

CAPITULO 3:

**DISEÑOS ROBUSTOS
FRENTE AL RUIDO INTERNO**

3. DISEÑO DE PRODUCTOS ROBUSTOS CON FACTORES DE DISEÑO AFECTADOS DE RUIDO INTERNO.

3.0 Planteamiento del problema. Plan de trabajo propuesto.

En el capítulo anterior se desarrolló una metodología para el diseño de productos robustos frente al ruido **externo**. En el presente capítulo se presenta el procedimiento a seguir para el diseño de productos robustos frente al ruido **interno**.

Se entiende por ruido interno la variabilidad que presentan ciertas características de calidad de los productos debido a que los valores que realmente toman sus factores de diseño no son los nominales, o, si lo son al principio, sufren una cierta variación a lo largo del tiempo.

De forma totalmente análoga al caso de la existencia de ruido externo, la metodología que se propone consta de las siguientes fases:

1. Establecer una hipótesis sobre el modelo de la respuesta (que en este caso deberá ser cuadrático).
2. Estimar los parámetros del modelo mediante los diseños que en cada caso resulten más adecuados.
3. A partir del modelo obtenido, calcular las expresiones de la esperanza matemática y la varianza de la respuesta.
4. Con la ayuda de una hoja de cálculo, y mediante la realización del diagrama Distancia-Variancia, elegir la combinación óptima de valores para los factores de diseño.

A continuación se describen y justifican cada una de estas etapas.

3.1 Hipótesis sobre el modelo de la respuesta.

En el caso de existencia de ruido interno, la selección de los valores óptimos de los factores de diseño implica el planteamiento de un modelo de segundo orden.

El ejemplo del tubo calefactor utilizado en el capítulo anterior, nos será útil para poner de manifiesto esta necesidad.

Recordemos que teníamos como respuesta el flujo de calor (H) a través de un tubo cilíndrico, como factores de diseño la temperatura interior (T_1) y la relación entre el diámetro exterior y el interior (r), y como factor de ruido la temperatura exterior (T_2).

Supongamos ahora que T_1 y T_2 pueden fijarse exactamente a un valor determinado, pero que sin embargo, r debe considerarse como una variable aleatoria de la forma:

$$r \sim N(r_n, \sigma)$$

Siendo r_n el valor nominal de r y σ su desviación tipo (que consideraremos constante independientemente del valor de r_n).

La pregunta que nos planteamos es: ¿qué valor nominal de r debemos escoger para minimizar la variabilidad de H ?

En este caso, como conocemos la expresión que relaciona la respuesta con los factores de diseño, podemos construir el gráfico de la figura 3.1 en el que se ha fijado $T_1 - T_2 = 50^\circ\text{C}$.

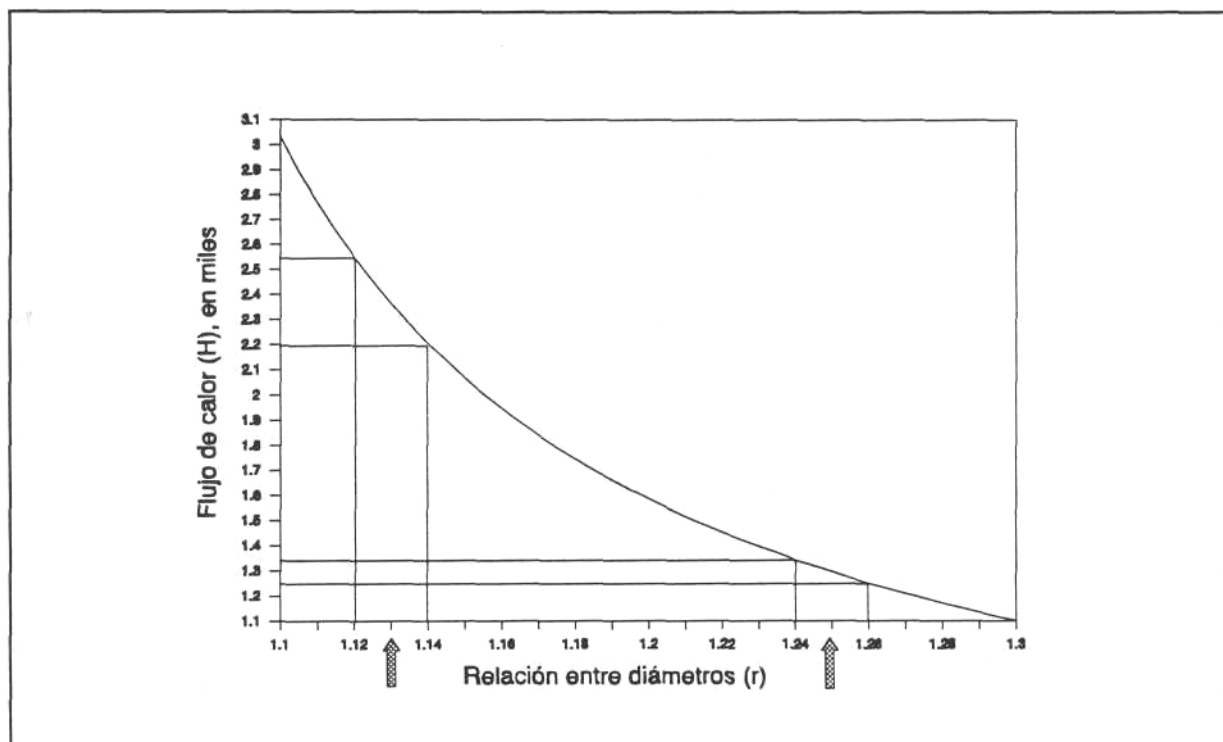


Figura 3.1: Transmisión de variabilidad a H según sea el valor de r .

A través del gráfico puede observarse que cuanto mayor sea el valor de r (en el intervalo considerado de 1.1 a 1.3) menor es la variabilidad que se transmite a H .

A la misma conclusión podría llegarse analíticamente, ya que:

$$\sigma_H = \sigma_r \left| \frac{dH}{dr} \right|_{r=r_n}$$

y, por tanto:

$$\text{Var}(H) = \text{Var}(r) \left(\frac{dH}{dr} \right)^2$$

Como teníamos que:

$$H = 5.78 \frac{T_2 - T_1}{\ln r}$$

resulta que:

$$\frac{dH}{dr} = \frac{[5.78 (T_2 - T_1)]^2}{r (\ln r)^2}$$

luego:

$$\text{Var}(H) = \text{Var}(r) \frac{[5.78 (T_2 - T_1)]^2}{r_n^2 (\ln r_n)^4}$$

Al ser $\text{Var}(r)$ constante, constatamos que cuanto mayor sea r y menor la diferencia de temperaturas, menor será la variabilidad de H .

Sin embargo, la expresión obtenida para H a través de un diseño factorial a 2 niveles era:

$$H = 1293 - 980.5r + 948.5T_2 - 172.5T_1 - 719rT_2 + 131rT_1$$

Que con el planteamiento actual y manteniendo $T_1 - T_2 = 50^\circ\text{C}$ ($T_1 = 75^\circ\text{C}$, $T_2 = 25^\circ\text{C}$) nos queda:

$$H = 14224.2 - 10768.T$$

y por tanto:

$$\text{Var}(H) = 10768^2 \text{Var}(r)$$

Lo cual nos lleva a la conclusión errónea de que la variabilidad de H es independiente del valor de r.

Fácilmente puede comprobarse que cualquier modelo de primer orden conduciría a la misma conclusión. De hecho, cuando se trabaja con factores de diseño afectados de ruido intrínseco, la variabilidad de la respuesta se minimiza a base de explotar su relación curvilínea con los factores. Por tanto, aproximaciones de primer orden se revelan totalmente ineficaces.

Así pues, será necesario plantear para la respuesta un modelo de segundo orden, del tipo:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j$$

En el que $x_1 \dots x_k$ representan los factores de diseño afectados de ruido interno.

3.2 Estimación de los parámetros del modelo.

Puede parecer que los diseños 3^k , extensión natural de los 2^k son los únicos que permiten la estimación de los parámetros en modelos de segundo orden. Sin embargo, para el tipo de modelo que nosotros hemos planteado, Box y Hunter (Box 1957) propusieron la construcción de unos diseños que llamaron "diseños compuestos centrales" que presentan notables ventajas.

Este tipo de diseños, que identificaremos como 2^k+C , consisten en un diseño típico a 2 niveles (2^k o 2^{kp}) con su matriz de diseño aumentada con la matriz siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{array} \right] \end{array}$$

Por tanto, con 3 factores la matriz de diseño quedará de la forma:

$$D = \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{array} \right] \end{array} \quad [3.1]$$

Las 8 primeras filas de la matriz anterior corresponden a un diseño 2^3 convencional. El punto noveno es el punto central del diseño (también podría haber más de un punto central) y los 6 restantes corresponden a puntos situados sobre los puntos centrales de las caras del cubo. La figura 3.2 muestra una representación geométrica de este tipo de diseño con 3 factores.

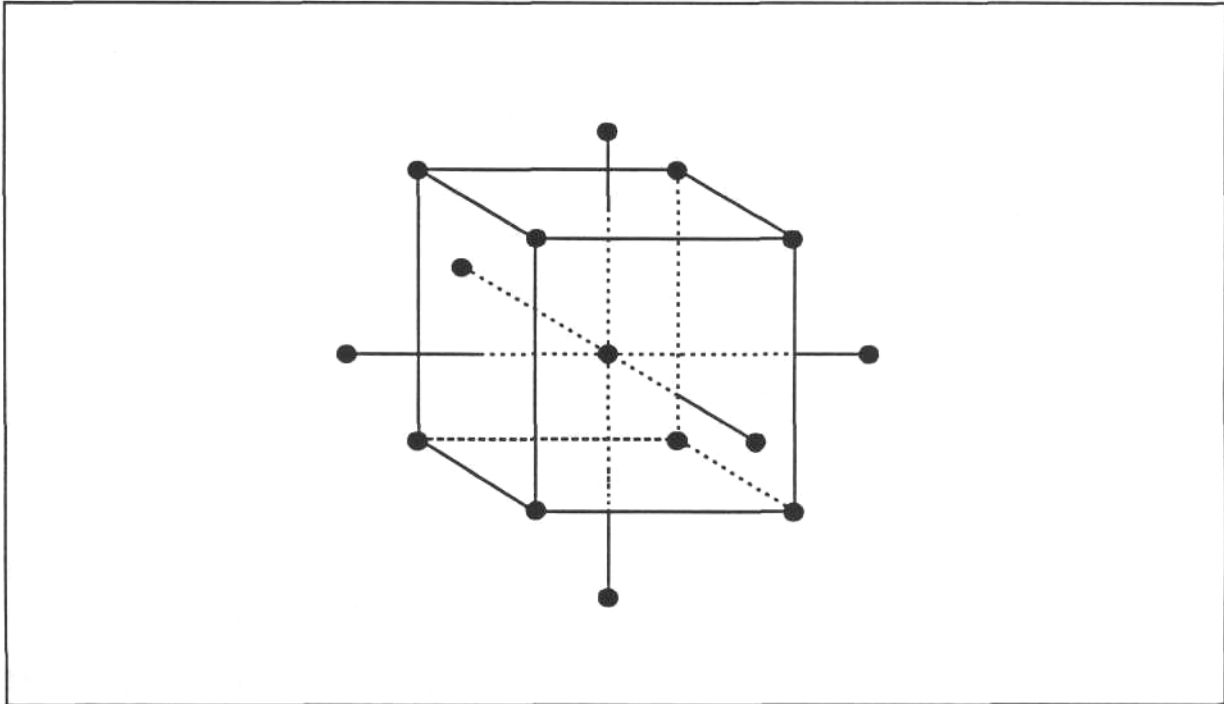


Figura 3.2: Representación geométrica de un diseño 2^3+C

Para calcular los valores de a que hacen que este tipo de diseño sea ortogonal, planteamos la matriz \mathbf{X} (de acuerdo con la notación habitual usada en regresión) para un modelo con 3 factores del tipo considerado:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que para cualquier valor de $\alpha \neq 0$ es imposible conseguir una matriz $X'X$ diagonal, condición necesaria para que el diseño sea ortogonal.

Myers (1976) salva esta dificultad planteando el modelo de la siguiente forma:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{i=1}^3 \beta_{ii} (x_i^2 - x_0^2) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \beta_{ij} x_i x_j$$

y llamando c a x_0^2 , con la expresión:

$$c = \frac{F + 2\alpha^2}{F + T}$$

donde:

$F = 2^k$ (núm. de puntos del diseño factorial)

$T = 2^k + 1$ (núm. de puntos adicionales)

se obtiene la matriz:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1-c & 1-c & 1-c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1-c & 1-c & 1-c & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1-c & 1-c & 1-c & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1-c & 1-c & 1-c & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1-c & 1-c & 1-c & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1-c & 1-c & 1-c & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1-c & 1-c & 1-c & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-c & 1-c & 1-c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha^2-c & -c & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & \alpha^2-c & -c & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & -c & \alpha^2-c & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & -c & \alpha^2-c & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha & -c & -c & \alpha^2-c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & -c & -c & \alpha^2-c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y operando se llega a:

$$X'X = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 8+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 8+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & p & q & q & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & p & q & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & p & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 8 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 8 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad [3.2]$$

En general, partiendo del modelo propuesto por Myers, la matriz X'X toma la forma [3.2] con el elemento (1,1) igual a F+T, los elementos de la diagonal correspondientes a los elementos de primer orden: $F+2\alpha^2$, los elementos de la diagonal correspondientes a términos cuadráticos:

$$P = \frac{FT - 4F\alpha^2 - 4\alpha^4 + 2(F+T)\alpha^4}{F+T}$$

y los elementos de la diagonal correspondientes a la interacción de 2 factores toman un valor igual a F.

Los elementos de fuera de la diagonal toman valores iguales a cero excepto aquellos que corresponden a los términos cuadráticos que toman un valor igual a:

$$Q = \frac{FT - 4F\alpha^2 - 4\alpha^4}{F+T}$$

De la expresión anterior se deduce que para que q sea igual a cero, y por tanto los datos sean ortogonales, a debe tomar el valor:

$$\alpha = \left(\frac{QF}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Siendo:

$$Q = \left[(F+T)^{\frac{1}{2}} - F^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

La tabla 3.1 muestra los valores de a para varios valores de k que producen diseños centrales compuestos ortogonales con un único punto central.

k	α
2	1.000
3	1.216
4	1.414
5	1.596
6	1.761
7	1.910
8	2.045

Tabla 3.1: Valores de a para un diseño compuesto central ortogonal.

Por otra parte, considerando la submatriz correspondiente a los términos cuadráticos puros:

$$\begin{bmatrix} p & q & q & \dots & q \\ & p & q & \dots & q \\ & & p & \dots & q \\ & & & \dots & . \\ & & & & p \end{bmatrix}$$

se obtiene que su inversa es de la forma:

$$\begin{bmatrix} e & f & f & \dots & f \\ & e & f & \dots & f \\ & & e & \dots & f \\ & & & \dots & . \\ & & & & e \end{bmatrix}$$

donde:

$$e = \frac{p + (k-2)q}{(p-q)(p+kq-q)}$$

$$f = \frac{q}{(q-p)[p + (k+1)q]}$$

y como:

$$\text{Var}(b) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

puede deducirse que:

$$\text{Var}(b_0) = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\text{Var}(b_{ii}) = \sigma^2 e \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{Var}(b_i) = \frac{\sigma^2}{F+2\alpha^2} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{Var}(b_{ij}) = \frac{\sigma^2}{F} \quad i \neq j$$

$$\text{Cov}(b_{ii}, b_{jj}) = \sigma^2 f \quad i \neq j$$

Nótese que mediante un diseño ortogonal se consigue que $f=0$ y por tanto que $\text{Cov}(b_{ii}, b_{jj})=0$, pero sin embargo, el valor de α también aparece en las expresiones de $\text{Var}(b_i)$ y $\text{Var}(b_{ij})$ y por tanto, en determinados casos, que aquí no se consideran, puede ser preferible sacrificar la ortogonalidad de los datos a cambio de una menor varianza para los estimadores de los parámetros. Un estudio comparativo sobre las ventajas e inconvenientes de los distintos criterios de selección de α puede verse en Myers (1976).

En la tabla 3.2 se pone de manifiesto la economía de experimentación que representan los diseños compuestos centrales frente a los diseños factoriales a 3 niveles.

Núm. de factores	Parámetros del modelo	Diseño 3^k		Diseño 2^k+C	
		Tipo de diseño	Núm. expe.	Tipo de diseño	Núm. expe.
2	7	3^2	9	$2^2+2*2+1$	9
3	10	3^3	27	$2^3+2*3+1$	15
4	15	3^{4-1}	27	$2^{4-1}+2*4+1$	17
5	21	3^{5-2}	27	$2^{5-1}+2*5+1$	27
6	28	3^{6-2}	81	$2^{6-2}+2*6+1$	29
7	36	3^{7-3}	81	$2^{7-2}+2*7+1$	47

Tabla 3.2: Comparación de los diseños 3^k y 2^k+C

Para ilustrar con un ejemplo práctico esta metodología de estimación de los parámetros del modelo, utilizaremos el caso del tubo calefactor que venimos estudiando.

Recordemos que tenemos:

$$H=f(T_1, T_2, r)$$

y establecemos la hipótesis de que H se puede explicar mediante un modelo de la forma:

$$H = \beta_0 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 r + \beta_{11} T_1^2 + \beta_{22} T_2^2 + \beta_{33} r^2 + \beta_{12} T_1 T_2 + \\ + \beta_{13} T_1 r + \beta_{23} T_2 r + \epsilon$$

La matriz de diseño será similar a la que aparece en la expresión **[3.1]**, y fijando los factores a los niveles:

	-	+
T_1	20°C	30°C
T_2	35°C	90°C
r	1.1	1.3

se obtienen las siguientes respuestas para cada condición experimental, calculadas a partir de la expresión real:

$$H = \begin{bmatrix} 909.7 \\ 303.2 \\ 4245.1 \\ 3638.7 \\ 330.5 \\ 110.2 \\ 1542.1 \\ 1321.8 \\ 1188.8 \\ 1381.5 \\ 996.2 \\ 129.2 \\ 2248.4 \\ 2871.7 \\ 777.3 \end{bmatrix}$$

y aplicando las técnicas clásicas de regresión se llega a la ecuación:

$$H = 57199 + 270.4 (T_1 - T_2) - 95421 r + 39605 r^2 - 193.1 r (T_1 - T_2)$$

Fijando $T_1 - T_2 = 50^\circ\text{C}$ tal como habíamos hecho anteriormente, nos queda:

$$H = 70719 - 105076 r + 39605 r^2$$

La representación gráfica de esta ecuación (figura 3.3) ya nos permite deducir, a diferencia de lo ocurrido con el modelo de primer orden, que la variabilidad de H disminuirá al aumentar el valor de r.

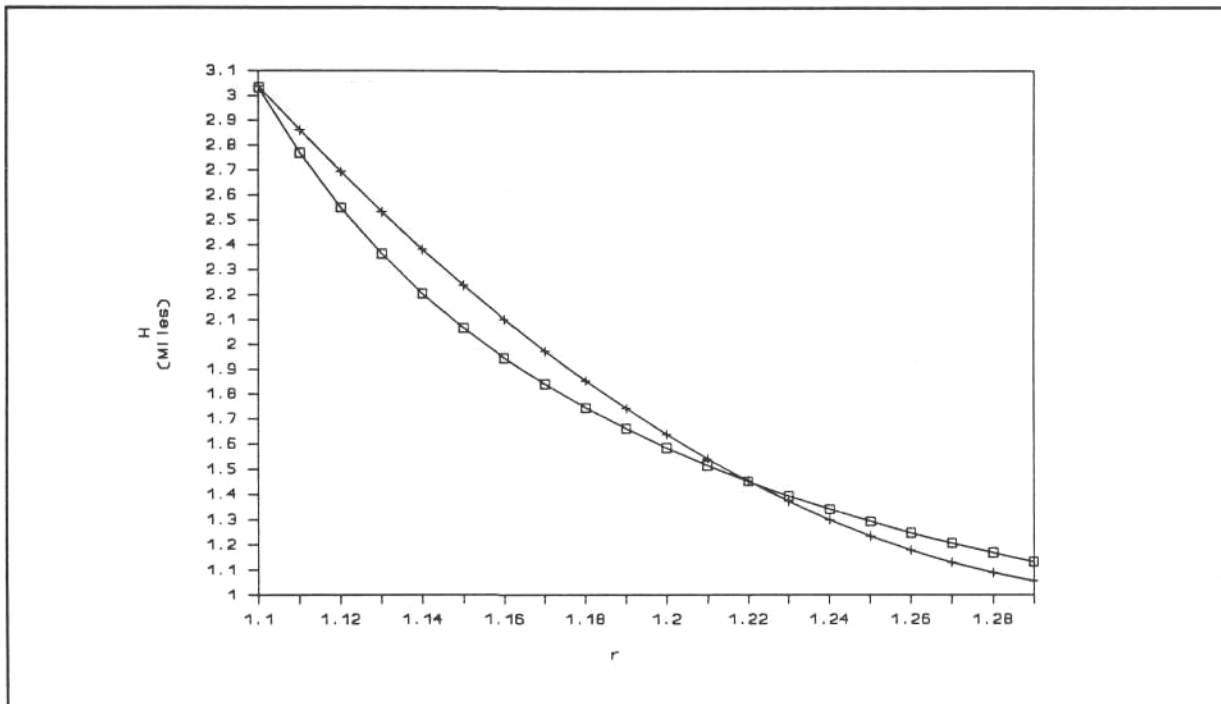


Figura 3.3: Comparación de las curvas obtenidas para $H=f(r)$ ($\Delta T=50$) con los modelos experimental (+) y real (□).

3.3 Análisis del Modelo. Esperanza Matemática y Varianza de la Respuesta.

De la misma forma que en los modelos de primer orden, para determinar los valores óptimos de los factores de diseño deberemos conocer las expresiones de la esperanza matemática y la varianza de la respuesta.

3.3.1 Esperanza Matemática de la Respuesta.

Dado el modelo:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

como $E(\varepsilon)=0$ y las x_i (factores de diseño) pueden considerarse variables aleatorias de la forma:

$$x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

la esperanza matemática de y para un punto determinado será:

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i E(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} E(x_i^2) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} E(x_i) E(x_j)$$

y como:

$$E(x^2) = \text{Var}(x) + E(x)^2$$

tenemos que:

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i E(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \text{Var}(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} E(x_i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} E(x_i) E(x_j)$$

Llamando x al nivel óptimo de la respuesta, tendremos que la distancia al óptimo será:

$$D(\tau, x) = \tau - E(y)$$

3.3.2 Varianza de la respuesta.

No sólo interesará estudiar la distancia al óptimo sino también la variabilidad de la respuesta para cada posible combinación de valores de los factores de diseño.

Deberemos calcular, por tanto:

$$\text{Var}(y) = \text{Var}\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j\right) + V(\epsilon)$$

Vimos en el apartado 3.1, comentando el ejemplo del tubo calefactor, que cuando solo existe un factor de diseño, la variabilidad de este se transmite a la respuesta de la forma:

$$\text{Var}(y) = \text{Var}(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + V(\epsilon)$$

En general, con k factores de diseño:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

y podemos escribir que:

$$V(y) = \sum_{i=1}^k \text{Var}(x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + V(\epsilon)$$

Al igual que se hizo en el capítulo anterior, puede ignorarse el valor de $V(\epsilon)$ ya que sólo añade una parte siempre constante a $V(y)$, no afectando a las conclusiones que se obtienen.

3.4 Elección del nivel óptimo de los factores.

Al igual que en los modelos de primer orden, el diagrama bivariante de la varianza de la respuesta frente a la distancia al óptimo permite tomar decisiones sobre el nivel más adecuado de los factores de diseño.

El ejemplo del tubo calefactor también puede servir para ilustrar la construcción y el análisis de los gráficos Distancia-Variancia en el caso de presencia de factores de diseño con ruido interno.

Recordemos que habíamos llegado a la expresión:

$$H = 57199 + 270.4 (T_1 - T_2) - 95421 r + 39605 r^2 - 193.1 r (T_1 - T_2)$$

y podemos deducir que:

$$E(H) = 57199 + 270.4 (T_1 - T_2) - 95421 E(r) + \\ + 39605 [Var(r) + E(r)^2] - 193.1 (T_1 - T_2) E(r)$$

$$Var(H) = [-95421 + 79210r - 193.1 (T_1 - T_2)]^2 Var(r)$$

Para la construcción del gráfico creamos una hoja de cálculo (tabla 3.3) colocando en la columna 1 los valores de $T_1 - T_2$ desde 40 hasta 80°C con incrementos de 2°C. En la columna 2, para cada valor de $T_1 - T_2$ se han colocado los valores de r desde 1.1 hasta 1.3 con incrementos de 0.01. La $E(H)$ y la $Var(H)$ se han calculado en las columnas 3 y 4 para cada combinación de valores de $T_1 - T_2$ y r .

	A	B	C	D	E	F	G
1	T2-T1	r	Dist	V(H)		tau =	1500
2	40	1.1	-981.99	256.45		sigma(r)=	0.001
3	40	1.11	-825.85	231.71			
4	40	1.12	-677.63	208.22			
5	40	1.13	-537.33	185.99			
6	40	1.14	-404.96	165.01			
7	40	1.15	-280.50	145.29			
8	40	1.16	-163.97	126.82			
	:	:	:	:	:	:	:
	:	:	:	:	:	:	:
436	80	1.24	-760.05	159.99			
437	80	1.25	-637.60	140.58			
438	80	1.26	-523.08	122.42			
439	80	1.27	-416.47	105.52			
440	80	1.28	-317.79	89.87			
441	80	1.29	-227.03	75.48			
442	80	1.3	-144.19	62.35			

Tabla 3.3: Inicio y final de la hoja de cálculo realizada para la construcción del diagrama de la figura 3.4a.

El gráfico Distancia-Variancia tiene el aspecto que se indica en la figura 3.4a. Realizando un "zoom" de la zona señalada puede observarse que el punto que combina la menor varianza y la menor distancia al óptimo es el que corresponde a los valores $T_1-T_2 = 72$, $r = 1.30$ y la mínima varianza corresponde a $T_1-T_2 = 40^\circ\text{C}$, $r = 1.3$. (Máximo valor de r y mínimo de T_1-T_2 como fácilmente puede deducirse en este caso).

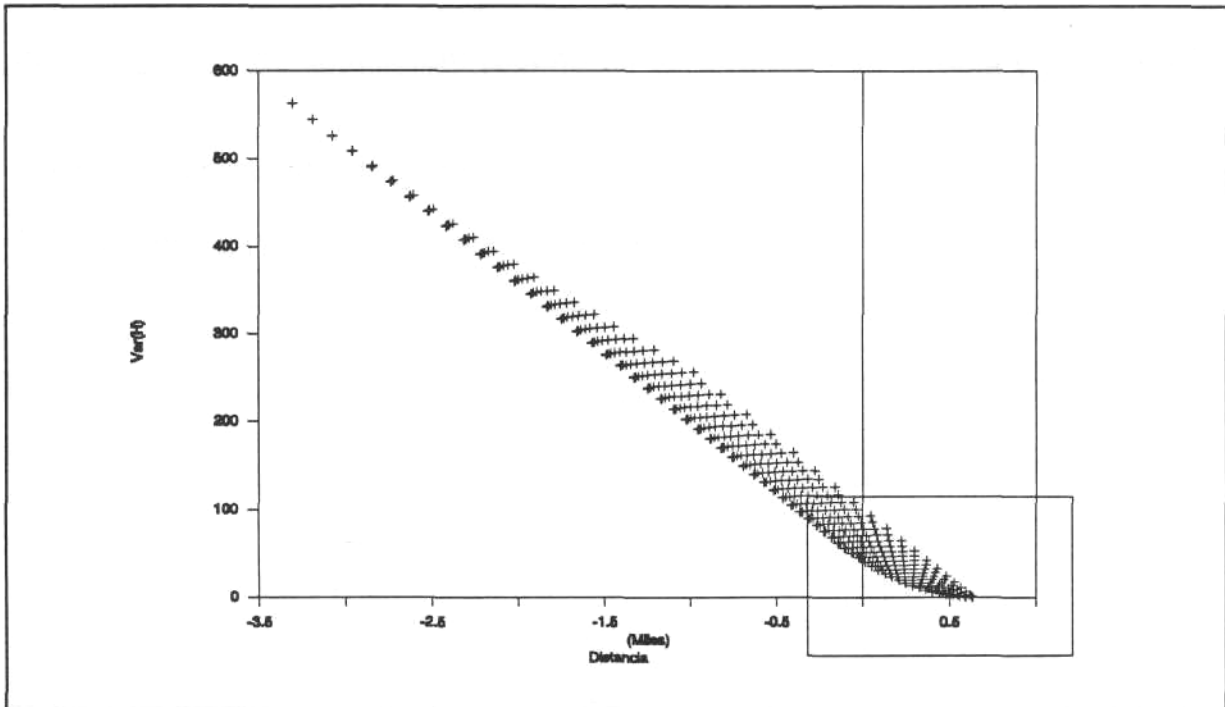


Figura 3.4a: Gráfico Distancia-Variación para el caso del tubo calefactor.

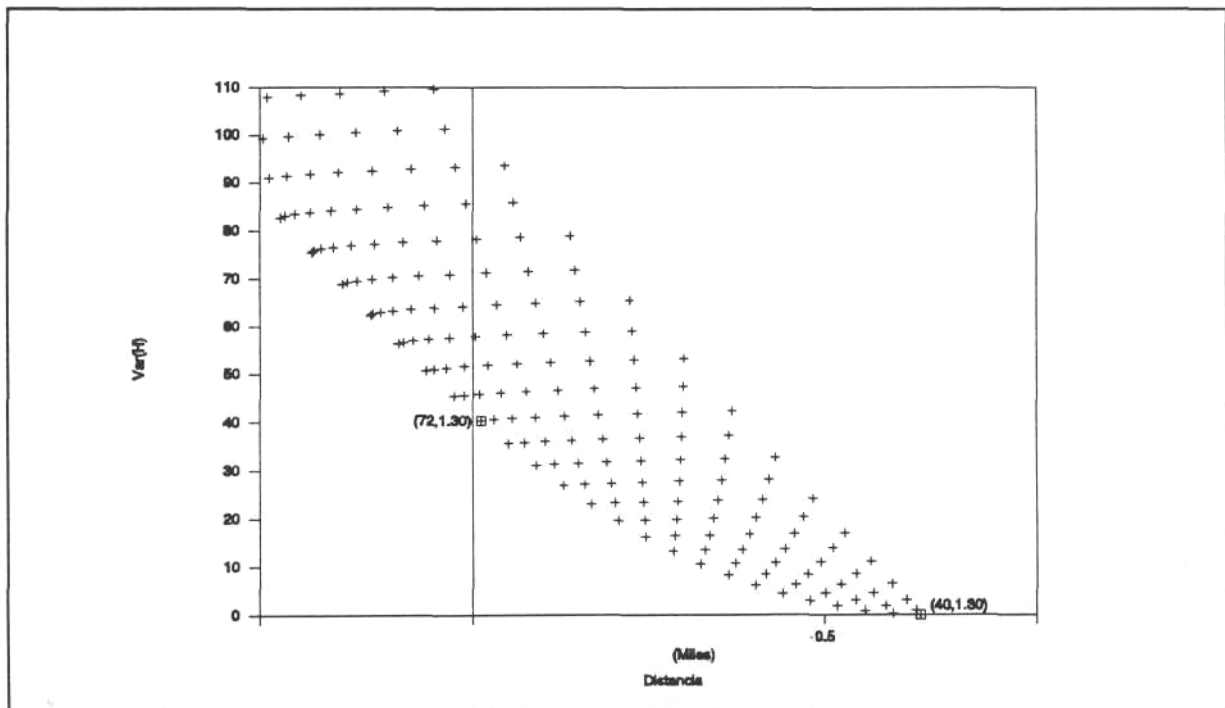


Figura 3.4b: Detalle de la zona de variación mínima del gráfico anterior.

3.5 Ejemplo de aplicación: Diseño de un circuito con bobina y resistencia.

3.5.1 Planteamiento del problema.

Supongamos que deseamos montar circuitos del tipo:

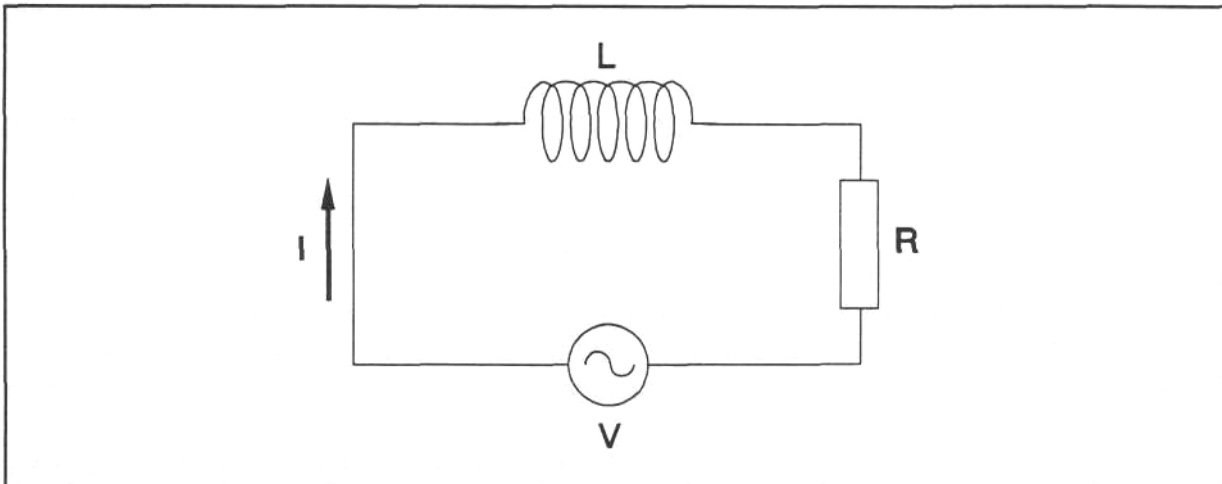


Figura 3.5: Circuito con bobina y resistencia.

de forma que la intensidad máxima que circule por los mismos sea de 10 Amperios.

El valor de la intensidad¹ que circula por un circuito de este tipo viene dado por la fórmula:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (2\pi 50 L)^2}} \quad [3.2]$$

Supongamos también que para el montaje de los circuitos disponemos de:

Fuentes de alimentación: Proporcionan un voltaje exacto igual a 100 voltios.

Resistencias: Su valor sigue una distribución normal centrada en su valor nominal y con cierta desviación tipo.

Bobinas: Al igual que ocurre con las resistencias, disponemos de bobinas cuyo valor real se distribuye según una normal

¹Nos referimos siempre a la intensidad máxima.

cuya media coincide con su valor nominal.

El problema que nos planteamos resolver es: ¿Cuáles son los valores óptimos de R y L de forma que la intensidad máxima que circule por el circuito sea de 10 amperios, con la mínima variabilidad en torno a este valor?.

Analizaremos el problema utilizando en primer lugar el modelo real y después lo haremos a través del modelo experimental, comparando los resultados obtenidos por los dos caminos.

3.5.2 Resolución utilizando el modelo real.

3.5.2.1 Esperanza Matemática y Varianza de I.

Al ser R y L variables aleatorias, la intensidad que circule por cada uno de los circuitos no será siempre la misma, sino que deberemos considerarla como una nueva variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad. De dicha distribución nos interesa conocer su esperanza matemática $E(I)$ y su varianza $\text{Var}(I)$.

La expresión de la esperanza matemática de I tiene la forma:

$$E(I) = \iint \frac{V}{\sqrt{R^2 + (2\pi 50 L)^2}} f(R) f(L) dR dL$$

en la que $f(R)$ y $f(L)$ representan las funciones densidad de probabilidad de R y L respectivamente.

La integral planteada es -en principio- inabordable, y por ello recurriremos a la descomposición de la expresión de I en serie de Taylor en torno al punto (R_n, L_n) , obteniendo:

$$\begin{aligned} I = & I(R_n, L_n) + \left. \frac{\partial I}{\partial R} \right|_{(R_n, L_n)} (R - R_n) + \left. \frac{\partial I}{\partial L} \right|_{(R_n, L_n)} (L - L_n) + \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial R^2} \right|_{(R_n, L_n)} (R - R_n)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial L^2} \right|_{(R_n, L_n)} (L - L_n)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial R \partial L} \right|_{(R_n, L_n)} (R - R_n) (L - L_n) + \text{Residuo} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 E(I) = & I(R_n, L_n) + \left. \frac{\partial I}{\partial R} \right|_{(R_n, L_n)} E(R - R_n) + \left. \frac{\partial I}{\partial L} \right|_{(R_n, L_n)} E(L - L_n) + \\
 & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial R^2} \right|_{(R_n, L_n)} E(R - R_n)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial L^2} \right|_{(R_n, L_n)} E(L - L_n)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial R \partial L} \right|_{(R_n, L_n)} E[(R - R_n)(L - L_n)] + E(\text{Residuo})
 \end{aligned}$$

Y tenemos que:

$$\begin{aligned}
 E(R - R_n) &= E(R) - E(R_n) = 0 \\
 E(L - L_n) &= E(L) - E(L_n) = 0 \\
 E[(R - R_n)(L - L_n)] &= \text{Cov}(R, L) = 0 \\
 E(R - R_n)^2 &= \sigma_R^2 \\
 E(L - L_n)^2 &= \sigma_L^2
 \end{aligned}$$

Así pues, podemos escribir:

$$E(I) = I(R_n, L_n) + \left. \frac{\partial^2 I}{\partial R^2} \right|_{(R_n, L_n)} \sigma_R^2 + \left. \frac{\partial^2 I}{\partial L^2} \right|_{(R_n, L_n)} \sigma_L^2 + E(\text{Residuo})$$

Obteniéndose que²:

$$E(I) = 100 \left[A^{-0.5} - \frac{1}{2} (A^{-1.5} - 3R_n^2 A^{-2.5}) \sigma_R^2 - \frac{1}{2} (KA^{-1.5} - 3R_n L_n KA^{-2.5}) \sigma_L^2 \right]$$

Siendo:

² A partir de este punto no se considera E(Residuo). Dicho valor es prácticamente despreciable en el rango de varianzas que se estudia. Nótese que el término de derivadas de tercer orden es nulo (por ser $E(R - R_n)^3 = E(L - L_n)^3 = 0$). El término correspondiente a las derivadas de cuarto orden puede calcularse considerando que $E(R - R_n)^4 = 3\sigma_R^4$ (análogamente para L).

$$A = R_n^2 + (2\pi 50 L_n)^2$$

$$K = (2\pi 50)^2$$

Para calcular la varianza de I puede aplicarse la fórmula:

$$\sigma_I^2 = E(I^2) - [E(I)]^2 \quad [3.3]$$

$E(I^2)$ puede calcularse utilizando el mismo procedimiento que para calcular $E(I)$, descomponiendo la expresión de I^2 en serie de Taylor, obteniéndose:

$$E(I^2) = 10000 [A^{-1} - \sigma_R^2 (A^{-2} - 4R_n^2 A^{-3}) - \sigma_L^2 (KA^{-2} - 4K^2 L_n^2 A^{-3})]$$

A partir de $E(I)$ y $E(I^2)$ es inmediato el cálculo de $\text{Var}(I)$ mediante la expresión [3.3].

3.5.2.2 Valores óptimos de R y L.

Siguiendo el método habitual, utilizamos una hoja de cálculo (tabla 3.4) colocando en la 1ª columna los valores de R desde 0 hasta 10 Ω (no tienen sentido valores fuera de este intervalo) con incrementos de 0.05 Ω .

En la 2ª columna se han colocado los valores de L que junto con el correspondiente valor de R dan una $E(I) = 10$.

Los valores de L se han calculado en primera aproximación despejándolos de la expresión 3.2 y posteriormente se han ajustado³ por un procedimiento iterativo hasta conseguir que $E(I) = 10.00$.

De esta forma, es fácil descubrir cuales son los valores de R y L que dando $E(I) = 10.00$ producen asimismo un valor mínimo de $\text{Var}(I)$ (cuarta columna).

³ $I(R_n, L_n)$ no coincide con $E[I(R, L)]$. En general, siendo x,y dos variables aleatorias normales y $f(x,y)$ una función de las mismas, $f(\mu_x, \mu_y)$ no coincide con $E[f(x,y)]$ si $f''_{xx}(\mu_x, \mu_y)$ o $f''_{yy}(\mu_x, \mu_y)$ son distintos de cero. La diferencia es tanto mayor cuanto mayor sea la varianza de x (caso de $f''_{xx}(\mu_x, \mu_y) \neq 0$) o y (caso de $f''_{yy}(\mu_x, \mu_y) \neq 0$), tal como puede observarse a partir de la descomposición de I en serie de Taylor en los puntos (μ_x, μ_y) .

	A	B	C	D	E	F	G
1	R	L	E(y)	V(y)		Kr:	0.1
2	0	0.03168	10.00	4.0357		Kl:	0.1
3	0.05	0.03168	10.00	4.0353			
4	0.1	0.03168	10.00	4.0344			
5	0.15	0.03167	10.00	4.0353			
6	0.2	0.03167	10.00	4.0332			
7	0.25	0.03167	10.00	4.0304			
8	0.3	0.03166	10.00	4.0295			
9	0.35	0.03166	10.00	4.0255			
10	0.4	0.03165	10.00	4.0234			
11	0.45	0.03165	10.00	4.0182			
12	0.5	0.03164	10.00	4.0149			
13	0.55	0.03163	10.00	4.0110			
14	0.6	0.03162	10.00	4.0064			
15	0.65	0.03161	10.00	4.0013			
	:	:	:	:			

Tabla 3.4: Fragmento de la hoja de cálculo utilizada para estudiar las $\text{Var}(y)$ en función de R y L forzando $E(y)=10.00$.

Considerando que las desviaciones tipo de R y L son proporcionales a sus valores nominales, es decir:

$$\sigma_R = k_R R_n$$

$$\sigma_L = k_L L_n$$

se han construido (directamente a partir de sus correspondientes hojas de calculo), los gráficos de las figuras 3.6 y 3.7, el primero de los cuales con $\sigma_R = 0.2R$, $\sigma_L = 0.01 L$ y el segundo con $\sigma_R = 0.1 R$, $\sigma_L = 0.01 L$. En ellos se presenta la evolución de $\text{Var}(I)$ en función de L (con $E(I)=10$, por tanto a cada valor de L le corresponde un valor de R). A partir de la misma hoja de cálculo, modificando únicamente los coeficientes que figuran en el extremo superior derecho, se podrían obtener los gráficos para cualquier par de valores k_R , k_L .

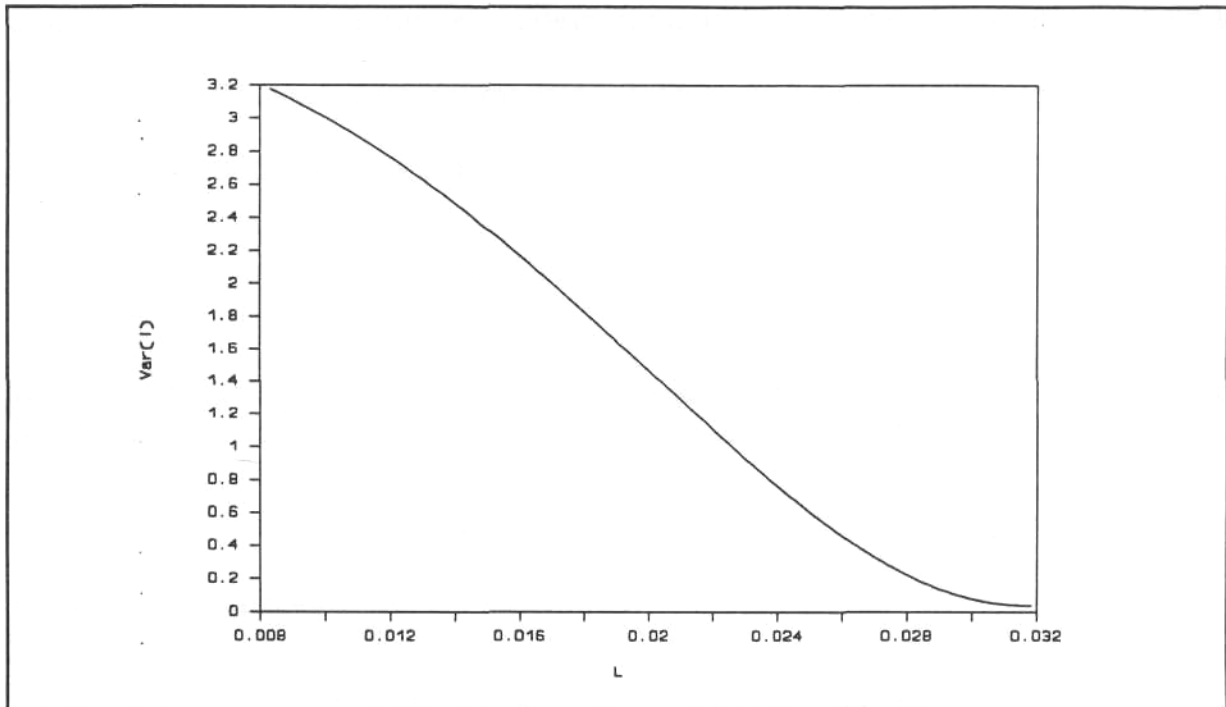


Figura 3.6: Varianza de I en función de L con $k_R=0.2$ y $k_L=0.01$. (Para $E(I)=10$).

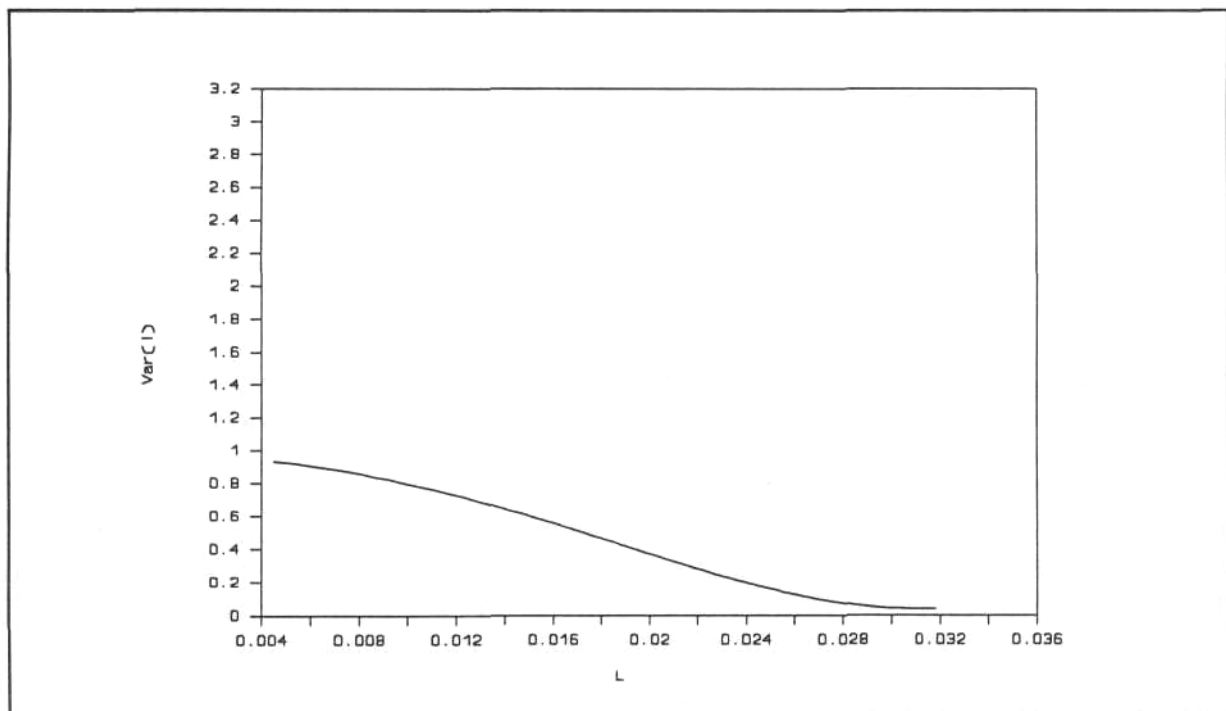


Figura 3.7: Varianza de I en función de L con $k_R=0.1$ y $k_L=0.01$. (Para $E(I)=10$).

3.5.3 Resolución utilizando el modelo deducido a través de la experimentación.

3.5.3.1 Planteamiento del modelo y estimación de sus parámetros.

En este caso debemos plantear un modelo del tipo:

$$I = \beta_0 + \beta_1 R + \beta_2 L + \beta_{11} R^2 + \beta_{22} L^2 + \beta_{12} RL$$

A partir del correspondiente diseño compuesto central ortogonal (que en este caso resulta ser simplemente un 3^2) y fijando los niveles a los valores:

$$\begin{array}{l} R \rightarrow - : 4 \Omega \quad \quad \quad + : 6 \Omega \\ L \rightarrow - : 0.025 \text{ H} \quad \quad + : 0.030 \text{ H} \end{array}$$

se llega a la ecuación:

$$I = 30.5 - 1.64 R - 827 L + 6317 L^2 + 41.1 RL$$

y operando se obtiene:

$$E(I) = 30.5 - 1.64 R - 827 L + 6317.3 L^2 + 41.1 RL$$

$$V(I) = (-1.64 + 41.1)^2 k_R^2 R^2 + (-827 + 12634L + 41.1R)^2 k_L^2 L^2$$

3.5.3.2 Valores óptimos de R y L Comparación con los resultados obtenidos con la utilización del modelo real.

Utilizando un procedimiento idéntico al desarrollado anteriormente, se llega a los gráficos de las figuras 3.8 y 3.9 en las que sólo aparece el rango de valores de L en que se ha experimentado y se comparan los valores de la varianza de I en función de L según esta se calcule con el modelo real o el experimental.

En los dos gráficos las curvas son muy parecidas, y el valor óptimo de L es, tanto si se considera el modelo real como el experimental, el menor posible

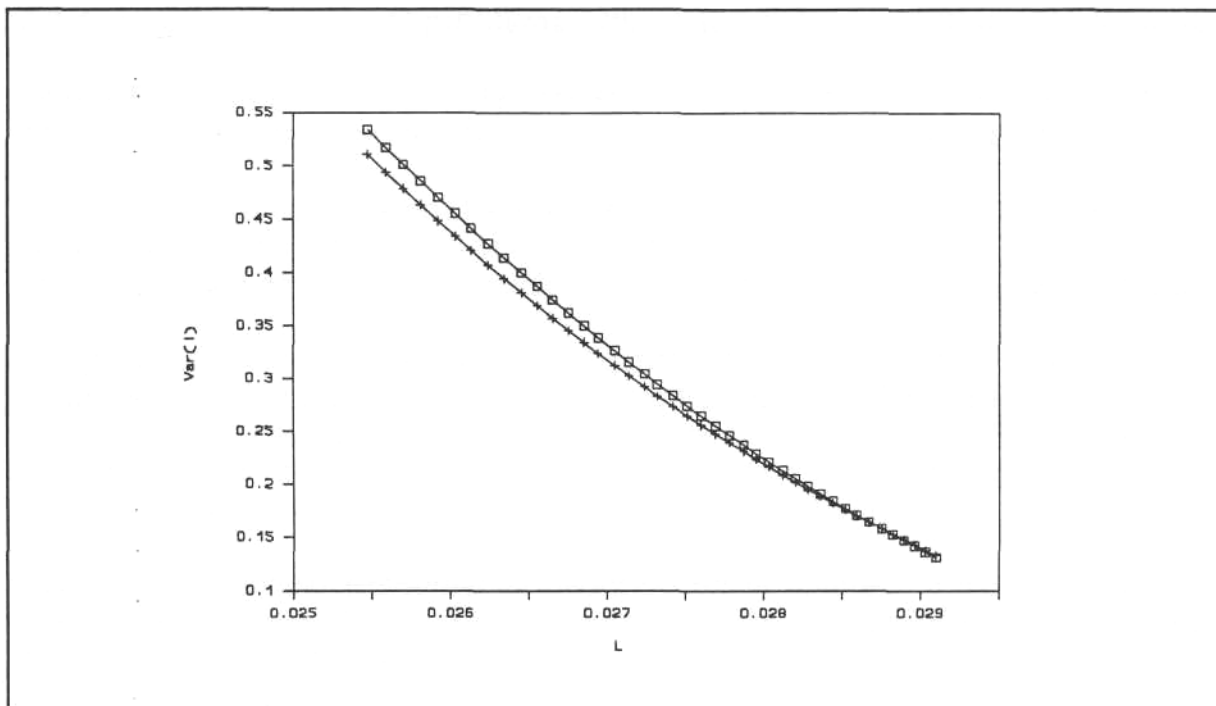


Figura 3.8: Varianza de I en función de L según el modelo real (□) y el experimental (+). $k_R=0.2$ y $k_L=0.01$.

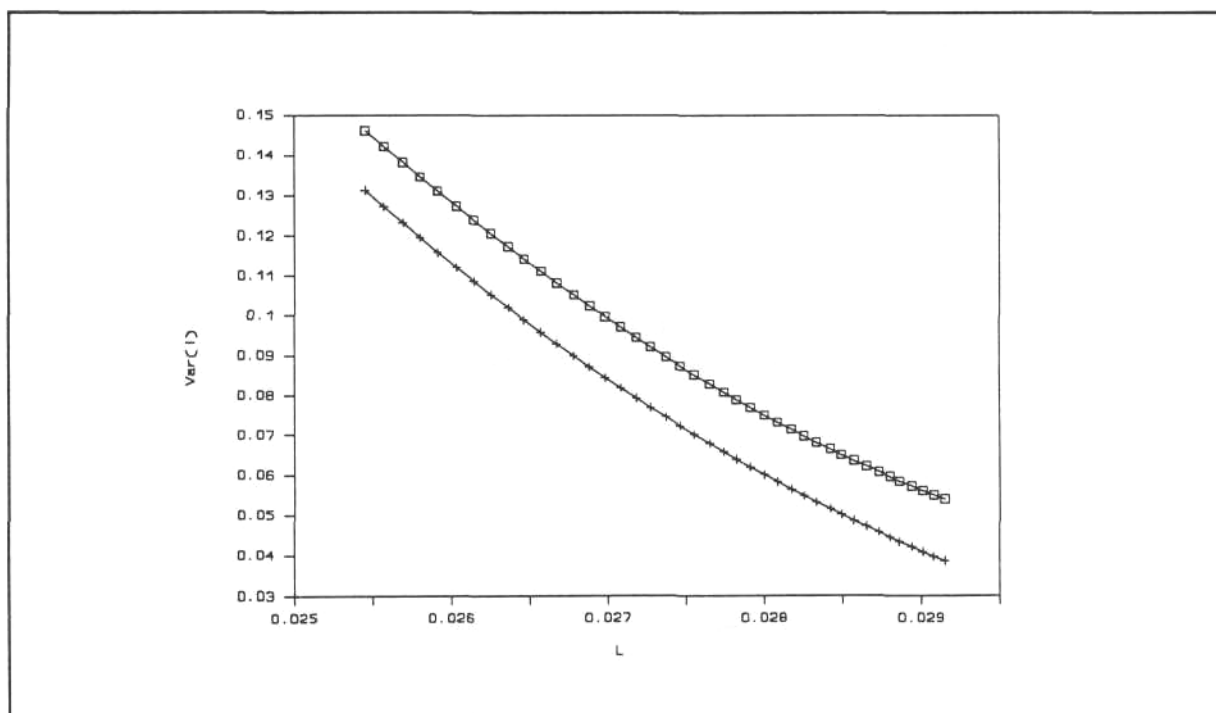


Figura 3.9: Varianza de I en función de L según el modelo real (□) y el experimental (+). $k_R=0.1$ y $k_L=0.01$.

3.5.4 Nuevo enfoque del problema. Utilización del gráfico Distancia-Variancia.

Otro enfoque del problema puede consistir en aceptar una cierta desviación del valor nominal de I si con esta desviación se consigue disminuir su variabilidad.

Supongamos, tal como hemos hecho anteriormente, que los valores de R deben estar comprendidos entre 4 y 6 Ω y los de L entre 0.025 y 0.030 H. La construcción del gráfico D-V nos será útil para decidir cuales son los niveles óptimos de los factores.

La figura 3.10 representa el gráfico D-V construido a partir de una hoja de cálculo en la que R se ha variado de 4 a 6 Ω con incrementos de 0.02 Ω y para cada valor de R , valores de L de 0.025 a 0.030 H con incrementos de 0.0005 H. Para cada par de valores R y L se ha calculado $E(I)$ y $\text{Var}(I)$. Del gráfico se deduce que la $\text{Var}(I)$ puede disminuirse de 0.14 a 0.11 a costa de obtener una $E(I) = 10.25$.

Utilizando el modelo experimental deducido en el apartado 3.5.3.1 se obtiene el gráfico de la figura 3.11, prácticamente idéntico al anterior y del que pueden obtenerse las mismas conclusiones.

Nótese que, en este caso, aunque la intensidad nominal deba ser necesariamente de 10.00 A, este enfoque del problema es probablemente más adecuado que el anterior, ya que modificando el valor de V (valor de la fuente de alimentación) puede llevarse $E(I)$ al nivel deseado manteniendo la variabilidad mínima.

(Ver gráficos 3.11 y 3.12
en página siguiente)

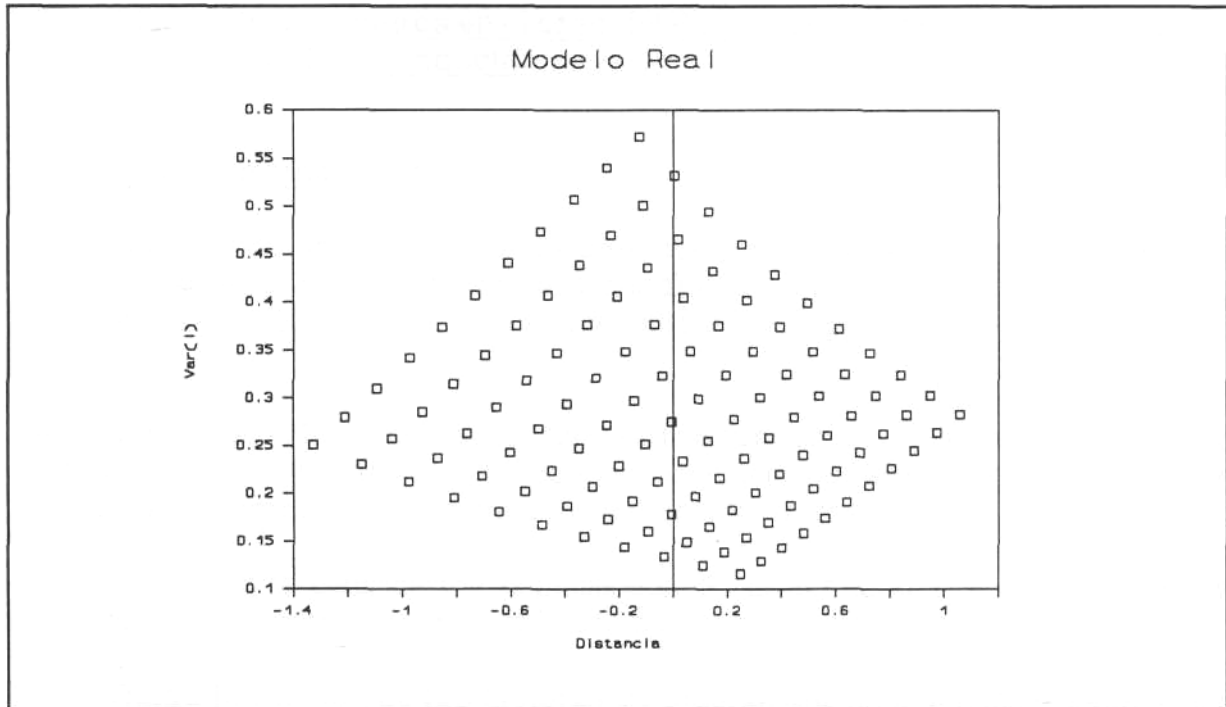


Figura 3.10: Gráfico Distancia-Varianza a partir del modelo real. $K_R=0.2$, $k_L=0.01$.

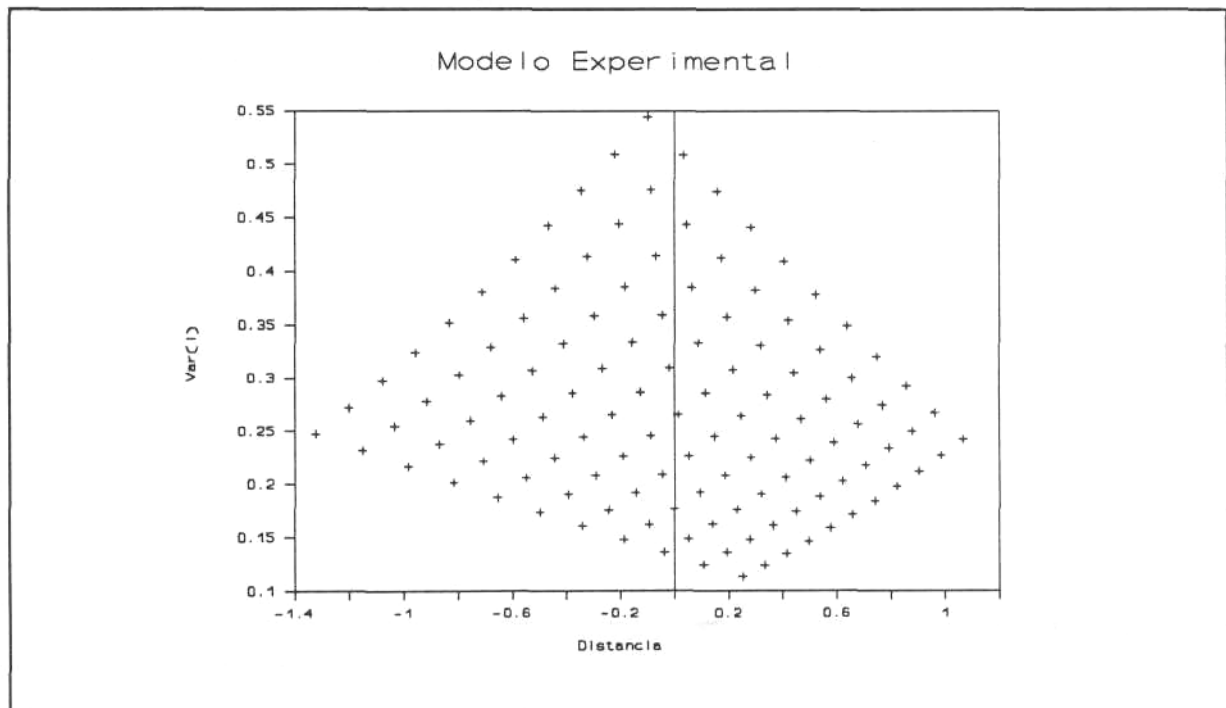


Figura 3.11: Gráfico Distancia-Varianza según el modelo experimental. $k_R=0.2$ y $k_L=0.01$

3.6 Diseño de parámetros en el caso del Puente de Wheatstone. Comparación con el Método de Taguchi.

3.6.1 Planteamiento General.

A continuación se analiza, aplicando un procedimiento basado en la metodología propuesta en esta Tesis, el típico caso del diseño de parámetros en un Puente de Wheatstone, el estudio del cual ya se presentó en el Capítulo 1 aplicando el Método de Taguchi.

Recordemos que el Puente de Wheatstone es un sencillo circuito eléctrico usado para medir resistencias (al igual que Taguchi, se considera que estas resistencias son de 2 Q), cuya descripción y forma de uso se comenta en el apartado 1.4.2.2.

De acuerdo con la clasificación especificada en el apartado 1.3, en este caso la variabilidad de la respuesta está afectada por dos tipos de ruido:

- * **Ruido intrínseco de los factores de diseño**, debido a que los valores de los componentes para montar el circuito pueden diferir de su valor nominal.
- * **Ruido exterior**, correspondiente a la falta de precisión en la resistencia variable B y el galvanómetro X.

Por tanto, este será un caso en que se combinan las dos formas de ruido que se han definido.

Se considera que los factores de diseño pueden variar dentro de los niveles extremos que fija Taguchi, es decir:

Factor	Rango de variación posible
A	20 - 500 Ω
C	2 - 50 Ω
D	2 - 50 Ω
E	1.2 - 30 V
F	2 - 50 Ω

Y también, al igual que Taguchi, se considera que los factores de ruido se pueden mover en los niveles:

<u>Factor</u>	<u>Rango de variación posible</u>		
B	Teórico -0.3 %	-	Teórico + 0.3%
X	-2 mA	-	2 mA

3.6.2 Hipótesis sobre el modelo de la respuesta.

Como en este caso todos los factores de diseño están afectados de ruido intrínseco, deberemos plantear un modelo con términos cuadráticos de la forma:

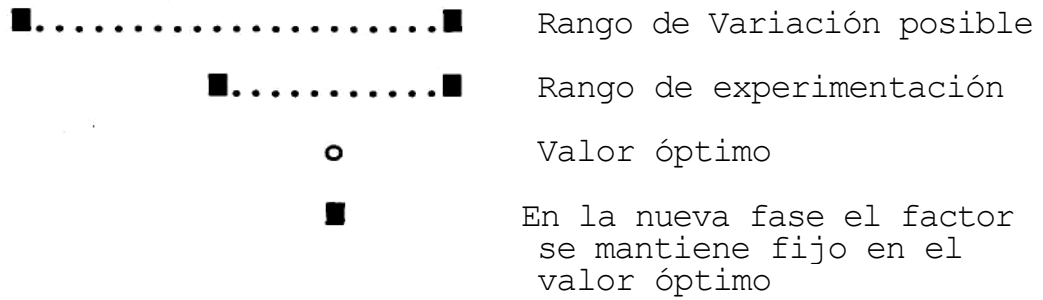
$$\begin{aligned}
 y = & \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C + \beta_4 D + \beta_5 E + \beta_6 F + \beta_7 X + \\
 & \beta_{11} A^2 + \beta_{22} B^2 + \beta_{33} C^2 + \beta_{44} D^2 + \beta_{55} E^2 + \beta_{66} F^2 + \beta_{77} X^2 + \\
 & \beta_{12} AB + \beta_{13} AC + \beta_{14} AD + \beta_{15} AE + \beta_{16} AF + \beta_{17} AX + \\
 & \beta_{23} BC + \beta_{24} BD + \beta_{25} BE + \beta_{26} BF + \beta_{27} BX + \\
 & \beta_{34} CD + \beta_{35} CE + \beta_{36} CF + \beta_{37} CX + \\
 & \beta_{45} DE + \beta_{46} DF + \beta_{47} DX + \\
 & \beta_{56} DF + \beta_{57} DX + \\
 & \beta_{67} FX + \varepsilon
 \end{aligned}$$

3.6.3 Método de Análisis Basado en la Metodología Propuesta.

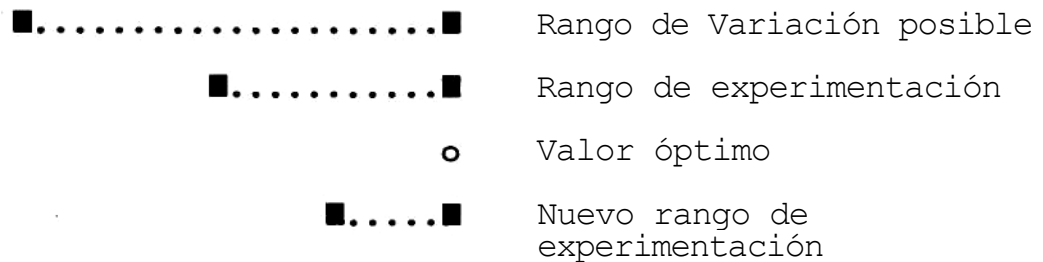
La búsqueda de cuál es la combinación óptima de los factores de diseño se realiza de forma secuencial, siguiendo el siguiente proceso:

1. Fijar los niveles para cada uno de los factores de diseño, dentro de su rango de variación posible. En la primera fase de experimentación el nivel + de cada factor coincide con el extremo superior del rango de variación, y el nivel - con el punto central (aproximadamente) de dicho rango.
2. Experimentar con los niveles fijados y estimar los parámetros del modelo.
3. Determinar cuál es la combinación óptima de los factores en el rango de variación experimentado.
4. Se inicia otra fase de análisis fijando los niveles de los factores de la siguiente forma:

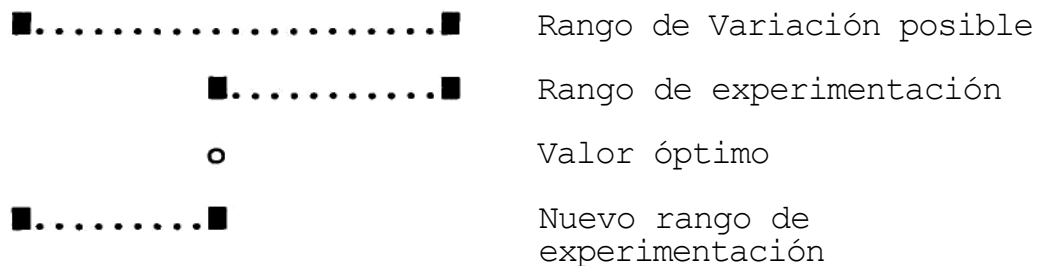
* Si el óptimo estaba dentro de los niveles de experimentación anteriores, se deja fijo a ese valor.



* Si el óptimo coincidía con un extremo del rango de variación posible, se mantiene el nivel que coincide con el óptimo, variando el otro nivel de forma que la distancia entre ellos se reduzca aproximadamente a la mitad.



* Si el óptimo coincidía con un nivel de experimentación (distinto de los extremos máximos de variación), se fijan los nuevos niveles de forma que si el óptimo era el nivel + ahora pase a ser el - y viceversa.



* Los niveles de los factores de ruido se mantienen constantes.

5. Actuando sucesivamente con el criterio descrito anteriormente, el proceso acaba cuando ya se ha "barrido" el rango de variación de todas las variables.

3.6.3.1 Primera Fase de Experimentación y Análisis.

En esta primera fase se han tomado los niveles que se indican en la tabla 3.3.

Factor	Nivel	
	-	+
A (Ω)	250	500
B (Ω)	$2 \cdot C/D(1-0.003)$	$2 \cdot C/D(1+0.003)$
C (Ω)	25	50
D (Ω)	25	50
E (V)	15	30
F (Ω)	25	50
X (mA)	-2	2

Tabla 3.5: Valores a que se han fijado cada uno de los factores en la primera fase de análisis. (La expresión de B corresponde a su valor teórico $\pm 0.3\%$).

La estimación de los parámetros del modelo se ha realizado mediante un diseño 2^7+C con la siguiente matriz de diseño:

	A	B	C	D	E	F	X
	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1	-1
				.			
				.			
	0	0	0	0	0	0	0
	$-\alpha$	0	0	0	0	0	0
	α	0	0	0	0	0	0
	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0
	0	α	0	0	0	0	0
				.			
				.			
	0	0	0	0	0	0	$-\alpha$
	0	0	0	0	0	0	α

De acuerdo con la tabla 3.1, el valor de a se ha fijado igual a 1.909, obteniéndose de

esta forma un diseño ortogonal.

Mediante el paquete de software estadístico STATGRAPHICS, se ha modelizado el resultado obtenido en función de cada uno de los factores e interacciones que figuran en el modelo. Se ha seguido la estrategia de la regresión paso a paso, con $F(\text{entrada}) = F(\text{salida}) = 4$, obteniéndose la ecuación que figura en la tabla 3.6.

Forzando la entrada de los términos cuadráticos, se obtienen los coeficientes y niveles de significación que se indican en la tabla 3.7.

El no ser significativos los términos cuadráticos implica que el valor de los factores de diseño no afecta a la varibilidad de la respuesta.

Model fitting results for: Y1

Independent variable	coefficient	std. error	t-value	sig.level
CONSTANT	2	0.006855	291.7632	0.0000
AX	-4.761837	0.259886	-18.3228	0.0000
CX	20.838132	2.598858	8.0182	0.0000
DX	-23.206367	2.598858	-8.9294	0.0000
EX	78.935777	4.33143	18.2240	0.0000
FX	-45.449368	2.598858	-17.4882	0.0000

R-SQ. (ADJ.) = 0.9611 SE= 0.081972 MAE= 0.055890 DurWat= 2.275
 Previously: 0.0000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000
 143 observations fitted, forecast(s) computed for 0 missing val. of dep. var.

Tabla 3.6: Modelo obtenido utilizando la estrategia de regresión paso a paso con $F(\text{entrada})=F(\text{salida})=4$.

Model fitting results for: Y1

Independent variable	coefficient	std. error	t-value	sig.level
CONSTANT	246.786595	3.866537E5	0.0006	0.9995
AX	-4.761837	0.266791	-17.8486	0.0000
CX	20.838132	2.667909	7.8107	0.0000
DX	-23.206367	2.667909	-8.6983	0.0000
EX	78.935777	4.446514	17.7523	0.0000
FX	-45.449368	2.667909	-17.0356	0.0000
A2	3.51882E-12	7.696087E-8	0.0000	1.0000
B2	0.000027	0.002524	0.0106	0.9915
C2	-1.052222E-7	0.000013	-0.0084	0.9933
D2	1.099463E-7	0.000013	0.0085	0.9932
E2	9.774501E-10	0.000021	0.0000	1.0000
F2	3.51882E-10	7.696087E-6	0.0000	1.0000
X2	258.732479	4.086817E5	0.0006	0.9995

R-SQ. (ADJ.) = 0.9590 SE= 0.084150 MAE= 0.055899 DurWat= 2.275
 Previously: 0.9594 0.083829 0.055899 0.055899 2.275
 143 observations fitted, forecast(s) computed for 0 missing val. of dep. var.

Tabla 3.7: Modelo obtenido forzando la introducción de los términos cuadráticos.

Se observa también que el único foco que produce una variabilidad apreciable en la respuesta está en la variabilidad de X, que puede neutralizarse en buena parte asignando determinados valores a los factores de diseño A, C, D, E y F, que interaccionan con X.

Estamos, por tanto, ante un caso de diseño de los parámetros de un producto afectado únicamente de ruido externo (recuérdese que el amperímetro no es un factor de diseño, y su variabilidad es un caso típico de ruido externo). Estamos, por tanto, en un caso del tipo de los planteados en el Capítulo 2.

Aplicando la ecuación 2.1 se obtiene que la varianza de y puede expresarse de la forma:

$$Var(y) = (-4.76 A + 28.84 C - 23.21 D + 78.94 E - 45.45 F)^2 Var(X)$$

Y a partir de la ecuación 2.2 se deduce que:

$$E(Y) = 2$$

Por tanto, no deberemos ocuparnos de la distancia al óptimo, sino simplemente de identificar la combinación de factores de diseño que produce la mínima variabilidad de la respuesta.

Esta determinación se ha realizado mediante una hoja de cálculo (tabla 4.4) en la que cada uno de los factores se ha colocado a 3 niveles (-1, 0, 1) y se han formado todas las combinaciones posibles de estos niveles dando un total de $3^5 = 243$ combinaciones distintas (columnas A-E).

A continuación (columnas F-J) se han colocado los valores de los factores sin codificar¹ y en la columna K se ha calculado la varianza de la respuesta que produce cada combinación de factores, aplicando la fórmula 3.4. Como valor de la varianza de X se ha tomado 0.0001 (En realidad este es un valor arbitrario que no afecta al resultado obtenido).

En otra zona de la misma hoja de cálculo (tabla 4.5) se han ordenado las varianzas de menor a mayor junto con su correspondiente combinación de factores de diseño. De esta forma se obtiene que la combinación que da varianza mínima es:

$$A: 250, C: 25, D: 25, E: 30, F: 25$$

¹Los valores sin codificar se calculan a partir de los valores codificados. Esta construcción permite poder aprovechar la misma hoja de cálculo para distintos niveles de los factores.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	A	C	D	E	F	Asc	Csc	Dsc	Esc	Fsc	Var(y)
2	-1	-1	-1	-1	-1	250	25	25	15	25	144.45
3	-1	-1	-1	-1	0	250	25	25	15	37.5	313.28
4	-1	-1	-1	-1	1	250	25	25	15	50	546.67
5	-1	-1	-1	0	-1	250	25	25	22.5	25	37.19
6	-1	-1	-1	0	0	250	25	25	22.5	37.5	138.76
7	-1	-1	-1	0	1	250	25	25	22.5	50	304.88
8	-1	-1	-1	1	-1	250	25	25	30	25	0.03
9	-1	-1	-1	1	0	250	25	25	30	37.5	34.33
10	-1	-1	-1	1	1	250	25	25	30	50	133.19
11	-1	-1	0	-1	-1	250	25	37.5	15	25	222.59
12	-1	-1	0	-1	0	250	25	37.5	15	37.5	424.39

Tabla 3.8a: Primera fase de análisis. Porción de la hoja de cálculo con que se ha calculado la varianza de la respuesta para cada una de las condiciones de experimentación (niveles -1, 1) y sus valores intermedios (nivel 0).

	M	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Var(X):	0.0001		Asc	Csc	Dsc	Esc	Fsc	Var(y)
2				250	25	25	30	25	0.03
3	X:	0		250	37.5	37.5	30	25	0.22
4	AX:	-4.76184		250	50	25	30	37.5	0.42
5	BX:	0		250	50	50	30	25	0.59
6	CX:	20.8381		250	50	25	22.5	25	0.79
7	DX:	-23.2064		375	50	25	30	25	0.85
8	EX:	78.9358		250	50	37.5	30	25	4.54
9	FX:	-45.4494		250	37.5	25	30	25	5.89
10				250	25	37.5	30	25	9.48
11				250	37.5	25	30	37.5	10.59
12				250	37.5	50	30	25	11.39

Tabla 3.8b: Porción de la hoja de cálculo en que se presentan los valores de los factores junto con la varianza de la respuesta, ordenada de menor a mayor.

3.6.3.2 Segunda Fase de Experimentación y Análisis.

De acuerdo con lo comentado anteriormente, en esta segunda fase se fijarán los siguientes niveles de los factores:

Factor	Nivel	
	-	+
A (Ω)	100	250
B (Ω)	$2 \cdot C/D(1-0.003)$	$2 \cdot C/D(1+0.003)$
C (Ω)	10	25
D (Ω)	10	25
E (V)	25	30
F (Ω)	10	25
X (mA)	-2	2

Tabla 3.9: Valores a que se han fijado los factores en la segunda fase de análisis.

Como ya hemos visto que los términos cuadráticos son claramente no significativos, podemos prescindir del punto central y la estrella realizando simplemente un diseño factorial que en este caso será un 2^{7-2} , utilizando como generadores:

$$\begin{aligned} F &= ABCD \\ X &= ABDE \end{aligned}$$

A partir de los resultados obtenidos, se llega a la ecuación que figura en la tabla 3.10.

Model fitting results for: Y2							
Independent variable	coefficient	std. error	t-value	sig.level			
CONSTANT	1.99232	0.050455	39.4871	0.0000			
AX	-1.954206	0.219958	-8.8845	0.0000			
CX	8.470665	2.199575	3.8510	0.0007			
DX	-7.861035	2.199575	-3.5739	0.0014			
EX	10.019816	2.677641	3.7420	0.0009			
FX	-17.07634	2.199575	-7.7635	0.0000			

R-SQ. (ADJ.) =	0.9510	SE=	0.285416	MAE=	0.184351	Durbwat=	2.298
Previously:	0.0000		0.000000		0.000000		0.000
32 observations fitted, forecast(s) computed for 0 missing val. of dep. var.							

Tabla 3.10: Modelo obtenido en la segunda fase de análisis.

Actualizando los niveles de los factores y los coeficientes de la ecuación en la hoja de cálculo usada anteriormente, se obtiene que la mejor combinación de los factores

de diseño es ahora:

A: 100, C: 17.5, D: 10, E: 30, F: 10

tal como puede deducirse a partir de la tabla 3.11.

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X
1	Var(X)	...	0.0001		Asc	Csc	Dsc	Esc	Psc	Var(y)
2		Coeficie.:			100	17.5	10	30	10	0.0016
3		X:	0		100	25	17.5	30	10	0.0074
4		AX:	-1.954206		100	25	17.5	27.5	10	0.0270
5		BX:	0		100	25	10	25	10	0.0305
6		CX:	8.470665		100	17.5	10	27.5	10	0.0442
7		DX:	-7.861035		100	25	17.5	25	10	0.1721
8		EX:	10.019816		100	25	10	27.5	10	0.1808
9		FX:	-17.07634		100	17.5	10	25	10	0.2122
10					100	25	25	30	10	0.2535
11					100	17.5	17.5	30	10	0.3016
12					100	10	10	30	10	0.3539

Tabla 3.11: Segunda fase de análisis. Porción de la hoja de cálculo en que se presentan los valores de los factores junto con la varianza de la respuesta, ordenada de menor a mayor.

3.6.3.3 Tercera Fase de Experimentación y Análisis.

En esta tercera fase se fijan los niveles:

Factor	Nivel	
	-	+
A (Ω)	20	100
B (Ω)	$2 * C / D (1 - 0.003)$	$2 * C / D (1 + 0.003)$
C (Ω)	17.5	17.5
D (Ω)	2	10
E (V)	30	30
F (Ω)	2	10
X (mA)	-2	2

Tabla 3.12: Valores a que se han fijado los factores en la tercera fase de análisis.

Y se realiza también un diseño 2^{7-2} manteniendo constantes los valores de C y E. El modelo obtenido es el que se indica en la tabla 3.13

Model fitting results for: Y3

Independent variable	coefficient	std. error	t-value	sig.level
CONSTANT	2	0.008562	233.6001	0.0000
AX	-0.916499	0.060104	-15.2485	0.0000
DX	3.686913	0.601044	6.1342	0.0000
FX	-4.476422	0.601044	-7.4477	0.0000

R-SQ. (ADJ.) = 0.9555 SE= 0.048432 MAE= 0.034904 DurWat= 2.472
 Previously: 0.0000 0.000000 0.000000 0.000000 0.0000
 32 observations fitted, forecast(s) computed for 0 missing val. of dep. var.

Tabla 3.13: Modelo obtenido en la tercera fase de análisis.

Y actualizando nuevamente la hoja de calculo que venimos usando, se obtiene:

	N	O	P	Q	R	S	T	U	U	X
1	Var(X)	...	0.0001		Asc	Csc	Dsc	Esc	Fsc	Var(y)
2		Coeficie.:			20	17.5	6	30	2	0.0027
3		X:	0		20	17.5	6	30	2	0.0027
4		AX:	-0.916499		20	17.5	6	30	2	0.0027
5		BX:	0		20	17.5	6	30	2	0.0027
6		CX:	0		20	17.5	6	30	2	0.0027
7		DX:	3.686913		20	17.5	6	30	2	0.0027
8		EX:	0		20	17.5	6	30	2	0.0027
9		FX:	-4.476422		20	17.5	6	30	2	0.0027
10					20	17.5	6	30	2	0.0027
11					20	17.5	10	30	6	0.0069
12					20	17.5	10	30	6	0.0069

Tabla 3.14: Tercera fase de análisis. Porción de la hoja de cálculo en que se presentan los valores de los factores junto con la varianza de la respuesta, ordenada de menor a mayor.

3.6.3.4 Resumen del Proceso Seguido.

Después de la tercera fase de análisis, se obtiene como nueva combinación óptima:

A: 20, C: 17.5, D: 6, E: 30, F: 2

y el proceso puede darse por concluido.

La figura 3.12 esquematiza el proceso seguido hasta llegar al óptimo encontrado.

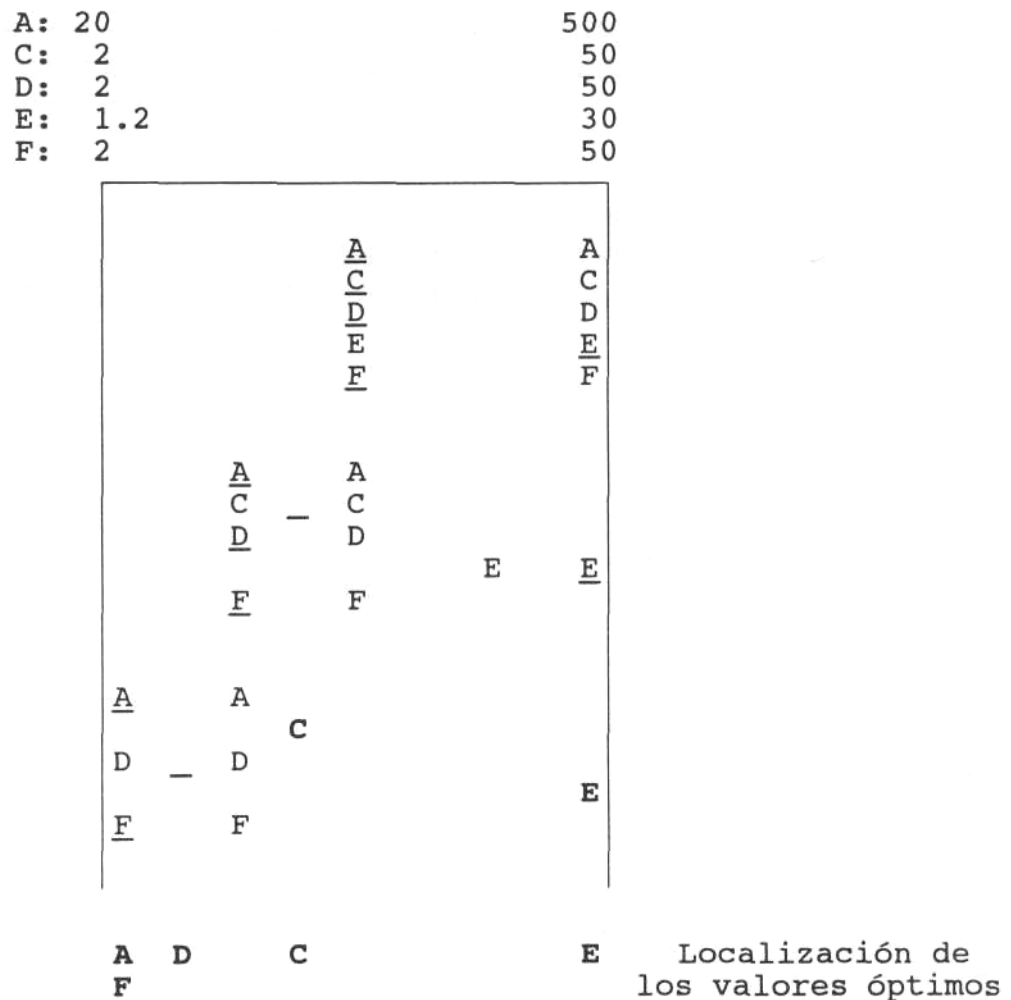


Figura 3.12: Esquema del proceso de experimentación seguido. El subrayado indica el óptimo obtenido después del análisis. Los factores que se han mantenido fijos aparecen en negrita.

3.6.4 Análisis del óptimo obtenido. Comparación con el óptimo de Taguchi.

El ratio señal/ruido para el óptimo obtenido es de 51.55 dB, (ver tabla 3.15) mientras que la combinación óptima que encuentra Taguchi da un ratio de 50.97 dB² (tabla 3.16).

Además, el método que hemos seguido presenta las siguientes ventajas:

1. Es un método conceptualmente más sencillo, con una sola matriz de diseño, y que conduce a un modelo que permite interpretar físicamente el comportamiento de la respuesta.

En el caso estudiado, se deduce que la variabilidad de la respuesta es debida únicamente al error producido por el amperímetro X. Esta conclusión no se obtiene aplicando el Método de Taguchi.

2. Se requiere la realización de muchos menos experimentos. En este caso se han realizado 207 (143+32+32) experimentos mientras que la aplicación del método de Taguchi requiere la realización de 1332.

(Ver tablas 4.12 y 4.13
en páginas siguientes)

²El ratio que propone Taguchi y el de Box dan prácticamente el mismo valor.

	A	B	C	D	E	F	X	Y	2-Y	ln y	A:	20
1 1 1 1 1 1 1	19.94	5.8158	17.447	5.982	28.5	1.994	-0.000	1.9965	0.0034469	0.6914222	C:	17.5
2 2 2 2 2 2 2	20	5.8333	17.5	6	30	2	0	2	1.01E-16	0.6931471	D:	6
3 3 3 3 3 3 3	20.06	5.8508	17.552	6.018	31.5	2.006	0.0002	2.0036	-0.003662	0.6949766	E:	30
1 1 1 1 2 2 2	19.94	5.8158	17.447	5.982	30	2	0	1.994	0.006	0.6901426	F:	2
2 2 2 2 3 3 3	20	5.8333	17.5	6	31.5	2.006	0.0002	1.9976	0.0023255	0.6919837		
3 3 3 3 1 1 1	20.06	5.8508	17.552	6.018	28.5	1.994	-0.000	2.0085	-0.008579	0.6974279		
1 1 2 3 1 2 3	19.94	5.7984	17.5	6.018	28.5	2	0.0002	1.9914	0.0085539	0.6888610		
2 2 3 1 2 3 1	20	5.8684	17.552	5.982	30	2.006	-0.000	2.0024	-0.002446	0.6943696		
3 3 1 2 3 1 2	20.06	5.8332	17.447	6	31.5	1.994	0	2.006	-0.006	0.6961426		
1 1 3 2 1 3 2	19.94	5.8332	17.552	6	28.5	2.006	0	1.994	0.006	0.6901426		
2 2 1 3 2 1 3	20	5.7984	17.447	6.018	30	1.994	0.0002	1.9975	0.0024337	0.6919295		
3 3 2 1 3 2 1	20.06	5.8684	17.5	5.982	31.5	2	-0.000	2.0083	-0.008337	0.6973070		
1 2 3 1 3 2 1	19.94	5.8684	17.552	5.982	31.5	2	-0.000	2.0023	-0.002322	0.6943078		
2 3 1 2 1 3 2	20	5.8332	17.447	6	28.5	2.006	0	2.006	-0.006	0.6961426		
3 1 2 3 2 1 3	20.06	5.7984	17.5	6.018	30	1.994	0.0002	1.9915	0.0084355	0.6889204		
1 2 3 2 1 1 3	19.94	5.8508	17.552	6	28.5	1.994	0.0002	1.9974	0.0025632	0.6918647		
2 3 1 3 2 2 1	20	5.8158	17.447	6.018	30	2	-0.000	2.0084	-0.008441	0.6973592		
3 1 2 1 3 3 2	20.06	5.8333	17.5	5.982	31.5	2.006	0	1.994	0.006	0.6901426		
1 2 1 3 3 3 1	19.94	5.7984	17.447	6.018	31.5	2.006	-0.000	2.0023	-0.002315	0.6943045		
2 3 2 1 1 1 2	20	5.8684	17.5	5.982	28.5	1.994	0	2.006	-0.006	0.6961426		
3 1 3 2 2 2 3	20.06	5.8332	17.552	6	30	2	0.0002	1.9915	0.0084419	0.6889172		
1 2 2 3 3 1 2	19.94	5.8158	17.5	6.018	31.5	1.994	0	2	1.96E-17	0.6931471		
2 3 3 1 1 2 3	20	5.8860	17.552	5.982	28.5	2	0.0002	2.0034	-0.003420	0.6948558		
3 1 1 2 2 3 1	20.06	5.7983	17.447	6	30	2.006	-0.000	1.9964	0.0035614	0.6913648		
1 3 2 1 2 3 3	19.94	5.8684	17.5	5.982	30	2.006	0.0002	2.0035	-0.003555	0.6949234		
2 1 3 2 3 1 1	20	5.8332	17.552	6	31.5	1.994	-0.000	1.9963	0.0036815	0.6913047		
3 2 1 3 1 2 2	20.06	5.7984	17.447	6.018	28.5	2	0	2	4.74E-17	0.6931471		
1 3 2 2 2 1 1	19.94	5.8508	17.5	6	30	1.994	-0.000	2.0084	-0.008438	0.6973577		
2 1 3 3 3 2 2	20	5.8158	17.552	6.018	31.5	2	0	1.994	0.006	0.6901426		
3 2 1 1 1 3 3	20.06	5.8333	17.447	5.982	28.5	2.006	0.0002	1.9974	0.0025754	0.6918586		
1 3 3 3 2 3 2	19.94	5.8508	17.552	6.018	30	2.006	0	2.006	-0.006	0.6961426		
2 1 1 1 3 1 3	20	5.8158	17.447	5.982	31.5	1.994	0.0002	1.9916	0.0083152	0.6889808		
3 2 2 1 2 1 2	20.06	5.8333	17.5	6	28.5	2	-0.000	2.0025	-0.002574	0.6944335		
1 3 1 2 3 2 3	19.94	5.8332	17.447	6	31.5	2	0.0002	2.0036	-0.003678	0.6949845		
2 1 2 3 1 3 1	20	5.7984	17.5	6.018	28.5	2.006	-0.000	1.9965	0.0034382	0.6914265		
3 2 3 1 2 1 2	20.06	5.8684	17.552	5.982	30	1.994	0	2	1.30E-16	0.6931471		
									2.0000	0.0000279		0.0000069

Decib. 51.551330
RatBox 51.551315

Tabla 3.15: Hoja de cálculo utilizada para calcular el ratio señal/ruido del óptimo obtenido.

