

- La unidad hidráulica se sitúa entre las  $y$  primeras del orden de mérito.
- La unidad hidráulica se sitúa entre las  $y$  últimas del orden de mérito.

Pongamos un par de ejemplos para aclarar el procedimiento que se va a exponer a continuación. Supóngase un parque con seis unidades térmicas. El procedimiento de convolución con la carga y la posterior integración con la ecuación de coste correspondiente determina para cada unidad unos costes de generación y además un coste adicional por energía externa que es necesario importar. Denominaremos a estos costes según  $A_u, u = 1 \dots 6$  y  $A_X$  respectivamente. El coste de esta operativa sería en consecuencia  $\sum_{u=1}^6 A_u + A_X$ . Seguidamente, considérese una cierta generación hidráulica que participa

en el cubrimiento de la monótona. Tras el descrestado de la monótona de carga con la generación determinista, se supone que la generación estocástica se sitúa por delante de todas las unidades térmicas, de manera que cuando les llega el turno a éstas dan lugar a unos costes de generación diferentes y que denotaremos como  $B_u, u = 1 \dots 6$  y  $B_X$ , para el coste de la energía externa. La situación, por tanto, queda así:

Unidad	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Ext.
No participa $H$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_X$
Sí participa $H$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_X$

El decremento en el coste de producción se hallaría de acuerdo con la ecuación:

$$q = \sum_{u=1}^6 B_u + B_X - \left( \sum_{u=1}^6 A_u + A_X \right)$$

suponiendo que la posición de la unidad hidráulica fuera la primera. El término entre paréntesis es constante y lo llamaremos  $C_{bas}$ ; el término de la derecha, por depender de  $H$ , lo escribiremos como  $C(H)$ . Para un caso más general, con  $y$  posiciones posibles, se denotará como  $C_y(H)$  si son las primeras posiciones, o como  $C^y(H)$ , si son las últimas. Es entonces fundamental darse cuenta que para una unidad térmica cualquiera no es importante saber la posición exacta de la generación hidráulica, sino sólo si ésta se sitúa delante o detrás de la misma. Es sencillo comprobar esto: la distribución de probabilidad de la variable  $J_{n+1}$  —recordemos que se trata de la suma de la carga,  $n$  unidades térmicas y una hidráulica— se ciñe a la conmutatividad de la suma de variables  $y$ , por tanto, no depende del orden en que se hayan sumado las unidades implicadas.

Así pues, el coste medio resultado de suponer que la generación hidráulica se ubica entre las tres primeras posiciones se puede hallar como:

$$C_3(H) = (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_X) \frac{1}{3} + \\ (A_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_X) \frac{1}{3} + \\ (A_1 + A_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_X) \frac{1}{3}$$

y si estuviera entre las tres últimas tendríamos:

$$C^3(H) = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + B_X) \frac{1}{3} + \\ (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + B_6 + B_X) \frac{1}{3} + \\ (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_5 + B_6 + B_X) \frac{1}{3}$$

La consecuencia inmediata es que, supuesta cualquier hipótesis acerca de la posición (o posiciones) de la unidad hidráulica, no es necesario más que realizar una vez el proceso de convolución de la carga y las unidades, ubicando la hidráulica en primer lugar. El cálculo del coste de producción se llevará a cabo mediante una combinación de los costes

así obtenidos y los costes iniciales.

Podemos finalmente enunciar cuáles serían las expresiones generales que conducen a la obtención del coste de producción:

$$C^y(H) = \sum_{u=1}^{Nu+1-y} A_u + \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{y-1} (i \cdot A_{Nu+1-i} + (y-i) \cdot B_{Nu+1-i}) + B_X \quad (12.9).a$$

$$cp = C^y(H) - C_{bas}$$

en un caso, y:

$$C_y(H) = \sum_{u=y}^{Nu} B_u + \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{y-1} (i \cdot B_i + (y-i) \cdot A_i) + B_X \quad (12.9).b$$

$$cp = C_y(H) - C_{bas}$$

en el otro caso.

### 12.3.5 Determinación de los coeficientes $u_i$

En el caso de que las restricciones (12.7) se incluyan en el modelo, es necesario conocer una aproximación de la relación entre la generación  $G^0$  y la proporción de la capacidad hidráulica que se considere ocupada por tal generación que, como ya hemos dicho, no interviene de manera uniforme a lo largo de todo el intervalo.

El descrestado de la monótona se puede entender como la satisfacción de la demanda que ocurre cuando la carga supera un cierto umbral de potencia, siendo este umbral un valor alto; en otras palabras, cuando se presenta un valor de carga notable, posiblemente una punta de corta duración, la mejor manera de responder es generando energía hidráulica, ya que puede entrar en servicio en muy poco tiempo y sin los altos costes que presentan las unidades térmicas de respuesta rápida. Así pues, la influencia de este tipo de generación se manifiesta en la monótona de cargas como el alisamiento de su parte superior. A la duración total de tales intervenciones la podemos denominar  $T_d$  que, por supuesto, depende de cuánta energía se ha llegado a descrestar.

Aunque se llegase a ocupar en momentos puntuales toda la capacidad  $\bar{P}_h$ , esto no sería motivo para impedir la presencia de generación —estocástica— en otros momentos del intervalo. Por ello, la potencia asociada a la generación determinista  $P^0$  se ha tomado como el cociente  $G^0/T_d$ , el cual es evidentemente un valor más conservador que la máxima potencia empleada en algún momento.

De esta manera, mediante un número suficiente de descrestados con diferentes valores de  $G^0$ , se puede determinar la forma que aparece en la Fig. 12.1. Las observaciones, en número de  $n$ , se pueden denotar:

$G^0$	$g_1^0$	$g_2^0$	$\dots$	$g_{n-1}^0$	$g_n^0$
$P^0$	$p_1^0$	$p_2^0$	$\dots$	$p_{n-1}^0$	$p_n^0$

El cálculo del coeficiente óptimo  $u$  que minimiza:

$$\sum_{i=1}^n \left( \bar{P}_h \cdot \left( 1 - e^{u g_i^0} \right) - p_i^0 \right)^2$$

puede ser sustituido razonablemente transformando el modelo exponencial que subyace en la formulación anterior por un modelo lineal, en cuyo caso la determinación del coeficiente  $u$  se plantea como:

$$\sum_{i=1}^n \left( u g_i^0 - \log \left( 1 - \frac{p_i^0}{\bar{P}_h} \right) \right)^2$$

Esta nueva formulación, que no es equivalente a la anterior, permite solucionar analíticamente el problema. Igualando la derivada de la expresión anterior a 0, hallamos el valor de  $u$  buscado:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2g_i^0 \left( u g_i^0 - \log \left( 1 - \frac{p_i^0}{\bar{P}_h} \right) \right) &= 0 \implies \\ u &= \frac{\sum_{i=1}^n g_i^0 \log \left( 1 - \frac{p_i^0}{\bar{P}_h} \right)}{\sum_{i=1}^n (g_i^0)^2} \end{aligned} \quad (12.10)$$

### 12.3.6 Algoritmo de estimación de funciones de CPP

Finalmente, se tiene el siguiente esquema para la determinación de las matrices  $\mathbf{Q}^i$  y vectores  $\mathbf{B}^i$  que intervienen en la evaluación del coste probable de producción:

- 0 El siguiente proceso se repite para cada intervalo  $i = 1 \dots Ni$ :
- 1 Hallar los costes iniciales de generación  $A_u, u = 1 \dots Nu$  y  $A_X$ ; calcular  $C_{bas}$  como  $\sum_{u=1}^{Nu} A_u + A_X$ .
- 2 Determinar el coeficiente  $u_i$  mediante (12.10).
- 3 Sea  $Mr = Fc \times (K^2 + 3K)/2$
- 4 Para  $m = 1 \dots Mr$  hacer:
  - 4.1 Encontrar un punto  $h_m$  que corresponda a una distribución factible de potencia hidráulica.
  - 4.2 Incorporar en primer lugar en el orden de mérito la unidad hidráulica, y hallar los nuevos costes  $B_u, u = 1 \dots Nu$  y  $B_X$ .
  - 4.3 Calcular  $\varphi_m$  de acuerdo con (12.9) y el valor de  $y$  presente.
- 5 Resolver (12.8) para determinar  $\mathbf{Q}^i$  y  $\mathbf{B}^i$ .

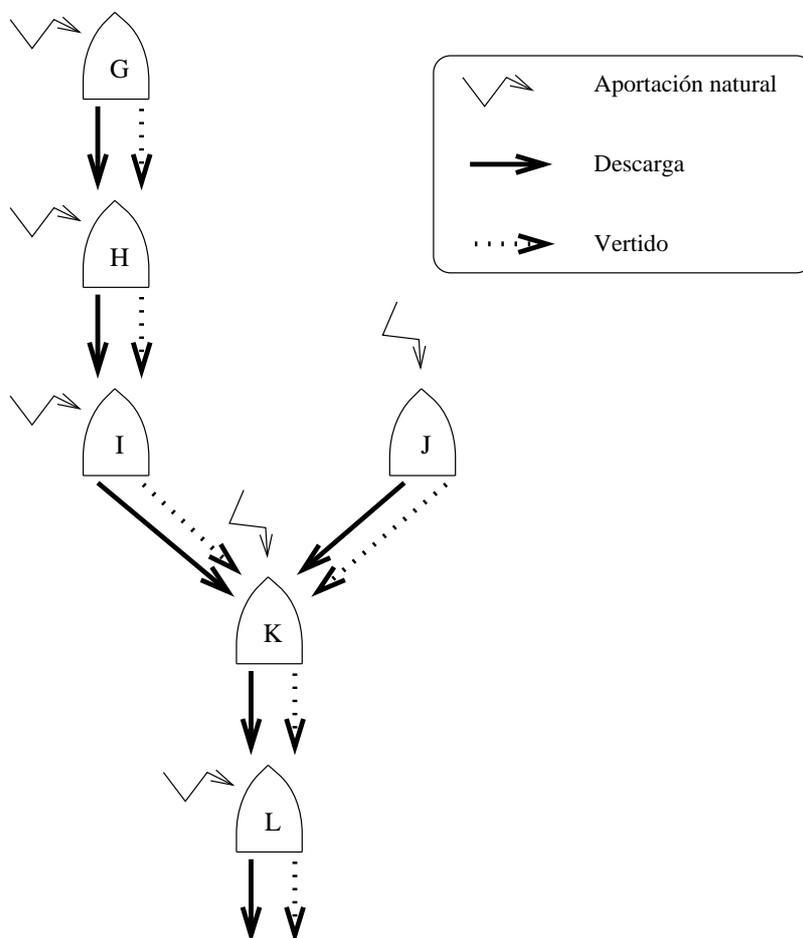
## 12.4 Resultados computacionales

Para ilustrar la explicación precedente, se incluyen diversos resultados obtenidos con la ejecución del modelo descrito. Se trata de un ejemplo en el que se consideran 12 intervalos

correspondientes a meses naturales, una cuenca hidráulica compuesta por 6 embalses y un parque térmico de 12 unidades.

### 12.4.1 Descripción del caso

#### 12.4.1.1 Cuenca hidráulica



**Figura 12.3 :** Esquema de la cuenca del ejemplo.

La Fig. 12.3 muestra cómo se disponen los embalses de la cuenca, unidos por 6 arcos de descarga y 6 de vertido. Cada uno de ellos cuenta con su propia aportación natural. Aunque la topología es idéntica a la del caso que aparece en el capítulo 9, en realidad las características físicas son muy distintas. La capacidad instalada de todos los embalses supera los 2.5 GW. En la tabla 12.II aparece la información estadística relativa a las aportaciones en cada punto.

#### 12.4.1.2 Parque de unidades térmicas

La tabla 12.III resume las características principales de las unidades térmicas consideradas. Figuran en ella para cada unidad la potencia máxima, la probabilidad de estar fuera de servicio y los dos coeficientes que sirven para calcular el coste según la expresión

Tabla 12.II. Valores descriptivos de las aportaciones (en  $\text{hm}^3$ )

Mes	G		H		I		J		K		L	
	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.	Media	Des.st.
Ener.	22.54	12.83	165.52	122.63	152.41	96.37	56.11	41.82	2.35	3.22	0.40	1.12
Febr.	29.41	27.65	242.41	266.10	246.31	277.49	73.49	81.81	1.40	3.91	0.46	1.00
Marzo	18.43	11.68	161.36	123.39	162.09	132.88	41.90	34.60	7.95	25.42	0.63	1.17
Abril	16.76	8.27	141.36	99.85	146.01	89.98	40.12	26.34	1.20	1.54	0.21	0.91
Mayo	15.13	7.86	107.10	76.12	112.90	81.79	37.92	28.49	2.27	3.84	0.84	2.96
Junio	8.77	3.81	62.69	32.64	77.17	49.95	26.06	14.39	2.13	2.98	1.69	4.09
Julio	5.07	2.16	26.43	22.24	34.52	26.06	17.35	10.11	4.35	5.63	2.07	5.23
Agos.	4.35	2.12	17.49	10.41	22.95	14.77	18.09	9.98	5.45	8.79	1.49	3.04
Sept.	4.70	3.13	26.49	15.45	32.98	11.27	17.34	9.04	1.27	2.12	0.41	0.70
Oct.	9.97	10.15	54.57	43.01	49.27	23.62	18.21	8.57	2.46	7.52	0.95	2.53
Nov.	14.28	8.60	85.33	60.33	76.40	53.21	26.45	16.11	0.21	0.52	0.65	1.44
Dic.	26.56	24.88	157.08	153.38	108.73	64.85	49.04	54.46	2.05	7.23	0.49	1.00

$z_1 p + z_2 p^2$ . La capacidad instalada de todo el parque asciende a 3.75 GW. El orden en el que aparecen corresponde al orden de mérito económico. En lo que respecta al coste de la energía externa, se ha supuesto un precio de 100 ECU/MWh. Hay que advertir que los datos que han sido utilizados son ficticios, aunque se ha procurado dotarlos de una relativa verosimilitud.

Tabla 12.III. Descripción del parque térmico.

Unidad	$\bar{P}$ [MW]	$q$	$z_1$ [ECU/MW]	$z_2$ [ECU/MW <sup>2</sup> ]
# 1	471	0.07	18.0	$6.8 \cdot 10^{-3}$
# 2	489	0.07	18.0	$7.2 \cdot 10^{-3}$
# 3	207	0.065	22.4	$2.8 \cdot 10^{-2}$
# 4	282	0.10	23.1	$1.5 \cdot 10^{-2}$
# 5	526	0.10	23.2	$8.5 \cdot 10^{-3}$
# 6	522	0.10	23.9	$7.6 \cdot 10^{-3}$
# 7	336	0.045	28.0	$1.1 \cdot 10^{-2}$
# 8	275	0.10	30.4	$1.3 \cdot 10^{-2}$
# 9	224	0.08	33.7	$2.0 \cdot 10^{-2}$
# 10	150	0.10	35.3	$3.2 \cdot 10^{-2}$
# 11	150	0.05	36.2	$3.8 \cdot 10^{-2}$
# 12	118	0.08	40.0	$4.5 \cdot 10^{-2}$

#### 12.4.1.3 Demanda de potencia

Daremos como descripción relativa a la carga que debe satisfacerse en cada intervalo un resumen descriptivo en la tabla 12.IV con algunos valores significativos: potencia mínima, máxima, media y energía total demandada.

Tabla 12.IV. Descripción de la demanda.

Mes	$P_{min}$ [MW]	$\hat{P}$ [MW]	$\mathbf{P}$ [MW]	$\mathbf{E}$ [MWh]
Enero	1210.9	3075.8	2148.6	1598569
Febr.	1364.0	3528.9	2306.6	1550043
Marzo	1184.6	3866.0	2427.9	1806337
Abril	1187.1	3579.7	2453.9	1766799
Mayo	1453.4	3758.9	2634.8	1960271
Junio	1387.5	3456.9	2409.4	1734733
Julio	1305.6	3027.1	2196.5	1634205
Agos.	1300.9	3143.7	2240.1	1666666
Sept.	1518.4	3505.9	2497.1	1797933
Oct.	1565.9	3652.5	2638.7	1963169
Nov.	1521.6	3393.6	2370.4	1706720
Dic.	1344.3	3111.8	2262.8	1683528

### 12.4.2 Métodos alternativos

Se ha implementado el modelo (12.1), (12.4), (12.5), (12.6), (12.7), (12.3) en un programa de nombre `mcg3`, aunque también se han dispuesto otras versiones más simples. Así, el programa `mcg2` omite las restricciones de energía y el programa `mcg1` omite también las de potencia. A fin de poder enjuiciar los resultados que se muestran, se han preparado algunos ejemplos para poder ser resueltos mediante otras técnicas. Entre ellas nos referimos a las relacionadas con funciones de CPP dependientes de la esperanza de la hidrogenación, la cual se muestra en (7.7), tal como los programas ya citados `mbgg` o `mbgk`. Por otro lado, la solución del modelo desarrollado en este capítulo puede ser sometido a simulación, aunque con algunas variantes introducidas en el método que se detallarán a continuación.

El cálculo de las funciones de CPP (7.7) se obtiene por el método de Viramontes y Hamilton [VIRA78]. La diferencia entre éste y el que aparece en estas páginas no es demasiada: el primero de ellos data del final de la década de los 70 y, lógicamente, es más simple (pero hay que decir, en justicia, que el nuestro se inspira directamente en aquel). Viramontes y Hamilton intercalan una pseudo-unidad hidráulica que no se diferencia de las unidades térmicas entre las que se ubica: se entiende que la potencia escogida para aquella es un valor medio y, con ello, se adopta un valor de disponibilidad total, un compromiso entre las ocasiones en las que se generará más y en las que se generará menos. Según la generación media establecida y las diferentes posiciones utilizadas, se determina una función de coste de producción de una sola variable por ajuste mínimo cuadrático a partir de las observaciones que se han derivado.

Respecto al procedimiento de simulación para las soluciones obtenidas a través de la función objetivo (12.1), ha sido necesario adaptar el algoritmo propuesto en el capítulo 9 a la nueva función de evaluación del coste. El inconveniente que presentaba este método es que la nueva función tiene como argumento un vector que se supone el conjunto de cuantiles de una distribución de bloques, mientras que cada iteración del simulador sólo

proporciona un valor numérico de generación. El problema ha sido superado de la siguiente manera.

Dejamos claro que la mayor parte de los aspectos de este simulador son comunes a los del descrito previamente en §9.3.3.3: la política que dirige la simulación consiste en la misma estructura de variables multiartículo, se utiliza el mismo mecanismo de generación de aportaciones, y el mismo sistema de reajuste de flujos. Únicamente se ha hecho uso de la versión que reajusta globalmente todos los intervalos al unísono, de acuerdo con la idea adquirida en anteriores experiencias de que este procedimiento era más ventajoso. Como merece destacarse, la sola diferencia es que no es posible calcular el coste de producción mediante la operación  $\lambda_{1,i}g + \lambda_{2,i}g^2$ , ya que estos coeficientes  $\lambda$  corresponden a la metodología de Viramontes y Hamilton.

De acuerdo con la notación establecida, se trata de calcular un conjunto  $\Omega$  que contenga las  $Nc$  observaciones de coste,  $c_1, \dots, c_{Nc}$ , necesarias para calcular un intervalo de confianza para la esperanza de  $\mathcal{C}$ , la variable aleatoria cuyo coste medio se quiere comparar con el resultante de la evaluación de la política a cargo del programa optimizador,  $\tilde{c}$ . Para determinar el  $j$ -ésimo coste, se parte de una muestra de valores de potencia de tamaño  $Ns$  (estos valores se han hallado a través del proceso de simulación, tras precisamente  $Ns$  iteraciones). Mediante un procedimiento sencillo, descrito en el capítulo 4, se estiman los  $K$  cuantiles de la potencia correspondientes a  $0, \pi_1, \dots, \pi_1 + \dots + \pi_{K-2}, 1$ , necesarios para el cálculo posterior. Se denota como  $\{h_j^0, h_j^{01}, \dots, h_j^{0K-1}\}$  al conjunto formado por la estimación de los cuantiles a partir de la  $j$ -ésima muestra de  $Ns$  valores de potencia. En este momento podemos determinar el coste:

$$c_j = \frac{1}{2} [h_j^0, h_j^{01}, \dots, h_j^{0K-1}] \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} h_j^0 \\ h_j^{01} \\ \vdots \\ h_j^{0K-1} \end{pmatrix} + [h_j^0, h_j^{01}, \dots, h_j^{0K-1}] \cdot \mathbf{B} \quad (12.11)$$

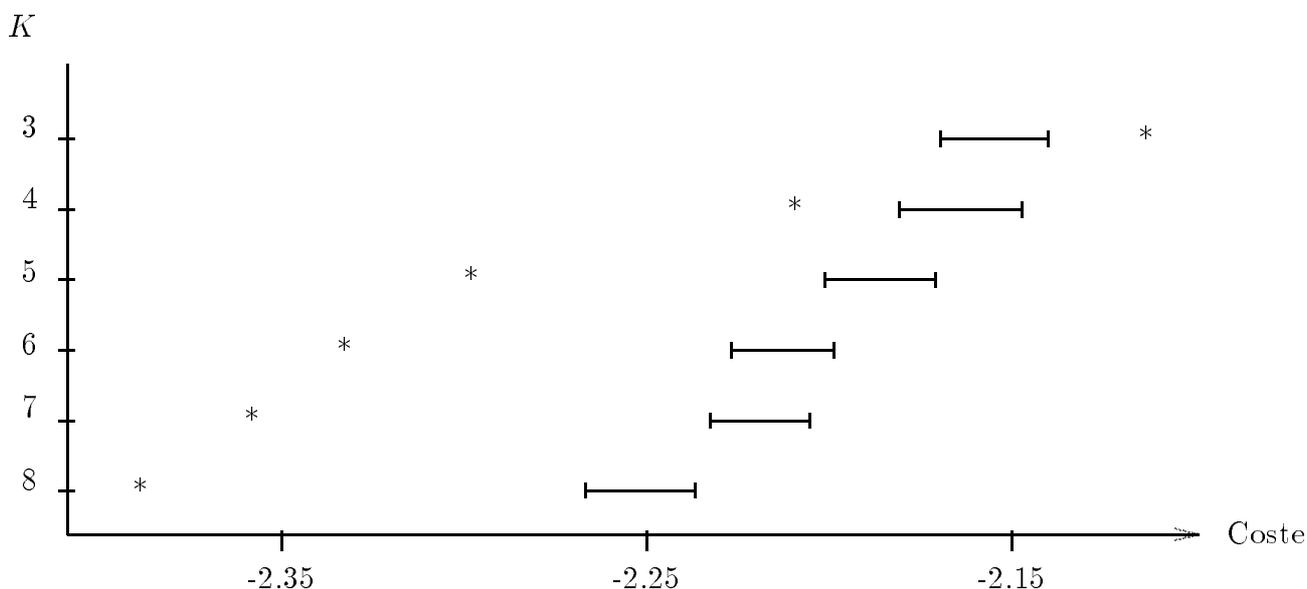
En realidad, puesto que se supone que el periodo de estudio se compone de un cierto número de intervalos, la expresión (12.11) se aplica parcialmente para calcular el coste  $j$ -ésimo en el  $i$ -ésimo intervalo,  $c_{i,j}$ , y el coste total que forma parte de  $\Omega$  se determina sumando los costes de cada intervalo.

En consecuencia, el número total de simulaciones que dan lugar a una reproducción de las condiciones indicadas por la política es igual a  $Nc \times Ns$ . En realidad, esto no implica que este número tenga que ser muy superior a las cantidades que se manejan en las simulaciones con función del tipo Viramontes y Hamilton. Se ha visto con la experiencia que la amplitud de los intervalos de confianza hallados con un tamaño pequeño de  $\Omega$  es similar a la amplitud de los obtenidos con la anterior versión del simulador, mientras el número total de simulaciones se mantuviera en parecida magnitud. Puede justificarse si se entiende que la variabilidad de los costes que devuelve la segunda versión del simulador es mucho menor que en la primera, a causa de que las distribuciones de la potencia  $\{h_j^0, \dots, h_j^{0K-1}\}$  que sirven para evaluar estos costes provienen a su vez de una muestra, lo cual reduce la variabilidad de los cuantiles empleados. Es de esperar que estas operaciones se realicen sin sesgo, de modo que finalmente el valor esperado de  $c_j$  coincida con la esperanza de  $\mathcal{C}$ . En la práctica, el número total de iteraciones se reparte de modo que aproximadamente  $Ns$  sea un 50% mayor que  $Nc$ ; el motivo es dotar a ambas muestras de un tamaño suficiente,

aunque es mayor la muestra de potencias porque la estimación de los cuantiles es bastante más imprecisa que la del coste medio. Por poner un ejemplo, si se pide simular unas 5000 iteraciones, entonces  $N_c$  vale 58 y  $N_s$  es igual a 87 (cuyo producto resulta 5046).

### 12.4.3 Pruebas con el modelo

Tras haber situado el entorno, en esta sección se muestran y comentan algunos resultados computacionales relacionados con el ejemplo descrito. Se han llevado a cabo ejecuciones con diferente número de artículos, desde 3 a 8. En todos los casos, el vector  $\Pi$  se compone de valores con el mismo peso  $1/(K - 1)$ . En principio, las pruebas se han realizado con la versión sin restricciones no lineales. Se ha considerado conveniente asignar una capacidad hidráulica menor que la real, y se ha adoptado igual a 1500 MW; por otra parte, la generación de los cuantiles en la fase de estimación de los parámetros de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{B}$  se basa en elegir  $\overline{PH}$  de manera uniforme entre 0 y  $\overline{P}_h$  (ver [1] del algoritmo). De acuerdo con el hecho de que la energía hidráulica es la fuente de energía más económica, se ha colocado en primer lugar del orden de mérito. El factor  $F_c$  es igual a 100 en todos los casos. El número de iteraciones de la simulación es exactamente 5046 para cada prueba.



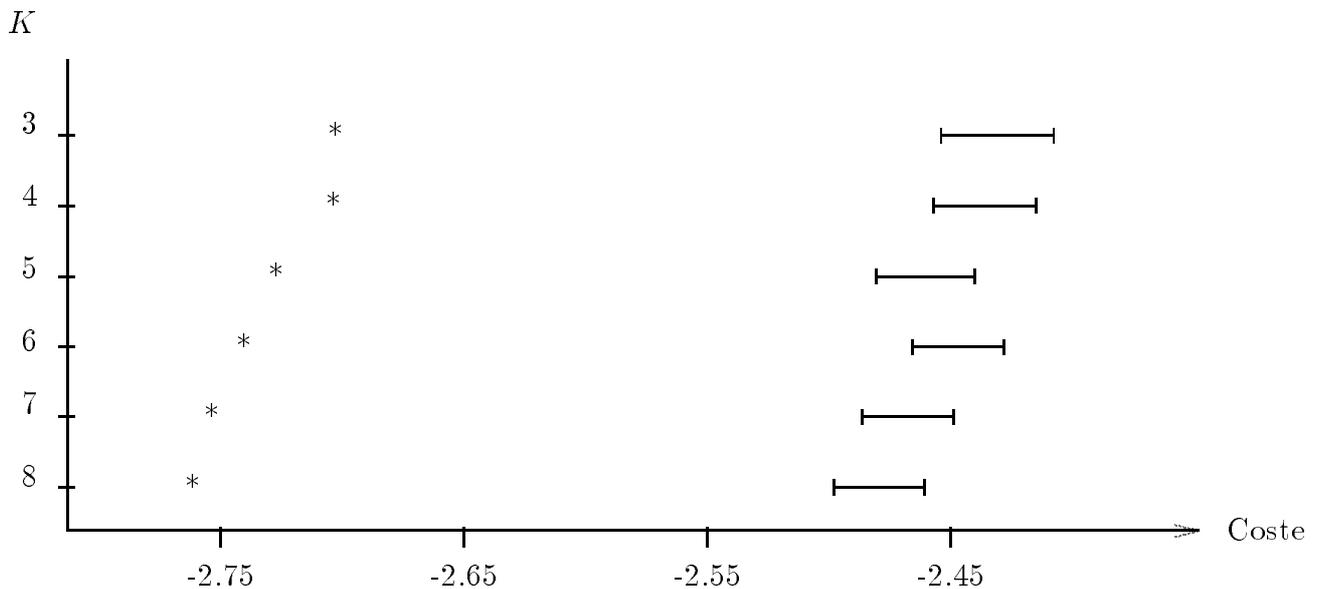
**Figura 12.4 :** Resultados de la optimización e intervalos de confianza, provenientes de la versión mcg1.

La Fig. 12.4 y la tabla 12.V sirven para exponer los primeros resultados. En la figura, las unidades del eje son  $\cdot 10^8$  ECU, y el símbolo  $\star$  indica la posición de  $\tilde{c}$ . Se aprecia una tendencia claramente influida por el número de artículos, visible en resultados anteriormente expuestos en el cap. 9, por la que el decremento del coste aumenta (en valor absoluto) con  $K$ . El efecto es menor si  $K$  es grande que si es pequeño; entre sí, las diferencias relativas entre los cuatro últimos resultados son inferiores al 4%. Los intervalos de confianza retornan una estimación insuficiente en general (el caso con menor número de artículos no debería ser considerado), y se muestran menos sensibles a  $K$ , aunque también evidencian una pequeña tendencia. El error relativo entre el valor central del intervalo y  $\tilde{c}$  está entre el 2% y el 6%. En cuanto a los tiempos de ejecución que se hacen constar, como

Tabla 12.V. Resultados de mcg1 e intervalos de confianza.

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )	T.cpu (seg.)
3	$-2.1153243 \cdot 10^8$	$[-2.16957 \cdot 10^8, -2.14007 \cdot 10^8]$	2.3
4	$-2.2115483 \cdot 10^8$	$[-2.18071 \cdot 10^8, -2.14703 \cdot 10^8]$	3.7
5	$-2.3003353 \cdot 10^8$	$[-2.20098 \cdot 10^8, -2.17069 \cdot 10^8]$	7.7
6	$-2.3349433 \cdot 10^8$	$[-2.22671 \cdot 10^8, -2.19871 \cdot 10^8]$	11.0
7	$-2.3601748 \cdot 10^8$	$[-2.23267 \cdot 10^8, -2.20523 \cdot 10^8]$	13.6
8	$-2.3909788 \cdot 10^8$	$[-2.26664 \cdot 10^8, -2.23671 \cdot 10^8]$	18.2

se verá, se pueden comparar favorablemente con los invertidos a cargo de una versión de tipo Viramontes y Hamilton.



**Figura 12.5 :** Resultados de la optimización e intervalos de confianza, provenientes de la versión de Viramontes y Hamilton.

Tabla 12.VI. Resultados de mbbg e intervalos de confianza.

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )	T.cpu (seg.)
3	$-2.7062914 \cdot 10^8$	$[-2.45401 \cdot 10^8, -2.40759 \cdot 10^8]$	3.8
4	$-2.7069674 \cdot 10^8$	$[-2.45690 \cdot 10^8, -2.41519 \cdot 10^8]$	7.3
5	$-2.7306526 \cdot 10^8$	$[-2.48055 \cdot 10^8, -2.44017 \cdot 10^8]$	12.6
6	$-2.7438941 \cdot 10^8$	$[-2.46571 \cdot 10^8, -2.42796 \cdot 10^8]$	19.2
7	$-2.7568147 \cdot 10^8$	$[-2.48638 \cdot 10^8, -2.44882 \cdot 10^8]$	24.3
8	$-2.7650316 \cdot 10^8$	$[-2.49793 \cdot 10^8, -2.46068 \cdot 10^8]$	32.5

A pesar de la notable diferencia en la magnitud de los costes provenientes de una u otra evaluación, destaca principalmente en la Fig. 12.5 y en la tabla 12.VI que la

discrepancia entre  $\tilde{c}$  y el intervalo sea mayor que en el caso previo, estimando un error de aproximadamente un 10% en todos los casos. Este punto resulta interesante, pues hay que tener en cuenta que el modelo con la función objetivo (12.1) postula, al igual que el empleado en esta versión de Viramontes y Hamilton, la suposición de que la generación hidráulica (y la potencia) siguen una ley de probabilidad de bloques, cuyos parámetros son deducibles a partir de los de las variables de descarga y volumen, suposición que ya ha sido estudiada y de la que se sospecha que introduce una sobreestimación del coste probable de producción. Puesto que con la nueva función objetivo se ve que el error disminuye y, además, con mejores tiempos de ejecución, parece razonable afirmar que esta función supone una pequeña mejora dentro del campo de la optimización hidrotérmica.

En cuanto a la causa de la distinta magnitud de los óptimos según hayan sido calculados por una función o por otra, sorprende teniendo en cuenta que los parámetros de partida (los parámetros de carga y del sistema de generación) son los mismos. De todas maneras, el método de Viramontes puede confiar excesivamente en la capacidad hidráulica, a menos que se infravalore drásticamente ésta y se introduzca como dato de entrada un valor  $\bar{P}_h$  bastante menor que el real o, por lo menos, que el suministrado al método de la convolución de potencia hidráulica estocástica. De todas maneras, decidir cuánta debe ser esta reducción no es sencillo, y por el momento no se dispone de datos que puedan servir para aclarar la cuestión.

Un comentario más: se observa que los resultados procedentes de `mbgg` son más estables que los de `mcg1`, hecho palpable en la dispersión de los valores de  $\tilde{c}$ . Se desconocen los posibles motivos de este hecho, ya que se ha constatado que el método de generación de cuantiles para la estimación de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{B}$  no da lugar a distribuciones diferentes según  $K$  (por lo menos, en lo que respecta a las esperanzas de las variables de bloques), ni tampoco se aprecian diferencias en los valores de coste de producción derivados  $\varphi_m$ . Esto hace pensar que la razón se halla en la obtención de políticas óptimas más propicias cuando el número de bloques es más alto.

Los casos recogidos en la tabla 12.VII muestran los resultados obtenidos por el ejemplo si se empleara la función objetivo del programa `mbgk`, que no asume que la generación sea una distribución de bloques. La disminución de la función objetivo respecto la versión `mbgg` nos reafirma en la idea de que esta versión sobreestima el CPP, pero al colocarse entre ésta y la del modelo que se describe en estas páginas, surge la duda de si la función objetivo (12.1) subestima el coste de producción o si el método de Viramontes y Hamilton contiene un sesgo inherente que provoca la estimación incorrecta de los coeficientes  $\lambda$  que intervienen en 7.7. La respuesta a esta duda no ha encontrado cabida en este trabajo.

Tabla 12.VII. Resultados de `mbgk` (con  $\rho=1$ ).

$K$	$\tilde{c}$	Int. conf. ( $\alpha = 0.05$ )	T.cpu (seg.)
3	$-2.4579888 \cdot 10^8$	$[-2.48274 \cdot 10^8, -2.43636 \cdot 10^8]$	7.8
4	$-2.4762967 \cdot 10^8$	$[-2.45745 \cdot 10^8, -2.41572 \cdot 10^8]$	15.1
5	$-2.5017769 \cdot 10^8$	$[-2.48205 \cdot 10^8, -2.44279 \cdot 10^8]$	24.3
6	$-2.5168108 \cdot 10^8$	$[-2.48599 \cdot 10^8, -2.44716 \cdot 10^8]$	40.3
7	$-2.5318715 \cdot 10^8$	$[-2.50708 \cdot 10^8, -2.47058 \cdot 10^8]$	59.9
8	$-2.5400795 \cdot 10^8$	$[-2.49410 \cdot 10^8, -2.45685 \cdot 10^8]$	77.3

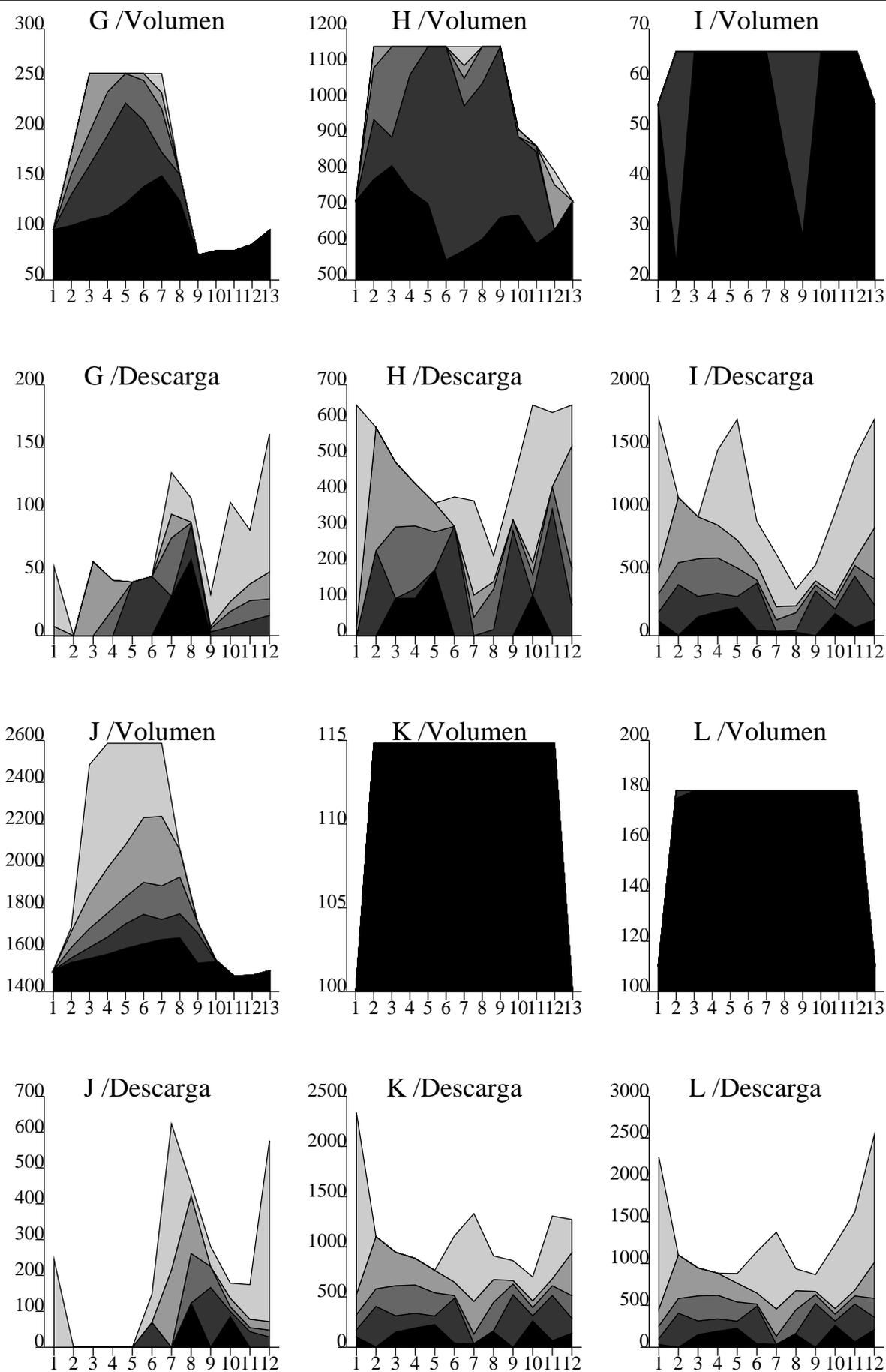


Figura 12.6 : Descargas y volúmenes del ejemplo con  $K=5$ . [ $\text{Hm}^3$ ]

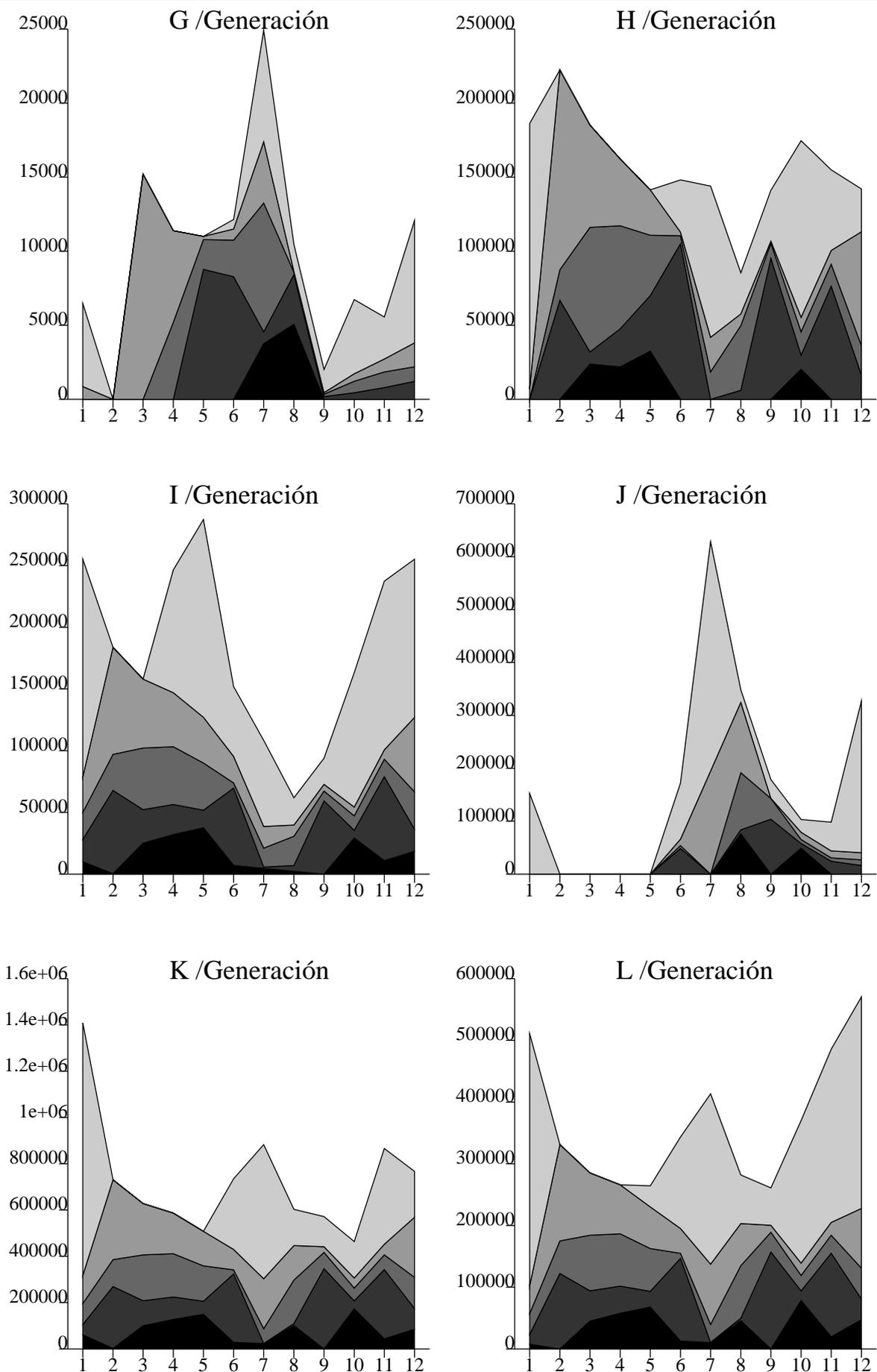


Figura 12.7 : Generación en el ejemplo con  $K=5$ . [MWh]

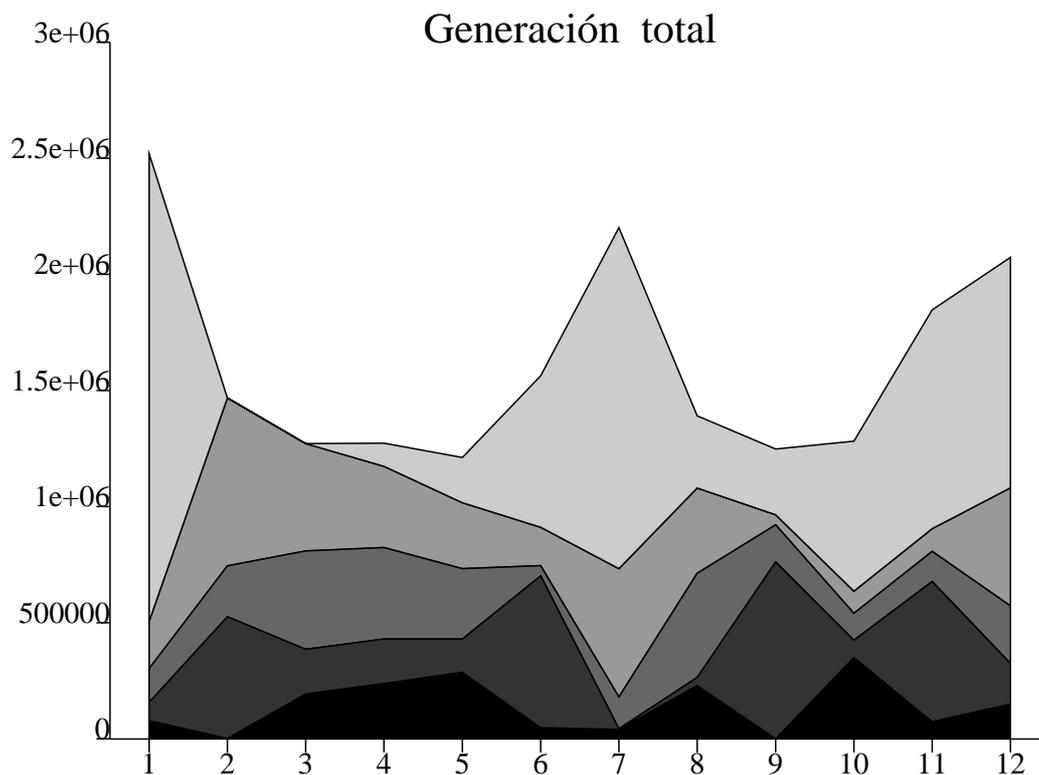


Figura 12.8 : Generación total del ejemplo con  $K=5$ . [MWh]

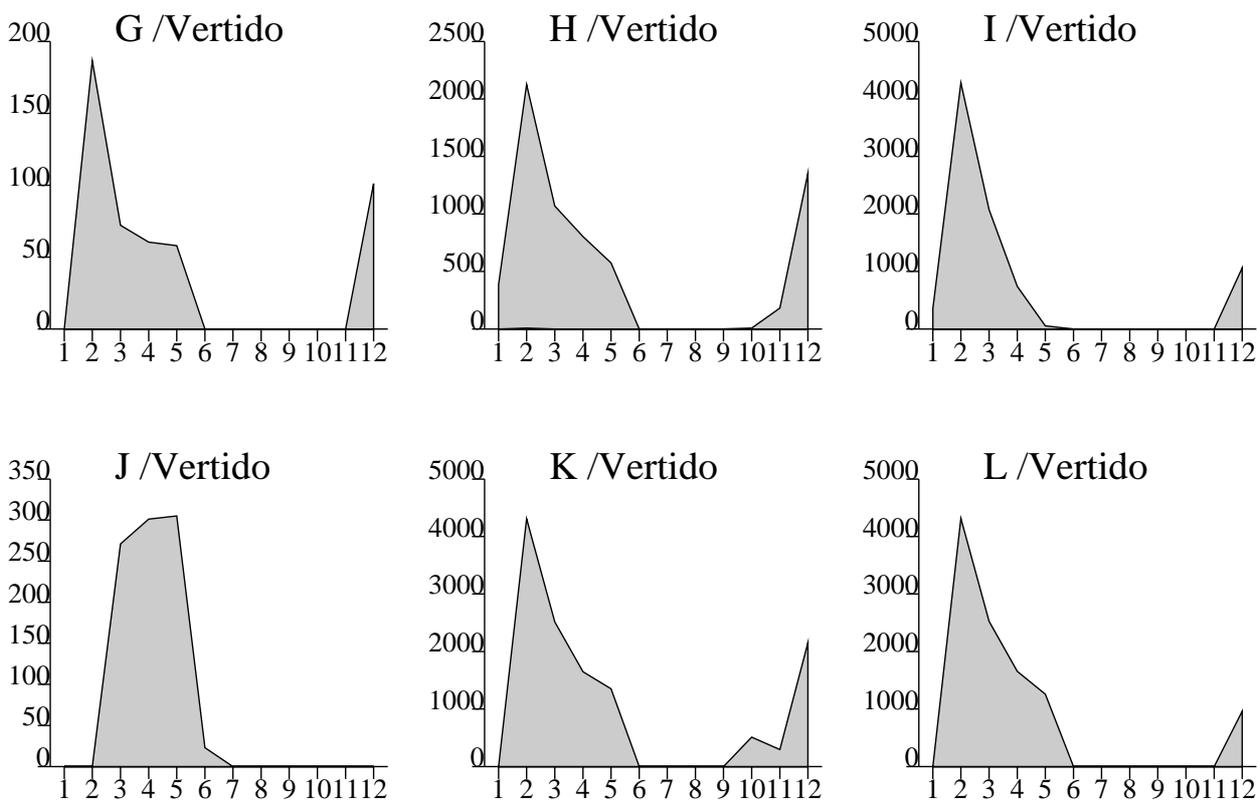
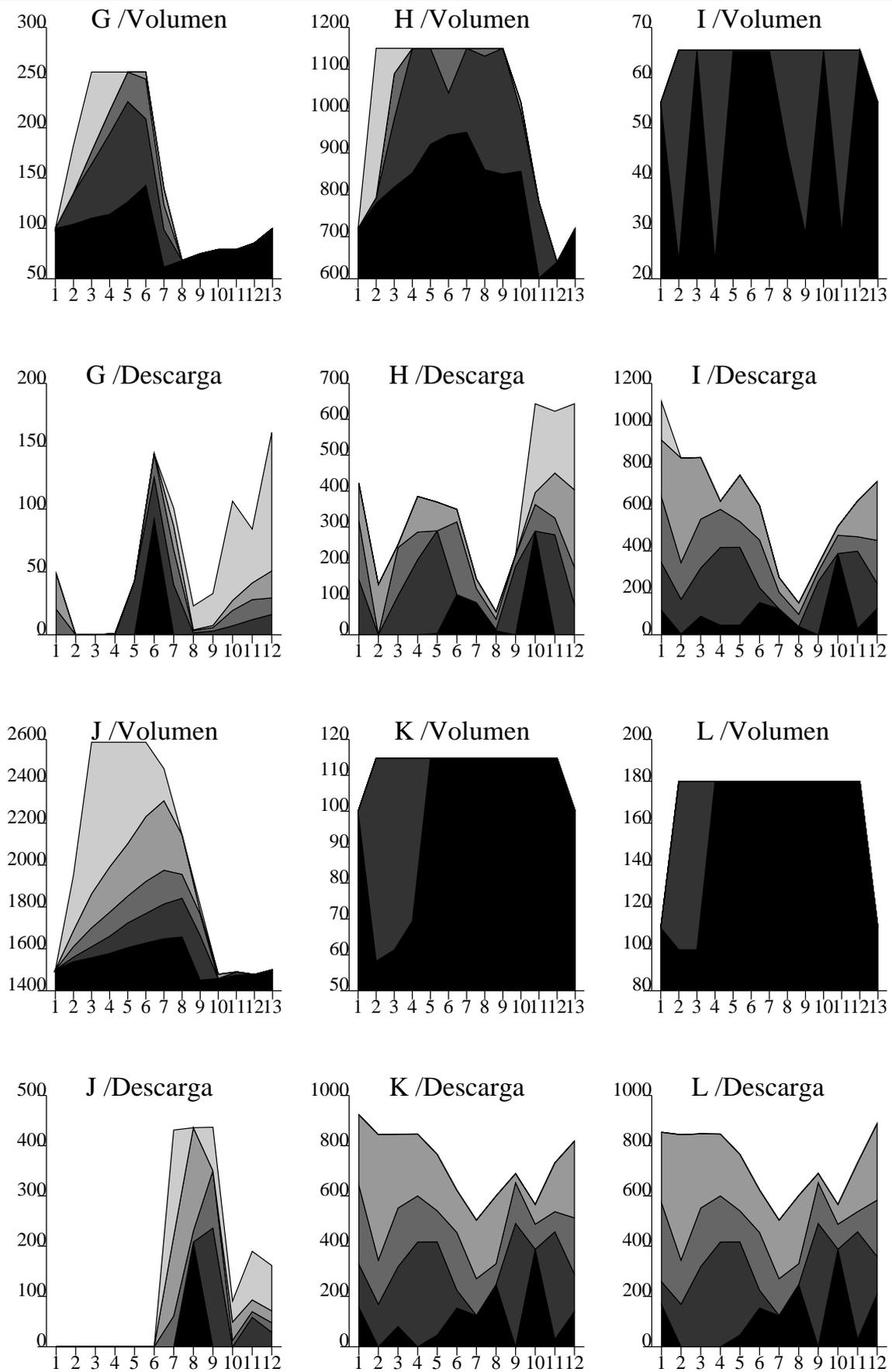
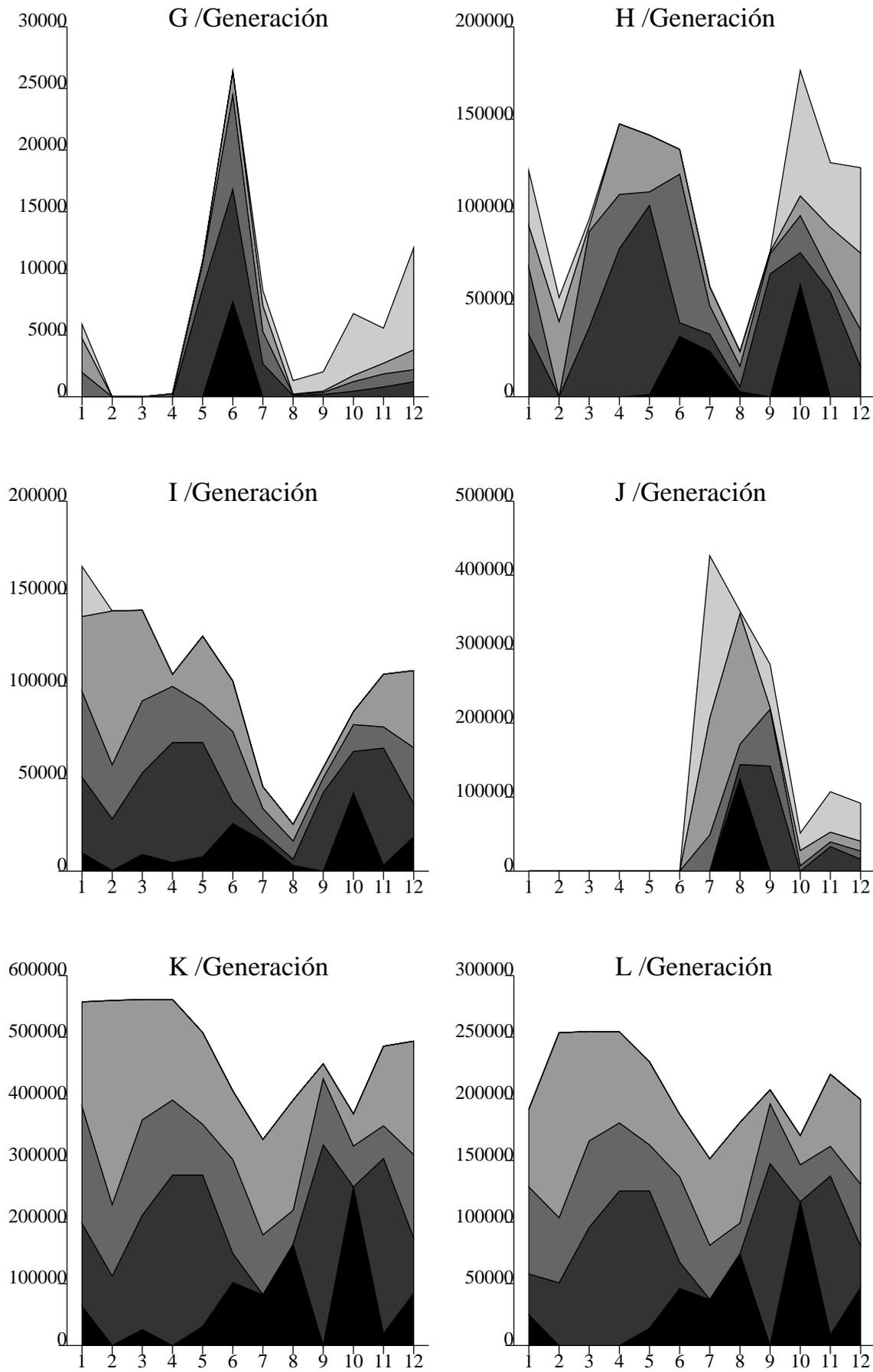


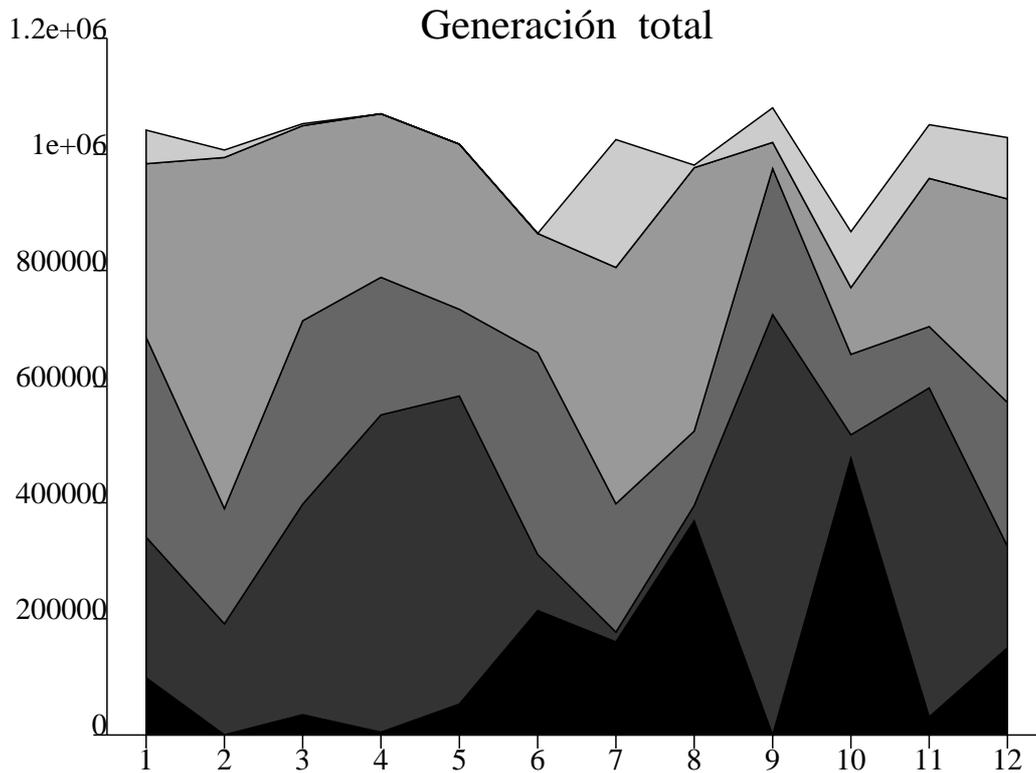
Figura 12.9 : Vertido en el ejemplo con  $K=5$ . [Hm³]



**Figura 12.10 :** Descargas y volúmenes del ejemplo con  $K=5$ . Se contemplan restricciones sobre la potencia hidráulica [ $\text{Hm}^3$ ].



**Figura 12.11 :** Generación en el ejemplo con  $K=5$ . (con restricciones en la potencia)  
[MWh]



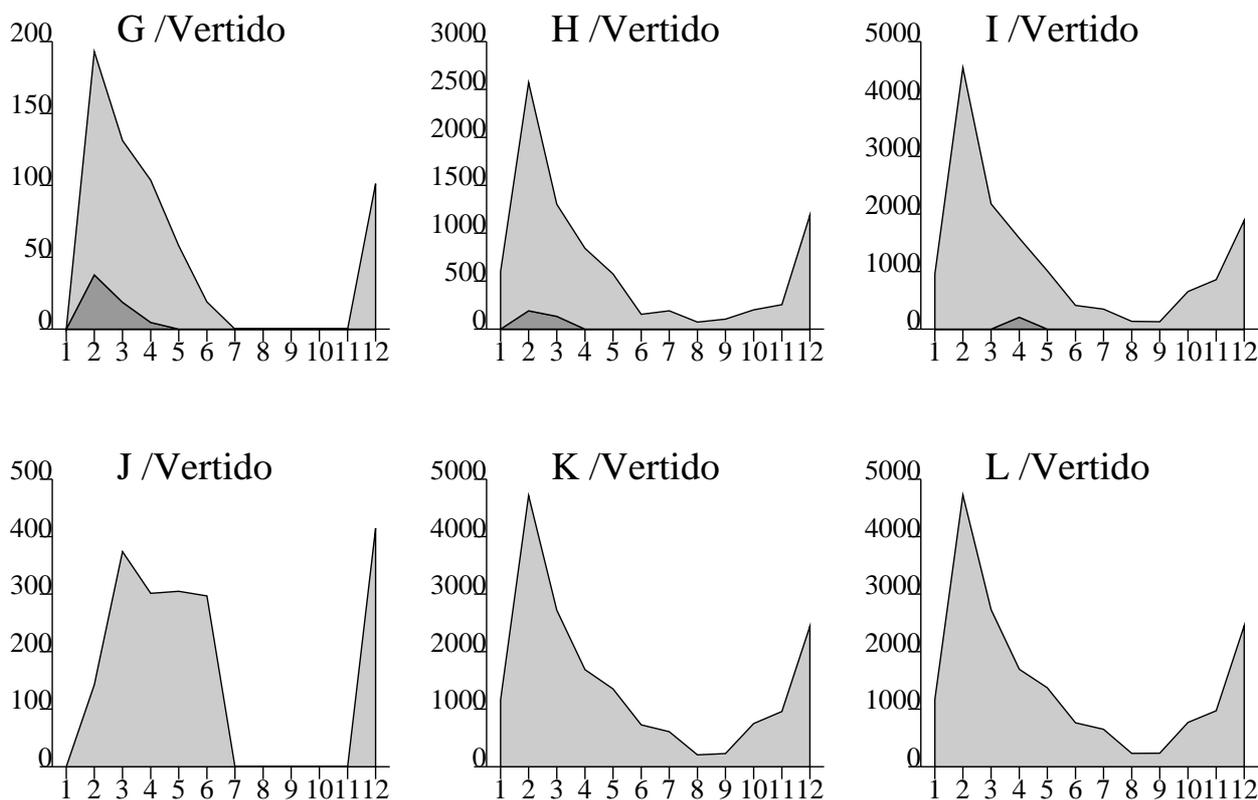
**Figura 12.12 :** Generación total del ejemplo con  $K=5$ . (con restricciones en la potencia) [MWh]

Parece conveniente, aparte de la información ya comentada, examinar el contenido de las soluciones, puesto que no podemos dejar de lado que se está intentando establecer un método para obtener una política de generación hidráulica lo más económica posible. El método que se explica en este capítulo, como los desarrollados previamente, tiene el nexo común en el uso de redes multiartículo para modelizar el flujo de agua de naturaleza indeterminista. Así pues, es del mayor interés exponer y comentar las políticas obtenidas.

Las Fig. 12.6, 12.7 y 12.8 muestran gráficamente la solución del problema formulado con 5 artículos. En la primera aparecen para cada arco la evolución de la descarga de agua por intervalos y artículos, y la evolución para cada embalse del agua almacenada. En la segunda se muestra para cada arco las distribuciones de la generación, mientras que la tercera figura es un gráfico que comprende la generación acumulada de todos los embalses.

La Fig. 12.9 representa el vertido determinado para cada embalse. Nótese especialmente que sólo figura en estas gráficas el artículo quinto, correspondiente a los niveles con menos probabilidad, y de manera considerable nada más que en algunos intervalos que vienen a ser los de la época del deshielo y la primavera, cuando se produce la mayor afluencia de aportaciones. La interpretación, pues, debería ser: se prevén vertidos en el caso de que las aportaciones alcanzaran volúmenes muy importantes, ya que la capacidad de los embalses no admitiría más agua. En otro orden de cosas, cabría preguntarse si los vertidos que aparecen no son excesivos, aunque el resultado mostrado depende casi exclusivamente de la confianza depositada en los datos históricos de aportación de los que se ha partido.

Como se aprecia, la solución opta por mantener los embalses tan llenos como sea posible, a fin de elevar su nivel y de esta manera favorecer con la ganancia de salto la

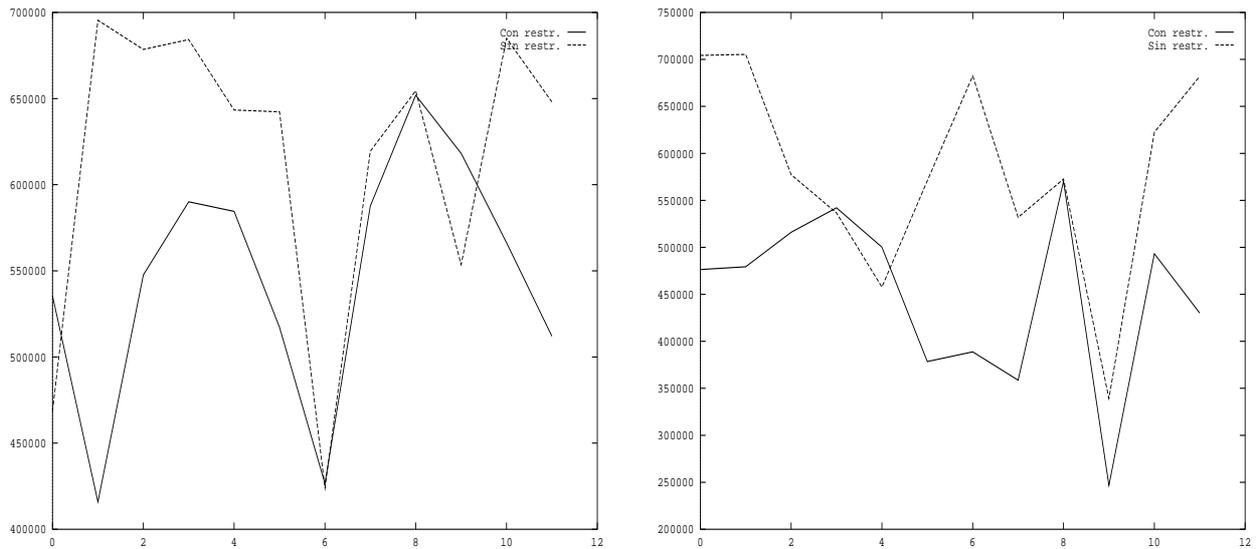


**Figura 12.13 :** Vertido en el ejemplo con  $K=5$ . (con restricciones en la potencia)  
[Hm<sup>3</sup>]

producción de electricidad. Los embalses más pequeños (I, K y L) siguen esta idea estrictamente, y aprovechan para descargar grandes volúmenes de agua. Los embalses de cabecera (G y J) mantienen un comportamiento diferente, pero similar entre sí: descargan lo mínimo a fin de aumentar rápidamente el volumen almacenado, para vaciarse aún más rápidamente en los meses de verano y, de paso mantener el nivel previsto para el final del periodo. El coste de producción estimado para esta política es de unos -230 millones de ECU.

El caso expuesto en las Fig. 12.10 a Fig. 12.13 ilustra acerca del efecto de la aplicación de restricciones de potencia. En esta ocasión, se mantiene la función objetivo, y se hace uso de la restricción (12.7) con el valor de 1500 MW como potencia máxima. En la solución óptima, todas las restricciones son activas. Como aparece claro en las gráficas que acompañan, la inclusión de estas restricciones (una por intervalo) modifica la política de forma sensible, aunque no drásticamente. El coste de producción ha aumentado hasta la cifra de -217.45 millones de ECU. Puede verse en la Fig. 12.12 que la suma de generaciones en cada intervalo se mantiene a raya a base de una presencia insignificante del quinto artículo, lo cual se ha conseguido moderando las descargas de agua correspondiente a este nivel. Este hecho ha repercutido en los vertidos, pero no de una manera importante: destaca la aparición de vertidos en los intervalos de verano, antes inexistentes.

De paso, podemos hacer notar que la inclusión de estas restricciones ha impedido la eventualidad de una generación excesiva, incluso mayor que la que la demanda necesita (una posibilidad real, según la solución para los intervalos 1, 7 ó 12). Dado que emplearemos una capacidad moderada, no haremos una demostración de la versión `mcg3`, la cual



**Figura 12.14 :** Comparación de la generación total con y sin restricciones. A la izquierda, gráfica de  $E[G^i]$ ; a la derecha, gráfica de  $\text{Var}[G^i]^{1/2}$ .

acotaría esta super generación a límites razonables.

La Fig. 12.14 ilustra acerca del cambio experimentado en los parámetros de la generación. Desciende la generación media —alrededor de un 10%—, y sobre todo descende la dispersión en la producción, reflejada en la desviación estándar —un 22%. Los vertidos han aumentado en todos los intervalos; el incremento, considerando el vertido esperado total, es de un 50% aproximadamente. Sin embargo, el descenso del coste es sólo del 5.5%.

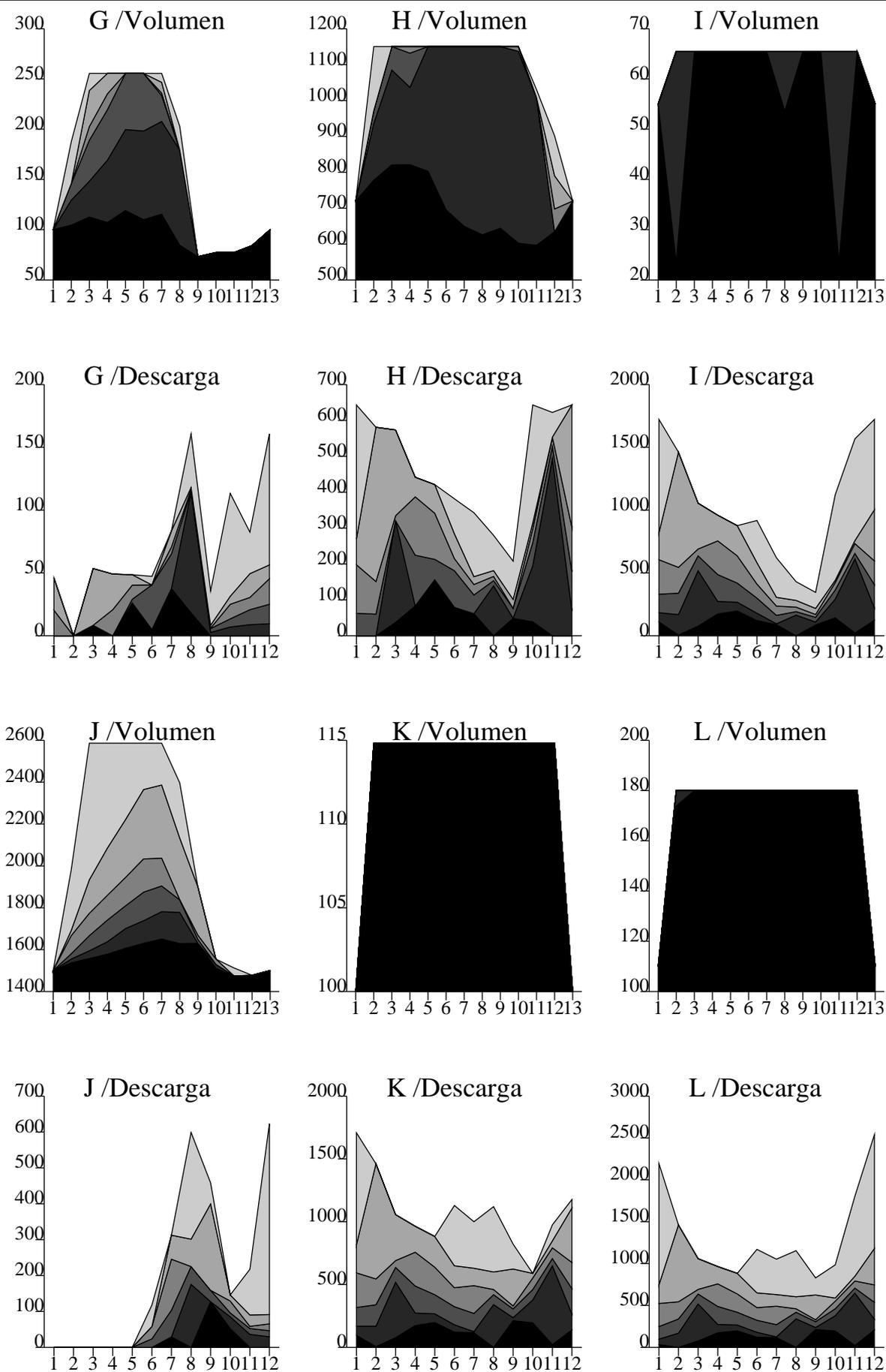


Figura 12.15 : Descargas y volúmenes del ejemplo con  $K=6$ . [ $\text{Hm}^3$ ]

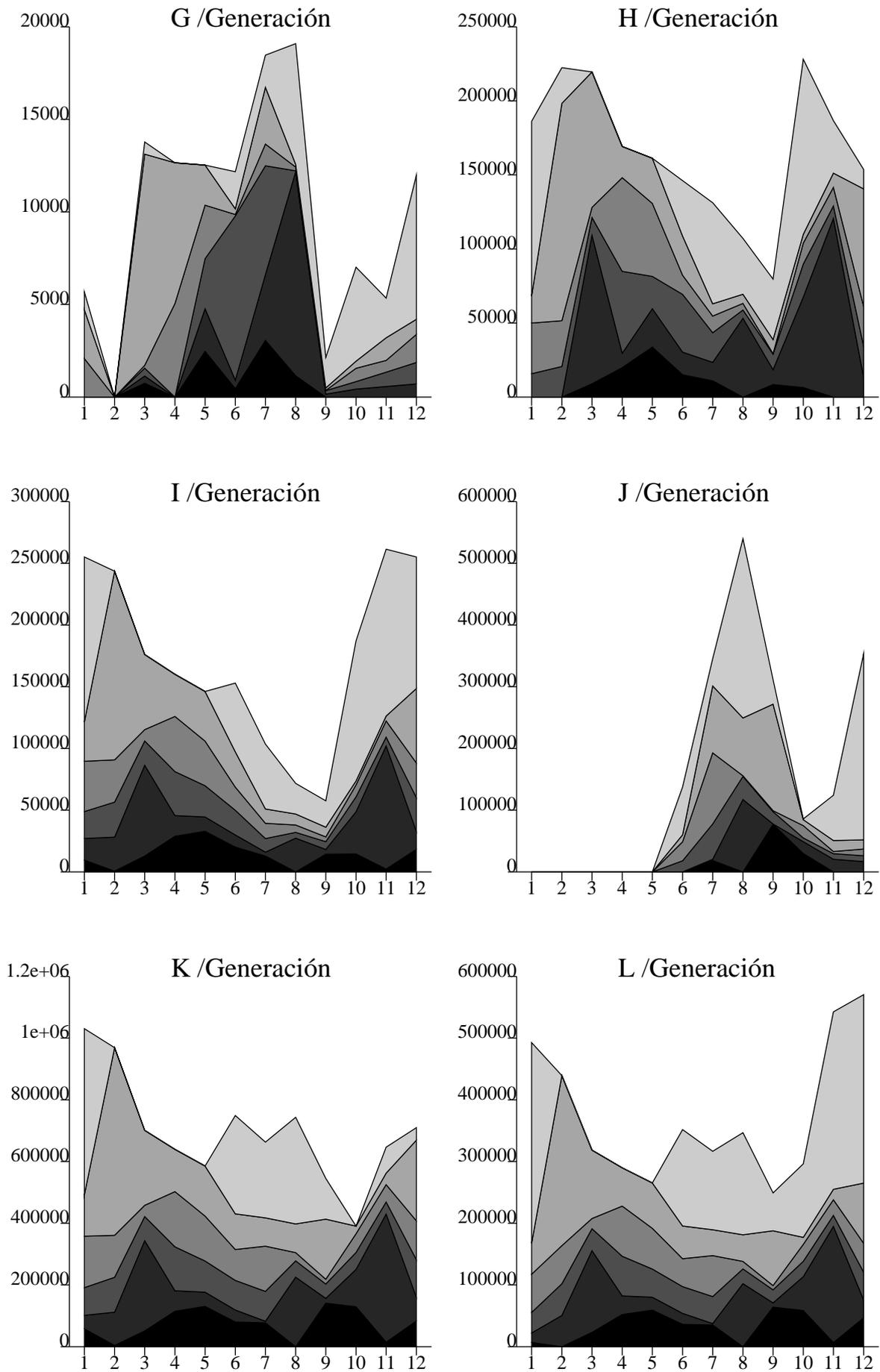
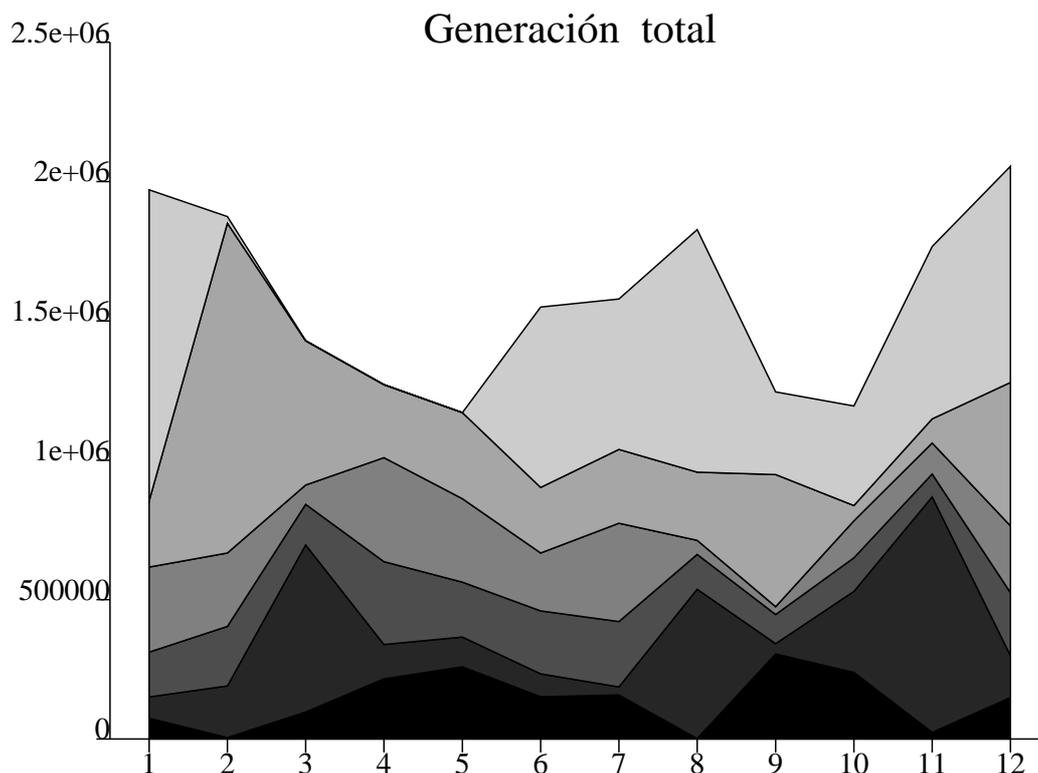


Figura 12.16 : Generación en el ejemplo con  $K=6$ . [MWh]



**Figura 12.17 :** Generación total del ejemplo con  $K=6$ . [MWh]

En cuanto a la salida de resultados plasmada en las Fig. 12.16 a 12.17, se refieren al caso base (sin restricciones de potencia) pero utilizando 6 artículos. Según se desprende del cálculo de la media de la generación total, ha habido un incremento de un 5% respecto al ejemplo previo, aunque el coste de esta política es de -233.5 millones de ECU, un 1.5% más que con  $K=5$ . Se puede resaltar especialmente de esta prueba que el perfil que ofrecen la evolución de volumen y descarga en cada embalse resulta semejante al anterior. El hecho de que el problema pueda ser resuelto con diferentes valores del parámetro  $K$ , y que las soluciones halladas sean similares y coherentes entre sí es una propiedad interesante que merece ser destacada.

Otras pruebas con valores de  $K$  entre 3 y 8 han sido llevadas a cabo. En todas ellas el coste  $\tilde{c}$  se reduce (en valor absoluto) una fracción semejante, a excepción del ejemplo con menor número de artículos, un número que demuestra no ser suficientemente robusto como para garantizar soluciones verosímiles. Los tiempos de ejecución han resultado similares. Es notable observar que, si se pretende relacionar el tiempo de ejecución necesario para encontrar el óptimo y  $K$ , los tiempos de ejecución se ajustan razonablemente bien respecto al cuadrado del número de artículos: los valores expuestos en la tabla 12.V corresponden aproximadamente a  $0.2855K^2$ , mientras que los de la tabla 12.VI —programa mbgg— devuelven  $0.506K^2$ .

Finalmente, para acabar con el método expuesto en este capítulo, se expone un par de ejemplos que ilustran las dificultades que todavía no están bien resueltas. En la estimación de los parámetros de la función objetivo existen, como se ha dicho con anterioridad, aspectos cuya modificación se traduce en una perturbación que afecta al resultado final. Estos aspectos intervienen ya que son parte integrante del método, pero no están bien precisados.

Por ejemplo, la capacidad hidráulica a emplear; se trata de un factor bien establecido en teoría, puesto que se conocen las características mecánicas de las instalaciones que permiten generar electricidad en los embalses. Sin embargo, saber cuál es el valor máximo no implica casi nada acerca de cómo se distribuye la potencia, de lo cual hacemos uso para estimar las matrices y vectores que aparecen en la función objetivo. Para demostrar esta influencia, se ha supuesto que el valor a adoptar para  $\bar{P}_h$ , en vez de ser 1500 MW, fuera de 2000 MW. La consecuencia ha sido que el coste se ha elevado a -238.5 millones de ECU (resultado para  $K=5$ ). A pesar de la aleatoriedad existente en la estimación de  $\mathbf{Q}^i$  y  $\mathbf{B}^i$ , no es posible una discrepancia semejante con la potencia anterior.

El segundo ejemplo parte en otra dirección, aunque mantiene el propósito de exhibir la necesidad de un uso dirigido por el buen sentido. Manteniendo la capacidad a 1500 MW, supóngase que en el algoritmo de generación de cuantiles de potencia fija el parámetro  $\overline{PH}$  a  $\bar{P}_h$ . Este simple cambio se va a traducir también en una función de CPP diferente, puesto que viene condicionada para ajustarse a distribuciones de potencia hidráulica de alto valor. En consecuencia, el nuevo coste esperado sería de -237.6 millones de ECU ( $K=5$ ).

De todas maneras, creemos que estos inconvenientes no suponen un menoscabo para el método, sino más bien el reconocimiento de que exigen un cierto grado de experiencia que permita ajustar sus posibilidades a la situación real que se desea modelizar.

## CAPÍTULO 13

### CONCLUSIÓN Y POSIBLES AMPLIACIONES

#### 13.1 Contribuciones del trabajo

Tras los pormenores del trabajo, descritos en los capítulos precedentes, se exponen seguidamente las ideas principales que el autor destacaría:

- se ha expuesto un completo estudio desde el punto de vista estadístico realizado sobre las distribuciones aleatorias de bloques en los capítulos 3 a 6; en el 4 se incluye una metodología para estimar variables de bloques a partir de una muestra procedente de una variable cualquiera. De hecho, estas variables podrían llegar a aproximar razonablemente bien un gran número de distribuciones, si se define un valor  $K$  suficientemente alto.
- en el capítulo 8 se ha determinado el cálculo de expresiones de la generación hidráulica esperada para la validación de la aproximación descrita en el cap. 7. La comparación posterior en el cap. 9 sobre casos concretos evidencia una cierta sobreestimación en el cálculo de la generación por parte de la versión inicial. Estas expresiones reducen el sesgo en la estimación de la generación hidráulica esperada, aunque son alternativas menos eficientes computacionalmente.
- en el capítulo 9 se explica un procedimiento que permite simular políticas de largo plazo aplicables a una cuenca hidráulica. El proceso genera valores de aportaciones naturales condicionadas entre sí, y permite verificar si la política obtenida mediante la minimización de una función de coste probable de producción genera costes aceptables. También se ha desarrollado una versión específica para la función de coste probable de producción que aparece en el cap. 12.
- el método multiartículo se extiende a un modelo de coordinación hidrotérmica a través de las técnicas específicas que se explican en el capítulo 10, mediante las que se integra la estocasticidad de la generación hidráulica con un parque térmico para cubrir conjuntamente la demanda de energía.
- se ha desarrollado un método en el capítulo 11 para hallar la distribución de la suma de una variable de bloques y otra cualquiera independiente de la primera por el procedimiento de la convolución, y aplicación del mismo a distribuciones de la potencia en fallo hidráulica con la carga del sistema. A partir del mismo se construye en el cap. 12 una nueva función de coste probable de producción que no depende, como las

anteriores, solamente de la esperanza de la generación hidráulica, sino de todos los cuantiles de la generación.

- se incluyen numerosas pruebas computacionales con una comparativa de resultados considerando la influencia que presenta el número de bloques con que son representadas las variables. Con las pruebas efectuadas no se ha determinado estrictamente cuál es el número óptimo de bloques a usar, aunque sí se puede afirmar que los valores por debajo de 5 no son aconsejables si no es como medio para obtener una rápida estimación. De todos modos, el incremento en el tiempo de ejecución que supone aumentar  $K$  no es desmesurado, ya que se ha visto que el tiempo de CPU utilizado para obtener el óptimo es  $O(K^2)$  (por ejemplo, pasar de 4 a 5 artículos viene a significar aproximadamente un incremento del 56%).

## 13.2 Líneas futuras de investigación

El trabajo realizado hasta este punto no puede considerarse completo, máxime cuando el tema todavía se encuentra en una fase de explotación inicial. Asimismo, diversas simplificaciones se han asumido en ciertos puntos con el objeto de facilitar el tratamiento, puntos que deben ser corregidos y mejorados en un futuro.

A continuación se explicitan posibles líneas de actuación inmediata.

- En algunos capítulos (9 y 12) se han mostrado resultados procedentes de la optimización y de la simulación de las respectivas políticas óptimas, y de la comparación subsiguiente se han observado notables diferencias, mayores o menores dependiendo del método seguido para evaluar la función objetivo. Es del mayor interés desarrollar algún tipo de corrección en la evaluación del coste esperado de modo que se produzca mayor coincidencia entre los valores teóricos y los simulados.
- En el modelo hidráulico no se ha prestado atención a la presencia de bombeo en algunos embalses. En ocasiones, el bombeo no se reduce a una actividad de ciclo diario, sino que tiene un ciclo mucho mayor. Por tanto, es susceptible de tratamiento, mediante arcos multiartículo. Está por ver si el enfoque de Viramontes y Hamilton es admisible y en qué condiciones. Las posibilidades serían: *i*) sustraer el consumo derivado del bombeo a la generación. *ii*) suponer unos coeficientes de incremento del coste que afectasen al bombeo esperado, operando paralelamente a los términos de la generación, es decir, tener una función objetivo parecida a:

$$\lambda_1 E[G] + \lambda_2 E[G^2] + \mu_1 E[B] + \mu_2 E[B^2]$$

donde  $B$  expresa bombeo, y  $\mu_1$  y  $\mu_2$  los coeficientes implicados. De todos modos, el bombeo plantea varios problemas, debido a las particularidades de su empleo. El bombeo siempre se ubica en las zonas valle de la curva de carga o, lo que es lo mismo, en la parte inmediatamente superior a la potencia base en la monótona de carga. Por razones económicas, la generación y el bombeo no se pueden solapar temporalmente; de aquí que ambas variables posean una relación estadística especial, cuya previsión es de obligado cumplimiento a la hora de valorar los costes consiguientes.

- La misma generación hidráulica y su ubicación en la monótona de generación es una cuestión abierta y no satisfactoriamente resuelta aún. Como está apuntado en el cap.

11, a causa de la dependencia parcial entre la potencia hidráulica y la carga, el procedimiento de convolución viene afectado por un cierto error sin cuantificar. La solución parece ser una consideración adicional, no limitada a la generación determinista, mediante la cual una parte de la generación —o la totalidad— se trataría por descrestado en la parte superior de la monótona. El mecanismo exacto está por establecer aunque sería deseable que el procedimiento considerase los paraámetros de la generación en su totalidad, y no solamente la generación esperada.

- En cuanto al modelo que se utiliza en el problema de coordinación hidrotérmica, existen bastantes mejoras que la experiencia sugiere incluir o modificar. Por ejemplo, el cálculo de la generación hidráulica esperada puede mejorarse sin asumir que la generación es una variable de bloques. El tratamiento de la generación hidráulica en la monótona de generación puede cambiar, de acuerdo con las ideas planteadas en el punto anterior, y también el procedimiento de obtención de las funciones que retornan la energía externa  $E_X$  y la máxima duración con pérdida de carga  $T_X$ .
- Otro punto de interés es el tratamiento conjunto de varias cuencas hidráulicas en el mismo problema. Esta situación se corresponde más bien con puntos con poca dependencia entre sí, que con la que describe a una sola cuenca, con puntos de generación muy dependientes, lo que favorece su adición en una super-unidad. La solución pasa por separar la generación de las diferentes cuencas; si bien, el coste esperado en cada cuenca puede sumarse, por la linealidad del operador  $E[\cdot]$ , habría que considerar con cierto cuidado los términos cuadráticos.



## APÉNDICE 1

### NOCIONES DE PROBABILIDAD Y VARIABLES ALEATORIAS

En este apéndice se introducen unas breves referencias a algunos de los conceptos básicos que se presentan en la teoría de la probabilidad y variables aleatorias. Una lectura que requiera mayor profundidad en estos temas puede acudir a cualquiera de los numerosos textos que abundan sobre estadística matemática, como por ejemplo [HOEL71], [LARS92] o [MARI90].

#### 1.1 Probabilidad

Supóngase que nos interesamos por una experiencia de la que no podemos predecir el resultado. Con tal de sistematizar este tipo de experiencias, se define:

1. El espacio muestral  $\Omega$ : el conjunto de todos los resultados posibles.
2. Acontecimiento, o suceso: cualquier subconjunto de  $\Omega$ . Sea  $\xi$  un conjunto de sucesos.
3. Probabilidad  $P$ : Una aplicación del conjunto de sucesos  $\xi$  al intervalo real  $[0, 1]$ .

$(\Omega, \xi, P)$  forman lo que se conoce como *espacio de probabilidad*. Es necesario que la probabilidad cumpla determinados axiomas con tal que el triplete mencionado constituya un espacio de probabilidad. No es, en cambio, necesario que el conjunto  $\xi$  esté compuesto por todos los sucesos posibles. Esto último se refiere especialmente al caso en que  $\Omega$  no es un conjunto numerable. Se entiende por numerable el conjunto cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia inyectiva con el conjunto de los números naturales. Si  $\Omega$  no cumple esta condición, entonces no se puede asignar un valor de probabilidad a cada subconjunto de  $\Omega$ . Por todo ello,  $\xi$  debe ser tal que verifique las hipótesis de una  $\sigma$ -álgebra. Consultar [HOEL71], [MARI90] por más detalles.

#### 1.2 Variables aleatorias. Indicadores de una variable

Una variable aleatoria es un concepto matemático para cuantificar una experiencia del azar, proporcionando la descripción sintética de la que adolece la descripción exhaustiva dada por  $\Omega$ . En concreto, una *variable aleatoria real* es una aplicación de los elementos de un espacio muestral en la recta real, cumpliendo algunas condiciones que pueden verse en [HOEL71].

Las variables aleatorias permiten concentrar la atención en los puntos primordiales, según la óptica de nuestras aplicaciones. Su naturaleza numérica facilita en gran manera el tratamiento de los aspectos estocásticos o, en ocasiones, simplemente permite abstraer la experiencia aleatoria para concentrarse en aspectos formales relativos a la propia variable.

Según sea  $\Omega$  numerable o no, se distinguen como tipos de variable aleatoria las *discretas* o las *continuas*, respectivamente. Para aquellas, en general,  $P(\{X = x\})$  es diferente de 0

(y debe leerse como "la probabilidad de que la variable  $X$  tome el valor  $x$ "). En cambio, para las variables continuas tales acontecimientos se definen con probabilidad 0, trabajando en base a los acontecimientos  $\{X \leq x\}$  (que significan: "el conjunto de resultados tales que aplicados a  $X$  se obtiene un resultado menor o igual que  $x$ ").

La función de variable real  $F_X(x)$  se llama *función de distribución* de la variable  $X$ , y equivale a  $P(\{X \leq x\})$ . La función de distribución es no decreciente y continua por la derecha, teniendo como límites hacia  $-\infty$  el valor 0 y hacia  $+\infty$  el valor 1. Limitándonos a las variables continuas, si  $F_X$  es absolutamente continua, excepto quizás en un conjunto de puntos numerable, entonces existe la función derivada de  $F_X$ ,  $f_X(x)$ , conocida como *función de densidad de  $X$* , y definida como:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}$$

Una de las propiedades más importantes de la función de densidad es la que prescribe que el área encerrada bajo la curva es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

La función de densidad  $f_X(x)$  no debe entenderse como probabilidad, aunque sí como la probabilidad infinitesimal en un entorno del valor  $x$  considerado. Igualmente sucede con el concepto de densidad en los cuerpos materiales: su significado no es el de "peso", a menos que no consideremos un cierto volumen. Con las variables aleatorias y con los cuerpos materiales carece de sentido el encontrar el "peso" de un punto. El concepto de densidad puntual resulta útil si queremos encontrar el centro de gravedad de ese cuerpo. También utilizamos la densidad para establecer la inercia del cuerpo cuando gira alrededor de su centro, y en estadística se tienen como ideas equivalentes las de *esperanza* y *variancia* de una variable  $X$ :

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

La esperanza es un indicador de tendencia central de una variable aleatoria; la variancia es un indicador de dispersión. En las mismas unidades que la variable se tiene también la *desviación tipo*,  $\sigma_X$ , definida como la raíz cuadrada de la variancia.

Para definir los *cuantiles*, utilizaremos la función de distribución. Se dice que  $q_\alpha$  es el cuantil de nivel  $\alpha$  si cumple que:

$$F_X(q_\alpha) = P(\{X \leq q_\alpha\}) = \alpha$$

### 1.3 Varias variables

El concepto de varias variables se asimila al de variable  $n$ -dimensional. Es decir, a la aplicación de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ , de manera que la variable  $X$  para cada resultado  $\omega$  toma valores

$(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ , donde cada una de  $X_i$  es una variable aleatoria real.

Considerar más de una variable a la vez tiene sentido cuando, por ejemplo, se considera una nueva variable aleatoria  $Z$  equivalente al producto de otras dos,  $X$  e  $Y$ . Llegar a conocer las características de la nueva variable  $Z$  supone algo más que conocer las de cada una de las de partida; también precisamos saber acerca de las relaciones existentes entre  $X$  e  $Y$ .

En el resto de este apéndice, vamos a emplear una notación que suponga que se está trabajando únicamente con dos variables, pongamos  $X$  e  $Y$ . Las ideas que se puedan suponer útiles para generalizar serán siempre fácilmente extensibles al caso de  $n$  variables, aunque de momento prime la comodidad.

En primer lugar, hay que definir la *función de distribución conjunta*. Sea:

$$F_{X,Y}(x, y) \equiv P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$

Si nos referimos a variables continuas, y si la función de distribución conjunta cumple la hipótesis de continuidad absoluta, podemos hablar de la *función de densidad conjunta*,  $f_{X,Y}(x, y)$ , que en este caso se trataría de una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ , de parecida interpretación que en el caso de una dimensión.

Las *funciones marginales* de  $X$  e  $Y$  se obtienen por integración de  $f_{X,Y}(x, y)$ :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx,$$

coincidiendo éstas con las respectivas funciones de densidad de  $X$  e  $Y$ . Es decir, con la información bidimensional tenemos suficiente para conocer lo que haga falta sobre nuestras variables, sea junta o separadamente. El recíproco no es cierto: no basta con saber la caracterización de cada una de las variables para conocer la conjunta. La excepción ocurre en caso de independencia entre  $X$  e  $Y$ : entonces y sólo entonces, la función de densidad conjunta es el producto de las marginales.

La *función de densidad de  $X$  condicionada por  $Y$*  es la que queda determinada para  $X$  cuando de alguna manera el valor de  $Y$  ha quedado fijado (y por tanto, ya no es aleatorio). Su definición es la que sigue:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Igualmente podríamos obrar con la distribución de  $Y$  condicionada por  $X$ . De aquí se desprende que si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces:

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$$

Por lo tanto, en caso de independencia, la distribución de una variable condicionada por la otra será igual a la distribución a priori de la primera (su marginal, si se quiere).

Un indicador muy utilizado para medir la relación lineal entre dos variables es la

covariancia:

$$\text{Cov}[X, Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

La covariancia se estandariza dividiendo por el producto de las desviaciones tipo de  $X$  e  $Y$ , dando lugar al *coeficiente de correlación lineal*:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

que toma valores entre  $-1$  y  $1$ . En el caso de que  $X$  e  $Y$  sean independientes,  $\rho$  valdrá  $0$ ; esto no tiene por qué cumplirse a la inversa, ya que el coeficiente de correlación lineal es capaz de medir exclusivamente relaciones de tipo lineal. También se cumplirá que si  $X$  e  $Y$  son tales que  $X = a + bY$ , siendo  $a$  y  $b$  escalares, entonces  $|\rho|$  valdrá  $1$ .

**BIBLIOGRAFÍA.**

- [ALLA81] Allan, R.N., et alter, *Discrete Convolution in Power System Reliability*, IEEE Trans. on Reliability, vol. R-30, n. 5, pp. 452-456, 1981.
- [ÁLVA94] Álvarez, M., et alter, *Network Planning under Uncertainty with an Application to Hydropower Generation*, Top, vol. 2, n. 1, pp. 25-58, 1994.
- [ANDE90] Anders, George J., *Probability Concepts in Electric Power Systems*, Wiley-Interscience. John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [ARBE93] Arbel, Ami, *Exploring Interior-Point Linear Programming: Algorithms and Software*, MIT Press, 1993.
- [BÉZ68] Bézier, Pierre, *Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques*, Automatisme, vol.12, n. 5, pp. 189-196, 1968.
- [BALÉ67] Balériaux, H., E. Jamouille, F. Linard, *Simulation de l'exploitation d'un parc de machines thermiques de production d'électricité couplé à des stations de pompage*, Revue E de la Soc. Royale Belge des Elect., 225-245, 1967.
- [BÖHM84] Böhm, W., G. Farin, J. Kahmann, *A survey of curve and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design, 1, pp. 1-60. Elsevier Science Publishers, North Holland, 1984.
- [BOOT72] Booth, R.R., *Power System Simulation Model Based on Probability Analysis*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-91, pp. 62-69, 1972.
- [BOTN94] Botnen, Olav J., A. Johannesen, *Coordinated utilization of hydropower and thermal resources for enhanced multinational power supply*, EFI Sintef Group, Report EFI TR A4107, Trondheim 1994.
- [BOXJ94] Box, G.E.P., G.M. Jenkins, G.C. Reinsel, *Time series analysis: Forecasting and control*, Ed. Prentice-Hall, 1994.
- [CHIL79] Childs, Lindsay, *A concrete Introduction to Linear Algebra*, UTM Springer Verlag, New York, 1979.
- [CAST94] Castro, Jordi, N. Nabona *An implementation of linear and nonlinear multicommodity network flows*, European Journal of Operational Research 92 (1996) pp. 37-53.
- [CONT90] Contaxis, G.C., S.D. Kavatza, *Hydrothermal Scheduling of a Multireservoir Power System with Stochastic Inflows*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 5, n. 3, pp. 766-773, 1990.
- [CRUZ95] da Cruz Jr., G., S. Soares, *Non-Parallel Composite Representation of Hydroelectric Systems for Long-Term Hydrothermal Scheduling*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 11, n. 2, pp. 702-707, 1996.
- [DEMB91] Dembo, Ron S., *Scenario Optimization*, Annals of Operations Research, vol. 30, ns, 1-4, pp. 63-80, 1991.

- [GORE92] Gorenstin, B.G., N.M. Campodonico, J.P. Costa, M.V.F. Pereira, *Stochastic optimization of a hydro-thermal system including network constraints*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 7, n. 2, pp. 791-797, 1992.
- [GULL91] Gulliver, J.S., R.E.A. Arndt, *Hydropower engineering handbook*, McGraw-Hill, Inc. New York, 1991.
- [HARW89] Routine Pa03AD, *Harwell Subroutine Library*, Harwell Laboratory, Oxfordshire U.K. OX11 0RA, 1989.
- [HOEL71] Hoel, Paul G., Sidney C. Port, Charles J. Stone., *Introduction to Probability Theory*, Houghton Mifflin Co. Boston, 1971.
- [HOPO71] Hoel, Paul G., Sidney C. Port, Charles J. Stone., *Introduction to Statistical Theory*, Houghton Mifflin Co. Boston, 1971.
- [JARA88] Jarabo, Francisco, et al., *El libro de las energías renovables*, S.A. de Publicaciones Técnicas, Madrid, 1988.
- [KENN80] Kennington, J.L., R.V. Helgason, *Algorithms for network programming*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.
- [LARS92] Larson, Harold J., *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística*, Ed. Limusa. México, 1992.
- [LAW91] Law, A.M., W.D. Kelton, *Simulation Modeling & Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1991.
- [MACE96] Maceira, M.E.P., M.V.F. Pereira, *Analytical Modeling of Chronological Reservoir Operation in Probabilistic Production Costing*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 11, n. 1, pp. 171-180, 1996.
- [MARI90] Marie, Raymond, *Probabilités Appliquées* IFSIC. Université de Rennes I, 1990.
- [McMU76] McMullan, J.T., R. Morgan, R.B. Murray, *Energy resources and Supply*, Wiley-Interscience. John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- [MINI92] Minitab, *MINITAB Reference Manual*, Minitab Inc. 3081 Enterprise Drive State College PA 16801-3008 USA, 1992.
- [MURT83] Murtagh, B.A., M.A. Saunders, *MINOS 5.0 User's Guide*, Dept. of Operations Research, Stanford University, CA 94305, USA, 1983.
- [NAB88] Nabona, Narcís, *Coordinació hidro-tèrmica en la generació d'electricitat per fluxos no lineals multiarticle en xarxes*, Qüestió, vol. 12, n. 3, pp. 357-397, 1988.
- [NAB93] Nabona, Narcís, *Multicommodity Network Flow Model for Long-Term Hydro-generation Optimization*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 8, n. 2, pp. 395-404, 1993.
- [NAB95] Nabona, N., J. Castro, J.A. González, *Optimum Long-Term Hydrothermal Coordination with Fuel Limits*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 10, n. 2, pp. 1054-1062, 1995.
- [NAG90] Numerical Algorithms Group, *NAG Fortran Library, Mark 14*, NAG Ltd. Oxford U.K. OX2 8DR, 1990.

- [ORIL93] Orille, Ángel Luis, *Cénetras Eléctricas*, Vol. I, Edicions UPC, Barcelona 1993.
- [PANG91] Pang, C.K., K. Lee, G. Tam, *Investigation on the treatment of generating unit outages in probabilistic production simulation*, 3rd International Conf. on Probabilistic Methods applied to Electric Power Systems, Conf. Proceedings n. 338, pp. 131-136, 1991.
- [PEN91] Ministerio de Industria, Comercio y Turismo, *Plan Energético Nacional 1991-2000*, Madrid, 1991
- [PÉRE96] Pérez Ruiz, J., A. Conejo, *Long-term Hydrothermal Coordination Model based on the equivalent load method*, 12th Power Systems Computation Conference, Proc. vol. I, pp. 369-374, Dresden, 1996.
- [QUEN56] Quenouille, M., *Notes on bias in estimation*, Biometrika 43, pp. 353-360, 1956.
- [RAAB85] Raabe, Joachim, *Hydro power. The design, use, and function of hydromechanical, hydraulic and electrical equipment*, Düsseldorf VDI-Verlag cop. 1985.
- [RAU80] Rau, N.S., P. Toy, K.F. Schenk, *Expected Energy Production Costs by the Method of Moments*, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-99, n. 5, pp. 1908-1917, 1980.
- [REE95] Red Eléctrica Española, *Informe sobre la explotación del sistema eléctrico nacional. 1994*, Ministerio de Industria y Energía, 1995
- [REZN91] Reznicek, K., T.C.E. Cheng, *Stochastic modelling of reservoir operation*, European Journal of Operational Research, vol. 50, n. 2, pp. 235-248, 1991.
- [RICE88] Rice, John A., *Mathematical Statistics and Data Analysis*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1988.
- [RØTT92] Røtting, T.A., A. Gjelsvik. *Stochastic Dual dynamic Programming for Seasonal Scheduling in the norwegian power system*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 7 n. 1, pp. 273-279, 1992.
- [SCOT92] Scott, David W., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*, Wiley-Interscience. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [SCUL92] Scully, A., et al., *Using a Semi-Guided Monte Carlo Method for Faster Simulation of Forced Outages of Generating Units*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 7, n. 3, pp. 1313-1322, 1992.
- [SHER85] Sherkat, V.R., R. Campo, K. Moslehi, E.O. Lo, *Stochastic long-term hydrothermal optimization for a multireservoir system*, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-104, pp. 2040-2050, 1985.
- [SING91] Singh, C., J.O. Kim, *A continuous probability distribution for generating capacity reliability evaluation*, 3rd International Conf. on Probabilistic Methods applied to Electric Power Systems, Conf. Proceedings n. 338, pp. 15-19, 1991.
- [STRE80] Stremel, J.P., R.T. Jenkins, R.A. Babb, W.D. Bayless, *Production Costing Using the Cumulant Method of Representing the Equivalent Load Curve*, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-99, n. 5, pp. 1947-1956, 1980.
- [TAYL83] Taylor, R.H., *Alternative energy sources for the centralised generation of electricity*, Adam Hilger Ltd, 1983.

- 
- [UNES88] Informe de UNESA, *Las mini-centrales hidroeléctricas en España*, Madrid, 1988.
- [VAND92] Vanderbei, R. J., *LOQO User's Manual*, Princeton University. Princeton NJ 08544, 1992.
- [VIRA78] Viramontes, F.A., H.B. Hamilton, *Optimal Long Range Hydro Scheduling in the Integrated Power System*, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-97, n. 1, pp. 292-299, 1978.
- [WANG94] Wang, X., J.R. McDonald, *Modern Power System Planning*, McGraw-Hill Book Co., London, 1994.
- [WOLF91] Wolfram, S., *Mathematica, a system for doing mathematics by computer*, Addison Wesley, 1991.
- [WOOD84] Wood, A.J., B.F. Wollenberg *Power Generation, Operation and Control*, John Wiley & Sons, NY, USA. 1984.