

Parte II

LOS MODELOS NUMÉRICOS

4. LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DIRECTA

Una parte importante del trabajo presentado en esta tesis está basado en la validación del modelo de Simulación Cinemática. Esta validación se realiza confrontando los resultados obtenidos con este modelo con los extraídos de un modelo de Simulación Numérica Directa.

Existen multitud de esquemas de DNS para el flujo turbulento. El que hemos utilizado en el presente estudio es un esquema bidimensional en un dominio biperiódico. En el presente capítulo se va a describir este esquema. En la primera parte se describirá el modelo matemático. A continuación se detallarán algunos resultados publicados en artículos durante los últimos 20 años y que han sido obtenidos a partir de simulaciones realizadas con este modelo.

Una descripción más detallada del modelo se puede encontrar en los artículos de Babiano et al. (1985, 1987a, 1990), Elhmaïdi et al. (1993) y Zouari and Babiano (1990, 1994).

4.1. Descripción del modelo de DNS

4.1.1. El esquema Euleriano

El campo Euleriano de velocidades es calculado integrando la ecuación de vorticidad barotrópica quasi-geostrófica,

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + J(\omega, \psi) = G(\omega) + F(\omega), \quad (4.1)$$

que es la ecuación (2.18) modificada con la inclusión de un término de fuente exterior de vorticidad, $F(\omega)$. El término de disipación de vorticidad $G(\omega)$ es también diferente del presentado en (2.18). En este caso, éste término incluye una parametrización de escala de submalla, de forma que la disipación de enstrofia se calcula como (Babiano et al., 1990)

$$g(\omega) = J \left[\psi, t_c (l_c^2 \Delta)^4 J(\psi, \omega) \right] + \frac{\psi}{t_d l_d^2}, \quad (4.2)$$

donde t_c y t_d son tiempos característicos, correspondientes a la escala de corte y a la escala máxima del flujo, respectivamente; l_c y l_d son la escala de corte y la escala máxima. El primer término del miembro de la derecha de (4.2) corresponde a la disipación de enstrofia a pequeña escala. El segundo término es una fricción lineal que disipa energía en las grandes escalas.

El término de forzage $F(\omega)$ es definido de forma que la densidad espectral de energía es mantenida constante en una cierta escala, denominada escala de forzage.

La ecuación (4.1) se resuelve en un dominio bidimensional biperiódico de dimensiones $2\pi \times 2\pi$ usando una aproximación pseudo-espectral (Basdevant et al., 1981) con una resolución de 128×128 . El inconveniente de utilizar una resolución tan baja es que la cascada inversa de energía apenas es desarrollada, como se puede observar en la figura 4.1, donde se muestra el espectro de energía del campo obtenido con esta simulación. Sin embargo, para los propósitos de esta tesis, esta resolución es suficiente, ya que no nos interesa, de momento, estudiar la dispersión de partículas en la cascada inversa de energía.

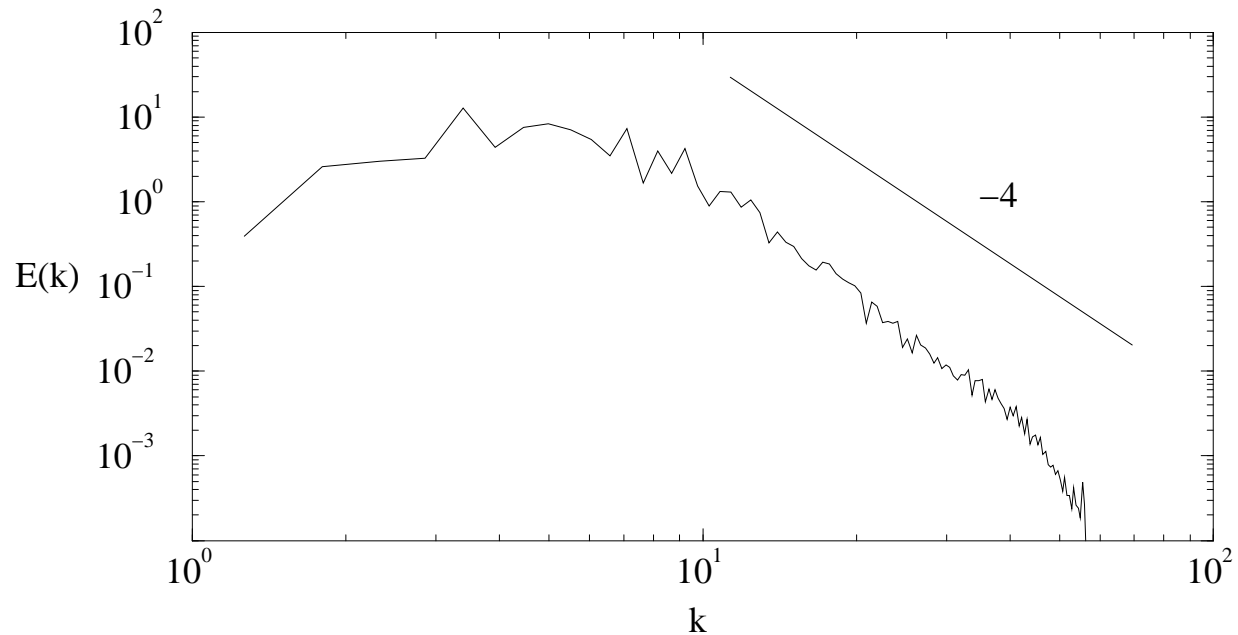


Fig. 4.1: Espectro de energía del campo obtenido con la Simulación Numérica Directa para una resolución de 128×128 . Se ha incluido un segmento con pendiente -4 , de forma que se puede apreciar que la cascada inversa sigue una ley espectral con una pendiente ligeramente mayor que ésta.

4.1.2. *El esquema Lagrangiano*

La trayectoria de una partícula α es calculada integrando la ecuación

$$\frac{d\vec{x}_\alpha(t)}{dt} = \vec{v}_\alpha(t) = \vec{v}(\vec{x}_\alpha(t), t), \quad (4.3)$$

donde $\vec{x}_\alpha(t)$ es la posición de la partícula en el instante t y $\vec{v}_\alpha(t)$ es su velocidad, que coincide con la velocidad Euleriana del campo en la posición \vec{x}_α en el instante t .

Generalmente, la posición \vec{x}_α no coincide con un nodo de la malla de la simulación. En este caso, la velocidad Euleriana en esta posición ha de calcularse mediante una interpolación entre nodos. En este modelo la interpolación se realiza mediante una spline de 3er. orden (para detalles, consultar De~Boor (1978)).

La integración de (4.3) es llevada a cabo con un esquema de Runge-Kutta de 2o. orden. Es decir,

$$\vec{x}'_\alpha(t + \Delta t) = \vec{x}_\alpha(t) + \Delta t \vec{v}(\vec{x}_\alpha(t), t) \quad (4.4)$$

$$\vec{x}_\alpha(t + \Delta t) = \vec{x}_\alpha(t) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{v}(\vec{x}_\alpha(t), t) + \vec{v}(\vec{x}'_\alpha(t + \Delta t), t)). \quad (4.5)$$

$\vec{x}'_\alpha(t + \Delta t)$ es una posición auxiliar de cálculo, sin sentido físico. El paso de tiempo Δt ha de cumplir la condición de Courant-Friedrich-Lewy,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\|\vec{v}\|}, \quad (4.6)$$

donde $\|\vec{v}\|$ es la velocidad cuadrática media del campo, y Δx es el tamaño de la malla. En nuestro caso concreto, $\Delta x = 2\pi/128 \approx 5 \cdot 10^{-2}$, y $\|\vec{v}\| \sim 10$, de forma que $\Delta t \leq 5 \cdot 10^{-3}$.

4.2. *Dispersión de partículas neutras en el marco de la DNS*

Los experimentos numéricos sobre dispersión de partículas en flujo turbulento simulado según (4.1) han sido analizados en Babiano et al. (1987a, 1990); Babiano (2000).

Babiano et al. verifican, en referencia a la dispersión absoluta, el comportamiento asintótico descrito en el capítulo 3 y originalmente propuesto por Taylor (1921). Obtienen, sin embargo, un comportamiento anómalo en tiempos intermedios. Esta dispersión anómala es justificada en base a la topología del campo turbulento bidimensional, que será analizada en la sección 4.3. Volveremos, pues, sobre este tema más adelante.

La dispersión relativa observada con este modelo de DNS ha sido analizada en detalle en el artículo de Babiano et al. (1990). Encuentran que, en dimensión 2, la dispersión relativa sigue una ley exponencial (ley de Kraichnan-Lin) cuando el tiempo característico de dispersión relativa, definido como

$$\tau(D_0, t) = \frac{D^2(D_0, t)}{K(D_0, t)}, \quad (4.7)$$

tiene un valor mínimo. En este momento, la difusividad turbulenta es máxima. Esto ocurre únicamente para valores pequeños del tiempo de difusión.

Más adelante en el proceso de dispersión relativa, la ley de Richardson es observada si la separación inicial entre partículas es lo suficientemente pequeña.

4.3. *Topología y estructuras coherentes*

Las estructuras coherentes son concentraciones de vorticidad en regiones localizadas del espacio. El hecho de que la vorticidad actúe únicamente en dirección normal al campo hace que, en turbulencia bidimensional, estas estructuras coherentes sean mucho más estables. Estas perduran, por regla general, mucho más allá del tiempo típico de interacción turbulenta entre remolinos.

Estas estructuras coherentes dotan al campo de velocidades de una apreciable inhomogeneidad, y, por lo tanto, de una topología característica. El estudio de esta topología ha sido realizado, sobre todo, desde un punto de vista Euleriano (McWilliams, 1984, 1990b). La forma más simple de descomponer el campo de velocidades es mediante la contribución de la rotación y la deformación al módulo del gradiente de velocidades,

$$\|\nabla\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 + s^2), \quad (4.8)$$

donde ω es la vorticidad, definida en (2.14), y s es la deformación,

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2, \quad s_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad s_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.9)$$

El valor de $\omega(\vec{r})^2/s^2(\vec{r})$ respecto de 1 indica la importancia relativa de la vorticidad o la rotación en el punto \vec{r} .

4.3.1. Criterio de Okubo-Weiss

El criterio definido en (4.8) es excesivamente simple. Una formulación mas apropiada es la presentada por Okubo (1970) y Weiss (1991), adoptada por McWilliams (1984) y por Babiano (2000) entre otros. Se basa en la evolución temporal del gradiente de vorticidad sobre la trayectoria de partículas. Se demuestra entonces que esta evolución esta determinada localmente por los valores propios del gradiente de velocidad,

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} (s^2 - \omega^2). \quad (4.10)$$

En función del valor de $Q(\vec{r}) = s^2(\vec{r}) - \omega^2(\vec{r})$, las regiones del campo Euleriano se divide en *elípticas* si $Q < 0$ (valores propios puramente imaginarios) y *hiperbólicas*, si $Q > 0$ (valores propios puramente reales). Se puede observar que la distribución de Q la localiza en regiones relacionadas con las estructuras coherentes.

Definido un cierto valor umbral Q_s , Elhmaïdi et al. (1993) y Babiano (2000) proponen la siguiente clasificación de zonas en un flujo turbulento bidimensional :

1. *Dominios fuertemente elípticos*, donde $Q < -Q_s$, forman los núcleos de los vórtices
2. *Dominios elípticos de fondo*, $-Q_s < Q < 0$
3. *Dominios hiperbólicos de fondo*, $0 < Q < Q_s$
4. *Dominios fuertemente hiperbólicos*, con $Q > Q_s$

La energía cinética está localizada en las zonas fuertemente elípticas y las hiperbólicas, relacionadas con las estructuras coherentes. En las regiones de fondo, la energía cinética se mantiene por debajo del valor medio en el dominio.

Idealmente, en ausencia de disipación y forzage, la vorticidad y la deformación se conservan a lo largo de la trayectoria de una partícula de fluido (ver sección 2.2). Sin embargo, en la simulación que nos ocupa, en la que la disipación es compensada por un forzage a gran escala, esto es solo válido de forma no-local; la vorticidad es conservada en término medio, cuando la partícula ha inspeccionado la totalidad del campo Euleriano.

4.3.2. Criterio de Hua-Klein

Recientemente, Hua y Klein (Hua and Klein, 1998; Hua et al., 1998) han analizado el problema de la dispersión Lagrangiana en el contexto de la topología de la turbulencia bidimensional, considerando la aceleración de las partículas, $\vec{a}_\alpha(t) = \frac{d\vec{v}_\alpha(t)}{dt}$.

En coordenadas Lagrangianas, la ecuación de Euler es

$$\vec{a}_\alpha = -\nabla p, \quad (4.11)$$

que, expandida en serie de Taylor hasta el primer orden, es

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_\alpha(t) = (\nabla \vec{a}_\alpha) \vec{r}(t) + \vec{a}_\alpha(0) = -(\nabla^2 p) \vec{r}_\alpha(t) + \vec{a}_\alpha(0), \quad (4.12)$$

y el movimiento de las partículas viene descrito por

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_\alpha \\ \ddot{y}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}Q - b & -2\dot{c} \\ 2\dot{a} & \frac{1}{4}Q + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} + \vec{a}_\alpha(0), \quad (4.13)$$

con

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla^2 \psi = 2(a + c) \\ \sigma_n &= -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi = -2b \\ \sigma_s &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 2(a - c) \\ s^2 &= \sigma_n^2 + \sigma_s^2. \end{aligned}$$

Los valores propios en este caso son

$$\lambda = \frac{1}{4}Q \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{dt} (s^2 - \omega^2)}, \quad (4.14)$$

que es, evidentemente, una extensión del criterio de Okubo-Weiss (4.10). La diferencia fundamental es que el criterio de Hua-Klein (4.14) está basado en los valores propios del tensor de gradientes de aceleraciones, y el de Okubo-Weiss lo está en los del tensor gradiente de velocidades. El gradiente de aceleraciones está relacionado con las propiedades no-lineales y no-locales de la dinámica del flujo Babiano (2000). Así, para calcular el segundo término de (4.14) es necesario resolver una ecuación de Poisson sobre todo el dominio Hua and Klein (1998),

Babiano (2000) observa que los resultados numéricos presentados por Hua and Klein (1998) muestran que la diferencia más importante entre los dos criterios se debe a la importancia relativa de las células de deformación ($Q > 0$) que circundan los vórtices

coherentes.

4.4. Intermitencia y propiedades de escala

Las propiedades de escala de la turbulencia bidimensional estacionaria ha sido analizada en el marco de la simulación descrita en el presente capítulo por Babiano et al. (1995). Sin embargo, aunque el modelo de DNS utilizado ha sido el mismo, éste se ha ejecutado con una resolución de 1024×1024 forzada en $k_I = 256$ y $k_I = 10$, y 1728×1728 forzada en $k_I = 40$. La primera de estas simulaciones, con una escala de forzaje muy baja, permite obtener una cascada inversa de energía muy desarrollada.

En la sección 2.3.6 se ha presentado la denominada ESS (Extended Self-Similarity) propuesta por Benzi et al. (1993a,b) en base a la función de estructura de la velocidad de orden p . Se considera que la expresión 2.92,

$$S_p(l) \sim S_3(l)^{\tilde{\zeta}_p}, \quad \tilde{\zeta}_p = \frac{\zeta_p}{\zeta_3} \quad (4.15)$$

sigue siendo válida para turbulencia bidimensional, de la misma forma que la relación Du-brulle (1994)

$$\zeta_p = (1 - \alpha) \frac{p}{3} + \alpha \frac{1 - \beta^{\frac{p}{3}}}{1 - \beta}. \quad (4.16)$$

La diferencia en las propiedades de escala en flujo tridimensional y bidimensional está en el valor de ζ_3 , que es 1 en el primer caso, y 3 para el caso de la cascada de enstrofia del flujo 2D (Babiano et al., 1995).

Con $\alpha = \beta = 2/3$ se recupera el modelo de She y Léveque (She and Léveque, 1994)(ver también (Mahjoub, 2000)). El modelo K41 (en el que no se considera intermitencia), es obtenido con $\beta = 1$.

Las simulaciones numéricas a alta resolución muestran que la cascada de enstrofia se caracteriza por una muy débil intermitencia. Kraichnan and Montgomery (1980) argumenta que no existe intermitencia en el subrango inercial debido a que esta se origina por la no-linealidad de las interacciones entre escalas, y el transporte de vorticidad (y, por lo tanto, de enstrofia) en turbulencia bidimensional es realizado como un escalar pasivo, y la dinámica es esencialmente lineal.

Esto implica que las correcciones al espectro en k^{-3} no pueden ser atribuidas a la intermitencia, como se ha sugerido en la literatura (Pedlosky, 1986). En Babiano et al. (1995) se atribuyen estas correcciones al papel que juegan las estructuras coherentes.

La cascada inversa de energía presenta una intermitencia con correcciones similares a las encontradas para turbulencia tridimensional. Estas dos cascadas están separadas por una región dominada por las estructuras coherentes, donde no se detecta ninguna propiedad de escala.

4.5. *Sumario*

En este capítulo se ha descrito el modelo de DNS utilizado en la primera parte de los resultados de la tesis. Es un modelo de resolución de la ecuación de vorticidad en un dominio bidimensional biperiódico.

Se han comentado brevemente los resultados obtenidos con este modelo sobre dispersión de partículas, topología de la turbulencia e intermitencia en flujos turbulentos bidimensionales.