

**Aproximació facetada
de superfícies paramètriques
retallades**

Marc Vigo Anglada

Tesi doctoral

Directors: Pere Brunet Crosa
Núria Pla Garcia

Secció d'Informàtica Gràfica
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Universitat Politècnica de Catalunya

Agost de 1998

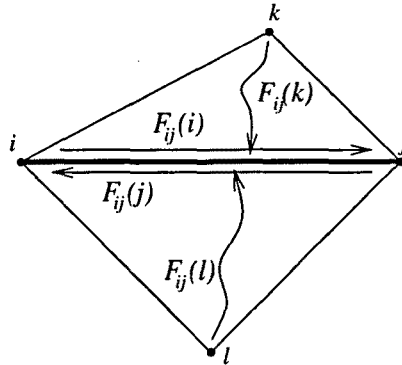


Figura 5.12: Les forces en el cas direccional depenen de l'el·lipse associada a un punt i no sols actuen sobre els punts extrems d'una aresta sinó també sobre les arestes oposades a un vèrtex d'un triangle. A la figura, la força F_{ij} (entre els punts i i j) és la suma de les forces provocades per l'admissibilitat del triangle superior, $T(i, j, k)$, com de l'inferior, $T(i, l, j)$.

per cada triangle T que conté el punt p fer
 Deformar T segons la transformació lineal corresponent a $E_R(p)$
 per cada aresta ij de T deformat fer
 Calcular $F_{ij}(p)$ com en el cas isòtrop
 Deformar $F_{ij}(p)$ segons la transformació lineal inversa
 Acumular $F_{ij}(p)$ en els dos vèrtexs extrems de l'aresta
 fper
 fper

Notem que en deformar l'espai paramètric l'el·lipse $E_R(p)$ passa a ser un cercle, i per tant estem en condicions d'aplicar les mateixes fórmules per al càlcul de la força que en cas isòtrop – ja es tracti d'una força constant o de la corresponent al comportament d'una molla (vegeu la secció 4.5.4). Acumular una força $F_{ij}(p)$ en els vèrtexs extrems d'una aresta simplement significa sumar-la a la força resultant que mourà cadascun dels dos vèrtexs.

Igualment que en el cas isòtrop, un cop calculades les forces que provoquen tots els vèrtexs, es mouen els vèrtexs interiors en la direcció de les forces resultants i s'itera tot el procés, fins aconseguir una situació estable. Fem notar que en aquest cas la tendència del procés de relaxació a obtenir triangles equilàters no serà tan acusada, ja que la magnitud de les forces varien en funció de l'orientació de les arestes.

Capítol 6

Resultats, conclusions i treball futur

6.1 Introducció

Als capítols precedents hem desenvolupat dos algorismes de facetització de superfícies, l'isòtrop i el direccional. Admeten com a entrada un sòlid descrit en un model de fronteres amb les cares no planes, limitat per pedaços retallats i produeixen triangulacions que poden ser escrites en diversos formats. Els dos algorismes obtenen una triangulació del sòlid original que és conforme, admissible i s'adapta a la curvatura de les superfícies, i tenen com a objectiu minimitzar el nombre de triangles. A més a més, també hem considerat un objectiu addicional, referent a la forma dels triangles. En el cas de l'algorisme direccional, aquest darrer objectiu és menys important, atès que minimitzar el nombre de triangles resultants és l'objectiu clarament prioritari, ja que es pretén obtenir arestes la longitud i direcció de les quals depengui de la curvatura de la superfície.

Durant el desenvolupament dels algorismes de triangulació, han sorgit una sèrie de problemes que hem resolt proposant diversos nous mètodes:

- * Dos algorismes que converteixen un pedaç triangular degenerat de Bézier en un pedaç rectangular retallat. Aquests són preprocessaments dels algorismes principals que cal aplicar per evitar malfuncionaments (capítol 3).
- * Un segon preprocessament de les dades d'entrada per reparametritzar els pedaços, amb la finalitat de millorar la qualitat dels triangles resultants (capítol 3).
- * El mètode de refinament d'arestes, que constitueix el nucli dels algorismes de triangulació. Aquest mètode permet triangular l'interior d'una cara del sòlid garantint l'admissibilitat i l'adaptació de la triangulació, i està basat en les fites sobre la curvatura de les superfícies (capítols 4

i 5).

- * El post-processament de relaxació, desenvolupat per millorar la forma dels triangles resultants a posteriori (capítols 4 i 5).
- * Un algorisme incremental que obté la triangulació restringida de Delaunay d'un graf genèric. Aquest mètode el fan servir tant el refinament d'arestes com el post-processament de relaxació (apèndix A).

Dels tres darrers processos n'existeixen dues versions, una primera utilitzada per l'enfoc isòtrop i una segona, que és una generalització que manega informació direccional. Tots aquests processos, amb les seves diverses variants, han estat implementats i provats sobre un ampli joc de proves, el qual inclou objectes especialment dissenyats per avaluar els algorismes. Els programes resultants admeten triar tant la variant de l'algorisme que es vol executar (per exemple, si es vol realitzar el preprocessament de reparametrització), com d'altres paràmetres secundaris, per exemple el nivell màxim de subdivisió dels pedaços d'entrada per calcular-ne les fites de curvatura.

Si bé la forma dels triangles és el nostre objectiu menys prioritari, en alguns casos resulta una qüestió rellevant per a les aplicacions que realitzen càlculs utilitzant les triangulacions, com per exemple en el cas dels mètodes d'elements finits. Tot i que en els algorismes de triangulació desenvolupats hem introduït diversos criteris que tenen en compte la forma dels triangles (principalment, l'ús de la triangulació de Delaunay i el postprocessament de relaxació), tots ells treballen en espai paramètric, la qual cosa, tal com ja sabem, provoca que els resultats depenguin fortament de la parametrització dels pedaços originals. Precisament, el preprocessament de reparametrització dels pedaços intenta resoldre aquesta qüestió. Tantmateix, amb la finalitat de poder mesurar l'optimalitat dels resultats obtinguts en espai imatge, hem desenvolupat un postprocessament, que presentem a la secció 6.2. Aquest postprocessament donada una triangulació obtinguda utilitzant un dels dos algorismes de triangulació (l'isòtrop o el direccional) mou els punts per intentar millorar la qualitat dels triangles.

La secció 6.3 mostra els resultats de les anàlisis que hem realitzat amb la finalitat d'avaluar els diversos algorismes que hem desenvolupat, a la secció 6.4 hi hem recollit les conclusions d'aquesta tesi i la secció 6.5 descriu diverses línies futures que podrien servir per ampliar o complementar el nostre treball.

6.2 El postprocessament de millora de la forma

L'algorisme que presentem en aquesta secció l'hem desenvolupat amb la finalitat d'obtenir una referència per poder comparar les triangulacions obtingudes utilitzant l'algorisme isòtrop o el direccional amb una de sub-òptima segons un criteri de la forma dels triangles. L'objectiu no és obtenir un algo-

risme eficient, sinó un que ens garanteixi que obté una triangulació admissible i amb triangles de forma millorada es espai imatge. Per tant, l'algorisme proposat és un procés iteratiu que fa una cerca exhaustiva, i utilitza un criteri d'optimització local sobre la triangulació resultant.

La principal diferència d'aquest algorisme respecte als altres processos que hem presentat al llarg d'aquesta tesi és que treballa en espai imatge, no en espai paramètric; és a dir, que la mesura de la forma dels triangles es realitza en \mathbb{R}^3 . El problema de la deformació de l'espai paramètric ja ha estat explicat prèviament, al capítol 3, on hem desenvolupat un senzill algorisme de preprocessament per intentar minimitzar-lo, la reparametrització dels pedaços.

Així doncs, l'algorisme de millora de la forma dels triangles és un procés que es basa en intentar millorar l'angle mínim dels triangles en espai imatge. Igualment com el postprocessament de relaxació, tant sols mou la posició dels vèrtexs de la triangulació, sense incloure'n de nous, però en canvi no canvia la topologia de la malla, atès que la triangulació no es recalcula a cada pas. Una altra diferència d'aquest algorisme respecte a la relaxació és que l'algorisme de millora de la forma tant sols admet moure un punt si es pot garantir l'admissibilitat de la triangulació resultant. Aquesta és una altra de les circumstàncies per les quals no podem assegurar que la triangulació final obtingui la forma dels triangles òptima, sinó tant sols una configuració sub-òptima.

Donat un vèrtex x d'una triangulació, definim el seu **veïnatge** com el conjunt de triangles que hi convergeixen. Els extrems de les arestes del veïnatge de x els anomenarem x_1, x_2, \dots, x_n , els triangles que hi convergeixen seran t_1, t_2, \dots, t_n , i els angles al voltant de x els anomenarem a_1, a_2, \dots, a_n (vegeu la figura 6.1). Definim també la funció $a_{min}(x)$ com el mínim angle al voltant de x :

Definició 38.

$$a_{min}(x) = \min_{k=1..n} \{angle(x_k, x, x_{k+1})\} = \min_{k=1..n} \{a_k\}$$

on $x_1 \dots x_n$ són els vèrtexs del veïnatge de x i $a_1 \dots a_n$ les arestes d'aquest veïnatge.

Es pot intentar incrementar aquest angle movent el punt x sobre la superfície S , però cal tenir en compte diversos fets:

- La funció $a_{min}(x)$ pot tenir discontinuïtats arbitràries al voltant de x , depenent de la configuració del seu veïnatge. Per tant, petits desplaçaments del punt x , fins i tot al llarg d'una direcció fixada, poden causar discontinuïtats de la funció $a_{min}(x)$.
- Trobar la posició que maximitza $a_{min}(x)$ és una tasca difícil, perquè cal moure el vèrtex sobre la superfície. És més, la nova triangulació,

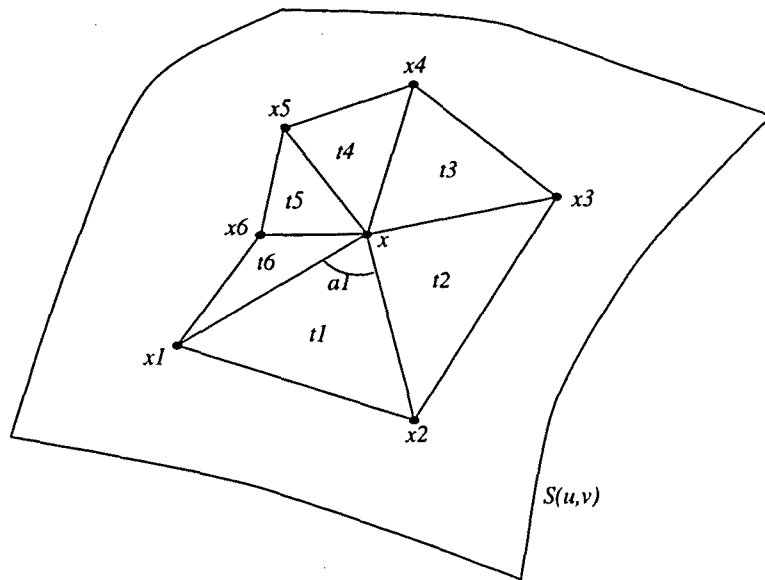


Figura 6.1: Representació del veïnatge d'un vèrtex x .

que és la mateixa que l'original amb x situat en la posició òptima, podria no ser admissible.

- Els dos problemes anteriors son conseqüència de situacions en les quals diversos angles del veïnatge de x són propers al mínim, $a_{min}(x)$:

$$\exists a_k = \text{angle}(x_k, x, x_{k+1}) \text{ tal que } 0 < a_k - a_{min}(x) < \epsilon$$

La darrera observació ens ha dut a definir el concepte de vèrtex ϵ -millorable:

Definició 39. Direm que un vèrtex x és ϵ -millorable si i només si

$$a_{min}(x) \leq a_k - \epsilon, \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \quad \text{tal que} \quad a_k \neq a_{min}(x)$$

on $a_1 \dots a_n$ són els angles del veïnatge de x .

L'algorisme que proposem es basa en trobar els vèrtexs ϵ -millorables d'una triangulació, triar el pitjor i moure'l sobre la superfície, intentant millorar els angles. El pitjor vèrtex x ϵ -millorable d'una triangulació és aquell tal que $a_{min}(x) \leq a_{min}(y)$ per a tots els vèrtexs ϵ -millorables y de la triangulació. Abans de moure el vèrtex, realitzarem dues comprovacions per garantir que la nova triangulació resultant efectivament millora l'anterior (els angles mínims són efectivament millors) i que la triangulació encara és admissible (segons els quadrees de fites). En cas que no es compleixin aquestes condicions, el vèrtex no es mourà. Aquest procés el repetirem fins que cap vèrtex interior de la triangulació no es pugui moure.

L'algorisme per a millorar una triangulació admissible T d'una superfície $S(u, v)$ és el següent:

algorisme *MilloraAngles*(T : Triangulació)

L := llista de vèrtexs ϵ - millorables de T

mentre L no és buida **fer**

 Treure x , el pitjor vèrtex ϵ - millorable, de L

$\alpha := a_{\min}(x)$

 Calcular $c := \text{cercle}(\alpha + \frac{\epsilon}{2})$

 Calcular el punt x^*

$\vec{n} := \text{Normal}(\text{PlaTangent}(S, x))$

$(u^*, v^*) := \text{Intersecta}(x^* + \lambda \vec{n}, S)$

mentre la nova triangulació T no és admissible **fer**

 Portar (u^*, v^*) prop de x , per bisecció

fmentre

si la nova triangulació T millora llavors

 Canviar la nova posició de x per $S(u^*, v^*)$

 Actualitzar L segons la nova triangulació

fsi

fmentre

falgorisme

El càlcul de la nova posició $S(u^*, v^*)$ del punt x és la tasca més difícil de l'algorisme. Això requereix realitzar càlculs auxiliars per a c , x^* , \vec{n} , i (u^*, v^*) (vegeu la figura 6.2):

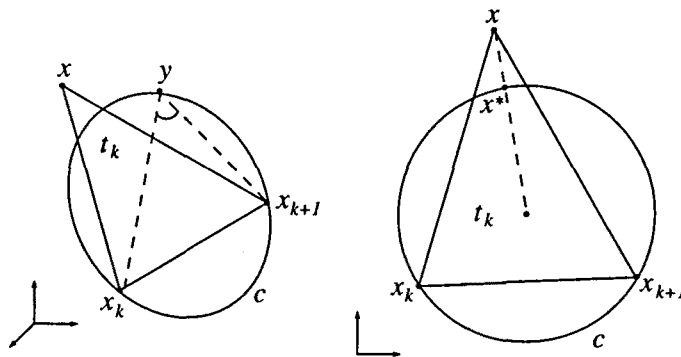


Figura 6.2: Càlcul de la nova posició per al vèrtex x .

- c és un cercle en el pla del triangle t_k corresponent a l'angle mínim al voltant de x . El cercle passa per x_k i x_{k+1} i és tal que l'angle format per x_k , un punt arbitrari y sobre el cercle i x_{k+1} és $\alpha + \frac{\epsilon}{2}$;
- x^* és el punt d'intersecció de c amb la línia recta que passa per x i el centre de c . Òbviament, $\text{angle}(x_k, x^*, x_{k+1}) = \alpha + \frac{\epsilon}{2}$;

- \vec{n} és la normal a la superfície S al punt x ;
- (u^*, v^*) són les coordenades paramètriques del punt d'intersecció entre la recta $x^* + \lambda \vec{n}$ (recta que passa per x^* i té direcció \vec{n}) i la superfície S ;
- la nova triangulació T és la mateixa que l'anterior amb el vèrtex x situat a la posició $S(u^*, v^*)$.

Un cop les coordenades (u^*, v^*) han estat calculades, cal garantir l'admissibilitat de la nova triangulació. Això s'aconsegueix utilitzant un mètode de bisecció (en espai paramètric) que apropa el punt cap a la seva posició original x fins que es troba que la triangulació és admissible. Fem notar que el test d'admissibilitat tant sols cal realitzar-lo localment, atès que només hauran canviat els triangles del veïnatge de x . En el cas que la triangulació resultant no millori els angles al voltant de x (la qual cosa pot passar en alguns casos ja que la nova posició no és la calculada directament, sinó que l'hem hagut de projectar sobre la superfície i potser moure'l lleugerament), el punt es descarta. En cas contrari, obtindrem una nova triangulació millorada, i per tant caldrà actualitzar la llista L de vèrtexs ϵ -millorables segons els nous valors dels angles al voltant de x (altre cop, es tracta tant sols d'un canvi local).

6.3 Anàlisi dels resultats

En aquest apartat presentarem una sèrie de resultats que ens serviran per mostrar els resultats dels diversos algorismes que hem desenvolupat al llarg d'aquesta tesi. En primer lloc, descriurem els cinc objectes que hem triat, en segon lloc farem el seguiment de l'execució d'un cas concret i finalment presentarem una sèrie de gràfiques i exemples que il·lustren els resultats que es poden desprendre.

6.3.1 Joc de proves

En aquest descriurem els objectes que conformen el joc de proves. Tots ells són objectes tancats limitats per superfícies retallades que han estat dissenyats amb un modelador de sòlids i superfícies emmagatzemats en fitxers en format VDA. Alguns, com la copa o la tetera de Utah, són sòlids que podrien corresponen a objectes reals, mentre que d'altres són blocs més o menys cúbics on una o més de les seves cares planes ha estat substituïda per una o més superfícies especialment pensades per a provar els algorismes de triangulació.

La figura 6.3 mostra els diversos objectes que farem servir com a joc de proves, i la taula 6.1 en mostra algunes de les seves característiques geomètriques: nombre de pedaços retallats que els componen, ordre màxim

dels pedaços, nombre de trams de corbes de retallat (vistes com a corbes sobre la superfície). Recordem que cadascuna de les corbes de retallat en el model VDA té tres representacions: dues com a corba sobre les dues superfícies que hi conflueixen i una tercera com a corba en espai imatge (3D). De vegades pot ocórrer que no coincideixen les dues representacions com a corbes sobre cadascuna de les superfícies que conflueixen a l'aresta, és a dir, que el nombre de trams de corba corresponents a una aresta no coincideixi amb els de la seva aresta oposada. És per aquest motiu que en algun cas el nombre de trams de corbes no és parell, quan en principi sembla que ho hauria de ser perquè hi ha dues corbes sobre la superfície per a cada aresta (un per a cada semi-aresta).

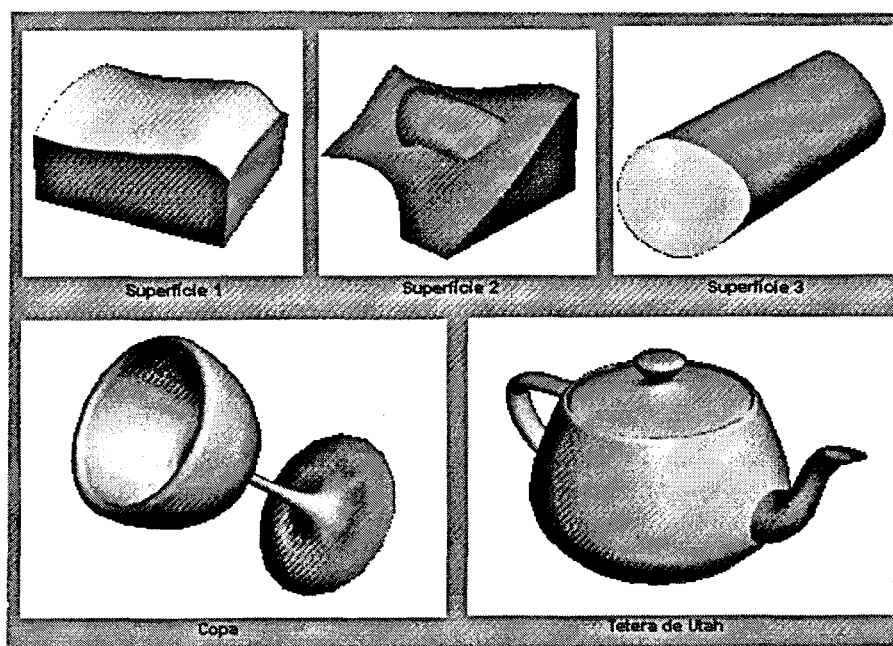


Figura 6.3: Objectes que conformen el joc de proves

El primer objecte del joc de proves, que hem anomenat superfície 1, és el resultat de tallar un paralelepíped per una superfície de grau força elevat. Aquest peça (l'únic que no és pla) presenta una curvatura molt elevada prop d'una de les arestes, mentre que la resta del peça és molt més suau (vegeu la figura 6.6, que mostra la curvatura del peça).

El segon objecte l'hem anomenat superfície 2 i és el resultat de realitzar una unió booleana entre dues altres superfícies, la primera de forma toroidal i una segona semblant al cas anterior (és a dir, un cub tallat per una superfície). Si bé aquest segon objecte està format per molts més pedaços, aquests no són de grau tan elevat com en el cas anterior.

Objecte	Núm. de pedaços	Ordre màxim dels pedaços	Núm. de corbes de retallat	Ordre màxim de les corbes
Supf. 1	6	8 x 6	16	8
Supf. 2	16	5 x 4	46	8
Supf. 3	7	4 x 2	17	5
Copa	18	8 x 8	36	4
Tetera	35	4 x 6	78	8

Taula 6.1: Número de pedaços i corbes de retallat que componen els objectes del joc de proves i ordre màxim d'aquests pedaços i corbes.

El tercer objecte, la superfície 3, és un escombrat d'una corba tancada al llarg d'un segment de recta. El resultat és un tronc de cilindre, les "tapes" del qual (és a dir, les cares planes del tub) no són paral·leles. Com que la corba escombrada era de grau baix, tant els pedaços com les corbes que els retallen també ho són.

El quart objecte és una copa i té la particularitat d'estar formada per pocs pedaços, tenint en compte que ha estat generat com un escombrat rotacional d'un conjunt de corbes, però de grau elevat. D'aquesta manera hem aconseguit formar tot el peu de la copa mitjançant únicament quatre pedaços simètrics respecte a l'eix de la copa (a part del de la base, que és pla). Aquesta quatre pedaços són especialment conflictius perquè presenten una forta variació de la curvatura; a més a més, la magnitud de la curvatura d'aquest pedaç depèn fortament de la direcció.

El cinquè objecte del joc de proves és ben conegut en el món dels gràfics per computador: la tetera de Utah. L'hem inclòs dins d'aquest joc de proves perquè és un objecte relativament complex, format per bastants pedaços retallats de Bézier de formes ben diverses, però que no són de grau massa elevat.

No cal dir que hem realitzat proves sobre un conjunt d'objectes molt més ampli que els del joc de proves que acabem de presentar. Si hem triat aquests cinc objectes en particular per al nostre joc de proves ha estat perquè són especialment representatius de cara als resultats que hem trobat. Per exemple, la superfície 1 és especialment apta per a comprovar la capacitat d'adaptació a la curvatura dels algorismes de triangulació; la tetera és un exemple més o menys complex, amb pedaços retallats bastant diversos; o encara, la copa i la superfície 3 resulten força adequades per veure les diferències entre l'ús de l'algorisme de triangulació isòtrop i el direccional; etc.

6.3.2 Seguiment d'un cas concret

En aquesta secció farem el seguiment de l'execució de l'algorisme de triangulació isòtrop en un cas concret. Hem cregut oportú fer aquest seguiment perquè ens permet aclarir diverses qüestions estretament lligades a la implementació dels algorismes. D'altra banda, aquest exemple també pot ser útil per a qui desitgi conèixer el funcionament de l'algorisme sense haver de seguir a fons el desenvolupament teòric detallat als capítols anteriors.

L'objecte que hem triat per fer el seguiment de l'execució ha estat la superfície 1 (el primer de la col·lecció del joc de proves). Com ja hem dit, degut a la forta variació de la curvatura que presenta una de les seves cares, aquest objecte resulta especialment adequat per poder comprovar l'adaptació a la curvatura de l'algorisme. Fem notar que aquesta només es pot aconseguir una gran variació de la curvatura en un pedaç si aquest és de grau una mica elevat. El valor de la tolerància que s'ha triat durant aquesta execució de l'algorisme és de cinc unitats; en termes relatius a la mida de l'objecte, això suposa un 3.2% de la mida de la seva diagonal més gran.

La primera foto (figura 6.4) mostra l'objecte original. Com es pot comprovar, es tracta d'un bloc cúbic que ha estat tallat per una superfície, per tant l'única cara interessant per al nostre estudi és la superior, la que no és plana. És en aquesta cara que ens centrarem, doncs.

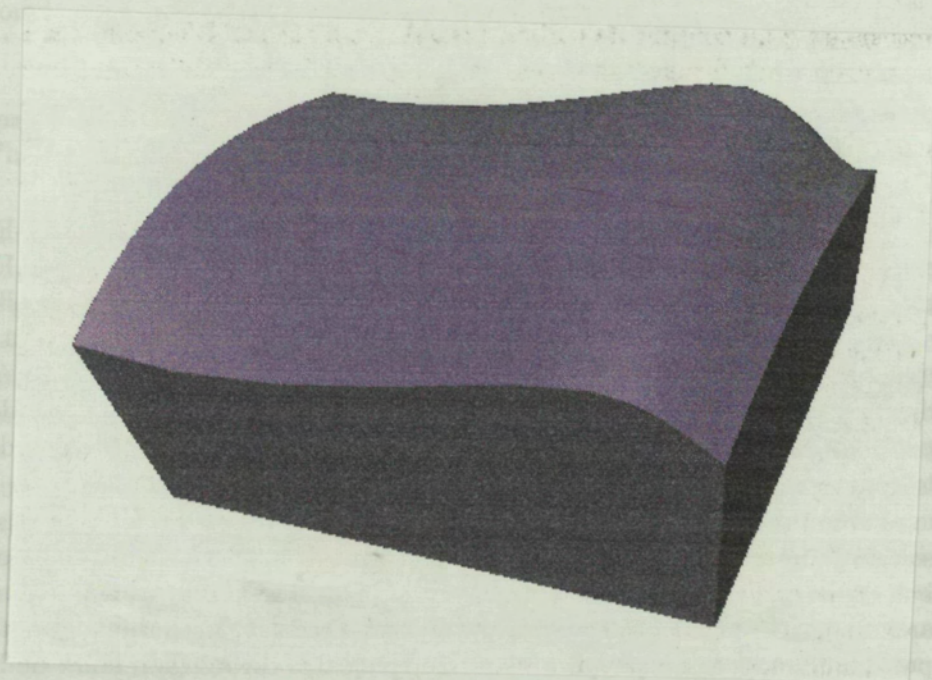


Figura 6.4: L'objecte "superfície 1".

La segona foto (figura 6.5) mostra tant sols la cara superior de l'objecte representada amb suavitzat i en filferros. La representació en filferros és

del pedaç sencer, tot l'espai paramètric corresponent al quadrat unitari $[0, 1] \times [0, 1]$, mentre que la part suavitzada correpon a la part retallada. Es pot veure que les corbes de retall, tot i ser tant sols quatre corbes sobre la superfície, no són línies rectes en espai paramètric. Totes les corbes representades en filferros són corbes isoparamètriques horitzontals o verticals, igualment separades en espai paramètric.

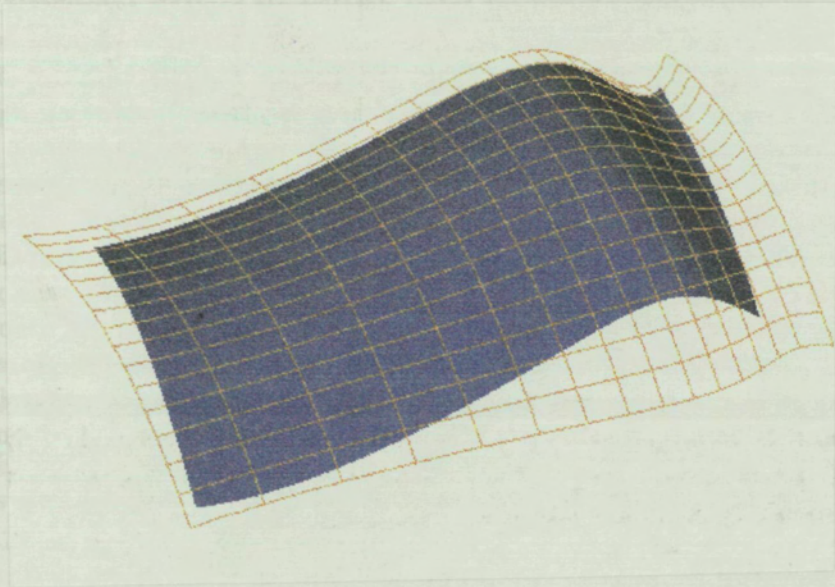


Figura 6.5: Pedaç retallat de la cara superior de l'objecte. Les línies representades són corbes isoparamètriques equiespaiades.

La figura 6.6 representa la curvatura gaussiana de la cara superior. El pedaç està representat en espai imatge, mirat des de dalt i en fals color. El tons blaus corresponen a zones amb poca curvatura, mentre que els vermells o taronges són de curvatura molt alta. Es pot veure que el pedaç presenta una zona molt curvada, prop d'una de les seves fronteres, i que la resta és de curvatura moderada. Evidentment, aquesta configuració ha estat triada per comprovar la capacitat d'adaptar-se a la curvatura dels algorismes de triangulació.

La figura 6.7 mostra el resultat després d'haver aplicat els primers passos de l'algorisme isòtrop: l'obtenció de dades, el càlcul dels R -quadrees i la discretització dels vèrtexs i arestes de l'objecte. En aquest estadi les arestes ja han estat aproximades per poligonals; la figura mostra aquesta poligonalització en l'espai paramètric de les quatre corbes de retallat de la cara superior i la divisió del quadrat unitari induïda pel R -quadree. Com era d'esperar, els valors R emmagatzemats a cada node són més petits com més a prop de la zona de màxima curvatura del pedaç són (banda dreta); recordem que els valors R són inversament proporcionals a la curvatura i

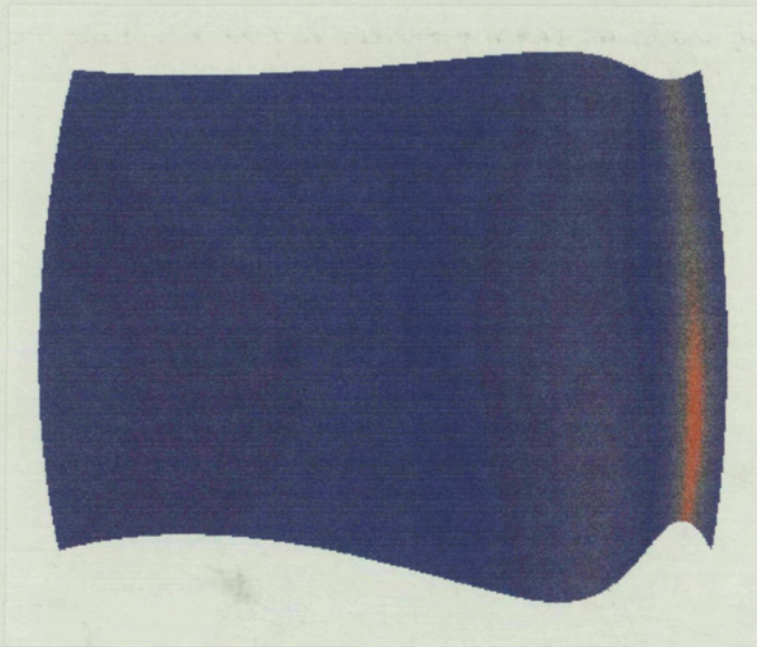


Figura 6.6: Representació en fals color de la curvatura del pedaç. El color blau correspon a una curvatura suau, mentre que el taronja o vermell correspon a la màxima curvatura.

que limiten la màxima longitud de les arestes dels triangles admissibles que s'hauran de formar.

El següent pas de l'algorisme consisteix en triangular l'interior de cadascuna de les cares, i per fer-ho cal partir d'una triangulació de l'interior de la cara. A les figures 6.8, 6.9 i 6.10 es pot veure el procés de refinament d'arestes, que aconsegueix una triangulació admissible de la cara superior del sòlid. Partim d'una triangulació de Delaunay restringida del polígon contorn, tal com es pot veure a la figura 6.8, on hi ha representada la CDT en espai paramètric. De fet, l'algorisme enlloc de la CDT del polígon manté la triangulació de tot el supertriangle (vegeu la secció A.4), perquè la rutina que introdueix un nou punt a la CDT té com a precondició que el punt sigui interior a la zona recoberta per la triangulació; a les figures tant sols hem representat la CDT de l'envolupant convexa del polígon, altrament els triangles que ens interessin no es distingirien perquè quedarien massa petits. Com que en refinar les arestes interiors pot ocórrer que un punt candidat a ser insertat caigui fora de la cara (cas 2.B de l'algorisme de refinament, vegeu la secció 4.5.1), una forma senzilla de comprovar-ho consisteix en saber si en intentar afegir el punt a la triangulació recau en un triangle exterior, és a dir, en un triangle que no recobreix el polígon; recordem que el pas inicial per afegir un punt en una CDT consisteix en localitzar dins quin triangle

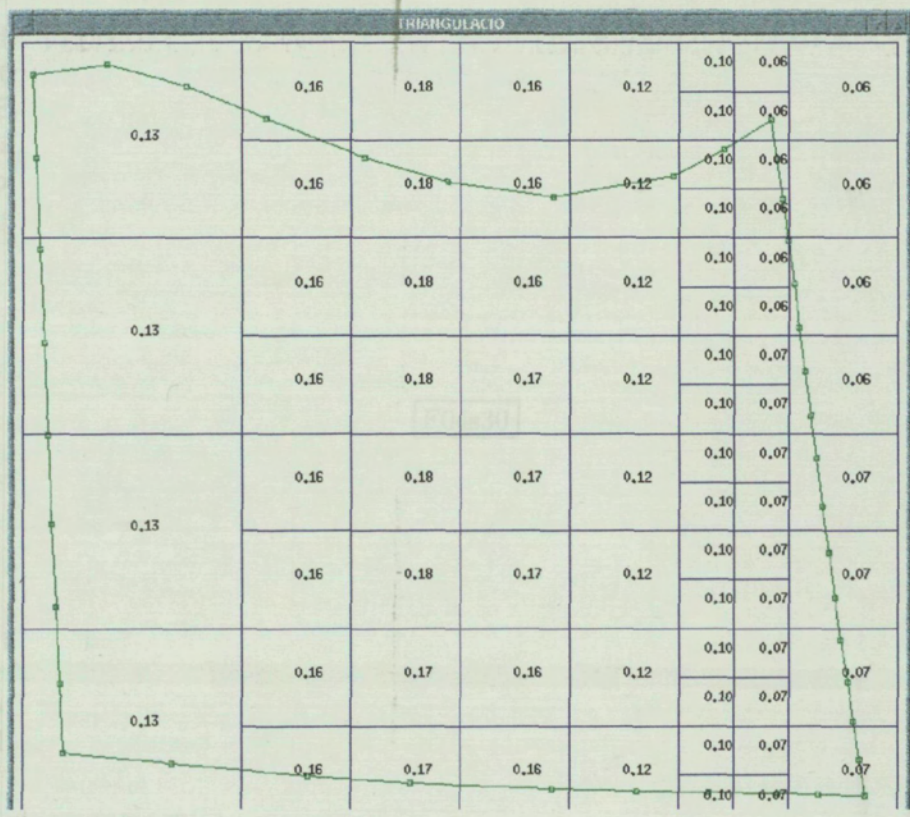


Figura 6.7: *R*-Quadtree calculat per a la cara superior, on cada node conté un valor escalar *R* que limita la màxima longitud de les arestes amb un extrem en el node, i discretització de les corbes de retallat (de color verd).

recau. Les figures 6.9 i 6.10 mostren dos passos consecutius intermedis del refinament d'arestes. A la figura 6.9 es pot veure una situació en la qual ja s'han refinat unes quantes arestes, i per tant han estat afegits uns quants punts a l'interior de la cara. Hem representat de color vermell l'aresta no admissible que és refinada en aquest pas i també podem veure quin és el punt candidat a ser afegit; en aquest cas, es tracta del circumcentre d'un dels triangles adjacents a l'aresta. Al pas següent (figura 6.10), el punt en qüestió ja ha estat afegit, actualitzant-se la CDT, s'ha triat una altra aresta per ser refinada i estem a punt d'afegir un nou punt, que en aquest cas és el punt mig de l'aresta. El resultat final del refinament d'arestes, és a dir, la triangulació admissible es pot veure a la figura 6.11.

Un cop s'ha acabat el refinament d'arestes es pot aplicar la relaxació a la CDT, el qual té la finalitat de millorar els angles dels triangles. Aquest postprocés es pot observar a les figures 6.11, 6.12 i 6.13. A La primera d'aquestes figures hi ha, tal com acabem de dir, la triangulació resultant del refinament d'arestes, de la qual parteix el procés de relaxació. A la figura 6.12 es pot

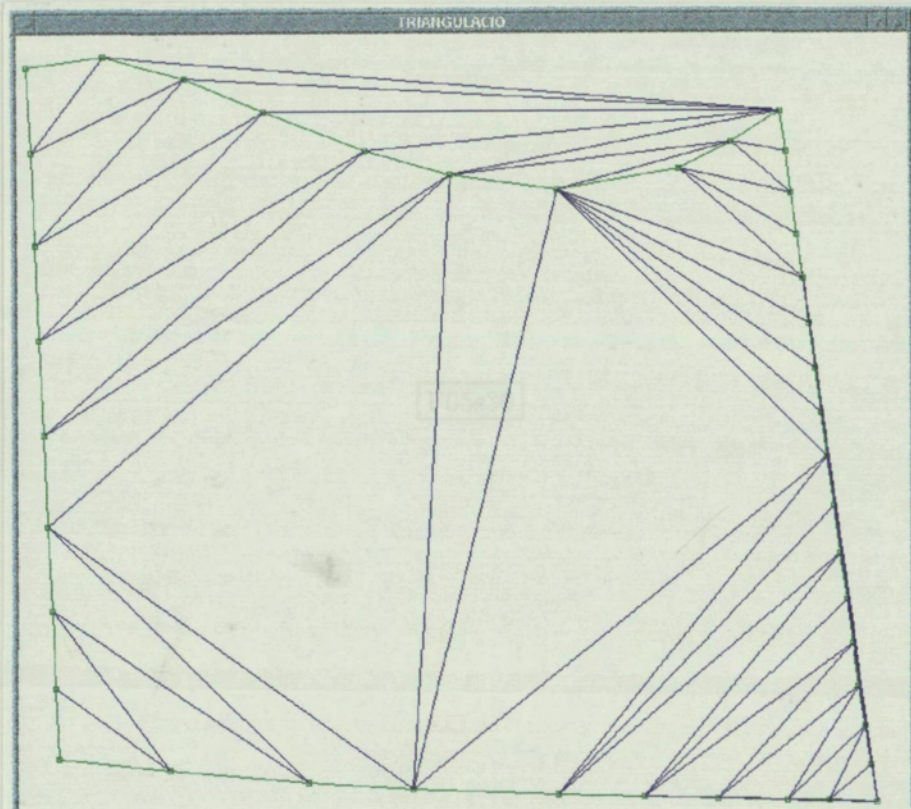


Figura 6.8: Procés de refinament d'arestes: CDT inicial de l'envolupant convexa del polígon contorn

veure una situació intermèdia, després d'aplicar 15 iteracions del procés de relaxació. Recordem que cada pas de la relaxació consisteix en moure cadascun dels punts interiors de la malla segons una força calculada en funció de la longitud de les arestes que hi conflueixen i tenint en compte la funció R . A la figura 6.13 s'hi pot veure el resultat final del procés de relaxació, després d'aplicar 38 iteracions. El lector pot observar clarament que les noves posicions dels punts tenen com a conseqüència que la forma dels triangles en conjunt ha millorat, ja que han anat obrint-se alguns angles aguts que hi havia a la CDT inicial; en altres paraules, els triangles de la CDT final en espai paramètric són més propers a triangles equilàters que no pas els de la CDT de partida. Cal tenir sempre present que aquest procés es realitza íntegrament en espai paramètric.

Les figura 6.14, 6.15 i 6.16 mostren la triangulació final en espai imatge. El sòlid resultant de l'algorisme isòtrop està representat usant tres tècniques: en model de filferros (amb eliminació de les parts amagades), amb cares planes i suavitzat utilitzant el mètode de Phong. Aquest darrer mètode de representació requereix que es supleixin les normals a cadascun dels vèrtexs

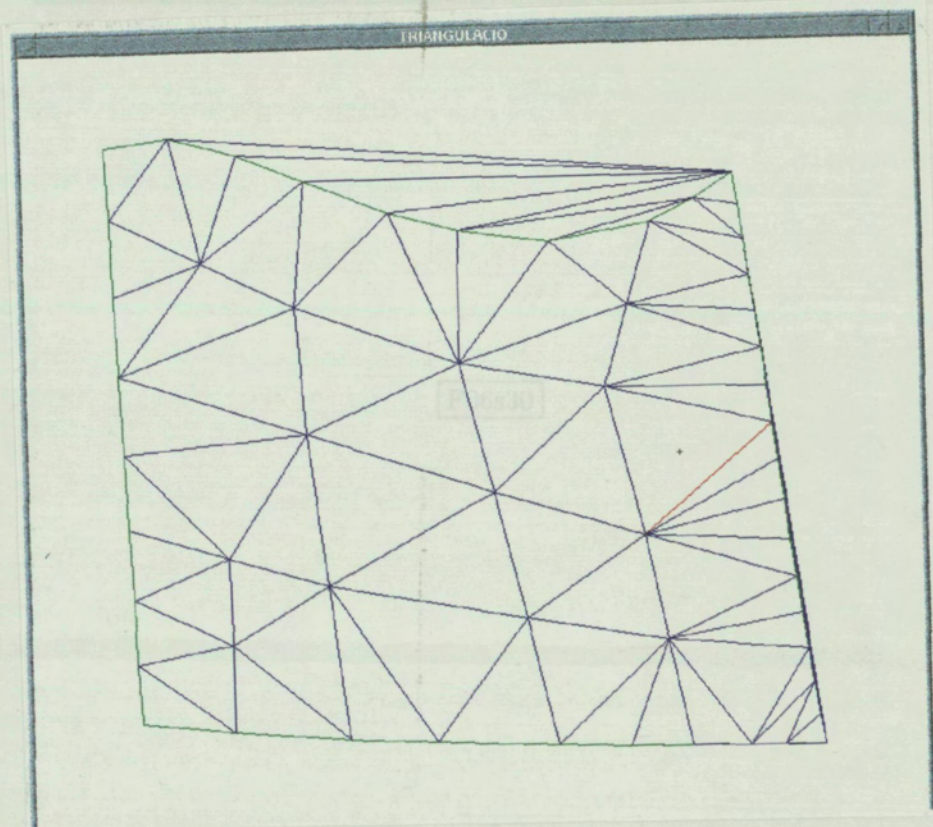


Figura 6.9: Procés de refinament en un pas intermedi

dels triangles, els quals la nostra implementació calcula de forma exacta a partir de les equacions de les superfícies de Bézier originals. D'aquesta manera, s'aconsegueix un elevat grau de realisme en la visualització tot i que la triangulació sigui bastant grollera (la cara superior del sòlid resultant està formada per 135 vèrtexs i 262 triangles). Es pot observar l'adaptació dels triangles a la curvatura de la superfície: compareu la mida dels triangles i arestes en les diferents zones de la cara superior. Notem també que les demés cares de l'objecte, les que són planes, també han estat triangulades. En aquest cas, com que es tracta de cares sense gens de curvatura no es requereixen punts interiors i la triangulació és directament la CDT del polígon contorn.

Finalment, la figura 6.17 mostra la triangulació de la mateixa cara superior de l'objecte que realitza Open Inventor. Open Inventor és una biblioteca de rutines, implementada sobre Open GL, orientada a la visualització i que permet manegar, entre molts d'altres objectes i elements d'una escena, superfícies NURBS retallades. Tot i que desconeixem el mètode emprat per aquest sistema per triangular les superfícies retallades, els resultats indiquen que es tracta d'un mètode com el presentat en [RHD89] (vegeu la

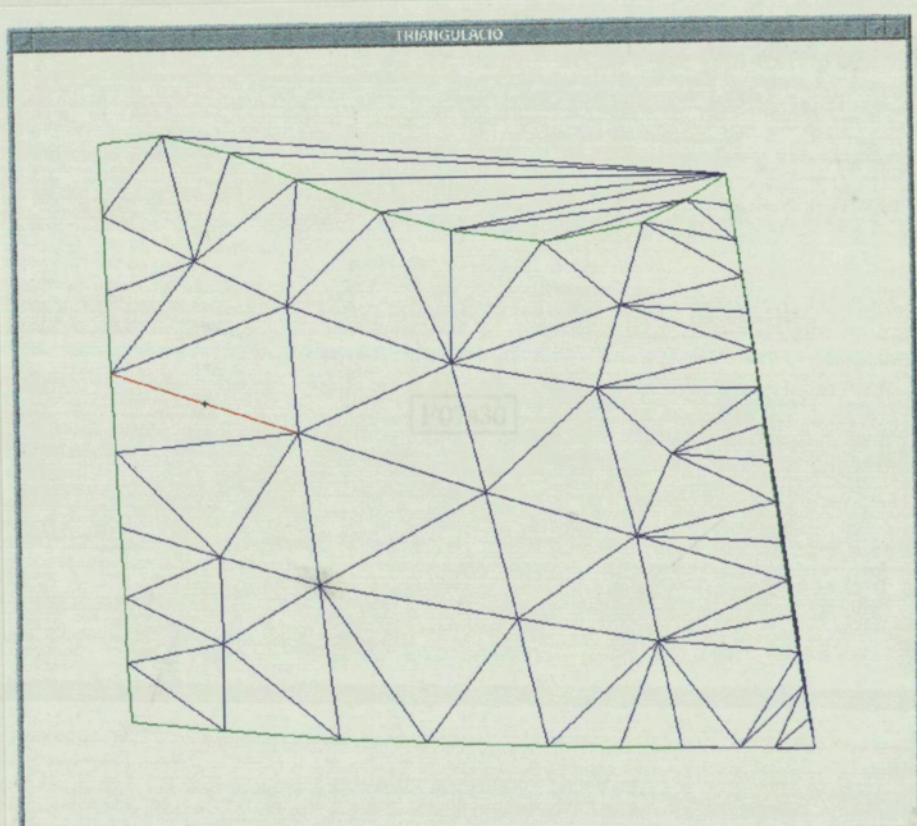


Figura 6.10: Procés de refinament al següent pas de la figura 6.9.

secció 2.2.2 i la figura 2.2). Open Inventor no permet afitar l'error comès per l'aproximació, però en canvi existeix un paràmetre que determina la precisió de la visualització (en unitats desconegudes per l'usuari). Això ens ha permès obtenir aquesta triangulació de la cara superior que està composta per un nombre semblant de punts i triangles que l'obtinguda mitjançant l'algorisme isòtrop (la triangulació de la figura 6.17 té a la vora de 110 punts i 270 triangles). Comparant aquesta figura amb l'anterior es pot comprovar que malgrat que ambdues triangulacions tinguin aproximadament el mateix nombre d'elements, la que resulta de l'aplicació de l'algorisme isòtrop té diversos avantatges: en primer lloc, s'adapta a la curvatura, cosa que no aconsegueix la triangulació que proporciona Inventor (observeu que els triangles de l'interior són tots de la mateixa mida, tant sols se'n produeixen de mides i formes diferents en la zona que uneix la tesellació interior amb la discretització de les corbes frontera); en segon lloc, la forma dels triangles també és millor, perquè en la segona triangulació no hi ha cap control sobre la forma dels triangles de la zona del contorn (observeu l'elevada quantitat de triangles llargs i afuats que hi ha); i en tercer lloc, l'algorisme aplicat per Inventor no permet tractar conjunts de pedaços units per la seva frontera,

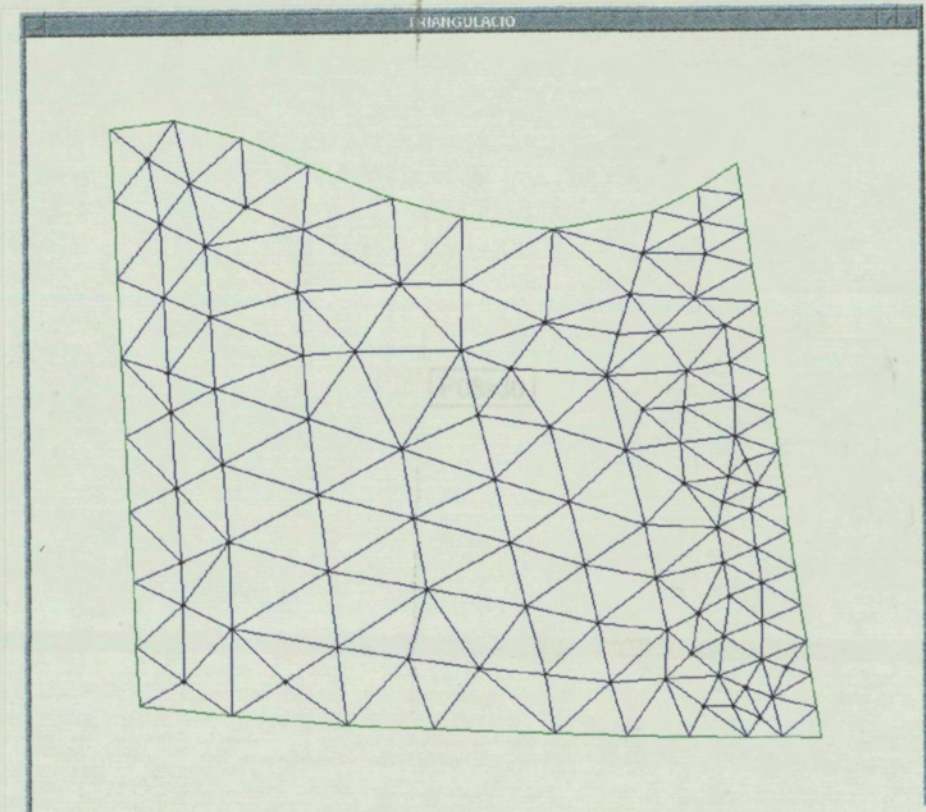


Figura 6.11: Procés de relaxació: situació inicial, resultant del refinament d'arestes.

creant una triangulació conforme, ja que treballa de forma independent per cada peça.

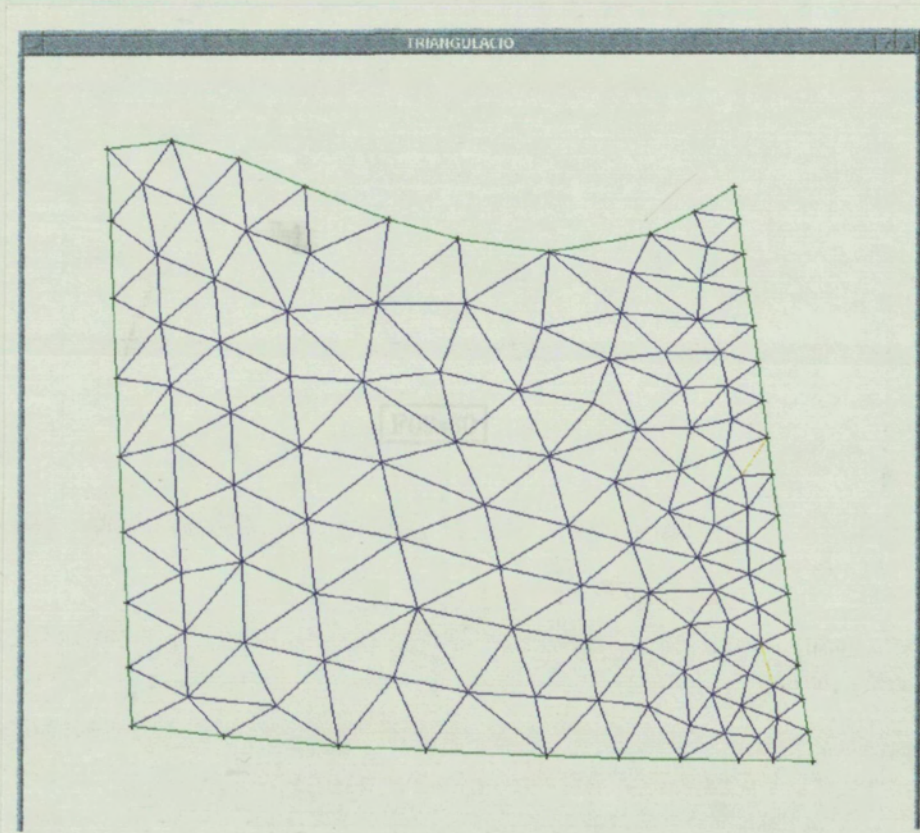


Figura 6.12: Pas intermedi de la relaxació.

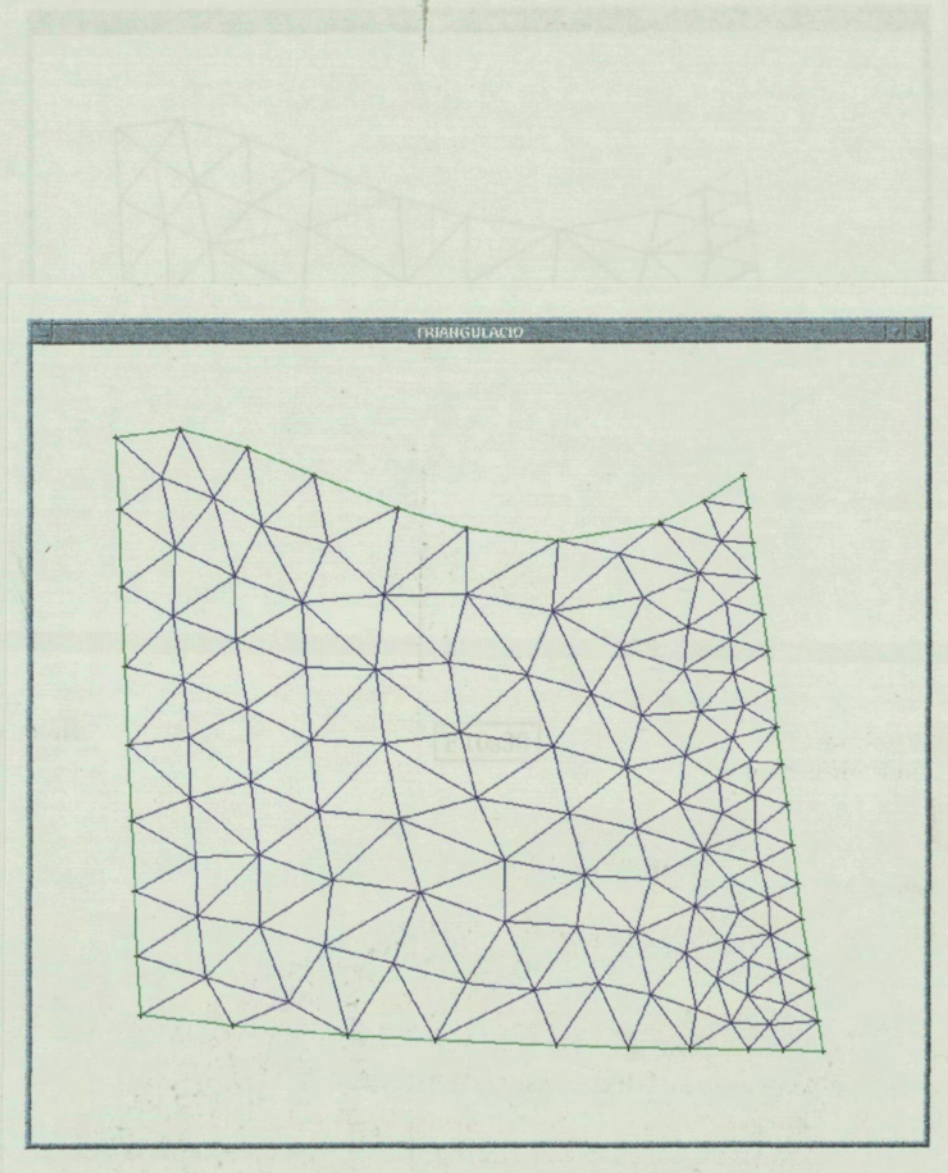


Figura 6.13: Situació final dels punts un cop realitzada la relaxació.

6.3.3 Avaluació dels resultats

En a
tema
resu
seg
haci
prop

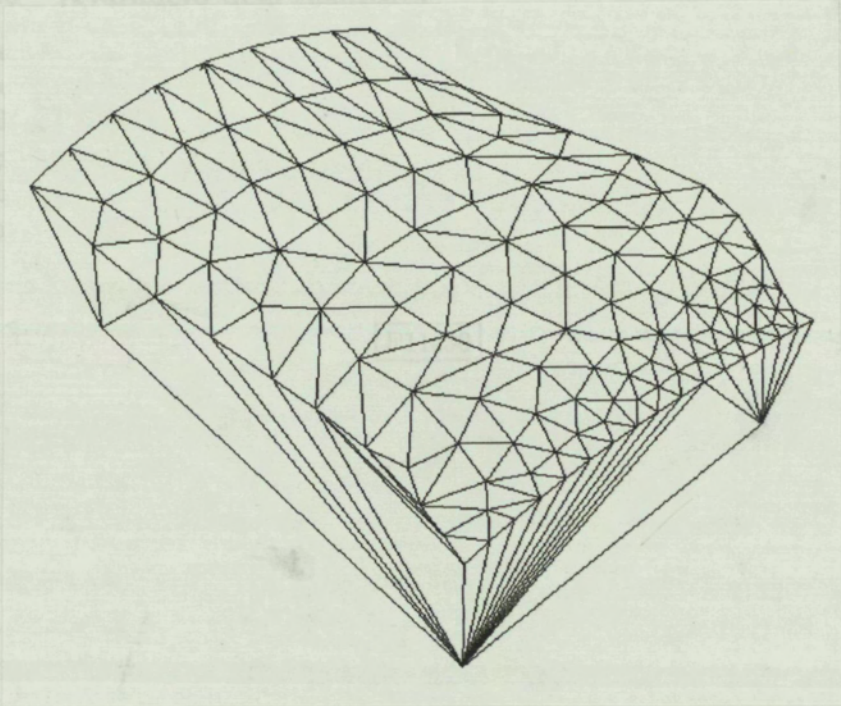


Figura
6.14

Figura 6.14: Triangulació resultant en espai imatge visualitzada amb eliminació de línies ocultes.

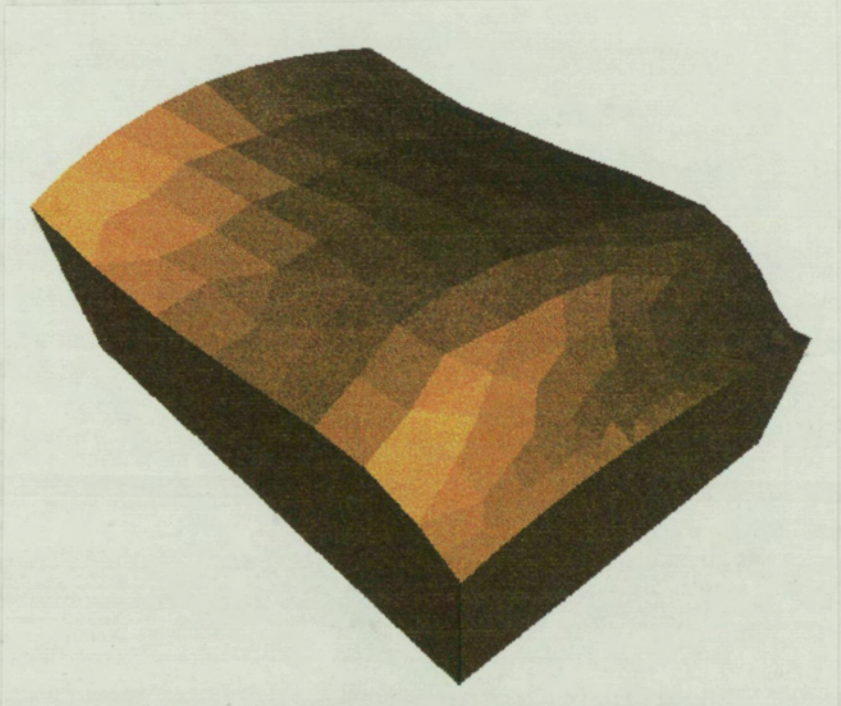


Figura
6.15

Figura 6.15: Triangulació resultant visualitzada amb cares planes.

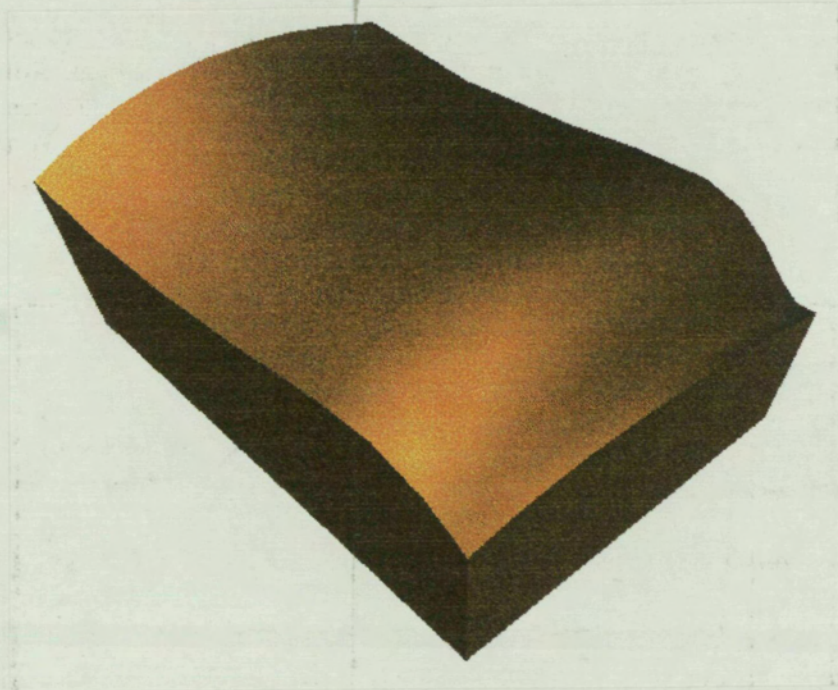


Figura 6.16: Triangulació resultant visualitzada amb suavitzat (algorisme de Phong).

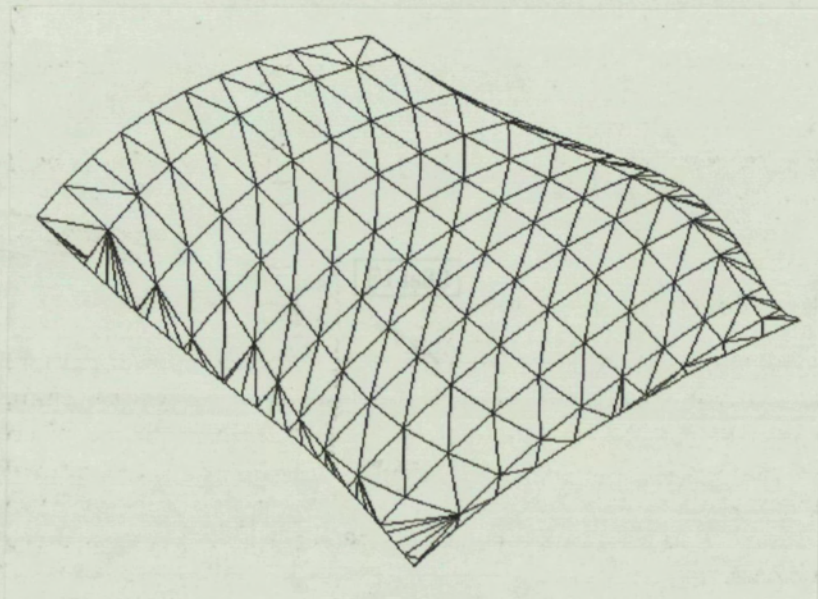


Figura 6.17: Triangulació del mateix peça retallat que realitza Open Inventor per visualitzar-lo en filferros.

6.3.3 Avaluació dels resultats

En aquesta secció avaluarem els resultats dels diversos processos que componen els dos algorismes que hem presentat, l'isòtrop i el direccional. Aquests resultats els analitzarem amb l'ajuda d'un conjunt de gràfiques que mesuren magnituds com el nombre de triangles produïts o els angles de la triangulació resultant i ajuden a comprendre el comportament dels dos algorismes proposats.

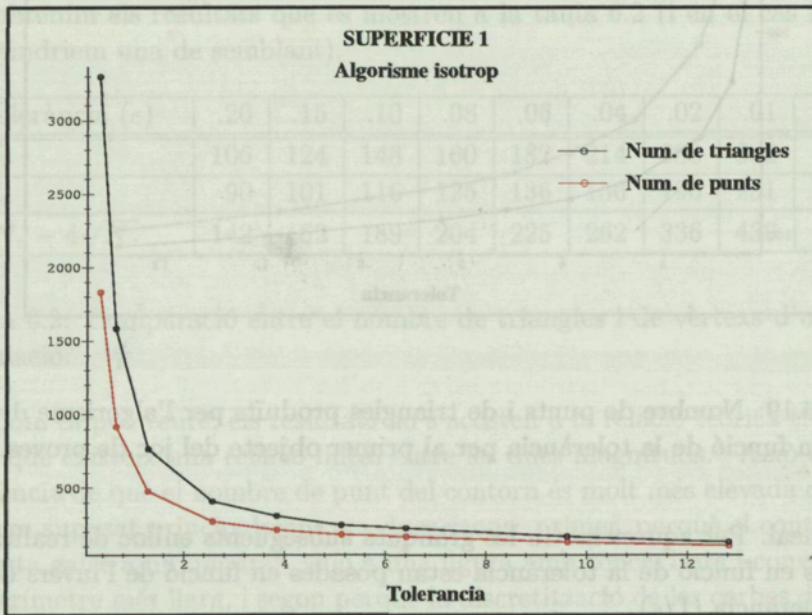


Figura 6.18: Nombre de punts i de triangles produïts per l'algorisme isòtrop en funció de la tolerància per al primer objecte del joc de proves.

Nombre d'entitats produïdes

El primer test ha estat realitzat amb la finalitat de relacionar el nombre d'entitats produïdes en funció de la tolerància. Amb aquest ànim, hem realitzat diverses execucions tant de l'algorisme isòtrop com del direccional sobre un mateix objecte, la superfície 1, comptant en cada cas el nombre de triangles i punts de la triangulació de la cara superior. Les gràfiques 6.19 i 6.18 mostren els resultats d'aquestes execucions. Es poden observar tres fets evidents:

- En primer lloc, com és lògic el nombre d'entitats (punts i triangles) resultant decreix en funció de la tolerància i que no ho fa de forma

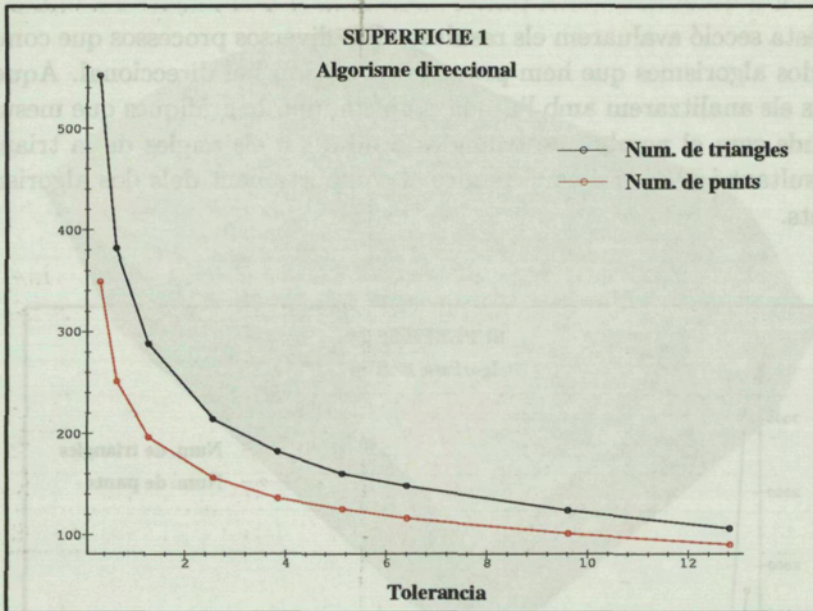


Figura 6.19: Nombre de punts i de triangles produïts per l'algorisme direccional en funció de la tolerància per al primer objecte del joc de proves.

lineal. Per aquest motiu les gràfiques subsegüents enlloc de realitzar-les en funció de la tolerància estan posades en funció de l'invers de la tolerància ($1/\epsilon$).

- En segon lloc, el nombre d'entitats és més gran en el cas isòtrop que en el cas direccional. Aquest fet l'analtitzarem més endavant amb l'ajut de noves gràfiques.
- I en tercer lloc, el nombre de punts és menor que el nombre de triangles. Tot seguit intentarem relacionar aquestes dues magnituds.

Segons es desprèn de l'equació que relaciona el nombre total de punts (N_v) i de triangles (N_t) d'una triangulació planar sense forats, tenim que (vegeu la secció 2.4)

$$N_t = 2(N_v - 1) - N_c \approx 2N_v - N_c$$

on N_c és el nombre de vèrtexs del contorn (els que no són interiors). En una triangulació planar que recobris un quadrat en la qual la densitat dels vèrtexs fos uniforme, tindriem que el nombre de vèrtexs interiors seria de l'ordre de l'àrea del quadrat i el nombre de vèrtexs del contorn seria de

l'ordre del perímetre del quadrat. Anomenant a a la longitud d'una de les arestes del quadrat obtenim la següent relació teòrica:

$$N_t \approx 2a^2 - 4a, \quad \text{és a dir,}$$

$$N_t \approx 2N_v - 4\sqrt{N_v}$$

Atès que la cara superior del sòlid que estem analitzant no té cap forat i suposant que la regió triangulada és més o menys quadrada, podem intentar veure si es compleix aquesta relació. En el cas de l'algorisme direccional obtenim els resultats que es mostren a la taula 6.2 (i en el cas isòtrop n'obtindriem una de semblant).

Tolerància (ϵ)	.20	.15	.10	.08	.06	.04	.02	.01	.005
N_t	106	124	148	160	182	214	288	382	552
N_v	90	101	116	125	136	156	196	251	349
$2N_v - 4\sqrt{N_v}$	142	162	189	204	225	262	336	439	623

Taula 6.2: Comparació entre el nombre de triangles i de vèrtexs d'una triangulació.

Com es pot veure, els resultats no s'acosten a la relació teòrica trobada, tot i que existeix una relació lineal entre les dues magnituds.¹ Això és conseqüència de que el nombre de punt del contorn és molt més elevada del que havíem suposat principalment per dues raons: primer, perquè el contorn no s'ajusta gaire a un quadrat, sinó a una figura amb concavitats i convexitats de perímetre més llarg, i segon perquè la discretització de les corbes de retallat, és a dir, del contorn, és més densa que la de l'interior de la cara. Aquest darrer fet, fàcilment observable a la figura 6.11, és conseqüència de la forma com es discretitzen les corbes de retallat (usant un mètode de bisecció). En qualsevol cas, el que queda clar és que analitzar el nombre de triangles d'una triangulació és comparable a analitzar-ne el nombre de vèrtexs. Per tant, d'ara en endavant només caldrà que analitzem una d'aquestes magnituds, el nombre de vèrtexs.

La figura 6.20 mostra diverses triangulacions d'un dels objectes del joc de proves, la tetera de Utah, visualitzada en filferros. Cadascuna de les triangulacions ha estat obtinguda utilitzant l'algorisme direccional amb un valor de la tolerància diferent. Ressaltem que la triangulació corresponent a la tolerància més gran, la de dalt a l'esquerra, tot i estar composta per un nombre reduït d'entitats geomètriques (408 triangles i 402 punts) és encara una aproximació bastant fidel del sòlid original que conté totes les seves principals característiques.

¹El lector pot fàcilment comprovar que el nombre triangles en aquest cas s'ajusta molt més si considerem que la relació és $N_t = 2N_v - 8\sqrt{N_v}$, és a dir, si considerem que el nombre de punts del contorn és el doble del que havíem suposat.

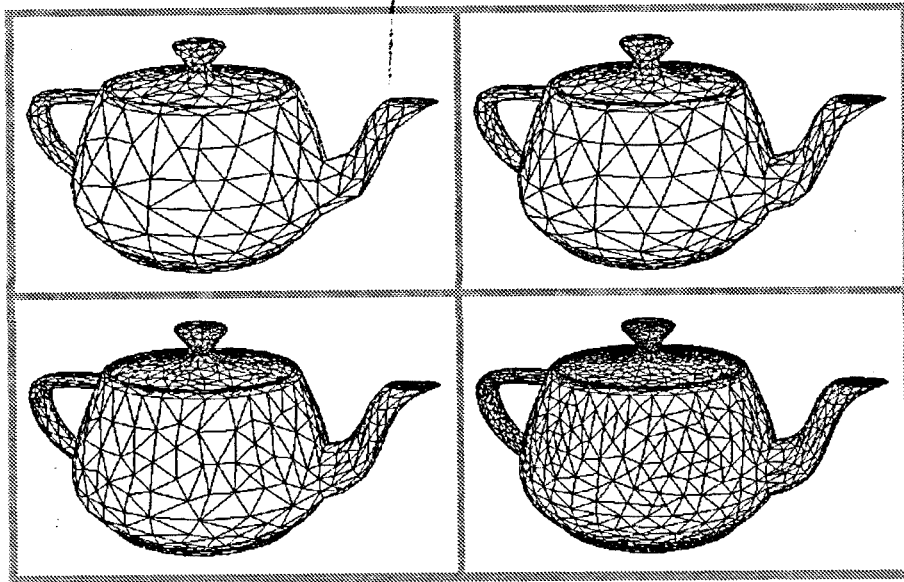


Figura 6.20: La tetera triangulada utilitzant l'algorisme direccional amb diferents valors de la tolerància. D'esquerra a dreta i de dalt a baix, els valors de la tolerància usats han estat $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.4$, i $\varepsilon = 0.2$.

Comparació de l'algorisme isòtrop amb el direccional

La finalitat de les següents proves que hem realitzat ha estat comparar els resultats dels dos algorismes proposats en aquesta tesi, l'isòtrop i el direccional. Les gràfiques 6.21, 6.22 i 6.23 mostren el nombre de punts de les triangulacions resultants en ambdós casos amb diferents toleràncies. Cal tenir en compte que, tal com hem esmentat, aquestes gràfiques han estat representades en funció de l'invers de la tolerància, per poder comparar millor els resultats.

Queda clar que el nombre de punts en el cas isòtrop és sempre més gran que en el cas direccional. No només això, sino que segons mostren les gràfiques la tendència d'un i altre algorisme és clarament diferent, tant sols cal comparar les pendent de les gràfiques en un i altre cas. Aquest fet ja s'acorda amb els resultats teòrics esperats, ja que segons hem vist al capítol 5 les fites que determinen el nombre d'entitats produïdes (funció R , longituds màximes de les arestes admissibles, etc.) són més ajustades en el cas direccional. A les fites teòriques cal afegir-li la distorsió provocada per les qüestions de la implementació: cal tenir en compte que l'algorisme no calcula la funció R de forma exacta a cada punt de l'espai paramètric sinó un valor en cada node del R -quadtrees que depèn de fites de les segones derivades, calculades usant un altre mètode numèric (basat en la transformació de les superfícies de la base de Bernstein-Bézier a la de Tchebychev, vegeu la secció 4.2.3).

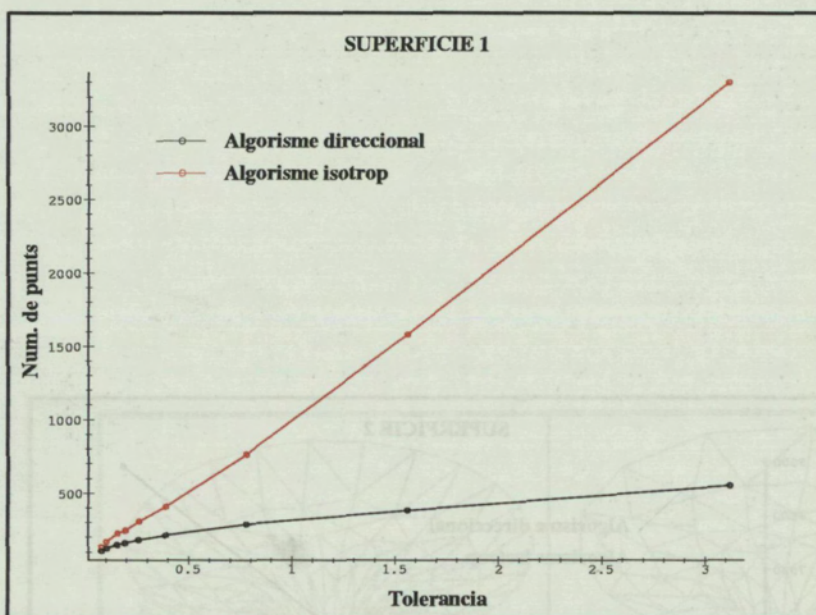


Figura 6.21: Comparació entre nombre de punts resultants de l'algorisme isotrop i el direccional per a la superfície 1.

Aquesta anàlisi numèrica juntament amb la comparació teòrica de les fites ens serveixen per afirmar que, si només es té en compte el nombre d'entitats produïdes, l'algorisme direccional és sens dubte millor que l'isòtrop. Com a contrapartida, l'algorisme direccional no valora tant la forma dels triangles resultants com l'isòtrop, és a dir, que el que es guanya en nombre de triangles és a base (com a mínim, en part) d'empitjorar la seva forma (compareu les triangulacions de les figures 6.24 i 6.25). Un altre inconvenient que es podria objectar a l'algorisme direccional és que està basat en unes fites més complicades, i per tant més difícils d'implementar i més lentes de calcular.

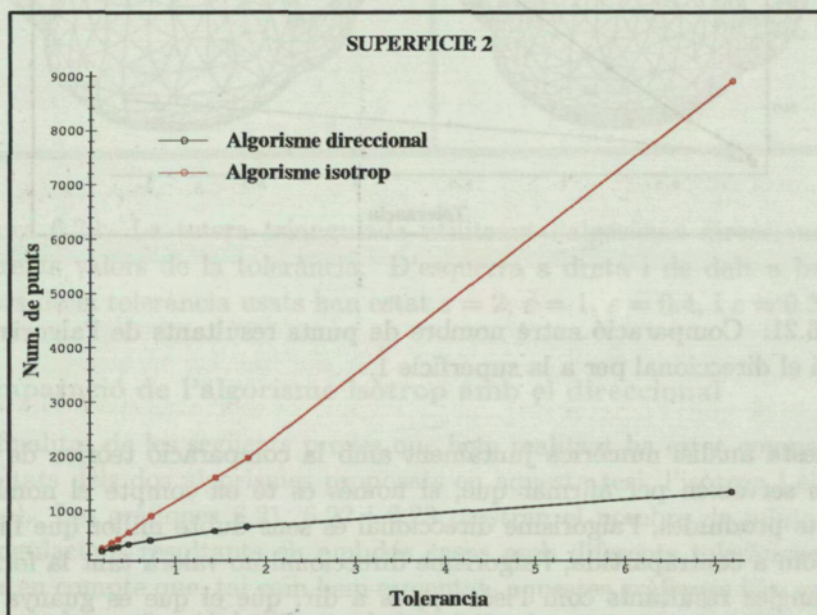


Figura 6.22: Comparació entre nombre de punts resultants de l'algorisme isotrop i el direccional per a la superfície 2.

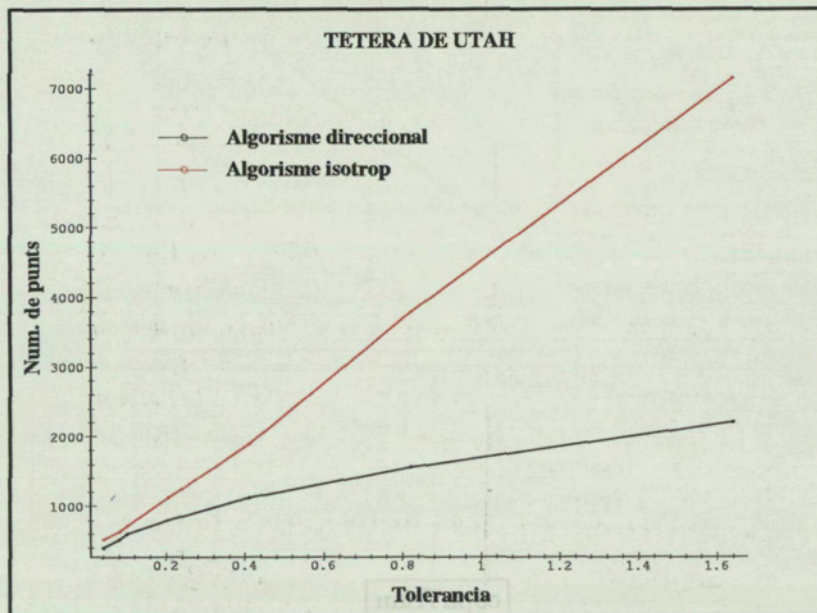


Figura 6.23: Comparació entre nombre de punts resultants de l'algorisme isotrop i el direccional per a la tetera.

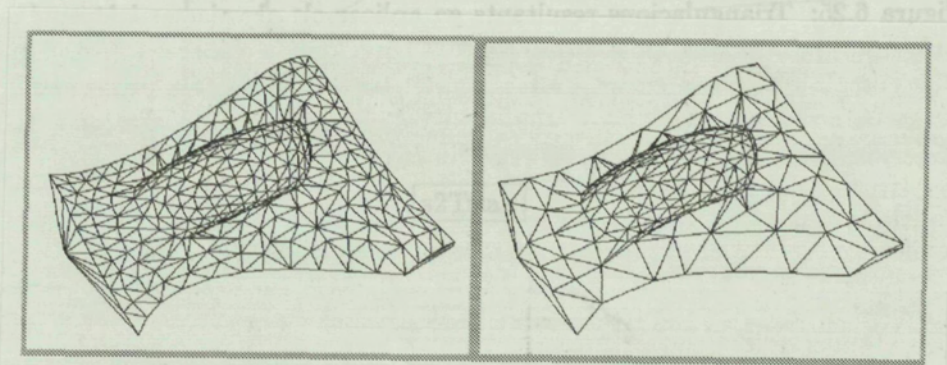


Figura 6.24: Triangulacions resultants en aplicar els algorismes isotrop i direccional sobre la superfície 2 amb la mateixa tolerància. Noteu que la triangulació de l'esquerra, corresponent al cas isotrop, conté molts més triangles que la de la dreta, corresponent al cas direccional. Observeu també que la triangulació direccional tendeix a crear triangles allargats en les direccions de mínima curvatura.

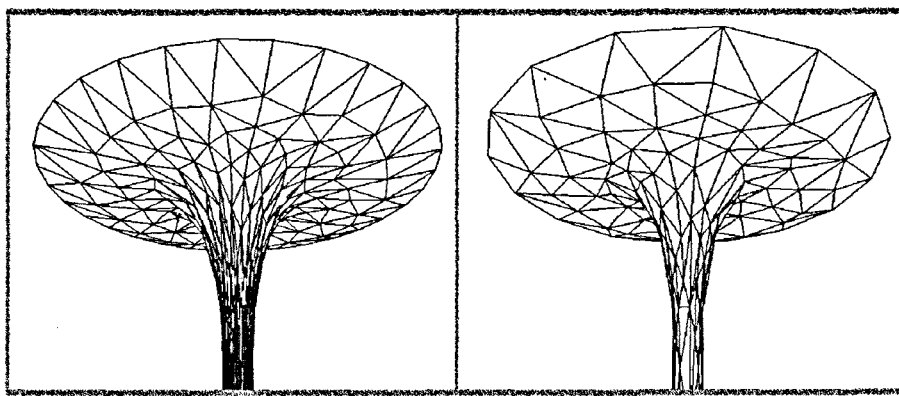


Figura 6.25: Triangulacions resultants en aplicar els algorismes isòtrop (a l'esquerra) i direccional (a la dreta) sobre la copa amb la mateixa tolerància. Observeu la diferència en un i altre cas del nombre d'entitats produïdes i de la forma dels triangles. Noteu també l'adequació de les arestes a la direccionalitat de la curvatura en el segon cas.