

CAPITULO 2:

DISEÑOS ROBUSTOS FRENTE AL RUIDO EXTERNO

2. DISEÑO DE PRODUCTOS ROBUSTOS FRENTE AL RUIDO EXTERNO.

2.0 Planteamiento del problema. Plan de trabajo propuesto.

Se entiende por ruido externo la variabilidad que presentan ciertas características de calidad de los productos debida a la fluctuación en los valores que toman algunos factores (factores de ruido) que afectan a la respuesta y que es imposible mantener fijos.

Ejemplos típicos de factores de ruido externo son las condiciones ambientales: temperatura, humedad, presión atmosférica ..., cuando los valores que toman estas variables influyen en alguna de las prestaciones del producto obtenido.

El problema que se plantea es, por tanto, identificar el conjunto de valores de los factores de diseño (factores que sí son controlables) que combinan un nivel de respuesta lo más cercano al óptimo y con la mínima variabilidad.

Para ello, la metodología que se propone se basa en las siguientes fases:

1. Establecer una hipótesis sobre el modelo de la respuesta.
2. Estimar los parámetros del modelo mediante la realización de diseños factoriales a 2 niveles. Si el modelo es cuadrático se deberá realizar un diseño central compuesto.
3. Analizar el modelo obtenido calculando las expresiones de la varianza y la esperanza matemática de la respuesta.
4. Con ayuda de una hoja de cálculo para ordenador personal, calcular la esperanza matemática y la varianza de la respuesta para un gran conjunto de combinaciones de valores de los factores de diseño. Con ayuda de la misma hoja de cálculo realizar un diagrama bivariante de la distancia al óptimo frente a la varianza de la respuesta. Finalmente, a partir de este gráfico, elegir la combinación óptima de valores para los factores de diseño.

En el presente capítulo se describen de forma detallada cada una de estas etapas.

2.1 Hipótesis sobre el modelo de la respuesta.

En primer lugar deberá establecerse una hipótesis sobre el modelo de la respuesta.

En general, si los factores de diseño no están afectados de ruido interno¹, podrá plantearse un modelo lineal del tipo:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \beta_{ik} X_i X_k + \sum_{j=1}^m \gamma_j Z_j + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^m \gamma_{jl} Z_j Z_l + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} X_i Z_j + \epsilon$$

En el que:

- y = Respuesta
- x_i = Factores de diseño (controlables)
- Z_j = Factores de ruido (no controlables)
- ϵ = Parte no explicada por el modelo

Por tanto, podemos considerar que en la respuesta influyen dos tipos de factores:

1. Los **factores controlables** o **factores de diseño**, que pueden ser fijados en el nivel deseado y que, por tanto, no introducen ningún tipo de variabilidad.
2. Los **factores no controlables** o **factores de ruido** que no pueden ser fijados, comportándose como variables aleatorias con una determinada distribución de probabilidad.

Los factores no controlables introducen una variabilidad en la respuesta que siempre interesará minimizar.

2.2 Estimación de los parámetros del modelo.

Los parámetros del modelo pueden estimarse mediante la realización de diseños factoriales.

La matriz de diseño a utilizar es una sola, pero puede ser más cómodo deducirla considerando por separado los factores de diseño y los factores de ruido construyendo sus correspondientes matrices por separado, unificándolas después.

Así, si se tienen 6 factores de diseño (A, B, C, D, E, F) y 3 factores de ruido (O, P,

¹Si fuera así, sería necesario plantear un modelo cuadrático, tal como se verá en el capítulo 3.

Q), puede plantearse un diseño 2^{6-2} para los factores de diseño con los generadores:

$$\begin{aligned} E &= ABC \\ F &= BCD \end{aligned}$$

Y un diseño 2^{3-1} para los factores de ruido, con el generador:

$$Q = OP$$

El diseño conjunto, con cuya matriz se realizará la experimentación, será un 2^{9-3} con los mismos generadores que para los diseños separados, y con una relación de definición:

$$\begin{aligned} I &= ABCE = BCDF = ADEF = OPQ = \\ &= ABCEOPQ = BCDFOPQ = ADEFOPQ \end{aligned}$$

a partir de la cual se puede calcular la estructura de alias del diseño completo.

En general, se deberá seguir una estrategia de experimentación secuencial en la que el tipo de diseño y la selección de los generadores se realice de acuerdo con los conocimientos de que se vaya disponiendo sobre el comportamiento de la respuesta.

Por otra parte, tal como puede deducirse en los apartados que se exponen a continuación, no siempre es necesario estimar todos los parámetros del modelo. Así, si sólo interesa encontrar la combinación de factores que produce la mínima varianza de la respuesta sólo se deberán estimar los parámetros γ_j y δ_{ij} tal como queda de manifiesto en el siguiente apartado.

2.3 Análisis del modelo.

2.3.1 Varianza de la Respuesta.

Minimizar la variabilidad de la respuesta equivale a minimizar la varianza de y , es decir, minimizar la expresión:

$$V(y) = \sum_{j=1}^m \left(\gamma_j + \sum_{i=1}^n \delta_{ij} X_i \right)^2 V(z_j) + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^m \gamma_{jl}^2 V(z_j z_l) + V(\epsilon)$$

Considerando que ϵ es independiente de cualquier factor, que todos los factores que

se incluyen en el modelo han sido previamente codificados entre los valores -1 y 1, y realizando la hipótesis de que los factores no controlables se distribuyen según una distribución uniforme en dicho intervalo, se tiene que:

$$f(z_j) = 0.5 \quad \text{si } -1 \leq z_j \leq 1$$

$$f(z_j) = 0 \quad \text{si } z_j > 1 \text{ ó } z_j < -1 \quad \forall j$$

Y puede comprobarse fácilmente que:

$$E(z_j) = 0$$

y como:

$$V(z_j) = E(z_j^2) - [E(z_j)]^2$$

tenemos:

$$V(z) = E(z^2) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} z^2 dz = \frac{1}{3}$$

Por otra parte:

$$V(z_j z_1) = E(z_j^2 z_1^2) - [E(z_j z_1)]^2$$

y aceptando que los factores de ruido son independientes entre sí:

$$[E(z_j z_1)]^2 = [E(z_j) E(z_1)]^2$$

$$= 0$$

además, bajo la misma hipótesis de independencia:

$$E(z_j^2 z_1^2) = E(z_j^2) E(z_1^2)$$

y como:

$$E(z_j^2) = \frac{1}{3} \quad \forall j$$

nos queda:

$$V(z_j z_l) = \frac{1}{9}$$

Por tanto, la combinación de valores de x_i que minimiza la varianza de y será aquella que minimice la expresión²:

$$V(y) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \left(\gamma_j + \sum_{i=1}^n \delta_{ij} x_i \right)^2 + \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^m \gamma_{jl}^2 + V(\epsilon) \quad [2.1]$$

Ejemplo 1: Sea el modelo:

$$y = 11 + 2x - 1.5z + 3xz$$

En este caso deberemos minimizar la expresión:

$$V(y) = (-1.5 + 3x)^2 V(z)$$

Obteniéndose que el valor de x que minimiza $V(y)$ es

$$x = 0.5$$

La figura 2.1a refleja la forma de la superficie de respuesta $y = f(x,z)$ y en la figura 2.1 b se pone de manifiesto que para $x = 0.5$ el valor de y permanece constante independientemente del valor de z .

²Se podría haber deducido una expresión similar para cualquier otra distribución de los factores de ruido, codificados o sin codificar.

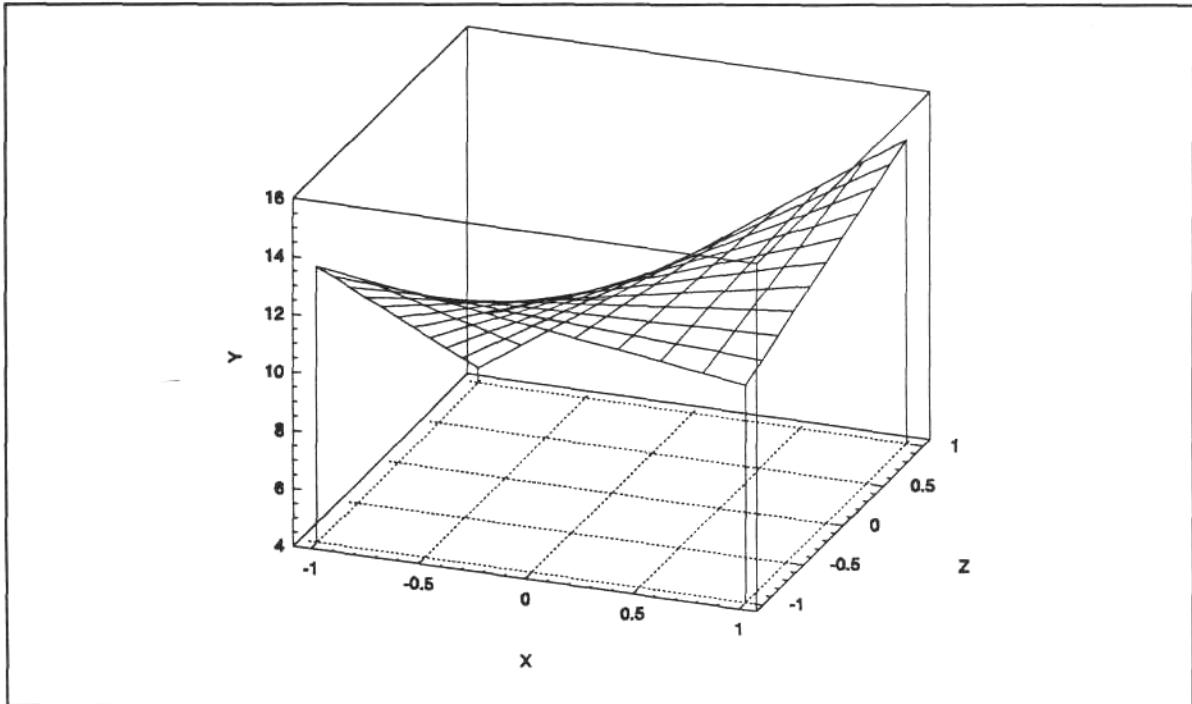


Figura 2.1a: Superficie de respuesta correspondiente al modelo $y = 11 + 2x - 1.5z + 3xz$.

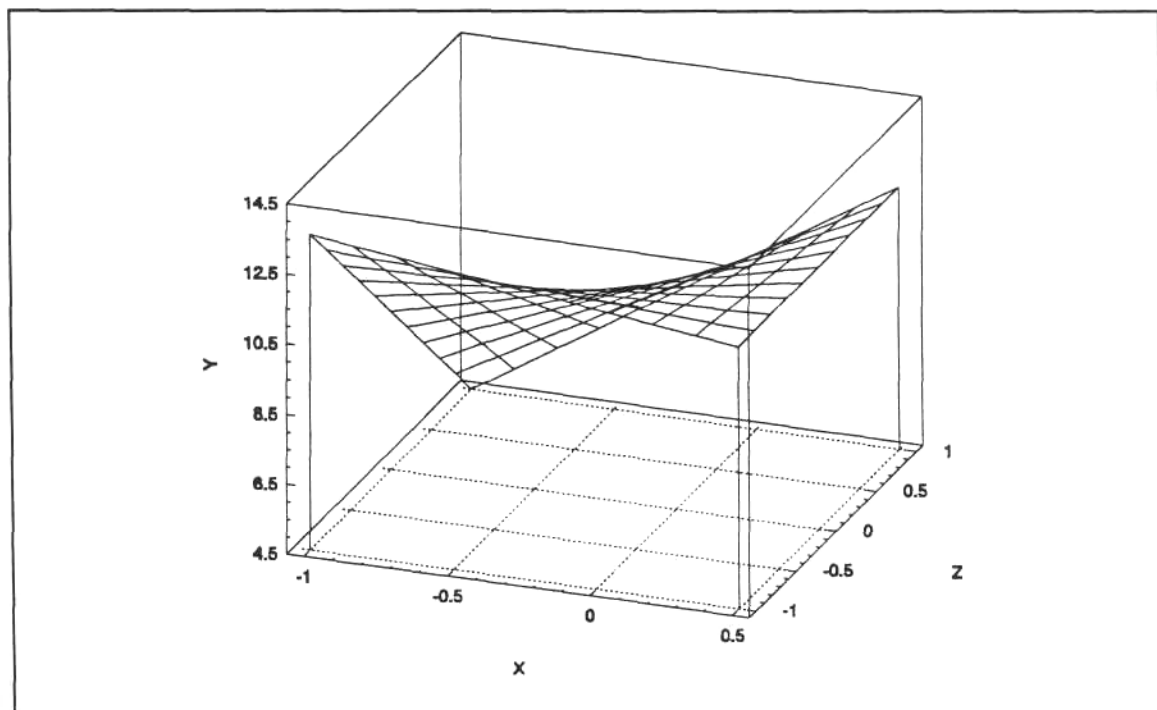


Figura 2.1b: Porción de la superficie de respuesta anterior. Obsérvese como para $x = 0.5$, la respuesta es constante.

Ejemplo 2: Sea el modelo:

$$y = 15 + 3.5x_1 + 2x_2 + z_1 - 2z_2 + 3x_1x_2 + 3z_1z_2 - x_1z_1 + 0.5x_1z_2 + x_2z_1 + 2.5x_2z_2$$

En este caso deberemos minimizar:

$$\begin{aligned} V(y) &= (1 - x_1 + x_2)^2 V(z_1) + (-2 + 0.5x_1 + 2.5x_2)^2 V(z_2) + 9V(z_1z_2) \\ &= \frac{1}{3}[(1 - x_1 + x_2)^2 + (-2 + 0.5x_1 + 2.5x_2)^2] + 1 \end{aligned}$$

Para lo cual hacemos:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

y resulta que los valores de x_1, x_2 que minimizan $V(y)$ se obtienen al resolver:

$$\begin{cases} -\frac{4}{3} + \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 0 \\ -\frac{8}{3} + x_1 + \frac{29}{6}x_2 = 0 \end{cases}$$

llegando a:

$$x_1 = 1.55$$

$$x_2 = 0.23$$

Por tanto, con el planteamiento realizado, estos serán los valores óptimos de x_1, x_2 ya que cualquier otro par de valores producirá una mayor variabilidad en la respuesta y .

2.3.2 Esperanza matemática de la respuesta y distancia al óptimo.

En los ejemplos anteriores se han determinado los valores de los factores controlables que minimizan la variabilidad de la respuesta, pero sin atender a cual es el valor promedio de esta respuesta.

Sin embargo, la respuesta tendrá un valor óptimo (al que llamaremos τ), e interesará minimizar también la distancia entre el valor promedio de la respuesta y dicho valor óptimo.

Por tanto, nos interesará minimizar la expresión:

$$D(\tau) = \tau - E(y)$$

Siendo:

$$E(y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \beta_{ik} X_i X_k$$

ya que:

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$E(z_j) = 0$$

y, en particular:

$$E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} X_i Z_j\right) = 0$$

Por tanto, el valor a minimizar será:

$$D(\tau) = \tau - \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \beta_{ik} X_i X_k \quad [2.2]$$

Ejemplo 3: Sea el sencillo modelo, ya planteado en el ejemplo 1:

$$y = 11 + 2x - 1.5z + 3xz$$

Si deseamos minimizar la distancia entre el valor promedio de la respuesta y su valor óptimo, considerando que este último es $\tau = 10$, deberemos encontrar el valor de x que minimice (en valor absoluto) la expresión:

$$D(\tau) = 10 - 11 - 2x$$

Y en este caso se comprueba fácilmente que el valor óptimo de x es -0.5 , ya que así se obtiene $D(\tau) = 0$.

2.4 Elección de los niveles óptimos de los factores de diseño: El gráfico Distancia-Variación

Tal como se ha visto en los ejemplos 1 y 3, el valor que minimiza la variabilidad de la respuesta es distinto del que minimiza su distancia al óptimo.

No existe una regla general que permita seleccionar el valor óptimo de x , ya que en algunos casos convendrá minimizar la variabilidad de la respuesta aun a pesar de una distancia importante respecto al objetivo y , en otros, el interés puede resultar justamente al contrario.

Ciñéndonos al modelo utilizado en los ejemplos 1 y 3, una forma de seleccionar el valor de x que produce un comportamiento de la respuesta más acorde con nuestras necesidades, consiste en utilizar una hoja de cálculo para ordenador personal, de la siguiente forma:

- * En la columna A se colocan los valores de x , de -1 a 1 , con incrementos de 0.1 (este incremento podría ser menor).
- * En la columna B se calcula la varianza de la respuesta para cada valor de x , mediante la fórmula [2.1].

- * En la columna C se calcula la distancia al óptimo, mediante la fórmula [2.2].

En la tabla 2.1, se presenta la hoja de cálculo construida. Los parámetros del modelo y valor óptimo de la respuesta (τ) se han colocado en la columna G de forma que al variar cualquiera de estos valores se recalculan automáticamente los de Var(y) y distancia al óptimo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Var(Y)	Dist.					
2	-1	6.75	1			cte	11	
3	-0.9	5.88	0.8			x	2	
4	-0.8	5.07	0.6			z	-1.5	
5	-0.7	4.32	0.4			xz	3	
6	-0.6	3.63	0.2					
7	-0.5	3	0			tau	10	
8	-0.4	2.43	-0.2					
9	-0.3	1.92	-0.4					
10	-0.2	1.47	-0.6					
11	-0.1	1.08	-0.8					
12	0	0.75	-1					
13	0.1	0.48	-1.2					
14	0.2	0.27	-1.4					
15	0.3	0.12	3.4					
16	0.4	0.03	3.2					
17	0.5	0	3					
18	0.6	0.03	2.8					
19	0.7	0.12	2.6					
20	0.8	0.27	2.4					
21	0.9	0.48	2.2					
22	1	0.75	2					

Tabla 2.1: Hoja de cálculo en que se obtienen los valores de la varianza y distancia al óptimo de la respuesta, para el modelo de los ejemplos 1 y 3.

A partir de esta hoja puede construirse un diagrama bivalente de la distancia frente a la varianza como el de la figura 2.2 en el que cada punto corresponde a un valor de x.

Mediante este diagrama puede observarse que existe un valor de x que da varianza nula aunque con una distancia igual a 2, y otro valor que da distancia nula pero con una varianza igual a 3.

De hecho, el diagrama presenta toda la información necesaria, relativa a la distancia

al óptimo y la varianza de la respuesta, para seleccionar el punto que representa los valores de los factores de diseño que mejor se adaptan a los objetivos del diseñador.

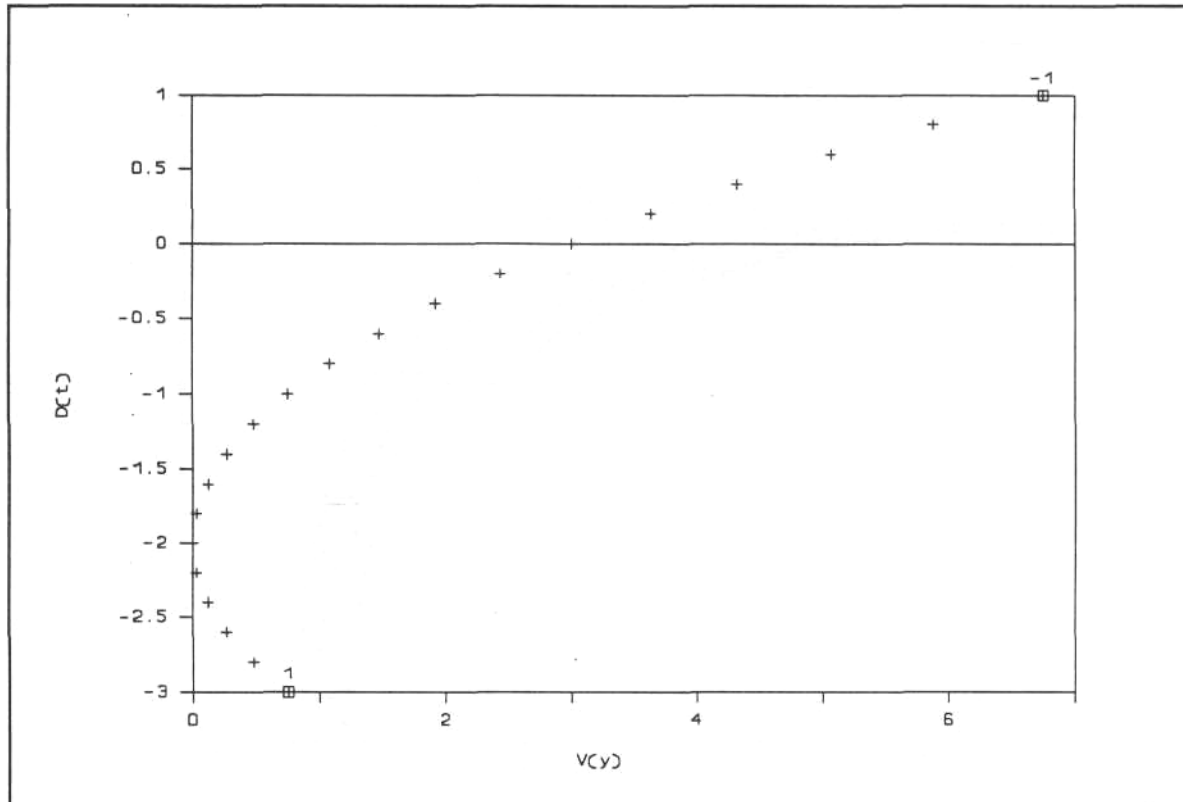


Figura 2.2: Diagrama Distancia-Variancia correspondiente al modelo del ejemplo 1.

La identificación de qué valor de x corresponde a cada punto no entraña ninguna dificultad. En este caso puede hacerse contando a partir de los extremos de la curva que corresponden a los valores 1 y -1. En otros casos se pueden identificar a través de sus coordenadas o construyendo el diagrama mediante un paquete de software tipo 'STATGRAPHICS' que permiten identificar cualquier característica de un punto colocando el cursor sobre el mismo.

Además, este tipo de gráfico puede usarse para cualquier número de factores de diseño y de factores de ruido. Así, para el modelo utilizado en el ejemplo 2, como se tienen dos factores de diseño, cada uno se mueve de -1 a 1 con incrementos de 0.1, obteniéndose un total de $21 \times 21 = 441$ combinaciones, para cada una de las cuales puede calcularse la varianza de la respuesta y su distancia al óptimo mediante una hoja de cálculo similar a la que figura en la tabla 2.1.

El diagrama Distancia-Varianza que se obtiene en este caso, tomando un valor óptimo de la respuesta $\tau = 24$ es el que se indica en la figura 2.3. El punto que corresponde a la variancia mínima es el que representa los valores: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.5$.

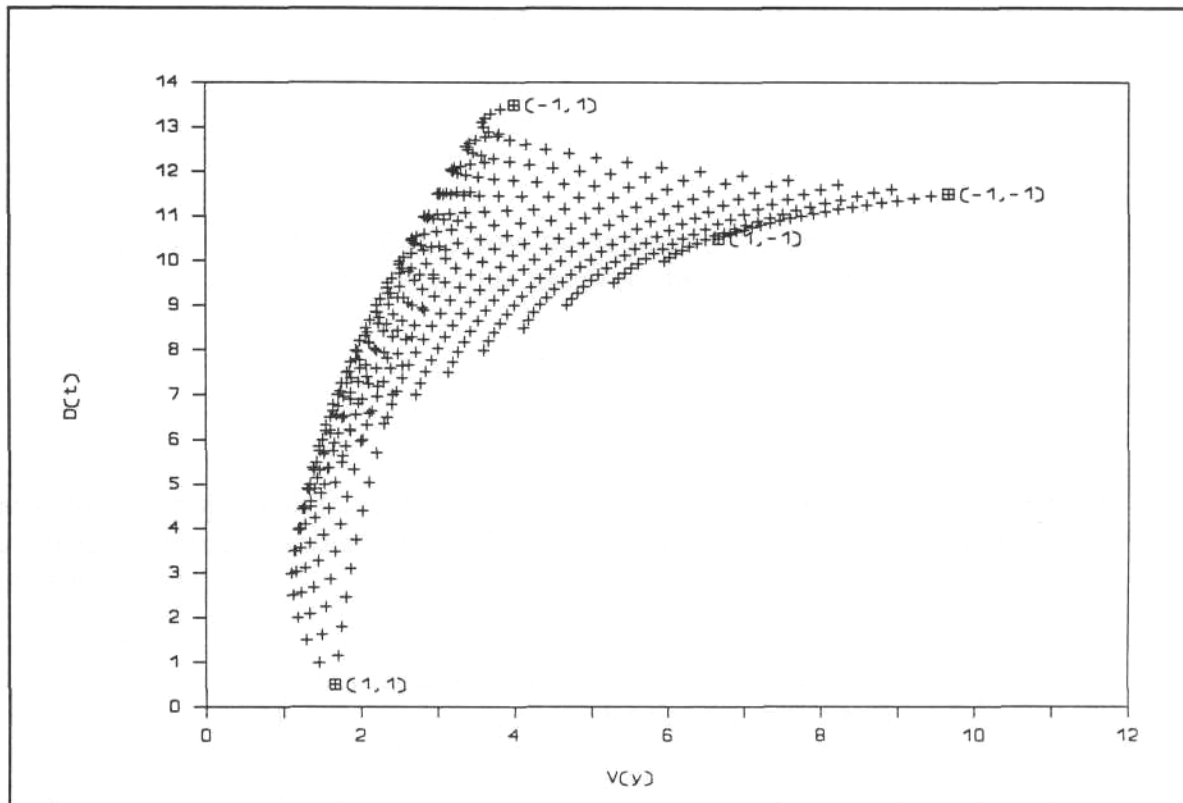


Figura 2.3: Diagrama Distancia-Varianza correspondiente al modelo del ejemplo 2.

También resulta interesante estudiar mediante esta metodología el modelo del ejemplo de Jones [Jon 90] que se presentó en el apartado 1.4.3.2.

Recuérdese que el modelo era de la forma:

$$y_{xz} = \beta_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j z_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \delta_{ji} x_i z_j$$

con los siguientes coeficientes:

<u>Coeficiente</u>	<u>Valor</u>	<u>Coeficiente</u>	<u>Valor</u>
β_0	65.0	δ_{11}	4.0
β_1	2.5	δ_{12}	-4.0
β_2	-9.5	δ_{21}	0.5
γ_1	5.0	δ_{22}	5.0
γ_2	-7.5	δ_{31}	0.5
γ_3	4.5	δ_{32}	8.0

y aplicando el método de Box-Jones se llegaba a la conclusión de que para $\tau = 80$ y $\lambda = 0.5$ los valores óptimos de los factores de diseño eran:

$$x_1 = 0.38$$

$$x_2 = -1.00$$

Mediante la hoja de cálculo descrita en el Apéndice 3, puede comprobarse que dichos valores óptimos cambian de la forma que se indica en la tabla 2.2 al variar λ , obteniéndose:

λ	Valores óptimos	
	x_1	x_2
0	1	-1
0.1	1	-1
0.2	1	-1
0.3	1	-1
0.4	0.8	-1
0.5	0.4	-1
0.6	0.2	-0.9
0.7	0.1	-0.7
0.8	-0.2	-0.5
0.9	-0.6	-0.3
1	-1	0.1

Tabla 2.2: Valores óptimos de x_1 y x_2 para diversos valores de λ . en el modelo del ejemplo de Jones.

Aplicando nuestra metodología se puede construir el gráfico Distancia-Varianza de la figura 2.4a y a partir de este, elegir el punto que más convenga.

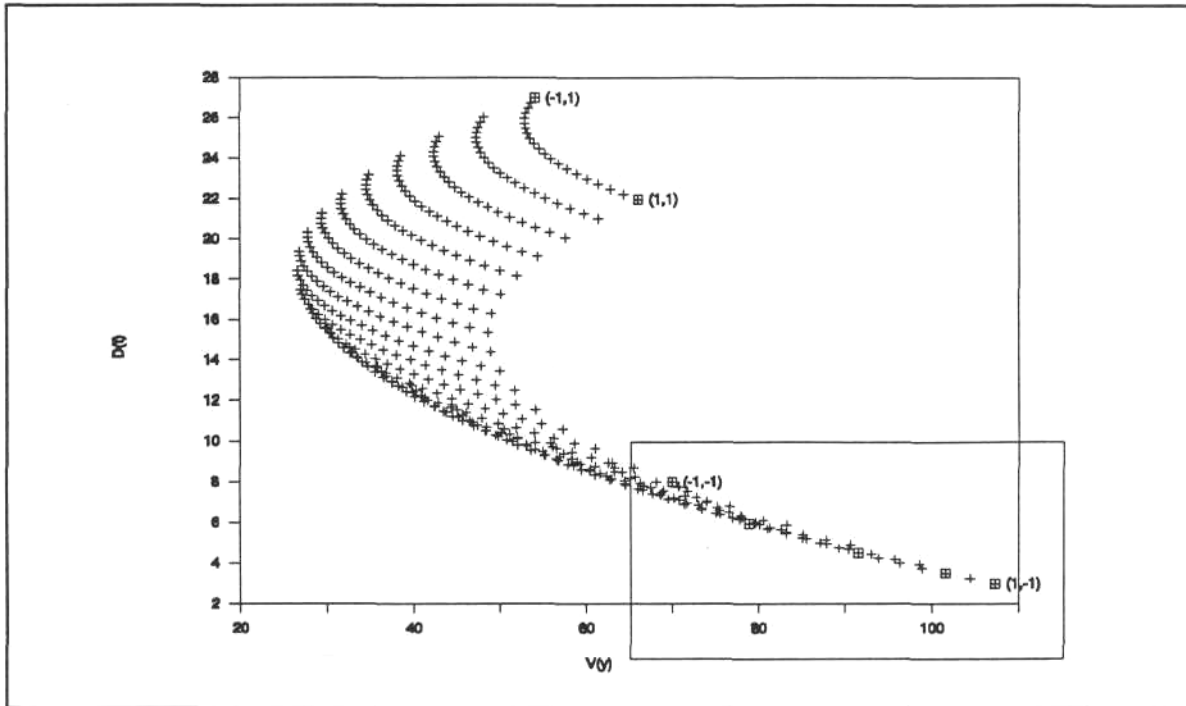


Figura 2.4a: Diagrama Distancia-Variación correspondiente al modelo del ejemplo de Jones.

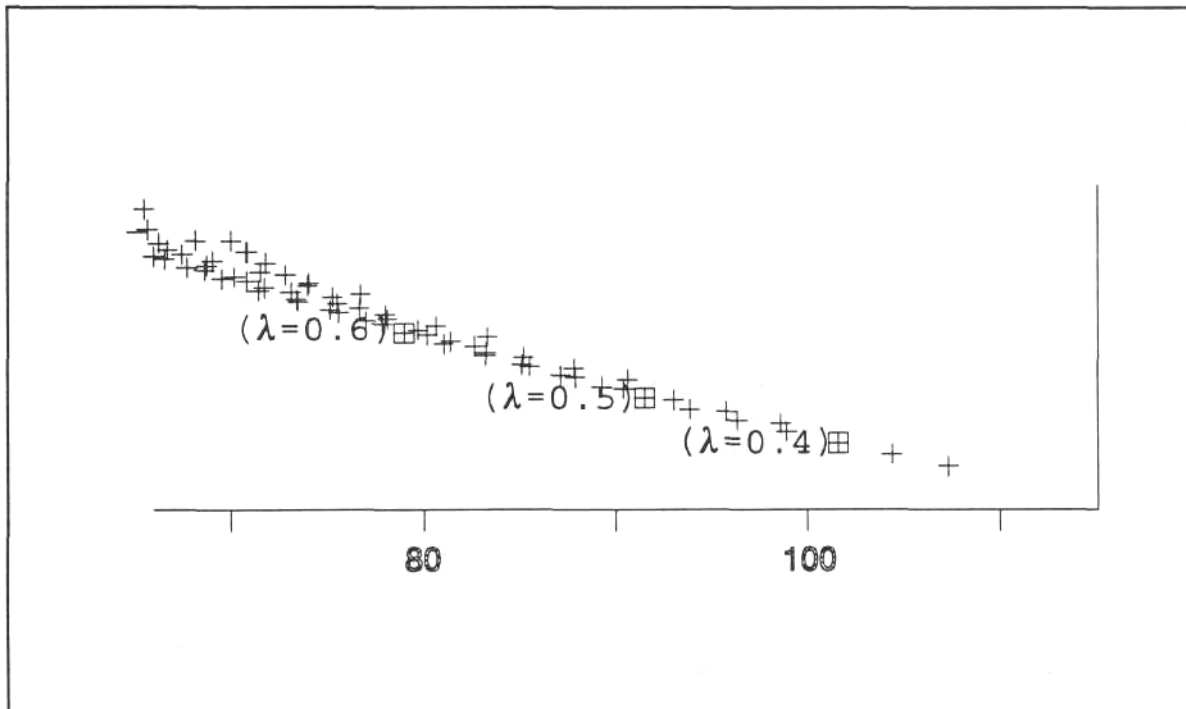


Figura 2.4b: "Zoom" de la parte recuadrada de la figura anterior, identificando los puntos óptimos de acuerdo con el método de Jones para $\lambda = 0.4, 0.5$ y 0.6 .

Sobre el gráfico se han marcado e identificado los valores extremos. También se han marcado los valores óptimos según el método de Jones para $\lambda = 0.4, 0.5$ y 0.6 , estos puntos pueden verse más claramente en el "zoom" realizado en la figura 2.4b.

Nótese que es preferible elegir el punto a la vista del gráfico que deducirlo después de haber fijado un valor de λ "a priori".

Obviamente, el diagrama Distancia-Varianza es siempre un diagrama bivalente independientemente el número de factores de diseño y de factores de ruido. En el Apéndice 4 se presenta un diagrama que corresponde a un modelo con 5 factores de diseño y 3 factores de ruido.

2.6 Ejemplo de Aplicación: Diseño de un tubo cilíndrico para transmisión de calor afectado de factores de ruido externo.

2.6.1 Planteamiento del problema.

El flujo de calor a través de una superficie cilíndrica, con la sección que se indica en la figura 2.5, viene dado por la fórmula:

$$H = \frac{2\pi k (T_2 - T_1) L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad [2.3]$$

Siendo:

- H: Flujo de calor (cal/seg)
- π : Número pi
- k: Coeficiente de conductividad térmica del material de que está construido el cilindro (cal/seg.cm.°C)
- T_2 : Temperatura en el interior del cilindro (°C)
- T_1 : Temperatura en el exterior del cilindro (°C)
- L: Longitud del cilindro (cm)
- b: Diámetro exterior del cilindro (cm)
- a: Diámetro interior del cilindro (cm)

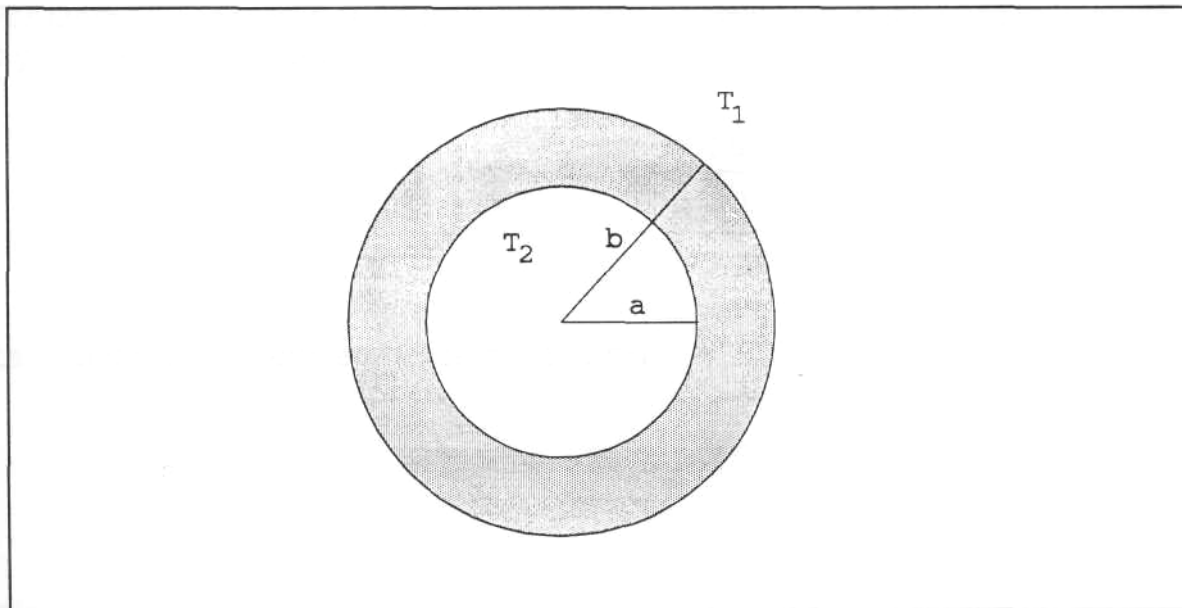


Figura 2.5: Sección de una superficie cilíndrica.

Tomando el coeficiente de conductividad térmica correspondiente al cobre, $k = 0.92$ cal/seg.cm.°C, y $L = 1$ cm, queda la expresión:

$$H = 5.78 \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Suponiendo que el cilindro en cuestión es un tubo destinado a calefaccionar un ambiente, las variables a , b , T_2 pueden considerarse factores de diseño (pueden fijarse al nivel deseado), mientras que T_1 (temperatura en el exterior del tubo) variará de acuerdo con la temperatura ambiente conseguida.

2.6.1 Diseño óptimo a partir del modelo real.

Considerando que T_1 sigue una distribución uniforme en el intervalo (20, 30°C), su esperanza matemática será 25°C, y podemos escribir que la esperanza matemática del flujo de calor será:

$$E(H) = 5.78 \frac{T_2 - 25}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Portante, si deseamos que $E(H) = 1500$ cal/seg, debemos elegir unos valores de a , b y T_2 que cumplan la expresión:

$$1500 = 5.78 \frac{T_2 - 25}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La cual también puede escribirse de la forma:

$$T_2 = 25 + 259.5 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por tanto, valores tales como:

b/a	T ₂ (°C)
1.1	50
1.2	72
1.3	93

Permiten cumplir con el objetivo de $E(H) = 1500$ cal/seg.

Pero supongamos que deseamos minimizar la variabilidad de H en torno a su objetivo. En este caso, deberemos minimizar la expresión:

$$\begin{aligned}
 V(H) &= 5.78^2 V\left[\frac{T_2 - T_1}{\ln(b/a)}\right] \\
 &= 5.78^2 V\left[\frac{T_1}{\ln(b/a)}\right] \\
 &= 5.78^2 \frac{V(T_1)}{[\ln(b/a)]^2}
 \end{aligned}$$

Por tanto, para minimizar la variabilidad de H, debemos utilizar una relación b/a lo mayor posible, ya que $V(T_1)$ es la varianza del factor ruido, contra la que nada podemos hacer.

En el caso de que b/a pudiera variar en el rango (1.1, 1.3) y no hubieran limitaciones para T₂, la solución ideal sería:

$$b/a = 1.3$$

$$T_2 = 93^\circ\text{C}$$

De esta forma se consigue que $E(H)$ coincida con el valor objetivo y que la variabilidad entorno a este valor sea la menor posible.

2.6.3 Diseño óptimo a partir del modelo experimental.

Si no conociéramos la expresión [2.3], podríamos buscar los valores óptimos de los factores de diseño a través de la experimentación, teniendo:

Respuesta:	H	Flujo de Calor
Factores Controlables:	T_2	Temperatura en el interior del tubo.
	b/a	Relación entre los diámetros exterior e interior del tubo.
Factor no Controlable:	T,	Temperatura en el exterior del tubo.

En este caso, en primer lugar deberemos tomar un modelo que supondremos que aproxima con precisión suficiente la relación existente entre la respuesta y los factores.

En general, suele obtenerse una buena aproximación a través de un modelo lineal de segundo orden, del tipo:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \beta_{ik} x_i x_k + \sum_{j=1}^m \gamma_j z_j + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^m \gamma_{jl} z_j z_l + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} x_i z_j + \epsilon$$

En el que:

y = Respuesta
 x_i = Factores de diseño (controlables)
 z_j = Factores de ruido (no controlables)
 ϵ = Parte no explicada por el modelo

Los parámetros que intervienen en el modelo anterior pueden estimarse mediante un diseño factorial a 2 niveles.

En nuestro caso, con 2 factores controlables y 1 factor de ruido, bastará con un diseño 2^3 , y fijando los niveles:

Factores	Niveles	
	-	+
b/a	1.1	1.3
T ₂	35	90
T ₁	20	30

La matriz de diseño y las respuestas obtenidas son³:

b/a	T ₂	T ₁	H
-	-	-	909.66
+	-	-	330.46
-	+	-	4245.09
+	+	-	1542.13
-	-	+	303.22
+	-	+	110.15
-	+	+	3638.65
+	+	+	1321.82

Obteniéndose los siguientes efectos:

Media:	1550
b/a:	-1448
T ₂ :	2274
T ₁ :	- 413
b/a.T ₂ :	-1062
b/a.T ₁ :	193
T ₂ .T ₁ :	0
b/a.T ₂ .T ₁ :	0

A partir de los efectos obtenidos, y con las consideraciones efectuadas en el apartado 1.2, puede plantearse la ecuación:

$$H = 1550 - 724 \frac{b}{a} + 1137 T_2 - 206.5 T_1 - 531 \frac{b}{a} T_2 + 96.5 \frac{b}{a} T_1$$

A partir de la cual se deduce:

³En este caso no se han realizado experimentos propiamente sino que se ha aplicado la fórmula real ya conocida. Se ha prescindido, por tanto, del error experimental.

$$E(H) = -1500 - 724 \frac{b}{a} + 1137 T_2 - 531 \frac{b}{a} T_2$$

y:

$$V(H) = V(T_1) \left(96.5 \frac{b}{a} - 206.5 \right)^2$$

En esta última expresión se ha ignorado el valor de $V(\varepsilon)$ que añadiría una parte siempre constante a $V(H)$ lo cual no haría cambiar en ningún caso el resultado obtenido respecto al valor óptimo de los factores de diseño.

A partir de las ecuaciones anteriores, asignando valores (convenientemente codificados) a las variables de diseño, y considerando que el valor óptimo del flujo calorífico es $\tau = 1500$, puede elaborarse la tabla 2.3, y a partir de esta construirse los gráficos de las figuras 2.6a y 2.6b.

La observación de los gráficos pone de manifiesto que situando los factores de diseño en los niveles (+,+) se obtiene la varianza mínima con un valor de la respuesta ligeramente superior al valor objetivo.

Un valor de la respuesta más próximo al objetivo puede lograrse eligiendo otra combinación de factores de diseño (por ejemplo, la que en la figura 2.6a se presenta recuadrada), a costa de una mayor varianza de H.

También podría lograrse extrapolando el segundo factor de diseño (si es posible) colocándolo en un valor ligeramente superior al nivel +. Otra solución sería situar los factores en los niveles (+,+) e intentar disminuir el coeficiente de transmisión de calor (colocando un aislante) para reducir H hasta llevarlo al valor objetivo.

Puede comprobarse que las conclusiones a las que se han llegado son las mismas a las que conduce el tratamiento analítico del modelo de la respuesta, que en este caso era conocido ya que se basa en leyes físicas también conocidas.

	A	B	C	D	E	F	G
1	b/a	T2	Var(y)	Dist			
2	-1	-1	30603.0	894		cte	1550
3	-1	-0.9	30603.0	727.2		x1	-724
4	-1	-0.8	30603.0	560.4		x2	1137
5	-1	-0.7	30603.0	393.6		z1	-206.5
6	-1	-0.6	30603.0	226.8		x1x2	-531
7	-1	-0.5	30603.0	60		x1z1	96.5
8	-1	-0.4	30603.0	-106.8		x2z1	0
9	-1	-0.3	30603.0	-273.6			
10	-1	-0.2	30603.0	-440		tau	1500
11	-1	-0.1	30603.0	-607.2			
12	-1	0	30603.0	-774			
:	:	:	:	:	:		

Tabla 2.3: Primeras filas de la tabla construida para la realización del diagrama Distancia-Varianza.

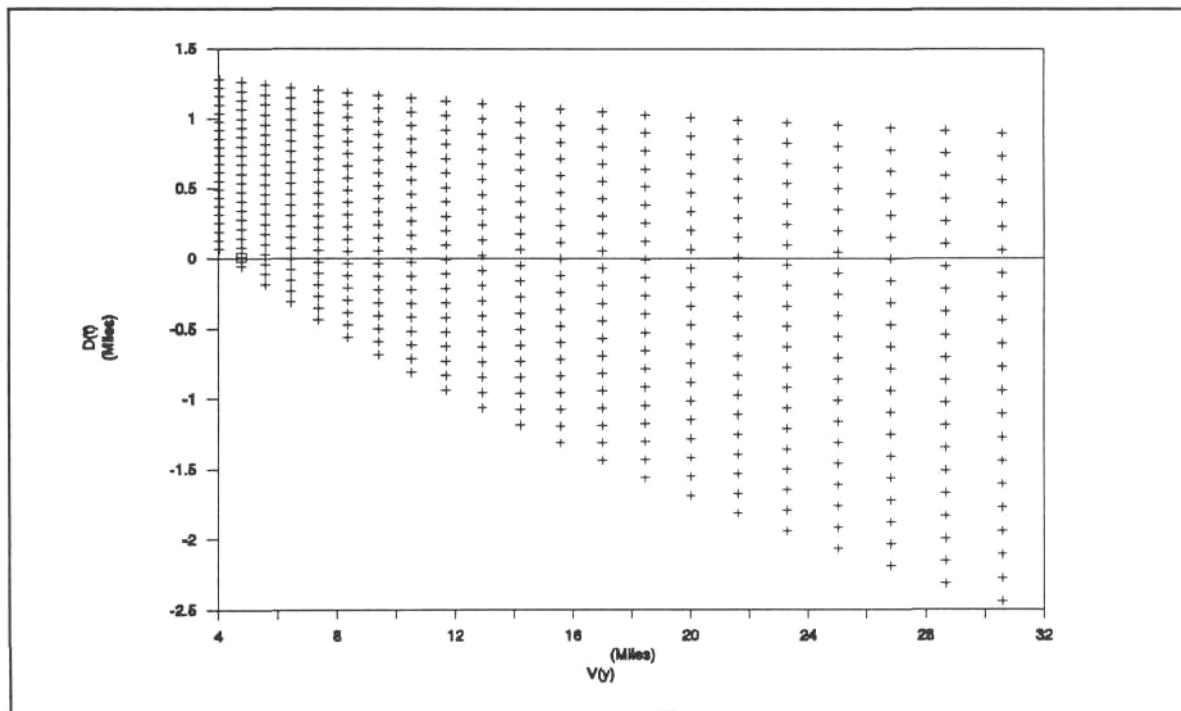


Figura 2.6a: Diagrama Distancia-Varianza correspondiente al ejemplo del tubo calefactor.

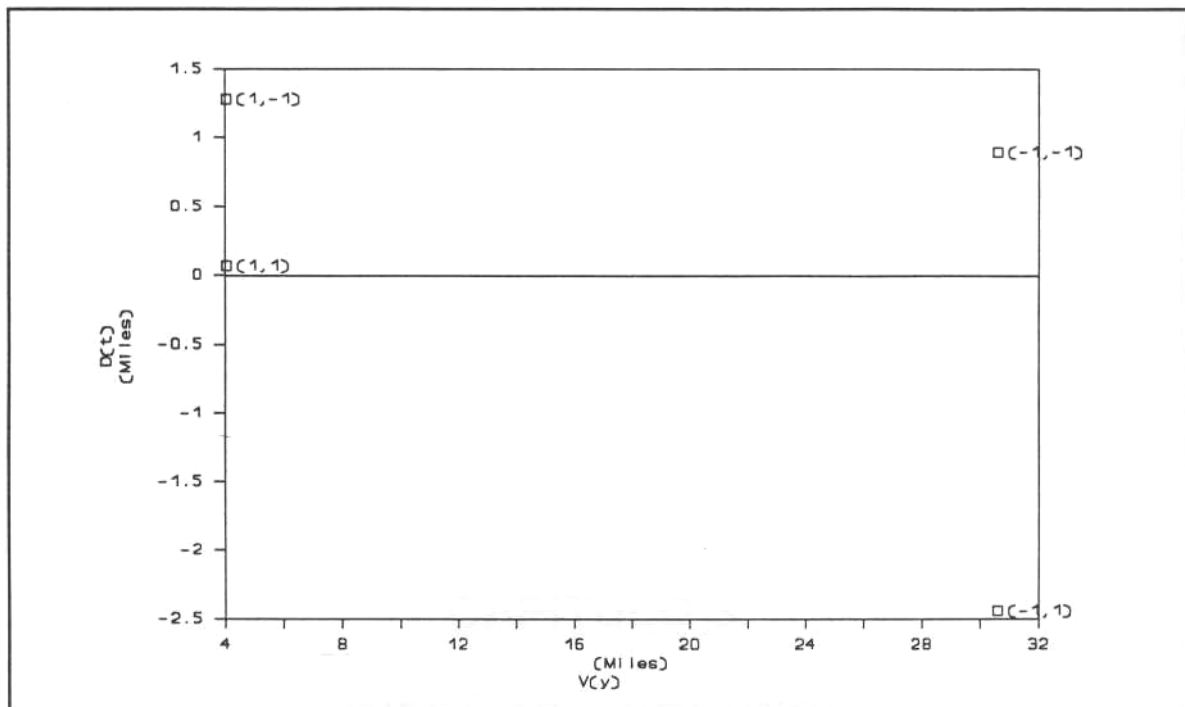


Figura 2.6b: Puntos del diagrama anterior que corresponden a las condiciones de experimentación.