

**Aproximació facetada  
de superfícies paramètriques  
retallades**

Marc Vigo Anglada

Tesi doctoral

Directors: Pere Brunet Crosa  
Núria Pla Garcia

Secció d'Informàtica Gràfica  
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics  
Universitat Politècnica de Catalunya

Agost de 1998



# Índex

Agraïments	vii
Introducció	ix
<b>1 El modelatge per computador</b>	<b>1</b>
1.1 El modelatge de sòlids . . . . .	1
1.1.1 Els models de fronteres . . . . .	3
1.2 El modelatge de corbes i superfícies . . . . .	5
1.2.1 Els polinomis de Bernstein . . . . .	6
1.2.2 Les corbes de Bézier . . . . .	7
1.2.3 Pedaços de Bézier rectangulars . . . . .	9
1.2.4 Pedaços de Bézier triangulars . . . . .	10
1.2.5 Pedaços retallats . . . . .	12
1.2.6 Continuitat entre pedaços . . . . .	13
1.3 El modelatge de superfícies tancades . . . . .	14
1.3.1 El model de fronteres amb cares no planes . . . . .	15
<b>2 Triangulació de superfícies</b>	<b>17</b>
2.1 Les triangulacions dins la informàtica gràfica . . . . .	17
2.2 Facetització de superfícies paramètriques . . . . .	19
2.2.1 Àrees d'aplicació . . . . .	20
2.2.2 Solucions proposades en treballs anteriors . . . . .	22
2.2.3 Comparació de les diferents propostes . . . . .	30
2.3 Objectius de la tesi . . . . .	34
2.4 Terminologia . . . . .	36
2.5 Formalització del problema . . . . .	39
<b>3 Les dades d'entrada. El preprocessament.</b>	<b>41</b>
3.1 Introducció . . . . .	41
3.2 El model de fronteres amb cares paramètriques . . . . .	43
3.2.1 Conversió de les corbes i superfícies a la base de Bézier . . . . .	45
3.3 L'estructura de dades principal . . . . .	45
3.3.1 Obtenció de les dades d'entrada. Comprovació de la validesa topològica . . . . .	48

3.4	Tractament dels pedaços degenerats . . . . .	49
3.4.1	Algorisme $C^0$ . . . . .	53
3.4.2	Algorisme $\varepsilon$ - $G^1$ . . . . .	54
3.4.3	Anàlisi de l'error . . . . .	56
3.4.4	Anàlisi de l'error de l'algorisme $\varepsilon$ - $G^1$ . . . . .	58
3.4.5	Exemples . . . . .	62
3.5	Reparametrizació dels pedaços . . . . .	66
3.5.1	Càlcul de la transformació lineal . . . . .	68
3.5.2	Reparametrizació lineal . . . . .	72
3.5.3	Reparametrizació per translació . . . . .	73
3.5.4	Reparametrizació per escalat uniforme . . . . .	74
3.5.5	Transformació de les corbes sobre la superfície . . . . .	75
3.5.6	Exemples . . . . .	75
<b>4</b>	<b>L'algorisme isòtrop</b> . . . . .	<b>77</b>
4.1	Introducció . . . . .	77
4.2	Les fites d'admissibilitat per a cada pedaç . . . . .	78
4.2.1	Notacions . . . . .	79
4.2.2	Anàlisi de la curvatura . . . . .	80
4.2.3	Càlcul de les fites d'admissibilitat . . . . .	88
4.3	Discretització dels vèrtexs . . . . .	91
4.4	Poligonalització de les arestes . . . . .	92
4.5	Triangulació de les cares . . . . .	94
4.5.1	El mètode de refinament d'arestes . . . . .	94
4.5.2	Fita del nombre de punts . . . . .	98
4.5.3	Implementació del mètode de refinament d'arestes . . . . .	100
4.5.4	El post-procés de relaxació . . . . .	101
4.6	Obtenció de la triangulació final . . . . .	104
<b>5</b>	<b>L'algorisme direccional</b> . . . . .	<b>107</b>
5.1	Introducció . . . . .	107
5.2	Fites d'admissibilitat direccionals . . . . .	108
5.3	Càlcul de les fites el·líptiques . . . . .	120
5.3.1	Càlcul de l'el·lipse inclosa en $B$ . . . . .	120
5.3.2	Càlcul dels quadrees de fites . . . . .	122
5.4	L'algorisme direccional . . . . .	125
5.4.1	Ús de l'algorisme CDT generalitzat . . . . .	125
5.4.2	Poligonalització de les arestes . . . . .	127
5.4.3	El mètode de refinament d'arestes direccional . . . . .	127
5.4.4	El postprocés de relaxació direccional . . . . .	130



<b>6</b>	<b>Resultats, conclusions i treball futur</b>	<b>133</b>
6.1	Introducció . . . . .	133
6.2	El postprocessament de millora de la forma . . . . .	134
6.3	Anàlisi dels resultats . . . . .	138
6.3.1	Joc de proves . . . . .	138
6.3.2	Seguiment d'un cas concret . . . . .	141
6.3.3	Avaluació dels resultats . . . . .	153
6.4	Conclusions . . . . .	166
6.5	Treball futur . . . . .	168
<b>A</b>	<b>Triangulació de Delaunay restringida</b>	<b>173</b>
A.1	Introducció . . . . .	173
A.2	Algorisme d'inserció de vèrtexs . . . . .	174
A.3	Algorisme d'inserció d'arestes . . . . .	178
A.4	Algorisme de triangulació de Delaunay d'un polígon . . . . .	183
A.5	Adaptació dels algorismes per a la distància induïda per una el·lipse . . . . .	187
A.5.1	Transformació induïda per una el·lipse . . . . .	188
A.5.2	El mètode incremental generalitzat . . . . .	189



# Agraïments

Vull agrair als meus directors, Núria Pla Garcia i Pere Brunet Crosa, el suport que m'han donat durant el desenvolupament d'aquesta tesi, assessorant-me i ajudant-me en tot moment i deixant de banda temporalment les seves altres feines per donar-me un cop de mà quan calia.

Així mateix, agraeixo també amb l'ajuda que m'han donat moltes de les persones de la Secció de Gràfics i de la resta del departament, ja sigui amb la seva col·laboració directa en algun aspecte de la tesi (resolent algun detall, ajudant-me a fer servir l'equip informàtic, etc.) o simplement perquè com a bons companys i companyes de treball que han fet aquesta llarga tasca molt més agradable de dur a terme.



# Introducció

En el món del disseny assistit per ordinador existeixen molts i diferents tipus de models d'objectes, entre els quals dos dels més utilitzats són les superfícies retallades i les triangulacions. El primer és un model més sintètic però a la vegada més complex, habitualment més difícil i lent de tractar algorímicament. Les triangulacions, ben al contrari, resulten un model molt simple i per tant còmode i fàcil de manegar, però tenen el desavantatge que resulten costoses d'emmagatzemar, per la gran quantitat d'informació que requereixen. Aquesta tesi és un treball que aporta nous mètodes per a facetar superfícies paramètriques retallades, és a dir, per convertir un objecte representat utilitzant el primer d'aquests dos models en una representació segons el segon model.

El treball de la tesi l'hem distribuït en sis capítols i un annex: el primer capítol és una breu introducció al modelatge de sòlids, que fa especial èmfasi en els models que utilitzarem al llarg de la tesi, tot fixant la notació emprada; el segon capítol comenta l'ús de les triangulacions dins la informàtica gràfica, fa un repàs dels mètodes de triangulació de superfícies més propers als que proposarem, analitza els objectius que ens proposem solucionar i acaba formalitzant el problema que volem tractar; al tercer capítol es presenta l'esquema algorímic bàsic que segueixen les nostres propostes i es desenvolupen dos preprocessaments de les dades d'entrada, és a dir, dos passos inicials comuns als dos algorismes de triangulació que es proposaran; al quart capítol s'hi desenvolupa el primer d'aquests dos algorismes, que hem anomenat algorisme isòtrop; el cinquè capítol presenta l'altre mètode de triangulació de superfícies proposat, que hem anomenat algorisme direccional; el sisè capítol recull els resultats que hem extret tant dels dos algorismes de triangulació com dels altres diversos subprocessos que hi intervenen, i presenta les conclusions i el treball futur, i finalment, hem dedicat un apèndix al desenvolupament d'un algorisme incremental que obté la triangulació restringida de Delaunay d'un graf qualsevol, el qual el fa servir tant l'algorisme isòtrop com el direccional.



# Capítol 1

## El modelatge per computador

Els sistemes de Disseny Assistit per Computador (CAD) poden ésser classificats en dos grans grups: el modelatge de sòlids i el modelatge de superfícies esculpides. El modelatge de sòlids estudia els esquemes de representació d'objectes sòlids limitats per superfícies senzilles (habitualment cares planes, tot i que alguns models n'admeten també d'altres, com quàdriques) i distingeix l'interior del sòlid de l'exterior. En canvi, el modelatge de superfícies s'ocupa dels esquemes de representació per a superfícies de forma arbitrària, que no limiten necessàriament un sòlid tancat.

Tot i que el nostre objectiu no és fer un estudi dels diferents models de representació de sòlids ni de superfícies, atès que al llarg d'aquesta tesi utilitzarem alguns d'aquests models, seguidament farem una brevíssima introducció als principals esquemes de representació i un repàs dels diferents mètodes que s'utilitzen en informàtica gràfica per representar matemàticament les superfícies. Tantmateix, descriurem més detalladament aquells esquemes de representació de sòlids i superfícies que utilitzarem en aquesta tesi. La finalitat d'aquest capítol introductori és doncs no tant sols formalitzar el model de sòlids i el tipus de superfícies que hem triat, sinó també entendre perquè els hem escollit.

### 1.1 El modelatge de sòlids

Modelar un sòlid pot ser útil per a poder-ne calcular algunes propietats interessants, com poden ser el seu volum, la seva àrea o el seu centre de gravetat, així com per poder detectar la intersecció amb d'altres objectes i per poder mecanitzar-lo. La demanda de sistemes potents per a la modelització d'objectes sòlids ha donat lloc a diversos esquemes de representació.

Requicha [Req80] enumera una sèrie de propietats que seria bo que satisfés tot esquema de representació:

- El *domini de l'esquema de representació* és el conjunt d'objectes que poden ésser representats per l'esquema. És el què determina la potència de l'esquema i ha de ser suficientment ampli.
- Un esquema de representació ha de ser *no ambigu*, és a dir, ha de contenir informació suficient per poder distingir un objecte de les demés entitats del seu domini.
- La *unicitat* de l'esquema de representació també és una propietat important, consistent en què cada objecte es pugui representar segons un sol model.
- Cada model s'ha de correspondre amb algún sòlid, és a dir, ha de ser *vàlid*. En altres paraules, per cada possible model ha de ser la representació d'un sòlid real.
- Els models han de ser *fàcils de crear*.
- L'esquema de representació és convenient que sigui *concís*, la qual cosa implica que no emmagatzemi dades redundants.
- Finalment, una bona representació ha de proporcionar *algorismes correctes, robustos i eficients* per al càlcul de les propietats dels sòlids, així com per poder-los representar gràficament.

Resulta difícil dissenyar un esquema que compleixi aquestes característiques; hi ha hagut diversos intents, però no existeix cap modelador que les compleixi totes. Segons aquests criteris, cap esquema és millor que tots els demés [Req80]. La majoria d'esquemes de representació han estat dissenyats per adaptar-se als requisits d'aplicacions concretes.

Una possible classificació, ja clàssica, dels esquemes de representació existents en modelatge de sòlids els agrupa en tres categories: la geometria constructiva de sòlids, els esquemes basats en la descomposició espacial i els models de fronteres. Val a dir que actualment les classificacions d'aquests models inclouen d'altres paradigmes de representació, principalment els model de volum, que permeten modelitzar l'interior dels cossos a més a més de la seva superfície.

La geometria constructiva de sòlids (CSG) comprèn una família d'esquemes de representació basats en la combinació d'operacions booleanes regularitzades i transformacions rígides aplicades a conjunts regulars d'objectes simples, els quals s'anomenen *primitives* [Man88]. Generalment, aquests esquemes guarden un objecte sòlid utilitzant una estructura d'arbre binari el qual emmagatzema operadors en els nodes interns i primitives a les fulles. Cada subarbre representa un sòlid resultant de les operacions i les primitives indicades per sota seu. Alguns esquemes CSG permeten com a



primitives sòlids simples (cubs, esferes, cilindres, etc.); en altres esquemes, les primitives són subespais, no necessàriament plans.

El domini d'un modelador CSG depèn de la varietat de primitives que admeti i de les transformacions geomètriques i operacions booleanes disponibles. La validesa dels sòlids resultants està assegurada si les primitives també són objectes vàlids; si s'admeten subespais com a primitives, cal comprovar que el resultat sigui un conjunt aïllat. Tot arbre CSG representa un objecte de forma no ambigua, però la seva representació no és única. Si bé els esquemes CSG són concisos, descriuen un sòlid com una seqüència d'operacions de construcció, la qual cosa implica haver d'avaluar-la per tal d'obtenir la frontera del sòlid o per efectuar algunes operacions bàsiques [RV83].

Els esquemes de representació que utilitzen l'enumeració espacial descriuen els sòlids en termes d'alguna unitat bàsica de construcció. Els diferents tipus d'unitats bàsiques i la forma com es combinen ha donat lloc a diferents tipus d'esquemes. D'entre aquests esquemes citem l'enumeració exhaustiva (basada en la descomposició en vòxels) [Shi81], el model d'octrees [Mea82, JT80], els bintrees [ST85, KTS85] i els arbres BSP [TN87].

Aquests esquemes de representació proporcionen models únics i no ambigus. A més, els algorismes que en resulten són simples, tant els que serveixen per manipular els objectes com els que fan càlculs geomètrics. El principal inconvenient que presenten és la gran quantitat de dades que cal emmagatzemar, la qual cosa pot comportar un temps de processat extremadament llarg. Això no obstant, la majoria d'ells permeten representar no tant sols la superfície dels objectes, tot i que alguns només de forma aproximada, sinó també propietats associades al seu interior (és a dir, serveixen com a models de volum).

Tot seguit, descriurem més detalladament els models de fronteres, ja que els objectes d'entrada dels algorismes que desenvoluparem en aquesta tesi utilitzen un d'aquests models.

### 1.1.1 Els models de fronteres

Els models de fronteres modelitzen un sòlid per mitjà d'una representació dels elements que formen la seva *frontera*, que separa els punts interiors al sòlid dels exteriors. La superfície queda dividida en una col·lecció de *cares* orientades, cadascuna de les quals està limitada per un conjunt de corbes sobre la frontera, anomenades *arestes* (vegeu la figura 1.1). Les arestes són el lloc geomètric on coincideixen dues cares i, per tant, cadascuna d'elles està compartida per aquestes dues cares. Els punts d'intersecció de les arestes s'anomenen *vèrtexs*.

En conseqüència, queda una jerarquia entre entitats topològiques: cares  $\rightarrow$  arestes  $\rightarrow$  vèrtexs. A cada nivell de la jerarquia li correspon una dimensió diferent en funció dels elements geomètrics de la frontera del sòlid al qual

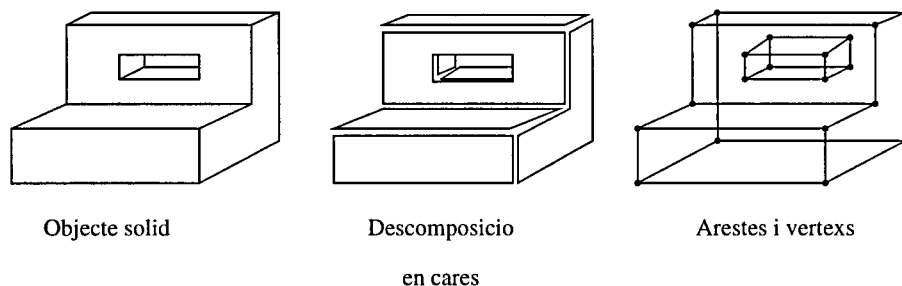


Figura 1.1: Constituents bàsics d'un model de fronteres.

estigui associat: els vèrtexs són entitats de zero dimensions, les arestes tenen una sola dimensió i les cares en tenen dues. Sovint, s'afegeix un nivell a aquesta jerarquia entre el de les cares i el de les arestes, el nivell dels polígons, amb la finalitat de poder representar els objectes amb forats (passants o cecs). Les arestes que delimiten una cara poden formar *forats*, o sigui, cicles interns que exclouen part de la superfície de la cara. A cada cicle tancat d'arestes se l'anomena *polígon*; per tant, els polígons també són entitats d'una sola dimensió. Cada cara està limitada per una sèrie de polígons, un dels quals és l'exterior i un conjunt (possiblement buit) de forats o polígons interiors.

Sovint, les arestes es representen com entitats orientades, i en aquest cas s'anomenen *semi-arestes*. Cada semi-aresta pertany a una sola cara (i a un sol polígon) i li correspon una altra semi-aresta geomètricament coincident però orientada en sentit contrari, anomenada semi-aresta *oposada* o *dual*.

El domini d'un model de fronteres depèn del tipus de cares que utilitzi: si només es permeten cares planes, el domini de representació seran els objectes polièdrics. La validesa dels models de fronteres en general és bastant costosa de comprovar, degut a què un sòlid en aquest esquema pot ser descrit com la unió d'un conjunt de cares qualsevol, i cal provar que efectivament limiten un sòlid tancat i que les cares no s'intersecten entre elles més que al llarg de les arestes. D'altra banda, els models vàlids són no ambigus i no necessàriament únics [Man88].

Els models de fronteres d'alguns objectes poden requerir molt espai de memòria, especialment en el cas que es vulguin representar objectes amb una frontera molt complexa usant només cares planes. Aquest esquema de representació és especialment útil per a visualitzar objectes, però alguns càlculs hi resulten força difícils; per exemple, el test per comprovar si un punt és interior a un objecte és una qüestió que no sempre resulta senzilla de resoldre [Rog85].

## 1.2 El modelatge de corbes i superfícies

L'objectiu del disseny geomètric assistit per computador (CAGD) és el modelatge de corbes i superfícies. Hi ha moltes formes complexes, freqüents en el nostre entorn tridimensional, que no poden ser modelitzades de forma exacta amb les tècniques del modelatge de sòlids que usin cares planes. Aproximar-les per políedres implica sovint obtenir models intractables. Cal, per tant, una representació més directa per als objectes complexos.

D'altra banda, la representació d'aquests objectes complexos juga un paper important en algunes àrees d'aplicació. Un esquema de representació pot ser important per crear un model informàtic que substitueixi els models físics del disseny industrial (carrosseries de cotxe, cascs de vaixells, peces de maquinària, etc.) i també permet representar i estudiar fenòmens físics, geològics i mèdics.

Les eines usades per descriure formes complexes són les corbes i superfícies esculpides. S'han proposat diferents enfoc per a modelitzar les formes complexes; molts d'ells estan basats en les tècniques de Bézier i de les B-splines, que són elements geomètrics bàsic en la representació de les corbes i superfícies. Aquestes tècniques permeten crear un ampli ventall de superfícies esculpides per a les aplicacions de CAD i de gràfics per computador.

Els mètodes de Bézier i de B-splines impliquen la subdivisió de les superfícies en pedaços paramètrics, els quals queden definits com una col·lecció de funcions en una base polinòmica. Els pedaços s'uneixen amb les restriccions de continuïtat apropiades per tal d'obtenir el grau de suavitat desitjada. Aquest enfoc, introduït als anys seixanta, ha donat peu a molts treballs i actualment encara constitueix una important línia de recerca.

Altres enfoc utilitzen les superfícies implícites com a primitives de modelatge. Sederberg va introduir l'ús de les corbes i superfícies algebraïques com a mètodes per representar superfícies de topologia arbitrària [Sed85, Sed90]. Els mètodes algebraics, com els resultants i els discriminants, són una base a partir de la qual es poden obtenir algorismes robustos per a la visualització de superfícies.

Uns altres mètodes força usats des de la seva introducció per Catmull i Clark l'any 1978 [CC78] són els basats en la subdivisió recursiva. Aquests mètodes generen superfícies suaus com el límit d'una seqüència de políedres. Cada pas de la subdivisió recursiva genera un políedre definit a partir de l'anterior amb més vèrtexs i cares. Els diferents esquemes de subdivisió existents difereixen bàsicament en la forma com es defineixen les noves cares, arestes i vèrtexs a cada pas de la subdivisió.

D'entre l'enorme quantitat d'esquemes de representació que existeixen per a la modelització de superfícies esculpides, ens hem limitat a descriure aquells que usarem més endavant o que són més propers al nostre treball. Abans, hem cregut oportú fer un breu repàs dels polinomis de Bernstein i

de les corbes de Bézier.

### 1.2.1 Els polinomis de Bernstein

Els polinomis de Bernstein van ser introduïts com una base polinòmica per aproximar funcions en un interval. No obstant, l'elegància de les seves propietats geomètriques i l'estabilitat numèrica de les seves rels reals sota perturbacions dels seus coeficients han fet que aquesta base sigui àmpliament utilitzada en el CAD.

Definim els polinomis de Bernstein de grau  $n$  sobre l'interval  $[0,1]$  com:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

amb  $i = 0 \dots n$ .

Aquests polinomis, que formen una base dels polinomis, compleixen les següents propietats:

1. Cada base de grau  $n$  pot ser expressada recursivament en termes de la base de grau  $n - 1$  segons la següent fórmula:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

amb la condició inicial  $B_0^0(t) = 1$  i definint  $B_j^n(t) = 0$  per  $j \notin \{0, \dots, n\}$ .

2. Són *positius* i formen una *partició de la unitat* a l'interval  $[0, 1]$ :

$$B_j^n(t) \geq 0 \quad j = 0, \dots, n \quad \text{i} \quad \sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$$

3. *Variació disminuïda*: Donat un polinomi expressat en la forma de Bernstein:

$$P(t) = \sum_{j=0}^n c_j B_j^n(t)$$

on  $\{B_j^n(t)\}_j$  són les funcions base i els valors  $\{c_j\}_j$  són els coeficients de Bernstein en l'interval  $[0, 1]$ ; sigui  $N_R$  el nombre de rels del polinomi  $P$  en  $[0, 1]$  i sigui  $N_C$  el nombre de canvis a la seqüència de coeficients de  $P$ , llavors es compleix que  $N_R - N_C$  és un enter entre 0 i  $n$ .

4. Procediment d'*elevació de grau*: Donat un polinomi  $P$  representat en la base de Bernstein de grau  $n$ ,  $\{B_j^n(t)\}_j$ , pels coeficients  $\{c_j^n\}_j$ , pot ser expressat en la base de grau  $n + 1$ ,  $\{B_j^{n+1}(t)\}_j$ , i els coeficients en la nova base es poden calcular usant la fórmula següent:

$$c_j^{n+1} = \frac{j}{n+1} c_{j-1}^n + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) c_j^n$$

A part d'aquestes propietats que acabem d'enumerar, aquesta base en té una altra de molt important: és numèricament estable sota les imprecisions de l'aritmètica de coma flotant i sota perturbacions de les dades d'entrada, [FR87, FR88]. Aquest comportament ha estat la causa principal de l'àmplia difusió de la base de Bernstein en el disseny assistit per ordinador.

Hi ha moltes altres propietats d'aquestes bases relacionades amb les propietats geomètriques de les funcions que finalment s'obtenen. D'entre elles, citem les següents:

1. Els polinomis de Bernstein són simètrics respecte al paràmetre  $t$  i  $1-t$ , és a dir, compleixen la igualtat següent:

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$$

2. La derivada d'un polinomi de Bernstein pot ser expressada en termes de la base d'ordre  $n-1$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

3. El polinomi de Bernstein  $B_i^n(t)$  té un sol màxim i l'ateny pel valor del paràmetre  $t = \frac{i}{n}$ .

### 1.2.2 Les corbes de Bézier

Les corbes de Bézier constitueixen una tècnica que permet definir les corbes paramètriques com una corba polinòmica que aproxima un conjunt donat de punts. Estan basades en els polinomis de Bernstein, vistos a l'apartat anterior, i van ser desenvolupades per de Casteljaou i per Bézier de forma independent cap a principis dels anys 60. De Casteljaou les va descriure a través d'un algorisme recursiu constructiu; més endavant, R. Forrest va introduir una notació compacta d'aquestes corbes que va permetre descobrir la relació entre el treball de Bézier, els polinomis de Bernstein i la descripció constructiva de de Casteljaou.

Les corbes de Bézier s'expressen en termes de polinomis de Béziers com:

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \quad t \in [0, 1]$$

on  $\{B_i^n(t)\}_i$  són els polinomis de Bernstein de grau  $n$  i  $\{\mathbf{P}_i\}_i$  són un conjunt de punts anomenats els *punts de control* o *punts de Bézier*. Per la propietat 2 dels polinomis de Bernstein, els punts de la corba s'obtenen ponderant els punts de control (vegeu la figura 1.2).

Aquestes corbes compleixen una sèrie de propietats que les fan especialment aptes com a eines de disseny. Enumerem algunes de les més interessants [Far88]:

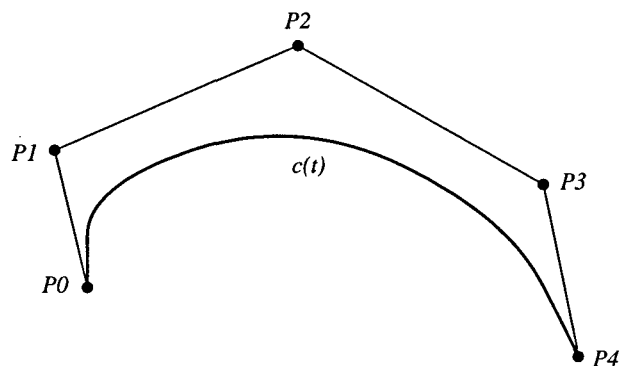


Figura 1.2: Corba de Bézier i els seus punts de control

1. *Propietat de l'envolupant convexa.* Tota corba de Bézier està continguda dins l'envolupant convexa dels seus punts de control. Aquesta propietat és conseqüència de les propietats de la partició de la unitat dels polinomis de Bernstein i del fet de ser positius.
2. *Interpolació dels punts extrems.* Tota corba de Bézier passa pels seus punts inicial i final,  $P_0$  i  $P_n$ . Aquesta propietat és fàcil de provar avaluant la corba pels valors del paràmetre  $t = 0$  i  $t = 1$ .
3. *Control pseudo-local.* Tot i que el canvi de posició d'un sol punt de control de la corba de Bézier,  $P_i$ , afecta tota la corba, l'efecte es localitza principalment en una regió prop del valor del paràmetre  $\frac{i}{n}$ . Aquesta propietat es deu a que els polinomis de Bernstein tenen un sol màxim, atès per  $t = \frac{i}{n}$ .
4. *Invariància sota combinacions baricèntriques.* La corba que s'obté fent el promig ponderat de dues corbes de Bézier de grau  $n$  és a la seva vegada una corba de Bézier de grau  $n$  i els seus punts de control es poden calcular ponderant els punts de control de les corbes originals.
5. *Invariància sota transformacions afins dels paràmetres.* Aquesta propietat permet expressar les corbes de Bézier definides sobre un interval arbitrari  $[a, b]$ , enlloc d'estar definit a l'interval  $[0, 1]$ , simplement realitzant el canvi de les coordenades local  $t = (u - a)/(b - a)$ . Algebràicament, aquesta propietat s'expressa com

$$\sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$$

6. *L'algorisme de de Casteljau.* Aquesta mètode, derivat de la definició recursiva dels polinomis de Bernstein, permet avaluar un punt d'una

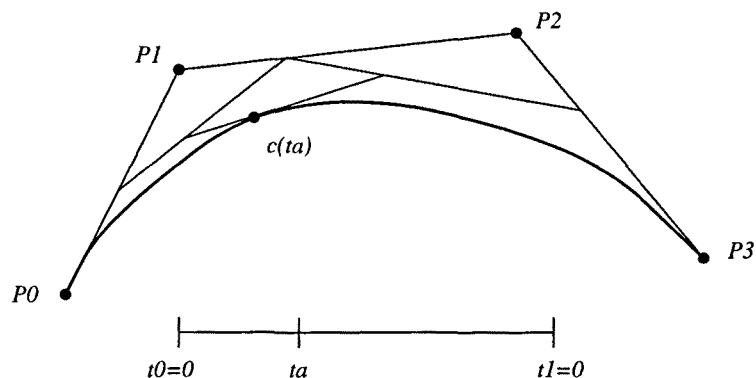


Figura 1.3: Aplicació de l'algorisme de de Casteljau

corba de Bézier donat un valor del paràmetre  $t$ , fent combinacions lineals dels punts de control (vegeu la figura 1.3).

Donada la corba  $c(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$  i el valor del paràmetre  $t_a \in [0, 1]$ , definim

$$\begin{aligned} P_i^0 &= P_i \\ P_i^k &= t_a P_{i-1}^{k-1} + (1-t_a) P_i^{k-1} \quad \text{per } i = k, \dots, n \end{aligned}$$

llavors, usant aquesta notació tenim  $c(t_a) = P_n^n$ .

### 1.2.3 Pedaços de Bézier rectangulars

Els pedaços de Bézier rectangulars són una representació de les superfícies paramètriques que es deriva com una extensió de la formulació de les corbes de Bézier. Es defineixen a partir de la forma del producte tensorial i estan basats en la definició intuïtiva d'una superfície com el lloc geomètric que crea una corba en moure's a l'espai. Els pedaços rectangulars de Bézier s'obtenen en particularitzar aquesta idea en el cas en què la corba que genera la superfície és una corba de Bézier i el seu moviment a l'espai és tal que els seus punts de control es mouen sobre una altra corba de Bézier.

Formalitzant aquesta idea, obtenim l'expressió matemàtica del pedaça. Sigui  $x(u)$  la corba bàsica, donada per

$$x(u) = \sum_i c_i B_i^m(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

i la corba sobre la que es mouen els punts de control

$$c_i(v) = \sum_j P_{ij}^n(v) \quad 0 \leq v \leq 1$$

Llavors, la superfície resultant s'obté combinant les dues equacions prèvies:

$$x(u, v) = \sum_i \left( \sum_j \mathbf{P}_{ij} B_j^n(v) \right) B_i^m(u) = \sum_{ij} \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

Els  $(m + 1) \times (n + 1)$  punts,  $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{ij}$ , anomenats, com en el cas de les corbes, *punts de control* o *punts de Bézier*, estan ordenats formant una malla quadrangular, la xarxa de punts de Bézier (vegeu la figura 1.4).

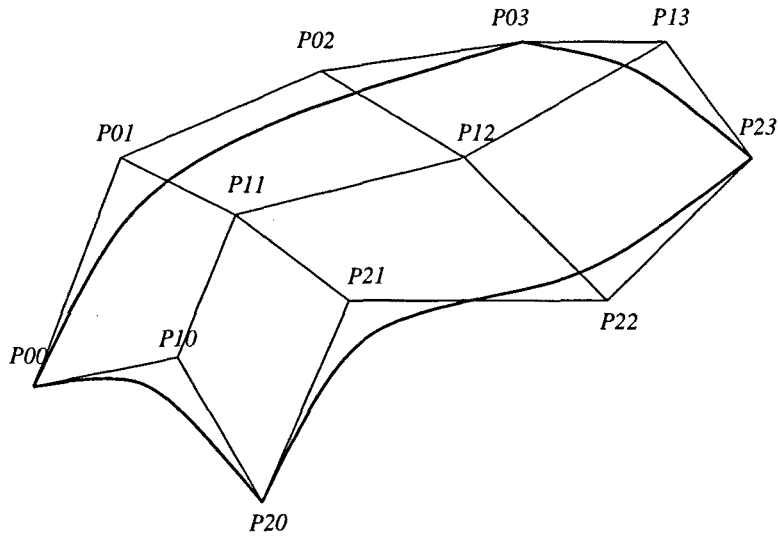


Figura 1.4: Pedaç rectangular de Bézier i els seus punts de control

El pedaç de Bézier  $x(u, v)$  es pot definir partir del moviment de la corba de Bézier donada per  $v = 0$ . Per un valor donat del paràmetre  $u$  entre 0 i 1, aquesta corba determina una altra corba isoparamètrica de paràmetre  $v$  constant. De forma alternativa, el mateix pedaç es pot definir a partir de les corbes amb  $u$  constant.

Atès que aquestes superfícies s'obtenen com una extensió de les corbes de Bézier, moltes de les propietats de les corbes de Bézier es mantenen per als pedaçs, com la propietat de l'envolupant convexa, la interpolació dels punts extrems i el control pseudo-local. L'algorisme de de Casteljau pot ser generalitzat per al cas dels pedaçs rectangulars, la qual cosa permet avaluar punts de la superfície de forma còmoda.

#### 1.2.4 Pedaçs de Bézier triangulars

Quan es treballa amb un modelador de superfícies, resulta útil disposar de pedaçs de forma triangular per modelitzar certes zones que tenen aquesta forma, com cantonades limitades per tres cares o les cares superiors resultants d'un escombrat rotacional. Els pedaçs triangulars de Bézier resulten



d'una generalització algebraica més natural de les corbes de Bézier que no pas els rectangulars.

La formulació dels pedaços triangulars s'obté expressant la representació de les corbes en termes de coordenades baricèntriques i generalitzant la idea a una coordenada més. De fet, els pedaços triangulars estan basats en la generalització dels polinomis de Bernstein de grau  $n$ , definint-los en coordenades baricèntriques.

Els polinomis de Bernstein en coordenades baricèntriques en el pla estan definits per:

$$B_I^n(U) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad \text{on } I = (i, j, k) \quad \text{i } U = (u, v, w)$$

amb  $0 \leq u, v, w \leq 1$  i  $i, j, k \geq 0$ . El valor  $n$  és igual a  $i + j + k$ , altrament  $B_I^n(U) = 0$ . Les components de  $U$  són coordenades baricèntriques, i en conseqüència el polinomi és realment bivariant, atès que  $u + v + w = 1$ .

Aquests polinomis compleixen les següents propietats, anàlogues a les presentades a l'apartat 1.2.1:

1. El fet de ser *positius* i la *partició de la unitat* a l'interval  $[0,1]$ :

$$B_I^n(U) \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_I^n B_I^n(U) = 1$$

2. La possibilitat de ser *definitos recursivament*, la qual cosa permet calcular els polinomis de grau  $n$  a partir dels de grau  $n - 1$ :

$$B_{(i,j,k)}^n(U) = u B_{(i-1,j,k)}^{n-1}(U) + v B_{(i,j-1,k)}^{n-1}(U) + w B_{(i,j,k-1)}^{n-1}(U)$$

amb la condició inicial  $B_0^0(U) = 1$ .

Utilitzant aquesta notació, un pedaça triangular s'expressa en la forma de Bézier-Bernstein com:

$$x(U) = \sum_{|I|=n} \mathbf{P}_I B_I^n(U) \quad 0 \leq u, v, w \leq 1$$

on  $\mathbf{P}_I$  són els punts de control del pedaça. La figura 1.5 mostra un pedaça d'aquestes característiques.

Com en cas dels pedaços de Bézier rectangulars, moltes de les propietats de les corbes de Bézier són generalitzables per als pedaços triangulars. En concret, existeix una versió de l'algorisme de de Casteljaou que permet avaluar les coordenades en espai imatge d'un punt d'un pedaça triangular a partir de les seves coordenades baricèntriques.

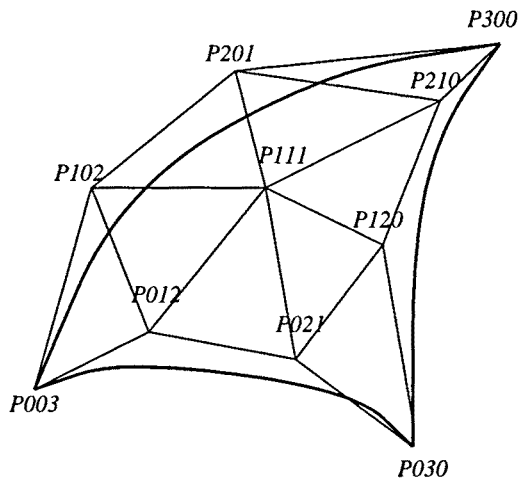


Figura 1.5: Pedaç triangular de Bézier i els punts de control

### 1.2.5 Pedaços retallats

Els pedaços definits segons el producte tensorial són molt útils quan es poden aplicar superfícies que tenen una configuració rectangular, formant una malla. Això no obstant, no totes les situacions són aptes per a un arranjament de pedaços rectangulars. Els pedaços triangulars cobreixen d'altres situacions, però aquestes dues eines encara no són prou flexibles.

Per aquesta raó, es va desenvolupar la tècnica dels pedaços retallats. Les superfícies retallades són avui en dia àmpliament usades en el món del CAGD, atès que proporcionen una solució raonable per a representar superfícies de topologia general.

Un pedaç retallat és un pedaç en el qual algunes de les zones han estat marcades com a no vàlides. Aquestes zones habitualment queden definides per un conjunt de corbes, anomenades *corbes de retallat*, que formen una forma tancada (amb possibles forats) en l'espai paramètric (vegeu la figura 1.6).

Les corbes de retallat són corbes paramètriques amb la imatge en l'espai paramètric del pedaç que retallen, és a dir, corbes sobre la superfície:

$$\begin{aligned} C^{2D} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (u, v) \end{aligned}$$

Donada una corba de retallat  $C^{2D}$  sobre una superfície  $S$ , per trobar les coordenades del punt de la corba en l'espai euclidià corresponent a un valor arbitrari del paràmetre  $t$ , cal compondre les dues funcions, obtenint el punt  $S(C^{2D}(t))$ . Per motius de consistència, les corbes de retallat solen estar expressades segons el mateix model que la superfície a la qual retallen. Un model habitual és tenir la superfície expressada com un pedaç de Bézier

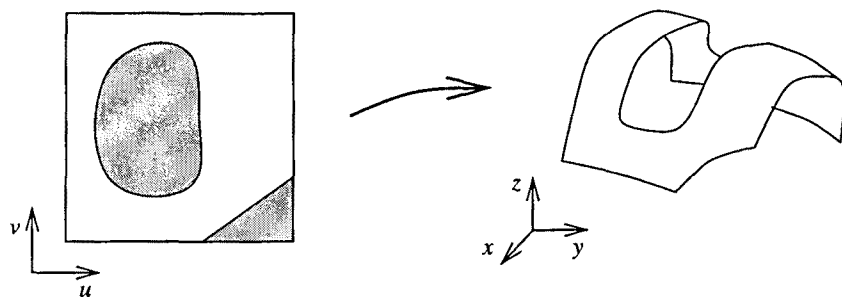


Figura 1.6: Peça retallat: algunes de les zones del peça, tancades per les corbes de retallat, es marquen com a no vàlides.

segons la forma del producte tensorial retallat per corbes de Bézier.

Fem notar que la tècnica dels pedaços retallats permet representar, entre moltes altres formes, una regió triangular, per exemple utilitzant un peça rectangular retallat per una de les seves diagonals. Sembla que aquesta hauria de ser la representació triada pels modeladors que únicament disposen de pedaços rectangulars, retallats o no. Això no obstant, existeixen aplicacions informàtiques que enlloc d'utilitzar aquesta simple forma, es decanten per fer servir pedaços degenerats, problemàtics per la seva configuració. Aquest és un problema amb el qual ens hem trobat al llarg d'aquesta tesi i que hem hagut de resoldre desenvolupant un preprocessament de conversió dels pedaços degenerats (vegeu el capítol 3).

### 1.2.6 Continuitat entre pedaços

Com hem explicat, habitualment la superfície d'un sòlid es sol descriure com una col·lecció de pedaços, atès que si es volgués representar un objecte complex com una sola superfície el grau de la mateixa seria prohibitiu. Si es desitja una superfície suau, cal que els diversos pedaços s'uneixin entre ells de forma que es garanteixi la continuïtat entre pedaços adjacents. La continuïtat entre pedaços, així com entre corbes, constitueix un problema important.

En primer lloc, la connexió suau entre pedaços adjacents es pot obtenir de la igualtat de les derivades paramètriques al llarg de la frontera comuna. La continuïtat que en resulta s'anomena *continuïtat paramètrica*. Aquesta continuïtat depèn de la parametrizació de les superfícies i, per tant, resulta massa restrictiva per als objectius del modelatge de superfícies esculpides. Enlloc seu, s'utilitza el concepte de *continuïtat geomètrica*, que mesura l'ordre relatiu de suavitat independentment de la parametrizació dels pedaços i és més significativa des del punt de vista geomètric. Per exemple, es diu que dos pedaços adjacents són de la classe  $C^1$  si comparteixen una frontera en comú i les primeres derivades paramètriques al llarg

d'aquesta frontera són idèntiques. En canvi, es parla de pedaços de la classe  $G^1$  si el pla tangent o, equivalentment, el vector normal a la superfície és continu al llarg de la frontera compartida. Per a la gran majoria d'aplicacions pràctiques, la continuïtat  $G^1$  és suficient.

Nombrosos autors han treballat en aquest problema, tan pels problemes de continuïtat entre pedaços rectangulars com triangulars. El cas dels pedaços retallats és més difícil de tractar, atès que el càlcul de les derivades, que determinen les condicions de continuïtat, al llarg de les corbes de retallat no permet un tractament tant directe com el cas dels límits naturals dels pedaços. Altres problemes relacionats amb la connexió suau entre superfícies són encara un tema obert de recerca. Una altra forma d'enfocar el problema consisteix en relaxar la condició de continuïtat i demanar continuïtat aproximada [DM92]. Aquest és l'enfoc que hem triat en desenvolupar el mètode de tractament dels pedaços degenerats (vegeu la secció 3.4).

### 1.3 El modelatge de superfícies tancades

Tal com hem vist, el modelatge de sòlids s'ocupa de la representació de regions de l'espai tancades, mentre que els models de superfícies poden descriure tant superfícies obertes com conjunts de pedaços que enclouen un volum finit. Els dos models han evolucionat de forma independent [Req80] i mentre el modelatge de superfícies és capaç de representar formes complexes, els models de sòlids solen estar restringits a objectes limitats per cares senzilles, habitualment cares planes o, en el millor dels casos, quàdriques.

En aquesta secció ens ocuparem d'aquells models que s'ocupin de la representació d'objectes limitats per superfícies del tipus més general possible, fent especial èmfasi en el model que utilitzarem al llarg d'aquesta tesi. Diversos autors han tractat el problema de la modelització de superfícies tancades; vegeu [BV92] per a una comparació de les diferents propostes.

Els models que representen un sòlid tancat poden emmagatzemar informació de la frontera del cos explícitament o bé usar un enfoc constructiu a través d'un arbre d'operacions elementals entre sòlids que defineixen el sòlid resultant, com és el cas dels arbres CSG. Dins del primer grup, que anomenarem models de fronteres amb cares no planes, podem distingir dos subgrups en funció de les entitats permeses per a la representació de la frontera del sòlid: els models basats en les superfícies algebraïques i els basats en les superfícies paramètriques tancades, ja siguin polinòmiques o racionals, usant pedaços triangulars, rectangulars o retallats.

Molts mètodes per a representar una superfície tancada parteixen de models de sòlids simples. Així, els mètodes de la subdivisió recursiva (vegeu la secció 1.2) parteixen d'objectes polièdrics o de triangulacions per obtenir polièdres del mateix tipus cada cop més suaus; la interpolació discreta pot generar un model de fronteres amb cares no planes partint d'un polièdre

simples o d'una triangulació d'un núvol de punts més la informació de la normal a cadascun d'ells; els esquemes d'interpolació transfinita, en canvi, obtenen el mateix tipus de representació a partir d'una malla de corbes, amb una topologia apropiada.

### 1.3.1 El model de fronteres amb cares no planes

Els models de fronteres limitats per pedaços paramètrics són el cas més general dels models de fronteres, exposats a l'apartat 1.1.1. En aquest model, les cares del sòlid són porcions de superfícies paramètriques, i les arestes són segments de corbes paramètriques sobre aquestes superfícies.

Com que es pretén que la representació permeti cares no planes, convé recórrer a un model de fronteres basat en les arestes, com ara el model *winged-edge* [Man88]. Aquest model representa les cares frontera de l'objecte en termes dels polígons que la delimiten, i cada polígon en termes de les arestes que formen un cicle tancat. El fet que les arestes estiguin representades de forma explícita a l'estructura de dades permet emmagatzemar-hi la informació de les corbes d'intersecció entre les cares. D'aquesta manera, és poden representar cares amb la topologia el més general possible. Habitualment, les cares del sòlid són pedaços retallats pels cicles d'arestes; per tant, cada aresta és una corba de retallat.

La figura 1.7 mostra un exemple d'un sòlid modelitzat com acabem d'explicar i la representació d'una de les seves cares (S1) en espai paramètric com un pedaça retallat per una sèrie de corbes (L1,L2, ... ,L7).

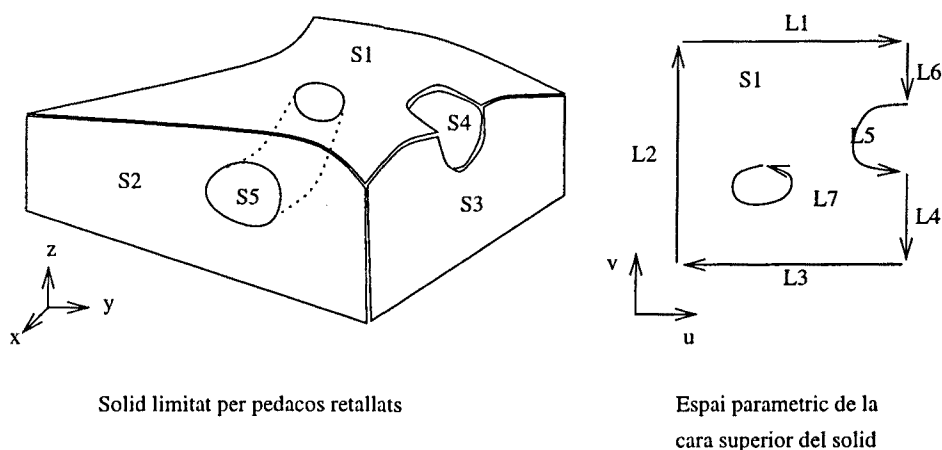


Figura 1.7: Exemple d'un sòlid limitat per pedaços paramètrics



## Capítol 2

# Triangulació de superfícies

### 2.1 Les triangulacions dins la informàtica gràfica

Els triangles són elements àmpliament usats en la informàtica gràfica, atès que, pel fet de ser els simplexes de dues dimensions, compleixen nombroses propietats agradables, com ara el fet de ser polígons convexos o estar definits unívocament per tres punts. Els acceleradors gràfics que existeixen actualment solen reduir totes les entitats que se'ls proporciona a triangles, fins al punt que la seva eficiència es mesura en termes de nombre de triangles que són capaços de visualitzar per unitat de temps. Altres tipus de perifèrics, com ara les màquines d'estereolitografia, exigeixen que se'ls proporcionin exclusivament objectes limitats per triangles i formats de fitxers específics per a models triangulats. A més a més, existeixen nombrosos algorismes que estan pensats per treballar únicament amb triangles, i la majoria d'algorismes gràfics es poden simplificar considerablement en el cas que els únics elements que tractin siguin triangles.

Per tot el què acabem d'explicar, és fàcil entendre que existeixin diversos àmbits dins del context de la informàtica gràfica en els quals cal generar triangulacions. Els principals són la interpolació de funcions, la reconstrucció de superfícies, la simplificació de malles i la facetització de superfícies. Si bé tots aquests problemes difereixen tant en el tipus de dades del qual parteixen com en el seu objectiu, en tots ells apareix la necessitat de produir una triangulació, ja sigui com a pas intermig o com a producte final. A continuació descriurem breument cadascun d'aquests problemes i veurem per a què usen les triangulacions.

L'objectiu de la interpolació de funcions és aconseguir una superfície (o conjunt de pedaços) que approximi el més exactament possible una funció donada. La funció que es vol interpolar habitualment és una funció univaluada, i per aconseguir la superfície interpoladora el procés que se segueix comença per mostrejar la funció en diferents punts, amb el què s'obté una sèrie de coordenades dels punts en el pla i l'alçada de cadascun d'ells. El

següent pas consisteix en aconseguir una triangulació d'aquests punts, la qual es farà servir per ajustar la funció original per pedaços triangulars (splines, generalment). Cal, per tant, aconseguir que la triangulació sigui tal que ens permeti interpolar el més exactament possible la funció original. Veiem que en aquest cas la triangulació s'utilitza tant sols com a estructura de dades auxiliar. Alguns treballs realitzats en aquesta àrea són [Law77], [DS89] i [QS91]

Un segon àmbit on es fan servir les triangulacions és la reconstrucció de superfícies, la finalitat del qual és obtenir un model informàtic d'un objecte o terreny, partint d'un núvol de punts. Les dades d'entrada (el núvol de punts) s'hauran obtingut prenent mostres, ja sigui digitalitzant el cos o mesurant l'alçada del terreny, i de vegades també inclouen informació referent a la normal en els punts mostrejats. D'altres cops, enlloc de disposar d'un conjunt de punts, les dades d'entrada poden ser un model de vòxels. El model informàtic que s'obtindrà pot ser tant un model de superfícies com directament un model facetat, però en el primer cas, com també ocorre en el cas de la interpolació de superfícies, es sol calcular una triangulació del núvol de punts com a model intermig. D'entre els mètodes que obtenen un model facetat, podem distingir dos grups d'algorismes que resolen aquest problema: la reconstrucció per llesques (*tiling*), consistent en la reconstrucció i posterior unió de contorns (o llesques) consecutius de l'objecte que es reconstrueix [Boi85], i els mètodes directes, el més conegut dels quals és probablement l'algorisme de *marching cubes* [LC87], que generen una triangulació partint de models voxelitzats. Com a mètodes que s'ocupen d'obtenir un model de superfícies, podem citar [SFBHD86], [HDD<sup>+</sup>93] i [KL96].

En el cas de la simplificació de malles, les triangulacions són tant el model d'entrada de les dades com el de sortida. Sovint, la malla que resulta un cop reconstruïda una superfície a partir d'un núvol de punts, té l'inconvenient de contenir un nombre molt elevat de vèrtexs, la qual cosa la fa massa costosa de tractar algorímicament. El problema de la simplificació de malles rau en trobar una segona triangulació més reduïda que l'original tal que representi aproximadament el mateix objecte. La majoria de treballs que tracten aquest problema parteixen de la triangulació inicial de l'objecte que tracten i van eliminant aquells vèrtexs que estan situats en les regions menys curvades de la seva superfície [HaZ91, SZL92, Ham94, ScR94]. Aquest sistema implica obtenir una mesura de la curvatura de la superfície així com un mètode per a re-triangular els forats deixats pels vèrtexs suprimits i per fer-ho s'utilitzen condicions, sovint heurístiques, per a garantir que es conserva la topologia de l'objecte, qüestions en les quals difereixen les diverses propostes. L'algorisme presentat en [HDD<sup>+</sup>93] es pot considerar més general, atès que a part de suprimir vèrtexs permet també afegir-ne de nous o intercanviar arestes; cadascuna d'aquestes modificacions es realitza sempre que es decremanti el valor d'una certa funció d'energia definida sobre la triangulació, la qual té en compte tant el nombre de vèrtexs com



l'aproximació a la malla original. Un enfoc bastant diferent és el proposat en [Tur92], atès que es basa en situar tants nous vèrtexs com es desitgin sobre la superfície de l'objecte que es vol simplificar de forma que estiguin ben distribuïts, per la qual cosa l'autor usa una funció d'atracció/repulsió entre els punts, i garanteix alhora que la topologia del model es manté.

El problema de la facetització de superfícies, dins del qual recau l'estudi d'aquesta tesi, consisteix en obtenir una poligonalització que approximi la superfície original a partir de la seva representació matemàtica exacta. Aquest és un pas previ que habitualment cal fer quan es vol treballar amb un model més senzill de la superfície, per simplificar el seu tractament, com seria el cas que es volgués visualitzar la superfície en temps real. Podem subdividir aquest problema en tres altres, depenent de la representació matemàtica de la superfície original, segons es tracti de la forma implícita, la paramètrica o bé d'una funció univaluada. Existeixen nombrosos treballs que tracten cadascun d'aquests problemes, no obstant, la diferent naturalesa i propietats matemàtiques entre les diverses representacions fa que, si bé els principis usats en els tres casos siguin bastant semblants, els teoremes i, conseqüentment, els algorismes que se'n derivin no puguin ser vàlids per al tractament generalitzat dels diferents tipus de superfícies. D'entre els treballs que tracten la facetització de superfícies implícites citem [Rip90], [Vel90], [AG87], [Bro91], i algunes referències per a les funcions univaluades són [Omo89], [Bro91]. Atès que el problema de la facetització de superfícies paramètriques és el que tracta aquesta tesi, hem dedicat una secció a part per descriure els treballs més representatius que se n'ocupen.

## 2.2 Facetització de superfícies paramètriques

El problema que tracta aquesta tesi és el de la triangulació de superfícies paramètriques retallades, és a dir, l'obtenció d'una triangulació que approximi de forma prou acurada una superfície (o conjunt de superfícies) de la qual tenim una representació paramètrica. A més a més, pretenem que la triangulació que obtinguem tingui en compte factors d'optimalitat referents tant al nombre de vèrtexs com a la forma dels triangles que la componen.

Una aproximació d'aquest tipus és probablement la manera més fàcil d'operar amb les superfícies retallades. Una gran quantitat de problemes i tests relacionats amb les superfícies, des del càlcul de l'àrea fins a la visualització realista, passant per la detecció de col·lisions i la mecanització, es poden resoldre, com a mínim de forma aproximada, fent servir una triangulació de la superfície enlloc d'haver de manegar la geometria exacta. Treballar amb un model aproximat d'aquestes característiques té una sèrie d'avantatges que el fan especialment atractiu: en primer, lloc els mètodes que en resulten no són sensibles a la complexitat dels pedaços, és a dir, que ni el nombre de forats i corbes de retallat d'un pedaça ni el grau de la su-

perfície o de les corbes de retallat no compliquen les rutines de processament geomètric (en tot cas, aquestes qüestions tindran incidència directa sobre el nombre de triangles que contingui el model); en segon lloc, els algorismes que treballen amb triangles són molt més eficients i numèricament més estables que els que treballen amb superfícies esculpides; i en tercer lloc, cal tenir en compte que amb un sol cop que es calculi la triangulació de la superfície n'hi ha prou, es pot emmagatzemar la malla i utilitzar-la per als diferents càlculs i operacions que es vulguin realitzar sobre ella, [HL88], [Sch93]. Fins i tot es pot optar per tenir diferents aproximacions de la superfície, obtingudes usant diferents toleràncies, per als diversos usos que se'n vulguin fer (de manera semblant al què es fa en la visualització, que s'emmagatzemen diverses aproximacions d'un mateix objecte amb diferent resolució i s'usen per a representar-lo en funció de la distància a l'observador).

D'altra banda, el principal inconvenient que presenta una aproximació d'aquest tipus és que requereix un gran nombre de triangles, sobretot si es desitja una aproximació molt acurada, si les superfícies presenten regions amb una curvatura elevada o si es volen evitar els triangles llargs i afuats, els quals poden fer perillar la robustesa dels mètodes que els tracten. També es pot argumentar que aplicar un mètode sobre una representació facetada no proporcionarà resultats exactes i que per tant pot ocórrer que no es conegui el grau d'aproximació de les solucions trobades. Una solució a aquest problema és especificar a priori la tolerància amb la qual es vol aproximar la superfície original, i d'aquesta manera poder afitar l'error produït amb l'aproximació requerida. tal com és el cas dels algorismes que desenvoluparem en aquesta tesi.

### 2.2.1 Àrees d'aplicació

Podem distingir tres àrees d'aplicació principals de la facetització de superfícies: l'estéreolitografia, la visualització i els mètodes d'elements finits.

L'estéreolitografia és una de les tècniques d'obtenció ràpida de prototipus (en anglès, *rapid prototyping*, també anomenada *solid hard copy*), consistent en fabricar peces usant un material fotopolimeritzable en un temps relativament curt (típicament unes poques hores de treball, mentre que la peça definitiva pot trigar-ne més de cent [JSSB93]). Aquestes peces s'obtenen a partir d'un model triangulat de l'objecte, atès que les màquines que les produeixen requereixen un format d'entrada específic, per exemple el format STL, el qual només admet triangles com a únics elements bàsics. Per tant, el conjunt de triangles que se'ls ha de proporcionar com a dades d'entrada cal que defineixin un sòlid tancat. A més, la triangulació ha de ser conforme <sup>1</sup> i tan ajustada al sòlid original com sigui possible.

Una de les principals àrees de treball de la informàtica gràfica és la vi-

---

<sup>1</sup>Per a una definició formal de conformitat d'una malla vegeu la secció 2.4

sualització. Com ja hem dit, molts dels algorismes de visualització estan pensats únicament per representar cares planes, tant és així que els acceleradors gràfics funcionen amb la màxima eficiència quan els elements que se'ls proporciona són triangles. És, per tant, perfectament comprensible que si els objectes que es volen visualitzar contenen superfícies, un dels mètodes més emprats consisteixi en triangular prèviament aquestes cares. Les triangulacions que cal produir en aquest cas és convenient que siguin ajustades a les superfícies originals de tal forma que es pugui apreciar la forma de l'objecte, sense que es notin discontinuïtats desplaents a la vista. Com en el cas de qualsevol altre algorisme que treballi amb triangulacions, la visualització pot exigir que els triangles que tracta siguin de forma el més regular possible (per exemple, amb una visualització de tipus Phong, la qual necessita calcular el vector normal a cada cara de l'objecte que representa, podrien aparèixer problemes si els tres vèrtexs que formen una de les cares estiguessin gairebé alineats).

Els mètodes d'elements finits (per abreujar, MEF, o FEM en anglès), són una tècnica de discretització per resoldre equacions diferencials parcials. Molts problemes de l'enginyeria, com són la mecànica de fluids, la termodinàmica, l'elasticitat o molts d'altres, es poden plantejar com problemes d'optimització d'un sistema d'equacions diferencials ([Bak89]). Sovint, la solució exacta del sistema és impossible d'obtenir i cal, per tant, aplicar algun mètode per obtenir una solució aproximada: els MEF en són un d'ells. El mètode requereix que es parteixi d'una malla conforme (possiblement una triangulació) que descomposa l'objecte o estructura que s'està analitzant en petits trossos, anomenats *elements finits*, sobre cadascun dels quals és possible solucionar les equacions diferencials. La solució final s'obté integrant la solució per a cada element finit i resolent el sistema lineal resultant. Aquest procés s'itera fins que es troba que la mesura de l'error d'aproximació produït sigui prou petita. El procés de generació de la malla, habitualment anomenada en aquest context generació de malles (*mesh generation*), és consegüentment un primer pas important. La precisió de la solució que s'obtingui depèn fortament de la qualitat de la malla, mesurada en termes de la forma, el nombre i la mida dels elements que la componen.

La radiositat (*radiosity*) es pot considerar que és un mètode d'anàlisi d'elements finits aplicat a la visualització; com a tal, exigeix la descomposició dels models que tracta en una malla d'elements senzills, habitualment triangles o rectangles, sobre la qual es calcula la distribució de la llum difosa. Resulta per tant bastant obvi que els mètodes de radiositat s'ocupin d'obtenir malles que s'adaptin als càlculs que han de fer (vegeu per exemple [CW95] o [DF96]), i fins i tot existeixen treballs dedicats a l'estudi de la generació de malles específicament pensats per a la radiositat, com ara [Nim92].

## 2.2.2 Solucions proposades en treballs anteriors

En aquesta secció explicarem els treballs més recents que tracten el tema de la triangulació de superfícies paramètriques. Ressaltem que el fet que la triangulació de superfícies sigui un problema que apareix en diversos camps d'aplicació té com a contrapartida que sovint aparèixen treballs sobre el tema en revistes especialitzades en àrees molt diferents, i per tant resulta difícil de recollir-los tots. A aquest entrebanc, cal afegir-n'hi un altre: com que es tracta d'un tema d'investigació en plena expansió, durant la redacció d'aquesta tesi han anat apareixent bastants nous treballs i propostes d'algorismes de triangulació de superfícies. Degut a aquestes dues qüestions, és possible que el lector pugui trobar a faltar alguna proposta en concret en la descripció que tot seguit presentarem de propostes anteriors. No pretenem que aquesta secció sigui un compendi exhaustiu de tots els treballs sobre triangulació de superfícies paramètriques, sinó que tant sols ens hem ocupat d'aquelles propostes que són més properes al nostre enfoc, ja sigui perquè provenen de l'àrea de la informàtica gràfica o perquè comparteixen algun aspecte en comú amb les propostes que desenvoluparem al llarg d'aquesta tesi.

Els primers treballs que tracten el tema de la facetització de superfícies provenen del camp dels elements finits i de la visualització. Pel què fa als mètodes d'elements finits, se'n pot trobar un bon resum en [HL88]; tot i que des de la seva publicació han aparegut molts d'altres treballs referents a la generació de malles, alguns dels quals no estan específicament enfocats per als mètodes d'elements finits, la classificació dels mètodes que s'hi fa continua essent vàlida. Un altre article que recull les principals propostes en aquest camp és [Bak89], i actualment qualsevol llibre dedicat als MEF i també els de radiositat solen dedicar un capítol específic al tema del mallat (per exemple, [CW95]).

Els objectius que es proposen els diferents algorismes que presentarem varien segons el camp del qual provinguin. Si bé els primers treballs estan enfocats únicament cap a una sola àrea d'aplicació, progressivament es van anar identificant els problemes comuns a les diferents àrees i, en conseqüència, les similituds entre les diferents solucions proposades. La facetització de superfícies paramètriques actualment és un problema que es pot enunciar independentment del camp d'aplicació; la majoria de treballs actuals es proposen complir els requisits de les diferents àrees. Podem resumir aquests requisits en els següents punts:

- La facetització ha de permetre aproximar un conjunt de superfícies lligades per relacions de veïnatge, sense que es produeixin forats entre els elements plans d'una i altra superfície. En altres paraules, la facetització global ha de ser conforme.
- La facetització ha de ser una aproximació fidel del model original. Una

forma és admetre com a paràmetre de l'algorisme la tolerància amb què es vol aproximar la superfície original.

- El nombre d'elements generats convé que sigui reduït.
- La forma dels elements ha de ser el més regular possible.

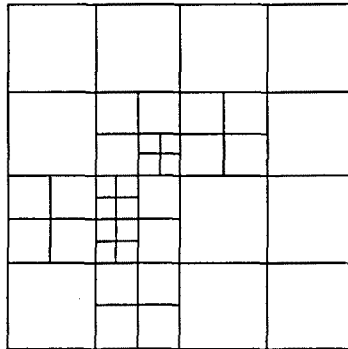
Conjuntament, el segon i tercer requisit impliquen una altra propietat sobre la facetització que es genera: la seva capacitat d'adaptació. Una facetització *adaptable* és aquella en la qual la mida dels elements que la componen és variable. Habitualment, la mida dels elements d'una facetització adaptable depèn de la curvatura de la superfície original o, en el cas que el camp d'aplicació sigui l'anàlisi d'elements finits, també pot dependre de la variació de la magnitud que s'estudia: en les zones més curvades els elements seran petits, mentre que en les zones més planes o en aquelles que la magnitud estudiada presenti poques variacions els elements seran més grans. En el cas que l'àrea d'aplicació sigui la visualització, les condicions que determinen la mida dels triangles generats poden també incloure la distància a l'observador (els triangles poden ser més grans com m'és allunyats de l'observador) i el fet els triangles siguin propers a un perfil de la superfície que es visualitza (per tal de minimitzar els efectes de tipus *aliasing*).

## Mètode de von Herzen i Barr

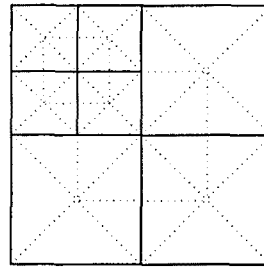
[HB87]

En aquest article, els autors presenten un mètode per a la triangulació de superfícies paramètriques orientat a la visualització. Com en el nostre cas, la triangulació que obtenen aproxima la superfície amb una certa tolerància prefixada. No obstant, la fórmula que relaciona aquest valor de la tolerància amb la mida dels triangles no utilitza criteris de la curvatura de la superfície, sinó que es basa en una condició de Lipschitz sobre les primeres derivades. A partir d'aquesta condició, construeixen un quadtree en espai paramètric per a cada pedaç que té la particularitat de ser restringit, el qual ens permet construir la triangulació de forma senzilla. Un quadtree restringit és aquell que compleix que dos nodes terminals qualssevol que siguin veïns tenen la mateixa mida o bé l'un és el doble de gran que l'altre (vegeu la figura 2.1). El fet que el quadtree sigui restringit permet obtenir fàcilment una triangulació que sigui conforme. La subdivisió del quadtree no sols ve regulada per la condició de Lipschitz, sinó que també caldrà subdividir més els nodes en aquelles regions de la superfície properes a un perfil o bé a una intersecció amb alguna altra superfície. Els autors també apunten la possibilitat de tenir en compte la variació de les normals dels triangles i de les tangents de la superfície com a criteris de subdivisió del quadtree, la qual cosa equival a analitzar la seva curvatura. Un cop s'ha generat el quadtree, es divideixen

els nodes en triangles, es calculen les seves coordenades en espai euclidià i es visualitza la triangulació resultant.



Quadree restringit



Forma de subdividir els nodes

Figura 2.1: Mètode de Von Herzen i Bar

Com a crítiques a aquesta primera proposta, podem dir que no tracta els pedaços retallats i que, per tant, no obté una triangulació conforme del conjunt de superfícies, la qual cosa queda justificada pel fet que l'algorisme està pensat per a la visualització de superfícies; a més a més, no tenen en compte ni el nombre de punts ni la forma dels triangles resultants.

### Mètode de Rockwood, Heaton i Davis

[RHD89]

Els autors presenten un algorisme per a la triangulació de superfícies paramètriques retallades, orientat també a la visualització. Parteixen de superfícies representades en forma de producte tensorial (NURBS, Hermite, polinòmiques, ...) i les transformen en pedaços de Bézier retallats limitats per corbes tancades i sense forats. Seguidament, calculen quina és la mida del pas paramètric per cada corba i superfície en funció de la projecció perspectiva de la visualització per tal que l'error comès en discretitzar no superi un valor de tolerància proporcionat per l'usuari. El tipus de triangulació que fan obliga a dividir cadascuna de les corbes de retallat en segments  $uv$ -monòtons (estrictament creixents en alguna de les dues direccions del pla paramètric) limitats pels seus punts extrems (màxims i mínims) en espai paramètric. Utilitzant les mides dels passos calculades, tessellen les regions interiorment en rectangles i connecten el resultat amb les corbes  $uv$ -monòtones mitjançant triangles (vegeu la figura 2.2). Com en el mètode anterior, per obtenir la triangulació final només cal projectar cadascun dels punts des de l'espai paramètric a l'espai imatge, avaluant les seves coordenades segons la funció que defineix la superfície.

Tot i que tracta superfícies retallades, aquest mètode no té en compte el

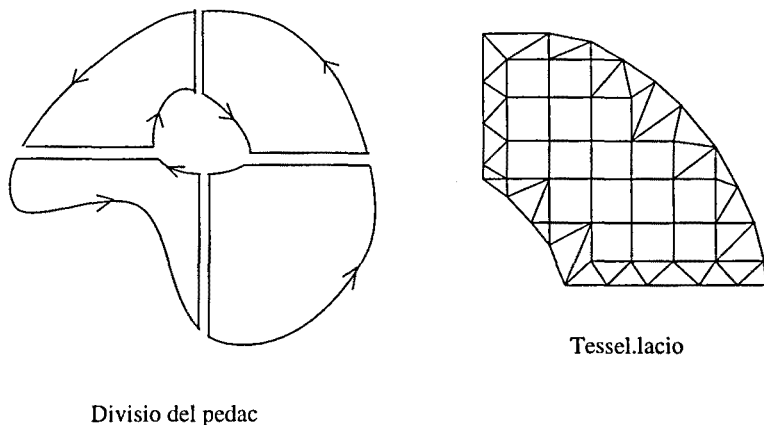


Figura 2.2: Subdivisió dels pedaços en regions simples tancades i tessellació obtinguda, seguint el mètode de Rockwood, Heaton i Davis

veïnatge entre pedaços a l'hora de generar una triangulació conforme, i a més no és adaptatiu (els límits que s'obtenen són globals per a tot un pedaç). Si bé la forma dels triangles interiors serà bona (almenys en espai paramètric), en unir la tessellació interior amb les corbes de retallat es poden generar triangles de forma arbitrària i que a més a més podria passar que arribessin a no complir les especificacions d'aproximar la superfície original amb la tolerància especificada. Alguns autors també critiquen aquest algorisme per la seva complexitat, atès que obliga a calcular extrems relatius de corbes i a dividir els pedaços en regions  $uv$ -monòtones.

### Mètode de Kumar i Manocha

[KM95]

La proposta presentada per aquests autors segueix fonamentalment el mateix esquema que el de [RHD89] pel què fa a la tessellació de l'interior dels pedaços, si bé tracta directament amb superfícies paramètriques retallades representades segons el model de NURBS. La principal diferència és la forma de discretitzar les corbes de retallat: en aquest cas, es poligonalitzen sense haver de partir-les en segments  $uv$ -monòtons, gràcies al fet que la triangulació en espai paramètric permet ésser restringida per un conjunt d'arestes (vegeu l'apartat 2.4 per una definició de triangulació restringida) i, per tant, tracta conjuntament els punts del contorn i els de l'interior del pedaç. D'aquesta forma, l'algorisme resultant és adequat per a manegar el veïnatge entre pedaços, tot i que continua mantenint la resta d'inconvenients de la proposta anterior.

## Mètode de Sheng i Hirsh

[SH92]

La finalitat d'aquest mètode és triangular objectes descrits segons un conjunt de pedaços retallats que formen la seva superfície per tal d'obtenir peces prototipus mitjançant la tècnica de l'estereolitografia. L'algorisme que proposen parteix de pedaços en forma de producte tensorial i treballa íntegrament en espai paramètric. En primer lloc, fan una aproximació lineal de les corbes de retallat. Com que cadascuna d'aquestes corbes limita dos pedaços veïns, cal cosir les poligonals obtingudes dues a dues i mantenir informació dels trams comuns per assegurar la conformitat de la triangulació final. Les poligonals resultants d'aquest procés limiten polígons amb possibles forats en dues dimensions, l'interior dels quals triangulen seguint l'algorisme següent (figura 2.3):

1. Es fa una triangulació restringida de Delaunay del polígon contorn.
2. Es subdivideixen recursivament els triangles fins que tots compleixen el criteri de la curvatura.
3. S'obtenen les coordenades dels punts calculant la seva imatge en espai euclidià.

El criteri de curvatura que obtenen és global per a tot el peça i relaciona la longitud màxima de les arestes dels triangles amb el valor de la tolerància que es desitja. La subdivisió recursiva dels triangles pot obligar a dividir les arestes del polígon contorn i, per tant, la triangulació veïna, raó per la qual cal mantenir informació dels trams de corbes comuns a dos pedaços.

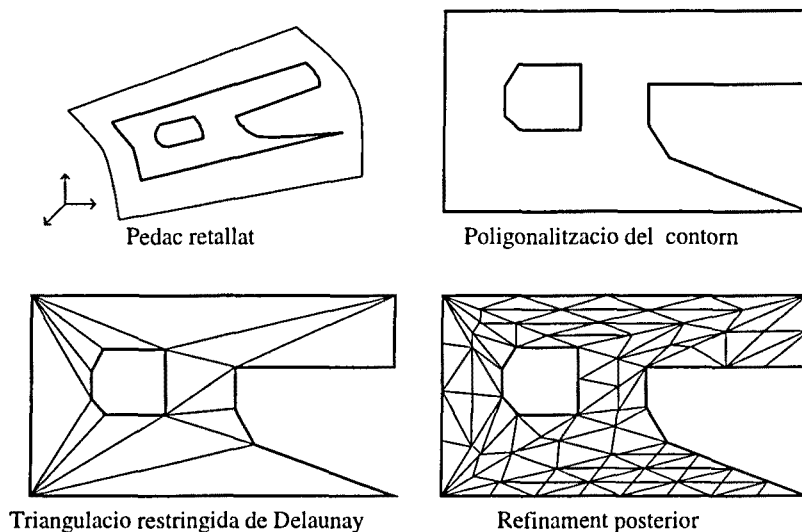


Figura 2.3: Mètode de Sheng i Hirsh



Aquesta proposta és la primera de les descrites que resol el problema de la conformitat entre pedaços veïns, si bé no és adaptable per a cada pedaç (es calcula un únic límit de les segones derivades per a tot el pedaç) ni s'ocupa de la forma dels triangles que obté, la qual depèn fortament de la forma dels triangles de la triangulació de Delaunay inicial.

### Mètode de Piegl i Richard

[PR95]

Piegl i Richard presenten un mètode de propòsit general per a triangular superfícies NURBS retallades força semblant a la proposta anterior. El mètode també obté la triangulació discretitzant primer les corbes de retallat i posteriorment omple l'interior amb triangles utilitzant el mateix criteri que [SH92] de màxima longitud de les arestes dels triangles, però difereix en les fites usades per al calcul dels supremes de les segones derivades. La forma de situar els punts a l'interior dels pedaços és també diferent, en aquest cas es basa en mostrejar una sèrie de corbes horitzontals (isovaluades en espai paramètric) i posteriorment triangular el conjunt de punts obtinguts usant un algorisme, desenvolupat pels mateixos autors per a triangular terrenys, que garanteix la permanència de les arestes de retallat. Els autors justifiquen el fet de calcular, com en el cas anterior, un sol límit global de la curvatura per a cada pedaç adduint que hi ha un compromís entre temps de càlcul i complexitat dels algorismes.

### Mètodes de Shimada i Gossard

[SG92, SG95, SG98]

Els autors presenten dos mètodes molt semblants per discretitzar objectes, ja sigui en dues dimensions, és a dir, per triangular la superfície, com en tres, obtenint una tetrahedrització de l'interior del sòlid. Aquesta proposta està pensada per tal d'aplicar mètodes d'elements finits sobre les malles que obtenen. Els objectes que tracten estan descrits segons les seves fronteres i a més poden existir una sèrie d'elements interiors que restringeixen la malla que cal obtenir. Els autors suposen que existeix una funció de densitat de distribució espacial que determina la distància entre vèrtexs, la qual correspondrà a la variació de la magnitud de la propietat que s'estigui analitzant (calor, torsió, ...). La discretització que obtindran serà, per tant, adaptable i es proposen també com a objectiu que la forma dels elements sigui regular. L'algorisme proposat a [SG92] consisteix en simular la col·locació de bombolles dins la regió que discretitzen, les quals es repellen o s'atreuen segons la distància que les separa i la funció de densitat, seguint l'esquema següent:

1. Situar les bombolles al contorn de la regió.
2. Calcular quantes bombolles caben a l'interior de la regió.
3. Posar les bombolles a l'interior de la regió.

4. Moure les bombolles segons les forces d'atracció/repulsió.
5. Connectar els centres de les bombolles usant una triangulació de Delaunay.

El primer d'aquests passos pot implicar haver d'aplicar recursivament l'algorisme. Per tant, en el cas que es vulgui obtenir una tetrahedrització d'un solid, es començarà per situar bombolles sobre els seus vèrtexs, seguidament es discretitzaran les arestes, les cares i finalment l'interior de l'objecte. La força que fan les bombolles entre sí és inversament proporcional a la funció de densitat, que correspon al radi de les bombolles. L'algorisme no treballa en espai paramètric, la qual cosa obliga a projectar les forces sobre les corbes o superfícies per poder moure-hi les bombolles. La forma regular dels elements s'obté pel fet d'aplicar el sistema de forces entre les bombolles tenint en compte la funció de densitat de distribució (se suposa que serà una funció contínua). Aquest és el pas que fa a l'algorisme més costós. La proposta recollida a [SG95] difereix de l'anterior en què enlloc de calcular a priori el nombre de bombolles que calen segons una fórmula directa, es van situant bombolles de forma incremental, homogèniament distribuïdes, fins que es comprova que recobreixen la zona que es discretitza. A més a més d'aquesta diferència, els autors proposen altres millores heurístiques com el fet de calcular les forces de repulsió i atracció únicament entre bombolles properes, enlloc de fer-ho globalment, amb la finalitat de millorar el cost de l'algorisme. La proposta feta a [SG98] és una altra versió del mateix algorisme que pràcticament no inclou cap variació rellevant.

### Mètode de Chew

[Che93]

La proposta de Chew per a triangular superfícies paramètriques retallades, que té com a finalitat generar una malla d'elements finits, recull la majoria dels requisits que hem descrit: la triangulació respecta les fronteres (és una triangulació restringida), garanteix que la magnitud dels angles dels triangles que s'obtenen està afitada (l'autor afirma que es pot exigir que estigui entre 30 i 120 graus), s'ocupa de minimitzar el nombre d'elements i es pot controlar la densitat dels triangles mitjançant una funció proporcionada per l'usuari. En principi, aquesta funció de densitat està pensada per a controlar la mida dels elements en funció de la propietat que es voldrà analitzar amb el mètode d'anàlisi d'elements finits, però res no impedeix associar-la amb la curvatura de la superfície, de forma que es generin arestes més curtes en zones més curvades. Aquesta proposta està basada en un algorisme per al cas de dues dimensions, presentat pel mateix autor [Che89b]. El mètode per a dues dimensions parteix d'una triangulació restringida de Delaunay inicial per obtenir-ne una altra que compleix la condició que els seus angles estan afitats, és a dir, que la forma dels triangles és força regular – amb

la lògica excepció d'aquells angles petits que formen part del contorn de la regió triangulada. Això s'aconsegueix afegint punts incrementalment en el circumcentre dels triangles que presenten angles que no estan dins del rang desitjat. En el cas que es compleixin certes condicions, el punt que s'afegirà estarà situat al mig d'una aresta. Aquest procés es repeteix fins que tots els angles mal condicionats hauran estat eliminats de la triangulació (el procés garanteix que els nous angles que s'aniran formant seran millors que els que es van eliminant). Es pot demostrar que el nombre de punts que s'hauran afegit és de l'ordre d'un factor constant del nombre de vèrtexs de la triangulació inicial.

La proposta per a la triangulació de superfícies és una generalització per a tres dimensions d'aquest algorisme: en aquest cas, els punts que es van afegint estaran situats sobre la superfície i seran el centre d'una esfera que conté els tres vèrtexs del triangle que es refina.

Com que l'algorisme està pensat per al cas de la discretització d'un sol pedaç, l'únic dels requisits exposats que no compleix aquesta proposta és el referent a la conformitat global. Si bé en principi pot semblar que aquesta proposta es pot ampliar fàcilment per tal que contempli la triangulació d'un objecte limitat per conjunt de pedaços lligats per relacions de veïnatge, això no és cert pel simple fet que el procés de refinament obliga a dividir arestes del contorn, cadascun dels quals és compartit per dos pedaços. Un altre inconvenient és que aquesta generalització a tres dimensions en diversos punts utilitza consideracions de tipus heurístic.

## Mètode de Klein i Straßer

[KS95]

Klein i Straßer presenten un algorisme de propòsit general per a triangular un sòlid representat en un model de fronteres limitat per superfícies paramètriques retallades. La proposta s'ocupa de què la triangulació resultant sigui conforme i estigui com a molt a una distància  $\varepsilon$  de la superfície original del sòlid. L'algorisme comença discretitzant les corbes de retallat i genera una triangulació de Delaunay restringida de l'interior de les cares del sòlid. Un cop obtinguda aquesta triangulació inicial de l'objecte, s'hi van inserint punts d'un en un, en els llocs on es detecta que l'error d'aproximació (mesurat com la distància entre la triangulació actual i la superfície original) és màxim, fins que es detecta que l'error és menor que la tolerància especificada. Per aconseguir això, l'algorisme manté una llista dels triangles i arestes de la triangulació ordenada segons l'error d'aproximació de cadascun d'ells. Atès que l'algorisme treballa incrementalment, no resulta molt costós actualitzar aquesta llista cada cop que s'afegeix un punt a la triangulació, afegint els nous triangles i traient els que deixen d'existir.

El càlcul de la distància entre la triangulació i la superfície original es realitza amb l'ajut d'una primera aproximació de la superfície original (*pre-*

*sampling*): s'imposa que aquesta aproximació inicial estigui com a màxim a distància  $\varepsilon/2$  de la superfície original i es demana també el mateix valor de tolerància,  $\varepsilon/2$ , entre la l'aproximació inicial i la triangulació resultant. D'aquesta manera el problema de trobar el punt en espai paramètric que causa el màxim error d'aproximació es transforma en un problema discret.

El autors aprofiten la naturalesa incremental de la proposta per produir diverses triangulacions d'un mateix objecte amb diferents nivells de resolució: n'hi ha prou amb aturar el procés d'inserció de vèrtexs en un instant qualsevol per aconseguir una triangulació amb una resolució inferior a la demanada (i de la qual se'n coneix el valor).

Malgrat que un dels objectius que enumeren els autors fa referència a la forma dels triangles, la realitat és que l'algorisme no se n'ocupa enlloc; els mateixos autors afirmen que una de les línies de treball futur és millorar l'algorisme per tal que tingui control més fi sobre la forma dels triangles. L'única raó per la qual es podria argüir que la proposta té en compte la forma dels triangles és pel fet que utilitza una triangulació de Delaunay (tot i ser en espai paramètric). La proposta no deixa molt clar alguns aspectes concrets, com el mètode usat per discretitzar les corbes de retallat, o la forma exacta com es calcula l'error d'aproximació i el lloc exacte on s'insereixen els nous punts. Com a contrapartida, cal dir que aquesta és una proposta plenament adaptable, ja que aconseguen que la densitat del nombre de vèrtexs de la triangulació estigui en relació directa amb la curvatura de la superfície, gràcies al fet que fa una anàlisi local de l'error d'aproximació.

### 2.2.3 Comparació de les diferents propostes

Fins ara hem presentat els mètodes més recents i rellevants que s'ocupen de la facetització de superfícies, n'hem enumerat les seves característiques i hem ressaltat els seus inconvenients. En aquesta secció farem una comparació basada tant en els objectius que es proposen com en els resultats i el mètode de treball. Hem resumit aquesta informació amb l'ajut de les taules 2.1 i 2.2.

Si bé els primers algorismes estaven sempre orientades a un camp d'aplicació específic, en els treballs més recents hi ha una tendència cada cop més patent a fer propostes de caire general (o si més no, generalitzables), que recullen els objectius de les diverses àrees. Les propostes provinents de les diferents àrees d'aplicació han anat veient que compartien qüestions en comú, i s'ha acabat identificant, doncs, el problema de la triangulació de superfícies com una nova àrea de treball.

Hem considerat com a dades d'entrada tot allò que cal als algorismes per tal de crear les facetitzacions. Com es pot comprovar, les dades d'entrada necessàries depenen fortament de l'àrea d'aplicació per a la qual està pensat l'algorisme en qüestió: en el cas dels algorismes que s'ocupen de visualitzar superfícies aproximant-les per triangles, les dades d'entrada són un

Article	Àrea d'aplicació	Dades d'entrada	Conformitat de la malla
HB87	Visualització	NURBS (no retallades)	×
RHD89	Visualització	NURBS retallades	eviten <i>cracks</i>
KM95	Visualització	NURBS retallades	✓
SH92	Estereolitografia	Objecte tancat per Béziers retallades	✓
PR95	General	NURBS retallades	✓
SG93, SG95	MEF	Objecte tancat, funció densitat	✓
Che93	MEF (generalitzable)	Pedaç retallat, funció densitat	×
KS95	General	Objecte tancat per Béziers retallades	✓

Taula 2.1: Taula comparativa de les propostes (part I)

pedaç o conjunt de pedaços NURBS; els algorismes que tenen com a finalitat produir una aproximació d'un objecte per trametre-ho a una màquina d'estereolitografia requereixen que el conjunt de superfícies defineixi un objecte vàlid tancat; i en el cas dels algorismes que produeixen malles sobre les quals s'aplicaran mètodes d'elements finits, a més a més de les superfícies originals, els algorismes requereixen que se'ls proporcioni una funció escalar sobre la superfície (funció de densitat), directament relacionada amb la propietat que s'estigui analitzant (propagació de la calor, llum, torsió, etc.), la qual determinarà la mida dels elements produïts. La majoria d'autors no solen explicar com s'obté aquesta funció de densitat, sinó que suposen que els ve donada i que es pot avaluar a qualsevol punt de la superfície, tot i que en alguns casos no sigui immediat obtenir-la (per exemple, pot ser directament la màxima longitud admesa de les arestes dels triangles produïts).

Sota el títol de "conformitat de la malla" hem indicat per a cada mètode si s'ocupa o no d'obtenir una triangulació globalment conforme, respectant les unions al llarg de les zones en què dos pedaços estan en contacte, és a dir, al llarg de les corbes de retallat. Quan les dades d'entrada estan constituïdes per més d'un pedaç, els algorismes solen triangular cada pedaç per separat, per acabar produint una malla conjunta de tota la superfície. Hi ha algoris-

mes que s'ocupen que aquesta triangulació conjunta sigui conforme, mentre que d'altres no tenen en compte aquest aspecte. Els primers algorismes que triangulaven superfícies per a ser visualitzades no solien considerar aquesta qüestió referent a la conformitat de la malla global, i fins i tot arribaven a construir conjunts de triangles tals que en alguns llocs no coincidien de forma contínua entre ells, sinó que hi deixaven forats (*cracks*).

Article	Criteris d'aproximació	Prioritat dels objectius	Nivell d'adaptació
HB87	Tolerància/vis.	Número d'elements	Pedaç
RHD89	Tolerància/vis.	Número d'elements	Pedaç
KM95	Tolerància Longitud arestes	Número d'elements	Pedaç
SH92	Tolerància	Número d'elements	Pedaç
PR95	Tolerància	Número d'elements	Pedaç
SG93, SG95	Funció densitat	Forma triangles, número d'elements	Elements
Che93	Funció densitat	Forma triangles, número d'elements	Elements
KS95	Tolerància	Número d'elements	Elements

Taula 2.2: Taula comparativa de les propostes (part II)

Els criteris d'aproximació utilitzats pels diferents mètodes també varien en funció de l'àrea d'aplicació de la qual es tracti. En el cas de la visualització, el criteri sol ser una tolerància determinada pel grau d'aproximació que es desitgi o la distància a l'observador. De vegades també es fa intervenir un criteri addicional que té en compte el fet que els triangles pertanyin a una zona propera a un perfil de la superfície, projectada segons el punt de vista de l'observador. Els algorismes que generen malles per a MEF solen requerir que l'objecte o superfície a aproximar estiguin discretitzats de forma que la distribució dels elements generats (triangles, quadrats) s'acordi amb la funció de densitat provista com a dada d'entrada. En les demés àrees d'aplicació, el criteri que s'utilitza és un valor de tolerància que limita la distància entre l'objecte original i la discretització resultant.

Alguns autors parlen de la *tolerància de segona espècie*, terme que fa referència a la variació entre els vectors normals a la superfície original i

les normals a la discretització resultant o, de forma equivalent, la variació entre tangents. Cal tenir en compte que si bé l'error de primera espècie es pot definir com la mínima distància de l'aproximació a un punt qualsevol de la superfície original, l'equivalent d'aquesta definició no és vàlida per a l'error de segona espècie, atès que requereix una correspondència entre punts de l'objecte original amb punts de l'objecte aproximat. En tot cas, caldria definir quina zona de la superfície ha estat aproximada per cada triangle resultant i mesurar l'error com la màxima diferència entre la normal d'un triangle i les normals de la zona corresponent de la superfície. Fins ara, no tenim notícia de cap mètode que tingui explícitament en compte aquest altre tipus de tolerància a l'hora de discretitzar superfícies, tant sols [HB87] hi fa referència de forma indirecta.

Al principi d'aquesta mateixa secció hem enumerats els principals objectius dels mètodes de discretització de superfícies. Com acabem d'explicar, l'objectiu referent al grau d'aproximació a la superfície original sol resoldre's tenint en compte el criteri de la tolerància i la qüestió de la conformitat de la malla és un problema resoluble independentment dels altres. En conseqüència, queda llibertat a l'hora de decidir a quins dels altres objectius es dóna precedència, bé a l'optimització forma dels triangles o bé a la minimització del nombre d'elements produïts. En altres paraules, es pot considerar que la qüestió del nombre d'elements és prioritaria, és a dir, que l'objectiu és produir triangulacions amb la mínima quantitat de triangles o vèrtexs possible, mentre que si es considera que l'objectiu prevalent és construir triangulacions que no continguin angles molt aguts o obtusos, es tendirà a obtenir una discretització amb un nombre més elevat de vèrtexs que en el cas anterior, però en la qual els triangles tindran millor forma. Tal com es desprèn de la taula, els mètodes que treballen en els àmbits de la visualització o l'esterolitografia sols tenen en compte el nombre d'elements resultants, només els que s'ocupen d'obtenir malles per als MEF tenen en compte la forma dels triangles i a més a més consideren aquesta qüestió de màxima prioritat.

La darrera columna de a taula 2.1 fa referència a la capacitat d'adaptació dels mètodes de discretització de superfícies: quan parlem de nivell d'adaptació d'un algorisme ens referim al grau fins al qual distingeix diferents zones en les qual situarà triangles de diferent mida en funció dels criteris de tolerància triat. Si primerament tant sols els treballs específicament orientats als MEF eren reament adaptables (fins a nivell d'element), en les darreres propostes es pot observar una tendència a produir algorismes plenament adaptables, probablement deguda a què pretenen ser mètodes d'àmbit general. Hi ha autors que justifiquen el fet de considerar l'adaptabilitat tant sols fins a nivell de peça afirmant que els models d'objectes que habitualment es creen usant sistemes de CAD són tals que els pedaços que limiten la seva superfície no presenten variacions gaire apreciables respecte a la curvatura. Es pot considerar també que el fet de tenir criteris addicionals per a l'aproximació

a la superfície original, com el fet de considerar els perfils en el cas de la visualització, porta en certa manera a produir un algorisme adaptable.

## 2.3 Objectius de la tesi

L'objectiu d'aquesta tesi és estudiar algorismes que permetin obtenir una triangulació d'un sòlid descrit inicialment en termes de les superfícies analítiques que el limiten. Ara bé, segons s'ha vist a la secció anterior, les diferents àrees d'aplicació d'un algorisme d'aquestes característiques impliquen una sèrie de condicions addicionals que cal que compleixin les triangulacions que es generin. Aquestes condicions les hem sintetitzades en els següents punts:

1. El conjunt de superfícies original cal que descrigui correctament un sòlid tancat. Com a conseqüència, la triangulació que s'obtingui també ho ha de fer.
2. La triangulació ha de ser conforme.
3. La triangulació ha d'aproximar el més exactament possible el sòlid original.
4. El nombre de punts de la triangulació ha de ser mínim.
5. La forma dels triangles ha de ser el més regular possible.

Mentre que els dos primers punts fan referència a la topologia de la triangulació que cal obtenir, la resta són condicions sobre la seva geometria i a més, com es pot veure, no són independents entre elles. Passem tot seguit a justificar i explicar més detalladament cadascuna d'aquestes condicions, així com la interrelació entre les tres darreres.

Es veu ràpidament que la tercera condició obligaria, en principi, a obtenir triangles de mida infinitesimalment petita (sempre que la superfície original no fos plana). Cal relaxar aquesta condició de forma que el grau d'aproximació quedi limitat per un valor de tolerància, el qual serà un paràmetre d'entrada dels algorismes que obtindrem:

3. La distància entre la superfície original i la triangulació obtinguda no pot superar el valor de la tolerància. Anomenarem a aquesta tolerància  $\epsilon$ .

Quan parlem de la distància entre la superfície i la triangulació, ens referim a la distància màxima de qualsevol punt dels triangles resultants a la superfície original.

Fem notar que el criteri d'aproximació que hem triat es refereix tant sols a l'error de primera espècie, però no al de segona (o error entre normals, vegeu la secció 2.2.3). Això no obstant, veurem que una de les característiques d'un dels dos mètodes que proposarem és que redueix considerablement l'error de segona espècie, tot i que no n'inclogui cap mesura directa.



Totes les àrees d'aplicació esmentades obliguen a què les triangulacions que s'obtinguin siguin conformes, tant sols en alguns casos es podrien fer servir triangulacions no conformes per a la visualització. La conformitat d'una triangulació — generalitzable per a qualsevol malla poligonal — està formalitzada més endavant, a la secció 2.4.

La condició que les superfícies originals han de descriure un sòlid tancat ve imposada per una sola de les aplicacions de les que hem exposat, l'estereolitografia, atès que és necessari que això ocorri per tal d'obtenir un objecte real mitjançant aquest procés. Aquesta condició implica que les diferents superfícies que delimiten l'objecte encloguin un volum no nul i que aquesta frontera no s'auto-intersecti.

Els algorismes que ens proposem construir hauran d'intentar minimitzar el nombre de vèrtexs de les triangulacions que construeixin atès que qualsevol mètode que treballi amb aproximacions d'aquest tipus, sigui de l'àrea d'aplicació que sigui, tindrà un ordre de complexitat que dependrà d'aquesta magnitud. De forma equivalent, es pot parlar de minimitzar el nombre de triangles, atès que en una triangulació aquests dos nombres estan directament relacionats.

Les dues darreres condicions conjuntament obliguen a què la triangulació obtinguda sigui adaptable, és a dir, que els triangles siguin més grans en les zones més planes de la superfície i més petits en les zones més curvades. La qualitat d'adaptació d'una discretització és un requisit que obliga a analitzar la superfície acuradament, per a determinar el més exactament possible les zones més curvades i poder-les distingir de les que no ho siguin tant. Com a conseqüència, si, com sol ser habitual, el sòlid que es vol aproximar per cares planes està compost per més d'un peça, és preferible analitzar la curvatura de cada regió del peça, enlloc de buscar un únic límit global per a tot el peça. Sols d'aquesta forma podrem obtenir una triangulació adaptable per a cadascun d'ells.

Hem esmentat ja la conveniència que els triangles siguin de forma regular per tal que els algorismes que els tractin siguin el més robusts possible. La regularitat d'un triangle es pot mesurar en termes de la magnitud dels seus angles: optimitzar la seva forma implica maximitzar el mínim dels seus angles, essent el cas òptim un triangle equilàter. En altres paraules, és convenient que els triangles no presentin angles massa aguts ni massa obtusos. En el cas dels mètodes d'elements finits, aquest és un requisit fonamental si es vol que el procés d'anàlisi produeixi bons resultats. Cal tenir en compte que hi ha situacions en què és impossible que la triangulació no presenti angles petits degut a què l'objecte que s'està discretitzant ja té arestes que formen un angle molt agut. Hem d'entendre, doncs, que quan parlem d'optimitzar la forma dels triangles, ens referim a millorar aquells triangles que no tenen les arestes fixes (un dels seus angles correspon a un angle format per dues arestes del cos original).

Tal com hem fet notar ja en comparar diverses propostes ja existents per a la discretització de superfícies (vegeu la secció 2.2.3), els tres darrers dels cinc objectius exposats no són independents, atès que si volem optimitzar-ne un d'ells probablement haurem de relaxar els altres dos. Per exemple, si intentem minimitzar el nombre de vèrtexs, possiblement el resultat sigui una triangulació que contingui triangles de forma no gens regular i que en certes zones no approximi gaire fidelment la superfície original. Tal com ha estat reformulada, la tercera condició no entra en conflicte amb les dues darreres, perquè sols exigeix que la triangulació estigui dins l'interval proporcionat per la tolerància; sempre que es compleixi aquest requisit, es poden optimitzar els altres dos. Queden, conseqüentment, les condicions quarta i cinquena que són incompatibles, en general cal arribar a una solució de compromís. Una forma de resoldre aquest conflicte és fixar una prioritat entre els dos objectius: o bé fem prevaldre la forma dels triangles sobre el nombre de punts, és a dir, preferim una discretització amb molts triangles però de forma regular, o bé prenem la prioritat contrària i entenem que la forma dels triangles és un requisit menys important que el fet de tenir pocs vèrtexs. Una altra possibilitat és fer quelcom semblant al que hem fet en reformular la tercera condició, imposant que la forma dels triangles estigui dins d'uns marges. Podem, per exemple, limitar l'angle mínim que desitgem i buscar el nombre mínim de punts que calen per tal que els angles no superin aquest valor. En el nostre cas, hem considerat prioritària la minimització del nombre de punts, però sense oblidar la qüestió referent a la forma dels triangles.

## 2.4 Terminologia

En aquesta secció farem una sèrie de definicions i fixarem la nomenclatura que utilitzarem pel desenvolupament d'aquesta tesi. Alguns d'aquests conceptes ja han estat usats a les seccions precedents, si bé no han estat definits formalment.

**Definició 1 (Graf).** Un graf és un parell  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  format per un conjunt de vèrtexs  $\mathcal{V}$  i un conjunt d'arestes  $\mathcal{A}$  que uneixen vèrtexs de  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{A} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ).

Donats dos vèrtexs d'un graf  $V_1$  i  $V_2$ , designarem l'aresta que els uneix com  $V_1V_2$ . Un seguit d'arestes d'un graf  $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_kV_1$  formen un *cicle d'ordre k* sempre que no s'intersectin entre elles, excepte les consecutives, que comparteixen els vèrtexs comuns.

Donats tres vèrtexs  $a, b$  i  $c$ , notarem el triangle que determinen com  $T(a, b, c)$ , i el cercle que passa pels tres punts (o circumcercle del triangle) el notarem com  $CC(a, b, c)$ .

**Definició 2 (Graf planar).** Direm que un graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  en  $\mathbb{R}^2$  és planar si es compleix que:

1. per cada aresta  $ab \in \mathcal{A}$ ,  $\overset{\circ}{ab} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ , i
2. per cada parell d'arestes  $ab \neq cd$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\overset{\circ}{ab} \cap \overset{\circ}{cd} = \emptyset$ .

**Definició 3 (Graf connex).** Un graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  és connex si el conjunt d'arestes  $\mathcal{A}$  forma un conjunt connex i tot vèrtex de  $\mathcal{V}$  té alguna aresta associada dins  $\mathcal{A}$ .

**Definició 4 (Triangulació).** Una triangulació és un graf connex  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  tal que tota aresta de  $\mathcal{A}$  és d'algun cicle d'ordre tres. Anomenarem als cicles d'ordre tres *triangles* o *cares de la triangulació*.

Fixem-nos que tal com acabem de definir-la, una triangulació pot viure en un espai de qualsevol dimensió, tot i que en el nostre cas sempre seran de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$ . Una triangulació queda completament definida enumerant el conjunt de triangles que la componen. Quan parlem de malles, ens referim a la generalització del concepte de triangulació per a cicles de qualsevol ordre.

**Definició 5 (Triangulació conforme).** Direm que una triangulació  $\Delta$  és conforme si es compleix que tot parell de triangles de  $\Delta$  que s'intersecten, ho fan al llarg de tota una aresta comuna o bé en un vèrtex comú.

D'acord amb aquesta definició, la triangulació de la figura 2.4b no és conforme, atès que la intersecció dels triangles  $T_1$  i  $T_2$  és un dels costats de  $T_2$  però no de  $T_1$ . Qualsevol graf planar  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  pot ser augmentat amb un conjunt d'arestes addicionals  $\mathcal{A}'$  fins obtenir una triangulació conforme. Anomenem a aquest graf *triangulació restringida* pel conjunt  $\mathcal{A}$ .

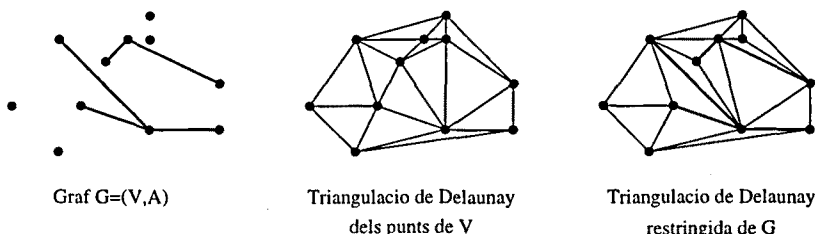


Figura 2.4: Exemples de triangulacions i polígons.

**Definició 6 (Polígon simple).** Un polígon simple és un graf planar  $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que cada una de les arestes de  $\mathcal{A}$  fan part d'un únic cicle. Aquest cicle és el *contorn* del polígon i divideix el pla en una part acotada interior,  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ , i una regió no acotada, l'exterior.

**Definició 7 (Polígon).** Un polígon és un graf format per un conjunt de polígons simples  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N$  tals que

1.  $\overset{\circ}{\mathcal{P}_i} \cap \overset{\circ}{\mathcal{P}_j} = \emptyset, 1 < i < j \leq N$

$$2. \overset{\circ}{\mathcal{P}}_i \cap \overset{\circ}{\mathcal{P}}_j = \emptyset, \quad 1 < i, j \leq N, \quad i \neq j.$$

Anomarem a  $\mathcal{P}_1$  el *polígon exterior* i els demés polígons són *forats*. Tot polígon divideix el pla en dues regions, la interior, que serà  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_1 - \cup_{j=2}^N \{\mathcal{P}_j\}$ , i una no acotada, l'exterior.

**Definició 8 (Triangulació de Delaunay).** Una triangulació  $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$  en  $\mathbb{R}^2$  que sigui conforme és de Delaunay si tota aresta  $ab \in \mathcal{A}$  compleix la  *propietat del circumcerle buit* (respecte al conjunt de punts  $\mathcal{S}$ ), és a dir, que existeix un cercle que passa per  $a$  i  $b$  tal que els demés punts de  $\mathcal{S}$  són exteriors al cercle.

En el cas no degenerat, que exclou el cas en que quatre o més punts del conjunt original siguin co-circulars, la triangulació de Delaunay d'un conjunt de punts donat és única, mentre que els casos degenerats n'accepten d'alternatives. Notem que la condició del circumcerle buit per a les arestes es pot enunciar de forma equivalent per als triangles: per a cada triangle d'una triangulació de Delaunay, l'interior del circumcerle dels seus vèrtexs no conté cap punt del conjunt original  $\mathcal{S}$ .

Habitualment, quan es parla d'una triangulació de Delaunay d'un conjunt de punts  $\mathcal{P}$  s'està considerant la triangulació tal que recobreix el conjunt convex definit per  $\mathcal{P}$ ,  $CH(\mathcal{P})$ . Es pot demostrar que la triangulació de Delaunay d'un conjunt de punts és la que maximitza els angles mínims dels triangles d'entre totes les triangulacions possibles. Una triangulació de Delaunay també es pot entendre com el graf dual d'una *tessel·lació de Voronoi* d'un conjunt de punts. Aquest és un tema ben conegut dins la geometria computacional (vegeu [PS85] o [OBS92], entre d'altres). Una tessel·lació de Voronoi d'un conjunt de punts  $\mathcal{S}$  és una col·lecció de tessel·les que recobreixen el pla cadascuna de les quals consisteix en la zona del pla que és més aprop d'un dels punts de  $\mathcal{S}$  (vegeu la figura 2.5).

**Definició 9 (Visibilitat).** Direm que dos vèrtexs  $a$  i  $b$  d'un graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  són visibles (en  $\mathcal{G}$ ) si el segment  $ab$  no talla cap de les arestes de  $\mathcal{A}$ .

**Definició 10 (Triangulació de Delaunay restringida).** Sigui  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  un graf amb  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  i tal que les arestes de  $\mathcal{A}$  no es tallen, direm que  $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A} \cup \mathcal{A}')$  és una triangulació restringida de Delaunay de  $\mathcal{G}$  si les arestes  $ab \in \mathcal{A}'$  són tals que  $a$  i  $b$  són visibles entre sí i  $ab$  compleix la propietat del circumcerle buit respecte als vèrtexs visibles només des de  $a$  i  $b$  [LL86].

Notarem una triangulació de Delaunay per les sigles DT, i una triangulació de Delaunay restringida per CDT (de l'anglès, *Delaunay triangulation* i *constrained Delaunay triangulation*).

**Definició 11 (Triangulació de Delaunay d'un polígon).** La triangulació de Delaunay d'un polígon és la triangulació de Delaunay restringida per les seves arestes i tal que recobreix el seu interior.

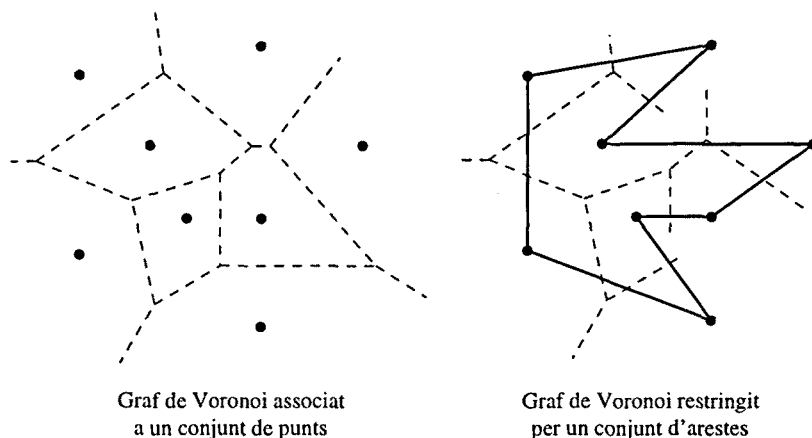


Figura 2.5: La triangulació de Delaunay es pot obtenir com la dual del graf de Voronoi, unint cada vèrtex amb els veïns per formar les arestes.

Donat un polígon i un conjunt de punts interiors a ell, podem formar una triangulació de Delaunay restringida del graf unió, a la qual ens referirem com a la *triangulació extesa* del polígon. Sovint, als punts de l'interior del polígon se'ls anomena *punts de Steiner*. Notem que per a una triangulació qualsevol d'un graf tal com aquest, es compleixen les següents igualtats:

$$\begin{aligned}
 N_t &= 2(N_v + N_f - 1) - N_c \\
 N_a &= 3(N_v + N_f - 1) - N_c
 \end{aligned}$$

on  $N_t$  és el nombre de triangles de la triangulació,  $N_v$  és el nombre total de vèrtexs del graf,  $N_f$  és el nombre de forats del polígon i  $N_c$  és el nombre de vèrtexs del contorn (els que no són interiors). Aquestes relacions són les que ens permeten afirmar que minimitzar el nombre de vèrtexs de la triangulació que volem obtenir és equivalent a minimitzar el nombre de triangles.

**Definició 12 (Triangle admissible).** Donat un valor de tolerància  $\varepsilon$ , direm que un triangle és admissible si la distància de qualsevol punt del triangle a la superfície original no supera  $\varepsilon$ .

**Definició 13 (Triangulació admissible).** Una triangulació és admissible si tots els triangles que la componen també ho són.

## 2.5 Formalització del problema

Ara que hem definit formalment tot el què farem servir, podem reformular el problema que ens ocupa usant la terminologia que acabem d'introduir. Els algorismes que desenvoluparem són tals que donat un conjunt de pedaços retallats i un valor de tolerància, obtindran una triangulació que approximi els pedaços tal que:

1. Sigui admissible segons la tolerància especificada a priori.
2. Sigui conforme; en concret, cal tenir especial compte amb els triangles corresponents a pedaços veïns.
3. Sigui adaptable a nivell d'elements, és a dir, que produeixi triangles de diferent mida fins i tot per a un mateix pedaç en funció de la curvatura.
4. El nombre de triangles que la composin sigui mínim.
5. Tingui en compte, com a criteri secundari, la forma dels triangles produïts.

Al següent capítol veurem quina és la nostra proposta d'esquema algorísmic que complirà aquestes condicions i desenvoluparem els passos inicials que segueix.

## Capítol 3

# Les dades d'entrada. El preprocessament.

### 3.1 Introducció

Tal com vist al capítol anterior, al llarg d'aquesta tesi desenvoluparem algorismes per a la triangulació de superfícies, d'àmbit general però especialment orientats a l'estereolitografia. Partint d'un conjunt de pedaços polinòmics retallats que defineixin un sòlid tancat, obtindran una triangulació conforme, admissible i adaptable de la seva superfície. El criteri prioritari és la minimització del nombre de vèrtexs i secundàriament l'optimització de la forma dels triangles.

Un altre dels objectius que ens hem proposat és que els algorismes que obtinguem siguin adaptables, atès que estan pensats per treballar amb pedaços heterogenis respecte a la seva curvatura. Al llarg d'aquest capítol, desenvoluparem fites tals que limitaran la mida dels triangles que aproximaran la superfície de manera que siguin admissibles. Per tant, caldrà que aquestes fites no siguin globals per a cada pedaç, sinó també adaptables, és a dir, que variïn en funció de la curvatura en cada punt o regió del pedaç.

La qüestió en el qual influeix més que els algorismes estiguin orientats a l'estereolitografia és en la decisió d'imposar que el conjunt de pedaços originals delimitin una regió finita de l'espai, és a dir, es corresponguin amb un sòlid tancat ben definit, altrament no serien un model d'una peça construïble en la realitat. Això no obstant, aquest no és un requisit imprescindible per al tipus d'algorismes que volem obtenir, atès que només caldria afegir una petita modificació per al tractament de les corbes de retallat lliures (aquelles que no delimiten amb un pedaç veí); ben al contrari, haver de tractar el veïnatge entre pedaços complica les operacions que cal realitzar, degut a que cal conservar la condició de conformitat també entre triangles que provenen de triangulacions corresponents pedaços veïns.

Precisament el fet d'haver d'obtenir una triangulació que garanteixi la

conformitat de la triangulació final de tot el conjunt de pedaços és el que ens ha dut a adoptar un esquema algorísmic en el qual es discretitzin primer les corbes de retallat (aproximant-les per poligonals) i posteriorment s'ompli l'interior de cadascuna de les cares amb triangles. Els passos que seguiran els nostres algorismes són els següents:

1. Obtenció de les dades d'entrada i construcció del model B-rep
2. Preprocessament de les dades
3. Càlcul de les fites de la curvatura
4. Discretització dels vèrtexs del sòlid
5. Discretització de les corbes de retallat
6. Triangulació de les cares, en espai paramètric
7. Obtenció de la triangulació final del sòlid en espai euclidià

Com es pot veure, aquest esquema en primer lloc discretitza les entitats topològiques més senzilles, els vèrtexs, i progressivament va obtenint la discretització de les entitats dels nivells superiors, les arestes i cares, fins obtenir la triangulació global de tot el sòlid. És d'aquesta manera que s'assegura la conformitat global de la triangulació obtinguda, atès que el resultat de la discretització a cada pas fixa els punts sobre el contorn del següent nivell. Aquesta mateixa idea de la obtenció d'una malla que aproxima un sòlid començant per discretitzar les entitats geomètriques de menor dimensió i anar avançant cap a les de la següent dimensió apareix també en altres propostes, com per exemple [SG95], [DM90] o [SH92] (vegeu la secció 2.2.2).

Desenvoluparem dos algorismes, totes dues seguint aquest esquema, els quals es diferencien principalment pel tipus de fites de la curvatura que s'obtenen, depenent de si tenen en compte la direccionalitat o no, i com a conseqüència en el mètode que se'n deriva per a la discretització de l'interior de les cares. Ambdues propostes comparteixen els primers passos de l'esquema (obtenció de les dades i preprocessament), que explicarem tot seguit en aquest mateix capítol. La primera de les propostes, la de triangulació isòtropa, queda recollida al capítol 4, i la proposta que té en compte la direccionalitat de les derivades la descriurem al capítol 5.

En aquest capítol presentarem el model que hem triat per a representar els objectes d'entrada, l'estructura de dades principal i exposarem els passos inicials, comuns a tots els algorismes que obtindrem. Hi ha dues transformacions que es poden aplicar a les dades d'entrada abans de discretitzar els objectes i que hem reunit sota el nom genèric de preprocessament de les dades d'entrada: el tractament dels pedaços degenerats i la reparametrització.

El primer pas que cal realitzar durant el preprocessament consisteix en transformar els pedaços degenerats en pedaços retallats. Aquesta és una transformació que cal dur a terme en el cas que algun dels pedaços que limiten el sòlid original sigui degenerat, és a dir, que la seva imatge sigui un pedaça triangular, malgrat que en espai paramètric sigui rectangular. Aquest



procés el realitzem seguint un dels dos algorismes que queden recollits a la secció 3.4. En el cas que l'ordre de suavitat entre el pedaç degenerat i els seus pedaços veïns sigui zero, s'aplica el primer dels algorismes descrits en aquest apèndix; altrament, s'aplica el segon algorisme, per tal de conservar la tangència amb els pedaços veïns. L'algorisme de generació de pedaços degenerats que exposem en aquest capítol ha donat lloc a dues publicacions, un informe de recerca del departament, [VPB95], i també va ser presentat en un congrés celebrat a Chamonix l'any 1997, [VPB97].

El segon pas del preprocessament, la reparametrizació de pedaços, és un pas opcional, que es pot realitzar en el cas que es vulgui millorar la forma dels triangles resultants. Atès que els algorismes que proposarem treballen íntegrament en espai paramètric, les mesures referents a l'optimalitat dels triangles resultants (els seus angles i longituds de les arestes) es realitzen en aquest espai. Això no obstant, quan parlem de l'optimització de la forma dels triangles ens estem referent a l'espai imatge (euclidià). En conseqüència, en el cas que la parametrizació d'un pedaç sigui tal que la relació entre distàncies en ambdós espais sigui molt diferent, convé reparametritzar-lo per tal de millorar la forma dels triangles resultants. Aquest procés queda recollit a la secció 3.5.

## 3.2 El model de fronteres amb cares paramètriques

Els algorismes que ens proposem obtenir partiran d'un objecte representat segons un esquema de fronteres limitat per cares no planes tal com el que hem descrit a la secció 1.3.1. Cadascuna de les cares de l'objecte es correspon amb una superfície paramètrica retallada per una sèrie de corbes sobre la superfície. Aquest esquema de representació de fronteres deixa llibertat sobre la forma com es parametritzen les corbes i superfícies, i coincideix plenament amb el que queda emmagatzemat segons diversos formats de fitxers estàndard de descripció geomètrica, com ara SET, VDA, o IGES. Hem triat el format VDA 2.0 (vegeu la definició d'aquest estàndard a [VDA87]) amb finalitats pràctiques de cara a les implementacions que hem realitzat per tres raons: en primer lloc el domini del seu esquema de representació s'adiu amb el que acabem de descriure, està específicament pensat per representar pedaços retallats; en segon lloc, té la virtut de ser concís, perquè no inclou gaires altres entitats a part de les estrictament necessàries per a representar corbes i superfícies; i, finalment, no presenta les deficiències que tenen d'altres formats estàndards [Pro89]. Les superfícies en VDA són conjunts de pedaços polinòmics paramètrics expressats com a funcions de dues variables

en la forma monòmica:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} u^i v^j \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^3$$

Com que les superfícies viuen en l'espai euclidià tridimensional, els coeficients  $a_{ij}$  són vectors amb tres components, una per a cada direcció coordenada. De cada corba de retallat s'en tenen dues representacions, una com a corba en l'espai euclidià i l'altra com a corba sobre una superfície, expressada en espai paramètric:

$$C^{3D}(w) = \sum_{i=0}^n b_i w^i \quad 0 \leq w \leq 1 \quad b_i \in \mathbb{R}^3$$

$$C^{2D}(t) = \sum_{i=0}^m c_i t^i \quad 0 \leq t \leq 1 \quad c_i \in \mathbb{R}^2$$

de tal manera que per una corba de retallat tal com l'anterior que estigui situada sobre una superfície  $S$  es compleix que la imatge de  $C^{3D}(w)$  coincideix amb la imatge de  $S(C^{2D}(t))$  — tot i que a la pràctica pot ocórrer que les dues corbes siguin lleugerament diferents, bàsicament per problemes de precisió numèrica. Un conjunt de corbes de retallat que formin un cicle tancat delimiten una cara de l'objecte (vegeu la figura 1.7). Les cares, a més a més, poden tenir corbes de retallat tals que formin cicles interns, és a dir, forats.

Notem també que per garantir que la triangulació que obtindrem contiui descrivint un sòlid ben definit, cal assegurar que no hi ha dos fulls de la superfície del sòlid original que estiguin a distància menor que  $2\varepsilon$ , altrament el sòlid discretitzat que obtinguem pot arribar a auto-intersectar-se. En altres paraules, donat un punt de la superfície, la intersecció de la superfície del sòlid amb una bola de radi  $2\varepsilon$  centrada en el punt ha de ser connexa. Aquesta és una condició lògicament esperable, usualment el valor de la tolerància serà molt més petita que aquesta mínima distància.

La versió 2.0 del format VDA inclou camps específicament destinats a representar les relacions topològiques entre les diferents cares, la qual cosa permet arribar a representar sòlids tancats. La relació entre entitats topològiques que es representen en VDA són, de fet, l'equivalència entre semi-arestes, les quals queden definides com a segments de corbes sobre una superfície retallada que es correspon d'altres segments de corba sobre la superfície veïna. A partir d'aquesta senzilla definició, i un cop es tenen emmagatzemades les cares de l'objecte com a superfícies retallades, es pot reconstruir el model de l'objecte i comprovar-ne la seva validesa topològica com a sòlid tancat. La secció 3.3 descriu l'estructura de dades que utilitzarem per

emmagatzemar el sòlid que es discretitza, i a la secció 3.3.1 presentarem una manera senzilla la comprovació topològica que acabem d'esmentar. Abans, però, dedicarem un curta secció a la conversió de les entitats geomètriques a la base de Bernstein-Bézier.

### 3.2.1 Conversió de les corbes i superfícies a la base de Bézier

Com ja hem fet notar a la secció 1.2.1, la forma monòmica no és gaire adequada per representar les corbes i superfícies, i per aquesta raó en el món del CAD s'utilitzen altres formes, com la de Bernstein-Bézier, la qual té propietats geomètriques agradables, és fàcilment tractable algorímicament i és numèricament més estable [FR88]. Per aquests motius, totes les entitats geomètriques de les dades d'entrada (corbes i superfícies) les emmagatzemem en la forma polinòmica de Bernstein-Bézier. Per tant, cal realitzar una senzilla conversió, que no és més que un canvi de base entre una i altra forma polinòmica. Les corbes queden representades com corbes de Bézier i les superfícies com a pedaços de Bézier segons el model del producte tensorial.

Com que la conversió de base de polinomis és una transformació lineal, es pot representar amb una matriu de canvi de base i fer la conversió com una multiplicació de matrius. Seguint [WW88], per convertir un vector  $V_m$  de coeficients d'una corba en la base monòmica en un vector  $V_b$  de coordenades de control de Bézier, es fa servir l'equació

$$V_b = V_m \cdot T_{MB}$$

on  $T_{MB}$  és la matriu triangular de canvi de base. Notem que aquestes matrius depenen del grau del polinomi,  $n$ . Els valors dels elements de la matriu són [WW88]:

$$(T_{MB})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \binom{j-1}{j-i} \binom{n}{i-1} & \text{per } i = 1, \dots, n+1, j = i, \dots, n+1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per transformar un pedaç polinòmic, n'hi ha prou amb transformar cadascuna de les corbes de control (horitzontals o verticals) a la base de Bernstein-Bézier seguint el mateix mètode.

## 3.3 L'estructura de dades principal

L'estructura de dades principal sobre la que treballen els nostres algorismes conté la informació referent a la descripció del sòlid que es discretitza i està organitzada en tres nivells: el topològic, el de la geometria exacta i el de la geometria aproximada (vegeu la figura 3.1). El nivell de la topologia conté la informació de les relacions de veïnatge entre les entitats geomètriques, i emmagatzema tant els apuntadors de la jerarquia descendent (cara  $\rightarrow$  polígon

→ aresta → vèrtex) com els inversos. El nivell de la geometria exacta conté tots els pedaços, corbes i corbes sobre les superfícies que descriuen l'objecte, i el nivell de la geometria aproximada és el que l'algorisme anirà omplint a mesura que vagi discretitzant cadascuna de les entitats geomètriques exactes.

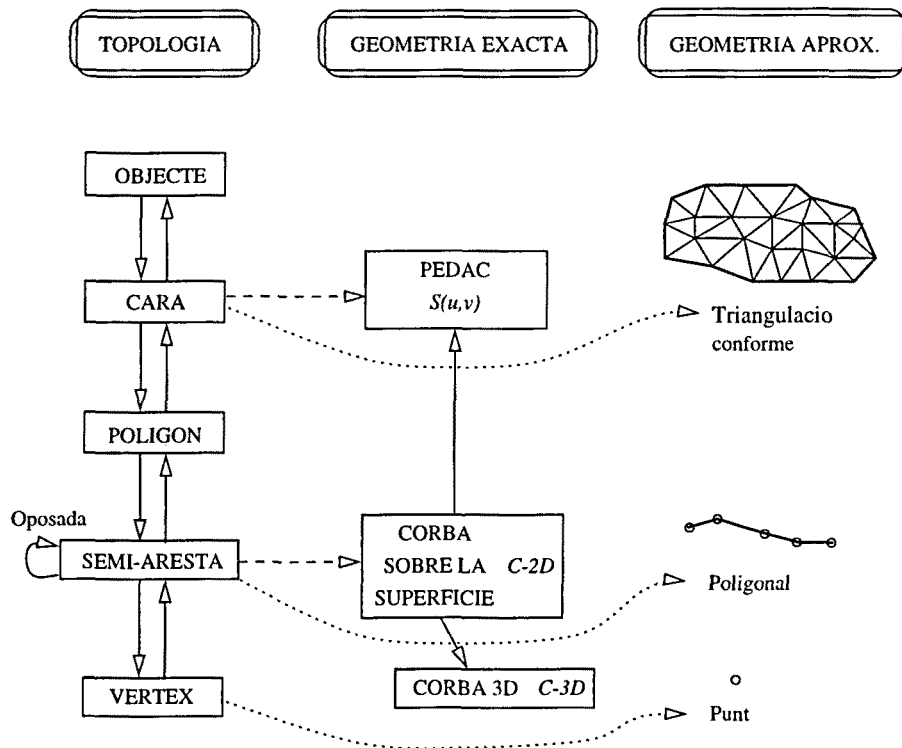


Figura 3.1: Esquema de l'estructura de dades de representació d'un sòlid.

Cadascuna de les entitats de la jerarquia topològica conté la informació següent (figura 3.1):

- Objecte:
  - Llista d'apuntadors a les cares que el componen.
  - Llista de polígons de l'objecte.
  - Llista de arestes de l'objecte.
  - Llista de vèrtexs de l'objecte.
- Cara:
  - Apuntador al polígon exterior de la cara.
  - Llista d'apuntadors als possibles forats que tingui.
  - Apuntador a l'objecte al qual pertany.

- Apuntador al pedaç que suporta la cara.
- Apuntador a la triangulació que l'aproxima.
- Polígon:
  - Llista d'apuntadors a les semi-arestes que el delimiten.
  - Apuntador a la cara que pertany.
- Semi-aresta:
  - Apuntador al vèrtex inicial.
  - Apuntador al polígon que pertany.
  - Apuntador a la semi-aresta dual.
  - Apuntador al segment de corba sobre la superfície que la suporta.
  - Apuntador a la poligonalització que l'aproxima.
- Vèrtex:
  - Llista d'apuntadors a les semi-arestes que hi convergeixen.
  - Apuntador al punt sobre el qual està situat.

A més a més de la llista de cares, un objecte també disposa de llistes addicionals (no representades a la figura 3.1 per no complicar massa l'esquema) als conjunts de polígons, arestes i vèrtexs componen l'objecte. Aquestes altres llistes addicionals són de gran utilitat a l'hora de fer recorreguts i búsquedes sobre aquestes entitats, molt habituals en el modelatge de sòlids (per exemple, sovint cal fer un recorregut de tots els vèrtexs d'un objecte).

Les úniques entitats geomètriques que emmagatzemen apuntadors a d'altres entitats són les corbes sobre superfícies ( $C^{2D}$ ) (vegeu la figura 3.1). En concret, en guarden dos: una que apunta al pedaç sobre el qual estan situades i un segon que apunta a la seva representació directa com a corba en tres dimensions ( $C^{3D}$ ). Per simplificar la representació, obliguem a que cada cara de l'objecte estigui situada sobre un sol pedaç, la qual cosa implica que caldrà dividir les cares originals que estiguin formades per més d'un pedaç. Les semi-arestes poden correspondre's amb una corba completa o bé només amb un segment. L'orientació del sòlid queda fixada pel fet que les semiarestes són orientades: el polígon exterior d'una cara estarà orientat en sentit horari vist des de l'exterior del sòlid i els forats en el sentit invers.

En definitiva, tota aquesta informació permet disposar de funcions d'accés eficients tant de les relacions topològiques com de la geometria associada. Per exemple, donada una aresta, resulta molt senzill obtenir els dos pedaçs de les dues cares que formen l'aresta; o donat un vèrtex, recòrrer (ordenadament) les cares que hi conflueixen.

Fem notar que la topologia d'un model de fronteres d'un sòlid limitat per superfícies difereix de la d'un sòlid que limitat per cares planes en que

el primer pot contenir configuracions impossibles d'obtenir en el model de cares planes, com ara un vèrtex amb dues úniques arestes que hi convergeixin, una cara limitada per una sola aresta o un sòlid limitat únicament per dues cares. Aquestes situacions són habituals en el modelatge quan es realitzen operacions que involucren superfícies curvades, especialment si es realitzen operacions booleanes entre objectes i no suposen cap impediment per als algorismes que obtindrem. En tot cas, demanarem que els sòlids que tractem compleixin l'equació d'Euler que relaciona el nombre de cares ( $C$ ), arestes ( $A$ ), vèrtexs ( $V$ ), forats passants ( $F$ ), anells (*rings*,  $R$ ) i components connexes (*shells*,  $S$ ) d'un sòlid:

$$V + C = A + R + 2(S - F)$$

### 3.3.1 Obtenció de les dades d'entrada. Comprovació de la validesa topològica

Com ja hem vist a la secció 3.2, el format VDA ens proporciona totes les entitats geomètriques necessàries per representar un conjunt de superfícies retallades i també informació topològica que permet relacionar els diferents pedaços entre sí. Per tant, resulta immediat llegir un fitxer en format VDA i anar omplint el nivell de la geometria exacta de l'estructura de dades que utilitzem (vegeu la secció precedent); crear les entitats topològiques i comprovar que el model resultant descriu un sòlid tancat correctament és una operació senzilla que requereix una comprovació addicional que descrivim tot seguit.

Les entitats topològiques que es poden crear directament a partir d'un fitxer en format VDA són les cares, polígons i semi-arestes. A més a més, aquest format també proporciona informació que permet fer coincidir cada semi-aresta amb la seva oposada. Per tant, un cop s'haurà llegit el fitxer es disposarà de gairebé tota la jerarquia topològica, solament mancarà construir els vèrtexs i la relació vèrtex-aresta, és a dir, el conjunt d'arestes que conflueixen a cadascun dels vèrtexs.

Comprovar que el model emmagatzemat descriu un sòlid tancat és, en conseqüència, tant senzill com fer un recorregut per les semi-arestes del sòlid que s'està construint, assegurant-se que a cadascuna li correspon una aresta d'oposada (orientada en sentit contrari), vigilant que no n'hi hagi cap de desaparellada. Fem notar que aquesta comprovació és una mera comprovació topològica, no es tracta d'un test geomètric, el qual implicaria assegurar-se que les diverses representacions geomètriques de cada aresta (les dues corbes sobre la superfície corresponents a cadascuna de les semi-arestes oposades i la corba en 3-D) estan a distància menor que la tolerància demanada,  $\epsilon$ . Aquest tipus de test solament es realitza a mesura que es discretitzen, en una fase posterior, les arestes del sòlid, assegurant-se que els punts mostrejats sobre les arestes estan a distància menor que  $\epsilon$  de les

corbes que representen l'aresta.

Un cop s'hagi comprovat que les superfícies d'entrada descriuen un sòlid tancat, sabrem de segur que l'objecte és topològicament vàlid, i podrem construir els vèrtexs del sòlid i alhora la llista d'arestes que conflueixen a cadascun d'ells. L'algorisme que aconseguim això és el següent:

```
funció ConstrVtxsObj(Obj : BrObjecte) retorna booleà
  {Prec: hem llegit l'objecte i disposem de totes les
    entitats i relacions topològiques excepte els vèrtexs.
    A cada semi-aresta li correspon la seva oposada}
per cada semi-aresta a de Obj fer
  si a no té vèrtex inicial associat llavors
    Crear un nou vèrtex, v
    sa := a
    repetir
      Posar v com a vèrtex inicial de sa
      Afegir sa al final de la llista d'arestes que conflueixen a v
      sa := SegAresPol(PoligonAres(ArestaOposada(sa)))
    fins que sa = a
  fsi
fper
ffunció
```

Les funcions *SegAresPol*, *PoligonAres* i *ArestaOposada* corresponen a les funcions d'accés a l'estructura de dades principal que acabem de descriure al començament d'aquesta mateixa secció.

Fixem-nos que l'algorisme anirà construint les llistes d'arestes al voltant de cadascun dels vèrtexs de forma ordenada, de manera que el sentit de rotació que descriuen és el de les agulles del rellotge vist des de l'exterior del sòlid.

Un cop s'hagi realitzat aquest procés, haurem omplert els nivells topològics i de geometria exacta de l'estructura de dades que descriu el sòlid i estarem en condicions de processar aquesta informació per tal de crear el nivell de la geometria aproximada (és a dir, per discretitzar el sòlid).

### 3.4 Tractament dels pedaços degenerats

Durant el procés de disseny d'una peça, és habitual que sorgeixin pedaços de forma triangular. Pensem, per exemple, en una operació que impliqui un escombrat rotacional d'una corba al voltant d'un eix que passi per un dels seus extrems; és probable que una operació d'aquest tipus generi diversos pedaços de forma triangular, tots els quals convergeixin al punt en qüestió. La manera més adequada de representar pedaços d'aquest tipus és com a pedaços triangulars o bé com a pedaços retallats — representables en

el format VDA. No obstant, diversos sistemes de modelatge comercials representen aquests pedaços com pedaços quadrangulars degenerats, és a dir, com pedaços descrits segons la forma de producte tensorial en els quals tots els punts de control del límit superior coincideixen en l'espai imatge. En una configuració com aquesta, el pla tangent en el punt superior del pedaça en general no hi està definit [Far90], la qual cosa pot induir errors en els algorismes que el tractin. A l'hora de triangular el pedaça, aquesta situació pot fer aparèixer nombrosos petits triangles de forma no gens regular prop del punt superior <sup>1</sup>. Una solució òbvia a aquest problema consisteix en transformar aquests pedaços degenerats en pedaços rectangulars retallats per una de les seves diagonals.

El tractament dels pedaços degenerats es realitza en dos passos: en primer lloc, partint d'un pedaça de Bézier degenerat expressat segons el model del producte tensorial, s'aproxima per en un pedaça de Bézier triangular; i en segon lloc, el pedaça triangular es converteix en un pedaça de Bézier rectangular retallat. La figura 3.2 representa gràficament aquests dos passos.

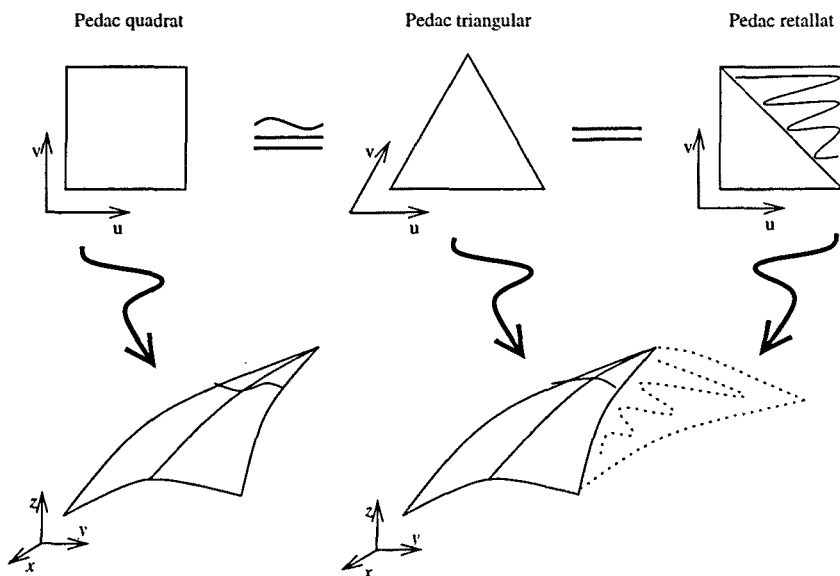


Figura 3.2: Conversió en dos passos d'un pedaça degenerat en un de retallat.

Per aconseguir l'aproximació d'un pedaça de Bézier degenerat en un de triangular, hem desenvolupat dos algorismes diferents. El primer algorisme únicament preserva la continuïtat de primer ordre del pedaça a les seves fronteres, mentre que el segon intenta mantenir també la continuïtat de primer ordre, és a dir, la variació del pla tangent al llarg de les corbes

<sup>1</sup>Això sembla ser el que ocorre a la proposta [KS95]. Vegeu la darrera figura d'aquest article, que representa la triangulació d'una tetera, i observeu la gran quantitat de petits triangles que es produeixen prop del vèrtex superior de l'objecte



frontera. Ambdós algorismes queden recollits en aquesta secció.

Un cop s'ha obtingut el pedaç triangular seguint qualsevol dels dos algorismes, es converteix en un pedaç rectangular retallat per la seva diagonal seguint el mètode descrit per Brueckner a [Bru80]. A diferència del primer pas, aquesta és una conversió exacta, no una aproximació.

L'objectiu del primer pas es pot enunciar com el següent problema: Donat el pedaç degenerat expressat segons el producte tensorial,

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v)$$

amb

$$\mathbf{P}_{0n} = \mathbf{P}_{1n} = \dots = \mathbf{P}_{nn} \quad ,$$

cal trobar el conjunt  $\{\mathbf{Q}_{ijk} \mid i, j, k \geq 0, i + j + k = n\}$  de punts de control d'un pedaç triangular,

$$g(u', v', w') = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{Q}_{ijk} B_{ijk}^n(u', v', w') \quad ,$$

de tal forma que es compleixin les condicions següents:

- $g(u', v', w')$  és una bona aproximació de  $s(u, v)$ , és a dir, que l'error  $\|g(u', v', w') - s(u, v)\|$  pot ser afitat per un valor arbitràriament petit utilitzant un canvi de paràmetres  $(u, v) \rightarrow (u', v', w')$ .
- Les dues superfícies tenen les mateixes fronteres, és a dir,  $g(u', v', w')$  té les mateixes tres corbes de Bézier frontera que  $s(u, v)$ .
- $g(u', v', w')$  és  $\varepsilon$ - $G^1$  respecte a  $s(u, v)$ , vegeu la definició de  $\varepsilon$ - $G^1$  tot seguit.

**Definició 14 (Continuïtat aproximada,  $\varepsilon$ - $G^1$ ).** Direm que una superfície és  $\varepsilon$ - $G^1$  si la discontinuïtat de la normal a la superfície està afitada per  $\varepsilon$  (vegeu [DM92]). La discontinuïtat de la normal a la superfície és el màxim angle entre dues normals a qualsevol punt de les superfícies.

Una superfície  $g$  és  $\varepsilon$ - $G^1$  respecte a la frontera d'una altra superfície  $s$  si el màxim angle entre la diferència de les normals de  $g$  i  $s$  a punts homòlegs al llarg de les respectives corbes frontera (segons un canvi de paràmetres donat) no supera el valor  $\varepsilon$ .

Notem que en general no és possible obtenir un pedaç triangular  $g$  tal que representi matemàticament la mateixa superfície que la definida pel pedaç rectangular degenerat  $s$ . Per garantir-ho, cal que els punts de control  $\mathbf{P}_{0,n-1}, \dots, \mathbf{P}_{n,n-1}$  de  $s$  defineixin un únic pla tangent al vèrtex degenerat.

Per aquesta raó, la tercera condició exigeix continuïtat aproximada  $\varepsilon$ - $G^1$ , enlloc de  $G^1$ .

Els dos algorismes que hem desenvolupat estan basats en el següent lema, el qual prova que cada pedaç de Bézier triangular es pot transformar en un pedaç de Bézier rectangular degenerat.

**Lema 1.** *Sigui  $g(u', v', w') = \sum Q_{ijk} B_{i,j,k}^n(u', v', w')$  un pedaç de Bézier triangular arbitrari. El pedaç pot ser transformat en un pedaç de Bézier rectangular degenerat mitjançant un canvi dels paràmetres.*

*Demostració.* Considerem l'aplicació que transforma el quadrat unitari de l'espai paramètric  $[0, 1] \times [0, 1]$  en el triangle canònic de vèrtexs  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ , en coordenades baricèntriques, definida per:

$$(u, v) \longrightarrow (u(1 - v), v, (1 - u)(1 - v))$$

Aquesta aplicació proporciona una transformació lineal per a cada segment  $[0, 1] \times \{t\}$  del quadrat unitari al segment d'extremes  $(0, t, 1 - t)$  i  $(1 - t, t, 0)$  del triangle canònic. Aquesta és una aplicació bijectiva, excepte per al cas en què  $t = 1$ . Efectivament, el segment  $[0, 1] \times \{1\}$  es transforma en el vèrtex  $(0, 1, 0)$ .

Usant aquesta aplicació, el pedaç de Bézier triangular,  $g(u', v', w')$ , es converteix en un pedaç de Bézier degenerat,  $s(u, v)$ , definit en el quadrat unitari de la següent forma:

$$\begin{aligned} s(u, v) &= g(u(1 - v), v, (1 - u)(1 - v)) = \sum_{i+j+k=n} Q_{i,j,k} B_j^n(v) B_i^{n-j}(u) = \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^{n-j} Q_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right) B_j^n(v) \end{aligned}$$

i per elevació de grau de les corbes fins a grau  $n$  s'obté un pedaç rectangular degenerat:

$$\sum_{i=0}^{n-j} Q_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) = \sum_{i=0}^n P_{ij} B_i^n(u)$$

amb  $P_{0n} = \dots = P_{nn}$ .

Això conclou la demostració del lema 1. □

**Corol·lari 1.** *Donat un pedaç rectangular de Bézier de producte tensorial  $\sum P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$ , si les corbes de control en la direcció  $u$ ,  $\sum P_{ij} B_i^n(u)$ , provenen de les corbes  $\sum Q_{ijn-i-j} B_i^{n-j}(u)$  de grau  $n - j$  per elevació de grau, llavors el pedaç de Bézier de producte tensorial  $\sum P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$  es pot escriure en forma de pedaç triangular  $g(u', v', w')$ , amb  $u' = u(1 - v)$ ,  $v' = v$ ,  $w' = (1 - u)(1 - v)$ .*

Farem servir aquest corollari per construir un pedaça de Bézier triangular a partir d'un pedaça de Bézier rectangular degenerat. El nou pedaça estarà definit fent una reducció de grau d'algunes de les corbes de control del pedaça original.

Sigui  $s(u, v) = \sum_{i,j} \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v)$  un pedaça de Bézier rectangular degenerat tal que  $\mathbf{P}_{0n} = \mathbf{P}_{1n} = \dots = \mathbf{P}_{nn}$ . Definim un pedaça de Bézier triangular,  $g(u, v) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{Q}_{i,j,k} B_{ijk}^n(u', v', w')$ , tal que aproxima el pedaça degenerat. Usant la transformació anterior, el pedaça triangular es pot representar com:

$$g(u, v) = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right) B_j^n(v)$$

Els punts de control  $\{\mathbf{Q}_{i,j,k} \mid i, j, k \geq 0, i + j + k = n\}$  es defineixen amb la finalitat de minimitzar les diferències:

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} \|g(u, v) - s(u, v)\| = \\ & \max_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} \left\| \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) - \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right) B_j^n(v) \right\| \end{aligned}$$

Gràcies a les propietats dels polinomis de Bernstein (vegeu la secció 1.2.1), això equival a definir els punts de control  $\{\mathbf{Q}_{ijk} \mid i, j, k \geq 0, i + j + k = n\}$  intentant minimitzar les diferències:

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \left\| \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) - \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{ijk} B_i^{n-j}(u) \right\| \quad j = 0, \dots, n$$

El problema es redueix, doncs, al problema de la reducció de grau de les corbes de Bézier.

### 3.4.1 Algorisme $C^0$

Aquest primer algorisme utilitza un mètode de reducció de grau que transforma una corba de Bézier de grau  $n$  en una de grau  $n - 1$  conservant els punts extrems. Aquest mètode és el proposat per Watkins i Worsey, el qual, a la seva vegada, està basat en l'aproximació minimax, [WW88].

L'algorisme que aproxima un pedaça degenerat rectangular per un pedaça de Bézier triangular és el següent:

Sigui  $\sum \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v)$  un pedaça degenerat tal que  $\mathbf{P}_{0n} = \dots = \mathbf{P}_{nn}$ . Per a tot  $j = 0, \dots, n$ , apliquem repetidament l'algorisme de reducció de

grau de Watkins-Worsey [WW88] a les corbes

$$\sum_{i=0}^n P_{ij} B_i^n(u) \quad j = 0, \dots, n$$

fins obtenir una corba de grau  $n - j$  amb els mateixos punts extrems.

El resultat és un nou conjunt de  $n + 1$  corbes. La corba  $j$ -èssima és de grau  $n - j$  i té els mateixos extrems que la  $j$ -èssima corba de control del conjunt original. Les noves corbes defineixen un pedaç triangular amb les mateixes corbes frontera que el pedaç original.

L'algorisme de reducció de grau de Watkins-Worsey segueix els següents passos:

1. La corba de Bézier-Bernstein es converteix a la base de Tchebycheff.
2. Es trunca el terme d'ordre més alt d'aquesta base.
3. La corba es converteix altre cop a la forma de Bézier-Bernstein.
4. Els punts extrems de la corba es modifiquen per aconseguir que interpolin els extrems originals.

La corba que s'obté usant el mètode de reducció de grau de Tchebycheff (passos 1 a 3) és la millor aproximació minmax a l'original en el domini [WW88]. Això no obstant, les dues corbes en general no coincideixen en els seus punts extrems. Sovint, com en el cas que ens ocupa, és desitjable forçar la interpolació dels punts inicial i final per tal de mantenir la continuïtat  $C^0$ . Conseqüentment, l'algorisme inclou el quart pas, consistent en situar els punts extrems a les posicions dels extrems originals. L'error comès per la reducció de grau està calculat a [WW88] i nosaltres el farem servir a la secció 3.4.3 per calcular l'error de l'algorisme  $C^0$ .

### 3.4.2 Algorisme $\varepsilon$ - $G^1$

El mètode de reducció de grau de Watkins-Worsey força els punts extrems de la corba a la seva posició original per garantir la continuïtat  $C^0$  (vegeu [WW88]). Per aconseguir-ho, cal moure els punts inicial i final de la corba de Bézier, i per tant no es pot esperar cap tipus de continuïtat de la tangent aprop dels punts extrems.

L'algorisme que presentem en aquesta secció és una millora del que acabem de presentar a la secció 3.4.1, ja que controla la variació del pla tangent al llarg de les corbes frontera del pedaç.

**Lema 2.** *Sigui  $\sum P_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v)$  un pedaç de Bézier degenerat amb  $P_{0n} = \dots = P_{nn}$  i sigui  $\sum Q_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(u', v', w')$  un pedaç de Bézier triangular.*

*Assumint que per cada  $j$ , per elevació de grau de la corba de Bézier  $\sum_i Q_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u)$  s'obté una corba de Bézier de grau  $n$ ,  $\sum_i Q'_{i,j} B_i^n(u)$ ,*

amb les propietats següents:

$$Q'_{0,j} = P_{0,j} \quad \forall j \quad (3.1)$$

$$Q'_{n,j} = P_{n,j} \quad \forall j \quad (3.2)$$

$$Q'_{1,j} = P_{1,j} \quad \forall j \quad (3.3)$$

$$Q'_{n-1,j} = P_{n-1,j} \quad \forall j \quad (3.4)$$

Llavors, ambdós pedaços tenen les mateixes corbes frontera amb el mateix pla tangent al llarg d'elles.

*Demostració.* Les condicions (3.1) i (3.2) impliquen que els dos pedaços defineixen les mateixes corbes frontera. D'altra banda, els plans tangents al llarg de les corbes donades pels valors del paràmetre  $u = 0$  i  $u = 1$  estan definides pels punts de control  $\{P_{0,j}, P_{1,j} \mid \forall j\}$  i  $\{P_{n,j}, P_{n-1,j} \mid \forall j\}$ , respectivament. Per tant, conjuntament les condicions (3.1) a (3.4) els dos pedaços defineixen corbes fronteres amb els mateixos plans tangents.  $\square$

Aquest lema ens porta a la proposta d'algorisme de reducció de grau que tot seguit exposarem, base del mètode d'aproximació  $\varepsilon$ - $G^1$  que estem desenvolupant:

Donada una corba de Bézier de grau  $n$ ,  $\sum P_i B_i^n(u)$ , amb  $n > 3$ , definim una segona corba de Bézier de grau  $n-1$ ,  $\sum Q_i B_i^{n-1}(u)$ , de tal manera que es compleixen les condicions:

- Els punts extrems coincideixen, és a dir,

$$Q_0 = P_0 \quad \text{i} \quad Q_{n-1} = P_n \quad (3.5)$$

- Per elevació de grau de la corba  $\sum Q_i B_i^{n-1}(u)$ , s'obté una corba de grau  $n$ ,  $\sum P'_i B_i^n(u)$ , tal que

$$P'_1 = P_1 \quad \text{i} \quad P'_{n-1} = P_{n-1}$$

és a dir, que  $Q_1$  i  $Q_{n-2}$  han de ser calculats com

$$Q_1 = \frac{n}{n-1} P_1 - \frac{1}{n-1} P_0 \quad (3.6)$$

$$Q_{n-2} = \frac{n}{n-1} P_{n-1} - \frac{1}{n-1} P_n \quad (3.7)$$

La resta de punts de control es calculen pel mètode de mínims quadrats, minimitzant l'expressió

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \left\| \sum_{i=2}^{n-2} \left( P_i - \left( \frac{i}{n} Q_{i-1} + \frac{n-i}{n} Q_i \right) \right) B_i^n(u) \right\| \quad (3.8)$$

De fet, l'algorisme intenta forçar a zero els punts de control de (3.8) imposant

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_2 - \left( \frac{2}{n} \mathbf{Q}_1 + \frac{n-2}{n} \mathbf{Q}_2 \right) = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-3} - \left( \frac{n-3}{n} \mathbf{Q}_{n-4} + \frac{3}{n} \mathbf{Q}_{n-3} \right) = 0 \\ \mathbf{P}_{n-2} - \left( \frac{n-2}{n} \mathbf{Q}_{n-3} + \frac{2}{n} \mathbf{Q}_{n-2} \right) = 0 \end{array} \right\}$$

juntament amb es restriccions (3.6) i (3.7). Aquest sistema es pot veure com tres sistemes lineals sobredeterminats, corresponents a cadascuna de les direccions coordenades,  $x$ ,  $y$  i  $z$ , que comparteixen la mateixa matriu  $A_n$ . Cada sistema té  $n - 3$  equacions i  $n - 4$  incògnites, i es resolen pel mètode de mínims quadrats. Altrament, la matriu  $A_n$  depèn únicament del grau de la corba original  $n$ . Ens referirem a aquest sistema com  $A_n Q = P'$ , on  $A_n$  únicament depèn de  $n$ .

El mètode de reducció de grau aplicat a una corba de Bézier de grau  $n = 3$  utilitza les fórmules (3.6) i (3.7) per calcular  $\mathbf{Q}_2$  com el punt mig dels dos punts que s'han calculat prèviament. En el cas que el grau sigui  $n = 2$ , n'hi ha prou amb prendre els dos punts extrems.

Segons el què acabem d'exposar, l'algorisme  $\varepsilon$ - $G^1$  queda descrit de la següent manera:

Sigui  $\sum_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(u) B_j^n(v)$  un pedaç degenerat amb  $\mathbf{P}_{0n} = \dots = \mathbf{P}_{nn}$ . Per cada valor de  $j$ , considerem la corba de control  $j$ -èssima

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(u) \quad \text{on } 0 \leq j \leq n$$

que és una corba de grau  $n$ . Apliquem el mètode de reducció de grau anterior seqüencialment  $j$  vegades a aquesta corba fins obtenir una corba de grau  $n - j$ . El conjunt de corbes de Bézier resultants descriuen el pedaç de Bézier triangular aproximat.

### 3.4.3 Anàlisi de l'error

En aquesta secció analitzarem l'error produït per l'aproximació d'un pedaç rectangular degenerat per un pedaç triangular de Bézier en cadascun dels algorismes proposats. Tal com hem fet notar, un pedaç rectangular degenerat de Bézier qualsevol no pot ser representat de forma exacta com un pedaç triangular. La finalitat d'aquesta secció és afitar aquest error produït per la conversió entre les dues representacions.

En primer lloc, estudiarem l'error produït pel primer algorisme proposat; en el cas del segon algorisme, hem analitzat dos tipus d'error: el d'aproximació i el de continuïtat. L'error d'aproximació mesura la distància

màxima entre un punt del pedaç degenerat original al punt corresponent del pedaç retallat, mentre que l'error de continuïtat mesura la diferència entre les direccions normals. Aquests dos tipus d'errors són de fet els mateixos que havíem batejat a la secció 2.2.3 com error de primera i de segona espècie.

### Anàlisi de l'error de l'algorisme $C^0$

Siguin  $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{i,j=0,\dots,n}$  els punts de control del pedaç degenerat  $g(u, v)$  i siguin  $\{\mathbf{Q}_{ijk}\}_{i+j+k=n}$  els punts de control del pedaç triangular  $s(u, v)$  obtinguts usant l'algorisme  $C^0$ . L'error d'aproximació, a partir del lema 1, poden ser expressats com:

$$\|g(u, v) - s(u, v)\| = \left\| \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) - \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right) B_j^n(v) \right\| \quad (3.9)$$

$$\leq \max_j \left\| \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) - \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right\| \quad (3.10)$$

L'expressió (3.10) s'obté a partir de (3.9) usant les propietats dels polinomis de Bernstein. D'aquesta manera, l'error d'aproximació queda afitat pel màxim error produït pel mètode de reducció de grau aplicat a les corbes de control del pedaç original.

Aquest algorisme usa el mètode de reducció de grau proposat per Watkins i Worsey. L'error produït en reduir una corba de grau  $n$  és menor o igual que  $2\alpha$ , essent  $\alpha$  el valor absolut del coeficient del terme de grau  $n$  de la corba representada en la base polinòmica de Tchebycheff. Aquest resultat es pot utilitzar per calcular l'error produït en aplicar  $j$  vegades l'algorisme de reducció de grau, és a dir, per afitar

$$\left\| \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) - \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{Q}_{i,j,n-i-j} B_i^{n-j}(u) \right\| \quad (3.11)$$

Donat un pedaç degenerat, l'error d'aproximació es pot reduir a un valor positiu arbitràriament petit bé usant elevació de grau del pedaç original o bé subdividint el pedaç en una sèrie de bandes verticals (triangulars).

La disminució de l'error d'aproximació es basa en els dos fets següents en el cas d'elevació de grau del pedaç original:

1. El nombre de corbes de control creix, però el nombre de corbes de control que contribueixen a l'error d'aproximació per reducció de grau es manté constant. Això és conseqüència de les propietats de l'algorisme de reducció de grau de Watkins-Worsey, atès que no produeix error

quan s'aplica a una corba a la qual s'acaba d'elevat el grau. En conseqüència, donat un pedaç degenerat de grau  $n \times n$  que ha estat elevat de grau fins a  $m \times m$  ( $m > n$ ), l'error d'aproximació és degut a les  $n$  corbes de control més properes al vèrtex degenerat del pedaç, independentment de  $m$ .

2. L'error d'aproximació de les noves corbes de control és menor si s'ha aplicat elevació de grau al pedaç original. Cada vegada que es realitza elevació de grau en una unitat, apareix una nova corba de control, els punts de control de la qual són combinació lineal convexa dels punts de controls originals i del vèrtex degenerat. En conseqüència, les noves corbes de control es calculen a partir d'una corba de grau zero, la qual no produeix error d'aproximació, i de la corba de control anterior. Per tant, l'error d'aproximació disminueix en elevar el grau.

### 3.4.4 Anàlisi de l'error de l'algorisme $\varepsilon$ - $G^1$

L'algorisme  $\varepsilon$ - $G^1$  és una proposta per obtenir un pedaç triangular amb les mateixes corbes frontera que el pedaç original i una diferència afitada entre vectors normals a la superfície. Per això, en aquest cas, a més de calcular una cota de l'error comès per l'aproximació, cal estudiar quina és la diferència entre els plans tangents al llarg de les corbes frontera. Aquesta diferència l'anomenarem *error de continuïtat*.

#### Error d'aproximació

Com en el cas de l'algorisme  $C^0$ , l'error comès per l'aproximació s'obté, usant (3.9) i (3.10), de l'error produït pel mètode de reducció de grau de les corbes. En primer lloc, analitzarem l'error de la reducció de grau utilitzada en aquest mètode. Aquest mètode de reducció de grau està basat en la solució obtinguda per mínims quadrats d'un sistema d'equacions lineals sobredeterminat, forçant les posicions dels punts de control que determinen la posició i la tangència en els punts extrems de la corba.

Sigui  $\sum \mathbf{P}_i B_i^n(u)$  una corba de Bézier de grau  $n$ , amb  $n > 3$ , i sigui  $\sum \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(u)$  la corba resultant del mètode de reducció de grau. Per avaluar l'error d'aproximació, fem una elevació de grau de la segona corba,

$$\|c(u) - c'(u)\| = \left\| \sum_{i=2}^{n-2} \left( \mathbf{P}_i - \left( \frac{i}{n} \mathbf{Q}_{i-1} + \frac{n-i}{n} \mathbf{Q}_i \right) \right) B_i^n(u) \right\| \leq \quad (3.12)$$

$$\leq \max_{i=2, \dots, n-2} \left\| \mathbf{P}_i - \left( \frac{i}{n} \mathbf{Q}_{i-1} + \frac{n-i}{n} \mathbf{Q}_i \right) \right\| \left( 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \right) \quad (3.13)$$

L'expressió (3.13) s'obté a partir de (3.12) tenint en compte que la funció  $\sum_{i=2}^{n-2} B_i^n(u)$  ateny el seu màxim pel valor del paràmetre  $u = \frac{1}{2}$ , i en aquest



cas el seu valor és

$$\left(1 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right)$$

Les diferències  $\| \mathbf{P}_i - (\frac{i}{n}\mathbf{Q}_{i-1} + \frac{n-i}{n}\mathbf{Q}_i) \|$  es poden avaluar a partir de l'error produït pel mètode dels mínims quadrats, donat per

$$\| (A_n (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T - I) P' \| \leq \| A_n (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T - I \| \cdot \| P' \|$$

usant la notació presentada a la secció 3.4.2. La norma de la matriu

$$A_n (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T - I$$

depèn únicament de  $n$  i tendeix asimptòticament a zero quan  $n$  creix. Aquest fet és clarament observable en els exemples mostrats a la secció 3.4.5.

Com en el cas de l'algorisme  $C^0$ , es pot aplicar un preprocessament per tal d'obtenir un error d'aproximació menor que un valor prefixat. El preprocessament es basa en l'elevació de grau del pedaç original. Els mateixos raonaments són vàlids en aquest cas, ja que la reducció de grau d'una corba que acaba de ser elevada de grau no produeix error.

### Error de continuïtat

Tal com hem dit, en el cas de l'algorisme  $\varepsilon$ - $G^1$  es pot estudiar també l'error de continuïtat. Aquest error avalua la diferència entre les direccions normals al llarg de les tres corbes frontera del pedaç.

De les tres corbes frontera del pedaç, cal tractar per separat l'error de continuïtat produït en les que convergeixen al vèrtex degenerat del produït a l'altra corba.

Hem analitzat el cas de la corba  $u = 0$ ; per la corba  $u = 1$  és vàlid un raonament anàleg. Com que les dues corbes frontera dels dos pedaços són la mateixa, la diferència entre les direccions tangents es pot mesurar com la diferència entre les direccions tangents transversals al llarg de la corba.

Sigui  $D_1(v)$  la direcció tangent transversal de la corba frontera i sigui  $D'_1(v)$  la corresponent direcció tangent del pedaç resultant:

$$D_1(v) = \sum_{j=0}^n (\mathbf{P}_{1j} - \mathbf{P}_{0j}) B_j^n(v)$$

Per al nou pedaç, usant les restriccions sobre els punts de control que proporcionen les direccions tangents, tenim:

$$D'_1(v) = \sum_{j=0}^{n-3} (\mathbf{P}_{1j} - \mathbf{P}_{0j}) B_j^n(v) + \sum_{j=n-2}^n (\mathbf{P}'_{1j} - \mathbf{P}_{0j}) B_j^n(v)$$

on  $P'_{1n} = P_{0n}$ . Per tant, la diferència entre les direccions tangents és

$$D_1(v) - D'_1(v) = \sum_{j=n-2}^{n-1} (\mathbf{P}_{1j} - \mathbf{P}'_{1j}) B_j^n(v) = \quad (3.14)$$

$$= (\mathbf{P}_{1n-2} - \mathbf{P}'_{1n-2}) B_{n-2}^n(v) + (\mathbf{P}_{1n-1} - \mathbf{P}'_{1n-1}) B_{n-1}^n(v) \quad (3.15)$$

De (3.15) i gràcies a les propietats dels polinomis de Bernstein, es segueix que l'error de continuïtat al llarg de la corba només és significatiu en un entorn del vèrtex degenerat. Aquesta afirmació la demostrem amb l'ajut del següent teorema.

**Teorema 1.** *Sigui  $\sum \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v)$  un pedaç degenerat de Bézier i siguin  $\epsilon$  i  $\delta$  valors positius qualssevol.*

*Llavors, el pedaç pot ser transformat, mitjançant una elevació de grau, en un nou pedaç  $\sum \mathbf{R}_{ij} B_i^m(u) B_j^m(v)$  tal que el pedaç que s'obté usant l'algorisme  $\epsilon$ - $G^1$  presenta un error de continuïtat més petit que  $\epsilon$ , per tots els valors de  $v$  tals que  $1 - v > \delta$ .*

*Demostració.* L'error de continuïtat produït per l'algorisme  $\epsilon$ - $G^1$  ve donat per l'expressió (3.15), és a dir, en aquest cas és

$$\begin{aligned} & \| D_1(v) - D'_1(v) \| = \\ & = \| (\mathbf{R}_{1m-2} - \mathbf{R}'_{1m-2}) B_{m-2}^m(v) + (\mathbf{R}_{1m-1} - \mathbf{R}'_{1m-1}) B_{m-1}^m(v) \| \quad (3.16) \end{aligned}$$

on els punts de control  $\{\mathbf{R}_{ij}\}_{ij}$  s'obtenen per elevació de grau del pedaç original.

Sigui  $CH$  l'envolupant convexa definida pels punts de control del pedaç original, és a dir, per  $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{ij}$ . De les propietats del procés d'elevació de grau d'una corba de Bézier es dedueix els punts  $\{\mathbf{R}_{ij}\}_{ij}$  estan inclosos en  $CH$ .

És més, degut a l'algorisme  $\epsilon$ - $G^1$ ,  $\mathbf{R}'_{1m-2}$  i  $\mathbf{R}'_{1m-1}$  estan inclosos en aquesta regió convexa. Per tant, les diferències  $\| \mathbf{R}_{1m-2} - \mathbf{R}'_{1m-2} \|$  i  $\| \mathbf{R}_{1m-1} - \mathbf{R}'_{1m-1} \|$  poden ser afitades pel diàmetre de  $CH$ . Per tant,

$$\begin{aligned} & \| (\mathbf{R}_{1m-2} - \mathbf{R}'_{1m-2}) B_{m-2}^m(v) + (\mathbf{R}_{1m-1} - \mathbf{R}'_{1m-1}) B_{m-1}^m(v) \| < \\ & < D(CH) (B_{m-2}^m(v) + B_{m-1}^m(v)) \end{aligned}$$

on  $D(CH)$  és el diàmetre de la regió  $CH$ . Per tant, és suficient provar que existeix un valor  $m$  tal que

$$(B_{m-2}^m(v) + B_{m-1}^m(v)) < \frac{\epsilon}{D(CH)}$$

quan  $1 - v > \delta$ .

Usant les propietats dels polinomis de Bernstein,

$$\begin{aligned} (B_{m-2}^m(v) + B_{m-1}^m(v)) &< m(m-1)v^{m-2}(1-v)^2 + mv^{m-1}(1-v) \\ &\leq m^2(1-\delta)^{m-2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aquesta expressió tendeix a zero quan  $m$  creix, per tant existeix un valor  $m$  tal que aquesta expressió és menor que qualsevol valor positiu.

Com a conseqüència, per qualsevol  $v < 1 - \delta$  tenim

$$\begin{aligned} D'_1(v) &= D_1(v) + \Delta(v) \quad \text{per } v < 1 - \delta \\ \|D_1(v) - D'_1(v)\| &= \|\Delta(v)\| < D(CH)m^2(1-\delta)^{m-2} \end{aligned}$$

I existeix un valor  $m$  tal que  $\|\Delta(v)\| < \epsilon'$ , per qualsevol  $\epsilon' > 0$ . La direcció normal,  $n'_1(v)$ , en el punt de paràmetre  $v$  al pedaç triangular es pot calcular normalitzant

$$T_1(v) \times (D_1(v) + \Delta(v)) = T_1(v) \times D_1(v) + T_1(v) \times \Delta(v) \quad (3.18)$$

Usant (3.17) i (3.18), obtenim la demostració. □

Pel què fa a la continuïtat al llarg de la corba frontera que no convergeix al vèrtex degenerat, l'error ve donat per la diferència entre

$$D_1(u) = \sum_{i=0}^n (\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}_{i0}) B_i^n(u)$$

i

$$\begin{aligned} D_2(u) &= \sum_{i=0}^1 (\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}_{i0}) B_i^n(u) + \sum_{i=2}^{n-2} (\mathbf{P}'_{i1} - \mathbf{P}_{i0}) B_i^n(u) + \\ &+ \sum_{i=n-1}^n (\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}_{i0}) B_i^n(u) \end{aligned}$$

Aquesta diferència val

$$D_1(u) - D_2(u) = \sum_{i=2}^{n-2} (\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}'_{i1}) B_i^n(u) \quad (3.19)$$

i els corresponents punts de control que defineixen  $\mathbf{P}'_{i1}$  han estat calculats minimitzant aquesta diferència. Per tant, l'error pot ser mesurat a partir de l'error produït pel mètode dels mínims quadrats.

### 3.4.5 Exemples

Ambdós mètodes de tractament dels pedaços degenerats exposats han estat inclosos com a part del preprocessament dels pedaços. L'algorisme  $C^0$  s'aplica en el cas que el pedaça degenerat en qüestió estigui unit amb d'altres pedaços veïns amb continuïtat d'ordre zero; en cas contrari, l'algorisme de conversió que es fa servir és el  $\varepsilon$ - $G^1$ .

En la majoria dels casos, l'error que es produeix pel procés de conversió no s'aprecia comparant visualment les superfícies original i final. Amb el propòsit de poder veure aquest error, hem generat dues superfícies, tot i que no siguin casos que habitualment generi un modelador de CAD. Les figures 3.3 i 3.4 mostren aquestes dues superfícies, en les quals els errors produïts es poden apreciar visualment degut a què el pla tangent no està definit al vèrtex degenerat.

El primer objecte, corresponent a la figura 3.3, està compost de diversos pedaços degenerats creats amb una operació d'escombrat rotacional. Hem representat els punts de control d'un dels pedaços, el qual hem visualitzat semi-transparent per tal que es puguin veure els punts de control que estan a la part interior de la superfície. Notem que la superfície original (*imatge superior esquerra*), presenta una zona fosca al voltant del vèrtex degenerat. Aquesta zona és un efecte de l'algorisme de visualització, degut a la definició múltiple de la normal a la superfície a aquest punt. A l'aproximació resultant usant el primer algorisme (*a dalt a la dreta*) s'hi poden observar arestes vives al llarg de les fronteres comunes entre els diferents pedaços, degut a què tant sols es garanteix continuïtat  $C^0$ . A l'aproximació de l'objecte obtinguda amb l'algorisme  $\varepsilon$ - $G^1$  (*a baix a l'esquerra*), es pot veure que aquestes arestes han estat suavitzades, tot i que l'error d'aproximació és més gran que en el cas anterior. Hem elevat el grau dels pedaços originals abans d'aplicar l'algorisme (*a baix a la dreta*). En haver-hi més punts de control que defineixen la superfície, l'error d'aproximació decreix i la continuïtat entre els pedaços veïns millora (les arestes vives apareixen únicament prop del vèrtex degenerat).

La figura 3.4 mostra un altre exemple en el qual alguns dels pedaços degenerats no han pogut ser aproximats gaire exactament, degut a la forta variació de la normal de la superfície al vèrtex degenerat.

La taula 3.1 presenta les cotes dels errors produïts en aplicar els dos algorismes de conversió en un pedaça degenerat de grau 5. En el cas dels errors d'aproximació, s'han calculat els valors per cada corba horitzontal, excepte per la corba frontera (per la raó que no canvia respecte al pedaça original). Tal com es podia esperar, l'error màxim es produeix prop del vèrtex degenerat, a la regió corresponent a la corba  $(n - 1)$ -èssima. També es mostren els errors produïts pels algorismes de conversió després d'elevat el pedaça fins a grau  $5 + k$ . En aquests casos, no es produeix error d'aproximació en les corbes horitzontals 1 fins  $n + k - 3$ , gràcies a les propietats de l'algorisme. En

Elevació de grau ( $k$ )	Algorisme $C^0$	Algorisme $\varepsilon$ - $G^1$	
	Error d'aproximació	Error d'aproximació	Error de continuïtat
0	0.00849	0.09059	0.11071
	0.01172	0.02710	
	0.10415	0.13936	
1	0.00491	0.03147	0.06928
	0.00916	0.01357	
	0.08332	0.09920	
2	0.00278	0.01778	0.05123
	0.00789	0.01042	
	0.06943	0.07886	
3	0.00153	0.00838	0.03796
	0.00731	0.00930	
	0.05952	0.06547	
4	0.00079	0.00430	0.02926
	0.00684	0.00881	
	0.05208	0.05565	

Taula 3.1: Errors produïts pels algorismes de conversió

les demés corbes, l'error d'aproximació usant l'algorisme  $\varepsilon$ - $G^1$  no es mostra donat que és molt petit (menys de  $10^{-7}$  en qualsevol cas).

### 3.4.5

Exemple 1	Algorisme A	Algorisme C <sup>0</sup>
Amb els mètodes de tractament dels pedaçs degenerats, l'error màxim ha estat inclinat respecte a la normal de la superfície al vèrtex degenerat.	0.00000	0.00000
s'aplica en el cas que el pedaç degenerat en el vèrtex sigui un punt amb altres pedaçs veïns amb continuïtat d'ordre zero.	0.00000	0.00000
En la majoria dels casos, l'error que es produeix pel procés de conversió	0.00000	0.00000

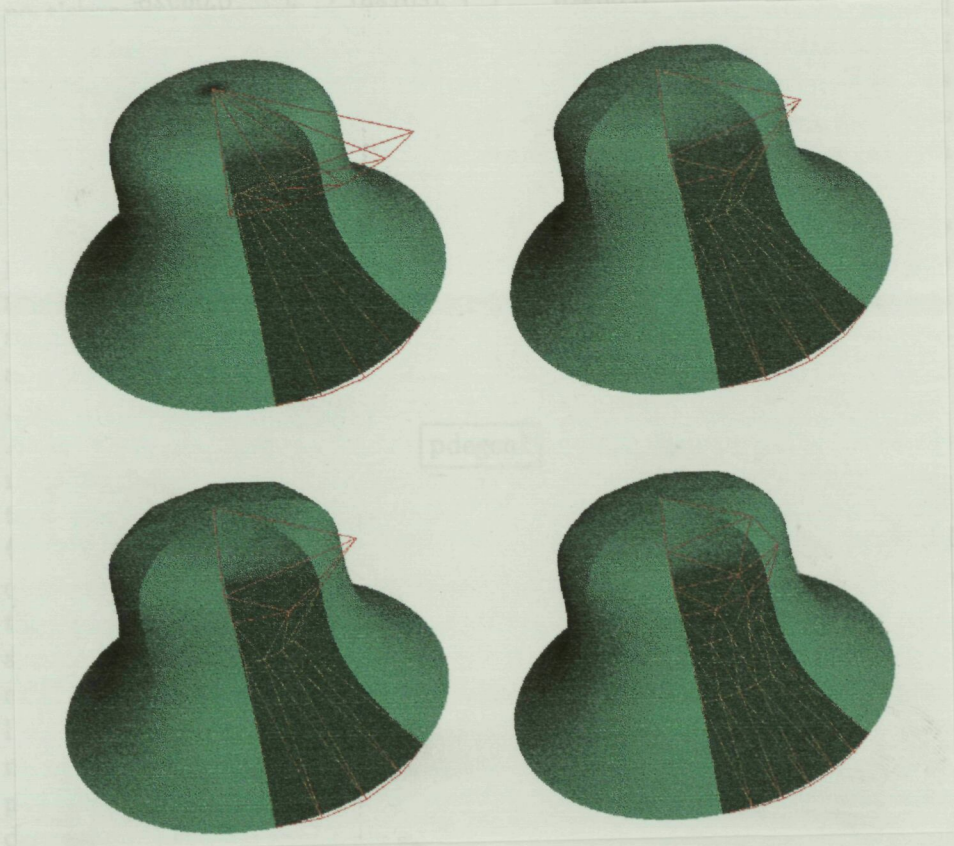


Figura 3.3: Exemple 1 d'aplicació de l'algorisme de tractament de pedaçs degenerats

La taula 3.1 presenta les dades dels errors produïts en aplicar els dos algorismes de conversió en un pedaç degenerat de grau 5. En el cas dels errors d'aproximació, s'han calculat els valors per cada corba horitzontal, excepte per la corba finalera (per la raó que no canvia respecte al pedaç original). Tal com es podia esperar, l'error màxim es produeix prop del vèrtex degenerat, a la regió corresponent a la corba  $(n - 1)$ -èsima. També es mostren els errors produïts pels algorismes de conversió després d'elevat el pedaç fins a grau  $5 + k$ . En aquests casos, no es produeix error d'aproximació en les corbes horitzontals i fins a  $k = 2$ , gràcies a les propietats de l'algorisme. En



3.4. Exemple 2 d'aplicació de l'algorisme de tractament de pedaços degenerats

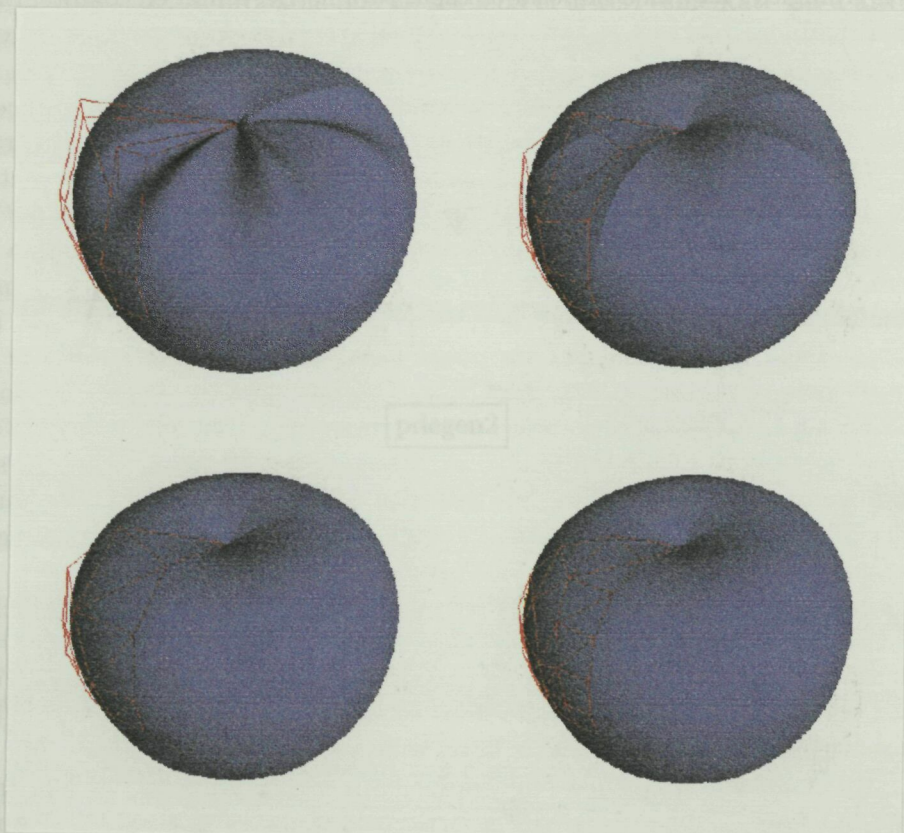


Figura 3.4: Exemple 2 d'aplicació de l'algorisme de tractament de pedaços degenerats

### 3.5 Reparametrizació dels pedaços

Tal com hem explicat a la secció 3.1 i com veurem més endavant, els algorismes que ens hem proposat obtenir calculen la discretització de les diverses cares del sòlid treballant en espai paramètric (pas 6 de l'esquema algorísmic general), i un cop s'hagin obtingut aquestes triangulacions, el pas a l'espai imatge (pas 7 de l'esquema) és directe utilitzant la parametrització de la superfície (vegeu la secció 4.6). En conseqüència, les condicions sobre la forma dels triangles s'hauran d'imposar en espai paramètric, tenint en compte, tant com sigui possible, com es transformaran els triangles en passar a l'espai euclidià.

En els nostres algorismes, els processos que intervenen en la construcció dels triangles i, per tant, determinen la forma que aquests tinguin són tres: en primer lloc, la triangulació de Delaunay, que optimitza, en un cert sentit, els angles d'una triangulació un cop fixada la posició dels vèrtexs de la triangulació; en segon lloc, el post-procés de relaxació, que determina la posició dels vèrtexs de manera que els triangles resultants siguin el més equilàters possible; i en tercer lloc, el mètode de refinament d'arestes, un subproducte del qual és que els punts que s'aniran afegint faran que la forma dels triangles tendeixi a millorar (vegeu l'apèndix A i les seccions 4.5.4 i 4.5.1, on s'expliquen aquests tres processos). Tots ells treballen en espai paramètric i, per tant, tots optimitzen criteris (angles, el fet de ser equilàters, etc.) de la forma dels triangles en espai paramètric. Per tant, s'ha d'intentar que la transformació produïda per la parametrització sigui tal que conservi al màxim les bones propietats de la triangulació.

És un fet ben reconegut que la parametrització de les corbes i superfícies pot ser crucial per a què els algorismes que les utilitzen siguin acurats, eficients o que obtinguin resultats fiables ([Far94]). Per aquest motiu, un bon criteri en el disseny de superfícies és incorporar el màxim possible les característiques geomètriques de la superfície en la parametrització.

En el cas que ens ocupa l'incompliment d'aquest principi pot portar a què en triangular una superfície, la forma dels triangles en espai paramètric sigui molt diferent de la forma en espai imatge. Una gran deformació de l'espai paramètric provocarà que els triangles resultants s'allunyin molt de ser equilàters. És més, la deformació seria especialment greu en el cas que el procés de triangulació no fos adaptable, atès que una parametrització inadequada podria arribar a fer generar un elevat nombre de triangles molt petits en algunes zones de la superfície.

No obstant, aquest principi no sempre és fàcil d'aconseguir, fins i tot en alguns casos és impossible. La forma com estigui parametritzada una superfície depèn tant de l'habilitat del qui la dissenya com dels programes que es facin servir per al modelatge. Sovint, la parametrització és una qüestió desconeguda per a l'usuari; el disseny de superfícies és un tema complicat, i per tant els modeladors intenten presentar-ho de la forma més senzilla



possible. Resulta lògic que es proporциони control a l'usuari únicament sobre aquells elements indispensables, tot evitant-li aquells dels quals es pot prescindir i presenti totes aquestes qüestions de la forma més transparent possible.

Per exemple, si dissenyem un cilindre, és probable que el nombre de pedaços en què quedi parcelada la seva superfície i la seva disposició relativa sigui independent tant de la magnitud del radi de la base com de la seva alçada (vegeu les figures 3.5a i 3.5b). En conseqüència, la parametrització que en resultarà és probable que no segueixi el criteri esmentat. En d'altres casos, com és el de l'exemple c de la mateixa figura 3.5, les característiques geomètriques de la superfície fan que el criteri no sigui possible d'aconseguir, a no ser que es modeli la regió utilitzant més d'un pedaç. Una possible solució a aquest problema és la reparametrització de les superfícies.

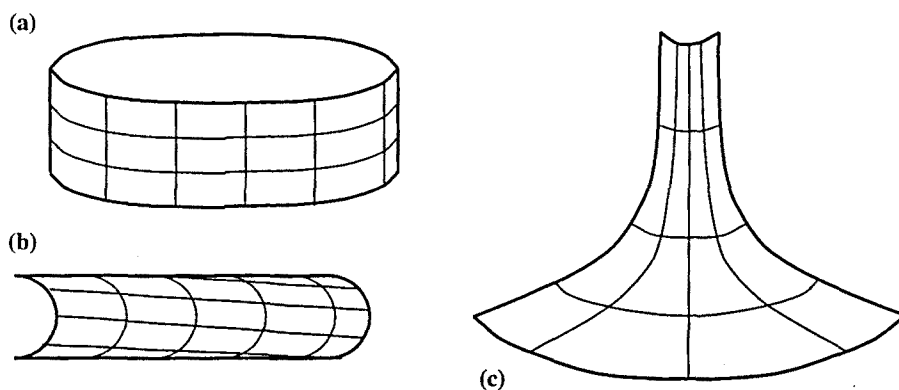


Figura 3.5: Exemples de superfícies la parametrització de les quals pot ser inadequada. Les corbes dibuixades són corbes isoparamètriques equiespaïades.

La nostra proposta és realitzar una reparametrització lineal dels pedaços que limiten el sòlid, global per cada pedaç. Recordem que la reparametrització és un pas opcional del preprocessament, i que és independent de l'algorisme de triangulació que apliquem posteriorment.

**Definició 15.** Donada una superfície paramètrica  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i un difeomorfisme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , anomenarem *superfície reparametritzada* a la composició  $S \circ g$ , i anomenarem  $g$  una *transformació dels paràmetres*.

Fem notar que si  $g$  és una transformació paramètrica lineal, aleshores  $g^{-1}$  també ho és. De fet, imposarem que un canvi de paràmetres conservi el grau de continuïtat de la superfície original. Cal tenir en compte que una reparametrització no canvia la forma de la superfície, sinó només la relació de correspondència entre les distàncies de l'espai paramètric i les de l'espai euclidià.

Una transformació lineal dels paràmetres té l'inconvenient que no solucionarà tots els casos de deformació, però en canvi té l'avantatge de ser senzilla d'aplicar i que no elevarà de grau excessivament les superfícies originals. En concret, una transformació d'aquest tipus millorarà la parametrització de tots aquells casos, bastant freqüents en l'àmbit del modelatge de superfícies, en què la deformació és força uniforme per a tot el pedaç. Continuant amb els exemples que hem donat anteriorment, és probable que millori el primer cas (superfície cilíndrica), però possiblement no aportarà gaire millora per a la parametrització de la superfície del segon cas (superfície de revolució).

D'altra banda, cal considerar que les superfícies amb les quals treballen venen expressades com a pedaços de Bézier, en altres paraules, són superfícies polinòmiques. En conseqüència, hem de limitar-nos a aquelles transformacions que ens mantinguin dins d'aquest domini de representació, és a dir, a transformacions polinòmiques. A més a més, pretenem que la transformació no impliqui un temps de càlcul massa elevat, i que el resultat no siguin pedaços polinomials de grau prohibitiu. Un altre factor a tenir en compte que en reparametritzar un pedaç cal també transformar les corbes que el retallen, i tampoc convé que s'elevi massa el seu grau.

A les següents seccions es concreta la nostra proposta de reparametrització lineal. La secció 3.5.1 descriu la forma com calculem la transformació lineal dels pedaços, la qual s'ha escollit amb la finalitat de minimitzar la deformació paramètrica, i a les seccions següents (3.5.2 a 3.5.4) hi ha el desenvolupament que cal seguir per a obtenir una transformació lineal d'una superfície polinòmica. A la secció 3.5.5 es descriuen les transformacions que cal aplicar a les corbes de retallat, de manera coherent per tal que segueixin limitant la mateixa regió de l'espai.

### 3.5.1 Càlcul de la transformació lineal

Ens referirem a l'espai paramètric original de la superfície com  $(u, v)$ . Parlarem de l'espai paramètric deformat per referir-nos a aquell al qual hem aplicat la transformació de paràmetres, i ens referirem a aquest nou espai com  $(s, t)$ :

$$g(u, v) = (s, t)$$

La superfície corresponent al pedaç original  $S(u, v)$  un cop reparametritzada vindrà donada per  $S'(s, t)$ .

Atès que l'objectiu de la reparametrització és tant sols fer correspondre, fins allà on sigui possible, les dimensions relatives entre l'espai paramètric i l'espai euclidià (espai imatge), podem mantenir inalterada una de les dues direccions de l'espai paramètric, i tant sols modificar amb un canvi lineal l'altra direcció. En aquest cas, hem triat de realitzar el canvi tant sols a la direcció del paràmetre  $u$ , i fer correspondre el segon paràmetre  $t$  amb  $v$ . Així

doncs, la transformació dels paràmetres que desitgem és una transformació lineal la qual podem expressar de la següent forma:

$$\begin{cases} s = Au + Bv \\ t = v \end{cases}$$

on  $A$  i  $B$  són constants triades de tal manera que es compleixi la condició de semblança entre les magnituds en espai paramètric i euclidià, tal com veurem tot seguit. Una transformació d'aquest tipus la podem representar gràficament tal com es pot veure a la figura 3.6.

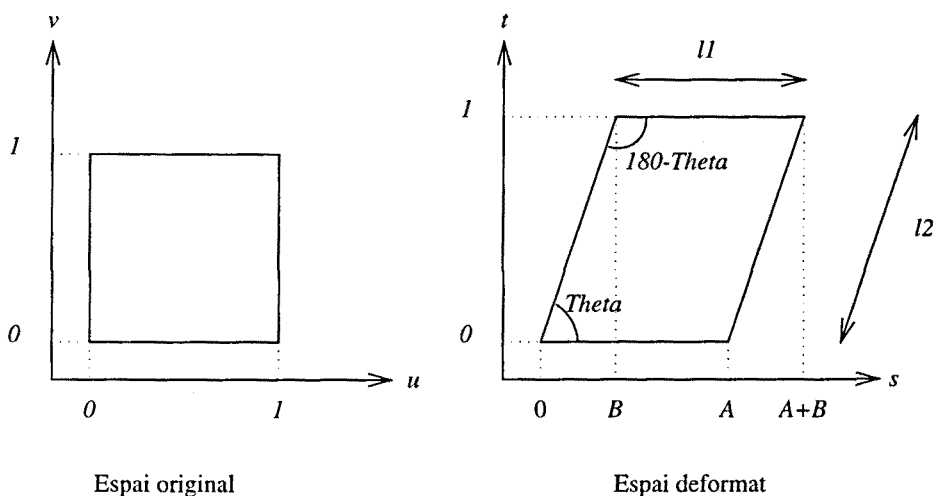


Figura 3.6: Transformació lineal dels paràmetres

Els valors de les constants  $A$  i  $B$  els hem d'escollir tenint en compte tant la concordança entre distàncies en espai paramètric i espai imatge, com també la semblança dels angles en aquests dos espais. Atès que la transformació que realitzem és global per a tot el pedaç, el desenvolupament que hem seguit mesura distàncies i angles entre els quatre punts extrems del pedaç,  $P_a = S(0,0)$ ,  $P_b = S(1,0)$ ,  $P_c = S(0,1)$  i  $P_d = S(1,1)$ .

Aquestes magnituds són les següents (vegeu la figura 3.7d):

$$\begin{aligned} L_1 &= \|P_a P_b\| & L_2 &= \|P_a P_c\| \\ L_3 &= \|P_c P_d\| & L_4 &= \|P_b P_d\| \\ \Psi_1 &= \angle(P_c P_a P_b) & \Psi_2 &= \angle(P_a P_b P_c) \\ \Psi_3 &= \angle(P_b P_d P_c) & \Psi_4 &= \angle(P_a P_c P_d) \end{aligned}$$

Les magnituds que determinen la forma de l'espai paramètric deformat són

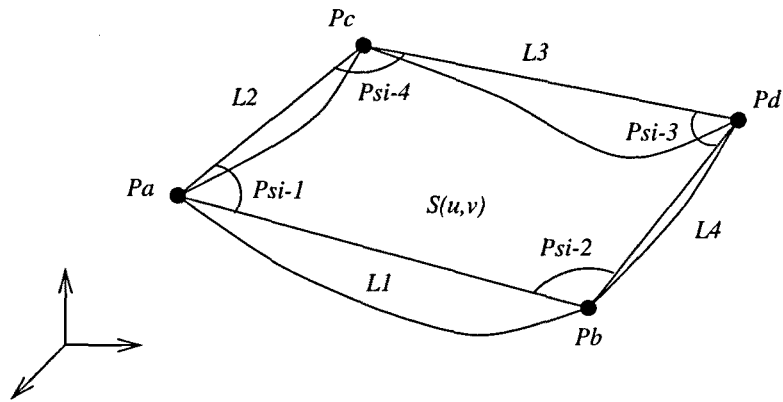


Figura 3.7: Magnituds en espai euclidià

tres,  $l_1$ ,  $l_2$  i  $\Theta$ . Observant la figura 3.6 podem deduir les següents relacions:

$$\begin{aligned} A &= l_1 \\ B &= l_2 \cos \Theta \\ l_2 \sin \Theta &= 1 \end{aligned}$$

L'espai paramètric tant sols ve determinat per dues longituds,  $l_1$  i  $l_2$ , mentre que en espai euclidià n'hi ha quatre,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  i  $L_4$ . Volem fer correspondre les longituds  $L_1$  i  $L_3$  amb  $l_1$ , donat que corresponen a la direcció paramètrica  $u$ , i de la mateixa manera, les longituds  $L_2$  i  $L_4$  es corresponen amb  $l_2$ . Com que el que ens interessa és que es mantingui la relació de la forma dels triangles entre ambdós espais, una forma d'imposar aquesta semblança és a través de la relació entre les raons de les distàncies:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{(L_1 + L_3)/2}{(L_2 + L_4)/2}$$

De forma similar, tractem la correspondència entre angles en espai paramètric i espai euclidià. La diferència entre els angles corresponents en ambdós espais és:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= (\Psi_1 - \Theta) + (\Psi_3 - \Theta) + (\Psi_2 - (\pi - \Theta)) + (\Psi_4 - (\pi - \Theta)) = \\ &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 - 2\pi \end{aligned}$$

D'una banda, volem que aquesta diferència sigui el més petita possible, però de l'altra també cal repartir l'error per igual en els quatre angles del romboide. Aquestes dues condicions les imposablem mitjançant les relacions:

$$\begin{aligned} \Theta - \frac{\Psi_1 + \Psi_3}{2} &= \frac{\Delta\Psi}{4} \\ (\pi - \Theta) - \frac{\Psi_2 + \Psi_4}{2} &= \frac{\Delta\Psi}{4} \end{aligned}$$

A partir d'aquestes equacions, trobem el valor de les constants de la transformació lineal:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{\pi}{2} + \frac{\Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3 - \Psi_4}{4} \\ l_2 &= \frac{1}{\sin \Theta} \\ A &= \frac{L_1 + L_3}{L_2 + L_4} l_2 \\ B &= \cot \Theta\end{aligned}$$

Una reparametrització lineal del tipus exposat pot tenir com a conseqüència que els límits naturals del pedaç al nou espai paramètric (l'espai deformat) superin el quadrat unitari  $[0, 1] \times [0, 1]$ , tal com es pot veure a la figura 3.8.

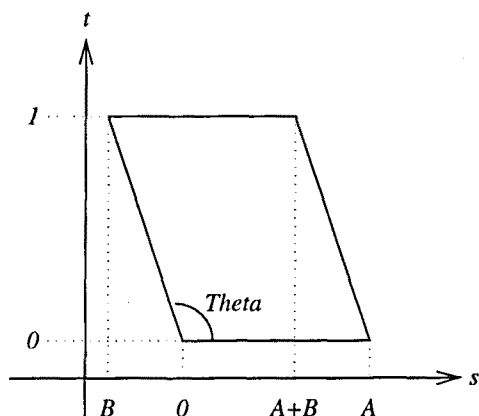


Figura 3.8: De vegades la reparametrització lineal pot implicar haver de fer una translació i un escalat addicionals

Aquesta és una situació no desitjable, atès que molts dels mètodes i raonaments que apliquem als nostres pedaços estan pensats pel cas en què els paràmetres no superin la unitat ni siguin negatius. Cal, per tant, ajustar el nou espai paramètric de manera que qualsevol punt estigui dins el quadrat unitari.

El procés per aconseguir això consisteix en fer una primera reparametrització que transladi les coordenades i una segona que les escali. La translació cal aplicar-la sempre que

$$\Theta > \frac{\pi}{2}$$

la qual cosa equival a dir que  $B < 0$  (vegeu la figura 3.8). Es tractarà d'una translació de  $\delta = -B$  unitats en la direcció positiva del paràmetre  $s$ . L'escalat caldrà aplicar-lo sempre que es no es satisfaci la desigualtat

$$A + |B| \leq 1$$

Es tractarà d'un escalat uniforme (altrament perdriem la relació de distàncies entre l'espai paramètric i l'espai imatge) de valor  $\lambda = \frac{1}{A+|B|}$ .

En resum, la seqüència de reparametrizacions que apliquem a cadascun dels pedaços que configuren la superfície del sòlid original són un seguit de transformacions lineals, que podem sintetitzar segons l'expressió:

$$(s, t, 1) = M_t \cdot (u, v, 1), \quad M_t = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ \delta & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

amb

$$\lambda = \max(1, A + |B|), \quad \delta = -\min(0, B)$$

La matriu  $M_t$  és aquella que cal aplicar a les coordenades homogènies originals per obtenir les coordenades homogènies de l'espai paramètric deformat.

### 3.5.2 Reparametrizació lineal

En aquesta secció calcularem la reparametrizació lineal que cal aplicar, seguint les directrius del què acabem d'exposar.

Partim d'un pedaça polinòmic paramètric, que expressarem en la base monòmica per poder treballar més còmodament. Recordem que els pedaços que delimiten el sòlid venen representats precisament en la forma monòmica, i per tant, la reparametrizació es pot aplicar abans de fer la conversió de les corbes i superfícies a la base de Bézier (vegeu la secció 3.2.1).

Aplicant-li el canvi  $u = as + bt, v = t$ , obtenim:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} u^i v^j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} (as + bt)^i t^j = S'(s, t)$$

Desenvolupem l'expressió segons la fórmula del binomi de Newton i tot seguit fem successius canvis de variables:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} t^j \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (as)^k (bt)^{i-k} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} c_{ij} a^k b^{i-k} s^k t^{i+j-k} \stackrel{\boxed{l=i-k}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} c_{ij} a^{i-l} b^l s^{i-l} t^{j+l} = \\ &\stackrel{\boxed{j_0=j+l}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{l=0}^i \sum_{j_0=l}^{l+m} \binom{i}{l} c_{i, j_0-l} a^{i-l} b^l s^{i-l} t^{j_0} = \end{aligned}$$

$$\boxed{i_0=i-l} \equiv \sum_{l=0}^n \sum_{i_0=0}^{n-l} \sum_{j_0=l}^{n+m} \binom{i_0+l}{l} \hat{c}_{i_0+l, j_0-l} a^{i_0} b^l s^{i_0} t^{j_0}$$

on

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si } 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Així doncs, obtenim que la fórmula de la superfície reparametritzada és la següent:

$$S'(s, t) = \sum_{i_0=0}^n \sum_{j_0=0}^{n+m} d_{i_0 j_0} s^{i_0} t^{j_0}$$

on

$$d_{i_0 j_0} = a^{i_0} \sum_{l=0}^n \binom{i_0+l}{l} \hat{c}_{i_0+l, j_0-l} b^l$$

i els coeficients  $\hat{c}_{ij}$  definits tal com queda expressat més amunt.

*Observacions:* Fixem-nos que

1. Alguns dels coeficients  $\hat{c}_{ij}$  són nuls, en concret

$$\text{per } i_0 > n-l \Rightarrow i_0+l > n \Rightarrow \hat{c}_{i_0+l, j_0-l} = 0,$$

$$\text{per } j_0 > l+m \Rightarrow j_0-l > m \Rightarrow \hat{c}_{i_0+l, j_0-l} = 0$$

2. En fer el canvi, la superfície s'ha elevat de grau: de ser un pedaç d'ordre  $n \times m$  a passat a un de grau  $n \times (n+m)$ .
3. De la forma com hem enunciat originalment la reparametrització lineal (vegeu l'equació (3.20)), es dedueix la següent equivalència entre constants:

$$A = \frac{1}{b}, \quad B = -\frac{a}{b}$$

### 3.5.3 Reparametrització per translació

En aquesta secció calculem els nous coeficients que s'obtidran un cop s'ha aplicat la translació, en el cas que sigui necessària.

Apliquem el canvi  $u = s + \delta, v = t$  a un pedaç expressat en la base monòmica:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} u^i v^j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} (s + \delta)^i t^j$$

Utilitzant la fórmula del binomi de Newton i desenvolupant l'expressió obtenim:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{c}_{ij} t^j s^k \delta^{i-k} = \sum_{i_0=0}^n \sum_{j_0=0}^m \sum_{l=0}^n \binom{l}{i_0} \mathbf{c}_{lj_0} s^{i_0} t^{j_0} \delta^{l-i_0} f_{li_0}$$

on

$$f_{li_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > i \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}$$

La segona igualtat s'obté canviant l'ordre dels sumatoris i el nom de les variables ( $l = i, j_0 = j, i_0 = k$ ). Així doncs, podem expressar la superfície reparametritzada com

$$S'(s, t) = \sum_{i_0=0}^n \sum_{j_0=0}^m \mathbf{d}_{i_0 j_0} s^{i_0} t^{j_0}$$

on

$$\mathbf{d}_{i_0 j_0} = \sum_{l=0}^n \binom{l}{i_0} \mathbf{c}_{lj_0} \delta^{l-i_0} f_{li_0} = \sum_{l=i_0}^n \binom{l}{i_0} \mathbf{c}_{lj_0} \delta^{l-i_0}$$

O de forma equivalent,

$$\mathbf{d}_{i_0 j_0} = \sum_{k=0}^{n-i_0} \binom{k+i_0}{i_0} \mathbf{c}_{k+i_0, j_0} \delta^k$$

### 3.5.4 Reparametrització per escalat uniforme

Apliquem el canvi  $u = \lambda s, v = \lambda t$  a un pedaç expressat en la base monòmica:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{c}_{ij} u^i v^j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{c}_{ij} (\lambda s)^i (\lambda t)^j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{c}_{ij} \lambda^{i+j} u^i v^j$$

Així doncs, podem expressar la superfície reparametritzada com

$$S'(s, t) = \sum_{i_0=0}^n \sum_{j_0=0}^m \mathbf{d}_{i_0 j_0} s^{i_0} t^{j_0}$$

on

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{c}_{ij} \lambda^{i+j}$$



### 3.5.5 Transformació de les corbes sobre la superfície

Un cop s'haurà fet la reparametrització dels pedaços que descriuen la superfície del sòlid, cal tenir en compte que les arestes de l'objecte estan representades com a corbes sobre una superfície. Per tant, cal canviar aquestes corbes de manera que la informació que tenim emmagatzemada sigui coherent.

La forma més còmoda de treballar en aquest cas és expressant la corba sobre la superfície en la base de Bernstein-Bézier:

$$C(w) = \sum_{i=0}^{i=n} Q_i B_i^l(w), \quad 0 \leq w \leq 1$$

Gràcies a la propietat de la invariància a transformacions afins, n'hi haurà prou amb transformar cadascun dels punts de control,  $Q_i$ , segons la reparametrització expressada per la matriu  $M_t$  del pedaça que retalla la corba. D'aquesta manera, obtindrem les coordenades dels nous punts de control de la corba,  $Q'_i$ :

$$Q'_i = M_t \cdot Q_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

essent  $M_t$  la matriu de transformació lineal expressada a l'equació 3.20.

### 3.5.6 Exemples

La reparametrització lineal dels pedaços que hem exposat les seccions anteriors ha estat implementada, inclosa com a pas opcional del preprocessament.

Analitzant els resultats, s'observa que en alguns casos concrets aquest tractament ens serveix per millorar la parametrització dels pedaços, entenent per a millora la correspondència entre distàncies a l'espai paramètric i espai euclidià. Això no obstant, en d'altres casos la reparametrització no sembla modificar la deformació paramètrica. Això es deu principalment a què la reparametrització que realitzem és un canvi de variables lineal global per a tot l'espai paramètric, la qual cosa implica que per a pedaços amb una superfície curvada (pedaços molt diferents d'una superfície plana) l'estimació de les distàncies en espai euclidià no s'adiuen amb les distàncies sobre la superfície. En altres paraules, no n'hi ha prou amb un únic canvi lineal per reflexar la variació del pedaça en espai imatge quan la superfície és una funció polinòmica de grau elevat.

Aquells casos en què s'observa una clara millora de la qualitat de la parametrització són pedaços en què la deformació és bastant homogènia a tot el pedaça. La figura 3.9 mostra un d'aquests casos, corresponent a la reparametrització d'un pedaça cilíndric (no retallat). Hem representat un conjunt de corbes isoparamètriques, igualment espaiades, en les dues direccions ( $u$  i  $v$ ) per als dos pedaços, l'original i el reparametritzat. Es pot

observar que la distància entre corbes en ambdues direccions és molt més homogènia en el pedaç reparametritzat que en l'original, és a dir, que la correspondència entre distàncies en espai paramètric i espai imatge millora gràcies a la reparametrització.

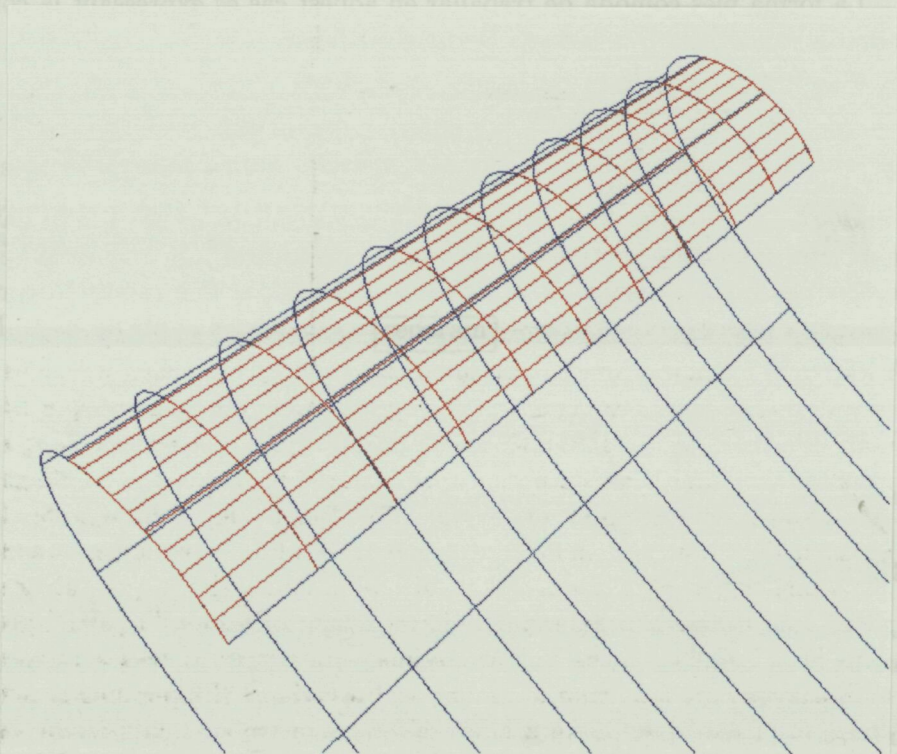


Figura 3.9: Exemple d'aplicació de la reparametrització lineal sobre un pedaç cilíndric. En vermell, el pedaç original; en blau, el pedaç reparametritzat.

## Capítol 4

# L'algorisme isòtrop

### 4.1 Introducció

Al capítol anterior hem presentat l'esquema que segueixen els algorismes que proposarem i hem descrit els passos inicials, és a dir, l'adquisició de dades i el seu preprocessament. En aquest capítol proposarem un algorisme per triangular objectes limitats per superfícies paramètriques que segueix l'esquema presentat. Per tant, aquesta proposta serà adaptable basada en fites lligades a la curvatura en cada punt de la superfície. Desenvoluparem aquestes fites de forma que limitin la mida dels elements resultants (triangles o arestes dels triangles) de tal manera que siguin admissibles. Atès que l'algorisme treballa discretitzant primerament els vèrtexs i arestes de l'objecte i posteriorment triangula l'interior de cadascuna de les cares, que es corresponen amb pedaços retallats, caldrà calcular les fites adaptables per a cada pedaça. Doncs, el primer que farem, a la secció 4.2, serà trobar una manera senzilla de determinar l'admissibilitat dels triangles resultants en funció de les segones derivades en cada punt del pedaça. Les fites que trobarem seran adaptables, atès que varien en funció del punt en espai paramètric. Això no obstant, seran fites homogènies respecte a la direcció sobre la superfície. Per aquest motiu, hem batejat aquest primer algorisme amb el nom d'algorisme isòtrop; pel contari, les fites que desenvoluparem al capítol 5 dependran no sols del punt paramètric, sinó també de la direcció sobre l'espai paramètric, i per això l'algorisme resultant l'hem qualificat amb l'adjectiu de direccional.

Una primera versió de l'algorisme isòtrop ja la vam presentar l'any 1995, [BV95]. Les principals diferències entre la versió preliminar i la que presentem en aquest capítol son dues: en primer lloc, la funció d'admissibilitat ha estat millorada, la qual cosa ens ha permès demostrar un seguit de propietats d'aquesta funció; en segon lloc, el mètode proposat per triangular l'interior dels pedaços és diferent. Si la solució proposada a [BV95] consistia en calcular a priori el nombre de punts necessaris per triangular l'interior d'una cara per tot seguit situar-los de forma més o menys aleatòria,

la nova proposta, que anomenarem el mètode de refinament d'arestes, garanteix l'admissibilitat de la triangulació inicial alhora que permet calcular una fita del nombre de punts que emplaça.

Recordem que l'algorisme de triangulació treballa en l'espai paramètric; les fites i condicions cercades també seran paramètriques, i en concret la triangulació de les cares es realitza íntegrament en l'espai paramètric. D'aquí la importància d'aplicar el preprocessament que reparametritza els pedaços per tal d'intentar fer coincidir les magnituds en espai paramètric amb les de l'espai imatge (vegeu la secció 3.5), altrament l'objectiu referent a la forma dels triangles podria veure's afectat per la parametrització.

A la secció 4.3 descrivim el mètode seguit per discretitzar els vèrtexs de l'objecte. Les fites adaptables i condicions d'admissibilitat ens serviran per discretitzar tant les arestes del sòlid, tal com expliquem a la secció 4.4, com per triangular cadascuna de les cares. La secció 4.5 mostra com obtenir una triangulació inicial admissible de cadascuna de les cares; un cop obtinguda, existeix la possibilitat d'aplicar un procés de relaxació, descrit a la secció 4.5.4, per millorar la forma dels triangles resultants. La forma com s'obté la triangulació final, en espai imatge, queda recollida a la secció 4.6. Tal com hem explicat, el fet de discretitzar primer els vèrtexs i arestes permet obtenir la triangulació final, única per a la superfície de tot l'objecte, de manera que s'ajusti a la condició de conformitat. Els resultats del mètode isòtrop, així com del mètode direccional i dels diversos preprocessaments implicats en els algorismes de triangulació, els hem analitzat al capítol 6 d'aquesta tesi.

## 4.2 Les fites d'admissibilitat per a cada peça

Atès que ens proposem obtenir triangulacions adaptables, cal que la mida dels triangles varïi en funció dels canvis de la curvatura dins cada peça que descriu la superfície del sòlid que volem discretitzar; d'aquesta manera minimitzarem el nombre de vèrtexs de la triangulació resultant (vegeu la secció 2.3). Cal, doncs, distingir diferents zones dins el peça depenent del grau de curvatura. L'anàlisi de la curvatura dels pedaços la realitzem de tal forma que obtindrem fites sobre la mida de les entitats – arestes i triangles – que han d'aproximar l'objecte que es discretitza en funció de la tolerància desitjada,  $\epsilon$ .

L'objectiu d'aquesta secció és obtenir una forma senzilla de comprovar ràpidament l'admissibilitat dels triangles resultants. S'utilitzaran una sèrie de definicions i resultats que relacionen la mida de les entitats admissibles amb les segones derivades de la superfície paramètrica que volem discretitzar, fins arribar a les condicions cercades. A partir d'aquestes condicions i amb l'ajut de les estructures de dades adequades, desenvoluparem una forma constructiva de calcular l'admissibilitat de qualsevol entitat resultant.

### 4.2.1 Notacions

Atès que en aquest capítol (i també en el següent) farem un ús freqüent de les segones derivades, introduïm tot seguit les notacions i definicions que simplificaran les expressions on apareguin.

D'ara en endavant, notarem la regió de l'espai paramètric on està definit el pedaça que tractem, el domini del pedaça, com  $\mathbb{D}$ . Sovint, com en el cas dels pedaços de Bézier rectangulars, aquesta regió és el quadrat unitari  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Sigui  $S(u, v)$  un pedaça paramètric,  $p \in \mathbb{D}$  un punt en espai paramètric del pedaça i  $T$  un triangle en espai paramètric, llavors anomenarem

$$M_{uu}^T(p) = \left( \frac{\partial^2 S_x}{\partial u^2} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_y}{\partial u^2} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_z}{\partial u^2} \Big|_p \right),$$

$$M_{uv}^T(p) = \left( \frac{\partial^2 S_x}{\partial uv} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_y}{\partial uv} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_z}{\partial uv} \Big|_p \right),$$

$$M_{vv}^T(p) = \left( \frac{\partial^2 S_x}{\partial v^2} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_y}{\partial v^2} \Big|_p, \frac{\partial^2 S_z}{\partial v^2} \Big|_p \right)$$

$$M_1 = \sup_{p \in T} \|M_{uu}(p)\|, \quad M_2 = \sup_{p \in T} \|M_{uv}(p)\|, \quad M_3 = \sup_{p \in T} \|M_{vv}(p)\|$$

**Definició 16.** Sigui  $T$  un triangle amb vèrtexs  $A, B, C$  en espai paramètric, llavors la funció  $l(u, v)$  és el triangle planar linealment parametritzat tal que  $l(A) = S(A)$ ,  $l(B) = S(B)$  i  $l(C) = S(C)$  (vegeu la figura 4.1).

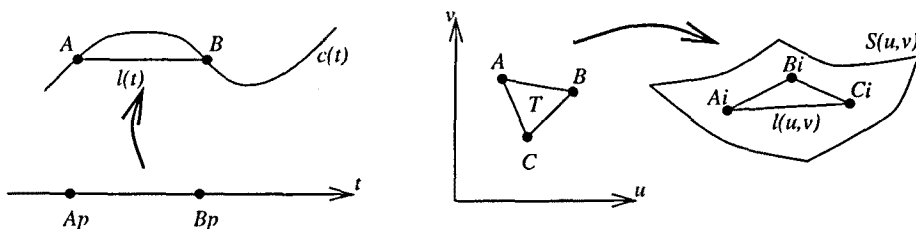


Figura 4.1: Aproximació lineal de corbes i superfícies.

La correspondència entre punts en espai paramètric i espai imatge (punts en espai 3D sobre la superfície) ens permet parlar indiferentment de qual-sevol triangle en espai paramètric i el corresponent triangle imatge, amb vèrtexs sobre una superfície. Així, recuperant la definició de triangle admissible que hem donat a l'apartat 2.4, direm que un triangle  $T$  amb vèrtexs en espai paramètric  $A, B, C$  és admissible si i sols si el triangle  $l$  amb vèrtexs  $S(A)$ ,  $S(B)$  i  $S(C)$  també ho és.

## 4.2.2 Anàlisi de la curvatura

El primer teorema que enunciem limita la longitud d'un segment lineal que aproxima un tros de corba amb una certa tolerància donada en funció de la segona derivada (vegeu la figura 4.1).

**Teorema 2.** *Donada una corba paramètrica  $c(t)$  de la classe  $C^2$  i dos valors del paràmetre  $a$  i  $b$ , la màxima distància entre el tros de corba  $c(t)$  definit entre  $a$  i  $b$  i un segment lineal parametritzat  $l(t)$  amb els mateixos extrems que  $c(t)$  està afitada per l'expressió següent, [FMM86]:*

$$\sup_{a \leq t \leq b} \|c(t) - l(t)\| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup_{a \leq t \leq b} \|c''(t)\|$$

Seguidament donem la demostració d'aquest teorema, tal com es pot trobar a [FMM86]:

*Demostració.* Sigui  $e(t) = c(t) - l(t)$  i  $s(t) = e(t) \cdot e(t)$ . Llavors  $s(a) = 0 = s(b)$ , la qual cosa implica que existeix un paràmetre  $t_0$  entre  $a$  i  $b$  on  $s(t)$  ateny el seu màxim i per tant  $s'(t_0) = 0$ . Per tant,  $e(t_0) \cdot e'(t_0) = 0$ . Tenim

$$e(t) = e(t_0) + e'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - x)e'(x) dx,$$

i per tant

$$e(t_0) \cdot e(t) = e(t_0) \cdot e(t_0) + e(t_0) \cdot e'(t_0)(t - t_0) + e(t_0) \cdot \int_{t_0}^t (t - x)e'(x) dx.$$

Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que  $t_0$  satisfà  $a \leq t_0 \leq \frac{1}{2}(b+a)$ . Notem que  $e(t_0) \cdot e'(t_0) = 0$ ,  $e(a) = 0$  i  $e''(t) = c''(t)$ , la qual cosa ens dóna:

$$-e(t_0) \cdot e(t_0) = e(t_0) \cdot \int_{t_0}^a (a - x)c''(x) dx.$$

Això implica que

$$\|e(t_0)\|^2 \leq \|e(t_0)\| \cdot \left\| \int_{t_0}^a (a - x)c''(x) dx \right\|,$$

i atès que  $\|e(t_0)\| > 0$  (altrament, hem acabat) :

$$\begin{aligned}
\|e(t_0)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^a (a-x)c''(x) dx \right\| \leq \\
&\leq \sup_{a \leq t \leq b} \|c''(t)\| \left\| \int_{t_0}^a (a-x) dx \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sup \|c''(t)\| (t_0 - a)^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sup \|c''(t)\| \left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 = \\
&= \frac{1}{8} \sup \|c''(t)\| (b-a)^2
\end{aligned}$$

□

**Definició 17 (Vèrtex local).** Sigui  $T$  un triangle en espai paramètric i sigui  $p_0$  un punt interior a  $T$ . Dividim el triangle en tres regions connectant el seu baricentre amb els punts mitjos de les tres arestes (vegeu la figura 4.2), cada regió corresponent a un dels vèrtexs de  $T$ . Llavors, el *vèrtex local* de  $p_0$  és el vèrtex de  $T$  corresponent a la regió on està  $p_0$ .

Per exemple, a la figura 4.2 el vèrtex local de  $p_0$  és  $A$ . En el cas en què el punt interior es trobi justament sobre el segment que uneix el centre de gravetat amb el punt mig d'una de les arestes, el punt tindrà més d'un vèrtex local associat.

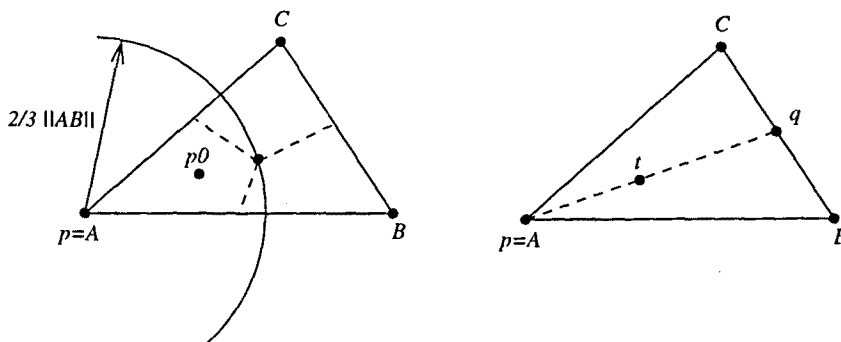


Figura 4.2: Il·lustració per a la definició de vèrtex local i per al teorema 3.

**Proposició 1.** Siguin  $p_0 = (u_0, v_0)$  un vèrtex qualsevol interior a un triangle,  $A = (u_A, v_A)$  el vèrtex local associat a  $p_0$ , i  $q = (u_q, v_q)$  el punt intersecció entre l'aresta  $BC$  (aresta de  $T$  oposada a  $A$ ) i la línia que passa per  $A$  i  $p_0$  (vegeu figura 4.2). Llavors,

$$(u_0 - u_A, v_0 - v_A) \leq \frac{2}{3}(u_q - u_A, v_q - v_A)$$

La demostració d'aquesta proposició és fàcil de veure si es té en compte que la màxima distància entre el punt  $p_0$  i el seu vèrtex local  $A$  s'agafa justament quan  $p_0$  és el baricentre del triangle.

El teorema 2 permet afitar l'error comès en aproximar un tros de corba per un segment rectilini. El següent teorema, presentat a [SH92], ve a ser l'equivalent de l'anterior però per a superfícies, atès que afita l'error produït en aproximar un tros de superfície paramètrica per un triangle amb els seus vèrtexs sobre la superfície (vegeu la figura 4.1).

**Teorema 3.** *Donada una superfície paramètrica  $S(u, v)$  i un triangle arbitrari  $T$  amb vèrtexs  $A, B$  i  $C$  en espai paramètric, la distància màxima entre  $S(u, v)$  i el triangle parametritzat linealment  $l(u, v)$  satisfà ([SH92])*

$$\sup_{(u,v) \in T} \| S(u, v) - l(u, v) \| \leq \frac{2}{9} \Omega^2 (M_1 + 2M_2 + M_3)$$

on  $\Omega$  és la longitud de l'aresta més llarga del triangle en espai paramètric i  $M_1, M_2$  i  $M_3$  són els supremes de les segones derivades en la regió del triangle  $T$ , segons les hem definides a l'apartat 4.2.1.

Aquest teorema està basat en un de similar presentat a [FMM86] per al cas en què els triangles siguin rectangles (amb dos dels seus costats paral·lels als eixos paramètrics). Tot seguit en donem la demostració presentada a [SH92]:

*Demostració.* Siguin  $e(u, v) = S(u, v) - l(u, v)$ ,  $h(u, v) = e(u, v) \cdot e(u, v)$  i sigui  $p_0$  el punt en el qual la funció  $h$  ateny el seu màxim dins del triangle  $T$ . Distingim dos casos, segons si el punt  $p_0$  és interior a  $T$  o bé es troba sobre una de les seves arestes.

**Cas I:** El punt  $p_0$  es troba sobre una aresta  $AB$  del triangle  $T$ . En aquest cas, podem aplicar el teorema 2 sobre la corba corresponent a l'aresta  $AB$ , i obtenim

$$\begin{aligned} \sup_{(u,v) \in T} \| S(u, v) - l(u, v) \| &= \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \| S((1-t)A + tB) - l((1-t)A + tB) \| \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \|AB\|^2 \sup_{(u,v) \in AB} \| S''(u, v) \| \leq \frac{2}{9} \Omega^2 (M_1 + 2M_2 + M_3) \end{aligned}$$

**Cas II:** El punt  $p_0$  està a l'interior de  $T$ . Llavors  $\frac{\partial h}{\partial u}(p_0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial v}(p_0)$ , la qual cosa implica que  $e(p_0) \cdot \frac{\partial e}{\partial u}(p_0) = 0 = e(p_0) \cdot \frac{\partial e}{\partial v}(p_0)$ . Sigui  $A$  el vèrtex local de  $p_0$ , i sigui  $\kappa = A - p_0$  i escrivim  $\kappa = (d \cos \alpha, d \sin \alpha)$ , essent  $d = \|A - p_0\|$  i  $\alpha = \angle(p_0, A, C)$ .

La demostració se segueix de forma semblant a la donada pel teorema 2 fixant-nos en la corba  $g(t)$  que va des de  $p_0 = (u_0, v_0)$  fins a  $A = (u_A, v_A)$



sobre  $e(u, v)$ . Sigui  $g(t) = e(p_0 + t\kappa)$ , llavors  $g(0) = e(p_0)$  i  $g(1) = e(A)$ . Desenvolupant  $g(t)$  com a sèrie de Taylor obtenim:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \int_0^t g''(\xi)(1 - \xi) d\xi,$$

la qual cosa implica

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 g''(\xi)(1 - \xi) d\xi,$$

que un cop desenvolupat queda com

$$e(A) = e(p_0) + \left( \frac{\partial e}{\partial u} \Big|_{p_0} d \cos \alpha + \frac{\partial e}{\partial v} \Big|_{p_0} d \sin \alpha \right) + I$$

on

$$I = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \Big|_{p_0 + \xi \kappa} d^2 \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} \Big|_{p_0 + \xi \kappa} d^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{p_0 + \xi \kappa} d^2 \sin^2 \alpha \right) (1 - \xi) d\xi$$

Prenent el producte escalar de la darrera expressió amb  $e(p_0)$  i utilitzant les igualtats següents:  $e(p_0) \cdot \frac{\partial e}{\partial u}(p_0) = 0 = e(p_0) \cdot \frac{\partial e}{\partial v}(p_0)$  i  $e(A) = 0$ , obtenim:

$$0 = e(p_0) \cdot e(p_0) + e(p_0) \cdot I,$$

la qual cosa implica

$$\|e(p_0)\|^2 \leq \|e(p_0)\| \cdot \|I\|,$$

i atès que  $\|e(p_0)\| > 0$  (altrament hem acabat), obtenim

$$\begin{aligned} \|e(p_0)\| &\leq \|I\| \leq \\ &\leq (d^2 \cos^2 \alpha M_1 + 2d^2 \sin \alpha \cos \alpha M_2 + d^2 \sin^2 \alpha M_3) \\ &\quad \left| \int_0^1 (1 - \xi) d\xi \right| = \\ &= \frac{1}{2} (d^2 \cos^2 \alpha M_1 + 2d^2 \sin \alpha \cos \alpha M_2 + d^2 \sin^2 \alpha M_3). \end{aligned}$$

Com que  $A$  és el vèrtex local de  $p_0$ , la proposició 1 ens assegura que

$$d \cos \alpha \leq \frac{2}{3} \Omega, \quad d \sin \alpha \leq \frac{2}{3} \Omega$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned}\|e(p_0)\| &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9} \Omega^2 M_1 + \frac{8}{9} \Omega^2 M_2 + \frac{4}{9} \Omega^2 M_3 \right) = \\ &= \frac{2}{9} \Omega^2 (M_1 + 2M_2 + M_3)\end{aligned}$$

Fem notar que la fita que ens proporciona aquest teorema no depèn del vèrtex local (en aquest cas, del vèrtex  $A$ ).  $\square$

L'anterior teorema 3 permet trobar una fita superior per a la llargada màxima d'una aresta d'un triangle tal que la distància entre l'aproximació lineal  $l(u, v)$  i la superfície  $S(u, v)$  no superi el valor de la tolerància  $\varepsilon$ :

$$\Omega \leq 3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2M_1 + 4M_2 + 2M_3}}$$

D'aquesta equació es dedueix que qualsevol segment que no superi aquesta màxima longitud podem assegurar que produirà triangles admissibles. Aquesta expressió és la que es fa servir a [SH92] com a fita global per a tot un pedaç. No obstant, com hem dit, l'adaptació es basa en diferenciar zones dins el pedaç, és a dir, no únicament calcular una sola fita de les segones derivades global per a tot el pedaç tal com fan [ShH92]. A més a més, es pot veure que a la demostració del teorema 3 que acabem de presentar, l'expressió  $2M_1 + 4M_2 + 2M_3$  pot substituir-se arreu on apareix per

$$\max_{p \in T} \{2\|M_{uu}(p)\| + 4\|M_{uv}(p)\| + 2\|M_{vv}(p)\|\}$$

on  $p$  és el punt de coordenades paramètriques  $(u, v)$ .

Aquesta propietat indueix a proposar la definició següent de la funció  $\Omega$  per a cada punt de l'espai paramètric,  $p \in \mathbb{D}$ :

**Definició 18 (Funció  $\Omega$ ).**

$$\Omega(p) = 3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M(p)}} = 3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\|M_{uu}(p)\| + 4\|M_{uv}(p)\| + 2\|M_{vv}(p)\|}}$$

Segons això, una condició suficient per a què un triangle  $T$  sigui admissible és que es compleixi la desigualtat

$$\Omega(p) \geq \Omega \quad \forall p \in T \quad (4.1)$$

on  $\Omega$  és la longitud de l'aresta més llarga del triangle  $T$ .

La funció  $\Omega$  ens proporciona una condició suficient que garanteix que un triangle sigui admissible, però no resulta una funció a partir de la qual es pugui calcular fàcilment l'admissibilitat, atès que caldria avaluar-la a tots els punts interiors al triangle. El nostre objectiu és trobar una funció que garanteixi l'admissibilitat tant sols avaluant-la en alguns punts concrets d'un triangle. Amb aquesta finalitat, definim una segona funció,  $R(p)$ , per a cada punt del pla paramètric:

**Definició 19 (Funció  $R$ ).**

$$R(p) = \min \{f_p(q), \forall q \text{ t.q. } \|pq\| \leq \Omega(p)\}$$

on

$$f_p(q) = \max\{\Omega(q), \|pq\|\}$$

Per conveniència, també definim dos cercles associats a cada punt del pla paramètric:

**Definició 20 ( $\Omega$ -Cercle).** Donat  $p \in \mathbb{D}$ , anomenarem  $\Omega$ -cercle al cercle de radi  $\Omega(p)$  centrat en  $p$ . Identificarem aquest cercle com  $C_\Omega(p)$ .

**Definició 21 ( $R$ -Cercle).** Donat  $p \in \mathbb{D}$ , anomenarem  $R$ -cercle al cercle de radi  $R(p)$  centrat en  $p$ . Identificarem aquest cercle com  $C_R(p)$ .

Usant aquesta la notació que acabem d'introduir, podem redefinir la funció  $R$  com

$$R(p) = \min_{q \in C_\Omega(p)} \{\max\{\|pq\|, \Omega(q)\}\} \quad (4.2)$$

A la figura 4.3 hem representat gràficament l'obtenció de la funció  $R$  a partir de  $\Omega$  per un punt  $p$  concret.

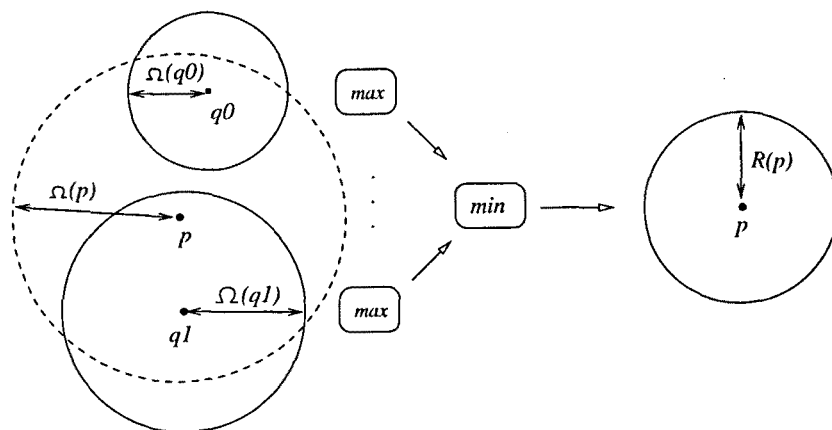


Figura 4.3: Il·lustració per a la definició de  $R(p)$ . En un punt arbitrari  $q \in C_\Omega(p)$  cal prendre el màxim entre  $\|pq\|$  i  $\Omega(q)$ . A l'exemple, per al punt  $q_0$  prenem  $\|pq_0\|$ , mentre que pel punt  $q_1$  prenem  $\Omega(q_1)$ . El mínim de tots aquests valors per a tots els punts  $q \in C_\Omega(p)$  proporciona  $R(p)$ .

A continuació veurem que la funció  $R(p)$  per a cada punt  $p$  de l'espai paramètric,  $\mathbb{D}$ , proporciona una fita de la magnitud que pot tenir un triangle amb un dels vèrtexs en  $p$  de forma que sigui admissible:

**Proposició 2.** *Sigui  $T$  un triangle en  $\mathbb{D}$  i sigui  $AB$  l'aresta més llarga del triangle. Llavors,  $T$  és admissible si*

$$R(A) \geq \|AB\|$$

Notem que la proposició és vàlida independentment de quin dels dos extrems de l'aresta més llarga es trïi.

*Demostració.* Per ser  $AB$  l'aresta més llarga del triangle,

$$\begin{aligned} R(A) \geq \|AB\| &\implies T \subset C_R(A) \implies \\ &\implies \forall p \in T \quad \max\{\Omega(p), \|Ap\|\} \geq \|AB\| \end{aligned}$$

Com que  $p \in T$ ,  $\|Ap\| \leq \|AB\|$ , i per tant

$$\forall p \in T \quad \max\{\Omega(p), \|Ap\|\} = \Omega(p) \geq \|AB\|$$

És a dir, que segons la condició 4.1  $T$  és admissible. □

L'anterior proposició indueix a definir la propietat d'admissibilitat associada a un segment:

**Definició 22 (Segment admissible).** Direm que un segment  $AB$  és admissible si i sols si

$$R(A) \geq \|AB\| \quad \vee \quad R(B) \geq \|AB\|$$

Notem que l'admissibilitat d'un segment, a diferència de l'admissibilitat d'un triangle, no es mesura en funció de si la distància que el separa de la superfície original supera el valor  $\varepsilon$ , sinó que és una condició més forta: el segment  $AB$  ha de ser tal que poguem garantir que si l'unim amb dos altres segments també admissibles  $AC$  i  $BC$ , llavors el triangle de vèrtexs  $A, B, C$  és admissible. Expressarem aquesta qüestió de la següent manera:

**CoroHari 2.** *Un triangle és admissible si les seves tres arestes (vistes com a segments) són admissibles.*

**CoroHari 3.** *Una triangulació és admissible si totes les seves arestes que la formen també ho són.*

Això ens proporciona una forma senzilla i ràpida de garantir l'admissibilitat d'una triangulació: tant sols cal mesurar la longitud de les arestes que la formen i avaluar la funció  $R$  en tots els seus vèrtexs. Podem interpretar la funció  $R$  com una mesura de la densitat de vèrtexs que cal situar en cada regió de la superfície de manera que garantim l'admissibilitat de la triangulació final. Una funció d'aquest tipus és justament el que alguns algorismes de triangulació orientats als MEF (per exemple, [SG95]) suposen que els ve donada com a dada d'entrada, si bé en aquests casos la funció no

depèn de la curvatura de la superfície, sinó de la propietat física que s'estigui analitzant.

A continuació, veurem que la funció  $R$ , segons l'hem definida, és Lipschitz contínua, amb constant igual a 1.

**Lema 3.**

$$\forall a, b \in \mathbb{D} \quad |R(a) - R(b)| \leq \|ab\|$$

*Demostració.* Fixem-nos abans que per qualsevol punt del pla paramètric es compleix que  $R(p) \leq \Omega(p)$ , cosa que es dedueix directament de la definició de la funció  $R$ .

Per demostrar aquest lema, demostrarem primer que  $R(a) < k \implies R(b) < k + \|ab\|$ .

$$R(a) < k \iff \exists q \in C_\Omega(a) \text{ t.q. } \max\{\|aq\|, \Omega(q)\} < k \iff$$

$$\iff \exists q \in C_\Omega(a) \text{ t.q. } (\|aq\| < k) \wedge (\Omega(q) < k)$$

Usant la desigualtat  $\|bq\| \leq \|ab\| + \|aq\|$ , obtenim que

$$(\|bq\| < \|ab\| + k) \wedge (\Omega(q) < k)$$

- Si  $\Omega(b) \geq k + \|ab\|$ , llavors

$$(\|bq\| < k + \|ab\| \leq \Omega(b)) \wedge (\Omega(q) < k) \implies$$

$$\implies q \in C_\Omega(b) \wedge \max\{\|bq\|, \Omega(q)\} < k + \|ab\| \implies R(b) < k + \|ab\|.$$

- Si  $\Omega(b) < k + \|ab\|$ , llavors

$$R(b) \leq \Omega(b) < k + \|ab\|.$$

Per tant,  $R(b) < k + \|ab\|$ .

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $R(a) < R(b)$ . Prenent  $k = R(a) + \epsilon$ , amb  $\epsilon > 0$  arbitrari, tenim que

$$R(b) < R(a) + \epsilon + \|ab\| \quad \forall \epsilon > 0$$

Atès que el valor  $\epsilon$  és un real arbitràriament petit, en el límit ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) obtenim la desigualtat desitjada:

$$R(b) \leq R(a) + \|ab\| \implies R(b) - R(a) \leq \|ab\|$$

□

### 4.2.3 Càlcul de les fites d'admissibilitat

A la secció precedent hem definit les funcions  $\Omega$  i  $R$ , que ens permeten assegurar l'admissibilitat dels triangles en espai paramètric. Segons es desprèn del corollari 2, podem obtenir una fita per a la màxima longitud que pot tenir un segment admissible amb un dels extrems en  $p$  i de direcció qualsevol trobant el mínim dels valors  $f_p(q)$  per a tots els punts  $q$  a distància menor o igual que  $\Omega(p)$  (això és el que expressa la definició de la funció  $R$ ). Així, per calcular l'admissibilitat d'un triangle qualsevol, seria possible fer el càlcul de la funció  $R$  en cadascun dels seus vèrtexs. Ara bé, aquest no resultaria un mètode gaire efectiu, atès que per calcular la funció  $R$  en un punt  $p$  qualsevol caldria trobar alguna fita de les segones derivades en tota la regió circular  $C_R(p)$ , fites que són costoses de trobar.

Amb la finalitat de disposar d'una forma ràpida per comprovar les admissibilitats, en la implementació hem optat per calcular un sol cop suprem de les segones derivades en subregions del pedaç, fent una discretització de la funció  $\Omega$ . Un cop disposem dels valors omega associats a cada regió, calculem fites del valor de la funció  $R$  per a cada regió seguint un algorisme que exposarem més endavant, que els emmagatzema en un quadtree. Un quadtree resulta una estructura de la informació especialment adequada als nostres interessos, atès que els pedaços amb els quals tractem són rectangulars; a més a més, cal tenir en compte que n'hi ha prou amb calcular suprem de les derivades per comprovar l'admissibilitat dels triangles gràcies a que disposem d'un test senzill consistent en comparar la longitud de les arestes dels triangles amb el valor de la funció  $R$  en els vèrtexs. Els quadtrees de fites els hem anomenat  $R$ -quadtrees (vegeu la figura 4.4).

**Definició 23 ( $R$ -quadtree).** Un  $R$ -quadtree és un arbre quaternari definit sobre la regió del pla paramètric  $\mathbb{D}$  tal que cada node fulla té associat un valor suprem de la funció  $R$  en tota la subregió corresponent al node fulla.

Les regions en què queda dividit l'espai paramètric segons el  $R$ -quadtree són tals que es consideren homogènies respecte a la funció  $R$ , és a dir, cada node fulla del quadtree emmagatzema un sol valor, ja que la funció  $R$  en la regió corresponent al node sols hi presenta petites variacions. El valor que queda emmagatzemat a cada node fulla del quadtree és, per tant, una cota superior del valor de la funció als punts interiors de la regió corresponent al node.

El procés de construcció del  $R$ -quadtree segueix la definició que hem donat per a la funció  $R$  i comença per subdividir recursivament el pedaç original en regions quadrades fins a un cert nivell determinat. Per a cadascuna d'aquestes regions es calcula una fita del valor  $\Omega$  a partir dels suprem de les segones derivades i usant la definició donada a la secció 4.2.2.

A cada regió li fem correspondre una *zona d'influència*, a partir de la qual podrem calcular el valor  $R$  associat a la zona:

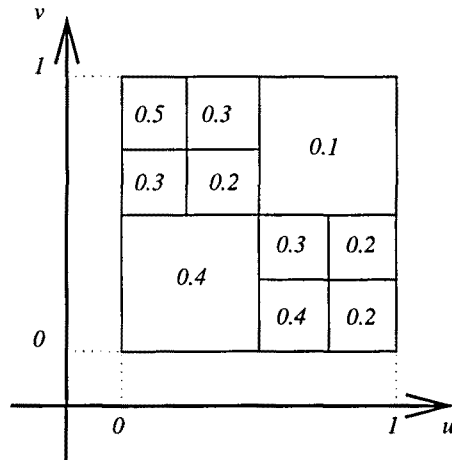


Figura 4.4: Exemple d'un  $R$ -quadtree.

**Definició 24 (Zona d'influència).** Donat un node fulla  $N$  d'un quadtree, anomenem zona d'influència del node el lloc geomètric que està a distància més petita o igual que el valor  $\Omega$  associat al node fulla (vegeu la figura 4.5). Notarem la zona d'influència de la regió com  $ZI(N)$ .

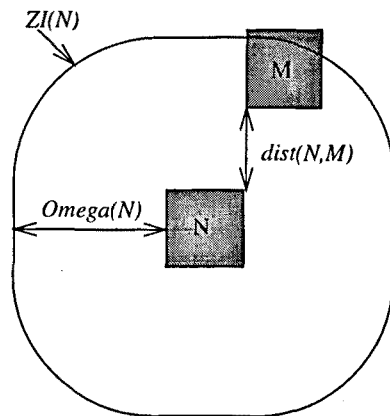


Figura 4.5: El valor  $R$  associat a una regió  $N$  es calcula a partir del valor  $\Omega$  de les regions que estan dins (o parcialment dins) la seva zona d'influència i la distància que separa les dues regions.

Donats dos nodes  $M$  i  $N$ , la distància entre els dos nodes,  $dist(M, N)$ , és la mínima distància entre un punt qualsevol de  $M$  i qualsevol altre de  $N$ , és a dir, la mínima distància que separa els dos nodes.

De la definició de la zona d'influència i seguint un raonament anàleg al que hem fet per a la demostració de la proposició 2, podem assegurar que

donada una regió  $N$ , el valor  $R(N)$  calculat segons l'expressió

$$R(N) = \min\{f_N(M) \mid M \cap ZI(N) \neq \emptyset\}$$

on

$$f_N(M) = \max\{\text{dist}(M, N), \Omega(M)\}$$

és una fita de la màxima longitud admesa d'un segment admissible amb un dels seus extrems en  $N$  i de direcció qualsevol.

L'algorisme per a la construcció del  $R$ -quadtrees associat a un pedaç es deriva directament de les fórmules i propietats anteriors:

1. Dividir el pedaç en regions fins a un cert nivell de mínima subdivisió.
2. Calcular supremes de les segones derivades per a cada regió  $N$  i el valor  $\Omega(N)$  associat.
3. Càlcul del valor  $R(N)$  de cada regió: Per a cada regió  $N$ , recórrer les regions veïnes  $M$  que estan dins la seva zona d'influència,  $ZI(N)$ , calculant el mínim de  $f_N(M)$ . Assignar aquest mínim com a valor  $R(N)$  de la regió.
4. Fusionar les regions veïnes tals que tenen un valor  $R$  assignat similar, formant el  $R$ -quadtrees.

Les fites per a les segones derivades en cada regió es poden aconseguir usant el mateix esquema que en [DM90], consistent a convertir les superfícies de Bézier en polinomis de Tchebychev i usar les propietats de les bases de Tchebychev per calcular els supremes de les segones derivades  $M_1$ ,  $M_2$  i  $M_3$ . Per veure detalls d'implementació sobre com realitzar aquests càlculs, vegeu [DM90] i [SH92].

El càlcul dels  $R$ -quadtrees es realitza fusionant regions veïnes. Aquest és un procés de compactació d'un quadtrees (vegeu [Vig92]), les fulles del qual són les regions originals, segons el criteri de fusió que decideix quan quatre valors  $R$  són prou semblants per poder ser compactats en una sola fulla.

El criteri per fusionar quatre nodes del quadtrees es pot derivar usant el lema 3: tenint en compte que la fita per a la funció  $\Omega$  ha estat calculada subdivint el pedaç original fins a un cert nivell màxim, coneixem la mida mínima d'una regió qualsevol del  $R$ -quadtrees. Si anomenem  $l_{min}$  la llargada de l'aresta d'una regió de mínima subdivisió, usant el lema 3 podem deduir que la diferència entre valors dins d'un node mínim no pot superar  $\sqrt{2} l_{min}$ . En altres paraules, donat un punt qualsevol de l'espai paramètric, la forma com s'ha calculat el  $R$ -quadtrees implica que els valors  $R$  que tenim calculats per al punt en algun cas poden arribar a diferir  $\sqrt{2} l_{min}$  unitats del seu valor



$R$  real. Així doncs, sembla una bona opció triar un criteri de fusió de quatre nodes del quadtree tal que els uneixi en un de sol almenys en el cas en què

$$\max_{i=1..4} \{R(N_i)\} - \min_{i=1..4} \{R(N_i)\} < K_c, \quad \text{on } K_c > \sqrt{2} l_{min} \quad (4.3)$$

essent  $\{R(N_i)\}_{i=1..4}$  els valors  $R$  associats als quatre nodes. El valor que s'associa al nou node, resultat de la fusió dels quatre antics, és el màxim dels quatre valors  $R(N_i)$ , ja que cal que sigui un suprem en tota la regió.

**Definició 25.** Sigui  $A$  un punt de  $\mathbb{D}$ , anomenarem  $R_Q(A)$  al valor  $R$  emmagatzemat al node fulla del quadtree que conté el punt  $A$ .

El valor  $R_Q(A)$  es pot trobar classificant les coordenades del punt  $A$  segons la partició de l'espai paramètric induïda pel quadtree fins arribar al node fulla.

Un cop s'hagi calculat el  $R$ -quadtree, per comprovar l'admissibilitat d'un segment n'hi ha prou amb comparar la seva longitud amb els dos valors  $R$  associats al seus extrems:

**Proposició 3.** *Donat un segment  $AB$  en  $\mathbb{D}$ , podem assegurar que  $AB$  formarà triangles admissibles si es compleix que  $R_Q(A) \geq \|AB\| \vee R_Q(B) \geq \|AB\|$ . En aquest cas, direm que el segment és admissible segons el  $R$ -quadtree.*

Aquesta proposició no és més que un resultat immediat de la definició de triangle admissible i del fet que coneixem que els valors emmagatzemats al  $R$ -quadtree són supremes de la funció  $R$ .

### 4.3 Discretització dels vèrtexs

Durant el preprocessament, explicat al capítol anterior, haurem obtingut una representació topològica del sòlid original i haurem comprovat que la informació és consistent. En concret, per a cada vèrtex tindrem accés al conjunt de semiarestes que hi convergeixen, les quals limiten les cares que el formen. Discretitzar un vèrtex tant sols implica, doncs, trobar les coordenades en espai imatge ( $\mathbb{R}^3$ ) del seu punt representant. Aquestes coordenades s'obtenen avaluant el punt final de les corbes que suporten cadascuna de les semiarestes que arriben al vèrtex o el punt inicial de les que parteixen del vèrtex (les semiarestes duals) i promitjant el resultat. Un cop s'han obtingut les coordenades del punt, es realitza un test addicional amb la finalitat de verificar que el sòlid està ben definit, consistent en comprovar que el punt representant està a una distància menor que  $\epsilon$  de cadascun dels punts inicials o finals de les corbes que convergeixen al vèrtex. La mateixa estructura de dades que representa el sòlid que s'està discretitzant permet accedir cíclicament a les semi-arestes que conflueixen a un vertex donat, i

per tant fer un recorregut de les corbes que convergeixen a un vèrtex resulta trivial.

Les comprovacions que l'algorisme realitza, tals com la que acabem d'explicar, en la implementació es tradueixen un avís a l'usuari informant-lo de la incoherència que s'ha detectat i en una aturada del programa sempre que es tracti d'un error no solucionable.

#### 4.4 Poligonalització de les arestes

Tal com hem explicat a la secció 3.2, les arestes dels sòlids que volem discretitzar estan representades en l'estructura de dades bàsica segons tres representacions: com a dues corbes sobre les superfícies que conflueixen a l'aresta (cares del sòlid) i directament com a corbes a l'espai. En principi, tal com fan [SH92], podríem fer servir el teorema 2, que proporciona una forma de comprovar si un segment de corba aproxima un tros de corba amb una certa tolerància. Això no obstant, un dels nostres objectius és aconseguir que la discretització de cada aresta, que limita dues cares sobre els corresponents pedaços, sigui única i coherent amb els límits sobre la curvatura que s'han calculat en el pas anterior per ambdós pedaços. Per tant, hem optat per utilitzar un enfocament diferent, que directament garanteix la conformitat global de la triangulació que resultarà. D'aquesta manera, no es necessita un segon pas per garantir la correspondència entre les discretitzacions corresponents a les dues semi-arestes, com per exemple ocorre en la proposta de [SH92], que han de "cosir" les dues poligonalitzacions resultants.

Això s'aconsegueix usant dues aplicacions que fan correspondre, per proximitat, punts de la corba en espai imatge,  $C^{3D}$ , amb punts de les dues corbes sobre les superfícies,  $C_i^{2D}$  (vegeu la figura 4.6):

$$F_1 : C^{3D} \longrightarrow C_1^{2D} \quad \text{t.q.} \quad A \longrightarrow F_1(A)$$

$$F_2 : C^{3D} \longrightarrow C_2^{2D} \quad \text{t.q.} \quad A \longrightarrow F_2(A)$$

on  $F_i(A)$  està definit de forma que

$$\text{dist}(S(F_i(A)), A) = \text{dist}(S(C_i^{2D}), A) \quad i = 1, 2$$

Quan es tracta d'implementar aquestes funcions de correspondència, cal tenir en compte que han de comprovar que la correspondència entre un punt ha de ser bastant precisa, no podent superar en cap cas la tolerància  $\epsilon$ . En el cas que aquestes comprovacions fallin, s'avisarà a l'usuari que les diferents representacions de la corba de retallat no es corresponen (i que per tant la triangulació resultant pot ser inadequada).

**Definició 26.** Sigui un segment d'una corba de retallat  $C^{3D}$ , corresponent a una aresta del sòlid, amb punts extrems en espai imatge  $A$  i  $B$ . Siguin  $F_1$  i

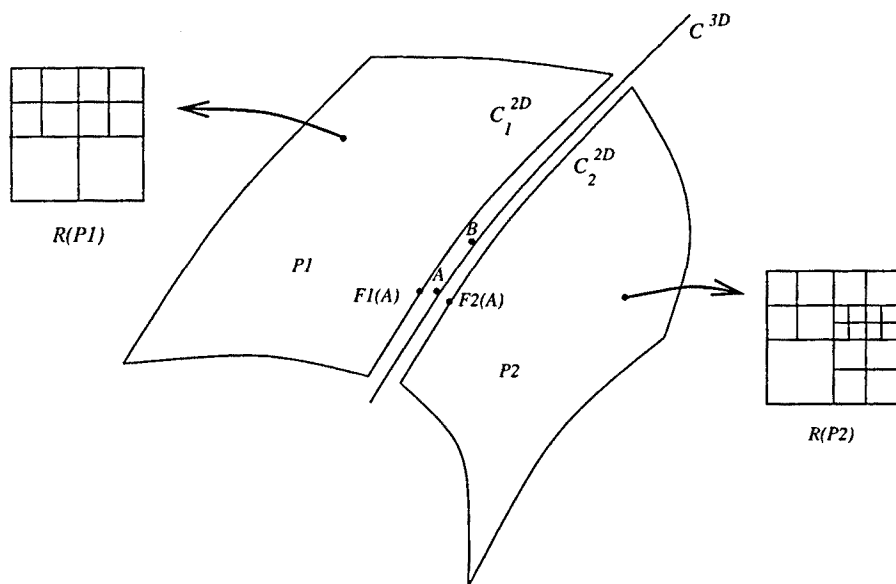


Figura 4.6: Discretització de les arestes

$F_2$  les funcions que fan correspondre punts de la corba en l'espai imatge amb punts de les dues corbes sobre els pedaços  $P_1$  i  $P_2$  que convergeixen a l'aresta. Llavors, direm que el segment de corba pot ser aproximat de forma admissible pel segment de recta  $AB$  sempre que el segment  $F_1(A)F_1(B)$  és admissible respecte al  $R$ -quadree associat al pedaça  $P_1$  i el segment  $F_2(A)F_2(B)$  també és admissible respecte al  $R$ -quadree associat al pedaça  $P_2$ .

La discretització d'una corba es fa biseçant-la recursivament fins obtenir segments admissibles, tal com explicarem tot seguit. Tot i que existeixen molts altres mètodes per discretitzar una corba en segments de recta admissibles, hem triat el de la bisecció atès que és el més senzill de tots ells.

La bisecció dels segments de recta es realitza de la forma més directa possible, és a dir, partint el segment pel punt de la corba corresponent al valor mig dels paràmetres avaluats als seus dos extrems. Atès que disposem de tres representacions de cada corba de retallat, dues com a corba sobre les superfícies que es convergeixen a l'aresta i una tercera com a corba a l'espai imatge, cal decidir quina de les tres representacions utilitzem per biseçar els segments. L'opció més lògica és utilitzar la representació de la corba a l'espai imatge, ja que disposem de les funcions  $F_1$  i  $F_2$ , les quals, donat un punt en espai imatge, permeten trobar fàcilment les coordenades que li corresponen a l'espai paramètric de les dues corbes sobre la superfície.

Fem notar que si se segueix la nostra proposta per discretitzar les arestes no cal analitzar la curvatura de les corbes de retallat, ja que utilitzem la informació emmagatzemada en els quadrees. Això no obstant, cal tenir en compte que en el cas que tractéssim pedaços aïllats, i no objectes tancats,

caldria tenir en compte també la curvatura d'aquelles corbes de retallat obertes, que no formessin una aresta entre dues superfícies (o sigui, que no tinguessin semi-aresta oposada corresponent); altrament, podria ser que la poligonal aproximadora, malgrat ser admissible respecte a la superfície, no ho fos respecte a la corba oberta. Aquest aspecte implicaria haver de modificar tant sols lleugerament part de l'algorisme, tot el demés continuaria essent vàlid.

Com a resultat de la discretització del conjunt de corbes de retallat que limiten una cara s'obté un polígon tancat, amb possibles forats. El proper pas consisteix en obtenir una triangulació admissible de cadascuna de les cares, afegint punts interiors als polígons corresponents. Gràcies a què les corbes de retallat es discretitzen tenint en compte els criteris de curvatura de les dues cares que conflueixen a l'aresta del sòlid, els segments en què haurà quedat discretitzada mai no caldrà subdividir-los un cop hagin estat calculats i per tant el conjunt de triangulacions de les cares serà una triangulació conforme.

## 4.5 Triangulació de les cares

Un cop haguem discretitzat les arestes, disposem d'una sèrie de poligonals tancades que formen un polígon, resultat de la discretització de les corbes de retallat de la cara. D'entre aquests polígons simples, distingim el contorn de la cara de la resta de polígons simples, que corresponen a possibles forats de la cara i que, per tant, estaran inclosos dins del primer. Partim, doncs, d'un polígon definit a l'espai paramètric de la cara del sòlid, format per arestes admissibles, i disposem també de la funció  $R$ , que ens proporciona una condició suficient per assegurar quan un segment és admissible basant-se solament en els seus punts extrems. És en aquest sentit que parlarem de l'admissibilitat d'un segment o triangle segons la funció  $R$ .

Al següent apartat presentarem el mètode de refinament d'arestes, el qual donada una cara representada com un pedaç retallat i disposant del contorn discretitzat de forma admissible obté una triangulació, també admissible, del seu interior. Als apartats subsegüents donarem una fita del nombre de punts (interiors al polígon) que afegeix el mètode de refinament d'arestes, i ens ocuparem de la implementació del mètode. Finalment, presentarem el procés de relaxació, un pas posterior opcional consistent en reposicionar els vèrtexs interiors amb la finalitat de millorar la forma dels triangles.

### 4.5.1 El mètode de refinament d'arestes

L'algorisme que obté una triangulació admissible de l'interior del polígon, respectant les fronteres imposades pels polígons forats, segueix l'esquema següent:

```

acció RefinaArestes( $P$  : Polígon)
  Calcular la triangulació de Delaunay Restringida (CDT)
  del polígon  $P$ 
  Formar una llista que contingui totes les arestes no admissibles
  segons la funció  $R$ 
  mentre la llista no sigui buida fer
    Treure la primera aresta de la llista  $i$ 
    inserir, si cal, un punt a la CDT, actualitzant-la convenientment
    si ha calgut inserir un punt llavors
      actualitzar la llista afegint-hi totes les noves arestes
      no admissibles segons la funció  $R$ .
  fsi
fmentre
facció

```

Fem notar que aquest algorisme és independent de la forma com estiguin ordenades les arestes dins la llista, és a dir, que no importa l'aresta que es triï per ser refinada. Podem per tant utilitzar un criteri heurístic que acceleri el procés, com seria escollir l'aresta més llarga no admissible o bé la que s'allunya més de ser admissible (aquella aresta  $ab$  que compleix que  $\|ab\| - \max\{R(a), R(b)\}$  és màxim).

Tant l'obtenció de la CDT d'un polígon qualsevol com la inserció d'un punt a l'interior d'una CDT són processos coneguts, abastament estudiats per la Geometria Computacional. A l'apèndix A presentem un algorisme incremental, que hem desenvolupat durant l'elaboració d'aquesta tesi, que permet ambdues operacions. Un dels resultats que s'hi exposa és el fet que la inserció d'un punt interior implica tant sols la creació de noves arestes en un entorn local al punt inserit, que depèn de la localització del punt respecte als circumcercles dels triangles veïns.

Si s'insereix un punt o no i quin punt s'insereix – punt mig de l'aresta o punt auxiliar – depèn de la configuració dels triangles adjacents a l'aresta. En el que segueix, ens referirem a l'aresta no admissible que cal refinar com  $ab$ ; els triangles adjacents seran  $T(a, b, c)$  i  $T(a, d, b)$ ; i el punt candidat a inserir l'anomenarem  $x$ . L'aresta  $ab$  no és admissible segons la funció  $R$ , la qual cosa vol dir que

$$R(a) < \|ab\| \wedge R(b) < \|ab\| \quad (4.4)$$

Distingim dues configuracions possibles dels triangles adjacents a l'aresta (vegeu la figura 4.7): el cas en què l'aresta  $ab$  talla la seva aresta dual del diagrama de Voronoi, i el cas en què això no passa. En el primer cas, el punt que s'insereix és el punt mig de l'aresta  $ab$ ; en el segon, s'insereix el circumcentre d'un dels dos triangles adjacents sempre que aquest punt no caigui a

l'exterior de la regió a triangular. En aquest darrer cas, demostrarem que no cal afegir cap punt a la triangulació.

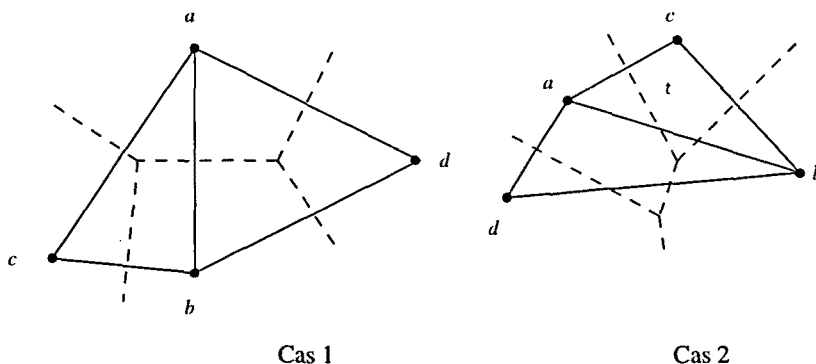


Figura 4.7: Els dos casos que contempla l'algorisme de refinament d'una aresta  $ab$  no admissible, segons la configuració dels triangles adjacents. Els diagrames de Voronoi corresponents estan representats en línies discontinües.

Seguidament analitzarem cadascun dels dos casos esmentats i estudiarem l'admissibilitat de les noves arestes que es formen i la seva llargària.

#### Cas 1: L'aresta $ab$ talla la seva dual.

Tal com hem enunciat, en aquest cas l'algorisme insereix el punt mig de l'aresta  $ab$ , és a dir,  $x = \frac{a+b}{2}$  (aquest punt és precisament la intersecció entre  $ab$  i la seva aresta dual del diagrama de Voronoi).

En inserir  $x$  a la CDT, la nova triangulació contindrà les arestes  $ax$ ,  $bx$ ,  $cx$  i  $dx$ , desapareixent l'aresta  $ab$ , atès que el punt  $x$  és a l'interior dels circumcercles dels triangles  $T(a, b, c)$  i  $T(a, d, b)$ . D'altra banda, per estar  $x$  sobre l'aresta de Voronoi que separa les teselles de  $a$  i  $b$ , no existeix cap punt que sigui més proper a  $x$  que els propis punts  $a$  i  $b$ . En conseqüència, el cercle de radi  $r = \frac{\|ab\|}{2}$  centrat en  $x$  no conté cap punt de la CDT al seu interior i per tant les noves arestes que es formen en inserir  $x$  a la CDT han de ser totes de llargària més gran o igual que  $r$ . De l'equació (4.4) i aplicant el lema 3, podem afitar la longitud de les noves arestes en funció de  $R(x)$ :

$$R(a) < \|ab\| \implies R(x) < \|ab\| + \|ax\| = 3r \implies r > \frac{1}{3}R(x)$$

#### Cas 2: L'aresta $ab$ no talla la seva dual

L'aresta del diagrama de Voronoi dual de  $ab$  té per extrems els circumcentres dels triangles adjacents a  $ab$ ,  $T(a, b, c)$  i  $T(a, d, b)$ . Com que  $ab$  no talla la seva dual, ambdós circumcentres estan situats fora d'un dels dos triangles; suposarem que aquest triangle és  $t = T(a, b, c)$  (vegeu la figura 4.7). En aquest cas, el punt candidat a ser inserit per l'algorisme és el circumcentre

de  $t$ , és a dir, tenim  $x = CC(a, b, c)$ . Fixem-nos que el punt mig de l'aresta  $ab$  en aquest cas pot ser tan proper al vèrtex  $c$  com es vulgui; en conseqüència, no és un bon candidat per ser inserit atès que mai podríem afitar inferiorment la longitud de la nova l'aresta que l'uneix amb  $c$ .

Podria passar que el punt  $x$  fos exterior al polígon contorn i que, per tant, no el poguéssim inserir. Per aquest motiu, hem distingit dos subcasos, depenent de si el segment  $cx$  talla o no el contorn. En cas que no el talli,  $x$  serà visible des de  $c$  i per tant podrem inserir el punt  $x$  sense problemes, altrament, tot i que la funció  $R$  no ens assegura l'admissibilitat del segment  $ab$ , veurem que no cal inserir cap punt.

### Cas 2.A: El segment $cx$ no talla el polígon contorn.

Per ser  $x$  el circumcentre del triangle  $t$  i tenint en compte la condició de no admissibilitat 4.4 podem assegurar que

$$\|ax\| = \|bx\| = \|cx\| \geq \frac{1}{2}\|ab\| > \frac{1}{2}R(a)$$

En inserir el punt  $x$ , l'aresta  $ab$  desapareixerà i en el seu lloc es crearan les arestes  $ax$ ,  $bx$  i  $cx$  (vegeu la figura 4.8).

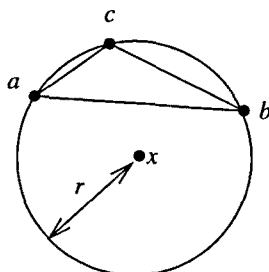


Figura 4.8: Cas 2.A: El punt inserit és el circumcentre de  $T(a, b, c)$ .

A més a més, atès que  $t$  és un triangle de Delaunay, el seu circumcentre  $CC(a, b, c)$ , de radi  $r = \|cx\|$ , no conté cap punt de la triangulació al seu interior. Aplicant el lema 3 a l'anterior desigualtat podem afitar la longitud de les noves arestes que es formaran en funció de  $R(x)$ :

$$R(a) < 2\|cx\| \implies R(x) < 2\|cx\| + \|ax\| = 3r \implies r > \frac{1}{3}R(x)$$

### Cas 2.B: El segment $cx$ talla el polígon contorn.

En aquest cas, tenim una configuració com la mostrada a la figura 4.9, en què existeix una aresta del contorn, a la qual anomenarem  $jk$ , tal que separa  $c$  de  $x$ .

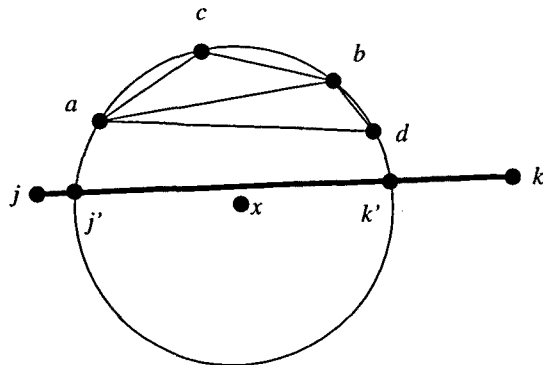


Figura 4.9: Cas 2.B: L'aresta del contorn  $jk$  separa  $c$  de  $x$ .

Atès que les arestes del contorn són totes admissibles segons la funció  $R$ , es compleix que  $R(j) \geq \|jk\| \vee R(j) \geq \|jk\|$ . Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que  $R(j) \geq \|jk\|$ .

Definim el segment  $j'k'$  com la part de  $jk$  inclosa dins el circumcercle del triangle  $T(a, b, c)$  i anomenem  $C_D$  al cercle diametral de  $j'k'$ , és a dir, aquell cercle que té per diàmetre el segment  $j'k'$  (vegeu les figures 4.9 i 4.10). Fixem-nos que  $C_D \subset C_R(j)$ , per estar  $k$  inclòs en  $C_R(j)$ . Seguidament, veurem que:

$$\|ab\| \leq \|j'k'\| \quad \text{i, per tant,} \quad \|ab\| \leq \|jk\| \quad (4.5)$$

$$T(a, b, c) \subset C_D \quad \text{i, en conseqüència,} \quad T(a, b, c) \subset C_R(j) \quad (4.6)$$

Atès que l'aresta  $j'k'$  és una secant del circumcercle del triangle  $T(a, b, c)$  que separa el punt  $x$  (el centre del cercle  $C_D$ ) de  $c$ , l'angle  $\angle j'xk'$  ha de ser menor que  $\pi$  (vegeu la figura 4.10). Per tant, el cercle diametral  $C_D$  conté tota la part del circumcercle on hi ha  $c$ , i en concret conté el triangle  $T(a, b, c)$ . A més a més, per ser  $ab$  una secant de l'arc de cercle tallat per  $j'k'$ , el segment  $ab$  ha de ser de longitud menor que  $j'k'$ .

De les equacions (4.5) i (4.6) i gràcies a l'admissibilitat del segment  $jk$ , podem afirmar que

$$\begin{aligned} R(j) \geq \|jk\| &\implies \forall p \in C_R(j), \Omega(p) \geq \|jk\| \implies \\ &\implies \forall q \in T(a, b, c), \Omega(q) \geq \|jk\| \geq \|ab\| \end{aligned}$$

És a dir, que segons l'equació (4.1) el triangle  $T(a, b, c)$  és admissible, malgrat que solament avaluant la funció  $R$  en els seus extrems no ho poguem assegurar. Per tant, l'algorisme de refinament d'arestes pot tractar l'aresta  $ab$  sense haver d'afegir cap nou punt.

#### 4.5.2 Fita del nombre de punts

El mètode de refinament d'arestes ens proporciona un algorisme per obtenir una triangulació admissible d'una cara. Amb la finalitat d'avaluar



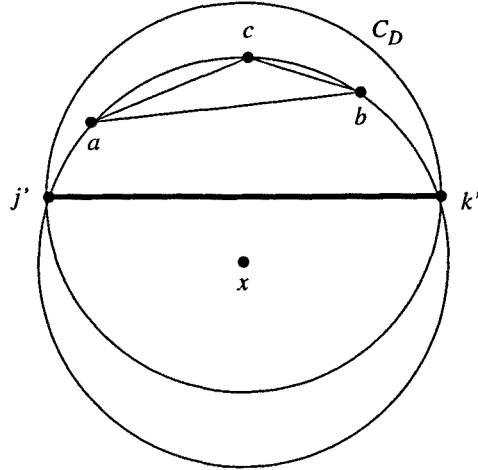


Figura 4.10:  $\|ab\| \leq \|j'k'\|$  i  $T(a, b, c) \subset C_D$ .

l'optimalitat d'aquesta solució trobada, afitem el nombre de punts que afegim l'esmentat mètode.

**Lema 4.** *Donat un punt  $q$  de la triangulació afegit en aplicar l'algorisme de refinament d'arestes, qualsevol altre punt està a una distància més gran que  $\frac{R(q)}{4}$ .*

*Demostració.* Segons hem vist a l'apartat anterior, sempre que l'algorisme afegim un nou punt  $x$  a la triangulació – sigui el punt mig de l'aresta refinada, sigui el circumcentre d'un dels triangles adjacents a l'aresta – les noves arestes  $xq$  que es creen són tals que

$$R(x) < 3\|xq\|$$

Aplicant el lema 3 a aquesta desigualtat,

$$R(x) < 3\|xq\| \implies R(q) < 3\|xq\| + \|xq\| \implies \|xq\| > \frac{R(q)}{4}$$

□

El teorema següent utilitza un argument basat en àrees per proporcionar una fita del nombre de punts que l'algorisme afegim a l'interior. Intuïtivament, una regió en la qual hi hagi una elevada curvatura haurà de ser recoberta per triangles de mida petita, és a dir, la distància entre punts ha de ser proporcional a la inversa del quadrat de la funció  $R$ , que proporciona un límit per a la màxima longitud admesa de les arestes admissibles.

**Teorema 4.** *El nombre de punts de la triangulació resultant és com a molt*

$$\frac{18^2}{\pi} \int_B \frac{1}{R^2(x)} dx$$

on  $B$  és la capsula englobant del polígon contorn.

*Demostració.* L'anterior lema 4 ens assegura que qualsevol punt interior de la triangulació està situat al centre d'una circumferència de radi  $\frac{R(p)}{4}$  que no conté cap altre vèrtex. Si prenem les circumferències de radi meitat, aquestes seran disjunctes. Per tot vèrtex  $p$  interior de la CDT, sigui  $D_p$  la circumferència de radi  $r_p = \frac{R(p)}{8}$  centrada a  $p$ ; atès que com a mínim una quarta part de  $D_p$  resta dins la capsula englobant  $B$ , podem trobar una fita inferior per a la integral sumant el seu valor en les circumferències  $D_p$  per a cada punt  $p$  de la CDT:

$$\int_B \frac{1}{R^2(x)} dx \geq \frac{1}{4} \sum_{p \in CDT} \int_{D_p} \frac{1}{R^2(x)} dx$$

Segons el lema 3, el màxim que pot atènyer la funció  $R$  dins  $D_p$  és  $R(p) + r_p$ , el què ens proporciona una fita per a la integral  $\int_{D_p}$ :

$$\int_{D_p} \frac{1}{R^2(x)} dx \geq \frac{\text{area}(D_p)}{\max_{x \in D_p} \{R^2(x)\}} \geq \frac{\text{area}(D_p)}{(R(p) + r_p)^2}$$

Sabent que  $\text{area}(D_p) = \pi r_p^2$  i substituint  $r_p$  pel seu valor, tenim

$$\int_{D_p} \frac{1}{R^2(x)} dx \geq \frac{\pi r_p^2}{(R(p) + r_p)^2} = \frac{\pi}{9^2}$$

Substituint aquest valor per a tota la integral,

$$\int_B \frac{1}{R^2(x)} dx \geq \frac{1}{4} \sum_{p \in CDT} \frac{\pi}{9^2} \geq \frac{\pi}{18^2} \sum_{p \in CDT} 1$$

Atès que el darrer sumatori merament compta el nombre de vèrtexs de la CDT, el teorema queda demostrat.  $\square$

### 4.5.3 Implementació del mètode de refinament d'arestes

La implementació del mètode de refinament d'arestes s'ha fet seguint l'algorisme exposat a l'apartat 4.5.1, però tenint en compte que no disposem de la funció  $R$ , sinó de la seva discretització emmagatzemada en el  $R$ -quadtrees. L'algorisme utilitza les funcions presentades a l'apèndix A per crear la CDT del graf conjunt format pel polígon contorn i els punts interiors, i manté una llista de les arestes no admissibles que formen la triangulació de l'interior de la cara. Aquesta llista s'actualitza convenientment cada cop que es refina una nova aresta (afegint les noves arestes i traient les que deixen d'existir a la CDT). Fem notar que el procés d'inserció d'un punt en una CDT resulta en general eficient, atès que habitualment tant sols implica intercanviar un

nombre reduït d'arestes. Les noves arestes creades i les eliminades de la CDT, les quals el mateix algorisme incremental localitza, són les que el procés de refinament d'arestes haurà d'afegir a la llista per tal d'actualitzar-la. Cal tenir en compte que hi haurà arestes de la CDT tals que el  $R$ -quadtree no podrà garantir la seva admissibilitat — les del cas 2.B — però malgrat això haurem de treure-les de la llista i no reconsiderar-les. L'algorisme acaba quan la llista d'arestes no admissibles és buida.

A l'apartat 4.5.2 hem calculat un suprem per al nombre de punts que afegeix l'algorisme de refinament d'arestes que depèn d'una constant i del valor d'una integral. Malgrat que la constant val  $\frac{18^2}{\pi} \simeq 103$ , el nombre de punts que hem observat que afegeix l'algorisme és molt inferior a aquesta fita calculada, sobretot quan s'usa algun dels heurístics esmentats d'ordenació de les arestes dins la llista (vegeu l'apartat 4.5.1). Aquest valor teòric gran sembla més aviat una conseqüència de les tècniques usades per a la demostració més que no pas del comportament inherent de l'algorisme. Aquesta qüestió, com totes les demés referents als resultats de l'aplicació dels mètodes proposats, queden recollides al capítol 6.

El procés de refinament d'arestes tendeix a obtenir triangles de forma bona (maximitzant l'angle mínim). Aquest fet és un efecte secundari del comportament de l'algorisme, conseqüència del lloc precís on s'afegeixen els nous vèrtexs. Altres autors ([Che89b], [Rup92]) utilitzen mètodes similars de refinament d'arestes amb la finalitat d'obtenir una triangulació amb un angle mínim que superi un cert valor (per exemple, utilitzant el mètode proposat a [Rup92] es demostra que es pot aconseguir que superi 20 graus). Tot i així, com que el refinament d'arestes s'atura quan la triangulació és admissible (i no segons criteri de la forma), no té perquè aconseguir que la forma triangles sigui òptima. Per això, tal com discutirem al capítol 6, pot ser convenient aplicar la relaxació.

#### 4.5.4 El post-procés de relaxació

Als apartats anteriors hem vist com obtenir una triangulació inicial admissible de cadascuna de les cares del sòlid. En aquest apartat presentarem un mètode per millorar la qualitat de la triangulació, entenenent per qualitat la forma el més regular possible dels triangles resultants (vegeu la secció 2.3). El mètode que proposarem és un procés de relaxació de la triangulació, el qual no incrementa el nombre de vèrtexs de la malla, sinó que tant sols modifica la seva posició i la connectivitat entre ells. Remarquem que el pas la relaxació és un pas posterior al refinament d'arestes totalment opcional i que, tal com veurem, en alguns punts està basat en mesures heurístiques.

Existeixen diversos mètodes que usen la relaxació basada en forces d'atracció/repulsió entre els vèrtexs d'una malla per tal de millorar la regularitat dels triangles, vegeu [Tur92, SG92, BS89] entre d'altres. Es tracta de mètodes bastant vistosos per la seva semblança amb fenòmens naturals.

Potser el més conegut de tots ells és el de la suavització laplaciana (*Laplacian smoothing*), força usat com a postprocés del càlcul de malles sobre les quals s'aplicaran mètodes d'elements finits [Fie89]. La suavització laplaciana és un procés iteratiu que s'aplica a una triangulació, en el qual a cada iteració es mou cadascun dels punts interiors de la triangulació al baricentre dels punts veïns (lligats per una aresta a ell). Aquest procés és equivalent a considerar la malla com un conjunt de molles situades a les arestes dels triangles, i convergeix quan el sistema de molles arriba a un estat d'equilibri, en el qual la suma de les forces que fan les molles en cada punt és nul·la. En el cas que ens ocupa, cal garantir l'admissibilitat de la nova triangulació resultant, la qual cosa implica que cal fer intervenir en algun punt la funció  $R$ , que indica l'admissibilitat dels triangles, presumiblement en el càlcul de les forces entre els vèrtexs. En aquest sentit, podem entendre el procés de relaxació com una suavització laplaciana en la qual els vèrtexs de la triangulació tenen un pes assignat inversament proporcional a la distribució induïda per la funció  $R$ .

El procés de relaxació també treballa íntegrament en espai paramètric, i per tant l'optimització de la forma dels triangles que aconseguirà estarà en funció de la parametrització dels pedaços. Per tant, remarquem, altre cop, la importància del pas del processament que reparametriza els pedaços que componen el sòlid que es vol discretitzar, la qual intenta fer correspondre mesures en espai paramètric amb les mesures en espai imatge; una bona parametrització tindrà com a conseqüència que l'optimització de la forma dels triangles sigui bona també en espai imatge — en definitiva, és a l'espai imatge on importa obtenir triangles sense vèrtexs massa oberts o massa aguts.

L'algorisme de relaxació que proposem parteix d'una CDT corresponent a una cara del sòlid (presumiblement, la CDT admissible aconseguida mitjançant el procés de refinament d'arestes) per aconseguir una nova CDT en la qual haurà millorat la forma dels triangles (els triangles amb vèrtexs obtusos o molt aguts tendiran a desaparèixer). Es tracta d'un algorisme iteratiu que va movent cadascun dels punts interiors (els que no fan part del contorn del polígon) en funció de la força que realitzen els punts veïns sobre ell. El procés acaba quan s'estabilitzen les posicions dels punts interiors (els únics que es mouen), la qual cosa es pot mesurar comprovant si la màxima força que es realitza sobre qualsevol punt interior no supera un cert valor determinat. L'algorisme segueix el següent esquema:

**repetir**

**per** cada punt  $p$  interior de la CDT fer

Sumar les forces que fan els punts veïns sobre ell

Calcular la nova posició del punt, que s'haurà mogut

en la direcció de la força resultant

**fper**

Moure els punts interiors segons les forces calculades

Obtenir la CDT del polígon exterior i punts interiors

**fins que els punts no es moguin**

Tal com hem dit, el càlcul de la força per a cada punt es realitza tenint en compte únicament els punts veïns. Com en el cas de la suavització Laplaciana, hem considerat que dos punts són veïns si estan lligats per alguna aresta de la triangulació en curs. Per tant, la complexitat del càlcul de forces no és d'ordre quadràtic en el nombre de punts, com en principi podria semblar, sinó que depèn del nombre d'arestes que tingui la triangulació, és a dir, que és lineal respecte al nombre de punts.

Malgrat que l'obtenció de la CDT d'un graf qualsevol és un procés que és  $O(n \log n)$ , essent  $n$  el nombre de punts de la CDT, aquest pas es pot accelerar si es tenen en compte els dos següents fets: En primer lloc, atès que els punts del contorn no canvien de posició al llarg del procés, la CDT del polígon contorn inicial és invariant i per tant es pot calcular un sol cop i reaprofitar-la a cada iteració, i en segon lloc, existeixen algorismes eficients (lineals en el nombre de veïns del punt) per al recàlcul d'una CDT quan tant sols un dels punts es mou [GS85], els quals es podrien aprofitar per no haver de tornar a calcular la CDT del graf sencer a cada iteració partint de zero.

El càlcul de la força que s'aplica a cada punt es realitza tenint en compte l'admissibilitat de la triangulació: cal que punts units per arestes no admissibles s'apropin, mentre que les arestes  $ab$  tals que  $\min\{R(a), R(b)\} > \|ab\|$  es poden allargar. Per tant, hem triat una funció de força tal que tendeixi a aquestes condicions. La força resultant és la suma de les forces de tots els punts veïns (vegeu la figura 4.11). Si notem per  $f_{ij}$  la força que fa el punt  $j$ -èssim de la triangulació sobre el punt  $i$ -èssim i  $f_i$  és la força resultant que s'aplica sobre el punt  $i$ -èssim, llavors tenim que

$$f_i = \sum_{\forall j} f_{ij}$$

essent

$$f_{ij} = \begin{cases} \kappa > 0 & \text{si } \|ij\| > \min\{R(i), R(j)\} \\ 0 & \text{si } \|ij\| = \min\{R(i), R(j)\} \\ \kappa < 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Amb aquestes fórmules tant sols hem expressat el fet que les arestes no admissibles fan una força d'atracció sobre els seus punts extrems, mentre que els extrems de les admissibles es repellen, però no hem explicat la magnitud de la força d'atracció/repulsió. De fet, hem provat dos tipus de força: una de constant ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ), i una altra que correspondria al comportament de l'aresta que uneix dos punts com el d'una molla ( $\kappa = k(\|ij\| - \min\{R(i), R(j)\})$ ), i ambdós tipus de força han mostrat un comportament similar, en què el sistema format pels punts interiors (mòvils) convergeix bastant ràpidament cap a una situació estable. En qualsevol cas, la longitud del pas del moviment a cada iteració del vèrtex  $i$ -èssim interior de la triangulació depèn directament de la força resultant,  $f_i$ .

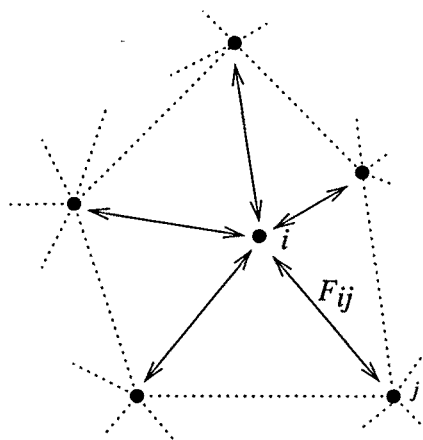


Figura 4.11: Figura de les forces que s'apliquen a cada punt.

Notem que els punts del contorn, tot i que no varien la seva posició, també exerceixen força sobre els punts de l'interior.

Gràcies a què el tipus de forces que hem triat és tal que allarga les arestes admissibles i escurça les que no ho són, es pot comprendre que el procés de relaxació tendirà a conservar l'admissibilitat de les arestes. A més a més, la forma dels triangles millorarà: sabent que en un entorn local d'un punt la funció  $R$  no hi presenta fortes variacions (el lema 3 ens assegura aquesta condició), podem afirmar que en acabar la relaxació les tres arestes d'un triangle seran de longitud semblant, és a dir, que el triangle tendirà a ser equilàter, i per tant no apareixeran angles massa tancats ni massa oberts.

## 4.6 Obtenció de la triangulació final

Un cop s'han calculat les triangulacions en espai paramètric per a cada cara de l'objecte, és poden obtenir les coordenades en espai imatge (3D) de forma senzilla: tant sols cal avaluar la superfície, sobre la qual es troba a cara, en les coordenades paramètriques del punt en qüestió. Hi ha un aspecte, però,

que cal tenir en compte: als punts corresponents als vèrtexs de l'objecte original i els situats sobre les arestes (corresponents a la poligonalització de les corbes de retallat) ja se'ls haurà calculat prèviament les coordenades en tres dimensions dels seus punts representants; cal fer servir sempre aquestes coordenades, i no calcular-ne de noves.

Gràcies a què s'ha anat conservat tota la informació referent al veïnatge topològic entre cares de l'objecte original, és senzill construir una sola triangulació que representa el sòlid discretitzat. És precisament aquest fet el que garanteix que no s'avaluaran per duplicat les coordenades 3D dels punts situats sobre les arestes del sòlid, sinó que s'hauran calculat a partir de les coordenades de la corba en espai euclidià (recordem que per cada corba de retallat es tenen tres representacions, dues com a corba sobre la superfície i una tercera com a corba en espai 3D).

El resultat serà, doncs, un objecte polièdric que aproximarà amb la tolerància desitjada el sòlid original. Degut a la simplicitat dels model resultant (una triangulació) i a què es conserven totes les relacions topològiques entre els triangles, resulta molt senzill escriure l'objecte en qualsevol format estàndard sempre que aquest permeti la representació de cares triangulars. Hem optat per escriure el resultat en un d'entre tres formats estàndard, depenent de l'ús posterior que se'n vulgui fer. Els formats triats han estat:

- STL: dissenyat per a les aplicacions d'estèreolitografia;
- DMI: especialment pensat per al modelatge de sòlids limitats per cares planes;
- Open Inventor: apte per ser recuperat sobre qualsevol programa que admeti aquest format, habitualment aplicacions de visualització.

En el cas del format *Inventor*, hi ha la possibilitat d'associar a cada vèrtex de la triangulació resultant la direcció de la normal a la superfície de l'objecte, amb la finalitat de poder realitzar una visualització de tipus Phong. Donat que els objectes que creem provenen d'un model de superfícies, val la pena calcular analíticament aquesta direcció normal i emmagatzemar-la al fitxer, la qual cosa hem ofert com a opció a l'hora de generar el fitxer de sortida. Amb això obtindrem visualitzacions millorades dels objectes aproximats, donat que la seva superfície serà d'aspecte més suau.





## Capítol 5

# L'algorisme direccional

### 5.1 Introducció

El propòsit d'aquest capítol és desenvolupar un segon algorisme per triangular un sòlid, amb les mateixes característiques que el que hem presentat al capítol anterior, però que a més a més incorpori un objectiu addicional: aprofitar la direccionalitat de la curvatura de la superfície. La idea d'afegir direccionalitat per a la generació de malles ha estat proposada per algun altre autor, vegeu principalment [Mav90], on s'exposa un algorisme de triangulació orientat als MEF, i [DS89], que presenta un mètode per triangular funcions quadràtiques (aquests dos articles estan comentats a l'apèndix A d'aquesta tesi). Això no obstant, fins on sabem no tenim notícia de cap altre treball que intenti aprofitar la informació direccional que aporta la curvatura d'una superfície paramètrica. L'algorisme que desenvoluparem en aquest capítol ha donat lloc a l'article [VPB98].

En el modelatge geomètric per computador és freqüent crear pedaços en què una de les direccions paramètriques tingui una certa curvatura, mentre que en l'altra direcció el pedaça és pla (o gairebé pla). Posem, per exemple, que la superfície s'hagi generat fent un escombrat d'una corba al llarg d'un segment de recta (escombrat paral·lel); o encara, pensem en una superfície toroidal, molt més curvada en una direcció que en l'altra. El què ens hem proposat ha estat utilitzar la informació direccional que ens proporcionen les diverses components de les derivades segones amb la finalitat que les arestes de la triangulació resultant s'aliniïn en la direcció de menys curvatura de la superfície i tinguin una longitud que també depengui de la curvatura. Així doncs, estem donant una clara preferència a l'objectiu de minimitzar el nombre de punts de la triangulació resultant, deixant com a criteri secundari la forma dels triangles. Fem notar que això no obstant els demés criteris (admissibilitat, conformitat i adaptació de la triangulació) es mantenen, ja que no són incompatibles amb el fet d'utilitzar la direccionalitat.

L'algorisme que en resultarà seguirà el mateix esquema que l'isòtrop,

però basat en fites que tindran en compte la direccionalitat sobre la superfície; així doncs, podem entendre que l'algorisme direccional és una generalització de l'algorisme isòtrop. En primer lloc desenvoluparem les fites direccionals (secció 5.2), i arribarem a obtenir condicions d'admissibilitat dels triangles (també senzilles de comprovar) que no seran homogènies respecte a la direccionalitat de les entitats; a la secció 5.3 presentarem una forma d'obtenir les el·lipses i l'equivalent dels  $R$ -quadrees per a cada peça; i la secció 5.4 presenta l'algorisme direccional pròpiament dit, adaptant aquells passos de l'algorisme que calgui (alguns romanen idèntics que en el cas isòtrop).

Recordem que aquest algorisme, com els anteriors, han estat implementats, i que els resultats d'aplicació els hem agrupat al capítol 6.

## 5.2 Fites d'admissibilitat direccionals

En aquesta secció desenvoluparem fites que limitaran les dimensions de les arestes i triangles generats, tal com hem fet a la secció 4.2, però que en aquest cas tindran en compte la direcció d'aquestes entitats en espai paramètric. Seguirem sempre el mateix desenvolupament que per al cas isòtrop, amb funcions i teoremes equivalents, sols que en aquest cas les fites que resultaran seran més fines. Comencem per introduir noves notacions que ens escurçaran les expressions utilitzades més endavant.

$Q_x(p)$ ,  $Q_y(p)$  i  $Q_z(p)$  són les formes quadràtiques associades a les segones derivades de la superfície  $S(u, v)$  al punt  $p$ :

$$Q_x(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_x}{\partial u^2} \Big|_p & \frac{\partial^2 S_x}{\partial uv} \Big|_p \\ \frac{\partial^2 S_x}{\partial uv} \Big|_p & \frac{\partial^2 S_x}{\partial v^2} \Big|_p \end{pmatrix}, \quad Q_y(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_y}{\partial u^2} \Big|_p & \frac{\partial^2 S_y}{\partial uv} \Big|_p \\ \frac{\partial^2 S_y}{\partial uv} \Big|_p & \frac{\partial^2 S_y}{\partial v^2} \Big|_p \end{pmatrix}, \quad Q_z(p) = \text{idem}$$

Ens referirem a les còniques corresponents a aquestes formes quadràtiques com a  $C_x(p)$ ,  $C_y(p)$  i  $C_z(p)$  respectivament, és a dir,  $C_x(p)$  és el conjunt de punts  $q$  de l'espai paramètric tals que

$$(q - p)^T Q_x(p) (q - p) = r$$

Per conveniència, prendrem l'escalar  $r = \frac{9}{2}\epsilon$ , atès que aquest és el valor que s'adiu amb els teoremes que trobarem més endavant.

Utilitzarem també la noció de vèrtex local tal com l'hem definida al capítol anterior (vegeu definició 17).

Per tal d'obtenir condicions d'admissibilitat que depenguin de la direcció en espai paramètric, cal que partim d'equacions on aparegui explícitament aquesta direcció. Enunciem, doncs, l'equivalent del teorema 3, però generalitzat.

**Teorema 5.** Siguin  $S(u, v)$  un pedaç paramètric  $C^2$ ,  $T$  un triangle en espai paramètric i  $l(u, v)$  la funció tal com ha quedat expressada a la definició 16. Llavors, la distància màxima entre  $S(u, v)$  i  $l(u, v)$  satisfà

$$\begin{aligned} \sup_{\{u,v\} \in T} \|S(u, v) - l(u, v)\| &\leq \\ &\leq \frac{2}{9} \sup_{t \in T} \|(\vec{p}\vec{q}^T Q_x(t) \vec{p}\vec{q}, \vec{p}\vec{q}^T Q_y(t) \vec{p}\vec{q}, \vec{p}\vec{q}^T Q_z(t) \vec{p}\vec{q})\| \end{aligned}$$

on  $p$  és el vèrtex local de  $t$  i  $q$  és el punt d'intersecció entre l'aresta de  $T$  oposada a  $p$  i la línia que passa per  $t$  i  $p$  (vegeu la figura 5.1).

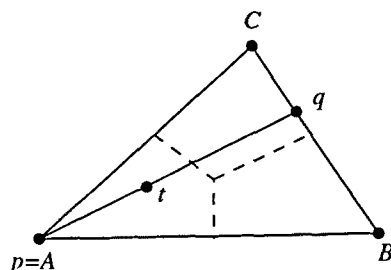


Figura 5.1: Il·lustració per al teorema 5.

Atès que aquest teorema és una generalització del cas direccional, la seva demostració segueix els mateixos passos que la del teorema 3, però quedant-se sempre amb una expressió on apareguin les direccions paramètriques. De fet, la demostració és la mateixa, sols que obté fites més ajustades.

*Demostració.* Sigui  $p_0 = (u_0, v_0) \in T$  el punt on s'ateny la màxima distància entre  $S(u, v)$  i  $l(u, v)$  i sigui  $A = (u_A, v_A)$  el vèrtex local de  $p_0$ . Distingim dos casos en funció de la situació del punt  $p_0$ .

**Cas I:** El punt  $p_0$  es troba sobre una aresta  $AB$  del triangle  $T$ . En aquest cas, podem aplicar el teorema 2 sobre la corba corresponent a l'aresta  $AB$ , i obtenim

$$\begin{aligned} \sup_{\{u,v\} \in T} \|S(u, v) - l(u, v)\| &= \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \|S((1-t)A + tB) - l((1-t)A + tB)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \sup_{t \in AB} \|(\vec{A}\vec{B}^T Q_x(t) \vec{A}\vec{B}, \vec{A}\vec{B}^T Q_y(t) \vec{A}\vec{B}, \vec{A}\vec{B}^T Q_z(t) \vec{A}\vec{B})\| \leq \\ &\leq \frac{2}{9} \sup_{t \in T} \|(\vec{p}\vec{q}^T Q_x(t) \vec{p}\vec{q}, \vec{p}\vec{q}^T Q_y(t) \vec{p}\vec{q}, \vec{p}\vec{q}^T Q_z(t) \vec{p}\vec{q})\| \end{aligned}$$

**Cas II:** El punt  $p_0$  és interior al triangle  $T$ .

$$\begin{aligned} \sup_{\{u,v\} \in T} \|S(u,v) - l(u,v)\| &\leq \left\| \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_0 - u_A)^2 + \right. \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 S}{\partial uv} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_0 - u_A)(v_0 - v_A) + \left. \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (v_0 - v_A)^2 \right) (1 - \xi) d\xi \Big\| \end{aligned}$$

amb  $\kappa = A - p_0$ . Atès que  $A$  és el vèrtex local de  $p_0$ , la proposició 1 ens assegura que

$$(u_0 - u_A, v_0 - v_A) = \lambda(u_q - u_A, v_q - v_A)$$

on  $\lambda \leq \frac{2}{3}$  i  $q = (u_q, v_q)$  és el punt d'intersecció entre l'aresta  $BC$  (aresta de  $T$  oposada a  $A$ ) i la línia que passa per  $A$  i  $p_0$  (vegeu la figura 5.1). En conseqüència,

$$\begin{aligned} \sup_{\{u,v\} \in T} \|S(u,v) - l(u,v)\| &\leq \\ &\leq \left\| \frac{4}{9} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial uv} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)(v_q - v_A) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (v_q - v_A)^2 \right) (1 - \xi) d\xi \right\| \leq \\ &\leq \frac{4}{9} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial uv} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)(v_q - v_A) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (v_q - v_A)^2 \right\| \left| \int_0^1 (1 - \xi) d\xi \right| = \\ &= \frac{2}{9} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial uv} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (u_q - u_A)(v_q - v_A) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{p_0+\xi\kappa} (v_q - v_A)^2 \right\| = \\ &= \frac{2}{9} \sup_{t \in A\vec{p}_0} \left\| \left( \vec{A\vec{q}}^T Q_x(t) \vec{A\vec{q}}, \vec{A\vec{q}}^T Q_y(t) \vec{A\vec{q}}, \vec{A\vec{q}}^T Q_z(t) \vec{A\vec{q}} \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{2}{9} \sup_{t \in T} \left\| \left( \vec{p\vec{q}}^T Q_x(t) \vec{p\vec{q}}, \vec{p\vec{q}}^T Q_y(t) \vec{p\vec{q}}, \vec{p\vec{q}}^T Q_z(t) \vec{p\vec{q}} \right) \right\| \end{aligned}$$

on  $p$  i  $q$  són els punts esmentats.  $\square$

De la mateixa demostració del teorema i comparant-la amb la del teorema 3 es dedueix que la fita que acabem d'obtenir és més ajustada que la del cas direccional, és a dir,

$$\Omega^2(M_1 + 2M_2 + M_3) \geq \sup_{t \in T} \|(\overrightarrow{pq}^T Q_x(t) \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}^T Q_y(t) \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}^T Q_z(t) \overrightarrow{pq})\| \quad (5.1)$$

Com en el cas isòtrop, cal relacionar la fita obtinguda pel teorema amb el concepte d'admissibilitat.

**Corollari 4.** *Un triangle  $T$  és admissible si*

$$\sup_{t \in T} \|(\overrightarrow{pq}^T Q_x(t) \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}^T Q_y(t) \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}^T Q_z(t) \overrightarrow{pq})\| \leq \frac{9}{2}\varepsilon$$

essent els punts  $p, q$  i  $t$  els mateixos que en el teorema anterior.

Aquesta expressió ja ens dóna una manera d'avaluar l'admissibilitat d'un triangle de l'espai paramètric, però hem de buscar una funció més simple que també ens assegurï l'admissibilitat. És a dir, volem obtenir equivalents per a les funcions  $\Omega(p)$  i  $R(p)$  per al cas direccional.

Per construir aquestes funcions, definirem  $\overrightarrow{pq} = \lambda \overrightarrow{v}$ , on  $\lambda$  és un valor escalar (el mòdul del vector  $\overrightarrow{pq}$ ) i  $\overrightarrow{v}$  és un vector unitari. Substituint  $\overrightarrow{pq}$  per  $\lambda \overrightarrow{v}$  a l'expressió donada al corollari 4, obtenim

$$\lambda^4 \leq \left(\frac{9}{2}\varepsilon\right)^2 \frac{1}{(\overrightarrow{v}^T Q_x(t) \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{v}^T Q_y(t) \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{v}^T Q_z(t) \overrightarrow{v})^2}$$

Ara, ja podem definir la funció  $B$ , equivalent a la  $\Omega$  del cas isòtrop, per a tot punt  $t$  del pla  $\mathbb{D}$  i tota direcció paramètrica  $\overrightarrow{v}$ :

**Definició 27 (Funció  $B$ ).**

$$B(t, \overrightarrow{v}) = \sqrt{\frac{9}{2}\varepsilon} [(\overrightarrow{v}^T Q_x(t) \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{v}^T Q_y(t) \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{v}^T Q_z(t) \overrightarrow{v})^2]^{-\frac{1}{4}}$$

Aquesta funció permet reformular el teorema 5 en uns altres termes:

**Teorema 6.** *Una condició suficient per a què un triangle  $T$  en espai paramètric sigui admissible és que compleixi la desigualtat següent*

$$B(t, \overrightarrow{v}) \geq \|\overrightarrow{pq}\|$$

on  $t$  és el punt de  $T$  on s'ateny l'error màxim d'aproximació,  $p$  és el vèrtex local de  $t$ ,  $q$  és el punt d'intersecció entre l'aresta de  $T$  oposada a  $p$  i la línia que passa per  $t$  i  $p$ , i  $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{pq}}{\|\overrightarrow{pq}\|}$ .

La funció  $B$  es pot expressar en funció de les coordenades polars centrades en el punt  $p$ . Si fem el canvi  $\vec{v} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$  en la definició de la funció  $B$ , obtenim l'expressió següent:

$$\begin{aligned}
 B(p, \phi) = \sqrt{\frac{9}{2}} \varepsilon [ & \|M_{uu}(p)\|^2 \cos^4(\phi) + 4M_{uv}^T(p)M_{uu}(p) \cos^3(\phi) \sin(\phi) + \\
 & + (4\|M_{uv}(p)\|^2 + 2(M_{uu}^T(p)M_{vv}(p))) \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + \\
 & + 4M_{uv}^T(p)M_{vv}(p) \cos(\phi) \sin^3(\phi) + \|M_{vv}(p)\|^2 \sin^4(\phi) ]^{-\frac{1}{4}}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Per a qualsevol punt  $p \in \mathbb{D}$ , la funció  $B$  defineix una regió centrada en  $p$  que conté els punts  $q$  tals que

$$B\left(p, \frac{\vec{pq}}{\|\vec{pq}\|}\right) \geq \|\vec{pq}\|$$

Ens referirem a aquesta regió com a  $B(p)$ . A la figura 5.2 hem representat alguns exemples de la regió  $B(p)$  per a diferents pedaços. Aquestes figures han estat obtingudes substituint els valors de les segones derivades a l'equació (5.2), amb la qual cosa queda una expressió en coordenades polars, còmode de manipular.

En el cas isòtrop disposàvem de les funcions  $\Omega$  i  $R$  i a partir d'elles definim els cercles associats a les funcions,  $C_\Omega$  i  $C_R$ . La generalització que proposem per aquests conceptes són el·lipses, perquè són formes bastant senzilles i fàcils d'emmagatzemar, però que a la vegada poden proporcionar diferents fites en funció de la direcció. En certa manera, es fa una analogia amb el concepte de cònica de Dupin, que s'utilitza en geometria diferencial. Les el·lipses que generalitzen els conceptes de cercles d'admissibilitat  $C_\Omega(p)$  i  $C_R(p)$  les hem anomenades  $E_\Omega(p)$  i  $E_R(p)$  respectivament.

Observem que la funció  $B$  té l'inconvenient que no té una forma senzilla (vegeu la figura 5.2), i per tant calcular les el·lipses  $E_R$  basant-se directament en  $B$  seria una tasca costosa. Enlloc d'això, en primer lloc definirem una el·lipse  $E_\Omega$  continguda dins  $B$  tal que  $E_\Omega$  serà una fita per a què un triangle sigui admissible:

**Definició 28 ( $E_\Omega$ ).** Donat  $p \in \mathbb{D}$ , definim  $E_\Omega(p)$  com una el·lipse centrada en  $p$ , continguda en  $B(p)$ , que conté el cercle  $C_\Omega(p)$  i que té àrea màxima.

Podem assegurar que una el·lipse tal com aquesta es pot trobar sempre: com que el teorema 5 proporciona una fita més ajustada que el teorema 3, segons assegura l'expressió (5.1), el cercle  $C_\Omega(p)$  està inclòs en  $B(p)$  (i aquest cercle pot ser vist com l'el·lipse buscada). La condició d'àrea màxima la imposem perquè el nostre objectiu és aconseguir fites tals que admetin tantes entitats com sigui possible; per tant, com més àmplia sigui la zona que delimita l'admissibilitat, millor. A la secció 5.3 descriurem un mètode que

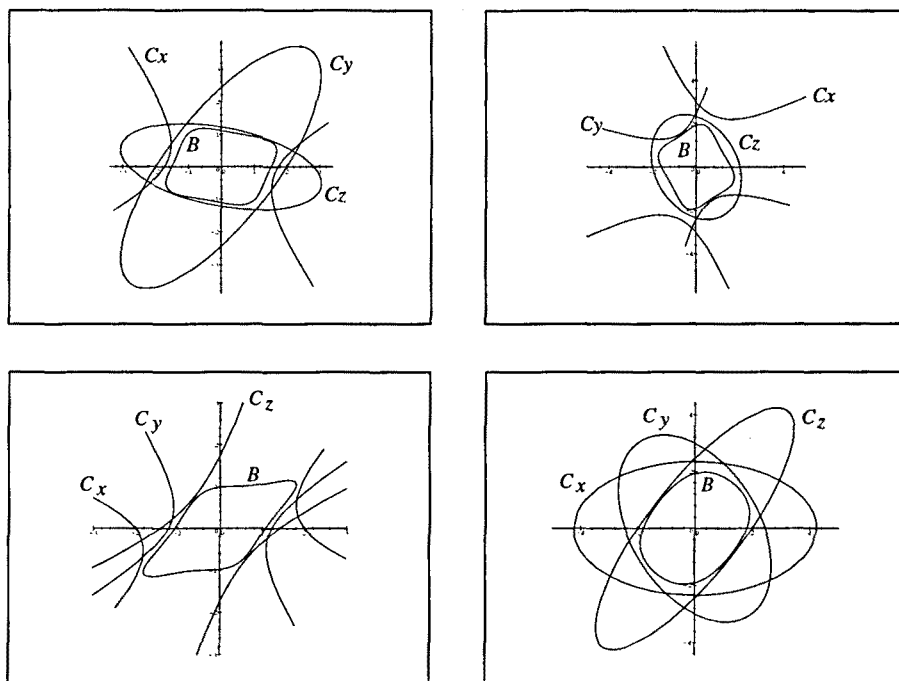


Figura 5.2: Diversos exemples de la regió  $B$  i de les tres còniques,  $C_x$ ,  $C_y$  i  $C_z$ .

hem desenvolupat per obtenir una el·lipse  $E_\Omega(p)$  interior a  $B(p)$  per a un punt arbitrari  $p \in \mathbb{D}$ , i que garanteix que millora el cas isòtrop, és a dir, que

$$C_\Omega(p) \subset E_\Omega(p)$$

El pas següent és obtenir les el·lipses  $E_R(p)$ , per tal de poder comprovar l'admissibilitat dels triangles usant una condició senzilla com la del cas isòtrop. La definició de les el·lipses  $E_R$  a partir de les  $E_\Omega$  l'hem feta generalitzant la definició de la funció  $R$  a partir de  $\Omega$ . Abans, caldrà fer una sèrie de definicions auxiliars:

**Definició 29.**  $E_\Omega(q, p)$  és l'el·lipse centrada en el punt  $p$  obtinguda traslladant  $E_\Omega(q)$ .

**Definició 30.**  $\mathcal{C}(p, r)$  és el cercle de radi  $r$  centrat en  $p$ .

**Definició 31** ( $E_R$ ).

$$E_R(p) = \min_{q \in E_\Omega(p)} \{f_E(p, q)\}$$

on

$$f_E(p, q) = \max\{\text{Red}P(E_\Omega(p), q), \text{Red}E(E_\Omega(p), E_\Omega(q))\}$$

En aquest cas, enlloc de tractar amb valor escalars com en el cas isòtrop, hem de manegar regions el·líptiques. Per tant, la distància entre punts es tradueix en aquest cas en l'elipse reduïda respecte a un punt,  $RedP$ :

**Definició 32 ( $RedP$ ).** Donada una ellipse  $E_{\Omega}(p)$  i un punt  $q \in E_{\Omega}(p)$ ,  $RedP(E_{\Omega}(p), q)$  és l'elipse tal que compleix les següents condicions (vegeu la figura 5.3):

1. Té els mateixos eixos principals que  $E_{\Omega}(p)$ .
2. El punt  $q$  està situat a la seva frontera.
3. Si  $q \in C_{\Omega}(p)$ , llavors  $C(p, \|pq\|) \subset RedP(E_{\Omega}(p), q)$ ; en cas contrari,  $C_{\Omega}(p) \subset RedP(E_{\Omega}(p), q)$ .
4. D'entre totes les que compleixen les condicions anteriors, és aquella que té àrea màxima.

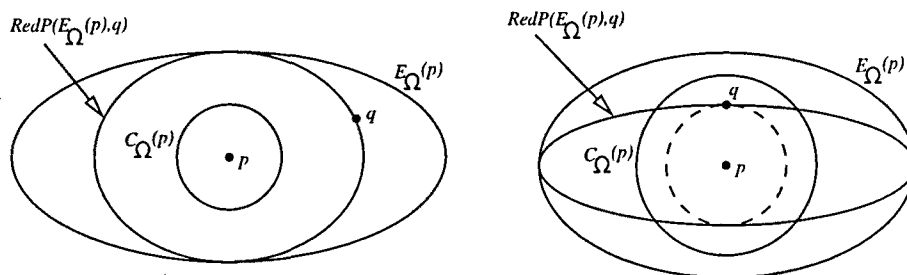


Figura 5.3: Elipse reduïda segons un punt. A la dreta, cas en què el punt  $q$  sigui interior a  $C_{\Omega}(p)$ ; el cercle dibuixat amb línies discontinües és  $C(p, \|pq\|)$ . A l'esquerra, cas en què  $q$  és exterior a  $C_{\Omega}(p)$ .

Observem que una ellipse tal com ha quedat definida sempre la podem trobar, ja que per als punts exteriors a  $C_{\Omega}(p)$  aquest mateix cercle pot ser expandit fins obtenir una ellipse amb  $q$  a la seva frontera i tal que compleix la condició d'inclusió en  $RedP(E_{\Omega}(p), q)$ ; i per als punts  $q$  interiors a  $C_{\Omega}(p)$ , com a mínim el propi cercle  $C(p, \|pq\|)$  és el que compleix les condicions de la definició. Fem notar que la darrera condició per a la definició de  $RedP$  utilitza el criteri d'àrea màxima, que també hem imposat en la definició de  $E_{\Omega}$ , que proporciona com a admissibles el major nombre d'entitats possible.

**Definició 33 ( $RedE$ ).** Donades dues el·lipses  $E_{\Omega}(p)$  i  $E_{\Omega}(q)$  tals que  $q \in E_{\Omega}(p)$ , definim  $RedE(E_{\Omega}(p), E_{\Omega}(q))$  com una ellipse tal que compleix les següents condicions (vegeu la figura 5.4):

1. Té els mateixos eixos principals que  $E_{\Omega}(p)$ .
2. Està continguda en  $E_{\Omega}(p)$  i en  $E_{\Omega}(q, p)$ .
3. Conté el cercle  $C(p, \min\{\Omega(p), \Omega(q)\})$ .
4. D'entre totes les que compleixen les condicions anteriors, és aquella que té àrea màxima.



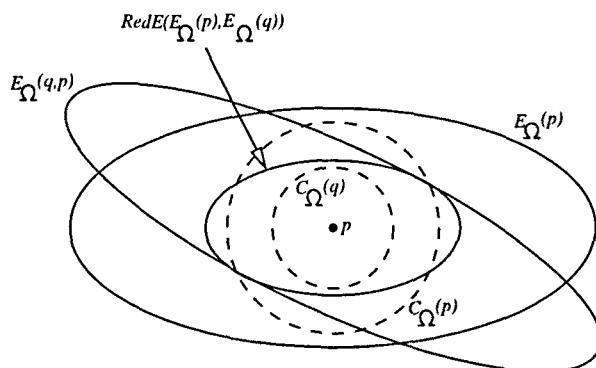


Figura 5.4: Il·lustració per a la definició d'el·lipse reduïda segons una altra. Nota: el cercle puntejat interior estrictament parlant no és  $C_{\Omega}(q)$ , sinó que és aquest cercle centrat en  $q$ , o sigui  $C(p, \Omega(q))$ .

De manera semblant a com hem observat per la definició de  $RedP$ , podem afirmar que sempre existeix una el·lipse que compleixi les condicions de la definició de  $RedE$ , ja que com a mínim el cercle  $C(p, \min\{\Omega(p), \Omega(q)\})$  ho fa. Altra vegada, intentem obtenir el màxim nombre d'entitats possible utilitzant el criteri d'àrea màxima.

Ens cal encara definir dos altres conceptes per acabar de determinar  $E_R(p)$ : el màxim de dues el·lipses i el mínim d'un conjunt d'el·lipses, en ambdós casos tenint en compte que les el·lipses són concèntriques i tenen els mateixos eixos.

**Definició 34 (Màxim de dues el·lipses).** Siguin  $E_1$  i  $E_2$  dues el·lipses concèntriques i amb els mateixos eixos principals. Sigui  $\lambda_1^{MAX}$  el màxim valor propi de  $E_1$  i  $\lambda_2^{MAX}$  el màxim valor propi de  $E_2$ . El màxim de les dues el·lipses és aquella de les dues tal que el seu màxim valor propi és el més petit. És a dir (vegeu la figura 5.5),

$$\max\{E_1, E_2\} = E_1 \iff \lambda_1^{MAX} < \lambda_2^{MAX}$$

Fem notar que el màxim dels valors propis d'una el·lipse ens proporciona el cercle més gran que hi està contingut.

Notem que en cas que les dues el·lipses comparteixin el màxim valor propi, és irrellevant l'el·lipse que es triï com a màxima. De cara als nostres propòsits, en aquest cas convé prendre com a màxim l'el·lipse d'àrea màxima, altre cop per aconseguir com més entitats admissibles millor.

La proposició següent es dedueix directament de la definició del màxim de dues d'el·lipses:

**Proposició 4.** Per a tot cercle  $C$  concèntric a dues el·lipses qualssevol  $E_1$  i  $E_2$ ,

$$C \subset E_1 \implies C \subset \max\{E_1, E_2\}$$

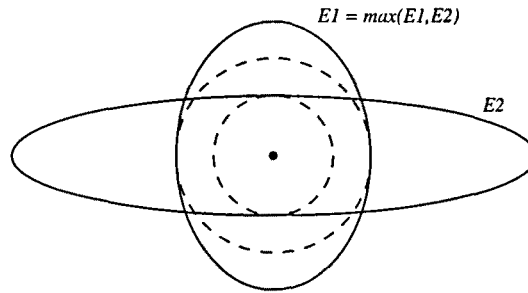


Figura 5.5: Màxim de dues el·lipses. Els cercles dibuixats en línies discontinues són els dos màxims cercles continguts dins cadascuna de les dues el·lipses. Podem observar que es compleix la proposició 4.

Aquesta propietat es compleix precisament perquè el màxim de les dues el·lipses ha estat definit de manera que sigui aquella que contingui el cercle més gran possible, és a dir, la de màxim valor propi més petit (vegeu la figura 5.5).

**Definició 35 (Mínim d'un conjunt d'el·lipses).** Sigui  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  un conjunt d'el·lipses concèntriques i amb els mateixos eixos principals. El mínim de les el·lipses

$$\min\{\mathcal{E}\} = \min\{E_1, E_2, \dots\}$$

és una altra el·lipse amb els mateixos eixos continguda dins de totes el·lipses i que té àrea màxima (vegeu la figura 5.6).

És a dir, si  $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots$  són els valors propis de les el·lipses en una direcció de l'eix i  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$  són els valor propis de les el·lipses en la direcció de l'altre eix, llavors l'el·lipse mínima té els mateixos eixos que les demés el·lipses i els seus valors propis en cadascun dels eixos són

$$\lambda_1 = \max\{\lambda_1^1, \lambda_1^2, \dots\} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \max\{\lambda_2^1, \lambda_2^2, \dots\} \quad (5.3)$$

La següent proposició es dedueix directament de la forma com acabem de definir el mínim d'un conjunt d'el·lipses:

**Proposició 5.** Per a tot cercle  $C$  concèntric a un conjunt d'el·lipses qualssevol  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ ,

$$C \subset E_1 \cap E_2 \cap \dots \quad \implies \quad C \subset \min\{\mathcal{E}\}$$

En aquesta ocasió, aquesta propietat també es pot comprovar observant els valors propis de l'el·lipse mínima, continguda dins totes les del conjunt.

El següent teorema ens garanteix la millora de les fites direccionals respecte a les del cas isòtrop.

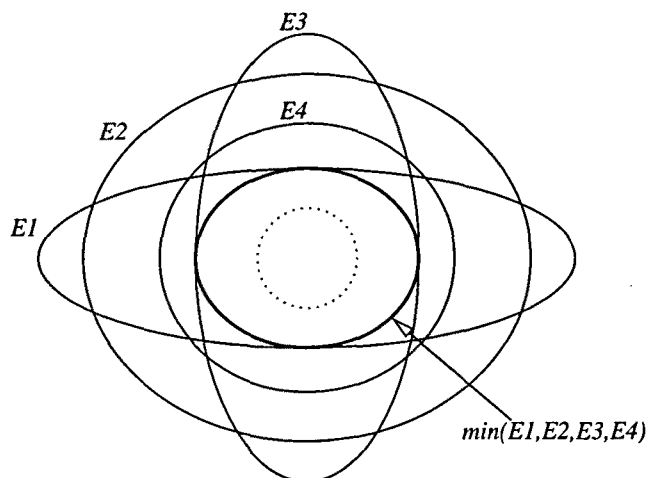


Figura 5.6: Mínim d'un conjunt d'el·lipses. Podem observar que es compleix la proposició 5 respecte a qualsevol cercle (fixeu-vos en el cercle puntejat).

**Teorema 7.**

$$C_R(p) \subset E_R(p)$$

*Demostració.* Sigui  $q \in E_\Omega(p)$ , veurem que  $C_R(p) \subset f_E(p, q)$ .

**Cas A:**  $q \notin C_\Omega(p)$ . Llavors

$$\text{Red}P(E_\Omega(p), q) \supset C_\Omega(p) \supset C_R(p)$$

és a dir, que segons la proposició 4,

$$C_R(p) \subset \max\{\text{Red}P(E_\Omega(p), q), \text{Red}E(E_\Omega(p), E_\Omega(q))\}$$

**Cas B:**  $q \in C_\Omega(p)$ . Llavors

$$\text{Red}P(E_\Omega(p), q) \supset C(p, \|pq\|)$$

Si  $\max\{\|pq\|, \Omega(q)\} = \|pq\|$ , llavors de la definició de  $R(p)$  tenim que

$$C_R(p) \subset C(p, \|pq\|) \subset \text{Red}P(E_\Omega(p), q)$$

Si  $\max\{\|pq\|, \Omega(q)\} = \Omega(p)$ , llavors

$$C_R(p) \subset C(p, \Omega(q))$$

I donat que  $C_R(p) \subset C_\Omega(p)$  i tenint en compte la definició de  $\text{Red}E$ ,

$$C_R(p) \subset C(p, \min\{\Omega(p), \Omega(q)\}) \subset \text{Red}E(E_\Omega(p), E_\Omega(q))$$

És a dir, que usant la proposició 4 en qualsevol cas tenim que

$$C_R(p) \subset \max\{RedP(E_\Omega(p), q), RedE(E_\Omega(p), E_\Omega(q))\} = f_E(p, q)$$

Com que  $q$  és un punt qualsevol interior a  $E_\Omega(p)$ , la proposició 5 ens assegura que

$$C_R(p) \subset \min_{q \in E_\Omega(p)} \{f_E(p, q)\} = E_R(p)$$

□

**Proposició 6.**

$$\forall t \in Int(E_R(p)) \implies E_R(p) \subset E_\Omega(t, p)$$

on per  $Int(E_R(p))$  entenem l'interior de l'elipse  $E_R(p)$ .

*Demostració.* De la definició de  $E_R$  es segueix que  $E_R(p) \subset E_\Omega(p)$ , i per tant

$$\begin{aligned} t \in Int(E_R(p)) &\implies t \in Int\left(\min_{q \in E_\Omega(p)} \{f_E(p, q)\}\right) \implies \\ &\implies t \in Int(f_E(p, t)) = Int(\max\{RedP(E_\Omega(p), t), RedE(E_\Omega(p), E_\Omega(t))\}) \end{aligned}$$

Com que, per definició,  $t$  és un punt de la frontera de  $RedP(E_\Omega(p), t)$  i no del seu interior, el màxim de les dues el·lipses ha de ser  $RedE(E_\Omega(p), E_\Omega(t))$ . Una de les condicions de la definició de  $RedE$  és que estigui contingut en  $E_\Omega(t, p)$ , i per tant

$$E_R(p) \subset RedE(E_\Omega(p), E_\Omega(t)) = f_E(p, t) \subset E_\Omega(t, p)$$

□

El teorema que enunciarem tot seguit, derivat de l'anterior proposició, és la base per trobar una forma senzilla de garantir l'admissibilitat dels triangles tenint en compte únicament els seus vèrtexs.

**Teorema 8.** *Una condició suficient per a què un triangle  $T = T(A, B, C)$  sigui admissible és*

$$B, C, A + \overrightarrow{CB} \in E_R(A)$$

per un dels vèrtexs  $A$ .

Fixem-nos que el teorema l'hem enunciat independentment de quin sigui el vèrtex  $A$ .

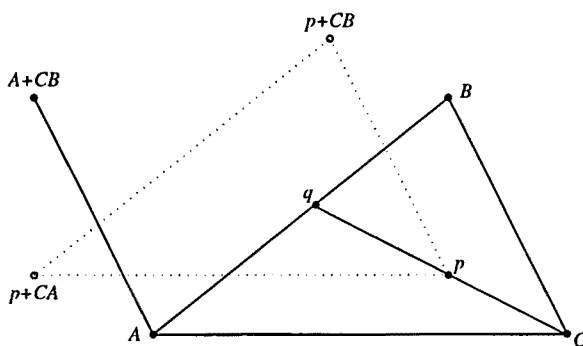


Figura 5.7: Il·lustració per al teorema 8.

*Demostració.* Sigui  $t$  el punt on s'ateny l'error màxim d'aproximació,  $p$  el vèrtex local de  $t$  i  $q$  el punt d'intersecció entre l'aresta de  $T$  oposada a  $p$  i la línia que passa per  $t$  i  $p$ . Segons el teorema 6, sabem que n'hi ha prou amb veure que el punt  $t + \overrightarrow{pq} \in E_\Omega(t)$  per comprovar l'admissibilitat de  $T$ , ja que per definició  $E_\Omega(t) \subset B(t)$ .

Com que  $E_R(A)$  és una regió convexa, tot el triangle  $T$  és interior a  $E_R(A)$ , ja que els seus tres vèrtexs hi estan continguts. La proposició 6 ens assegura que

$$t \in \text{Int}(E_R(A)) \implies E_R(A, t) \subset E_\Omega(t)$$

En el cas en què  $p = A$  ja hem acabat, atès que  $q$  està sobre l'aresta  $BC$ , i per tant  $t + \overrightarrow{Aq} \in E_\Omega(t)$ . Falta veure tant sols el cas en què  $p$  sigui un dels altres dos vèrtexs ( $B$  o  $C$ ). Suposem que  $p = C$ , l'altre cas es demostra de forma anàloga (vegeu la figura 5.7). Notem que  $A + \overrightarrow{CB} \in E_R(A)$  implica  $A + \overrightarrow{BC} \in E_R(A)$ , per ser  $E_R$  una regió simètrica.

$$t + \overrightarrow{CB}, t + \overrightarrow{CA} \in E_R(A, t) \subset E_\Omega(t)$$

i per tant,

$$t + \overrightarrow{Cq} \in E_\Omega(t)$$

□

Remarquem que, a diferència del cas isòtrop, en aquest cas no disposem d'una condició d'admissibilitat senzilla per a les arestes, sinó que ens hem de quedar amb la dels triangles. Això no obstant, comprovar si una triangulació és admissible també resulta senzill un cop es disposa de la condició d'admissibilitat per als triangles. A més a més, sabem que la condició d'admissibilitat en el cas isòtrop per un triangle és més forta que en el cas direccional, tal com enuncia la següent proposició.

**Proposició 7.** *Tot triangle admissible segons el criteri isòtrop també ho és segons el criteri direccional.*

*Demostració.* El criteri d'admissibilitat per al cas isòtrop es basa en comprovar l'admissibilitat de les tres arestes que formen el triangle. Sigui  $T = T(A, B, C)$  un triangle en espai paramètric i sigui  $AB$  l'aresta més llarga de  $T$ . Que  $AB$  sigui admissible segons el cas isòtrop vol dir que

$$B \in C_R(A) \vee A \in C_R(B)$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $B \in C_R(A)$ . Llavors, com que  $AB$  és l'aresta més llarga de  $T$ ,

$$B \in C_R(A) \implies C, A + \overrightarrow{BC} \in C_R(A) \subset E_R(A)$$

□

### 5.3 Càlcul de les fites el·líptiques

En aquesta secció presentarem un mètode per obtenir una el·lipse  $E_\Omega$  inclosa dins la regió  $B$  per un punt donat  $p$ . A més a més, adaptarem els conceptes de  $R$ -quadtrees i de zona d'influència per al cas direccional, els quals permetran disposar d'una forma ràpida de comprovar l'admissibilitat de triangles i arestes.

#### 5.3.1 Càlcul de l'el·lipse inclosa en $B$

Volem obtenir una el·lipse  $E_\Omega(p)$  amb matriu associada  $M_E$ , la qual ve determinada per els seus vectors propis, que anomenarem  $(x_1, x_2), (-x_2, x_1)$ , i valors propis,  $a, b$ :

$$M_E = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_2^2 & (a-b)x_1x_2 \\ (a-b)x_1x_2 & ax_2^2 + bx_1^2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Llavors, l'equació de  $E_\Omega$  s'expressarà com:

$$m_1x^2 + 2m_2xy + m_3y^2 = \frac{2}{9}\varepsilon$$

Prenem com a terme independent d'aquesta equació implícita  $\frac{2}{9}$  amb la finalitat que es pugui comparar l'el·lipse amb la funció  $B$ . L'el·lipse defineix una funció en coordenades polars,

$$f_{E_\Omega(p)}(\phi) = \sqrt{\frac{9}{2}\varepsilon} [m_1 \cos^2(\phi) + 2m_2 \cos(\phi) \sin(\phi) + m_3 \sin^2(\phi)]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

la qual proporciona el valor màxim de  $\lambda$  sobre l'el·lipse en la direcció donada per l'angle  $\phi$ .

Segons això, la condició d'inclusió  $E_\Omega \subset B$  es pot imposar comparant l'expressió (5.2) amb (5.5). Així, la condició que la corba  $E_\Omega(p)$  ha de ser interior a  $B(p)$  queda de la següent forma:

$$\begin{aligned} \forall \phi \in [0, 2\pi] \quad f_{E_\Omega(p)}(\phi) &\leq B(p, \phi) \\ &\Downarrow \\ (m_1 \cos^2(\phi) + 2m_2 \cos(\phi) \sin(\phi) + m_3 \sin^2(\phi))^2 &\geq \sum_{i=0}^4 \alpha_{i+1} \cos^{4-i}(\phi) \sin^i(\phi) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \|M_{uu}(p)\|^2 \\ \alpha_2 &= 4M_{uv}^T(p)M_{uv}(p) \\ \alpha_3 &= 4\|M_{vv}(p)\|^2 + 2M_{uv}^T(p)M_{vv}(p) \\ \alpha_4 &= 4M_{uv}^T(p)M_{vv}(p) \\ \alpha_5 &= \|M_{vv}(p)\|^2 \end{aligned}$$

Una manera d'aconseguir aquesta condició consisteix en formular les dues expressions de cada banda de la desigualtat en la base de Bernstein-Bézier i imposar que els punts de control de la part esquerra siguin superiors als punts de control de la part dreta. Fent això, s'obtenen una sèrie de nou desigualtats, una per a cada punt de control de les corbes de Bézier, que cal que compleixin els valors  $a, b, x_1$  i  $x_2$ :

$$\begin{aligned} m_1^2 &\geq \alpha_1, \\ m_1^2 + m_1 m_2 &\geq \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2, \\ \frac{6}{7}m_1^2 + 2m_1 m_2 + \frac{2}{7}m_1 m_3 + \frac{4}{7}m_2^2 &\geq \frac{6}{7}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{7}\alpha_3, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Recordem que els valors  $m_1, m_2$  i  $m_3$  no són més que combinacions lineals de  $a, b, x_1$  i  $x_2$  (vegeu l'equació (5.4)).

Notem que atès que la cònica resultant ha de ser una el·lipse, cal imposar una condició addicional,  $a, b > 0$ . Resoldre aquest sistema d'inequacions per al les quatre incògnites és una tasca massa costosa. Enlloc d'això, el mètode que hem desenvolupat calcula en primer lloc la direcció dels eixos principals de l'el·lipse – és a dir, calcula els vectors propis de la matriu  $M$ ,  $(x_1, x_2)$  – i després troba l'el·lipse amb aquests vectors inclosa en  $B(p)$  i tal que té àrea màxima – és a dir, troba els valors propis  $a$  i  $b$  més petits que compleixen el sistema d'inequacions que resulta.

Atès que d'entre les tres còniques ( $C_x, C_y$  i  $C_z$ ), la que més restringeix la mida de  $B$  és la que té el valor propi més gran (vegeu la figura 5.2),

resulta una opció raonable imposar que  $E_\Omega$  tingui els mateixos eixos que aquesta el·lipse. Un cop s'han fixat els vectors propis, l'algorisme que troba els valors propis parteix del cercle del cas isòtrop,  $C_\Omega(p)$ , que pot ser vist com una el·lipse amb els vectors propis donats i valors propis  $\frac{1}{\sqrt{\Omega(p)}}$ , i va fent decreïxer aquests valors propis per obtenir l'el·lipse buscada, continguda en  $B$  i d'àrea màxima. Per assegurar que l'el·lipse és interior a  $B$ , es fan servir les desigualtats de (5.6). Com que partim del cercle  $C_\Omega(p)$  i sabem del cert que  $C_\Omega \subset B$ , podem assegurar que els límits que trobarem milloren el cas direccional. La figura 5.8 mostra alguns exemples d'aplicació d'aquest mètode per a l'obtenció de  $E_\Omega$ .

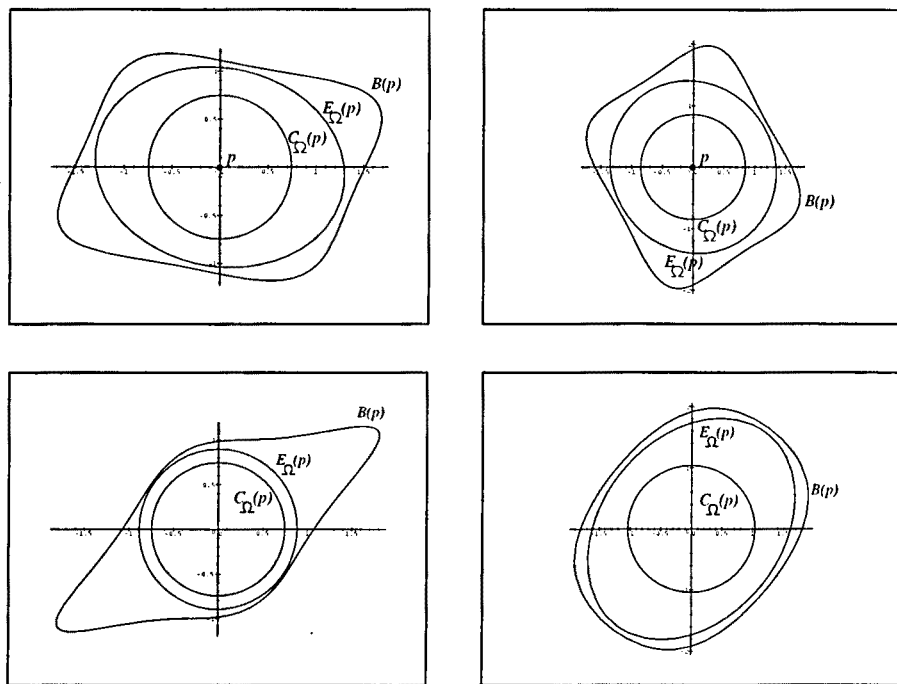


Figura 5.8: Els mateixos exemples de la funció  $B$  que en la figura 5.2, els cercles  $C_\Omega(p)$  corresponents al cas isòtrop i les el·lipses contingudes  $E_\Omega$ , trobades usant el mètode exposat.

### 5.3.2 Càlcul dels quadrees de fites

Com en el cas isòtrop, treballarem amb una discretització de les funcions  $E_R(p)$  que emmagatzemarem en un quadree de fites que permetrà comprovar mitjançant un senzill test l'admissibilitat de les arestes. Ara, però, el quadree enlloc d'emmagatzemar valors escalars, haurà de guardar el·lipses (és a dir, els coeficients que les defineixen; vegeu la figura 5.9).



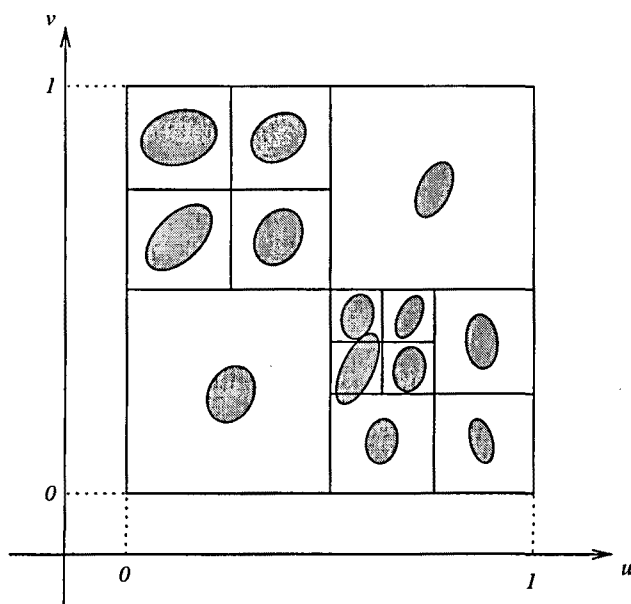


Figura 5.9: Representació esquemàtica d'un quadtree de fites el·líptiques associat a un peçaç

El càlcul de les el·lipses  $E_{\Omega}$  associades a cada regió es fa segons ha quedat descrit a les seccions anteriors, però utilitzant fites de les segones derivades a cada regió ( $M_{uu}$ ,  $M_{uv}$  i  $M_{vv}$ ). Un cop s'hagin calculat les el·lipses  $E_{\Omega}$  de cada regió, utilitzarem la definició de  $E_R$  per obtenir el quadtree d'el·lipses. Atès que a cada regió hi tindrem associada una el·lipse (enlloc d'un cercle, com al cas isòtrop), cal redefinir el concepte de zona d'influència d'una regió:

**Definició 36 (Zona d'influència el·líptica).** Donada una regió quadrada d'un peçaç, anomenem zona d'influència el·líptica del node,  $ZIE(N)$ , el lloc geomètric

$$\bigcup_{\forall p \in N} E_R(N, p)$$

on  $E_R(N, p)$  és l'el·lipse centrada en  $p$  obtinguda per translació de  $E_R(N)$ , l'el·lipse associada al node  $N$  (vegeu la figura 5.10).

Aquesta definició també pot ser posada en funció de la distància el·líptica:

**Definició 37 (Distància el·líptica).** Donada una el·lipse  $E$  amb matriu associada  $M_E$ , definim la distància el·líptica entre dos punts  $p, q \in \mathbb{D}$  de la següent manera:

$$\|pq\|_E = [(p - q)^T M_E (p - q)]^{\frac{1}{2}}$$

Segons aquesta definició, la zona d'influència d'un node  $N$  és el lloc geomètric que està a distància el·líptica, respecte a l'el·lipse  $E_R(N)$ , menor o igual que la unitat del node:

$$ZIE(N) = \{p \in \mathbb{D} \mid \exists q \in N, \|pq\|_{E_R(N)} \leq 1\}$$

El càlcul de l'el·lipse  $E_R$  associada a un node  $N$  requereix saber realitzar una sèrie de càlculs prèvis:

- $ZIE(N)$ , la zona d'influència d'un node  $N$ , això és, el conjunt de nodes  $M$  tals que  $E_\Omega(N)$  centrada en un punt qualsevol interior de  $N$  intersecta amb  $M$  (vegeu la figura 5.10);
- $RedP(E_\Omega(N), M)$ , l'el·lipse reduïda segons un node, és a dir, una el·lipse amb els mateixos eixos que l'original, centrada en un punt qualsevol de  $N$ , que conté un cert cercle i tal que no conté cap punt de  $M$  si no en la seva frontera (generalitzant la definició 32 per a nodes discrets enlloc de simples punts, vegeu la figura 5.10);
- $RedE(E_\Omega(N), E_\Omega(M))$ , l'el·lipse reduïda segons una altra, és a dir, una el·lipse amb els mateixos eixos que l'original però més petita, continguda dins una altra el·lipse i que conté un cercle donat;
- el màxim de dues el·lipses amb els mateixos eixos, la qual cosa, seguint la definició, significa poc més que saber calcular els seus valors propis;
- i el mínim d'un conjunt (finit) d'el·lipses amb els mateixos eixos, la qual cosa, tal com ja hem explicat, no requereix més que realitzar senzills càlculs sobre els valors propis.

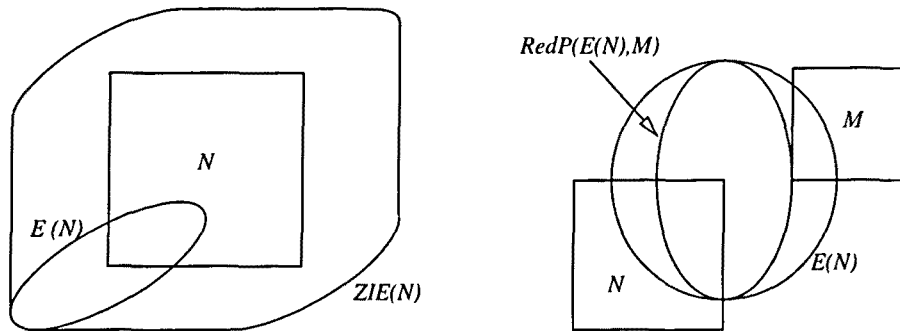


Figura 5.10: Zona d'influència  $ZIE(N)$  associada a la regió  $N$  i el·lipse reduïda segons un node  $M$ .

Notem que el fet que l'el·lipse resultant  $E_R$  tingui els mateixos eixos que  $E_\Omega$  simplifica bastant tots aquests càlculs, ja que tant sols caldrà trobar els

nous propis de la nova el·lipse. Per tant, el criteri de la maximització de l'àrea de l'el·lipse resulta bastant senzill d'aconseguir, atès que es pot expressar de forma directa en funció de la magnitud dels valors propis.

Un cop s'han calculat les el·lipses  $E_R$  per a cada regió, la resta de l'algorisme per al càlcul dels quadrees – de fites el·líptiques, en aquest cas – no varia respecte al cas isòtrop, és a dir, que caldrà seguir un procés de compactació ajuntant diferents nodes en un sol en funció de la similaritat de les el·lipses que contenen. Com que es tracta d'un mètode direccional, el criteri de similaritat de diverses el·lipses cal que tingui en compte no sols la seva mida sinó també la direcció dels seus eixos principals.

## 5.4 L'algorisme direccional

Tal com hem dit, l'algorisme direccional segueix el mateix esquema que l'isòtrop, però tenint en compte les noves fites d'admissibilitat. En conseqüència, hi ha uns quants passos que no varien respecte al cas isòtrop – tots aquells que no fan servir els criteris d'admissibilitat. En concret, tant el primer com el darrer pas (discretització dels vèrtexs del sòlid i obtenció de la triangulació final en 3D) queden inalterats, mentre que la resta de passos es veuen afectats per les noves fites direccionals i condicions d'admissibilitat.

Essencialment, el procés que es segueix és el mateix que en el cas isòtrop: es discretitzen en primer lloc les arestes del sòlid original (corbes de retallat), per garantir la conformitat de la malla resultant, i posteriorment es triangula per separat l'interior de cadascuna de les cares mitjançant el refinament d'arestes (adaptat, és a dir, direccional). En aquest cas, existeix igualment la possibilitat d'utilitzar un post-procés de relaxació (també direccional) per millorar la forma dels triangles resultants.

A les seccions anteriors acabem d'explicar com obtenir els quadrees de fites; els següents apartats descriuen la generalització dels mètodes que cal seguir per aconseguir una triangulació d'acord amb aquestes fites direccionals. Així, a l'apartat 5.4.1 s'explica la necessitat de generalitzar l'algorisme que obté una CDT (desenvolupat a l'apèndix A) i l'ús que es fa d'aquest algorisme. L'apartat 5.4.2 s'ocupa de la discretització de les arestes, mentre que l'apartat 5.4.3 s'ocupa de la triangulació de l'interior de les cares. Finalment, a l'apartat 5.4.4 es descriu l'adaptació del mètode de relaxació per al cas direccional.

### 5.4.1 Ús de l'algorisme CDT generalitzat

Els dos processos que permeten obtenir la triangulació de l'interior d'una cara (el refinament i la relaxació) fan servir la CDT per triangular el graf format per les poligonals que limiten la cara i els punts interiors. Ara bé, cal tenir en compte que en una triangulació de Delaunay els vèrtexs queden

units en funció del criteri del circumcerclle buit, és a dir, es formen els triangles tals que maximitzen els seu mínim angle, per tant les arestes que es formen segueixen una distribució que no té en compte la direccionalitat. Per al cas isòtrop aquesta propietat ja ens era satisfactòria, però per al cas direccional és desitjable que les arestes es formin seguint la direcció de màxima admissibilitat determinada per les el·lipses associades. Per aquest motiu, a l'apèndix A hem desenvolupat una generalització de l'algorisme d'obtenció d'una CDT incremental que s'adiu amb l'admissibilitat direccional i garanteix el que hem anomenat criteri de la circumel·lipse quasibuida per a cada triangle resultant (vegeu la secció A.5).

L'algorisme incremental generalitzat pot treballar bé utilitzant una distància el·líptica, és a dir, utilitzant una sola el·lipse que deforma tot l'espai paramètric, bé tenint en compte que cada punt de l'espai té assignada una el·lipse diferent (vegeu la secció A.5.2). En el cas que ens ocupa, disposem del *R*-quadtree, que per a cada punt del pla ens proporciona una el·lipse, i per tant el què farem és prendre com el·lipses deformadores les associades a cada punt de l'espai paramètric segons el *R*-quadtree.

Una de les propietats que és bo que es compleixi com a precondition del mètode d'obtenció d'una CDT generalitzat és que la densitat dels punts del graf sigui prou elevada com per reflexar la direccionalitat determinada per la funció de deformació, aquella que proporciona les el·lipses per a cada punt del pla; altrament pot ocórrer que els triangles resultants no s'adiguin amb la direccionalitat (vegeu la secció A.5). En aquest cas, fem notar que aquesta condició no resulta un inconvenient gens restrictiu, perquè la mateixa naturalesa de les dades ja s'adiu amb aquesta condició. Efectivament, notem que la mateixa funció de deformació és la que determina la densitat de punts a l'interior de les cares, ja que es tracta de la funció que determina l'admissibilitat dels triangles. Així, en el cas que un triangle no sigui admissible el mateix procés de refinament d'arestes l'eliminarà, introduint un punt nou (en el punt mig de l'aresta o on calgui). Un argument similar podem fer servir per al cas en què el proces que utilitzi la CDT generalitzada sigui la relaxació, atès que la densitat de punts haurà quedat fixada prèviament a aquest postprocés. En conclusió, podem afirmar que a la CDT generalitzada se li proporciona un graf amb les condicions adients per a què el resultat sigui coherent amb la direccionalitat determinada per la funció de deformació.

Un altre aspecte que cal considerar és el nombre de punts que l'algorisme direccional necessita per triangular les cares (o, el què és el mateix, el nombre de triangles resultants). Hem vist que les fites d'admissibilitat direccionals no sols aporten més informació que les isòtropes sinó que a més a més són una millora respecte a les del cas isòtrop. Tal com ens assegura la proposició 7, tot triangle admissible segons el criteri isòtrop també ho és per al cas direccional. És a dir, que la mida de les entitats (arestes i triangles) admeses per les fites direccionals és més gran en el cas isòtrop. En conseqüència,

el nombre de punts i de triangles resultants de l'algorisme direccional serà inferior.

### 5.4.2 Poligonalització de les arestes

Tal com hem avançat, el procés de discretització de les arestes del sòlid original es fa seguint el mateix esquema que en el cas isòtrop: donat un segment de corba de retallat, es comprova si el segment rectilini que uneix els seus extrems compleix la condició d'admissibilitat, i en cas negatiu es parteix. Igualment que en el cas anterior, disposem dels quadrees (en aquest cas, d'el·lipses) associats a les dues cares que conflueixen a l'aresta, que ens proporcionen límits sobre la mida dels triangles que aproximaran la superfície original (vegeu la secció 4.4).

El problema en aquest cas, a diferència del cas isòtrop, és que les condicions d'admissibilitat direccionals són aplicables tant sols per a triangles, és a dir, que no disposem d'una definició de segment admissible. Això no obstant, tot seguit presentarem un criteri que decideix l'admissibilitat de les arestes del contorn anàleg al del cas isòtrop. Recordem que l'admissibilitat d'un segment l'hem definida de tal manera que ens garanteix que els seus dos punts externs podran formar un triangle admissible en ser units a un tercer punt (vegeu la definició (22) de segment admissible).

**Proposició 8.** *Donats dos punts  $A$  i  $B$  sobre una corba de retallat, podem assegurar que es pot formar un triangle admissible  $T(A, B, C)$  si  $A \in E_R(B)$  o bé si  $B \in E_R(A)$ .*

*Demostració.* N'hi ha prou amb assegurar que sempre que disposem de dos punts  $A$  i  $B$  tals que  $A \in E_R(B)$ , som capaços de trobar un tercer punt  $C$  de manera que  $C, A + \overrightarrow{BC} \in E_R(B)$ , segons el què ens assegura el teorema 8. Que el punt  $C$  sempre existeix resulta trivial, atès que sempre es pot escollir un punt prou proper al segment  $AB$  com es vulgui.  $\square$

Seguint aquesta proposició, té sentit utilitzar el mateix criteri que en el cas isòtrop per decidir quan cal bisecar una aresta del contorn: un segment d'aresta serà admissible quan els dos quadrees associats a les cares que conflueixen a l'aresta ens assegurin la proposició que acabem de d'enunciar respecte als dos  $R$ -quadrees de les cares que conflueixen a l'aresta.

Al proper apartat desenvoluparem el mètode de refinament d'arestes direccional de manera que garanteixi que s'afegeixen punts amb aquestes característiques i que no es subdivideixin les arestes del contorn (altrament, no es garantiria la conformitat de la triangulació resultant).

### 5.4.3 El mètode de refinament d'arestes direccional

En poligonalitzar les arestes del sòlid ens hem trobat que no disposàvem d'una condició d'admissibilitat (direccional) per a les arestes, i que per tant

no és vàlid l'algorisme isòtrop. A l'hora de triangular l'interior de les cares, ens trobem amb el mateix inconvenient, i per tant hem hagut de modificar convenientment l'algorisme de refinament d'arestes per adequar-lo al cas direccional.

Disposem d'un algorisme que ens permet obtenir la CDT d'un graf d'acord amb la direccionalitat marcada per les el·lipses  $E_R$ . Per tant, som capaços d'afegir punts incrementalment a l'interior d'una cara i obtenir la nova triangulació. La qüestió és tant sol decidir on cal afegir els punts: en el cas isòtrop ens basàvem en la definició d'admissibilitat per a les arestes; ara ens haurem de basar en la condició d'admissibilitat per a un triangle que ens proporciona el teorema 8.

L'algorisme de refinament d'arestes que proposem per al cas direccional segueix el mateix esquema que en el cas isòtrop, però enlloc de refinar les arestes no admissibles, identifica un triangle no admissible, tria una de les seves arestes i afegeix un punt a l'interior de la triangulació de manera que l'aresta deixi d'existir. Aquest procés es repeteix fins aconseguir una triangulació en què tots els triangles són admissibles. Aquest és l'algorisme que obté una triangulació admissible de l'interior d'un polígon:

**acció RefinaArestesDirecc**( $P$  : Polígon)  
*Calcular CDT modificada del polígon  $P$*   
*Formar una llista que contingui tots els triangles no admissibles segons la funció  $E_R$*   
**mentre** la llista no sigui buida **fer**  
*Treure el primer triangle de la llista*  
*Identificar una de les arestes del triangle com a aresta per ser refinada*  
*Inserir un punt a la CDT modificada*  
*Actualitzar la llista afegint-hi els nous triangles no admissibles i traient-ne els que han deixat d'existir*  
**fmentre**  
**facció**

Tot seguit, anem a veure com s'identifica quina de les arestes d'un triangle no admissible es refina i més endavant veurem on s'afegeix el punt en qüestió.

Donat un triangle  $T = T(A, B, C)$  que no compleix el teorema 8, podem fer tres transformacions, segons  $E_R(A)$ ,  $E_R(B)$  o  $E_R(C)$ , i obtindrem tres triangles deformats,  $T_A'$ ,  $T_B'$  i  $T_C'$  (vegeu la figura 5.11),

Per a cada vèrtex de  $T$ , podem veure quines són les arestes que no compleixen les condicions del teorema 8. Per exemple, per al vèrtex  $A$ , podem veure les arestes que el teorema 8 no ens pot assegurar que siguin admissibles, és a dir, aquelles arestes de  $T$  que no són interiors a l'el·lipse  $E_R(A)$ ; en el cas que l'aresta sigui la  $BC$  (l'oposada al vèrtex  $A$ ), es tracta

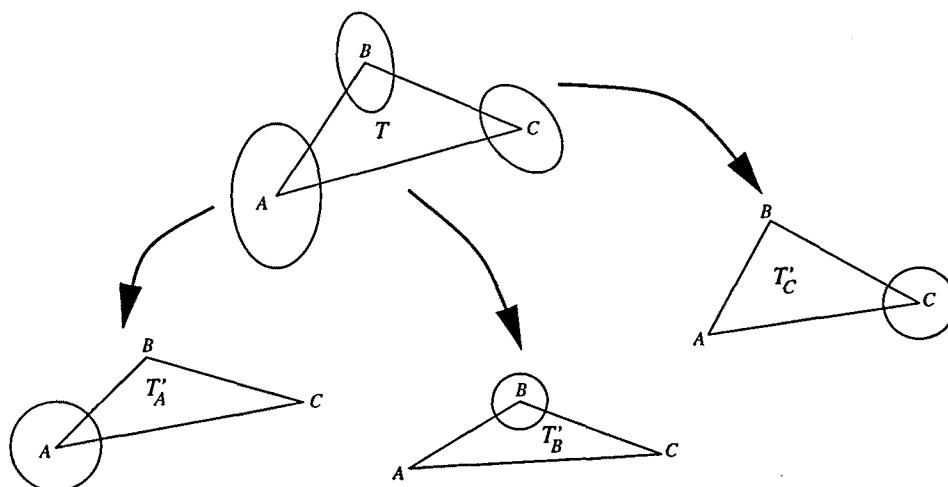


Figura 5.11: Triangle  $T = T(A, B, C)$  amb les el·lipses associades als seus tres vèrtexs i deformacions del triangle segons les tres transformacions lineals associades a les el·lipses.

de veure si l'aresta amb un dels seus extrems traslladat al vèrtex oposat hi és interior. Llavors, l'aresta del triangle que es tria com a candidata a ser refinada és la que és interior a menys el·lipses, sempre que no sigui una de les del contorn <sup>1</sup>.

El fet que no es triïn les arestes del contorn per ser refinades no afecta l'algorisme, ja que la discretització de les arestes del contorn s'ha realitzat de manera que es garanteix que totes les arestes del contorn són tals que almenys un dels seus extrems és interior a l'el·lipse associada a l'altre extrem, és a dir, per a tota arista  $AB$  del contorn tenim que

$$A \in E_R(B) \vee B \in E_R(A)$$

Per tant, podem assegurar que tot triangle  $T = T(A, B, C)$  no admissible tal que una de les seves arestes és del contorn és tal que una de les altres dues arestes ( $AC$  o  $BC$ ) no serà interior a  $E_R(A)$  o a  $E_R(B)$ . És a dir, que en aquest cas podem triar qualsevol de les altres dues arestes.

De fet, cal considerar també que el triangle que s'escull pot tenir no només una de les seves arestes del contorn, sinó dues o totes tres. El cas en què en tingui dues es pot resoldre escollint com a arista per ser refinada precisament la que no és del contorn. I si les tres arestes del triangle són del contorn, llavors el polígon a refinar és un simple triangle (cosa ben poc probable), cas que es pot resoldre afegint un punt auxiliar al seu interior.

Un cop s'ha escollit una arista per ser refinada, haurem de decidir on afegir el nou punt. Disposem de la transformació lineal determinada per

<sup>1</sup>De fet, n'hi hauria prou escollint qualsevol arista que no fos interior a alguna de les el·lipses.

una el·lipse associada a un dels extrems del triangle que es refinarà, que ens deforma l'espai paramètric de manera que la pròpia el·lipse passa a ser un cercle (vegeu la figura 5.11). Per tant, el què fem és refinar l'aresta com si es tractés del cas isòtrop, però treballem en l'espai deformat. El vèrtex que s'afegeix a la triangulació és el punt mig de l'aresta o el circumcentre del cercle (en espai deformat), depenent de les mateixes condicions que en el cas isòtrop, però avaluades sobre l'espai deformat (vegeu la secció 4.5.1).

No obstant, cal tenir en compte que hem de garantir que en afegir el punt a la triangulació l'aresta refinada deixa d'existir. Si el punt afegit és el punt mig de l'aresta, no hi ha problema, perquè l'algorisme de la CDT modificat garanteix que l'aresta desapareixerà. En canvi, sí que pot haver-hi conflictes en el cas que el punt afegit és un altre: fixem-nos que l'algorisme de la CDT modificat en inserir un punt deforma l'espai segons l'el·lipse associada al propi punt, mentre que la posició del punt escollit dependrà d'una altra el·lipse diferent, l'associada a un dels vèrtexs del triangle refinat. Per tal que l'algorisme de refinament d'arestes direccional resulti simple, hem optat per afegir el punt mig de l'aresta sempre que es comprovi que aquesta no desapareixeria. Farem el mateix si el punt candidat a ser afegit caigués fora de la zona a ser triangulada (cas 2B de l'algorisme de refinament d'arestes isòtrop).

Igualment com en el cas isòtrop, l'algorisme de refinament d'arestes és independent de la forma com estiguin ordenats els triangles dins la llista de triangles a ser refinats. Per tant, també es pot usar una tècnica heurística per millorar el procés de refinament d'arestes, escollint com a triangle per ser refinat aquell que conté una aresta tal que “més s'allunya de ser admissible”. És a dir, que en aquesta ocasió d'entre totes les arestes de la triangulació actual de triangles no admissibles triarem aquella aresta  $AB$  tal que el valor  $\|AB\|_{E_R(A)} - E_R(A)$  és màxim.

#### 5.4.4 El postprocés de relaxació direccional

Tal com hem explicat a la introducció d'aquest capítol, l'enfoc direccional que acabem de desenvolupar té com a objectiu prioritari la minimització del nombre de punts de la triangulació produïda, i deixa la forma dels triangles com a criteri secundari, ja que coneixem a priori que el fet d'introduir direccionalitat va en contra de la forma. Això no obstant, hem mantingut la relaxació com un postprocés opcional en l'algorisme de triangulació direccional, atès es tracta d'un mètode que no afecta al nombre d'entitats de la triangulació produïda, sinó que tant sols afecta a la forma dels triangles resultants. En definitiva, es tracta d'un procés que millorarà la qualitat de la malla resultant, sempre que tingui en compte els objectius introduïts per la direccionalitat.

La generalització que presentem per a la relaxació en el cas direccional ha de reflexar, igualment, el canvi provocat per les noves fites el·líptiques. Per



tant, en aquest cas la força entre dos punts no sols dependrà de la distància, sinó també de la direcció que marqui la línia que uneix els dos vèrtexs.

L'enfoc que hem seguit per desenvolupar la relaxació ha estat paral·lel al de les altres generalitzacions: treballar localment, considerant en cada cas l'espai paramètric deformat segons l'el·lipse associada al punt respecte al qual estem treballant i realitzar els càlculs en aquest espai. Una vegada més cal tenir en compte que no disposem d'una definició d'arestes admissibles, sinó que la condició d'admissibilitat considera els triangles sencers, la qual cosa complica lleugerament el desenvolupament que anem a seguir. Recordem que el procés de relaxació en el cas isòtrop es basa en moure els punts de la triangulació en funció del què s'allunyin les arestes de la mida òptima per ser admissibles.

Així, quan es tracta de calcular la força d'atracció/repulsió que realitzen les arestes de la triangulació, tindrem en compte que convé que compleixin el criteri d'admissibilitat respecte a les el·lipses associades als seus dos extrems, sinó també respecte a les associades als vèrtexs oposats dels dos triangles dels quals forma part l'aresta. Per tant, en aquest cas, sobre una aresta (sobre els seus punts extrems) hi actuen quatre forces, no dues com en el cas isòtrop (vegeu la figura 5.12). Podem expressar aquesta característica de la següent manera: Sigui una aresta  $ij$  i siguin  $T(i, j, k)$  i  $T(i, l, j)$  els triangles adjacents a l'aresta; llavors, el conjunt de forces que actuen sobre ella és la suma de quatre termes,

$$F_{ij} = F_{ij}(i) + F_{ij}(j) + F_{ij}(k) + F_{ij}(l)$$

on per  $F_{ij}(x)$  entenem la força que provoca el vèrtex  $x$  sobre l'aresta  $ij$ . Cadascun d'aquests quatre termes  $F_{ij}(x)$  es calcula tenint en compte la deformació provocada per l'el·lipse  $E_R(x)$ , tal com veurem tot seguit.

L'altre aspecte que varia respecte al cas isòtrop és la forma de realitzar el càlcul de les forces. Fent servir la mateixa idea que quan es tracta de realitzar altres càlculs (vegeu les seccions anteriors), el procés que es segueix consisteix en deformar l'espai paramètric segons la transformació lineal corresponent a una el·lipse, calcular les forces en aquest espai, transformar els vectors de força segons la transformació inversa i acumular aquestes forces sobre els punts adjacents. Aquest procés queda reflexat en el següent fragment d'algorisme que permet calcular les forces provocades per un vèrtex  $p$  de la triangulació sobre els seus veïns: