UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Àlgebra i Geometria

FILTRACIONES SIMBÓLICAS Y SUS ÁLGEBRAS ASOCIADAS

per

Jaume Martí Farré

Facultat de Matemàtiques

1995

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Àlgebra i Geometria

FILTRACIONES SIMBÓLICAS Y SUS ÁLGEBRAS ASOCIADAS

Memòria presentada per
Jaume Martí Farré
per aspirar al grau de
Doctor en Matemàtiques.

Departament d'Àlgebra i Geometria,
Facultat de Matemàtiques,
Universitat de Barcelona.

Barcelona, setembre de 1995.

55 MAR Topología.

TESI DOCTORAL

55N25 Topología algebraica.

55N35

Departament d'Àlgebra i Geometria.
Programa de Doctorat d'Àlgebra i Geometria, bienni 1987-89.
Doctorand: Jaume Martí Farré.
Tutor: José María Giral Silió.
Director de Tesi: José María Giral Silió.

José María Giral Silió, professor titular del Departament
d'Àlgebra i Geometria de la Facultat de Matemàtiques
de la Universitat de Barcelona

CERTIFICA

que la present memòria ha estat realitzada sota la seva direcció
per en Jaume Martí Farré, i que constitueix la seva tesi per aspirar
al grau de Doctor en Matemàtiques.

Barcelona, setembre de 1995.

José Mª Giral

Signat: José María Giral Silió.

Introducción **7**

1. Comparación de topologías definidas por filtraciones **23**

1.1 Filtraciones equivalentes 24
1.2 Un caso particular de equivalencia 28
1.3 Filtraciones linealmente equivalentes 33
1.4 Igualdad de filtraciones 36
1.5 Comportamiento de la equivalencia y de la equivalencia lineal por la acción de morfismos 38
1.6 Anillos analíticamente no ramificados 39
1.7 Tres teoremas de Zariski-Samuel 42

2. Filtraciones ádica, simbólica y entera **45**

2.1 Potencias simbólicas generalizadas 45

3. Comparación de las topologías ádica, simbólica y entera. Caracterizaciones de los $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}}$-(S)-ideales **52**

3.1 Conjuntos de primos asociados a un ideal 52
3.2 Potencias simbólicas y grupos 0-ésimos de cohomología local 54
3.3 Potencias simbólicas y el functor Ext 56
3.4 Equivalencia de topologías 60
3.5 Equivalencia lineal de topologías 69
3.6 Igualdad entre potencias simbólicas y ordinarias 78
3.7 Potencias simbólicas y anulación de la cohomología local 85

4. Comportamiento de los $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}}$-(S)-ideales por operaciones y por la acción de morfismos **92**

4.1 Comportamiento por la acción de morfismos 92
4.2 Operaciones entre $t, \bar{t}$-(S)-ideales 97
4.3 Operaciones entre $s, \bar{s}$-(S)-ideales 102

5. Álgebras asociadas a filtraciones simbólicas **106**

5.1 Propiedades de finitud del álgebra de Rees simbólica 106
5.2 Potencias simbólicas y el anillo graduado asociado 112

Bibliografía **123**

Introducción

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. La n-ésima potencia simbólica de I, que notaremos por $I^{(n)}$, se define como la intersección de las componentes primarias de I^n correspondientes a los primos minimales de I. Las potencias de I (resp. las potencias simbólicas de I), inducen una topología en R denominada la topología I-ádica de R (resp. la topología I-simbólica de R). Se dice que estas dos topologías son equivalentes (resp. linealmente equivalentes) si para todo natural n existe un natural m tal que $I^{(m)} \subset I^n$ (resp. si existe un natural k tal que $I^{(n+k)} \subset I^n$ para todo natural n). Un ideal se dice que es un t-ideal (resp. un s-ideal) si las topologías ádica y simbólica que define son topologías equivalentes (resp. linealmente equivalentes).

Por otro lado, podemos considerar la topología de R asociada a la filtración $\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ definida por las clausuras enteras de las potencias de I. Como antes, ahora podemos comparar las topologías definidas por las potencias simbólicas de I y por las clausuras enteras de las potencias de I. Se dice que un ideal I es un $\bar{t}$-ideal (resp. un $\bar{s}$-ideal) si la topología I-simbólica de R es más fina (resp. linealmente más fina) que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I. Es decir, si para todo natural n existe un natural m tal que $I^{(m)} \subset \overline{I^n}$ (resp. si existe un natural k tal que $I^{(n+k)} \subset \overline{I^n}$ para todo natural n).

En [62, Lema 3 (p.33)] Zariski demuestra que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de un dominio noetheriano R analíticamente irreducible sobre los ideales primos que contienen a $\mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}$ es un t-ideal. Es éste, tal vez, el primer resultado relativo a t-ideales que aparece en la literatura. Posteriormente Hartshorne [17, Prop. 7.1] demuestra que, un ideal primo $\mathfrak{p}$ de dimensión uno de un anillo local noetheriano completo R es un t-ideal si y sólo si $\mathfrak{p}$ contiene todos los primos asociados de R. En este trabajo Hartshorne [17, § 7] comenta: "A general question, whose solution is quiet complicated, is to determine when the $\mathfrak{p}$-adic topology is equivalent to the $\mathfrak{p}$-symbolic topology." En [54], Schenzel soluciona este problema generalizando, además, los resultados de Zariski y de Hartshorne. En éste trabajo Schenzel caracteriza los ideales primos que son t-ideales (resp. s-ideales) mediante ciertas desigualdades entre alturas (resp. dispersiones analíticas) y dimensiones. Posteriormente, McAdam y Ratliff en [37] dan un punto de vista distinto a las caracterizaciones de Schenzel usando, para ello, ciertos conjuntos de divisores primos asociados al ideal. Las caracterizaciones establecidas por Schenzel, McAdam y Ratliff son generalizadas por Ratliff en [44] para el caso de ideales primarios, y por Verma en [58, 59] para ideales arbitrarios.

Otro problema clásico relacionado con las potencias simbólicas es el de determinar cuándo el álgebra de Rees simbólica $\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{p}^{(n)}$ es un anillo noetheriano o, equivalentemente, cuándo es una R-álgebra finito generada. Este problema, planteado por Cowsik en [11], ya aparece en los trabajos de Nagata [39] y de Rees [47]. Rees en [47] demuestra que, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de altura uno de un dominio local normal noetheriano dos-dimensional tal que el álgebra de Rees simbólica $\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{p}^{(n)}$ es un anillo noetheriano, entonces existe un natural $n_0 \geq 1$ tal que la n_0-ésima potencia simbólica de $\mathfrak{p}$ es un ideal principal (y, por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es un ideal radicalmente intersección completa). Por otro lado, en [11] Cowsik demuestra que si I es un ideal radical de un anillo local noetheriano d-dimensional con cuerpo residual infinito tal que el álgebra de Rees simbólica $\oplus_{n\geq 0}I^{(n)}$ es un anillo noetheriano, entonces I está radicalmente generado por $d-1$ elementos. De este resultado Cowsik deduce que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de dimensión uno de un anillo local regular tal que el álgebra de Rees simbólica $\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{p}^{(n)}$ es un anillo noetheriano, entonces $\mathfrak{p}$ es radicalmente intersección completa, (generalización del resultado de Rees). Además, en este trabajo, Cowsik plantea la siguiente conjetura: ¿es el álgebra de Rees simbólica de un ideal primo de un anillo local regular un anillo noetheriano?.

Eliahou [14, 15] y Huneke [25] demuestran que la conjetura de Cowsik es cierta para algunas familias de ideales primos definidos por curvas monomiales de espacios afines 3-dimensionales. Posteriormente Roberts [49] demuestra (mediante un ejemplo inspirado en el trabajo de Nagata [39]), que la conjetura es falsa en general.

Por lo que hace referencia al problema original de Cowsik, Nagata y Rees de determinar cuándo el álgebra de Rees simbólica es un anillo noetheriano, Huneke [24, 25] demuestra que si R es un anillo de Nagata y si el álgebra de Rees simbólica de $\mathfrak{p}$ es entera sobre el álgebra de Rees ordinaria, entonces el álgebra de Rees simbólica es un anillo noetheriano. Además, en estos trabajos, Huneke demuestra que sus hipótesis equivalen a la condición "$l(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ conteniendo estrictamente a $\mathfrak{p}$" (donde $l(\cdot)$ es la dispersión analítica), condición que en el caso en que el ideal sea de coaltura uno equivale a que el ideal sea equimúltiple, y que en el caso general equivale a que el ideal primo $\mathfrak{p}$ sea un s-ideal (Schenzel [54]). Generalizaciones posteriores de este resultado se encuentran, por ejemplo, en los trabajos de Ooishi [42] y de Schenzel [52].

Estos resultados han sido punto de partida de numerosos trabajos, tanto por lo que hace referencia a obtener caracterizaciones de cuándo el álgebra de Rees simbólica es noetheriana, como por lo que hace referencia a determinar familias de anillos e ideales para los que el álgebra de Rees simbólica sea noetheriana. Así, por ejemplo, se pueden encontrar resultados en una o ambas direcciones en los trabajos de Goto-Herrmann-Nishida-Villamayor [16], Huckaba-Huneke [22], Huneke [23], McAdam [34], Morales [38] y Schenzel [50, 53, 54].

Los resultados anteriores sugieren una relación entre la equimultiplicidad, la intersección completa y la equivalencia (la equivalencia lineal) entre las topologías ádica y simbólica asociadas a un ideal de coaltura uno. Esta relación se pone de manifiesto en el Teorema de Cowsik-Nori [12], teorema del que existen diversas versiones y generalizaciones (Achilles-Vogel [1], McAdam [33, Lema 4.5], Ratliff [44, Th. 4.3], Verma [59, (2.6)], Waldi [60, Cor. 3]).

El Teorema de Cowsik-Nori [12, Prop. 3] establece que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de dimensión uno de un dominio Cohen-Macaulay tal que el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$ es regular entonces, $\mathfrak{p}$ es intersección completa si y sólo si $\mathfrak{p}$ es equimúltiple si y sólo si para todo natural n se tiene que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ si y sólo si el anillo graduado asociado a $\mathfrak{p}$ es un dominio.

Tanto la equivalencia como la equivalencia lineal entre las topologías definidas por las filtraciones ádica, simbólica y entera asociadas a un ideal primo $\mathfrak{p}$, son debilitaciones al problema de determinar cuándo tenemos igualdad entre las potencias ordinarias, simbólicas y enteras asociadas a $\mathfrak{p}$. Luego, el Teorema de Cowsik-Nori nos dice que en el caso en que $\mathfrak{p}$ sea de coaltura uno entonces, la igualdad entre las potencias simbólicas y ordinarias asociada a $\mathfrak{p}$ se confunde con la equivalencia lineal entre las topologías ádica y simbólica asociadas a $\mathfrak{p}$ y que, en este caso, se puede reflejar en condiciones sobre el anillo graduado asociado.

En el Teorema de Cowsik-Nori se consideran, pues, tres tipos de problemas. En primer lugar, caracterizar cuándo tenemos igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas asociadas a un ideal (problema que de por sí es anterior al Teorema de Cowsik-Nori). En segundo lugar, estudiar cuándo podemos afirmar que ser s-ideal implique la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas. Y, en tercer lugar, cómo se refleja la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas en el anillo graduado asociado y, cómo se refleja el hecho de que un ideal sea un s-ideal sobre su anillo graduado asociado. Son numerosos los resultados que se han establecido en estas direcciones, de entre los que destacan los incluidos en los trabajos de Hochster [20], Huckaba-Huneke [21], Huneke [24, 25, 26, 27], Kuan [30], Ratliff [45], Robbiano-Valla [48], Schenzel [54] y Verma [58].

Las potencias simbólicas también aparecen relacionadas con resultados de anulación de la cohomología local.

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea M un R-módulo. En tal situación, se define el i-ésimo módulo de cohomología local del R-módulo M respecto del ideal I como $H_I^i(M) = \lim_{\to n} \mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, M)$; y se define la dimensión cohomológica de I respecto de M como $cd_I(M) = \sup\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H_I^i(M) \neq 0\}$. Los criterios de anulación de estos módulos, así como las acotaciones de la dimensión cohomológica, son cuestiones de gran importancia en el álgebra conmutativa y en la geometría algebraica. Es bien conocido que la dimensión de Krull de un R-módulo M es una cota superior para la dimensión cohomológica $cd_I(M)$, y que $cd_I(R) = \sup\{i \in \mathbf{Z}$ tales que existe un R-módulo M con $H_I^i(M) \neq 0\}$. Luego, si I es un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$, entonces es natural preguntarse cuándo $H_I^d(R) = 0$. Una condición necesaria y suficiente para la anulación de este módulo nos la da el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne de anulación de la cohomología local, teorema que establece que, si I es un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ con completado R^* entonces, $H_I^d(R) = 0$ si y sólo si $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$ con $\dim R^*/z = d$.

Las demostraciones de este teorema (véase [10], [18], [43], [55]) usan el hecho de que, bajo ciertas hipótesis, la topología I-ádica de R es equivalente a la topología definida por cierta filtración $\mathcal{J}$ de R. La equivalencia de las topologías que intervienen se pone de manifiesto en los trabajos de Call y Sharp [9, 10]. Ambos, en el caso de un ideal I de altura $d-1$ de un anillo local Gorenstein d-dimensional, caracterizan la anulación del módulo de cohomología local $H_I^d(R)$ mediante la equivalencia entre las topologías ádica y simbólica definidas por el ideal I. Posteriormente, Schenzel analiza la equivalencia de topologías que intervienen en el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne, y generaliza los resultados de Call y Sharp al caso local completo quasi-Gorenstein [51, Cor. 4.3]. Concretamente Schenzel demuestra que, si I es un ideal de un anillo local noetheriano completo quasi-Gorenstein d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ entonces, $H_I^d(R) = 0$ si y sólo si la topología de R definida por la filtración $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es equivalente a la topología I-ádica de R (donde, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de un anillo noetheriano A, entonces $\mathfrak{a} : \langle \mathfrak{b} \rangle = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}^m$ para m suficientemente grande).

Examinando los resultados descritos hasta este momento se sigue que éstos se pueden agrupar, esencialmente, en cinco grupos. Es decir, podemos considerar cinco tipos de problemas "clásicos" relacionados con las potencias simbólicas:

1. El primer problema es el de comparar las topologías definidas por las filtraciones ádica, simbólica y entera.

2. En segundo lugar, estudiar propiedades de finitud (generación finita, noetherianidad y dependencia entera) del álgebra de Rees simbólica $\oplus_{n \geq 0} I^{(n)}$.

3. En tercer lugar, de qué manera y hasta qué punto propiedades del anillo graduado $\mathrm{Gr}(I, R)$ asociado a un ideal I reflejan propiedades de las potencias simbólicas del ideal.

4. El cuarto problema es, por una parte, el estudio de las potencias simbólicas de familias concretas de ideales y, por otra, el estudio de anillos en los que las potencias simbólicas de los ideales de cierta clase verifiquen buenas propiedades.

5. Y el quinto problema es relacionar la anulación de la cohomología local y las potencias simbólicas.

En la presente memoria se aportarán resultados en cada una de estas direcciones. Esto se hará dando a la teoría de las potencias simbólicas un desarrollo sistemático mediante la noción de potencia simbólica generalizada $S(I^n) = I^n R_S \cap R$ (donde S es un sistema multiplicativo de R); y abordando el problema de la comparación de las topologías definidas por las filtraciones I-ádica $\{I^n\}_{n\geq 0}$, (S)-simbólica $\{S(I^n)\}_{n\geq 0}$ y entera $\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ asociadas a un ideal I de un anillo noetheriano R desde cuatro puntos de vista. En primer lugar desde un punto de vista general de comparación de topologías definidas por filtraciones. En segundo lugar usando desigualdades entre alturas, dispersiones analíticas y dimensiones. En tercer lugar mediante la anulación de ciertos morfismos naturales entre grupos 0-ésimos de cohomología local. Y, en cuarto lugar, mediante la anulación de ciertos morfismos naturales entre functores Ext. Pasemos, pues, a comentar el contenido de esta memoria con más detalle.

- **Capítulo 1:**

El primer capítulo de esta memoria tiene como objetivo comparar las topologías asociadas a dos filtraciones arbitrarias $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de un anillo R. Concretamente nos centraremos en el estudio de las filtraciones equivalentes (aquellas que definen la misma topología), y de las filtraciones linealmente equivalentes (aquellas en las que las bases de entornos del cero tienen diferencia acotada). Los resultados se obtendrán para filtraciones arbitrarias de un anillo noetheriano, y se aplicarán al caso particular de las filtraciones definidas por las potencias ádicas, simbólicas y enteras de un ideal.

Asociada a una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo R consideraremos el ideal $\ker \mathcal{I} = \bigcap_{n\geq 0} I_n$. Este ideal (que denominaremos el núcleo de la filtración), jugará un papel clave en el prolema de comparar las topologías asociadas a dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de R.

Nuestro punto de partida para abordar el problema de comparar las topologías asociadas a dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de R, será el Teorema de intersección de Krull [32, Th. 8.9, 8.10] y el Teorema de Chevalley [40, Th. 30.1]. Ambos son resultados relativos al estudio de las topologías ádicas (topologías definidas por filtraciones del tipo $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ donde I es un ideal de R). El primero analiza cuándo la I-topología es separada y, el segundo, nos da un resultado de comparación entre topologías ádicas en anillos locales noetherianos completos.

En la Sección 1.1 caracterizaremos cuándo la $\mathcal{J}$-topología de R es más fina que la $\mathcal{I}$-topología (que notaremos $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$), mediante una generalización del Teorema de Chevalley. Concretamente demostraremos que éste hecho depende de la adherencia del núcleo de ciertas filtraciones asociadas (Teorema 1.1.6), de donde se deducirá que la equivalencia de topologías únicamente depende de la adherencia del 0 respecto de ciertas filtraciones asociadas a $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ (corolarios 1.1.7 y 1.1.8). En la Sección 1.2 compararemos las topologías definidas por una filtración $\mathcal{J}$ y por la clausura entera $\overline{\mathcal{I}}$ de una filtración $\mathcal{I}$ (Teorema 1.2.3). En este caso demostraremos que la equivalencia entre estas topologías depende de la adherencia de $r(0)$ (el radical de 0) respecto de ciertas filtraciones asociadas a $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ (Corolario 1.2.4). En la Sección 1.3 demostraremos que el hecho de que la $\mathcal{J}$-topología de R sea linealmente más fina que la $\mathcal{I}$-topología (que notaremos $\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I}$), se reduce a un problema de equivalencia de topologías definidas por ciertas filtraciones en anillos de Rees (Teorema 1.3.1). Y en la Sección 1.4 demostraremos que la igualdad de filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ es un problema de equivalencia de topologías definidas por ciertas filtraciones en anillos graduados asociados (Teorema 1.4.2).

La conclusión de estos resultados se refleja en el siguiente diagrama para el caso particular en que $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J}$, (donde $\mathcal{R}(\mathcal{J})$ es el álgebra de Rees ampliada asociada a $\mathcal{J}$):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{J} = \mathcal{I} & \Longleftrightarrow & \{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(I,R)\}_{n\geq 0} \leq \{\mathrm{Gr}(I,R)^n_+\}_{n\geq 0} \\
\Downarrow & & \\
\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I} & \Longleftrightarrow & \{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{R}(I)\}_{n\geq 0} \leq \{u^n\mathcal{R}(I)\}_{n\geq 0} \\
\Downarrow & & \\
\mathcal{J} \leq \mathcal{I} & \Longleftrightarrow & \{0\} \text{ es un } \mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}\text{-cerrado de } R^*_{\mathfrak{q}} \text{ para todo primo } \mathfrak{q} \in V(I) \\
\Downarrow & & \\
\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}} & \Longleftrightarrow & r(0) \text{ es un } \mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}\text{-cerrado de } R^*_{\mathfrak{q}} \text{ para todo primo } \mathfrak{q} \in V(I)
\end{array}$$

Además de estos resultados, en la Sección 1.3 se relacionará la equivalencia lineal con las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera de las álgebras de Rees asociadas a una filtración. Y en la Sección 1.5 se analizará el comportamiento de la equivalencia y de la equivalencia lineal por la acción de morfismos.

Concluiremos este primer capítulo con el análisis de dos aplicaciones de los resultados establecidos. En primer lugar, en la Sección 1.6 se estudiarán y caracterizarán los anillos analíticamente no ramificados en términos de la equivalencia y de la equivalencia lineal entre ciertas filtraciones (Teorema 1.6.1 y Teorema 1.6.2), y mediante propiedades de finitud de ciertas álgebras de Rees asociadas a filtraciones (Corolario 1.6.6) obteniendo, así, un nuevo punto de vista de los resultados establecidos por D.Rees en [46]. Se demostrará que los anillos analíticamente no ramificados son aquellos en los que para cualquier par de filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ se tiene que, $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ si y sólo si $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$.

Como segunda aplicación, en la Sección 1.7 se analizarán dos resultados de Zariski-Samuel relativos a la comparación de topologías en anillos noetherianos, [64, (VIII. § 5) Cor. 4, Cor. 5]. En [59], Verma demuestra que estos resultados de Zariski-Samuel no son correctos tal y como se establecen en [64]. Nuestro objetivo será determinar bajo qué condiciones sus tesis son correctas (Teorema 1.7.1 y Corolario 1.7.4) usando, para ello, los resultados establecidos en las secciones anteriores de este capítulo.

- **Capítulo 2:**

Una vez estudiado el problema general de comparación de topologías definidas por filtraciones, el resto de la memoria se dedicará al caso particular de las filtraciones definidas por las potencias ádicas, simbólicas y enteras de un ideal. Para ello nos será de gran utilidad el uso de las potencias simbólicas generalizadas.

Dado un ideal I de un anillo noetheriano R y dado un sistema multiplicativo S de R, definimos la n-(S)-ésima potencia simbólica de I, que notaremos por $S(I^n)$, como $S(I^n) = I^n R_S \cap R$. En el caso particular en que I sea un ideal primo $\mathfrak{p}$, la noción clásica de potencia simbólica $\mathfrak{p}^{(n)}$ se obtiene al considerar como sistema multiplicativo S el sistema multiplicativo $S = R - \mathfrak{p}$. Y para un ideal arbitrario I de R, la noción clásica de potencia simbólica $I^{(n)}$ se obtiene al considerar como sistema multiplicativo S el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales de I (es decir $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$).

La comparación de las topologías definidas por las filtraciones I-ádica $\{I^n\}_{n\geq 0}$, (S)-simbólica $\{S(I^n)\}_{n\geq 0}$ y entera $\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ asociadas a un ideal I de un anillo noetheriano R, da origen a las nociones de $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal.

Diremos que el ideal I es un t-(S)-ideal (resp. un s-(S)-ideal) si las topologías definidas por las filtraciones I-ádica y (S)-simbólica son topologías equivalentes (resp. linealmente equivalentes). Y diremos que el ideal I es un $\bar{t}$-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal) si la topología definida por las potencias (S)-simbólicas de I es más fina (resp. linealmente más fina) que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I. En el caso particular en que el sistema multiplicativo S sea el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales de I (es decir si $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$), entonces notaremos por $I^{(n)}$ la n-ésima potencia simbólica de I y diremos que I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal, un s-ideal, un $\bar{s}$-ideal) si lo es para este sistema multiplicativo concreto.

En la Sección 2.1 se comentarán estas definiciones, se darán distintos ejemplos de potencias simbólicas generalizadas y, para finalizar, se examinarán las potencias simbólicas de algunos ideales: del ideal cero, los ideales maximales, los ideales $\mathfrak{m}$-primarios, el nilradical, ideales de altura cero, ideales primos de altura uno de dominios factoriales, ideales de la clase principal, ideales intersección completa, y los ideales irrelevantes de anillos graduados noetherianos.

Las relaciones entre las distintas definiciones se ponen de manifiesto en el siguiente diagrama. Dado un ideal I de un anillo noetheriano R y dado un sistema multiplicativo S de R se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc}
S(I^n) = I^n \text{ para todo } n \geq 0 & & & & \\
\Updownarrow & & & & \\
S(I^n) \subset I^n \text{ para todo } n \geq 0 & \Rightarrow & I \text{ es un } s\text{-}(S)\text{-ideal} & \Rightarrow & I \text{ es un } t\text{-}(S)\text{-ideal} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
S(I^n) \subset \overline{I^n} \text{ para todo } n \geq 0 & \Rightarrow & I \text{ es un } \bar{s}\text{-}(S)\text{-ideal} & \Rightarrow & I \text{ es un } \bar{t}\text{-}(S)\text{-ideal} \\
\Uparrow & & & & \\
S(I^n) = \overline{I^n} \text{ para todo } n \geq 0 & & & &
\end{array}$$

De los comentarios y ejemplos que se expondrán en esta sección se seguirá que, el estudio para el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales del ideal es el que dará lugar a las nociones más restrictivas; y que, trabajar con sistemas multiplicativos arbitrarios permite dar un tratamiento general para el estudio de diversas filtraciones que aparecen en la literatura (pues, a menudo, estas filtraciones se pueden entender sistemáticamente como filtraciones simbólicas asociadas a sistemas multiplicativos adecuados).

Los resultados que se expondrán en esta sección (junto con la posibilidad de desarrollar la teoría de una manera sistemática y general para sistemas multiplicativos arbitrarios), justifican el hecho de trabajar con potencias simbólicas respecto de un sistema multiplicativo arbitrario. Además, trabajar con sistemas multiplicativos arbitrarios nos será de gran utilidad para entender los resultados esenciales y las hipótesis necesarias para el desarrollo de la teoría de las potencias simbólicas.

- **Capítulo 3:**

Las nociones de $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales se obtienen al comparar las topologías ádica, (S)-simbólica y entera asociadas a un ideal I de un anillo R. Luego, estas nociones se enmarcan en el contexto de la comparación de topologías definidas por filtraciones y, por lo tanto, tendremos unas primeras caracterizaciones de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales al aplicar los resultados del primer capítulo de esta memoria.

El objetivo del Capítulo 3 es caracterizar cuándo un ideal I de un anillo noetheriano R es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal de tres nuevas maneras: mediante ciertas desigualdades entre alturas, dispersiones analíticas y dimensiones; mediante la cohomología local; y mediante el functor Ext. Los resultados se desarrollarán en la Sección 3.4 para los $t, \bar{t}$-(S)-ideales, y en la Sección 3.5 para los $s, \bar{s}$-(S)-ideales. Los puntos claves de su demostración serán el manejo de los conjuntos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$ y $\overline{U}(I)$ de divisores primos asociados al ideal I (ver Sección 3.1 para sus definiciones y propiedades básicas); los lemas de las secciones 3.2 y 3.3 que nos relacionarán las potencias simbólicas con grupos 0-ésimos de cohomología local y con el functor Ext; y los corolarios 3.4.8 y 3.5.10 que nos permitirán pasar del caso local al caso global.

Tomando como punto de partida el estudio de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales realizado por McAdam en [34, 35], y las propiedades de los conjuntos de ideales primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$ y $\overline{U}(I)$, obtendremos caracterizaciones de cuándo un ideal I es un $t, \bar{t}$-(S)-ideal mediante ciertas desigualdades entre alturas y dimensiones (teoremas 3.4.1 y 3.4.2 para el caso global y teoremas 3.4.3 y 3.4.4 para el caso local), y de cuándo un ideal I es un $s, \bar{s}$-(S)-ideal mediante ciertas desigualdades entre dispersiones analíticas y dimensiones (teoremas 3.5.1 y 3.5.2 para el caso global y teoremas 3.5.3 y 3.5.4 para el caso local). Los resultados que obtendremos generalizarán los expuestos por McAdam [34, 35], McAdam-Ratliff [37], Ratliff [44], Schenzel [53, 54] y Verma [58, 59].

Particularizaremos estos teoremas al caso $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$ (corolarios 3.4.5 y 3.5.5). Y, como corolarios de estos teoremas, daremos condiciones que nos permitan afirmar cuándo las nociones de t-(S)-ideal y de $\bar{t}$-(S)-ideal coinciden (resp. cuándo las nociones de s-(S)-ideal y de $\bar{s}$-(S)-ideal coinciden), (corolarios 3.4.6 y 3.5.6). Veremos condiciones sobre el anillo bajo las cuales sus ideales son $\bar{t}$-(S)-ideales (Corolario 3.4.7). Demostraremos que la condición "$l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$" caracteriza los $\bar{s}$-(S)-ideales (Corolario 3.5.7 para el caso global y Corolario 3.5.8 para el caso local).

Estos corolarios se particularizarán (páginas 63 y 73) a las siguientes familias de anillos e ideales: anillos localmente unmixed (por ejemplo los anillos Cohen-Macaulay); anillos localmente analíticamente no ramificados; anillos localmente analíticamente primarios; anillos localmente analíticamente irreducibles (por ejemplo los anillos regulares, por ejemplo los anillos de polinomios sobre un cuerpo); ideales de altura $ht(I) = \dim R - 1$; ideales equimúltiples; y a los ideales de la clase principal de los anillos localmente unmixed, localmente quasi-unmixed y Cohen-Macaulay (página 74).

El siguiente diagrama nos muestra un resumen de los resultados descritos hasta este momento para el caso particular de un ideal I de altura $ht(I) = d - 1$ de un anillo local noetheriano unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{I es un } s\text{-ideal} & \Leftrightarrow & \text{I es un } \bar{s}\text{-ideal} & \Leftrightarrow & l(I) < \dim R \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{I es un } t\text{-ideal} & \Leftrightarrow & \text{I es un } \bar{t}\text{-ideal} & \Leftrightarrow & \dim R^*/(IR^* + z) > 0 \ \forall z \in Min\ R^*
\end{array}$$

Como ya hemos dicho, otro de los objetivo del Capítulo 3 de esta memoria es el de caracterizar las nociones de $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal mediante la cohomología local y mediante el functor Ext.

De los resultados de Call, Sharp y Schenzel, [9, 10, 51], se sigue que para un ideal I de altura $d-1$ de un anillo local Gorenstein d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$, podemos caracterizar que I sea un $t, \bar{t}$-ideal mediante la anulación del grupo de cohomología local $H_I^d(R)$. Como que $H_I^i(M) = \lim_{\rightarrow n} \operatorname{Ext}_R^i(R/I^n, M)$, entonces podremos pensar los resultados de Call, Sharp y Schenzel como caracterizaciones de los $t, \bar{t}$-ideales mediante la anulación del límite inductivo del sistema $\{\operatorname{Ext}_R^d(R/I^n, R)\}_{n\geq 0}$.

Este resultado nos conduce a dos problemas. En primer lugar, si se puede generalizar a un ideal de altura arbitraria de un anillo noetheriano arbitrario R. Y, en segundo lugar, si cabe esperar alguna caracterización parecida para la equivalencia lineal mediante alguna propiedad de anulación del sistema inductivo $\{\operatorname{Ext}_R^d(R/I^n, R)\}_{n\geq 0}$.

La clave para responder a estas preguntas reside en relacionar las potencias (S)-simbólicas con el functor Ext. Esta relación se establecerá en la Sección 3.3 (Lema 3.3.3) donde se demuestra que, si I es un ideal de un anillo local Cohen-Macaulay d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ con módulo canónico K_R entonces, para un par de números naturales $m \geq n$ se tiene que, el morfismo natural $\operatorname{Ext}_R^d(R/I^n, K_R) \to \operatorname{Ext}_R^d(R/I^m, K_R)$ es el morfismo cero si y sólo si existe un sistema multiplicativo S de R con $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$ tal que $S(I^m) \subset I^n$. La importancia de este resultado reside en que la equivalencia se establece paso a paso, es decir, para un par de numeros naturales $m \geq n$ fijados.

De aquí deduciremos (usando el sistema inductivo $\{\operatorname{Ext}_R^i(R/I^n, K_R)\}_{n\geq 0}$), caracterizaciones homológicas para la equivalencia, para la equivalencia lineal y para la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas asociadas a un ideal I. Demostraremos que los $t, \bar{t}$-(S)-ideales se caracterizan por la anulación del límite inductivo (teoremas 3.4.13 y 3.4.14); que los $s, \bar{s}$-(S)-ideales se caracterizan por una "buena anulación" del límite inductivo (teoremas 3.5.15 y 3.5.16); y que la igualdad entre las potencias (S)-simbólicas y ordinarias está caracterizada por la anulación de todos los elementos del sistema inductivo (Sección 3.6 página 79).

La conclusión de estos resultados se refleja en el siguiente diagrama para el caso particular en que I sea un ideal de altura $ht(I) = d - 1$ de un anillo local Gorenstein d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$):

$$
\begin{array}{ccc}
I^{(n)} = I^n \text{ para todo } n \geq 0 & \iff & \operatorname{Ext}^d_R(R/I^n, R) = 0 \text{ para todo } n \geq 0 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
I \text{ es un } s\text{-ideal} & \iff & \begin{array}{c}\text{Existe un } k \text{ tal que para todo } n \text{ el morfismo} \\ \operatorname{Ext}^d_R(R/I^n, R) \to \operatorname{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, R) \text{ es cero}\end{array} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
I \text{ es un } t\text{-ideal} & \iff & \varinjlim_{n} \operatorname{Ext}^d_R(R/I^n, R) = 0
\end{array}
$$

Los resultados anteriores se establecerán en anillos en los que podamos garantizar la existencia de un módulo finito generado maximal Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita (por ejemplo, en anillos Gorenstein o en anillos Cohen-Macaulay con módulo canónico). Esta restricción comporta dos problemas. En primer lugar que las caracterizaciones obtenidas no sirven para un anillo arbitrario y, en segundo lugar que las hipótesis que imponemos sobre el anillo implican que éste es localmente unmixed y, por lo tanto, que un ideal es un t-(S)-ideal (resp. un s-(S)-ideal) si y sólo si es un $\bar{t}$-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

Para obtener caracterizaciones homológicas de cuándo un ideal I de un anillo arbitrario R es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal, pensemos en el Teorema de Dualidad Local (teorema que nos relaciona el functor Ext con el functor de cohomología local). Este teorema nos dice que si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo d-dimensional local noetheriano completo Cohen-Macaulay con módulo canónico K_R, entonces se tiene que $\operatorname{Hom}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(\cdot), E) \cong \operatorname{Ext}^{d-i}_R(\cdot, K_R)$, isomorfismo fuctorial definido sobre la categoría de los R-módulos finito generados, donde $E = E(R/\mathfrak{m})$ es la envolvente inyectiva del cuerpo residuo de R. Así, podemos pensar que las caracterizaciones de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales mediante el sistema inductivo $\{\operatorname{Ext}^i_R(R/I^n, R)\}_{n \geq 0}$, se podrán traducir (bajo ciertas hipótesis), en caracterizaciones mediante grupos 0-ésimos de cohomología local.

Esta idea nos conducirá a relacionar las potencias simbólicas con los grupos 0-ésimos de cohomología local. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ un ideal primo que contenga a I. A partir de los morfismos naturales $\varphi_{m,n} : H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ y de los morfismos $\overline{\varphi}_{m,n} : H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^m}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ (donde $m \geq n$), consideramos los sistemas proyectivos $\{H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n); \varphi_{m,n}\}_{m \geq n \geq 0}$ y $\{H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n}); \overline{\varphi}_{m,n}\}_{m \geq n \geq 0}$. Consideramos, además, la familia de morfismos $\phi_{m,n} : H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ para $m \geq n$, (así tenemos que $\phi_{m,n} = \overline{\varphi}_{m,n}\phi_{m,m} = \phi_{n,n}\varphi_{m,n}$ si $m \geq n$).

Nuestro objetivo será demostrar que en un anillo noetheriano arbitrario R, los t-(S)-ideales (resp. los s-(S)-ideales) se caracterizan por la anulación (resp. por la "buena anulación") del límite proyectivo de los $\varphi_{m,n} \otimes R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ (teoremas 3.4.9, 3.4.11, 3.5.11 y 3.5.13). Que los $\bar{t}$-(S)-ideales (resp. los $\bar{s}$-(S)-ideales) se caracterizan por la anulación (resp. por la "buena anulación") de los morfismos $\phi_{m,n} \otimes R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, y también por la anulación del límite proyectivo de los $\overline{\varphi}_{m,n} \otimes R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ (resp. por la anulación de todos los elementos de este sistema proyectivo), (teoremas 3.4.10, 3.4.12, 3.5.12 y 3.5.14). Y demostraremos que la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas del ideal I se caracteriza por la anulación de todos los elementos del sistema proyectivo de los $\varphi_{m,n} \otimes R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ (Sección 3.6 página 79).

La demostración de estos teoremas tendrá como punto clave los lemas 3.2.1 y 3.2.3 que nos dan criterios para la anulación de los morfismos $\phi_{m,n}$, $\varphi_{m,n}$ y $\overline{\varphi}_{m,n}$ para cualquier par de números naturales $m \geq n$.

La conclusión de los resultados expuestos se refleja en el siguiente diagrama para el caso particular en que I sea un ideal de altura $ht(I) = d-1$ de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. En este caso tendremos que $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo $\mathfrak{q}$ que debemos considerar y, por lo tanto, se tendrá que:

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi_{n,n} = 0, \forall n & \Longrightarrow & \exists k \text{ tq } \forall n,\ \varphi_{n+k,n} = 0 & \Longrightarrow & \forall n, \exists m \geq n \text{ tq } \varphi_{m,n} = 0 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
I^{(n)} \subset I^n, \forall n & \Longrightarrow & I \text{ es un } s\text{-ideal} & \Longrightarrow & I \text{ es un } t\text{-ideal} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
I^{(n)} \subset \overline{I^n}, \forall n & \Longleftrightarrow & I \text{ es un } \overline{s}\text{-ideal} & \Longrightarrow & I \text{ es un } \overline{t}\text{-ideal} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\overline{\varphi}_{n,n} = 0, \forall n & \Longleftrightarrow & \exists k \text{ tq } \forall n,\ \overline{\varphi}_{n+k,n} = 0 & \Longrightarrow & \forall n, \exists m \geq n \text{ tq } \overline{\varphi}_{m,n} = 0 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\phi_{n,n} = 0, \forall n & \Longleftrightarrow & \exists k \text{ tq } \forall n,\ \phi_{n+k,n} = 0 & \Longrightarrow & \forall n, \exists m \geq n \text{ tq } \phi_{m,n} = 0
\end{array}$$

Los resultados descritos hasta este momento se desarrollan en la Sección 3.4 para los $t, \overline{t}$-(S)-ideales, en la Sección 3.5 para los $s, \overline{s}$-(S)-ideales, y en la Sección 3.6 para la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas. Además, en la Sección 3.6 se estudiarán las potencias simbólicas de los ideales de coaltura uno. Demostraremos (proposiciones 3.6.6, 3.6.8 y 3.6.9) que, para esta familia de ideales, existe un natural k tal que si la k-ésima potencia ordinaria y simbólica de I coinciden entonces coinciden para todo natural n (e I es intersección completa), mientras que si la k-ésima potencia ordinaria y simbólica de I no coinciden entonces tampoco coinciden las potencia ordinaria y simbólica para $n \geq k$. Como aplicación, daremos una caracterización de los anillos factoriales dos dimensionales (Corolario 3.6.7).

Para concluir el tercer capítulo de esta memoria, en la Sección 3.7 se estudiarán problemas de anulación de los grupos de cohomología local respecto de un ideal I usando, para ello, las potencias simbólicas de I. El punto de partida serán las caracterizaciones dadas en la Sección 3.4. De estas caracterizaciones se sigue que si I es un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ entonces, $H^d_I(R) = 0$ si y sólo si existe un sistema multiplicativo S de R tal que $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$ y tal que la topología definida por la filtración (S)-simbólica asociada a I es más fina que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I (proposiciones 3.7.3 y 3.7.8 para el caso local que se globalizará en las proposiciones 3.7.10 y 3.7.11).

Estos resultados generalizarán los de Call, Sharp y Schenzel (corolarios 3.7.6 y 3.7.7) y, de ellos, se obtendrá una nueva demostración del Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne de anulación de la cohomología local (Comentario 3.7.9).

Como aplicación estudiaremos, en primer lugar, el soporte de los módulos de cohomología local de los $\bar{t}$-ideales. Veremos (Corolario 3.7.13), que si I es un ideal unmixed de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R (por ejemplo, cualquier ideal primo no maximal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed), entonces I es un $\bar{t}$-ideal si y sólo si $Supp\ H^i_I(R) \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) \geq i+1\}$ para todo i con $ht(I) < i \leq \dim R$. Y, para concluir esta sección, relacionaremos la dispersión analítica y la dimensión cohomológica (Corolario 3.7.15).

- **Capítulo 4:**

El objetivo de este capítulo es estudiar el comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales por la acción de morfismos de anillos (Sección 4.1) y por operaciones entre ideales (secciones 4.2 y 4.3). Los resultados que se obtendrán completan el estudio iniciado por Verma en [58, 59].

En general, los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales no tiene un buen comportamiento por la acción de morfismos de anillos (ejemplos 4.1.1 y 4.1.2). El objetivo de la Sección 4.1 es estudiar el comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales por localización, por paso al cociente, por extensión fielmente plana, y por extensión finita. Los resultados que se obtendrán se deducirán de las caracterizaciones establecidas en el capítulo anterior y de las propiedades de los conjuntos de divisores primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$ y $\overline{U}(I)$.

Demostraremos que ser $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal localiza bien (Proposición 4.1.3) y, más aún, que son propiedades locales (Proposición 4.1.4). Demostraremos que, si bien ser $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal no tiene un buen comportamiento por el paso al cociente (Ejemplo 4.1.6), si que tiene un buen comportamiento por el cociente por divisores primos del anillo (Proposición 4.1.7). Por lo que hace referencia al comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales por una extensión fielmente plana $R \to A$ de anillos noetherianos demostraremos que, si IA es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) entonces también lo es I (Proposición 4.1.10); y veremos que, si bien el recíproco no es cierto en general (Ejemplo 4.1.11), sí que es cierto para el morfismo de completación e $I \subset R$ un ideal de coaltura uno (Proposición 4.1.12), y que también es cierto para la extensión al anillo de polinomios (Proposición 4.1.13) y para la extensión al anillo de Nagata (Proposición 4.1.14). Para finalizar esta sección veremos que, la extensión de un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal por una extensión finita no degenerada de anillos noetherianos es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal (Proposición 4.1.15).

En la Sección 4.2 estudiaremos el comportamiento de los $t, \bar{t}$-(S)-ideales respecto de las operaciones entre ideales. Demostraremos que la condición $t, \bar{t}$-ideal es invariante por el radical (Proposición 4.2.2); demostraremos que la intersección y el producto de $t, \bar{t}$-(S)-ideales es un $t, \bar{t}$-(S)-ideal (Proposición 4.2.4); y analizaremos el comportamiento de los $t, \bar{t}$-ideales por la inclusión (Proposición 4.2.8). Como corolario de estos resultados relacionaremos la condición $t, \bar{t}$-ideal sobre los ideales primos de un anillo noetheriano con la condición $t, \bar{t}$-ideal sobre los ideales del anillo (Corolario 4.2.5 y Corolario 4.2.11). Los resultados establecidos en esta sección se basan en las caracterizaciones dadas en el capítulo anterior y en el Lema 4.2.1 relativo a propiedades de los conjuntos de divisores primos $E(I)$ y $\overline{E}(I)$.

El estudio que en la Sección 4.3 se realizará del comportamiento de los $s, \bar{s}$-(S)-ideales se centrará, exclusivamente, en el comportamiento por el radical y, aún en este caso, no obtendremos un resultado general positivo. Veremos que las condiciones de $s, \bar{s}$-ideal no se conservan, en general, por el paso al radical (Ejemplo 4.3.1); que se conservan por las potencias de un ideal (Proposición 4.3.2); que se conservan por reducciones, reducciones minimales y por la clausura entera (Proposición 4.3.4); y que, bajo ciertas condiciones, se conservan por las potencias simbólicas de un ideal (Proposición 4.3.3).

La dificultad de obtener resultados para los $s, \overline{s}$-(S)-ideales análogos a los establecidos en la Sección 4.2 para los $t, \overline{t}$-(S)-ideales es doble. En primer lugar, el hecho de no tener un resultado análogo al Lema 4.2.1 para los conjuntos de ideales primos $U(I)$ y $\overline{U}(I)$. Y, en segundo lugar, que mientras los $t, \overline{t}$-(S)-ideales están caracterizados por ciertas desigualdades entre alturas y dimensiones (teoremas 3.4.1 y 3.4.2), los $s, \overline{s}$-(S)-ideales están caracterizados por ciertas desigualdades entre dispersiones analíticas y dimensiones (teoremas 3.5.1 y 3.5.2). Así, por ejemplo, ser $t, \overline{t}$-(S)-ideal será invariante por radical pues lo es la altura de un ideal, mientras que que ser $s, \overline{s}$-(S)-ideal será invariante por radical si y sólo si lo es la dispersión analítica, lo cual no es cierto en general (Comentario 4.3.7).

- **Capítulo 5:**

El último capítulo de esta memoria se dedicará al estudio de las propiedades de finitud del álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I) = \oplus_{n \geq 0} S(I^n)$, y a relacionar las potencias simbólicas de un ideal I con propiedades de su anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$. La relación entre los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales y estos anillos graduados será consecuencia de las caracterizaciones establecidas en el Capítulo 3 y de las propiedades generales de las álgebras asociadas a una filtración.

En la Sección 5.1 se estudiarán las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$. Los resultados que se expondrán se obtendrán al combinar el estudio realizado de las álgebras de Rees asociadas a una filtración (Sección 1.3), junto con las caracterizaciones de los $s, \overline{s}$-(S)-ideales (Sección 3.5). Estos resultados (proposiciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3) generalizan los resultados expuestos en la introducción (Cowsik [11], Goto-Herrmann-Nishida-Villamayor [16], Huneke [24, 25], McAdam [34], Morales [38], Ooishi [42], Rees [47] y Schenzel [52, 53, 54]), y se resumen en el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccc}
I \text{ es un } \overline{s}\text{-}(S)\text{-ideal} & \Longleftrightarrow & R((S), I) \text{ es entero sobre } R(I) \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
I \text{ es un } s\text{-}(S)\text{-ideal} & \Longleftrightarrow & R((S), I) \text{ es } R(I)\text{-módulo finito generado} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists k \text{ tq } S(I^k) \text{ es un } s\text{-}(S)\text{-ideal} & \Longleftrightarrow & R((S), I) \text{ es } R\text{-álgebra finito generada}
\end{array}
$$

donde I es un ideal de un anillo noetheriano R y donde S es un sistema multiplicativo de R.

De aquí deduciremos la relación entre la generación finita, la noetherianidad y la dependencia entera del álgebra de Rees (S)-simbólica, con acotaciones de la dimensión cohomológica (Corolario 5.1.5); con el rango aritmético del ideal I (Corolario 5.1.7 que es una generalización de un resultado de Cowsik [11]); y con la equimultiplicidad del ideal I en el caso en que éste sea de altura $ht(I) = \dim R - 1$ (Corolario 5.1.14 y Comentario 5.1.15 que generalizan un resultado establecido por Rees en [47]).

Además (corolarios 5.1.9, 5.1.10 y 5.1.12), relacionaremos, entre sí, las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$. Así, por ejemplo, veremos que si el anillo R es localmente unmixed entonces, $R((S), I)$ es un $R(I)$-módulo finito generado si y sólo si es entero sobre $R(I)$. Y veremos que la obstrucción para que la generación finita del álgebra de Rees (S)-simbólica como álgebra implique la generación finita de ésta como módulo se debe al mal comportamiento de la equivalencia lineal por el radical.

La relación entre las potencias simbólicas y el anillo graduado asociado será el objeto de estudio de la Sección 5.2, sección que se divide en tres apartados.

En el primer apartado de esta sección se generalizarán los resultados que, en esta dirección, hemos citado en la introducción (Huneke [24], Ratliff [45], Robbiano-Valla [48], Schenzel [54] y Verma [58]). Demostraremos que la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas equivale a que el anillo graduado sea libre de S-torsión y que, bajo ciertas condiciones, es también equivalente a que el anillo graduado asociado sea un dominio (Proposición 5.2.1 y Comentario 5.2.2). Y demostraremos que ser $\overline{s}$-ideal equivale a que el reducido del anillo graduado asociado sea un dominio (Proposición 5.2.3). Estos resultados se resumen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
I^n = S(I^n) \text{ para todo } n & \Longleftrightarrow & \mathrm{Gr}(I, R) \text{ es un dominio} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
I \text{ es un } \overline{s}\text{-}(S)\text{-ideal} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Gr}(I, R)^{red} \text{ es un dominio}
\end{array}$$

donde I es un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R, y donde S es un sistema multiplicativo de R tal que $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)$ es un dominio (Corolario 5.2.8). Como corolarios de estos resultados relacionaremos estas propiedades del anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ con las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera de las álgebras de Rees (S)-simbólicas $R((S), I)$ (Corolario 5.2.9), y con acotaciones de la dimensión cohomológica y con acotaciones del rango aritmético del ideal (Corolario 5.2.10).

En el segundo apartado de la Sección 5.2 se demostrará que, para un ideal I de un anillo noetheriano R, y para un sistema multiplicativo S de R, la equivalencia "$I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\overline{s}$-(S)-ideal" es cierta si el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ es reducido (Corolario 5.2.12), y también se demostrará que es cierta si R es localmente quasi-unmixed y si el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ verifica la condición de Serre (S_1), (Corolario 5.2.14). La demostración en el caso en que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ sea reducido será consecuencia de las proposiciones anteriores y del hecho de que el ideal sea normal (Proposición 5.2.5). Mientras que la demostración para un ideal I de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R tal que su anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ verifique la condición de Serre (S_1), se seguirá del Teorema 5.2.13, teorema que establece que, bajo estas hipótesis, la igualdad $I^n = S(I^n)$ para todo natural n viene caracterizada por la desigualdad $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

La tercera parte de la Sección 5.2 se dedicará a aplicar los resultados anteriores. Así, se generalizarán los resultados de Noh-Vasconcelos [41, Th. 2.5] (Aplicación 5.2.17); de Brodmann [5], Huneke [25, Th. 3.1] y Simis-Vasconcelos [57, Cor. 3.6] (Aplicación 5.2.18); y de Huckaba y Huneke [22, Th. 2.5] (Aplicación 5.2.19). Se caracterizará (Corolario 5.2.20) la propiedad Cohen-Macaulay para un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R mediante la condición de Serre (S_1) del anillo graduado asociado

$\mathrm{Gr}(I,R)$ a los ideales I de R de la clase principal. Y, para finalizar, se demostrará que (Corolario 5.2.21), para un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R tal que el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$ sea un anillo local regular se tiene que, el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p},R)$ es un dominio si y sólo si $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p},R)$ tiene un único primo asociado.

Parte de los resultados que se establecen en esta memoria se exponen en los siguientes trabajos:

- J.Martí-Farré. General symbolic powers: a homological point of view. *Comm. Algebra.* 23 (1995), 1567-1577.
- J.Martí-Farré. Symbolic powers and local cohomology. *Mathematika.* 42 (1995), 182-187.
- J.Martí-Farré. Symbolic powers, integral closure and local cohomology. *Comm. Algebra.* (to appear).

- **Notaciones:**

1. En esta memoria, un *anillo* es un *anillo conmutativo con unidad.*

2. Si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local, notaremos por $(R^*, \mathfrak{m}^*)$ su completación respecto de la filtración $\mathfrak{m}$-ádica, y diremos que el anillo local $(R, \mathfrak{m})$ es completo si lo es respecto de la filtración $\mathfrak{m}$-ádica.

3. Si R es un anillo noetheriano, notaremos por $Ass\ R$ el conjunto de primos asociados de R y por $Min\ R$ el conjunto de primos minimales de R.

4. Notaremos por $\mathcal{N}(R)$ el conjunto de los elementos nilpotentes de un anillo R. Diremos que R es reducido si no tiene elementos nilpotentes no triviales. Dado un anillo R, definimos el anillo R^{red} como $R^{red} = R/\mathcal{N}(R)$ (que es un anillo reducido).

5. Si I es un ideal de un anillo noetheriano R, notaremos por $V(I)$ el conjunto de primos $\mathfrak{p}$ de R con $I \subset \mathfrak{p}$, por $M(I)$ el conjunto de primos minimales de I, por $Ass\ R/I$ el conjunto de los primos asociados a I, y por $A(I)$ el conjunto $A(I) = \bigcup_{n \geq 0} Ass\ R/I^n$ (que es un conjunto finito de ideales primos si R es un anillo noetheriano, [33, (1.5)]).

6. Notaremos por $ht(I)$ la altura de un ideal de un anillo noetheriano R, por $\mu(I)$ el mínimo número de elementos de un sistema de generadores de I, y por $\text{depth}_I(M)$ el grado o profundidad de I respecto de M (siendo M un R-módulo).

7. Si I es un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$, notaremos por $l(I)$ su dispersión analítica. Es decir, $l(I) = \dim \oplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$.

8. Si I es un ideal de un anillo noetheriano R entonces, $\text{depth}_I(R) \leq ht(I) \leq l(I) \leq \mu(I)$. Diremos que I es intersección completa si $\text{depth}_I(R) = \mu(I)$, que I es de la clase principal si $ht(I) = \mu(I)$, y que I es equimúltiple si $ht(I) = l(I)$.

1 Comparación de topologías definidas por filtraciones

El objetivo de este capítulo es comparar las topologías $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ definidas por dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de un anillo R.

• **Filtraciones. Preliminares:**

Sea $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ una familia de ideales de un anillo R. Diremos que $\mathcal{I}$ es una *filtración* de R si y sólo si se verifican las siguientes condiciones: $R = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$, y para todo par de números naturales n y m se tiene que $I_n I_m \subset I_{n+m}$.

De la definición de filtración se sigue que $I_1^n \subset I_n \subset I_1$ para todo natural $n \geq 1$. Luego $r(I_1) = r(I_n)$ y, por lo tanto, $V(I_1) = V(I_n)$. Definimos el conjunto de ideales primos $V(\mathcal{I})$ asociados a la filtración $\mathcal{I}$ como $V(\mathcal{I}) = V(I_1)$. Definimos el conjunto $A(\mathcal{I})$ de los divisores primos asociados a $\mathcal{I}$ como $A(\mathcal{I}) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/I_n$.

Así, por ejemplo, en el caso particular en que $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ sea la *filtración I-ádica* asociada a un ideal I de R, entonces tendremos que $V(\mathcal{I}) = V(I)$ y que $A(\mathcal{I}) = A(I)$ (que es un conjunto finito de ideales primos si R es un anillo noetheriano, [33, (1.5)]). Mientras que si $\mathcal{I}$ es la *filtración constante asociada al ideal I* (es decir, $I_0 = R$, $I_n = I$ para todo $n \geq 1$), entonces tendremos que $V(\mathcal{I}) = V(I)$ y que $A(\mathcal{I}) = Ass\ R/I$.

Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ filtraciones de R. Entonces tanto la *intersección* $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{I_n \cap J_n\}_{n\geq 0}$ como el *producto* $\mathcal{I}\mathcal{J} = \{I_n J_n\}_{n\geq 0}$ determinan filtraciones de R.

En general la suma $\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{I_n + J_n\}_{n\geq 0}$ de dos filtraciones de R no es una filtración de R. Por ejemplo, consideremos las filtraciones ádicas $\mathcal{I} = \{(x^n)\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{(y^n)\}_{n\geq 0}$ del anillo de polinomios $k[x,y]$. Entonces $\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{(x^n, y^n)\}_{n\geq 0}$ no es una filtración de $k[x,y]$ pues $(x^n, y^n)(x^m, y^m) \not\subset (x^{n+m}, y^{n+m})$.

Ahora bien, si $\mathcal{J}$ es la filtración constante asociada al ideal J, entonces la suma $\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{I_n + J\}_{n\geq 0}$ determina una filtración de R, que notaremos por $\mathcal{I} + J$, y diremos que es la *filtración traslación* de la filtración $\mathcal{I}$ por el ideal J.

Sea $\varphi : R \to A$ un morfismo de anillos, y sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ filtraciones de R y de A respectivamente. En tal situación se tiene que, $\mathcal{I}A = \{I_n A\}_{n\geq 0}$ (la *extensión de $\mathcal{I}$ por φ*) es una filtración del anillo A, y que $\mathcal{J} \cap R = \{J_n \cap R\}_{n\geq 0}$ (la *contracción de $\mathcal{J}$ por φ*) es una filtración del anillo R.

Observar que si J es un ideal de R, entonces la filtración traslación de la filtración $\mathcal{I}$ por el ideal J es la contracción de la extensión de la filtración $\mathcal{I}$ por el morfismo de anillos $\pi : R \to R/J$.

Una filtración $\mathcal{I}$ de R define una estructura de espacio topológico sobre R (ver [2], [3] y [4]). Concretamente, se define la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sobre R asociada a la filtración $\mathcal{I}$ (que denominaremos la *$\mathcal{I}$-topología de R*), como la que tiene como base de abiertos la familia de subconjuntos U de R tales que para todo $x \in U$ existe un natural n tal que $x+I_n \subset U$. Las topologías definidas por filtraciones se denominan topologías lineales y dotan al anillo R de una estructura de anillo topológico. Ello se debe a que las operaciones del anillo tienen un buen comportamiento respecto de la topología. Concretamente se tiene que las aplicaciones $f, g : R \times R \rightarrow R$ definidas por $f(x,y) = x - y$, $g(x,y) = xy$, son continuas; y que, para todo $a \in R$, la aplicación traslación $t_a : R \rightarrow R$ definida por $t_a(x) = x + a$, es un homeomorfismo de espacios topológicos. Así, por ejemplo, será suficiente centrar el estudio en las propiedades del punto $x = 0$ pues entonces, por traslación, se tendrán estudiadas las propiedades de los restantes puntos. Más aún, en realidad, $\mathcal{T}_\mathcal{I}$ es la única topología de R que es compatible con la estructura de anillo y para la cual los I_n determinan un sistema fundamental de entornos del elemento 0 de R.

Asociada a la filtración $\mathcal{I}$ podemos considerar el ideal $\ker\mathcal{I}$ de R definido por $\ker\mathcal{I} = \bigcap_{n\geq 0} I_n$ ($= \ker\varphi$ donde $\varphi : R \rightarrow \widehat{R}$ es la completación de R respecto de $\mathcal{I}$). Este ideal (que denominaremos el *núcleo de la filtración* $\mathcal{I}$), juega un papel clave en el estudio de ciertas propiedades del anillo topológico $(R, \mathcal{T}_\mathcal{I})$.

Así, por ejemplo, se tiene que $\ker\mathcal{I}$ es la adherencia de $\{0\}$ en $(R, \mathcal{T}_\mathcal{I})$ pues, en general, $\bigcap_{n\geq 0}(X + I_n)$ es la adherencia de un subconjunto X de R en la $\mathcal{I}$-topología. Además, en general, se tiene que si J es un ideal de R entonces, R/J es un espacio de Hausdorff en la topología cociente si y sólo si J es un cerrado en la $\mathcal{I}$-topología de R. Luego, en particular, $(R, \mathcal{T}_\mathcal{I})$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si $\ker\mathcal{I} = 0$ (y, en éste caso, se dice que la filtración $\mathcal{I}$ es una *filtración separada*).

1.1 Filtraciones equivalentes

Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación diremos que *la filtración* $\mathcal{J}$ *es más fina que la filtración* $\mathcal{I}$ (y notaremos $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$), si la topología asociada a $\mathcal{J}$ es más fina que la topología asociada a $\mathcal{I}$. Es decir, si la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (R, \mathcal{T}_\mathcal{J}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_\mathcal{I})$ es continua o, equivalentemente, si para todo natural n existe un natural m (que depende de n) tal que $J_m \subset I_n$. Diremos que *las filtraciones* $\mathcal{J}$ *e* $\mathcal{I}$ *son equivalentes* (y notaremos $\mathcal{J} \cong \mathcal{I}$), si las topologías asociadas a $\mathcal{J}$ y a $\mathcal{I}$ coinciden. Es decir, si la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (R, \mathcal{T}_\mathcal{J}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_\mathcal{I})$ es un homeomorfismo de espacios topológicos o, equivalentemente, si $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$.

Ejemplo 1.1.1 Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación diremos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ si y sólo si $J_n \subseteq I_n$ para todo natural n. De la definición se sigue que si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, entonces $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$. Así, por ejemplo, si I y J son dos ideales de R tales que $J \subseteq I$, entonces $\{J^n\}_{n\geq 0} \subseteq \{I^n\}_{n\geq 0}$ y, por lo tanto, la topología J-ádica de R es más fina que la topología I-ádica de R.

Ejemplo 1.1.2 Sea $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de un anillo R y sea $\mathcal{J}$ la filtración constante asociada a un ideal J de R. En tal situación tendremos que $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ si y sólo si $J \subset \ker\mathcal{I}$. Mientras que $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ si y sólo si existe un natural n_0 tal que $I_{n_0} \subset J$. Luego,

$\mathcal{J} \cong \mathcal{I}$ si y sólo si existe un natural n_0 tal que $\ker\mathcal{I} = I_{n_0} = J$ (es decir, si y sólo si existe un natural n_0 tal que $I_n = J$ para todo $n \geq n_0$).

Ejemplo 1.1.3 Sea $\varphi : R \to A$ un morfismo de anillos, y sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ filtraciones de R y de A respectivamente. En tal situación se tiene que, la aplicación $\varphi : (R, \mathcal{T}_\mathcal{I}) \to (A, \mathcal{T}_\mathcal{J})$ es continua si y sólo si para todo natural n existe un natural m tal que $I_m \subset J_n \cap R$, si y sólo si para todo natural n existe un natural m tal que $I_m A \subset J_n$. De donde se sigue que, $f : (R, \mathcal{T}_\mathcal{I}) \to (A, \mathcal{T}_\mathcal{J})$ es continua si y sólo si $\mathcal{I} \leq \mathcal{J} \cap R$ si y sólo si $\mathcal{I}A \leq \mathcal{J}$.

El objetivo de esta sección es caracterizar cuándo una filtración es más fina que otra. Para ello los puntos claves serán el Teorema de intersección de Krull, el Teorema de Chevalley y la existencia de descomposición primaria en los anillos noetherianos.

Teorema 1.1.4 (Teorema de intersección de Krull, [32, Th. 8.9, 8.10]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. Sea M un R-módulo finito generado y sea $N = \bigcap_{n\geq 0} I^n M$. En tal situación, $IN = N$. En particular se tendrá que: si I está contenido en el radical de Jacobson de R, entonces la topología I-ádica es separada; y que, si R es un dominio noetheriano e I es un ideal propio de R, entonces la topología I-ádica es separada.*

Teorema 1.1.5 (Teorema de Chevalley, [40, Th. 30.1]). *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano completo. Sea $J_0 \supset J_1 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$ una familia decreciente de ideales de R tal que $\bigcap_{n\geq 0} J_n = 0$. En tal situación, para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{m}^n$.*

Del Teorema de intersección de Krull y del Teorema de Chevalley se sigue un primer resultado de comparación de topologías definidas por filtraciones. Concretamente tendremos que si $\mathcal{J}$ es una filtración de un anillo local noetheriano completo $(R, \mathfrak{m})$ entonces, $\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{m}^n\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\mathcal{J}$ es una filtración separada. Generalicemos este resultado a filtraciones arbitrarias.

Dada una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo noetheriano R, y dado un ideal primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$, definimos la filtración $\mathcal{I}^*_\mathfrak{q}$ del anillo local noetheriano completo $(R^*_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R^*_\mathfrak{q})$ como $\mathcal{I}^*_\mathfrak{q} = \{I_n R^*_\mathfrak{q}\}_{n\geq 0}$ (es decir, es la extensión de la filtración $\mathcal{I}$ de R por la composición de los morfismos localización y completación $R \to R_\mathfrak{q} \to R^*_\mathfrak{q}$).

Teorema 1.1.6 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$.

(ii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ se tiene que $\ker\mathcal{I}^*_\mathfrak{q}$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_\mathfrak{q}$-topología de $R^*_\mathfrak{q}$. Es decir, $\bigcap_{n\geq 0}(J_n R^*_\mathfrak{q} + \bigcap_{i\geq 0} I_i R^*_\mathfrak{q}) = \bigcap_{i\geq 0} I_i R^*_\mathfrak{q}$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$.

Demostración: Veamos que (i) implica (ii). Por hipótesis, para todo natural n existe un natural $m(n)$ tal que $J_{m(n)} \subset I_n$. Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Luego $J_{m(n)}R_{\mathfrak{q}}^* \subset I_n R_{\mathfrak{q}}^*$. De donde $\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^* \subset \bigcap_{m\geq 0}(J_m R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*) \subset \bigcap_{n\geq 0}(J_{m(n)} R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*) \subset \bigcap_{n\geq 0}(I_n R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*) = \bigcap_{n\geq 0} I_n R_{\mathfrak{q}}^*$. Luego tenemos que (i) implica (ii).

Recíprocamente, veamos que (ii) implica (i). Supongamos (ii). Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ y consideremos el anillo local noetheriano completo $(A, \mathfrak{n}) = (R_{\mathfrak{q}}^*/\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*,\ \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}^*/\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*)$. Por hipótesis se tiene que $\bigcap_{n\geq 0}(J_n R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*) = \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*$, de donde se sigue que $\{(J_n R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*)/\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*\}_{n\geq 0}$ es una sucesión decreciente de ideales de $(A, \mathfrak{n})$ con intersección cero. Aplicando el Teorema de Chevalley tendremos que para todo natural ν existirá un natural m tal que $(J_m R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*)/\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^* \subset (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}^*/\bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*)^\nu$. Luego $J_m R_{\mathfrak{q}}^* \subset J_m R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^* \subset \mathfrak{q}^\nu R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*$. Haciendo la contracción por el morfismo natural $R \to R_{\mathfrak{q}} \to R_{\mathfrak{q}}^*$, se deduce que $J_m \subset (\mathfrak{q}^\nu R_{\mathfrak{q}}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}}^*) \cap R$. Sea n un natural fijo y consideremos $I_n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$ una descomposición primaria de I_n con Q_j ideal $\mathfrak{q}_j$-primario. Sea ν un natural tal que $\mathfrak{q}_j^\nu \subset Q_j$ para todo j, y sea m_j un natural (que depende de j), tal que $J_{m_j} \subset (\mathfrak{q}_j^\nu R_{\mathfrak{q}_j}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}_j}^*) \cap R$. Luego $J_{m_j} \subset (\mathfrak{q}_j^\nu R_{\mathfrak{q}_j}^* + \bigcap_{i\geq 0} I_i R_{\mathfrak{q}_j}^*) \cap R \subset (\mathfrak{q}_j^\nu R_{\mathfrak{q}_j}^* + I_n R_{\mathfrak{q}_j}^*) \cap R \subset (\mathfrak{q}_j^\nu R_{\mathfrak{q}_j}^* + Q_j R_{\mathfrak{q}_j}^*) \cap R = Q_j R_{\mathfrak{q}_j}^* \cap R = Q_j R_{\mathfrak{q}_j} \cap R = Q_j$ pues Q_j es un ideal $\mathfrak{q}_j$-primario. Sea $m = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$. Entonces $J_m \subset J_{m_j} \subset Q_j$ para todo j. Luego $J_m \subset Q_1 \cap \ldots \cap Q_r = I_n$, con lo que se concluye la demostración. □

Corolario 1.1.7 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \cong \mathcal{I}$.

(ii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J})$ se tiene que el $\{0\}$ tiene la misma adherencia por la $\mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^*$-topología de $R_{\mathfrak{q}}^*$ que por la $\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*$-topología de $R_{\mathfrak{q}}^*$.

(iii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J})$ se tiene que la completación de $R_{\mathfrak{q}}^*$ respecto de la filtración $\mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^*$ es homeomorfa a la completación de $R_{\mathfrak{q}}^*$ respecto de la filtración $\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*$.

Demostración: En primer lugar obsérvese que si $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ entonces existirá un natural $m(1)$ tal que $J_{m(1)} \subset I_1$ y, por lo tanto, tendremos que $V(\mathcal{I}) \subset V(\mathcal{J})$. Así, si $\mathcal{J} \cong \mathcal{I}$, entonces $V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{J})$.

Demostremos, en primer lugar, que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes. Veamos que (i) implica (ii). Supongamos (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{I})$. Como que $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ entonces, dado un natural n existirá un natural $m(n)$ tal que $J_{m(n)} \subset I_n$ y, por lo tanto, $\bigcap_{m\geq 0} J_m R_{\mathfrak{q}}^* \subset \bigcap_{n\geq 0} J_{m(n)} R_{\mathfrak{q}}^* \subset \bigcap_{n\geq 0} I_n R_{\mathfrak{q}}^*$. Análogamente, como que $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ entonces tendremos que $\bigcap_{n\geq 0} I_n R_{\mathfrak{q}}^* \subset \bigcap_{n\geq 0} J_n R_{\mathfrak{q}}^*$. Luego $\ker \mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^* = \bigcap_{n\geq 0} J_n R_{\mathfrak{q}}^* = \bigcap_{n\geq 0} I_n R_{\mathfrak{q}}^* = \ker \mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*$ para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J})$. De donde se sigue que (i) implica (ii). Recíprocamente, veamos que (ii) implica (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Como que $\ker \mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^* = \ker \mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^*$, entonces tendremos que $\ker \mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*$ es cerrado en la $\mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^*$-topología de $R_{\mathfrak{q}}^*$ y que $\ker \mathcal{J}_{\mathfrak{q}}^*$ es cerrado en la $\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*$-topología de $R_{\mathfrak{q}}^*$. De donde, aplicando el Teorema 1.1.6, se sigue que $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ y que $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$. Luego, las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

Veamos la equivalencia con (iii). Obviamente se tiene que (i) implica (iii). Por otro lado, dada una filtración, la adherencia de $\{0\}$ en la topología definida por la filtración es el núcleo de la filtración y, por lo tanto, es el núcleo del morfismo canónico entre el anillo y su completado respecto de la filtración dada. De donde se sigue que (iii) implica (ii). □

El estudio que realizaremos de las filtraciones simbólicas se basa en la comparación entre estas filtraciones y las filtraciones ádicas. Particularicemos, pues, los resultados anteriores al caso de las I-filtraciones.

Sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de un anillo R y sea I un ideal de R. Diremos que $\mathcal{J}$ *es una I-filtración* si $\{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J}$ (es decir, si $I^n \subseteq J_n$ para todo n o, equivalentemete, si $I \subset J_1$). Diremos que $\mathcal{J}$ *es una t-I-filtración* si $\{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J} \leq \{I^n\}_{n\geq 0}$ (es decir, si $\mathcal{J}$ es una I-filtración más fina que la filtración I-ádica).

Corolario 1.1.8 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{J}$ es una t-I-filtración.*

(ii) *Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ se tiene que $\{0\}$ es un cerrado en la $\mathcal{J}_\mathfrak{q}^*$-topología de $R_\mathfrak{q}^*$. Es decir, $\mathcal{J}_\mathfrak{q}^*$ es una filtración separada para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$.*

(iii) *Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ se tiene que la completación de $R_\mathfrak{q}^*$ respecto de la filtración $\mathcal{J}_\mathfrak{q}^*$ es homeomorfa a la completación $I_\mathfrak{q}^*$-ádica de $R_\mathfrak{q}^*$.*

(iv) *$\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{q}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$, donde $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} \cap R$.*

(v) *$\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{q}^n\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$.*

(vi) *$\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{q}^n\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes. Notemos $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ la filtración I-ádica. Como que $\mathcal{J}$ es una I-filtración entonces de la definición se sigue que, $\mathcal{J}$ es una t-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J} \cong \mathcal{I}$. Por otro lado como que $\mathcal{J}$ es una I-filtración entonces $I \subset J_1$, luego $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{I}) = V(I)$ y, por lo tanto, $V(\mathcal{J}) \cup V(\mathcal{I}) = V(I)$. Además, para $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) = V(I)$ tenemos que $\ker \mathcal{I}_\mathfrak{q}^* = \bigcap_{n\geq 0} I^n R_\mathfrak{q}^* = 0$ (es decir, el $\{0\}$ es un cerrado en la $I_\mathfrak{q}^*$-topología de $R_\mathfrak{q}^*$). Luego, aplicando el Corolario 1.1.7 se sigue la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii).

Demostremos la equivalencia entre (i) y (iv). Como que $\mathcal{J}$ es una I-filtración entonces, $\mathcal{J}$ es una t-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$. Luego, de la demostración de (ii) implica (i) del Teorema 1.1.6 se seguirá que $\mathcal{J}$ es una t-I-filtración si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ la filtración $\mathcal{J}$ es más fina que la contracción a R de la filtración traslación de la filtración $\mathfrak{q}$-ádica de $R_\mathfrak{q}^*$ por el ideal $\ker \mathcal{I}_\mathfrak{q}^*$. Es decir, si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo natural ν existe un natural m tal que $J_m \subset (\mathfrak{q}^\nu R_\mathfrak{q}^* + \bigcap_{i\geq 0} I^i R_\mathfrak{q}^*) \cap R$. Pero $\mathfrak{q}^{(\nu)} = \mathfrak{q}^\nu R_\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{q}^\nu R_\mathfrak{q}^* \cap R = (\mathfrak{q}^\nu R_\mathfrak{q}^* + \bigcap_{i\geq 0} I^i R_\mathfrak{q}^*) \cap R$, de donde se sigue la equivalencia de las condiciones (i) y (iv).

Para concluir la demostración hemos de ver la equivalencia con las condiciones (v) y (vi). Veamos que (i) implica (v). Supongamos (i). Luego para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo natural n existe un m tal que $J_m \subset I^n \subset \mathfrak{q}^n$. Es decir, (i) implica (v). Obviamente se tiene que (v) implica (vi). Para concluir la demostración es suficiente con demostrar que (vi) implica (iv). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ y sea $\mathfrak{p} \in M(I)$ un primo minimal de I con $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Sea n un natural. Luego existirá un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}^n \subset \mathfrak{q}^{(n)}$, como queríamos demostrar. □

Comentario 1.1.9 Es natural preguntarse si en la condición (iv) del Corolario 1.1.8 podemos reemplazar el conjunto $V(I)$ de ideales primos por el conjunto finito $M(I)$

de los primos minimales de I. La respuesta es negativa pues, por ejemplo, consideremos $I = \mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ la filtración definida por las potencias simbólicas de $\mathfrak{p}$. Obviamente $\mathcal{J}$ es una I-filtración y ya veremos que, en general, no se tiene que $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0}$ (véase Sección 1.7). Luego, en general, $\mathcal{J}$ no es una t-I-filtración. Por otro lado $M(I) = \{\mathfrak{p}\}$ y, por lo tanto, obviamente se tiene que para todo natural n existirá un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^{(n)}$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$ (basta tomar $m = n$). El problema de fondo reside en que las potencias simbólicas no tiene un buen comportamiento respecto de las inclusiones. Es decir que dados $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ dos ideales primos de un anillo noetheriano R en tal situación, en general, no se tiene la inclusión $\mathfrak{p}_1^{(n)} \subset \mathfrak{p}_2^{(n)}$. En realidad veremos que $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{(n)}\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{p}_2} = 0$, (Teorema 1.7.1). No obstante, en la condición (iv) del Corolario 1.1.8 sí que podemos reemplazar el conjunto $V(I)$ de ideales primos por el conjunto finito $A(I) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/I^n$ de los primos asociados a las potencias de I. Para ello basta con mirar detenidamente la demostración del Teorema 1.1.6 de donde se seguirá que, $\mathcal{J}$ es una t-I-filtración si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in A(I)$ y para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset (\mathfrak{q}^n R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0} I^i R^*_{\mathfrak{q}}) \cap R = \mathfrak{q}^{(n)}$.

Comentario 1.1.10 Obsérvese que la condición (v) del Corolario 1.1.8 nos dice que "para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^n$". Y que la condición (vi) del Corolario 1.1.8 nos dice que "para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$ y para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^n$". En principio el natural m depende de n y del ideal primo $\mathfrak{q}$. Ahora bien, de la equivalencia entre las condiciones (v) y (vi), y de la finitud del conjunto $M(I)$ de los primos minimales de I se sigue que, en realidad, m únicamente depende de n, es decir, que la condición (v) es equivalente a "para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^n$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$", y que la condición (vi) es equivalente a "para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^n$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$". En otras palabras, tenemos una equivalencia *uniformemente controlada* para todos los ideales primos. También se tiene el mismo comentario para la condición (iv). Para ello basta con tener presente que podemos substituir el conjunto $V(I)$ por el conjunto finito $A(I)$ (Comentario 1.1.9).

1.2 Un caso particular de equivalencia

Sea I un ideal de un anillo R. Se define la *clausura entera* $\overline{I}$ *de* I *en* R como el ideal $\overline{I} = \{x \in R$ tales que existe $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ con $a_i \in I^i\}$. Se dice que I es un ideal *íntegramente cerrado* si coincide con su clausura entera (es decir, si $I = \overline{I}$).

Dada una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo R se define la *filtración clausura entera* $\overline{\mathcal{I}}$ *de* $\mathcal{I}$ *en* R como $\overline{\mathcal{I}} = \{\overline{I_n}\}_{n\geq 0}$. Del Lema 1.2.1 se seguirá que $\overline{\mathcal{I}}$ es una filtración de R tal que $\mathcal{I} \subseteq \overline{\mathcal{I}}$, y tal que $V(\mathcal{I}) = V(\overline{\mathcal{I}})$.

Nuestro objetivo es, dadas dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de R, comparar las topologías definidas por las filtraciones $\overline{\mathcal{I}}$ y $\mathcal{J}$. Obviamente los resultados de la Sección 1.1 nos dan unas primeras caracterizaciones de cuándo $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$. Estas caracterizaciones se completarán con la que ahora obtendremos, (Teorema 1.2.3). Su demostración tiene como puntos claves el buen comportamiento de la clausura entera por la acción de ciertos morfismos (Lema 1.2.1), y el Lema 1.2.2 que jugará un papel análogo al desempeñado en la Sección 1.1 por el Teorema de intersección de Krull y por la existencia de descomposición primaria en los anillos noetherianos.

Lema 1.2.1 *Sean I y J dos ideales de un anillo R. En tal situación se tiene que:*

(a) $\overline{I}$ *es un ideal íntegramente cerrado de R con $I \subset \overline{I} \subset r(I)$. En particular, $r(I) = r(\overline{I})$ y los ideales radicales son ideales íntegramente cerrados.*

(b) Si $I \subset J$ entonces $\overline{I} \subset \overline{J}$. En particular se tiene que $I + J \subset \overline{I} + \overline{J} \subset \overline{I+J}$, que $I \cap J \subset \overline{I \cap J} \subset \overline{I} \cap \overline{J}$, y que $IJ \subset \overline{I}\,\overline{J} \subset \overline{\overline{I}\,\overline{J}} = \overline{IJ}$.

(c) Si $\overline{I} \subset \overline{J}$, entonces para todo ideal K de R se tiene que $\overline{IK} \subset \overline{JK}$.

(d) Si $f : R \to A$ es un morfismo de anillos, entonces $\overline{I}A \subset \overline{IA}$.

(e) Si S es un sistema multiplicativo de R, entonces $S^{-1}(\overline{I}) = \overline{S^{-1}I}$.

(f) Si $f : R \to A$ es un morfismo de anillos fielmente plano, entonces $\overline{IA} \cap R = \overline{I}$.

Demostración: Los apartados (a), (b), (c) son resultados generales de las clausuras enteras de un ideal. El apartado (d) es obvio por definición, y (f) se demuestra en [33, Lema 3.15]. Demostremos (e). Del apartado (d) se sigue que $S^{-1}\overline{I} \subset \overline{S^{-1}I}$. Luego únicamente hemos de demostrar que $\overline{S^{-1}I} \subset S^{-1}\overline{I}$. Sea $x/s \in \overline{S^{-1}I}$. Luego existen elementos $a_i/s_i \in (S^{-1}I)^i$ tales que $(x/s)^m + (a_1/s_1)(x/s)^{m-1} + \ldots + (a_{m-1}/s_{m-1})(x/s) + a_m/s_m = 0$. Como que $(S^{-1}I)^i = S^{-1}I^i$ entonces para todo i existe un $t_i \in S$ tal que $t_i a_i \in I^i$. Sea $\tau = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m t_1 \cdot \ldots \cdot t_m \in S$. Así tendremos que $(s\tau/1)^m (x/s)^m + (s\tau/1)^m (a_1/s_1)(x/s)^{m-1} + \ldots + (s\tau/1)^m (a_{m-1}/s_{m-1})(x/s) + (s\tau/1)^m (a_m/s_m) = 0$. Para $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $(s\tau/1)^m (a_i/s_i)(x/s)^{m-i} = c_i(\tau x)^{m-i}/1$ para cierto $c_i \in I^i$. Luego existirá un elemento $\tau' \in S$ tal que $\tau'((\tau x)^m + c_1(\tau x)^{m-1} + \ldots + c_{m-1}(\tau x) + c_m) = 0$. De donde $(\tau'\tau x)^m + \tau' c_1(\tau'\tau x)^{m-1} + \ldots + (\tau')^{m-1} c_{m-1}(\tau'\tau x) + (\tau')^m c_m = 0$. Sea $\sigma = \tau'\tau \in S$. Como que $(\tau')^i c_i \in I^i$ se sigue que $\sigma x \in \overline{I}$ y, por lo tanto, $x/s \in S^{-1}\overline{I}$, como queríamos demostrar. □

Lema 1.2.2 ([33, Lema 3.11] y [35, Lema 1.4]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) $\bigcap_{n \geq 0} \overline{I^n} = \bigcap z$, donde z varía en el conjunto de primos minimales de R tales que $I + z \neq R$.

(b) Si I es íntegramente cerrado, entonces I admite una descomposición primaria en la que todas las componentes primarias son íntegramente cerradas.

Sea I un ideal de un anillo R. Del Lema 1.2.1 se sigue que $IR_{\mathfrak{q}}^* \subset \overline{I}R_{\mathfrak{q}}^* \subset \overline{IR_{\mathfrak{q}}^*}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$. Luego, en particular, tendremos que si $\mathcal{I}$ es una filtración de R entonces $\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^* \subseteq \overline{\mathcal{I}}_{\mathfrak{q}}^* \subseteq \overline{\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}^*}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Veamos cómo los lemas anteriores y el manejo de estas tres filtraciones nos permiten caracterizar cúando una filtración es más fina que la filtración clausura entera de una filtración dada.

Teorema 1.2.3 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$.

(ii) $\overline{\mathcal{J}} \leq \overline{\mathcal{I}}$.

(iii) Para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ se tiene que $\ker \overline{\mathcal{I}}^*_{\mathfrak{q}}$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iv) Para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ se tiene que $\ker \overline{\mathcal{I}}^*_{\mathfrak{q}}$ es un cerrado en la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

(v) Para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ se tiene que $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

(vi) Para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ se tiene que $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ es un cerrado en la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostración: Demostremos, en primer lugar, que las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) son equivalentes. La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) es obvia pues, si $J_m \subset \overline{I_n}$ entonces $\overline{J_m} \subset \overline{\overline{I_n}} = \overline{I_n}$ y, si $\overline{J_m} \subset \overline{I_n}$ entonces $J_m \subset \overline{J_m} \subset \overline{I_n}$. La equivalencia entre las condiciones (i) y (iii), y entre las condiciones (ii) y (iv), se sigue del Teorema 1.1.6.

Veamos que (ii) implica (vi). Por hipótesis, para todo natural n existe un natural $m(n)$ tal que $\overline{J_{m(n)}} \subset \overline{I_n}$. Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Luego $\overline{J_{m(n)}}R^*_{\mathfrak{q}} \subset \overline{I_n}R^*_{\mathfrak{q}} \subset \overline{I_n R^*_{\mathfrak{q}}}$. De donde $\bigcap_{i\geq 0} \overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}} \subset \bigcap_{m\geq 0}(\overline{J_m}R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) \subset \bigcap_{n\geq 0}(\overline{J_{m(n)}}R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) \subset \bigcap_{n\geq 0}(\overline{I_n R^*_{\mathfrak{q}}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) = \bigcap_{n\geq 0}\overline{I_n R^*_{\mathfrak{q}}}$. Luego $\bigcap_{n\geq 0}(\overline{J_n}R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) = \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}$. Es decir $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ es un cerrado en la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostremos que (vi) implica (v). Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Por hipótesis tenemos que $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ es un cerrado en la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$. Por otro lado, como que $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}} \subseteq \overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}} \subseteq \overline{\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}}$, entonces $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}} \leq \overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}} \leq \overline{\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}}$ y, en particular, tendremos que la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$ es más fina que la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$. Luego $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ también es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

Para concluir la demostración veamos que (v) implica (i). Supongamos (v). Sea $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ y consideremos el anillo local noetheriano completo $(A, \mathfrak{n})$ definido por $(A, \mathfrak{n}) = (R^*_{\mathfrak{q}}/\bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}, \mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/\bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}})$. Por hipótesis se tiene que $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}}$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$. Es decir que $\bigcap_{n\geq 0}(J_n R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) = \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}$. Luego $\{(J_n R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}})/\bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión decreciente de ideales de $(A, \mathfrak{n})$ con intersección cero. Aplicando el Teorema de Chevalley tendremos que para todo natural ν existirá un natural m tal que $(J_m R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}})/\bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}} \subset (\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/\bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}})^{\nu}$. Luego $J_m R^*_{\mathfrak{q}} \subset J_m R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}} \subset \mathfrak{q}^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}$. Haciendo la contracción por el morfismo natural $R \to R_{\mathfrak{q}} \to R^*_{\mathfrak{q}}$ se deduce que $J_m \subset (\mathfrak{q}^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) \cap R$. Luego tenemos que, para todo natural ν existe un natural m tal que $J_m \subset (\overline{\mathfrak{q}^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}}}) \cap R$. Sea n un natural fijo y consideremos $\overline{I_n} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$ una descomposición primaria de $\overline{I_n}$ con Q_j ideal $\mathfrak{q}_j$-primario e íntegramente cerrado (que existe por el Lema 1.2.2). Sea ν un natural tal que $\mathfrak{q}_j^{\nu} \subset Q_j$ para todo j, y sea m_j un natural (que depende de j), tal que $J_{m_j} \subset (\overline{\mathfrak{q}_j^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}_j}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}_j}}) \cap R$. Luego $J_{m_j} \subset (\overline{\mathfrak{q}_j^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}_j}} + \bigcap_{i\geq 0}\overline{I_i R^*_{\mathfrak{q}_j}}) \cap R \subset (\overline{\mathfrak{q}_j^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}_j}} + \overline{I_n R^*_{\mathfrak{q}_j}}) \cap R \subset (\overline{\mathfrak{q}_j^{\nu}R^*_{\mathfrak{q}_j}} + \overline{Q_j R^*_{\mathfrak{q}_j}}) \cap R = \overline{Q_j R^*_{\mathfrak{q}_j}} \cap R$. Por lo tanto, aplicando el Lema 1.2.1 tendremos que $J_{m_j} \subset \overline{Q_j R^*_{\mathfrak{q}_j}} \cap R = \overline{Q_j R_{\mathfrak{q}_j}} \cap R = \overline{Q_j} R_{\mathfrak{q}_j} \cap R = Q_j R_{\mathfrak{q}_j} \cap R = Q_j$ pues Q_j es un ideal $\mathfrak{q}_j$-primario e íntegramente cerrado. Sea $m = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$. Entonces $J_m \subset J_{m_j} \subset Q_j$ para todo j. De donde se sigue que $J_m \subset Q_1 \cap \ldots \cap Q_r = \overline{I_n}$, con lo que se concluye la demostración del teorema. □

Sea I un ideal de un anillo R y sea $\mathcal{J}$ una I-filtración de R. En tal situación diremos que $\mathcal{J}$ es una *$\bar{t}$-I-filtración* si $\{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J} \leq \{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ (es decir, si $\mathcal{J}$ es una I-filtración más fina que la filtración definida por las clausuras enteras de las potencias de I).

De la definición se sigue que $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración si y sólo si $\overline{\mathcal{J}}$ es una t-$\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$-filtración, si y sólo si $\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0} \cong \overline{\mathcal{J}}$. Así, los resultados de la Sección 1.1 nos darán unas primeras caracterizaciones de las $\bar{t}$-I-filtraciones, caracterizaciones que se completan con el siguiente corolario:

Corolario 1.2.4 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración.

(ii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ se tiene que $r(0)$ es cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ se tiene que $r(0)$ es cerrado en la $\overline{\mathcal{J}}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iv) $\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{q}^{<n>}\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$, donde $\mathfrak{q}^{<n>} = \overline{\mathfrak{q}^n} R_{\mathfrak{q}} \cap R$.

(v) $\mathcal{J} \leq \{\overline{\mathfrak{q}^n}\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$.

(vi) $\mathcal{J} \leq \{\overline{\mathfrak{q}^n}\}_{n\geq 0}$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$.

Demostración: Demostremos, en primer lugar, la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii). Notemos $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ la filtración I-ádica. Así tendremos que $V(\mathcal{I}) = V(I)$ y, aplicando el Lema 1.2.2, tendremos que $\ker \overline{\mathcal{I}^*_{\mathfrak{q}}} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{I^n R^*_{\mathfrak{q}}} = r(0)$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$. Como que $\mathcal{J}$ es una I-filtración entonces, $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$. Luego, aplicando el Teorema 1.2.3 se sigue la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii).

Veamos la equivalencia entre las condiciones (i) y (iv). En primer lugar obsérvese que si $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I}) = V(I)$ entonces tendremos que $\bigcap_{i\geq 0} \overline{I^i R^*_{\mathfrak{q}}} \subset \overline{I^n R^*_{\mathfrak{q}}} \subset \overline{\mathfrak{q}^n R^*_{\mathfrak{q}}}$ para todo natural n. De donde se sigue que $(\overline{\mathfrak{q}^n R^*_{\mathfrak{q}}} + \bigcap_{i\geq 0} \overline{I^i R^*_{\mathfrak{q}}}) \cap R = \overline{\mathfrak{q}^n R^*_{\mathfrak{q}}} \cap R = \overline{\mathfrak{q}^n R_{\mathfrak{q}}} \cap R = \overline{\mathfrak{q}^n} R_{\mathfrak{q}} \cap R = \mathfrak{q}^{<n>}$. Por otro lado, de la demostración de (v) implica (i) del Teorema 1.2.3 se sigue que $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$ si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$ y para todo natural ν existe un natural m tal que $J_m \subset (\overline{\mathfrak{q}^\nu R^*_{\mathfrak{q}}} + \bigcap_{i\geq 0} \overline{I^i R^*_{\mathfrak{q}}}) \cap R$. Luego $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$ si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo natural ν existe un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^{<\nu>}$. Es decir, $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$ si y sólo si $\mathcal{J} \leq \{\mathfrak{q}^{<n>}\}_{n\geq 0}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$. La demostración de la equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) se concluye al observar que, por definición, si $\mathcal{J}$ es una I-filtración entonces se tiene que $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$.

Para concluir la demostración del corolario hemos de ver la equivalencia con las condiciones (v) y (vi). Veamos que (i) implica (v). Supongamos (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ y sea n un natural. Por hipótesis existirá un natural m tal que $J_m \subset \overline{I^n}$ y, por lo tanto, $J_m \subset \overline{I^n} \subset \overline{\mathfrak{q}^n}$. Luego (i) implica (v). Obviamente (v) implica (vi). Para concluir la demostración basta con demostrar que (vi) implica (iv). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ y sea $\mathfrak{p} \in M(I)$ un primo minimal de I tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Sea n un natural. Sea m un natural tal que $J_m \subset \overline{\mathfrak{p}^n}$. Luego, $J_m \subset \overline{\mathfrak{p}^n} \subset \overline{\mathfrak{q}^n} \subset \mathfrak{q}^{<n>}$, con lo que se concluye la demostración. □

Comentario 1.2.5 De manera análoga al Comentario 1.1.9, en la condición (iv) del Corolario 1.2.4 no podemos reemplazar el conjunto $V(I)$ de ideales primos por el conjunto finito $M(I)$ de los primos minimales de I. Por ejemplo, sea $I = \mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ la filtración definida por las potencias simbólicas de $\mathfrak{p}$. Tenemos que $\mathcal{J}$ es una I-filtración y se verá que, en general, no se tiene que $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ (pues, en general, un ideal primo $\mathfrak{p}$ no es un $\bar{t}$-ideal). Luego, en general, $\mathcal{J}$ no es una $\bar{t}$-I-filtración. Por otro lado $M(I) = \{\mathfrak{p}\}$ y, por lo tanto, para todo natural n existirá un natural m tal que $J_m \subset \mathfrak{q}^{<n>}$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$ (basta tomar $m = n$). No obstante, y de manera análoga al Comentario 1.1.9, en la condición (iv) del Corolario 1.2.4 sí que podemos reemplazar el conjunto $V(I)$ de ideales primos por el conjunto finito $\overline{A}(I) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\overline{I^n}$, [33, (3.9)]. Para ello basta con mirar detenidamente la demostración del Teorema 1.2.3 de donde se seguirá que, $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración si y sólo si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in \overline{A}(I)$ y para todo natural n existe un natural m tal que $J_m \subset (\overline{\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q}^*} + \bigcap_{i\geq 0} \overline{I^i R_\mathfrak{q}^*}) \cap R = \mathfrak{q}^{<n>}$.

Comentario 1.2.6 Obsérvese que (de manera análoga al Comentario 1.1.10), la condición (v) del Corolario 1.2.4 dice que "para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo n existe un m tal que $J_m \subset \overline{\mathfrak{q}^n}$", y que la condición (vi) dice que "para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$ y para todo n existe un m tal que $J_m \subset \overline{\mathfrak{q}^n}$". En principio, pues, el natural m depende de n y del ideal primo $\mathfrak{q}$. Ahora bien, de la equivalencia entre estas dos condiciones y de la finitud del conjunto de primos minimales de I se sigue que podemos suponer que el natural m únicamente depende de n. Es decir, que la condición (v) es equivalente a "para todo n existe un m tal que $J_m \subset \overline{\mathfrak{q}^n}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$", y que la condición (vi) es equivalente a "para todo n existe un m tal que $J_m \subset \overline{\mathfrak{q}^n}$ para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$". Es decir, que tenemos una equivalencia *uniformemente controlada* para todos los ideales primos. También se tiene el mismo comentario para la condición (iv), (para ello basta con tener presente el comentario anterior y la finitud del conjunto $\overline{A}(I)$).

Comparemos el Corolario 1.1.8 y el Corolario 1.2.4. Dadas dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de un anillo R es evidente que si $\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ entonces $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$. En particular, si $\mathcal{J}$ es una t-I-filtración entonces $\mathcal{J}$ es una $\bar{t}$-I-filtración. Así tendremos que si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si $\mathcal{J}$ es una I-filtración, entonces: *si* $\{0\}$ *es un cerrado en la* $\mathcal{J}_\mathfrak{q}^*$*-topología de* $R_\mathfrak{q}^*$ *para todo primo* $\mathfrak{q} \in V(I)$, *entonces* $r(0)$ *también es un cerrado en la* $\mathcal{J}_\mathfrak{q}^*$*-topología de* $R_\mathfrak{q}^*$ *para todo primo* $\mathfrak{q} \in V(I)$. Este resultado admite una demostración directa y más general (Proposición 1.2.7) y su recíproco, que no es cierto en general, caracterizará los anillos localmente analíticamente no ramificados (Sección 1.6).

Proposición 1.2.7 *Sea* $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ *una filtración de un anillo noetheriano* R *y sea* I *un ideal de* R. *En tal situación, si* I *es un cerrado por la* $\mathcal{J}$*-topología de* R *entonces* $r(I)$ *también es un cerrado por la* $\mathcal{J}$*-topología de* R.

Demostración: Hemos de ver que $r(I) = \bigcap_{n\geq 0}(J_n + r(I))$. Obviamente $r(I) \subset \bigcap_{n\geq 0}(J_n + r(I))$. Demostremos la inclusión en sentido contrario. Sea $x \in \bigcap_{n\geq 0}(J_n + r(I))$. Entonces, para todo natural n existen elementos $y_n \in J_n$ y $z_n \in r(I)$, tales que $x = y_n + z_n$. Como R es noetheriano se sigue que existirá un natural m tal que $r(I)^m \subset I$. Luego $x^m = (y_n + z_n)^m = y_n y_n' + z_n^m \in J_n + r(I)^m \subset J_n + I$, para cierto $y_n' \in R$. Así se tiene que existe un natural m tal que $x^m \in \bigcap_{n\geq 0}(J_n + I) = I$. Luego $x \in r(I)$. Con lo que se concluye la demostración. □

1.3 Filtraciones linealmente equivalentes

Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación diremos que $\mathcal{J}$ *es linealmente más fina que* $\mathcal{I}$ (y notaremos $\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I}$), si existe un natural k tal que para todo natural n se tiene que $J_{n+k} \subset I_n$. Si I es un ideal de R entonces diremos que $\mathcal{J}$ *es una s-I-filtración* (o una *I-filtración estable*), si $\{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J} \leq_s \{I^n\}_{n\geq 0}$ (es decir, si $\mathcal{J}$ es una I-filtración linealmente más fina que la filtración I-ádica). Y diremos que $\mathcal{J}$ *es una* $\overline{s}$*-I-filtración* si $\{I^n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{J} \leq_s \{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ (es decir, si $\mathcal{J}$ es una I-filtración linealmente más fina que la filtración definida por las clausuras enteras de las potencias de I). La relación entre las definiciones dadas se refleja en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{J} = \mathcal{I} & \Rightarrow & \mathcal{J} \leq_s \mathcal{I} & \quad & \mathcal{J} \text{ es una } s\text{-}I\text{-filtración} & \Rightarrow & \mathcal{J} \text{ es una } \overline{s}\text{-}I\text{-filtración} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\mathcal{J} \cong \mathcal{I} & \Rightarrow & \mathcal{J} \leq \mathcal{I} & & \mathcal{J} \text{ es una } t\text{-}I\text{-filtración} & \Rightarrow & \mathcal{J} \text{ es una } \overline{t}\text{-}I\text{-filtración}
\end{array}$$

La equivalencia lineal es, pues, un tipo especial de equivalencia entre filtraciones. La diferencia entre estas nociones es que, mientras que la equivalencia de filtraciones es un problema de comparación entre las bases de entornos del cero, la equivalencia lineal corresponde al caso en que las bases de entornos del cero tengan diferencia acotada.

El objetivo de esta sección es demostrar que la equivalencia lineal de filtraciones sobre un anillo R se traduce en equivalencia de filtraciones definidas sobre ciertos anillos de Rees, (Teorema 1.3.1). Así tendremos que, mientras que la equivalencia de dos filtraciones de un anillo R es un problema topológico sobre R, la equivalencia lineal será un problema topológico sobre estos anillos de Rees.

Dada una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo R, definimos el *álgebra de Rees ampliada asociada a* $\mathcal{I}$, que notaremos $\mathcal{R}(\mathcal{I})$, como $\mathcal{R}(\mathcal{I}) = \oplus_{i\in \mathbb{Z}} I_i t^i$ donde $I_i = R$ si $i \leq 0$. En el caso particular en que $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ sea la filtración ádica asociada al ideal I de R entonces notaremos $\mathcal{R}(I)$ el *álgebra de Rees ampliada asociada a I* (es decir, $\mathcal{R}(I) = R[It, u]$ donde $u = t^{-1}$).

Dadas $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R, consideremos el álgebra de Rees ampliada $\mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$ asociada a la filtración intersección $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{I_n \cap J_n\}_{n\geq 0}$. En $\mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$ consideramos la filtración $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\}_{n\geq 0}$ definida por la contracción de la filtración u-ádica de $\mathcal{R}(\mathcal{J})$ por la extensión de álgebras graduadas $\mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \hookrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{J})$. Veamos cómo esta filtración soluciona nuestro problema.

Teorema 1.3.1 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I}$ *(es decir, existe un natural k tal que $J_{n+k} \subset I_n$ para todo natural n).*

(ii) $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\}_{n\geq 0} \leq_s \{u^n\mathcal{R}(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\}_{n\geq 0}$.

(iii) $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\}_{n\geq 0}\leq\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\}_{n\geq 0}$.

(iv) Existe un natural m $(m=k+1)$ *tal que* $u^m\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\subset u\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$.

Demostración: Demostremos, en primer lugar, que la condición (i) implica la condición (ii). Supongamos (i). Por hipótesis existe un natural k tal que para todo natural n se tiene que $J_{n+k}\subset I_n$. Entonces, para todo natural n se tendrá que $u^{n+k}\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})=(\oplus_{i\in\mathbf{Z}}J_{i+n+k}t^i)\cap(\oplus_{i\in\mathbf{Z}}(J_i\cap I_i)t^i)=\oplus_{i\in\mathbf{Z}}(J_{i+n+k}\cap I_i)t^i\subset\oplus_{i\in\mathbf{Z}}(J_{i+n}\cap I_{i+n})t^i=u^n\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$. Luego (i) implica (ii).

Obviamente se tiene que (ii) implica (iii), y que (iii) implica (iv) (pues basta tomar $m=m(1)$). Para concluir la demostración veamos que (iv) implica (i).

Supongamos (iv). Por hipótesis existe un natural m (que podemos suponer $m\geq 1$) tal que $u^m\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\subset u\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$. Luego $\oplus_{i\in\mathbf{Z}}(J_{i+m}\cap I_i)t^i\subset\oplus_{i\in\mathbf{Z}}(J_{i+1}\cap I_{i+1})t^i$ y, por lo tanto, para todo natural i se tendrá que $J_{i+m}\cap I_i\subset J_{i+1}\cap I_{i+1}$. Definamos k como $k=m-1\geq 0$. Vamos a demostrar, por inducción sobre n, que para todo natural $n\geq 0$ se tiene que $J_{n+k}\subset I_n$. Para $n=0$ es evidente (pues $I_0=R$). Supongamos demostrado que $J_{n+k}\subset I_n$. Entonces $J_{n+1+k}=J_{n+1+k}\cap J_{n+k}\subset J_{n+1+k}\cap I_n=J_{n+m}\cap I_n\subset J_{n+1}\cap I_{n+1}\subset I_{n+1}$. Luego $J_{n+1+k}\subset I_{n+1}$, con lo que se concluye la demostración. □

Comentario 1.3.2 De las condiciones (i) y (iii) del Teorema 1.3.1 se sigue que el problema de la equivalencia lineal entre dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de un anillo R se traduce en un problema de equivalencia entre ciertas filtraciones de un anillo de Rees asociado a R.

Comentario 1.3.3 Obsérvese que la filtración $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\}_{n\geq 0}$ es una filtración ádica del anillo $\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$, y que la filtración $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})\}_{n\geq 0}$ es una $u\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$-filtración. Luego, de la equivalencia entre las condiciones (ii) y (iii) del Teorema 1.3.1 se sigue que $\{u^n\mathcal{R}(\mathcal{J})\cap\mathcal{R}(\mathcal{I})\}_{n\geq 0}$ es una s-$u\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$-filtración si y sólo si es una t-$u\mathcal{R}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$-filtración. Así, tenemos una familia de ejemplos de filtraciones tales que son equivalentes si y sólo si son linealmente equivalentes.

Comentario 1.3.4 Sea I un ideal de un anillo R y sea $\mathcal{J}$ una I-filtración de R. Consideremos $\mathcal{I}$ la filtración I-ádica, es decir $\mathcal{I}=\{I^n\}_{n\geq 0}$. Así tenemos que $\mathcal{J}$ es una s-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J}\leq_s\mathcal{I}$; y tenemos que $\mathcal{J}$ es una $\bar{s}$-I-filtración si y sólo si $\mathcal{J}\leq_s\overline{\mathcal{I}}$, si y sólo si $\overline{\mathcal{J}}\leq_s\overline{\mathcal{I}}$. Luego, aplicando el Teorema 1.3.1 obtendremos caracterizaciones de las s-I-filtraciones y de las $\bar{s}$-I-filtraciones. Para ello basta con tener presente que, en este caso, $\mathcal{I}\cap\mathcal{J}=\mathcal{I}$, y que $\overline{\mathcal{I}}\cap\overline{\mathcal{J}}=\overline{\mathcal{I}}$.

- **El álgebra de Rees asociada a una filtración:**

Estudiemos la relación entre la equivalencia lineal de ciertas filtraciones y las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees asociada a una filtración $\mathcal{J}$. Esta propiedades serán de gran utilidad para el estudio de las propiedades del álgebra de Rees simbólica (Sección 5.1).

Dada una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo R, definimos el *álgebra de Rees asociada a la filtración* $\mathcal{I}$, que notaremos $R(\mathcal{I})$, como $R(\mathcal{I}) = \oplus_{n\geq 0} I_n$. En el caso particular en que $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ sea la filtración ádica asociada al ideal I de R entonces notaremos $R(I)$ el *álgebra de Rees asociada a* I (es decir, $R(I) = R[It]$).

Obsérvese que si $\mathcal{I}$ es una I-filtración entonces $R(\mathcal{I})$ es una $R(I)$-álgebra graduada. El estudio que vamos a realizar lo centraremos en las I-filtraciones, lo cual no significa ninguna restricción pues, dada una filtración arbitraria $\mathcal{I}$ de un anillo R siempre existen ideales I de R para los que $\mathcal{I}$ es una I-filtración (basta con considerar cualquier ideal I de R tal que $I \subset I_1$).

Proposición 1.3.5 ([16, Lema 2.3]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R(\mathcal{J})$ es un $R(I)$-módulo noetheriano.

(ii) $R(\mathcal{J})$ es un $R(I)$-módulo finito generado.

(iii) $\mathcal{J}$ es una s-I-filtración.

(iv) Existe un natural $k \geq 0$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $J_{n+k} = I^n J_k$.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R(\mathcal{J}) = \dim R(I)$.

Proposición 1.3.6 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R(\mathcal{J})$ es un anillo noetheriano.

(ii) $R(\mathcal{J})$ es una R-álgebra finito generada.

(iii) $R(\mathcal{J})$ es una $R(I)$-álgebra finito generada.

(iv) Existe un natural $k \geq 1$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $J_{kn} = (J_k)^n$.

(v) Existe un natural $k \geq 1$ tal que la filtración $\mathcal{J}_k = \{J_{kn}\}_{n\geq 0}$ es una s-J_k-filtración.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R(\mathcal{J}) = \dim R(J_1)$.

Demostración: La equivalencia entre (i) y (ii) es un resultado general de anillos graduados [32, Th. 13.1], y la equivalencia entre (ii) y (iii) es obvia pues $R(I)$ es una R-álgebra finito generada. Luego, las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes.

De [3, (III. 1.3) Prop. 3] se sigue que (i) implica (iv). Obviamente (iv) implica (v) pues si $k \geq 1$ es un natural tal que $J_{kn} = (J_k)^n$ para todo n, entonces $\mathcal{J}_k$ es la filtración J_k-ádica. Para concluir la demostración basta con probar que (v) implica (i).

Supongamos (v). Como que $\mathcal{J}_k$ es una s-J_k-filtración entonces, por la Proposición 1.3.5 tendremos que $R(\mathcal{J}_k)$ es un $R(J_k)$-módulo finito generado y, por lo tanto, es un anillo noetheriano. Por otro lado $R(\mathcal{J})^{(k)} = R(\mathcal{J}_k)$ pues, para todo $n \geq 0$ se tiene que $(R(\mathcal{J})^{(k)})_n = J_{kn} = R(\mathcal{J}_k)_n$. Luego la k-ésima inmersión de Veronese $R(\mathcal{J})^{(k)}$ es un anillo noetheriano de donde, aplicando [16, Lema 2.4], se sigue que también lo será $R(\mathcal{J})$. Luego (v) implica (i), como queríamos demostrar.

Veamos la igualdad de dimensiones. Supongamos que $R(\mathcal{J})$ es anillo noetheriano. En tal situación tendremos que existe un natural $k \geq 1$ tal que $J_{kn} = (J_k)^n$ para todo $n \geq 0$. Luego la k-ésima inmersión de Veronese de $R(\mathcal{J})$ es el álgebra de Rees asociada al ideal J_k pues $R(\mathcal{J})^{(k)} = \oplus_{n\geq 0} R(\mathcal{J})_{kn} = \oplus_{n\geq 0} J_{kn} = \oplus_{n\geq 0}(J_k)^n = R(J_k)$. En particular, $\dim R(\mathcal{J})^{(k)} = \dim R(J_k)$. Como que J_1 y J_k son ideales de igual radical, entonces tendremos que $\dim R(J_1) = \dim R(J_k)$ [19, (9.11)]. Luego $\dim R(\mathcal{J})^{(k)} = \dim R(J_1)$. Para concluir la demostración hemos de ver que $\dim R(\mathcal{J})^{(k)} = \dim R(\mathcal{J})$. Obviamente la k-ésima potencia de un elemento homogéneo de $R(\mathcal{J})$ es un elemento de $R(\mathcal{J})^{(k)}$. Luego la extensión de anillos $R(\mathcal{J})^{(k)} \to R(\mathcal{J})$ es entera y, por lo tanto, los dos anillos tendrán la misma dimensión de Krull. □

Para finalizar este apartado, examinemos la condición de dependencia entera. Sea $\mathcal{J}$ una I-filtración. Entonces se tiene que $R(I) \subset R(\mathcal{J}) \subset R[t]$, y que $\oplus_{n\geq 0}\overline{I^n}$ es la clausura entera de $R(I)$ en el anillo de polinomios sobre R, $R[t]$. De donde se sigue que:

Proposición 1.3.7 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R(\mathcal{J})$ es entera sobre $R(I)$.

(ii) $J_n \subset \overline{I^n}$ para todo natural $n \geq 0$.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R(\mathcal{J}) = \dim R(I)$.

1.4 Igualdad de filtraciones

El objetivo de esta sección es demostrar que la igualdad de filtraciones se traduce en equivalencia de filtraciones definidas sobre ciertos anillos graduados, (Teorema 1.4.2).

Dada una filtración $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ de un anillo R, definimos *el anillo graduado asociado a $\mathcal{I}$*, que notaremos $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}, R)$, como $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}, R) = \oplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$. En el caso particular en que $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$ sea la filtración ádica asociada al ideal I de R entonces notaremos $\mathrm{Gr}(I, R)$ *el anillo graduado asociado a I*.

Dadas $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R, consideremos el anillo graduado $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}, R)$ asociado a la filtración intersección $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} = \{I_n \cap J_n\}_{n\geq 0}$. Sea $\varphi : \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}, R) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{J}, R)$ el morfismo natural graduado de grado cero definido por $\varphi([x]) = [x]$ (es decir, $\varphi = \oplus_{n\geq 0}\varphi_n$ donde $\varphi_n : (I_n \cap J_n)/(I_{n+1} \cap J_{n+1}) \to J_n/J_{n+1}$ viene definido por $\varphi_n([x]) = [x]$).

Consideremos, por un lado, la filtración ádica $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}, R)_+^n\}_{n\geq 0}$ de $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}, R)$ definida por el ideal $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}, R)_+ = \oplus_{n\geq 1}(I_n \cap J_n)/(I_{n+1} \cap J_{n+1})$. Y consideremos, por otro lado, la filtración $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ de $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)$ definida por la contracción de la filtración ádica $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$ de $\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)$ por el morfismo φ, donde $\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)_+ = \oplus_{n\geq 1} J_n/J_{n+1}$. Veamos cómo estas filtraciones solucionan nuestro problema.

Lemà 1.4.1 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación se tiene que si n_0 es un natural prefijado entonces, $J_n \subset I_n$ para todo natural $n \leq n_0 + 1$ si y sólo si φ_n es inyectivo para todo natural $n \leq n_0$. En particular, $J_n \subset I_n$ para todo natural n si y sólo si el morfismo natural φ es inyectivo.*

Demostración: Basta con observar que el núcleo del morfismo natural φ es el ideal homogéneo $\ker\varphi = \oplus_{n\geq 0}\ker\varphi_n = \oplus_{n\geq 0}(I_n \cap J_{n+1})/(I_{n+1}\cap J_{n+1})$. □

Teorema 1.4.2 *Sean $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ dos filtraciones de un anillo R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ *(es decir, $J_n \subset I_n$ para todo natural n).*

(ii) $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0} = \{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$.

(iii) $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0} \leq_s \{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$.

(iv) $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0} \leq \{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos que $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$. Entonces para todo natural n tendremos que $\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R) = \mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{J},R) = \mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ = \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+$. Es decir, (ii).

Obviamente se tiene que (ii) implica (iii) y que (iii) implica (iv). Para concluir la demostración hemos de ver que (iv) implica (i).

Supongamos (iv). Sea n un natural. Por hipótesis existirá un natural m (que podemos suponer $m \geq n+1$) tal que $\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^m_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^{n+1}_+$. Para un natural $i \leq n$ tendremos que $((\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^m_+)_i = 0$ y que $(\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^{n+1}_+)_i = 0$. Luego para $i\leq n$ se tendrá que $\ker\varphi_i = (\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^m_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R))_i \subseteq (\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^{n+1}_+)_i = 0$. En particular tendremos que $\ker\varphi_n = 0$ de donde, aplicando el Lema 1.4.1 se concluye la demostración. □

Comentario 1.4.3 La equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) del Teorema 1.4.2 nos dice que, el problema de la igualdad entre dos filtraciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ de un anillo R se traduce en dos problemas de equivalencia entre ciertas filtraciones definidas en anillos graduados asociados (concretamente, entre las filtraciones $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$, y entre las filtraciones $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{I},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$, todas ellas filtraciones del anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)$).

Comentario 1.4.4 Obsérvese que la filtración $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$ es una filtración ádica del anillo $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)$, y que la filtración $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ es una $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)_+$-filtración de $\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)$. Luego, de la equivalencia entre las condiciones (ii), (iii) y (iv) del Teorema 1.4.2 se sigue que $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0} = \{\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap$

$\mathcal{J},R)^n_+\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ es una s-$\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)_+$-filtración, si y sólo si $\{\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)^n_+ \cap \mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)\}_{n\geq 0}$ es una t-$\mathrm{Gr}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J},R)_+$-filtración. Luego tenemos una familia de ejemplos de filtraciones tales que son iguales si y sólo si son equivalentes si y sólo si son linealmente equivalentes.

Comentario 1.4.5 Sea I un ideal de un anillo R y sea $\mathcal{J}$ una I-filtración de R. Consideremos $\mathcal{I}$ la filtración I-ádica, es decir $\mathcal{I}=\{I^n\}_{n\geq 0}$. Así tenemos que $\mathcal{J}=\mathcal{I}$ si y sólo si $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$. Luego del Lema 1.4.1 tendremos que, $\mathcal{J}=\mathcal{I}$ si y sólo si el morfismo natural $\varphi:\mathrm{Gr}(I,R)\to\mathrm{Gr}(\mathcal{J},R)$ es inyectivo.

1.5 Comportamiento de la equivalencia y de la equivalencia lineal por la acción de morfismos

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento de la equivalencia y de la equivalencia lineal de filtraciones por localización y por extensión fielmente plana. En primer lugar obsérvese que, de la definición de equivalencia y de la definición de equivalencia lineal se sigue el siguiente lema:

Lema 1.5.1 *Sea $\varphi:R\to A$ un morfismo de anillos. Sean $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ dos filtraciones de R, y sean $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ dos filtraciones de A. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $\mathcal{I}_1\leq\mathcal{I}_2$ (resp. si $\mathcal{I}_1\leq_s\mathcal{I}_2$), entonces $\mathcal{I}_1A\leq\mathcal{I}_2A$ (resp. $\mathcal{I}_1A\leq_s\mathcal{I}_2A$).

(b) Si $\mathcal{J}_1\leq\mathcal{J}_2$ (resp. si $\mathcal{J}_1\leq_s\mathcal{J}_2$), entonces $\mathcal{J}_1\cap R\leq\mathcal{J}_2\cap R$ (resp. $\mathcal{J}_1\cap R\leq_s\mathcal{J}_2\cap R$).

• Comportamiento por la localización:

Proposición 1.5.2 *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos filtraciones de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J}\leq\mathcal{I}$.

(ii) $\mathcal{J}R_\mathfrak{p}\leq\mathcal{I}R_\mathfrak{p}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}\in V(\mathcal{I})$.

(iii) $\mathcal{J}R_\mathfrak{m}\leq\mathcal{I}R_\mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R con $\mathfrak{m}\in V(\mathcal{I})$.

Demostración: Únicamente hemos de demostrar que (iii) implica (i). Sea n un natural fijo y consideremos $I_n=Q_1\cap\ldots\cap Q_r$ una descomposición primaria de I_n con Q_j ideal $\mathfrak{q}_j$-primario. Sea $\mathfrak{m}_j$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{q}_j\subset\mathfrak{m}_j$. Por hipótesis, para todo j existe un natural m_j (que depende del natural n y del maximal $\mathfrak{m}_j$) tal que $J_{m_j}R_{\mathfrak{m}_j}\subset I_nR_{\mathfrak{m}_j}$. Sea $m=\max\{m_1,\ldots,m_r\}$ (que únicamente depende de n). Así se tendrá que $J_m\subset J_mR_{\mathfrak{m}_j}\cap R\subset I_nR_{\mathfrak{m}_j}\cap R\subset Q_jR_{\mathfrak{m}_j}\cap R=Q_j$ para todo j. De donde $J_m\subset Q_1\cap\ldots\cap Q_r=I_n$, como queríamos demostrar. □

Proposición 1.5.3 *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos filtraciones de un anillo noetheriano R. Supongamos que existe un conjunto finito $\mathcal{M}$ de ideales maximales de R tal que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in A(\mathcal{I}) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/I_n$ existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I}$.

(ii) $\mathcal{J}R_{\mathfrak{p}} \leq_s \mathcal{I}R_{\mathfrak{p}}$ *para todo ideal primo* $\mathfrak{p} \in V(\mathcal{I})$.

(iii) $\mathcal{J}R_{\mathfrak{m}} \leq_s \mathcal{I}R_{\mathfrak{m}}$ *para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* R *con* $\mathfrak{m} \in V(\mathcal{I})$.

Demostración: Únicamente hemos de demostrar que (iii) implica (i). Sea $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap V(I)$ que es un conjunto finito (no vacío) de ideales maximales de R. Sea $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}'$. Luego $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{m} \in V(I)$ y, por lo tanto, tendremos que $\mathcal{J}R_{\mathfrak{m}} \leq_s \mathcal{I}R_{\mathfrak{m}}$. Luego, para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}'$ existe un natural $k(\mathfrak{m})$ (que depende de $\mathfrak{m}$), tal que $J_{n+k(\mathfrak{m})}R_{\mathfrak{m}} \subset I_nR_{\mathfrak{m}}$ para todo n. Sea $k = \max\{k(\mathfrak{m})$ al variar $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}'\}$ (que existe pues $\mathcal{M}'$ es un conjunto finito). Veamos que $J_{n+k} \subset I_n$ para todo natural n. Dado n, sea $I_n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$ una descomposición primaria de I_n con Q_j ideal $\mathfrak{q}_j$-primario. Sea $\mathfrak{m}_j \in \mathcal{M}$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{m}_j$. Así tendremos que $\mathfrak{m}_j \in \mathcal{M}'$ y, por lo tanto, $J_{n+k} \subset J_{n+k(\mathfrak{m}_j)}R_{\mathfrak{m}_j} \cap R \subset I_nR_{\mathfrak{m}_j} \cap R \subset Q_jR_{\mathfrak{m}_j} \cap R = Q_j$ para todo j. De donde se sigue que $J_{n+k} \subset Q_1 \cap \ldots \cap Q_r = I_n$, como queríamos demostrar. □

Comentario 1.5.4 Obsérvese que la hipótesis de la proposición anterior se verifica para toda filtración $\mathcal{I}$ tal que el conjunto $A(\mathcal{I})$ es finito (por ejemplo, la filtración ádica $\{I^n\}_{n\geq 0}$ y la filtración entera $\{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$, [33, (1.5), (3.9)]). Y que también se verifica la hipótesis de la proposición anterior para toda filtración $\mathcal{I}$ de un anillo semilocal.

• **Comportamiento por extensión fielmente plana:**

Proposición 1.5.5 *Sea $\varphi : R \to A$ una extensión fielmente plana de anillos. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos filtraciones de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ *(resp.* $\mathcal{I} \leq_s \mathcal{J}$*).*

(ii) $\mathcal{I}A \leq \mathcal{J}A$ *(resp.* $\mathcal{I}A \leq_s \mathcal{J}A$*).*

Demostración: Como que la extensión es fielmente plana entonces, para todo ideal I de R se tiene que $IA \cap R = I$. Aplicando el Lema 1.5.1 se concluye la demostración. □

1.6 Anillos analíticamente no ramificados

Diremos que un anillo local $(R, \mathfrak{m})$ es un *anillo analíticamente no ramificado*, si su completado R^* carece de elementos nilpotentes no triviales. Y diremos que un anillo R es un *anillo localmente analíticamente no ramificado*, si para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local $(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ es analíticamente no ramificado.

El objetivo de esta sección es caracterizar los anillos analíticamente no ramificados mediante la equivalencia y la equivalencia lineal entre ciertas filtraciones. Veremos que estos anillos son aquellos en los que se verifica que "$\mathcal{J} \leq \mathcal{I}$ si y sólo si $\mathcal{J} \leq \overline{\mathcal{I}}$", y en los que se verifica que "$\mathcal{J} \leq_s \mathcal{I}$ si y sólo si $\mathcal{J} \leq_s \overline{\mathcal{I}}$". La relación con la equivalencia de filtraciones (Teorema 1.6.1) se obtendrá como corolario de las caracterizaciones dadas en las secciones 1.1 y 1.2. Y la relación con la equivalencia lineal (Teorema 1.6.2) tiene como punto clave un teorema de D.Rees [46, Th. 1.4]. Como corolario de estos resultados obtendremos que ser analíticamente no ramificado es una propiedad local (Corolario 1.6.3).

Teorema 1.6.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que el anillo $R^*_{\mathfrak{p}}$ es reducido.

(ii) Para todo ideal J de R con $I \subset J$ se tiene que, toda $\bar{t}$-J-filtración es una t-J-filtración.

(iii) Para todo ideal J de R con $I \subset J$ se tiene que $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una t-J-filtración.

(iv) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que $\{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ es una t-$\mathfrak{p}$-filtración.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Sea J un ideal de R tal que $I \subset J$, y sea $\mathcal{J}$ una $\bar{t}$-J-filtración. Aplicando el Corolario 1.2.4 tendremos que, para todo primo $\mathfrak{q} \in V(J)$ se tiene que $r(0)$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$. Como que $I \subset J$, se sigue que si $\mathfrak{q} \in V(J)$ entonces $\mathfrak{q} \in V(I)$ y, por lo tanto, $R^*_{\mathfrak{q}}$ es reducido. Así, para todo primo $\mathfrak{q} \in V(J)$ se tiene que $0 = r(0)$ es un cerrado en la $\mathcal{J}^*_{\mathfrak{q}}$-topología de $R^*_{\mathfrak{q}}$. De donde, aplicando el Corolario 1.1.8, se deduce (ii).

Obviamente se tiene que (ii) implica (iii) (pues $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una $\bar{t}$-J-filtración), y que (iii) implica (iv). Así, sólo nos falta por demostrar que (iv) implica (i).

Veamos, pues, que (iv) implica (i). Más aún, veamos que la implicación es cierta primo a primo, es decir, que si $\mathfrak{p} \in V(I)$ es un ideal primo tal que $\{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ es una t-$\mathfrak{p}$-filtración, entonces el anillo $R^*_{\mathfrak{p}}$ es reducido. La demostración que haremos es una adaptación de un lema de Rees [46, Lema 1]. Sea $\mathfrak{p} \in V(I)$ tal que $\{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ es una t-$\mathfrak{p}$-filtración. Queremos demostrar que $R^*_{\mathfrak{p}}$ carece de elementos nilpotentes no triviales y, para ello, basta con probar que si $x = [\{x_n\}_{n\geq 0}]$ es un elemento no nulo de $R^*_{\mathfrak{p}}$, entonces $x^2 \neq 0$. Por hipótesis, para todo natural n existe un natural m tal que $\overline{\mathfrak{p}^m} \subset \mathfrak{p}^n$. Supongamos que $x^2 = 0$. Entonces, existirá un natural r tal que $x_i^2 \in \mathfrak{p}^{2m}R_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}^m R_{\mathfrak{p}})^2$ para todo $i > r$. Por lo tanto $x_i \in \overline{\mathfrak{p}^m R_{\mathfrak{p}}} = \overline{\mathfrak{p}^m} R_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$. Luego, para todo natural n existe un natural r tal que $x_i \in \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$ para todo $i > r$. De donde se sigue que $x = 0$. □

Teorema 1.6.2 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que el anillo $R^*_{\mathfrak{p}}$ es reducido.

(ii) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$ se tiene que el anillo $R^*_{\mathfrak{m}}$ es reducido.

(iii) Para todo ideal J de R con $I \subset J$ se tiene que, toda $\bar{s}$-J-filtración es una s-J-filtración.

(iv) Para todo ideal J de R con $I \subset J$ se tiene que $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-J-filtración.

(v) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que $\{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-$\mathfrak{p}$-filtración.

(vi) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$ se tiene que $\{\overline{\mathfrak{m}^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-$\mathfrak{m}$-filtración.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que las condiciones (iii) y (iv) son equivalentes. Es obvio que (iii) implica (iv) pues $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una $\bar{s}$-J-filtración. Recíprocamente. Supongamos (iv). Sea J un ideal de R tal que $I \subset J$ y sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\geq 0}$ una $\bar{s}$-J-filtración. Luego existe un natural k_0 tal que $J_{n+k_0} \subset \overline{J^n}$ para todo n. Por hipótesis $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-J-filtración. Luego existe un natural k_1 tal que $\overline{J^{n+k_1}} \subset J^n$ para todo n. Sea $k = k_0 + k_1$. Entonces se tiene que $J_{n+k} \subset J^n$ para todo n. Es decir, $\mathcal{J}$ es una s-J-filtración. Luego las condiciones (iii) y (iv) son equivalentes.

Es evidente que (iv) implica (v), y que (v) implica (vi). Por otro lado, si $\{\overline{\mathfrak{p}^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-$\mathfrak{p}$-filtración, entonces es una t-$\mathfrak{p}$-filtración. Luego, del Teorema 1.6.1 se sigue que (v) implica (i), y de la demostración del Teorema 1.6.1 se sigue que (vi) implica (ii). Para concluir la demostración hemos de ver que (ii) implica (iv).

Supongamos (ii). Sea J un ideal de R tal que $I \subset J$. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{m} \in V(J)$. Luego $\mathfrak{m} \in V(I)$ y, por lo tanto, el anillo $R^*_{\mathfrak{m}}$ es reducido. Aplicando el Teorema de Rees [46, Th. 1.4], se sigue que $\{\overline{J^n R_{\mathfrak{m}}}\}_{n\geq 0}$ es una s-$JR_{\mathfrak{m}}$-filtración. Luego $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}R_{\mathfrak{m}} \leq_s \{J^n\}_{n\geq 0}R_{\mathfrak{m}}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(J)$. De donde, aplicando la Proposición 1.5.3 se sigue que $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0} \leq_s \{J^n\}_{n\geq 0}$. Es decir, $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-J-filtración, como queríamos demostrar. □

Corolario 1.6.3 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R es un anillo analíticamente no ramificado.

(ii) R es un anillo localmente analíticamente no ramificado.

Demostración: Basta con aplicar el Teorema 1.6.2 al ideal $I = 0$. □

Comentario 1.6.4 El Teorema 1.6.1 y el Teorema 1.6.2 se pueden resumir de la siguiente manera: un anillo R es localmente analíticamente no ramificado si y sólo si toda $\bar{t}$-filtración es una t-filtración, si y sólo si toda $\bar{s}$-filtración es una s-filtración.

Comentario 1.6.5 Como casos particulares de los teoremas anteriores (Teorema 1.6.1 y Teorema 1.6.2) y del siguiente corolario (Corolario 1.6.6) se tienen caracterizaciones de: cuándo un anillo noetheriano R es localmente analíticamente no ramificado; de cuándo el anillo local $R^*_{\mathfrak{m}}$ es reducido (donde $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de R); y de cuándo el anillo local $R^*_{\mathfrak{p}}$ es reducido (donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R). Para ello basta con aplicar, respectivamente, el Teorema 1.6.1, el Teorema 1.6.2 y el Corolario 1.6.6 al ideal $I = 0$; al ideal $I = \mathfrak{m}$; y al ideal maximal $I = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ del anillo local $R_{\mathfrak{p}}$.

El siguiente corolario caracteriza los anillos localmente analíticamente no ramificados mediante propiedades de finitud de la clausura entera $R(J)'$ de $R(J)$ en el anillo de polinomios $R[t]$.

Corolario 1.6.6 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que el anillo $R^*_{\mathfrak{p}}$ es reducido.

(ii) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$ se tiene que el anillo $R^*_{\mathfrak{m}}$ es reducido.

(iii) $R(J)'$ es un anillo noetheriano para todo ideal J de R con $I \subset J$.

(iv) $R(\mathfrak{p})'$ es un anillo noetheriano para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$.

(v) $R(\mathfrak{m})'$ es un anillo noetheriano para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$.

Demostración: En primer lugar obsérvese que si J es un ideal de R y si $\mathcal{J}$ una J-filtración tal que la extensión de anillos graduados $R(J) \subset R(\mathcal{J})$ es entera entonces, $R(\mathcal{J})$ es un anillo noetheriano si y sólo si es una R-álgebra finito generada, si y sólo si es una $R(J)$-álgebra finito generada, si y sólo si es un $R(J)$-módulo finito generado. Luego, aplicando la Proposición 1.3.5 tendremos que, $R(\mathcal{J})$ es un anillo noetheriano si y sólo si $\mathcal{J}$ es una s-J-filtración. Además, en general, si J es un ideal de un anillo R entonces la clausura entera de $R(J)$ en el anillo de polinomios $R[t]$ es el álgebra de Rees asociada a la J-filtración $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ (es decir, $R(J)' = \oplus_{n\geq 0}\overline{J^n}$). De donde, aplicando lo anterior se sigue que, $R(J)'$ es un anillo noetheriano si y sólo si $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-J-filtración.

Demostremos el corolario.

Por el Teorema 1.6.2 tenemos la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii).

Veamos que (i) implica (iii). Sea J un ideal de R tal que $I \subset J$. Aplicando el Teorema 1.6.2 tendremos que $\{\overline{J^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-J-filtración y, por lo tanto, que $R(J)'$ es un anillo noetheriano. Luego (i) implica (iii).

Obviamente se tiene que (iii) implica (iv), y que (iv) implica (v). Así, para concluir la demostración basta con demostrar que (v) implica (i).

Supongamos (v). Sea $\mathfrak{m} \in V(I)$ un ideal maximal de R. Por hipótesis tenemos que $R(\mathfrak{m})'$ es un anillo noetheriano y, por lo tanto, que $\{\overline{\mathfrak{m}^n}\}_{n\geq 0}$ es una s-$\mathfrak{m}$-filtración. Aplicando de nuevo el Teorema 1.6.2 se concluye la demostración. □

1.7 Tres teoremas de Zariski-Samuel

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo R. Notemos por $\mathfrak{p}^{(n)}$ la n-ésima potencia simbólica de $\mathfrak{p}$. Es decir, $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R$. Así podemos considerar dos filtraciones asociadas a un ideal primo $\mathfrak{p}$, la $\mathfrak{p}$-ádica $\{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0}$ y la simbólica $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0}$.

En [64, (VIII. § 5) Cor. 3, Cor. 4, Cor. 5], Zariski-Samuel establecen unos resultados relativos a la comparación entre las topologías definidas por las filtraciones ádica y simbólica asociadas a ideales primos. G.Lyubeznik fue el primero en cuestionar las demostraciones de los corolarios [64, (VIII. § 5) Cor. 4, Cor. 5]. Posteriormente, J.K.Verma [59] analiza estos resultados de Zariski-Samuel relativos a la comparación de topologías en anillos noetherianos y demuestra (mediante un ejemplo propuesto por W.Heinzer y C.Huneke), que los corolarios [64, (VIII. § 5) Cor. 4, Cor. 5] son falsos tal y como están enunciados. Además, J.K.Verma concluye dando unos enunciados alternativos bajo los cuales las tesis de los corolarios [64, (VIII. § 5) Cor. 4, Cor. 5] son correctos.

El objetivo de esta sección es caracterizar bajo qué condiciones los resultados de Zariski-Samuel son correctos generalizando, de esta manera, los resultados de Verma. El punto clave de la demostración son los resultados expuestos en la Sección 1.1.

Teorema 1.7.1 *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R y sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Sean $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ dos ideales primos de R. En tal situación se tiene que:*

(a) $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{(n)}\}_{n\geq 0}$ *si y sólo si* $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{p}_2} = 0$.

(b) $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{n}\}_{n\geq 0}$ *si y sólo si* $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{q}} = 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\mathfrak{p}_2^n$.

(c) $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \cong \{\mathfrak{p}^{n}\}_{n\geq 0}$ *si y sólo si* $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} R^*_{\mathfrak{q}} = 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\mathfrak{p}^n$.

(d) $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{m}^{n}\}_{n\geq 0}$ *si y sólo si* $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} R^*_{\mathfrak{m}} = 0$.

Demostración: Demostremos (a). Notemos $\mathcal{I} = \{\mathfrak{p}_2^{(n)}\}_{n\geq 0}$ y $\mathcal{J} = \{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0}$. Del Teorema 1.1.6 se sigue que $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{(n)}\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\bigcap_{n\geq 0}(\mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^{(i)} R^*_{\mathfrak{q}}) = \bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^{(i)} R^*_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathcal{I})$. Más aún, de la demostración del Teorema 1.1.6 se sigue que únicamente hemos de verificar la condición anterior para los ideales primos $\mathfrak{q} \in A(\mathcal{I}) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/I_n$. En nuestro caso $A(\mathcal{I}) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\mathfrak{p}_2^{(n)} = \{\mathfrak{p}_2\}$. Como que $\mathfrak{p}_2^{(i)} R^*_{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{p}_2^i R^*_{\mathfrak{p}_2}$, entonces $\bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^{(i)} R^*_{\mathfrak{p}_2} = \bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^i R^*_{\mathfrak{p}_2} = 0$. De donde se deduce (a).

Demostremos (b). Por el Teorema 1.1.6 tenemos que $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{n}\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\bigcap_{n\geq 0}(\mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{q}} + \bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^i R^*_{\mathfrak{q}}) = \bigcap_{i\geq 0} \mathfrak{p}_2^i R^*_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(\{\mathfrak{p}_2^n\}_{n\geq 0})$, es decir, si y sólo si $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}_1^{(n)} R^*_{\mathfrak{q}} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(\{\mathfrak{p}_2^n\}_{n\geq 0})$. Como antes, de la demostración del Teorema 1.1.6 se sigue que únicamente hemos de verificar la condición anterior para los ideales primos $\mathfrak{q} \in A(\{\mathfrak{p}_2^n\}_{n\geq 0}) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\mathfrak{p}_2^n$. De donde se sigue (b).

Veamos (c). Como que $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$ para todo natural n, entonces $\{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0}$. Luego $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \cong \{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0}$ si y sólo si $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0}$. Aplicando (b) a $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$, obtendremos (c).

El apartado (d) es consecuencia tanto de (a) como de (b). □

Lema 1.7.2 ([63, (IV. § 12) Th. 23]). *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} = \bigcap z$, donde z varía en el conjunto de primos asociados de R contenidos en $\mathfrak{p}$.*

Lema 1.7.3 *Sea $R \to A$ un morfismo de anillos noetherianos y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R. En tal situación se tiene que:*

(a) La fibra de $\mathfrak{p}$ es no vacía si y sólo si existe $\mathfrak{p}^*$ un ideal primo minimal de $\mathfrak{p}A$ tal que $\mathfrak{p}^* \cap R = \mathfrak{p}$.

(b) Supongamos que A es un dominio y que la fibra de $\mathfrak{p}$ es no vacía. En tal situación se tiene que $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} A = 0$.

(c) Supongamos que A es un dominio y que $R \to A$ verifica el going-down. En tal situación se tiene que $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} A = 0$.

Demostración: El recíproco de (a) es evidente. Demostremos el directo. Sea $\mathfrak{q}^*$ un elemento de la fibra de $\mathfrak{p}$. Luego $\mathfrak{p}A \subset \mathfrak{q}^*$ y, por lo tanto, existe $\mathfrak{p}^*$ ideal primo minimal de $\mathfrak{p}A$ tal que $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{q}^*$. Obviamente se tiene que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$.

Demostremos (b). Sea $\mathfrak{p}^*$ un ideal primo minimal de $\mathfrak{p}A$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$. Sea n un natural. Como R es anillo noetheriano, entonces $\mathfrak{p}^{(n)}$ es finito generado y, por lo tanto, de la definición de potencia simbólica se sigue que existe un elemento $s_n \in R - \mathfrak{p}$ tal que $s_n\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{p}^n$. Luego $s_n\mathfrak{p}^{(n)}A \subset \mathfrak{p}^nA \subset (\mathfrak{p}^*)^n$. Como que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$, se sigue que $s_n \in A - \mathfrak{p}^*$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p}^{(n)}A \subset (\mathfrak{p}^*)^{(n)}$. De donde, aplicando el Lema 1.7.2, se deduce que $\bigcap_{n\geq 0}\mathfrak{p}^{(n)}A \subset \bigcap_{n\geq 0}(\mathfrak{p}^*)^{(n)} = 0$.

Veamos (c). Sea $\mathfrak{p}^*$ primo minimal de $\mathfrak{p}A$. Entonces se tendrá que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^* \cap R$, y como la extensión verifica el going-down, existirá un ideal primo $\mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{p}^*$ con $\mathfrak{q}^* \cap R = \mathfrak{p}$. Luego, la fibra de $\mathfrak{p}$ es no vacía. Aplicando (b) se concluye la demostración. □

Veamos cómo de estos resultados se deducen los corolarios [64, (VIII. § 5) Cor. 3, Cor. 4, Cor. 5] de Zariski-Samuel.

Corolario 1.7.4 *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R y sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Sean $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ dos ideales primos de R. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $R^*_{\mathfrak{p}_2}$ es un dominio, entonces $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^{(n)}\}_{n\geq 0}$.

(b) Si $R^*_{\mathfrak{q}}$ es un dominio para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_2)$, entonces $\{\mathfrak{p}_1^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{p}_2^n\}_{n\geq 0}$.

(c) Si $R^*_{\mathfrak{q}}$ es un dominio para todo primo $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$, entonces $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \cong \{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 0}$.

(d) Si $R^*_{\mathfrak{m}}$ es un dominio, entonces $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 0} \leq \{\mathfrak{m}^n\}_{n\geq 0}$.

Demostración: Del Teorema 1.7.1 se sigue que únicamente hemos de demostrar que si tenemos $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ dos ideales primos de R tales que el anillo $R^*_{\mathfrak{q}_2}$ es un dominio, entonces $\bigcap_{n\geq 0}\mathfrak{q}_1^{(n)}R^*_{\mathfrak{q}_2} = 0$. Obviamente se tiene que $\mathfrak{q}_1^{(n)}R^*_{\mathfrak{q}_2} = (\mathfrak{q}_1R_{\mathfrak{q}_2})^{(n)}R^*_{\mathfrak{q}_2}$. Por otro lado, la completación $R_{\mathfrak{q}_2} \to R^*_{\mathfrak{q}_2}$ es una extensión fielmente plana luego, en particular, verifica el going-down. De donde, aplicando el Lema 1.7.3.(c) se concluye la demostración. □

2 Filtraciones ádica, simbólica y entera

El objetivo de este capítulo es introducir las nociones de $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal.

2.1 Potencias simbólicas generalizadas

Sea I un ideal de un anillo R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, definimos $S(I^n)$ la *n-(S)-ésima potencia simbólica* de I como $S(I^n) = I^n R_S \cap R$, y diremos que:

(i) *I es un t-(S)-ideal* si para todo natural n existe un natural m tal que $S(I^m) \subset I^n$. Es decir, si las topologías ádica y (S)-simbólica definidas por I son topologías equivalentes.

(ii) *I es un $\bar{t}$-(S)-ideal* si para todo natural n existe un natural m tal que $S(I^m) \subset \overline{I^n}$. Es decir, si la topología (S)-simbólica de R definida por I es más fina que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I.

(iii) *I es un s-(S)-ideal* si existe un natural k tal que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ para todo natural n. Es decir, si las topologías ádica y (S)-simbólica definidas por I son topologías linealmente equivalentes.

(iv) *I es un $\bar{s}$-(S)-ideal* si existe un natural k tal que $S(I^{n+k}) \subset \overline{I^n}$ para todo natural n. Es decir, si la topología (S)-simbólica de R definida por I es linealmente más fina que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I.

(v) En el caso particular en que el sistema multiplicativo S sea el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales de I (es decir si $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$), entonces notaremos por $I^{(n)}$ la *n-ésima potencia simbólica de I* y diremos que *I es un t-ideal* (resp. *un $\bar{t}$-ideal, un s-ideal, un $\bar{s}$-ideal*) si lo es para este sistema multiplicativo concreto.

Comentario 2.1.1 Estas definiciones las podemos entender como casos particulares de las dadas en el Capítulo 1. Para ello consideremos las filtraciones ádica $\mathcal{I} = \{I^n\}_{n\geq 0}$, (S)-simbólica $\mathcal{I}_{(S)} = \{S(I^n)\}_{n\geq 0}$ y entera $\overline{\mathcal{I}} = \{\overline{I^n}\}_{n\geq 0}$ asociadas al ideal I. Tenemos que tanto $\mathcal{I}_{(S)}$ como $\overline{\mathcal{I}}$ son I-filtraciones (es decir, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{(S)}$, $\mathcal{I} \subseteq \overline{\mathcal{I}}$), y se tiene que, por definición, I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal) si y sólo si $\mathcal{I}_{(S)}$ es una t-I-filtración (resp. una $\bar{t}, s, \bar{s}$-I-filtración). En particular, los resultados expuestos en el capítulo anterior nos darán unas primeras caracterizaciones de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales.

Veamos, en primer lugar, algunos ejemplos de potencias simbólicas generalizadas.

Ejemplo 2.1.2 Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, podemos considerar las potencias simbólicas de I respecto de sistemas multiplicativos del tipo $R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$, donde $\Lambda(I)$ es un conjunto de ideales primos de R (por ejemplo, para $\Lambda(I) = M(I)$ o para $\Lambda(I) = Ass\ R/I$). En realidad, las potencias simbólicas generalizadas siempre se pueden entender respecto de sistemas multiplicativos de este tipo pues, si S es un sistema multiplicativo arbitrario de R, entonces podemos substituir S por su saturado $S' = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda\}$ donde $\Lambda = \{$ideales primos $\mathfrak{p}$ de R tales que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ (ya que, obviamente, $S(J) = S'(J)$ para todo ideal J de R).

Ejemplo 2.1.3 Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. Consideremos el conjunto de ideales primos $\Lambda(I) = \{\mathfrak{p} \in V(I)$ tales que $ht(\mathfrak{p}) = ht(I)\}$, y sea S el sistema multiplicativo de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$. En tal situación, la n-(S)-ésima potencia simbólica de I es el *hull* de I^n. En el caso particular en que I sea un ideal de altura $ht(I) = 1$ de un dominio normal noetheriano R, entonces la n-(S)-ésima potencia simbólica de I es la *divisorialización* de I^n.

Ejemplo 2.1.4 Sean I y J dos ideales de un anillo noetheriano R. Definimos el ideal $I : \langle J\rangle$ como el valor estable de la sucesión creciente de ideales $(I : J) \subset (I : J^2) \subset \ldots \subset (I : J^n) \subset (I : J^{n+1}) \subset \ldots$. Es decir, $I : \langle J\rangle = \bigcup_{n\geq 0}(I : J^n) = (I : J^m)$ para m suficientemente grande. El siguiente lema (Lema 2.1.5) demuestra que la I-filtración $\{I^n : \langle J\rangle\}_{n\geq 0}$ es una filtración (S)-simbólica asociada al ideal I para cierto sistema multiplicativo S de R. Mientras que en general (Lema 2.1.6), para una I-filtración arbitraria $\mathcal{J}$ de un anillo R siempre podemos construir una filtración simbólica asociada al ideal I y a la filtración $\mathcal{J}$, y tal que ésta esté comprendida entre la filtración I-ádica y la filtración $\mathcal{J}$.

Lema 2.1.5 *Sean I y J dos ideales de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r \cap Q_{r+1} \cap \ldots \cap Q_s$ es una descomposición primaria reducida del ideal I con $J \subset r(Q_i)$ para $r+1 \leq i \leq s$, entonces $I : \langle J\rangle = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$.

(b) Existe un sistema multiplicativo S de R tal que $I^n : \langle J\rangle = S(I^n)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración: Demostremos (a). Veamos, en primer lugar, que $I : \langle J\rangle \subset Q_1\cap \ldots \cap Q_r$. Sea $x \in I : \langle J\rangle$. Luego existe un $m \geq 0$ tal que $xJ^m \subset I = Q_1\cap\ldots\cap Q_r\cap Q_{r+1}\cap\ldots\cap Q_s$. Sea $1 \leq i \leq r$ y supongamos que $x \notin Q_i$. Entonces para todo $y \in J^m$ se tendrá que $xy \in Q_i$ y, como que el ideal Q_i es primario, se sigue que $y \in r(Q_i)$. Así tendremos que $J^m \subset r(Q_i)$, de donde $J \subset r(Q_i)$ lo cual es absurdo para $1 \leq i \leq r$. Luego $I : \langle J\rangle \subset Q_1\cap\ldots\cap Q_r$. Veamos la inclusión contraria. Sea $x \in Q_1\cap\ldots\cap Q_r$. Obviamente para todo $m \geq 0$ se tiene que $xJ^m \subset Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$. Luego $x \in (Q_i : J^m)$ para $i \in \{1,\ldots,r\}$. Para concluir la demostración es suficiente con probar que existe un $m \geq 0$ tal que para todo $i \in \{r+1,\ldots,s\}$ se tiene que $x \in (Q_i : J^m)$ pues, entonces, $x \in (Q_1 : J^m) \cap \ldots \cap (Q_s : J^m) = (I : J^m)$ y, por lo tanto, $x \in I : \langle J\rangle$. Sea $i \in \{r+1,\ldots,s\}$. Consideremos un sistema de generadores $y_1,\ldots,y_n$ del ideal J. Entonces para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$ existirá un $m_{ji} \geq 0$ tal que $y_j^{m_{ji}} \in Q_i$ (pues $J \subset r(Q_i)$). Sea $m_i = m_{1i} + \ldots + m_{ni}$. Tenemos que J^{m_i} está generado por los elementos $y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n}$

con $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m_i$ y, por construcción, existirá un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_j \geq m_{ji}$. Luego $y_j^{\alpha_j} \in Q_i$, de donde se sigue que $xy_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} \in Q_i$ y, por lo tanto, $x \in (Q_i : J^{m_i})$. Sea $m = \max\{m_{r+1}, \ldots, m_s\}$. Entonces tendremos que $x \in (Q_i : J^{m_i}) \subset (Q_i : J^m)$, con lo que se concluye la demostración de (a).

Demostremos (b). Consideremos el conjunto finito $A(I)$ de ideales primos asociados a I definido por $A(I) = \bigcup_{n \geq 0} Ass\ R/I^n = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$. Supongamos que $J \subset \mathfrak{p}_i$ si y sólo si $i \in \{1, \ldots, l\}$. Sea $x \in J$ tal que $x \notin \mathfrak{p}_{l+1} \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_m$, y consideremos el sistema multiplicativo S de R definido por $S = \{x^i\}_{i \geq 0}$. Veamos que para todo $n \geq 0$ se tiene que $I^n : \langle J \rangle = S(I^n)$. Sea $I^n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r \cap Q_{r+1} \cap \ldots \cap Q_s$ una descomposición primaria reducida del ideal I^n con $r(Q_j) \cap S = \emptyset$ si y sólo si $1 \leq j \leq r$. Luego $S(I^n) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$. Por otra parte, como que un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R es tal que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ si y sólo si $x \in \mathfrak{p}$, entonces, para el ideal primo $\mathfrak{p}_j = r(Q_j) \in A(I)$ tendremos que, $\mathfrak{p}_j \cap S \neq \emptyset$ si y sólo si $x \in \mathfrak{p}_j$ si y sólo si $J \subset \mathfrak{p}_j = r(Q_j)$. De donde, aplicando (a) se sigue que $I^n : \langle J \rangle = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$, con lo que se concluye la demostración. □

Lema 2.1.6 *Sea $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n \geq 0}$ una filtración de un anillo noetheriano R y sea $I \subset J_1$ un ideal de R. Sea T el sistema multiplicativo de R definido por $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(\mathcal{J})\}$ donde $A(\mathcal{J}) = \bigcup_{n \geq 0} Ass\ R/J_n$. En tal situación se tiene que $\{I^n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{I}_{(T)} \subseteq \mathcal{J}$, donde $\mathcal{I}_{(T)}$ es la filtración definida por las potencias (T)-simbólicas de I. Además se tiene que si $\mathcal{J}$ es una filtración simbólica asociada a I, entonces $\mathcal{I}_{(T)} = \mathcal{J}$.*

Demostración: Como que $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n \geq 0}$ es una I-filtración, se tendrá que $I^n \subset J_n$ para todo $n \geq 0$. Luego $I^n \subset T(I^n) \subset T(J_n)$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in Ass\ R/J_n$ se tendrá que, por definición, $\mathfrak{p} \in A(\mathcal{J})$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$. Luego $T(J_n) = J_n$. De donde se sigue que $\{I^n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{I}_{(T)} \subseteq \mathcal{J}$.

En el caso particular en que $\mathcal{J} = \{S(I^n)\}_{n \geq 0}$ sea la filtración (S)-simbólica para cierto sistema multiplicativo S de R entonces, de la definición del sistema multiplicativo T se sigue que, en este caso, $T(I^n) = S(I^n)$ y, por lo tanto, $\mathcal{I}_{(T)} = \mathcal{J}$. □

Examinemos la relación entre las potencias simbólicas de un ideal respecto de dos sistemas multiplicativos del anillo.

Comentario 2.1.7 Sean $T_1 \subset T_2$ dos sistemas multiplicativos de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que $T_1(J) \subset T_2(J)$ para todo ideal J de R. Luego, si un ideal I de R es un t-(T_2)-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-(T_2)-ideal) entonces I es un t-(T_1)-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-(T_1)-ideal). Además, de los teoremas 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1 y 3.5.2 se deducirá que, si un ideal I es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal respecto de un sistema multiplicativo S, entonces $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$ (en particular, el estudio para el sistema multiplicativo $R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$ es el que nos dará lugar a las nociones más restrictivas). Por otra parte, si queremos la igualdad $S(I^n) = I^n$ para todo $n \geq 0$, en particular tendremos que $S(I) = I$ y, por lo tanto, $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I\}$.

Ejemplo 2.1.8 Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y consideremos las potencias simbólicas de I respecto de un sistema multiplicativo S de R. Del Ejemplo 2.1.2 se sigue que podemos suponer que $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$ para cierto conjunto $\Lambda(I)$ de ideales primos de R. Por otro lado, del comentario anterior tendremos que una condición necesaria para que I sea un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideal) es que $\mathfrak{q} \subset \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$

para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in M(I)$; y tendremos que una condición necesaria para tener la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas de I es que $\mathfrak{q} \subset \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in Ass\ R/I$. Así, por ejemplo, para $\Lambda(I) = M(I)$ siempre se verifica la primera condición, y se verifica la segunda si y sólo si I carece de componentes sumergidas (por ejemplo, si I es un ideal radical). Para $\Lambda(I) = Ass\ R/I$ siempre se verifican ambas condiciones. Y para $\Lambda(I) = \{\mathfrak{p} \in V(I)$ tales que $ht(\mathfrak{p}) = ht(I)\}$, se verifica la primera condición si y sólo si I es equidimensional, mientras que la segunda se verifica si y sólo si I es puro en altura.

Examinemos la relación entre las definiciones dadas. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación,

$$\begin{array}{ccccc}
S(I^n) = I^n \text{ para todo } n \geq 0 & & & & \\
\Updownarrow & & & & \\
S(I^n) \subset I^n \text{ para todo } n \geq 0 & \Rightarrow & I \text{ es un } s\text{-}(S)\text{-ideal} & \Rightarrow & I \text{ es un } t\text{-}(S)\text{-ideal} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
S(I^n) \subset \overline{I^n} \text{ para todo } n \geq 0 & \Rightarrow & I \text{ es un } \overline{s}\text{-}(S)\text{-ideal} & \Rightarrow & I \text{ es un } \overline{t}\text{-}(S)\text{-ideal} \\
\Uparrow & & & & \\
S(I^n) = \overline{I^n} \text{ para todo } n \geq 0 & & & &
\end{array}$$

es decir, las nociones de $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideal se pueden entender como debilitaciones al problema de la igualdad entre las potencias ordinarias, (S)-simbólicas y enteras asociadas a un ideal I de un anillo noetheriano R. Más aún, de hecho se tiene el siguiente lema (Lema 2.1.9) que establece la estrecha relación existente entre este problema y las condiciones de normalidad y de $\overline{s}$-(S)-ideal. Concretamente se tendrá que, el problema de la igualdad entre las potencias ordinarias, (S)-simbólicas y enteras asociadas a un ideal I se subdivide en tres problemas (problemas que analizaremos en la Sección 5.2 mediante propiedades del anillo graduado asociado a I): ¿es $S^{-1}I$ un ideal normal?, ¿es I un ideal normal?, y ¿es I un $\overline{s}$-(S)-ideal?.

Un ideal I de un anillo R se dice que es *normal* si todas sus potencias son íntegramente cerradas es decir, si $I^n = \overline{I^n}$ para todo natural n. Del Lema 1.2.1.(e) se sigue que ser normal es una propiedad local.

Lema 2.1.9 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación se tiene que:*

(a) $\overline{I^n} \subset S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $S^{-1}I$ es normal.

(b) $S(I^n) \subset \overline{I^n}$ para todo natural n si y sólo si I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(c) $I^n = S(I^n) = \overline{I^n}$ para todo natural n si y sólo si I es normal e I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(d) *Si $S^{-1}I$ es normal entonces, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $I^n = S(I^n) = \overline{I^n}$ para todo natural n.*

Demostración: Veamos el directo de (a). Sea $n \geq 0$, entonces $(S^{-1}I)^n \subset \overline{(S^{-1}I)^n} = \overline{S^{-1}(I^n)} = S^{-1}(\overline{I^n}) \subset S^{-1}(S(I^n)) = S^{-1}(I^n) = (S^{-1}I)^n$ (Lema 1.2.1). De donde se sigue que $(S^{-1}I)^n = \overline{(S^{-1}I)^n}$. Es decir, $S^{-1}I$ es normal. Recíprocamente, veamos que si $S^{-1}I$ es normal entonces $\overline{I^n} \subset S(I^n)$ para todo natural n. Como que $S^{-1}I$ es normal entonces tendremos que $S^{-1}(I^n) = (S^{-1}I)^n = \overline{(S^{-1}I)^n} = \overline{S^{-1}(I^n)} = S^{-1}(\overline{I^n})$. Luego $I^n \subset \overline{I^n} \subset S^{-1}(\overline{I^n}) \cap R = S^{-1}(I^n) \cap R = S(I^n)$, como queríamos demostrar.

El apartado (b) lo demuestra McAdam [35, Cor. 1.6]. El apartado (c) es obvio por (b) y por la definición de normalidad. El apartado (d) es consecuencia de (a). □

En las siguientes secciones se darán ejemplos de $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales, ejemplos de ideales cuyas potencias ordinarias, simbólicas y enteras coinciden, y se darán ejemplos de ideales para los que las implicaciones del diagrama anterior son equivalencias.

Examinemos, para finalizar esta sección, las potencias simbólicas de algunos ideales: el ideal cero y el maximal, los ideales $\mathfrak{m}$-primarios, el nilradical, ideales de altura cero, ideales primos de altura uno de dominios factoriales, ideales de la clase principal, ideales intersección completa, y los ideales irrelevantes de anillos graduados noetherianos.

Ejemplo 2.1.10 Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de un anillo noetheriano R, y sea I un ideal $\mathfrak{m}$-primario (por ejemplo, $I = \mathfrak{m}$). En tal situación tendremos que para todo natural n el ideal I^n es un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Luego $I^n = I^{(n)}$. Es decir, las potencias ordinarias y simbólicas coinciden. En particular, *los ideales $\mathfrak{m}$-primarios son $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales.* De este ejemplo se sigue que, las propiedades de las potencias simbólicas de un ideal I de un anillo noetheriano R, y la condición de que el ideal I sea un ideal de tipo lineal, son condiciones que tendrán escasa relación (pues recuérdese que, el ideal maximal de un anillo local noetheriano es un ideal de tipo lineal si y sólo si el anillo es local regular).

Ejemplo 2.1.11 Sea $I = 0$ el ideal cero de un anillo noetheriano R. Así tendremos que $I^n = I = 0$ para todo natural n, de donde se sigue que $I^{(n)} = I^{(1)}$ y que $\overline{I^n} = r(0)$ para todo natural n. En particular tendremos que $I^{(n)} \subset \overline{I^n}$ para todo natural n, que I es un $\bar{s}$-ideal y que I es un $\bar{t}$-ideal. Mientras que, en este caso tendremos que, $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n si y sólo si I es un s-ideal si y sólo si I es un t-ideal si y sólo si $I = I^{(1)}$. Es decir, si y sólo si R carece de componentes sumergidas, es decir, si y sólo si R verifica la condición de Serre (S_1). Luego, *el ideal cero de un anillo noetheriano siempre es un $\bar{t}, \bar{s}$-ideal, mientras que es un s-ideal si y sólo si es un t-ideal si y sólo si el anillo verifica la condición de Serre* (S_1).

Ejemplo 2.1.12 Sea R un anillo noetheriano y sea $I = r(0)$. Luego existe un natural n_0 tal que $I^{n_0} = 0$. En particular tendremos que $\overline{I^n} = r(0)$ para todo natural n, de donde se sigue que $I^{(n)} \subset \overline{I^n}$ para todo natural n, que I es un $\bar{s}$-ideal y que I es un $\bar{t}$-ideal. Por otro lado, como que $I^{n_0} = 0$ para cierto natural n_0, entonces tendremos que, $I^n = I^{(n)}$ para todo natural $n \geq n_0$ si y sólo si I es un s-ideal si y sólo si I es un t-ideal si y sólo si $I^{n_0} = I^{(n_0)}$. Es decir, si y sólo si R carece de componentes sumergidas, es decir, si y sólo si R verifica la condición de Serre (S_1). Luego, *el nilradical de un anillo noetheriano* *siempre es $\bar{t},\bar{s}$-ideal, mientras que es un s-ideal si y sólo si es un t-ideal si y sólo si el anillo verifica la condición de Serre (S_1).*

Ejemplo 2.1.13 Sea K un cuerpo y sea R el anillo noetheriano d-dimensional definido por $R = K[T_1, \ldots, T_{d+1}]/(T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)$ donde $1 \leq s \leq d$. Sea I el ideal de R definido por $I = (T_1 \cdot \ldots \cdot T_i)/(T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)$ donde $i \leq s$. Obviamente I es un ideal radical (que es ideal primo si y sólo si $i = 1$), de dimensión $\dim R/I = \dim R$, de altura $ht(I) = 0$ y con primos minimales $M(I) = Ass\ R/I = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_i\}$ donde $\mathfrak{p}_j = (T_j)/(T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)$ para todo j. Veamos que I no es t-ideal, ni $\bar{t}$-ideal, ni s-ideal, ni $\bar{s}$-ideal.

Demostración: Demostremos, en primer lugar, que $I^{(m)} = I$ para todo natural m. Sea m un natural. En tal situación, por definición de potencia simbólica tenemos que $I^{(m)} = \{x \in R$ tales que existe un $s \notin \mathfrak{p}_j$ para todo j y tal que $sx \in I^m\}$. Sea $t_l = T_l/(T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)$ la clase de T_l en R. Luego $x = t_1 \cdot \ldots \cdot t_i \in I^{(m)}$ pues $s = t_{i+1} \cdot \ldots \cdot t_s \notin \mathfrak{p}_j$ para todo j, y $sx = t_1 \cdot \ldots \cdot t_i \cdot t_{i+1} \cdot \ldots \cdot t_s \in I^m = (T_1^m \cdot \ldots \cdot T_i^m, T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)/(T_1 \cdot \ldots \cdot T_s)$. De donde se sigue que $I \subset I^{(m)}$. Así tendremos que $I \subset I^{(m)} \subset I^{(1)} = I$ (pues I es un ideal radical) y, por lo tanto, $I^{(m)} = I$ para todo m, como queríamos demostrar.

Como que $I^{(m)} = I$ para todo natural m, en particular tendremos que $I^{(m)} \subset I^n$ si y sólo si $I^n = I$. Luego tendremos que las potencias ádicas y simbólicas de I no coinciden, que I no es un s-ideal y que I no es un t-ideal. Por otro lado $I = \overline{I}$ (pues I es un ideal radical). De donde se sigue que $I^{(m)} \subset \overline{I^n}$ si y sólo si $I \subset \overline{I^n}$ si y sólo si $\overline{I^n} = I$. Luego tendremos que $I^{(n)} \neq \overline{I^n}$ para todo natural $n > 1$, que I no es un $\bar{s}$-ideal y que I no es un $\bar{t}$-ideal. □

Ejemplo 2.1.14 Sea R un anillo noetheriano y sea I un ideal intersección completa. Sea S el sistema multiplicativo de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I\}$. En tal situación, del Teorema de Macaulay-Rees se sigue que $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I^n\}$ para todo natural n y, por lo tanto, tendremos que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n. En particular, si I carece de componentes sumergidas entonces tendremos que $I^n = I^{(n)}$ para todo n y, por lo tanto, I es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal. Ejemplos de anillos e ideales en estas condiciones son los ideales de la clase principal de los anillos Cohen-Macaulay, y los ideales primos de altura uno de la clase principal de los dominios noetherianos (por ejemplo, los ideales primos de altura uno de dominios factoriales noetherianos).

Ejemplo 2.1.15 Sea R un anillo noetheriano. Del ejemplo anterior se sigue que si R es Cohen-Macaulay entonces, para todo ideal I de la clase principal se tiene que $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n. Veamos que, en realidad, esta propiedad caracteriza los anillos Cohen-Macaulay, de donde se seguirá que en un anillo noetheriano R no Cohen-Macaulay podremos garantizar la existencia de ideales de la clase principal cuyas potencias ordinarias y simbólicas no coincidan. Veamos, pues, que: *un anillo noetheriano R es Cohen-Macaulay si y sólo si para todo ideal I de R de la clase principal se tiene que $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n.*

Demostración: Únicamente hemos de ver el recíproco. Supongamos que para todo ideal I de la clase principal de un anillo noetheriano R se tiene que $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n. En particular tendremos que $I = I^{(1)}$, luego I carece de componentes sumergidas y, por lo tanto, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in M(I) = Ass\ R/I$ tendremos que

$ht(I) \leq ht(\mathfrak{p}) \leq \mu(I) = ht(I)$, es decir, I es puro en altura. Luego todos los ideales de la clase principal de R son puros en altura, de donde se sigue que R es Cohen-Macaulay. $\square$

Ejemplo 2.1.16 Sea $A = \oplus_{n\geq 0}A_n$ un anillo graduado noetheriano generado por A_1 como A_0-álgebra, y sea J el ideal de A definido por $J = \oplus_{n\geq 1}A_n$. Sea S un sistema multiplicativo de A formado por elementos homogéneos. Veamos que en tal situación se tiene que, $J^n = S(J^n)$ para todo natural n si y sólo si J es un s-(S)-ideal si y sólo si J es un t-(S)-ideal.

Demostración: Dado un sistema multiplicativo S de A formado por elementos homogéneos, consideremos el morfismo natural $\varphi : A \to S^{-1}A$. Como que S es un sistema multiplicativo homogéneo de A, entonces tendremos que $\varphi = \oplus_{n\geq 0}\varphi_n$ es un morfismo graduado de grado cero. Como que A está generado por A_1 como A_0-álgebra, entonces tendremos que $J^l = \oplus_{i\geq l}A_i$ y, por lo tanto, $S(J^l) = \ker\varphi_0 \oplus \ldots \oplus \ker\varphi_{l-1} \oplus (\oplus_{i\geq l}A_i)$ para todo natural l. Luego, si $m \geq n$ entonces se tendrá que, $S(J^m) \subset I^n$ si y sólo si $\ker\varphi_i = 0$ para $0 \leq i \leq n-1$, si y sólo si $S(J^n) \subset J^n$. De donde se sigue que $J^n = S(J^n)$ para todo n si y sólo si J es un s-(S)-ideal si y sólo si J es un t-(S)-ideal si y sólo si A es libre de S-torsión (pues la S-torsión es el núcleo del morfismo de simetrización). $\square$

3 Comparación de las topologías ádica, simbólica y entera. Caracterizaciones de los $\mathbf{t}, \overline{\mathbf{t}}, \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}$-(S)-ideales

En este capítulo se caracterizarán los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales mediante desigualdades entre alturas, dispersiones analíticas y dimensiones. También se darán caracterizaciones homológicas usando, para ello, el functor 0-ésimo de cohomología local y el functor Ext.

3.1 Conjuntos de primos asociados a un ideal

Además de los primos asociados y de los primos minimales, podemos considerar otros conjuntos de ideales primos asociados a un ideal I de un anillo noetheriano R. Estos conjuntos de divisores primos asociados al ideal ($E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$, $\overline{U}(I)$, $A^*(I)$, $\overline{A}^*(I)$ y $A(I)$) han sido estudiados, entre otros autores, por Katz, McAdam y Ratliff en [29, 33, 34, 35, 36]. Su origen se encuentra en el desarrollo de teorías en las que se reemplaza el papel que juegan los conjuntos $Ass\ R/I$ (de los primos asociados al ideal I) y $Z(R/I) = \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I\}$ (de los divisores de cero), por los conjuntos $\Gamma(I)$ y $\cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I)\}$ (donde $\Gamma(I)$ es $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$, $\overline{U}(I)$, $A^*(I)$, $\overline{A}^*(I)$ o $A(I)$). De esta manera se obtienen las nociones de sucesiones esenciales, u-esenciales y asintóticas, así como las nociones de grado esencial, u-esencial y asintótico de un ideal (nociones que juegan, en estas teorías, un papel análogo al desempeñado por las sucesiones regulares y por la noción usual del grado de un ideal).

El objetivo de esta sección será definir estos conjuntos de divisores primos asociados a un ideal y dar una lista de algunas de las propiedades que verifican. El motivo que nos ha conducido a la necesidad de desarrollar esta sección es doble. En primer lugar, el hecho de que estos conjuntos de ideales primos se denominen y noten de maneras distintas en cada una de estas referencias. Y, en segundo lugar, la diversidad de resultados relacionados con estos conjuntos de divisores primos. No se pretende dar una lista exhaustiva de propiedades de estos conjuntos de ideales primos, sino que únicamente enunciaremos aquellas que nos sean de utilidad en las siguientes secciones.

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación definimos los siguientes conjuntos de divisores primos asociados al ideal I:

(a) *Divisores primos persistentes*, $A^*(I) = Ass\ R/I^n$ para $n >> 0$.

(b) *Divisores primos asintóticos*, $\overline{A}^*(I) = Ass\ R/\overline{I^n}$ para $n >> 0$.

(c) *Divisores primos esenciales* (o quintaesenciales), $E(I) = \{\mathfrak{p} \in V(I)$ tales que existe $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{p}}$ con $\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}}$ minimal de $IR^*_{\mathfrak{p}} + z\}$.

(d) *Divisores primos $\overline{e}$-esenciales* (o quintasintóticos), $\overline{E}(I) = \{\mathfrak{p} \in V(I)$ tales que existe $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{p}}$ con $\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}}$ minimal de $IR^*_{\mathfrak{p}} + z\}$.

(e) *Divisores primos u-esenciales*, $U(I) = \{\mathfrak{p} \cap R$ con $\mathfrak{p} \in E(t^{-1}\mathcal{R}(I))\}$.

(f) *Divisores primos* $\overline{u}$*-esenciales*, $\overline{U}(I) = \{\mathfrak{p} \cap R \text{ con } \mathfrak{p} \in \overline{E}(t^{-1}\mathcal{R}(I))\}$.

Lema 3.1.1 ([33, (1.5), (3.9)] y [35, (0.1)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) $A^*(I)$ está bien definido y $A^*(I) \subset A(I) := \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/I^n$.

(b) $\overline{A}^*(I)$ está bien definido y $\overline{U}(I) = \overline{A}^*(I) = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ R/\overline{I^n}$.

Lema 3.1.2 ([29, (2.11)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. Supongamos que para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$ el anillo $R^*_{\mathfrak{m}}$ carece de componentes sumergidas. En tal situación se tiene que $U(I) = \overline{U}(I)$.*

Lema 3.1.3 ([29, (2.3), (2.5)], [33, (1.5)] y [35, (2.1)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que los conjuntos $M(I)$, $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$, $\overline{U}(I)$, $A^*(I)$, $\overline{A}^*(I)$ y $A(I)$ son todos ellos conjuntos finitos y, la relación entre ellos es $M(I) \subset \overline{E}(I) \subset E(I) \cap \overline{A}^*(I) \subset E(I) \cup \overline{A}^*(I) \subset U(I) \subset A^*(I) \subset A(I) \subset V(I)$.*

Lema 3.1.4 ([29, (2.2.4), (2.5.1)] y [35, (3.4)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea T un sistema multiplicativamente cerrado de R. Notemos por $\Gamma(I)$ cualquiera de los conjuntos de ideales primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$, $\overline{U}(I)$. En tal situación se tiene que $\Gamma(T^{-1}I) = \{T^{-1}\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$ tal que $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset\}$.*

Lema 3.1.5 ([29, (2.2.5), (2.5.2)] y [35, (3.4)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) $\mathfrak{p} \in E(I)$ (resp. $\mathfrak{p} \in U(I)$) si y sólo si existe $z \in Ass\ R$ con $z \subset \mathfrak{p}$ y tal que $\mathfrak{p}/z \in E((I+z)/z)$ (resp. $\mathfrak{p}/z \in U((I+z)/z)$).

(b) $\mathfrak{p} \in \overline{E}(I)$ (resp. $\mathfrak{p} \in \overline{U}(I)$) si y sólo si existe $z \in Min\ R$ con $z \subset \mathfrak{p}$ y tal que $\mathfrak{p}/z \in \overline{E}((I+z)/z)$ (resp. $\mathfrak{p}/z \in \overline{U}((I+z)/z)$).

Lema 3.1.6 ([29, (2.2.6), (2.5.3)] y [35, (3.6)]). *Sea $R \to A$ una extensión fielmente plana de anillos noetherianos. Sea I un ideal de R. Notemos por $\Gamma(I)$ cualquiera de los conjuntos de ideales primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$, $\overline{U}(I)$. En tal situación se tiene que $\Gamma(I) = \{\mathfrak{p}^* \cap R$ con $\mathfrak{p}^* \in \Gamma(IA)\}$. Además, si $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$ y $\mathfrak{p}^*$ es un primo minimal de $\mathfrak{p}A$, entonces $\mathfrak{p}^* \in \Gamma(IA)$. En particular, si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano entonces $\mathfrak{m} \in \Gamma(I)$ si y sólo si $\mathfrak{m}R^* \in \Gamma(IR^*)$.*

Lema 3.1.7 ([29, (2.2.7), (2.5.4)] y [35, (3.8)]). *Sea $R \subset A$ una extensión finita (es decir, entera y finito generada) de anillos noetherianos. Sea I un ideal de R. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $\eta \cap A \in Ass\ R$ para todo $\eta \in Ass\ A$, entonces $E(I) = \{\mathfrak{p}^* \cap R$ con $\mathfrak{p}^* \in E(IA)\}$ y $U(I) = \{\mathfrak{p}^* \cap R$ con $\mathfrak{p}^* \in U(IA)\}$.

(b) Si $\eta \cap A \in Min\ R$ para todo $\eta \in Min\ A$, entonces $\overline{E}(I) = \{\mathfrak{p}^* \cap R$ con $\mathfrak{p}^* \in \overline{E}(IA)\}$ y $\overline{U}(I) = \{\mathfrak{p}^* \cap R$ con $\mathfrak{p}^* \in \overline{U}(IA)\}$.

Lema 3.1.8 (Teorema de Burch-McAdam [33, (4.1)]). *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $\mathfrak{p} \in V(I)$ un ideal primo de R tal que $ht(\mathfrak{p}) = l(IR_\mathfrak{p})$. En tal situación se tiene que $\mathfrak{p} \in \overline{U}(I)$. El recíproco es cierto si $R_\mathfrak{p}$ es quasi-unmixed.*

Recuérdese que un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ se dice que es *quasi-unmixed* (resp. *unmixed*), si $\dim(R^*/z) = \dim R^*$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$ (resp. para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$). Y que un anillo noetheriano R se dice que es *localmente quasi-unmixed* (resp. *localmente unmixed*), si para todo primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local $R_\mathfrak{p}$ es quasi-unmixed (resp. unmixed).

3.2 Potencias simbólicas y grupos 0-ésimos de cohomología local

El objetivo de esta sección es establecer los lemas necesarios (Lema 3.2.1 y Lema 3.2.3), que nos permitirán relacionar las filtraciones ádica, (S)-simbólica y entera asociadas a un ideal I de un anillo noetheriano R, con la anulación de ciertos morfismos naturales entre grupos 0-ésimos de cohomología local.

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, definimos el *functor I-torsión*, $\Gamma_I(\cdot) : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, como $\Gamma_I(M) = \{x \in M$ tales que existe un natural n con $I^n x = 0\} = \bigcup_{n\geq 0}(0 : I^n)_M$. El functor I-torsión es un functor covariante, aditivo y exacto por la izquierda. Luego podemos considerar sus derivados por la derecha. Así, se define el *i-ésimo functor de cohomología local respecto del ideal I*, $H^i_I(\cdot) : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, como el i-ésimo functor derivado por la derecha del functor I-torsión.

Sea M un R-módulo. A través del isomorfismo canónico $(0 : I^n)_M \cong \mathrm{Hom}_R(R/I^n, M)$ se tendrá que los morfismos naturales $R/I^{n+1} \to R/I^n$ inducen un sistema inductivo en $(0 : I^n)_M$. De donde se sigue que podemos pensar el functor I-torsión $\Gamma_I(M)$ como $\Gamma_I(M) = \bigcup_{n\geq 0}(0 : I^n)_M = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_R(R/I^n, M)$ y, por lo tanto, para todo R-módulo M tendremos que $H^i_I(M) = R^i\Gamma_I(M) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, M)$.

Veamos cómo podemos expresar el grupo 0-ésimo de cohomología local $H^0_I(R/J)$.

Dados I y J dos ideales de R entonces, por definición, $J : \langle I \rangle = \bigcup_{n\geq 0}(J : I^n)$. Luego de la definición de cohomología local se sigue que, $H^0_I(R/J) = \bigcup_{n\geq 0}(0 : I^n)_{R/J} = (\bigcup_{n\geq 0}(J : I^n))/J = (J : \langle I \rangle)/J$. Por otro lado, por el Lema 2.1.5.(a) tenemos que, si $J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r \cap Q_{r+1} \cap \ldots \cap Q_s$ es una descomposición primaria reducida del ideal J con $I \subset r(Q_i)$ para $r+1 \leq i \leq s$, entonces $J : \langle I \rangle = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$. Luego $J : \langle I \rangle = S(J)$ siendo S es el sistema multiplicativo definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/J$ con $I \not\subset \mathfrak{p}\}$. De donde se sigue que $H^0_I(R/J) = (J : \langle I \rangle)/J = S(J)/J$.

Lema 3.2.1 *Sean $I_2 \subset I_1$ dos ideales de un anillo noetheriano R y sea I un ideal de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I_2 : \langle I \rangle \subset I_1$.

(ii) Existe un ideal J de R con $I_2 \subset J \subset I_1$ tal que $H_I^0(R/J) = 0$.

(iii) El morfismo natural $H_I^0(R/I_2) \to H_I^0(R/I_1)$ es el morfismo cero.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Para ello tomemos J el ideal $J = I_2 : \langle I \rangle$. Por definición de $I_2 : \langle I \rangle$ tenemos que $I_2 \subset I_2 : \langle I \rangle$, mientras que, por hipótesis, tenemos que $I_2 : \langle I \rangle \subset I_1$. Luego $I_2 \subset J \subset I_1$. Veamos que $H_I^0(R/J) = 0$. En general tenemos que, $(I_2 : \langle I \rangle) : \langle I \rangle = I_2 : \langle I \rangle$ (pues, obviamente, $I_2 : \langle I \rangle \subset (I_2 : \langle I \rangle) : \langle I \rangle$ y, además, si $x \in (I_2 : \langle I \rangle) : \langle I \rangle$ entonces existirá un natural n tal que $xI^n \subset I_2 : \langle I \rangle$, luego existirá un natural m tal que $xI^n I^m \subset I_2$ y, por lo tanto, $x \in I_2 : \langle I \rangle$). Así tenemos que $J : \langle I \rangle = J$ y, como que $H_I^0(R/J) = (J : \langle I \rangle)/J$, entonces $H_I^0(R/J) = (J : \langle I \rangle)/J = J/J = 0$, como queríamos demostrar.

Veamos que (ii) implica (iii). Supongamos que existe un ideal J de R con $I_2 \subset J \subset I_1$ y tal que $H_I^0(R/J) = 0$. Como que $I_2 \subset J \subset I_1$, entonces podemos factorizar el morfismo natural $R/I_2 \to R/I_1$ por $R/I_2 \to R/J \to R/I_1$. Aplicando el functor $H_I^0(\cdot)$ tendremos que el morfismo natural $H_I^0(R/I_2) \to H_I^0(R/I_1)$ factoriza por $H_I^0(R/I_2) \to H_I^0(R/J) \to H_I^0(R/I_1)$. Luego $H_I^0(R/I_2) \to H_I^0(R/I_1)$ es el morfismo nulo.

Para concluir la demostración hemos de ver que (iii) implica (i). Supongamos (iii). Por hipótesis tenemos que el morfismo natural $H_I^0(R/I_2) \to H_I^0(R/I_1)$ es el morfismo cero. Luego el morfismo $(I_2 : \langle I \rangle)/I_2 \to (I_1 : \langle I \rangle)/I_1$ es el morfismo cero. De donde se sigue que $I_2 : \langle I \rangle \subset I_1$, con lo que se concluye la demostración del lema. □

Comentario 3.2.2 Obsérvese que $I_2 : \langle I \rangle$ es el más pequeño ideal de R verificando (ii) pues, si J es un ideal de R tal que $I_2 \subset J \subset I_1$ y tal que $H_I^0(R/J) = 0$, entonces tendremos que $(J : \langle I \rangle)/J = H_I^0(R/J) = 0$, luego $J : \langle I \rangle = J$ y, como que $I_2 \subset J$, entonces $I_2 : \langle I \rangle \subset J : \langle I \rangle = J$.

Analicemos el caso particular del Lema 3.2.1 en el que $I = \mathfrak{m}$. Para un sistema multiplicativo S de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ se tiene que, $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ si y sólo si S es *no trivial* (es decir, si y sólo si S contiene elementos no invertibles del anillo).

Lema 3.2.3 *Sean $I_2 \subset I_1$ dos ideales de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $S(I_2) \subset I_1$.

(ii) $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I_1$.

(iii) Existe un ideal J de R con $I_2 \subset J \subset I_1$ tal que $H_{\mathfrak{m}}^0(R/J) = 0$.

(iv) El morfismo natural $H_{\mathfrak{m}}^0(R/I_2) \to H_{\mathfrak{m}}^0(R/I_1)$ es el morfismo cero.

Más aún, se puede tomar como sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Luego, en el caso particular en que $ht(I_2) = \dim R - 1$, entonces se puede tomar como sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I_2)\}$.

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (ii), (iii) y (iv) se sigue de aplicar el Lema 3.2.1 al ideal $I = \mathfrak{m}$. Veamos, pues, la equivalencia con (i).

Demostremos que (i) implica (ii). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $S(I_2) \subset I_1$. Como que $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$, entonces $S(I_2)$ contendrá la intersección de todas las componentes primarias de I_2 que no son $\mathfrak{m}$-primarias. Por el Lema 2.1.5.(a) tenemos que $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle$ es la intersección de las componentes primarias de I_2 que no son $\mathfrak{m}$-primarias. Luego $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset S(I_2)$ y, por lo tanto, $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I_1$.

Recíprocamente, supongamos (ii) y demostremos (i). Sea S el sistema multiplicativo de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2 \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. De nuestra elección de S se sigue que $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$ y, del Lema 2.1.5.(a) se sigue que $S(I_2) = I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle$. Luego existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $S(I_2) \subset I_1$, como queríamos demostrar.

De la demostración de la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) se sigue que si se verifica la condición (i) para un sistema multiplicativo, entonces también se verificará para el sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2 \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. En el caso particular en que $ht(I_2) = \dim R - 1$, entonces $M(I_2) \subset Ass_R\ R/I_2 \subset V(I_2) = M(I_2) \cup \{\mathfrak{m}\}$. Luego S es el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales de I_2, con lo que se concluye la demostración del lema. □

Como corolario del Lema 3.2.3 se tiene que:

Corolario 3.2.4 *Sean $I_2 \subset I_1$ dos ideales $\mathfrak{m}$-primarios de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I_2) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/I_1)$ nunca es el morfismo cero.*

Demostración: Supongamos que $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I_2) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/I_1)$ es el morfismo cero. En tal situación, del Lema 3.2.3 se seguirá que $S(I_2) \subset I_1$ donde $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Como que I_2 es $\mathfrak{m}$-primario, entonces $Ass_R\ R/I_2 = \{\mathfrak{m}\}$ y, por lo tanto, tendremos que $S = R$. En particular $0 \in S$, luego $S^{-1}R = 0$, de donde se sigue que $S(I_2) = R$. Por lo tanto $I_1 = R$, lo cual es absurdo. □

3.3 Potencias simbólicas y el functor Ext

El objetivo de esta sección es establecer una primera relación entre las filtraciones ádica, (S)-simbólica y entera asociadas a un ideal I, y ciertos morfismos naturales entre functores Ext. El resultado principal que se establecerá en esta sección es el Lema 3.3.3 que nos caracterizará cuándo ciertos morfismos naturales entre functores Ext son los morfismos nulos. Así, mientras que del Lema 3.2.3 obtendremos caracterizaciones de los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales en términos de la cohomología local, del Lema 3.3.3 deduciremos caracterizaciones homológicas de los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales mediante el uso del functor Ext. La clave de la demostración del Lema 3.3.3 son propiedades básicas del functor Ext y el Lema 3.3.2 (que nos da un criterio homológico para la anulación de un módulo finito generado y de longitud finita).

A diferencia de la sección anterior, los resultados que obtendremos no se establecerán para anillos noetherianos arbitrarios pues, la necesidad de usar el Lema 3.3.2 para su demostración nos conducirá a trabajar con anillos para los que exista un módulo finito generado, de dimensión inyectiva finita, y maximal Cohen-Macaulay (es decir, un módulo Cohen-Macaulay con dimensión de Krull la dimensión del anillo). Empecemos, pues, recordando algunos aspectos relativos a la existencia de tales módulos.

La existencia de módulos finito generados de dimensión inyectiva finita está garantizada en los anillos Cohen-Macaulay pues se tiene que, un anillo noetheriano R es Cohen-Macaulay si y sólo si existe un R-módulo finito generado N de dimensión inyectiva finita, (Conjetura de Bass, [7, Cor. 9.6.2]). Mientras que la condición maximal Cohen-Macaulay se puede garantizar, por ejemplo, para el módulo canónico pues [7, (3.3.1)], si N es un R-módulo finito generado sobre un anillo local Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$, entonces N es el módulo canónico de R si y sólo si N es maximal Cohen-Macaulay, de dimensión inyectiva finita y tal que $\operatorname{rank}_k \operatorname{Ext}_R^d(k, N) = 1$ (donde $k = R/\mathfrak{m}$ es el cuerpo residuo de R).

Así, la existencia de un módulo finito generado N maximal Cohen-Macaulay y de dimensión inyectiva finita sobre un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ se puede garantizar, por ejemplo, si R es anillo Cohen-Macaulay con módulo canónico y, en tal caso, podemos escoger $N = K_R$ el módulo canónico de R, (por ejemplo, $N = R$ si R es Gorenstein). En general [61], la existencia de un tal N no implica la existencia del módulo canónico K_R.

Comentario 3.3.1 Usaremos la siguiente notación. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. En tal situación, si existe, notaremos por N_R a cualquier R-módulo finito generado maximal Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita. Y si R es un anillo noetheriano entonces, si existe, notaremos por N_R cualquier R-módulo finito generado de dimensión inyectiva finita tal que $(N_R)_\mathfrak{p}$ sea un $R_\mathfrak{p}$-módulo maximal Cohen-Macaulay para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. (Por ejemplo, si R es Cohen-Macaulay con módulo canónico K_R, entonces podemos escoger $N_R = K_R$. En particular, si R es Gorenstein entonces podemos escoger $N_R = R$).

Lema 3.3.2 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano d-dimensional, y sean M y N dos R-módulos finito generados no nulos. En tal situación se tiene que:*

(a) $\operatorname{Ext}_R^i(M, N) = 0$ *para todo* $i < \operatorname{depth}_\mathfrak{m} N - \dim M$.

(b) Supongamos que N tiene dimensión inyectiva finita. En tal situación, $\operatorname{depth}_\mathfrak{m} R = \operatorname{depth}_\mathfrak{m} M + \sup\{i \geq 0$ *tales que* $\operatorname{Ext}_R^i(M, N) \neq 0\}$.

(c) Supongamos que N tiene dimensión inyectiva finita y que M es de longitud finita. En tal situación, $\operatorname{Ext}_R^d(M, N) = 0$ *si y sólo si* $M = 0$.

Demostración: El apartado (a) es un resultado de Ischebeck [32, Th. 17.1], y (b) se demuestra en [43]. Veamos (c). El recíproco es obvio. Demostremos el directo. En primer lugar obsérvese que, por hipótesis, N es un R-módulo finito generado de dimensión inyectiva finita, luego R es Cohen-Macaulay (Conjetura de Bass, [7, Cor. 9.6.2]) y, por lo tanto, $\operatorname{depth}_\mathfrak{m} R = d$. Supongamos que $M \neq 0$. Entonces tendremos que $\emptyset \neq Ass_R\ M \subset Supp\ M \subset \{\mathfrak{m}\}$. Luego $\operatorname{depth}_\mathfrak{m} M = 0$ de donde, aplicando (b) se sigue que $\operatorname{Ext}_R^d(M, N) \neq 0$. $\square$

Lema 3.3.3 *Sean $I_2 \subset I_1$ ideales de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R un R-módulo finito generado maximal Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $S(I_2) \subset I_1$.

(ii) $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I_1$.

(iii) Existe un ideal J de R con $I_2 \subset J \subset I_1$ tal que $\mathrm{Ext}^d_R(R/J, N_R) = 0$.

(iv) El morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, N_R)$ es el morfismo cero.

Más aún, se puede tomar como sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Luego, en el caso particular en que $ht(I_2) = \dim R - 1$, entonces se puede tomar como sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I_2)\}$.

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) vale en general y ya se ha demostrado en el Lema 3.2.3. Veamos, pues, la equivalencia entre las condiciones (i), (iii) y (iv).

Demostremos, en primer lugar, que (i) implica (iii). Supongamos (i). Sea J el ideal de R definido por $J = S(I_2)$. Obviamente $I_2 \subset J$ mientras que, por hipótesis, tenemos que $J \subset I_1$. Luego $I_2 \subset J \subset I_1$. Veamos que $\mathrm{Ext}^d_R(R/J, N_R) = 0$. Como que $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$, entonces tendremos que J es un ideal de R tal que $\mathfrak{m} \notin Ass_R\ R/J$. Luego $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}\, R/J > 0$ y, por lo tanto, $\mathrm{Ext}^d_R(R/J, N_R) = 0$ (Lema 3.3.2.(b)), como queríamos demostrar.

Veamos que (iii) implica (iv), (implicación que es un hecho general que no depende de las hipótesis del lema). Supongamos que existe un ideal J de R con $I_2 \subset J \subset I_1$ tal que $\mathrm{Ext}^d_R(R/J, N_R) = 0$. Como que $I_2 \subset J \subset I_1$, entonces podemos factorizar el morfismo natural $R/I_2 \to R/I_1$ por $R/I_2 \to R/J \to R/I_1$. Aplicando el functor $\mathrm{Ext}^d_R(\cdot, N_R)$ tendremos que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, N_R)$ factoriza por $\mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/J, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, N_R)$. Luego es el morfismo nulo.

Para concluir la demostración del lema veamos que (iv) implica (i). Supongamos (iv) y demostremos (i). Consideremos el sistema multiplicativo S de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\, R/I_2$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. De nuestra elección de S se sigue que $S \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$. Para finalizar la demostración hemos de ver que $S(I_2) \subset I_1$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & I_1 \cap S(I_2)/I_2 & \to & I_1/I_2 & \to & I_1 + S(I_2)/S(I_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & S(I_2)/I_2 & \to & R/I_2 & \to & R/S(I_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & I_1 + S(I_2)/I_1 & \to & R/I_1 & \to & R/I_1 + S(I_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Del Lema 3.3.2.(b) se sigue que $\mathrm{Ext}^{d+1}_R(\cdot, N_R) = 0$. Luego, aplicando el functor $\mathrm{Ext}^*_R(\cdot, N_R)$ a este diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas, obtendremos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \leftarrow & \mathrm{Ext}^d_R(S(I_2)/I_2, N_R) & \leftarrow & \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, N_R) & \leftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \leftarrow & \mathrm{Ext}^d_R(I_1 + S(I_2)/I_1, N_R) & \leftarrow & \mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, N_R) & \leftarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \leftarrow & \mathrm{Ext}^{d-1}_R(I_1 \cap S(I_2)/I_2, N_R) & \leftarrow & \cdots & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Sea $\mathfrak{p} \in V(I_2) - \{\mathfrak{m}\}$. De la definición de S se sigue que $(S(I_2))_\mathfrak{p} = (I_2)_\mathfrak{p}$. Luego $I_1 \cap S(I_2)/I_2$ es un R-módulo finito generado con soporte en el maximal y, por lo tanto, es un R-módulo de dimensión de Krull $\dim(I_1 \cap S(I_2)/I_2) = 0$. Por otro lado, como que N_R es maximal Cohen-Macaulay, en particular tendremos que $\operatorname{depth}_\mathfrak{m} N_R = d$. Luego, aplicando el Lema 3.3.2.(a) se sigue que $\mathrm{Ext}^{d-1}_R(I_1 \cap S(I_2)/I_2, N_R) = 0$. De donde, de la exactitud de la primera columna del diagrama conmutativo se sigue que el morfismo $\mathrm{Ext}^d_R(I_1 + S(I_2)/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(S(I_2)/I_2, N_R)$ es inyectivo.

Por otro lado, por hipótesis, el morfismo $\mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, N_R)$ es el morfismo cero. Luego, de la exactitud del diagrama conmutativo tendremos que también lo será el morfismo $\mathrm{Ext}^d_R(I_1 + S(I_2)/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(S(I_2)/I_2, N_R)$.

Así tenemos que $\mathrm{Ext}^d_R(I_1 + S(I_2)/I_1, N_R) = 0$.

Para un ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I_2) - \{\mathfrak{m}\}$ tenemos que $(S(I_2))_\mathfrak{p} = (I_2)_\mathfrak{p} \subset (I_1)_\mathfrak{p}$. Luego el R-módulo $I_1 + S(I_2)/I_1$ es un R-módulo finito generado de longitud finita. Como que $\mathrm{Ext}^d_R(I_1 + S(I_2)/I_1, N_R) = 0$ entonces, aplicando el Lema 3.3.2.(c) se sigue que, $I_1 + S(I_2)/I_1 = 0$. Por lo tanto $S(I_2) \subset I_1$, con lo que se concluye la demostración de (iv) implica (i). Luego las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) son equivalentes.

De la demostración de la equivalencia entre las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) se sigue que si se verifica la condición (i) para un sistema multiplicativo, entonces también se verificará para el sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2 \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. En el caso particular en que $ht(I_2) = \dim R - 1$, entonces $M(I_2) \subset Ass_R\ R/I_2 \subset V(I_2) = M(I_2) \cup \{\mathfrak{m}\}$. Luego S es el sistema multiplicativo definido por el complementario de los primos minimales de I_2, con lo que se concluye la demostración del lema. □

Comentario 3.3.4 Obsérvese que del Comentario 3.2.2 se sigue que $I_2 : \langle \mathfrak{m} \rangle$ es el más pequeño ideal de R verificando (iii).

Comentario 3.3.5 Veamos una demostración alternativa del Lema 3.3.3 en el caso en que $(R, \mathfrak{m})$ sea un anillo Cohen-Macaulay con módulo canónico K_R. Como en la demostración anterior, el problema reside en demostrar que (iv) implica (i). Supongamos que $(R, \mathfrak{m})$ es Cohen-Macaulay con módulo canónico K_R. En tal situación tendremos que el módulo N_R descompone en una suma directa finita de copias isomorfas al módulo canónico K_R (véase [56]). Por lo tanto, en este caso, basta con demostrar que si el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I_1, K_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I_2, K_R)$ es el morfismo cero, entonces existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $S(I_2) \subset I_1$. Sea $E = E(R/\mathfrak{m})$ la envolvente inyectiva del cuerpo residual de R. Como que el dual de Matlis $(.)^\vee = \mathrm{Hom}_R(\,.\,, E)$

es un functor fiel entonces tendremos que, $\mathrm{Ext}_R^d(R/I_1, K_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I_2, K_R)$ es el morfismo cero si y sólo si $\mathrm{Ext}_R^d(R/I_2, K_R)^\vee \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I_1, K_R)^\vee$ es el morfismo cero. Por otro lado, como que existe K_R entonces R es un anillo Cohen-Macaulay cociente de un Gorenstein [7, Th. 3.3.6]. Luego se tiene un isomorfismo functorial $\mathrm{Ext}_R^d(\cdot, K_R)^\vee \cong H_{\mathfrak{m}}^0(\cdot)$, [7, Cor. 3.5.9]. Luego $\mathrm{Ext}_R^d(R/I_1, K_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I_2, K_R)$ es el morfismo cero si y sólo si $H_{\mathfrak{m}}^0(R/I_2) \to H_{\mathfrak{m}}^0(R/I_1)$ es el morfismo cero. Aplicando el Lema 3.2.3 se concluye la demostración.

Como corolario del Lema 3.3.3 se tiene que:

Corolario 3.3.6 *Sean $I_2 \subset I_1$ dos ideales $\mathfrak{m}$-primarios de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R un R-módulo finito generado maximal Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita. En tal situación,* $\mathrm{Ext}_R^d(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I_2, N_R)$ *nunca es el morfismo cero.*

Demostración: Supongamos que $\mathrm{Ext}_R^d(R/I_1, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I_2, N_R)$ es el morfismo cero. En tal situación, del Lema 3.3.3 se seguirá que $S(I_2) \subset I_1$ donde $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass_R\ R/I_2$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Como que I_2 es $\mathfrak{m}$-primario, entonces $Ass_R\ R/I_2 = \{\mathfrak{m}\}$ y, por lo tanto, tendremos que $S = R$. En particular $0 \in S$, luego $S^{-1}R = 0$, de donde se sigue que $S(I_2) = R$. Por lo tanto $I_1 = R$, lo cual es absurdo. □

3.4 Equivalencia de topologías

Las nociones de $t, \bar{t}$-(S)-ideal tienen su origen en la comparación de las topologías definidas por las filtraciones ádica, (S)-simbólica y entera. Así, estas nociones se pueden entender dentro del contexto general estudiado en el Capítulo 1 y, por lo tanto, tendremos unas primeras caracterizaciones de cuándo un ideal es un $t, \bar{t}$-(S)-ideal al aplicar los resultados expuestos en las secciones 1.1 y 1.2 (y, para los primos t-ideales, al aplicar los resultados expuestos en la Sección 1.7). Para ello basta con tener presente que un ideal I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) si y sólo si la I-filtración $\{S(I^n)\}_{n\geq 0}$ es una t-I-filtración (resp. una $\bar{t}$-I-filtración). El objetivo de esta sección es dar nuevas caracterizaciones de los $t, \bar{t}$-(S)-ideales.

- **Caracterizaciones vía alturas y dimensiones:**

Teorema 3.4.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *I es un t-(S)-ideal.*

(ii) $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in E(I)\}$.

(iii) $\dim R_{\mathfrak{q}}^*/(IR_{\mathfrak{q}}^* + z) > 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

(iv) $\dim R^*_{\mathfrak{q}}/(IR^*_{\mathfrak{q}}+z) > 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in E(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostración: La equivalencia entre (i) y (ii) la demuestra McAdam [35, Th. 1.2]. Obviamente (iii) implica (iv). Además, de la definición de $E(I)$ se sigue que, $\mathfrak{p} \in E(I)$ si y sólo si existe $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{p}}$ con $ht(IR^*_{\mathfrak{p}} + z) = \dim R^*_{\mathfrak{p}}$ (pues un ideal de un anillo local tiene al maximal como primo minimal si y sólo si el ideal tiene altura la dimensión del anillo). Es decir, si y sólo si $\dim R^*_{\mathfrak{p}}/(IR^*_{\mathfrak{p}}+z) = 0$. Luego las condiciones (ii), (iii) y (iv) son equivalentes. □

Teorema 3.4.2 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *I es un* $\bar{t}$*-(S)-ideal.*

(ii) $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \overline{E}(I)\}$.

(iii) $\dim R^*_{\mathfrak{q}}/(IR^*_{\mathfrak{q}}+z) > 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo minimal* $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iv) $\dim R^*_{\mathfrak{q}}/(IR^*_{\mathfrak{q}}+z) > 0$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \overline{E}(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo minimal* $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostración: McAdam [35, Th. 1.5] demuestra la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). Además, de la definición de $\overline{E}(I)$ se sigue que, $\mathfrak{p} \in \overline{E}(I)$ si y sólo si existe $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{p}}$ con $ht(IR^*_{\mathfrak{p}}+z) = \dim R^*_{\mathfrak{p}}$ si y sólo si existe $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{p}}$ tal que $\dim R^*_{\mathfrak{p}}/(IR^*_{\mathfrak{p}}+z) = 0$. De donde se sigue la equivalencia entre las condiciones (ii), (iii) y (iv). □

Teorema 3.4.3 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano* $(R, \mathfrak{m})$. *En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Existe un sistema multiplicativo S de R con* $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ *tal que I es un t-(S)-ideal.*

(ii) $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ *es una t-I-filtración.*

(iii) $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ *para todo primo asociado* $z \in Ass\ R^*$.

Y, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$, *entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:*

(iv) *I es un t-ideal.*

Demostración: Antes de demostrar el teorema recordemos cómo podemos interpretar la filtración $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ como una filtración simbólica. Para ello consideremos el sistema multiplicativo T de R definido por $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Del Lema 2.1.5 se sigue que $T(I^n) = I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle$ para todo natural $n \geq 0$. Luego, por definición tendremos que, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una t-I-filtración (resp. una $\bar{t}, s, \bar{s}$-I-filtración) si y sólo si I es un t-(T)-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-(T)-ideal).

Demostremos el teorema.

Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S)-ideal. Luego para todo natural

n existirá un natural m tal que $S(I^m) \subset I^n$. Obviamente podemos suponer que $m \geq n$. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset I^n = I_1$ tendremos que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I^n$. Luego, para todo natural n existe un natural m tal que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I^n$. Es decir, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una t-I-filtración. Luego (i) implica (ii).

Veamos que (ii) implica (iii). Sea T el sistema multiplicativo de R definido por $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Por hipótesis tenemos que $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una t-I-filtración. Luego I es un t-(T)-ideal. Además, de la definición de T se sigue que $\mathfrak{m} \cap T \neq \emptyset$. Luego, aplicando el Teorema 3.4.1 a $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ tendremos que $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$, como queríamos demostrar.

Demostremos que (iii) implica (i). Consideremos el sistema multiplicativo S de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in E(I)\}$. Del Teorema 3.4.1 se sigue que I es un t-(S)-ideal. Además, por hipótesis se tiene que, para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ el ideal $IR^* + z$ no es $\mathfrak{m}^*$-primario. Luego $\mathfrak{m} \notin E(I)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$.

Luego, las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes. Demostremos la equivalencia con (iv).

De la demostración de la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii) se sigue que siempre podemos tomar como sistema multiplicativo S el sistema $R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. En el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$ entonces $M(I) \subset V(I) = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}$ y, por lo tanto, podemos tomar como sistema multiplicativo S el complementario de los primos minimales de I, de donde se sigue la equivalencia con (iv). □

Teorema 3.4.4 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(ii) $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{t}$-I-filtración.

(iii) $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$.

Y, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iv) I es un $\bar{t}$-ideal.

Demostración: Demostremos que (i) implica (ii). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal. Luego para todo n existe un $m \geq n$ tal que $S(I^m) \subset \overline{I^n}$. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset \overline{I^n} = I_1$ tendremos que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Luego tenemos que, para todo natural n existe un natural m tal que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Es decir, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{t}$-I-filtración, como queríamos demostrar.

Veamos que (ii) implica (iii). Por hipótesis tenemos que $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{t}$-I-filtración. Luego I es un $\bar{t}$-(T)-ideal donde T es el sistema multiplicativo $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. De la definición de T se sigue que $\mathfrak{m} \cap T \neq \emptyset$. Luego, aplicando el Teorema 3.4.2 a $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ tendremos que $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$.

Demostremos que (iii) implica (i). Sea S de el sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \overline{E}(I)\}$. Del Teorema 3.4.2 se sigue que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal. Por otro lado, por hipótesis se tiene que para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$ el ideal $IR^* + z$ no es $\mathfrak{m}^*$-primario. Luego $\mathfrak{m} \notin \overline{E}(I)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$.

Además, de la demostración se sigue que podemos tomar como sistema multiplicativo S el sistema $R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Luego, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$ entonces podemos tomar como sistema multiplicativo S el complementario de los primos minimales de I. De donde se sigue la equivalencia con (iv). □

Como corolarios de estos teoremas se tiene que:

Corolario 3.4.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) si y sólo si $M(I) = E(I)$ (resp. $M(I) = \overline{E}(I)$).*

Demostración: En este caso tenemos $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Notemos por $\Gamma(I)$ cualquiera de los conjuntos de primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$. Como siempre se tiene que $M(I) \subset \Gamma(I)$ entonces, $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I)\}$ si y sólo si $M(I) = \Gamma(I)$. Aplicando el Teorema 3.4.1 (resp. el Teorema 3.4.2) se concluye la demostración. □

Corolario 3.4.6 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que $Ass\ R_{\mathfrak{p}}^* = Min\ R_{\mathfrak{p}}^*$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. En tal situación, I es un t-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.*

Demostración: Basta con aplicar la equivalencia entre las condiciones (i) y (iii) de los teoremas 3.4.1 y 3.4.2. □

Corolario 3.4.7 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que $R_{\mathfrak{p}}^*$ tiene un único primo minimal para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. En tal situación se tiene que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.*

Demostración: Basta con aplicar la equivalencia entre las condiciones (i) y (iii) del Teorema 3.4.2. □

Y, como casos particulares de los corolarios anteriores tendremos que, si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces :

(a) Si R es un anillo localmente unmixed (por ejemplo un anillo Cohen-Macaulay) entonces, I es un t-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{t}$-(S)-ideal. (Corolario 3.4.6).

(b) Si R es un anillo localmente analíticamente no ramificado entonces, I es un t-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{t}$-(S)-ideal. (Corolario 3.4.6).

(c) Si R es un anillo localmente analíticamente primario (es decir, si para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el ideal cero del anillo local $R_{\mathfrak{p}}^*$ es un ideal primario), entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R los conjuntos $Ass\ R_{\mathfrak{p}}^*$ y $Min\ R_{\mathfrak{p}}^*$ coinciden y tienen un único elemento. Por lo tanto, todo ideal I de R es un t-(S)-ideal y un $\bar{t}$-(S)-ideal. (Corolarios 3.4.6 y 3.4.7).

(d) Si R es un anillo tal que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local $R_{\mathfrak{p}}^*$ es un dominio (por ejemplo, si R es un anillo regular, por ejemplo, si R es un anillo de polinomios sobre un cuerpo), entonces R es localmente analíticamente primario y, por lo tanto, todo ideal I de R es un t-(S)-ideal y un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(e) Si $(R, \mathfrak{m})$ es local noetheriano y si I es un ideal de altura $ht(I) = \dim R - 1$ entonces, I es un t-ideal si y sólo para todo primo asociado de R^* existe un primo minimal de IR^* que lo contiene, (Teorema 3.4.3). En particular, un ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura $ht(\mathfrak{p}) = \dim R - 1$ de un anillo local noetheriano completo $(R, \mathfrak{m})$ es un t-ideal si y sólo si $\mathfrak{p}$ contiene todos los primos asociados de R.

(f) Si $(R, \mathfrak{m})$ es local noetheriano y si I es un ideal de altura $ht(I) = \dim R - 1$ entonces, I es un $\bar{t}$-ideal si y sólo si para todo primo minimal de R^* existe un primo minimal de IR^* que lo contiene, (Teorema 3.4.4). En particular, un ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura $ht(\mathfrak{p}) = \dim R - 1$ de un anillo local noetheriano completo $(R, \mathfrak{m})$ es un $\bar{t}$-ideal si y sólo si $\mathfrak{p}$ contiene todos los primos minimales de R.

Además, como corolario, tenemos el siguiente resultado relativo al comportamiento de los $t, \bar{t}$-(S)-ideales por la localización, resultado que usaremos, repetidamente, en los siguientes apartados de esta sección. (Véase, también, proposiciones 4.1.3 y 4.1.4).

Corolario 3.4.8 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal).

(ii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ existe un sistema multiplicativo no trivial $S_{(\mathfrak{q})}$ del anillo local noetheriano $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ tal que el ideal $I_\mathfrak{q}$ es un t-$(S_{(\mathfrak{q})})$-ideal (resp. un $\bar{t}$-$(S_{(\mathfrak{q})})$-ideal).

Demostración: Por el Teorema 3.4.1 (resp. por el Teorema 3.4.2) tenemos que, I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) si y sólo si $\dim R^*_\mathfrak{q}/(IR^*_\mathfrak{q} + z) > 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*_\mathfrak{q}$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*_\mathfrak{q}$). Luego, aplicando el Teorema 3.4.3 (resp. el Teorema 3.4.4) al ideal $I_\mathfrak{q}$ del anillo local noetheriano $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$, se concluye la demostración. □

• Caracterizaciones vía grupos 0-ésimos de cohomología local:

Teorema 3.4.9 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S)-ideal.

(ii) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $H^0_\mathfrak{m}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{m}(R/I^n)$ es el morfismo cero.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos (i). Entonces, para todo natural n existirá un natural m tal que $S(I^m) \subset I^n$. Obviamente podemos suponer que $m \geq n$. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset I^n = I_1$, tendremos que el $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n)$ es el morfismo cero. Luego (i) implica (ii).

Recíprocamente. Demostremos que (ii) implica (i). Sea n un número natural. Por hipótesis existe un $m \geq n$ tal que $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n)$ es el morfismo cero. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset I^n = I_1$, se sigue que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I^n$. Luego, para todo natural n existe un natural m tal que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I^n$. Es decir, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una t-I-filtración. Aplicando el Teorema 3.4.3 se sigue que existirá un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S)-ideal, como queríamos demostrar. □

Teorema 3.4.10 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(ii) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^m}) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ es el morfismo cero.

(iii) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ es el morfismo cero.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos (i). Entonces, para todo natural n existirá un natural m (podemos suponer que $m \geq n$) tal que $S(I^m) \subset \overline{I^n}$. Luego tendremos que $S(\overline{I^m}) \subset \overline{I^n}$, [35, Th. 1.5]. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = \overline{I^m} \subset \overline{I^n} = I_1$ se sigue que $H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^m}) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ es el morfismo cero. Luego (i) implica (ii).

Obviamente se tiene que (ii) implica (iii) pues como que $R/I^m \to R/\overline{I^n}$ factoriza por $R/I^m \to R/\overline{I^m} \to R/\overline{I^n}$, entonces podremos factorizar $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ por $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^m}) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$.

Para concluir la demostración veamos que (iii) implica (i). Sea n un número natural. Por hipótesis existe un $m \geq n$ tal que el morfismo $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ es nulo. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset \overline{I^n} = I_1$ se sigue que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Luego, para todo natural n existe un natural m tal que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Es decir, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{t}$-I-filtración. Aplicando el Teorema 3.4.4 se sigue que existirá un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal, como queríamos demostrar. □

Los dos teoremas anteriores son resultados locales. Globalicemos estos teoremas. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ y para todo natural n tenemos que $Supp\ H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \subset V(\mathfrak{q})$. Veamos que las globalizaciones de los teoremas 3.4.9 y 3.4.10 nos dan condiciones de anulación sobre $\mathfrak{q}$.

Teorema 3.4.11 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un t-(S)-ideal.

(ii) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos (i). Como que I es un t-(S)-ideal entonces tendremos que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, existirá un sistema multiplicativo no trivial del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ para el cual el ideal $I_\mathfrak{q}$ será un t-ideal (Corolario 3.4.8). Sea $n \geq 0$ un natural y sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 3.4.9 al ideal $I_\mathfrak{q}$ del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ se seguirá que, existirá un natural $m(n, \mathfrak{q}) \geq n$ (que depende de n y de $\mathfrak{q}$), tal que el morfismo natural $H^0_\mathfrak{q}(R/I^{m(n,\mathfrak{q})}) \to H^0_\mathfrak{q}(R/I^n)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Por otro lado, si $\mathfrak{q} \notin A(I) = \bigcup_{j\geq 0} Ass_R\ R/I^j$, entonces $\mathfrak{q} \notin Ass_R\ R/I^n$, luego $\operatorname{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(R/I^n)_\mathfrak{q} > 0$ y, por lo tanto, tendremos que $H^0_\mathfrak{q}(R/I^n)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Así, si $\mathfrak{q} \notin A(I)$ entonces podemos escoger $m(n, \mathfrak{q}) = n$. De la finitud del conjunto de ideales primos $A(I)$ se sigue que podemos considerar el natural $m \geq n$ (que únicamente depende de n) definido por $m = \max\{m(n, \mathfrak{q})$ donde $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\}$. Así tendrenos que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_\mathfrak{q}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{q}(R/I^n)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Con lo que se concluye la demostración de esta implicación.

Recíprocamente, demostremos que (ii) implica (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis tenemos que para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo $H^0_\mathfrak{q}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{q}(R/I^n)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Luego, aplicando el Teorema 3.4.9 al anillo local noetheriano $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ tendremos que, existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_\mathfrak{q}$ para el cual $I_\mathfrak{q}$ será un t-ideal. De donde, aplicando el Corolario 3.4.8 se seguirá que I es un t-(S)-ideal, como queríamos demostrar. □

Teorema 3.4.12 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(ii) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^m}) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

(iii) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_\mathfrak{q}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

Demostración: Veamos que (i) implica (ii). Supongamos (i). Como que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal entonces tendremos que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, existirá un sistema multiplicativo no trivial del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ para el cual el ideal $I_\mathfrak{q}$ será un $\bar{t}$-ideal (Corolario 3.4.8). Sea $n \geq 0$ un natural y sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 3.4.10 al ideal $I_\mathfrak{q}$ del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ se seguirá que, existirá un natural $m(n, \mathfrak{q}) \geq n$ (que depende de n y de $\mathfrak{q}$), tal que el morfismo $H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^{m(n,\mathfrak{q})}}) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. De manera análoga a la demostración del teorema anterior, aquí tendremos que si $\mathfrak{q} \notin \overline{A}^*(I) = \bigcup_{j\geq 0} Ass_R\ R/\overline{I^j}$, entonces $\mathfrak{q} \notin Ass_R\ R/\overline{I^n}$, luego $\operatorname{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})_\mathfrak{q} > 0$ y, por lo tanto $H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Así, si $\mathfrak{q} \notin \overline{A}^*(I)$ entonces podemos escoger $m(n, \mathfrak{q}) = n$. De la finitud el conjunto de ideales primos $\overline{A}^*(I)$ se sigue que podemos considerar el natural $m \geq n$ (que únicamente depende de n) definido por $m = \max\{m(n, \mathfrak{q})$ donde $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\}$. Luego, para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ tendremos que el morfismo natural $H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^m}) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Con lo que se concluye la demostración de esta implicación.

Obviamente (ii) implica (iii) pues el morfismo $H^0_\mathfrak{q}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$ factoriza por $H^0_\mathfrak{q}(R/I^m) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^m}) \to H^0_\mathfrak{q}(R/\overline{I^n})$.

Veamos que (iii) implica (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis, para todo natural n existe un $m \geq n$ tal que el morfismo $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^m) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Aplicando el Teorema 3.4.10 al anillo local noetheriano $(R_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})$ tendremos que, existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_{\mathfrak{q}}$ para el cual $I_{\mathfrak{q}}$ será un $\bar{t}$-ideal. De donde, aplicando el Corolario 3.4.8 se seguirá que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal, como queríamos demostrar. □

• Caracterizaciones vía el functor Ext:

Teorema 3.4.13 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S)-ideal.

(ii) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(iii) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero.

(iv) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero.

(v) Para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^m}, N_R)$ es el morfismo cero.

Demostración: Demostremos la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). Por hipótesis existe un R-módulo finito generado de dimensión inyectiva finita. Luego R es Cohen-Macaulay y, en particular, localmente unmixed. Así tendremos que para un ideal arbitrario I de R, y para un sistema multiplicativo cualquiera S de R, el ideal I es un t-(S)-ideal si y sólo si es un $\bar{t}$-(S)-ideal (página 63 apartado (a)). Luego, en particular, las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

Demostremos que (i) implica (iii). Supongamos (i). Entonces, para todo natural n existirá un natural $m \geq n$ tal que $S(I^m) \subset I^n$. Aplicando el Lema 3.3.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset I^n = I_1$ tendremos que $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero. Luego (i) implica (iii).

Veamos que (ii) implica (v). Por hipótesis, para todo natural n existirá un natural $m \geq n$ tal que $S(\overline{I^m}) \subset \overline{I^n}$, [35, Th. 1.5]. Aplicando el Lema 3.3.3 a los ideales $I_2 = \overline{I^m} \subset \overline{I^n} = I_1$ se sigue que $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^m}, N_R)$ es el morfismo cero. Luego (ii) implica (v).

Obviamente tenemos que (iii) implica (iv) y que (v) implica (iv) pues el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ se puede factorizar por $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ y por $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^m}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$.

Para concluir la demostración basta con demostrar que (iv) implica (ii). Sea n un número natural. Por hipótesis existe un natural $m \geq n$ tal que $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero. Aplicando el Lema 3.3.3 a los ideales $I_2 = I^m \subset \overline{I^n} = I_1$ tendremos que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Luego, para todo natural n existe un natural m tal que $I^m : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Es decir, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{t}$-I-filtración.

Aplicando el Teorema 3.4.4 se sigue que existirá un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal, como queríamos demostrar. □

El teorema anterior corresponde al caso local. Globalicemos este teorema.

Teorema 3.4.14 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un t-(S)-ideal.

(ii) I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(iii) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(iv) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(v) Para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^m}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) ya se ha justificado en la demostración del teorema anterior.

Obviamente se tiene que (iii) implica (iv) y que (v) implica (iv) pues si $m \geq n$ entonces tendremos que $I^m \subset I^n \subset \overline{I^n}$ y que $I^m \subset \overline{I^m} \subset \overline{I^n}$. De donde se sigue que el morfismo $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$ factoriza por $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$, y por $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^m}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$.

Veamos que (iv) implica (ii). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis, para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que $\mathrm{Ext}^{ht(\mathfrak{q})}_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^{ht(\mathfrak{q})}_R(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Aplicando el Teorema 3.4.13 al anillo local $ht(\mathfrak{q})$-dimensional $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ y al $R_\mathfrak{q}$-módulo maximal Cohen-Macaulay $(N_R)_\mathfrak{q}$ de dimensión inyectiva finita se sigue que, existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_\mathfrak{q}$ para el cual $I_\mathfrak{q}$ es un $\bar{t}$-ideal. De donde, aplicando el Corolario 3.4.8 se seguirá que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal, como queríamos demostrar.

Para concluir la demostración hemos de ver que (i) implica (iii) y que (ii) implica (v).

Supongamos (i) (resp. supongamos (ii)). Como que I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) entonces, por el Corolario 3.4.8 tendremos que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, existirá un sistema multiplicativo no trivial del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ para el cual el ideal $I_\mathfrak{q}$ será un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). Sea $n \geq 0$ un natural y sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i \geq ht(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 3.4.13 al ideal $I_\mathfrak{q}$ del anillo local i-dimensional $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ y al $R_\mathfrak{q}$-módulo maximal Cohen-Macaulay $(N_R)_\mathfrak{q}$ de dimensión inyectiva finita, se seguirá que existe un natural $m(n, \mathfrak{q}) \geq n$ (que depende de n y de $\mathfrak{q}$), tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{m(n,\mathfrak{q})}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ (resp. tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{m(n,\mathfrak{q})}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$). Pero si $\mathfrak{q} \notin A(I)$ (resp. si $\mathfrak{q} \notin \overline{A}^*(I)$), entonces $\mathfrak{q} \notin Ass_R\ R/I^n$

(resp. $\mathfrak{q} \notin Ass_R\ R/\overline{I^n}$), luego $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(R/I^n)_{\mathfrak{q}} > 0$ (resp. $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(R/\overline{I^n})_{\mathfrak{q}} > 0$) y, por lo tanto, tendremos que $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$ (resp. que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$). Así, si $\mathfrak{q} \notin A(I)$ (resp. si $\mathfrak{q} \notin \overline{A}^*(I)$), entonces podemos escoger $m(n, \mathfrak{q}) = n$. Sea $m = \max\{m(n, \mathfrak{q})$ donde $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\} \geq n$, que únicamente depende de n. Luego, para todo $i \geq ht(I)$ tendremos que $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ (resp. que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^m}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$). Con lo que se concluye la demostración del teorema. □

3.5 Equivalencia lineal de topologías

Las nociones de $s, \overline{s}$-(S)-ideal tienen su origen en la comparación lineal de las topologías definidas por las filtraciones ádica, (S)-simbólica y entera. Así, estas nociones se pueden entender dentro del contexto general estudiado en el Capítulo 1 y, por lo tanto, tendremos unas primeras caracterizaciones de cuándo un ideal es un $s, \overline{s}$-(S)-ideal al aplicar los resultados expuestos en la Sección 1.3. Para ello basta con tener presente que un ideal I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal) si y sólo si la I-filtración $\{S(I^n)\}_{n \geq 0}$ es una s-I-filtración (resp. una $\overline{s}$-I-filtración). El objetivo de esta sección es dar nuevas caracterizaciones de los $s, \overline{s}$-(S)-ideales.

- **Caracterizaciones vía dispersión analítica:**

Teorema 3.5.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal.

(ii) $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in U(I)\}$.

(iii) $l((IR^*_{\mathfrak{q}} + z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iv) $l((IR^*_{\mathfrak{q}} + z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo $\mathfrak{q} \in U(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostración: La equivalencia entre (i) y (ii) la demuestra McAdam [35, Cor. 1.3]. Veamos la equivalencia entre las condiciones (ii) y (iii) (análogamente se demuestra la equivalencia entre las condiciones (ii) y (iv)).

Supongamos que no se verifica (ii). Luego existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q} \in U(I)$. Por el Lema 3.1.4 ésto equivale a la existencia de $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in U(IR_{\mathfrak{q}})$. Aplicando el Lema 3.1.6 al anillo local noetheriano $(R_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})$ tendremos que, $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in U(IR_{\mathfrak{q}})$ si y sólo si $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}} \in U(IR^*_{\mathfrak{q}})$. Aplicando ahora el Lema 3.1.5 se sigue que, $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}} \in U(IR^*_{\mathfrak{q}})$ si y sólo si existe $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{q}}$ con $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z \in U((IR^*_{\mathfrak{q}} + z)/z)$.

Como que $(R^*_{\mathfrak{q}}/z, \mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ es un dominio local noetheriano completo, entonces $U((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) = \overline{U}((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z)$ (Lema 3.1.2) y, por lo tanto, del Lema 3.1.8 se seguirá que, $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z \in U((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z)$ si y sólo si $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) = \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$. Así tenemos que, existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q} \in U(I)$ si y sólo si existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y existe $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{q}}$ con $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) = \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$. Es decir, la negación de (ii) es equivalente a la negación de (iii), como queríamos demostrar. □

Teorema 3.5.2 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(ii) $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \overline{U}(I)\}$.

(iii) $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo minimal $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

(iv) $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo minimal $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$.

Demostración: McAdam demuestra en [35, Cor. 1.6] la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). Demostremos la equivalencia entre las condiciones (ii) y (iii) (análogamente se demuestra la equivalencia entre (ii) y (iv)).

Supongamos que no se verifica (ii), es decir que existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$. Por el Lema 3.1.4 tendremos que existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in \overline{U}(IR_{\mathfrak{q}})$. Lo cual equivale a la existencia de un primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y a la existencia de $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$ con $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z \in \overline{U}((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z)$, (Lema 3.1.5 y Lema 3.1.6). Aplicando el Lema 3.1.8 al dominio local noetheriano completo $(R^*_{\mathfrak{q}}/z, \mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ tendremos que, $\mathfrak{q}R^*_{\mathfrak{q}}/z \in \overline{U}((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z)$ si y sólo si $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) = \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$. Luego, existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y tal que $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ si y sólo si existe $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y existe $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{q}}$ con $l((IR^*_{\mathfrak{q}}+z)/z) = \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$. Es decir, la negación de (ii) es equivalente a la negación de (iii), como queríamos demostrar. □

Teorema 3.5.3 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un s-(S)-ideal.

(ii) $\{I^n : \langle\mathfrak{m}\rangle\}_{n\geq 0}$ es una s-I-filtración.

(iii) $l((IR^*+z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$.

Y, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iv) I es un s-ideal.

Demostración: Veamos que (i) implica (ii). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un s-(S)-ideal. Luego existe un natural k tal que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ para todo n. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^{n+k} \subset I^n = I_1$

tendremos que $I^{n+k} : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset I^n$. Luego, por definición, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una s-I-filtración, como queríamos demostrar.

Veamos que (ii) implica (iii). Sea T el sistema multiplicativo de R definido por $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Como que $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una s-I-filtración, entonces tendremos que I es un s-(T)-ideal (ver la demostración del Teorema 3.4.3). Además, de la definición de T se sigue que $\mathfrak{m} \cap T \neq \emptyset$. Luego, aplicando el Teorema 3.5.1 a $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ tendremos que $l((IR^*_{\mathfrak{q}} + z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$.

Demostremos que (iii) implica (i). Consideremos el sistema multiplicativo S de R definido por $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in U(I)\}$. Del Teorema 3.5.1 se sigue que I es un s-(S)-ideal. Además, por hipótesis, $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$. Luego, aplicando el Lema 3.1.2 y el Lema 3.1.8 al dominio local noetheriano completo R^*/z, se sigue que $\mathfrak{m}R^*/z \notin U((IR^* + z)/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$. De donde, aplicando los lemas 3.1.5 y 3.1.6 se sigue que $\mathfrak{m} \notin U(I)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$.

Luego, las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes. Demostremos la equivalencia con (iv).

De la demostración de la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii) se sigue que podemos tomar como sistema multiplicativo S el sistema $R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Luego, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$ entonces $M(I) \subset V(I) = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}$, por lo tanto podemos tomar como sistema multiplicativo S el complementario de los primos minimales de I, de donde se sigue la equivalencia con (iv). □

Teorema 3.5.4 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal.

(ii) $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{s}$-I-filtración.

(iii) $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$.

Y, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iv) I es un $\bar{s}$-ideal.

Demostración: Demostremos que (i) implica (ii). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Luego existe un k tal que $S(I^{m+k}) \subset \overline{I^n}$ para todo n. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = I^{n+k} \subset \overline{I^n} = I_1$ tendremos que $I^{n+k} : \langle \mathfrak{m} \rangle \subset \overline{I^n}$. Luego, $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{s}$-I-filtración.

Veamos que (ii) implica (iii). Por hipótesis tenemos que $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0}$ es una $\bar{s}$-I-filtración. Luego I es un $\bar{s}$-(T)-ideal donde T es el sistema multiplicativo $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. De la definición de T se sigue que $\mathfrak{m} \cap T \neq \emptyset$. Luego, aplicando el Teorema 3.5.2 a $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ tendremos que $l((IR^*_{\mathfrak{q}} + z)/z) < \dim(R^*_{\mathfrak{q}}/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$.

Demostremos que (iii) implica (i). Sea S de el sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \overline{U}(I)\}$. Del Teorema 3.5.2 se sigue que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Por otro lado, por hipótesis, $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$. Luego, aplicando el Lema 3.1.8 al dominio local noetheriano completo R^*/z, se sigue que $\mathfrak{m}R^*/z \notin \overline{U}((IR^* + z)/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$. De donde, aplicando los lemas 3.1.5 y 3.1.6 se sigue que $\mathfrak{m} \notin \overline{U}(I)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$, como queríamos demostrar.

Además, de la demostración se sigue que podemos tomar como sistema multiplicativo S el sistema $R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I) \text{ con } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$. Luego, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$ entonces podemos tomar como sistema multiplicativo S el complementario de los primos minimales de I. De donde se sigue la equivalencia con (iv). □

Como corolarios de estos teoremas se tiene que:

Corolario 3.5.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si $M(I) = U(I)$ (resp. $M(I) = \overline{U}(I)$).*

Demostración: En este caso tenemos $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Notemos por $\Gamma(I)$ cualquiera de los conjuntos de primos $U(I)$, $\overline{U}(I)$. Como siempre se tiene que $M(I) \subset \Gamma(I)$ entonces, $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I)\}$ si y sólo si $M(I) = \Gamma(I)$. Aplicando el Teorema 3.5.1 (resp. el Teorema 3.5.2) se concluye la demostración. □

Corolario 3.5.6 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que $Ass\ R_{\mathfrak{p}}^* = Min\ R_{\mathfrak{p}}^*$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. En tal situación, I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.*

Demostración: Basta con aplicar la equivalencia entre las condiciones (i) y (iii) de los teoremas 3.5.1 y 3.5.2. □

Corolario 3.5.7 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(ii) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(iii) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos demostrado que para un ideal $\mathfrak{a}$ de un anillo local noetheriano quasi-unmixed $(A, \mathfrak{n})$ se tiene que, $l((\mathfrak{a}A^* + z)/z) < \dim(A^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ A^*$ si y sólo si $l(\mathfrak{a}) < \dim A$. Entonces, aplicando esta observación y el Teorema 3.5.2 se concluye la demostración del corolario.

Hemos de demostrar, pues, que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed $(A, \mathfrak{n})$ entonces, $l((\mathfrak{a}A^* + z)/z) < \dim(A^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ A^*$ si y sólo si $l(\mathfrak{a}) < \dim A$.

De [33, (4.2)] se sigue que $l((\mathfrak{a}A^* + z)/z) \leq l(\mathfrak{a}A^*) = l(\mathfrak{a})$ para todo $z \in Min\ A^*$, y que se tiene la igualdad para algún $z \in Min\ A^*$. Por otro lado se tiene que $\dim A^*/z = \dim A^* = \dim A$ para todo $z \in Min\ A^*$ (pues $(A, \mathfrak{n})$ es quasi-unmixed). Luego, $l((\mathfrak{a}A^* + z)/z) < \dim(A^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ A^*$ si y sólo si $l(\mathfrak{a}) < \dim A$, como queríamos demostrar. □

Corolario 3.5.8 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal.

(ii) $l(I) < \dim R$.

Demostración: Por el Teorema 3.5.4 tenemos que, existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$. Como que $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano quasi-unmixed entonces tenemos que $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$ si y sólo si $l(I) < \dim R$, como queríamos demostrar. □

Y, como casos particulares de los corolarios anteriores tendremos que, si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces :

(a) Si R es un anillo localmente unmixed (por ejemplo un anillo Cohen-Macaulay) entonces, I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. (Corolarios 3.5.6 y 3.5.7).

(b) Si R es un anillo localmente analíticamente no ramificado entonces, I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. (Corolario 3.5.6).

(c) Si R es un anillo localmente analíticamente primario, entonces I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. (Corolarios 3.5.6 y 3.5.7).

(d) Si R es un anillo tal que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local $R^*_{\mathfrak{p}}$ es un dominio (por ejemplo, si R es un anillo regular, por ejemplo, si R es un anillo de polinomios sobre un cuerpo), entonces R es localmente analíticamente primario y, por lo tanto, I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(e) Si $(R, \mathfrak{m})$ es local noetheriano quasi-unmixed y si I es un ideal de altura $ht(I) = \dim R - 1$ entonces, I es un $\bar{s}$-ideal si y sólo si I es equimúltiple. (Corolario 3.5.7).

(f) Si $(R, \mathfrak{m})$ es local noetheriano unmixed y si I es un ideal de altura $ht(I) = \dim R - 1$ entonces, I es un s-ideal si y sólo si I es equimúltiple. (Corolarios 3.5.6 y 3.5.7).

(g) Si R es localmente quasi-unmixed y si I es un ideal equimúltiple de R (por ejemplo un ideal de la clase principal), entonces tendremos que $l(IR_{\mathfrak{q}}) = ht(IR_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I) - M(I)$. Luego I es un $\bar{s}$-ideal (Corolario 3.5.7) y, por lo tanto, un $\bar{t}$-ideal.

(h) Si R es un anillo localmente unmixed y si I es un ideal equimúltiple de R (por ejemplo un ideal de la clase principal), entonces tendremos que I es un s-ideal (corolarios 3.5.6 y 3.5.7) y, por lo tanto, un t-ideal. Luego I es un $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideal.

Además de estas consecuencias directas se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.5.9 *Sea R un anillo noetheriano. En tal situación se tiene que, R es localmente quasi-unmixed si y sólo si todos los ideales de la clase principal son $\bar{s}$-ideales.*

Demostración: Únicamente nos falta por demostrar que si R es tal que todos sus ideales de la clase principal son $\overline{s}$-ideales, entonces R es localmente quasi-unmixed. Sea I un ideal de R de la clase principal. Aplicando el Teorema de la altura de Krull tendremos que $ht(I) \leq ht(\mathfrak{p}) \leq \mu(I) = ht(I)$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in M(I)$. Como que I es un $\overline{s}$-ideal, entonces tendremos que $M(I) = \overline{U}(I)$ (Corolario 3.5.5). Luego $ht(\mathfrak{p}) = ht(I)$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \overline{U}(I)$, de donde se sigue que R es localmente quasi-unmixed [19, (18.17)], como queríamos demostrar. □

Este corolario está en la misma línea que la caracterización de los anillos Cohen-Macaulay mediante las potencias simbólicas demostrada en la Sección 2 (Ejemplo 2.1.15): *un anillo noetheriano R es Cohen-Macaulay si y sólo si para todo ideal I de R de la clase principal se tiene que $I^n = I^{(n)}$ para todo n*; y que la caracterización de los anillos localmente unmixed dada por Verma [59, Th. 4.3]: *un anillo noetheriano R es localmente unmixed si y sólo si todos los ideales de la clase principal son s-ideales.* En particular, de estos resultados se sigue que :

(a) En un anillo no localmente quasi-unmixed, existen ideales de la clase principal tales que no son $\overline{s}$-ideales.

(b) En un anillo no localmente unmixed existen ideales de la clase principal tales que no son s-ideales. Pero además, estos ideales son $\overline{s}$-ideales si el anillo es localmente quasi-unmixed.

(c) En un anillo no Cohen-Macaulay, existen ideales de la clase principal tales que sus potencias ordinarias y simbólicas no coinciden. Pero además, estos ideales son $\overline{s}$-ideales si el anillo es localmente quasi-unmixed, y son s-ideales si el anillo es localmente unmixed.

Para finalizar este apartado examinemos el siguiente corolario relativo al comportamiento de los $s, \overline{s}$-(S)-ideales por la localización, resultado que usaremos, repetidamente, en los siguientes apartados de esta sección. (Véase, también, proposiciones 4.1.3 y 4.1.4).

Corolario 3.5.10 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

(ii) Para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ existe un sistema multiplicativo no trivial $S_{(\mathfrak{q})}$ del anillo local noetheriano $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ tal que el ideal $I_\mathfrak{q}$ es un s-$(S_{(\mathfrak{q})})$-ideal (resp. un $\overline{s}$-$(S_{(\mathfrak{q})})$-ideal).

Demostración: Por el Teorema 3.5.1 (resp. por el Teorema 3.5.2) tenemos que, I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal) si y sólo si $l((IR^*_\mathfrak{q} + z)/z) < \dim(R^*_\mathfrak{q}/z)$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*_\mathfrak{q}$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*_\mathfrak{q}$). Luego, aplicando el Teorema 3.5.3 (resp. el Teorema 3.5.4) al ideal $I_\mathfrak{q}$ del anillo local noetheriano $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$, se concluye la demostración. □

- **Caracterizaciones vía grupos 0-ésimos de cohomología local:**

Teorema 3.5.11 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un s-(S)-ideal.

(ii) Existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n)$ es el morfismo cero.

Demostración: Para demostrar la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) basta con reescribir la demostración del Teorema 3.4.9 reemplazando m por $n+k$ y usar el Teorema 3.5.3 en lugar del Teorema 3.4.3. □

Teorema 3.5.12 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(ii) Existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ es el morfismo cero.

(iii) $H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n}) = 0$ para todo n.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (iii). Supongamos (i). Entonces por el Lema 2.1.9.(b) tendremos que $S(I^n) \subset \overline{I^n}$ para todo natural n. De donde se sigue que $S(\overline{I^n}) = \overline{I^n}$ para todo natural n, [35, Cor. 1.6]. Aplicando el Lema 3.2.3 a los ideales $I_2 = \overline{I^n} = I_1$ tendremos que $H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n}) = 0$ para todo n. Luego (i) implica (iii).

Obviamente se tiene que (iii) implica (ii).

Para concluir la demostración hemos de ver que (ii) implica (i). Para ello basta con repetir la demostración de (iii) implica (i) del Teorema 3.4.10 reemplazando m por $n+k$ y usar el Teorema 3.5.4 en lugar del Teorema 3.4.4. □

Globalicemos estos teoremas.

Teorema 3.5.13 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal.

(ii) Existe un natural k tal que para todo natural n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Como que I es un s-(S)-ideal entonces, del Corolario 3.5.10 se sigue que existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_{\mathfrak{q}}$ para el que el ideal $I_{\mathfrak{q}}$ es un s-ideal. Luego, aplicando el Teorema 3.5.11 al anillo local noetheriano $(R_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})$ tendremos que existirá un natural $k(\mathfrak{q})$ (que depende de $\mathfrak{q}$), tal que para todo n el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k(\mathfrak{q})}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. Por otro lado, si $\mathfrak{q} \notin A(I)$ entonces podemos considerar $k(\mathfrak{q}) = 0$, (véase la demostración de (i) implica (ii) del Teorema 3.4.11). Sea $k = \max\{k(\mathfrak{q})$ donde $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\} \geq 0$, (que existe y es independiente de $\mathfrak{q}$). Luego, para todo n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, tendremos que el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos (ii) y demostremos (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis, existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Aplicando el Teorema 3.5.11 al anillo local $(R_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})$ tendremos que existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_{\mathfrak{q}}$ para el que el ideal $I_{\mathfrak{q}}$ es un s-ideal. Luego I es un s-(S)-ideal (Corolario 3.5.10). □

Teorema 3.5.14 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un $\bar{s}$-(S)-ideal.

(ii) Existe un natural k tal que para todo n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

(iii) Para todo natural n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, se tiene que $H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$.

Demostración: Veamos que (i) implica (iii). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Como que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal entonces, del Corolario 3.5.10 se sigue que existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_{\mathfrak{q}}$ para el que el ideal $I_{\mathfrak{q}}$ es un $\bar{s}$-ideal. Luego, aplicando el Teorema 3.5.12 al anillo local noetheriano $(R_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})$ tendremos (iii).

Obviamente (iii) implica (ii).

Veamos que (ii) implica (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+k}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/\overline{I^n})$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Luego existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_{\mathfrak{q}}$ para el que el ideal $I_{\mathfrak{q}}$ es un $\bar{s}$-ideal (Teorema 3.5.12). Aplicando ahora el Corolario 3.5.10 se concluye la demostración. □

- **Caracterizaciones vía el functor Ext:**

Teorema 3.5.15 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un s-(S)-ideal.

(ii) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal.

(iii) Existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, N_R)$ es el morfismo cero.

(iv) Existe un natural k tal que para todo n el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, N_R)$ es el morfismo cero.

(v) $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) = 0$ *para todo* n.

Demostración: Demostremos la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). Por hipótesis existe un R-módulo finito generado de dimensión inyectiva finita. Luego R es Cohen-Macaulay y, en particular, localmente unmixed. Así tendremos que para todo ideal I de R y para cualquier sistema multiplicativo S de R, el ideal I es un s-(S)-ideal si y sólo si es un $\overline{s}$-(S)-ideal (página 73 apartado (a)). En particular, las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

Veamos que (i) implica (iii). Por hipótesis tenemos que existe un natural k tal que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ para todo n. Aplicando el Lema 3.3.3 a los ideales $I_2 = I^{n+k} \subset I^n = I_1$ tendremos que el morfismo natural $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, N_R)$ es el morfismo cero. Luego (i) implica (iii).

Veamos que (ii) implica (v). Supongamos (ii). Entonces, por el Lema 2.1.9.(b) tendremos que $S(I^n) \subset \overline{I^n}$ para todo natural n. Luego $S(\overline{I^n}) = \overline{I^n}$ para todo natural n, [35, Cor. 1.6]. Aplicando el Lema 3.3.3 a los ideales $I_2 = \overline{I^n} = I_1$, se sigue que $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) = 0$ para todo n. Luego (ii) implica (v).

Para demostrar que (iii) implica (iv) basta con observar que $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, N_R)$ se puede factorizar por $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^d_R(R/I^{n+k}, N_R)$.

Obviamente (v) implica (iv).

Para concluir la demostración hemos de ver que (iv) implica (ii). Para demostrar esta implicación basta con repetir la demostración de (iv) implica (ii) del Teorema 3.4.13 reemplazando m por $n + k$ y usando el Teorema 3.5.4 en lugar del Teorema 3.4.4. □

Globalizando este teorema tendremos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.16 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal.

(ii) I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(iii) Existe un natural k tal que para todo n y para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{n+k}, N_R)$ *es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.*

(iv) Existe un natural k tal que para todo n y para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{n+k}, N_R)$ *es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.*

(v) Para todo n y para todo $i \geq ht(I)$, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R)$ *es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.*

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) ya se ha justificado en la demostración del teorema anterior.

Obviamente (v) implica (iv), y (iii) implica (iv) es consecuencia de que el morfismo $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{n+k}, N_R)$ se puede factoriza por $\mathrm{Ext}^i_R(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}^i_R(R/I^{n+k}, N_R)$.

Demostremos que (iv) implica (ii). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Por hipótesis existe un k tal que para todo n el morfismo $\mathrm{Ext}_R^{ht(\mathfrak{q})}(R/\overline{I^n}, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^{ht(\mathfrak{q})}(R/I^{n+k}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Aplicando el Teorema 3.5.15 al anillo local $ht(\mathfrak{q})$-dimensional $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ y al $R_\mathfrak{q}$-módulo maximal Cohen-Macaulay $(N_R)_\mathfrak{q}$ de dimensión inyectiva finita se sigue que, existirá un sistema multiplicativo no trivial de $R_\mathfrak{q}$ para el cual $I_\mathfrak{q}$ es un $\overline{s}$-ideal. De donde, aplicando el Corolario 3.5.10 se seguirá que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal, como queríamos demostrar.

Para concluir la demostración hemos de ver que (i) implica (iii) y que (ii) implica (v).

Veamos que (ii) implica (v). Como que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal entonces, por el Corolario 3.5.10 tendremos que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, existirá un sistema multiplicativo no trivial del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ para el cual el ideal $I_\mathfrak{q}$ será un $\overline{s}$-ideal. Luego, aplicando (ii) implica (v) del teorema anterior al anillo local $ht(\mathfrak{q})$-dimensional $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ y al $R_\mathfrak{q}$-módulo maximal Cohen-Macaulay $(N_R)_\mathfrak{q}$ de dimensión inyectiva finita se sigue que, para todo n se tiene que $\mathrm{Ext}_R^{ht(\mathfrak{q})}(R/\overline{I^n}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$, como queríamos demostrar.

Veamos que (i) implica (iii). Supongamos (i). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i \geq ht(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Como que I es un s-(S)-ideal tendremos que existirá un sistema multiplicativo no trivial del anillo local $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ para el cual el ideal $I_\mathfrak{q}$ será un s-ideal (Corolario 3.5.10). Luego, aplicando el Teorema 3.5.15 al anillo local i-dimensional $R_\mathfrak{q}$ y al $R_\mathfrak{q}$-módulo maximal Cohen-Macaulay $(N_R)_\mathfrak{q}$ de dimensión inyectiva finita, tendremos que existirá un natural $k(\mathfrak{q})$ (que depende de $\mathfrak{q}$), tal que para todo n el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I^{n+k(\mathfrak{q})}, N_R)$ es localmente cero en $\mathfrak{q}$. De la demostración de (i) implica (iii) del Teorema 3.4.14 se sigue que, si $\mathfrak{q} \notin A(I)$ entonces podemos considerar $k(\mathfrak{q}) = 0$. Sea $k = \max\{k(\mathfrak{q})$ donde $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\} \geq 0$, (que existe y es independiente de $\mathfrak{q}$). Luego, para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I^{n+k}, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. □

3.6 Igualdad entre potencias simbólicas y ordinarias

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. De los resultados expuestos en la Sección 1.4 obtendremos una primera caracterización al problema de determinar cuándo tenemos la igualdad entre las potencias ordinarias y (S)-simbólicas de I (es decir, de cuándo $\{I^n\}_{n\geq 0} = \{S(I^n)\}_{n\geq 0}$), en términos de la equivalencia de topologías definidas por filtraciones del anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$. El objetivo de esta sección es examinar la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas asociadas a un ideal de coaltura uno y, para un ideal arbitrario, dar criterios análogos a los establecidos para los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales en las secciones anteriores. La relación entre propiedades del anillo graduado asociado y la igualdad de las potencias ordinarias y simbólicas, se establecerán en la Sección 5.2.

Veamos, en primer lugar, criterios para la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas de un ideal análogos a los establecidos para los $t, \overline{t}, s, \overline{s}$-$(S)$-ideales en las secciones anteriores.

1. Veamos, en primer lugar, el enunciado paralelo a los teoremas 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1 y 3.5.2. Para ello basta con observar que, en general, si J es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces se tiene que, $S(J) = J$ si y sólo si $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/J\}$ si y sólo si $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(R/J) > 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(J)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. De donde se sigue que:

   Si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I)\}$ si y sólo si $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(R/I^n) > 0$ para todo n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. En particular, $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n si y sólo si $M(I) = A(I)$ si y sólo si I^n carece de componentes sumergidas para todo n si y sólo si R/I^n verifica la condición de Serre (S_1).

2. Para obtener el resultado paralelo a los teoremas 3.4.3, 3.4.4, 3.5.3 y 3.5.4 basta con tener presente que $I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle = T(I^n)$ para todo natural $n \geq 0$ donde $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in A(I)$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\}$ (ver la demostración del Teorema 3.4.3). Luego tendremos que:

   Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $\{I^n : \langle \mathfrak{m} \rangle\}_{n \geq 0} = \{I^n\}_{n \geq 0}$ si y sólo si $\inf_{n \geq 0}\{\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R/I^n)\} > 0$. Y, en el caso particular en que $ht(I) = \dim R - 1$, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a: $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n.

3. Para obtener resultados análogos a las caracterizaciones locales vía grupos 0-ésimos de cohomología local (teoremas 3.4.9, 3.4.10, 3.5.11 y 3.5.12), basta con aplicar el resultado anterior y tener presente que, en general, si J es un ideal de un anillo noetheriano R entonces se tiene que $\mathrm{depth}_J(M) = \inf\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^i_J(M) \neq 0\}$ para todo R-módulo finito generado M. De donde se sigue que:

   Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n) = 0$ para todo natural n.

   resultado que admite un enunciado global paralelo a los resultados dados por los teoremas 3.4.11, 3.4.12, 3.5.13 y 3.5.14:

   Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(R_{\mathfrak{q}}/I^n_{\mathfrak{q}}) = 0$ para todo n y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

4. Y, por último, para obtener resultados análogos a las caracterizaciones locales vía el functor Ext (teoremas 3.4.13 y 3.5.15), basta con aplicar la fórmula dada en el Lema 3.3.2.(b) de donde se seguirá que:

   Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R. En tal situación, existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R) = 0$ para todo natural n.

   resultado que admite un enunciado global paralelo a los resultados dados por los teoremas 3.4.14 y 3.5.16:

   Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que existe N_R. En tal situación, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si para todo natural n y para todo $i \geq ht(I)$ se tiene que $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Comentario 3.6.1 Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$. Por el Teorema 3.5.12 tenemos que los $\bar{s}$-ideales se reflejan por la anulación de $H^0_{\mathfrak{m}}(R/\overline{I^n})$ para todo n, mientras que por el punto 3 de la página 79 se tiene que, la anulación de $H^0_{\mathfrak{m}}(R/I^n)$ para todo n refleja la igualdad entre potencias ordinarias y simbólicas (pero no refleja ser un s-ideal). Análogamente, si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano d-dimensional para el que existe N_R entonces, por el Teorema 3.5.15 tenemos que los $\bar{s}$-ideales se reflejan por la anulación de $\mathrm{Ext}^d_R(R/\overline{I^n}, N_R)$ para todo natural n, mientras que por el punto 4 de la página 79 se tiene que, la anulación de $\mathrm{Ext}^d_R(R/I^n, N_R)$ para todo natural n refleja la igualdad entre potencias ordinarias y simbólicas (pero no refleja ser un s-ideal). Este comportamiento distinto entre las nociones de s-ideal y de $\bar{s}$-ideal tiene su origen en el hecho de que para un ideal I de un anillo noetheriano R se tiene que, $S(I^n) = I^n$ para todo $n \Leftrightarrow S(I^n) \subset I^n$ para todo $n \Rightarrow I$ es un s-(S)-ideal, mientras que, $S(I^n) = \overline{I^n}$ para todo $n \Rightarrow S(I^n) \subset \overline{I^n}$ para todo $n \Leftrightarrow I$ es un $\bar{s}$-(S)-ideal, (Lema 2.1.9).

Comentario 3.6.2 Para un ideal I de coaltura uno de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ tenemos que, $I^n = I^{(n)}$ si y sólo si R/I^n verifica la condición de Serre (S_1) si y sólo si R/I^n es Cohen-Macaulay (como R-módulo y como anillo). Luego, para los ideales de coaltura uno la propiedad Cohen-Macaulay de sus cocientes caracteriza la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas del ideal. Este resultado no es cierto en general pues, por ejemplo, si I es un ideal de un anillo Gorenstein R y si $n \geq 1$ es un natural, entonces tendremos que $I^n = I^{(n)}$ si y sólo si R/I^n verifica la condición de Serre (S_1) si y sólo si para todo $i \geq ht(I) + 1$ y para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ se tiene que $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Mientras que si R es Gorenstein local entonces, R/I^n es Cohen-Macaulay si y sólo si R/I^n verifica la condición de Serre (S_j) para todo $j \geq 0$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^i_R(R/I^n, R) = 0$ para todo i con $ht(I) + 1 \leq i \leq \dim R$ y $\mathrm{Ext}^{ht(I)}_R(R/I^n, R) \neq 0$.

La relación entre la anulación de grupos 0-ésimos de cohomología local y la igualdad de potencias ordinarias y simbólicas, se puede entender de una manera más general. Concretamente se tiene el siguiente resultado (Proposición 3.6.3) que interpreta los cocientes $S(I^n)/I^n$ como grupos 0-ésimos de cohomología local y, recíprocamente, interpreta ciertos grupos 0-ésimos de cohomología local como cocientes de potencias simbólicas y ordinarias.

Proposición 3.6.3 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(i) Sea J un ideal de R. En tal situación, existe un sistema multiplicativo S de R tal que $H^0_J(R/I^n) = S(I^n)/I^n$ para todo natural n.

(ii) Sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, existe un ideal J de R tal que $H^0_J(R/I^n) = S(I^n)/I^n$ para todo natural n.

Demostración: De la definición de la cohomología local se sigue que si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales de un anillo noetheriano A, entonces $H^0_{\mathfrak{b}}(A/\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} : \langle \mathfrak{b} \rangle)/\mathfrak{a}$, (ver pág. 54).

Demostremos (a). Como $H^0_J(R/I^n) = (I^n : \langle J \rangle)/I^n$ para todo natural n entonces, para demostrar (a), únicamente hemos de ver que existe un sistema multiplicativo S de R tal que $I^n : \langle J \rangle = S(I^n)$ para todo n, lo cual se demuestra en el Lema 2.1.5.(b).

Para demostrar (b) es suficiente con probar que existe un ideal J de R tal que $S(I^n) = I^n : \langle J \rangle$ para todo n pues, entonces, tendremos que $S(I^n) = I^n : \langle J \rangle = H^0_J(R/I^n)$ para todo n. Veamos, pues, que existe un ideal J de R tal que $S(I^n) = I^n : \langle J \rangle$ para todo n. Dentro del conjunto finito de ideales primos $\bigcup_{i\geq 1} Ass\ R/I^i$, sean $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\}$ aquellos cuya intersección con S es no vacía. Sea J el ideal de R definido por $J = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$. Así tenemos que si $\mathfrak{p} \in Ass\ R/I^n$ entonces, $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ si y sólo si $J \subset \mathfrak{p}$. De donde se sigue que $S(I^n) = I^n : \langle J \rangle$ (Lema 2.1.5.(a)). □

Además, como corolario de los preliminares de esta sección se tiene el siguiente resultado (Proposición 3.6.4), que nos vuelve a relacionar la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas con propiedades del anillo graduado asociado (relación que se estudiará con más detalle en la Sección 5.2).

Proposición 3.6.4 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Sea $n_0 \geq 0$ un número natural. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I^n = S(I^n)$ *para todo* $n \leq n_0 + 1$.

(ii) $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(\oplus_{n\leq n_0} I^n/I^{n+1}) > 0$ *para todo primo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En particular tendremos que, $I^n = S(I^n)$ para todo n si y sólo si $\mathfrak{q} \not\subset Z(\mathrm{Gr}(I, R))$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración: Demostremos la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). Para todo natural n consideremos la sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to I^n/I^{n+1} \to R/I^{n+1} \to R/I^n \to 0$. Aplicando el functor de cohomología local tendremos una sucesión exacta larga de R-módulos $0 \to H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+1}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \to \ldots$. Luego para un ideal primo $\mathfrak{q}$ tendremos que, $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(R/I^n) > 0$ para todo $n \leq n_0 + 1$ si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) = 0$ para todo $n \leq n_0 + 1$, si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) = 0$ para todo $n \leq n_0$, si y sólo si $\oplus_{n\leq n_0} H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) = 0$, si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(\oplus_{n\leq n_0} I^n/I^{n+1}) = 0$. Es decir, si y sólo si $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(\oplus_{n\leq n_0} I^n/I^{n+1}) > 0$. De donde se sigue la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) pues, $I^n = S(I^n)$ para todo $n \leq n_0 + 1$ si y sólo si $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}}(R/I^n) > 0$ para todo $n \leq n_0 + 1$ y para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En particular, de la demostración de la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) tenemos que, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}) = 0$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Es decir, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Gr}(I, R)) = 0$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Observar que aunque $\mathrm{Gr}(I, R)$ no es un R-módulo finito generado, sí que es un R-módulo con un número finito de primos asociados (pues $Ass\,\mathrm{Gr}(I, R) = Ass \oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1} = \bigcup_{n\geq 0} Ass\ I^n/I^{n+1}$ que es un conjunto finito, [33, Cor. 1.4]).

Luego, para concluir la demostración basta con demostrar que, en general, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo noetheriano A y si M es un A-módulo con $Ass_A\ M$ conjunto finito, entonces $H^0_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$ si y sólo si $\mathfrak{a} \subset Z(M)$.

Supongamos que $H^0_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$. Luego existe un $x \in M$ y un natural n tal que $x \in (0 : \mathfrak{a}^n)_M$. Por lo tanto se tendrá que $\mathfrak{a}^n \subset Ann_A(x) \subset \mathfrak{p}$ para cierto $\mathfrak{p} \in Ass_A\ M$. Así tendremos que $\mathfrak{a} \subset r(\mathfrak{a}) \subset r(\mathfrak{a}^n) \subset r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{a} \subset Z_A(M)$.

Recíprocamente. Supongamos que $\mathfrak{a} \subset Z(M)$. Como que $Ass_A\ M$ es finito entonces tendremos que existe un primo $\mathfrak{p} \in Ass_A\ M$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. De donde se sigue que $0 \neq A/\mathfrak{p} \subset (0 : \mathfrak{a})_M$ y, por lo tanto, tendremos que $H^0_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$. □

• Potencias simbólicas de ideales de coaltura uno:

El objetivo de este apartado es estudiar el comportamiento asintótico de las potencias simbólicas de los ideales de coaltura uno.

En [33, Cor. 1.4, Cor. 1.5], se demuestra que si I es un ideal de un anillo noetheriano R, entonces existe un natural m tal que $Ass_R\ R/I^n = Ass_R\ R/I^m$ para todo $n \geq m$, y existe un natural m tal que $Ass_R\ I^n/I^{n+1} = Ass_R\ I^m/I^{m+1}$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto, tiene sentido definir los siguientes números naturales asociados a un ideal I de un anillo noetheriano R:

(a) $\alpha_I = \min\{m \geq 1$ tales que $Ass_R\ R/I^n = Ass_R\ R/I^m$ para todo $n \geq m\}$.

(b) $\omega_I = \min\{m \geq 0$ tales que $Ass_R\ I^n/I^{n+1} = Ass_R\ I^m/I^{m+1}$ para todo $n \geq m\}$.

Lema 3.6.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R tal que $I^{n_0} = I^{(n_0)}$ para algún natural $n_0 \geq \min\{\alpha_I, \omega_I+1\}$. En tal situación, $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq \min\{\alpha_I, \omega_I+1\}$.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $\alpha_I = \min\{\alpha_I, \omega_I+1\}$. Sea $n_0 \geq \alpha_I$ un natural tal que $I^{n_0} = I^{(n_0)}$. Luego $Ass_R\ R/I^{n_0} = M(I)$, de donde se sigue que $Ass_R\ R/I^n = Ass_R\ R/I^{n_0} = M(I)$ para todo $n \geq \alpha_I$ y, por lo tanto, $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq \alpha_I$, como queríamos demostrar.

Supongamos, ahora, que $\omega_I + 1 = \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$. Sea $n_0 \geq \omega_I + 1$ un natural tal que $I^{n_0} = I^{(n_0)}$. Para concluir la demostración hemos de ver que $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq \omega_I + 1$. Notemos $B^*(I) = Ass_R\ I^{\omega_I}/I^{\omega_I+1}$. Dado $n \geq \omega_I$ consideremos la sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to I^n/I^{n+1} \to R/I^{n+1} \to R/I^n \to 0$. Luego se tendrá que $B^*(I) \subset Ass_R\ R/I^{n+1}$. Por lo tanto $Ass_R\ R/I^{n+1} \subset B^*(I) \cup Ass_R\ R/I^n \subset Ass_R\ R/I^n$ para todo $n \geq \omega_I + 1$. Por hipótesis se tiene que $Ass_R\ R/I^{n_0} = M(I)$. Por lo tanto $Ass_R\ R/I^n = M(I)$ para todo $n \geq \omega_I + 1$. De donde se sigue que $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq \omega_I + 1$, como queríamos demostrar. □

Proposición 3.6.6 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = d-1$. Supongamos que I es genéricamente intersección completa (es decir, $I_\mathfrak{p}$ es un ideal intersección completa para todo primo $\mathfrak{p} \in M(I)$). En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es intersección completa.

(ii) I es equimúltiple.

(iii) $I^n = I^{(n)}$ para todo natural $n > 0$.

(iv) $I^n = I^{(n)}$ para algún natural $n \geq \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$.

(v) I es un s-ideal.

(vi) I es un $\bar{\mathfrak{s}}$-ideal.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes (que es una pequeña variación del Teorema de Cowsik-Nori [12, Prop. 3]). Obviamente se tiene que (i) implica (ii). Recíprocamente, supongamos (ii). Como que I es un ideal equimúltiple entonces tendremos que existe una reducción minimal J de I que es intersección completa. Sea $\mathfrak{p}$ un primo minimal de I. Localizando en $\mathfrak{p}$ tendremos que $J_{\mathfrak{p}} \subset I_{\mathfrak{p}}$ es una reducción de $I_{\mathfrak{p}}$. Por hipótesis I es genéricamente intersección completa, luego $I_{\mathfrak{p}}$ es un ideal de la clase principal y, por lo tanto, él es su única reducción minimal. Luego $J_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$ para todo primo minimal $\mathfrak{p}$ de I. Como que J es ideal de la clase principal de un anillo Cohen-Macaulay, en particular tendremos que $Ass\ R/J = M(J)$ y, como que J es una reducción de I en particular tendremos que $M(J) = M(I)$. Así se tiene que $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in Ass\ R/J$. De donde sigue que $J = I$ y, por lo tanto, I es ideal de la clase principal. Luego las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

La equivalencia entre las condiciones (ii), (v) y (vi) se justificó en la página 73 (apartados (e) y (f)).

Luego, tenemos que las condiciones (i), (ii), (v) y (vi) son equivalentes. Demostremos la equivalencia con las condiciones (iii) y (iv).

En la Sección 2.1 (Ejemplo 2.1.14) se justifica que para un ideal intersección completa $\mathfrak{a}$ de un anillo Cohen-Macaulay A se tiene igualdad $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{(n)}$ para todo natural n. Luego (i) implica (iii). Obviamente (iii) implica (iv). Para concluir la demostración de la proposición, veamos que (iv) implica (v). Supongamos (iv). Luego, por el Lema 3.6.5 tendremos que $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geq \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$. Notemos $k = \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$. Entonces tendremos que $I^{(n+k)} = I^{n+k} \subset I^n$ para todo natural n y, por lo tanto, I es un s-ideal, como queríamos demostrar. □

Corolario 3.6.7 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un dominio local normal 2-dimensional. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R es factorial.

(ii) Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ para algún $n \geq \min\{\alpha_{\mathfrak{p}},\ \omega_{\mathfrak{p}} + 1\}$.

(iii) Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ para todo natural n.

(iv) Todos los ideales primos de R son s-ideales.

(v) Todos los ideales primos de R son $\overline{s}$-ideales.

Demostración: Como que $(R, \mathfrak{m})$ un dominio local normal 2-dimensional, en particular R es Cohen-Macaulay. Sabemos que R es factorial si y sólo si $\mathfrak{p}$ es intersección completa para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R de altura $ht(\mathfrak{p}) = 1$. Luego, aplicando la proposición anterior se concluye la demostración. □

Analicemos el caso no intersección completa.

Sea I un ideal de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = d - 1$. Supongamos que I es genéricamente intersección completa, y que I no es intersección completa. En tal situación, de la Proposición 3.6.6 se sigue que $I^n \neq I^{(n)}$ si $n \geq \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$. El problema que se plantea es estudiar qué podemos decir de las n-ésimas potencias simbólicas de I para $n < \min\{\alpha_I, \omega_I + 1\}$.

Veamos, en primer lugar, que $\min\{\alpha_I, \omega_I + 1\} = \alpha_I$.

Proposición 3.6.8 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = d-1$. Supongamos que I es genéricamente intersección completa, y que I no es intersección completa. En tal situación se tiene que:*

(a) $\alpha_I \leq \omega_I + 1$.

(b) O bien $\alpha_I = \omega_I + 1$ o bien $\alpha_I < \omega_I$.

Demostración: Por hipótesis $ht(I) = d-1$, luego para un natural n tendremos que $M(I) \subset Ass_R R/I^n \subset V(I) = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}$ y, por lo tanto, $I^n = I^{(n)}$ si y sólo si $Ass_R R/I^n = M(I)$.

Demostremos (a). Como que I no es intersección completa entonces tenemos que $I^n \neq I^{(n)}$ si $n \geq \alpha_I$. Luego $Ass_R\, R/I^n = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}$ si $n \geq \alpha_I$ y, por lo tanto, $\alpha_I = \min\{m \geq 1$ tales que $Ass_R\, R/I^n = Ass_R\, R/I^m$ para todo $n \geq m\} = \min\{m \geq 1$ tales que $Ass_R\, R/I^n = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}$ para todo $n \geq m\} = \min\{m \geq 1$ tales que $I^n \neq I^{(n)}$ para todo $n \geq m\}$. Pero $I^n \neq I^{(n)}$ para todo $n \geq \omega_I + 1$. Luego $\alpha_I \leq \omega_I + 1$.

Demostremos el apartado (b). Como que $\alpha_I \leq \omega_I + 1$ entonces, para demostrar (b), basta con demostrar que $\alpha_I \neq \omega_I$. Tenemos que $\mathfrak{m} \in Ass_R\, R/I^{\alpha_I} \subset Ass_R\, I^{\alpha_I - 1}/I^{\alpha_I} \cup Ass_R\, R/I^{\alpha_I - 1}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{m} \in Ass_R\, I^{\alpha_I - 1}/I^{\alpha_I}$. Así, si $\alpha_I = \omega_I$ entonces se tendrá que $Ass_R\, I^n/I^{n+1} = M(I)$ para todo $n \geq \omega_I$ de donde, aplicando [33, Prop. 2.2], se sigue que $\mathfrak{m}$ es un ideal primo asociado al anillo, luego $\dim R = 0$, lo cual es absurdo. Luego $\alpha_I \neq \omega_I$ y, por lo tanto, o bien $\alpha_I = \omega_I + 1$ o bien $\alpha_I < \omega_I$. □

Así, el problema que tenemos es estudiar las n-ésimas potencias simbólicas (con $n \leq \alpha_I$) de un ideal I genéricamente intersección completa, de altura $ht(I) = d-1$ y no intersección completa de un anillo local noetheriano d-dimensional Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$. Este tipo de problema fue estudiado por Huneke en [28] en el caso 3 y 4 dimensional. En este trabajo Huneke demuestra que [28, Cor. 2.5, Cor. 2.6]:

(a) Si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local regular 3-dimensional y si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no intersección completa de altura $ht(\mathfrak{p}) = 2$, entonces $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{(n)}$ si $n \geq 2$.

(b) Si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local regular 4-dimensional y si $\mathfrak{p}$ un ideal primo no intersección completa de altura $ht(\mathfrak{p}) = 3$ tal que $R/\mathfrak{p}$ es Gorenstein, entonces $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}^{(2)}$ y $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{(n)}$ si $n \geq 3$.

Veamos cuándo podemos garantizar el mismo comportamiento para un ideal I genéricamente intersección completa, altura $ht(I) = d-1$ y no intersección completa de un anillo local noetheriano d-dimensional Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$.

Proposición 3.6.9 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = d-1$. Supongamos que I es genéricamente intersección completa, y que I no es intersección completa. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un natural n_0 tal que $I^n = I^{(n)}$ si $n < n_0$ y tal que $I^n \neq I^{(n)}$ si $n \geq n_0$.

(ii) $\alpha_I = \min\{n \geq 1$ *tales que* $Ass\, R/I^n = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}\}$.

Y en tal situación se tiene que $n_0 = \alpha_I$.

Demostración: Por hipótesis $ht(I) = d - 1$, luego para un natural n tendremos que $I^n = I^{(n)}$ si y sólo si $Ass_R R/I^n = M(I)$. En particular, $\min\{n \geq 1$ tales que $Ass\ R/I^n = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}\} = \min\{n \geq 1$ tales que $I^n \neq I^{(n)}\}$.

Por otro lado, como que I no es intersección completa entonces, de la demostración del apartado (a) de la Proposición 3.6.8 se sigue que $\alpha_I = \min\{m \geq 1$ tales que $I^n \neq I^{(n)}$ para todo $n \geq m\}$. Luego $\alpha_I = 1 + \max\{m \geq 0$ tales que $I^m = I^{(m)}\} \geq 1 + \max\{m \geq 0$ tales que $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \leq m\} = \min\{m \geq 1$ tales que $I^m \neq I^{(m)}\}$.

Luego, existe un natural n_0 tal que $I^n = I^{(n)}$ si $n < n_0$ y tal que $I^n \neq I^{(n)}$ si $n \geq n_0$ si y sólo si $\min\{m \geq 1$ tales que $I^n \neq I^{(n)}$ para todo $n \geq m\} = \min\{m \geq 1$ tales que $I^m \neq I^{(m)}\}$, si y sólo si $\alpha_I = \min\{n \geq 1$ tales que $Ass\ R/I^n = M(I) \cup \{\mathfrak{m}\}\}$. Y, en tal situación, $n_0 = \alpha_I$. □

3.7 Potencias simbólicas y anulación de la cohomología local

Los resultados de anulación de la cohomología local son resultados de gran importancia en el Álgebra Conmutativa y en la Geometría Algebraica. Es conocido que, para todo ideal I de un anillo noetheriano R y para todo R-módulo finito generado M se tiene que, $\operatorname{depth}_I(M) = \inf\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^i_I(M) \neq 0\} = \sup\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^j_I(M) = 0$ para todo $j < i\}$. Por otro lado, dado un ideal I de un anillo noetheriano R y dado un R-módulo M, se define $cd_I(M)$ la *dimensión cohomológica del ideal I respecto del R-módulo M* como $cd_I(M) = \sup\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^i_I(M) \neq 0\} = \inf\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^j_I(M) = 0$ para todo $j > i\}$. Es conocido que, $cd_I(M) \leq \min\{\dim M, ara(I)\}$ (donde $ara(I) = \min\{s \geq 0$ para los que existen $a_1, \ldots, a_s \in R$ con $r(I) = r((a_1, \ldots, a_s))\}$ es el *rango aritmético del ideal I*, es decir, $ara(I)$ es el menor número de elementos necesarios para definir I radicalmente).

El problema de la anulación de la cohomología local $H^i_I(M)$, y el problema de la acotación de la dimensión cohomológica $cd_I(M)$, se pueden reducir al caso en que M sea un R-módulo de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ y donde I es un ideal de altura $ht(I) < d$ pues:

(a) Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea M un R-módulo. Sea $R \to A$ un morfismo de anillos plano. En tal situación, para todo $i \in \mathbf{Z}$ se tiene un isomorfismo de A-módulos $H^i_{IA}(M \otimes_R A) \cong H^i_I(M) \otimes_R A$. En particular, $cd_I(M) = \sup\{cd_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $R\}$ y, si $R \to A$ es un morfismo de anillos fielmente plano, entonces $cd_I(M) = cd_{IA}(M \otimes_R A)$.

(b) Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea M un R-módulo. En tal situación, $H^i_I(M) = H^i_{r(I)}(M)$ para todo $i \in \mathbf{Z}$. En particular, $cd_I(M) = cd_{r(I)}(M)$.

(c) Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano, entonces $cd_\mathfrak{m}(M) = \dim M$.

Además se tiene que:

Lema 3.7.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, $H_I^i(M) = 0$ para todo R-módulo M y para todo $i \geq cd_I(R) + 1$ y, además, se tiene un isomorfismo natural $H_I^{cd_I(R)}(M) \cong H_I^{cd_I(R)}(R) \otimes_R M$. En particular, $cd_I(R) = \sup\{cd_I(M)$ donde M es un R-módulo$\} = \sup\{i \in \mathbf{Z}$ tales que existe un R-módulo M con $H_I^i(M) \neq 0\}$.*

Demostración: Tenemos que $cd_I(R) \leq \dim R = d$, y que $cd_I(M) \leq \dim M \leq \dim R/Ann_R(M) \leq \dim R$ para todo R-módulo M. Luego $H_I^i(\cdot) = 0$ para todo $i \geq d+1$. En particular tendremos que $H_I^{d+1}(\cdot) = 0$. Luego, de la sucesión exacta larga de derivados se seguirá que el functor covariante aditivo $H_I^d(\cdot) : R\text{-Mod} \to \mathcal{A}\text{b}$ es un functor exacto por la derecha. Por otro lado se tiene que, en general, $H_I^j(\cdot)$ conmuta con las sumas directas. Luego tenemos que el functor $H_I^d(\cdot) : R\text{-Mod} \to \mathcal{A}\text{b}$ es un functor covariante aditivo exacto por la derecha y que conmuta con las sumas directas. Aplicando el Teorema de Watts, tendremos una equivalencia natural de functores $H_I^d(\cdot) \cong H_I^d(R) \otimes_R \cdot$. Luego, para todo R-módulo M se tendrá un isomorfismo natural $H_I^d(M) \cong H_I^d(R) \otimes_R M$. Así, el lema queda demostrado en el caso en que $cd_I(R) = \dim R$.

Si $cd_I(R) \leq \dim R - 1$ entonces, como que $H_I^d(M) \cong H_I^d(R) \otimes_R M$ para todo R-módulo M, en particular tendremos que $H_I^d(\cdot) = 0$, de donde se sigue que $H_I^{d-1}(\cdot) : R\text{-Mod} \to \mathcal{A}\text{b}$ es un functor covariante aditivo exacto por la derecha y que conmuta con las sumas directas. Luego, aplicando el Teorema de Watts, tendremos una equivalencia natural de functores $H_I^{d-1}(\cdot) \cong H_I^{d-1}(R) \otimes_R \cdot$. Luego, para todo R-módulo M se tendrá un isomorfismo natural $H_I^{d-1}(M) \cong H_I^{d-1}(R) \otimes_R M$. Así, el lema queda demostrado en el caso en que $cd_I(R) = \dim R - 1$.

Repitiendo el proceso se concluye la demostración. □

De lo dicho hasta ahora se sigue que el primer problema que se plantea es el de caracterizar la anulación del módulo $H_I^d(R)$ donde I es un ideal de altura $ht(I) < d$ de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. La respuesta a este problema nos la da el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne.

Teorema 3.7.2 (Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne, [10], [18], [43], [55]). *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $H_I^d(R) = 0$.

(ii) $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ *para todo primo minimal* $z \in Min\ R^*$ *con* $\dim R^*/z = d$.

Veamos cómo podemos reinterpretar este teorema (véase Comentario 3.7.9 para una demostración alternativa), en términos de la comparación entre las topologías ádica, simbólica y entera asociadas al ideal I.

Proposición 3.7.3 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Consideremos las siguientes condiciones:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(ii) $H_I^d(R) = 0$.

En tal situación se tiene que siempre (i) implica (ii), y que el recíproco es cierto si $(R, \mathfrak{m})$ *es quasi-unmixed.*

Demostración: Es consecuencia directa del Teorema 3.4.4 y del Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne. Obsérvese que en el caso quasi-unmixed tenemos que, por definición, $\dim R^*/z = \dim R$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$. $\square$

Ejemplo 3.7.4 Veamos que la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 3.7.3 no es cierta si $(R, \mathfrak{m})$ no es quasi-unmixed. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano completo dos dimensional con dos primos minimales z_1 y z_2 tales que $\dim R/z_1 = 1$ y que $\dim R/z_2 = 2$ (en particular, R es un anillo local completo no quasi-unmixed). Sea $\mathfrak{p}$ un primo no minimal de R de altura $ht(\mathfrak{p}) = 1$. Veamos que $H^2_{\mathfrak{p}}(R) = 0$ y que no existe ningún sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $\mathfrak{p}$ es un $\bar{t}$-(S)-ideal. Para todo primo minimal z de R^* $(= R)$ de dimensión $\dim R^*/z = \dim R^*$ tenemos que $\dim R^*/(\mathfrak{p}R^* + z) > 0$. Luego, del Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne se sigue que $H^2_{\mathfrak{p}}(R) = 0$. Por otro lado, $\mathfrak{p}$ no contiene todos los primos minimales de R, luego $\mathfrak{p}$ no es un $\bar{t}$-ideal (página 64, apartado (f)) y, por lo tanto, no existe ningún sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que $\mathfrak{p}$ es un $\bar{t}$-(S)-ideal (Teorema 3.4.4).

Comentario 3.7.5 Como caso particular de la Proposición 3.7.3 se tiene que, si I es un $\bar{t}$-ideal de altura $ht(I) < d$ de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$, entonces $cd_I(R) < d$. En particular, si R es tal que todos sus ideales son $\bar{t}$-ideales (véase, por ejemplo, los apartados (c) y (d) de la página 63), entonces $cd_I(R) < \dim R$ para todo ideal I de R de altura $ht(I) < d$.

Además, como casos particulares de la Proposición 3.7.3 se tienen los siguientes corolarios que generalizan los criterios de anulación de $H^d_I(R)$ establecidos por Call en [9, Cor. 4] para I ideal primo de altura $d-1$ de un anillo local completo Gorenstein d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$; por Call y Sharp en [10] para I ideal arbitrario de altura $d-1$ de un anillo local Gorenstein d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$; y por Schenzel [51, Cor. 4.3] para anillos locales completos quasi-Gorenstein:

Corolario 3.7.6 *Sea I un ideal de altura $ht(I) = d - 1$ de un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $H^d_I(R) = 0$.

(ii) I es un $\bar{t}$-ideal.

(iii) Para todo primo minimal de R^* existe un primo minimal de IR^* que lo contiene.

Y si además $(R, \mathfrak{m})$ es unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iv) I es un t-ideal.

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii) es consecuencia de la Proposición 3.7.3 y de la página 64 apartado (f). La equivalencia con (iv) en el caso unmixed se sigue de la página 63 apartado (a). □

Corolario 3.7.7 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) < d$. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $H_I^d(R) = 0$.

(ii) La topología definida por la filtración $\{I^n : \langle\mathfrak{m}\rangle\}_{n\geq 0}$ es más fina que la topología definida por las clausuras enteras de las potencias de I.

Y si además $(R, \mathfrak{m})$ es unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iii) La topología definida por la filtración $\{I^n : \langle\mathfrak{m}\rangle\}_{n\geq 0}$ es equivalente a la topología I-ádica de R.

Demostración: La equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) se sigue del Teorema 3.4.4 y de la Proposición 3.7.3. La equivalencia con (iii) en el caso unmixed se sigue de la página 63 apartado (a) y del Teorema 3.4.3. □

Proposición 3.7.8 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S)-ideal.

(ii) Existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(iii) $H_I^d(N_R) = 0$.

Demostración: Por el Teorema 3.4.13 tenemos que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes, y que estas condiciones son equivalentes a que para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^d(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero. Por otro lado, para todo natural n los R-módulos $\mathrm{Ext}_R^d(R/I^n, N_R)$ son R-módulos finito generados. De donde se sigue que, para todo n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^d(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^d(R/I^m, N_R)$ es el morfismo cero si y sólo si $\lim_{\to n} \mathrm{Ext}_R^d(R/I^n, N_R) = 0$. Es decir, si y sólo si $H_I^d(N_R) = 0$, como queríamos demostrar. □

Comentario 3.7.9 La diferencia esencial entre las demostraciones de las proposiciones 3.7.3 y 3.7.8 es que, para demostrar la primera usamos el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne, mientras que para demostrar la segunda únicamente usamos las caracterizaciones establecidas en la Sección 3.4. De hecho es interesante observar que de la Proposición 3.7.8 se obtiene, como corolario, el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne. Para ello basta con observar que para demostrar este teorema uno se reduce, en primer lugar, al caso en que $(R, \mathfrak{m})$ sea un anillo Gorenstein local. Luego, en este caso, aplicando la Proposición 3.7.8 tendremos que $H_I^d(R) = 0$ si y sólo si existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal. De donde, aplicando el Teorema 3.4.4

tendremos que $H_I^d(R) = 0$ si y sólo si $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$.

Globalicemos las proposiciones anteriores.

Proposición 3.7.10 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Consideremos las siguientes condiciones:*

(i) I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(ii) $H_I^{ht(\mathfrak{q})}(R) \otimes_R R_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En tal situación se tiene que siempre (i) implica (ii), y que el recíproco es cierto si R es localmente quasi-unmixed.

Demostración: De la caracterización de los $\bar{t}$-(S)-ideales (Teorema 3.4.2) tenemos que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal si y sólo si $\dim R_\mathfrak{q}^*/(IR_\mathfrak{q}^* + z) > 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ y para todo $z \in Min\ R_\mathfrak{q}^*$. La demostración se concluye al aplicar el Teorema de Lichtenbaum-Hartshorne al anillo local noetheriano $ht(\mathfrak{q})$-dimensional $(R_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$. □

Proposición 3.7.11 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que existe N_R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un t-(S)-ideal.

(ii) I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

(iii) $H_I^{ht(\mathfrak{q})}(N_R) \otimes_R R_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración: Por el Teorema 3.4.14 tenemos que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes, y que estas condiciones son equivalentes a que para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que para todo $i \geq ht(I)$, el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^i(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ de altura $ht(\mathfrak{q}) = i$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Más aún, de la demostración del Teorema 3.4.14 tenemos que la condición anterior es equivalente a que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ se tiene que para todo natural n existe un natural $m \geq n$ tal que el morfismo natural $\mathrm{Ext}_R^{ht(\mathfrak{q})}(R/I^n, N_R) \to \mathrm{Ext}_R^{ht(\mathfrak{q})}(R/I^m, N_R)$ es localmente nulo en $\mathfrak{q}$. Es decir, si y sólo si $H_I^{ht(\mathfrak{q})}(N_R) \otimes_R R_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. □

Comentario 3.7.12 Es interesante observar que en la Proposición 3.7.10 (resp. en la Proposición 3.7.11), basta comprobar la anulación de $(H_I^{ht(\mathfrak{q})}(R))_\mathfrak{q}$ (resp. la anulación de $(H_I^{ht(\mathfrak{q})}(N_R))_\mathfrak{q}$) para un número finito de ideales primos $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ para, así, poder afirmar que se verifica para todos ellos. Para ello basta con tener presente la demostración de estas proposiciones y recordar que, en la caracterización de los $\bar{t}$-(S)-ideales que usamos (Teorema 3.4.2) nos podemos restringir a considerar los ideales primos $\mathfrak{q} \in \overline{E}(I)$ tales que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Como corolario se sigue que:

Corolario 3.7.13 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R tal que todos los primos minimales de I tienen la misma altura (por ejemplo, cualquier ideal primo de un anillo local noetheriano quasi-unmixed). En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un $\bar{t}$-ideal.

(ii) Supp $H_I^i(R) \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) \geq i+1\}$ para todo i con $ht(I) < i \leq \dim R$.

Demostración: Obviamente se tiene que *Supp* $H_I^i(R) \subset V(I)$. Además, si $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{p}) < i$, entonces $cd_{IR_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \leq \dim R_\mathfrak{p} = ht(\mathfrak{p}) < i$, de donde se sigue que $(H_I^i(R))_\mathfrak{p} = 0$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \notin$ *Supp* $H_I^i(R)$. Luego, para un ideal I de un anillo noetheriano R se tiene que *Supp* $H_I^i(R) \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) \geq i\}$.

Sea S un sistema multiplicativo de R. Por la Proposición 3.7.10 tenemos que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal si y sólo si $(H_I^{ht(\mathfrak{q})}(R))_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Luego, I es un $\bar{t}$-(S)-ideal si y sólo si *Supp* $H_I^i(R) \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) = i$ y tales que $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset\} \cup \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) \geq i+1\}$ para todo i con $ht(I) \leq i \leq \dim R$.

En nuestro caso, I es un ideal de R tal que todos sus primos minimales tiene la misma altura, y $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Luego $M(I) = \{\mathfrak{q} \in V(I)$ tales que $ht(\mathfrak{q}) = ht(I)\}$ y, además, si $\mathfrak{q} \in V(I)$ entonces $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ si y sólo si $\mathfrak{q} \in M(I)$. De donde se sigue la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii). □

Comentario 3.7.14 Como casos particulares del Corolario 3.7.13 obtenemos los siguientes resultados:

(a) Sea I un ideal de altura $ht(I) = d-2$ de un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ tal que todos los primos minimales de I tienen la misma altura. En tal situación, I es un $\bar{t}$-ideal si y sólo si $H_I^d(R) = 0$ y $H_I^{d-1}(R) = 0$ es un R-módulo con soporte en el maximal. Y si además $(R, \mathfrak{m})$ es unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a: I es un t-ideal, (página 63 apartado (a)).

(b) Sea R un anillo noetheriano tal que todos sus ideales son $\bar{t}$-ideales (véase, por ejemplo, los apartados (c) y (d) de la página 63). En tal situación, para todo ideal equidimensional I de R tendremos que *Supp* $H_I^i(R) \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}) \geq i+1\}$ para todo i con $ht(I) < i \leq \dim R$.

Para concluir esta sección, veamos cómo la Proposición 3.7.3 nos puede ser de utilidad para determinar cuándo tenemos anulación del grupo de cohomología local $H_I^d(R)$.

Hartshorne [18] demuestra que si I es un ideal de un anillo noetheriano R radicalmente generado por r elementos, entonces $cd_I(R) \leq r$. Luego $cd_I(R) \leq ara(I) = \min\{s \geq 0$ para los que existen $a_1, \ldots, a_s \in R$ con $r(I) = r((a_1, \ldots, a_s))\}$. De aquí se sigue que para un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ se tiene que $cd_I(R) \leq l(I)$ para todo ideal I de R. En efecto. Supongamos, en primer lugar, que el cuerpo residuo es infinito. Sea J

una reducción minimal de I. Entonces se tiene que I y J son ideales de igual radical y que $l(I) = \mu(J)$, de donde se sigue que $ara(I) = ara(J) \leq \mu(J) = l(I)$. Luego $cd_I(R) \leq ara(I) \leq l(I)$. Para demostrar el caso general, consideremos el anillo de Nagata $R(T) = R[T]_{\mathfrak{m}[T]}$ que es un anillo local noetheriano con cuerpo residuo infinito, y consideremos $I(T)$ el ideal de $R(T)$ definido por la extensión de I vía el morfismo local fielmente plano $R \to R(T)$. Por el teorema del cambio de base fielmente plano (página 85 apartado (a)) tendremos que $cd_I(R) = cd_{I(T)}(R(T))$, y por [19, (10.11.c)] se tendrá que $l(I) = l(I(T))$. De donde se sigue que $cd_I(R) = cd_{I(T)}(R(T)) \leq ara(I(T)) \leq l(I(T)) = l(I)$, como queríamos demostrar.

Veamos cómo la Proposición 3.7.3 nos permite relacionar $l(I)$ con la anulación del grupo de cohomología local $H_I^d(R)$, donde I es un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$, (Corolario 3.7.15).

Dado un ideal I de un anillo noetheriano R y dado un sistema multiplicativo S de R sabemos que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal si y sólo si $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \overline{E}(I)\}$, (Teorema 3.4.2). Así, para $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Lambda(I)\}$, donde $\Lambda(I)$ es cualquier conjunto de ideales primos de R tal que $\overline{E}(I) \subset \Lambda(I)$, tendremos que I siempre es un $\bar{t}$-(S)-ideal. De esta manera, dado un ideal I de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ entonces, (por la Proposición 3.7.3), podremos afirmar que $H_I^d(R) = 0$ si alguno de los sistemas multiplicativos anteriores es tal que $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$, es decir, si para alguno de los conjuntos de ideales primos $\Lambda(I)$ se tiene que $\mathfrak{m} \notin \Lambda(I)$. Con esta idea como referencia se pueden obtener resultados de anulación del d-ésimo grupo de cohomología local del siguiente estilo:

Corolario 3.7.15 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano quasi-unmixed d-dimensional, y sea I un ideal de R tal que $l(I) < d$. En tal situación, $H_I^d(R) = 0$.*

Demostración: En este caso consideramos como $\Lambda(I)$ el conjunto finito de ideales primos $\Lambda(I) = \overline{U}(I)$ que es tal que $\overline{E}(I) \subset \overline{U}(I)$ (Lema 3.1.3). Por hipótesis tenemos que $l(I) < ht(\mathfrak{m}) = \dim R$. Luego, aplicando el Teorema de Burch-McAdam (Lema 3.1.8) tendremos que $\mathfrak{m} \notin \overline{U}(I)$. Con lo que se concluye la demostración. □

Ejemplo 3.7.16 Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local regular d-dimensional y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo no intersección completa de altura $ht(\mathfrak{p}) = d - 1$. Como que $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo regular, entonces $\mathfrak{p}$ es un $\bar{t}$-ideal (página 63 apartado (d)) y, por lo tanto, $H_{\mathfrak{p}}^d(R) = 0$ (Proposición 3.7.3). Pero como que $\mathfrak{p}$ no es intersección completa, entonces tendremos que $l(\mathfrak{p}) = \dim R$ (Proposición 3.6.6). Luego, el recíproco del corolario anterior no es cierto en general.