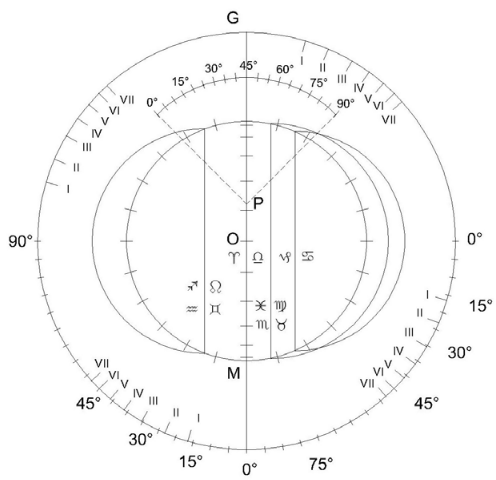
Universitat Autònoma de Barcelona

EL COLLEGIO ROMANO I ELS ORÍGENS DE LA TRIGONOMETRIA: DE L'ANALEMMA DE PTOLEMEU A LA GNOMONICA DE CLAVIUS

Joaquim Guerola Olivares

EL *COLLEGIO ROMANO* I ELS ORÍGENS DE LA TRIGONOMETRIA: DE L'*ANALEMMA* DE PTOLEMEU A LA *GNOMONICA* DE CLAVIUS



Tesi doctoral de Joaquim Guerola Olivares

Director: Dr. Xavier Roqué Rodríguez

Programa de Doctorat en Història de la Ciència

Centre d'Història de la Ciència (CEHIC) - Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Barcelona, Juliol de 2018

Agraïments

Aquest treball no hagués estat possible sense la col·laboració i suport de la Marta, dels meus fills Germán, Mireia, Christian i Jana, del Dr. Julio Samsó, del meu amic i col·lega Gervasio Martínez, de la Laura García, del director Dr. Xavier Roqué, inicialment tutor de la tesi, i especialment del Dr. Manuel García Doncel, impulsor del projecte, pel seu mestratge, la seva disponibilitat i el seu assessorament. A tots ells expresso el meu reconeixement i la meva gratitud.

Índex

1 Introducció

Aquest treball gira al voltant d'un manuscrit quasi inèdit de Baltasar de Torres, primer professor de matemàtiques del *Collegio Romano*, i també d'una part de l'obra matemàtica de Christopher Clavius que mai abans no havia estat estudiada. Ubicats a la Biblioteca Vaticana i no pas a la Universitat Gregoriana, successora del *Collegio Romano*, es troben uns apunts personals de Torres anomenats el còdex *Barberinus Latinus 304*. Només una de les seves parts ha estat estudiada molt parcialment: la que conté les seves reflexions sobre els continguts matemàtics i l'organització del pla d'estudis que s'havia de desenvolupar a la universitat romana. En el present treball s'hi presentaran amb detall. Hi ha altres qüestions que Torres aborda, com són les relatives a les classes sobre rellotges de Sol el 1558, les lliçons de geometria de l'any 1557, sobre àlgebra, sobre les obres que configuren la primera biblioteca matemàtica del *Collegio Romano*, sobre astronomia, instruments astronòmics, l'esfera, perspectiva, i d'altres no referides a la matemàtica. Entre tots els continguts del manuscrit destaquen dues còpies de sengles obres clàssiques: *Sobre els cossos flotants* d'Arquimedes i l'*Analemma* de Ptolemeu, ambdues en versió llatina. A aquesta última obra i còpia he dedicat la meva atenció i estudi i presento la seva primera traducció al català. Tot i trobar-se entre les anomenades obres menors de Ptolemeu, destaca pel seu rigor matemàtic, la seva simplicitat i estètica, i per la vigència actual pel que fa als mètodes geomètrics que presenta.

Aquesta còpia manuscrita és una de les quatre identificades fins ara. De moment, no se sap amb certesa d'on la va copiar, ja que les diferències que presenta l'allunyen de les altres còpies conegudes. Torres la va incorporar com a material que fonamentava el càlcul de rellotges, matèria que formava part de manera usual dels plans d'estudis i que també incorporaria el pla d'estudis del *Collegio Romano*. Tanmateix mai no la va fer servir a les classes ja que, com ell mateix comenta, no havia entès el seu contingut.

L'*Analemma* de Ptolemeu va ser de molt interès per a Clavius, qui segurament va ser alumne de Torres i el seu immediat successor com a professor del *Collegio Romano* al llarg de molts anys i primer gran matemàtic jesuïta. En ple debat de quin era el valor de les matemàtiques com a ciència, Clavius va ser un gran defensor d'elles i de la importància que tenien des del punt de vista educatiu, per la qual cosa va intentar que tinguessin un paper molt rellevant en la *Ratio Studiorum*. Va ser protagonista de la reforma gregoriana del calendari de l'any 1582, i autor de nombroses obres, moltes de les quals van tenir un gran impacte educatiu en les escoles jesuïtes i del món durant molts decennis.

En la tercera de les seves obres, *Gnomonices Libris VIII*, publicada el 1581, Clavius aborda la gnomònica, acompanyant amb demostracions pròpies les construccions de tots els tipus de rellotges de Sol coneguts aleshores. Coneixia a fons el mètode de demostració d'Euclides, ja que el 1574 havia publicat l'obra euclidiana amb el títol *Euclidis elementorum libri XV. Accessit XVI*. I l'incorporà de forma rigorosa a tota la seva obra. Amb la voluntat de fer servir aquest mètode demostratiu arreu, Clavius estudià l'*Analemma* de Ptolemeu i el presentà introduint-hi modificacions importants no estudiades fins ara, i que ocupen una part d'aquest treball.

Les innovacions que introdueix Clavius a l'*Analemma* ptolemaic, les argumenta en base a les imprecisions que el càlcul gràfic conté a l'hora de transformar les solucions geomètriques en dades numèriques. Es desmarca dels geòmetres humanistes, els quals defensaven que la geometria està en un pla superior respecte de l'activitat matemàtica, introduint-hi càlculs trigonomètrics amb la finalitat d'aconseguir la màxima precisió dels resultats numèrics buscats. Els càlculs per a la resolució de triangles plans i esfèrics els havia après Clavius a través de l'obra de Regiomontanus, la qual formava part del material inicial de la biblioteca del *Collegio Romano*, i també del matemàtic andalusí Jabir ben Aflah i d'altres autors d'obres clàssiques. Les aplicacions que Clavius va fer de la resolució de triangles plans i esfèrics a l'*Analemma* es presenten amb tot detall. L'àlgebra que utilitza per desenvolupar aquestes aplicacions és retòrica, ja que no utilitza cap simbolisme.

El fet que el llibre de Clavius *Theodosii Tripolitae Spahericorum libri III*, publicat el 1586, inclogui el seu treball sobre resolució de triangles esfèrics i plans, i també taules trigonomètriques, crea una confusió entorn de la cronologia de l'elaboració de la seva obra, ja que fins ara, aquesta s'ha situat sempre a prop de la de publicació, i per tant, darrera de la *Geometria rotundi* de Thomas Fincke, publicada el 1583. Però quan he analitzat la part de la seva *Gnomonica*, publicada el 1581, dedicada a l'*Analemma*, ha descobert que Clavius cita la seva pròpia obra sobre resolució de triangles cinc anys abans de ser publicada. Això obre la possibilitat de revisar el ja reconegut paper que va tenir Clavius en el desenvolupament de la trigonometria, reconeixement que es posa de manifest principalment per part de Mary Claudia Zeller (Zeller 1944).

Clavius aborda en l'obra citada els diferents casos de la resolució de triangles esfèrics i plans, justificant cadascuna d'elles amb demostracions deductives i rigoroses a l'estil euclidià. Només hi ha una demostració que se li resisteix: la del teorema del cosinus per a triangles esfèrics pels angles, l'enunciat del qual coneix d'autors anteriors, i que ell també enuncia. Evita utilitzar-lo abordant la resolució de tots els casos que el poden requerir, convertint el triangle en dos de rectangles, essent conscient de la complexitat d'alguns d'aquests casos, en els que l'ús del teorema citat facilitaria la resolució.

Dues qüestions sobre trigonometria van ocupar Clavius al llarg de la seva trajectòria posterior: la demostració de l'esmentat teorema, i la facilitació dels càlculs que permetrien millorar la construcció de les tables trigonomètriques. No està acreditat que aconseguís la desitjada demostració, tot i la col·laboració de diversos corresponsals que van intentar ajudar-lo, les cartes dels quals hem analitzat aquí. S'hi aproxima a través de la fórmula prostaferèsica, o fórmula de Werner, introduïda anys abans per Johannes Werner, i que Clavius demostra en general en el seu llibre *Astrolabium* publicat el 1593 i que s'inclou en aquest treball. Un cop demostrada aquesta fórmula, tot sembla indicar que Clavius es va quedar molt a prop del seu perseguit objectiu. Finalment, va ser Bartholomaeus Pitiscus, matemàtic introductor del mot trigonometria, qui va publicar la demostració del teorema del cosinus per a triangles esfèrics l'any 1595 en el seu llibre *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus.* Amb la transcripció d'aquesta demostració de Pitiscus finalitza aquest treball.

El naixement el 1553 de la primera universitat jesuítica, el *Collegio Romano*, es situa al mig de la Revolució científica, a través de la qual es produí una transcendental reflexió i revaloració del paper que les matemàtiques havien de tenir en les seves relacions amb la teologia i la filosofia natural (Brooke 1991), i en conseqüència, de la importància que tindrien en la formació universitària dels alumnes. Els jesuïtes havien iniciat una de les reformes religioses del segle XVI i consideraren la tasca docent de primer ordre per a la consecució de la seva missió (Principe 2011).

Des del segle XIII i fins el segle XVII, l'estudi de la naturalesa va estar subjecte al pensament d'Aristòtil i al paradigma teològic dominant. La recuperació dels textos originals aristotèlics va implicar, però, descobrir el desacord existent amb la Bíblia en qüestions fonamentals com la creació i l'eternitat del món. Roger Bacon (c.1214-1294) considerava en aquest sentit que tot i que les matemàtiques són aplicables a totes les ciències, havien d'estar subordinades al pensament aristotèlic i podien ajudar a la comprensió de la Bíblia, font de tot coneixement. Tomàs d'Aquino (1225-1274), en la síntesi que va realitzar entre el pensament aristotèlic i la doctrina cristiana, va mantenir la superioritat d'aquesta, negant l'eternitat del món, i va subordinar el coneixement de la naturalesa a la metafísica i, en última instància, a la fe. Ja en el segle XIV, el plantejament ben argumentat del gir diari de la Terra en torn del seu eix, per part de Jean Buridan i Nicole Oresme, no va acabar de ser formulat com una hipòtesi, ja que ambdós creien que qualsevol activitat crítica havia de subordinar-se a un objectiu teològic. Però les seves idees desafiaven a les d'Aristòtil.

A començament del segle XIII, a penes s'estudiava a les universitats un resum de l'*Aritmètica* de Boeci, però tot va començar a canviar quan es van recuperar, traduir i reconstruir els textos d'Euclides, Arquimedes, Apol · loni, Aristarc, Papus i Ptolemeu (Boyer 1968). Es produí una revaloració de les matemàtiques quan es van estudiar els recuperats treballs pitagòrico-platònics. L'interès per les matemàtiques anava en augment tot i que el pensament de Plató i Aristòtil delimitaven les seves activitats. Personalitats diverses al llarg del segle XV van col · leccionar textos clàssics de matemàtiques i van promoure el seu estudi en algunes universitats com la de Bolonya. A París, la Carta del *Collège Royal* de 1530 incloïa pressupost per a l'ensenyament de les matemàtiques.

Al llarg de les primeres dècades del segle XVI, les branques de les matemàtiques que s'ensenyaven en les facultats d'arts eren les que composaven el quadrívium (aritmètica, geometria, astronomia i música), la perspectiva i la cosmografia. Tenien escàs prestigi. De fet, encara s'estudiaven al mateix nivell elemental que en la Baixa Edat Mitjana. Si algú desitjava aprendre-les a un nivell més avançat s'havia de procurar un professor particular o un col · lega més format, el qual li ensenyaria una particular manera d'aprendre-les. Per altra banda es va desenvolupar una nova orientació pel coneixement de la naturalesa, que comportava la realització d'observacions i experiments per identificar les lleis que la regien. Tots aquests processos s'acceleraren amb la invenció de la impremta que va facilitar la ràpida difusió de les obres clàssiques i de les noves idees. Així el 1484 es publicà la primera versió dels *Elements* segons la versió llatina de Campano. Al llarg del segle XVI es publicaran les obres matemàtiques d'autors clàssics en llengua original o en versió llatina, entre les que destaquem *De triangulis* de Regiomontanus, obra composada el 1464.

Les crítiques a la precària situació de les matemàtiques al llarg del segle XVI van ser especialment dures. El filòsof i matemàtic Pierre de la Ramée (1515-1572) va afirmar que l'estudi dels *Elements* estava molt abandonat i pràcticament no s'utilitzava en les escoles de filosofia. Va promoure la necessitat de l'estudi de la geometria i va lluitar en contra del pensament aristotèlic en la seva obra *Aristotelicae animadversiones liber nonus et decimus in Posteriora Analytica*, publicada el 1553. L'humanista i gran matemàtic sicilià Francesco Maurolico (1494-1575), en una carta a Pietro Bembo datada el 1536 afirmà:

"Jo certament durant llarg temps m'he dedicat a les bones arts i a les disciplines matemàtiques. Però no puc deixar de prendre'm malament el fet que aquestes disciplines no es cultivin avui com convé (...). L'excel · lentíssim Euclides, per què està degradat?, per què està en silenci Arquimedes?, i Teodosi?" (Scaduto 1949).

I el mateix any de la fundació del *Collegio Romano* va escriure en el pròleg de la seva obra *Cosmographia* (1543):

"Em resulta penós que en el nostre temps aquestes egrègies disciplines estiguin de tal manera oblidades i postrades que poquíssims o ningú no sent desitjos de conèixer-les, per la qual cosa la preclara obra dels antics matemàtics des de fa temps ha estat expulsada de l'escola filosòfica; i si quelcom d'elles apareix, està tan corrompuda d'errors, per culpa tant dels escriptors com dels traductors, que si el seu propi autor revisqués, a penes podria depurar-lo ...".

I també Federico Commandino (1509-1575), en la dedicatòria del seu llibre sobre l'*Analemma*, publicat el 1562, escrivia:

"... espero que la ciència més il · lustre torni a reviure després de 600 anys...".

Al llarg d'aquesta època no es pot parlar de grups de matemàtics relacionats amb la intenció de fer avançar conjuntament diverses temàtiques d'interès comú. Al contrari, diversos grups de persones coexisteixen; cada grup investiga a la seva manera amb el seu propi estil, i amb punts de vista diferents sobre la jerarquització dels problemes importants. Les matemàtiques en el segle XVI s'aborden des de diferents punts de vista: la recerca de la tradició algèbrica medieval, un renovat interès per la geometria grega que acompanya al moviment humanístic del Renaixement, i la voluntat de relacionar la geometria i l'aritmètica per definir eines matemàtiques que havien de permetre perfeccionar l'astronomia i la navegació.

Al llarg de la Revolució científica es produí la transformació de les explicacions dels fenòmens naturals, passant de les explicacions qualitatives, que obeïen a la filosofia natural aristotèlica, a les quantitatives, obrint-se a la utilització de les matemàtiques. Aquest fenomen és conegut com el procés de matematització de la filosofia natural. Les obres de Copèrnic, Kepler, Galileu, Descartes i Newton, entre molts altres, a través de les seves formulacions donaren pas a aquesta transformació. La Revolució científica va tenir com a conseqüència la superació de les idees que es tenien sobre el coneixement de l'univers, la ciència i els mètodes d'aproximació a ella. Mentre la física aristotèlica anava perdent prestigi, el mètode experimental i la introducció de les matemàtiques en la resolució de problemes s'anaven imposant ja que les solucions que aportaven eren molt satisfactòries.

La historiografia tradicional afirma de manera unànime que el centre de la Revolució científica se situa en aquest canvi de la visió dels fenòmens naturals. Però des de fa uns anys diversos autors han estudiat de forma més acurada aquesta transformació analitzant factors socials, culturals i històrics que van intervenir en el procés, anant més enllà de la descripció d'un llistat de idees defensades per un seguit de brillants homes de ciència. Destaquen les aportacions de Paolo Mancosu (1992), Peter Dear (1995) i Nicholas Jardine (1988, 2008).

Jardine va ser un dels primers en defensar la importància de les qüestions metodològiques en el procés de transformació del valor de les matemàtiques a partir del segle XVI. Assenyala que els debats sobre la demostració matemàtica i les raons de la seva certesa que es van produir a Itàlia durant aquest segle, van tenir molta importància de cara a la nova ciència i a les noves epistemologies del segle següent. Participants d'aquests debats van ser F. Barozzi, G. Biancani, C. Clavius, F. Piccolomini i Galileu entre altres. L'èmfasi primordial es posava en la utilitat dels models matemàtics per estudiar la naturalesa.

Dear, fent una revisió de l'evolució de les matemàtiques respecte a la filosofia natural, convida a revalorar el paper que aquelles van tenir en aquesta època, prenent com a referència el context social de la generació de coneixement. Indaga diversos centres educatius i els seus plans d'estudis, en especial els dels jesuïtes, interrelacionant la filosofia natural i els fonaments i mètodes del coneixement matemàtic, amb els aspectes socials i institucionals del desenvolupament de coneixement. Les matemàtiques van resultar superiors a la filosofia natural perquè oferien demostracions certes i eren capaces d'establir relacions quantitatives. Per contra, la filosofia natural només oferia explicacions probables. Estudia la posició de Clavius respecte la filosofia natural, i el seu esforç per situar les matemàtiques fora d'ella i dins de la *Ratio Studiorum* del 1599. Assenyala el rol seminal que va jugar en la construcció d'una tradició jesuítica del treball en les disciplines matemàtiques al llarg del segle XVII en els col · legis de la Companyia. Els seus llibres van ser molt difosos, van tenir molta influència i van introduir en la matèria a molts alumnes dels col · legis jesuítics, entre els que destacarà Descartes.

Mancosu (1996) estudia les relacions entre l'objecte i la naturalesa de les matemàtiques i la seva pràctica, entre les que destaca l'estudi del debat sobre la seva certesa, identificant un fil conductor en el tractament de diversos problemes al llarg dels segles XVI i XVII. La matematització va suposar la revisió crítica dels conceptes de demostració, experiment, experiència i explicació en relació al pensament aristotèlic.

Per aconseguir transformar el paper que tenien les matemàtiques, es va haver de superar definitivament el pensament matemàtic d'Aristòtil. Aquest defensava que les demostracions matemàtiques, tot i ser certes, no tenen un lloc dins la filosofia natural, ja que no expliquen els fets des del punt de vista de les causes eficients i finals. Per tant, afirmà que eren inferiors a la lògica malgrat la puguin il · lustrar, i per consegüent, són una ciència menor no apta per a l'estudi de la naturalesa, encara que estiguin plenes de bellesa. Tot i ser certes, no poden explicar el canvi natural, explicació que correspon a la física. En aquest sentit, especialment a Itàlia, s'obrí un debat que va tenir un paper determinant en la consumació de la Revolució científica en el segle XVII. Els antecedents s'han de situar en el comentari de Procle (412-485) al primer llibre dels *Elements*. Des d'una posició platònica, Procle defensa que les matemàtiques assoleixen el màxim grau de certesa d'acord amb la teoria aristotèlica de la ciència. Per a ell, les formes matemàtiques tenen un nivell ontològic intermedi entre les substàncies simples i immòbils del món ultrasensible, i les compostes i canviants del món material.

Alessandro Piccolomini (1508-1575), en la seva obra *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum* (1547) va comparar la lògica aristotèlica i les matemàtiques, arribant a la conclusió que la lògica era superior epistemològicament a aquelles (Mancosu 1992, 241-265). Les considerà una disciplina certa, però no per les seves demostracions, sinó pel seu objecte. Com que les demostracions geomètriques no fan referència a causes reals, i com que la relació d'una figura amb altres no constitueix la seva essència, les conclusions de les demostracions no són conseqüència de les essències de les figures, i per tant, les matemàtiques no es poden aplicar al coneixement dels objectes naturals, i no són científiques en sentit aristotèlic (Mancosu 1996, 12). A Piccolomini el van seguir, entre altres, el jesuïta Benito Perera i Martin Smiglecius.

Diversos matemàtics van dubtar, per contra, del caràcter científic de la física aristotèlica com Giovanni Battista Benedetti (1530-1590), qui el 1554 publicà *Demostratio proportionum motuum localium contra Aristotelem et omnes philosophos* on atacà Aristòtil i els seus seguidors; també en Francesco Barozzi (1537-1634), neoplatònic, va ampliar i centrar el debat en la seva obra *Opusculum, in quo una Oratio, et dues quaestiones: altera de certitudine et altera de medietate mathematicarum continentur* (1560), on afirmà que les demostracions matemàtiques expliquen tant les causes formals com materials, i per tant, tenen el mateix grau de certesa que la lògica. Per conseqüent, es poden aplicar al coneixement dels objectes naturals. Situà als objectes matemàtics entre els separats de la matèria (teologia) i els que no es podien separar (filosofia natural). Per tant, les matemàtiques donen accés al coneixement dels objectes naturals i també dels divins. A Barozzi el van acompanyar Giuseppe Biancani, Pietro Catena, Clavius i Isaac Barrow. A més d'argumentar a favor de la revaloració de les matemàtiques, Barozzi, juntament amb Maurolico, Commandino, Guidobaldo del Monte i Clavius, van impulsar l'edició de textos matemàtics antics.

En el camp jesuític, tres dels seus membres van tenir un gran protagonisme en aquest procés de discussió sobre la naturalesa, la certesa i la utilitat de les matemàtiques, en la segona meitat del segle XVI: Jeroni Nadal, Baltasar de Torres i, especialment Clavius, qui en contra de l'opinió del també jesuïta Perera, i apel·lant al propi Aristòtil, defensà el caràcter científic de les matemàtiques en diverses de les seves publicacions i fou el gran impulsor de l'educació matemàtica entre els jesuïtes. Afirmà que el caràcter noble d'una ciència rau en la prestància del seu objecte i en la certesa de les seves demostracions. Recordà que els cossos celestes estan plens d'aquesta noblesa, i que les demostracions geomètriques i aritmètiques són les més eficaces.

En el món reformat, a iniciativa de F. Melanchton, s'inicià de seguida una revaloració del paper de les matemàtiques que eren considerades fonamentals per comprendre correctament a Aristòtil. Així es recollí en els nous estatuts de la Universitat de Wittenberg, on es va promoure la creació de dues càtedres de matemàtiques. El model de Wittenberg es va estendre de seguida a altres universitats de l'àmbit luterà, com la de Copenhague.

El *Collegio Romano* neix en mig d'aquest procés de reflexió i canvi del paper de les matemàtiques, i es convertiria, molt poc després de la seva fundació, en un espai d'experimentació, de debat i controvèrsia en torn del paper que aquesta matèria havia d'ocupar en les escoles de la Companyia (Romano 1999).

Dins d'aquest marc historiogràfic, l'estructura i els objectius d'aquest treball són els següents:

Al capítol segon fem una aproximació a la biografia de Baltasar de Torres en el context de l'inici de l'ensenyament de les matemàtiques en el *Collegio Romano*. Descrivim el contingut dels apunts personals de Torres, dipositats a la Biblioteca Vaticana amb el nom de còdex *Barberinus Latinus 304*. Entre d'altres destaca la presència de les còpies de sengles obres clàssiques: *Sobre els cossos flotants* d'Arquimedes i l'*Analemma* de Ptolemeu, constituint-se totes dues en obres de recerca de Torres. Presentem les diverses reflexions de Torres en torn de l'organització dels estudis de matemàtiques al *Collegio Romano*. Descrivim el recorregut històric conegut i analitzem les diferències, segons les còpies, de la taula que apareix al final de l'obra.

Al capítol tercer es presenta l'Analemma de Ptolemeu i la seva tradició textual. Al quart es descriu i s'explica el seu contingut i la construcció de tres rellotges solars a partir d'aquest text.

Al cinquè capítol presentem el contingut de la *Gnomonica* de Clavius i, especialment, el del capítol VI, que dedica a l'*Analemma* de Ptolemeu, introduint-hi de forma raonada unes modificacions amb la finalitat de fer més precís el càlcul dels sis angles ptolemaics. Aquests càlculs es basen en la resolució de triangles a través de la trigonometria del sinus. Analitzem el diversos casos de resolució de triangles en la seva obra *Theodossi Tripolitae Sphaericorum libri III*, que apareixen en el llibre tercer, constatant-se la presència de l'enunciat del teorema del cosinus per a triangles esfèrics, i també l'absència de la seva demostració, en contra del propi pensament de Clavius, qui considerava essencial la presentació de qualsevol demostració d'un enunciat qualsevol. Descrivim els teoremes trigonomètrics que Clavius utilitza en els càlculs dels sis angles ptolemaics. Establim una cronologia diferent de l'entrada de la trigonometria en el *Collegio Romano*, després de citar-se a si mateix a l'hora de citar les fonts que Clavius utilitza per abordar els càlculs esmentats. Presentem separadament el càlcul que Clavius realitza dels sis angles ptolemaics emprant la trigonometria plana i esfèrica respectivament. Descrivim l'empeny de Clavius i dels seus corresponsals que intentaren ajudar-lo, per aconseguir la demostració del teorema del cosinus.

Incloem la primera demostració del teorema del cosinus per a triangles esfèrics pels angles realitzada per Pitiscus.

En el sisè capítol es descriuen les conclusions de la tesi.

La tesi inclou tres apèndixs sobre les fonts utilitzades. A l'Apèndix A es presenta la primera versió catalana de l'*Analemma* de Ptolemeu. En el B, apareix la transcripció anotada de la còpia de l'*Analemma* de Torres, i en el C es presenta la còpia de l'*Analemma* en el manuscrit de Baltasar de Torres.

2 El *Collegio Romano* i les matemàtiques

La Companyia de Jesús és una ordre religiosa fundada el 1534 per Ignacio de Loyola (1491-1556) amb l'objectiu de donar resposta a la situació creada dins de l'Església Catòlica, després de produir-se la Reforma Protestant. Creada *ad majorem Dei gloriam*, Ignacio de Loyola i els seus col·laboradors van valorar molt l'educació dels seus membres, els quals havien de tenir una completa formació intel·lectual. És per això que els primers candidats a jesuïtes van ser enviats a estudiar a les més importants universitats italianes, com Bolonya i Pàdua.

Tot i que el tema del compromís de la jove empresa amb l'educació no estava plantejat a priori, Ignacio de Loyola descobrí en l'educació la millor estratègia per abanderar la Contrarreforma. Ben aviat es plantejà la fundació d'una universitat a Messina destinada a la formació dels futurs jesuïtes. Va fracassar, però, en el seu primer intent de fundar-la el 1548, tot i comptar amb la butlla papal que li conferia l'autoritat per crear quatre facultats (teologia, filosofia, dret i medicina). La causa principal va ser el no haver aconseguit la subvenció municipal que esperava. El projecte quedà limitat a la fundació del col·legi de Messina, al front del qual va ser nomenat el seu fidel col·laborador i amant de les matemàtiques, Jeroni Nadal (1507-1580). Ho tornà a intentar allà de nou el 1553, però sense èxit.

Finalment, aquest mateix any de 1553 va decidí transformar la *Scuola de Gramàtica, d'Umanità e Doctrina Cristiana, gratis* que havia fundat a

Roma el 1551, en el *Collegio Romano*, primera universitat de la Companyia de Jesús que tenia per missió inicial la formació dels seus membres a través de les classes de teologia escolàstica, i els seus tres cursos d'arts o de filosofia (Villoslada 1954, 19-32).

Tot i la precarietat i la manca de recursos materials, es va voler donar la màxima rellevància intel·lectual i solemnitat a la inauguració oficial del *Collegio Romano*, amb la celebració de tres sessions separades en el temps. La segona d'elles, dedicada a la Filosofia, se celebrà a Roma el 29 d'octubre de 1553. El fet que aquestes sessions es celebressin dissabte o diumenge remarca la dimensió espiritual que es va voler donar a la missió de la universitat naixent. Va ser presidida per l'espanyol Baltasar de Torres, recentment ingressat a la Companyia, tot i que va ser defensada per Teodorico Geeraerts de la Universitat de Lovaina.

El moment històric en què apareix el *Collegio Romano* té molt d'interès. Els estudis del *Quadrivium* (aritmètica, geometria, astronomia i música) i els de la perspectiva i la cosmografia en les facultats d'arts de les universitats europees estaven molt devaluats durant el segle XVI (Paradinas 2012). Tanmateix, en l'àmbit de l'Humanisme italià, estava apareixent un interès renovat per la recuperació, traducció, reconstrucció i publicació dels textos de la Grècia clàssica, en la crisi de l'aristotelisme que conduí a una reconstrucció de les diverses àrees del coneixement i a la descoberta de la filosofia pitagòrica-platònica, la qual col·laborà en l'estudi i la revalorització de les matemàtiques en els països que no havien estat islamitzats.

Aristòtil admetia com a científica la demostració "per causes" (*propter quid*, el perquè), la que explica els efectes a partir de les causes (*Analítics Segons* 78a 25-40). Averroes, en el prefaci a la *Física aristotèlica*, en oposició a Aristòtil (Mancosu 1996, 12) introdueix la demostració *potíssima*, en la qual es demostra, a partir de la demostració *quid* (el què) i *propter quid*, l'existència d'un efecte i la seva causa.

Alessandro Piccolomini (1508-1578), professor de filosofia natural a Pàdua i Roma, després d'una anàlisi comparativa entre la lògica i les matemàtiques, en la seva obra *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum*, va concloure que la lògica era superior epistemològicament, ja que la "certesa de les matemàtiques no sorgeix de la demostració potíssima". Tanmateix, Piccolomini accepta la certesa de la naturalesa dels objectes matemàtics, en tant que han estat creats per la ment humana. La matemàtica és una disciplina certa, però no per les seves demostracions, sinó pel seu objecte. Però la matemàtica no es pot aplicar al coneixement de les coses naturals. Posteriorment va ser seguit per autors com Benet Perera i Martin Smiglecius, els quals va continuar defensant que les demostracions matemàtiques no són científiques en sentit aristotèlic (Mancosu 1996 13-15).

Per contra, Francesco Barozzi (1537-1634), expert en el neoplatònic Proclo, en la seva obra *Opusculum, in quo una Oratio, et dues quaestiones: altera de certitudine et altera de medietate mathematicarum Continentur* (1560), va ampliar i centrar el debat sobre la qüestió de la certesa, afirmant que les demostracions matemàtiques expliquen tant les causes formals com materials, i per tant assoleixen el mateix grau de certesa que la lògica i, per consegüent, es poden aplicar al coneixement de les coses naturals. Altres autors que el van acompanyar en aquesta tesi van ser Giuseppe Biancani, Pietro Catena (professor de Barozzi), Christopher Clavius i Isaac Barrow. Barozzi va complementar el seu protagonisme en el procés de reevaluació de les matemàtiques a través de l'edició de texts antics, en els que col·laborà amb en Francesco Maurolico, Federico Commandino, Guidobaldo del Monte i del propi Clavius.

En el camp jesuític, tres dels seus membres van tenir un gran protagonisme en aquest procés de discussió sobre la naturalesa, la certesa i la utilitat de les matemàtiques: Jeroni Nadal, Baltasar de Torres i, especialment, el ja esmentat Christopher Clavius. I el *Collegio Romano* es constituí en un espai d'experimentació i de debat entorn del paper que aquesta matèria havia d'ocupar en les escoles de la Companyia.

Baltasar de Torres era nascut a Medina del Campo el 1518 i va estudiar medicina a Alcalà de Henares, tot i que no he trobat proves fefaents d'aquest fet. En el còdex *Barberinus Latinus 304*, Torres cita en diferents ocasions al seu mestre Aguilera. En una d'elles, [f.272r], afirma que "el instrumento del doctor Aguilera de las declinationes y reslexiones es bien hecho y co[n] artificio / tiénelo M[aestro] fra[n]cisco". El 1530 Aguilera publicà *Canones astrolabii universalis*. El 1554 publicà una segona edició millorada on intentà reconstruir l'instrument utilitzat pels àrabs per observar els moviments de les estrelles i l'altura del pol. El 1540 marxà a Itàlia on restà fins el 1551. A

Roma, el 1548, va construir un quadrant universal original amb unes taules amb tots els moviments. En retornar a Salamanca, va ocupar la càtedra d'Astronomia (Beltrán de Heredia 1970, 252-255). Torres va mantenir correspondència amb Aguilera d'acord amb el que apareix a [f271r] comentant la manera de fer esferes. Torres anomena el "generalis quadra[n]s D. Aguilerae magistri nostri" [f205v] la qual cosa fa pensar que van tenir contacte directe. No he pogut acreditar contacte entre ells a la Península (Aguilera va ensenyar a Salamanca i Torres es va formar a Alcalá), la qual cosa fa pensar que es van conèixer a Itàlia.

Torres va anar a Palerm per exercir de metge, a la cort de Juan de Vega, qui va ser virrei de Sicília entre 1547 i 1557, i bon amic dels jesuïtes. Tot i que sembla que era a punt de casar-se amb una noia que pertanyia a una destacada família, Torres decidí fer-se jesuïta sota la direcció de Jeroni Doménech, qui de seguida va escriure al fundador avalant la seva candidatura per ingressar en la Companyia.[1]

[1] Antes que me partiese para Vibona [Divendres Sant, 31 de març de 1553] me habló vn doctor en medicina, médico del visorey, lamado el doctor Torres, y me dixo cómo hauía algunos días que el Señor le daua á entender que entrasse en nuestra companya. Y que sobre ello hauía hablado á Mre. Madal: y pidiéndome parescer sobre ello, le dixe que hiziesse los exercicios, y ha ido al visorey á supplicarle, que, después de las muchas mercedes que le ha hecho, le hiziese esta, que le hiziese recibir en esta Compañía, y esto pidiendo con lágrimas. De lo que el virey queda muy edificado, y toda esta corte está spantada, de ver vna mutación tan grande, que á donde tractauan de casar con vna / principal doncella que le traya 4000Δ, y más de hazerle protomédico deste reyno, porque el que lo tiene es precessado, y y [sic] creen que se lo quitarán, y tenía ojo de darle á éll, y agora que todo lo menosprecie, marauíllanse mucho; y todos dicen que mutatio est dexterae excelsi, conosciéndole por persona muy hábil y de buen juhizio, y tenido por letrado no solo en medicina, más en philosophía y matemáticas y griego; y que por el pasado estaua muy alieno desto. Díxome el camarero del visorey, no sabiendo que huía determinada de entrar en la Compañía, que si el doctor Torres determinara de ser de la Compañía, que

Ignacio de Loyola es mostrà d'acord i entusiasmat amb l'ingrés de Torres i l'autoritzà a no vestir els hàbits en tant que organitzava la seva retirada de Palerm, però de seguida reclama la seva presència a Roma, s'ordena sacerdot el 28 d'agost per un procediment excepcional que retallà els terminis previstos per les normes ordinàries d'ingrés, *et con li ordini sacri giè si trova assai aggiutato et si spera ogni bene di lui.* Torres no pot ingressar en la Companyia en un moment més oportú, ja que es buscaven *non modo eruditissimos professores, sed etiam assiduos.* La seva col·laboració amb el *Collegio Romano* seria providencial. De seguida es va pensar en ell com a Catedràtic de matemàtiques i filosofia, la qual cosa va sorprendre al propi Torres. En efecte, quan va conèixer quina seria la seva funció al *Collegio Romano*, va escriure a Sicília, tot i estar malalt i a punt de ser ordenat sacerdot, demanant amb molt detall els seus llibres de matemàtiques (Loyola 1903-1911).

---

se spantaría más que de la mutatión que hizo sanct Paulo y los otros apóstoles: en tanto tenía tal mutatión. El Señor sea alabado por siempre, al qual ninguna cosa le es imposible, ni avn difícil. Antes de que saliesse de los exercicios, fui yo al visorey, y le comuniqué su propósito, como pidiéndole parescer, diziéndole que, hauiéndole de tomar, que no lo haríamos sin su licentia y buena voluntad. Y el díxome: - "¿cuándo podrá entrar?" Yo le dije: - "Luego." –"Cómo luego? ¿no nos curará más?" Y yo díxele que, si á su ex. parescía, que por algún tiempo est[uv]iesse sin mudar hábito con nosotros, y que todos estáuamos promptos para su seruitio, y que si el doctor stuuiesse con nosotros, sería lo mismo d'éll. Respondióme que el doctor era persona de juhizio y de letras, y que sabía lo que hasía, y que le parescía muy bien por agora no mudasse hábito, y que podría curar solamente á su persona y á su hija, y que se quedasse allí en la abbatia, adonde ha hecho los exercicios quedamos su Ex. Y yo. Después ha sido cosa gratiosa que ablándole el doctor, le dixo su Ex. Que éll haría que le recebiéssemos, y que podría estar con su hábito [de médico] … // … éll se contenta de todo, y amuestra que quiere en todo obedescer, que, aVnque éll no querría más medicar, que todavía dice que por obedientia lo hará, y ansí, pidiéndole vno de casa consejo sobre su indisposition. Dixo: "No puedo ordenar nada sin obedientia." El es de 35 anyos. Spero en el Señor que será vn buen subjecto, y que podrá en muchas cosas seruir á su diuina magestad (…)" (Loyola 1903-1911).

A partir del 6 de novembre Torres es va fer càrrec del tercer curs de filosofia. El programa combinava dues matèries: filosofia natural i matemàtiques.[2]

La filosofia natural o “Physica” s’estudiava en els textos d’Aristòtil: *de physico auditu, de caelo, de metereologicis, de generatione et corruptione, de anima, parva naturalia, metaphysicorum.* L’estudi de les matemàtiques s’iniciaven amb el comentari a Euclides però per Baltasar de Torres també estaven relacionades amb matèries astronòmiques: teoria de planetes, explicació de les esferes, estudi de l’astrolabi i descripció del planisferi.

La directriu d’Ignacio de Loyola respecte a la filosofia natural era la de seguir la doctrina aristotèlica-tomista (García Villoslada, 1956), però amb la visió d’admetre futurs autors (*Constitutiones Societatis Iesu*). Els criteris pedagògics ignasians s’inspiraran en els models de les principals universitats europees. El pla d’estudis de la naixent universitat era semblant als de Lovaina i París. El mètode de treball i estudi era la part més important del *modus parisiensis.* El seu propòsit fonamental era el de promoure un exercici constant que podria posar en acció, durant el procés d’aprenentatge, els recursos i competències dels alumnes. La base del sistema era la *lectio, les questiones, disputatio, i repetitiones.* La doctrina filosòfica estava encotillada en aquests moments en els motllos albertino-tomistes, que en el seu temps, tres segles abans, havien constituït una agosarada revolució en el sentit de fondre la filosofia tradicional amb el científic experimental (Gilson 1921, IV,

[2](Villoslada 1954, 326, 329 i 335) Anota a Torres com professor de matemàtiques des del 1553 al 1561; pel que fa a les classes de filosofia, el primer curs 1553-1554 l’anota com professor de metafísica, i només el 154-1555 com professor de física o filosofia natural.

II, 97-124; Farrell 1938, 30-37). En l'escola de Lovaina, en canvi, aquest ideal renovador era encara viu.

Els estudiants jesuïtes de la Universitat de Pàdua havien rebut unes instruccions per part d'Ignacio d'assistir, durant dos anys i mig, a lliçons de lògica, filosofia natural, metafísica, matemàtiques i filosofia moral (Loyola 1903-1911). La intenció era la de preparar les seves ments per a la teologia i serveixen per al seu perfecte coneixement i ús i per si ajuden a aconseguir les finalitat de l'ordre (Paradinas 2012).

El pes que els estudis de matemàtiques en la formació dels jesuïtes va ser regulat pel criteri ignasià: *... artes mathematicas (quatenus eas intellegi expedit)....* Aquest criteri ja va ser anunciat en la mateixa carta al Superior de Lovaina a propòsit de l'ensenyament del Dr. Torres, i que després quedà codificat en les Constitucions: *Tratarse ha la lògica, physica y metaphysica i la moral, y también las mathemáticas con la moderación que conviene para el fin que se pretende*, la qual cosa sembla indicar que la majoria dels jesuïtes havien d'estudiar matemàtiques en un dels cursos de filosofia. Amb tot, Ignacio preveia la conveniència de que els més aptes fessin cursos especials d'ampliació.

Res sabem de la formació matemàtica de Torres, descomptada la que va rebre dels estudis del *Quadrívium* inserits a la carrera de Medicina. Sí sabem que durant la seva estada a Sicília, Torres travà amistat, a través de Juan de Vega, amb dos importants humanistes representants de l'última etapa del renaixement de les matemàtiques: Francesco Maurolico[3] i Federico Commandino,[4] tots dos especialment compromesos amb la recuperació de la tradició matemàtica grega (Scaduto 1949). Una part important de la tasca desenvolupada per ambdós va ser la reconstrucció rigorosa dels textos i l'elaboració de la corresponent versió llatina dels escrits matemàtics d'autors com Apol · loni de Perga, Arquímedes, Aristarc de Samos, Euclides, Herus, Menelaus d'Alexandria, Pappus d'Alexandria, Ptolemeu, Serenus, Teodosi i d'altres. El contacte que Torres va mantenir amb ells el va permetre de cultivar i desenvolupar els seus interessos matemàtics.

Informat de la tasca que li havia estat encomanada com a professor a Roma, Torres demanà amb tota urgència[5] que se'l fes arribar des de Palerm els seus llibres que serien la base de la primera biblioteca matemàtica del *Collegio Romano*, i també materials com un planisferi i una esfera que li serien útils en l'ensenyament pràctic de l'astronomia, necessaris dins les exigències

---

[3] Maurolico aportà llum a les obres clàssiques, però també nous mètodes per l'estudi de determinades qüestions com la de les seccions còniques, la determinació del centre de gravetat d'una piràmide o d'un conoide parabòlic. Abastà diverses disciplines matemàtiques. Els amics i protectors dels jesuïtes pertanyien al grup d'amics de Maurolico. Entre ells destaquen el cardenal Cervini, Farnese i, sobre tot, el virrei de Sicília, Juan de Vega. El 1559 va ser nomenat director del *Collegio de Messina*. Maurolico regalà a Torres una esfera de tres pams de diàmetre, segurament en el moment d'abandonar la cort de Palerm per ingressat a la Companyia de Jesús (Scaduto 1949).

[4] En el pròleg del seu llibre sobre l'*Analemma* de Ptolemeu, dedicat al Cardenal Farnesio, assenyala la seva voluntat de "fer reviure les disciplines matemàtiques després de 600 anys". (...) "En efecte, els matemàtics antics tractaren molt diligentment dels càlculs del gnòmon; i van llegar a la posteritat moltes coses aptes per conèixer aquells amb l'ajut de la ciència i de l'estudi, però per la incúria dels temps, o per negligència dels homes succeí que no van arribar a les nostres mans, sobre aquesta matèria, tants monuments de tan esclarits homes.(...)".

[5] Carta de Baltasar de Torres als jesuïtes de Sicília del 19-20 d'agost de 1553 (Loyola 1903-1911).

de la ciència moderna i pioner del sentit pragmàtic que els jesuïtes impregnaren sempre al seu ensenyament. Els utilitzà tot seguit. Convençut de la necessitat d'utilitzar per a les seves classes del material científic del moment, va estar amatent a tot el material que anava apareixent per demanar-lo al Superior General, qui el tramitava des de Roma.[6] I no són només llibres el que Torres reclama del seu antic despatx.[7] Torres va manifestar sempre una permanent activitat per aconseguir actualitzar els seus coneixements matemàtics i millorar l'ambient científic del *Collegio Romano*.[8]

Va ser Torres qui va sembrar la llavor del progressiu prestigi de l'ensenyament de les matemàtiques en aquesta universitat, manifestat en els seus deixebles que ben aviat es convertiren en professors de matemàtiques dels col · legis jesuítics d'Europa. Un dels fruïts més importants del seu treball va ser la figura

[6]Es conserven tretze cartes d'Ignasi de Loyola o del seu secretari reclamant aquest material a terceres persones per encàrrec de Torres.

[7]El superior de Palerm refereix així l'inventari de la tercera comanda, encavalcada amb una quarta: "Credo che el Padre dottor Torres già hauerà riceuuto il globo spherico colla sua coperta, et quello instrumento de roblo, il libro, cioé quelle tauole de astrologia, il planisferio, quali tutti ho mandato in duo uolte a Napoli, indriciati al Rdo. Padre Salmerone. Hora mando quello altro libro che domana, cioé el planisferio de Joanne Roias". EM, IV, 389. A més de reclamar el seu antic material científic, Torres gestiona la posibilitat d'adquiri algun nou instrument. Així escriu a Ignacio a Mesina, recomanant la petició de "un planisferero che haueua monsegnor de Patti". La raó és que interessa al doctor Torres "per essegli adesso necesario, leggendo la cosmographia". Mesos més tard és al superior de Florència a qui escriu Ignacio aquest curriós paràgraf: "Il doctore Tor[r]es , olim médico, adesso religioso et lector de mathematice et philosophia naturale nel nostro collegio di Roma, ha inteso che il nostro charissimo Mtro. Giouanni de Rossis tiene cierti instrumenti o figura delle theorice de planete molto bene; et accadendo che lui ne ha de bisognio per leggero decte therorice, ci ha facto instantia per pregare S. Sria, ce le praesti per un poco di tempo. V. R. Veda se potrá senza disconmodo praestarle et mandarcele per qualche vecturale, che di qua si pagará la spesa allo andar et tornar. Se pure le adoperasse, o uero si temesse non si gustasseno, non accadrà mandarle" (MI, ser. I, ...).

[8]Torres va encarregar un llibre de matemàtiques de Petrus Nonius que es podia aconseguir a París o Lió, i llibres als jesuïtes de Sicília (Loyola 1903-1911).

de Christopher Clavius, el seu successor al *Collegio Romano*, qui s'incorporà a la docència sis anys després que ell, exercint-la durant quinze anys en tres etapes diferents (1566-1570, 1576-1584 i 1587-1588). La reforma gregoriana del calendari, els seus treballs sobre gnomònica, trigonometria, la publicació dels *Elements* d'Euclides, i la seva vinculació a Galileu, situarien Clavius entre els grans matemàtics del seu temps.

Clavius va ser un gran defensor del caràcter científic de les matemàtiques dins del *Collegio Romano*. Atacà les demostracions de la filosofia natural i de la metafísica perquè, més que ciències, li semblaven conjectures, per la multitud i discrepància de les opinions dels filòsofs. Defensà de forma argumentada la utilitat i la necessitat de les matemàtiques per entendre la resta de la filosofia, en especial la Filosofia natural, i també les arts. Clavius va ser un seguidor dels plantejaments de Procle sobre la naturalesa dels objectes matemàtics com éssers intermedis entre el món immaterial i el món material, i va defensar el paper de les Matemàtiques com a fonament general del saber científic. Practicà amb molta cura el mètode demostratiu de la geometria euclidiana, l'axiomàtic-deductiu, considerant-lo com el mètode universal aplicable a totes les ciències, en front dels que defensaven la lògica aristotèlica com l'única via d'accés i construcció del coneixement. Assenyalà també la necessitat de preparar persones amb una bona formació matemàtica amb inclinació cap a la docència.

La prematura mort de Torres a Nàpols el 9 de maig 1561 va limitar a quasi vuit cursos la seva tasca com a professor de matemàtiques, metafísica i física en el *Collegio Romano*.

2.1 Índex dels contingut del manuscrit *Barberinus Latinus 304* de Baltasar de Torres

Aquest manuscrit de Baltasar de Torres dipositat a la Biblioteca Vaticana de Roma, conté testimonis escrits privats de diversos aspectes de la seva vida al *Collegio Romano*, destacant les seves consideracions no datades en general, en torn a les Matemàtiques i al seu ensenyament. Li manquen, però, unes cent pàgines.

El contingut és el següent:

Desunt [no hi són]	
Conceptus Mathematici (= Mathematicae non propiae),	
Hotologia, Perspectiva practica, Montes Justini	1
Alumen scisile, Stuco (=Stuco que resiste al agua i al fuego)	
Sanguis draconis (=Sangre de drago), Sirupus scabrosus	1
Algebrae Tractarus Forosemproniensis	2
Geographica	12
Calamita	15
Magnes	15-17
Elementorum tractatio (=Mathematicae non propiae)	20
Geometria prattica volgar	28
Geographica	40
Elementorum Euclidis dubitationes	57
Ponderum liber	61

Vol. I

Vol. II

2.2 L'organització dels estudis de matemàtiques al *Collegio Romano*

El *Collegio Romano* va ser concebut des dels seus inicis com un espai de referència, no només per a les pràctiques educatives, sinó també per a l'elaboració de continguts d'ensenyament. Va ser Torres qui el va convertir ràpidament en un lloc privilegiat de reflexió sobre el programa d'estudis de les matemàtiques. Això comportà serioses discussions entre els filòsofs i els matemàtics sobre la seva certesa i utilitat. Els més fervents partidaris de revaloritzar-les, en els primers cursos del *Collegio Romano*, van ser Torres i Nadal, tot i que van ser les propostes de M. Olave que es van imposar, optant-se per una concepció més tradicional de l'organització dels sabers (Romano 1999, 58-59).

El còdex *Barberinus Latinus 304* conté diverses reflexions de Torres sobre quin hauria de ser el pla d'estudis de matemàtiques del *Collegio Romano*. En el que sembla més antic opina que s'haurien de desenvolupar al llarg de quatre cursos, malgrat reconèixer la dificultat per convertir-se en expert en elles.[9] Les matèries a estudiar serien les següents:

<u>Primer curs</u>

- Aritmètica Pràctica

- L'esfera

[9] "mucho tiempo se requiere p[ar]a hazerse uno consumado en ellas. Mas pa[r]a alcanzar una mediocridad paréceme q[ue] bastarían quatro años". C.B.L. 304 [f.174v].

- La Geografia

- L'astrolabi o el quadrant [rellotge de Sol]

Segon curs

- Estudi de tota la Geometria d'Euclides, ressaltant el següent:

1. Sobre el primer llibre dels *Elements* d'Euclides s'estudiaria el que va escriure Proclo en quatre [llibres], la *Geometria Pràctica* d'Albert Durer, de Carulo Bonillo, i "algunas cositas" de Vitruvi; i els mètodes pràctics sobre *la perspectiva* amb la finalitat de fer veure que tot ha sortit d'Euclides. Mentre s'estudiés el *primer llibre* de Proclo, es repassaria l'Aritmètica amb la finalitat de preparar els alumnes per entendre les demostracions del *llibre segon*, que les faria amb números. S'ensenyarien també *les addicions* de Campano i *les anotacions* de Peletier.

2. En el cas que l'alumne sigui "ingenioso y diligente" mentre s'estudïi *el segon llibre* s'estudiaria algunes coses de Pappus en relació al p[ro]posito.

3. Abans de començar *el cinquè*, s'estudiarien les proporcions segons Fernelio. I sobre les definicions del cinquè s'estudiaria el que Petro Nonio escriu contra Orontio.

4. En el *sisè* "procuraria mucha diligencia porq[ue] es cosa excelle[n]te".

5. Els *setè, octau* i *novè* no són difícils.

6. Abans del *desè* s'estudiaran cinc o sis regles d'àlgebra.

7. *L'onzè* l'estudiaria ajudant-se de fils de jonc per poder mostrar en relleu les figures.

8. Sobre el *dotzè* i la resta procuraria construir els cossos i considerar algunes coses de "Leonardo Pisano" i les últimes de l'obra de la *Geometria Pràctica* de Durer.

Tercer curs

- Estudi de l'*Esfera* de Teodosi, els *Fenòmens* i la *Perspectiva* d'Euclides.
- *Els triangles* de Regiomontanus.
- *L'Aritmètica* de Boetius.

Quart curs

- "aquel librito de Iocis que amplió i declaró Gemma" [la cosmographia de Pedro Apiano corregida i ampliada per Gemma Frisio].[10]
- La *Geografia* de Ptolemeu i el seu astrolabi o planisferi, "demostrado con las anotacions de M[tro] Federico" [Commandino].
- Si es pot, Apol·loni, Arquímedes, Pappo, Geceno, Jordano, Vitellion, Albazen, Petro Nonio i Francisco Maurolico.
- L'horolografia i els instruments vinculats: el torqueto, el radi, l'*Analemma* de Ptolemeu, el principi d'Arquímedes, l'Almagest de Teón, el d'Averrois, Taules [probablement les alfonsines], Calendaris i Almanacs.

Torres escriu: "... dos vías se podria[n] tener la una q[ue] a mí me co[n]tenta, no sé si contentarà a todos; la otra p[ar]écese la major, aunq[ue]

[10] Gemma Frisio fou professor de Medicina de la Universitat de Lovaina. Les seves obres, la majoria d'astronomia, van ser molt utilitzades durant tot el segle XVI. La *Cosmographia* de Petrus Apianus és un llibre molt complet, i fou editat cinc vegades. *Del radi astronòmic* és un tractat de geometria pràctica amb aplicacions a l'astronomia.

a mí no me agrada. La q[ue] yo seguiria és esta: el p[ri]mer año le haría oir la arithmética prática, la sphera i la geographía y algú[n] instrumento, como sería el astrolabio o quadra[n]te. El segundo le leería toda la Geometría de Euclides en esta manera: sobre el p[ri]mer libro le daría la summa de lo q[ue] sobre él escribió Proclo en quatro, y todo lo q[ue] pudiese sacar de Alberto Durero en la Geometría Prática, y de Carulo Bonillo y de algunes cosillas de Vitruvio, y modos prácticos q[ue] usan perspectives i Architectos trairia allí, p[ar]a q[ue] entendiesse[n] cómo [h]a salido todo de Euclides i el tiempo q[ue] durasse el p[ri]mer libro avisaria q[ue] diesse[n] una vuelta a la Arithmética p[ar]a preparar-los a las demostracions del .2º., las quales provaria co[n] números. En todo procuraria de declarar las additiones de Campano y las annotationes de Jacobo Peletario. Y, si fuesse ingenioso y diligente el discípulo, sobre el segundo trataría algunes coses de Pappo tocantes al p[ro]positó. Antes de començar el quinto leería algunos días las p[ro]portiones, y seguiria en elles a Fernelio, y después sobre las definicions del quinto notaria lo q[ue] Petro Nonio nota co[n]tra Orontio. En el sexto procuraria mucha diligentia porq[ue] es cosa excell[n]te. El séptimo, octavo y nono no son muy difíciles. Antes del décimo leería cinco o seis regles del Algebra, p[ar]a declarar todas las demostrationes en Números, porq[ue] sin elles la cosa casi no se p[er]cibe. El .11. leería con hilos de junco, mostrando en Relievo lo q[ue] allí es difícil en llano. Sobre el .12. y los q[ue] queda[n] procuraria de hazer los cuerpos, y v[er] algunes de Leonardo Pisano, y juntamente lo q[ue] en lo último trata el Durero en su pràctica ge[o]metria. El tercer año leería Theodosio de Spheris, Phenomena Euclidis y su perspectiva y [e]specularia, y los triàngulos de Ioannis de Monte Regio, y la arithmética de Beotio, el quarto libro de Ioccis q[ue] amplió y declaró Gemma. Y luego la Geographia de Ptholomeo, y su astrolabio o planispherio, demostrados con las annotationes de MFederico. Después porsi& podria passar Apollonio, Archímedes, Pappo, Geceno&, Jordano, Vitellion, Albazen, Petro Nonio, Francisco Mauroli[co]. La horologiographía y los instrumentos q[ue] se encierran en ella: el Torqueto, el radio, de *Analemma*te de Ptholomeo, de insidentib[us]s aquae. El Almagesto con Theone, el Almagesto de Averrois, Tablas, Kalendarios, Almanaches. La otra vía es come[n]çar de Euclides y leer a rabo, quiero decir el quarto, año lo q[ue] dize el primero.".[11]

Tanmateix no va ser aquest pla de Torres el que s'aplicà finalment. Ell i Nadal[12] no van estar d'acord sobre el pla a desenvolupar a les classes. Així les coses, a continuació presenta breument un altre pla, el que ell anomena l'altra via: "come[n]zar de Euclides i leer a rabo, quiero decir el quarto año lo q[ue] dize en el primero".

Res concret se sap del pla d'estudis que realment s'aplicà els primers quatre cursos (1553-1557). En canvi disposem de prou informació sobre els cursos següents: "Antes d[e] esta lectión [la sisena de Geometria de l'any 1557], [la] vísp[er]a de San Martín [11 de novembre], viniendo de la viña con

[11] C.B.L. [f.174v]

[12] Jeroni Nadal va ser el primer jesuïta qui va valorar la importància de l'ensenyament de les matemàtiques proposant-ne una programació per ser aplicada al *Collegio de Mesina*. Posteriorment va fer grans esforços perquè s'apliqués a tota la Companyia.

el P. Nadal se raçonó que sería bien haber un curso de Mathemáticas q[ue] durasse dos años y medio, el qual deviessen de oir los lógicos y philósophos y metaphísicos. Y traçávase en esta manera: q[ue] se [h]uviessen de leer dos lectiones, una la mañana p[ar]a los lógicos y otra la tarde p[ar] los philósophos. El curso [h]avría de tener su p[ri]ncipio en Euclides, leyendo sus libros en cinco meses y luego dos meses de Arithmética práctica y otros dos de Arithmética de Boetio. Y luego la [e]sphera de Sacrobosco q[ue] se estaría a leer 4 meses, y la geographía tres. El astrolabio 4, la perspectiva tres y la música tres".[13]

El pla, doncs, quedà establert així:

- Dues lliçons diàries, una pel matí per als lògics, i l'altra per la tarda per als filòsofs.

- S'estudiarien els *Elements* d'Euclides en cinc mesos.

- L'*Aritmètica Pràctica* en dos mesos.

- L'*Aritmètica* de Boetio en dos mesos.

- L'*Esfera* de Sacro Bosco en quatre mesos.

- La *Geografia* en tres mesos.

- L'*Astrolabi* en quatre mesos.

- La *Perspectiva* en tres mesos.

- La *Música* en tres mesos.

L'estudi d'Euclides requereix per en Baltasar de Torres estudiar primer l'Arimètica pràctica durant un mes. També que l'estudi del primer llibre es faci segons el comentari de Procle al primer llibre dels *Elements* d'Euclides.

[13]C.B.L. 304 [f.189r]

El segon s'hauria d'estudiar "muy despatio, i cada p[ro]position se expliq[ue] en Números". Un cop finalitzat l'estudi del quart, s'estudiarien durant un mes proposicions i regles pràctiques d'Aritmètica segons els textos de "Pe[d]ro Núñez portuguès y Juan Fernelio". Abans de començar el setè llibre, cal fer una "exposition de cubos y quadrados y símiles superficiales".[14]

Uns folis més endavant contenen la que sembla la programació del curs 1558-1559 diferenciada segons els tipus d'estudiants. Els "dialèctics" estudiaran tres mesos (agost, setembre i octubre) l'*Aritmètica* de Gemma Frisio, mentre que els lògics estudiaran l'esfera, i els filòsofs estudiaran la perspectiva o l'astrolabi o la geografia. Durant els nou mesos del curs següent, els lògics començaran a estudiar la *Geometria* d'Euclides des del llibre primer al sisè. Després es saltaria a l'onzè i també s'estudiaria l'*Esfera* de Teodosi. I si sobrés temps s'estudiaria a Menelaus.[15]

Les instruccions que dóna Torres per estudiar Euclides aquest curs són les següents: cada alumne haurà de tenir regla i compàs. Un cop llegits els principis, la primera proposició s'estudiarà segons el que afegeix Campano o Proclo (de qui el primer els va prendre). La segona s'estudiarà a través de tots els casos que apareixen a Procle. De la tercera només alguns casos i els alumnes recolliran els dibuixos en els seus quaderns. En la quarta s'estudiarà el triangle escalè tot preparant la cinquena. Després Torres valora com de difícil comprensió la cinquena proposició,[16] proposant la seva comprensió a

[14] C.B.L.304 [f.224v]

[15] C.B.L.304 [f.266v]

[16] "se hará repetir suavemente y sin trabajo y sin fatigar a los oyentes, y demostrando

partir de la superposició de triangles retallats.[17]

Del curs 1559-1560 Torres comenta el següent: el gener i febrer s'estudiaran els llibres segon i tercer d'Euclides i s'acabarà l'Aritmètica. Així al març es faran només dues lliçons i s'entrarà en el quart llibre. El cinquè i el sisè l'estudiaran tots junts durant tres mesos, fins a finals de maig. A la fi de juny podran haver estudiat l'onzè. Els mesos de juliol i agost estudiaran l'esfera de Teodosi. El setembre i l'octubre, l'esfera [de Sacrobosco?] durant el matí.

En la classe de la tarda (a les 20 hores) i durant els mesos de març, abril i maig, s'estudiaran els rellotges. Després durant altres tres mesos s'estudiarà la perspectiva. Durant els mesos de setembre i octubre hi ha les opcions d'estudiar l'astrolabi, la geografia, el quadrant ("q[ue] sería lo major") o "la perspectiva pràctica q[ue] nu[n]ca se leyó y es buena le[c]tura".[18]

És interessant la distribució que Torres fa de les proposicions que sobre l'esfera pensa explicar, prenent com a referència les obres de Teodosi, Menelaus i Maurolico:

	TEODOSI	MENELAUS	MAUROLICO
	34	47	48
	34	48	32
	16	23	
Total:	84	118	80

la quinta con el angulo baxo". C.B.L.304 [f.266v]

17 C.B.L.304 [f.266v]

18 C.B.L.304 [f.266v].

En total hi ha 282 proposicions que havia d'explicar en 94 dies, tocant, per tant, explicar tres per dia.[19]

Posteriorment assenyala la conveniència d'ensenyar en grup reduït ("a tres o quatro") i a part ("en camara") els llibres d'Euclides, del setè al desè i el dotzè, un cop estudiats el cinquè i el setè, l'*Esfèrica* de Teodosi-Menelaus-Maurolico, obra del seu amic, el sicilià Francesco Maurolico, publicada el 1558, i l'Almagest. Torres recomanà: "Hazer un poco de [e]studio sobre la bola celeste, viendo las longitudines y latitudines." "que después del .4º. de Euclides se lea la Arithmética de Gemma o otra q[ue] mejor paresca y las p[ro]positiones al cabo con diligentia." "que se vea si acabado el quinto y sexto de Eu[clides] será bien leer el .11. y después spherica Theodosii, Menelai i Maurolyci." "yten q[ue] leído todo esto en publico se vea si conviene leer en camara a tres o quatro el .7., .8., .9. y .10º. o el . 12. Y los q[ue] quedan de Eu[clides]." "Yten che al fin de todas las publicas lectines de este año sobre la [e]sphera y si esta se leyesse, q[ue] en cámara se leyesse el primero del Almagesto a los tres o quatro." "yten q[ue] el segundo año se leyessen co[n] la divina gratia p[ar]a los logicos Euclides y lo dicho, y p[ar]a los proyectos Astrolabio y la bussola, y la perspectiva y reloges." "Embiaránse a P. Vas las Tablas de Schonero. ya se embiaro[n]." "El P. General ordenó después q[ue] la media hora se leyese Euclides y la otra media los reloges. y ansí [h]avrá lugar de leer los .7. ya dichos de Euclides y los .8. de sphericis elementis.

[19] C.B.L.304 [f.270r] És el propi Torres qui fa la divisió de 282 entre 94.

Y los reloges durarán la mayor parte del año, o todo." [20]. Aquesta tasca es recomanava pels dies de festa del tercer curs de l'any 1559±1.

Sembla que a causa de la presència d'alumnes externs nous, Torres va haver de fer una nova reordenació de la programació general: "Después pareció q[ue] no es bien q[ue] los sumulistas comiencen Euclides al fin del primer año, porq[ue] parece mal al p[ri]ncipio del año seguir lectión començada como el año de 49 [sic ¿1559?], q[ue] a petition de forasteros fue menester tornar a Euclides del principio, mejor orden será q[ue], passados nueve meses del año, los lógicos passen a la otra lectión. en los quales tres meses ellos oyrá[n] [e]sphera, y los sumulistas la mañana oirán la Arithmética prática, con la qual estarán dispuestos p[ar]a oir algunas p[ro]positiones del p[ri]mero de Euclides, y todas las del segundo en números, y ansí en el .3º. y ansí podrán oir las p[ro]portiones acabado el .4º., aunq[ue] las [h]uviesse[n] començado con la arithmética. de manera q[ue] el año de la dialéctica todo se espenderá en: Euclides, Theodosio, Menelao, Maurolyco, sino los tres meses ultimos q[ue] oirán la [e]sphera y al p[ri]ncipio del año el Astrolabio y planispherio juntamente, quanto a la fábrica. después se seguirá el Astrolabio, cuya lectura durara tres meses. Y otros.4. [corregit de "tres"] de Theóricas de planeras, y otros tres de Perspectiva, y dos de Geographia. Y aunque comiencen Theología podrán oir otros quatro meses de Reloges. esto después de la [e]sphera se podrá mudar, según después mejor parecerá. Porq[ue] se podría leer algo de Almanach –o p[er]petuo o calculado-, o del Kalendario, o

[20] C.B.L.304 [f.271r]

el radio, o quadrante. (…) Enero y febrero, co[n] la gracia divina, se acabará la arithmética y los tres de Euclides y lo que bastará de reloges. Leeráse el quarto, quinto y sexto de Euclides a las .20. horas, avisando de la lectión al superior. y en março, abril y mayo se acabarán los seis, y en este tiempo no se leerá más de una lectión. en el qual tiempo podría yo dar una vuelta a los Metheoros, estudiando cada día una hora y yendo de corrida sin parar. al p[ri]ncipio de junio se podrá leer a las .20. la perspectiva. la qual oirán lógicos y philósophos, haziendo p[ri]mero de [e+stuco un ojo grande, y si a otra hora no se leyesse la Metheora, lo qual tengo por difficultoso, se podría leer Theodosio de sphericis també[n]. sino que [h]ay un inconveniente: que es menester tomar dos meses y medio p[ar]a la Arithmetica de los sumulistas, en los quales se [h]a de leer una lectión que sea común a los philósophos y lógicos, y esto se mirará bien./ mas si, como los discípulos han p[ro]puesto al padre, yo huviesse esta quaresma de començar los Metheoros, el mismo día es menester [h]aver acabado el tercero y seguir con el .4º. a la qual lectión estará[n] los philósophos y lógicos. y ésta se leerá a la hora ordinaria después de comer. Los Metheoros a otra hora./ y si, acabado el .3. libro de Euclides, quisieren que los reloges no cessen, se demandará licentia de los discípulos para que se prosigan las fiestas”.[21]

Entre els continguts que a les seves classes de matemàtiques va impartir Torres, destaquen, doncs, l’aritmètica, la geometria, l’esfera, la geografia, la teoria dels planetes, l’astrolabi, la perspectiva, el calendari i els rellotges.

[21] C.B.L.304 [f.271v i f.273v]

Són més de vint els matemàtics citats per Torres en el còdex *Barberinus Latinus 304*. I no oblida alguns dels que havien intervingut en la transmissió i desenvolupament dels sabers matemàtics al llarg de l'Edat Mitjana en el món andalusí. En efecte, cita a Albazen,[22] Averroes,[23] Gerson[24] i un instrument com el torquetum, aparell inventat per l'hispà Jābir ibn Aflah al segle XIII. Fonts que també van ser utilitzades per altres autors com el propi Regiomontanus.

Les propostes de Torres, així com les de Nadal, van semblar excessives perquè ben aviat, es redactaren altres que manifestaren la voluntat de no concedir massa importància a l'ensenyament de les matemàtiques. Serà el jesuïta Benito Perera qui amb l'obra *De communibus omnium rerum naturalium principis et affectionibus*, publicada el 1562, defensà que les matemàtiques no era ciència aristotèlica i que, per tant, no eren útils per avançar en el coneixement de la naturalesa. Posteriorment Clavius realitzà noves propostes amb la finalitat de potenciar l'estudi i ensenyament de les matemàtiques, però, tot i que algunes d'elles van ser recollides en les dues primeres versions de la *Ratio studiorum*, van desaparèixer de la versió definitiva degut a l'oposició de la majoria dels jesuïtes. Les matemàtiques van continuar essent matèries secundàries de les que no era necessari ni tan sols examinar-se (Paradinas 2012).

[22] Ibn Al-Haitam, metge i matemàtic àrab del segle X

[23] Aƀ l-Walīd Muḥammad Ibn ᵓAḥmad Ibn Rushd, metge i filòsof del segle XII

[24] Levi ben Gerson (1288-1344), astrònom i matemàtic. Autor de *De sinibus, Chordis et Arcubus*, un tractat de trigonometria que conté taules de cordes d'arcs. Torres reclama la seva obra en [f270r].

3 L'*Analemma* de Ptolemeu, obra de recerca de Baltasar de Torres

En les pàgines del còdex *Barberinus Latinus 304* dedicades a les lliçons sobre rellotges, impartides el curs 1558-1559, Torres escriu el mot "analema"exactament cinquanta-cinc vegades i situa com a primera font del càlcul de rellotges de Sol una obra de Ptolemeu anomenada l'*Analemma*, citada per Torres com *De Analemate liber Ptholomei* [f.274r], que encara no s'havia imprès i que figurava en manuscrit.[25] És en aquest punt que neix el meu interès per conèixer el contingut i la manera com una tal obra arriba a nosaltres a través de la seva vinculació amb els orígens del *Collegio Romano*.

Torres informa dels escassos exemplars existents i es dedica a copiar-lo. La importància d'aquesta còpia radica en que és una de les quatre actualment existents. La intenció de Torres no era pas la de fer una còpia per ser transmesa com segurament havia estat fins aleshores.

Julio Samsó afirma que al-Bīrūnī possiblement va utilitzar la projecció presentada per Ptolemeu en l'*Analemma* per a usos astrolabis en la seva obra no estudiada *kītāb fī istīcab alwuŷūh al-mumkina fi san at al-asturlab* (Samsó 1992). El *Planisferi*, obra de Ptolemeu que podem situar en paral · lel a l'*Analemma*, està present de forma continuada en molts d'aquests textos.[26]

[25]Sorprèn que faci aquesta afirmació sobre els càlculs de rellotges, ja que Vitruvi n'havia fet en el capítol VIII del llibre IX de la seva obra *Els deu llibres d'Arquitectura* dedicat a la construcció de l'*Analemma* que servia per a la construcció dels rellotges de Sol d'hores desiguals. Potser Torres era conscient de la importància renovadora del text ptolemaic respecte de la tradició anterior, la qual cita al començament de la lliçó sobre rellotges.

[26]El *Planisferi* és una obra ptolemaica que tracta de la projecció estereogràfica, fonament

Sembla que Torres, en el moment d'assignar a aquesta obra el paper de ser el fonament de l'estudi dels rellotges, desconeix del tot el contingut del text ptolemaic, que en cap moment explicita cap aplicació a la construcció dels rellotges, malgrat que en efecte hi serveix, com demostrà poc després Commandino en la seva obra *Claudii Ptolemaei Liber de Analemmate*, publicada a Roma el 1562.

El tema dels rellotges de Sol va ser de molt interès per als matemàtics dels segles XV i XVI, i formava part dels programes docents. S'emmarcava en l'interès per estudiar la mesura del temps a partir de la comprensió del moviment del Sol en l'esfera celeste. L'any 1458, Peurbach escriu lliçons sobre rellotges, el 1553 Maurolico n'escriu també dos treballs, publicats el 1575. Baltasar de Torres ensenyava sobre rellotges i és remarcable la coherència del pla d'estudis del *Collegio Romano* de 1558 situant l'estudi de les seccions còniques immediatament després del dels rellotges. En una carta de 1556, Maurolico havia mencionat que els escrits d'Apol·loni eren essencials per comprendre Arquimedes i la teoria dels rellotges de Sol (Scaduto 1949). Aquestes afirmacions també van ser subscrites per Luckey (Luckey 1927) i Edwards (Edwards 1984).

Torres, qui havia estudiat els rellotges a Alcalà,[27] demostrà l'interès pel text de Ptolemeu ja que el va copiar amb la intenció d'investigar-lo i explicar-

de l'astrolabi convencional. Citat i estudiat per diversos autors com Azarquiel, Maslama, Alï b. Jalf entre d'altres. Va ser traduïda ben aviat al llatí per Hermann de Carinthia.

[27] En la primera lliçó de rellotges del curs 1558 anomena el "cuadrante general de D. Aguilera nuestro maestro", [f.205v]

lo a les seves classes del *Collegio Romano*. Afirma que contenia errors i que de moment no l'havia entès. Tot i això, es fa el propòsit d'esbrinar les demostracions sobre l'*Analemma*. De moment, però, opta per seguir les explicacions no raonades d'altres autors, com a "Munterus, Orontius, Conradus, Petrus Nonius". En les anotacions marginals de la còpia continguda en el seu manuscrit es pot comprovar el seu intent de comprendre i d'interpretar els dos primers capítols.

Analitzant el contingut de les seves classes de rellotges es detecta la presència de l'*Analemma* pretolemaic.

A partir d'una introducció general a l'obra, s'estudia el significat del mot analema i es reconstrueix, allà on és possible, la seva trajectòria al llarg del temps. Es presenta a continuació un resum explicant el seu contingut, que dividim en quatre parts: una introductòria, un mètode gràfic des del punt de vista de la teoria de l'abatiment, el geomètric-trigonomètric, i el nomogràfic. La corrupció del text es manifesta clarament en les nombroses diferències que existeixen entre la taula final de la còpia de Torres i altres còpies o càlculs.

L'*Analemma* va ser estudiada amb molta cura per Clavius. En la seva obra *Gnomonica* la presenta, la comenta i per primera vegada en la història de l'*Analemma* introdueix la trigonometria plana i esfèrica com eines auxiliars per realitzar els càlculs precisos i rigorosos dels anomenats angles ptolemaics, substituint i eliminant així el mètode gràfic de càlcul que Ptolemeu havia inventat al qual Clavius critica per considerar-lo poc fiable. La *Gnomonica* de Clavius va ser publicada el 1581, cinc anys abans de la publicació el

1586 dels tractats sobre resolució de triangles plans i esfèrics respectivament. Però de la lectura atenta es dedueix que aquests dos tractats ja els tenia elaborats, si més no en part, donades les citacions que fa de si mateix, la qual cosa modifica la datació de la introducció de la trigonometria en el *Collegio Romano*.

3.1 Presentació de l'*Analemma* de Ptolemeu

Entre l'extensa obra de Ptolemeu es situa una molt breu i sintètica respecte als conceptes que presenta, i que normalment se situa entre les anomenades obres menors de l'autor: l'*Analemma*. El seu text és molt elegant[28] i rigorós, situant-se en la gran tradició dels teòrics grecs (Edwards 1984). En ella s'utilitzen les taules de cordes de l'*Almagest*, la qual cosa ens convida a pensar que va ser escrita després de la gran obra. Tant en l'*Analemma* com en un altre obra ptolemaica, el *Planisferi*, es poden situar els orígens de la ciència de la representació geomètrica (Sinisgalli, Vastola 1992). Si en el *Planisferi* es troba un mètode per projectar l'esfera celeste en un pla, l'*Analemma* conté mètodes de representació en un pla de figures tridimensionals, mostrant els orígens de la teoria de l'abatiment procedents d'èpoques anteriors al propi Ptolemeu. A més, utilitza sistemes de coordenades rectangulars, i mètodes matemàtics que s'apliquen als càlculs trigonomètrics, gràfics i nomogràfics. També apareix de forma explícita l'ús del regle graduat i del compàs fix, eines que Euclides mai no va utilitzà en els *Elements*, però que Vitruvi ja va introduir anteriorment a Ptolemeu. Cal destacar els arguments originals que presenta Ptolemeu en l'*Analemma* per presentar els sistemes de coordenades espacials, tot i que tant a l'*Almagest* com al *Planisferi* ja els havia utilitzat de forma adequada i precisa.

L'*Analemma* de Diodor d'Alexandria és l'obra més important que con-

[28]En el pròleg del seu llibre sobre l'*Analemma* de Ptolemeu, Federico Commandino afirma la seva dignitat i utilitat.

té l'*Analemma* pretolemaic. Apareixerà en els escrits d'Hyginus Gromaticus explicant la manera de calcular la línia meridiana. Posteriorment Heró d'Alexandria utilitzaria amb aquesta paraula un mètode semblant per calcular la distància entre Roma i Alexandria. L'*Analemma* de Diodor va ser comentada per Pappus d'Alexandria i citada per Procle un segle després. Sembla que va ser l'única obra clàssica utilitzada pels astrònoms àrabs (Edwards 1984).

Vitruvi havia dedicat dos capítols de la seva obra *De Architectura* als rellotges solars. En el capítol VIII del llibre IX descriu l'analemma de Roma. Vitruvi presenta procediments i conceptes diversos procedents d'èpoques anteriors, on destaca la tècnica de l'abatiment de uns cercles celestes concrets sobre el pla del rellotge a construir. Aquest pla sempre va ser el del meridià pel dies corresponents als solsticis. Però es van perdre totes les figures de l'obra i molts dels càlculs no ens han arribat sencers. I aquests serveixen únicament per calcular la longitud de l'ombra de la llum solar, produïda per un gnòmon sobre un pla horitzontal. Això fa que l'*Analemma* de Ptolemeu sigui el tractat de gnomònica complet més antic que ens ha arribat de l'època hel·lenística. Tot i que no fa cap al·lusió a la seva utilitat per a la construcció de tres tipus de rellotges solars, conté de forma natural els seus fonaments. De l'obra se'n deriva directament un procediment per determinar punts en un pla que, un cop units, donen lloc a les hipèrboles intersecció del con recte que té com a base el cercle del dia solar i com a vèrtex l'extrem del gnòmon, amb el pla de l'horitzó.

A més, l'*Analemma*, al igual que el *Planisferi*, ofereix els fonaments matemàtics de l'astrolabi pla, el nomograma més estudiat a l'Edat Mitjana, i també del rellotge de Sol anomenat analemàtic.

El mètode de l'*Analemma* de Vitruvi apareix en els tractats de gnomònica àrab dels segles X i XII com a mètodes analemàtics als quals se'ls comença a aplicar el càlcul numèric en la mesura que la resolució de triangles es va desenvolupant.

L'obra de Vitruvi es troba també copiada i descrita en les obres de gnomònica del renaixement de les matemàtiques. Algunes de les còpies contenen errors que per manca de crítica es van escampar amb el pas del temps. Una transcripció feta per part de Oronci Finé (1494 – 1555) contenia un dels errors més importants, el qual va ser detectat per Pedro Nunes (1502 – 1578), qui el va intentar solucionar i va provocar la publicació del seu llibre *De erratis Orontio Finei*. Finalment, serà Cristòfol Clavius qui acabarà de solucionar l'anomenat "error Orontius".

Clavius en la seva obra *Gnomonices* estudiarà l'*Analemma* ptolemaic, i no pas el de Diodor, introduint-hi diverses modificacions i aportacions des del punt de vista del càlcul i d'una descripció exhaustiva dels diversos casos que es poden presentar.

3.2 La paraula *analemma* i el seu significat

No hi ha acord sobre el vertader significat de la paraula *analemma*, ni en el context general de la matemàtica antiga ni en el particular de l'obra de Ptolemeu.[29] En un sentit ampli el mot transmet la idea d'estructura de suport.[30]

Hi ha autors com Commandino que defineixen l'analemma com la secció comuna del pla meridià amb els altres cercles de l'esfera celest amb l'addició dels semicercles paral · lels, interpretació que s'adapta perfectament a l'antic mètode de l'analemma de Vitruvi. Aquest consistia en un procediment per dibuixar les línies horàries i les corbes d'insolació dels rellotges de Sol. Es tracta de la projecció hiperbòlica de diverses circumferències sobre el meridià del lloc, per tal de dibuixar les corbes horàries temporals i les hipèrboles corresponents a la projecció gnomònica de la trajectòria diürna del Sol. Ptolemeu va censurar-lo i comenta les incerteses que presenta. Per a Diodor, es tracta d'un objecte. Neugebauer (1975) opina que és un procediment.

El que és segur és que la paraula no l'inventa Ptolemeu; s'utilitzà en diversos contextos molt abans que ell l'emprés. Hiparc de Nicea, Heró d'Alexandria i Cai Juli Higini havien fet presentacions de l'analemma diferents de la de Ptolemeu. En la majoria dels casos apareix la idea de la representació en una pla d'una configuració espacial. Més concretament, per a la gran majoria d'autors anteriors a Ptolemeu, l'analemma és un pla que

[29] Per a un estudi acurat de la controvèrsia, consultar Edwards (1984)
[30] En l'arquitectura del teatre grec, l'analemma és el mur de contenció de la càvea.

serveix per a descriure arcs i angles “inclinats” sobre ell d’una manera adequada. La idea ptolemaica de l’analemma, doncs, no és nova, però el sofisticat desenvolupament que conté és probablement del propi Ptolemeu.

Guillem de Moerbeke, traductor del manuscrit de l’*Analemma* del grec al llatí, no va trobar cap mot llatí equivalent. Tampoc no explicà el seu significat.

La paraula analemma continuà al llarg del temps essent molt utilitzada en el sentit d’un procediment pel càlcul de rellotges però no en el context de l’obra de Ptolemeu sinó en el de les de Diodor i de Vitruvi (Kennedy 1959, 1963; Id 1969). Un dels primers en usar-lo va ser Thàbit ibn Qurra. La trigonometria progressava i Al-Battani va ser un dels precursors en aplicar-la al càlcul de rellotges. Al-Bīrūnī traduí l’analemma de Vitruvi a l’àrab.

Els mètodes analemmàtics van ser utilitzats almenys des del segle IX. Ibn al-Raqqam és autor de l’obra *Risāla fi °ilm al-zilāl* que conté uns mètodes anomenats *analemmas* que servien per a determinar l’azimut de la *qibla* les hores d’oració per part dels astrònoms musulmans (Carandell 1984). Està en línia amb la tradició pretolemaica i va assolir una gran difusió. És l’únic tractat que transmet la tradició hel·lenística de la construcció geomètrica del rellotge solar horitzontal. En el seu article, Carandell estableix que el procediment de Ibn al-Raqqam corregeix el de Habash al-Hasib (fl. 850) transmès per al-Bīrūnī (s. X-XI). Aquest, qui té a Diodor entre les seves fonts, utilitza l’*antiscios*[31] al parlar de l’analemma, angle que Ptolemeu havia suprimit en

[31] *Antiscios* significa contraombra.

l'*Analemma.* Es tracta de mètodes de tradició grega que recorren a tècniques gràfiques rigorosament exactes per representar en un pla determinat elements de l'esfera amb l'objectiu de construir certs angles i arcs que determinen un punt en l'espai. Consisteixen en fer rotacions i abatiments de plans i cercles al voltant d'eixos comuns a aquests i al pla sobre el qual es representen (Samsó 1992, 144).

Baltasar de Torres en les seves notes diu que analemma és "descriure en un pla els cercles de l'esfera, els verticals, els horaris i l'equador horari".[32] Més endavant, citant a Diodor, diu que "l'analemma és com una fàbrica".[33] La qual cosa sembla demostrar el doble ús que ha estat assignat a aquest mot: el de un procediment que permet projectar la trajectòria del Sol sobre el pla meridià en un lloc determinat, en un moment de l'any i en una hora determinada, i el de un objecte sobre el qual es mesuraven successivament i repetida angles i arcs.

Les demostracions de caràcter geomètric i gnomònic van ser escasses fins que Cristòfol Clavius va resoldre tots els problemes que s'havien plantejat fins aleshores, fent ús dels postulats de la geometria i de la trigonometria. El mot analemma conservà el significat de procediment geomètric per construir rellotges de Sol fins l'aparició dels rellotges mecànics.

El *Diccionario de Autoridades* (1726-1739) defineix l'analemma com "la projección orthográphica de la esphera sobre el colúro de los solsticios, supo-

---

[32] C.B.L.304, [f.205], [f.206v].

[33] C.B.L.304, [f.213v] Això mostra que les fonts que Torres cita quan parla de l'analemma es fonamenten més aviat en Diodor que no pas en Ptolemeu.

niendo que su plano se ajusta con el meridiano".

En constatar-se la diferència entre l'hora solar i l'hora civil, anomenada equació del temps, el concepte es va transformar fins a arribar a significar la representació gràfica d'aquesta equació, corba en forma de lemniscata deformada que és la descrita pel Sol en el cel al llarg de l'any en una latitud i una hora fixades. Aquesta és la significació actual de la paraula analemma.

3.3 La tradició textual de l'*Analemma* de Ptolemeu

El text autògraf de Baltasar de Torres de l'*Analemma* de Ptolemeu contingut en l'anomenat còdex *Barberinus Latinus 304*, està escrit en llatí. I no se sap ben bé d'on el va copiar ni el lloc on ho va fer. De fet una versió grega completa feia temps que havia desaparegut. L'última vegada que se'n té notícia es remunta als avui perduts catàlegs papals de 1295 i 1311 en els que apareixia citat com a *liber Tholomei de resumptione*. Res se sap de la trajectòria del text original i de les seves còpies durant mil cent anys, amb l'excepció del palimpsest amb fragments del text en grec que comentarem més endavant.

No he pogut acreditar la presència de la versió grega de l'*Analemma* de Ptolemeu en la literatura àrab medieval, ni tampoc cap traducció a aquesta llengua.

Uns anys abans de desaparèixer la versió grega, el gran traductor medieval d'obres clàssiques, filosòfiques i científiques, i amic de Tomàs d'Aquino, Guillem de Moerbeke, va fer als voltants de 1270 la traducció del grec al llatí d'un important conjunt de tretze textos matemàtics d'Arquimedes, d'Heró d'Alexandria i de Ptolemeu, impulsat segurament per la relació amistosa que mantingué amb Campanus de Novara i Erasmus C. Witelo. Aquestes traduccions i una que en va fer Gerard de Cremona de l'àrab al llatí van ser recollides en un manuscrit que avui s'anomena còdex *Ottobonianus Latinus 1850*. Tot ell és autògraf de Moerbeke. L'última de totes elles és l'*Analemma* de Ptolemeu.[34]

Moerbeke tradueix l'*Analemma* del grec al llatí però les anotacions són gregues. Com que no va tenir una versió llatina per al mot "analemma", cada vegada que hi apareix deixa un blanc i escriu la paraula grega al marge. Només al començament escriu la paraula "analemmate". És Commandino qui incorpora el mot grec a la seva versió llatina.

El manuscrit llatí de Moerbeke sembla que el consultà el traductor Jacobus Cremonensis[35] en la meitat del segle XV, en els inicis del renaixement de l'interès per les matemàtiques. El 1508 va ser adquirit a Venècia per l'humanista i capellà alemany resident a Roma, Andreas Coner. Algun temps després de la seva mort el 1527, el manuscrit arribà a les mans de Marcello Cervini, decisiu en la supervivència i en la trajectòria de l'*Analemma*, qui el va comprar. Més tard, entre el 1548 i el 1555, va ser bibliotecari de la Biblioteca Vaticana, i fugaçment i final el papa Marcello II.[36]

Cervini, qui havia estat alumne de Tartaglia, va aconseguir una notable col · lecció de manuscrits matemàtics, la qual cosa confirma l'interès que tenia en aquesta matèria. El 1539, amb el suport del cardenal Alessandro Farnesio,

[34]Edward Rosen, en la biografia de Federico Commandino que apareix al *Dictionary Science Bibliography* afirma que va ser traduït de l'àrab. Però la trajectòria de l'*Analemma* és diferent de la del *Planisferi* de Ptolemeu del qual només ha sobreviscut una traducció àrab, corregida a començament del segle XI per Maslama al Majriti i traduïda al llatí en 1143 per Herman de Carinthia.

[35]Va traduir les obres d'Arquímedes amb els comentaris d'Eutoci, al voltant de 1450. Obra publicada el 1544.

[36]El cardenal Marcello Cervini va ser un dels tres presidents del Concili de Trento. Va ser protector de la Biblioteca Vaticana a partir de 1548. El seu pontificat durà poc: des del 9 al 30 d'abril de 1555, dia de la seva mort.

Cervini va concebre el projecte de publicar importants manuscrits grecs de la Biblioteca Vaticana i d'altres biblioteques. I així, pocs anys abans de 1555, encarregà a Federico Commandino la publicació impresa de dos textos continguts en el manuscrit de Moerbeke: l'*Analemma* de Ptolemeu i *Els cossos flotants* d'Arquimedes. El fet que obviés les altres obres del manuscrit pot ser entès pel fet que ambdues eren els tractats més importants que depenien del tot de la traducció de Moerbeke.

Únicament aquests dos textos estan també continguts en el còdex de Baltasar de Torres. El *Barberinus Latinus 304* és una miscel·lània matemàtica que conté, endemés i entre altres coses, les lliçons de geometria de 1557 i les lliçons de rellotges de Sol de 1558, totes elles impartides en el *Collegio Romano*. El de l'*Analemma*, com s'ha dit abans, tenia intenció d'explicar-lo però no ho fa, assenyalant que està ple d'errors.

L'interrogant que es planteja és el de saber d'on el va copiar Torres. En el seu manuscrit apareixen freqüents referències a Commandino i Maurolico[37] amb els quals va tenir freqüents contactes. Maurolico regalà a Torres una esfera de tres pams de diàmetre fabricada amb molta cura. En el pla d'estudis del *Collegio Romano*, Torres recomana pels alumnes més aptes l'obra *Sphaerica Theodosii et Menelai*, de Francesco Maurolico, impresa a Messina el 1558. I el cita en moltes ocasions. En el foli 265r apareix citada "la copia

[37] Commandino i Maurolico mai no es van conèixer, però si van tenir contactes a través de cartes des de 1557. Hi ha una carta de Maurolico sobre còniques adreçada a Commandino, citada en el manuscrit de Torres, 248v. Existeix la resposta probable de Commandino a Maurolico (Clagett, 1964, III, pp. 615-617).

de las obras de Mauroli q[ue] al último embió, y la última letra suya". En el 265v *"En el emboltorio Dr. Mauroli, ..., una de Mauroli, ..., copia de las obras de Mauroli"*. En el 285r, *"Mauroli a.8. de o[c]tubre le [e]scriví con el p. M[aestro] Jerónymo este p[ro]blema de M[aestro] Federico... datam conoidis obtusianguli portionem, plano basi equidistantii ta dividere ut partes [pro]portionem habeantean dem datae [pro]portioni.-"*.

És Baltasar qui va persuadir Commandino perquè llegís el *Planisferi* de Ptolemeu i el fes intel · ligible, la qual cosa es produí el 1558 a Venècia. Una nota en espanyol en el foli 271r al · ludeix al "Maestro Federico". En el 254v hi ha un llistat de llibres de matemàtiques amb la nota que *"el Maestro Federico tiene un Ptolomaeo grande y el Planisphaerio de Ptholomaeo y la Sphera... la aritmética de Luca...Pietro Nonio...Proclo...Arati."*. En el 264r *"una figura de la [e]sphera en llano de Mt[ro]. Federico"*. En el 264v *"un tratado de Ptholomeo en griego de M[aestro] Federico"*. En el 291v *"el Almagesto de Averroes de M[aestro] Federico"*. I més endavant *"...escrivir a Maestro Federico"*. En el 292v apareix *l·l'Almagesto de Averrois prorrogado por el M. Federico"*.

En el pròleg del seu llibre sobre l'*Analemma*, dedicat a Farnesio, Commandino afirma que rebé l'encàrrec de Marcello Cervini de "extreure de la foscor dos llibrets, un d'Arquímedes sobre coses que eleva l'aigua i altre de Ptolemeu sobre l'*analemma*". A continuació diu que "em va considerar a mi, que l'apreciava més que ningú i l'escoltava, digne de tal regal per generositat seva". Commandino usà la versió de Moerbeke, però no és segur que fes servir directament el manuscrit en poder de Cervini.

Hi ha pocs còdex de les traduccions de Moerbeke i un pot ser eliminat d'entrada, el MS9119 que és a la Biblioteca Nacional de Madrid, ja que no conté la traducció de l'*Analemma*. Només queden dues opcions: el *còdex Ottobonianus Latinus 1850*, l'autògraf de Moerbeke ens mans de Cervini, i la còpia de Torres continguda en el *Barberinus Latinus 304*.

La provada relació amical i professional entre Commandino i Torres, i la mateixa superposició de dates fa pensar que tots dos van tenir a prop el manuscrit de Moerbeke en poder de Cervini. O que un va copiar de l'altre. Sembla difícil inclinar-se per l'opinió que Torres copiés del manuscrit de Cervini i que aquesta còpia fos prestada per Cervini a Commandino. La còpia de Torres, escrita en una quadern privat, sembla més aviat destinada al seu ús personal. Cal afegir que les variants del text de Torres no són les mateixes que les de Commandino en el context de Moerbeke. A més, les diferències que existeixen entre la taula que apareix en el manuscrit de Moerbeke i la de la còpia de Torres, i que estudiem més endavant, semblen confirmar que aquest no copià del manuscrit de Cervini. Pot ser que Torres la copià d'una altra versió encara no identificada.

D'altra banda, si Cervini entregà a Commandino el seu manuscrit, no s'explica bé que aquest arribés més tard, juntament amb altres manuscrits, a les mans del seu gran amic el cardenal Guillem Sirleto. Clar que aleshores podria contradir l'afirmació que fa Commandino en el pròleg del seu llibre que parla del "regal" de Cervini. Tanmateix es podria referir més aviat a l'encàrrec d'estudiar el tractat ptolemaic que no pas al regal d'un còdex particular.

Queda oberta encara la possibilitat que Commandino fes servir una còpia de l'*Analemma* que va anar a parar més tard a Bernardino Baldi (Edwards 1984), alumne i biògraf de Commandino en la seva obra *La Cronica dei Matematici*, qui també va escriure un tractat no publicat però existent en versió manuscrita sobre les seccions còniques i l'*Analemma*.

Tres mans han fet correccions diferents (Clagett 1976) de la segona part del còdex *Ottobonianus Latinus 1850*, la que conté l'*Analemma*. La primera de Moerbeke, la tercera de Coner. La segona pot ser de Jacobus Cremonensis. La traducció de Moerbeke no és bona perquè no entén el seu contingut. Roger Bacon, contemporani del traductor, criticà, per literals, les traduccions científiques de Moerbeke, tot assenyalant els avantatges que té per a la reconstrucció crítica del text original.

Commandino treballà a fons l'*Analemma* de Ptolemeu. En el pròleg del seu llibre, també critica l'estil de la traducció de Moerbeke i comenta les dificultats que va afrontar per portar a terme la tasca de comprensió i reconstrucció del text i de les demostracions. Tot lamentant l'haver estat dormides, situà l'anterior esplendor de les matemàtiques 600 anys enrere, és a dir, al segle X. Qualificà la traducció de defectuosa i amb llacunes, la qual cosa no li va permetre la comprensió del tot de determinats paràgrafs (com el que es refereix al mesurador d'angles) (Luckey 1927). En la taula numèrica final introdueix una precisió no desitjada per Ptolemeu, qui arrodoneix a fraccions de 5'. La seva profunda crítica de la versió llatina de Moerbeke pot fer pensar que mai no va identificar-lo com autor de la traducció. Així en el pròleg de la seva obra sobre l'*Analemma* afirma que el traductor del grec va submergir els lectors en unes tenebres subterrànies.

A més a més de revisar l'extremadament corrupta versió llatina de Moerbeke, Commandino afegeix moltes anotacions. Critica el fet que tots els treballs clàssics sobre la gnomònica s'haguessin perdut i que Vitruvi en el seu llibre només tractés dels fonaments. Un inconvenient afegit va ser que Ptolemeu no fes les demostracions de tots els resultats que va acceptar dels seus predecessors; només en va fer les que afectaven les seves pròpies aportacions. Tot això l'obligà a restaurar, corregir, omplir llacunes i també a manifestar la seva humilitat davant la possibilitat algun dia aparegués el text grec. Afirma que en allò que faltava seguí les opinions anteriors a Ptolemeu que considerà més concordants.

Finalment Commandino publicà a Roma el llibre *Claudii Ptolemaei Liber de Analemmate*, l'any 1562, primera versió impresa de l'*Analemma* ptolemaic, l'edició de la qual va còrrer a càrrec de Paolo Manuzio. Al final del llibre, Commandino inclou un tractat propi sobre les aplicacions de la teoria de l'*Analemma* a la construcció de rellotges de Sol. Sembla difícil defensar que Ptolemeu en parlés en el seu text. Aquesta edició no va ser coneguda per Torres, ja que havia mort el 1561.

Clavius explicà i criticà l'*Analemma* en el context més general de la seva *Gnomonices* (Clavius 1581) i en el seu *Astrolabi* (Clavius 1593). En concret realitzà els càlculs numèrics "més fàcilment i ràpida que Ptolemeu donat que no necessitarem de tantes multiplicacions i divisions com ell" (Clavius 1581). I els fa usant la trigonometria.

Existeix una còpia completa posterior del manuscrit de Moerbeke, el còdex *Ambrosianus R 109, sup.* i una selecció d'ell en el còdex *Savilianus 9*.

A començaments del segle XIX, el filòleg italià Angelo Mai va descobrir un palimpset, el còdex *Ambrosianus Graecus L, 99, sup.*, ara 491 (Heiberg) o SPII 65 (Toomer), que conté fragments de les Etimologies de Sant Isidoro de Sevilla del segle VII escrits sobre fragments grecs de l'*Analemma* de Ptolemeu. Ha estat editat dues vegades per Heiberg després de reconstruir-los ([1895] i [1907]) (Heiberg 1907, 187-223). La primera al descobrir el palimpsest, i la segona al publicar les obres menors de Ptolemeu en un sol volum, el que constitueix la segona edició del text de Ptolemeu. El caràcter històrico-filològic d'aquesta edició fa ressaltar la importància de la de Commandino.

El palimpsest abasta quasi tot el capítol sisè (manquen unes línies del principi), quasi tot el setè (manquen les línies del final), un bon tros del capítol novè, el començament del desè, l'onzè a excepció d'unes línies del començament i unes frases del mig del capítol. Segons Edwards (1984), la lectura de l'*Analemma* continguda en el còdex *Ottobonianus* és millor que la del palimpsest allà on són comparables.

Delambre (1927) informa sobre el contingut i estudia el significat algorísmic de l'*Analemma*. Chasles (1889) el va menysvalorar dedicant-li unes poques paraules. Braunmühl (1897) li dedicà la seva atenció. També ho van fer Zeuthen (1902), Drecker (1925) i Luckey (1927), qui descriu el seu contingut nomogràfic.

Neugebauer (1975) fa el millor estudi històric de l'*Analemma* pretolemaic i una clara exposició sobre l'*Analemma*. El 1948 va escriure una versió anglesa del text que no ha estat publicada. Don Raymon Edwards en 1984 va fer una tesi doctoral amb la transcripció dels textos llatins de Moerbeke i del palimpsest grec, amb una versió anglesa acompanyada de comentaris. Justifica la seva tasca en les anotacions inadequades i inconsistents en el text llatí de Heiberg, que li dona la impressió que ha estat menys acurat que en el palimpsest, i en la falta d'una versió àgil, bé en llatí o en llenguatge modern (Edwards 1984).

Rocco Sinisgalli i Salvatore Vastola (1992) publiquen la primera edició de l'*Analemma* en italià en paral·lel a la llatina de Commandino. Prèviament presenten una anàlisi teòrica de l'obra, fent una valoració científica de l'*Analemma* especialment en la seva vessant geomètrica descriptiva.

4 Anàlisi, comentari i explicació del text de l'*Analemma*

L'objectiu de Ptolemeu en l'*Analemma* és el de resoldre el problema de determinar la posició del Sol a l'esfera celeste en un punt qualsevol de la superfície terrestre en un dia i hora qualssevol.

Heiberg fixà la subdivisió de l'obra en cinc capítols en la seva segona edició (Heiberg 1907), seguint les lletres vermelles escrites per Moerbeke. El contingut, però, pot ser dividit en quatre grans fragments.

El primer té caràcter introductori i abasta els cinc primers capítols. Afirma que per poder determinar la posició solar es necessita només un dels tres sistemes dels que avui diem "coordenades esfèriques", que ell descriu en detall. Aquests procedeixen de la tradició anterior a Ptolemeu però que ell millora de manera raonada. Pel que fa a la mesura dels angles, estableix el criteri segons el qual al fixar l'origen, els angles coordenats que triarà seran sempre aguts.

El segon fragment conté els capítols sisè, setè i vuitè. En ell explica un mètode gràfic per obtenir els sis angles ptolemaics. Com que cinc d'ells ja havien estat introduïts anteriorment, només demostra la construcció del que ell introdueix: l'anomenat hectemorus. Però no concreta la manera d'introduir les tres dades numèriques del problema que tracta de resoldre. A partir d'una situació gràfica concreta, construeix els sis arcs sense donar els seus valors numèrics.

El tercer fragment està format pels capítols novè i desè. Constitueix un parèntesi dins de l'obra. Va adreçat a qui desitgi "molta precisió" en la mesura dels angles. En ells explica amb rigor com podria fer-se el càlcul geomètric dels angles, sense fer-ne cap. És a dir, justifica que els seus angles poden ser obtinguts amb el que avui en dia anomenem càlcul trigonomètric.

Els últims capítols, que constitueixen el quart fragment, els dedica a descriure un mètode que li permetrà mesurar fàcilment els sis angles, a partir del mètode gràfic que ha descrit en el segon fragment. Requereix de la construcció d'un disc sobre el qual, i d'una manera molt explicitada, prepararà un conjunt de línies i traços que permetran la introducció de les tres dades numèriques i la posterior lectura de la mesura dels sis arcs solució fent servir únicament una escaire i un compàs, la qual cosa confereix al mètode un caràcter nomogràfic. Conclou amb una taula de resultats.

Quatre teoremes sobre rectes perpendiculars, basats en els *Elements* d'Euclides, són usats per Ptolemeu, sense citar-los, en l'*Analemma*.[38] Amb tres d'ells demostra explícitament, en el segon fragment, el teorema de la construcció de l'arc hectemorus en el cas equinoccial i en el cas general (cap. 6). En canvi, enuncia sense demostració els teoremes corresponents a la construcció dels cinc arcs restants en el cas equinoccial (cap. 7), i en el cas general (cap. 8). En el tercer fragment demostra que els sis angles es poden obtenir amb càlculs geomètrics en el cas equinoccial (cap. 9) i en el general (cap. 10).[39] El con-

[38] Una exposició detallada d'aquests teoremes, amb les corresponents demostracions, la fa Edwards (1984).

[39] Aquests cinc capítols semblen haver estat numerats en el text grec de l'1 al 5. En efecte,

tingut per capítols es resumeix a continuació, seguit dels nostres aclariments i comentaris.

en el palimpsest grec, que conté únicament el començament dels capítols que numerem 7 i 10, trobem la numeració grega $\bar{\beta}$ ($= 2^{\mathrm{n}}$) i $\bar{\varepsilon}$ ($= 5^{\grave{\mathrm{e}}}$.) És per això que ens hem permès de numerar figures i teoremes amb aquesta numeració original.

4.1 Primer fragment: introducció i definició dels angles

Capítol primer

Consideranti mihi, o Syre, angulorum acceptorum in locum gnomonicum quod rationale et quod non...

Ptolemeu, després de fer consideracions generals sobre els seus predecessors en la gnomònica, afirma la seva admiració pel seu treball, però l'assenyala com a incomplet mostrant el seu desacord sobre els angles que utilitzaven. Dedica el llibre al seu patró o corresponsal, el no identificat Sirus, i parla sobre les seves hipòtesis tot reclamant la integració de la matemàtica i la filosofia natural, imprescindible per l'estudi de l'*Analemma*.

Capítol segon

Quoniam igitur eas que secundum unamquamque molem dimensiones consequens est determinatas esse et positione et multitudine sicut et magnitudine, ...

Donat que per un punt només es poden traçar tres rectes perpendiculars dos a dos, el número de coordenades necessari és tres. Proposa un sistema de coordenades espacial amb tres plans perpendiculars i d'eixos les seves seccions comunes. A l'esfera celest els tres plans són l'horitzontal (H), el meridià (M) i el primer vertical (V) del lloc que es tracti. Els tres eixos són les línies equinoccial (⊥M), meridiana (⊥V) i gnomonal (⊥H), respectivament (fig. 1). Vol determinar la posició del Sol en qualsevol moment sobre la base d'aquests tres plans fixos. Per fer això introdueix tres cercles mòbils, que sempre tenen el Sol a la seva circumferència, i fa servir els tres diàmetres com a eixos. Utilitzant una terminologia que no és de Ptolemeu, però que és suggerida per Olimpiòdor i desenvolupada i utilitzada per Commandino, aquests tres cercles mòbils poden ser entesos com un horitzó mòbil, un meridià mòbil i un vertical mòbil, la quantitat de la desviació dels quals, des de l'horitzó, meridià i vertical fixes, pot ser mesurada, i sobre els quals la posició del Sol també pot ser mesurada. Els seus noms són, en la terminologia de Ptolemeu, l'hectemorus, l'horari i el descensiu respectivament (fig. 2). Aquests sis cercles, tres mòbils i tres fixos, s'aparellen convenientment. Cada parell serveix de manera similar per determinar la posició del Sol. L'arc mesurat en el cercle mòbil des del Sol fins a la seva intersecció comuna amb dos cercles fixos és el que avui diem una "coordenada polar" (θ_M , θ_V, θ_H). El format pel cercle mòbil i el fix corresponent proporciona l'actual "coordenada azimutal" ($\varphi_M, \varphi_V, \varphi_H$) de cadascun dels tres sistemes.

També cita un setè angle, l'equatorial, que era usat pels antics en lloc de l'angle hectemorus, i el critica en evidenciar que donat que el cercle equatorial canvia de posició en cada latitud, l'horitzó, el meridià i el vertical varien en la seva relació amb ell.

Capítol tercer

Ut autem sub uisu nobis magis cadat consequentia angulorun et quod supponitur, sit meridianus quidem circulus qui abgd, ...

Per fer més entenedores les definicions establertes, passa a il · lustrar-les amb una figura en la que apareixen el tres semicercles coordenats, els tres semicercles que passen pel Sol, i els sis angles que utilitzarà.

Capítol quart

Huius itaque consequentie subicientis angulosque et periferias conuenientes nature circulorum unam secundum unumquemque manentium et motorum antiqui ipsam quidem ez ektimori...

Atribueix a cada angle el nom apropiat. Els derivats del pla hectemorus, angle sobre el meridià i angle hectemorus; els derivats del pla horari, angle sobre el vertical i angle horari; els derivats del pla descensiu, angle sobre l'horitzó i angle descensiu. Afirma que aquesta elecció està en concordància amb la natura i que el seu raonament és més clar que els dels antics.

Llavors Ptolemeu compara aquest sistema, en el qual la posició del Sol sempre és determinada d'una manera similar independentment dels cercles mòbils i fixos que es triïn, amb el sistema dels seus predecessors, en el qual també hi ha tres parells de cercles mòbils i fixos, però en el qual cada parell està format d'una manera diferent.

Capítol cinquè

Quoniam autem omnis angulus facit aliquas magnitudines ex utraque parte decliationis et quandoque quidem equales,...

Explica els motius pels quals cap dels sis arcs pot ser més gran que un recte, i fixa l'origen des d'on començar a mesurar els angles. Si el Sol es troba en un altre octant, els arcs es mesuren aleshores a partir dels vèrtexs d'aquest octant. Per exemple, en l'octant sud-est l'arc horari i el meridià es mesuren a partir del punt sud.

Una vegada que ha introduït els tres sistemes de coordenades, en els capítols que resten Ptolemeu descriu tres mètodes per determinar la posició del Sol a l'esfera celeste a partir de les dades següents: l'altura del pol sobre l'horitzó del lloc de la superfície terrestre considerat, el dia de l'any (la declinació del Sol) i el moment del dia (l'angle horari).

4.1.1 Explicació del primer fragment

Ptolemeu proposa definir un sistema de referència en l'esfera celeste, basat en l'horitzó, que permet situar la posició del Sol o de qualsevol cos celeste. És el que té per:

Origen: un lloc de la superfície terrestre.[40]

[40] El lloc fixa l'orientació d'aquests tres plans: les dimensions terrestres són menyspreables en relació a les distàncies solars.

Plans de coordenades: el meridià, l'horitzó i el primer vertical del lloc

Eixos de coordenades: la meridiana (intersecció de l'horitzó i el meridià), el gnomon (intersecció del meridià i el primer vertical) i la línia equinoccial est - oest (intersecció del primer vertical i de l'horitzó), tal i com apareixen a la figura 1:

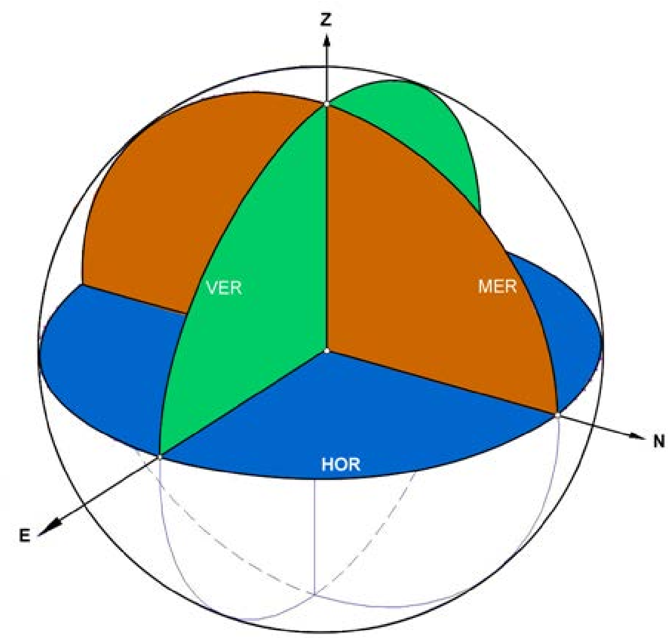


Figura 1: Els tres cercles fixos del sistema de referència de Ptolomeu

De manera que per la posició variable del Sol, H, i els tres eixos del sistema de referència passen tres cercles màxims variables:

- el cercle hectemorus (concebut com l'horitzó que gira al voltant de la línia oest - est)

- el cercle horari (concebut com el meridià que gira al voltant de la línia nord - sud)

- el cercle descensiu (concebut com el primer vertical que gira al voltant de la línia vertical)

Tots tres són representats a la figura 2 :

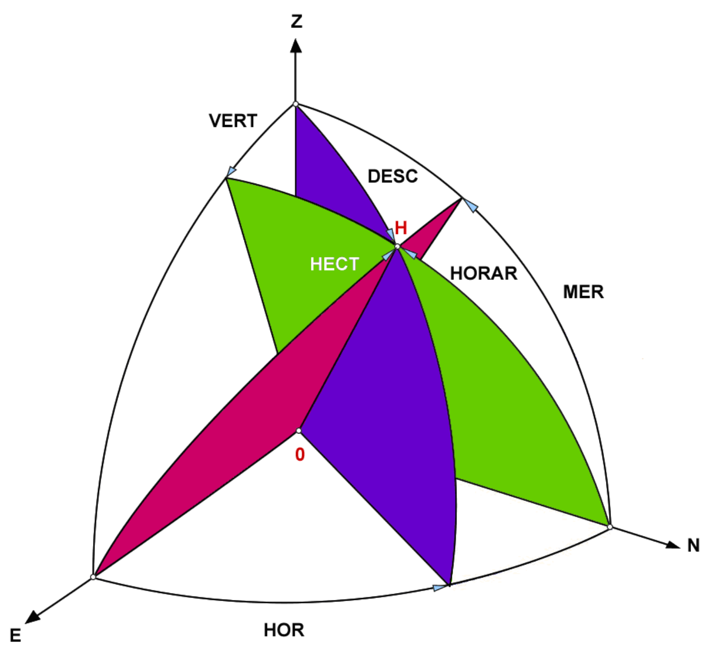


Figura 2: El tres cercles mòbils

Amb aquests plànols i eixos, tres sistemes de coordenades diferents permeten situar al Sol a l'esfera celeste:

1. L'associat al cercle hectemorus format per:

- l'arc hectemorus θ_M, mesurat sobre el cercle hectemorus des de l'est fins la posició del Sol

- l'arc meridià φ_M, arc de meridià comprés entre l'horitzó i el cercle hectemorus.

2. L'associat al cercle horari format per:

- l'arc horari θ_V, mesurat sobre el cercle horari des del punt nord fins la posició del Sol.

- l'arc vertical φ_V, arc de primer vertical comprés entre el meridià i el cercle horari.

3. L'associat al cercle descensiu format per:

- l'arc descensiu θ_H, mesurat sobre el cercle descensiu des del zenit fins la posició del Sol.

- l'arc horitzontal φ_H, arc d'horitzó comprés entre el primer vertical i el cercle descensiu.

Tots tres apareixen dibuixats a la figura 3:

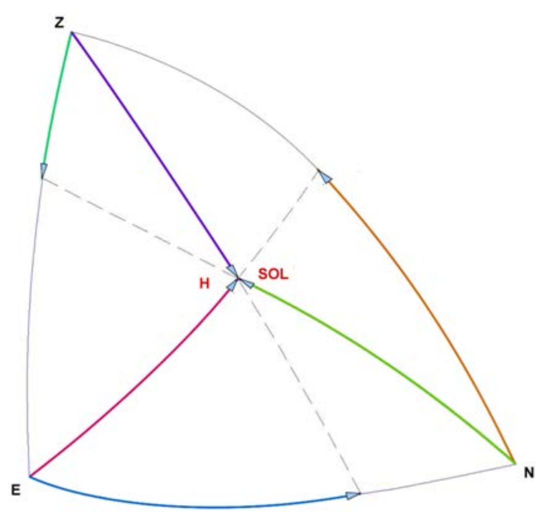


Figura 3: Els tres sistemes de coordenades

Ptolemeu millora definitivament el sistema d'arcs de referència que feien servir els seus predecessors. És més raonable ja que designa a cada arc segons el cercle sobre el que es troba. Ptolemeu posa l'arc hectemorus, en la seva terminologia, en lloc de l'arc equatorial, que és el que es mesura sobre l'equador des del punt est (o oest) fins la intersecció amb el cercle horari. I és que l'equador no és gaire apropiat com a element de coordenades, perquè no passa pel Sol, a no ser en els equinoccis; i també perquè per a diferents altures del pol, varia la seva posició.

D'altra banda, la determinació de l'arc equatorial no serveix directament per a la construcció dels rellotges de Sol. Per l'horitzontal només calen els arcs horitzontal i descensiu, pel vertical els vertical i horari, i per l'oriental i occidental, el meridià i l'hectemorus. Això justifica plenament el perquè Ptolemeu introduí tres sistemes de coordenades.

4.1.2 Relacions entre els sis angles de Ptolemeu

Si amb mentalitat actual s'enfoca la qüestió des del punt de vista trigonomètric, es verifiquen les relacions següents:

$$\cos\theta_M = \sin\theta_V \sin\varphi_V \tag{1}$$

$$\cos\theta_M = \sin\theta_H \cos\varphi_H \tag{2}$$

$$\cos\varphi_M = \cot\theta_M \tan\varphi_H \tag{3}$$

$$\sin\varphi_M = \cot\theta_M \cot\varphi_V \tag{4}$$

$$\cos\theta_M = \cos\theta_H \tan\varphi_V \tag{5}$$

$$\tan^2\theta_M = \cot^2\varphi_V \tan^2\varphi_H \tag{6}$$

que juntament amb les seves permutacions circulars i les

$$\tan\varphi_M \tan\varphi_V \tan\varphi_H = 1 \tag{7}$$

$$\cos^2\theta_M + \cos^2\theta_V + \cos^2\theta_H = 1 \tag{8}$$

constitueixen vint fórmules cada una de les quals relaciona tres dels angles de Ptolemeu.

D'altra banda, si s'anomena φ_E a l'arc equatorial i φ a l'altura del pol, es verifica la relació:

$$\cot\varphi_E = \cos\varphi \tan\varphi_V \tag{9}$$

D'aquestes fórmules també es dedueix la poca utilitat de l'arc equatorial. Perquè l'arc equatorial φ_E amb un del sis arcs de Ptolemeu no determinen sempre la resta d'arcs. En efecte, falla quan el que es tria és l'arc de cercle vertical φ_V. Ptolemeu ja se'n va adonar tot assenyalant que, per a una altura del pol φ coneguda, la substitució de l'arc de cercle vertical φ_V per l'arc equatorial φ_E no sempre és satisfactòria. Acaba afirmant que el seu raonament és més clar que el dels antics.

4.2 Segon fragment: càlcul gràfic per l'*Analemma*

Capítol sisè

Premissis itaque hiis exponemus instrumentales acceptiones secundum unamquamque speciem subiacentium nobis angulorum exempli gratia, ...

Establertes les premisses, anuncia l'explicació del procediment de l'*Analemma*. Malgrat que el presenta de manera unitària per tots els angles, només demostra el procediment d'obtenció de l'hectemorus, ja que els antics havien justificat el procediment pels altres angles. Comença explicant el cas particular i simple en el que el Sol es troba als equinoccis, és a dir quan l'hectemorus i també la resta d'angles es descriuen sobre l'equador. Indaga sobre els paral·lels mensuals i mostra com abatre'ls sobre el pla del meridià. Després explica i demostra com s'obté l'arc hectemorus en el cas general. En ambdós casos sense mesurar-lo. El mètode que utilitza l'anomena de la "determinació pels instruments", de la indagació gràfica. Les dades del problema, l'altura del pol, la declinació del Sol i l'angle horari, venen donades en forma d'arcs i les solucions són obtingudes gràficament. Luckey l'anomena mètode "per descripció" perquè el procediment s'assembla al que avui dia s'utilitza per indagar la vertadera magnitud d'un angle en geometria descriptiva, a través del dibuix, abatent-lo o construint-lo sobre un pla de projecció (Luckey 1927).

Capítol setè

Consequenter autem et communes ipsorum acceptiones exponemus, que *fiunt seorsum super equinoctialem...*

A continuació afronta ja sense demostració la descripció de tots els altres angles sobre el pla del meridià en el cas que el Sol gira sobre l'equador. Al efecte utilitza la projecció del Sol sobre el pla del meridià i de la seva distància a aquest pla, i la intersecció amb el pla del meridià dels dos semicercles que passen pel Sol i són paral · lels al pla de l'horitzó i al pla vertical. Descriu el procediment correcte pels altres angles. Demostra com s'obtenen els cinc arcs, sense mesurar-los, a partir d'unes dades qualssevol a les quals no assigna valors ni mesures concretes.

Capítol vuitè

Exponatur itaque rursum qui abgd meridianus cum diametris ab et gd, et protrahantur in ipso diametri parallelorum mensiliun borealiorum zhtk, ...

A continuació construeix els angles de l'*Analemma* en el cas general, quan el Sol gira sobre un paral · lel que ell tria septentrional, evidenciant com en aquest cas el raig de Sol pot ser boreal o austral.

4.2.1 Explicació del segon fragment

Es presenta la descripció dels sis angles en el cas general des del punt de vista de la geometria descriptiva actual.

La circumferència següent, $ZSRN$, representa el meridià de l'esfera celeste corresponent a un lloc geogràfic O de la superfície terrestre, vist des del punt est E:

NS representa la línia Nord-Sud.

ZR representa la línia vertical.

Sobre aquesta circumferència es descriuen els sis arcs de Ptolemeu.

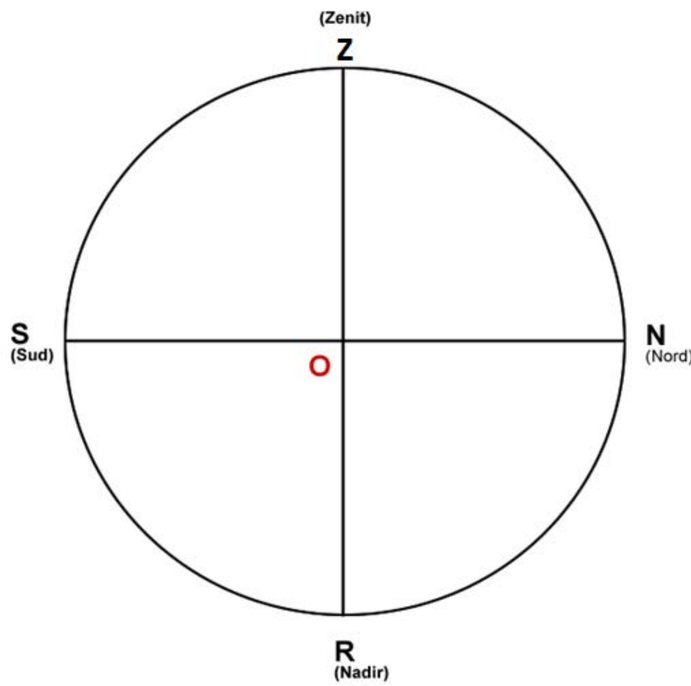


Figura 4: El meridià: circumferència $ZSRN$

El pla de l'horitzó corresponent a aquest lloc geogràfic O és ortogonal al meridià. $SE'N$ és la intersecció i projecció ortogonal de l'horitzó sobre el meridià.

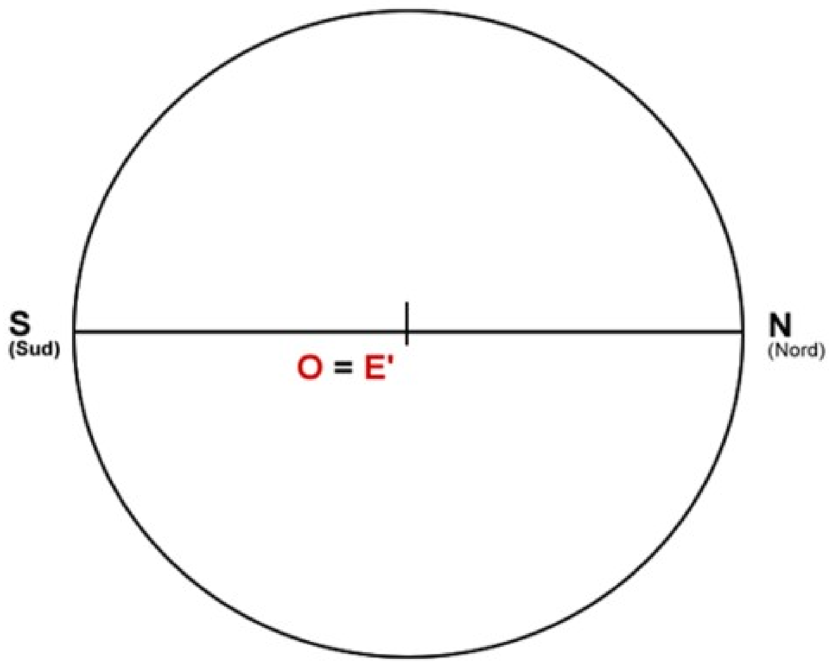


Figura 5: Intersecció i projecció ortogonal de l'horitzó sobre el meridià

El cercle paral · lel del Sol és ortogonal al meridià. AB és la intersecció i projecció ortogonal del paral · lel recorregut pel Sol un dia de primavera o d'estiu.

El diàmetre AB és paral · lel a l'equador i la inclinació de AB depèn de la latitud del punt (clima per en Ptolemeu).

La distància de AB al centre E' depèn del dia triat, és a dir de la longitud solar i per tant de la declinació del Sol que oscil·la entre Oº (equinoccis) i 23º50' (solsticis).

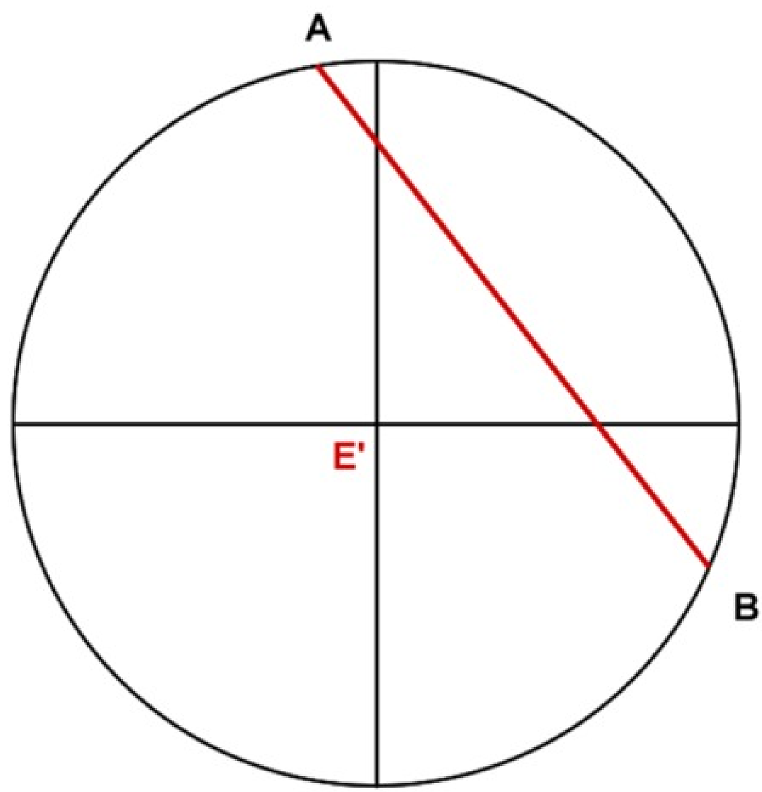


Figura 6: Intersecció i projecció ortogonal del paral·lel recorregut pel Sol un dia de primavera o d'estiu

A continuació s'abat el semicercle diari sobre el meridià:

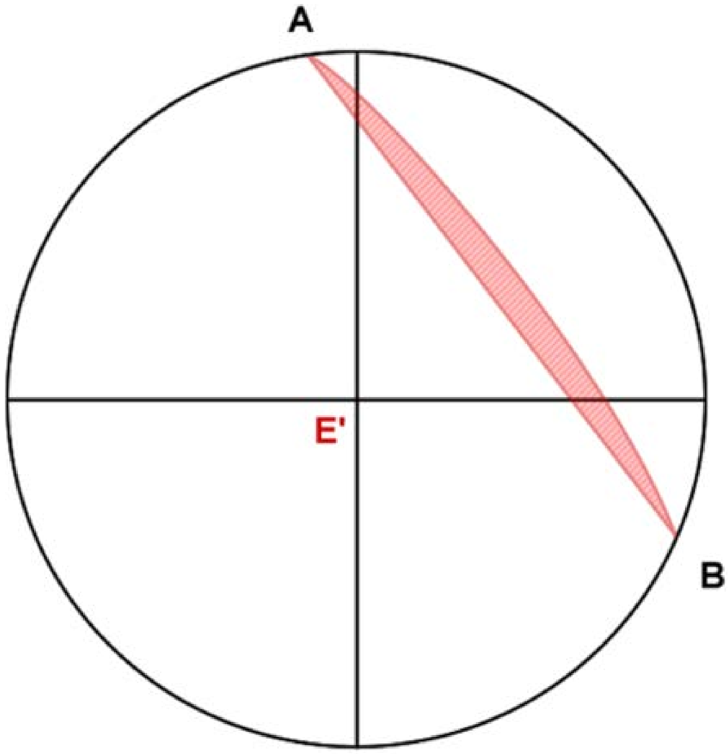


Figura 7: Inici de l'abatiment del semicercle diari

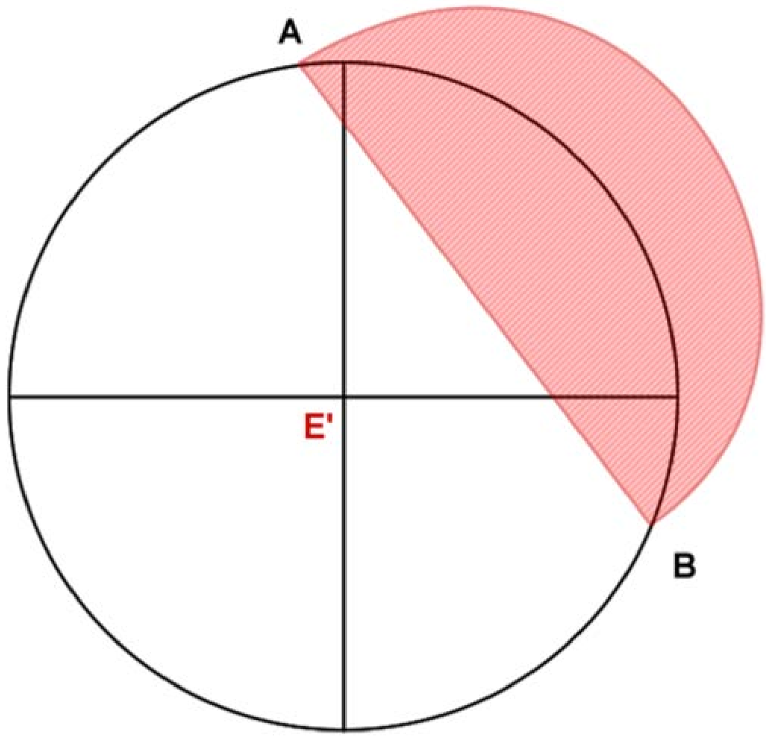


Figura 8: Abatiment del semicercle diari

Si el Sol es troba en un moment donat del dia a H, el seu abatut és $\hat{H}$:

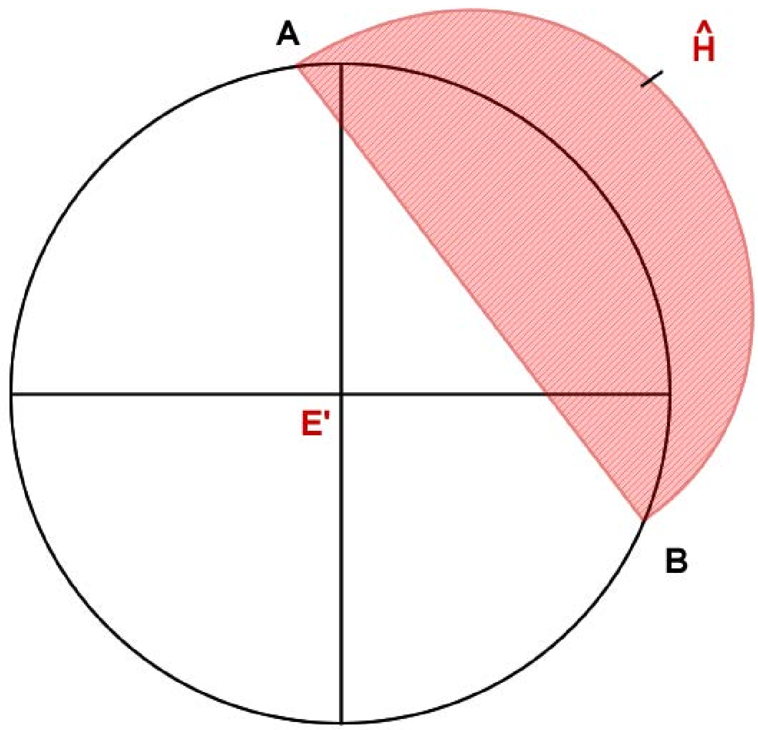


Figura 9: El semicercle diari del Sol abatut sobre el meridià

És aquí on Ptolemeu presenta les arrels de la idea d'abatiment. Concretament quan parla del semicercle $A\hat{H}B$ "entès com tornat a la seva pròpia posició".

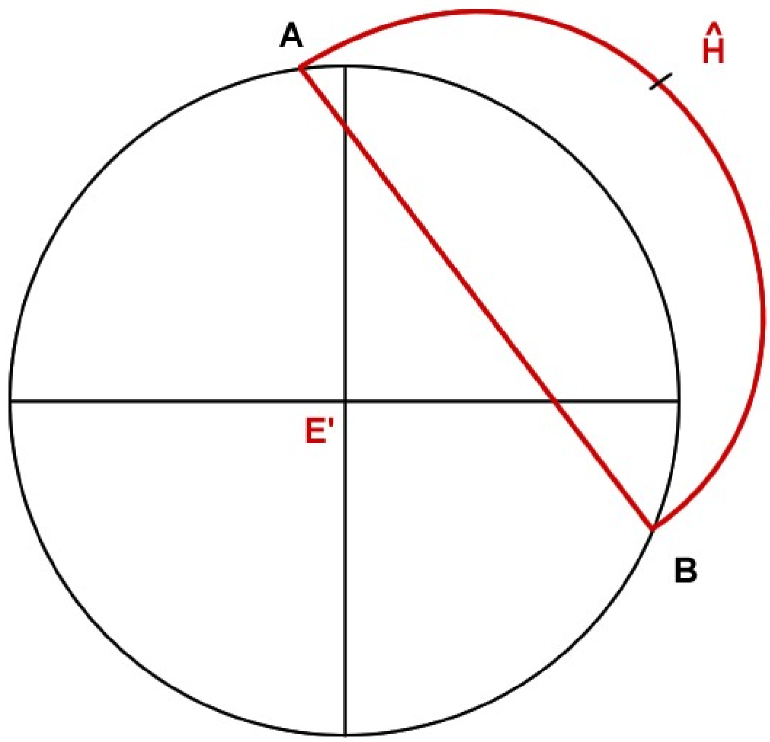


Figura 10: $A\hat{H}B$ és l'abatut del semiarc diari, on el punt $\hat{H}$ és l'abatut del Sol H

El semicercle abatut es divideix en dues parts:

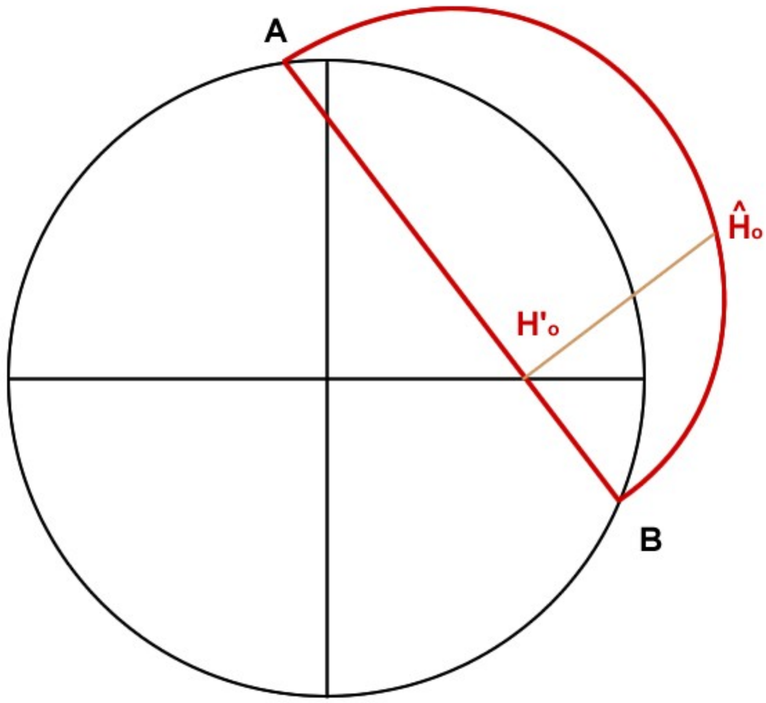


Figura 11: Projecció i abatiment del punt sortida del Sol

H_0' és la projecció del punt sortida del Sol H_0. $\hat{H}_0$ és l'abatut del punt H_0: separa la primera meitat de l'arc dia $\hat{H}_0A$ de la segona meitat de l'arc nit $B\hat{H}_0$.

Així queda determinada la trajectòria del Sol al llarg del dia:

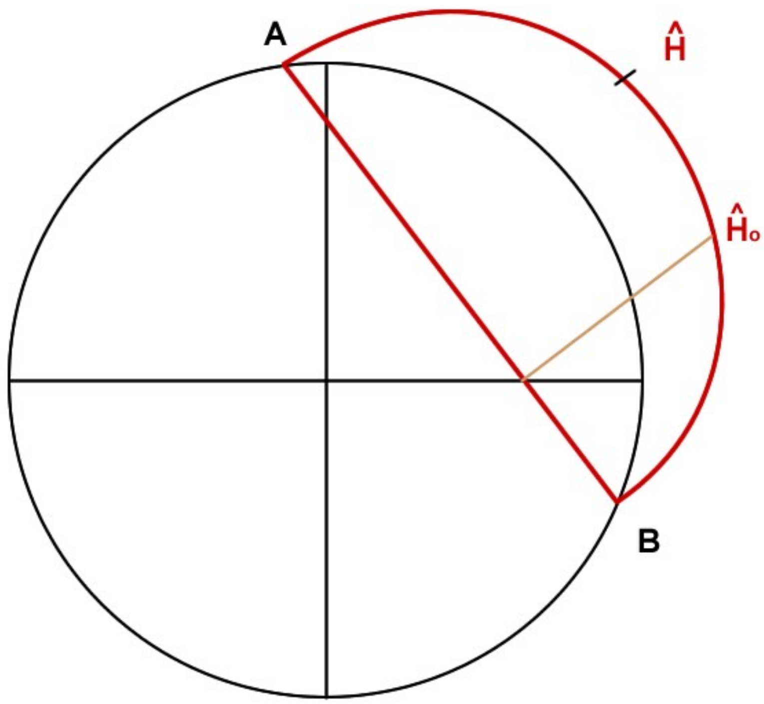


Figura 12: Abatut del Sol en un moment qualsevol del dia

Si en un moment del dia el Sol es troba a H, $\hat{H}_0\hat{H}$ és l'arc que ha recorregut sobre el paral · lel des de la seva sortida.

Determinació de l'arc hectemorus:

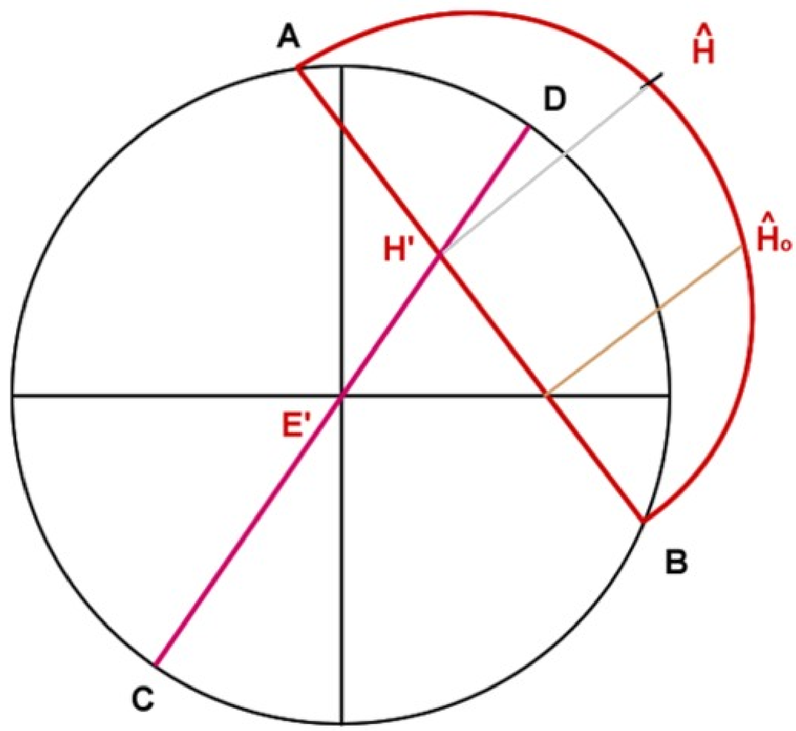


Figura 13: Projecció de l'arc hectemorus

Cercle hectemorus: cercle màxim, de diàmetre la línea Est - Oest, que passa pel Sol. CD és la intersecció i projecció ortogonal del cercle hectemorus sobre el meridià.

Arc hectemorus: arc mesurat sobre el cercle hectemorus des del punt Est E fins la posició del Sol H. $E'H'$ és la projecció ortogonal de l'arc hectemorus.

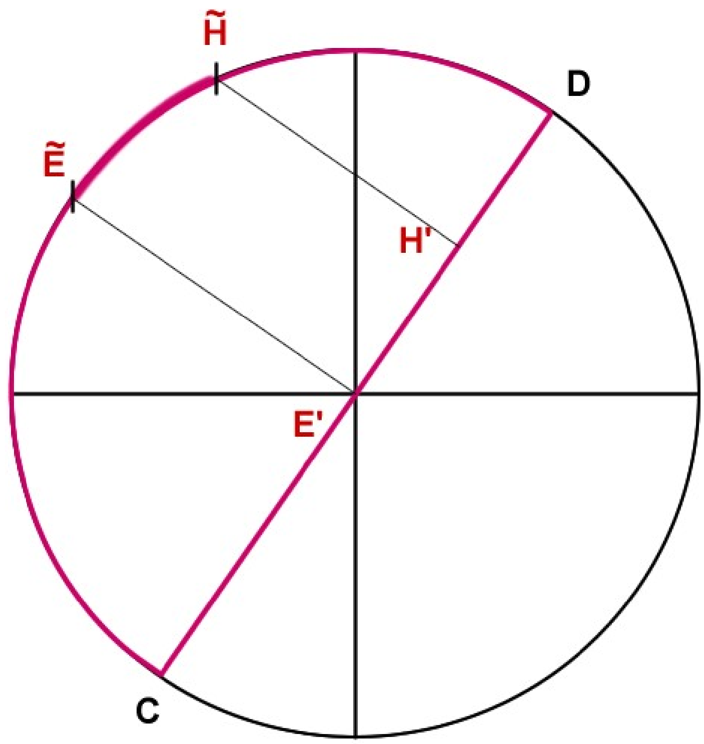


Figura 14: Construcció de l'arc hectemorus.

S'abat el cercle hectemorus entorn el diàmetre CD. L'arc $\tilde{E}\tilde{H}$ és l'abatut de l'arc hectemorus EH.

Per determinar-lo només cal dibuixar les perpendiculars a CD que passen respectivament per E' i H', i trobar les interseccions $\tilde{E}$ i $\tilde{H}$ amb el meridià.

Ptolemeu no recorre aquí a la idea d'abatiment que havia esbossat en tractar dels cercles mensuals. Demostra la igualtat dels triangles $E'H'\tilde{H}$ i $E'H'H$.

Determinació de l'arc meridià:

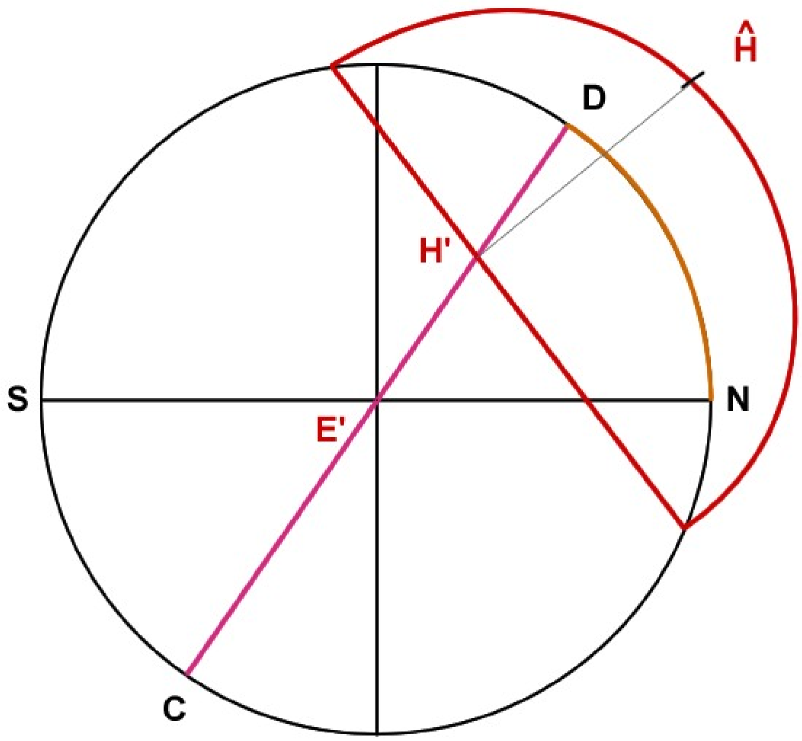


Figura 15: Construcció de l'arc meridià.

Arc meridià és el que formen els cercles hectemorus (cercle màxim que té per diàmetre la línia Est-Oest) i horitzó. Es medeix sobre el meridià. Com que NS és la projecció ortogonal de l'horitzó i CD la del hectemorus, l'arc meridià és el ND.

Determinació de l'arc horari:

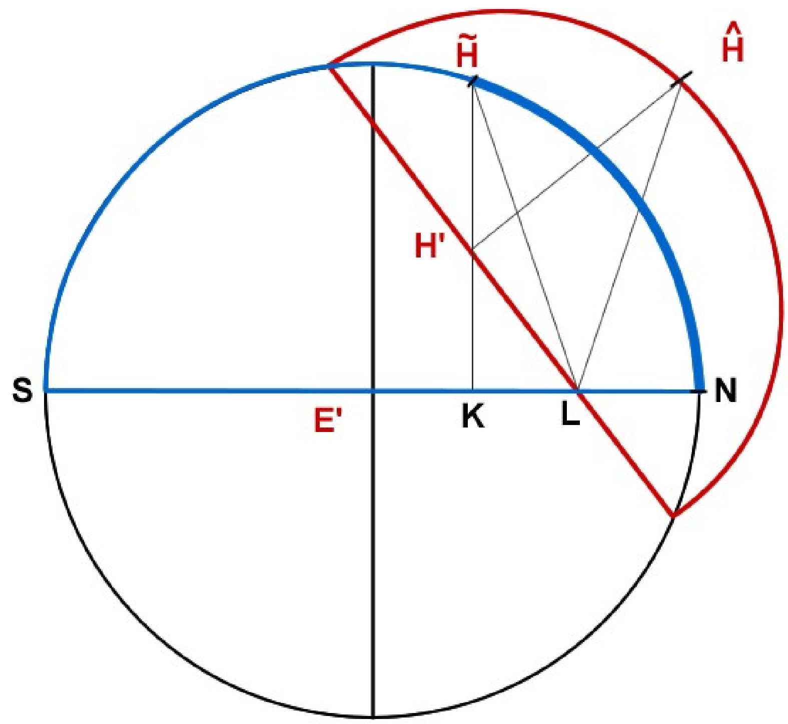


Figura 16: Construcció de l'arc horari.

Cercle horari és el cercle màxim, de diàmetre la línia Nord-Sud, que passa pel Sol. Arc horari és el mesurat sobre el cercle horari des del punt Nord fins la posició del Sol. S'abat el semicercle horari SHN entorn l'eix SN sobre el pla meridià. En l'abatiment, H descriu l'arc $H\tilde{H}$ d'un cercle ortogonal al pla meridià, amb K com a centre i de radi KH. La intersecció i projecció d'aquest cercle, $\tilde{H}H'K$, és perpendicular a SN. $\tilde{H}$ s'obté com intersecció de la recta perpendicular a SN per H' amb el meridià. L'arc horari és $N\tilde{H}$.

Un altre mètode: en l'abatiment el triangle rectangle HKL es converteix en el $\tilde{H}KL$. Per tant: $LH = L\tilde{H} = L\hat{H}$. D'aquesta manera es pot obtenir $\tilde{H}$ amb el compàs. Així el va obtenir Ptolemeu sense fer-ne la demostració perquè aquesta i les següents ja les feien els seus predecessors.

Determinació de l'arc vertical:

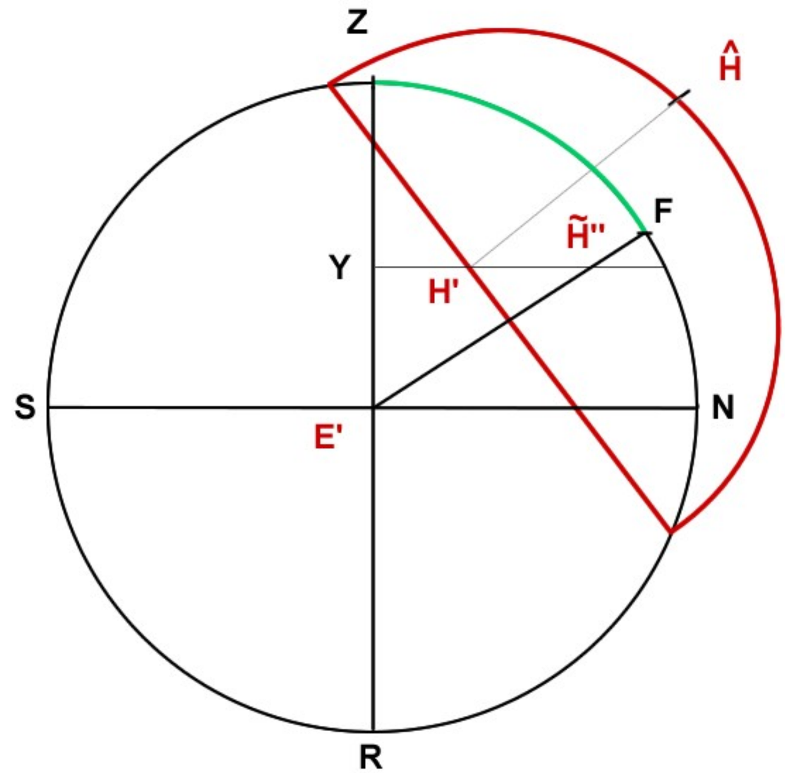


Figura 17: Construcció de l'arc vertical.

Arc vertical és el que formen el cercle horari i el meridià. Es mesura sobre el primer vertical.

Es projecta ortogonalment el segment HH' sobre el primer vertical: resulta el segment H"Y. Aquest s'abat sobre el meridià: resulta el $\tilde{H}$"Y. Com que la distància es conserva, la longitud de HH' és igual a la de H"Y, a la de $\tilde{H}$"Y i a la de $\hat{H}H'$. Això permet construir $\tilde{H}$" transportant la distància

$\hat{H}H'$ a partir de Y. S'uneix E' amb $\tilde{H}$" i s'obté F.

$E'\tilde{H}$"F és l'abatut de la intersecció i projecció ortogonal del cercle horari sobre el primer vertical. Per tant, ZF és l'arc vertical.

Determinació de l'arc descensiu:

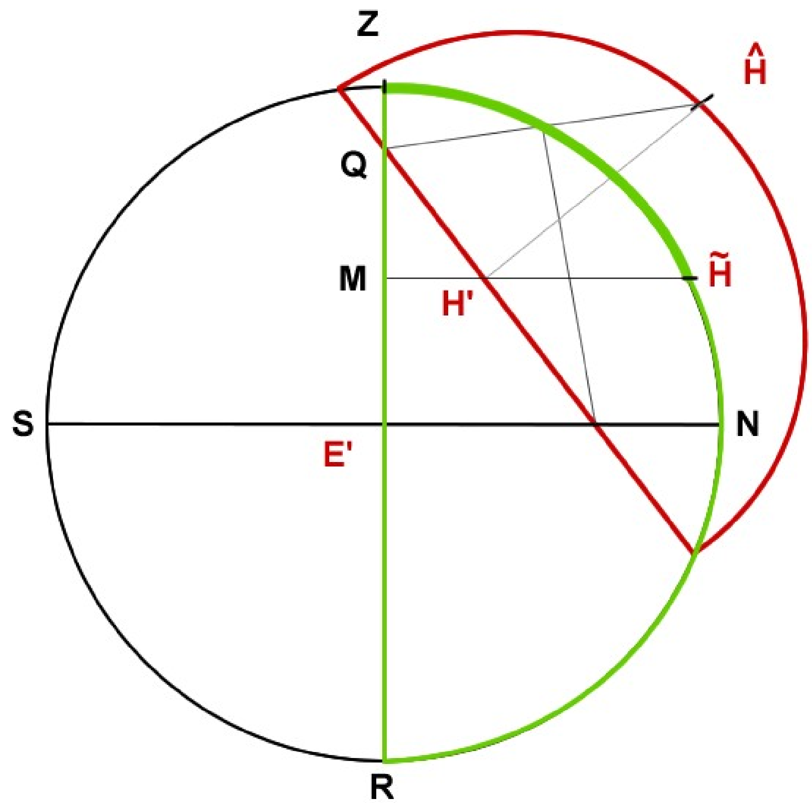


Figura 18: Construcció de l'arc descensiu.

Cercle descensiu és el cercle màxim de diàmetre la línia Zenit-Nadir que passa pel Sol. L'arc descensiu és el mesurat sobre el cercle descensiu des del Zenit fins la posició del Sol.

S'abat el cercle descensiu sobre el meridià en torn la línia Zenit-Nadir. $\tilde{H}$ descriu l'arc $H\tilde{H}$ d'un cercle ortogonal al pla meridià, amb M com a centre i radi MH. La intersecció i projecció d'aquest cercle $\tilde{H}H'M$, és perpendicular a ZR. $\tilde{H}$ s'obté com a intersecció de la recta perpendicular a ZR per H' amb el meridià. L'arc descensiu és $Z\tilde{H}$.

Un altre mètode: $\tilde{H}$ es pot obtenir també descrivint l'arc $\hat{H}\tilde{H}$ amb centre Q i radi $Q\hat{H}$, ja que l'abatut del triangle HQM és el $\tilde{H}QM$.

Determinació de l'arc horitzontal:

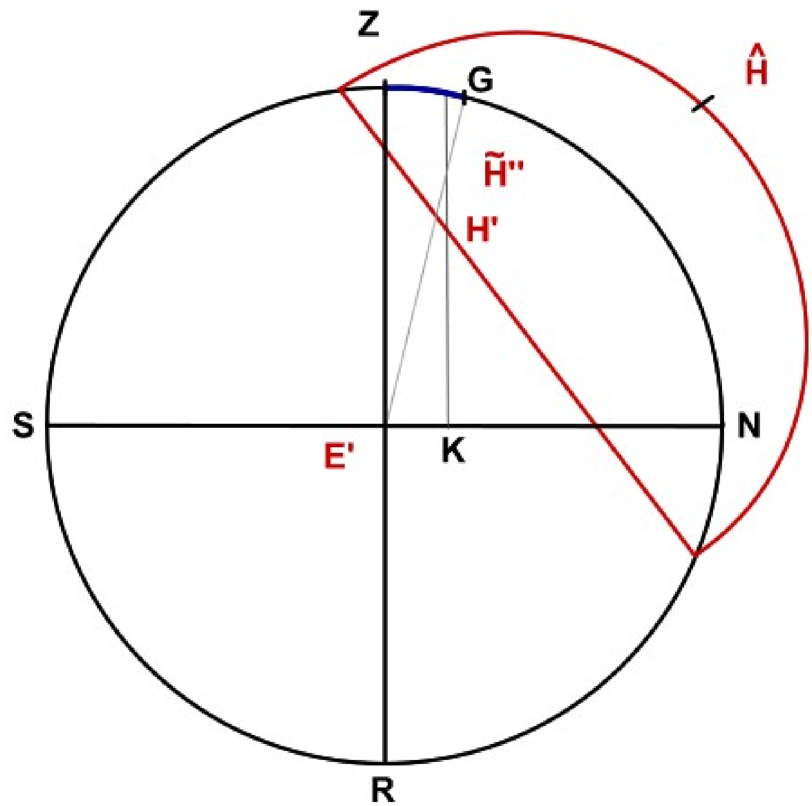


Figura 19: Construcció de l'arc horitzontal.

Arc horitzontal és el que formen el cercle descensiu i el primer vertical. Es medeix sobre l'horitzó.

Es projecta ortogonalment el segment HH' sobre l'horitzó: resulta el segment $H"K$. Aquest s'abat sobre el meridià: s'obté el segment $\tilde{H}"K$. Com que la distància es conserva, la longitud de HH' és igual a la de $H"K$, a la de $\tilde{H}"K$ i a la de $\hat{H}H'$. Això permet construir el punt $\tilde{H}'$: transportant la distància $\hat{H}H'$ a partir de K. S'uneix E' amb $\tilde{H}$" i s'obté G. $E'\tilde{H}$"G és l'abatut sobre el meridià de la intersecció i projecció ortogonal del cercle descensiu sobre l'horitzó. Per tant l'arc horitzontal és ZG.

4.3 Tercer fragment: càlcul numèric

Capítol novè:

Instrumentales quidem igitur acceptiones hunc continent modum assumpta simili consequentia in omnibus positionibus;...

Enuncia la necessitat de triar un mètode per calcular les mesures numèriques dels angles en qüestió. Una vegada determinats els angles gràficament, és possible mesurar-los a través de la transposició de les cordes corresponents a un quadrant graduat.

Afirma que també es poden calcular amb molta precisió amb la geometria, però que és més fàcil d'aconseguir a través de l'analemma. Sembla, però, que vulgui presentar el mètode gràfic com a més còmode i suficientment precís dins del límit de la percepció sensible. El mètode geomètric, que l'anomena "per nombres", el presenta però no el desenvolupa. Consisteix en trobar la solució a través del càlcul trigonomètric amb les funcions corda. Només tracta amb els angles en l'analemma i no en la seva pròpia configuració tridimensional. El problema consisteix en determinar els valors dels angles ptolemaics, donades la latitud terrestre del lloc φ, la posició del Sol δ, i l'hora estacional η. Demostra que s'obtenen directament, o bé a partir d'un triangle rectangle del que sempre es poden calcular dos elements.

Ptolemeu va voler descriure aquest mètode d'una manera autònoma respecte l'anterior, breument en les seves línies fonamentals. Quant al rigor de presentació del càlcul, és insuperable.

En aquest capítol demostra que aquests càlculs es poden fer en el cas equinoccial.

Capítol desè:

Et aliorum autem mensilium gratia exponatur qui abgd meridianus cum diametris ad rectos...

A continuació fa el mateix per la resta de cercles mensuals: repeteix la demostració de que els sis angles es poden calcular amb l'ajuda de la trigonometria.

Probablement mai no va utilitzar aquest mètode; només demostra la possibilitat de utilitzar-lo. Si ho hagués fet hauria estat una feinada gegantina.

4.3.1 Explicació del tercer fragment

Saltant el capítol novè, s'explica el cas general tractat en el desè. Primer, com exemple, es calcularà l'arc hectemorus amb la trigonometria plana actual. Després es descriu el procés de càlcul de tots els angles amb el mètode ptolemaic, que precisa de les taules de cordes. Finalment, es calcularan els angles amb la trigonometria esfèrica.

4.3.1.1 Càlcul de l'hectemorus

Siguin donades δ, φ i η (declinació solar, latitud terrestre i hora estacional). L'esquema a seguir (Fig. 20):

a) A partir de δ es calcula directament EP.

b) A partir de φ i δ tenint present el triangle EPH, es calcula PH, i d'aquest l'arc RK.

c) A partir de RK i η es calcula RL.

d) De l'arc RL, tenint present el triangle EMP, es calcula MP.

e) Coneguts EP i MP, catets del triangle EPM, es calcula EM, l'arc sinus del qual és l'hectemorus.

Els detalls s'expliciten a continuació:

Sigui 1 la mesura del radi del cercle meridià, i Hectemorus = $Hect$. Aleshores:

$$Hect = \arcsin EM$$

$$EM = (MP^2 + EP^2)^{1/2}$$

D'una banda es compleix que:

$$EP = \sin\delta \text{ i } MP = PZ \sin RL$$

Però,

$$RL = KL - KR \qquad (1)$$

$$KL = \eta/6\,(90^\circ + KR) \qquad (2)$$

on $1/6\,(90^\circ + KR)$ és l'arc corresponent a cada hora estacional, i

$$\sin KR = PH/\cos\delta.$$

$$PH = EP\tan\varphi = \sin\delta\tan\varphi$$

Aleshores:

$$KR = \arcsin(\tan\delta\tan\varphi) \qquad (3)$$

Així doncs (1) s'escriu a partir de (2) i (3) de la manera següent:

$$RL = 15°\eta + (\eta/6 - 1)\arcsin(\tan\delta\tan\varphi)$$

Com que $PZ = \cos\delta$, finalment es té que

$$MP = \cos\delta\sin RL$$

Per tant, l'angle hectemorus és

$$Hect = \arcsin(\sin^2\delta + \cos^2\delta + \sin^2 RL)^{1/2}$$

En el cas que $\varphi = 16,46118775°$ (clima I), $\delta = 23°50'$, $\eta = 2$, l'angle hectemorus és de 34° 0' 5,69".

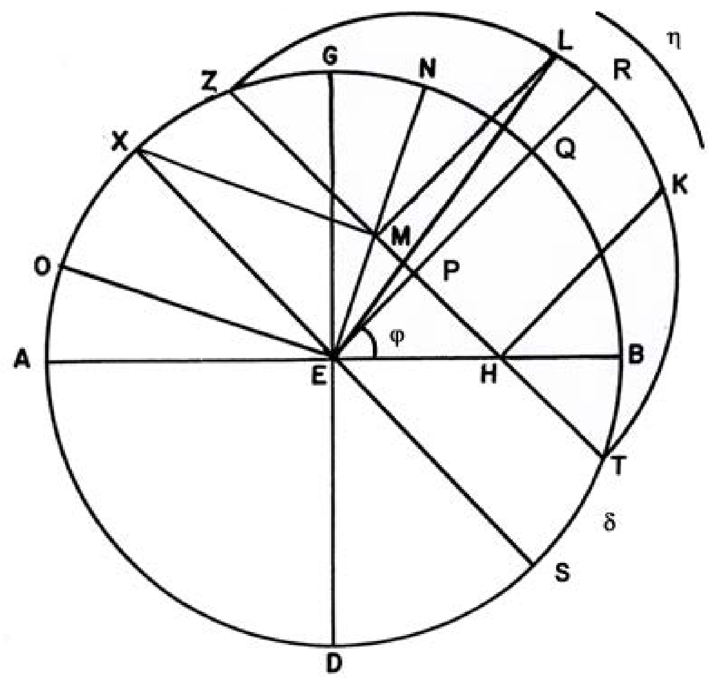


Figura 20: Càlcul de l'hectemorus

4.3.1.2 Càlcul dels sis angles amb la taula de cordes

Ptolemeu no parla directament de la declinació. Quan afirma que HK és donat, sap molt bé dibuixar l'arc HZK (Fig. 21). Ho considera trivial i no ho explica. HZK és el suplementari de l'angle doble de la declinació.

Donades φ, δ, η (latitud, declinació i hora estacional respectivament):

$Arc\ HZK = 180° - 2\delta$

Amb la taula de cordes es poden calcular:

$$(ET)_1 = 1/2 \text{ cord } (2\delta)^{41}$$

[41] Els subíndexs 1, 2, 3 indiquen que es tracta de les mesures relatives al diàmetre del meridià, la hipotenusa MTE i al diàmetre del cercle diari respectivament. El procediment consisteix en determinar les mesures respecte al diàmetre del meridià.

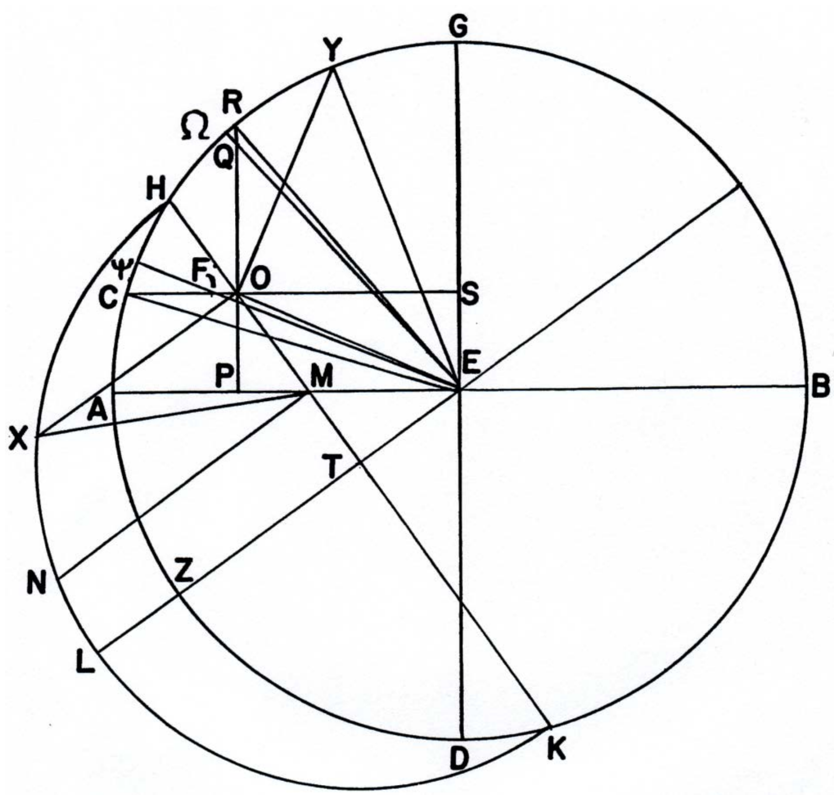


Figura 21: La determinació dels angles ptolemaics

$$(HTK)_1 = \text{cord (arc } HZK)$$

mesurades respecte la del diàmetre del meridià (120^p).

Angle $MET = \varphi$ i Angle $EMT = 90° - \varphi$.

A partir de la taula de cordes s'obtenen:

$(MT)_2 = \text{cord } (2\varphi)$ i $(ET)_2 = \text{cord } [2(90° - \varphi)]$, mesurades respecte la de la hipotenusa $MTE(120^p)$.

De les proporcions $(ET)_1/(ET)_2 = (MT)_1/(MT)_2 = (ME)_1/120$, es calculen les mesures de $(MT)_2$ i $(ME)_2$ respecte la del diàmetre del meridià (120^p).

De la raó $(HTK)_1/120 = (MT)_1/(MT)_2$, es calcula la mesura de $(MT)_1$ respecte la mesura del diàmetre del cercle diari (120^p).

Amb la taula de cordes es calcula: arc $LN = 1/2$ arc cord $(2MT)$.

Per tant: arc $NXH = 90°-$arc LN.

Cada hora estacional correspon a un arc de 1/6 arc NXH, i arc $NX = \eta(1/6 arc NXH)$.

Aleshores es calculen:

$$\text{arc } LX = \text{arc } LN + \text{arc} NX \text{ , i arc } XH = 90° - \text{ arc } LX$$

Amb la taula de cordes s'obtenen: $OT_3 = 1/2$ cord $(2LX)$

$XO_3 = 1/2$ cord $(2XH)$ mesurades respecte el diàmetre del cercle diari (120^p).

A partir de les proporcions següents: $(HTK)_1/120 = (OT)_1/(OT)_3 = (XO)_1/(XO)_3$

es calculen les mesures de $(OT)_1$ i $(XO)_1$ respecte del diàmetre del meridià (120^p).

Aleshores: $OM = OT - MT$, i de les proporcions $(OM)_1/(ME)_1 = (PM)_1/(MT)_1 = (OP)_1/(TE)_1$ es calculen $(PM)_1, (OP)_1 = ES$,

i $PE = PM + ME$. Finalment a partir del teorema de Pitàgores es calculen: $RP = (ER^2 - EP^2)^{1/2}, CS = (EC^2 - ES^2)^{1/2} i EO = (EP^2 + OP^2)^{1/2}$. Per tant, amb la taula de cordes es calculen els angles:

- hectemorus $= 1/2$ arc $(2OE)$
- equatorial $= 1/2$ arc $(2OM)$

- horari = 1/2 arc ($2PR$)
- descensiu = 1/2 arc ($2CS$)
- meridià = 1/2 arc ($2OP$)
- vertical = 1/2 arc ($2SF$)
- horitzontal = 1/2 arc ($2PE$)

4.3.1.3 Amb la trigonometria esfèrica

Si es resol des del punt de vista de la trigonometria esfèrica, els càlculs dels set angles ptolemaics es poden fer a partir de les següents fórmules:

$$\cos\theta_H = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\eta \tag{10}$$

$$\tan\varphi_H\sin\eta = \sin\varphi\cos\eta - \cos\varphi\tan\delta \tag{11}$$

$$\cos\theta_V = \cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos\eta \tag{12}$$

$$-\sin\eta\cot\varphi_V = \cos\varphi\cos\eta + \sin\varphi\tan\delta \tag{13}$$

$$\cos\theta_M = -\cos\delta\sin\eta \tag{14}$$

$$\tan\varphi_M = (\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\eta)/(\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos\eta) \tag{15}$$

$$\tan\varphi_E\sin\eta = \cos\eta + \tan\varphi\tan\delta \tag{16}$$

On φ_E és l'arc equatorial.

a) L' hectemorus θ_M:

amb la fórmula (14): $\cos\theta_M = -\cos\delta\sin\eta$

b) L'arc vertical φ_M:

a partir de $\varphi_M = \varphi + p$ es dedueix que $\tan p = (\cos\eta/\tan\delta)$

La demostració és la següent:

Aplicant la fórmula (15) es té:

$\tan\varphi_M = (\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\eta)/(\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos\eta)$.

Dividint numerador i denominador per $\cos\varphi\cos\delta$, resulta que:

$$\tan\varphi_M = (\tan\varphi\tan\delta + \cos\eta)/(\tan\delta - tan\varphi\cos\eta).$$

Operant:

$$\tan\varphi_M - \tan\varphi = \cos\eta(1 + \tan^2\varphi)/(\tan\delta - \tan\varphi\cos\eta)$$
$$\tan\varphi_M\tan\varphi + 1 = \tan\delta(1 + \tan^2\varphi)/(\tan\delta - \tan\varphi\cos\eta)$$

Per tant,

$$\tan p = (\tan\varphi_M - \tan\varphi)/(1 + \tan\varphi_M\tan\varphi) = \cos\eta/\tan\delta$$

A partir d'aquesta última fórmula es calcula p i la φ_M és $\varphi + p$.

c) Els cinc arcs restants es calculen a partir de les fórmules pertinents entre les següents: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) i (9).

4.3.1.4 Exemple: càlcul dels 6 angles ptolemaics al llarg del solstici d'estiu en un lloc de la terra en el que el dia dura exactament 13 hores.[42]

Les següents relacions:

$$\sin\delta = \sin\lambda\sin 23°50' \tag{17}$$

[42] Clima I per Ptolemeu.

que relaciona la declinació, δ, amb la longitud solar λ,

$$\eta = d(1/6\tau) \tag{18}$$

que relaciona l'arc η recorregut pel Sol, i les hores (sextes parts del dia corresponent) τ,

$$\cos d = -\tan\varphi \tan\delta \tag{19}$$

on 2d és la durada del dia i φ és l'altura del pol sobre l'horitzó del punt de la terra que es considera, permeten substituir les variables δ i η per les λ i τ.

Les 13 h equivalen a d = 97º30' (24 h = 360º) i tenint present que

$\tan\varphi = -(\cos d)/\tan\delta$

resulta que $\varphi = 16.46118775°$, $\delta = 23°50'$, ja que $\lambda = 90°$.

Així resulta la taula següent que relaciona hores i arcs:

τ	η
0	0
1	16,25º
2	32,5º
3	48,75º
4	65º
5	81,25º
6	97,5º

Utilitzant les fórmules (10) a la (15), s'obté la taula:

	hect.	Horar.	Desc.	merid.	vert.	horiz.
O – sortida	24 55	65 5	90	0	90	24 55
1 11	25 18	69 38	75 39	35 28	74 40	21 3
2 10	34 00	74 28	60 58	60 12	59 40	18 32
3 9	46 33	77 29	46 08	72 38	44 47	17 29
4 8	60 34	80 17	31 19	78 49	29 55	18 58
5 7	75 10	82 02	16 55	81 45	14 59	25 27
Migdia	90	82 38	7 22	82 38	0	90

que proporciona els sis angles al llarg del solstici.

4.4 Quart fragment: càlcul nomogràfic

Capítol onzè:

Que quidem igitur per lineas acceptiones angulorum et subtensarum ipsis periferiarum sic utique nobis ad manum fient. ...

A través del mètode gràfic, exposat en els capítols sisè i setè, Ptolemeu demostra com determinar els seus angles. En aquest es proposa calcular-los numèricament a partir de les dades numèriques corresponents sense haver de recórrer a la trigonometria. Aquest mètode que l'anomena "fàcil d'aconseguir", s'executa sobre un disc de bronze, marbre o fusta, en el que es dibuixen dos cercles concèntrics (un representant el cercle meridià; l'altre li permetrà dibuixar l'horitzó a partir de la latitud), es marquen unes línies i traços permanents, dibuixen els semicercles mensuals (que permetan introduir els diversos punts del zodíac), i un quadrant que servirà de mesurador d'angles. La superfície ha de quedar encerada per tal d'introduir les dades de cada problema. Un cop extretes les solucions, serà encerada de nou.

Capítol dotzè:

Hiis autem suppositis facile in promptu nobis erit acceptionum unaqueque, si prius quidem ordine assequentes radici supposite elevationis diametros...

Aquí indica com introduir les tres dades (latitud, mes i hora) a través de línies i traços no permanents, corresponents al cas equinoccial, i com l'analemma proporciona les sis solucions numèriques corresponents a cada angle, aplicant el mètode gràfic per fer operacions d'ajustament, utilitzant únicament el compàs i l'escaire, i no servint-se del dibuix. Mesurats els angles, cal esborrar les marques per poder entrar dades noves. Es tracta, doncs, d'un mètode nomogràfic que, per la cura i detall amb el que és tractat, fa pensar que ha estat elaborat per ell mateix.

Capítol tretzè:

Rursum supponatur alicuius aliorum mensilium parallelorum diameter et sit que zhtk, super quam orientalis semicirculus zlk, ...

Aquí repeteix el procediment per la resta de cercles mensuals.

Amb aquest mètode construeix una taula dels angles buscats, de les 49 que permet. Per la resta de casos s'ha de recórrer a interpolacions.

Cal assenyalar que unint la representació gràfica dels punts obtinguts amb aquestes mesures, apareixen les hipèrboles intersecció amb el pla de l'horitzó del con recte que té com a base el cercle diari del Sol i com a vèrtex l'extrem del gnomon.[43]

Capítol catorzè:

Et angulos uero ab antiquis determinatos, quoscunque non eodem modo nobiscum exposuerunt, ...

Finalment Ptolemeu explica com les seves coordenades poden ser conver-

[43] Ptolemeu mai no ho va explicitar.

tides en les coordenades que els seus predecessors utilitzaven, segurament per deferència als "artesans conservadors", però inclou una crítica tan profunda de l'angle equatorial que només els més conservadors d'ells s'haurien atrevit a no adaptar-se als seus angles.

Obté una taula en la que col · loca els resultats que ha obtingut i explica les combinacions d'angles que determinen la posició del Sol. Delambre (1817) es preguntava si no podia haver hagut, seguint les taules, una discussió de l'aplicació d'aquests resultats a la construcció de rellotges de Sol. Però el fet que les combinacions que s'utilitzen en aquestes construccions estiguin mostrades abans que les taules contradiu aquesta afirmació. L'aplicació és, després de tot, prou simple i pot ser molt coneguda en els escrits dels seus predecessors.

Aquest mètode nomogràfic es detalla a continuació.

4.4.1 Dibuix de les línies anomenades permanents

Són les independents de l'altura del pol, la longitud solar i l'angle horari. Ptolemeu reclama fer-ho en un disc de metall o de pedra. Si és de metall les línies es graven; si de fusta es pinten de vermell o negre.

Les línies permanents són:

1) El meridià representat per un cercle de centre O i radi OM (qualsevol) i el diàmetre que passa per OM, que representa la intersecció del meridià amb l'equador:

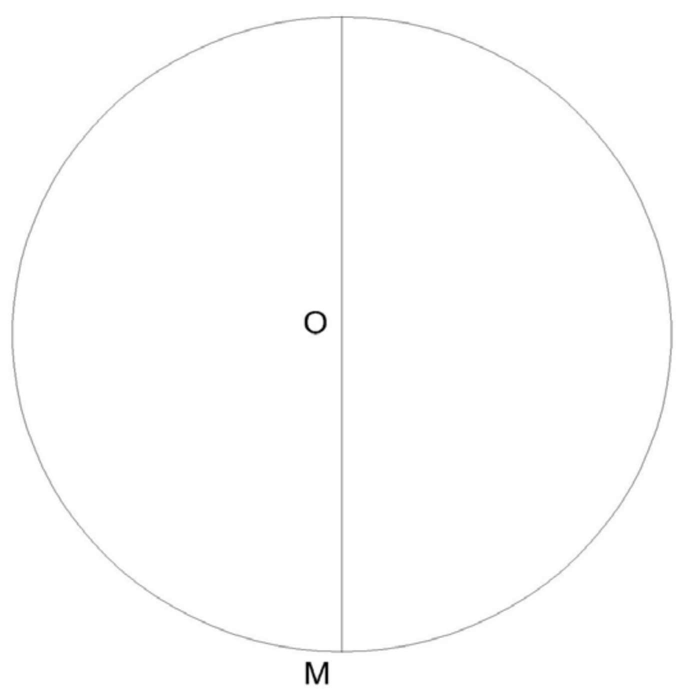


Figura 22: L'equador i el meridià

2) Els dos semicercles del meridià es divideixen en 12 parts iguals. Cada senyal es projecta ortogonalment sobre el diàmetre equatorial. Les marques així obtingudes assenyalen les hores equinoccials:

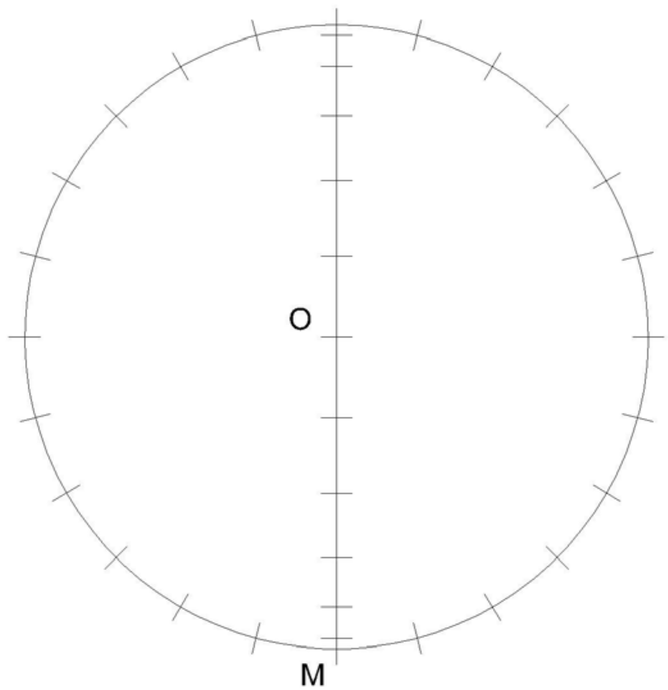


Figura 23: Els traços permanents

3) Es dibuixen tots els semicercles mensuals (només en calen quatre inclòs el meridià) d'acord amb les declinacions $\lambda = 11;40^{\text{o}}$, $20;30^{\text{o}}$ i $23;50^{\text{o}}$ que corresponen les longituds solars respectives 30°, 60° i 90° respectivament.[44] Per a que el dibuix sigui més clar, el primer i tercer semicercles es dibuixen cap a un costat i el segon cap a l'altre:

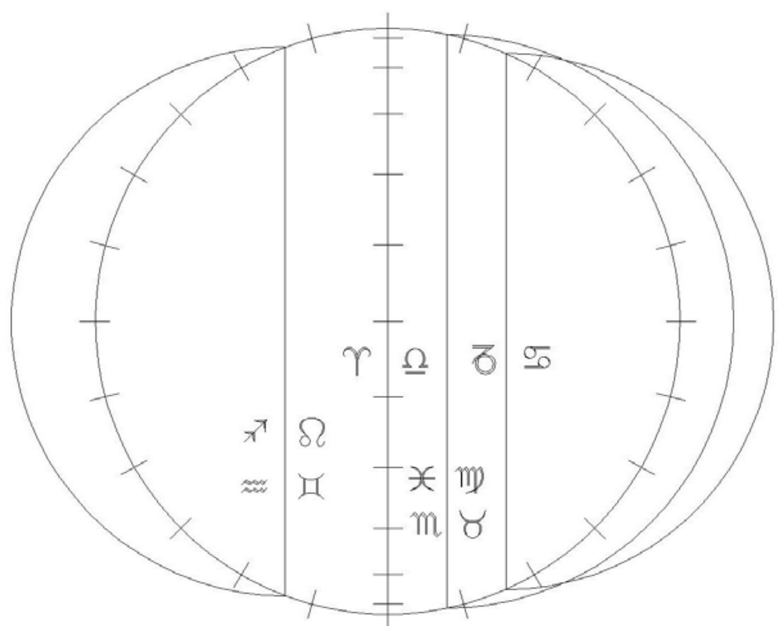


Figura 24: Els cercles mensuals

[44]Ptolemeu no construeix la declinació a partir de la longitud solar i la declinació de l'eclíptica. Tracta la declinació del Sol com una dada junt amb l'altura del pol i l'angle horari. Vitruvi, però, explica un mètode gràfic per a construir-la, a partir d'un cercle auxiliar anomenat *manacus*. Ptolemeu, ignorant-lo, deu prendre les declinacions directament de les taules de cordes de l'Almagest.

4) Amb centre en un punt P del diàmetre equatorial es dibuixa un mesurador d'angles: un quadrant, subdividit en angles de 5°, del mateix radi que el meridià:

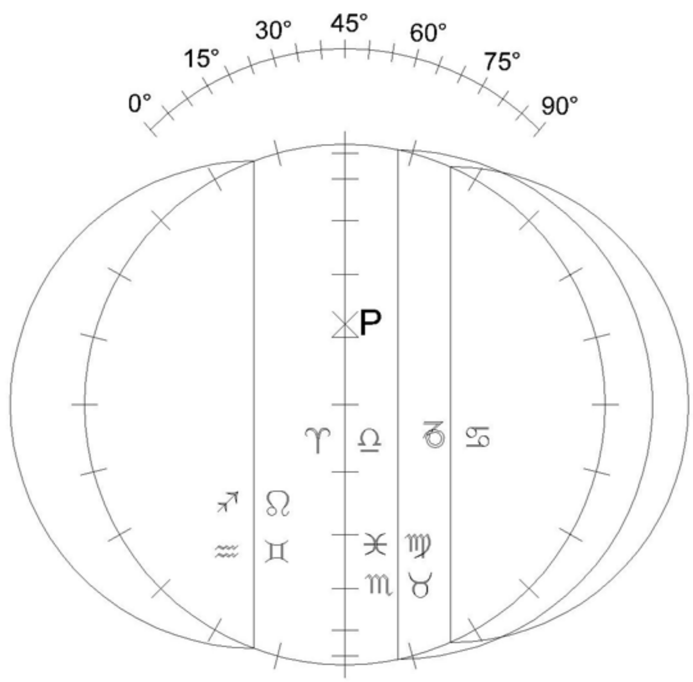


Figura 25: El mesurador d'angles

Es dibuixa una circumferència exterior concèntrica a la del meridià. Sobre ella es marquen els set climes d'acord amb les latituds que els corresponen. Són les següents:

Clima	Durada del dia el solstici d'estiu	Altura del pol φ[45]	Ptolemeu[46]
I	13 h	(16; 27º)	16; 25º
II	13 1/2 h	(23; 51º)	23; 5º
III	14 h	(30; 22º)	30; 20º
IV	14 1/2 h	(36; 0º)	36; 0º
V	15 h	(40; 56º)	40; 55º
VI	15 1/2 h	(45; 34º)	45; 0º
VII	16 h	(48; 38º)	48; 3º

I es graduen, com a mínim, el tercer i quart quadrants de 0º a 90º, en subdivisions de 5º:

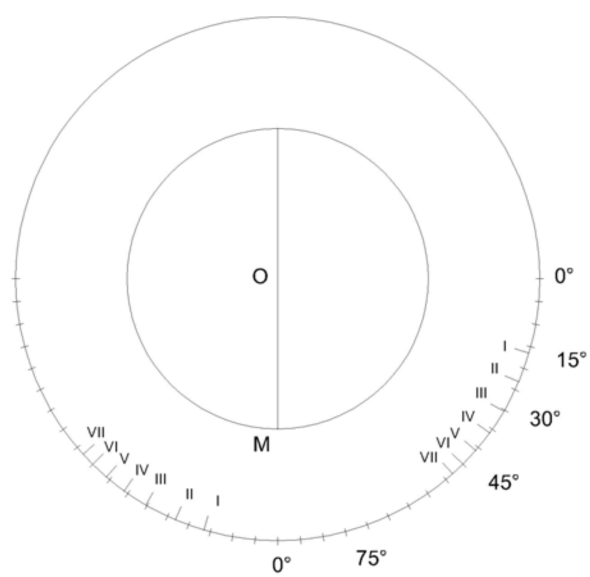


Figura 26: Els climes

[45]Segons els meus càlculs.

[46]Les altures les agafa Ptolemeu de l'Almagest, arrodonides a múltiples de 5'.

S'ha construït el nomograma:[47]

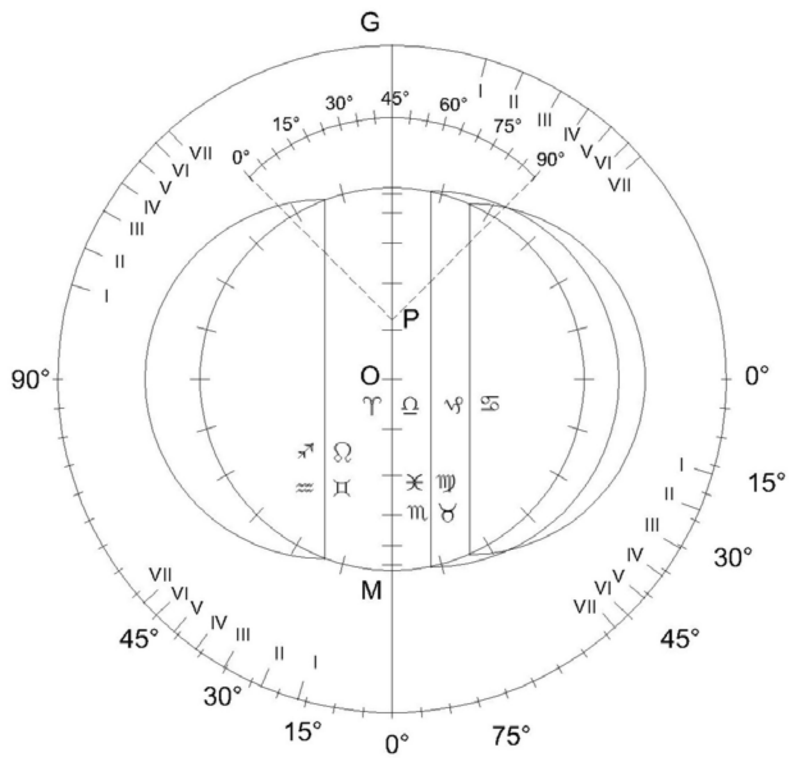


Figura 27: El nomograma de Ptolemeu

El caràcter realment nomogràfic del procediment es comprova quan al substituir en l'equació (2) els valors obtinguts en les (17), (18) i (19), el càlcul es pot fer de manera directa.

Una vegada construït, es pot utilitzar per a determinar els angles de Ptolemeu en cada cas.

[47]Dibuixades les línies permanents, es recobria el disc de cera per tal de dibuixar-hi a sobre. Així es podia reiterar el seu ús.

4.4.2 Dibuix de les línies i traços corresponents a una latitud fixada

1) Es dibuixa el diàmetre de l'horitzó corresponent al clima (latitud) que es considera.

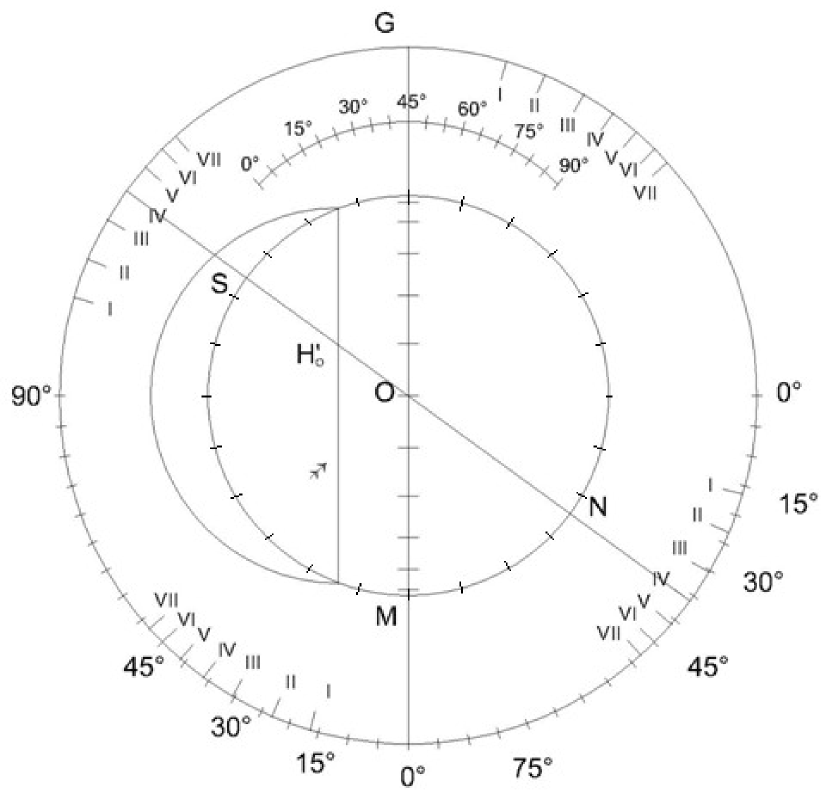


Figura 28: La determinació de l'horitzó

2) Sobre el punt d'intersecció d'aquest diàmetre amb el del semiparal · lel triat es dibuixa una perpendicular fins que talli el paral · lel: s'ha localitzat l'abatut del punt $\hat{H}_0$ de la sortida del Sol.

3) L'arc que va des del punt anterior fins al "punt culminació" es divideix en sis parts iguals (les hores civils):

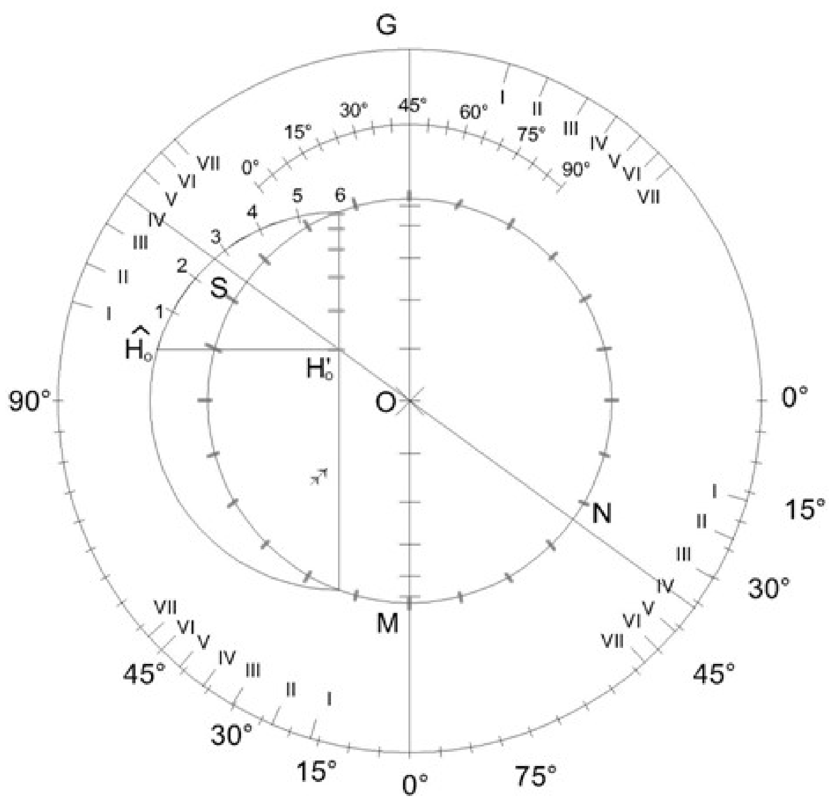


Figura 29: La sortida del Sol i les hores estacionals

4) Aquesta divisió horària del semiparal·lel la projectem sobre el seu diàmetre:

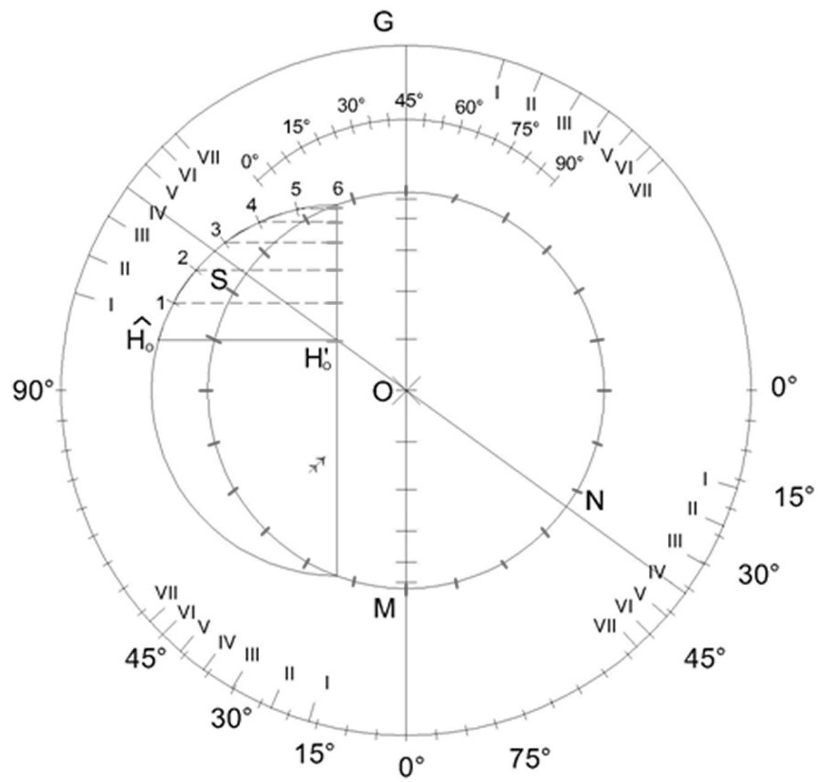


Figura 30: Les hores estacionals

4.4.3 La manipulació del compàs i l'escaire: la determinació de cada angle.

1) Cas de l'arc hectemorus: $\tilde{E}\tilde{H}$

Amb centre H' i radi $H'\hat{H}$, on $\hat{H}$ és l'abatut del Sol sobre el semipara · lel, es dibuixa $\tilde{E}$ sobre el meridià. Es construeix amb l'escaire[48] la perpendicular a la recta OH' per O. La seva intersecció amb el meridià és el punt $\tilde{E}$ abatut del punt est .E[49] L'arc $\tilde{E}\tilde{H}$ és l'arc hectemorus. Traslladat sobre el quadrant mesurador s'obté la seva mesura.

[48] Ptolemeu l'anomena "platisma".

[49] Ptolemeu fa servir aquí l'escaire de regla. Amb ella prolonga OH' fins tallar el meridià. Col · locada una punta del compàs en aquest punt d'intersecció i l'altra en $\tilde{H}$ obté l'obertura del complementari de l'angle buscat. Només cal transportar-la al quadrant graduat a partir de la senyal 90° per obtenir el valor de l'hectemorus.

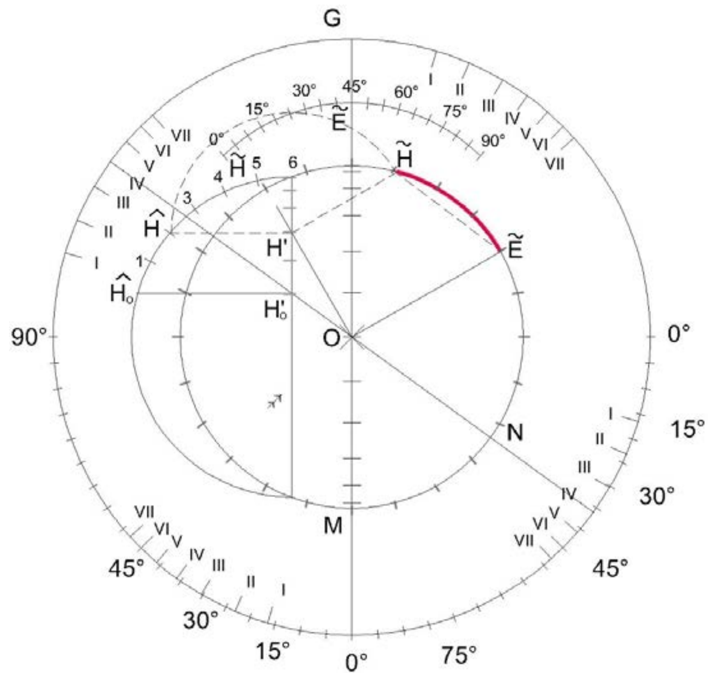


Figura 31: Determinació de l'hectemorus

2) Cas de l'arc meridià: SA

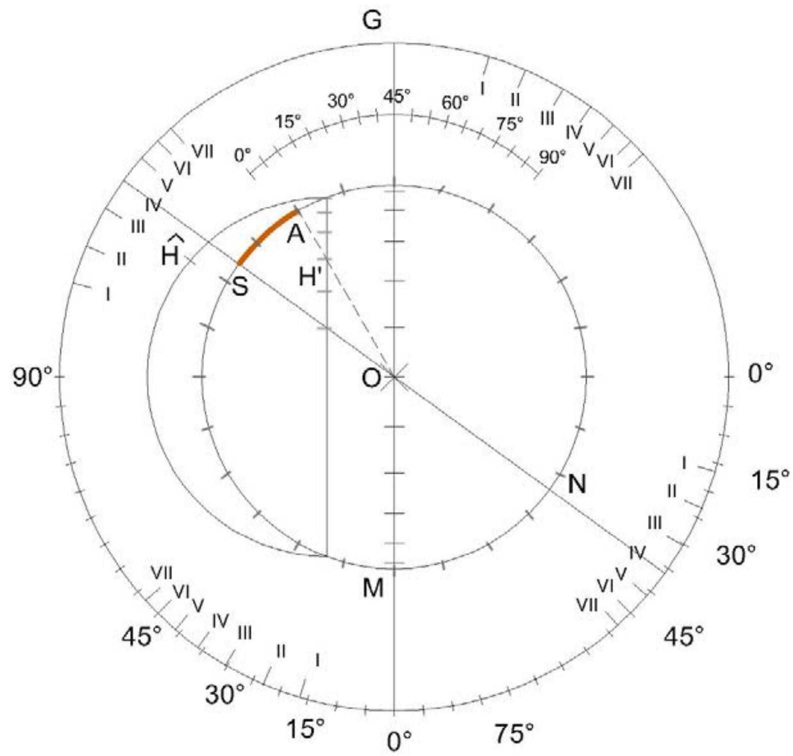


Figura 32: Determinació de l'arc meridià

3) Cas de l'arc horari: $S\tilde{H}$

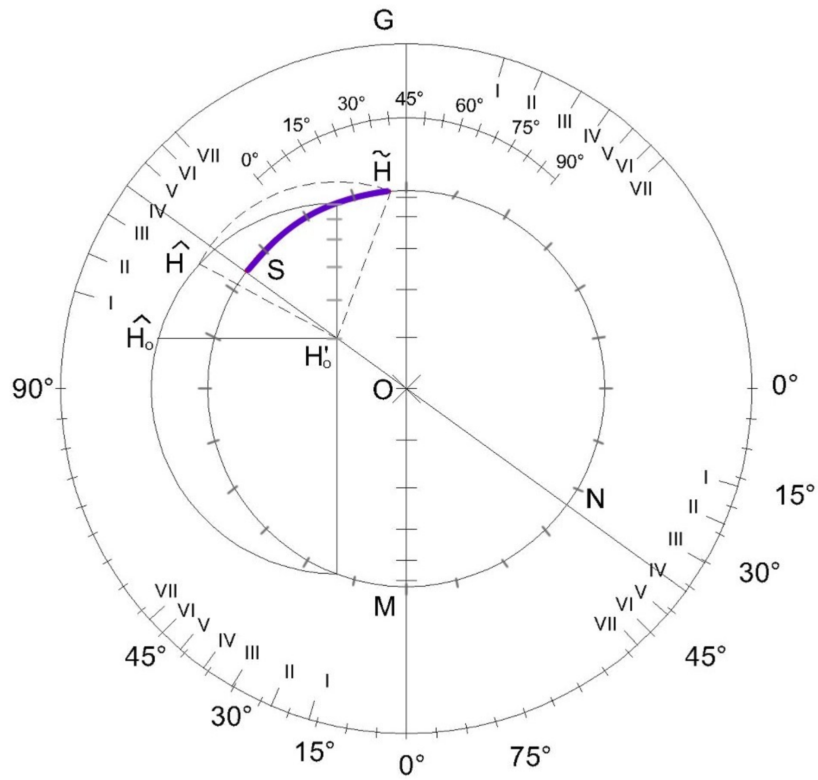


Figura 33: Determinació de l'angle horari

4) Cas de l'arc vertical: ZB[50]

[50]Per evidenciar la perpendicular a OZ que passa per H', Ptolomeu utilitza l'escaire.

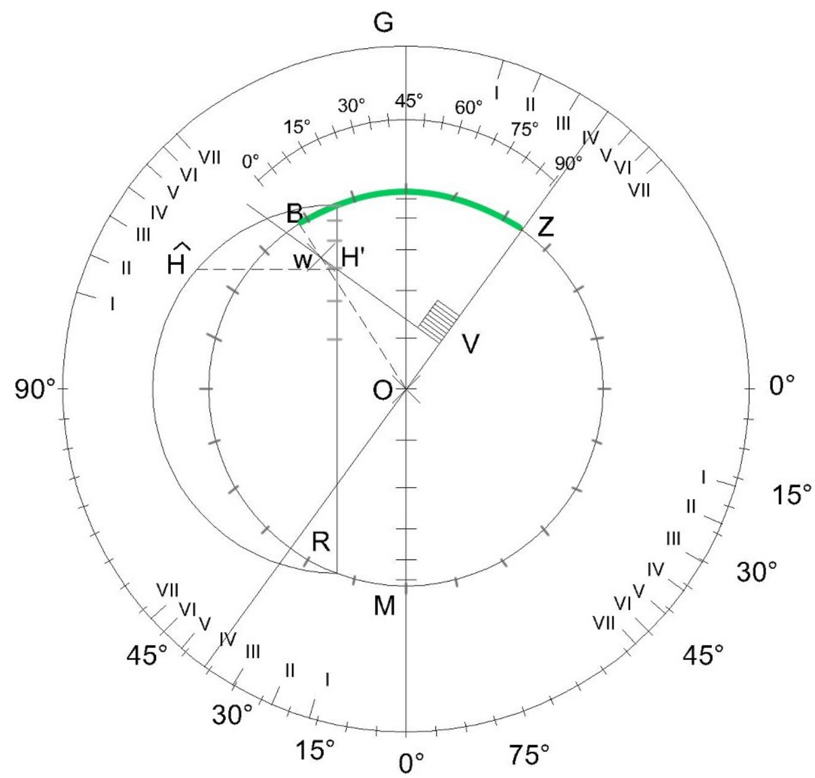


Figura 34: Determinació de l'arc vertical: $\hat{H}H' = VW$

5) Cas de l'arc descensiu: $Z\tilde{H}$

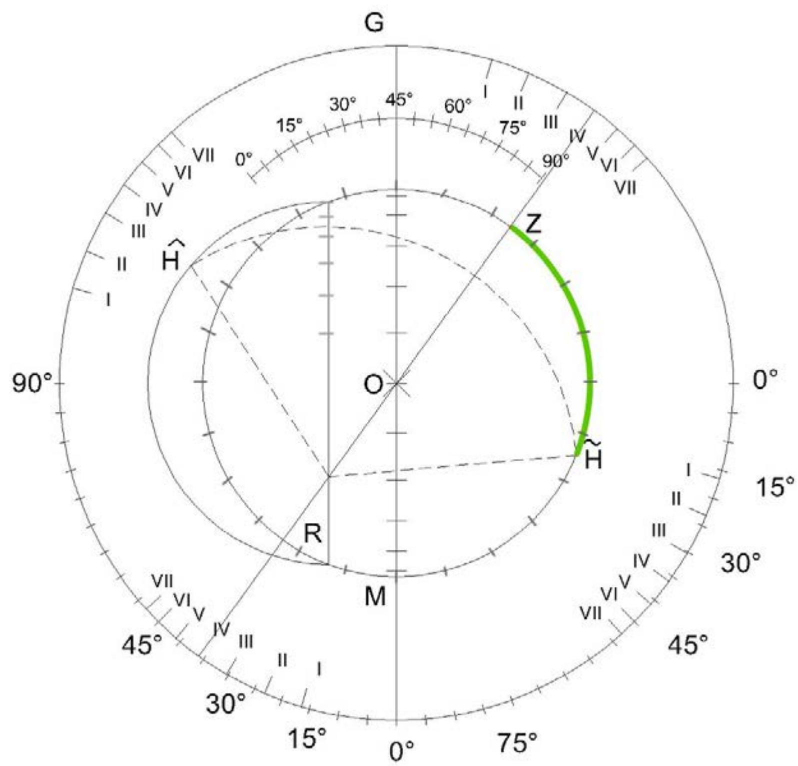


Figura 35: Determinació de l'arc descensiu

6) Cas de l'arc horitzontal: CZ[51]

[51]Novament necessita l'escaire per evidenciar la perpendicular a l'horitzó.

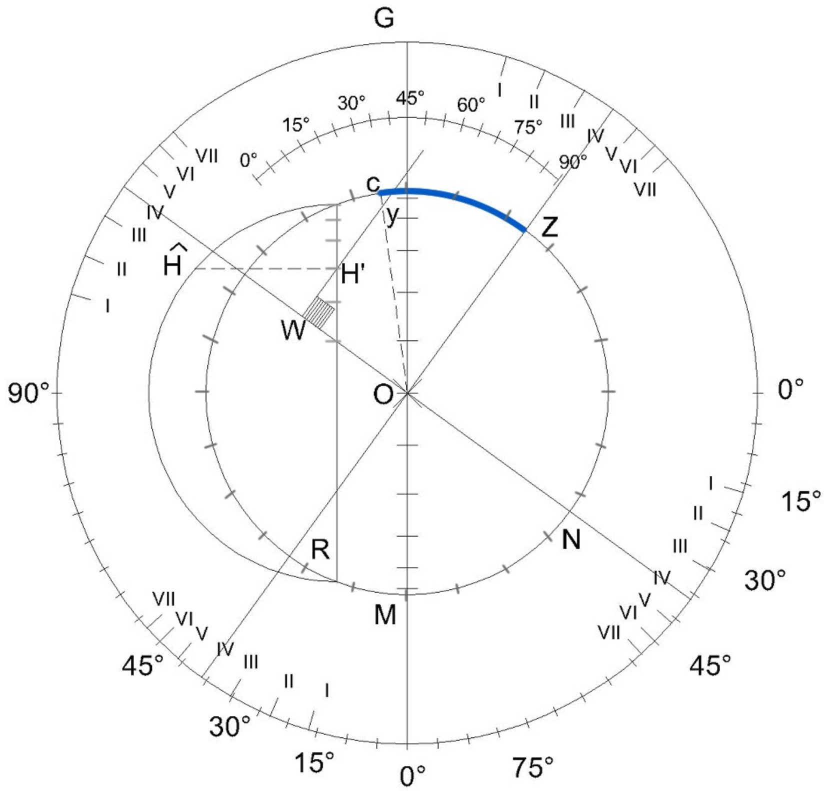


Figura 36: Determinació de l'arc horitzontal: $\hat{H}H' = WY$

4.4.4 La taula de Ptolemeu

Fent servir la taula gràfica o nomograma anterior es poden calcular els valors dels 6 angles ptolemaics per a cada punt inicial de cada signe del zodíac i per a cada clima. Com que les taules són idèntiques per a cada dos signes del zodíac amb igual declinació, queden per calcular les corresponents a les longituds solars següents: 0º, 30º, 60º, 90º, 210º, 240º, 270º. Per tant, com hi ha 7 climes, resulten necessàries 49 taules. Ptolemeu només en presenta una, la que correspon al Clima I, el solstici d'estiu. En la taula es registren els valors dels 6 angles per a cada hora del matí i de la tarda.

En l'anàlisi de la taula cal tenir present el següent:

- Ptolemeu mai no empra angles obtusos. L'arc horari, per exemple, ha de mesurar-se unes vegades des de el punt nord i altres des del punt sud.

- No tots el nombres s'han conservat correctament. S'aprecia, però, que Ptolemeu arrodoneix a múltiples de 5 minuts.

- Drecker va estimar en 23' l'error mig de Ptolemeu respecte els seus càlculs. Només en quatre valors l'error sobrepassa d'un grau.

- No sembla tenir raó Commandino quan afirma que les 48 restants s'han perdut. Si Ptolemeu les hagués calculat totes, el nomograma seria superflu. Es tindrien tabulades totes les solucions i es podria conèixer la posició del Sol en qualsevol punt, llevat de les interpolacions.

Hem comparat els valors dels arcs que apareixen en aquesta taula ptolemaica segons la font utilitzada, amb els que apareixen a la de Baltasar de Torres recollida en el còdex *Barberinus Latinus 304*.

4.4.5 Comparació amb altres taules

4.4.5.1 La taula de Baltasar de Torres

És molt improbable que Baltasar de Torres fes cap càlcul per a obtenir els valors dels angles ptolemaics i omplís la taula corresponent.[52] Els valors que apareixen a la taula del còdex *Barberinus Latinus* són producte de la còpia que en va fer. I segurament, tal i com s'ha comentat, procedeixen de la pròpia traducció de Moerbeke. És la següent:

	Hect.	Horar.	Desc.	Merid	Vert	Horiz.
O – Sortida	24 15	65 5	90 0	0 0	90 0	24 15
1 11	25 15	69 15	75 10	35 15	<u>78 15</u>	20 0
2 10	<u>31 20</u>	73 0	60 55	59 5	60 0	18 50
3 9	<u>49 50</u>	<u>76 0</u>	<u>49 5</u>	72 10	45 5	17 15
4 8	60 10	79 10	31 0	78 30	30 10	18 0
5 7	75 0	81 20	<u>15 30</u>	81 30	15 10	27 0
Migdia	90 0	82 35	7 25	82 35	0 0	90 0

Taula que proporciona els sis angles de que determinen la posició del Sol al llarg de les hores del solstici d'estiu ($\lambda = 90°$) en un lloc situat al Clima I (el dia dura 13 h).

[52] Cal recordar que no havia entès el text.

4.4.5.2 Les diferències que apareixen en les taules segons la font

Les 7 diferències que hi ha en els valors de la taula de Torres respecte de les de Commandino, Heiberg, Neugebauer, Drecker i la meva, apareixen subratllades en la taula anterior, i es comparen en la següent:

Torres		Commandino		Heiberg		Neugebauer		Drecker		El meu càlcul	
31	20	34	20	31	20	31	20	34	1	34	0
49	50	46	50	46	50	46	50	46	34	46	33
76	0	77	30	76	0	76	0	77	28	77	29
49	5	46	5	46	6	46	10*	46	9	46	8
15	30	17	30	17	30	17	30	16	58	16	55
59	5	60	45	59	5	59	5	59	39	60	12
78	15	69	50	74	50	74	50	74	4	74	4

A l'hora d'interpretar les que hi ha entre la de Torres i la de Commandino es pot pensar en errors de còpia (1 per 4, 9 per 6, 5 per 7). No sembla que sigui el cas del 76 0 per 77 30, el 59 5 per 60 45 i el 78 15 per 69 50. Això es pot deure, si més no, a que Commandino ho recalcula tot. Commandino en la seva construcció dels rellotges de Sol no pren de l'*Analemma* els valors buscats numèricament sinó gràficament.

Hi ha moltes més coincidències entre Torres i Moerbeke/Heiberg, encara que hi ha alguna diferència deguda segurament a errors (el 9 per el 6, el 5 per el 7) de còpia. La més significativa i desconcertant és la de 78 15 per

74 50. No és possible atribuir a Torres tots els errors en el procés de copiar el manuscrit autògraf de Moerbeke. Sembla molt més probable que no en disposés i que copiès d'una còpia no identificada.

A la penúltima fila qui difereix en els càlculs és Commandino. La resta hi coincideixen en 59 5, però no amb el meu càlcul de 60 12.

A l'última fila sorprèn la quasi coincidència de Drecker amb Moerbeke,[53] l'error de Commandino i la dada tan esbiaixada de Torres.

Els valors que acompanyen els de Drecker són els obtinguts segons els meus càlculs, realitzats amb trigonometria esfèrica.[54]

---

[53] Ptolemeu arrodoneix a múltiples de 5'

[54] Veure la taula de la pàgina 19.

4.5 Aplicació de l'*Analemma*: el disseny de rellotges de Sol

4.5.1 Els fonaments

Ptolemeu no va proposar cap aplicació pràctica derivada de l'*Analemma*. Però per resoldre el problema que planteja n'hi ha prou amb introduir un dels tres sistema de coordenades. Endemés d'aspirar a l'elegància formal, la presència de tots tres ens fa pensar que tenia present algun objectiu ja introduït pels seus predecessors, com bé podia ser el de la construcció de rellotges. Commandino va escriure un tractat de rellotges de Sol juntament amb la seva versió llatina de l'*Analemma*. Valentino Pini publicà el 1598 l'obra "Fabrica de gl'horologi solari", on explica mètodes geomètrics per a la construcció de rellotges de Sol, fonamentats en l'*Analemma* ptolemaic. Aquí s'explicaran aquests tres rellotges de Sol que deriven de manera natural del tractat ptolemaic, tot seguint a Commandino i a Neugebauer.

Sigui Π el pla que rebrà l'ombra paral·lel a un dels plans horitzontal, meridià o vertical corresponents al punt de l'esfera terrestre que es consideri.

Es situa el gnomon perpendicular a Π de manera que un extrem G li pertanyi. Sigui O l'altre extrem.

Es considera el sistema de referència ortogonal XYZ següent:

Origen: O

Plans coordenats: els ptolemaics

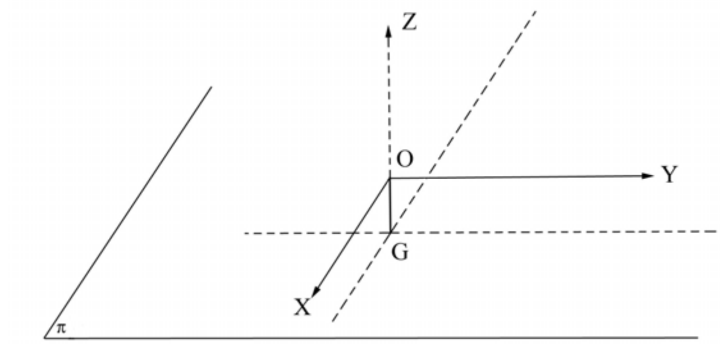


Figura 37: El sistema de referència i el pla del rellotge

Si el Sol està situat al punt H siguin (α, β) les coordenades esfèriques de H (α l'angle azimutal de H mesurat en el pla XY, i β l'angle polar respecte l'eix Z) i, per tant, un dels tres parells de coordenades ptolemàiques de H:

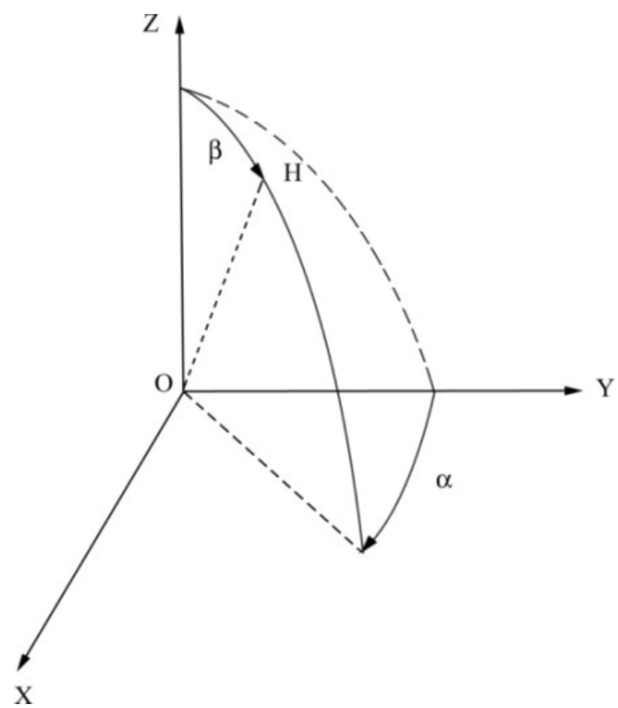


Figura 38: Coordenades del Sol

En el pla Π es dibuixa l'ombra GM del gnomon i el punt $\tilde{M}$ tal que $G\tilde{M} = GM$:

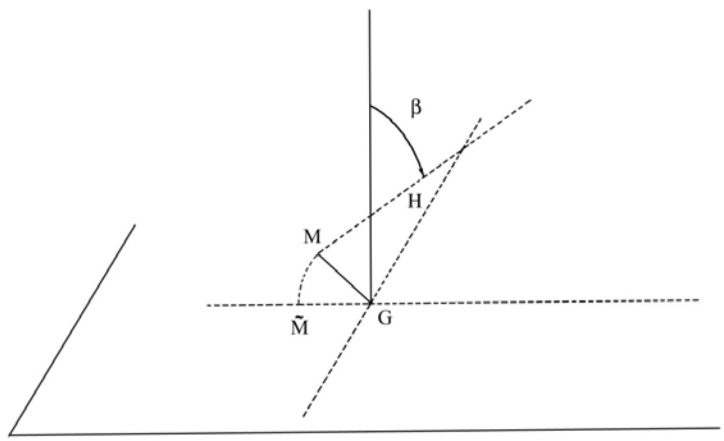


Figura 39: L'ombra del gnomon

En el triangle $OG\tilde{M}$, $G\tilde{M}$ és la mesura real de l'ombra si l'angle en O és β. La direcció de l'ombra ve donada per l'angle α.

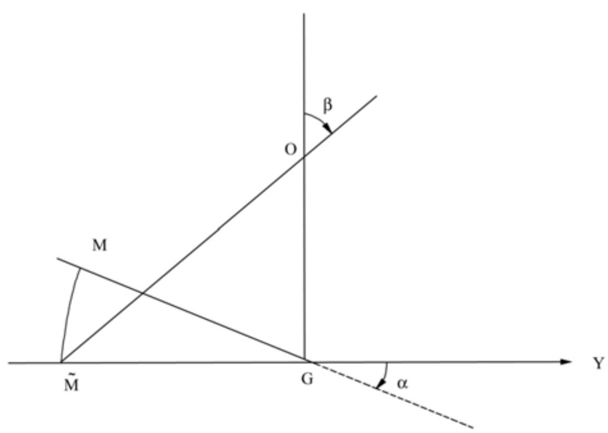


Figura 40: La direcció de l'ombra

4.5.2 El disseny dels tres rellotges

D'aquesta manera es poden construir les marques corresponents a tres tipus de rellotges que són els següents:

a) L' horitzontal

Pla del rellotge: l'horitzó

eix x: nord - sud

eix y: est - oest

α és l'angle horitzontal i β el descensiu

b) El meridià

Pla del rellotge: meridià

eix x: zenit - nadir

eix y: nord – sud

α és l'angle meridià i β l' hectemorus[55]

c) El vertical

Pla del rellotge: vertical

eix x: est – oest

eix y: zenit – nadir

α és l'angle vertical i β l' horari

L'extrem de l'ombra descriu una corba. En un lloc concret (latitud fixada) i en un dia qualsevol (és a dir per a una longitud determinada), al passar el

[55] Observi's que en aquest cas, cal marcar el pla del rellotge pels dos costats.

temps (és a dir, al variar les hores estacionals) l'extrem de l'ombra descriu una corba anomenada corba del dia. Per exemple per a $\lambda = 0°$ i $\varphi = 16,25°$ les corbes del dia obtingudes en cada cas són les següents:

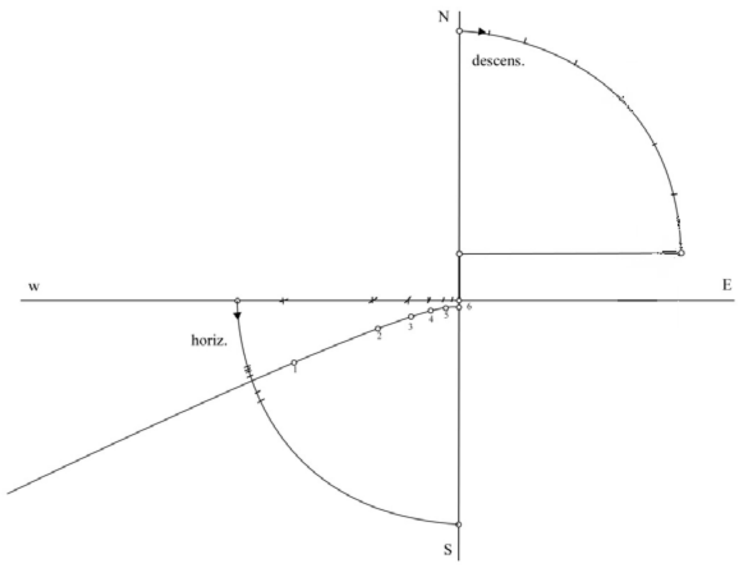


Figura 41: Rellotge Horitzontal. Corba del dia de l'equinocci de primavera ($\varphi = 16,25°$)

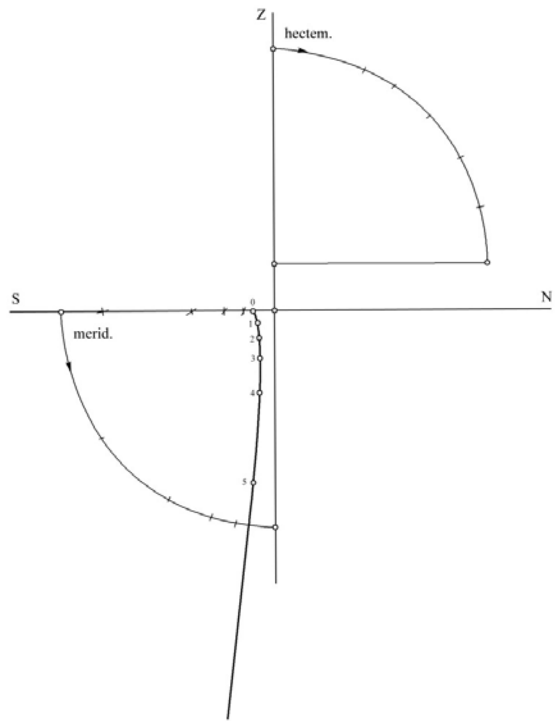


Figura 42: Rellotge Meridià. Corba del dia de l'equinocci de primavera ($\varphi = 16,25°$)

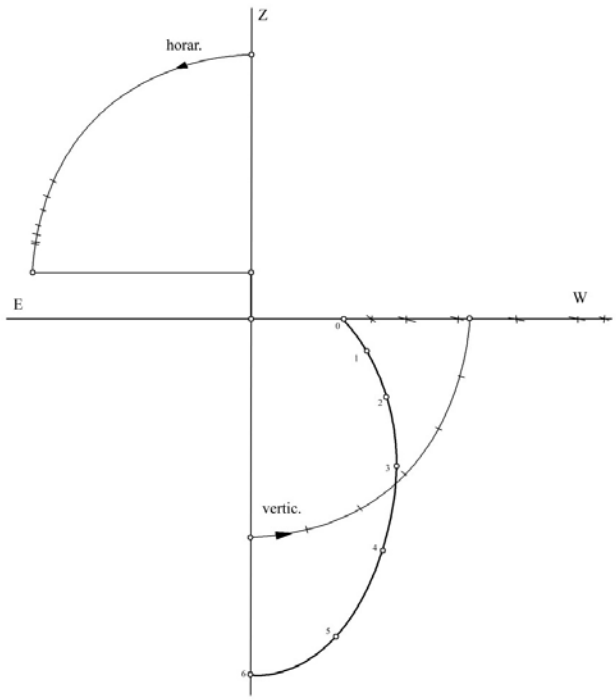


Figura 43: Rellotge Vertical. Corba del dia de l'equinocci de primavera ($\varphi = 16,25°$)

En un lloc concret, si es varia la longitud del Sol i es mantenen les hores constants s'obtenen les corbes - hora. Per exemple per a $\varphi = 42°$ (latitud aproximada de Barcelona) les corresponents al mes que comença l'equinocci de primavera, dibuixades en un rellotge horitzontal, són les que apareixen a la figura 44.

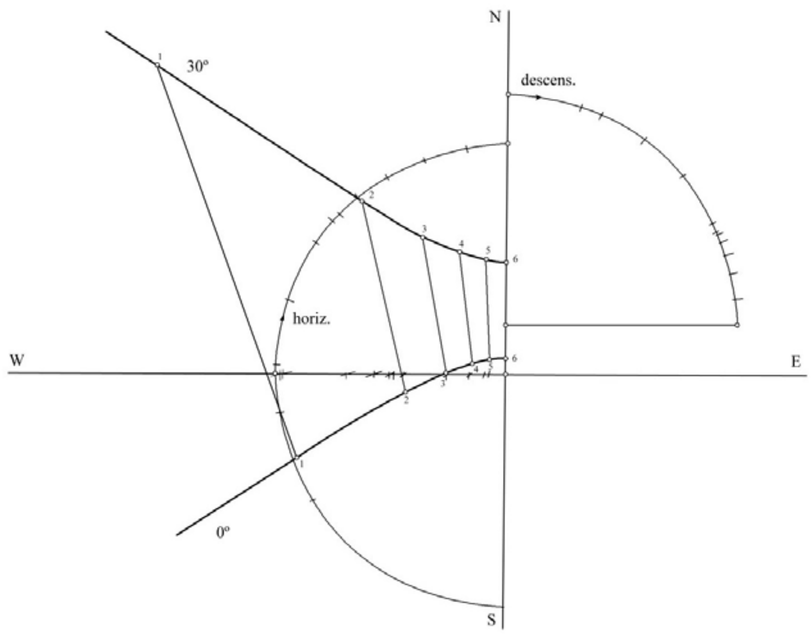


Figura 44: Rellotge Horitzontal. Corbes hora del mes que comença l'equinocci de primavera.

Per als punts que no són molt al nord de l'esfera terrestre, l'experiència mostra que les corbes - hora són pràcticament rectes. Això és molt útil per les comprovacions en el disseny del pla del rellotge. Tanmateix la teoria és menys simple i ha provocat discrepàncies: uns han pensat que eren rectes com en Commandino (Commandino 1562) i Delambre (Delambre 1814) al començament. Altres ho negaren com en Tha · bit b. Qurra (m.901), Ibrāhīm ibn Sinān (m.946), Maurolico (Maurolico 1575), Clavius (Clavius 1581), Settele (Settele 1816). La història del problema i la demostració definitiva les va fer Drecker (1925). Aquesta es pot aplicar a tots els rellotges de Sol plans ja que sols depèn de si les corbes - hora en l'esfera celest són cercles màxims o no.

Queda oberta la qüestió de saber fins a quin punt la teoria dels rellotges de Sol va ser desenvolupada en l'antiguitat més enllà dels fonaments que han arribat a nosaltres a través de l'*Analemma* de Ptolemeu.

5 La *Gnomonica* de Clavius

5.1 Clavius, primer gran matemàtic jesuïta

L'alemany Cristòfol Clavius (1538-1612) va néixer a Bamberg i molt probablement va estudiar en el col · legi que allà tenien els jesuïtes (Knobloch 1988). Ingressà a la Companyia el 1555 a Roma de la mà del propi Ignasi de Loyola. Les dificultats que travessà la Companyia entre 1555 i 1557 motivaren que fora enviat a estudiar a la Universitat de Coimbra el 1556. A aquesta ciutat el jesuïtes varen guanyar molta influència amb molt poc temps. Va ser tanta, que l'any 1555 disposaven dels recursos humans suficients com per obrir el seu propi col · legi. La influència jesuítica en la universitat citada va ser ben notable.

Pocs detalls es coneixen de l'experiència i l'estada de Clavius a Coimbra. No consta enlloc que estudiés matemàtiques malgrat que aleshores les ensenyava el brillant matemàtic i cosmògraf Pedro Nunes. Costa de creure, però, que no estigués molt influenciat per ell en aquesta època d'estudiant. Nunes no és esmentat en la llista de professors que el tingueren per alumne, publicada per Baldi (Baldi 1988). I tampoc no és fàcil identificar aquestes influències en els treballs que Clavius publicà més tard. Sí consta, en canvi, que va seguir allà cursos d'humanitats com a deixeble de dos jesuïtes, els espanyols Pedro J. Perpinyà i Cipriano Soares. L'agost de 1560 era encara a Coimbra, on observà un eclipsi total de Sol que va despertar el seu interès per l'astronomia. Probablement aquest mateix any va tornar a Roma.[56] El maig de 1561 figura en el llistat d'alumnes estudiants de física i metafísica del *Collegio Romano*, i el 1562 apareix com estudiant de teologia, i també el 1566, tot i que el 1564 era ordenat sacerdot. El 1563 començà a ensenyar matemàtiques al propi *Collegio Romano*, tot i que oficialment les va començar el 1566. Les ensenyà durant quaranta set anys, només interromputs durant quinze mesos entre 1595 i 1596. Però si Clavius va estudiar poques matemàtiques a Coimbra i dos anys després de la seva arribada a Roma el 1561 ja les ensenyava, ens queda l'interrogant de saber de qui les havia après. No pas de Torres que havia mort el mateix 1561, encara que és segur que va disposar de tot el seu material. Hi ha detectada una influència primerenca de la comunitat matemàtica de Bamberg en Clavius, a través de llibres d'aritmètica, astronomia i d'instruments astronòmics que van ser editats allà. Clavius marxà de Bamberg als setze anys i sembla que mai no hi va tornar (Lattis 2010).

Probablement cal inclinar-se davant la seva pròpia afirmació que era un autodidacta en matemàtiques. I que ho va ser a Roma, estudiant el material que més a mà tenia: el que havia reunit Torres al llarg dels quasi vuit anys que va exercir la docència de les matemàtiques al *Collegio Romano*, i també el que es trobava a la Sapienza, la universitat de la ciutat de Roma. Tanmateix és difícil comprendre que en tan poc temps estudiés la teologia i aconseguís una formació notable en matemàtiques sense acceptar que a Coimbra es dedicà

[56]Clavius visita Montserrat aquest any, probablement en el camí de retorn a Roma.

al seu estudi, de forma autodidacta o no.

Clavius va ser anomenat pels seus contemporanis com l'Euclides del segle XVI per la publicació el 1574 del seu treball principal, *Els Elements*, que no és una mera traducció al llatí del llibre d'Euclides. Recollí en aquest llibre una gran quantitat de notes procedents d'autors i edicions anteriors, i aportà crítiques i demostracions pròpies, diferents de les del propi Euclides. Clavius pretenia de fer-lo accessible als estudiants. Aquest text va tenir una llarga vida, va ser reeditat amb modificacions en nombrosos ocasions i va ser traduit al xinés el 1607. Ell va tenir una gran influència sobre els seus deixebles jesuïtes que van constituir la primera generació de matemàtics.

Si la influència de Pedro Nunes sobre Clavius és encara incerta, no pot dir-se el mateix de la de Francesco Maurolico (1494-1575). Quan Clavius començà la seva carrera com a professor de matemàtiques, l'ambient al *Collegio Romano* era favorable a Maurolico gràcies a la seva amistat personal i professional amb Baltasar de Torres (Scaduto 1949). El 1574 Clavius acudí a Messina, on el va conèixer, es va apropar a la seva variada obra, recollint-hi diversos escolis i demostracions que va incorporar al seu treball sobre *Els Elements* a punt de publicar-se, i també a la seva obra *Gnomonices libri octo* de 1581. També rebé de Maurolico un nombre considerable de manuscrits en diversos temes de matemàtiques que es troben en moltes de les posteriors publicacions de Clavius. Es convertí, doncs, Clavius en la persona que millor va valorar l'obra de Maurolico, i qui més va lluitar per completar la publicació de la seva obra el 1613.

Clavius treballà al llarg de la seva vida d'una manera molt intensa en molts camps de la matemàtica. Va ser el protagonista principal de la reforma gregoriana del calendari del 1582. I també va estudiar gnomònica, es a dir, l'art de construir rellotges solars. I ho faria estudiant els textos que tenia més a prop, entre els que hi figuren les lliçons sobre rellotges impartides en les classes de matemàtiques del *Collegio Romano* fins aleshores, i la còpia de l'*Analemma*, manuscrits de Torres que figuren en el còdex *Barberinus Latinus 304*.

La gnomònica era un tema que interessà a molts autors del Renaixement. Entre els estudiosos destaquem les figures d'Orontio Fineo, Sonerus, Sebastian Munster, G.B. Benito, Maurolico, Dante, Bimercatus i Pini. Però entre tots el més important és sens dubte Clavius. Va ser ell qui va escriure el primer tractat complet sobre gnomònica. L'obra *Gnomonices libri octo* ha servit d'inspiració a tots els autors que successivament han tractat sobre el tema, entre els que destaquen Athanasius Kircher (1602-1680) i Jacques Ozanam (1640-1718), i ja en el segle XX, Claudio Pasini. Clavius recull tots la doctrina dels seus antecessors i els seus mètodes originals, i els organitzà fent aportacions personals, especialment pel que fa a les demostracions dels resultats.

Clavius va escriure 23 llibres publicats entre 1570 i 1612. Hi ha llibres dedicats a l'aritmètica, geometria i àlgebra, comentaris a les obres d'Euclides i Teodosi, i d'altres dedicats a la gnomònica i l'astronomia, incloent-hi la problemàtica relacionada amb la resolució de triangles plans i esfèrics. El

1612 es publicà les seves obres completes (*Opera Mathematica*) dividida en cinc volums. En el pròleg d'una de les seves obres més importants, la seva edició i comentari als 15 llibres d'Euclides (*Euclidis elementarum libri XV commentarius*, 1574), Clavius assenyala la importància que tenia la geometria per comprendre la naturalesa, unint-se al corrent que creia que el coneixement de les matemàtiques és imprescindible per descriure els fenòmens naturals.

Una de les seves aportacions més importants a les matemàtiques serà el d'haver incorporat solucions numèriques a les demostracions geomètriques, la qual cosa realitzà ja en la seva obra *Gnomonica* (1581) i, particularment, en la presentació de l'*Analemma* de Ptolemeu com veurem més endavant.

5.2 La *Gnomonica* de Clavius

En el subtítol de l'obra, Clavius assenyala que no només vol demostrar les descripcions dels rellotges solars. Vol també demostrar altres conseqüències que es deriven de l'ombra del gnòmon.

En el prefaci Clavius justifica l'obra que presenta afirmant que tots els autors anteriors, antics i moderns, han transmès la sola pràctica de com construir rellotges sense aportar cap demostració. I si alguns han intentat fer-ne cap, ho han fet breument i de maneres fosques, de forma que el lector no pot percebre la utilitat de les seves elucubracions. Davant d'aquesta situació afirma que diferents persones de gran ingeni li demanaren que es dediqués a l'estudi i treball de la gnomònica. Així presenta no només els càlculs necessaris per conèixer l'hora que és en qualsevol superfície plana, sinó també moltes altres que pertanyen al moviment del Sol en el cel, tot presentant les demostracions amb la màxima claredat.

Clavius cita els autors d'obres sobre rellotges que ha pogut consultar. El primer és Vitruvi, al qual critica que només es limités a indicar com es construeix un rellotge i no a ensenyar-lo. Qualifica d'agudíssim l'*Analemma* de Ptolemeu, citant els comentaris de Commandino i el seu desenvolupament d'un tractat sobre rellotges. Altres autors que cita són Pedro Nunes, qui demostra de quina manera poden ser descrits els rellotge horitzontal i vertical en el seu llibre *Sobre els errros d'Oronci*, Oronci Fineo, Joan Conradus Ulmerus, Joan Baptista Bimercatus, Andreu Sonerus, Joan Paduanius, Pedro Rodrigo Hispano, Francesco Maurolico i la seva obra *De les línies horàries*, Joan Baptista Benito i la seva obra *El gnòmon i les ombres*.

El tractat de *Gnomonica* de Clavius està estructurat en vuit llibres:

En el primer llibre comença amb la construcció de l'analemma. Afirma que va ser inventat pels antics i és la base i el fonament de quasi tot el que es demostrarà a l'obra. El defineix com "certa figura circular al voltant del centre del meridià o d'algun altre cercle màxim que passi pels pols del món, i que conté descrita en el seu pla les seccions comunes dels cercles principals de l'esfera (que són l'equador i els seus paral · lels, l'eclíptica, l'horitzó i el vertical [primer]) i meridians o cercles màxims que passen pels pol del món". Conté les demostracions de diferents problemes i teoremes que fan referència a l'analemma, a les seccions còniques, als cercles horaris, a les interseccions comunes de les línies horàries, a les declinacions i inclinacions dels plans.

En el segon dels llibres tracta els mètodes de descriure rellotges horitzontals, verticals meridians, polars i equinoccials.

En el tercer explica com es poden dibuixar els rellotges que declinen a partir del primer vertical, o de l'horitzó, o s'inclinen cap l'horitzó, o al mateix temps declinen del vertical i s'inclinen vers l'horitzó.

En el quart llibre tracta dels rellotges en una esfera recta i molt obliqua que té el pol com a vèrtex. També explica com es col · loca l'*stylus* en el rellotge.

En el cinquè ensenya amb quins procediments i càlculs es componen certes taules amb les quals després es construeixen fàcilment.

En el sisè explica l'*Analemma* de Ptolemeu i al mateix temps l'obra de

Federico Commandino sobre la descripció dels rellotges. I descriu també un camí més fàcil per construir els rellotges declinants i inclinants que el que va mostrar Commandino. I també assenyala el que s'ha de saber per, a partir d'un rellotge horitzontal, descriure un segon rellotge amb un *stylus* de qualsevol magnitud, sempre que sigui coneguda la declinació.

En el setè es repeteixen les principals descripcions de les hores que van ser tractades en els llibres segon i tercer, però sense les demostracions. Van adreçades als poc iniciats que vulguin construir directament qualsevol rellotge. Finalment a l'octau tracta de certs rellotges universals que s'acomoden a qualsevol altitud del pol, i també dels que només serveixen per una determinada altitud.

Clavius va afegir molts escolis a una multitud de proposicions. Clavius afirma que ho ha fet per respecte al lector, evitant-li demostracions massa llargues. Afirma que en ells s'expliquen qüestions que faciliten la comprensió de la demostració d'una proposició, o bé serveixen per investigar per altres camins allò que es demostrà en les proposicions, o bé proposà alguna cosa nova, no allunyada d'allò tractat.

En les demostracions utilitza els *Elements* d'Euclides i els escolis de la seva pròpia edició, les còniques d'Apol·loni Pergeo, segons l'edició de Federico Commandino, i l'esfera de Teodosi, segons l'edició del propi Clavius. Utilitzà també els llibres sobre triangles de Regiomontanus, *De Triangulis omnimodis*, de *Triangles esfèrics* de Gebro Hispalensi Àrab, i el seu propi llibre (no publicat) sobre triangles esfèrics que amb Teodosi i amb el tractat i taula dels sinus apareixerien reunits tot seguit en un volum "molt necessari per tota astronomia".

Afirma finalment que els rellotges descrits han estat pensats d'acord amb la latitud de Roma, malgrat que les regles serveixen per a qualsevol latitud.

En els escolis del segon i tercer llibres, i en tot el sèptim, ensenya de quina manera, a partir de la grandària de qualsevol gnòmon donat, es descriuen els rellotges, cosa que ningú abans que ell havia mostrat, excepte Federico Commandino qui el va descriure de la mateixa manera però per la via de l'*Analemma* i no pel mètode que normalment feien servir la major part dels fabricants de rellotges.

En els llibres segon i tercer anuncia que presentarà un mètode nou, basat en el cilindre, per descriure les hores en qualsevol pla, en el que es poden dibuixar còmodament les hores i les parts de les hores.

5.3 El llibre VI de la *Gnomonica* de Clavius

Clavius dedica el Llibre VI de la *Gnomonica* de 1581 a l'*Analemma* de Ptolemeu. Encara que no la cita, molt probablement disposava i coneixia la còpia que havia realitzat Baltasar de Torres continguda en el seu manuscrit que era al *Collegio Romano* on Clavius ensenyava matemàtiques des de 1563. En canvi cita i demostra haver estudiat la reconstrucció que feu Commandino de l'obra ptolemaica, qui afegí les aplicacions de l'*Analemma* al càlcul dels rellotges horitzontal, meridià i vertical. Clavius incorporà a la seva obra *Gnomonica* una versió pròpia de l'*Analemma*. Justifica el seu treball a causa de la desconfiança que la major part del estudiosos coetanis tenen envers l'obra i també envers la pròpia reconstrucció de Commandino, especialment pel que fa referència als fruïts que puguin ser obtinguts amb ella. De fet, després de remarcar la grandesa del seu enginy i la subtilesa de les demostracions que presenten, retreu a Ptolemeu i Commandino de promoure una certa foscor:

"El sisè [llibre de la *Gnomonica*] explica l'*Analemma* de Ptolemeu, i al temps l'obra de Federico Commandino sobre la descripció dels rellotges, del que es dedueix (si no m'enganyo) que l'ús de l'*Analemma* assoleix major extensió de la que va ser confiada per Ptolemeu als monuments literaris. (...) En les demostracions aportarem testimoni d'Euclides i els seus escolis, segons la nostra edició, d'Apol · loni Pergeo sobre els elements cònics segons l'edició de Federico Commandino, i de Teodosi sobre els elements esfèrics segons la nostra edició. Aportaré també els llibres sobre triangles de Juan de Regiomonte, de Gebro Árabe Hispalense sobre triangles esfèrics, que con Teodosi i amb el tractat i taula dels sinus apareixeran reunits en breu en un volum molt necessari per a tota astronomia. (...) en molts casos no he tingut cap guia a qui poder seguir d'alguna manera, i les demostracions quasi totes van ser pensades per mi fa poc, com fàcilment apreciarà qui vulgui comparar aquesta nostra Gnomonica amb les horolografies d'altres."

L'aportació que Clavius farà a l'*Analemma* consistirà en desenvolupar el tercer fragment del text de Ptolemeu, qui assenyala la trajectòria a seguir per tal de calcular els sis angles amb molta precisió, utilitzant les taules de cordes. Com ja s'ha comentat, Ptolemeu demostra en els capítols 9 i 10 la calculabilitat dels angles pel mètode que anomena geomètric, i que comprèn tot el rigor matemàtic possible. Tanmateix a partir del capítol 11 defensa que l'obtenció del valor numèric dels angles que hi proposa es pot obtenir més fàcilment pel procediment de l'analemma que anomenem gnomogràfic. Dedica el quart fragment a explicar-lo molt detalladament. Clavius, qui té a Euclides com a referència metodològica màxima, no inclou aquest mètode en la seva obra, segurament perquè es fonamenta en exercicis de càlcul gràfic realitzats sobre un objecte material. I endemés, afirma que la seva aportació farà més breus els càlculs numèrics que havia fet el propi Ptolemeu. Consistirà en la utilització de la resolució de triangles plans i esfèrics que, fins aleshores, no havia estat introduïda en el text ptolemaic.

Clavius estructura el llibre VI de la següent manera:

- Capítol I (introducció): explicació dels cercles i circumferències que

Ptolemeu considera centrals a l'*Analemma*.

- Capítol II: construcció dels sis arcs quan el Sol és a l'equador i per a qualsevol latitud.
- Capítol III: demostració dels teoremes apareguts en el capítol anterior.
- Capítol IV: construcció dels sis arcs en el cas més general.
- Capítol V: demostració dels teoremes apareguts en el capítol IV.
- Capítol VI: divisió de l'analemma en hores per tal de construir els sis arcs i, a partir d'ells construir els rellotges horitzontal, vertical i meridià.
- Capítol VII: construcció dels sis arcs a partir de la doctrina dels sinus, qual el Sol sigui a l'equador o en altre paral·lel qualsevol, i per a qualsevol latitud.
- Capítol VIII: construcció dels sis arcs geomètricament a partir de l'analemma, i numèricament a partir de la doctrina dels sinus, estigui el Sol a l'equador o en altre paral·lel qualsevol, en un punt de latitud 0 (Clavius anomena "in sphaera recta" aquest cas).
- Capítol IX: construcció del rellotge horitzontal, vertical i meridià a partir dels sis angles esmentats.
- Capítol X: sobre els rellotges declinants.

El capítol I correspon als capítols 1 al 5 del text de Ptolemeu. Els capítols II i III als capítols 6 i 7, en el que Clavius afegeix les demostracions per tots els arcs, mentre que Ptolemeu només havia fet la corresponent a l'hectemorus. Els IV i V corresponen al 8, i també inclouen totes les demostracions. Tota aquesta part la vertebra en torn del text ptolemaic seguint el desenvolupament explicatiu que en va fer Commandino, el text del qual té molt a prop, figures incloses. El capítol VI és l'únic que es pot vincular al quart fragment de l'*Analemma*. Hi explica la manera de dividir l'arc solar diari en hores iguals. Els VII i VIII corresponen als 9 i 10 ja comentats. El IX es correspon amb l'aplicació a la construcció de rellotges que en va fer Commandino. En l'escoli del capítol X construeix un rellotge qualsevol a partir d'un horitzontal.

En el capítol VI Clavius introdueix el concepte d'hores iguals. Està inspirat en la part corresponent al càlcul gnomogràfic a través de l'*Analemma*. Ptolemeu considerà en tots els casos hores desiguals per determinar els valors numèrics dels arcs. Tanmateix, Clavius divideix qualsevol paral·lel solar en vint i quatre hores iguals, fent coincidir una de les senyals horàries amb l'inici del dia. La numeració assignada dependrà del tipus de rellotge utilitzat (cada tradició considera l'inici del dia en moments diferents).

La innovació més important que Clavius introduí en el text ptolemaic es troba a partir del capítol VII. Es proposa explicar el text de manera més clara per tal de facilitar la seva comprensió i permetre de realitzar el càlcul "per números" dels sis arcs de manera molt més breu que Ptolemeu. Aquest havia assenyalat en el seu text el camí rigorós que caldria seguir per fer els càlculs numèrics si es volgués respondre a l'ideal matemàtic. Camí que, cal dir, seria prou llarg de desenvolupar amb les eines de càlcul de les quals disposava, que no eren més que les taules de cordes, el teorema de Pitàgores i la proporcionalitat dels costats de triangles semblants. Tanmateix proposa, per raons pràctiques, la conveniència de fer-los de manera molt més còmoda a través de l'analemma seguint el mètode gnomogràfic que desenvolupa exhaustivament. Clavius, però, destaca les dificultats amb les que es trobarà qui intenti seguir aquest mètode:els errors que s'esdevindran en el traçat de les moltes rectes perpendiculars requerides i la divisió del fragment de paral · lel solar corresponent a l'arc semidiürn en sis parts iguals (el problema de la trisecció d'un angle).

Afirma que el mètode numèric que ell descriurà no necessita de tantes multiplicacions i divisions com el suggerit per Ptolemeu. Introduirà per primer cop en la història de l'obra les eines de la resolució de triangles en el càlcul dels sis angles. I es tracta de la primera aplicació pràctica dels coneixements de la resolució de triangles, fora dels propis tractats sobre triangles, que es va fer a una obra publicada per iniciativa del *Collegio Romano*.

El càlcul numèric dels sis angles ptolemaics és tractat explícitament per Clavius de dues maneres: primer a partir de la resolució de triangles plans i després a partir de triangles esfèrics.

5.4 La trigonometria i la resolució de triangles en l'obra de Clavius del 1586

El llibre *Theodossi Tripolitae Spahericorum libri III, a Christophoro Calvio...illustrati* consta de quatre parts. Va ser publicat el 1586. En la primera introdueix l'obra de Teodosi[57] sobre les esfèriques, un conjunt de 3 llibres on es recullen les propietats de l'esfera. La segona la intitula *Sinus, Vel Semisses Rectarvm in circulo subtensarum. Lineae tangentes, atque secantes.* Introdueix un conjunt de definicions bàsiques (angles complementaris, corda d'un cercle), les que giren al voltant del sinus (rectus, versus, complementi, totus), i un conjunt de proposicions explicatives i introductòries a la taula del sinus. Segueix, com ell mateix escriu, a Purbachius, Regiomontanus i Petrus Appianus. A continuació es dóna la taula dels sinus. Després introdueix la secant i la tangent i les corresponents taules.

La tercera part correspon a l' estudi de la resolució dels triangles plans, *Triangula Rectilinea.* A la introducció Clavius cita a Regiomontanus, Copèrnic, Geber,[58] Menelaus i Maurolico.

[57] Teodosi de Bitínia (s. II-I a.C.)

[58] Es tracta del nom llatinitzat del sevillà Jābir ibn Afla (c. 1100-c1160). Fou matemàtic i astrònom. Va ser un crític i corrector de l'astronomia de Ptolemeu i va fer aportacions a la resolució de triangles esfèrics. Demostrà diverses fórmules de manera original i introduí nous teoremes, un dels quals se'l coneix amb el nom del teorema de Geber (en un triangle rectangle esfèric ABC, amb B recte, es compleix que $\cos C = \sin A \cdot \cos c$). La seva obra va ser publicada el 1543 a Nuremberg. Tot i que no ocupa un preeminent entre els grans matemàtics àrabs, és molt important en el desenvolupament de les matemàtiques ja que la seva obra va ser traduïda al llatí per Gerard de Cremona (cosa que no va succeí amb el gran matemàtic Abu'l Wafa). Sembla que Regiomontanus copià parts del treball d'Aflah en el quart llibre del seu *De Triangulis*, escrit el 1460 i publicat el 1553. Aquest llibre va suposar la sistematització de la resolució de triangles (Lorch 1990).

En el prefaci d'aquesta obra, Clavius afirma que usant el sinus, la tangent i la secant es poden resoldre tots els triangles, tant els plans com els esfèrics:

"L'ús dels sinus de les línies tangents i secants consisteix principalment en la doctrina dels triangles, tant rectilinis com esfèrics; ja que tots els astrònoms, al investigar o explicar els moviments celestes, indaguen en triangles, amb l'ajut dels sinus de línies tangents i secants, sigui els costats a partir dels angles coneguts, sigui també els angles a partir dels costats coneguts. La qual cosa resulta evident en el Epítome de Ioan[nes] Regiom[ontanus] sobre l'Almagest, o gran construcció de Ptolemeu, en l'obra de Copèrnic sobre les revolucions celestes, i en altres escrits d'astrònoms. Per la qual cosa, havent conclòs el tractat dels sinus de les línies tangents i secants, ens demana la lògica que, amb totes les nostres forces, exposem aquesta ciència dels triangles, difusament explicada por Joannes Regiom[ontanus] en cinc llibres, i ensenyada per Geber l'àrab sevillà, i inclús per Nicolàs Copèrnic, certament en forma breu, però de manera un xic fosca; donat que la seva utilitat és increïble, tant per entendre o investigar correctament tots els camps matemàtics, com especialment els moviments celestes i els camps que dependent d'ells, segons ja hem dit, i inclús pot en part deduir-se també de la nostra Gonomonica, en la que moltes coses relatives als rellotges les hem demostrat a partir de triangles. Començarem, doncs, amb els triangles rectilinis, com més fàcils, i d'ells només demostrarem allò que jutgem ser necessari per comprendre correctament els camps astronòmics i geomètrics. Qui desitgi més, llegeixi a Menelaus i Maurolico sobre triangles esfèrics, i sobre rectilinis, Ioannes Regiomontanus. Pero, abans de res, ha d'explicar-se a què ha de prendre's la quantitat dels angles rectilinis."

Cita com a referència als autors i obres següents:

- *Epitom de Regiomontanus* sobre *l'Almagest*
- *De revolutionibus celestibus*, de Copèrnic, qui va ser alumne de Regiomontanus.
- *Triangulorum de Joanne Regiomontanus*
- *Gebro Hispalensi Arabe*
- *Nicolas Copernico*
- *La Gnomonica* de Clavius (1581)
- *Menelaum & Maurolycum: De Sphaericis Triangulis*
- *De rectilineis vero Ioannem Regiomontanum.*

El contingut consta de 13 proposicions, repartides en 4 teoremes i 9 problemes, que tot seguit presentem:

Teorema 1. Proposició 1. [Teorema dels sinus]

En tot triangle rectilini, dos costats qualsevol tenen la mateixa proporció que els sinus dels angles oposats a ells.

[Distingeix els casos de triangle rectangle, acutangle i obtusangle.]

[Triangles rectangles]

Problema 1. Proposició 2.

Donat un costat junt amb un angle agut d'un triangle rectangle, o bé junt amb la proporció entre dos angles qualsevol; obtenir els altres dos costats i esbrinar la proporció de dos costats qualssevol.

- Resoldre el triangle rectangle del que es coneixen b i C.

  Ho fa aplicant el teorema del sinus i partint de b = 100.000 per aplicar la taula, usant la secant i la tangent.

- Resoldre el triangle del que es coneixen a i C.

Problema 2. Proposició 3.

Donats dos costats d'un triangle rectangle, donar a conèixer els dos angles aguts i el tercer costat. Així mateix, donada la proporció de dos costats, i donat a més un costat qualsevol, obtenir els dos angles aguts amb els altres dos costats.

Usar sinus, tangent i secant.

- Resoldre el triangle b i c (hipotenusa i un catet)

- Resoldre: c i a (dos catets, usant tangent i secant; usant el sinus)

- a, b, c

Teorema 2. Proposició 4.

Si un diàmetre d'un cercle talla en dues parts una corda qualsevol i al seu corresponent arc, els segments de la corda estaran en la mateixa proporció que els sinus dels corresponents segments d'arc.

És el teorema que Zeller anomena el teorema de Clavius.

Teorema 3. Proposició 5.

Si en un cercle la corda d'un arc qualsevol es perllonga vers un costat i es troba amb un diàmetre qualsevol perllongat vers aquest mateix costat; serà la mateixa la proporció de tota la corda perllongada respecte al seu segment exterior, que la del sinus de l'arc entre el punt per el que s'ha perllongat el diàmetre i l'extrem més allunyat de l'esmentada corda, respecte al sinus de l'arc entre el mateix punt de diàmetre i l'extrem més pròxim de la mateixa corda.

Problema 3. Proposició 6.

Donada l'addició de dos arcs, cadascun dels quals és menor que un semicercle, o de dos angles rectilinis, la qual sigui o menor o major que 180 graus, junt amb la proporció en que estan els seus sinus; donar a conèixer cadascun d'ells en particular.

Problema 4. Proposició 7.

Donada la diferència de dos arcs, cadascun d'ells menors d'un semicercle, o de dos angles rectilinis, junt amb la proporció en que estan els seus sinus; esbrinar cadascun d'ells en particular (utilitza la tangent).

[Triangles qualssevol]

Teorema 4. Proposició 8.

Si des de l'angle d'un triangle comprès entre dos costats desiguals qualssevol es traça una línia perpendicular a la base, amb la condició que caigui dins del triangle, el major dels costats que formen l'esmentat angle al quadrat serà major que el quadrat del major, amb el rectangle comprés sota la base i la diferència entre els segments produïts per la perpendicular; però en el cas que caigui fora del triangle, el quadrat del costat major serà major que el quadrat del major amb el rectangle comprés entre la base i la línia recta que es compon a partir de la base i el doble de la línia exterior entre la perpendicular i l'angle del triangle.

Problema 5. Proposició 9.

Si a partir d'un angle d'un triangle qualsevol de costats coneguts es traça una perpendicular al costat oposat, esbrinar quanta serà la recta compresa entre la perpendicular i cada un dels altres dos angles [vèrtexs].

Problema 6. Proposició 10.

Donats tots els angles d'un triangle no rectangle, o donades les proporcions entre ells, junt amb un costat, obtenir els altres dos costats i esbrinar la proporció entre dos qualssevol.

Problema 7. Proposició 11.

Donats tots els costats d'un triangle no rectangle, o les seves proporcions, esbrinar tots els angles.

Problema 8. Proposició 12.

Donats dos costats d'un triangle no rectangle, junt amb l'angle comprés entre ells, calcular el tercer costat i els altres dos angles.

Aquí utilitza la fórmula:

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2} - b}{\tan(\frac{A+B}{2} - B)}$$

Problema 9. Proporció 13.

Donats dos costat d'un triangle no rectangle, o donada la proporció entre ells, junt amb l'angle oposat a un o altre dels costats, buscar els altres dos angles i el tercer costat [o la seva proporció?!]. Però si l'angle donat és agut, és necessari indicar si l'angle oposat a l'altre costat és agut o obtús.

La quarta part del Teodosi la dedica Clavius a la resolució de triangles esfèrics, *Triangula Sphaerica.*

Les fórmules de la trigonometria esfèrica, que permeten resoldre els diferents casos de triangles esfèrics, que Clavius inclou i demostra en aquesta obra són les següents:

- El teorema dels sinus per a un triangle qualsevol (Proposició 41):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

- Per a triangles rectangles, suposant sempre que C = 90°, demostra:

  1. El teorema del cosinus pels costats: $\sin A = \frac{\cos B}{\cos b}$ (proposició 42).
  2. El teorema de "Pitàgores", cas particular del teorema del cosinus pels angles: $\cos c = \cos a \cos b$ $(a, b, c \neq 90°)$ (proposició 43).

- Per a triangles rectangles, suposant que (a, b, c = 90º), demostra:

  1. El teorema de la tangent: $\sin a = \frac{\tan b}{\tan B}$ [s'obté multiplicant el dos primers membres del teorema del sinus pels el del teorema del cosinus.] (proposició 44) [les proposicions 48 i 49 són similars a aquesta]
  2. $\cos A = \frac{\tan b}{\tan c}$ (proposició 45) [la 46 i la 51 són similars a aquesta]
  3. $\cos A = \frac{1}{\tan A \tan B}$ (proposició 47) [la proposició 50 és similar a aquesta]

- Fent servir la secant i la cosecant [= 1/ sinus] enuncia la proposició 52 (similar a la 42), la 53 (similar a la 43), les 54 i 55 (similars a la 41), i la 56 (similar a la 42).

  Pel que fa a la resolució de triangles esfèrics, distingeix els casos següents:

Cas que el triangle sigui rectangle en C:

1. Donats c, a, calcular A.
2. Donats c, a, calcular a. Utilitza la proposició 41.
3. Donats a, A, calcular c. Utilitza la proposició 41.
4. Donats A, B, calcular a, b, c. Utilitza les proposicions 54 i 52.
5. Donats a, B, calcular A, b, c. Utilitza la proposició 42.
6. Donats a, A, calcular B, b, c. Utilitza la proposició 42.
7. Donats a, b, calcular c, A, B. Utilitza la proposició 43.
8. Donats c, a, calcular b, A, B. Utilitza les proposicions 43 i 53.
9. Donats a, B, calcular b, A, C. Utilitza la proposició 44.
10. Donats a, A, calcular b, B, c. Utilitza les proposicions 44 i 49.
11. Donats a, b, calcular A, B, c. Utilitza les proposicions 44 i 48.
12. Donats a, B, calcular c, A, b. Utilitza les proposicions 45 i 46.
13. Donats a, c, calcular B, b, A. Utilitza les proposicions 45 i 51.
14. Donats a, C, calcular b, a, B. Utilitza la proposició 45.
15. Donats c, A, calcular B, a, b. Utilitza la proposició 47.
16. Donats A, B, calcular c, a, b. Utilitza la proposició 50.

    Cal d'un triangle esfèric no rectangle qualsevol:

17. Donats A, B, C, calcular a, b, c. Utilitza la proposició 62.

18. Donats a, b, c, calcular A, B, C. Utilitza la proposició 61.

19. Donats a, b, C, calcular c, A, B. Utilitza la proposició 64.

20. Donats A, B, c, calcular a, b, C. Utilitza la proposició 65.

21. Donats A, B, a, calcular b, a, A. Utilitza la proposició 66.

22. Donats a, b, A, calcular A, B, a. Utilitza la proposició 67.

5.5 Les fonts del càlcul de triangles plans que Clavius utilitza en la seva *Gnomonica* per calcular els sis angles de l'*Analemma* amb la trigonometria plana i l'esfèrica.

Mentre fa servir la trigonometria plana pel càlcul dels sis angles ptolemaics no cita cap obra de referència (en la introducció havia citat a Regiomontanus, Geber, Menelaus i Maurolico). Però, com succeirà més tard amb els triangles esfèrics, és segur que utilitzaria la seva pròpia obra *Triangula Rectilinia* que tenia escrita, però que no es va publicar fins el 1586.

En el pròleg de *Triangula Sphaerica*, Clavius cita a quatre autors, Menelaus, Geber, Regiomontanus i Maurolico, i tres obres que fonamenten les fórmules de la trigonometria esfèrica que emprarà:

1. *De triangulis omnimodis*, de Regiomontanus, escrita el 1464 i publicada a Nuremberg el 1533. Consta de cinc llibres. Els primers quatre llibres (1462-ca 1463) contenen una trigonometria del sinus amb molts afegitons propis i millores metòdiques importants en comparació amb els treballs i teoremes dels seus antecessors àrabs i jueus (sobre tot Al-Fargani, Jābir ibn Aflah i Levi ben Gerson) als quals coneix per les traduccions de Plató de Tivoli i Gerard de Cremona. Cap a 1464 Regiomontanus escriu el llibre V que no és més que una col · lecció de qüestions conegudes en les que emprà també la tangent. *Las Tabulae Directionum* (1464-1467) conté una taula de tangents de grau en grau,

amb cinc xifres i una subdivisió decimal, que és quelcom d'excepcional en aquell moment. Tal i com s'ha indicat, aquesta obra havia entrat al *Collegio Romano* de la mà de Baltasar de Torres, segons consta en la llista de llibres que apareix en el còdex *Barberinus Latinus 304*.[59]

L'ordenació que Clavius fa de les fonts, repetida en cada proposició, respon segurament a l'ordre cronològic de publicació (encara que la seva no ho estigués; manuscrita, seria usada a les seves classes al *Collegio Romano*. També aquí únicament utilitza el sinus rectus, els sinus versus i els sinus totus).[60]

2. El *llibre I de l'Astronomia* de Geber. Aquesta obra d'Aflah té nou capítols (llibres) i es publicà formant part de l'obra *Instrumentum primi mobilis a Petro Apiano. Accedunt iis Gebri Filii Aflah hispalensis..." Libri IX de astronomia..." per Girardum Cremonensem latinitate donati*. Va ser a Nuremberg el 1534.

3. L'obra comentada del propi Clavius, que no va ser publicada fins el 1586, *Triangula Sphaerica* inclosa en l'obra *Theodossi Tripolitae (s. I. a.C.), Sphaericorum libri III, a Chistophoro Clavio...illustrati; que inclou també "sinus lineae tangentes et secantes"*.

[59]Regiomontanus va ser acusat per Cardano d'haver copiat el capítol quart, referit als triangles esfèrics, de l'obra de Jābir b. Aflah. Samsó opina que probablement aquesta obra és la font bàsica de l'obra de Regiomontanus, la qual cosa constitueix només un dels múltiples exemples de la influencia de Jābir en l'astronomia del Renaixement. Consultar Samsó (1992).

[60]Tot i no fer servir cap altra raó trigonomètrica, introduí i utilitzà la tangent i la secant en les proposicions 57-61 de *Triangula Sphaerica.*

5.6 Teoremes de la trigonometria esfèrica que Clavius utilitza en els càlculs dels angles ptolemaics

- El teorema del sinus per triangles esfèrics qualssevol. Figura com la proposició 41 de la seva obra *Triangula Spherica*:

In omni triangulo sphaerico sinus cuius liber arcus ad sinum anguli, quem subtendit, eandem habet proportionem, quan sinus utriusque reliquorum arcuum ad sinu anguli, quem subtendit.

Abans de citar-la, esmenta les equivalents en les fonts anteriors: la proposició 17 del llibre 4 de Regiomontanus[61] i la proposició 13 del llibre d'Aflah.

Clavius no introdueix una proposició diferent per al cas particular de triangles rectangles, i tampoc Aflah, però si que ho va fer Regiomontanus (proposició 16 del llibre 4).[62]

Aquesta proposició la utilitza per calcular els angles horitzontal, horari i vertical.

- El teorema del cosinus per a triangles esfèrics rectangles,[63] enunciat per als sinus dels complementaris dels costats. Apareix com la proposició 43 de la

[61]Regiomontanus l'enunciava així: *In omni triangulo rectangulo omnium laterum sinus ad sinus angulorum, quos subtendum, eadem est proportio.*

[62]*In omni triangulo rectángulo omnium laterum sinus ad sinus angulorum quos subtendunt, eadem est proportio.*

[63]Es tracta d'un cas particular de l'anomenat primer teorema del cosinus per a triangles esfèrics qualssevol:

$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$

mateixa obra:

In omni triangulo sphaerico rectangulo, cuius nullus arcuum quadrants sit, sinus complementi arcus rectum angulum subtendetis ad sinum complemeni utriusque reliquorum arcuum eandem habet proportionem, quam sinus complementi reliqui arcus ad sinum totum.

Com assenyala Clavius, correspon a la proposició 19 del llibre 4 de Regiomontanus[64] i a la 15 del llibre I de Gebri.

Aquest teorema Clavius l'utilitza pels altres tres angles.

En tot el càlcul no utilitza, però, l'anomenada proposició 42 del seu llibre de triangles esfèrics:

In omni triangulo sphaerico rectangulo, cuius nullus arcuum quadrants sit, sinus vtriusliber reliquorum angulorum eandem habet proportionem ad sinum totum, quan sinus complemente reliqui anguli ad sinum complementi arcus ipsum subtendentis.

Correspon al teorema de Geber per a triangles rectangles.[65]

En la proposició 62 de la mateixa obra, Clavius resol el triangle esfèric qualsevol coneguts els tres angles. Ho fa a partir d'anar construint triangles

[64] *In omni triangulo, cui unicus est rectus angulus, sinus complementi lateris rectu subtendentis angulu ad sinu complementi alterius rectum ambientiu, eam habet proportionem, qua sinus complementi reliqui lateris ad finum quadrantis.*

[65] Aquest teorema s'enuncia actualment de la següent manera: si ABC és un triangle rectangle en B, aleshores el sinus d'un dels altres vèrtex, per exemple C, és igual al quocient entre $\cos A$ i $\cos a$. Es tracta d'un cas particular del que avui s'anomena segon teorema del cosinus, corresponent al quart cas de la resolució de triangles esfèrics qualssevol:
$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

rectangles. Al final, però, de la proposició enunciar sense demostrar, afirmant que seria molt més breu, el teorema del cosinus per a triangles esfèrics qualssevol:

Aliter, & multo breuius. Sint rursum dati tres arcus trianguli ABC, arcusq; AB, AC, angulum A, inquirendum continentes, inaequales. Quoniam igitur est, vt sinus totus ad quantitatem quartam proportionalem sinui toti, & duobus sinubus arcuum AB, AC, inaequalium, ita sinus versus anguli A, ad differentiam inter sinum versum arcus BC, Angulo A, oppositi, & sinum versum arcus, quo se mutuo excedunt arcus inaequales AB, AC.

Transcrita al llenguatge simbòlic queda

$$\frac{\sin ver\, A}{\sin ver\, a - \sin ver\,(b-c)} = \frac{1}{\sin b \sin C}$$

Aquí sorgeix una qüestió important: per què Clavius no utilitza el teorema del cosinus per a triangles esfèrics qualssevol?[66] Es limita a utilitzar les proposicions 41 i 43 citades, la qual cosa l'obligà a fer els càlculs a partir de triangles rectangles, o bé a aplicar el teorema dels sinus en l'únic cas que planteja de triangle no rectangle (angle horitzontal).

És difícil concloure que Clavius ignorés els mètodes de resolució de triangles qualssevol, aplicant-hi el teorema del cosinus, en el 1581, any de la publicació de la *Gnomonica*. El fet que publiqués les seves obres dedicades a triangles plans i esfèrics el 1586 no sembla significatiu. És segur que Clavius

[66] Aquest teorema era prou conegut des de feia molt de temps. Havia estat introduït per al-Battani a finals del segle IX.

ensenyava sobre aquests tipus de triangles al *Collegio Romano*, i molt factible que aquesta obra circulés manuscrita abans de 1581. Cal afegir que, com s'ha dit, Clavius cita, al fer els càlculs de l'*Analemma*, a Geber i Regiomontanus. Mentre que Geber no el cita, el segon si va recollir el teorema del cosinus.

És probable que la raó de no utilitzar-lo sigui les dificultats de càlcul i manipulació a l'hora d'emprar-lo.[67] No el va saber demostrar.

Aquesta restricció implica que els càlculs suggerits per Clavius s'han de fer en un ordre determinat. No existeix independència a l'hora de calcular els angles ptolemaics. Cal iniciar-los per l'hectemorus. I en va ser del tot conscient.

- Utilitzà també la proporcionalitat dels costats corresponents de dos triangles semblants, i també un lema que enuncia i demostra en el *Llibre I* de la *Gnomonica*:

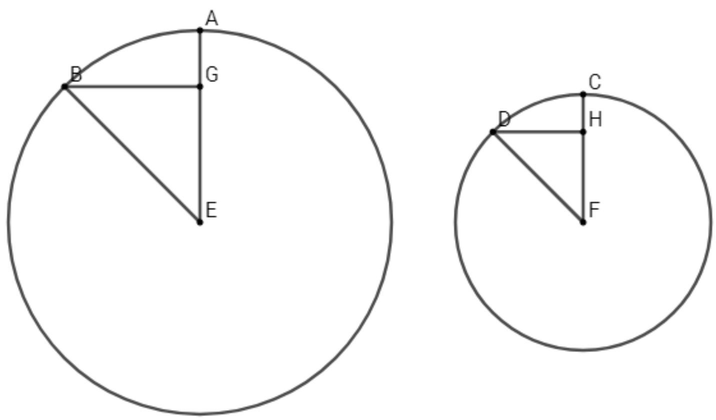
"Dos arcs de circumferència són semblants si i només si la raó dels radis coincideix amb la dels sinus rectus i versus respectius".

La demostració la fa en dues parts:

Primera part.- Siguin semblants els arcs AB i CD dels cercles els semidiàmetres dels quals són respectivament AE i CF, i BG i DH els seus respectius *sinus rectus*, i AG i CH els respectius *sinus versus.* Aleshores es compleix que AE és a CF com BG és a DH, i AG és a CH.

Demostració.-

[67]Clavius no presenta, però, el teorema del cosinus pels triangles plans. Aquest va ser demostrat per primera vegada per Viète en el mateix segle XVI.



Siguin traçats els semidiàmetres BE i DF. Per la semblança dels arcs AB i CD es dedueix que els angles E i G són iguals per la proposició 33 d'Euclides. Per consegüent, com els angles en G i H són rectes, els triangles BEG i DFH seran equiangles, per la qual cosa com BE és a BG, així també DF és a DH, i permutant, com BE, és a dir AE, és a DF, és a dir a CF, així BG serà a DH. De la semblança dels arcs AB i CD es dedueix que els triangles BEG i DFH són semblants; per tant, així com BE, és a dir AE, és a EG, així DF, és a dir CF, serà a FH; i invertint la proporció, com AE és a AG, així CF serà a CH, i permutant, AE és a CF com AG és a CH. Amb la qual cosa queda demostrada la primera part.

Segona part.- Suposem ara que AE és a CF i BG és a DH com AG és a CH. Aleshores els arcs AB i CD són semblants.

Demostració.-

Dibuixats de nou les rectes BE i DF, es té que AE és a CF com BG és a DH; i permutant, AE, és a dir BE, és a BG, com CF, és a dir DF, és a

DH. Com que els angles G i H són iguals per ser rectes, es tindrà que en els triangles BEG i DFH, els angles G i H són iguals, i els costats BE i BG, al voltant de l'angle B, amb els costats DF i DH al voltant de l'angle D, són proporcionals. Com que cada un dels angles restants E i F són menors que un recte, ja que els angles G i H són rectes, els triangles BEG i DFH són equiangles; tindran iguals els angles B i D, al voltant dels quals són proporcionals els costats, i, per tant, també els restants E i F. D'això es dedueix el que vam demostrar en la proposició 33 del llibre VI d'Euclides: que els arcs AB i CD són semblants, per la qual cosa es dedueix que els arcs, els sinus rectes dels quals són proporcionals als sinus totals, són semblants.

A més, com que AE és a CF com AG és a CH, permutant, AE és a AG com CF és a CH; i invertint la raó, AE, és a dir BE, és a EG, com CF, és a dir DF, és a FH. Com els angles en G i H són iguals per ser rectes, els triangles BEG i DFH tindran els angles G i H iguals, i els costats BE i EG, al voltant de l'angle E, i els costats DF i FH, al voltant de l'angle F, proporcionals. Per tant, cadascun dels angles restants, B i D, són menors que un recte, ja que els angles G i H ho són. Per tant, els triangles BEG i DFH són equiangles, i per tant els angles E i F, al voltant dels quals els costats són proporcionals, són iguals. Per la qual cosa, per aquelles coses que vàrem escriure sobre la proposició 33 del llibre VI d'Euclides, els arcs AB i CD són semblants.

Per tant, és evident que els arcs els *sinus versus* dels quals són proporcionals als *sinus totals*, són semblants. Però el mateix s'acaba de demostrar respecte al *sinus rectus*. Per consegüent, la demostració queda completada.

El lema anterior el farà servir per relacionar els arcs de dues circumferències: la del meridià i la del paral · lel solar abatut sobre l'analemma. És remarcable que la trigonometria plana no havia arribat encara a la maduresa; quedava pendent la sistematització definitiva.[68] En el pròleg dedicat a les seves taules trigonomètriques de sinus, tangents i secants, contingudes en el seu Teodosi, Clavius afirma: "Tot just pot dir-se, quanta utilitat tingui el coneixement dels Sinus, tan en els temes Astronòmics, com en els Geomètrics, sent així que una sèrie quasi innombrable de problemes Astronòmics i Geomètrics usuals es resolguin mitjançant càlcul i proporció de sinus, segons resulta manifest, tant a partir dels nostres triangles rectilinis i esfèrics, com de l'Almagest de Ptolemeu, de la nostra Gnomònica i d'altres llibres de diversos Astrònoms. Per la qual cosa, com les demostracions dels sinus siguin explicades per poquíssims, jutjo que faria una obra valuosa, si, amb la major brevetat i claredat possibles, a partir de diversos autors, especialment de Ptolemeu, Purbachio i Iohanne Regiomontano, reculli les demostracions mitjançant les que tinguem coneguts els sinus i les cordes de tots els arcs podem no només examinar les taules de sinus i cordes calculades per molts autors (doncs, fàcilment es comet error en imprimir els números), sinó també constituir altres noves quan convingui (suposant un Sinus totus o un diàmetre qualsevol dels particulars). Però ja que els Recents, a partir dels sinus, van recollir amb gran plaer altres línies, a saber, les Tangents i també les Se-

[68] Els sinus rectus d'un angle no era un nombre, era la mesura d'un segment. Per tant quan els radis dels arcs que es consideren són diferents, calia relacionar-los entre si.

cants, per demostrar més fàcilment i breument certes coses, també tractarem de tals línies. Doncs aquestes línies tenen un ús egregi en temes Astronòmics i Geomètrics, com resulta evident dels nostres triangles plans i esfèrics.”

Altres citacions

- El teorema de Menelaus

- La proposició 15 del llibre 1 i la 10 del llibre 2 de Teodosi, *Theodosii sphaericorum* que s’enuncien així respectivament:

- *Si in sphaera maximus circulus, eorum, qui in sphaera sunt, circulorum aliquem per polos secet; bifariam, & ad angulós rectos eum secat.*

- *Si sint in sphaera paralleli circuli, per quòrum polos describantur maximi circuli; parallelorum quidem circunferentiae inter maximos circulos interceptae, similes sunt, maximorum autem circulorum circunferentiae inter parallelos circulos interceptae, sunt aequales.*

- Proposició 34 del llibre 1, definició 4 del llibre 2 i definició 3 del llibre 11 dels *Elements* d’Euclides.

5.7 Els càlculs "per números" fets per Clavius dels sis angles de l'*Analemma* de Ptolemeu amb la trigonometria plana

Clavius utilitza sempre el llenguatge retòric per descriure les proporcions que planteja, lluny encara del concepte d'igualtat de dues raons, amb la qual cosa la manipulació dels termes d'aquelles proporcions resulta dificultosa.

Càlcul de l'hectemorus (fg = θ_M)

Fonamenta aquest càlcul en que la raó dels segments am i KL de la figura adjunta és constant, amb independència que es considerin en referencia al paral · lel solar o al meridià.

Clavius enuncia que:

am, considerat com a *sinus totus* del paral · lel proposat, és a KL, en quan és el *sinus rectus* de la distància del Sol al meridià en aquell paral · lel, com am, considerat com part del *sinus totus* del cercle màxim col · locada en el meridià, és a dir, en quan *sinus rectus* del complementari de la declinació del paral · lel fixat, és a KL, considerat com part del *sinus totus* del meridià, és a dir, a LF, que és igual a KL, *sinus rectus* de l'arc YF, complementari de l'arc hectemorus fg respecte el quadrant YG, considerar com part del *sinus totus* del meridià.

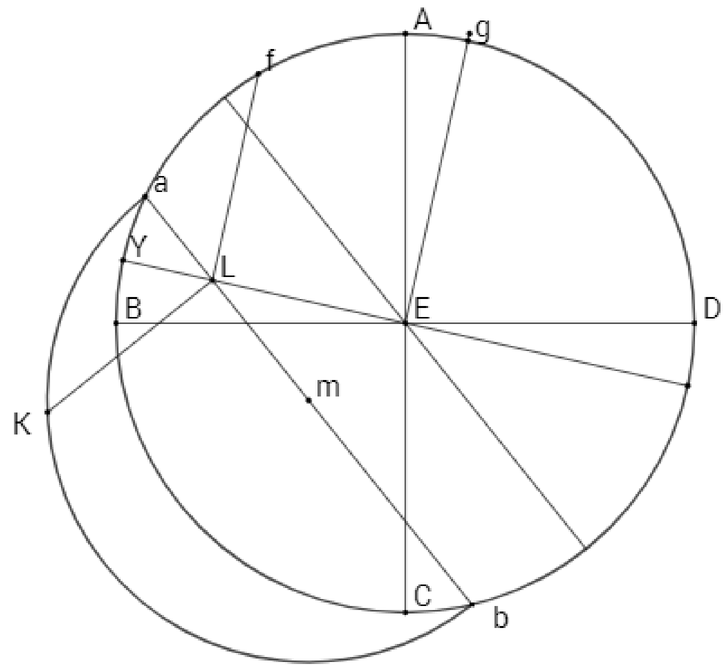


Figura 45: Determinació de l'hectemorus

D'acord amb la figura 45 es dedueix que:[69]

sinus totus$_2$: sinus rectus$_2$ (distancia del Sol al meridià, Ka) ::

:: sinus rectus$_1$ (complementari de l'hectemorus fg)

que depèn directament de les dades inicials.

Seguint el desenvolupament de Clavius i amb la notació actual, els càlculs es farien així $\sin(Ka) = \frac{KL}{am}$

$\sin(90° - \delta) = \frac{am}{OA}$

[69]Els subíndexs 1 i 2 indiquen que les mesures del sinus ho són respecte del meridià i cercle diari del Sol, respectivament.

$\sin(90^\circ - \delta) = \cos\theta_M = \frac{Lf}{OA} = \frac{KL}{OA} = \sin(Ka)\cos\delta$

on am = (sinus totus)$_2$ i KL = (sinus rectus)$_2$ de la distància Ka del Sol al meridià.

En conseqüència, l'hectemorus θ_M es calcula amb la fórmula:

$\cos\theta_M = \sin(Ka)\cos\delta$, que s'enunciaria així:

El cosinus de l'hectemorus és igual al sinus de la distància del Sol al meridià multiplicat pel cosinus de la declinació.

Càlcul de l'horari (BM)

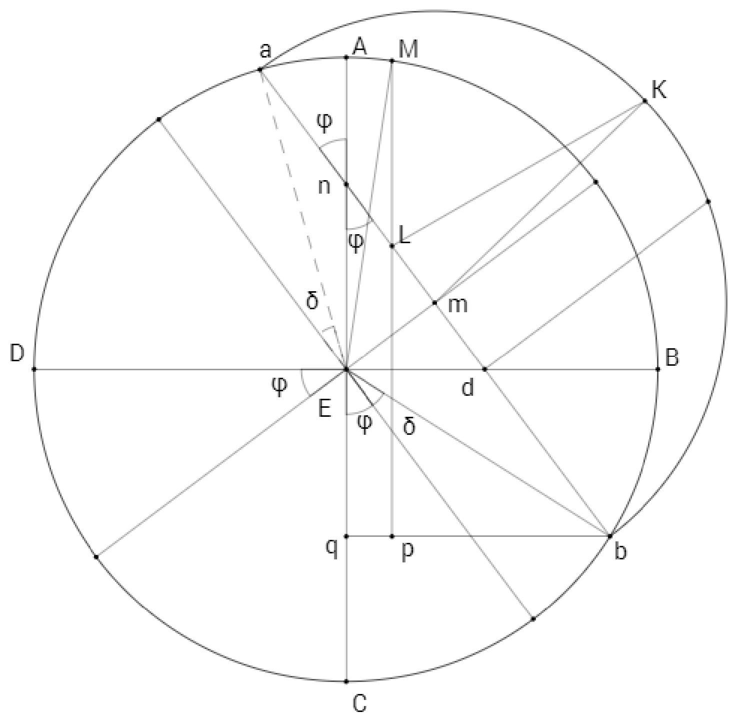


Figura 46: Determinació de l'horari

A partir de la proporcionalitat dels costats dels triangles semblants *nbq* i *Lbp* de la figura 46 Clavius enuncia el següent:

El *sinus versus* del complementari de l'altura del pol sobre l'horitzó és al *sinus rectus* de l'altura del meridià, com el *sinus versus* de la distància del Sol al meridià ho és a la diferencia entre el *sinus rectus* de l'altura del meridià i el *sinus rectus* del complementari de l'arc horari.

És a dir, si

$bn = (sinus\ versus)_2$ del complementari de l'altura del pol sobre l'horitzó,

$bq = (sinus\ rectus)_2$ de l'altura del meridià,

$Lb = (sinus\ versus)_1$ de la distancia del Sol al meridià, i

$Pq = (sinus\ rectus)_1$ del complementari de l'arc horari $(90° - BM)$,

De la proporció següent:

$$nb : bq :: bq - pq$$

dedueix que

$$pq = bq\,(nb - Lb)/nb$$

Per tant:

El $(sinus\ rectus)_1$ del complementari de l'arc horari BM, pq, és igual al producte entre el $(sinus\ rectus)_2$ de la latitud i la diferencia entre el $(sinus\ rectus)_1$ de la distancia del Sol al meridià i el $(sinus\ rectus)_1$ de la latitud dividit entre el $(sinus\ versus)_2$ de la latitud.

Fent els càlculs des del punt de vista actual:

$\cos BM = \cos V = \frac{bq-bp}{EM} = \frac{bq}{EM} - \frac{bp}{EM}$

Però $\frac{bq}{EM} = \frac{bq}{Eb} = \sin(\varphi + \delta)$, i $\frac{bp}{EM} = Lb\frac{\sin\varphi}{EM} = [\frac{\pm(Lm+bm)}{EM}]\sin\varphi =$

$= [(\frac{Km}{EM})\cos(Ka) + \cos\delta]\sin\varphi = \cos\delta\sin\varphi\cos(Ka) + \cos\delta\sin\varphi$

Cal observar que $\cos(Ka)$ és positiu si K ha traspassat la línea Nord-Sud, i negatiu si no ho ha fet.

Per tant:

$\cos\theta_V = \sin(\varphi + \delta) - [\cos\delta \sin\varphi \cos(Ka) + \cos\delta \sin\varphi] = \cos\varphi - \sin\delta - \cos\delta \sin\varphi \cos(Ka)$

Càlcul de l'angle descensiu (AP=θ_H)

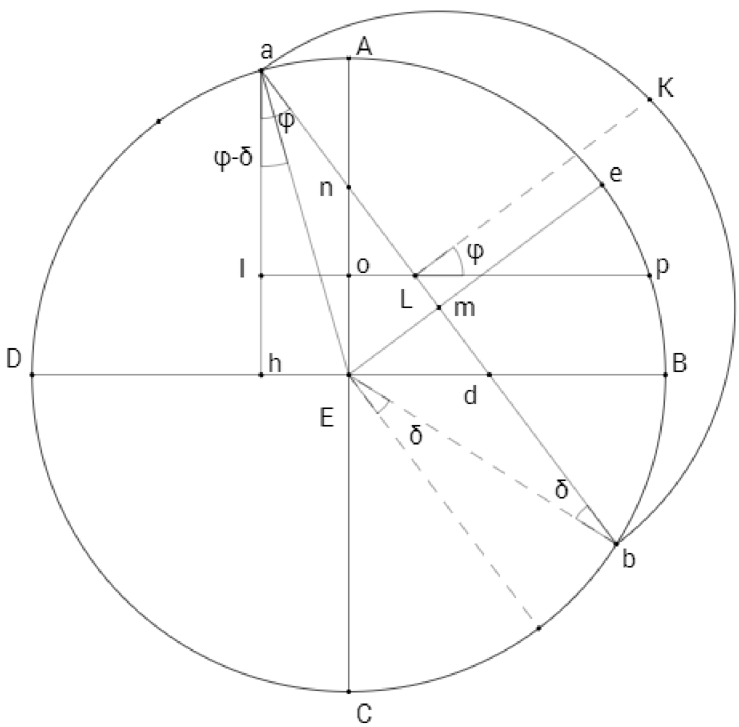


Figura 47: Determinació del descensiu

A partir de la figura 47, Clavius enuncia que:

ad, *sinus versus*, respecte del paral · lel solar, de l'arc semidiürn *ae*, és a *ah*, *sinus rectus* respecte del meridià, de l'altitud del meridià, és a dir, de la distancia angular del meridià a l'horitzó, coma L, *sinus versus* respecte del meridià, de la distancia del Sol al meridià, és a *al*, diferencia entre *ah* i *lh*, on *lh* és el *sinus rectus* respecte del meridià de l'arc BP, complementari de l'arc descensiu AP.

És a dir, si es consideren els triangles ahd i alL, i

$ad = (sinus\ versus)_2$ de l'arc semidiürn ae,

$ah = (sinus\ rectus)_1$ de l'altitud del meridià [distancia angular del meridià a l'horitzó, $90° - \varphi + \delta$],

$aL = (sinus\ versus)_2$ distància del Sol al meridià $(90° - \eta)$,

$al = ah - lh$,

$lh = (sinus\ rectus)_1 arcBP$, complementari de l'angle descensiu AP,

es compleix que:

$$ad : ah :: aL : al$$

i d'aquesta proporció segueix el raonament següent:

$$lh = ah - al = (ad\ al/aL) - al = al(ad/aL) - 1$$

El $(sinus\ rectus)_1$ de l'arc descensiu és, doncs, lh.

Aquesta manera de calcular-lo depèn directament de les dades inicials. El mateix Clavius se n'adona i assenyala que és més fàcil de calcular-lo així que no pas amb la trigonometria esfèrica.

Fent ús de la trigonometria actual:

$\frac{ad}{ah} = \frac{1}{\cos\varphi};\ aL = am - Lm;\ al = ah - lh$

Per consegüent:

$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{am/Ea - Lm/Ea}{al - lh} = (\cos\delta - \frac{am}{Ea}\cos Ka)(ah - lh) = \frac{\cos\delta - \cos\delta\cos Ka}{ah/Ea - lh/Ea}$.

Com que $\frac{ah}{Ea} = \cos(\varphi - \delta)$, i $\frac{lh}{Ea} = \cos\theta_H$, resulta que:

$\cos\theta_H = \sin\varphi + \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos Ka$

Càlcul del meridià (BY = φ_M)

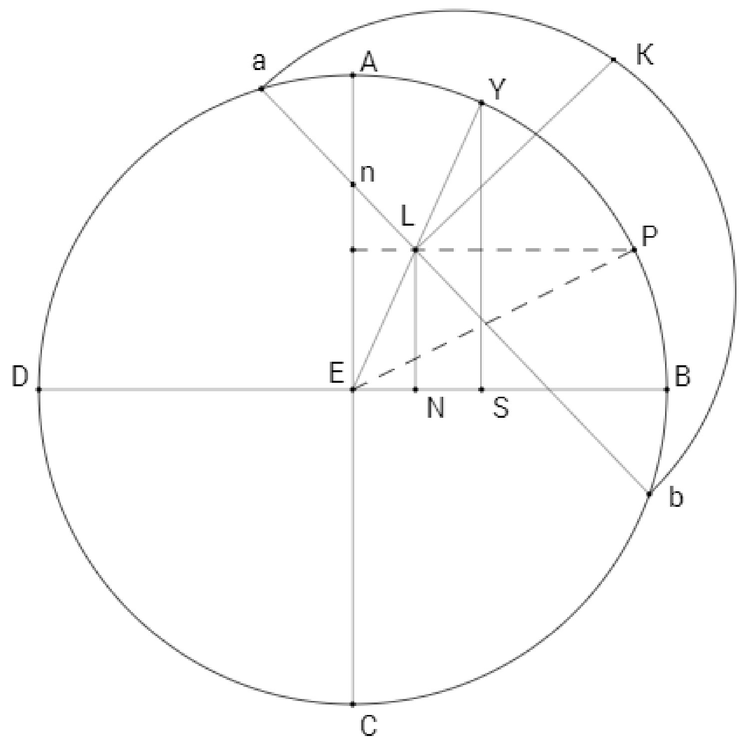


Figura 48: Determinació del meridià

Observant la figura 48 Clavius deduí que:

EL, sinus de l'arc hectemorus, és a dir, sinus del complementari de l'altura del Sol sobre el meridià, és a LN, sinus del complementari de la circumferència descensiva, és a dir, el sinus de l'altura del Sol sobre l'horitzó, com EY, *sinus totus*, és a YS, sinus de l'arc meridià BY.

En efecte, considerant els triangles ELN/EYS, on

$EL = (sinus\ rectus)_1\ hectemorus\ fg$,

$LN = (sinus\ rectus)_1(90° - descensiu AP)$,

$EY = (sinus\ totus)_1$,

$YS = (sinus\ rectus)_1 meridià\ BY$

Aleshores la proporció enunciada per Clavius es representa simbòlicament:

$$EL : LN :: EY : YS$$

D'aquesta proporció es dedueix que:

$$(sinus\ rectus)_1 meridià = (sinus\ rectus)_1(90° - descensiu)/(sinus\ rectus)_1\ hectemorus$$

el càlcul del qual es fa, doncs, a partir del descensiu i de l'hectemorus.

Actualment el càlcul es faria així:

$\sin BY = \frac{YS}{EY} = \frac{LN}{EL} = \frac{LN/EP}{EL/EP} = \sin(90° - AP)\sin(hectemorus)$, i la fórmula que permet de calcular l'angle és:

$$\sin M = \frac{\cos H}{\sin M}$$

Càlcul de l'angle vertical (AT = φ_V)

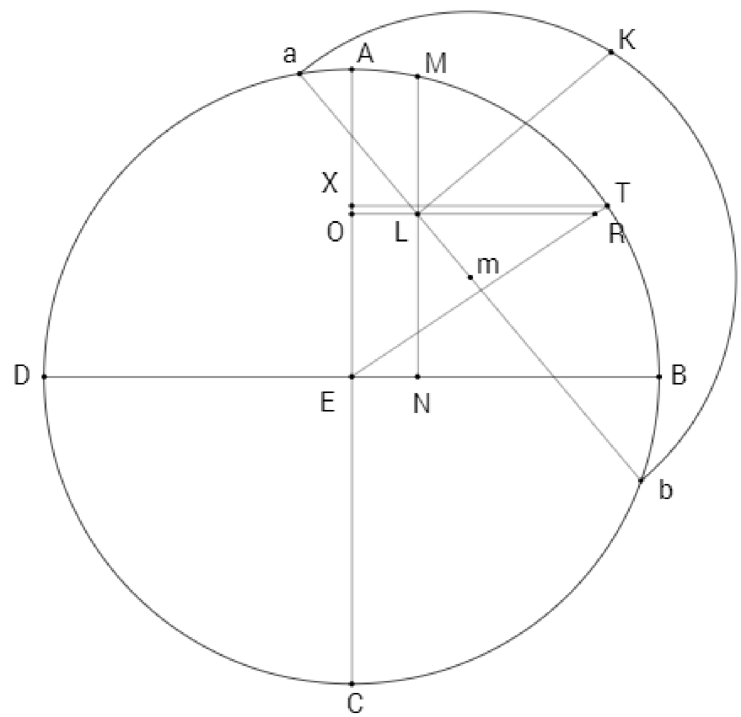


Figura 49: Determinació del vertical

A partir de la figura 49 Clavius enuncia la proporció:

ER, sinus de l'arc horari, és a dir, sinus del complementari de l'altitud del Sol sobre el vertical, és a RO, expressat en parts del sinus totus del cercle màxim, com ET, sinus totus, és a TH, sinus de l'arc vertical AT.

En efecte, els triangles KLN (entès en la posició inicial) i EOR de la figura són iguals, ja que KL i ORsón iguals per construcción, i LN i OE

són costats paral · lels d'un rectangle. Per tan les hipotenuses KN i ER coincideixen. Per tant, tenint present que:

$KN = ER = NM(sinus\ rectus)_1 archorariBM,$

$\frac{am}{KL} \equiv (sinus\ totus)_2/(sinus\ rectus)_1 distància\ Sol - arc\ meridià =$

$(\frac{am}{KL} \equiv (sinus\ rectus)_1 complementari\ declinació)7OR.$

Dels triangles ERO i ETX es dedueix que:

$ER/RO \equiv (sinus\ rectus)_1\ arc\ horari/RO =$

$= ET/TX \equiv (sinus\ totus)_1/(sinus\ rectus)_1\ arc\ vertical\ AT,$

I per tant:

$(sinus\ rectus)_1\ (arc\ vertical) =$

$= (sinus\ rectus)_2\ Ka\ (sinus\ totus)_1/(sinus\ rectus)1\ (arc\ horari\ BM)$

Amb la trigonometria actual:

$\frac{am}{KL} = \frac{1}{\sin(Ka)} = \frac{am}{OR} = \frac{am/Ea}{OR/EA} = \frac{\cos\delta}{OR/EA}$

$1/\sin AT = \frac{ER}{OR} = ER/(EA\ \sin(Ka)\ \cos\delta)$

Per tant:

$$\sin AT = \sin(Ka)\ \cos\delta/(ER/EA)$$

Però com $\frac{ER}{EA} = \frac{MN}{EA} = \sin BM$, resulta que

$$\sin\varphi_M = \sin(Ka)\ \cos\delta/\sin\theta_V$$

Càlcul de l'angle horitzontal (AS = φ_H)

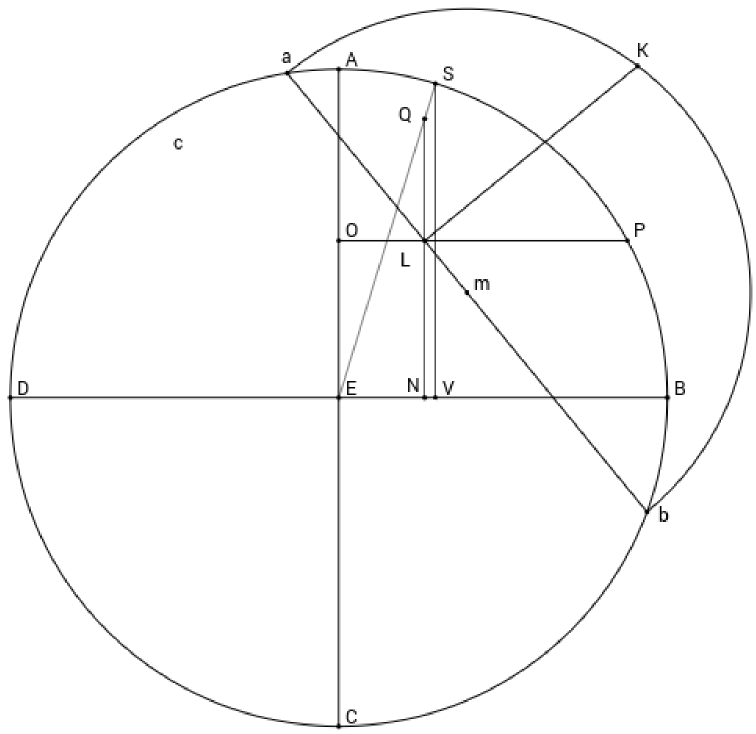


Figura 50: Determinació de l'horitzontal

Observant la figura 50, Clavius enuncia la proporció següent:

EQ, sinus de l'arc descensiu, és a dir, sinus del complementari de l'altura del Sol sobre l'horitzó, és a QN, que és igual a KL, sinus de la distància del Sol al meridià, considerat part del sinus totus del cercle màxim, com ES, sinus totus, és a SV, sinus del complementari de l'arc horitzontal AS.

La demostració la fa tenint en compte que:

$EQ = OP = (sinus\ rectus)_1$ descensiu AP,

$QN = KL = (sinus\ rectus)_2$distància del Sol al meridià, Ka,

$SV = (sinus\ rectus)_2$ del complementari de l'horitzontal AS, i

$ES = (sinus\ totus)_1$

Endemés, els triangles rectangles KLO i QNE són iguals, i també $KO = OP$ [= radi esfera], a partir dels triangles EQN i ESV es dedueix la proporció enunciada:

$$EQ : QN :: ES : SV$$

I en conseqüència:

$(sinus\ rectus)_2(90° - arc\ horitzontal) =$

$= sinus\ rectus)_2(Ka)\ (sinus\ totus)_1/(sinus\ rectus)_1\ (arc\ descensiu)$

Amb la trigonometria actual:

$\cos AS = \frac{SV}{ES} = \frac{QN}{EQ} = \frac{KL}{OP} =$

$= am\ \ \sin(Ka)/EP\ \ \sin AP = \sin(Ka)\ \ \cos\delta/\sin\theta_H$

Per tant:

$$\cos\varphi_H = \sin(Ka)\ \ \cos\delta/\sin\theta_H$$

5.8 El càlcul numèric dels sis angles de l'*Analemma* de Ptolemeu fet per Clavius amb la trigonometria esfèrica

Per calcular els angles ptolemaics, Clavius considerà la figura següent en què $ABCD$ representa l'horitzó, BED el meridià, AFC l'equador, AEC el primer vertical, LM el paral · lel solar, i G el Sol:

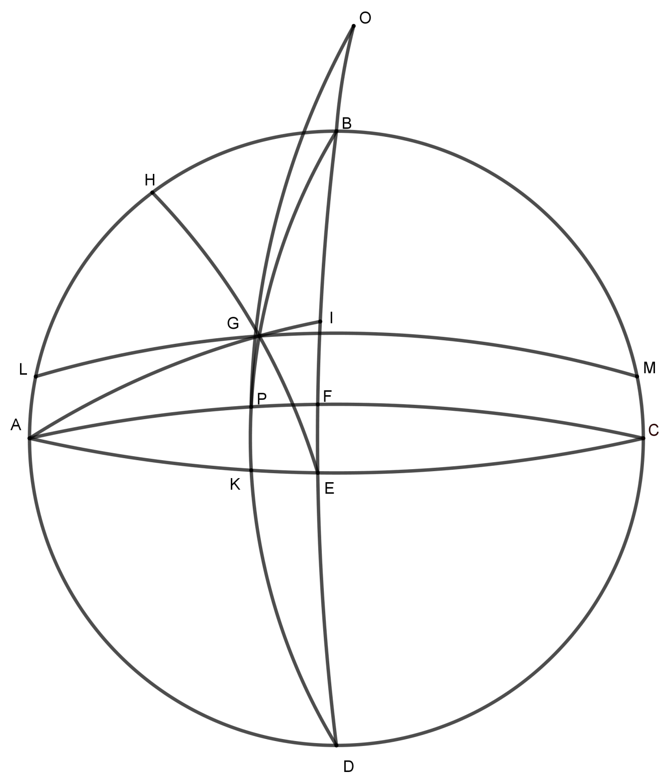


Figura 51: La posició del Sol a l'esfera celeste

Càlcul de l'hectemorus (θ_M)

Clavius el calcula considerant el triangle esfèric APG de la figura, rectangle en P, i li aplica el primer teorema del cosinus:

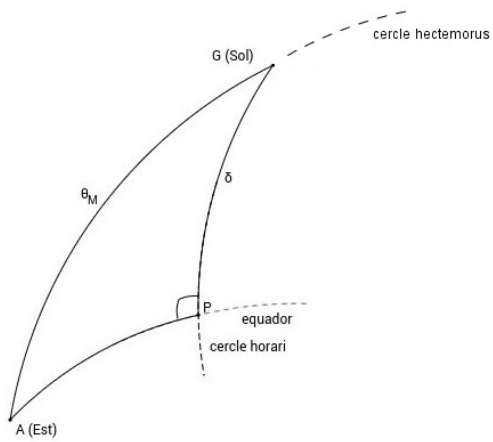


Figura 52: Determinació de l'hectemorus

La proporció l'enuncia així:

El sinus del complementari de l'arc AP, és a dir, el sinus de l'arc FP, distància del Sol al meridià, és al sinus totum, com el sinus del complementari de l'arc hectemorus AG és al sinus del complementari de la declinació GP.

El càlcul el fa de la següent manera:

Si $AG = \theta_M$ és l'angle hectemorus, $90° - AP = PF$ és la distància del Sol al meridià, i $GP = \delta$ és la declinació, aleshores es compleix que:

$$\sin PF : \textit{sinus totum} :: \sin(90° - \theta_M) : \sin(90° - \delta)^{70}$$

[70] Amb la notació actual quedaria així: $\cos\theta_M = \sin PF\ \cos\delta$

Càlcul del meridià (φ_M)

Aquí aplica Clavius el primer teorema del cosinus al triangle GIO, rectangle en I:

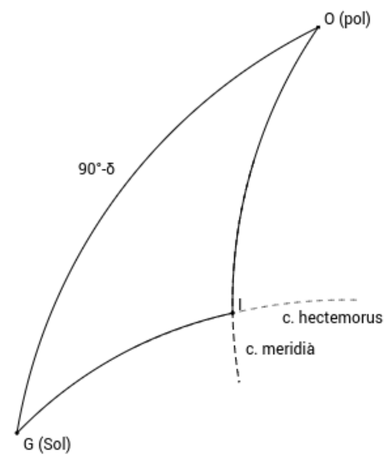


Figura 53: Determinació del meridià

I enuncia la següent proporció:

El sinus del complementari OG, és a dir, el sinus de la declinació GP, és al sinus del complementari de l'arc GI, és a dir, el sinus de l'hectemorus AG, com el sinus del complementari de l'arc OI, és a dir, el sinus de l'arc FI, entre l'equador i l'hectemorus, és al sinus totum.

És a dir:

$$\sin\delta : \sin\theta_M :: \sin(90^\circ - IO) : \textit{sinus totum}$$

i d'aquí calcula IO. L'angle IF serà el complementari de IO.

Amb la notació actual, s'expressaria així: $\sin\delta = \sin\theta_M\ \sin(90° - IO)$

Pel càlcul del meridià, Clavius assenyala que s'ha de distingir el cas borel de l'austral.

En el cas boreal: $\varphi_M = BI = BF - FI = 90° - \varphi - FI$, on φ és la latitud del lloc.

En el cas austral: $\varphi_M = BF + FI = FI - \varphi$.

El càlcul del meridià Clavius el fa, doncs, a partir de l'hectemorus.

Aquest valor de φ_M coincideix amb el que havia obtingut utilitzant la trigonometria plana. En efecte:

$$\sin\varphi_M = \sin(90° + \varphi - FI) = \sin(90° + \varphi - 90° + IO) = \sin(IO + \varphi) =$$

$$= \sin IO \cos\varphi + cosIOsin\varphi = [1 - (\tfrac{\sin^2\delta'}{\sin^2\theta_M}]^{1/2}\cos\varphi - (\tfrac{\sin\delta}{\sin\theta_M}\sin\varphi =$$

$$= [(\sin^2\theta_M - \sin^2\delta)^{1/2}\cos\varphi + \sin\delta\sin\theta]/\sin\theta_M =$$

$$= [(1 - \sin^2(Ka)\cos^2\delta - 1 + \cos^2\delta)^{1/2}\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi]/\sin\theta_M =$$

$$= (\cos\delta\cos(Ka)\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi)/\sin\theta_M =$$

$$= \tfrac{\cos\theta_H}{\sin\theta_M}$$

Càlcul del descensiu (θ_H)

Clavius aplica de nou el primer teorema del cosinus per a triangles rectangles al triangle GIE, rectangle en I, dibuixat a continuació:

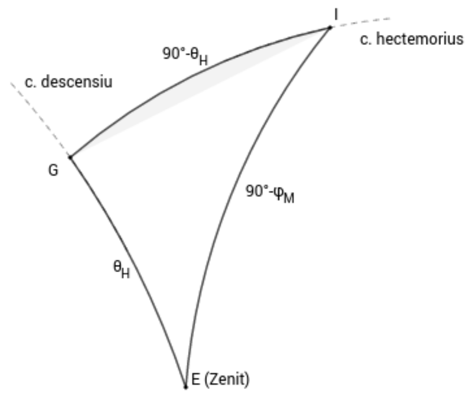


Figura 54: Determinació del descensiu

On $GI = 90° - \theta_M$, $IE = 90° - \varphi_M$, i θ_H és l'angle descensiu.

L'aplica enunciant:

El sinus del complementari de l'arc GI, és a dir, el sinus de l'hectemorus AG, és al sinus Totum, com el sinus del complementari de l'arc descensiu EG és al sinus del complementari de l'arc EI, és a dir, al sinus de l'arc meridià B.

És a dir:

$$\sin\theta_M : \textit{sinus totum} :: \sin(90° - \theta_H) : \sin\varphi_M$$

Amb la notació actual: $\cos\theta_H = \sin\theta_M \sin\varphi_M$.

El càlcul del descensiu depèn, doncs, explícitament de l'hectemorus i del meridià.

Càlcul de l'horitzontal (φ_H)

Aplica el teorema dels sinus al triangle EGO de la següent figura:

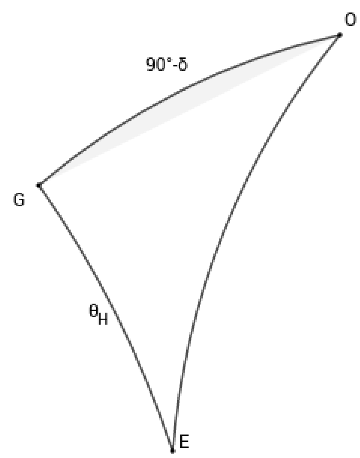


Figura 55: Determinació de l'horitzontal

on $E = BH = 90° - AH = 90° - \varphi_H, O = PF =$ distància (Sol – meridià), i enuncia la proporció següent:

El sinus de l'arc descensiu EG és al sinus de l'angle O, és a dir, al sinus de la distància del Sol al meridià, com el sinus de l'arc OG, complementari de la declinació, és al sinus de l'arc OEG, o sigui BEH, és a dir, al sinus de l'arc BH, complementari de l'arc horitzontal AH.

És a dir: $\textit{sinus descensiu EG} : \textit{sinus distància Sol} - \textit{meridià} ::$

$:: \textit{sinus complementari declinació} : \textit{sinus complementari arc horitzontal } BH$

Amb notació actual: $\cos\varphi_H = \frac{\cos\delta \sin PF}{\sin\theta_H}$

Càlcul de l'horari (θ_V)

Clavius distingeix dos mètodes per calcular aquest angle, fent servir eines trigonomètriques diferents: el teorema del sinus i el primer teorema del cosinus quan un angle és rectangle.

Mètode 1r.- A partir del triangle rectangle AKG, recte en K:

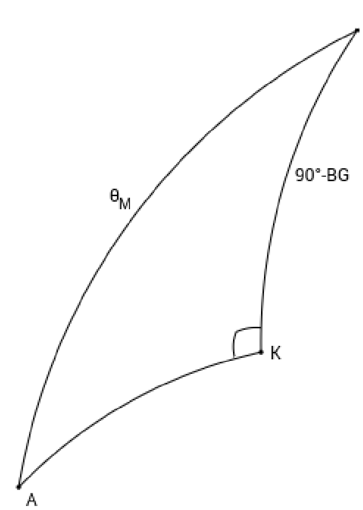


Figura 56: Determinació de l'horari (I)

on $A = 90° - BI = 90° - \varphi_M$, $GK = 90° - BG = 90° - \theta_V$, i $AG = \theta_M$.

Aplicant el teorema dels sinus afirma:

El sinus de l'hectemorus AG és al sinus totum, com el sinus de l'arc GK, complementari de l'arc horari BG, és al sinus de l'angle A, és a dir de l'arc

EI, complementari de l'arc meridià BI.

La proporció enunciada és, doncs:

$$\textit{sinus hectemorus } AG : \textit{sinus totum} ::$$
$$:: \textit{sinus complementari horari } BG : \textit{sinus complementari arc meridià } BI$$

Amb notació actual: $\cos\theta_V = \sin\theta_M \cos\varphi_M$.

Mètode 2n.- A partir del triangle GHB, rectangle en H,

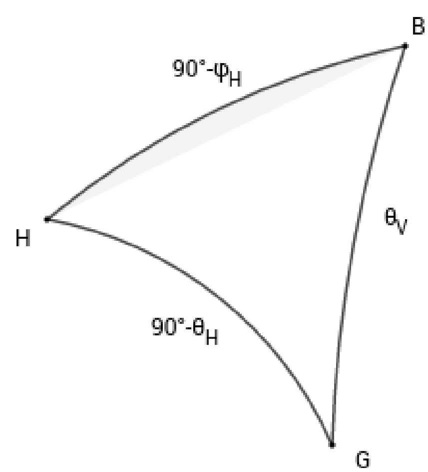


Figura 57: Determinació de l'horari (II)

on $BH = 90° - \varphi_H$, $GH = 90° - \theta_H$, i $BG = \theta_V$, Clavius aplica el teorema del cosinus per a triangles rectangles, i enuncia:

El sinus del complementari de l'arc BH, és a dir, el sinus de l'arc horitzontal AG, és al sinus totum, com el sinus del complementari de l'arc horari

BG és al sinus del complementari de l'arc GH, és a dir, al sinus de l'arc descensiu EG.

Simbòlicament s'escriu:

sinus arc horitzontal AH : *sinus totum* :: *sinus* $(90°-BG)$: *sinus descensiu EG*

Actualment s'escriuria: $\cos\theta_V = \sin\varphi_H \sin\theta_H$.

Malgrat els dos mètodes exposats, Clavius afirma al final d'aquest paràgraf que l'arc horitzontal és més fàcil de calcular a partir de la trigonometria plana.

Càlcul del vertical (φ_V)

Aquí també Clavius el calcula per dos mètodes diferents, aplicant, respectivament, el teorema dels sinus i el teorema del cosinus per a triangles rectangles.

Mètode 1r.- Aplicant el teorema dels sinus al triangle GIB, rectangle en I, on $B = EK = \varphi_V$:

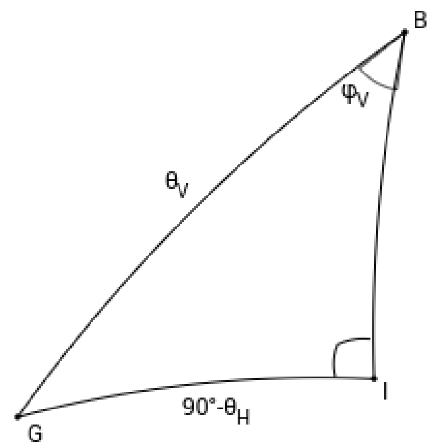


Figura 58: Determinació del vertical (I)

Enuncia la proporció següent:

El sinus de l'arc horari BG és al sinus Totum com el sinus de l'arc GI, complementari de l'arc hectemorus AG, és al sinus de l'angle B, és a dir, al sinus de l'arc vertical EK.

És a dir:

$sinus\ horari : sinus\ totum :: sinus\ complementarihectemorus : sinus\ arc\ vertical\ EK$

Plantejada actualment s'escriuria:

$$\sin \varphi_V = \frac{\cos \theta_M}{\sin \theta_V} = \frac{\sin \eta \cos \delta}{\sin \theta_V}$$

Mètode 2n.- Clavius tria aquí el triangle GBK, rectangle en K, per aplicar-li el teorema del cosinus per a triangles rectangles:

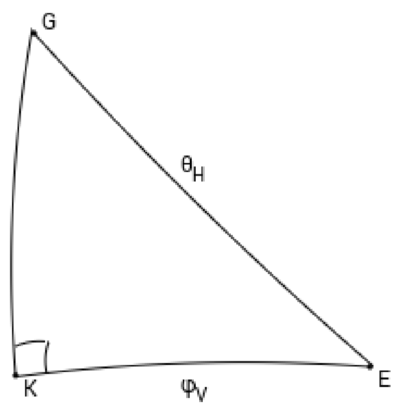


Figura 59: Determinació del vertical (II)

on $KE = \varphi_V$, i $GK = 90° - BG = 90° - \theta_V$.

Enuncia que:

El sinus del complementari de l'arc GK, és a dir, el sinus de l'arc horari BG, és al sinus Totum, com el sinus del complementari de l'arc descensiu EG és al sinus del complementari de l'arc vertical EK.

Simbòlicament:

sinus arc horari : *sinus totum* :: :: *sinus complementari descensiu* :

sinus complementari vertical

Proporció que actualment escriuríem: $\cos\varphi_V = \cos\theta_H / \sin\theta_V$.

Clavius remarca aquí la necessitat de conèixer prèviament els arcs hectemorus i horari en el primer mètode i l'horari i descensiu en el segon.

5.9 Proposició 42 del llibre de Clavius dedicat als triangles esfèrics: el teorema del cosinus per a triangles rectangles

Enunciat: En un triangle rectangle ABC, rectangle en B, es compleix que:

$$\frac{\sin C}{\sin totum} = \frac{\sin(90^\circ - A)}{\sin(90^\circ - BC)}$$

On $\sin C = \frac{\cos A}{\cos a}$.

Demostració: la fa distingint quatre casos:

Cas 1.- A i c són angles aguts.

Es perllonguen els costats $AB = c$ i $AC = b$ fins a completar sengles quadrants AD i AE, respectivament. Igualment es perllonguen BC i DE. Sigui F el punt d'intersecció.

Aleshores: $D = 90^\circ$ i $E = 90^\circ$.

Es considera el triangle CEF. Aplicant el teorema dels sinus es verifica que:

$$\frac{sinus\ CF}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ EF}{sinus\ ECF}$$

Com que els angles ECF i ACF són iguals (oposats pel vèrtex), i invertint la proporció, es compleix:

$$\frac{sinus\ ACB}{sinus\ EF} = \frac{sinus\ totum}{sinus\ CF}$$

Intercanviant els medis:

$$\frac{sinus\ ACB}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ EF}{sinus\ CF}$$

Com que $ACB = C$, resulta que

$$sinus\ C = \frac{sinus\ (90° - A)}{sinus\ (90° - CB)}$$

com es volia demostrar.

Cas 2.- A és obtús i c és agut ($B = 90°$)

Es construeix l'angle BAD de manera que sigui recte, y sobre el cercle màxim que passa per A i B es construeix E de manera que l'arc $AE = 90°$.

Es considera el cercle màxim que passa per E i D. Talla el costat AC en el punt F.

Com que els angles DAB i DBA són rectes els arcs AD i BD també ho són.

Com que DAE és recte, l'arc DE també ho és.

$AF = 90°$ i $DE = 90° - EF$, $CD = 90° - BC$, i $F = 90°$.

En el triangle CDF l'angle F és recte. Per tant, aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{sinus\ CD}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ DF}{sinus\ C}$$

Com que $DF = 90°$, aleshores:

$$sinus\ C = \frac{sinus\ DF}{sinus\ CD} = \frac{sinus\ (90° - BAC)}{sinus\ (90° - BC)}$$

Per tant: $\sin C = \frac{\cos A}{\cos a}$

Cas 3.- A agut i c obtús.

En aquest cas C és obtús i l'arc $AC > 90°$.

Es considera els punts C i D de manera que $AE = 90°$ i que $AD = 90°$.

Es considera l'arc DE, i es prolonga fins que es talli amb la prolongació de l'arc BC. Sigui F el punt d'intersecció.

Es compleixen les següents igualtats:

$D = 90°, E = 90°, BF = 90°, DF = 90°$

Com que l'arc ED correspon a l'angle A i l'arc BC, aleshores considerant el triangle EFC i aplicant el teorema dels sinus, resulta que:

$$\frac{sinus\ CF}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ EF}{sinus\ ECF}$$

Però $EF = 90° - A$, $CF = 90° - BC$, i $ECF = ACB$

Aleshores:

$$\frac{sinus\ ACB}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ (90^\circ - A)}{\sin(90^\circ - BC)}$$

Per tant, $sinus\ ACB = sinus\ C = \frac{sinus\ (90^\circ - A)}{\sin(90^\circ - BC)}$

De nou $\sin C = \frac{\cos A}{\cos a}$

Cas 4.- A obtús i c obtús.

Es considera l'angle $BAD = 90^\circ$, on D és el punt d'intersecció des arcs AD i BC.

Sigui E el punt de l'arc AB tal que $AE = 90^\circ$, i sigui F el punt d'intersecció del cercle màxim que passa per ED i la prolongació de l'arc AC.

Aleshores: $B = 90^\circ$ (per hipòtesi), $BAD = 90^\circ$ per construcció, $AD = 90^\circ$ i $BD = 90^\circ$, $DAE = 90^\circ$, $F = 90^\circ$, $DF = 90^\circ - DE$, $CD = 90^\circ - DB$.

Considerant el triangle $CDF (F = 90^\circ)$ i aplicant el teorema dels sinus, es dedueix que:

$$\frac{sinus\ CD}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ DF}{sinus\ DCF}$$

És a dir: $\frac{sinus\ DCF}{sinus\ DF} = \frac{sinus\ totus}{sinus\ CD}$

Tenint present la figura: $\frac{sinus\ ACB}{sinus\ (90^\circ - BAC)} = \frac{sinus\ totus}{sinus\ (90^\circ - BC)}$

I d'aquí: $\frac{sinus\ ACB}{sinus\ totum} = \frac{sinus\ (90^\circ - BAC)}{sinus\ (90^\circ - BC)}$

Per tant $sinus\ C = \frac{sinus\ (90^\circ - BAC)}{sinus\ (90^\circ - BC)}$

On $\sin C = \frac{\cos A}{\cos a}$

5.10 Clavius i el teorema del cosinus per a un triangle qualsevol

Com s'ha dit, Clavius no presenta la demostració del teorema del cosinus per als angles per a triangles esfèrics en la seva obra *Theodosii Tripolitae Sphaericorum. Libri III (...) Sinus. Lineae Tangentes. Et secantes. Triangula rectilinea. Atque Sphaerica.* Tot i que formalment no el necessitava, ja que subdividia un triangle qualsevol en dos de rectangles, i a continuació utilitzava el teorema del cosinus per a triangles rectangles que sí havia demostrat. Però a l'hora de resoldre un triangle oblicuangle concret, el procés era molt llarg i carregós.

El teorema del cosinus, tant per als angles com per als costats, i la seva demostració va ocupar diversos matemàtics contemporanis.[71] A Europa, el teorema del cosinus va aparèixer per primer cop enunciat per Regiomontanus, tot i que Peuerbach ja havia donat una solució al problema. S'especula si en lloc de copiar-lo d'aquest, ho va fer de al-Battani, qui va resoldre un problema astronòmic aplicant aquest teorema.

Clavius va mantenir un important flux de cartes amb diversos corresponsals relatives a la seves obres, entre les que es troben les trigonomètriques, els quals van col · laborar amb ell de diverses maneres. En una d'elles, enviada per Jacob Curtz el 8 de desembre de 1586, podem llegir: "(...) enviaré demostració de la regla de triangles esfèrics no rectangles (...)" [de Johann Werner].

[71] Veure Zeller (1944)

El mateix Curtz, el 24 de març de 1587 torna a escriure'l en aquests termes: "(...) M'alegra que hagis rebut la Gnomonica de Sculteti i la demostració de J. Werner. Estic cert que lograràs completar la teva doctrina sobre triangles esfèrics, com et demanava (...)". I Adriann van Roomen, el 11 de maig de 1592, l'escriu per a dir-li que "l'any passat van sortir els llibres de Philippe Lansberg sobre triangles esfèrics" que li va enviar posteriorment (Baldini 1992).

Clavius va continuar ocupant-se de la resolució de triangles esfèrics en l'*Astrolabium* (1593), la *Geometria practica* (1604) i els *Triangula sphaerica* (1611), segurament amb la intenció de completar la demostració del teorema del cosinus per als angles. Tanmateix, només presenta la demostració de l'anomenada fórmula prostaferèsica.

En un treball escrit de Johannes Werner (Thoren 1988) del 1510 apareix per primer cop aquesta fórmula:

$$\sin a \sin b = 1/2[\sin(90^\circ - a + b) - \sin(90^\circ - a - b)]$$

que donaria lloc al mètode prostaferèsic, l'únic que permetia, fins la introducció del concepte de logaritme el 1614, realitzar multiplicacions i divisions de nombres transformant-les en sumes i restes.

Werner va ser el primer en presentar-la en l'enunciat del teorema del cosinus de la trigonometria esfèrica, de la manera següent:

$$\frac{1/2[\sin(90^\circ - a + b) - \sin(90^\circ - b - a)]}{\sin(90^\circ - c) - \sin(90^\circ - b - a)} = \frac{r}{\sin\ ver(180^\circ - C)}$$

Però és en el teorema 2 del llibre V de Regiomontanus que apareix per primera vegada enunciat de forma útil pel càlcul el teorema del cosinus en l'Europa no musulmana. El seu mestre Peuerbach havia donat una solució al problema de calcular l'altitud del Sol, relativament semblant a la de Regiomontanus, però no el va la expressar com un teorema independent (Van Brummelen 2009). L'enuncia així:

In omni triangulo sphaerali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus uersi anguli cuiuslibet ad differentia duorum sinuum uerforum, quòrum unus est lateris eum angulum subtendentis: alius uerò differentiae duorum arcun ipsi Angulo circumiacentium est tanquem proportio quadrati sinus recti totius ad id, quod sub sinibus arcuum dicto Angulo circumpositorum continetur rectangulum.

En tot triangle esfèric construït a partir d'arcs cercles, la raó del sinus versus de qualsevol angle a la diferència de dos sinus versus, dels quals un és [el sinus versus] del costat que substendeix aquest angle mentre l'altre és [el sinus versus] de la diferència dels dos arcs que formen l'angle, és com la raó del quadrat de tot el sinus recte al producte rectangular dels sinus dels arcs col·locats al voltant de l'angle mencionat.

La resposta de Clavius a la carta de Curtz és donada en el lema LIII del llibre I, i també en el llibre III de l'*Astrolabium*, utilitzant el mètode de la prostafèresi que recentment havia estudiat Ursus.

La demostració de Clavius de la fórmula prostaferèsica

"Totes les qüestions que solen resoldre's a través de sinus, tangents i secants, s'obtenen per la sola prostafèresi, és a dir, per la sola addició i substracció, sense la laboriosa addició i multiplicació de nombres.

Fa tres o quatre anys, Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus va editar cert llibret en el que entre altres coses proposa un invent certament agut i ingeniós, amb el que per la sola prostafèresi resol la major part dels triangles esfèrics. Però com creu que això només pot fer-se quan s'empren sinus en la regla de proporcions i el *sinus totus* ocupa el primer lloc, intentarem nosaltres fer aquesta doctrina més general, de manera que no s'apliqui només a sinus i quan el sinus totus ocupi el primer lloc en la regla de les proporcions, sinó també a tangents, secants i altres nombres, i tant si el *sinus totus* està al principi de la regla de les proporcions, o al mig, o finalment [p. 179] no intervé per a res: la qual cosa és totalment nova i plena de delit i plaer.

1. Doncs sempre que és, com el sinus totus al sinus d'un arc, el sinus d'un altre arc a certa quantitat, si es suposen donats aquests dos arcs que es requereixen per a la prostafèresi: sumi's al menor el complement del major, i guardi's el sinus de l'arc compost. [Si $\frac{1}{\sin a} = \frac{\sin b}{x}$, i $a < b$, guardi's $S_1 = \sin(90° - b + a)$]. *I si l'arc menor fora igual al complement de l'arc major (el que succeeix quan els dos arcs diferents donats completen un quadrant)* *la meitat del sinus guardat serà el quart nombre proporcional buscat.* [Si $a = 90° - b$, aleshores $x = \frac{1}{2}S_1$, o sigui en la nostra àlgebra: $x = \sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(b - a)$]. *Però si l'arc menor fora menor que el complement (el que succeeix quan els dos arcs donats són conjuntament menors que un quadrant), restat l'arc menor del complement del major per a tenir la diferència dels arcs que abans van ser sumats, i tregui's del sinus gardat de l'arc compost anterior el sinus d'aquesta diferència. Doncs la meitat d'aquest nombre que queda serà el quart nombre proporcional buscat.* [Però si $a < 90° - b$, aleshores $S_2 = \sin(90° - b + a) - \sin(90° - b - a)$, i $x = \frac{1}{2}S_2$, és a dir: $x = \sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(b - a) - \frac{1}{2}\cos(b + a)$, que és la fórmula prostaferèsica].

Si finalment l'arc menor fora major que el complement del major (el que succeix quan els dos arcs donats són conjuntament majors que el quadrant) restat de l'arc menor el complement del major, perquè resulti la diferència d'aquests dos arcs que van ser sumats conjuntament, sumi's el sinus d'aquesta diferència al sinus guardat de l'arc superior completat. Ja que la meitat d'aquesta suma serà el quart nombre proporcional buscat [Si, finalment, $a > 90° - b$, aleshores $S_3 = S_1 + \sin(a + b - 90°)$, i $x = \frac{1}{2}S_3$, és a dir, tenint en compte el signe del sinus, és també: $x = \sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(b-a) - \frac{1}{2}cos(b+a)$, fórmula prostaferèsica].

I aquesta és la regla de l'esmentat autor, que es demostrarà així. En la primera d'aquestes figures és [72], com el sinus totus **EG** a GK, sinus de l'arc **GD**, així Ei, sinus de l'arc **ID**, o **HM**, al sinus buscat **iL**. I donat que l'arc

[72] (cf. 4 del 6è)

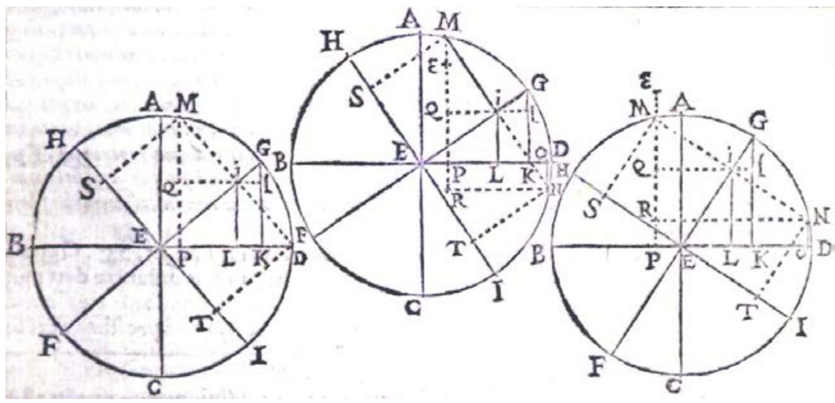


Figura 60: Figures A, B, C

menor **GD** és igual al DG, complement de l'arc major **ID** (o, si GD fora major, e ID menor; el menor ID és igual al DI, complement de l'arc major GD), resulta com PQ, que és [73] la meitat del sinus MP de l'arc MD compost de **DG**, l'arc menor, i GM, complement del major **HM**, resulta [74] igual al quart sinus buscat **iL**. I si l'arc GD fora major, e ID menor, de totes maneres MP serà el sinus de l'arc MB compost aleshores de HM, el menor, i HB, el complment del major GD.

[**EG** (=1)/GK (=sin **GD**) = Ei (= sin **ID** = sin **HM**) / **iL**, i donat que en aquest cas és **GD** = DG (=90°- **ID**), suposant **ID** > **GD** (o si GD> ID, seria **ID** = DI (=90° - GD)), resulta PQ (= 1/2 MP = 1/2 sin MD) = **iL** (= 1/2 sin (**DG** + GM)) = 1/2 sin (**DG** + 90°- **HM**)]

En la segona figura i en la tercera és també [75], com el sinus totus **EG**, a GK, sinus de l'arc **GD**, així és Ei, el sinus de l'arc **IN**, o **HM**, al sinus

[73] (cf. 2 del 6è)
[74] (cf. 34 del 1er)
[75] (cf. 4 de 6è)

iL buscat. I donat que en la segona figura l'arc menor **GD** és menor que el GN [**p. 180**], complement de l'arc major **IN**, (o si **GD** fora major e **IN**, menor; el menor **IN** seria menor que ID, complement de l'arc major **GD**) resulta que, restant el sinus RP de l'arc-diferència DN, és a dir, restant M ϵ, igual al RP, de MP, sinus de l'arc MD, compost de l'arc menor **DG** i GM, complement del major **HM**, la recta PQ, que és la meitat del que queda ϵ P, [76] com tota QR, sigui la meitat de tot MR [77], serà igual al sinus buscat **iL**. I si l'arc **GD**, fora major i **IN** menor, MP serà amb tot, el sinus de l'arc MB, compost del aleshores arc menor **MH**, i HB, complement de l'arc major **GD**.

I en la tercera figura, donat que l'arc menor **IN** és major que el ID, complement de l'arc major **GD** (o si **GD** fora menor e **IN** major; el menor **GD** excediria al GN, complement de l'arc major **IN**), resulta que, afegint el sinus RP de l'arc-diferència DN, és a dir afegint M ϵ, igual al RP, a MP, sinus de l'arc MB, constituït de l'arc menor **HM** i de HB, complement del major **AH**; la recta PQ, que és la meitat de tota la recta composta ϵ P, [78] com la meitat del MR resulta QR, [79] serà igual al sinus buscat **iL**. I si l'arc **GD** fora menor i el **IN** major, de totes maneres serà MP, sinus de l'arc MD, constituït aleshores de l'arc menor **GD**, i de GM, complement del major **HM**.

[**EG** (=1) / GK (= sin **GD**) = Ei (= sin **IN** = sin **HM**) / **iL**, i donat

[76] (cf. 2 del 6è)
[77] (cf. 34 del 1r.)
[78] (cf. 2 del 6è)
[79] (cf. 34 del 1r)

que en aquest cas és **GD** $<$ GN (90° - **IN**), suposant **IN** $<$ **GD** (si **GD** $<$ **IN**, seria **GD** $>$ GN (= 90° - **IN**)), resulta que MP (= sin MB = sin (**HM** + HB (= 90° - **AH**))) + RP (= sin DN = M ϵ) = ϵ P, i PQ (= 1/2 ϵ P) = **iL** és el sinus buscat, per ser QR = 1/2 MR. I si **GD** $>$ **IN**, MP = sin MB = sin (**MH**+ (90°- **GD**)).]

I en el que que dos arcs, separats fossin iguals, ha de prendre's un dels dos com complement, i considerar l'altre com menor."

Clavius dóna a continuació un exemple d'aplicació de la fórmula prostaferèsica al càlcul d'un triangle esfèric amb dades astronòmiques:

"[Suposem], per exemple, que haguem d' investigar la declinació grad. 17, min. 45 II. Donat que és com el sinus totus al sinus de la màxima declinació, així, el sinus de la distància d'un punt donat de l'eclíptica à, pròxim al punt de l'equinocci, al sinus de la declinació d'un cert punt donat, com vam demostrar en el lema 18, així serà un exemple de prostafèresi."

	G	M		G	M		
Arc màx. declin.	23	30	Compl. Major	12	15	Nom. major és menor q.	
Dist. a equinocci	77	45	Menor	23	30	Comp. idenfiet afegit	
Suma del complement i el menor				35	45	sinus	5842497
Diferència entre el complement i el menor				11	15	sinus	1950903
sinus trobat			3896700	Suma de sinus			7793400
Declinació corresp.			G.22, M. 56?	Meitat o sinus declin.			3866700

No aborda, doncs, la demostració del teorema del cosinus per a triangles esfèrics, i en el moment de presentar de nou la resolució de triangles a l'*Astrolabium*, torna a resoldre els triangles oblicuangles subvidint-los en dos de rectangles.

Finalment seria Bartomeu Pitiscus qui l'any 1595 presentara la primera demostració del teorema del cosinus, primer en un annex del llibre *Sphaericorum libri tres methodicé conscripti et utilitbus schoolis expositi* de A. Scultetus, i en 1600, on presenta la versió revisada de la seva obra en el llibre *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque*, publica a Augsburg. Està dividit en tres seccions, la primera de les quals està dedicada a la trigonometria plana i esfèrica. Aquesta secció està dividida en cinc llibres. El quart d'ells està dedicat a la demostració de quatre teoremes fundamentals de la trigonometria esfèrica, l'últim dels quals és la del teorema del cosinus. A aquests quatre teoremes dedicarem la secció següent.

5.11 Llibre quart de la trigonometria de Bartomeu Pitiscus de Grunberg sobre la mesura dels triangles esfèrics

Axioma primer [Lema 1]

En una successió de triangles esfèrics rectangles que tenen en las bases [que són catets] un angle agut en comú: els sinus de totes les hipotenuses i altures [que són els restants catets]

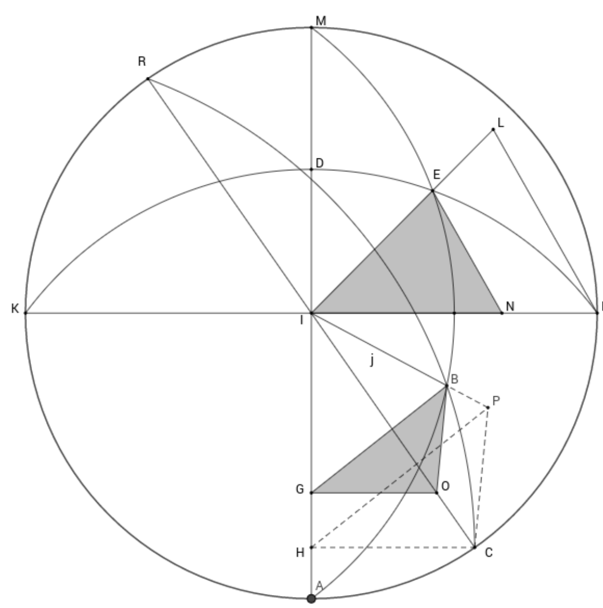


Figura 61: Esquema 1

(p. 75) són proporcionals entre si.

EXPLICACIÓ. Sigui l'hemisferi mostrat $KMFAD$. I siguin en ell: l'horitzó [l'equador] $KMFA$; i D el seu pol. Els cercles que passen per aquest pol D: [els meridians] KDF i RDC tallen el [equador] en K, R, F i C segons angles rectes, per la proposició 57 de la Part 1. I el [cercle] obliquo MEA talla al vertical FDF en angles rectes en E, donat que passa pels seus pols M i A, per la Proposició 57 de la Part 1, i a la vegada és tallat en dos quadrants ME i EA, per la Proposició 56 de la Part 1. En ABC i AEF, i en ells les hipotenuses són AB i AE, les altures BC i EF, i les bases AC i AF. I l'angle agut comú en les bases AC i AF és el BAC o EAF. Finalment, els sinus de les hipotenuses AB i AE són les rectes GB i IE, que és un radi; i els sinus de les altures BC i EF són les rectes BO i EN, tot per la Proposició 7 de la Part 2. Puc ja afirmar, que aquests sinus de les hipotenuses i de les altures, a saber GB i IE, i BO i EN són tots proporcionals entre sí; i, per tant, donats tres qualssevol pot deduir-se el quart. Més clarament afirmo que:

$\frac{IE}{EN} = \frac{GB}{BO}$, i a la vegada $\frac{GB}{BO} = \frac{IE}{EN}$, i en canvi $\frac{EN}{IE} = \frac{BO}{GB}$

O, transposant els termes intermedis, per la Proposició 42 de la Part 1,

$\frac{IE}{GB} = \frac{EN}{BO}$, i a la vegada $\frac{GB}{IE} = \frac{BO}{EN}$, i en canvi $\frac{EN}{BO} = \frac{IE}{GB}$.

DEMOSTRACIÓ. Doncs si connectes els sinus GB i BO mitjançant la recta BO, formant així el triangle GBO, resulta evident que els triangles GBO i IBN són equiangles. En primer lloc, perquè (pàg. 76) les recte EN i BO cauen perpendicularment sobre el pla [equatorial] MFC, segons la tesi i la [Prop.]3 del Cap. 7 de la Part 2, i per tant [només poden] formar angles rectes amb totes les línies traçades en aquest pla, per la qual cosa els angles

ENI i BOG són rectes. A més, donat que les rectes IE i GB són paral · leles entre si, per [la Prop.] 38 de la Part 1, ja que són ortogonals a la mateixa recta IA, per [la Prop.] 3 del Cap. 7 de la Part 2, i [donat que] tot el pla MEA està inclinat per totes parts amb el mateix angle respecte al pla MFA, [resulta que] també les paral · leles traçada en ell IE i GB, respecte a les paral · leles IN i GO sotmeses al mateix pla MEA, estan inclinades en aquest mateix angle, i per tant els angles EIN i BGO són iguals. I per conseqüent els triangles IEN i GBO tenen ja dos angles iguals; per tant també serà igual el tercer, per [la Prop] 49 de la Part 1, i els triangles IEN i GBO són equiangles. I, essent equiangles tenen també proporcionals els costats entre angles iguals, per [la Prop.] 46 de la Part 1. I, per tant:

$$\frac{IE}{EN} = \frac{GB}{BO}$$

IL · LUSTRACIÓ per números. Siguin donades les hipotenuses $AE = 90°$ i $AB = 42°$, junt amb l'altura $EF = 48°25'$. Busqui's l'altura BC.

Dels arcs donats: $AE = 90°$; $AB = 42°$; $EF = 48degree25'$.

Els sinus són: IE = 100.000; GB = 66.913; EN = 74.799

Afirmo, doncs:

IE=100.000 / EN=74.799 = GB=66.913 / BO=50.050

I és així que al sinus 50.050 correspon en les taules l'arc $30°2'$.

Per tant l'altura BC és $30°2'$.

Siguin donades a la vegada ambdós hipotenuses junt amb els seus senus, com abans. Però de les altures sigui donada ara (p. 77) l'altura $BC = 30°2'$ junt amb el seu sinus BO=50.050. I busqui's l'altura EF. *Afirmo:*

$GB = 66.913/BO = 50.050 = IE = 100.000/EN = 74.799$

I és així que al sinus 74.799 correspon en les taules l'arc $48°25'$,

Aleshores l'arc [l'altura] EF és $48°25'$.

Siguin donades en canvi ambdós altures EF y BC, junt amb la hipotenusa major AE. I busqui's la hipotenusa menor AB. *Afirmo:*

$EN = 74.799/IE = 100.000 = BO = 50.050/GB = 66.913$

I és així que al sinus 66.913 correspon en les taules l'arc $42°$.

Aleshores la hipotenusa BC és $42°$.

Axioma segon [Lema 2] (p. 77)

En la successió de triangles esfèrics rectangles que tenen en les bases un angle agut en comú: Els sinus de les bases i les tangents de les altures són proporcionals entre si.

Explicació. En la figura 61 i en els mateixos triangles esfèrics AEF (p. 78) i ABC, en els que els sinus de les bases AF i AC són IF i HC, però les tangents de les altures EF i BC són LF i PC. Afirmo: Aquests sinus de les bases i tangents de les altures, és a dir, els sinus IF i HC i les tangents LF i PC són tots proporcionals entre si; i per tant, donats tres qualssevol, podem deduir el quart. Amb més claredat, afirmo que:

$\frac{IF}{LF} = \frac{HC}{PC}$, i a la vegada $\frac{HC}{PC} = \frac{IF}{LF}$, i en canvi $\frac{LF}{IF} = \frac{PC}{HC}$.

O transposant els termes intermedis, per la Propo. 42 de la Part. 1,

$\frac{IF}{HC} = \frac{LF}{PC}$, i a la vegada $\frac{LF}{PC} = \frac{IF}{HC}$, i en canvi $\frac{HC}{IF} = \frac{PC}{LF}$.

DEMOSTRACIÓ. Traçades les recte IL i HP queden completats així els triangles ILF i HPC; aquests triangles ILF i HPC seran equiangles, i, per tant, els seus costats proporcionals, per la [Prop.] 46 de la Part 1.

I aquests triangles ILF i HPC seran equiangles per ser rectes en F i C, i iguals en I i H, i per tant també en L y P, per la [Prop.] 49 de la Part 1.

En efecte, els angles F i C, és a dir IFL i HCP són rectes perquè les tangents dels arcs perpendiculars EF i BC, és a dir les recte LF i PC són perpendiculars a tot el pla del cercle MFA, per la tesi i per la [Prop.] 8 de la Part 2. Aleshores també [són perpendiculars] a les línies IF i HC traçades en aquest pla.

Finalment, els angles I i H, és a dir LIF i PHC, són iguals, perquè les recte IL i HP, traçades en el mateix pla, són paral · leles tant entre si com respecte al pla circular inclinat KDF. Per tant estan inclinades amb angles iguals a les mencionades paral · leles IF i HC; les quals IF i HC són paral · leles perquè ambdues són ortogonals a la recta IA, per la [Prop.] 3 del Cap. 7 de la Part 2.

I les rectes IL i HP (p. 79) són paral · leles: perquè son costats de dos triangles ILF i HPC que tots els seus plans són paral · lels entre si, donat que estan aixecats sobre les bases IF i HP perpendicularment paral · leles (al ser perpendiculars les tangents CP i FL). Finalment les rectes IL i HP estan traçades sobre el mateix pla del semicercle MBA; i al tallar IL quan talla el cercle MEA en el punt E, no pot sinó incidir a través del pla d'aquest cercle. Anàlogament la secant IP quan talla el mateix cercle MEA en el punt B no pot sinó incidir a través del pla d'aquest mateix cercle. I aquest pla, per ser pla, si s'estén segons la línia recta IP, cauria sobre la tangent PC, en el punt P. Per tant, el punt P estarà col · locat en el pla del cercle MEA suficientment estés. Però en aquest mateix pla està col · locat el punt H. Aleshores la recta PH és una línia interposada entre dos punts del mateix pla, i per tant traçada sobre aquest pla. Coses totes que hauran de demostrar-se.

IL · LUSTRACIÓ per números. Siguin donades les bases AF =

$90°$; $AC = 30°52'$ junt amb l'altura $EF = 48,25$. I busqui's l'altura BC.

De les bases $AF = 90°0'$; $AC = 30°52'$

Els sinus són $IF = 100.000$; $HC = 51.304$

De l'altura EF=48,25

La tangent és LF=112

Afirmo, doncs:

IF = 100.000 / LF=112.699 = HC = 51.304 / PC = 57.819(tang).

I és així que la tangent 57.819 correspon a les taules a l'arc $30°2'$

Aleshores l'altura BC és $30°2'$

Siguin donades a la vegada ambdues bases amb els seus sinus, (p.80), com abans. Però de les altures sigui donada ara l'altura $BC = 30°12'$ amb la seva tangent $CP = 57.819$. I busqui's l'altura EF.

Afirmo:

HC = 51.304 / CP = 57.819 = IF = 100.000 / LF = 112.699(tang)

I és així que la tangent 112.699 correspon a les taules a l'arc $48°25'$

Aleshores l'altura EF és de $48°25'$

Siguin donades en canvi ambdues altures EF i BC i les seves tangents LF i PC, junt amb la seva base major AF i el seu sinus IF. I busqui's la base menor AC, o millor, el seu sinus HC.

Afirmo:

$$LF = 112.699(tang) \;/\; IF = 100.000(radio) = PC = 57.819(tang) \;/\; HC = 51.304(sin).$$

$$51.304 = \sin 30°52', \textit{ aleshores la base menor } AC \textit{ és } 30°52'.$$

Apèndix. A partir d'aquests dos axiomes [lemes] i de les seves explicacions i demostracions entendrà el lector agut: per què no se pot argumentar dels sinus de les bases als sinus de les altures i viceversa, mentre que se pot argumentar dels sinus de les hipotenuses als sinus de les altures i viceversa: perquè els sinus de les bases i de les altures no corresponen als mateixos triangles rectilinis. De la qual cosa, per altra part, veuràs que inclús doctíssim matemàtics no pararen compta.

Axioma tercer [Teorema 1, del sinus]

En tots els triangles esfèrics: els sinus dels costats són directament proporcionals als sinus dels angles oposats.

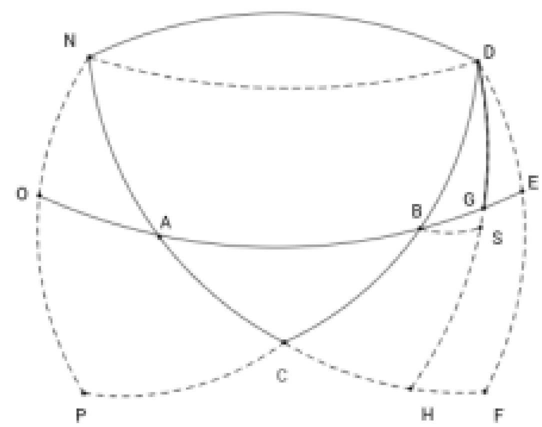


Figura 62: Esquema 2

EXPLICACIÓ. Sigui, en primer lloc, el triangle esfèric (p. 81) ABC, rectangle en C. [Siguin] doncs, perllongats els seus costats AB , AC i CB fins a assolir un quadrant, resultant AE, AF i CD. I [siguin] baixats des del pol del quadrant AF, o sigui el punt D, altres dos quadrants DF i DH. I així [seran] constituïts tres triangles nous: els rectangles BDE i GDE, i l'obliquangle BDG. Afirmo que:

En el triangle rectangle ABC

$$\frac{[\sin]ACB}{[\sin]AB} = \frac{[\sin]ABC}{[\sin]AC} = \frac{[\sin]BAC}{[\sin]BC}$$

O transposant els termes medis, per [Prop.] 42 de la Part 1,

$$\frac{[\sin]ACB}{[\sin]ABC}=\frac{[\sin]AB}{[\sin]AC},\ i\ \frac{[\sin]ACB}{[\sin]BAC}=\frac{[\sin]AB}{[\sin]BC},\ etc.$$

I anàlogament en el triangle esfèric obliquangle BDG afirmo que:

$$\frac{[\sin]BDG}{[\sin]BG}=\frac{[\sin]BGD}{[\sin]BD}=\frac{[\sin]DBG}{[\sin]DG},\ etc.$$

DEMOSTRACIÓ. Pel que fa referència al triangle esfèric rectangle ABC, en ell [són equivalents a l'angle recte] ACB i [el quadrant d'arc]AE. I anàlogament [l'angle] BAC i [l'arc] EF, o bé [l'angle] ABC i [l'arc] OP, ja que els angles i la mesura d'aquests angles (com EF és la mesura de l'angle EAF, i OP la de l'angle ABC, així també ND o els seus iguals AE o OB són la mesura de l'angle ACB, per [la Prop.] 57 de la Part 1) tenen la mateixa magnitud. Així tan se val que digui:

$$O\ bé\ \frac{[\sin]ACB}{[\sin]AB}=\frac{[\sin]BAC}{[\sin]BC},\ O\ bé\ \frac{[\sin]AE}{[\sin]AB}=\frac{[\sin]EF}{[\sin]BC}$$

I aquesta [última línia] és vàlida pel primer axioma [lema 1] dels triangles esfèrics. Aleshores també l'anterior.

I és el mateix que digui:

$$O\ bé\ \frac{[\sin]ACB}{[\sin]AB}=\frac{[\sin]ABC}{[\sin]AC},\ O\ bé\ \frac{[\sin]OB}{[\sin]AB}=\frac{[\sin]OP}{[\sin]AC}$$

(p. 82) I aquesta [última línia] és vàlida pel primer axioma (lema 1) dels triangles esfèrics. Aleshores també l'anterior.

Però [dues] coses iguals a una tercera són iguals entre si.

I segons hem demostrat:

$$\frac{[\sin]ACB}{[\sin]AB} = \frac{[\sin]ABC}{[\sin]AB},\ i\ \frac{[\sin]ACB}{[\sin]AB} = \frac{[\sin]BAC}{[\sin]BC}$$

Per tant, també $\frac{[\sin]ABC}{[\sin]AC} = \frac{[\sin]BAC}{[\sin]BC}$

I, a més, en allò que es refereix al triangle esfèric obliquangle BDG. Com per la demostració dels triangles rectangles esfèrics són

$$\frac{[\sin]DB}{[\sin]DBE} = \frac{[\sin]DE}{[\sin]DBE},\ i\ \frac{[\sin]DG}{[\sin]DEG} = \frac{[\sin]DE}{[\sin]DGE}$$

O, per [la Prop.] 1 del Cap. 7 de la Part 2, $\frac{[\sin]DG}{[\sin]DEG} = \frac{[\sin]DE}{[\sin]DGB}$.

Per tant, per permutació dels termes proporcionals, serà també:

$$\frac{[\sin]DG}{[\sin]DB} = \frac{[\sin]DBE}{[\sin]DGB},\ o\ bé\ \frac{[\sin]DBG}{[\sin]DGB},\ etc.$$

I anàlogament, si des del punt B es traça la perpendicular a l'arc S [=a l'arc BH al que talla en S].

Perquè aleshores serà

$$\frac{[\sin]BD}{[\sin]BSD} = \frac{[\sin]BS}{[\sin]BDS},\ i\ \frac{[\sin]BG}{[\sin]BSG} = \frac{[\sin]BS}{[\sin]BGS}$$

O, per [la Prop.] 1 del Cap. 7 de la Part 2, $\frac{[\sin]BG}{[\sin]BSG} = \frac{[\sin]BS}{[\sin]BGD}$.

Per tant, serà també:

$$\frac{[\sin]BG}{[\sin]BD} = \frac{[\sin]BDS}{[\sin]DGB}, o\ bé\ \frac{[\sin]BDG}{[\sin]DGB}, etc.$$

.

Ja que si són: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, i $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(p. 83) serà també $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

IL · LUSTRACIÓ per números. Així doncs, al TE rectangle ABC: Primer, siguin donats ACB, AB i ABC, amb els mateixos valors d'abans. I busqui's el costat AC, oposat a l'angle ABC. Afirmo:

$$\sin(ACB = 90°) = 100.000/\sin(AB = 42°) = 66.913 =$$
$$= \sin(ABC = 50°4') = 76.672/\sin(AC = 30°52') = 51.303$$

O viceversa: siguin donats AB, ACB i AC, i busqui's ABC. Afirmo:

$$\sin(AB = 42°) = 66.913/\sin(ACB = 90°) = 100.000 =$$
$$= \sin(AC = 30°52') = 51.303/\sin ABC = 76.672 =$$
$$sinusdel'arcoangledе50°4'.$$

Després, siguin donats ACB, AB i BAC, i busqui's BC. Afirmo:

$$\sin(ACB = 90°) = 100.000/\sin(AB = 42°) = 66.913 =$$
$$= \sin(BAC = 48°25) = 74.799/\sin BC = 50.050 =$$
$$sinusdel'arcoanglede30°2'.$$

O viceversa: siguin donats AB, ACB i BC i busqui's BAC. Afirmo:

$$\sin(AB = 42°) = 66.913/\sin(ACB = 90°) = 100.000 =$$
$$= \sin(BC = 30°2') = 50.050/\sin BAC = 74.799 = sinusde 48°25'.$$

Finalment, siguin donats BAC, BC i ABC, i busqui's AC. Afirmo (p.84):

$$\sin(BAC = 48°25') = 74.799/\sin(BC = 30°2') = 50.050 =$$
$$= \sin(ABC = 50°4') = 76.672/\sin AC = 51.303 = sinusde 30°52'.$$

O viceversa: siguin donats BC, BAC i AC, i busqui's ABC. Afirmo:

$$\sin(BC = 30°2') = 50.050/\sin(BAC = 48°25') = 74.799 =$$
$$= \sin(AC = 30°52') = 51.303/\sin ABC = 76.672 = \textit{sinus de } 50°4'.$$

Anàlogament al TE oblicuangle BDG:

Primer, siguin donats DBG, DG i BDG, i busqui's BG. Afirmo:

$$\sin(DBG = 50°4') = 76.679/\sin(DG = 45°58') = 71.894 =$$
$$= \sin(BDG = 28°14') = 47.306/\sin BG = 44.354 = \textit{sinus de } 26°20'.$$

Després, siguin donats BG, BDG i DG, i busqui's DBG. Afirmo:

$$\sin(BG = 26°20') = 44.351/\sin(BDG = 28°14') = 47.306 =$$
$$= \sin(DG = 45°58) = 71.890/\sin DBG = 76.672 = \textit{sinus de } 50°4'.$$

Finalment, siguin donats DG, DBG i DB, i busqui's DGB. Afirmo:

$$\sin(DG = 45°58') = 71.890/\sin(DBG = 50°4') = 76.672 = = \sin(DB = 59°58') = 86.573/\sin DGB = 92.331 = \textit{sinus de l'angle obtús de } 112°35'$$

Axioma quart: [Teorema del cosinus]

En tots els triangles esfèrics $[ABC]$:

Si dos costats, cadascun menor d'un quadrant, els composes primer ells entre sí i després el costat menor amb el complementari del major $[a, b < 90°, a < b;\ compostos : primer\ C_1 = a + b; posterior\ C_2 = a + 90° - b]$; i al sinus de l'arc compost posterior li restes el sinus del complement del compost anterior $[R = \sin(a + 90° - b) - \sin(90° - a - b),\ si\ a + b < 90°]$, o li sumes l'excés $[S = \sin(a + 90° - b) + \sin(a + b - 90°),\ si\ a + b > 90°]$

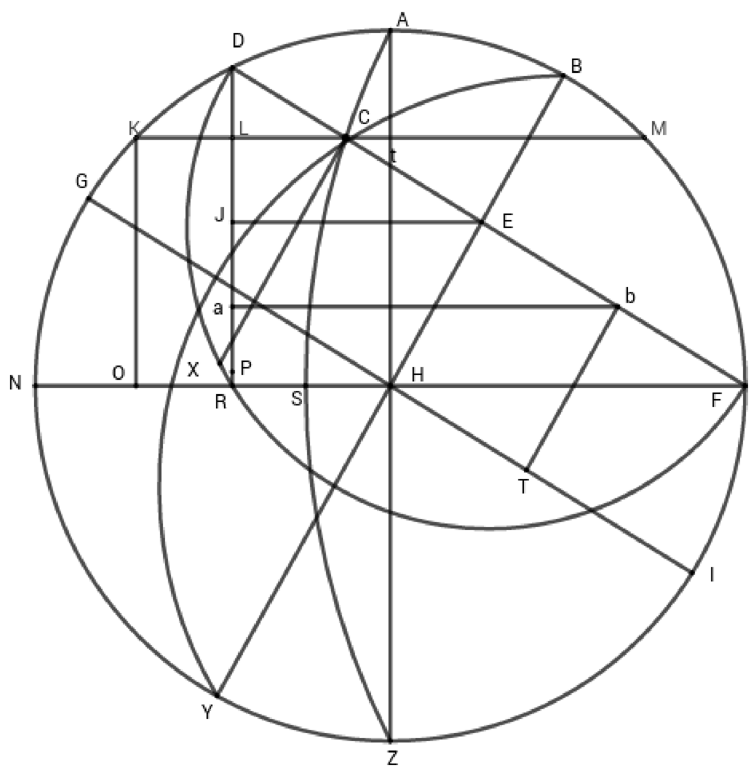


Figura 63: Esquema 3

És:

Com el Radi, a la meitat del segment que resulta d'aquesta resta o suma; així el sinus versus de l'angle comprés entre els esmentats costats, al segment que resta del sinus de l'arc compost posterior deixa el sinus complementi del tercer costat $[1/1/2(R \text{ } o \text{ } b\acute{e} \text{ } S) = (1 - \cos C)/(\sin(a + 90° - b) - \cos c)]$; o bé del qual restat el sinus de l'arc compost posterior deix al sinus de l' excés del tercer costat [o bé $1/1/2(R \text{ } o \text{ } b\acute{e} \text{ } S) = (1 - \cos C)/(\sin(a + 90° - b) + \sin(c - 90°))$], suposem, quan $c > 90°$, aleshores $\cos c = -\cos(180° - c) = -\sin(c - 90°)$. Per a, b, c i $a + b < 90°$, la fórmula que aporta el Axioma 4 es la primera, substituint en ella R:

$$2\cos(b - a) - 2\cos c = (1 - \cos C)[\cos(b - a) - \cos(b + a)]$$

Aïllant $\cos c$ i separant els termes en només a i b dels termes que multipliquen a $\cos C$, resulta:

$$\cos c = \frac{1}{2}[\cos(b + a) + \cos(b - a)] - \frac{1}{2}[\cos(b + a) - \cos(b - a)]\cos C$$

I sabent que

$\cos(b + a) = \cos b \cos a - \sin b \sin a$

$\cos(b - a) = \cos b \cos a + \sin b \sin a$

resulta la nostra usual fórmula del cosinus:

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C$$

6 Conclusions

Per realitzar aquesta tesi he estudiat diversos aspectes inèdits dels apunts manuscrits de Baltasar de Torres, primer professor de Matemàtiques del *Collegio Romano*, i de l'obra gnomònica i trigonomètrica del també jesuïta Cristopher Clavius.

Es presenta per primera vegada l'índex del manuscrit, que abasta continguts diversos entre els que destaquen els vinculats a les matemàtiques. Presentem les seves reflexions personals sobre la programació que creia convenient impartir, i el seu interès per disposar de l'obra de més de vint matemàtics de tots els temps i de diversos instruments que podien il·lustrar els ensenyaments. De la seva anàlisi es pot concloure que Torres volia que les Matemàtiques ocupessin un lloc important en la formació dels futurs jesuïtes.

De les diverses propostes de programació a desenvolupar, es dedueixen els desacords existents dins de la comunitat jesuítica respecte als continguts a ensenyar i al paper que les matemàtiques havien de tenir en l'educació jesuítica, tenint present a més que en aquells moments s'estava al mig de la discussió de si les matemàtiques eren o no una ciència aristotèlica, una autèntica ciència. Les opinions de Jeroni Nadal i Benito Perera seran especialment influents en sentits diversos. Un altre factor que va tenir influència sobre els plans d'estudis va ser l'acceptació d'alumnes externs del *Collegio Romano*.

Entre les pàgines 150 i 160 del manuscrit es troba copiada una obra de Ptolemeu que Torres cita com *Claudij Ptholmei liver de analem[m]ate*, coneguda actualment com l'*Analemma*. Torres, considerant-la una font important pel càlcul de rellotges de Sol, declara la seva intenció d'estudiar-la, la qual cosa sembla que va interrompre aviat, ja que no la va entendre.

La primera part d'aquest treball es centra sobre aquesta còpia de Torres de l'*Analemma*. La situo dins de la seva tradició textual, i estudio i presento el seu contingut de forma comprensible i detallada.

La transmissió de l'*Analemma* de Ptolemeu (100 – 170 d. C.) ha estat lligada a un conjunt de vicissituds decisives, algunes providencials per a la seva supervivència al llarg del temps, tal i com ha succeït en altres obres clàssiques.

A partir de la seva elaboració s'obrí una etapa de mil cent anys de la que només se sap que va ser copiada successivament, potser sense dedicar atenció al seu significat i a la seva divulgació. No he trobat cap versió àrab d'aquesta obra, per la qual cosa es pot deduir que, o no va ser coneguda en l'àmbit de la ciència àrab, o bé no es va considerar útil per a la resolució de diversos problemes que es van plantejar. En canvi, en l'àmbit d'aquesta ciència es van utilitzar mètodes analemàtics que tenen els seus orígens en èpoques anteriors a Ptolemeu, probablement procedents de Diodor d'Alexandria.

Tan llarg període de temps comportà la progressiva corrupció del text original, que implicà modificacions de lletres i nombres i l'aparició d'espais en blanc. No es pot assegurar que el text que coneixem correspongui a l'obra completa, ja que és possible que algun fragment s'hagués perdut. De fet, només tenim notícies, fora del palimpsest trobat a principis del segle XIX, de l'existència d'una còpia escrita en grec, de procedència desconeguda, que arribà a les mans de Moerbeke i que desaparegué poc temps després. Aquesta desaparició posa de relleu el paper transcendental d'aquest famós traductor autor de la primera versió llatina identificada de l'*Analemma* al voltant de 1270. Moerbeke va fer una traducció literal, ja que no va entendre el text, la qual cosa va permetre 300 anys després la seva reconstrucció quan aparegué algú competent per fer-la. Aquesta traducció va anar passant a mans de diverses persones al llarg del temps.

No és fins uns 180 anys després de l'elaboració de la versió llatina, que tornem a tenir notícies de l'*Analemma*. Quan va renéixer l'interès per les obres clàssiques de matemàtiques al voltant de 1450, va aparèixer l'interès per la comprensió del seu contingut. Aquest interès es manifestà primerament d'una forma tímida fent anotacions marginals al manuscrit de Moerbeke. Finalment, va ser el cardenal Cervini, un dels seus successius propietaris, qui va impulsar la reconstrucció i publicació de l'obra, garantint d'aquesta manera la supervivència per sempre de l'*Analemma*. Va ser Federico Commandino qui va rebre aquest encàrrec.

D'aquest impuls participà Baltasar de Torres, primer professor de matemàtiques del *Collegio Romano*, qui de seguida intentà incloure les idees de l'obra en el seu pla d'estudis. Aquí hem confirmat les dificultats quasi insuperables que tenien les obres clàssiques per ser enteses i divulgades, agreujades per la urgència que suposava utilitzar-les en l'àmbit docent de manera immediata, i el poc temps de què disposà Torres, qui morí ben aviat (1561).

Tanmateix la seva còpia és una de les quatre que han arribat a nosaltres i que veu la llum en aquest treball.

El fet de copiar una obra com l'*Analemma*, indica els intents de modernitzar l'ensenyament del rellotges de sol en les seves fonts més serioses. És, doncs, un símbol de la voluntat de transmetre bones matemàtiques per part de Torres. Clavius, el seu successor, pocs anys després estudiarà, criticarà l'*Analemma* i introduirà una gnomònica més profunda i estructurada. Interessa saber com va continuar i quin influx va tenir en l'organització dels estudis de rellotges en la docència i en la realització material, tant a Roma com a Baviera.

És Commandino, amic i col·laborador de Torres, qui amb dubtes i algun error aconsegueix reconstruir-la feliçment i publicar-la el 1562. Ho va fer a partir del seus coneixements matemàtics i lingüístics, imprescindibles per abordar una tasca com aquesta, malgrat els dubtes per les mancances i corrupcions del text, i també per la seva extensió. Commandino cregué raonadament que Ptolemeu havia inclòs les aplicacions de l'*Analemma* a la construcció dels rellotges de Sol i les va elaborar per incloure-les en el seu llibre. Aquestes aplicacions les hem incorporat també en aquell treball. Tanmateix manifestà la seva cautela davant la possible aparició de la versió original del text ptolemaic. Amb aquesta reconstrucció i la resta de les seves obres, Commandino va col·laborar en proporcionar una nova visió de la matemàtica aplicada a la naturalesa que permeté més tard, discernir grans avenços científics.

Del mateix contingut del text es pot deduir que s'ha perdut una bona part de la tradició anterior a Ptolemeu en aquests assumpte. En efecte, Ptolemeu demostra únicament les seves aportacions originals, ometent les demostracions que suposadament havien estat fetes anteriorment i que no s'han trobat, la qual cosa complicà notablement la feina de Commandino.

L'aparició del palimpsest amb fragments grecs de l'*Analemma* va ser possible gràcies a la meticulositat i tècniques decolorants del seu descobridor Angelo Mai. Cal destacar el paper filològic de Heiberg en la reconstrucció dels fragments, i la seva posterior publicació. He realitzat la transcripció anotada de la còpia feta per Torres en relació amb la versió llatina de Heiberg i a la de Commandino, remarcant-ne les variacions i diferències respecte ambdues. A partir de les tres versions, he realitzat i presento la primera versió catalana de l'*Analemma* de Ptolemeu.

Respecte del text ptolemaic cal destacar la seva frescor, ja que aporta molta llum sobre el naixement i primeres passes de mètodes matemàtics consolidats avui en les branques de l'astronomia, la trigonometria, la geometria descriptiva o la gnomografia. En efecte, Ptolemeu introdueix amb tota precisió i de forma raonada, el concepte de coordenades com a eina imprescindible per fixar la posició d'un cos a l'esfera celeste, molt abans que Descartes presentés els sistemes de coordenades. En el mètode gràfic que descriu, fa servir de forma incipient el concepte d'abatiment geomètric en l'espai, i de forma més elaborada el de la projecció ortogonal. En l'anomenat mètode numèric, corresponent al que avui diem trigonometria plana, il·lustra la manera de fer càlculs rigorosos i precisos a partir de les taules de sinus. En l'última part descriu d'una manera força original el que avui seria una pràctica gnomogràfica.

He estudiat els tres procediments que descriu Ptolemeu per a calcular la posició del Sol en una latitud concreta (clima per en Ptolemeu), en un dia i hora concrets. Son presentats per primera vegada de forma comprensible i detallada, amb figures originals, excepte les primeres que procedeixen de Neugebauer.

En la segona part del treball, abordo per primera vegada l'estudi del tractament que Clavius va donar a l'*Analemma* de Ptolemeu després d'haver estudiat a fons les motivacions que el van conduir a incloure'l en la seva obra sobre rellotges. Tenia al seu abast la còpia manuscrita continguda en els apunts de Torres i també l'edició que en va fer Federico Commandino. La incorporà en el llibre VI de la seva *Gnomonica*, vinculant-la de nou a la construcció de rellotges de Sol. Però no va presentar una còpia del text ptolemaic, sinó que partint del seu estudi va constatar, per una banda, la perfecció del mètode gràfic per determinar els angles ptolemaics a partir d'un punt qualsevol pres directament de la figura geomètrica. Però per altra, es va adonar de les dificultats que apareixien en el moment de determinar el punt exacte corresponent a unes dades numèriques concretes i també les de concretar en números la mesura dels angles que s'han de calcular. Això va fer que ignorés completament l'instrument i el mètode nomogràfic que Ptolemeu havia presentat amb tanta cura. Dels seus comentaris es desprèn el rebuig de Clavius vers l'instrument, un disc a construir, reutilitzable, sobre el qual s'han de dibuixar unes línies permanents i unes escales graduades, a partir de les quals es poden obtenir els sis angles introduint-hi les dades inicials a través de tècniques nomogràfiques. Vàries qüestions impliquen que les solucions del problema que planteja Ptolemeu siguin inexactes. Les marques que calia fer sobre el disc, les línies que sobre la cera havia de dibuixar, el traçat de perpendiculars, la divisió d'un angle en sis parts iguals (el problema de la trisecció de l'angle) i la lectura de les marques finals sobre un angle graduat. Presento aquest instrument amb detall.

L'aportació de Clavius a l'obra ptolemaica consistí en desenvolupar el mètode numèric esbossat per Ptolemeu, fent ús dels mètodes de la resolució de triangles. D'aquesta manera podia obtenir amb molta més precisió les solucions del problema. L'entusiasme de Clavius pel càlcul *"per numeros"* és manifest. En la presentació de l'*Analemma* defensa l'ús d'aquest mètode quan es tracta d'obtenir amb precisió les solucions a un problema concret. D'aquesta manera va incorporar a l'*Analemma* tota la trigonometria plana i esfèrica del sinus, la qual provocà la pregunta de perquè només havia utilitzat aquesta en un dels seus corresponsals. Es factible pensar que era l'única que coneixia mentre redactava l'obra. Era la primera vegada que en el *Collegio Romano* s'aplicaven els mètodes de resolució de triangles a una obra clàssica. Citant a les fonts que utilitza i també a sí mateix en la presentació dels teoremes a utilitzar en aquesta aplicació, hem descobert que aquest coneixement trigonomètric, o una part important del mateix, Clavius ja el tenia ben estructurat, i que tal qual formaria part de la seva obra trigonomètrica que publicaria el 1586, tot i que mostra un coneixement molt més complet dels teoremes a emprar en la resolució de triangles, fent servir la tangent i la secant. Exposo de manera detallada els càlculs dels sis angles ptolemaics amb la trigonometria plana i esfèrica, tal qual els fa Clavius descrivint les proporcions corresponents sense utilitzar el llenguatge simbòlic, i també presento els seus càlculs utilitzant el llenguatge actual.

Aquesta descoberta possibilita en el futur la revisió de la cronologia de la incorporació i del desenvolupament de la trigonometria en el *Collegio Romano* de la mà de Clavius, i també fer la comparativa amb el desenvolupament de la trigonometria per part d'altres matemàtics coetanis. Si es localitza el manuscrit previ a la seva publicació, es podrà analitzar-lo i esclarir fins a quin punt tenia elaborada el 1581 o abans, la resolució de triangles plans i esfèrics, i també les taules trigonomètriques que publicaria el 1586.

He analitzat el contingut de l'obra trigonomètrica de Clavius. El presenta a la manera euclidiana, procurant sempre distingir tots els casos possibles aportant les demostracions dels teoremes i corol · laris corresponents fetes per ell mateix o per altres autors. Així ho va fer en la seva obra trigonomètrica on apareix, juntament amb la trigonometria del sinus, la de la tangent i secant. Afrontà la resolució de tots els casos de triangles, plans i esfèrics, rectangles o obliquangles de forma exhaustiva, els qual són aquí presentats.

Tot i que el teorema del cosinus per a triangles esfèrics pels angles era conegut des de feia molt de temps, no es disposava encara d'una demostració completa. Hem analitzat la posició de Clavius respecte aquell teorema. La seva recança a l'hora d'utilitzar fórmules sense haver-ne fet la demostració prèvia, el va obligar a obviar el seu ús quan precisava del teorema, i es decidí per descompondre el triangle no rectangle en dos de rectangles, o bé utilitzar el teorema de les tangents quan aquest era aplicable; en el primer cas, aplicava el teorema del cosinus per a triangles rectangles, del qual es coneixia la demostració feta pels matemàtics àrabs des de feia segles. Però en un moment donat, després d'haver resolt el cas en el que són coneguts els tres costats, Clavius reconegué que el mètode de descompondre'l en dos de rectangles era feixuc i molt llarg. Aleshores, com una excepció, va decidir enunciar el teorema del cosinus pels angles seguint l'enunciat de Regiomontanus, tot assenyalant que la seva aplicació faria molt més breu la resolució del cas.

La preocupació per assolir aquesta demostració es posà de manifest dins la comunitat acadèmica de corresponsals interessats per l'obra matemàtica de Clavius, que he analitzat amb detall. Alguns li van plantejar qüestions trigonomètriques diverses i li enviaren material procedent d'altres matemàtics amb l'objectiu que acabés d'obtenir la demostració i completar així la seva obra trigonomètrica. Mentrestant, Clavius treballava per optimitzar els càlculs que permetien obtenir amb més precisió els valors de les taules trigonomètriques. En concret, es va ocupar de la transformació de productes de funcions trigonomètriques en sumes i restes d'aquestes funcions, tenint present que els logaritmes encara no s'havien formulat. Clavius ho va fer aportant una demostració original i completa de la coneguda fórmula prostaferèsica, que va incloure en la seva obra l'*Astrolabium*, publicada el 1593, i que es presenta en aquest treball. No consta que explorés, però, la possibilitat d'utilitzar-la per aconseguir la desitjada demostració del teorema del cosinus pels angles. En la seves obres completes, *Opera Mathematica*, publicada el 1611, tampoc aparegué la demostració del teorema.

Finalment, seria Pitiscus qui demostrà el teorema per primera vegada, i que presentà en la seva obra *Trigonometriae sive de dimensione triangulorum* publicada el 1595. Amb l'estudi i presentació d'aquesta demostració finalitza aquest treball.

Apèndix A: Versió catalana de l'*Analemma*

Aquesta versió és la traducció de la versió llatina de l'*Analemma* que apareix al còdex *Baberinus Latinus 304* de Baltasar de Torres.

[C1 Primer fragment: introducció i definició dels angles]

[Capítol 1]

Mentre considerava, benvolgut Sirus, el que era o no raonable en els angles mesurats en la disciplina gnomònica, vaig arribar a admirar l'habilitat d'aquells homes en geometria i també en aquesta matèria, i a acceptar-ho amb molt de gust però sense aplicar-ho en tot.[80] I de cap manera vam reprovar el que resultava concordant amb la natura en els seus procediments, doncs les disciplines mateixes no fan més que proclamar que hi ha necessitat de una concepció més matemàtica en la filosofia natural, i una de més natural en la teoria matemàtica. Certament això no està permès per una persona que s'estima aprendre en tota puresa, cal però observar que, per diferenciar les seves maneres de pensar,[81] cadascun dels tractats no arribi a fer-se prou imperfecte. Així t'he enviat les coses de les que he adquirit una comprensió precisa en la disciplina mencionada, i és a tu de considerar resumidament on et sembla que elles han enriquit quelcom la intel·ligència, tant del raonable de les hipòtesis, com de la utilitat dels resultats obtinguts a través de

[80] Seguim la variant de Torres "non contedere autem ubique".

[81] Seguim la variant de Torres "propter differentiam cogitationum" que no és fácil d'explicar com error de lectura (dictam$\neq$differentiam).

l'analemma.

[Capítol 2]

Per tant, donat que cal que les dimensions corresponents a cada sòlid siguin determinades en posició, en número i en grandària, i per un altre costat tan sols satisfan aquesta propietat les que estan inclinades en angles rectes (totes les altres són indeterminades en el tipus i infinites en número), resulta que hi ha tan sols tres dimensions corresponents a cada sòlid, ja que tan sols tres eixos poden ser establerts amb angles rectes entre ells (més que tres, és impossible). I per això en una esfera tan sols tres diàmetres poden construir-se amb angles rectes entre ells, i tan sols tres grans cercles estan inclinats entre ells en angles rectes.

Dels grans cercles utilitzats en l'esfera del món, considerem:

[H = Horitzó] Un, anomenat horitzó, com el que separa l'hemisferi que està sota la terra del que està sobre la terra.

[M = Meridià] El segon anomenat meridià, com el que separa l'hemisferi oriental de l'occidental.

[V = Vertical] I el tercer i últim, anomenat vertical, com el que separa l'hemisferi nord del sud.

I dels diàmetres mencionats:

[$\perp$V = Meridiana] La intersecció del cercles horitzó i meridià s'anomena meridiana.

[$\perp$H = Gnomon] La intersecció dels cercles meridià i vertical s'anomena gnomon.

[$\perp$ M = Equatorial] I la intersecció dels cercles vertical i horitzó s'anomena equatorial, ja que també és la secció comú de l'equador amb aquests cercles.

Així, si aquests cercles són moguts juntament amb el Sol al voltant de les seves seccions comunes "immòbils", com al voltant d'eixos, es poden considerar dos moviments per cadascun:

[H] El cercle horitzó es pot moure:

a. al voltant del diàmetre equatorial cap a les parts de sobra i sota la terra, i

b. al voltant del meridional cap a l'est i l'oest.

[M] el cercla meridià es pot moure:

a. al voltant del diàmetre meridional cap a l'est i l'oest, i

b. al voltant del diàmetre gnomònic cap al nord i sud, i

[V] el cercle vertical es pot moure:

a. al voltant del diàmetre gnomònic cap al nord i sud, i

b. al voltant de l'equatorial cap a les parts de sobre i sota la terra.

Però com que és impossible que un mateix cercle es mogui amb dos moviments al mateix temps, el primer i més adequat dels dos descrits ha de ser assignat a cadascun, és a dir:

[$\perp$M] Per l'horitzó el moviment al voltant del diàmetre equatorial de manera que de nou, pugui determinar una posició respecte les parts de sobre i sota la terra,

[$\perp$V] I pel meridià el moviment al voltant del diàmetre meridià, de manera que pugui determinar la divisió respecte l'est i l'oest, i,

[$\perp$H] I pel vertical, el moviment al voltant del gnomon, de manera que pugui distingir el passatge cap al nord i el sud.

[$\perp$M = HECTEMORUS] El moviment de l'horitzó produeix el cercle que anomenem hectemorus (que vol dir fet de sis parts) perquè mostra l'alçada fins la sisena hora,

[$\perp$V = HORARI] El moviment del meridià produeix el cercle que anomenem horari, perquè avança amb la longitud a cada hora,

[$\perp$H = DESCENSIU] El moviment del vertical produeix el cercle que anomenem catabàtic, és a dir descensius, ja que marca el descens des del més alt al més baix.

D'altra banda, cadascun dels cercles descrits, al aixecar-se per sobre la terra amb el raig de Sol, produeix dues inclinacions d'aquestes que, donades totes dues (perquè una de sola no és suficient) la posició del raig queda determinada. Però d'aquestes inclinacions, una està definida per línies rectes, una de les quals és mòbil i l'altra estacionària, és a dir, pel raig i pel diàmetre al voltant del qual el cercle és mogut [nostre angle polar, θ], mentre l'altra està definida pels plans mateixos, dels quals un és mòbil i l'altre estacionari [nostre angle azimutal, φ]. Resulta també que, si només una de les inclinacions de cadascun de dos cercles és donada, la posició del raig queda també determinada.

Així, dels angles que estan determinats pel cercle hectemorus,

[θ_M = ANGLE HECTEMORUS] Al que formen el raig i el diàmetre equatorial no el veiem utilitzats pels antics en la disciplina gnomònica.

[φ_M = ANGLE MERIDIÀ] I al que constitueix la inclinació del cercle hectemorus sobre l'horitzó, l'anomenem hectemorus.

Dels dos angles formats pel cercle horari:

[θ_V = ANGLE HORARI] Al que està format pel raig i el diàmetre meridional, l'anomenem horari.

[φ_V = ANGLE VERTICAL] I al que està format per la inclinació del cercle horari i el meridià, l'anomenem vertical.

Dels dos angles formats pel cercle descensiu hi ha, de nou, un format pel raig i el gnomon i l'altre format per la inclinació del descensiu respecte el pla vertical; però no utilitzen aquests.

[θ_H = ANGLE DESCENSIU] En lloc de l'angle determinat pel gnomon i el raig utilitzen el seu complementari i ho anomenen el descensiu.

[φ_H = ANGLE HORITZONTAL] I en lloc del que està determinat pel descensiu i el vertical, utilitzen el que està comprès per la seva inclinació fins el meridià, i l'anomenen antiscios (que significa oposat a l'ombra).

[ϖ_E = ANGLE EQUATORIAL] Ells afegeixen un sisè angle (en lloc del suprimit), que està format pel diàmetre equatorial i la intersecció dels cercles equatorial i horari, al que anomenen del pla equatorial.

I per suposat com que el cercle equatorial no manté la mateixa posició en cada latitud, es relaciona d'una altra manera amb l'horitzó, el meridià i el vertical.

[Capítol 3]

Amb la finalitat de veure més clarament la seqüència dels angles i les hipòtesis fetes,

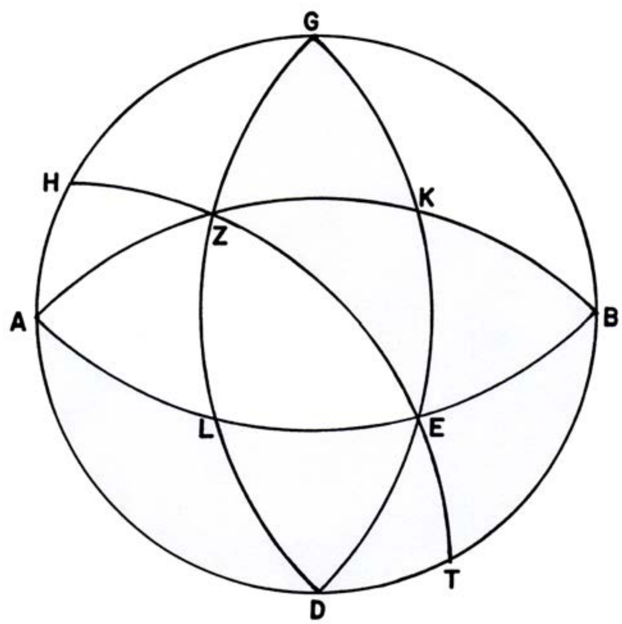


Fig. 1

[Fig. 1] sigui ABGD el cercle meridià, i en siguin els semicercles ortogonals i orientats a l'est els semicercles de l'horitzó AEB i del vertical GED. I suposem que Z indica la posició d'un raig [del Sol]. Dibuixeu, passant per Z, els semicercles orientals dels tres cercles que han girat amb el raig al voltant dels seus diàmetres apropiats:

[$\perp_M$] el de l'horitzó AEB transformat en el semicercle HZET del hectemorus, mitjançant un gir al voltant del diàmetre que passa per E i pel seu punt diametralment oposat,

[Definició dels sis arcs:]

I les diferències angulars es mesuren sobre els arcs dels cercles apropiats que són subtendits per cada angle, per simplificar la representació. Així, pels descrits més amunt i formats pel raig i els eixos, són els arcs subtendits:

[θ_M] l'arc ZE de l'hectemorus,

[θ_V] el ZA de l'horari, i

[θ_H] el ZG del descensiu.

Mentre que pels angles que estan formats per les inclinacions dels plans d'un cercle estacionari i el cercle que el transcendeix,[82] els arcs subtendits són:

[φ_M] l'arc AH del meridià, que conté la inclinació de l'horitzó i l'hectemorus,

[φ_V] l'arc GK de la vertical, que conté la inclinació del meridià i l'horari, i

[φ_H] l'arc EL de l'horitzó, que conté la inclinació de la vertical i el descensiu.

[Capítol 4]

D'aquesta seqüència, que proveeix angles i arcs en concordança amb la natura, un arc per cadascun dels cercles estacionaris i mòbils, els antics, com dèiem,

[82]Que ha girat més enllà d'ell (variant de Torres).

[θ_M] ometien l'arc EZ de l'hectemorus,

[φ_E] i utilitzaven en lloc seu el que anomenaven arc del pla de equatorial, però

[θ_V] mantenien l'arc AZ i ho anomenaven, amb propietat, horari, mentre que

[θ_H] en lloc de l'arc AZ prenien el ZL amb el nom de descensiu.

I d'una altra banda,

[φ_M] mantenien l'arc AH anomenant-lo hectemorus, i

[φ_V] així com el GK, que anomenaven arc del pla vertical, però

[φ_H] en lloc de EL prenien AL, i ho anomenaven l'antiscios, és a dir, oposat a l'ombra.

És clar doncs que les nostres hipòtesis són més raonables que les dels nostres predecessors.

[Capítol 5]

Però com que cada angle produeix certes magnituds a cada costat de la inclinació (de vegades d'iguals, com en el cas de la perpendicularitat, de vegades desiguals, com en els casos restants), també serà necessari en relació amb els angles o arcs explicats abans, establir una normativa per cada un dels seus tipus, acceptada la qual,[83] les ambigüitats en les inclinacions cap a l'est i l'oest, i cap al nord i al sud, es resoldran segons un ordre fixat per la raó i l'apropiada determinació per cada tipus estarà també d'acord amb les

[83] Variant de Torres: "a quo accepto".

hipòtesis. Perquè l'objectiu que perseguim és fer d'aquests arcs

[1] mesuraments,

[2] explicacions, i

[3] denominacions.

Així doncs,

[3] anomenem els arcs segons els cercles mateixos dels que són arcs, i els diem

a. els arcs dels cercles mòbils: hectimorials, horaris i descensius i, anàlogament,

b. en arcs dels cercles estacionaris: meridionals, verticals i horitzontals.

[2] I, respecte les seves magnituds, si els angles establerts a cada costats no són rectes, sempre triem l'agut.

[1] I les normes de les mesures són:

[θ] Pels angles sobre els cercles mòbils, a partir d'un dels eixos de revolució, aquest respecte al qual es produeix la inclinació, és a dir,

[θ_M] per angles sobre l'hectemorus

[a] a partir de l'extrem est del diàmetre equatorial abans de la culminació,

[b] però a partir de l'extrem oest després de la culminació,

[θ_V] per angles sobre l'horari

[a] a partir de l'extrem nord del diàmetre del meridià quan la posició del raig és el nord del cercle vertical,

[b] a partir de l'extrem sud quan està al seu sud (el qual s'ha de tenir present, perquè la determinació varia).

[θ_H] Per angles sobre el descensiu només en l'extrem del gnomònic, que està sobre la terra.

[φ] Pels angles sobre els cercles estacionaris, però a partir d'un dels extrems, el de la intersecció de cada cercle estacionari amb el pla del qual la inclinació produeix l'angle, és a dir,

[φ_M] per angles sobre el meridià

[a] a partir de l'extrem nord de la línia meridiana quan el raig és al nord del cercle vertical, i

[b] a partir de l'extrem sud quan és al seu sud, (i de nou caldrà determinar-ho),

[φ_V] per angles sobre el vertical, només a partir de l'extrem del gnomon que està sobre la terra,

[φ_H] per angles en l'horitzó

[a] a partir de l'extrem est del diàmetre equatorial abans de la culminació,

[b] però a partir de l'extrem oest després de la culminació, o bé

[c] cap al nord, quan el raig és al nord del cercle vertical.

[d] o cap al sud, quan és al sud.

(De nou un altra vegada caldrà adonar-se perquè en cada cas la culminació defineix simplement aquelles posicions a cada costat pels angles que estan determinats a l'est o l'oest, anomenats angles hectimorial, descensiu, vertical i horitzontal, mentre la posició del raig a cada costat del cercle vertical fa això per aquells que estan cap al nord i al sud, és a dir els angles de l'horari, meridià i horitzó, els angles els quals no tenen un sol i mateix punt final.)

[**C2 Segon fragment: càlcul gràfic**]

[**Capítol 6**]

Amb aquests pressupòsits, podem explicar el mesurament instrumental de tots els tipus d'angle que hem suposat, com a exemples, de manera que podem tenir llest el mètode que aplicarem sobre l'analemma. Però primer podem aplicar-nos al mesurament instrumental de l'angle omès pels antics, que anomenem hectemorus, per si mateix, perquè també serà necessari afegir aquesta demostració a les qüestions que han estat tractades diferentment pels antics.

Així, és clar que als equinoccis els angles en qüestió resulten sempre els mateixos que els del pla de l'equador. Ja que el cercle hectemorus coincideix amb ell. Per el què al llarg de la revolució sencera també el cercle hectemorus fa arcs iguals entre ells per a cada hora equatorial (que comprèn quinze graus), i angles corresponents a hectemòria (és a dir, sis parts d'un angle recte).

Pel cas, però, dels altres cercles mensuals,

[Fig. 2]: sigui ABDG un cercle meridià en què AB és el diàmetre de l'horitzó, i GD n'es ortogonal i correspon al gnomon, mentre el centre de

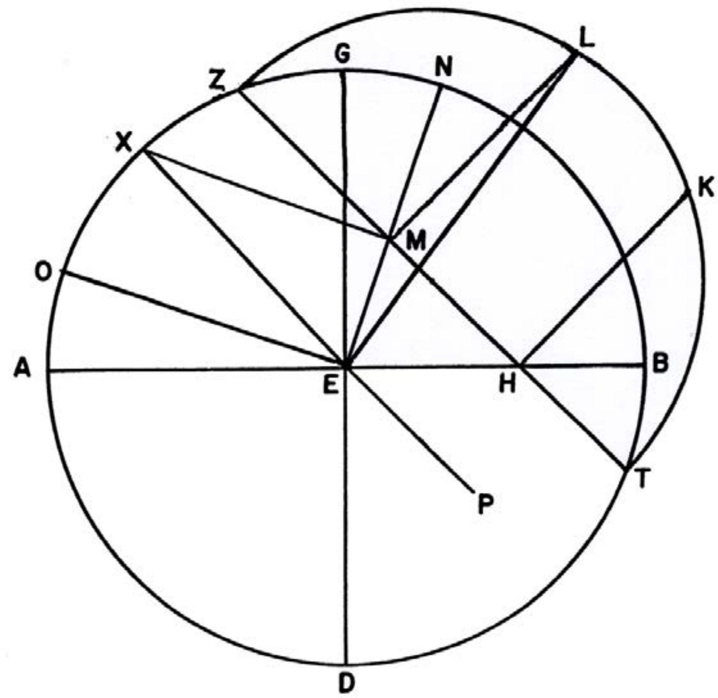


Fig. 2

l'esfera solar és E, i ZHT és el diàmetre d'un dels cercles paral · lels mensuals al nord de l'equador. ZKT sobre aquest diàmetre s'ha d'entendre com el semicercle oriental [abatut] sobre el mateix pla. Traci's KH perpendicular a ZT, de manera que ZK sigui la porció del cercle paral · lel sobre la terra. I [per al moment en que el Sol ha] recorregut l'arc KL, dibuixi's LM perpendicular des de L a ZT. Amb M per centre i distància ML fixi's sobre el meridià el punt X. Unint EL, EMN i MX, i traci's EO ortogonal a EN.

[Teorema: 1:] Afirmo que l'angle XEO és igual a l'angle buscat.

En efecte, sigui entès el semicercle ZLT com tornat a la seva pròpia posició, és a dir, a la posició ortogonal al pla del meridià, i traci's des d'E la recta EP ortogonal al mateix pla per representar el diàmetre equatorial. Llavors, com que LM també és perpendicular al meridià, és clar que les línies EN, ML i EP descansen sobre un pla perpendicular a ABDG [el del cercle hectemorus]. Així, és clar també que EN és la intersecció del cercle hectemorus i el meridià, i EL està en la direcció del raig de Sol, i l'angle en qüestió definit pel raig i el diàmetre equatorial, és LEP.

Per consegüent, s'ha de demostrar que l'angle XEO és igual a LEP.

Com que EL és igual a EX, i ML a MX, i EM és comú, l'angle MEL també és igual a l'angle MEX. Però l'angle MEP és recte, així com l'angle MEO; en conseqüència el seu complementari LEP és igual al complementari de MEX, és a dir igual a XEO. Que és el que calia demostrar.

[Capítol 7][84]

A continuació hem d'explicar els mesuraments dels angles tots junts, especialment pels equinoccis, i, de nou, per a un dels paral·lels mensuals al nord o sud d'aquest. Així a [Fig. 3]: sigui ABGD un cercle meridià, en què AB és el diàmetre de l'horitzó i GD ortogonal a ell correspon al gnòmon, mentre E és el centre de l'esfera solar, i GZ l'arc de latitud. I primer, traci's ZEH el diàmetre de l'equador amb el seu semicercle ZTH [abatut] sobre el pla del meridià però entès com si fos a l'hemisferi est. Sigui el Sol descrit, en una revolució horària (dins els límits en que ens és perceptible), per cadascun

[84] Segons el palimpsest grec, és el capítol $\bar{\beta}$, és a dir, "el segon" (comptant, doncs a partir del "segon fragment").

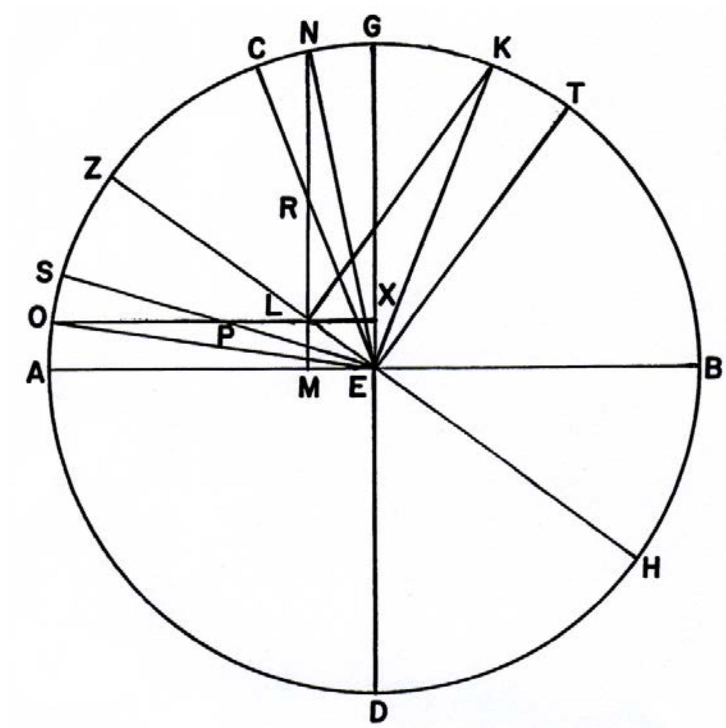


Fig. 3

d'aquests paral · lels mensuals. I traçada ET perpendicular a ZH de manera que el quadrant ZT sigui sobre la terra. Suposem recorregut [pel Sol] l'arc TK de les hores donades, i sigui aquest proposat per mesurar els angles en aquesta posició. Traci's les següents perpendiculars: KL, de K, cap a ZH; MLN, de L, cap a EA i XLO cap a EG. Siguin definits XP i RM igual a LK, i siguin units EK, EN, EO i també EPS i ERC.

Ara bé, està clar que el raig és al sud del cercle vertical al llarg de la seva revolució sencera sobre la terra a l'equador i als paral · lels al nord d'aquest. La raó és que la inclinació de l'esfera en la nostra part del món habitat és cap el sud. Està també clar que cal determinar les inclinacions conseqüents en aquesta posició.

[Teorema 2:]

[θ_M] L'angle EKL, és a dir angle TEK, conté l'angle de l'hectemorus,

[φ_E] (que és aquí el mateix, com hem dit, que l'angle al pla de l'equador),

[θ_V] i l'angle AEN el de l'horari,

[θ_H] i l'angle GEO el del descensiu,

[φ_M] i, d'altra banda, l'angle AEZ conté l'angle del meridià,

[φ_V] [i l'angle GES el de la vertical,]

[φ_H] i l'angle GEC el de l'horitzó.

[Capítol 8]

[Fig. 4] Sigui dibuixat de nou el meridià ABDG amb diàmetres AB i DG, i tiri's ZHTK un dels paral · lels mensuals al nord de l'equador, en què el semicercle oriental ZLK sigui descrit com abans, i tiri's TL ortogonal a ZK de manera que la porció del paral · lel ZL sigui sobre la terra. Recorregut l'arc LM de les hores donades, tiri's MN perpendicular a ZT des de M. Quan N és sobre HT fa que la posició del raig sigui al nord del cercle vertical, però quan és sobre ZH, que sigui al seu sud. De nou, sigui dibuixat ENX, i tiri's la seva perpendicular EO. Llavors determini's tres punts sobre el meridià: el punt P amb centre N i distància MN, el punt R amb centre T i distància TM, i el punt S amb centre H i distància HM. I tirades RNC i SNY (perpendiculars a EB i EG fixades per N), siguin definits en elles YNF i CNQ iguals a MN, de la mateixa manera que abans, i siguin units EP, ER, ES, MT i també EFΨ

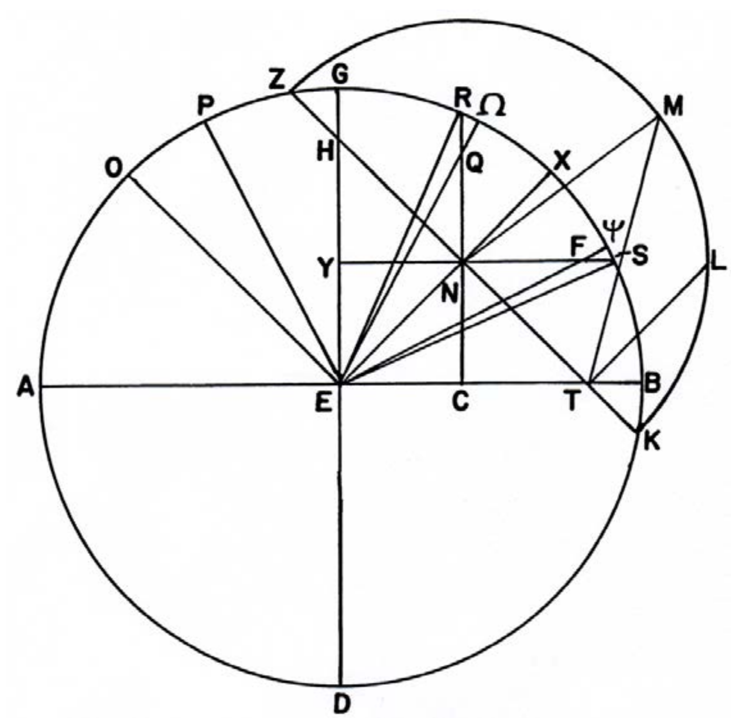


Fig. 4

i EQΩ.

I així també aquí

[Teorema 3:]

[θ_M] l'angle PEO conté l'angle del cercle de l'hectemorus,

[θ_V] l'angle BER el de l'horari,

[θ_H] l'angle GES el del descensiu, i d'altra banda,

[φ_M] l'angle BEX el del meridià,

[φ_V] l'angle GEΨ el de la vertical,

[φ_H] l'angle GEΩ el de l'horitzó, mentre que

[φ_E] l'angle TMN forma l'angle en el pla equatorial.

[FRAGMENT III: EL MÈTODE TRIGONOMÈTRIC]

[C3 Tercer fragment: càlcul numèric]

[Capítol 9]

Ara bé, els mesuraments experimentals es resumeixen d'aquesta manera, afegint una seqüència semblant per a cada una de les posicions [del Sol]. Però per mostrar aquestes quantitats corresponents a un cert clima [latitud terrestre φ], signe zodiacal [mes, longitud solar λ] i hora [corregit; hora temporal η], serà suficient [versió de Torres] fer mesures tan sols sobre els arcs que subtenen els angles, per tal de tenir a disposició les quantitats mateixes en nombres, i no uns certs diagrames que les determinen; i de cap manera estem obligats a assolir per l'analemma uns angles definits per rectes quasi sempre confoses. Ans per a cada cas, disposant d'un cert quadrant recte de cercle dividit en 90 parts iguals, dibuixem un cercle de igual mida al interior o exterior del donat per fer la construcció, i concèntric amb ell; i, prenent, els intervals que contenen el nombre de graus apropiats del cercle dividit, ho transferim a un quadrant del que és igual, i, tot dibuixant línies a través dels límits trobats i el centre comú dels dos cercles, podem trobar els angles i arcs dels cercles donats, siguin més grans o menys que el quadrant dividit. D'altra banda una determinació com aquesta es pot aconseguir amb molta precisió utilitzant el càlcul geomètric per aquells que ho prefereixen. Però serà molt més fàcil aconseguir-ho per l'analemma, encara que no sigui comparable en precisió amb la demostració geomètrica. Però nogensmenys coincideix amb ella en els límits de la percepció visible, a la qual es redueix l'objectiu de la nostra tasca ordinària. Mostrarem doncs [al tercer i quart fragment] per torns i resumidament com cada un dels dos procediments pot estar aconseguit més fàcilment per nosaltres, començant per la consideració geomètrica, que és la següent.

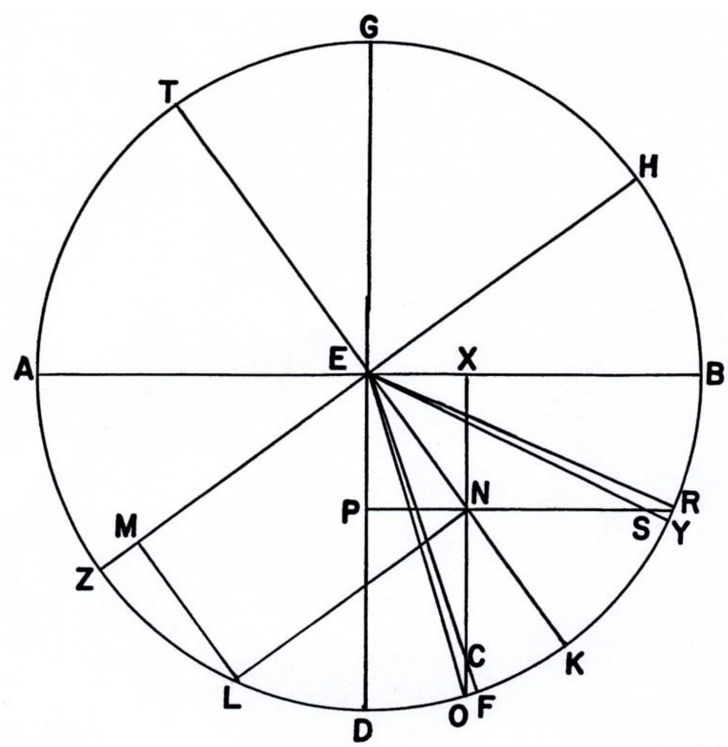


Fig. 5

[Fig. 5]: Sigui dibuixat el meridià ABDG en torn al centre E, amb els diàmetres ortogonals AB, la seva intersecció amb l'horitzó i el gnomon GD formen entre si angles rectes. I sigui donada l'alçada del pol [φ], fixada per l'arc AZ [en aquest primer cas del dia equinoccial]. Sigui traçat l'eix [del món] ZEH, i el diàmetre de l'equador TEK. I suposem recorregut [pel Sol] un arc donat ZL. Tiri's les següents perpendiculars des de L: LM fins EZ i LN fins EK. I anàlogament també des de N: XNO fins EB i PNR fins ED.

Llavors com que l'arc AZ, és a dir, DK, és donat, també l'angle PEN serà donat. Però l'angle en P és recte. La raó de la hipotenusa EN a cadascun dels catets EP i PN, i als segments iguals a aquest, NX i EX, serà donat [per càlcul].

I d'altra banda, com que l'arc LZ ha estat donat, i KZ és l'arc d'un quadrant, l'arc complementari KL, també ha estat donat. I com que el doble de LM subtendeix el doble de l'arc ZL i el doble del segment LN subtendeix el doble de l'arc LK, també serà donat [per càlcul] la raó de cada segment LM i LN, al diàmetre del meridià. I així mateix serà donat [per càlcul] la raó de EN, igual a LM, i la de EP i , costats de l'altre rectangle, al mateix diàmetre.

Siguin assignats PS i XC iguals a LN i siguin traçats OE, ER, ESY i ECF.

[Teorema 4 (calculabilitat numèrica):]

[θ_M] Llavors l'arc ZL és igual a l'arc del cercle hectemorus, i fins i tot

[φ_E] l'arc de l'equador, és determinat immediatament.

[θ_V] Com que també en el triangle rectangle EXO, han estat donats EX, XO i la hipotenusa EO, també serà donada [per càlcul] l'angle OEX i el seu complementari OEX, de manera que l'arc BO, comprenent l'arc del cercle horari també serà donat.

[θ_H] Anàlogament com que en el triangle rectangle EPR, han estat donats EP i PR i la hipotenusa ER, també serà donat [per càlcul] l'angle ERP, el seu complementari, l'angle PER, així com l'arc DR, que és igual a l'arc descensiu.

[φ_M] D'altra banda, BK que és l'arc que correspon a l'angle del meridià, és determinat immediatament.

[φ_V] Però com que en el triangle rectangle EPS, han estat donats EP i PS, i l'angle PES, així com l'arc DY, igual a l'arc del cercle vertical, la hipotenusa ES també serà donada [per càlcul].

[φ_H] Anàlogament com que en triangle rectangle EXC han estat donats EX i XC, també serà donada [per càlcul] calculable la hipotenusa EC i l'angle CEX, és a dir, l'angle DEC així com l'arc DF igual a l'arc de l'horitzó.

[Capítol 10][85]

I pels altres cercles mensuals,

[Fig. 6] sigui dibuixat el meridià ABDG amb els diàmetres mútuament ortogonals, i amb l'eix EZ, i tracem el diàmetre HTK d'un dels paral · lels mensuals al sud de l'equador, i tracem sobre ell el semicercle HLK que entenem dirigit cap a l'est; i sigui estès fins a ell l'eix EZL, el qual biseca el diàmetre HTK en T i el semicercle HK en L. Sigui traçada MN perpendi-

[85]Segons el palimpsest grec, el $\bar{\varepsilon}$, és a dir, "el cinquè" (comptant també a partir del "segon fragment").

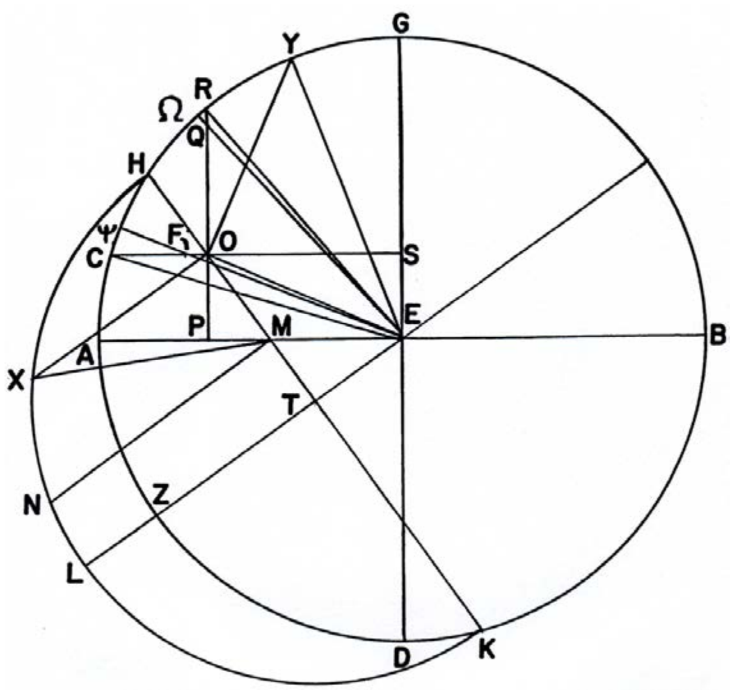


Fig. 6

cular a HT, la qual divideix el segment del semicercle que està per sobra la terra, HN, del que està sota, i prenent l'arc NX de les hores donades, sigui traçada XO perpendicular des de X fins a HM, i siguin traçades POR i SOC perpendiculars des de O a AE i GE.

Aleshores, des que l'arc HZK del meridià[86] ha estat donat, ja que el doble de la línia ET és la corda del angle suplementari, la raó de les línies HTK i ET respecte el diàmetre el meridià, serà donada [per càlcul].

Anàlogament, com que l'arc AZ de l'alçada del pol [φ] ha estat donat, l'angle MET del triangle rectangle MET també serà donat. Així la raó de

[86]Aquest arc és el suplementari del doble de la declinació solar δ, que està fixada pel signe zodiacal, o la longitud solar λ, una de les tres dades del problema. És curiós que no es mencioni aquesta declinació, el sinus de la qual és ET.

ET respecte les línies EM i MT també serà donada [per càlcul], i fins i tot la raó del diàmetre HK respecte als mateixos.

Però el doble de la línia MT és la corda del doble de l'arc LN. Així l'arc LN serà donat [per càlcul] com també el seu complementari NXH. Però NX ha estat donat i per tant LX i XH també seran donats [per càlcul]. El doble de la línia XO és la corda del doble de l'arc HX i el doble de la línia OT la del doble de l'arc XL. Així el radi XO i OT respecte el diàmetre HK, serà donat [per càlcul], i per això també respecte al diàmetre del meridià.

Però com la raó de TM també ha estat donada la raó de MO serà donada. I EM és respecte MO el mateix que TM respecte a MP, i ET respecte a OP, perquè els triangles EMT i OPM són semblants. Per tant, la raó de MP i de OP respecte el diàmetre del meridià també serà donada [per càlcul]. I per això, la raó de ES i de tota la línia EMP, és a dir, de OS, també serà donada [per càlcul].

Demostrades aquestes coses, amb centre O, i distància OX, sigui determinat un punt del meridià Y. I de nou siguin presos PQ i SF iguals a OX, i siguin traçats EY, ER, EC i XM, i també EO i EFΨ i EQΩ.

[Teorema 5 (calculabilitat numèrica):]

[θ_M] Així doncs, anteriorment ha estat demostrat que l'angle EOY és un angle recte, i està donada la seva hipotenusa EY que és el radi del meridià, així com OY, que és igual a OX; llavors també l'angle EYO, equivalent a l'angle del cercle hectemorus, serà donat [per càlcul].

[φ_E] Anàlogament, com en el triangle rectangle XMO han estat donats

XO i OM, també serà donada [per càlcul] la hipotenusa MX, així com l'angle MXO, equivalent a l'angle del pla de l'equador.

[θ_V] A més, com que en el triangle rectangle EPR han estat donades EP i PR, també estarà donada [per càlcul] la hipotenusa ER i l'angle PER així com l'arc AR [de l'horari].

[θ_H] De nou, com que en el triangle rectangle ESC han estat donats ES i la hipotenusa EC, també serà donat l'angle CES, així com l'arc CG del descensiu.

[φ_M] I per concloure, com que en el triangle rectangle EOP han estat donats OP i EP, també serà donada [per càlcul] la hipotenusa EO, i l'angle OEP equivalent a l'arc del meridià.

[φ_V] De nou, com que en el triangle ESF han estat donats ES i SF, també serà donada [per càlcul] la hipotenusa EF, així com l'angle SEF, i l'arc GΨ del vertical.

[φ_H] I finalment, com que en el triangle rectangle EPQ també han estat donats EP i PQ, també serà donada [per càlcul] la hipotenusa EQ i també l'angle EQP, és a dir, l'angle QEG, així com l'arc GΩ de l'horitzó.

[C4 Quart fragment: càlcul nomogràfic]

[Capítol 11]

Així doncs, els mesuraments geomètrics d'aquests angles i dels arcs subtendits per ells podem assolir-les,[87] certament, d'aquesta manera [per càlcul numèric]. Però si es tracten pel procediment de l'analemma mateix, cada tabulació pot ser obtinguda més fàcilment de la manera següent. Així doncs, es demostra prèviament, que de les coses a dibuixar dintre l'analemma, unes són invariables per a totes les latituds i altres varien. Entre les que són invariables considerarem només el cercle meridià, el diàmetre de l'equador i els altres diàmetres dels paral · lels mensuals del Sol juntament amb els semicercles circumscrits sobre ells. I hem de dibuixar el diàmetre del tròpic i el del cercle mensuals posterior a l' equador orientats cap al mateix pol, però el diàmetre del cercle mensual posterior al tròpic orientat cap el pol oposat. De manera que no puguin, per la seva proximitat al diàmetre del cercle del tròpic, confondre les notacions amb els diàmetres i els semicercles circumscrits sobre ells. I, per això, haurem d'utilitzar un suport pla de la figura, en forma de disc, de manera que els diàmetres dels cercles mensuals que hem mencionat, així com els seus semicercles puguin, donant la volta al disc, adaptar-se a les posicions dels diàmetres que són oposats. I entre les coses que depenen de cada latitud particular, considerem només dos diàmetres: un la intersecció del meridià i l'horitzó, i l'altre el gnomònic. Hem d'utilitzar també una escaire molt prima, acuradament rectangular, i que té els costats de l'angle recte no menors que el radi del meridià, per tal de trobar fàcilment amb ella les diverses senyals [del meridià] i les seves perpendiculars: adaptant un dels costats de l'angle recte a la línia a la que s'ha de fer la

[87] Literalment: "fer a la mà".

perpendicular, i senyalant l'altre al punt [del cercle meridià] a través del qual passa la perpendicular. I en cada cas hem de fer mesuraments dels arcs del meridià utilitzant únicament un compàs i l' escaire, no dibuixant cap altra línia addicional a les esmentades, sinó conservant el dibuix net per a facilitar la mesura dels resultats següents, quan els primers han estat traslladats a mà a la taula, de la manera que hem explicat.

[Dibuix de les línies anomenades permanents] Per il · lustrar-ho amb un exemple,

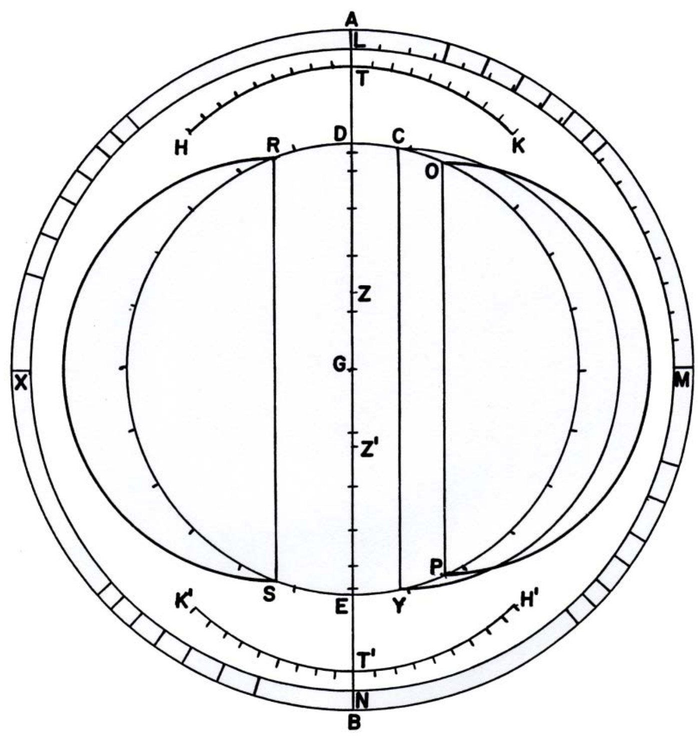


Fig. 7

[Fig. 7]: sigui dibuixat un pla en forma de disc, al voltant del diàmetre

AB i de centre G, i pressa aproximadament la tercera part AG, diguem des d'A, fins a D, dibuixi's amb centre G i radi GD, el cercle meridià d'un analemma de diàmetre DE, entenent que DGE és el diàmetre corresponent a l'equador. I després, presa aproximadament la tercera part de GD des de G fins a Z, amb centre Z i radi GD, dibuixi's el quadrant HTK d'un cercle igual al meridià, de manera que la línia AG el talli en dues part iguals [en el punt T], i divideixi's HTK en noranta parts acuradament iguals. I res no impedeix de fer el mateix a l'altre extrem del diàmetre per quan es dona la volta al disc. Igualment, amb centre el mateix G però amb radi com la distància de G al punt central mitjà entre A i T, dibuixarem un cercle que passi pels quadrants L, M, N, X. Un d'aquests quadrants el dividirem anàlogament en noranta graus, i marcant sobre ell els intervals de graus de l'alçada [del pol] corresponents a cada latitud, registrarem intervals iguals a aquells també en els tres quadrants restants, començant des dels punts L, M, N, X, procedint cap a la dreta dels semicercles orientals, els quals suposem sempre dibuixats cap a nosaltres.

Per tant on el dia més llarg, o la nit més llarga és de	l'alçada del pol val aproximadament
13 hores	16 1/3 1/12 graus
13 1/2 hores	23 1/2 1/3 graus
14 hores	30 1/3 graus
14 1/2 hores	36 graus
15 hores	40 1/2 1/3 1/12 graus
15 1/2 hores	45 graus
16 hores	48 1/2 graus

Aquesta taula està reconstruïda (amb el redondeix ptolemaic de 5 minuts). Les donades pels nostres autors són:

Torres	Heiberg		Commandino	
16 1/3 1/12	16 1/3 1/12	[gr. : id]	16 1/3 1/10	= 16º 27'
23 1/2 1/3	23 1/2 1/3	[gr. : id]	23 1/2 1/3	= 23º 51'
36	36	[gr. : 30 1/3]	30 1/3 1/30	= 30º 22'
43 1/4	43 1/4	[gr.: 36]	36	= 36º
		[gr.: 40 1/3 1/4 1/10]	40 1/2 1/3 1/10	= 40º 56'
45	45	[gr.: id.]	45	= 45º
48 1/2 1/10	48 1/2 1/10	[gr.: 48 1/2]	48 1/2 1/30	= 48º 32'

L'error de la tercera fila present en la versió de Heiberg i també en la de Torres procedeix clarament d'un error de còpia al produir-se un salt de línia. La quarta fila ocupa el lloc de la tercera. La cinquena en lloc de la quarta amb algun canvi. La cinquena es deixa en blanc i les següents són quasi idèntiques. Commandino es mostra de nou aquí com a reconstructor del text, resaltant-se el valor de la seva obra.

Traçarem també el diàmetres dels cercles mensuals esmentats, prenent les seves distàncies al diàmetre de l'equador sobre l'arc de meridià, ja que les divisions dels cercles quadrants són iguals.

En efecte, la distància al diàmetre de l'equador del diàmetre del cercle del tròpic OP és 23 1/2 1/3 graus.

I la del diàmetre del cercle mensual següent al tròpic RS és 20 1/2 graus.

Mentre la del diàmetre del cercle mensual següent a l'equador CY és 11 2/3 graus.

Dibuixarem també sobre cadascun d'aquests diàmetres el seu semicercle, deixant-lo tal qual. En els semicercles però del meridià, que jeuen el costat del diàmetre de l'equador, marcarem les dotze subdivisions. Igualment dibuixarem sobre el diàmetre DGE les divisions que s'obtenen traçant perpendiculars al mateix des de cada divisió horària, perquè aquestes divisions es conserven per a totes les inclinacions [del pol].

Quan el disc que tenim és de bronze o de marbre, no farà falta esborrar mai aquests signes gravats, sinó els dibuixats a sobre que depenen de la latitud com els dos diàmetres i les divisions horàries. Quan el disc és de fusta, tot això haurà de dibuixar-se a sobre amb tinta negra esborrable, però el meridià i el diàmetre de l'equador amb les seves marques, en vermell, i tot el disc ha de ser cobert de cera, com es fa amb les esferes, perquè les línies que han de ser preservades no estiguin dibuixades juntament amb aquelles que han de variar.

[Dibuix de les línies i traços corresponents a un clima determinat]

[Capítol 12]

Suposades aquestes coses, ens serà fàcil fer de cop els mesuraments, si en aquest primer cas [del dia equinoccial], seguint un ordre bàsic, tracem els diàmetres de l'horitzó i del gnomon per l'alçada [del pol] apropiada, i després

[α] la secció del semicercle del tròpic que divideix les parts de sobra la terra de les de sota,

[β] les divisions de cadascuna d'aquests porcions en sis parts iguals, i

[γ] les perpendiculars al diàmetre apropiat des d'aquestes divisions de cada porció.

Fetes tan sols aquestes coses, procedirem de la manera següent:

[θ_M] De nou, primer els arcs del cercle hectemorus per a una hora qualsevol,

[a.] aquells que estan en la porció per sobre la terra tenint la posició del paral · lel mensual del seu propi signe.

[b.] aquells que estan en la porció per sota la terra tenint la posició del paral · lel mensual de signe oposat.

[θ_V] Després són els arcs de l'horari per totes les hores.

[θ_H] Aleshores els del descensiu.

I d'altra banda, en comú,

[φ_M] els del meridià, separadament.

[φ_V] Llavors el de la vertical.

[φ_H] Després el de l'horitzó.

[φ_E] Finalment si volem els del pla de l'equador.

Després d'això esborrarem les marques que hem fet. Procedirem però similarment per cadascun dels dos cercles mensuals restants, i igualment, per l'equador. Llavors esborrant els primers diàmetres junts, traçarem els de la següent latitud, i seguint el mateix ordre, podrem anar per totes les varietats mencionades.

Per la resta, per veure la manera de mesurar els arcs subtendits pels angles,

[Fig. 8] sigui dibuixat el meridià de l'analemma, i sigui ABGD amb centre E, i traci's amb una regla controladament recta, el diàmetre AB, intersecció del meridià i l'horitzó, i el GD en la direcció del gnòmon. Per començar, sigui establert el diàmetre equatorial ZEH,

[α] i el semicercle ZTH sigui dividit en dues parts iguals en T, i sigui ZT el quadrant per sobra de la terra,

[β] i sigui K una de les divisions horàries marcades sobre ell,

[γ] i sigui L la senyal feta en el diàmetre per la perpendicular a ZE passant per K.

(Aquestes són les coses que hem introduït al principi.)

[La manipulació del compàs i l'escaire: la determinació de cada angle]

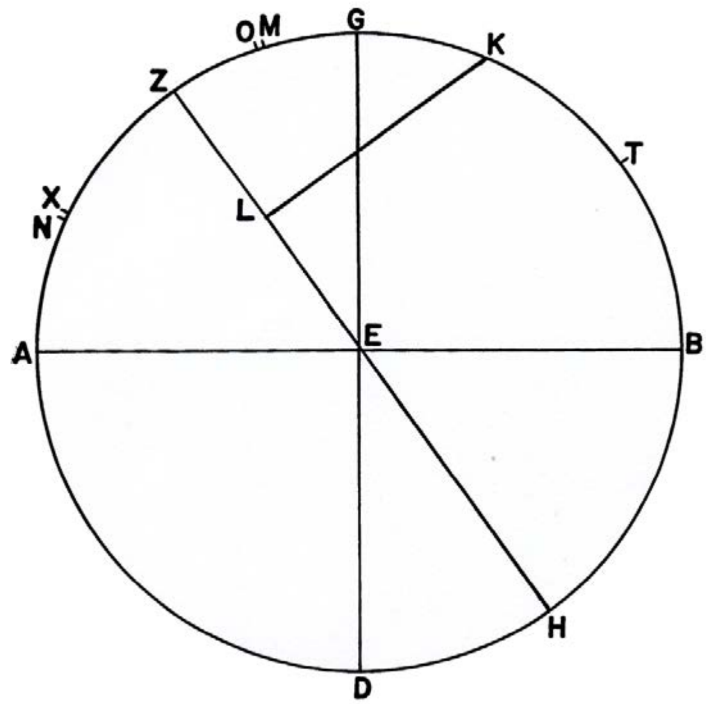


Fig. 8

[θ_M] Així doncs l'arc TK el mostra directament l'arc hectemorus sobre el qual fixem el compàs, i transportant-lo sobre el quadrant dividit, registrem els graus [horaris] continguts en l' interval.

[φ_E] (Sempre conté tants [graus horaris] com el conjunt d'hores transcorregudes des de la sortida del Sol en temps equinoccial, ja que és el mateix arc del pla de l'equador.)

[θ_V] L'arc horari, però, el mesurem fent passar un costat a l'escaire pel punt L, de manera que l'altre costat coincideixi amb el diàmetre de l'horitzó AB, i si el costat que passa per L talla el meridià en M, l'arc AM ens donarà l'arc mencionat.

[θ_H] Anàlogament, si fem passar un costat per L, de manera que l'altre coincideixi amb el diàmetre del gnomon GD, i el costat que passa per L talla el meridià en N, l'arc GN serà equivalent a l'arc del descensiu.

[φ_M] D'altra banda, l'arc AZ serà equivalent a l'arc del meridià.

[φ_V] Si fixem, però, el compàs sobre els punts K i L i col · loquem un costat de l'escaire passant per L, i fem coincidir l'altre amb GE, aleshores col · loquem una punta del compàs en l'angle recte de GE, i col · loquem l'altra en el costat que passar per L, i, mantenint aquesta última, girem el mateix costat, mantenint el contacte amb aquesta punta, fins passar pel centre E, de manera que el costat talli el meridià en X, l'arc GX serà equivalent a l'arc de la vertical.

[φ_H] Anàlogament, però, si col · loquem un costat passant per L i fem coincidir l'altre amb AE, i col · loquem una punta del compàs, que té la mateixa obertura KL, a l'angle recte de AE, i col · loquem l'altre en el costat que passa per L, llavors mantenint aquesta última, de nou girem el mateix costat, mantenint el contacte amb aquesta punta, fins arribar al centre E, de manera que talli al meridià en O, l'arc GO serà equivalent a l'arc de l'horitzó.

I per a aquests arcs, i per simplificar,[88] per tots ells, s'ha d'entendre, per tal de no repetir el mateix, que, transferint les obertures del compàs al quadrant dividit, en el mateix moment que són mesurades, hem de tabular els graus trobats en elles.

[88]Versió de Torres.

[Capítol 13]

De nou,

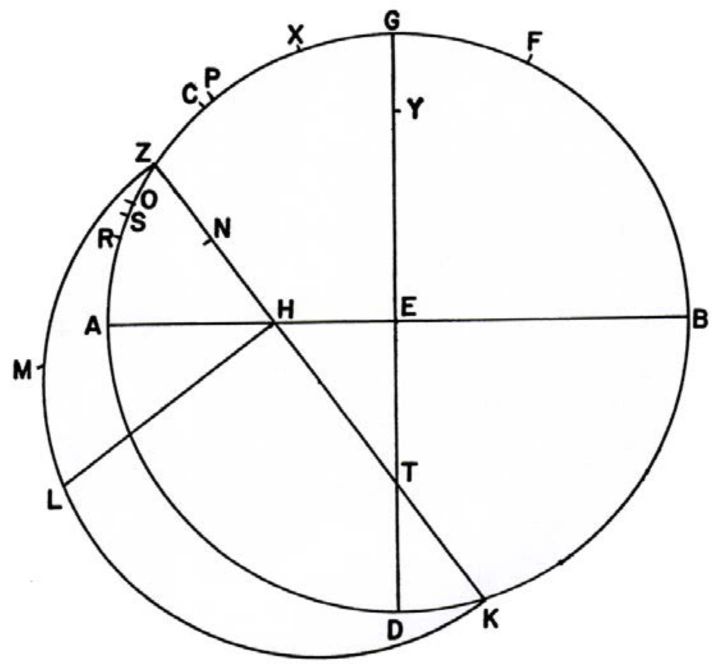


Fig. 9

[Fig. 9], considerem el diàmetre d'algun dels altres paral · lel mensuals, i sigui ZHTK sobre el qual està el semicercle oriental ZLK.

[α] I, amb centre T i distància TA marqui's el punt L del semicercle ZLK, que divideix la part del semicercle per sobre de la terra ZL, i la part a sota de la terra LK. El punt L, però, [també] es pot marcar amb l'escaire, aplicant el seu angle sobre H de manera que un costat coincideixi amb ZK. El punt [L] és determinat pel lloc en que l'altre costat talla el semicercle. Perquè, al traçar la perpendicular a HK per H, es construeix la intersecció dels plans de l'horitzó i el cercle mensual.

[β] Divideixi's, doncs, cada una de les dues porcions en sis parts iguals, i fetes les marques,

[γ] determini's per l'aplicació de l'escaire sobre la línia ZK els punts fixats per les perpendiculars a ella des de les divisions marcades en el semicercle.

[β] I sigui M una d'aquestes divisions per sobra la terra

[γ] i sigui N el punt corresponent sobre ZH.

[θ_M] Així doncs, amb centre N i radi NM marqui's el punt X sobre el meridià, i apliqui's un costat de l'escaire sobre els punts E i N de manera que talli al meridià en O,

L'arc XO serà el complement de l'arc hectemorus en un quadrant i l'arc des de X fins la intersecció de l'altre costat de l'escaire i el meridià, determinarà l'arc hectemorus [suposant en E el vèrtex de l'escaire].

[θ_V] I conseqüentment, si amb centre H i radi HM es marca el punt P sobre el meridià, l'arc AP serà equivalent a l'arc del cercle horari.

[θ_H] I anàlogament, si amb centre T i radi TM es marca el punt R sobre el meridià, l'arc GR serà equivalent al del descensiu.

[φ_M] D'altra banda, l'arc AO formarà l'arc del meridià.

[φ_V] I si col · loquem un dels costats de l'escaire tocant N, i fem coincidir l'altre amb GE, i col · loquem una punta del compàs, amb una obertura igual a NM, en l'angle recte de GE, i col · loquem l'altra en el costat que toca N, i després mantenint aquesta última punta, desplacen aquest costat conservant el contacte entre els dos fins a fer-lo passar pel centre E, i resulta que talla el meridià en S, l'arc GS serà equivalent a l'arc vertical.

[φ_H] Anàlogament de nou, si col · loquem un dels costats de l'escaire tocant N, i fem coincidir l'altre amb AE, i col · loquem una punta del compàs amb la mateixa obertura NM, en l'angle recte de AE, i col · loquem l'altra en el costat que toca N, i després, mantenint aquesta punta, desplacen aquest costat que passava per N, conservant el contacte entre els dos, fins a fer-lo passar pel centre E, i resulta que talla el meridià en C, l'arc CG serà equivalent a l'arc de l'horitzó.

[φ_E] Finalment, però, si, posant EY igual a MN, col · loquem l'angle recte a Y i fem coincidir un dels costat amb EY, i col · loquem a Y una punta del compàs amb una obertura igual a NH, i apliquem l'altra punta al costat ortogonal a EG, i després mantenint aquesta punta, desplacem el costat que la toca, conservant el contacte entre els dos, fins a fer-lo passar per E i resulta que talla el meridià en F, l'arc GF serà equivalent a l'arc del pla de l'equador.

Ara bé, si el diàmetre ZK situat a la nostra esquerra, correspon a un dels paral · lels mensuals al sud de l'equador, i fent girar el disc fins la posició oposada, ZK i el semicercle sobre ell se situaran a la nostra dreta, com els paral · lels mensuals corresponents als signes oposats que estan al nord de l'equador. I KL serà la porció per sobre la terra i ZL sota ella. I per això si hem de fer les mateixes coses que hem indicat en les divisions de la porció KL trobarem els arcs que corresponen als signes oposats.

Perquè si ZK representa el diàmetre del solstici d'hivern, la porció ZL ens donarà els arcs dels angles que estan per sobre la terra des del començament de Capricorn, i la porció LK ens donarà els arcs des del principi de Cranc.

Si ZK és, però, pres com el diàmetre del paral · lel mensual que segueix al tròpic d'hivern, la porció ZL del semicercle ens donarà els arcs per sobre la terra des del principi de Sagitari i Aquari, i l'arc LK aquells en el principi de Bessons i Lleó.

I si ZK és pres com el diàmetre del paral · lel mensual següent a l'equador, la porció ZL del semicercle ens donarà els arcs per sobre la terra en el principi d'Escorpí i Peixos. I LK aquells en el principi de Toro i Verge.

Per els que estan, però, en el principi d' Àries i Balança, ja s'ha demostrat que són el mateix en cadascun dels quadrants de l'equador.

[Capítol 14]

I a partir d'aquests angles es podrà passar immediatament als angles determinats pels antics - els quals no van ser establerts de la mateixa manera que hem fet nosaltres - .

[θ_M] Com hem dit, no prenien el del que nosaltres diem l'hectemorus, i pel altres

[θ_V] l'horari i

[φ_M] el del pla del cercle vertical i

[φ_E] el del pla de l'equador són el mateixos que per nosaltres, però,

[φ_M] el que anomenen hectemorus és el mateix que el nostre meridià; i per la resta,

[θ_H] el complementari del nostre descensiu és el seu descensiu, mentre que

[φ_H] el complementari del nostre angle de l'horitzó equival al seu antiscios, és a dir, contra-umbral.

El resultat que [l'arc de] el pla de l'equador hagi estat suprimit esdevé clar, com mostrem a continuació. Perquè aquest pla mostra certament la posició del cercle horari. Però també la mostra l'arc del cercle vertical, que ha estat dibuixat a través dels pols i de l'horari, i és un dels tres cercles establerts al principi com necessàriament mantenint una posició mútuament ortogonal a tot arreu. Per això, l'arc de l'hectemorus, en lloc del qual vàrem prendre l'arc de l'equador, no només mostra la posició al raig [de Sol] juntament amb l'arc de l'horari, sinó que també juntament amb l'arc del meridià, mentre que l'arc de l'equador la mostra només amb l'arc de l'horari; ni amb l'arc del meridià ni amb cap altre arc. Però això és perquè ni tan sols conté sempre el raig (fora dels equinoccis), com és propi dels cercles mòbils, ni manté a tot arreu la mateixa posició respecte dels altres cercles com és propi dels cercles estacionaris no mòbils.

Hem obtingut, però, la magnitud dels arcs que resulten més raonables de la manera que hem mostrat, pels set paral · lels establerts i per cada principi de signe i d' hora. I les recollim en taules seguint un sistema ideat per nosaltres i aplicable a tots els casos, de manera que les mesures dels angles es puguin tenir fàcilment a la mà. Però a més, com que la posició de les hores a l'est o a l'oest del cercle meridià fa que els arcs determinats en ell siguin molt clares, mentre que per la situació dels rajos al nord o al sud del cercle vertical hi ha casos en que, com hem dit, es necessita inquirir el resultat, hem escrit per cada hora símbols[89] pels quals és possible saber en la major part dels cassos si la posició del raig és cap al nord, o cap al sud, del cercle vertical. Començant per aquells que estan així ben determinats, hem de procedir a expressar-ho per les quantitats adjacents.

I encara diguem de cop que les parelles [d'angles] que donen la posició del raig resulten ser sis en nombre:

[1] tres són parelles de entre els [angles dels] dels tres cercles mòbils:

$[\theta_M, \theta_V]$ l' hectemorus amb l' horari,

$[\theta_M, \theta_H]$ l' hectemorus amb el descensiu,

$[\theta_V, \theta_H]$ l' horari amb el descensiu,

[2] i tres parelles [dels angles] de cada cercle mòbil amb l'estacionari que conté la seva inclinació:

$[\theta_M, \varphi_M]$ l' hectemorus amb el meridià

$[\theta_V, \varphi_V]$ l' horari amb el vertical

$[\theta_H, \varphi_H]$ el descensiu amb el de l'horitzó.

Aquí són les taules.

[89] Suposem que és refereix al "bo" [borealior] de la taula.

(TAULA) DE LES 13 HORES EN EL PRINCIPI DE CÀNCER ($\varphi = 16°25'$; $\delta = 23°50'$)

	Hect	Horari	Descen	Merid.	Vert.	Horitzó
Hora sobre l'horitzó	24º15'	65º5'	90º0'	0º0'	90º0'	24º15'
bo. 1 11	25º15'	69º15'	75º10'	35º15'	69º50'	20º0'
bo. 2 10	34º20'	73º0'	60º55'	60º45'	60º0'	18º50'
bo. 3 9	46º50'	77º30'	46º5'	72º10'	45º5'	17º15'
bo. 4 8	60º10'	79º10'	31º0'	78º30'	30º10'	18º0'
bo. 5 7	75º0'	81º20'	17º30'	81º30'	15º10'	27º0'
bo. Migdia	90º0'	82º35'	7º25'	82º35'	0º0'	90º0'

Apèndix B: Transcripció anotada de la còpia de l'*Analemma* en el manuscrit de Torres

[MS. Vaticanae Barb. lat. 304, folia 150^{r}-162^{r}][90]

Claudii Ptolomei liber de analem[m]ate[91]

[1]

Consideranti mihi, o Syre, angulor[um] acceptor[um] in locum gnomonicum, **quid** rationale & **quid** non[92], habitum quidem virorum illor[um] in lineis accidit admirari, **et**[93] in iis, et valde acceptare, non **contendere**[94] autem ubiq[ue], et eam quæ s[ecundu]m naturam in methodis consequentiam, ipsar[um] rer[um] no[n] solum clama[n]tiu[m] quod & naturali theoriæ opus est aliqua **consumptione**[95] magis mathematica & **mathematicæ**[96] magis nat[ural]i, nullatenus exprobravimus. non [e]n[im] licitum est q[uod] tale viro amantis addiscere pure, sed observare ut no[n] p[ro]p[te]r **differentiam cogitationum**[97] unu[m]que[m]q[ue] tractatuu[m] aliqua[li]t[e]r **imp[er]fectionem**[98] accidat fieri. quæ itaque certitudina[li]t[e]r deprehensa

[90]Com els signes de puntuació al manuscrit són molt escassos, ens hem permès introduir una puntuació moderna que faciliti la lectura.

[91]Al marge: secuntur post libri calcem figuræ.

[92]Heiberg (qui va fer dues edicions de l'*Analemma*: en 1895 i en 1907): **quod** rationale et **quod** non.

[93]Heiberg: **etiam**.

[94]Heiberg: **coattendere**.

[95]Heiberg: **coassumptione**.

[96]Heiberg: **mathematice**. Heiberg no utilitza mai el diftong æ, i Torres l'utilitza amb freqüència, per tant d'ara endavant no indicarem aquestes diferències.

[97]Heiberg: dictam **cogitationem.**

[98]Heiberg: **imperfectiorem**.

sunt mihi secundum **appositum**[99] locum, misi tibi **& si daturo**[100] summatim si quid tibi videmur ad intellectus coauxisse et ad **rationabilium**[101] suppositionum, et ad p[ro]mptitudinem usus eius qui p[er] **[analémmatos]**[102].

[2]

quoniam igitur eas quæ secundum unamqua[m]q[ue] molem **divisiones**[103], co[n]sequens est determinatas esse, et positione & multitudine sicut et magnitudine, **declinationum**[104] autem q[uæ] ad rectos angulos solæ hunc habent modum, omnes [e]n[im] aliæ et indeterminatæ secundu[m] speciem et infinitæ s[secundu]m numerum, consequutum est, tres solas esse tales secundum unamqua[m]q[ue] molem **divisionem**[105], quoniam & solas tres rectas ad rectos angulos invicem constitui possibile est, plures autem his est impossibile. propter quod quidem **est**[106] in sphæra sole tres diametri **constituuntur**[107] ad rectos angulos invicem, et maximi circuli soli tres, in recto angulo faciunt declinationes ad invicem. **acceptorum**[108] in sphæra mundi et, **uno**[109] **quidem**[110] ipsor[um] intellecto **secundum distinguentem**[111] quod sub terra

[99] Heiberg: **expositum**.
[100] Heiberg: **consideraturo**.
[101] Heiberg: **rationabilitatem**.
[102] Heiberg indica aquí un espai en blanc i la paraula grega al marge: **analémmat[os]**.
[103] Heiberg: dimensions.
[104] Al marge: forte **declinationes**.
[105] Variant sobre la línia: **divisiones**; al marge: aut **dimensionum**.
[106] Al marge: legerem **et**. Heiberg: **et**.
[107] Heiberg: **construuntur**.
[108] Al marge: **conjuncti**.
[109] Al marge: forse **p[ri]mo**.
[110] Al marge: s[cilicet] **Angulo**.
[111] Al marge: s[cilicet] **circulum**.

hemisphærium ab eo quod **supra**[112] terram, vocatum autem horizontem, secundo autem penes distinguentem orientalem hemisphærium ab occidentali, vocatum autem meridianum,

f. 150v

tertius et reliquus[113] erit penes separantem boreale hemispherium ab eo quod ad meridiem, vocatum aut[em] s[ecundu]m verticem. et **dictaru[m]**[114] diametror[um] com[m]unis **quidem**[115] horizontis, et meridiani vocat[ur] **meridiana**[116], com[m]unis autem sectio meridiani et eius qui secundum verticem vocatur gnomon, communis autem sectio eius qui **s[ecundu]m verticem et horizontis**[117] vocet[ur] **æquinoctialis**[118], quoniam et ipsius æquinoctialis ad ipsos **sit**[119] communis sectio. **simul translatis**[120] itaq[ue] **cum sole**[121] his circulis circa manentes communes sectiones ut circa axes, duas[122] quidem possibile est intelligere lationes, horizontis quidem circa **equinoctialis**[123] diametrum ut ad **id** quod sup[er] terram et sub terra et circa meridionalem[124] **ut**[125] ad orientem et occasum, meridiani aut[em] circa meridionalem

[112]Heiberg: **super**.
[113]Heiberg: **reliquus et tertius**.
[114]Al marge: forse **dictor[um] circulor[um].** Heiberg: **dictarum autem**.
[115]Al marge: s[cilicet] **sectio**.
[116]Al marge: s[cilicet] **linea**.
[117]Al marge: s[cilicet] **verticalem et horizo[n]t[al]em**.
[118]Al marge: s[cilicet] **linea**.
[119]Heiberg: **fit**.
[120]Al marge: **simul translatis forse simul concurrentes**.
[121]Al marge: **cum sole** forse **conversis, vel latis**.
[122]Sobre la línia de text: **intellige in singulis**.
[123]Heiberg: **equinoctialem**.
[124]Al marge: **s[cilicet] lineam**.
[125]Al marge: **ut** videt[ur] superfluere.

diametrum **ut**[126] ad ortus & occasus & circa diametru[m] Gnomonis, ut ad aquilonem & meridiem, eius aut[em] **qui s[ecundu]m verticem circa diametru[m] gnomonis**[127] ut ad aquilonem & meridiem, et circa **æquinoctialem**[128] ut ad id quod super terram & sub terra. Sed, q[uonia]m no[n] est possibile **eu[n]dem**[129] simul duab[us] ferri lationibus, conuenientiorem et priorem duar[um] **dictar[um]**[130] assignandum unicuiq[ue], hoc est, horizonti quidem **eam**[131] quæ circa æquinoctialem diametrum, ut rursum determinet positionem ad id quod sub terra et sup[er] terram, Meridiano autem **ea**[132] quæ circa **meridianum**[133], ut notet **disjunctionem**[134] quæ ad ortum & occasum, ei aut[em] qui s[ecundu]m verticem eam quæ circa gnomonem, ut insinuet transitum ad aquilonem et meridiem. **facit aut[em]**[135] horizontis **quidem latio circulum**[136], quem uocamus ektimoro[n], i[d est], sex partium, **quare latitudinem**[137] usq[ue] **ad 6$^{\mathbf{am}}$ horam**[138] manifestat, latio autem me-

[126] Al marge: **ut** et[iam] sup[er]fluit.
[127] Al marge: legerem **v[er]ticalis. circa diametru[m] gnomonis** idest **circa p[ro]pri[am] diametron quæ gnomo[n] dicitur**. *El subratllat està al text, però ratllat.*
[128] Al marge: **æquinoctialem** s[cilicet] **circu[lu]m**.
[129] Al marge: **eundem** s[cilicet] **circulum**.
[130] Al marge: s[cilicet] **lationum**.
[131] Afegit per Heiberg.
[132] Heiberg: **eam**.
[133] Al marge: **meridianum** i[dest] **meridiana linea**.
[134] Heiberg: **distinctionem**.
[135] Al marge, però ratllat: **facit autem** intellige punctum quod ab immobili horizonte maxime distat in horizonte mobili quartam circuli describere usq[ue] ad verticem cuius causa dicit[ur] ektimoron.
[136] Al final del marge inferior (com afegit posteriorment): punctus Horizontis quo atti[n]git Meridianum describit portione[m] periferiæ circuli maioris utpote Meridiani in 6 partes divisam, singulis aut[em] dieb[us] unam portionem describit ab aliis differentem magnitudine quam in 6 horas distinguimus.
[137] Al marge, però ratllat: lege **longitudinem** s[cilicet] manifestat... al text, sobre la última paraula: forse **altitudinem**. Commandino i Heiberg: **quia altitudinem**.
[138] Al marge: **ad sextam horam**, referri potest **ad Meridianam** quæ in horologiis

ridiani circulum, quem **vocamus horarium**[139], **quare longitudini**[140] quæ secundu[m] unamquamq[ue] horam **coni progreditur**[141], latio aut[em] eius qui s[ecundu]m vertice[m] circulum, quem vocamus **katabaticum, i[d est], descensiuum**[142], quia notificat descensionem ab altissimo ad humilimum. rursus unusquisq[ue] dictor[um] circulor[um] in **coexaltatione**[143] cum solari radio sup[er] terram facit

f. 151

duas declinationes, quibus datis et positio radii determinatur, quoniam una **ad tale**[144] no[n] sufficit, har[um] autem alteram quidem a rectis contentam, sci[licet] **a delata & mane[n]te**[145], hoc est, a radio & a diametro circa quam **fertur**[146], alteram autem ab ipsis planis, **simi[li]t[e]r**[147] a moto

antiquis p[er]petuo erat sexta.

139 Sobre aquestes dues paraules: i[dest] **æquatorem**. Al marge: **Circulum quem vocamus horariu[m]**. Hinc animadvertendum circulos horarios non p[er]petuo duci p[er] mundi polos ut reoterici jubent nisi in sphere situ recto. Nota quod illi tres circuli cum sole delati indicant quosdam alios, quos ad angulos rectos secant: Horizon Meridianum, Meridian[us] Æquatore[m], Verticalis autem circulum p[ro]gressionis quem vocant arabes Almicantarath.

140 Sobre aquesta última paraula: i[dest] **secundu[m] longitudinem**.

141 Heiberg: **comprogreditur**.

142 Sobre aquestes tres paraules: **i[dest]** [tachado: almicantarath verticalem] **almica[n]tarat**.

143 Al marge inferior (el lateral està ple): **Coexaltatione** idest **in parili motu**.

144 Al marge: **ad tale**, legerem **ad talem positionem**. Una altra nota anterior al marge, la referència de la qual no és clara, diu: **duab[us]**.

145 Al marge superior nota de quatre línies de text molt fosc: **a delata & manente**. vix hoc [?] percipi potest nisi sole [?] intelligamur [...?] / lineas. p[ri]ma manet in horizonte immobili secundum [...?]. 2a. est in horizontis immobi- / lis plano p[ro]ducta ad solem. 3a. est gnomon in v[erti]cali. 4a. in circulo v[er]ticali [...?]. 5a. est men[?] in fixo undique herens. sexta p[er] horarii circuli planu[m] ad O protenditur.

146 Al marge, línia fosca: s[cilicet] vadtasvolari[?] planum in.

147 Al marge, línia tatxada i fosca: instar legerem proprie[?]

& a manente, ita ut, duor[um] circulor[um] **utriusq[ue]**[148] una **solu[m] declinatione**[149] data, determinetur & positio radii. et eor[um] quidem qui ab ektimoro circulo fiunt angulor[um] consistentem quidem apud radium & apud diametrum equinoctialem no[n] videmus ab antiquis acceptum in locum gnomonicum, **eum atqui**[150] ab ipsius declinatione ad horizontem fit vocant ektimoron. factor[um] autem a circulo horario duor[um] angulor[um], **cum quidem**[151] qui apud radium at apud **diametru[m] æquinoctialem**[152] consistit, vocant **horarium**[153], eum aut[em] qui ab ipsius declinatione ad Meridianu[m], **in plano eius**[154] qui s[ecundu]m verticem. factor[um] aut[em] a circulo descensiuo duor[um] angulor[um] hic quidem apud radium & apud gnomonem **consistit**[155], hic autem ab ipsius declinatione ad eum qui s[ecundu]m verticem. vtunt[ur] autem non hiis, sed pro angulo quidem, qui a gnomone et a radio continetur utuntur deficiente ad vnu[m] rectum et vocant ipsu[m] descensiuum, pro angulo aut[em] qui ab ipsius declinatione ad eum qui s[ecundu]m verticem continetur utuntur eo qui constituitur

[148] Al marge: **utriusq[ue]** videtur abundare.

[149] Al marge: **declinatione**. ubi est declinatio perpetuo legerem **inclinatio**. Heiberg: **sola declinationum**.

[150] Al marge: **eum** videtur abundare. Heiberg: **eum autem, qui.**

[151] Heiberg: **eum quidem**.

[152] Al marge, quatre línies tallades al final: **diametrum equinoctiale[m,]** / neccessario mihi videtur esse le[gen-?] / dum apud diametrum [que ...?] / linea meridiana, quoniam [cir-?] / culus horarius no[n] monetur [?] / æquinoctialem diametrum.

[153] Al marge: intellige **angulum**.

[154] Al marge, cinc línies també tallades al final: **in plano eius qui secund[um] / verticem**. advertendum totu[m] / hoc esse denominationem illiu[s] / anguli. & nisi sic accipias [non] / assequeris sensum.

[155] Darrera d'aquesta paraula i abans de la coma, Torres va escriure i va tatxar la paraula: **iterum**. Sobre la mateixa, va escriure: **nihil deest**. Però Heiberg transcriu: **consistit iterum**.

a declinatione ipsius ad meridianu[m], vocant aut[em] & hunc antiskion, i[d est] contraumbralem. sextum aut[em] angulum inserunt pro relicto eum qui fit ab equinoctiali diametro & a com[m]uni sectione circuli horarii et equinoctialis quem vocant in æquinoctialis plano, & quidem, æquinoctiali non in omni climate eandem s[er]uante positionem, al[ite]r passus est & horizon & Meridianus et qui s[ecundu]m verticem.

[3.]

ut aut[em] sub visu **ma[teria]li**[156] magis cadat consequentia angulor[um] & quod supponitur **sit**[157] meridianus quidem circulus **qui**[158] *abgd.* recti aut[em] sup[er] ipsum et orientales semicirculi horizontis quidem **qui**[159] *aeb*, eius aut[em] qui s[ecundu]m verticem *ged*, &, supposita

f. 151v

positione radii alicuius penes z, describantur p[er] ipsum trium circulor[um] orientales semicirculi circumdelati cum radio circa p[r]oprias diámetros, ipsius quidem horizontis aeb facti ektimori semicirculus hzet circa diametrum **per**[160] *e* et per oppositum sibi diametral[ite]r, ipsius aut[em] Meridiani agb facti horarii semicirculus *azkb* circa diametrum **qui**[161] per *a* et *b* ipsius

[156] Aquesta paraula de Torres no és clara, però certament no és la de Heiberg: **nobis**.
[157] Aquesta paraula introdueix la ***Figura 1.***
[158] Al marge: **qui** abundat. Aquest **qui** tradueix l'article grec (**hos**) que precedeix **el** (cercle) ***abgd*** de la figura.
[159] Torres conserva aquest **qui** anàleg a l'anterior. Però a continuació suprimeix directament el **qui** o **que** que Heiberg conserva davant de: ***ged, ze, za, zg, ah, gh (=gk), el.***
[160] Heiberg: **que apud**.
[161] Heiberg: **que**.

autem **quod**[162] s[ecundu]m verticem facti descensiui semicirculus *gzd* circa diametru[m] quæ p[er] *g* et *d*. & accipiantur differentiæ angulor[um] in periferiis p[ro]p[r]ior[um] circulor[um] subtensis unicuiq[ue] p[ro]pt[er] simpliciorem ostensionem. angulis **quibuscu[m]q[ue]**[163], quos dicebamus constitui a radio et ab axe, periferiæ **subtendantur**[164] *ze* ektimori periferia et *za* horarii & *zg* descensiui, angulis aut[em] qui fiunt a declinationib[us] planor[um] manentis circuli et **transcendentis**[165] ipsum, subtenduntur que *ah* Meridiani periferia continens declinationem horizontis et ektimori et ***gh***[166] eius qui secundum verticem periferia continens declinationem Meridiani & horarii et *el* horizontis periferia co[n]tinens declinationem eius qui s[ecundu]m verticem et descensiui.

[4.]

huius itaq[ue] consequentiæ subiicientis angulosq[ue] & periferias **convenienter**[167] nature circulor[um] vnam s[ecundu]m vnumque[m]q[ue] manentium et motor[um] antiqui ipsam quidem *ez* ektimori pretermiserunt, ut diximus, ponentes pro ipsa, quem vocant in æquinoctialis plano, ipsam aut[em] *az* s[er]uant & uocant p[ro]prie horariam, p[ro] ipsa aut[em] *zl* asumpserunt nominantes ipsam descensiuam, et rursum ipsam quidem *ah* s[er]uant & vocant ektimoron, simil[ite]r autem & ipsam ***gh***[168] vocantes ipsam in plano

[162] Heiberg: ***ged*** **qui**.
[163] Heiberg: **quidem itaque**.
[164] Heiberg: **subtenduntur**.
[165] Heiberg: **transcidentis**.
[166] Heiberg: **que gk**.
[167] Heiberg: **conuenientes**.
[168] Heiberg: ***gk***.

eius qui s[ecundu]m verticem, pro ipsa aut[em] *el* assumunt ipsam *al* vocantes ipsam antiskion, i[d est], co[n]traumbralem. differentia quidem igitur rationabilitat[is] penes id quod supponitur ad eos qui ante nos, manifesta.

[5.]

Qvoniam aut[em] omnis angulus facit aliquas magnitudines ex utraq[ue]

f. 152

parte declinationis & quandoq[ue] quidem equales, ut in positione recta, quandoq[ue] aut[em] inequales ut in reliquis, necessariu[m] utiq[ue] erit et in angulis expositis aut periferiis condeterminari principium s[ecundu]m unamqua[m]q[ue] speciem, a quo **accepto**[169] et contrarietates declinationum ear[um] quæ ad ortus [ve]l occasus et earum quæ ad aq[ui]lonem vel meridiem. p[ro]posito igitur nobis existente acceptiones & expositiones & appellationes periferiar[um] facere secundum ordinem a ratione productum, consequens erit & suppositionib[us] determinatio p[ro]pria s[ecundu]m unamqua[m]q[ue] spe[cie]m. nominationes [e]n[im] facimus ab ipsis circulis, quor[um] sunt periferiæ, et vocamus eas quidem quæ in motis ektimoriales & horarias & descensiuas, eas autem quæ in manentib[us] simi[li]t[e]r Meridionales & s[ecundu]m verticem & horizontes. & in magnitudinib[us] semp[er] eligim[us] acutum angulu[m] consistentium ex utraq[ue] parte, si non sint recti, & principia acceptionu[m] facimus earum quidem quæ in circulis motis ab altero polor[um] circulationis ad quem declinatio, hoc est, in iis quidem quæ ipsius ektimori a termino diametri æquinoctialis ante mediationem quidem Cœli ab orien-

[169]Heiberg: **acceptio**.

tali, post mediatione[m] aut[em] ab occidentali, in his aut[em] quæ horarii a termino diametri Meridiani, quando quidem positio radii fuerit borealior circulo qui s[ecundu]m verticem, ab arctico, quando aut[em] australior, a meridiano, quod & ipsum op[ortet] abs[er]uare, q[uonia]m non eandem h[abe]t det[er]minationem; in iis v[er]o *qui*[170] descensiui solum a termino gnomonis q[ui] *supra*[171] terram. ear[um] aut[em] quæ in circulis manentibus ab altero termino tamqua[m] Com[m]uni Sectione uniuscuiusq[ue] & suppositi plani, ad quem faciens angulum declinatio, hoc est, in iis quidem quæ Meridiani a termino recte meridianæ, radio quidem existente *borealiori quam*[172] circulus qui secundum verticem ab arctico, australiori autem a meridiano, & hoc enim rursum *oportebat*[173] det[er]minare; in iis quæ eius qui secundum verticem a termino qui sup[er] terra[m]

f. 152v

gnomonis solum, in hiis *qui*[174] horizontis a termino diametri æquinoctialis ante *mediatorem*[175] quidem Cœli ab orientali, post mediationem aut[em] Cœli ab occidentali, vel borealiori quidem existente radio quam circulus qui s[ecundu]m verticem ut ad aquilonem, australiori autem ut ad meridiem; quod & ipsum *op[us]*[176] obs[er]uare, et quia uniuersa[li]t[e]r eas quæ ex utraq[ue] parte positiones earum quæ in ortibus vel occasibus determinan-

[170] Heiberg: **que**.
[171] Heiberg: **super**.
[172] Heibergi, per error: **boreali oriquam**.
[173] Heiberg: **oportebit**.
[174] Heiberg: **autem que**.
[175] Heiberg: **mediationem**.
[176] Abreviatura no clara. Heiberg: **oportebat**.

tur, dico aut[em] earum quæ horarii & earum quæ descensiui et ear[um] que eius qui s[ecundu]m verticem, mediatio Cœli simp[lici]t[e]r designat, ear[um] aut[em] quæ versus aquilonem aut meridiem, dico aut[em] ear[um] quæ descensiui rursum & earum que ektimori et ear[um] quæ meridiani & ear[um] que horizontis, positio radii ex utraq[ue] parte circuli qui s[ecundu]m verticem, & has ipsas no[n] habentes unum & eundem terminu[m].

[6.]

Premissis itaq[ue] his exponemus instrumentales acceptiones s[ecundu]m vnamqua[m]q[ue] spe[cie]m subiacentium nobis angulor[um], ex[em]pli gratia, ut *in proptum*[177] habeamus methodum, que erit in *Analemmate*[178]. prius aut[em] s[ecundu]m se superveniemus sup[er] anguli pret[er]missi ab antiquis, quem nos vocamus ektimorum acceptionem instrumentalem, q[uonia]m et *demonstrationi[s] huius utiq[ue] erit*[179] coniungere iis, quæ ab illis *probata*[180] sunt. Quod quidem igitur in æquinoctiis anguli inquisiti semp[er] iidem fiant iis qui in plano æquinoctialis, palam ex se. congruit enim ipsi q[uod] p[er] totam circulationem, et circulus ektimorus facienti æquales inuicem periferias quæ s[ecundu]m una[m]qua[m]q[ue] æquinoctialem horam ex 15 gradibus *consistentem*[181] & angulos ipsi conseque[n]tes continentes ektimoria, i[d est], sextas partes, unius recti. gratia aut[em] reliquor[um] mensiliu[m], esto Me-

[177]Heiberg: **promptam**.
[178]Al text en llatí, i al marge, en grec: **analematois**. Heiberg deixa aquí un espai en blanc, i indica a una nota que al marge està escrit en grec: **analemmate**.
[179]Heiberg: **demonstrationem huius necessarium utique erit** (d'acord amb el palimpsest grec).
[180]Heiberg: **aliter tractata** (d'acord amb el palimpsest grec).
[181]Heiberg: **consistentes**.

ridianus circulus *abgd*, in quo horizontis quidem *diameter*[182] *ab*, ad angulos autem rectos ipsi & s[ecundu]m gnomonem *gd*, & centrum quidem solaris sphere *e*, unius aut[em] parallelor[um] mensilium magis borealium quam equinoctialis

f. 153

diameter sit zth[183] sup[er] quam orientalis semicirculus in eodem plano intelligatur qui *zkt*, & ducatur ad rectos angulos ipsi *zt*, *kh*, ita ut *zk* portio parallelli sit super terram, et, *ab sumpta*[184] periferia *kl*, ducatur p[er]pendicularis ab *l* sup[er] *zt ipsa*[185] *lm*, & centro quidem *m* distantia aut[em] *ml* accipiatur signu[m] in Meridiano quod sit *x*, & copulet[ur] *el*, *emn* et *ex* et *mx*, ducat[ur] autem ipsi *en* ad rectos angulos *eo*. dico, q[uod] angulus qui sub *xeo* est æqualis quesito. intelligatur [e]n[im] semicirculus *zlt* conuersus ad propriam positionem, hoc est, rectam ad planum meridiani, et producatur ab *e* recta ad idem planum pro æquinoctiali diametro *ep*. quod quidem ig[itur] et ipsa *lm* existente recta ad meridianum, *en* & *ml* & *ep* rectæ *q[uæ]*[186] in uno plano recto ad *abgd*, palam. Simil[ite]r autem q[uod] et quidem *en* est com[m]unis sectio circuli ektimori & meridiani, *el* autem in recta ad solarem radium, quesitus aut[em] angulus, contentus a radio & a diametro equinoctiali, qui sub *lep*. demostrandum igitur q[uod] angulus qui

[182] Heiberg: **diametrus qui**. Tals pronoms **qui, que** estan conservats també en Heiberg, aquí abans de: ***abgd, gd, zth, kh, lm, ml, el, eo***, i al final d'aquest capítol abans de: ***ml, ep, en*** (dues vegades), **el** (dues vegadess), ***ml, em***.

[183] Heiberg: **diametrus sit qui *zht***.

[184] Heiberg: **absumpta**.

[185] Heiberg: **que**.

[186] Heiberg: **sunt**.

sub *xeo* est æqualis ei qui sub *lep*. q[uonia]m [e]n[im] equalis est *el* quidem ipsi *ex*, *ml* autem ipsi *mx*, com[m]unis autem *em*, ergo et angulus qui sub *mel* est æqualis ei qui sub *mex*. rectus autem qui sub *mep* & qui sub *meo*, quoniam & qui sub *eml*; et reliquus ergo qui sub *lep* reliquo qui sub *mex*, hoc est, ei qui sub *xeo*, equalis est. quod quidem oportebat demonstrare.

[7.]

Consequenter aut[em] & com[m]unes ipsor[um] acceptiones exponemus, quæ fiunt seorsum sup[er] equinoctialem et rursum sup[er] aliquem **boreali-or[um] aut australior[um]**[187] ipso parallelor[um] mensiliu[m]. sit igitur meridianus **circulus *abgd***[188], in quo horizontis quidem diameter ***ab***, ad rectos autem ipsi et s[ecundu]m gnomonem ***gd***, & centrum quidem solaris sphere e, climatis autem periferia ***gz***. & producat[ur] prius æquinoctialis diameter *zeh*, sup[er] quam semicirculus ***zth***, jaceat quidem in plano Meridiani, intelligatur aut[em] in hemispherio ad orientem, describaturq[ue] **sole ad sursum in una circumvolutione hora[rum]**[189] et alior[um] mensilium parallelor[um], et, producta ***et*** p[er]pendiculari ad *zh*,

f. 153v

ita ut ***zt*** tetartimorion, i[d est], quarta pars, sit supra terram, ***ab* sumatur *thpk* periferia**[190] datarum horar[um], et intendatur angulos qui in

[187]Heiberg: **borealiorem aut australiorem**.

[188]Heiberg conserva aquí el **qui** abans de ***abdg***. I més endavant el **qui, que o quod** abans de: ***ab, gd, gz, zeh, et, zt, ek, mln, xlo, xp, rm, ek, eps***.

[189]La restauració de Commandino diu aquí: **sole terram illuminante in una conuersione huius**. Però el text de Heiberg, **sol ad sensum in una circunvolutione horum**, concorda amb el del palimpsest grec: **ho helios pros aisthesin en tei miai peripolesei touton**.

[190]***ab*** està clarament escrit entre punts (com escriu sempre les lletres corresponents a

hac positione accip[er]e. **ducantur itaq[ue] perpendiculares *ak* quidem sup[er] *zh ek***[191] ab *l* autem sup[er] *eh* ipsa ***mln***, sup[er] *eg* autem ***xlo***, et ipsi *lk* equales iaceant ***xp*** et ***rm***, et copulentur ***ek*** et *en* et *eo* et adhuc ***eps*** et *erc*. **quandoquide[m]**[192] igitur australior est radius circulo, qui secundum verticem p[er] totam circulationem supra terra[m] in equinoctiali et in parallelis borealioribus ipso quia inclinatio sphære in habitata secundum nos versa est ad Meridiem, et oportet **ad mutationes**[193] consequentes positioni ipsius determinare, manifestum. continet aut[em] angulus qui sub *ekl*, hoc est, qui sub *tek*, angulum circuli ektimori, qui sit idem, ut diximus, hic ei qui in plano equinoctialis, angulus aut[em] qui sub *aen* eum qui horarii, qui aut[em] sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *aez* eum qui meridiani, **[qui autem sub *ges* eum qui verticalis,]**[194] qui aut[em] sub gec eum qui orizontis.

[8.]

exponatur itaq[ue] **rursum *abgd***[195] meridianus cum diametris *ab* et *gd*, et protrahantur in ipso diametri parallelor[um] mensilium borealior[um] æqui-

---

elements de la figura, que nosaltres transcrivim en cursiva), i la ***p*** de ***thpk*** està escrita sobre la ***k*** de la tríada entre punts ***thk***. La frase resulta inintel · ligible. El text de Heiberg, **absumatur que tk periferia**, és ben clar i coincideix amb la reconstrucció probable del text grec: **apeiléphtho he TK periféreia**.

[191] Heiberg: **ducantur itaque perpendiculares a k quidem super zh que ek...**

[192] Heiberg: **quod quidem**.

[193] Heiberg: **adnuitiones**. Al palimpsest grec: **prosneuseis**.

[194] Aquesta frase falta aquí i a Heiberg, però la introdueix la restauració de Commandino.

[195] Heiberg conserva també aquí el **qui** que Torres suprimeix abans de: ***abdg***. I més endavant el **qui** o **que** abans de: ***zlk, cl (=tl), mn, enx, ynf, ep,*** $ef\psi$, $eq\omega$. Però Torres conserva el **quod** abans de: ***p, r.***

noctiali ***zh tk***[196], super quam simi[li]t[e]r describatur semicirculus orientalis ***zlk***, et ad rectos angulos ipsi zk ducatur cl[197], ita ut zl portio paralleli sit sup[er] terram. absumpta autem lm periferia datar[um] horar[um], ducatur ***abm***[198] p[er]pendicularis super zt mn, ipso n faciente uid[elicet] positionem radii borealiorem quidem circulo qui s[ecundu]m verticem, quando fuerit sup[er] ht, australiorem autem, quando fuerit sup[er] zh. protrahatur etiam rursum enx, et recta ad ipsam erigatur que eo. accipiantur igitur in Meridiano signa tria, centro quidem n distantia autem mn q[uo]d p, centro autem t distantia vero tm q[uo]d r, centro &[199] h, distantia autem hm q[uo]d [S][200]. deinde p[ro]ductis rnc et sny, ipse enim sunt p[er] n accepte p[er]pendiculares ad eb et eg, absumantur in ipsis simi[li]t[e]r æquales

f. 154

ipsi ***m n, ynf*** et ***cng***[201], et copulentur ***ep*** et *er* **[et]**[202] *es* et *mt*, et adhuc $ef\psi$ et $eq\omega$. continet itaq[ue] et hic angulus quidem qui sub *peo* angulum circuli ektimori, qvi aut[em] sub *ber* eum qui horarii, qui uero sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *bex* eum qui Meridiani, qui autem sub $ge\psi$ eum qui eius qui s[ecundu]m verticem, qui vero sub $ge\omega$ eum qui horizontis, angulo qui sub *tmn* faciente eum qui in plano æquinoctialis.

[9.]

---

[196] Heiberg: **zhtk**.
[197] Heiberg: **tl**.
[198] Heiberg: **ducatur ab m perpendicularis super zt que *mn***.
[199] Heiberg: **etiam**.
[200] Espai en blanc, junt al que Heiberg llegeix al marge: $e\psi$. Commandino restaura: ***S***.
[201] Heiberg: ***mn... cnq,.***
[202] Afegit per Heiberg.

instrumentales quidem igitur acceptiones hunc continent modum, assumpta simili consequentia in omnibus positionibus. in expositione autem quantitatu[m] consistentium s[ecundu]m unu[m]quodq[ue] clima & signum & gradum **sufficiet**[203] quidem in ipsis solis periferiis subtendentibus angulos facere mensurationes, ut promptas ipsas habeamus in numeris et non descriptiones determinatas, nec s[ecundu]m semel **cogitatam vocari p[er] [analemmatos]**[204] inquisitos angulos, rectar[um] fere ubiq[ue] confusar[um]. sed in **unamquamq[ue]**[205] opportunitatum, una quadam **parte**[206] circuli diuisa in unius recti portiones 90 equale inscribentes & circunscribentes co[n]centricum

[203]Heiberg: **sufficient**.
[204]Al lloc de la última paraula hi ha un espai en blanc, però al marge s'afegeix en grec: **analemmatos** (amb una mu sobre l'altra). Heiberg: **cogimur negotiari per** [amb un afegit al marge:] **analémmat**. Això concorda amb el palimpsest grec.
[205]Heiberg: **unaquaque**.
[206]Heiberg: **quarta parte**.

cum dato ad [**compositionem**][207218] periferia ex[iste]ns æqualis ei quæ circuli ektimori & adhuc ei quæ in plano equinoctialis ex se data est. quoniam et ipsius *exo* rectanguli trigoni data est ***ex, et xo*** & ***eo*** subtendens, dabitur & angulus qui sub *eox*, & reliquus qui sub *oex* quare & ***bo*** p[er]iferia continens eum qui circuli horarii. simi[li]t[e]r autem, quoniam & ipsius *epr* rectanguli data est ***ep***, & ***pr***, et ***er*** subtendens, dabitur *angulus qui sub ep*

[207]Al lloc de la última paraula hi ha un espai en blanc sense explicació. Heiberg transcriu la paraula grega al marge: **katackeom** [potser una lectura temptativa de Moerbeke, amb les dues últimes lletres dubtoses], corregida a sobre: **kataskeuen** [potser amb una correcció d'una altra mà posterior]. I al text grec del palimpsest apareix: **pròs tèn kataskeuèn [= ad compositionem].**. et accipientes a diuiso dista[n]tias continentes numerum convenientium graduu[m], transferimus ad equalem sibi quartam partem, & p[er] deprehensos terminos et p[er] com[m]une centrum circulor[um] producentes rectas inveniamus angulos et periferias in datis circulis maioribus vel minorib[us]. talis aut[em] acceptio extabit quidem utiq[ue] et per lineas ad certissimum volentib[us], fiet aut[em] utiq[ue] facilius acquisibilis & p[er] ipsum **analémmatos**[208], et si no[n] sit æque **inuiciabilis**[209] ei que per lineares demonstrationes, tamen usq[ue] ad examinationem que **ad sursum**[210], ad quam reducit[ur] finis usualis suppositi negotii. quo aut[em] modo uterq[ue] processuum ad promptissimu[m] nobis **accipiatur**[211], ostendemus in parte summatim, premissa consyderatione quæ p[er] numeros ita se **habentes**[212].

Exponatur **Meridianus** ***abgd***[213] circa centrum *e*, in quo diametri ad rectos angulos inuicem, com[m]unis quidem sectionis ipsius et horizo[n]tis ***ab***, gnominis aut[em] ***gd***, sitq[ue] data eleuatio poli & contineatur

f. 154v

a periferia *az*, et protrahatur axis quidem ***zeh*** æquinoctialis aut[em] prius diameter ***tek***, & absumatur data periferia ***zl***. et ab *l* ducantur p[er]pendiculares sup[er] *ez* quidem ***lm***, sup[er] *ek* autem ***ln***, simi[li]t[e]r aut[em] et ab *n* sup[er] *eb* quidem ***xno***, sup[er] *ed* aut[em] ***pnr***. quoniam igitur data est periferia *az*, hoc est, ***dk***, datus erit & angulus qui sub *pen*. rectus autem qui apud *p*. data est ergo & ipsius *en* subtensæ p[ro]portio ad utramq[ue] ear[um] *qui*[214] circa rectum, hoc est, ad ipsas *ep* et *pn*, et ad æquales ipsis, sci[licet] *nx* et *ex*. rursum quoniam data est ***nz***[215] periferia, quartæ autem partis est ***kz***, quare & reliqua ***kl*** data est. subtenditur aut[em] duplæ ***lz***[216] periferiæ dupla ipsius *lm* rectæ, duplæ aut[em] ipsius *lk* periferie dupla ipsius *ln* rectæ, data erit & p[ro]portio utraq[ue] ipsar[um] *lm* et *ln* ad diametrum Meridiani. quare & p[ro]portio ipsius *en*, q[ua]e est æqualis ipsi *lm*, & p[ro]portio ipsar[um] *ep*, *nx latera*[217] tetragoni. suma[n]t[ur] itaq[ue] ipsi *ln* æquales ***ps*** et ***xc***, et protrahantur *oe* & *er* et *esy* et *ecf*. ***zl*** ergo

[218] Heiberg: **que quidem igitur *zl***.

rp[219], & reliquus qui sub *per*, simul cum ipso & *dicitur periferia*[220] existens æqualis ei *que est circuli descensiui*[221]. rursum, quidem ***hk*** periferia faciens eum qui Meridiani ex se data est. q[uonia]m et ipsius *eps* rectanguli ***ep*** et ***ps*** dabitur et ***es*** subtensa, & angulus qui sub *pse* ipseq[ue] et ***dy*** periferia existens æqualis ei quæ circuli qui s[ecundu]m verticem. simi[li]t[e]r autem, quonia[m] & ipsius *exc* rectanguli data est ***ex***, et ***xc***, dabitur & subtensa ***ec***, et angulus qui sub *cex*, hoc est, qui sub *dec* ipseq[ue] et ***df*** periferia existens æqualis ei que horizontis.

f. 155

[10.] et *alioru[m]*[222]

mensilium gratia, exponatur ***abgd***[223] Meridianus cum diametris ad rectos invicem, et cum axe *ez*, et producatur unius rursum australiorum æquinoctiali mensilium parallelor[um] diameter ***htk***, sup[er] qua[m], ad orientem intellectus, semicirculus describatur ***hlk***, et usque ad ipsum educatur axis *ezl*, in duo æqua uidelicet secans ipsam htk diametrum penes ***e***[224] et semicirculum *hk* penes *l*. producatur autem et ***mn*** recta super *ht* determinans *hn* **et**[225] portionem semicirculi super terram ab ea quæ sub terra, et, accep-

[219]Heiberg: **et angulus qui sub *erp*** .
[220]Heiberg: **que *dr* periferia**.
[221]Heiberg: **que circuli descensiui. rursum que quidem**.
[222]Heiberg: **aliorum autem** (gr.: **állon de**).
[223]Heiberg conserva el **qui** (gr.: ho) abans de ***abdg*** , i el **qui** o **que** (gr. **he**) abans de ***htk, hlk, mn, hm, por, soc, az, ln, nxh, nx, lx, xh, em, tm, et, pq, sf, eo, oy, xo, om, mx, ep, gr, es, ec, op, ep, eo, es, sf, ef, gy, ep, pq, eq, gw***. Conserva també el **ipsi** (gr.: **to**) abans de **OX**.
[224]Heiberg: **t**.
[225]Heiberg omet el **et**.

ta ipsa *nx* periferia datarum horarum, ducatur ab *x* perpendicularis super ***hm*** *xo*, et per *o* produca[n]tur perpendiculares super *ae* quidem ***por***, super *ge* autem ***soc***. quonia[m] igitur data est ***zl***[226] Meridiani periferia, residuæ aut[em] in semicirculu[m] subtenditur dupla ipsius **etiam rectus**[227], data erit p[ro]portio ipsius *htk* et p[ro]portio ipsius *et* ad diametrum Meridiani. simi[li]t[e]r, q[uonia]m data est ***az*** periferia eleuationis, datus erit et ipsius *met* trigoni rectanguli angulus qui sub *met*. quare data erit proportio ipsius *et* ad utramq[ue] ipsar[um] *em* et *mt*, et adhuc p[ro]portio ipsius ***ek***[228] diametri ad una[m]qua[m]q[ue] ipsar[um]. sed ipsius *mt* recte dupla subtenditur duplæ ipsius *ln* periferiæ. quare et ***ln*** periferia data erit et residua in quartam partem ***nxh***. data est autem et ***nx***, data ergo erit et ***lx*** et ***xh***. subtenditur aut[em] duplæ quidem ipsius ***nx***[229] periferiæ dupla ipsius *xo* rectæ, dupla autem ipsius *xa* periferiæ dupla ipsius *ht* rectae. quare data erit ipar[um] *xo* et *ot* proportio ad diametrum *hk*, p[ro]p[te]r hoc aut[e]m & ad eam quæ Meridiani. quoniam aut[em] et ipsius *tm* data est p[ro]portio, data erit & p[ro]portio ipsius *mo*. et est, ut ***em*** ad *mo*, ita ***tm*** ad *mp* et ***et*** ad *op*, equiangula enim sunt trigona *emt* et *opm*. data ergo erit et ipsar[um] *mp* et *op* proportio ad diametrum Meridiani. p[ro]p[te]r hoc aut[em] **[et p[ro]portio ipsius *es*]**[230] et proportio ipsius *emp* totius, hoc est, ipsius ***s***[231]. his igitur demonstratis,

[226] Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***hzk***.
[227] Heiberg: **et recte** (gr.: **ET eu<the>ías**).
[228] Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***hk***.
[229] Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***hx***.
[230] Afegit per Heiberg.
[231] Heiberg: **os**.

sumatur centro o et distantia ***ex***[232] signu[m] in Meridiano, sci[licet] ***g***[233], et **abscinditur**[234] rursum ***ox*** equales ***pq*** et ***sf***, et copulentur ***ex***[235] et *er* et *et* et *xm* et adhuc ***eo*** et $ef\psi$ et $eq\omega$. quoniam igitur in praecedentibus angulus qui sub *eoy* demonstratus est esse rectus, data est aut[em] et ***oy***[236] subtensa existens

f. 155v

ex centro Meridiani, et ***oy*** existens equalis ipsi *ox*, data erit et angulus qui sub *eyo* continens eum qui circuli ektimori. similiter **[autem]**[237] quoniam et rectanguli *xmo* data est ***xo*** et ***om***, data erit et ***mx*** subtensa, et angulus qui sub *mxo* faciens eum q[ui] in plano equinoctialis. rursum, quoniam ipsius *epr* rectanguli datæ sunt ***ep*** et *pr*, data erit que *er* subtensa, & angulus q[ui] sub *per* et ***gr***[238] periferia. rursum, quoniam ipsius *esc* rectanguli datæ sunt ***es*** et ***ec*** subtensa, data erit et angulus qui sub *ces*, et que *cg* **per is iri**[239] descensiui. consequenter aut[em], quoniam et ipsius *eop* rectanguli datæ sunt ***op*** et ***ep***, data erit et ***eo*** subtensa, et angulus qui sub *oep* faciens Meridiani periferiam. rursum quoniam ipsius *sfe* rectanguli datæ sunt ***es*** et ***sf***, data erit et ***ef*** subtensa, et adhuc angulus qui sub *sef*, et $g\psi$ periferia eius qui secundum verticem. restat aut[em], quoniam & ipsius *epq* rectanguli datæ

[232] Heiberg: **ox**.
[233] Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: **y**.
[234] Heiberg: **absumantur**.
[235] Heiberg: **que *ey***.
[236] Heiberg: **que *ey*.**
[237] Afegit per Heiberg.
[238] Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***ar***.
[239] En comptes d'aquestes vuit lletres, Heiberg: **periferia**.

sunt ***ep*** et ***pq***, data erit et ***eq*** subtensa, & adhuc angulus qui sub *epq*, hoc est, qui sub *qeg* et $g\omega$ periferia orizontis.

[11.] Quæ quidem igitur per lineas acceptiones angulor[um] et subtensar[um] ipsis periferiar[um] sic utiq[ue] nobis ad manum fient. in iis autem quæ negociantur ex ipso **anal'emmate**[240], **magis**[241] utiq[ue] facile acquisibilis fiet **ex portionum unaquaq[ue]**[242] hoc modo. predemonstratur quidem igitur quoniam eor[um] que inscribuntur in **anal'emmato**[243] hec quidem in omni climate seruant[ur] eadem, alia **quidem**[244] variantur. in iis quidem igitur quæ seruantur contenti erimus Meridiano circulo et diametro æquinoctialis et **alterius**[245] solis mensilium parallelorum cum **circa se ceptis**[246] ipsor[um] semicirculis, ipsam tamen tropicor[um] et eam quæ mensilis p[ost] æquinoctialem ordinantes ut ad eundem polum, eam autem quæ eius qui post **tropicos**[247] ut ad oppositum polum, [**ne**][248] existens tropicum prope, confundat **cum tropicis**[249] eas quæ in ipsis notas semicirculor[um] ipsis circumscriptor[um]. p[ro]p[te]r quod et utemur **tympanoidali**[250] plano suscepturo descriptionem, ad hoc q[uod], verso tympano, dicte me[n]siliu[m]

[240]Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí.. Heiberg ho indica així també a una nota: **analemma(tos)**.
[241]Heiberg: **maxime**.
[242]Heiberg: **expositionum unaqueque**.
[243]Heiberg: **analemm**...
[244]Heiberg: **autem**.
[245]Heiberg: **alteris**.
[246]Heiberg: **circumscriptis**.
[247]Heiberg: **tropicum**.
[248]Afegit per Heiberg.
[249]Dues paraules suprimides per Heiberg.
[250]Heiberg: **tympanoydali** (gr. **tympanoeidêi**).

f. 156

diametri cum semicirculis possint adaptari et positionib[us] eor[um] quæ ex opposito vel secundum diametrum. in iis autem quæ s[ecundu]m vnumquodq[ue] clima ordinantur, rursum contenti erim[us] solis duabus diametris, ***en***[251] v[ideli]c[et] que secundum **convenientem**[252] sectionem Meridiani et orizontis et ea quæ secundu[m] gnomonem, **utimur**[253] aut[em] et quodam lato subtili valde et examinat[e] rectángulo, non habente eas que circa rectum latus minores qua[m] ea que ex centro Meridiani, gratia sumendi alia signa et p[er]pendiculares p[er] ipsum de facili; altera quidem ear[um] quæ circa rectum latus **aptata**[254] rectæ ad quam p[er]pendicularis, altera aut[em] adducta ad signum p[er] quod p[er]pendicularis. [**et totaliter autem**][255] faciemus acceptiones ear[um] quæ in Meridiano periferiar[um] per solu[m] cancru[m] et p[er] latum illud rectangulum, nusquam conscribentes alteram rectam predictar[um], sed nudam s[er]uantes descriptionem ad facilitatem acceptionis eor[um] que deinceps, primis **hypokeira**[256] secundu[m] modum quem diximus in **expositionem**[257] translatis. exponant[ur] enim, ipsius ostensionis gratia, planum **tympanoidale**[258] circa diametrum ab et centrum g, et, ipsius ag tertia parte p[ro]xime versus a acepta, ut penes d, centro g

[251] Heiberg: **ea**.
[252] Al marge: **vel communem**. Heiberg: **communem**.
[253] Heiberg: **utemur** (gr.: **chresóme(th)a**).
[254] Heiberg: **adaptata**.
[255] Afegit per Heiberg.
[256] Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí. Heiberg ho indica així també a una nota.
[257] Heiberg: **expositione**.
[258] Heiberg: **tympanoydale** (gr. **tympanoeidés**).

distantia aut[em] *gd* describatur ***de***[259] **Analemmat**[260] Meridianus circulus, ipsa *dge* **diameter**[261] secu[n]dum eam quæ æquinoctialis intellecta. deinde et, ipsius *gd* tertia parte p[ro]xime versus *g* acepta, ut penes *z*, centro *z* distantia aut[em] *gd* **describantur**[262] circuli æqualis meridiano quarta pars, secta in duo æqua ab *ag*, ***htk*** et diuidatur in 90 portiones æquales diligenter. **nihil**[263] aut[em] p[ro]hibet et super alias partes diametri idem facere gratia **confusionis**[264] tympani. simi[li]t[e]r autem & centro *g* distantia aut[em] ea quæ a *g* ad sectionem in duo p[ro]xime ipsius **aut[em]**[265] circulum describimus, ut eum qui per quartas *lmnx*; quar[um] vnam diuidentes simi[li]t[e]r in 90 portiones & excipientes in ipsa eas que secundum vnumquodq[ue] clima distantias partiu[m] eleuationes, adscribemus æquales & in reliquis tribus **qualis**[266],

f. 156v

incipientes quidem a sectionibus l, m, n, x, educentes autem ut ad **dextrum**[267] eor[um] qui ad orientem semicirculor[um] qui supponuntur semp[er] descripti esse ad nos. continet autem eleuatio poli, ubi quidem maxima dies & nox est horar[um] *13*, partes proxime *16* tertiam et duodecimam; ubi

[259] Heiberg conserva aquí el **qui** (gr. **ho**) abans de ***de***. I més endavant el **que** (gr. **to**) abans de: ***htk***.

[260] Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **hypokeira** (= sub manu). Heiberg ho indica així també a una nota.

[261] Heiberg: **diametro**.

[262] Heiberg: **describatur**.

[263] Heiberg: **nichil**.

[264] Heiberg: **conuersionis**. Però Commandino: **confundatur**.

[265] Heiberg: ***at***.

[266] Heiberg: **quartis**.

[267] Heiberg: **dextram**.

aut[em] est horar[um] *13 1/2*[268] partes *23* dimidiam et tertiam, ubi aut[em] horar[um] *14*, partes **triginta sex**[269]; ubi **aut[em]**[270] est horar[um] *14 1/2*[271], partes *43* et quarta[m]; at ubi est horar[um] *15*, partes ***[40 1/2 1/3 1/12]***[272]; ubi autem est horar[um] *15 1/2*[273], partes *45*; ubi v[er]o est horar[um] *16*, partes *48* et dimidiam et decimam. copulabimus autem et diametros dictor[um] mensilium accipientes p[ro]prias ipsor[um] distantias ab æquinoctiali in ipsa Meridiani periferia, vniuscuiusq[ue] divisionis æqualis ipsor[um] quartæ. distat [e]n[im] et que quidem tropici et s[ecundu]m op ab æquinoctiali partes proxime *23* dimidiam et tertiam, que autem continui tropico mensilis et s[ecundu]m rs partes *20* et dimidiam, que autem continui et s[ecundu]m *cy* partes *13* et tertiam. circumscribimus itaq[ue] & semicirculum qui in vnaquaq[ue] har[um] **ex hoc**[274] quide[m] cu[m] p[ro]priis diametris sinemus s[ecundu]m se, Meridiani aute[m] eor[um] q[ui] circa æquinoctialem diametru[m] semicirculor[um] utru[m]q[ue] diuidentes in æquales horarias distantias 12 signabimus sectiones. similiter aut[em] & eas quæ sup[er] ***dgr***[275] fiunt a perpendicularib[us] ad ipsam ab unaquaq[ue] diuisionu[m] horariar[um], quoniam quidem hæc s[er]uantur s[ecundu]m omnes declinationes. tympano qui-

[268]Heiberg: ***13* et s[emi-horæ]** [?].
[269]Heiberg: ***36***.
[270]Heiberg: **uero**.
[271]Heiberg: **14 et dimidie.**
[272]Aquí s'ha deixat una llacuna sense indicació al marge. Heiberg ho indica a una nota, i el seu text grec tampoc dóna aquest valor reconstruït.
[273]Heiberg: ***15* et dimidie**.
[274]Heiberg: **et hos**.
[275]Heiberg: ***dge.***

dem igitur existente æreo uel **psephin**[276], nulla iam opus erit **delectione**[277] caracterum, his quidem existentibus in sup[er]linitionibus eor[um] quæ secundum clima ordinantur, ut duabus diametris et horariis diuisionibus. ligneo autem existente, **superlineandum**[278] **apocharaxes**[279] nig[ro] quidem colore alias **in**[280] omnes, **rubro**[281] autem meridianum et diametrum **æquinoctialem**[282] cum signis, et sup[er] totum tympanu[m] cera consimi[li]t[e]r **spheris**[283] ut

f. 157

non simul cum variandis superliniantur que debent remanere.

[12.]

His autem suppositis, facile in promptu nobis erit acceptionum vnaqueq[ue], si prius quidem ordine assequentes radici suppositæ eleuationis diametros copulauerimus orizontisq[ue] & gnominis, deinde tropici semicirculi sectionem distinguentem quod supra terram ab eo quod sub **terram**[284] et utra[rum]q[ue] har[um] portionem in ***6***[285] equalia diuisiones acceperimus et in propria ipsius

[276] Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **psephin** (=marmoreo). Heiberg ho indica així també a una nota i al text grec: **pse>ph<í>(n)ou**.

[277] Heiberg: **deletione**.

[278] Heiberg: **superliniendum**.

[279] Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **apocharáxe[o]s (= deletionis, delebilis)**. Heiberg ho indica així també a dues notes (**apocharáxe, t'apocharaxeis**)i al text grec (**a<po>chará<x>eo<n>, <tás apochará>xe(is)**).

[280] Heiberg: *suprimeix aquesta proposició.*

[281] Heiberg: **rubeo**.

[282] Heiberg: **equinoctialis**.

[283] Heiberg: **speris** [?!].

[284] Heiberg: **terra** (!).

[285] Heiberg: **sex**.

diametro factas a diuisionib[us] super ipsam **p[er]pendiculariter**[286] his [e]n[im] solis contenti, procedemus secundum modum ostendendum. primas quidem igitur rursum eas quæ ektimori circuli s[ecundu]m qua[m]libet **har[um]**[287] periferias, has quidem ex portione sup[er] terra[m] consistentes p[ro]prii signi ea quæ mensilis positione, has autem ex ea quæ sub terra eius quod ex opposito sibi. deinde eas quæ hararii omnium horar[um], postea eas que descensiui et rursum **communiter**[288] eas quæ meridiani seorsum, deinde eas quæ eius qui secundum verticem, post quas eas que horizontis, et ultimas, si voluerimus, eas quæ in plano æquinoctiali. posthoc autem acceptas quidem designationes **abliniemus**[289]. **simi[li]t[e]r**[290] autem faciemus in reliquis duobus mensilibus **utraq[ue]**[291] in parte & simi[li]t[e]r in æquinoctiali. deinde & priores diametros simul ablinientes copulabimus eas quæ consequentis climatis et eodem ordine utentes p[er]transibimus omnes suppositas differentias. **iterum**[292] aut[em] gratia modi acceptionis periferiar[um] subtensar[um] angulis, exponatur Meridianus qui in analemmat[293] et sit *abgd* circa centrum *e*, et copulentur p[er] regulam examinate rectam ***ab* quidem**[294] diameter secundum communem sectionem ipsius & horizontis, ***gd* autem**[295] s[ecundu]m

[286] Heiberg: **perpendiculares**.
[287] Heiberg: **horam**.
[288] Heiberg: **conuenienter**.
[289] Heiberg: **liniemus** (?!).
[290] Heiberg: **similia**.
[291] Heiberg: **utroque**.
[292] Heiberg: **ceterum**.
[293] Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **analemmat[e]**. Heiberg ho indica així també a una nota.
[294] Heiberg: **que quidem *ab***.
[295] Heiberg: **qve autem *gd***.

gnomonem. subiaceatq[ue] prius ***zeh***[296] diameter æquinoctialis, et sit **quidem sectio in duo æqua**[297] semicirculi zth penes t, quæ autem sup[er]

f. 157v

terram **quartas**[298] zt, horariar[um] autem que in **ipsa**[299] sectionu[m] vna quidem quæ penes k, et quod a p[er]pendiculari p[er] ipsu[m] ***k***[300] ad ze fit in ipsa signum, sit l. hec enim **échein**[301] a principio accepta. eam quidem igitur que ektimori periferiam **esse**[302] ostendit ***tk***, sup[er] quam statuentes cancru[m] et p[ost]ponentes sup[er] diuisam quartam, exponemus gradus contentos a distantia. continet aut[em] semp[er] tot, quot multitudo suppositar[um] ab ortu horar[um], tempora æquinoctialis[303], eadem existens ei quæ in plano **æquinoctialis**. eam autem que horarii accipiemus adducentes lati illius rectanguli alterum laterum ad signum l, ita ut reliquum adaptetur diametro horizontis ab, et secetur Meridianus ab eo quod apud l latere penes m; ***am*** **qve enim**[304] periferia **facere debet**[305]. simi[li]t[e]r aut[em], si vnum laterum adduxerimus ad l, ita ut alterum adaptetur diametro gnomonis gd, et secetur Meridianus ab eo quod apud l latere penes n, **ipsa**[306] gn periferia

[296]Heiberg conserva aquí el **que** abans de ***zeh***, i més endavant abans de ***tk***, y de ***go*** (al final del capítol).
[297]Heiberg: **que quidem in duo equa sectio**.
[298]Heiberg: **quarta**.
[299]Heiberg: **ipso**.
[300]Heiberg omet ***k***.
[301]Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **échomen** (= habemus). Heiberg ho indica així també a una nota (**echén, échomen**).
[302]Heiberg: **ex se**.
[303]Heiberg: **equinoctialia**.
[304]Heiberg: **qve enim** ***am***.
[305]Corregit de: **faciet**.... Heiberg: **faciet dictam**.
[306]Heiberg: **que**.

faciet eam quæ desce[n]siui. rursum autem ***az* quidem**[307] ex se facit eam que Meridiani. si autem statuerimus cancrum sup[er] signa *k* et *l* et vnum lati illius laterum apossuerimus ad *l*, altero adaptato ipsi *ge*, deinde alterum quidem terminu[m] cancri apposuerimus ei quæ secus rectum angulum portioni ipsius *ge*, alterum autem apposuerimus lateri quod apud *l*, et, manente ipso, **connexerimus**[308] idem latus counitum simi[li]t[e]r ipsi apud centrum *e*, ita ut secet[ur] Meridianus ab ipso, ut penes *x*, **ipsa**[309] *gx* periferia **faciat iam**[310] que eius qui s[ecundu]m verticem. simi[li]t[e]r autem, si vnum lateru[m] apposuerimus ad *l*, altero **aptato**[311] ipsi *ae*, et **cancro ea viæ[?]**[312] ipsi *kl* distensionem habentis alteru[m] quidem terminum apposuerimus ei quæ secus **arctum**[313] angulum portioni ipsius *ae*, alterum autem applicuerimus ei quod apud *l* lateri, deinde, hoc manente, conuerterimus rursum idem latus, s[er]uata

f. 158

coniunctione, sup[er] centrum *e*, ita ut secet Meridianu[m], ut penes *o*, ***go*** periferia faciet eam que horizontis. et in his quidem periferiis et in omnibus **simp[lici]t[e]r**[314] intelligedum, ut non idem repetamus, q[uod] distensiones ipsar[um] simul cum acceptione p[er] cancrum transferentes sup[er] diuisam[315]

[307] Heiberg: **que quidem *az***.
[308] Heiberg: **conuerterimus**.
[309] Heiberg: **que**.
[310] Heiberg: **faciet eam**.
[311] Heiberg: **adaptato**.
[312] Heiberg: **cancri eandem**.
[313] Heiberg: **rectum**.
[314] Heiberg: **semper**.
[315] A continuació dues paraules tatxades: **quam totalem** [?].

quartam deprehense ab ipsis gradus debemus exponere.

[13.]

Rursus[316] supponat[ur] **alios**[317] aliorum mensiliu[m] parallelor[um] diameter et sit ***zhtk***[318], sup[er] quam orientalis semicirculus ***zlk***, et centro quidem *t* distantia aut[em] *ta* accipiatur signum in semicirculo *zlk* **una *l***[319], in quo distinguitur quod quidem *zl* sup[er] terram semicirculi et quod *lk* sub terra. accipitur autem signum l p[er] platinam rectangulam, si angulus adductus fuerit ad *h*, ita ut alterum **[laterum]**[320] adaptetur ipsi *zk*. secundum quod enim reliquum secat semicirculum, erit determinatum signum, quoniam quidem **ab s**[321] ipsi *hk* p[er]pendicularis producta **sit**[322] sectio planor[um] horizontis et circuli mensilis. dividatur itaq[ue] portionum **unaquaq[ue]**[323] in 6 **equalis**[324], &, signatis ipsis, accipiantur p[er] appositionem platinæ rectangule et signa sup[er] *zk* facta a p[er]pendicularibus ad ipsam ab acceptis diuisionibus in semicirculo. sit aut[em] vna ear[um] quæ sup[er] terram **penes *m*** & quod eiusdem ordinis cum ipso signum eor[um] quæ sup[er] *zh* quod *n*. centro quidem itaq[ue] ipso *n* & distantia *nm* accepto s[ecundu]m

[316] Heiberg: **Rursum**.
[317] Heiberg: **alicuius**.
[318] Heiberg conserva aquí el **que** abans de ***zhtk***, més endavant **qui** o **que** abans de ***zlk***, **penes *m, ap, gr, gf (=gs), cg, gf.***
[319] La paraula **una** és molt dubtosa i està sobre una ratllada de **ip[sa]**?? Heiberg: **quod *l***.
[320] Heiberg afegeix aquesta paraula.
[321] Heiberg: **que ab *h***.
[322] Heiberg: **fit.**
[323] A continuació i ratllat: **ita**. Heiberg: **utraque**.
[324] Heiberg: **equalia**.

meridianum signo x, et latere **platoumatos**[325] adducto ad signa e et ***h***[326], ita ut secet Meridianum penes o, ***zo* quidem**[327] periferia **faciat**[328] residuam in quarta periferiæ ektimori, quæ autem ab x sup[er] sectionem alterius ipsius [**platismat.**][329] et meridiani ipsam que ektimori. consequenter autem centro h et distantia hm accepto s[ecundu]m Meridianum signo p, ***ap*** periferia faciet eam quæ horarii. simi[li]t[e]r aut[em] centro t et distantia tm accepto s[ecundu]m Meridianum signo r, que ***gr*** periferia faciet eam que descensiui. rursum ***ao* quidem**[330] periferia faciet eam que Meridiani. si autem vnum laterum **platimat**[331].

f. 158v

apposuerimus ipsi n, reliquo adaptato ipsi ge, et Cancri **descensionem habentes.**[332] æqualem ipsi nm, alteru[m] quide[m] terminum apposuerimus ei quæ penes angulum rectum portioni ipsius ge, alterum autem apposuerimus ei quod apud n lateri, deinde, hoc manente, conuerterimus latus quod ad ipsum, s[er]uata ipsor[um] coniunctione, ad centrum e, ita ut secet Meridianum penes s, ***gf***[333] periferia faciet eam quæ eius qui s[ecundu]m verticem.

---

[325]Paraula grega al marge, corresponent a un espai en blanc aquí: **platysmatos** (= anconis). Heiberg la llegeix també al marge (**platysmat., platys.**) aquí, més avall (dues vegades) i al principi del capítol, a l'altura de platinam. Al capítol 11 es traduïa per **latum**.

[326]Així aquí i a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***n***.

[327]Heiberg: **que quidem *zo***.

[328]Heiberg: **faciet**.

[329]Heiberg suposa aquí, a un altre espai blanc, la mateixa paraula (**platysmatos**) escrita al marge.

[330]Heiberg: **que quidem *ao***.

[331]La mateixa paraula (**platysmatos**) escrita al marge, corresponent a un espai aquí.

[332]Heiberg: **distensionem habentis.**

[333]Heiberg: ***gs.***

similiter autem rursum, si vnum laterum apposuerimus ipsi *n*, altero adaptato ipsi *ae* &, cancri distensionem **habem[us]**[334] eandem ipsi *nm* alterum quidem apposuerimus ei quæ **secundum**[335] rectum angulum portioni **ipsi**[336] *ae*, alterum autem applicuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde, hoc manente, **conuertimus**[337] id quod apud *n*, rursum, servata ipsor[um] coniunctione, ad centrum *e*, ita ut secet Meridianum penes *c*, ***cg*** periferia faciet eam quæ horizontis. **ceterum**[338] aut[em], si **ipsar[um]**[339] ***mn***[340] ponentes equalem ipsi ***ey***[341] apposuerimus ipsi *y* rectum angulum, uno laterum adaptato ipsi ey, et cancri distensionem **habentis**[342] eandem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus penes *y*, alterum autem applicuerimus recto angulo ad latus *eg* &, manente hoc, rursum conuerterimus latus quod apud id ipsum, seruata ipsor[um] co[n]iunctione, ad centrum *e*, ita ut secet Meridianum secundum *f*, ***gf*** p[er]iferia faciet eam quæ in plano equinoctialis. Nunc autem, si diameter *zk* ad sinistras nostri partes positionem habens sit **unus**[343] parallelorum mensilium australior[um] equinoctiali, transuerso tympano ad positionem ex opposito, ***zk***[344] et qui sup[er] **ipsum**[345] semicirculus secus dextras nostri par-

[334] Heiberg: **habentis**.
[335] Heiberg: **secus**.
[336] Heiberg: **ipsius**.
[337] Heiberg: **conuerterimus**.
[338] Corregit de: **centrum**.
[339] Heiberg: **ipsam**.
[340] Així aquí y a Heiberg, però Commandino ho restaura escrivint: ***nh.***
[341] Corregit de: **ep**.
[342] Heiberg: **habentes**.
[343] Heiberg: **unius**.
[344] Heiberg, abans del ***zk.*** afegeix: **et que**
[345] Heiberg: **ipsam**.

tes erunt in situ eodem cum mensili parallelo descripto p[er] opposita signa, borealiora aut[em] æquinoctiali, et ***kl* quide[m]**[346] portio erit sup[er] terram, ***zl* aut[em]**[347] sub terra. quare nos facientes eadem ostensis in diuisionibus portionis *kl* inveniamus

f. 159

& eas quæ in oppositis signis consistentes periferias. nam secundum quidem eam quæ in hyemali **diametro**[348] accepta ipsa *zk*, quod quidem ***kg***[349] faciet eas quæ a principio Capricorni fiunt sup[er] terram angulor[um] periferias, quod aut[em] *dk* eas quæ a principio Cancri. secundum eam aut[em] que me[n]silis **consequent[er]**[350] hyemali tropico diametru[m] **suppositi ipsi**[351] *zk*, semicirculus quidem *zl* faciet eas quæ a principio sagittarii & aquarii consistentes sup[er] terram periferias, qui aut[em] *lk* eas quæ **a**[352] principio geminorum et leonis. secundum eam autem que mensilis contigui æquinoctiali **diametror[um]**[353] accepta ipsa *zk*, qui quidem *zl* semicirculus faciet eas quæ **a**[354] principio scorpionis et piscium factas sup[er] terram periferias, qui autem *lk* eas que in principio tauri et Virginis. eas [e]n[im] quæ in principio arietis et libræ existentes easdem in **vnaquaquæ equinoctialis**

[346] Heiberg: **quidem *kl***.
[347] Heiberg: **qve autem *zl***.
[348] Heiberg: **diametrum**.
[349] Heiberg: ***zg***.
[350] Heiberg: **consequentis**.
[351] Heiberg: **supposita ipsa**.
[352] Heiberg: **in**.
[353] Heiberg: **diametrum**.
[354] Heiberg: **in**.

quantarum[355] demonstratas esse accidit.

[14.]

Et angulos ***nt***[356] ab antiquis determinatos, quoscu[m]quæ no[n] eodem modo nobiscum exposuerunt, ab his in promptu licebit transumere. eum quidem enim qui circuli ektimori secundum nos, ut diximus, no[n] assumpserunt, alior[um] aut[em] quiquidem **horariis**[357] et qui in plano circuli qui secu[n]dum verticem et qui in plano æquinoctialis iidem sunt iis q[ui] apud nos, qui aut[em] ab ipsis vocatur ektimorus est isdem cum apud nos Meridiano, reliquor[um] autem descensivu[m] quidem facit **residuu[m]**[358] ad vnum rectum eius qui apud nos descensiui, eum aut[em] qui **antiscius**[359], i[d est], contraumbralis, rursum residuus ad vnu[m] rectu[m] eius qui apud nos horizontis. quod aut[em], distracto ***p***[360] quidem plano æquinoctialis, accipitur & p[er] tale palam fit. ostendit quidem enim et hoc eam que circuli horarii positionem. hanc autem co[n]tinet p[ro]prie **qui**[361] eius qui s[ecundu]m verticem, p[er] polos horarii descriptor[um] et vno existente eor[um] qui a principio necessarie suppositor[um] trium circulor[um] seruantium ubiq[ue] ad inuicem positionem ad rectos

f. 159v

angulos. propter quod & ektimori quidem periferia, p[ro] q[ua] ea[m]

[355] Heiberg: **una quacumque quartarum equinoctialis**.
[356] Sembla designar-los a una figura. Heiberg: **uero**.
[357] Heiberg: **horarius**.
[358] Heiberg: **residuus**.
[359] Heiberg: **antiskius**.
[360] Heiberg omet aquesta designació a una figura.
[361] Heiberg: **que**.

quæ æquinoctialis assumpserunt, no[n] solum cum ea q[uæ] horarii ostendit positionem radii, **sed**[362] et cum ea que Meridiani, quæ autem æquinoctialis cum sola ea quæ horarii & no[n] adhuc **nec**[363] cum ea que meridiani **nec** cum aliqua alia reliquar[um]. hoc aut[em], quia **nec** s[ecundu]m p[ro]prietatem ferentium radium comprehendit semp[er] uti[que] aut solum æquinoctiis **nec** secundum p[ro]prietatem manentium eandem ubiq[ue] seruat positionem ad reliquos non delator[um]. exposuimus aut[em] & no[n] consistentes quantitates secundum illum, quem ostendimus, modum consequentium rationabilitati p[er]iferiar[um], in subiectis autem **7**[364] parallelis & secundum vnu[m]quodq[ue] principiu[m] signor[um] et horar[um] in canonibus continentibus pertractatum a nobis ordinem in omnibus adiectionibus ad promptitudinem earum quæ in declinationibus acceptionum. adhuc autem, quoniam p[er]iferias quidem in Meridiano circulo determinatas prompte faciunt manifestas orientaliores ipso & occidentaliores positiones horar[um], eas aut[em] quæ in circulo qui s[ecundu]m verticem borealiores ipso & australiores **insa[?]**[365] radior[um], in quibus consequentiam diximus oportere coexquirere, asscripsimus singulis horar[um] signa, p[er] que eam que ad borealia circuli qui s[ecundu]m verticem & **rursus**[366] ad australia radii positionem licebit considerare aliqua[li]t[e]r. a conuenientibus iis, que predeterminata sunt, principium **facientes**[367] adiacentium quantitatum expressiones. promptum

[362]Heiberg: **set** [sic!].
[363]Heiberg, en comptes de **nec**, escriu aquí i als tres casos següents: **neque**.
[364]Heiberg: **septem**.
[365]Heiberg: **casus**.
[366]Heiberg: **rursum**.
[367]Després d'aquesta paraula hi ha una llacuna al text, sense indicació al marge de cap

autem adhuc & coniugationes, a quibus positio radii **do**[368], sex numero esse accidit, tres quidem ab his que ad **inuicem**[369] delator[um] trium circulor[um] ektimoriq[ue] ad horarium et ektimori ad descensiuum, tres aut[em] eas quæ ab vnoquoq[ue] delator[um] cum eo, qui inclinationem ipsius continet, manentium, ektimori quidem ad

f.160

Meridianu[m], horarii autem ad eum qui s[ecundu]m verticem, descensiui aut[em] ad horizontem. habent aut[em] & canones ita.

Taula 1: Cancri principium horar[um] 13

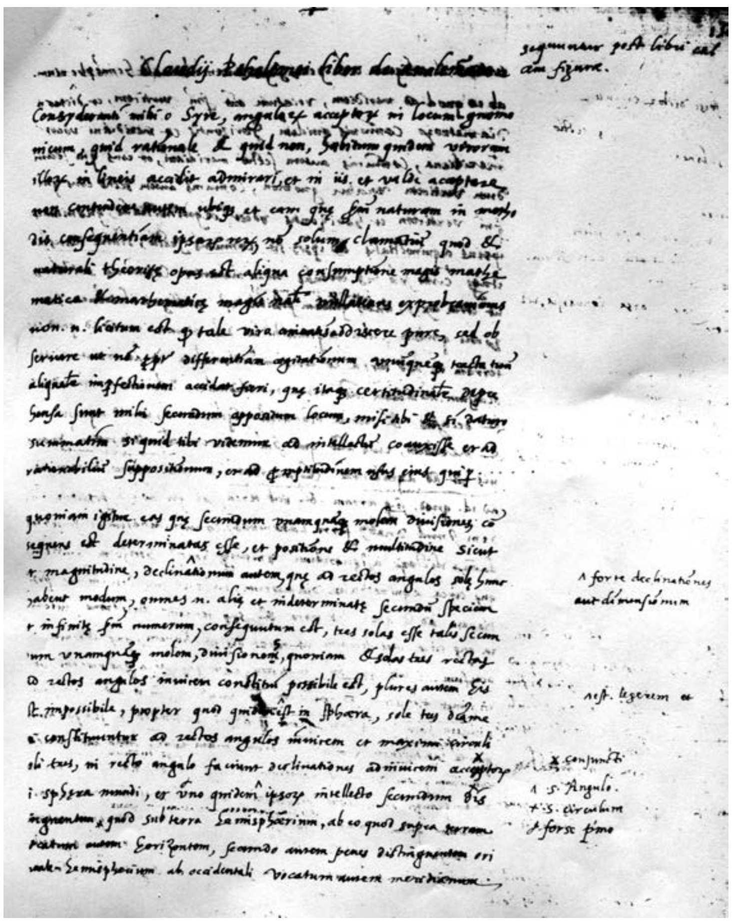
	horæ	ektimori	horarii.	descensiui	Meridiani	sm.verticm.	horizontis
	[hori]zo[n]tis	24 15	65 5	90 0	0 0	90 0	24 15
bo	1 11	25 15	69 15	75 10	35 15	78 15	20 0
bo	2 10	31 20	73 0	60 55	59 5	60 0	18 50
bo	3 9	49 50	76 0	49 5	72 10	45 5	17 15
bo	4 8	60 10	79 10	31 0	78 30	30 10	18 0
bo	5 7	75 0	81 20	15 30	81 30	15 10	27 0
bo	Meridies	90 0	82 35	7 25	82 35	0 0	90 0

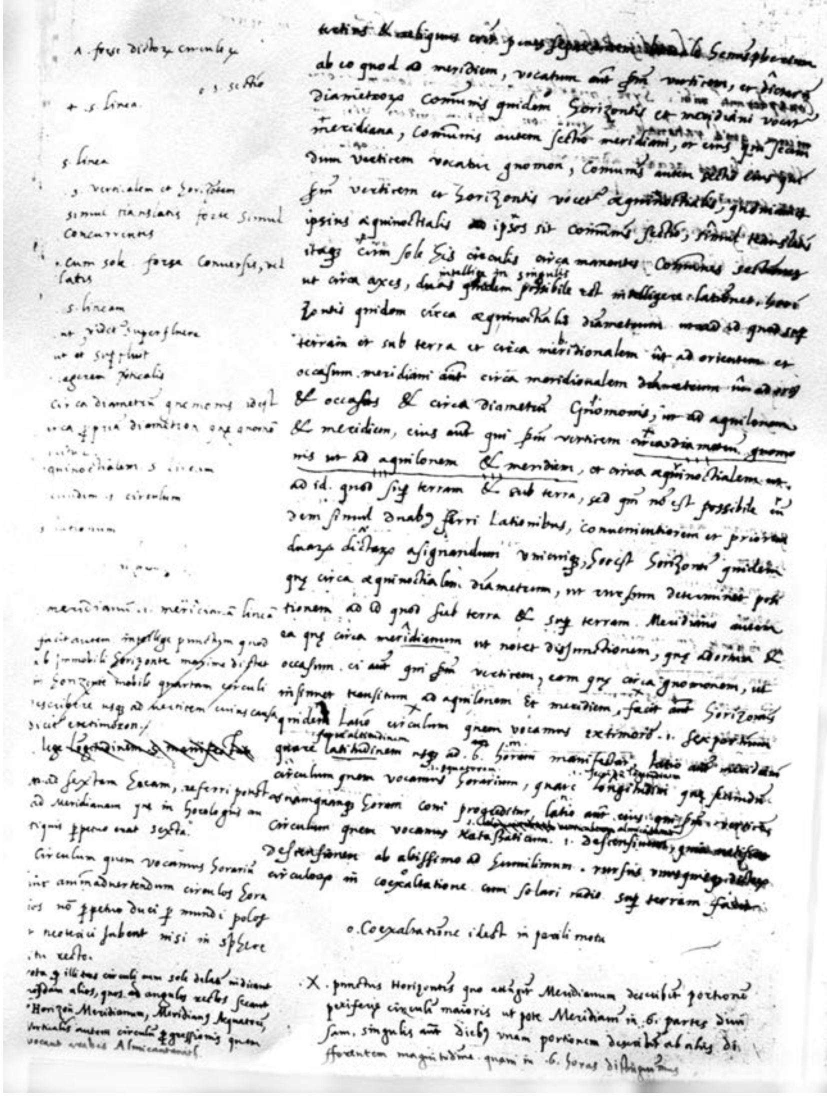
paraula corresponent a ella. Heiberg, a una nota, indica al marge la paraula: **faciamus**.

[368] Després d'aquesta paraula, de nou una llacuna al text, sense indicació al marge. Heiberg, en comptes de do, escriu al text **determinatur**. Però indica a una nota que aquesta paraula és incerta i podria ser: **datur**.

[369] Després d'aquesta paraula una tercera llacuna al text, sense indicació al marge. Heiberg indica a una nota que, després d'aquesta paraula, al text apareix ratllat: **feren**.

Apèndix C: La còpia de l'*Analemma* en el manuscrit de Baltasar de Torres (còdex *Barberinus latinus 304*)





p. adelata et manente. vix hoc [illegible] percipi potest nisi [illegible] intelligamus a [illegible]
lineas quae manent in horizonte immobili. ~~secunda~~ ducta ad O. orientis [illegible]. 2ª est in horizontis [illegible]
lis plano producta ad solem. 3ª est gnomon in stilo. 4ª in motu stili vocato descensivo ad O. centrum. 5ª est me-
ridiani hoc est meridiana linea. sexta et horarii circuli plano ad. O. protenditur.
~~[illegible] declinationes, quibus datis, et [illegible]~~

quoniam una [illegible] non sufficit, hoc autem, alterum quidem e
recto contentum, scilicet adelata, et manente, hoc est axe et [illegible]
mero circa quam [illegible], alterum autem ab ipsis planis, similiter
a moto et a manente ita ut duorum circulorum utriusque [illegible]
declinatione data, determinentur et positio radii ex [illegible] quidem
qui ab extimo circulo fiunt angulorum, consistentem quidem
apud radium et apud diametrum aequinoctialem non videmus ab
antiquis acceptum in locum gnomonicorum eorum, atque ab ipsius de-
clinatione ad horizontem fit, vocant ectimoron, factorum autem
a circulo horario, duorum angulorum, eum quidem qui apud radium et
apud diametrum aequinoctialem consistit, vocant horarium, eum
autem qui ab ipsius declinatione ad Meridianum in plano eius qui fit
verticem, factorum autem a circulo descensivo duorum angulorum, hic
quidem apud radium et apud gnomonem consistit [illegible] hic
autem ab ipsius declinatione ad eum qui fit verticem, utrumque
autem non hic, sed pro angulo quidem qui a gnomone et a radio
continetur, utuntur deficiente ad unum rectum, et vocant ipsum
descensivum pro angulo autem qui ab ipsius declinatione ad eum qui
fit verticem continetur utuntur eo qui constituitur a declina-
tione ipsius ad meridianum vocant autem et hunc antiscion .i.
contraumbralem sextum autem angulum inserunt pro derelicto
eum qui fit ab aequinoctiali diametro et a communi sectione cir-
culi horarii, et aequinoctialis quem vocant in aequinoctialis plano
et quidem aequinoctiali non in omni climate eandem servante
positionem ut passus est et horizon et Meridianus et qui fit
verticem ut autem sub visum veniat magis [illegible] consequenter angu-
lorum et quod supponitur sit Meridianus quidem circulus qui
abgd. recti autem super ipsum et orientales semicirculi horizontis
quidem qui aeb eius autem qui fit verticem - ged. et suppositam

o duabus
a et tale. legerem ad talem positionem

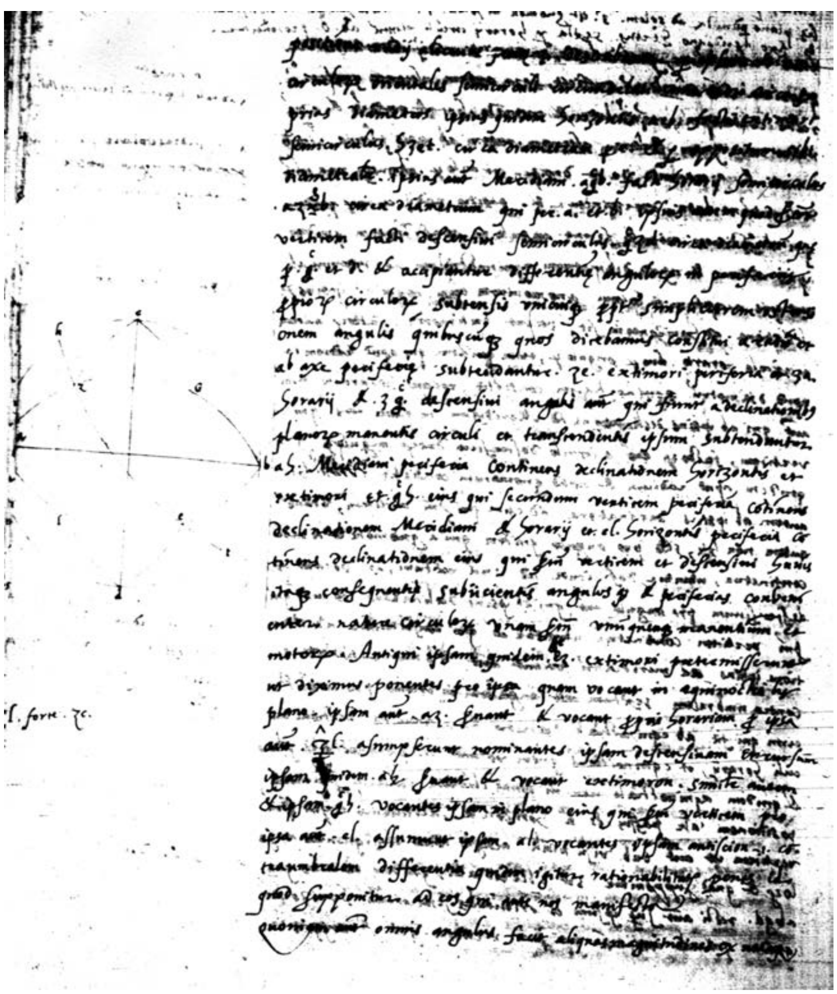
a .s. ~~[illegible]~~ planum cir-
~~[illegible]~~
m. utrinque videtur abundare

a eum videtur abundare.
n. declinatione. ubi est declinatio perpetuo legerem inclinatio
a. intellige angulum

x. diametrum aequinoctialem necessario mihi videtur esse le[gen]dum apud diametrum quae est linea meridiana, quoniam circulus horarius non movetur aequinoctialem diametrum.

.q. in plano eius qui secundum verticem. advertendum est tamen hoc esse denominationem illius anguli. et nisi sic accipias [illegible] sensum

qui abundat



forte declinationis et quandoque quidem equales neque in positione
recta quandoque aut inequales ut in obliquis necessario utique
reali et in angulis expositis circa periferias conterminari porro
ad primum secundum unumquodque speciem neque accepto et contrarietates
declinationum earum que ad ortus vel occasus et earum que ad aqui
lonem vel meridiem, exposito igitur nobis existente acceptione
et expositiones et appellationes quas feramus futuras secundum
ordinem et rationem productum consequens erit et suppositionibus
determinatis quo secundum unumquodque speciem nominationes scilicet faci
mus ab ipsis circulis quorum sunt periferie et vocamus eas
quidem que in motis eximoriales et horarias et desrensinas
eas autem que in manentibus similiter meridionales et secundum ver
ticem et horizontes et in magnitudinibus semper eligimus a con
tinuo angulo consistentium ex utraque parte si non sint recti
et principia acceptionum facimus earum quidem que in circulis
motis ab altero polorum circulationis ad quam declinatio hoc est
in eis quidem que ipsius eximori a termino diametri equinoc
tialis ante meditationem quidem celi ab orientali post meditationem
autem ab occidentali in eis autem que horarii a termino diametri
Meridiani quando quidem positio radii fuerit borealior circulo
qui secundum verticem ab arctico, quando autem australior a meridi
ano quod et ipsum oportet observare quoniam non eandem ut termina
tionem in eis autem que desrensini secundum a termino gnomonis qui
supra terram earum autem que in circulis manentibus ab altero ter
mino tanquam communi sectione cuiuscunque et suppositi plani
ad quem faciens angulum declinatio hoc est in eis quidem que
Meridiani a termino recte meridiane radio quidem existente bo
realiori quam circulus qui secundum verticem ab arctico austra
liori autem a meridiano et hoc enim rursum oportebat determinare
in eis que eius qui secundum verticem a termino qui supra terram

gnomonis solum in iis qui horizonte a termino distincti aequi-
noctialis ante mediationem quidem caeli ab orientali post me-
diationem autem caeli ab occidentali vel borealiori quidem exi-
stente radio quam circulus qui secundum verticem ut ad aquilonem,
australiori autem ut ad meridiem quod et ipsorum opus est facere
et quia universaliter eas quae ex utraque parte positiones earum
quae in ortibus vel occasibus determinantur dico autem earum
quae horarii et earum quae descensivi et earum quae circuli qui
secundum verticem mediatio caeli simpliciter designat, earum autem quae
versus aquilonem aut meridiem dico autem earum quae descensivi
rursum et earum quae extimori et earum quae meridiani et earum
quae horizontis positione radii ex utraque parte circuli qui secundum
verticem et has ipsos non habentes communem et eundem terminum
praemissis itaque hic exponemus instrumentales acceptiones
secundum unamquamque positionem subiacentium nobis angulorum exceptis
gratia ut in promptum habeamus methodum quae erit in
ἀναλήμματος Analemmate. Primus autem secundum se superabimus super angulis
praetermissi ab antiquis quem nos vocamus extimorum acceptio-
nem instrumentalem, quoniam et demonstrationi uniuscuiusque erit
consonare iis quae ab illis probata sunt

Quod quidem igitur in aequinoctiis anguli inquisiti semper iidem sunt
aut iis qui in plano aequinoctialis palam ex se. congruunt enim
ipsi per totam circulationem, et circulus extimorum faciunt
angulos inutrum periferias quae secundum unamquamque aequinoctialem
horam ex 15 gradibus consistentem et angulos ipsi consequen-
tes continentes extimeria i. sextas partes unius recti
gratia autem reliquorum mensilium esto Meridianus circulus
abgd. in quo horizontis quidem diameter ab ad angulos autem
corporis forte rectos ipsi et secundum gnomonem gd. et centrum quidem solaris sphaerae
e. unius autem parallelorum mensilium magis borealium quam aequi-
noctialis

diameter sit .zth. sup quam orientalis semicirculus in eodem
plano intelligatur qui .zxt. et ducatur ad rectos angulos ipsi
zt. xos: ita ut .zx. porro parallelis sit super terram et ab sum
pta periferia .kl. ducatur perpendicularis ab .l. sup zt. ipsa .lm.
et centro quidem .m. distantia autem .ml. accipiatur signum in Me
ridiano quod sit .x. et copulentur .el. emn. et .ex. et .mx. ducatur
autem ipsi .en. ad rectos angulos .eo. dico quod angulus qui sub xeo.
est aequalis quaesito. intelligatur .n. semicirculus .zlt. conversus
ad propriam positionem, hoc est rectum ad planum meridiani et
producatur ab .e. recta ad idem planum pro aequinoctiali diametro .ep.
quod quidem .ig. et ipsa .lm. existente recta ad meridianum. en. et .ml.
et .ep. rectis. quod in uno plano recto ad .abgd. palam. similiter autem
quod et quidem .en. est communis sectio circuli extimori et meridiani: el.
autem in recta ad solarem radium, quaesitus autem angulus contentus
a radio et a diametro aequinoctiali qui sub .lep. demonstrandum igitur
quod angulus qui sub .xeo. est aequalis ei qui sub .lep. qui .n. equalis
est .el. quidem ipsi .ex. ml. autem ipsi .mx. communis autem .me. ergo
et angulus qui sub .mel. est aequalis ei qui sub .mex. rectus autem qui
sub .mep. et qui sub .meo. quoniam et qui sub .eml. et reliquus ergo
qui sub .lep. reliquo qui sub .mex. hoc est ei qui sub .xeo. equalis
est quod quidem oportebat demonstrare.

Consequenter autem et communes ipsorum acceptiones exponemus quae
fiunt seorsum sup aequinoctialem et rursum sup aliquem borea
liorum aut australiorum ipsorum parallelorum mensilium. sit igitur meridi
anus circulus .abgd. in quo horizontis quidem diameter .ab. ad
rectos autem ipsi et secundum gnomonem .gd. et centrum quidem sola
ris sphaere .e. climatis autem periferia .gz. et producatur prius
aequinoctialis diameter .zet. sup quam semicirculus .zth. iaceat
quidem in plano Meridiani intelligatur autem in hemisphaerio ad
orientem describatur sole ad sursum in una circumvolutione hora
et aliorum mensilium parallelorum et producta .et. perpendiculari ad .zh.

ita ut et. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] super [illegible]
[illegible]. periferia datarum horarum [illegible] angulos
qui in hac positione accepe ducantur [illegible] perpendiculares [illegible]
quidem super. zh. ex. ab. l. autem super. ol. ipsa [illegible] super [illegible]
autem. zlo. et ipsi. lx aequales [illegible] xp. et. rm. [illegible]
lentur. ex. et. en. et. eo. et adhuc. eps. et. erc. quandoquidem
igitur australior est [illegible] circulo, qui secundum verticem
totam circulationem [illegible] in aequinoctiali et in paralle
lis borealioribus ipso quia inclinatio sphaerae in habitatione secun
dum nos versa est ad Meridiem, et oportet ad mutationes con
sequentes positioni ipsius determinare manifestum. continet autem
angulus qui sub. exl. hoc est qui sub. tex. angulum circuli
ectemori, qui sit idem ut diximus, sicque qui in plano aequi
noctialis angulus aut qui sub. aen. cum qui horarii qui autem
sub. geo. cum qui descensivi et rursum qui quidem sub. aez.
[illegible] meridiani. qui autem sub. ghs. cum qui horizontis expo
nat [illegible] rursum. abgd. meridianus cum diametris. ab. et
gd. et protrahantur in ipso diametri parallelorum mensilium
borealiorum aequinoctiali zh. tx. super quam similiter describatur
semicirculus orientalis. zlx. et ad rectos angulos ipsi. zx.
ducatur. el. ita ut. zl. portio paralleli sit super terram absumpta
autem. lm. periferia datarum horarum ducantur abm. perpendicularis
super. zt. mn. ipso. n. faciente [illegible] positionem radii borealiorem
quidem circulo qui secundum verticem quando fuerit super. ht. australiorem
autem quando fuerit super. zh. protrahatur etiam rursum. enx.
et recta ad ipsam erigatur. eo. accipiantur igitur in Meridiano sig
na tria centra quidem. n. distantia autem. mn. quod. p. centro autem
t. distantia vero. tm. quod. r. centro et. h. distantia autem. hm. quod. [illegible]
. . deinde productis. rnc. et sny. ipsis enim [illegible] p. n. accepte
perpendiculares ad. eb. et. eg. absumantur in ipsis similiter aequales

ppim. n. yuf. cir. t. q. et copuleantur ipse ea extremitates
adsunt. ef ψ. et. eqa. continet itaque ea sub angulus quidem qui
sub. pco. angulum circuli ecthmori qui aut sub. ber. cum qui hora
rij qui vero sub. geo. eum qui descensiui et rursum quiquidem sub
.bex. cum qui Meridiani qui autem sub. bcψ. cum qui eius qui
sm verticem qui vero sub. gew. cum qui horizontis angulo qui sub
tmn. faciente cum qui in plano aequinoctialis instrumentales
quidem igitur acceptiones hunc continent modum assumpta simili
consequentia in omnibus positionibus in expositione autem quantitatum
consistentium sm vniquodque clima & signum & gradum sufficit
quidem in ipsis solis peripheriis subtendentibus angulos facere
mensurationes ut promptas ipsas habeamus in numeris et non
descriptiones determinatas nec sm semel cogitatam vocari p . . . . ἀναλημματος
. . . inquisitos angulos rectasque fecit ubique confusas sed in
vnamquamque opportunitatum vnaquadam parte circuli divisa in
vnius recti portiones .90. equale inscribentes & circumscribentes co
centricum cum dato ad . . . . et accipientes a diviso distan
tias continentes numerum convenientium graduum transferimus ad
equalem sibi quartam partem & p depulsorsos terminos eorum co
mune centrum circulorum producentes rectas in huiusmodi angulos
et peripherias in datis circulis maioribus vel minoribus talis aut
acceptio extabit quidem utique & p lineas ad certissimum volentibus
fiet aut utique facilius acquisibilis & p ipsum . . . . . et si nō ἀναλημματος
sit eque imitabilis ei que p lineares demonstrationes tamen usque
ad examinationem que ad sursum, ad quam reducit finis usualis
suppositi negotij quo aut modo utique processimus ad promptissimum
nobis accipiatur ostendemus in parte summatim premissa considera
tione que p numeros vase habentes
exponatur Meridianus. abgd. circa centrum. e. in quo diametri ad
rectos angulos invicem communis quidem sectionis ipsius & horizo
tis. ab. gnomonis aut. gd. sitque data elevatio poli & contineatur

a periferia .aq. et protrahatur quidem .qeh. aequinoctialis quae prius diametros .tex. & absumatur data periferia .zl. et a b.l. ducantur perpendiculares super .cz. quidem .lm. super .ex. autem .ln. similiter autem et ab .n. super .eb. quidem .xno. super .ed. autem .pxr. quoniam igitur data est periferia .aq. hoc est .dxe. datus erit & angulus qui sub .pen. rectus autem qui apud .p. datus est ergo & ipsiusmet subtensae proportio ad utramque earum quae circa rectum hoc est ad ipsas .ep. et .pn. et ad aequales ipsis hoc est .nx. et .ox rursum quoniam data est .nz. periferia quartae autem partis est .xz. quare & reliqua .xl. data est subtenditur autem duplae lz. periferiae dupla ipsius .lm. rectae. duplae autem ipsius .lx. periferiae dupla ipsius .ln. rectae data erit & proportio utriusque ipsarum .lm. et .ln. ad diametrum Meridiani quare & proportio ipsius .en. quae est aequalis ipsi .lm. & proportio ipsarum .ep .nx. laterum tetragoni, sumantur itaque ipsi .ln. aequales .ps. et .xc. & protrahantur .se. & .er. et .esy. et .ecf. zl. ergo periferia existens aequalis ei quae circuli extimori & adhuc ei quae in plano aequinoctialis esse data est quoniam et ipsius .exo. rectanguli trigoni data est .ex. et .xo. & .eo. subtendens dabitur & angulus qui sub .oex. & reliquus qui sub .oex. quare & .ba. periferia continens eam quae circuli horarii, similiter autem quoniam & ipsius .epr. rectanguli data est .ep. & .pr. et .er. subtendens dabitur angulus qui sub .ep .rp. & reliquus qui sub .per. simul cum ipso & datur periferia existens aequalis ei quae est circuli descensivi rursum quidem .hx. periferia faciens eam, quae Meridiani esse data est quoniam & ipsius .eps. rectanguli .ep. et .ps. dabitur et .es. subtensa & angulus qui sub .pse. ipseque et .dy. periferia existens aequalis ei quae circuli quae secundum verticem similiter autem quoniam & ipsius .exc. rectanguli data est .ex. et .xc. dabitur & subtensa .ec. & angulus qui sub .cex. hoc est qui sub .dex. ipseque et .df. periferia existens aequalis ei quae horizontis et altera

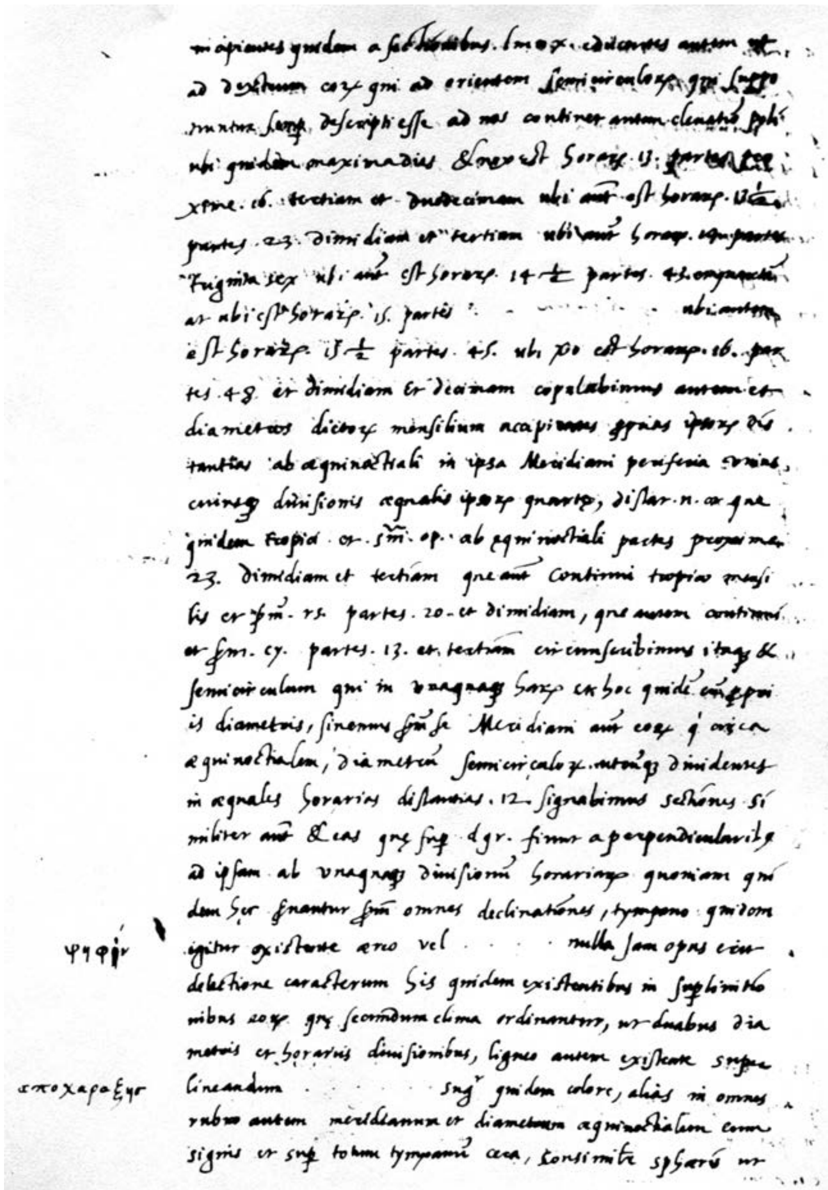
in ensilium gratia opponatur . ab gd . Meridianus autem diametris
ad rectos invicem, et cum axe . ez . et producatur unius circulorum meus
tralium aequinoctiali mensilium parallelorum diameter . htx . super quam
ad orientem intellectus semicirculus describatur . hlx . et usque ad ip
sum educatur axis . ezl . in duo aequa . videlicet secans ipsum . htx .
diametrum penes . e . et semicirculum . hx . penes . l . producatur autem
et . mn . recta super . ht . determinans . hn . et portionem semicirculi super
terram ab ea quae sub terra . et accepta ipsa . nx . periferia datarum ho
rarum ducatur ab . x perpendicularis super . hm . xo . et p . o . producatur
tur perpendicularis super . ae . quidem . por . super . ge . autem soc . quoniam
igitur data est . zl . Meridiani periferia, residuum autem in semicirculo sub
tenditur dupla ipsius etiam rectus data erit proportio ipsius . htx . et pro
portio ipsius . et . ad diametrum Meridiani, similiter quoniam data est . az .
periferia elevationis datus erit et ipsius . met . trigoni rectanguli an
gulus qui sub . met . quare data erit proportio ipsius . et . ad utramque ipsa
rum . em . et . mt . et adhuc proportio ipsius . ex . diametri ad unamquamque ipsa
rum, sed ipsius mt . recte dupla subtenditur duple ipsius . ln . periferie
quare et . ln . periferia data erit et residua in quartam partem . n xh .
data est autem et . nx . data ergo erit . et . hx . et . xh . subtenditur autem
duple quidem ipsius . nx . periferie dupla ipsius . xo recte, duple
autem ipsius . xa . periferie dupla ipsius . ht . recte quare data erit ipsarum
xo . et . ot . proportio ad diametrum . hx . proportio hor autem & ad eam quae
Meridiani . quoniam autem et ipsius . tm . data est proportio data erit &
proportio ipsius . mo . et est . uo . em . ad . mo . ita . tm . ad . mp . et et . ad . op .
equiangula enim sunt trigona . emt . et . opm . data ergo erit et ipsarum . m . p .
et . op . proportio ad diametrum Meridiani proportio hor autem et proportio ipsius
emp . totius hor est ipsius . s . his igitur demonstratis sumatur centro . o .
et distantia . ex . signum in Meridiano . scilicet . g . et abscindatur rursum
ox . aequalis . pq . et . sf . et copulentur . ex . et . er . er . et . et . xm . et adhuc
eo . et . cf ψ . et . eqo . quoniam igitur in precedentibus angulus qui sub
eoy demonstratus esse rectus data est autem et . oy . subtensa existens

ex centro Meridiani [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
et angulus qui sub axe continens [illegible] [illegible] [illegible]
liter quoniam et rectanguli [illegible] data est [illegible]
et . mx . subtensa et angulus qui sub . mxo . [illegible]
in plano aequinoctialis . rursum quoniam ipsius . esr . rectanguli
datae sunt . ep . et . pr . data erit . et . er . subtensa & angulus qui sub . in
per . et gr . periferia rursum quoniam ipsius . csc . rectanguli
datae sunt . es . et . ec . subtensa data erit . et angulus qui sub . ecs . et
et . cg . perisij descensivi . consequenter autem quoniam et ipsius
cop . rectanguli datae sunt . op . et . cp . data erit . et co . subtensa
et angulus qui sub . ocp . faciens Meridiani periferiam . rursum
quoniam ipsius . sfe . rectanguli datae sunt es . et . sf . data
erit et . ef . subtensa et adhuc angulus qui sub . sef . et gφ . pe
riferia eius qui secundum verticem restat autem quoniam &
ipsius . epq . rectanguli datae sunt . ep . et . pq . data erit . et . eq .
subtensa & adhuc angulus qui sub . epq . hoc est qui sub . geq .
et . geo . periferia horizontis . quae quidem igitur per lineas acceptio
nes angulorum et subtensarum ipsis periferiarum . sic utique nobis ad

'αναλήμματα, manus fient in iis autem quae negotiantur ex ipso
magis utique facile acquisibilis fiet ex portionum utraque
hoc modo praedemonstratur quidem igitur quoniam eorum quae in

ανα χυμματο caelum in . . . . . . hoc quidem in omni climate seruantur
eadem alia quidem variantur in iis quidem igitur quae seruantur
[illegible] cernuntur Meridiano circulo et diametro aequinoctialis et
alterius solis menstruum parallelorum cum circa se captis ipsorum
semicirculis . ipsam tamen tropicorum et eam quae menstruis per aequi
noctialem ordinantes [illegible] ad eundem polum eam autem quae omnes
qui post tropicos [illegible] ad oppositum polum existens [illegible] prope
confundat cum tropicis eas quae in ipsis notas semicirculorum ipsis
circumscriptorum quod et [illegible] Tympanoidali plano sus
ceptivo descriptionem ad hoc per verso tympano dicti [illegible]

diametri cum semicirculis ~~[illegible]~~ compositionibus corum
que ~~ex~~ opposito vel secundum ~~[illegible]~~ in iis ~~[illegible]~~ que
sunt vnumquodque clima ordinantur versum ~~[illegible]~~ eorum
solis ~~[illegible]~~ dyametri en. vg. que secundum ~~[illegible]~~ vel communem
sectionem Meridiani et horizontis ~~[illegible]~~ que secundum quem
nem. ~~[illegible]~~ ex quosdam loco sunt valde ex examinat
rectangulo non habente ea que circa rectum latus minores quam
en, que ex centro Meridiani gearum sumendi alia signa
et perpendiculares per ipsum de facili altera quidem corum que cir
ca rectum latus aptata recte ad quam perpendiculares altera
autem adducta ad signum per quod perpendicularis, facienus
acceptiones eorum que in Meridiano periferia per solum concurri
et per tamen illud rectangulum, nusquam conscribentes alteram
rectam predictarum, sed modum suamque descriptionem ad facilita
tem acceptionis eorum que deinceps primus . . . . . . secundum ὑποκειμ
modum quem diximus in expositionem translatis exponatur enim
ipsius ostensionis gratia planum tympanoidale circa diametrum
ab. et centrum g. et ipsius. ag. tertia parte proxime versus. a.
accepta ut penes d. centro. g. distantia autem. gd. describatur. de.
. . . . Meridianus circulus: ipsa. dge. diametro secun ἀναλημματ
dum eam que equinoctialis intellecta deinde et ipsius. gd. tertia
parte proxime versus. g. accepta ut penes. z. centro. z. distantia
autem. gd. describantur circuli equalis meridiano quarta pars
secta in duo aqua ab. ag. Hec ~~et~~ dividatur in. 90: portiones e
quales diligenter, nihil autem prohibet et super alias partes diame
tri idem facere gratia confusionis tympani similiter autem &
centro. g. distantia autem ea que a. g. ad sectionem in duo proxime.
ipsius autem circulum describimus ut eum qui per quartas. Cum ex
quarum vnam dividentes similiter in. 90. portiones & excipientes
in ipsa. eas que secundum vnumquodque clima distantias partium
elevationis, adscribemus equales & in reliquis tribus qualis



incipientes quidem a septentrionalibus. [illegible] cadentes autem et

ad dextrum eorum qui ad orientem semicirculorum qui supponuntur semper descripti esse ad nos. continet autem elevatio poli

ubi quidem maxima dies [illegible] est horarum 13 partes [illegible]

[illegible] 16 tertiam et duodecimam. ubi autem est horarum 13½

partes 23 dimidiam et tertiam. ubi autem horarum [illegible] partes

triginta sex. ubi autem est horarum 14½ partes 41 [illegible]

[illegible] ubi est horarum 15 partes . . . ubi autem

est horarum 15½ partes 45. ubi vero est horarum 16 partes 48 et dimidiam et decimam. copulabimus autem et

diametros dictorum mensilium accipientes [illegible] ipsorum di-

stantias ab aequinoctiali in ipsa Meridiani periferia [illegible],

cuiusque divisionis aequalis ipsorum quarto; distat enim [illegible] quae

quidem tropici [illegible] ab aequinoctiali partes proxime

23 dimidiam et tertiam. quae autem continent tropicos mensis [illegible] partes 20 et dimidiam, quae autem continent

[illegible] partes 13 et tertiam. circumscribimus itaque et

semicirculum qui in utraque horum ex hoc quidem [illegible]

is diametris, sinentes [illegible] Meridiani autem eorum qui circa

aequinoctialem, diametrum semicirculorum utrumque dividentes

in aequales horarias distantias 12 signabimus sectiones si-

militer autem et eas quae [illegible] perpendicularibus

ad ipsam ab utraque divisionum horariarum. quoniam qui-

dem [illegible] omnes declinationes, tympano quidem

ψηφίον igitur existente aereo vel . . . nulla iam opus [illegible]

delectione caracterum his quidem existentibus in [illegible]

nibus eorum quae secundum clima ordinantur, ut duabus dia

metris et horariis divisionibus, ligneo autem existente super

ἀποχαράξαι lineandum . . . [illegible] quidem colore, aliis in omnes

rubeo autem meridianum et diametrum aequinoctialem cum

signis et super totum tympanum cera, [illegible] spharum ut

non similiter vero variandis superabicientur que desunt ratio
nes.
His autem suppositis facile in prompto nobis erit descriptio
non vnaqueque. Si primo quidem ordine assignantes radici
supposite elevationis diametros copulaverimus horizontis
et gnomonis deinde tropici semicirculi sectionem di
stinguentem quod supra terram ab eo quod sub terram et utra
rumque harum portionum in .6. equalia divisiones acceperimus
et in propria ipsius diametro factas a divisionibus super
ipsam perpendiculariter. His enim sic constitutis procedemus
secundum modum ostendendum
primas quidem igitur rursum eas que extremi circuli
sunt qualibet horarum periferias has quidem expositione super terram
consistentes tempori signi ea que mensis positione has autem
exsta que sub terram eius quod ex opposito sibi deinde eas que
horarij omnium horarum postea eas que descensiui et ascensiui co
mmuniter eas que meridiani seorsum deinde eas que eius qui
secundum verticem. post quas eas que horizontis et ultimas
si voluerimus eas que in plano equinoctiali post hoc autem
acceptis quidem designationes abluemus similiter autem fa
ciemus in reliquis duobus mensibus utraque in parte et similiter
in equinoctiali. deinde et priores diametros simul ablu
entes copulabimus eas que consequentes climatis et eodem
ordine utentes pertransibimus omnes suppositas differentias
Iterum autem gratia modi acceptionis periferiarum subtensarum
angulis exponatur Meridianus qui in . . . . et sit ἀναλήμματι
abgd. circa centrum .e. et copulentur per regulam exami
nate rectam. ab. quidem diameter secundum communem
sectionem ipsius et horizontis. gd. autem secundum gnomonem
subiacentemque prius .zeh. diameter equinoctialis et sit quidem
sectio in duo equa semicirculi .zth. penes .t. que autem sup

.terram quartas . zqe. horariorum autem rectam in ipsa [illegible]
vna quidem que penes . K. et quod perpendicularis ipsi [illegible]
Ex xcv ad. ze. sit in ipsa signum sit . l. hoc [illegible] apud
ipso accepta. eam quidem igitur que [illegible] perfectam esse
ostendit. tx. hac quam statuentes centrum et exponentes hanc
divisam quartam exponemus gradus contentos a distantia
continet aut semper tot quot multitudo suppositorum ab ortu ho
rarum tempora equinoctialis eadem existens ei que in plano
equinoctialis eam autem que horarij accipiemus adducentes
lati illius rectanguli alterum laterum ad signum l. ita
ut reliquum adaptetur diametro horizontis. ab. et secetur
Meridianus ab eo quod apud . l. latere penes . m. am. que
enim periferia faciet cere debeat similiter aut si unum
laterum adduxerimus ad. l. ita ut alterum adaptetur dia
metro gnomonis. gd. et secetur Meridianus ab eo quod apud
l. latere penes. n. ipsa. gn. periferia faciet eam que [illegible]
rursum autem. az. quidem extra faciet eam que Meridiani
si autem statuerimus centrum super signa. x, et l. et unum
lati illius laterum apposuerimus ad. l. altero adaptato ipsi
ge. deinde alterum quidem terminum centri apposuerimus
ei que secat rectum angulum portionem ipsius gr. alterum
autem apposuerimus lateri quod apud l. commovente ipso con
nexerimus idem latus conversum, similiter ipsi apud centrum e.
[illegible] ut secet Meridianus ab ipso ut penes. z. ipsa. gz. peri
feria faciat eam, que eius gri secundum verticem similiter autem
si unum laterum apposuerimus ad. l. altero aptato ipsi. ae. et
centro ea vero ipsi. xl. distensionem habentis, alterum quidem
terminum apposuerimus ei que secans arctum angulum portionem
ipsius. ae. alterum autem applicuerimus ei quod apud. l. latere
deinde hoc movente converterimus rursum idem latus quam

constitutione sup centrum . e . ita ut secet Meridianum ut
puncto . o . go . periferiam faciet eam que horizontis et in
his quidem periferiis et in omnibus similiter intelligendum
ut non idem reperiamus [illegible] distensiones ipsorum simul cum
acceptione [illegible] canonum transferentes usque divisionem quam
[illegible] quartam describentes ab ipsis usque ad [illegible] schemate
exponere . rursus supponatur alius . aliorum mensilium para
llelorum diameter et sit ζθ . m . u [illegible] orientalis semi
circulus ζλκ . et centro quidem . t . distantia autem . ta . accipia
tur signum in semicirculo . ζλκ . [illegible] . in quo distinguntur
quod quidem . ζλ . sup terram semicirculi cum quo . λκ . sub
terra accipitur autem signum . l . [illegible] planum rectangulum . si
angulus adductus fuerit ad . h . ita ut alterum adaptetur ipsi
ζκ . secundum quod enim aliquod fuerit semicirculum erit de
terminatum signum quoniam quidem . ab . s . ipsi . hx . perpen
dicularis producta [illegible] planorum horizontis et circuli
mensilis dividatur itaque portionem unaquaque [illegible] m . 6 . ae
qualis [illegible] signatis ipsis accipiantur [illegible] appositionem planum
rectanguli et signa sup . ζκ . facta perpendicularibus ad ip
sam . ab . acceptis divisionibus in semicirculo sit autem una
earum que sup terram penes . m . [illegible] quod eiusdem ordinis cum
ipso signum eorum que sup . ζh . quod . n . centro quidem itaque
ipso . n . distantia . nm . accepto secundum meridianum signo . x .
et latere . . . . adducto ad signa . e . et . h . et ut secet πλατυσματος
Meridianum penes . o . ζo . quidem periferia faciat residuam in
quarta periferie extimori que aut . ab . x . sup sectionem alterius
ipsius et meridiani ipsam que extimori consequenter autem
centro . h . et distantia . hm . accepto secundum Meridianum signo .
p . ap . periferia facit eam que horarii similiter aut centro . t . et
distantia . tm . accepto secundum Meridianum signo . x . gx . periferia
faciet eam que distensionis . rursum . ao . quidem periferia faciet
eam que Meridiani si autem unum laterum . . . . . . πλατιμα
f

apposuerimus ipsi .n. reliquo vero toto ipsi .cz. et Cancri
distensionem habente aequalem ipsi .nm. alterum quidem
terminum apposuerimus ei quae penes angulum rectum
portionis ipsius .cyz. alterum autem apposuerimus ei quod
apud .n. latus deinde hoc manente converterimus latus
quod ad ipsum servata ipsorum constitutione ad centrum .e.
ita ut fiat Meridianum penes .s. gf. periferia faciet
cum qua sub verticem similiter autem rursum si
si unum laterum apposuerimus ipsi .n. altero adaptato
ipsi .ae. et Cancri distensionem habens eandem ipsi .nm.
alterum quidem apposuerimus ei quae secundum rectum
angulum portionis ipsius .ae. alterum autem applicuerimus
ei quod apud .n. lateri deinde hoc manente converterimus
id quod apud .n. rursum servata ipsorum constitutione ad
centrum .e. ita ut fiat Meridianum penes .e. eg. periferia
erit faciet cum quae horizontis terminum ~~centrum aut~~ si ipsorum
.mn. ponentes aequalem ipsi .cgy. apposuerimus ipsi .y.
rectum angulum uno laterum adaptato ipsi .cy. et Cancri
distensionem habentis eandem ipsi .nm. alterum quidem prius
terminum apposuerimus penes .y. alterum autem applicuerimus
recto angulo ad latus .eg. et manente hoc rursum con
verterimus latus quod apud id ipsum servata ipsorum constitutio
ne ad centrum .e. ita ut fiat Meridianum secundum .f.
gf. periferia faciet cum quae in plano aequinoctialis. minor
autem si diameter .zk. ad sinistras nostri partes posi
tionem habens sit unus parallelorum mensilium australium
aequinoctiali transverso tympano ad positionem ex opposito
.zk. et qui super ipsum semicirculus secus dextras nostri partes
erunt in situ eodem cum mensili parallelo descripto et appo
sita signa borealiora aut aequinoctiali ex .kl. quidem portio
erit super terram .zl. aut sub terra quare nos facimus
eadem constantis in divisionibus portionis .kl. in hemisphaerio

et eas que in oppositis signis consistentes periferias nam
secundum quidem eam que in hyemali diametro accepta
ipsa .ZK. quod quidem .ut .faciet eas que a principio ca
pricorni fient sub terram angulorum periferias quorum aut
... eas que a principio cancri secundum eam autem que in
... consequenter hyemali tropico diametro ... subjacet
ipsi .ZK. semicirculus quidem .ZL. faciet eas que a principio
sagittarii et aquarii consistentes sub terram periferias
quorum autem .LK. eas que a principio geminorum et leonis secun
dum eam autem que mensibus contigui equinoctiali dia
metrorum accepta ipsa .PK. quique quidem .ZL. semicirculus
faciet eas que a principio scorpionis et piscium factas
sub terram periferias quorum autem .LK. eas que in principio
tauri et Virginis eas .n. que in principio arietis et libre
existentes eadem in unaquaque equinoctialis quantam ...
demonstrans esse accidit. Et angulos .ut. ab antiquis
determinatos quoscumque non eodem modo nobiscum exposuerunt
ab his in promptu liceret transumere cum quidem omnium qui
circuli extimori secundum nos ut diximus non absumpserunt
aliorum autem quorumquidem horariis et qui in plano circuli qui secun
dum verticem et qui in plano equinoctialis iidem sunt iis que
apud nos qui autem ab ipsis vocatur extimorus est idem cum
apud nos Meridiano reliquorum autem desrensiui quidem facit
residuum ad unum rectum eius qui apud nos desrensiui cum autem
qui antiscius .i. contra umbralis rursum residuus ad unum rectum
eius qui apud nos horizontis quod autem distracto .p. quidem plano
equinoctialis accipitur et per tale palam fit ostendit quidem enim
et hoc eam que circuli horarii positionem habet autem contines
proprie qui eius qui secundum verticem per polos horarii descriptorum
et uno existente eorum qui a principio nonagesimo suppositorum
trium circulorum servantium ubique ad invicem positionem ad rectos

angulos propter quod dixerimus quidem [illegible] [illegible]
que [illegible] assumpserimus non solum [illegible]
rii ostendit positionem radii [illegible] [illegible] que Meridian[illegible]
[illegible] equinoctialis [illegible] solum ea que [illegible]
nec etiam ea que Meridiani [illegible] [illegible] alia reliquorum
[illegible] que nec [illegible] [illegible] secundum [illegible]
[illegible] [illegible] utique aut solum equinoctialis nec secundum
[illegible] manentium eandem utique [illegible] [illegible]
ad reliquos non delatorum exposuimus aut et non [illegible]
quantitates secundum illum quem ostendimus modum con
sequentium rationabilitati differentiarum in subiectis autem 7
parallelis et secundum unigradum principiorum signorum
et horarum in canonibus continentibus particularium autem
ordinem in omnibus directionibus ad promptitudinem earum
que in declinationibus acceptarum adhuc autem quoniam
differentias quidem in Meridiano circulo determinatas prompte
faciunt manifestas orientaliores ipso et occidentaliores po
sitiones horarum eas autem que in circulo qui per verticem bo
realiores ipso et australiores in ea radiorum in quibus con
sequentiam diximus oportere eo exquirere. descripsimus sin
gulis horarum signa et que eam que ad borealia circuli qui
per verticem et versus ad australia radii positionem licebit
considerare a liquidate a convenientibus iis que predetermi
nata sunt principium facientes ad iacentium
quantitatum expressiones promptum autem adhuc et con
iugationes aquibus positio radii do sex numero esse
accedit tres quidem ab his que determinent delatorum
trium circulorum extimorique ad horarium et extimori ad des
censium tres autem eas que ab unoquoque delatorum cum eo qui
inclinationem ipsius continet manentium extimori quidem ad

Meridianus horarij [illegible] ad [illegible] qui [illegible] verticem [illegible] casum [illegible] ad horizontem [illegible] et canones ita

Canon [illegible] horarij

	Hora	[illegible]											
	[illegible]	24	15	65	5	90	0	0	90	30	[illegible]	[illegible]	15
ho	1	11	25	15	69	15	95	10	35 15	78	15	20	0
ho	2	10	31	20	73/65	0	61	55	59 5	60	0	18	50
ho	3	9	49	50	76/69	0	49	5	72 10	45	5	17	15
ho	4	8	60	10	79/73	10	31	0	78 30	30	10	18	0
ho	5	7	75	0	76/81	20	15	30	81 30	15	10	27	0
ho	Meridies		90	0	82	35	7	25	82 35	0	0	90	0

aquam per lanam ascendere oleum per lichinum atque huiusmodi alia causa illa facit praecipua continuitatem partium sua[ru]m quoad fieri possit, ne igitur distrahantur partes nituntur simul esse et quo rapitur una sequuntur illi adhaerentes

quid est quod corpus cubicum videtur altius quam latius ubicumque visus collocetur

decimo libro Euclides definit lineas potentia commensurabiles cum non diffiniret lineas longitudine commensurabiles. quod ob aliud nisi quia lineae longitudine commensurabiles quatenus sunt etiam potentia commensurabiles explicantur in definitione linearum potentia commensurabilium. non quidem potentia tantum sed simpliciter potentia, quatenus vero sunt longitudine commensurabiles non diffiniuntur ab Euclide propterea quod quoad ipsarum continentur sub universali definitione Magnitudinum Commensurabilium. pariter

Bibliografia

Manuscrits

de Torres, B. *Codex Barberinus Latinus 304.* Roma: Biblioteca Vaticana.

Obres publicades

Apianus, Petrus (1534). *Instrumentum primi mobilis a Petro Apiano. Accedunt ijs Gebri filii Affla hispalensis…libri ix de astronomía…per Girardu[m] Cremonensem latinitate donati…* Nuremberg: Petreius.

Aristóteles (1995). *Tratados de Lógica (Organon) II.* Trad. de Candel Sanmartín, M. Madrid: Gredos.

Arzubialde, Santiago; Corella, Jesús; García-Lomas, J. M. eds. (1993). *Constituciones de la Compañía de Jesús. Introducción y notas para su lectura.* Maliaño: Sal Terrae.

Baldini, Ugo (1983). "Christopher Clavius and the Scientific Scene in Roma". Dins: G. V. Coyne, M. A. Hoskin, i O. Pedersen, eds., *Gregorian Reform of the Calendar: Proceedings of the Vatican Conference to Commemorate its 400th Anniversary* (Ciutat del Vaticà: Pontificial Academy of Sciences, Specolo Vaticano), p. 137-170.

Baldini, Ugo (1992). *Legem impone subactis: Studi su filosofia e scienza* *dei gesuiti in Italia, 1540-1632*. Roma: Bulzone.

Baldini, Ugo (2000). *Saggi sulla cultura della Compagnia di Gesu: (secoli XVI-XVIII)*. Pàdua: CLEUP.

Baldini, Ugo; Napolitani, Pier Daniele (1992). *Chistoph Clavius: Corrispondenza (7 vols.)* Edizione critica. Pisa: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

Beltrán de Heredia, Vicente. (1970). *Cartulario de la Universidad de Salamanca* (1218-1600). Volumen II: *La Universidad en el Siglo de Oro*. (Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca), p. 252-255.

Bernis, Margarita (1956). "La ciència hispano-árabe". *Revista de Temas Españoles*, 235. Madrid: Publicaciones Españolas.

Boyer, Carl B.; Merzbach, Uta C. (1968). *A history of mathematics.* Hoboken. NJ: Wiley.

Brooke, John H. (1991, 2014). *Science and Religion. Some Historial Perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press.

Catena, Petrus (1556). *Universa loca in Logicam Aristotelis in Mathematicas disciplinas hoc novum opus declarat.* Venècia: Marcolini.

Chasles, Michel (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développe-*

ment des méthodes en géométrie. Vol. I. Bruxelles: Hayez.

Clagett, Marshall (1978). *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 2: The translations from Greek by William of Moerbeke*. Philadelphia: American Philosophical Society.

Clavius, Christoph (1593). *Astrolabium*. Roma: Societate Jesu.

Clavius, Cristoph (1581). *Gnomonices Libri octo*. Roma: Societate Jesu.

Clavius, Christoph (1586). *Teodosii Tripolitae Sphaericorum Libri III. Christophori Clavii sinus. Lineae tangentes et secantes. Triangula rectilinea atque sphaerica*. Roma: Societate Jesu.

Commandino, Federico (1562). *Claudii Ptolemaei liber de analemmate*. Roma: Paulum Manutium.

Cosentino, Giuseppe (1970). "Le matematiche nella Ratio Studiorum della Compagnia di Gesu". *Miscellanea storica ligure*, 2 (2): 171-213.

Dear, Peter (1995). *Discipline and experience: The mathematical way in the scientific revolution*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Delambre, Jean-Baptiste Joseph (1827). *Histoire de l'astronomia ancien-*

ne, vol. 6. París: Courcier.

Drecker, Joseph (1925). *Die Theorie der Sonnenuhren*. Berlín: de Gruyter.

Edwards, Don Raymond (1984). *Ptolemy's Peri Analemmatos. An Annotated Transcription of Moerbeke's Latin Translation and of the Surviving Greek Fragments with an English Version and Commentary*. Tesi doctoral. Brown University.

Farrell, Allan P. (1938). *The Jesuit code of liberal education: Development and scope of the Ratio Studiorum*. Milwaukee: Bruce.

Feingold, Mordechai, ed. (2002). *Jesuit science and the Republic of letters*. Cambridge, MA; London: The MIT Press.

García Villoslada, Ricardo (1954). *Storia del Collegio Romano dal suo inizio (1551) alla soppressione della Compagnia di Gesú (1773)*. Roma: Pontificiae Universitatis Gregorianae.

Gillispie, Charles Coulston, gen. ed. (1990). *Dictionary of Scientific Biography*. 16 vols. (1970-1980). Supplement II, 2 vols., edited by Frederic Lawrence Holmes. New York: Charles Scribner's Sons.

Gilson, Étienne (1921). *Études de philosophie médiévale*. Strasbourg:

Université de Strasbourg.

Hairetdinova, N. G. (1986). "On spherical trigonometry in the Medieval Near East and in Europe". *Historia Mathematica*, 13(2): 136-146.

Harris, Steven (1900). *Jesuit ideology and Jesuit science: Scientific activity in the Society of Jesus 1540-1773.* Tesi doctoral. University of Wisconsin.

Heiberg, Johan Ludwig (1907). *Claudii Ptolemaei opera quae exstant Omnia*, vol. 2. Leipzig: Teubner.

Id, Yusuf (1969). "Analemma Construction for Right and Oblique Ascensions". *The Mathematics Teacher*, 8 (12): 669-672.

Jardine, Nicholas (1988). "Epistemology of the sciences". Epistemology of the sciences". Dins: Schmitt, C. B.; Skinner, Q.; Kessler, E.; Kraye, J. eds. *The Cambridge History of Renaissance Philosophy.* (Cambridge: Cambridge University Press), p. 685-711.

Kennedy, Edward S. (1959). "Biruni's Graphical Determination of the Local Meridian". *Scripta Mathematica* 24 (1959): 251-255. Reimprès a *Studies in the Islamic Exact Sciences* (Beirut: American University of Beirut, 1983), p. 613-617.

Kennedy, Edward S. (1963). “al-Biruni on determining the meridian”. *Mathematics Teache*r 56: 635-637. Reimprès a *Studies in the Islamic Exact Sciences* (Beirut: American University of Beirut, 1983), p. 618-620.

Loyola, Ignacio de (1903-1911). *Monumenta Ignatiana. Series prima. S. Ignatii de Loyola Epistolae et Instructiones.* Vol. I-XII. Madrid: López del Horno.

Lukács, Ladislaus, ed. (1965-1992). *Monumenta Pedagogica Societatis Iesu.* Vol. I: 1540-1556 (1965); vol. II-III: 1557-1572 (1974); vol. IV: 1573-1580 (1981); vol. V: 1580, 1591 i 1599 (1986); vol. VI: 1582-1587 (1992); vol. VII: 1588-1616 (1992). Roma: Institutum Historicum Societatis Iesu.

Knobloch, Eberhard (1988). “Sur la vie et l’oeuvre de Christophore Clavius (1538-1612)”. *Revue d’histoire des sciences,*< 41(3-4): 331-356.

Lattis, James M. (2010). *Between Copernicus and Galileo: Christoph Clavius and the collapse of Ptolemaic cosmology.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lorch, R.P. (1990). “Jabir ibn Aflah”. *Dictionary of Scientific Biography.* 16 vols. Supplement II, 2 vols., edited by Frederic Lawrence Holmes. New

York: Charles Scribner's Sons.

Luckey, Paul (1927). "Das Analemma von Ptolemäus". *Astronomische Nachrichten*, 230(2): 17-46.

Mancosu, Paolo (1991). "Aristotelian Logic and Euclidean Mathematics: Seventeenth Century Developments of the *Quaestio de Certitudine Mathematicorum". Studies in History and Philosophy of Science*, Part A 23(2): 241-265.

Mancosu, Paolo (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathemacial Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press.

Nadal, Jerónimo (1898-1905). *Epistolae P. Hieronyimi Nadal Societatis Iesu ab anno 1546 ad 1577*, vol. I-IV, Madrid: López del Horno.

Naux, Charles (1983). "Le père Christophore Clavius (1537-1612), sa vie et son oeuvre". *Revue des questions scientifiques*, 154:55-67.

Neugebauer, Otto (1975). *A history of ancient mathematical astronomy.* Berlin; Heidelberg: Springer.

O'Connor, John J. ; Robertson, Edmund F. (1999). "Biography de Jabir ibn Aflah" *The MacTutor history of mathematics archive.* St. Andrews:

University of St. Andrews. School of Mathematics and Statistics.

Paradinas Fuentes, Jesús Luis (2012). "Las Matemáticas en la *Ratio Studiorum* de los Jesuitas". *Llull*, 35, núm. 75, p. 129-162.

Piccolomineus, A. (1547). *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum.* Roma: Asulanum.

Polgár, László; Basilotta, Nicoletta (1998). "Bibliographie sur l'histoire de la Compagnie de Jésus". *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 67: 317-499.

Principe, Lawrence M. (2013). *La Revolución Científica.* Madrid: Alianza Editorial.

Ptolemeu, C. (1895). *Ptolemaeus de Analemmate.* J. L. Heiberg, ed. Leipzig: Teubner.

Ramus, Petrus (1553). *Aristotelicae animadversiones liber nonus et decimus in Posteriora Analytica.* Paris: Carolum Stephanus.

Regiomontanus, Johannes (1533). *De triangulis omnimodis libri quinque.* Nuremberg: Johann Petri.

Rey Pastor, Julio; Babini, José (1984). *Historia de la matemática*, vol. 1.

Barcelona: Gedisa.

Rius, Mònica (2000). *La alquibla en al-Andalus y al-Magrib al-Aqsà*. Barcelona: lnstitut ”Millás Vallicrosa”d’História de la Ciència Àrab; Anuari de Filologia (Universitat de Barcelona) XXI (1998-99) B-3.

Romano, Antonella (1999). *La contre-réforme mathématique. Constitution et diffusion d’une culture mathématique jésuite á la Renaissance*(1540-1640). Roma: École française de Rome.

Rose, Paul Lauwrence (1976). *The Italian Renaissance of mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*. Geneva: Droz.

Samsó, Julio (1992). *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus*. Volumen 7 de Colecciones Mapfre 1492: al-Andalus. Madrid: Mapfre.

Scaduto, Mario (1949). “Il matemático Francesco Maurolico ei Gesuiti”. *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 18: 126-141.

Sinisgalli, Rocco, Vastola, Salvatore (1992). *L’analemma di Tolomeo*. Florència: Cadmo.

Sommervogel, Carlos; Bliard, Pierre (1890-1932). *Bibliotèque de la Com-*

pagnie de Jesús, 11 vol. Paris: Picard.

Thoren, Victor E. (1988). "Prosthaphaeresis revisited". *Historia mathematica*, 15(1):32-39.

Van Brummelen, Glen (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The Early History of Trigonometry.* Princeton: Princeton University Press.

Vitruvio, Marco Lucio (1992). *Los diez libros de arquitectura*, vol. 2. Madrid: Akal.

Von Braunmühl, Anton E. (1903). *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 2 vol. Leipzig: Teubner.

Zeller, Mary Claudia (1944). *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus.* Tesi doctoral. University of Michigan.

Zeuthen, Hieronymus Georg (1900). "Note sur la trigonométrie de l'Antiquité". *Biblioteca Mathematica*, 1(3): 20-27.

Zeuthen, Hieronymus Georg (1902). *Histoire des mathématiques: dans l'Antiquité et le Moyen Âge*. París: Gauthier-Villars.