UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Àlgebra i Geometria

FILTRACIONES SIMBÓLICAS Y SUS ÁLGEBRAS ASOCIADAS

per

Jaume Martí Farré

Facultat de Matemàtiques

1995

4 Comportamiento de los $\mathrm{t}, \bar{\mathrm{t}}, \mathrm{s}, \bar{\mathrm{s}}$-(S)-ideales por operaciones y por la acción de morfismos

En este capítulo se estudiará el comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-(S)-ideales por la acción de morfismos y por operaciones entre ideales.

4.1 Comportamiento por la acción de morfismos

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales por la acción de morfismos de anillos generalizando, así, los resultados establecidos por Verma en [58]. Los resultados que se obtendrán se deducirán de las caracterizaciones establecidas en el capítulo anterior y de las propiedades de los conjuntos de divisores primos $E(I)$, $\overline{E}(I)$, $U(I)$ y $\overline{U}(I)$, (que notaremos por $\Gamma(I)$ según el caso).

En general, los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales no tienen un buen comportamiento ni por la extensión ni por la contracción por un morfismo de anillos. Por ejemplo:

Ejemplo 4.1.1 Veamos que la contracción de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un morfismo de anillos no es, en general, un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal); y que la extensión de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un morfismo de anillos puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal no lo sea. Sea $I = \mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo noetheriano R. En tal situación tendremos que $R_\mathfrak{p}$ es un anillo local de maximal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Luego $I_\mathfrak{p}$ es un ideal maximal y, por lo tanto (Ejemplo 2.1.10), $I_\mathfrak{p}$ siempre será un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal I no lo sea.

Ejemplo 4.1.2 Veamos que la extensión de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un morfismo de anillos no es, en general, un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal); y que la contracción de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un morfismo de anillos puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal no lo sea. Para ello consideremos $I = \mathfrak{p}$ un ideal primo de altura $ht(I) = \dim R - 1$ de un anillo local noetheriano completo $(R, \mathfrak{m})$ tal que I sea un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Sea J un ideal de R tal que $J \subset I$ pero tal que exista un primo minimal $\mathfrak{q}$ de J tal que $\mathfrak{q} \not\subset I$. En tal situación, el ideal I/J es un ideal primo de altura $ht(I/J) = \dim R/J - 1$ del anillo local noetheriano completo $(R/J, \mathfrak{m}/J)$ tal que no contiene todos los primos minimales del anillo. Luego I/J no es un $\bar{t}$-ideal (página 64 apartado (f)) y, por lo tanto, I/J no es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

Examinemos el comportamiento de los $t, \bar{t}, s, \bar{s}$-ideales por localización, por paso al cociente, por extensión fielmente plana, y por extensión finita.

- **Comportamiento por la localización:**

Del Ejemplo 4.1.1 se sigue que la contracción de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por una localización no es, en general, un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal); y que la extensión de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por una localización puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal no lo sea.

Proposición 4.1.3 *Sea R un anillo noetheriano y sea T un sistema multiplicativo de R. Sea I un ideal de R y sea J un ideal de $T^{-1}R$. En tal situación se tiene que:*

(a) Si I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal), entonces $T^{-1}I$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

(b) Si $J \cap R$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal), entonces J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

Demostración: Demostremos (a). Por hipótesis I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Luego, aplicando los corolarios 3.4.5 y 3.5.5, se seguirá que $M(I) = \Gamma(I)$. Por lo tanto tendremos que $M(T^{-1}I) = \{T^{-1}\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in M(I)$ con $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset\} = \{T^{-1}\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$ con $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset\} = \Gamma(T^{-1}I)$, (Lema 3.1.4). Así se tendrá que $M(T^{-1}I) = \Gamma(T^{-1}I)$ y, por lo tanto, aplicando de nuevo los corolarios 3.4.5 y 3.5.5, se sigue que $T^{-1}I$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

Demostremos (b). Supongamos que $J \cap R$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Entonces, por el apartado (a) tendremos que $T^{-1}(J \cap R)$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Pero $J = T^{-1}(J \cap R)$, luego J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). □

Proposición 4.1.4 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

(ii) $I_{\mathfrak{p}}$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) para todo primo $\mathfrak{p} \in V(I)$.

(iii) $I_{\mathfrak{m}}$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) para todo maximal $\mathfrak{m} \in V(I)$.

Demostración: Del apartado (a) de la proposición anterior se sigue que (i) implica (ii). Obviamente (ii) implica (iii). Veamos que (iii) implica (i). Hemos de ver que $M(I) = \Gamma(I)$ (corolarios 3.4.5 y 3.5.5). Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$ y sea $\mathfrak{m}$ maximal con $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Así tendremos que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}} \in \Gamma(I_{\mathfrak{m}})$, (Lema 3.1.4). Por hipótesis $I_{\mathfrak{m}}$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Luego $M(I_{\mathfrak{m}}) = \Gamma(I_{\mathfrak{m}})$, (corolarios 3.4.5 y 3.5.5). De donde se sigue que $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}} \in M(I_{\mathfrak{m}})$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \in M(I)$. □

Ejemplo 4.1.5 Sea R un anillo noetheriano y sea S un sistema multiplicativo de R. Sea A el anillo noetheriano definido por $A = R[\{X_s\}_{s \in S}]/(\{sX_s - 1\}_{s \in S})$, que es isomorfo a la simetrización de R por S. Luego, si I es un ideal de R tal que I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal), entonces, por la Proposición 4.1.3, tendremos que también lo será el ideal IA. Por ejemplo, esta es la situación que se tiene al considerar los anillos del tipo $R[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]/(p(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} - 1)$, (por ejemplo, el anillo de la hipérbola $K[x, y]/(xy - 1)$, y el anillo del círculo complejo $\mathbf{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$).

• **Comportamiento por el paso al cociente:**

Del Ejemplo 4.1.2 se sigue que la extensión de un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un paso al cociente no es, en general, un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal); y que la contracción de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un paso al cociente puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal no lo sea.

Además, del siguiente ejemplo (Ejemplo 4.1.6) se sigue que la contracción de un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un paso al cociente no es, en general, un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal); y que la extensión de un t-ideal (resp. de un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) por un paso al cociente puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal no lo sea.

Ejemplo 4.1.6 Sea R un anillo noetheriano y sea $I = \mathfrak{p}$ un ideal primo de R. En tal situación, la extensión de I vía el morfismo $R \to R/I$ siempre es un un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) pues es el ideal cero de un dominio noetheriano (Ejemplo 2.1.11). Lo cual, obviamente, no implica que I sea un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).

Examinemos un caso particular de paso al cociente.

Proposición 4.1.7 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $z \in Ass\ R$ y si I es un t-ideal (resp. un s-ideal), entonces $(I+z)/z$ es un t-ideal (resp. un s-ideal).

(b) Si $z \in Min\ R$ y si I es un $\bar{t}$-ideal (resp. un $\bar{s}$-ideal), entonces $(I+z)/z$ es un $\bar{t}$-ideal (resp. un $\bar{s}$-ideal).

Demostración: Sea $\mathfrak{p}/z \in \Gamma((I+z)/z)$. Del Lema 3.1.5 se sigue que $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$. Por otro lado, aplicando los corolarios 3.4.5 y 3.5.5 se sigue que $\Gamma(I) = M(I)$. Luego $\mathfrak{p} \in M(I)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p}/z \in M((I+z)/z)$. Así tendremos que $M((I+z)/z) = \Gamma((I+z)/z)$ con lo que, aplicando los corolarios 3.4.5 y 3.5.5, se concluye la demostración. □

Veamos que los recíprocos de los apartados (a) y (b) de la proposición anterior no son ciertos en general.

Ejemplo 4.1.8 Veamos que en general el recíproco de (a) no es cierto. Sea R un anillo tal que no verifica la condición de Serre (S_1), y sea $I = 0$. Luego del Ejemplo 2.1.11 se sigue que I no es un t-ideal (resp. un s-ideal), mientras que para todo $z \in Ass\ R$ tenemos que $(I+z)/z$ es el ideal cero de un dominio y, por lo tanto, $(I+z)/z$ es un t-ideal (resp. un s-ideal). Luego el recíproco de (a) no es cierto.

Ejemplo 4.1.9 Veamos que, en general, tampoco es cierto el recíproco de (b). Para ello consideremos $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano completo dos dimensional con dos primos minimales z_1 y z_2 tales que $\dim R/z_1 = \dim R/z_2 = 2$ y tal que exista un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R de altura $ht(\mathfrak{p}) = 1$ tal que $z_1 \subset \mathfrak{p}$ y tal que $z_2 \not\subset \mathfrak{p}$ (por ejemplo $R = k[[x,y,z]]/(xy)$

donde k es un cuerpo). Consideremos I el ideal $I = \mathfrak{p}$ y sea $z = z_2$. Así tendremos que $(I + z)/z$ es un $\bar{t}$-ideal (resp. un $\bar{s}$-ideal) de R/z pues es un ideal $\mathfrak{m}/z$-primario (Ejemplo 2.1.10). Mientras que por el apartado (f) de la página 64 se sigue que I no es un $\bar{t}$-ideal (y, por lo tanto, tampoco es un $\bar{s}$-ideal) pues I no contiene todos los primos minimales de R.

- **Comportamiento por extensión fielmente plana:**

Proposición 4.1.10 *Sea $R \to A$ una extensión fielmente plana de anillos noetherianos y sea I un ideal de R. En tal situación si IA es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal), entonces I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).*

Demostración: Hemos de ver que $M(I) = \Gamma(I)$ (corolarios 3.4.5 y 3.5.5). Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$ y sea $\mathfrak{p}^*$ un primo minimal de $\mathfrak{p}A$. Luego $\mathfrak{p}^* \in \Gamma(IA)$ (Lema 3.1.6). Por hipótesis IA es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal). Luego, aplicando los corolarios 3.4.5 y 3.5.5 se sigue que $\Gamma(IA) = M(IA)$ y, por lo tanto, tendremos que $\mathfrak{p}^* \in M(IA)$. Veamos que $\mathfrak{p} \in M(I)$. Para ello veamos, en primer lugar, que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$. Tenemos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^* \cap R$, y como la extensión verifica el going-down, se deduce la existencia de un ideal primo $\mathfrak{p}_1^* \subset \mathfrak{p}^*$ con $\mathfrak{p}_1^* \cap R = \mathfrak{p}$. Así tenemos que $\mathfrak{p}A = (\mathfrak{p}_1^* \cap R)A \subset \mathfrak{p}_1^* \subset \mathfrak{p}^* \in M(\mathfrak{p}A)$. Por lo tanto $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1^*$, de donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$. Para demostrar que $\mathfrak{p}$ es un primo minimal de I, consideremos $\mathfrak{q}$ un ideal primo con $I \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Por ser $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap R$ y como la extensión verifica el going-down, se tiene la existencia de un ideal primo $\mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{p}^*$ con $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^* \cap R$. Luego, $IA \subset \mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{p}^* \in M(IA)$ y, por lo tanto $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{q}^*$, de donde se deduce que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. □

Veamos que el recíproco de la Proposición 4.1.10 no es cierto en general (Ejemplo 4.1.11), pero que es cierto para $R \to A$ el morfismo de completación e $I \subset R$ un ideal de coaltura uno (Proposición 4.1.12).

Ejemplo 4.1.11 Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano verificando la condición de Serre (S_1) tal que su completado $(R^*, \mathfrak{m}^*)$ no verifica la condición de Serre (S_1). Sea I el ideal cero de R. En tal situación del Ejemplo 2.1.11 se sigue que I es un t-ideal (resp. un s-ideal), y que I^* no lo es.

Proposición 4.1.12 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = \dim R - 1$. En tal situación se tiene que, I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) si y sólo si I^* es un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal).*

Demostración: El recíproco es consecuencia de aplicar la Proposición 4.1.10 al morfismo fielmente plano $R \to R^*$. Veamos el directo. Como que I es un ideal de altura $ht(I) = \dim R - 1$, entonces su completado I^* también será un ideal de altura $ht(I^*) = \dim R^* - 1$. Luego, aplicando el Teorema 3.4.3 (resp. el Teorema 3.4.4) tendremos que, I^* es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) si y sólo si $\dim R^*/(I^*R^* + z) > 0$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$), si y sólo si $\dim R^*/(IR^* + z) > 0$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$), si y sólo si I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). Mientras que, aplicando el Teorema 3.5.3 (resp. el Teorema 3.5.4) tendremos que, I^* es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si $l((I^*R^*+z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$), si y sólo si $l((IR^* + z)/z) < \dim(R^*/z)$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$), si y sólo si I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal). □

Veamos que el recíproco de la Proposición 4.1.10 también es cierto para la extensión al anillo de polinomios (Proposición 4.1.13) y para la extensión al anillo de Nagata (Proposición 4.1.14).

Proposición 4.1.13 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea x una indeterminada sobre R. En tal situación se tiene que, I es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal) si y sólo si $I[x]$ es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal).*

Demostración: El recíproco es consecuencia de la Proposición 4.1.10. Para demostrar el directo es suficiente observar que para todo natural n se tiene que $(I[x])^{(n)} = I^{(n)}[x]$. Luego aplicando la definición de t-ideal (resp. de $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal), se concluye la demostración. □

Proposición 4.1.14 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ y sea x una indeterminada sobre R. Sea $I(x)$ la extensión del ideal I vía el morfismo de Nagata $R \to R(x) = R[x]_{\mathfrak{m}[x]}$. En tal situación se tiene que, I es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal) si y sólo si $I(x)$ es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal).*

Demostración: Como que $R \to R(x)$ es un morfismo fielmente plano entonces, aplicando la Proposición 4.1.10 tendremos que, si $I(x)$ es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal) entonces I es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal). Recíprocamente. Supongamos que I es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal). Entonces, por la Proposición 4.1.13 tendremos que $I[x]$ es un t-ideal (resp. un $\overline{t}, s, \overline{s}$-ideal). Como que $I(x)$ es un localizado de $I[x]$ entonces, aplicando la Proposición 4.1.3, se concluye la demostración. □

• Comportamiento por extensión finita:

Proposición 4.1.15 *Sea $R \subset A$ una extensión finita de anillos noetherianos y sea I un ideal de R. En tal situación se tiene que:*

(a) Supongamos que $\eta \cap A \in Ass\ R$ para todo $\eta \in Ass\ A$. En tal situación, si I es un t-ideal (resp. un s-ideal) entonces IA es un t-ideal (resp. un s-ideal).

(b) Supongamos que $\eta \cap A \in Min\ R$ para todo $\eta \in Min\ A$. En tal situación, si I es un $\overline{t}$-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) entonces IA es un $\overline{t}$-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal).

Demostración: Si vemos que $M(IA) = \Gamma(IA)$ entonces, aplicando los corolarios 3.4.5 y 3.5.5 deduciremos (a) y (b). Sea $\mathfrak{p}^* \in \Gamma(IA)$ y sea $\mathfrak{q}^*$ un ideal primo tal que $IA \subset \mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{p}^*$. Así tendremos que $I \subset \mathfrak{q}^* \cap R \subset \mathfrak{p}^* \cap R \in \Gamma(I)$ (Lema 3.1.7). Por otro lado, nuestras hipótesis implican que $\Gamma(I) = M(I)$ (corolarios 3.4.5 y 3.5.5). Luego tendremos que $\mathfrak{q}^* \cap R = \mathfrak{p}^* \cap R$, de donde se sigue que $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{q}^*$ (por ser la extensión entera). □

Ejemplo 4.1.16 Veamos que, en general, para una extensión finita $R \subset A$ el ideal IA puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}, s, \bar{s}$-ideal) aunque el ideal I no lo sea. Sea R un anillo noetheriano y sea A el cierre entero de R en su anillo total de fracciones. Así tenemos $R \subset A$ es una extensión entera (aunque en general no es finito generada). Sea I el ideal cero de R. Como que A es íntegramente cerrado entonces tendremos que, en particular, verifica la condición de Serre (S_1). Luego del Ejemplo 2.1.11 se sigue que IA es un t-ideal y un s-ideal, mientras que I es un t-ideal si y sólo si I es un s-ideal si y sólo si R verifica la condición de Serre (S_1).

4.2 Operaciones entre $\mathrm{t}, \bar{\mathrm{t}}$-(S)-ideales

En esta sección estudiaremos el comportamiento de los $t, \bar{t}$-(S)-ideales respecto de las operaciones entre ideales. Demostraremos que la condición $t, \bar{t}$-ideal es invariante por el radical (Proposición 4.2.2); demostraremos que la intersección y el producto de $t, \bar{t}$-(S)-ideales es un $t, \bar{t}$-(S)-ideal (Proposición 4.2.4); y analizaremos el comportamiento de los $t, \bar{t}$-ideales por la inclusión (Proposición 4.2.8). Como corolario de estos resultados relacionaremos la condición $t, \bar{t}$-ideal sobre los ideales primos de un anillo noetheriano con la condición $t, \bar{t}$-ideal sobre los ideales del anillo (Corolario 4.2.5 y Corolario 4.2.11). Los resultados establecidos en esta sección generalizan los expuestos por Verma en [59].

A lo largo de esta sección usaremos las siguientes notaciones. Dado un ideal I de un anillo noetheriano R, notaremos por $\Gamma(I)$ al conjunto de ideales primos $E(I)$ o $\overline{E}(I)$ según estudiemos los t-(S)-ideales o los $\bar{t}$-(S)-ideales. Y dado un sistema multiplicativo S de un anillo R, definimos el conjunto X_S de ideales primos de R como $X_S = \{\mathfrak{p}$ ideales primos de R tales que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

Lema 4.2.1 *Sean I y J dos ideales de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) Si $I \subset J$, entonces $\Gamma(I) \cap V(J) \subset \Gamma(J)$.

(b) $\Gamma(I) = \Gamma(r(I))$.

(c) $\Gamma(IJ) = \Gamma(I \cap J) \subset \Gamma(I) \cup \Gamma(J)$.

(d) $\Gamma(I) \cap \Gamma(J) \subset \Gamma(I) \cap V(J) \subset \Gamma(I + J)$.

Demostración: Veamos (a). Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma(I) \cap V(J)$. Así, $J \subset \mathfrak{p}$ y, además, existe un $z \in Ass\ R^*_{\mathfrak{p}}$ (resp. $z \in Min\ R^*_{\mathfrak{p}}$) tal que $\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}}$ es primo minimal de $IR^*_{\mathfrak{p}} + z$. Luego tendremos que $ht(\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}}) = ht(IR^*_{\mathfrak{p}} + z) \leq ht(JR^*_{\mathfrak{p}} + z) \leq ht(\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}})$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p}R^*_{\mathfrak{p}}$ es primo minimal de $JR^*_{\mathfrak{p}} + z$. Luego, $\mathfrak{p} \in \Gamma(J)$.

Demostremos (b). Por el apartado anterior se tiene que $\Gamma(I) \subset \Gamma(r(I))$ pues $V(I) = V(r(I))$. Veamos la inclusión contraria. Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma(r(I))$. Luego $\mathfrak{p} \in V(r(I)) = V(I)$ y, además, existe un $z \in Ass\ R^*_\mathfrak{p}$ (resp. $z \in Min\ R^*_\mathfrak{p}$) tal que $\mathfrak{p}R^*_\mathfrak{p}$ es primo minimal de $r(I)R^*_\mathfrak{p}+z$. Luego, $ht(\mathfrak{p}R^*_\mathfrak{p}) \geq ht(IR^*_\mathfrak{p}+z) = ht(r(IR^*_\mathfrak{p})+z) \geq ht(r(I)R^*_\mathfrak{p}+z) = ht(\mathfrak{p}R^*_\mathfrak{p})$, (recuérdese que, en general, el radical de la extensión de un ideal contiene a la extensión del radical del ideal). Así $\mathfrak{p}R^*_\mathfrak{p}$ es primo minimal de $IR^*_\mathfrak{p} + z$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$.

El apartado (c) es consecuencia de los dos primeros pues $IJ \subset I \cap J$, ambos ideales tienen el mismo radical, y $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

Para demostrar (d) basta observar que $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$, y aplicar (a). □

- **Invariancia por el radical:**

Proposición 4.2.2 *Sean I y J dos ideales de igual radical de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación se tiene que, I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) si y sólo si J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal). En particular, I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) si y sólo si J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal).*

Demostración: Por hipótesis, $r(I) = r(J)$. Luego $\Gamma(I) = \Gamma(J)$ (Lema 4.2.1.(b)). De donde, aplicando el Teorema 3.4.1 (resp. el Teorema 3.4.2) se sigue que, I es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) si y sólo si J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal). En particular, aplicando la equivalencia al sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\} = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(J)\}$ tendremos que, I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) si y sólo si J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). □

Veamos cómo podemos aplicar el resultado anterior. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. Supongamos que $I = r(J)$ con J un ideal equimúltiple de R. Supongamos que R es localmente quasi-unmixed. En tal situación tendremos que J es un $\bar{s}$-ideal (ver página 73 apartado (g)). Luego J es un $\bar{t}$-ideal y, por lo tanto, aplicando la proposición anterior tendremos que I es un $\bar{t}$-ideal. Más aún, si R es localmente unmixed entonces tendremos que I es un t-ideal (página 63 apartado (a)). En particular tendremos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.3 *Los ideales radicalmente intersección completa de los anillos noetherianos localmente quasi-unmixed son $\bar{t}$-ideales, y los ideales radicalmente intersección completa de los anillos noetherianos localmente unmixed son t-ideales.*

- **Intersección y producto:**

Proposición 4.2.4 *Sean I y J dos ideales de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) Sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que I y J son t-(S)-ideales (resp. $\bar{t}$-(S)-ideales). Entonces $I \cap J$ e IJ son t-(S)-ideales (resp. $\bar{t}$-(S)-ideales).

(b) *Supongamos que $M(I) \cup M(J) \subset M(I \cap J)$. En tal situación, si I y J son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales), entonces $I \cap J$ e IJ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales).*

Demostración: Demostremos (a). Por hipótesis $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I)\}$ y $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(J)\}$, (teoremas 3.4.1 y 3.4.2). Luego $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I) \cup \Gamma(J)\} \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I \cap J)\}$ (Lema 4.2.1.(c)). De donde se sigue que $I \cap J$ es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) y, como que $r(IJ) = r(I \cap J)$, aplicando la Proposición 4.2.2 se tendrá que IJ es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal).

Demostremos (b). Notemos $S_1 = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$, $S_2 = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(J)\}$ y $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I \cap J)\}$. Por hipótesis tenemos que $S \subset S_1 \cap S_2$. Luego I y J son t-(S)-ideales (resp. $\bar{t}$-(S)-ideales) y, aplicando el apartado (a), tendremos que también lo serán los ideales $I \cap J$ e IJ, como queríamos demostrar. □

Corolario 4.2.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, si los primos minimales de I son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales), entonces I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). En particular, para un anillo noetheriano R se tiene que:*

(a) *Todos los ideales de R son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales) si y sólo si lo son todos los ideales primos de R.*

(b) *Todos los ideales de R de altura $\dim R - 1$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales) si y sólo si lo son todos los ideales primos de R de altura $\dim R - 1$.*

Demostración: Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ los primos minimales de un ideal I de un anillo noetheriano R. Supongamos que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales). Luego, de la Proposición 4.2.4.(b) se sigue que $r(I) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) y, por lo tanto, también lo será I (Proposición 4.2.2).

Demostremos (a). El directo es obvio. Veamos el recíproco. Supongamos que todos los ideales primos de R son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales). Sea I un ideal de R. En particular tendremos que los primos minimales de I son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales) y, por lo tanto, también lo es I.

Demostremos (b). El directo es obvio. Veamos el recíproco. Supongamos que todos los ideales primos de R de altura $\dim R - 1$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales). Sea I un ideal de R de altura $\dim R - 1$. Luego $M(I) \subset \{\mathfrak{p}$ ideal primo de R de altura $ht(\mathfrak{p}) \geq \dim R - 1\}$. Luego, o bien $ht(\mathfrak{p}) = \dim R - 1$, o bien $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de R. Si $ht(\mathfrak{p}) = \dim R - 1$ entonces, por hipótesis, $\mathfrak{p}$ es un t-ideal (resp. $\bar{t}$-ideal). Y si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de R entonces, del Ejemplo 2.1.10 se sigue que $\mathfrak{p}$ es un t-ideal (resp. $\bar{t}$-ideal). En particular tendremos que los primos minimales de I son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales) y, por lo tanto, también lo será I. □

Para concluir este apartado veamos que, si I y J son dos ideales de un anillo noetheriano R, entonces su intersección y producto pueden ser t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales), aunque los ideales I y J no lo sean. Más aún, veamos que el recíproco del Corolario 4.2.5 no es cierto en general, es decir, que un ideal puede ser un $t, \bar{t}$-ideal aunque no lo sean sus primos minimales.

Ejemplo 4.2.6 Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. Supongamos que I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). En tal situación, para todo ideal J de R tal que $I \subset J$

tendremos que $I \cap J$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) y, por lo tanto, también lo será IJ (pues $r(I \cap J) = r(IJ)$). Así, la intersección y el producto de dos ideales I y J puede ser un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal), aunque éstos no lo sean.

Ejemplo 4.2.7 Sea I el ideal cero de un anillo local noetheriano completo $(R, \mathfrak{m})$ de dimensión $\dim R = 1$. Supongamos que R verifica la condición de Serre (S_1) y que tiene, como mínimo, dos primos minimales. Como que R verifica la condición de Serre (S_1), en particular tendremos que I es un t-ideal y un $\bar{t}$-ideal (Ejemplo 2.1.11). Pero los primos minimales de I (que son los primos minimales de R), no son ni t-ideales ni $\bar{t}$-ideales (página 64 apartados (e) y (f)). Luego, un ideal puede ser un $t, \bar{t}$-ideal aunque no lo sean sus primos minimales.

- **Comportamiento por inclusión:**

Proposición 4.2.8 *Sean $I \subset J$ dos ideales de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) Sea S un sistema multiplicativo de R tal que $V(I) \subset V(J) \cup X_S$. En tal situación, si J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal), entonces también lo es I.

(b) Supongamos que existe un conjunto Σ de ideales primos de R tal que $M(J) \cup \Sigma \subset M(I)$ y tal que $V(I) \subset V(J) \cup \Sigma$. En tal situación, si J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal), entonces también lo es I.

(c) Sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, si J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal), entonces existe un sistema multiplicativo S' de R con $S' \subset S$ y tal que I es un t-(S')-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S')-ideal).

(d) Supongamos que $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local. En tal situación, si existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal), entonces existe un sistema multiplicativo S' de R con $\mathfrak{m} \cap S' \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S')-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S')-ideal).

Demostración: Demostremos (a). Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma(I)$. Por lo tanto $\mathfrak{p} \in V(I) \subset V(J) \cup X_S$ de donde se sigue que o bien $\mathfrak{p} \in V(J)$ o bien $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Pero si $\mathfrak{p} \in V(J)$ entonces, por el Lema 4.2.1.(a), tendremos que $\mathfrak{p} \in \Gamma(J)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Luego $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Gamma(I)\}$, con lo que se concluye la demostración al aplicar el Teorema 3.4.1 (resp. el Teorema 3.4.2).

Demostremos (b). Consideremos los sistemas multiplicativos $S_1 = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(J)\}$, $S_2 = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Sigma\}$ y $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Por hipótesis tenemos que $V(I) \subset V(J) \cup X_S$. Como que $S \subset S_1 \cap S_2$, entonces tendremos que J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal) de donde, aplicando (a), se sigue que I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal).

Demostremos (c). Sea Υ el conjunto de ideales primos de R definido por $\Upsilon = \{\mathfrak{p} \in V(I)$ tales que $J \not\subset \mathfrak{p}\}$. Consideremos el sistema multiplicativo $T = R - \cup\{\mathfrak{p} \in \Upsilon\}$, y sea S' cualquier sistema multiplicativo de R tal que $S' \subset S \cap T$. Luego J es un t-(S')-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S')-ideal) y, además, se tiene que $V(I) \subset V(J) \cup X_T \subset V(J) \cup X_{S'}$. De donde, aplicando el apartado (a) se sigue que I es un t-(S')-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S')-ideal).

Para finalizar, demostremos (d). Supongamos que existe un sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ tal que J es un t-(S)-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S)-ideal). Entonces, aplicando el Teorema 3.4.3 (resp. el Teorema 3.4.4), tendremos que $ht(IR^* + z) < \dim R^*$ para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$). Luego para todo primo asociado $z \in Ass\ R^*$ (resp. para todo primo minimal $z \in Min\ R^*$), tendremos que $ht(JR^* + z) \leq ht(IR^* + z) < \dim R^*$. De donde, aplicando otra vez el Teorema 3.4.3 (resp. el Teorema 3.4.4) se sigue que existirá un sistema multiplicativo S' de R con $\mathfrak{m} \cap S' \neq \emptyset$ tal que I es un t-(S')-ideal (resp. un $\bar{t}$-(S')-ideal), con lo que se concluye la demostración de la proposición. □

Comentario 4.2.9 Sean I_1 e I_2 dos ideales de un anillo noetheriano R. Consideremos las inclusiones $I_1I_2 \subset I_1 \cap I_2 \subset I_1 \subset I_1 + I_2$. Veamos que I_1I_2, $I_1 \cap I_2$ e $I_1 + I_2$ pueden ser $t, \bar{t}$-ideales sin serlo ni I_1 ni I_2. Por ejemplo, sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano completo de dimensión $\dim R = 1$ tal que R verifica la condición de Serre (S_1) y tal que tiene dos primos minimales I_1 e I_2. Como que R verifica la condición de Serre (S_1), en particular tendremos que $I_1 \cap I_2 = r(0)$ es un t-ideal y un $\bar{t}$-ideal (Ejemplo 2.1.11) y, por lo tanto, también lo será I_1I_2 (Proposición 4.2.4.(b)). Además, $I_1 + I_2$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Luego $I_1 + I_2$ es un t-ideal y un $\bar{t}$-ideal (Ejemplo 2.1.10). Pero I_1 e I_2 no son ni t-ideales ni $\bar{t}$-ideales (página 64 apartados (e) y (f)).

Corolario 4.2.10 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano d-dimensional y sea I un ideal de R de altura $d - 1$. Supongamos que existe un ideal J de R de altura $d - 1$ tal que $I \subset J$ y tal que J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). En tal situación, I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal).*

Demostración: Sea J un ideal de R de altura $d - 1$ tal que $I \subset J$ y tal que J es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). Por hipótesis tenemos que $V(J) = M(J) \cup \{\mathfrak{m}\} \subset M(I) \cup \{\mathfrak{m}\} = V(I)$. Sea $\Sigma = M(I)$. Luego $M(J) \cup \Sigma \subset M(I)$ y $V(I) \subset V(J) \cup \Sigma$. De donde, aplicando la Proposición 4.2.8.(b) se sigue que I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal), como queríamos demostrar. □

Corolario 4.2.11 *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo noetheriano d-dimensional. Sea $i \leq d - 2$ un natural. En tal situación, todo ideal I de R de altura $i \leq ht(I) \leq d - 2$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) si y sólo si todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R de altura $i \leq ht(\mathfrak{p}) \leq d - 2$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal).*

Demostración: Supongamos que todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R de altura $i \leq ht(\mathfrak{p}) \leq d - 2$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). Sea I un ideal de R de altura $i \leq ht(I) \leq d - 2$. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r$ los primos minimales de I. Supongamos que $ht(I) \leq ht(\mathfrak{p}_j) \leq d-2$ para $1 \leq j \leq l$. Por hipótesis tenemos que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales). Por otro lado, como que $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local entonces $V(\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{m}\}$ para $l + 1 \leq i \leq r$, de donde se sigue que $V(I) \subset V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_l) \cup \{\mathfrak{p}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Luego, para concluir la demostración es suficiente con demostrar que si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ son los primos minimales de un ideal I de un anillo noetheriano R tal que $V(I) \subset V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_l) \cup \{\mathfrak{p}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ para cierto natural $1 \leq l \leq r$, y tal que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales), entonces I es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal).

Sea $\Sigma = \{\mathfrak{p}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Sea $J = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$. Por hipótesis $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ son t-ideales (resp. $\bar{t}$-ideales). Luego, de la Proposición 4.2.4 se sigue que $J = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal). Por hipótesis $V(r(I)) = V(I) \subset V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_l) \cup \Sigma$. Luego $V(r(I)) \subset V(J) \cup \Sigma$. Además tenemos que $M(J) \cup \Sigma \subset M(I) = M(r(I))$. De donde, aplicando la Proposición 4.2.8.(b) a la inclusión $r(I) \subset J$, se sigue que $r(I)$ es un t-ideal (resp. un $\bar{t}$-ideal) y, por lo tanto, también lo será I (Proposición 4.2.2). □

4.3 Operaciones entre s, $\bar{\text{s}}$-(S)-ideales

A diferencia de la sección anterior, el hecho de no tener un resultado análogo al Lema 4.2.1 para los conjuntos de ideales primos $U(I)$ y $\overline{U}(I)$, será uno de los motivos que nos dificultará el estudio del comportamiento de los $s, \bar{s}$-(S)-ideales respecto de las operaciones usuales entre ideales. De hecho, el estudio que en esta sección vamos a realizar se centrará, exclusivamente, en el comportamiento por el radical y, aún en este caso, no obtendremos un resultado general positivo. Veremos que las condiciones de $s, \bar{s}$-ideal no se conservan, en general, por el paso al radical (Ejemplo 4.3.1); que se conservan por las potencias de un ideal (Proposición 4.3.2); que son invariantes por reducciones, reducciones minimales y por la clausura entera (Proposición 4.3.4); y que, bajo ciertas condiciones, se conservan por las potencias simbólicas de un ideal (Proposición 4.3.3).

Ejemplo 4.3.1 Sea $R = K[x, y, z]$ el anillo de polinomios en tres variables sobre un cuerpo K. Sea $\mathfrak{p}$ el ideal primo de R definido por el núcleo del morfismo $\varphi : K[x, y, z] \to K[t]$ donde $\varphi(x) = t^3$, $\varphi(y) = t^4$ y donde $\varphi(z) = t^5$. En tal situación [31, p.137], tenemos que $\mathfrak{p} = (xz - y^2, x^3 - yz, yx^2 - z^2)$ es un ideal primo radicalmente intersección completa y minimalmente generado por tres elementos. Sea I un ideal de R intersección completa que define $\mathfrak{p}$ radicalmente. Veamos que I es un $s, \bar{s}$-ideal pero que $\mathfrak{p} = r(I)$ no es un $s, \bar{s}$-ideal. Como que I es un ideal de la clase principal de un anillo Cohen-Macaulay, entonces tendremos la igualdad entre sus potencias ordinarias y simbólicas y, en particular, tendremos que I es un $s, \bar{s}$-ideal (Ejemplo 2.1.14). Veamos que $\mathfrak{p} = r(I)$ no es un $s, \bar{s}$-ideal. Sea $\mathfrak{m} \in V(I) = V(\mathfrak{p})$ el ideal maximal de R definido por $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Tenemos que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ es un ideal de coaltura uno no intersección completa (pues se ve que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ es un ideal de altura dos minimalmente generado por tres elementos) del dominio local Cohen-Macaulay $R_\mathfrak{m}$. Pero $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ es un ideal genéricamente intersección completa (pues $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ es el ideal maximal del anillo local regular $R_\mathfrak{p}$). Luego, de la Proposición 3.6.6 se sigue que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ no es un $s, \bar{s}$-ideal y, por lo tanto, $r(I) = \mathfrak{p}$ no es un $s, \bar{s}$-ideal (Proposición 4.1.4).

Proposición 4.3.2 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

(ii) Para todo natural $m \geq 1$ se tiene que I^m es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

(iii) Existe un natural $m \geq 1$ tal que I^m es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

Demostración: Demostremos que (i) implica (ii). Supongamos que I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). Luego, por definición, existirá un natural k tal que para todo $n \geq 0$ se tendrá que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ (resp. $S(I^{n+k}) \subset \overline{I^n}$). Así, fijado un natural $m \geq 1$ se tendrá que, para todo $n \geq 0$, $S((I^m)^{n+k}) = S(I^{m(n+k)}) = S(I^{mn+(m-1)k+k}) \subset I^{mn+(m-1)k} \subset I^{mn} = (I^m)^n$ (resp. $S((I^m)^{n+k}) \subset \overline{(I^m)^n}$). Y, por lo tanto, I^m es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). Luego (i) implica (ii).

Obviamente (ii) implica (iii).

Para concluir la demostración hemos de ver que (iii) implica (i). Supongamos que I^m es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). Luego existe un natural k tal que $S((I^m)^{n+k}) \subset (I^m)^n$ para todo n (resp. $S((I^m)^{n+k}) \subset \overline{(I^m)^n}$). Sea $k' = m(k+2)$. Veamos que $S(I^{n+k'}) \subset I^n$ para todo n (resp. $S(I^{n+k'}) \subset \overline{I^n}$). Dado un natural n, sean c y r naturales tales que $n + m = cm + r$ con $0 \leq r \leq m - 1$. Así se tendrá que $n + k' = (n + m) + m + mk \geq cm + m + mk = (c+1)m + mk$. De donde se sigue que $S(I^{n+k'}) \subset I^{(c+1)m}$ (resp. $S(I^{n+k'}) \subset \overline{I^{(c+1)m}}$). Y, como que $(c+1)m \geq cm + r \geq n$, entonces se tendrá que $I^{(c+1)m} \subset I^n$ (resp. $\overline{I^{(c+1)m}} \subset \overline{I^n}$), con lo que se concluye la demostración. □

Proposición 4.3.3 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Consideremos las siguientes condiciones:*

(i) I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

(ii) Para todo natural $m \geq 1$ se tiene que $S(I^m)$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

En tal situación, siempre se tiene que (i) implica (ii) y, se tiene la equivalencia en el caso en que exista un natural $m_0 \geq 1$ tal que $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I^{m_0}\}$, en cuyo caso, las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(iii) $S(I^{m_0})$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal).

Demostración: En primer lugar obsérvese que, para cualquier par de números naturales n y m se tiene que $S(S(I^m)^n) = (I^m|^{ec})^n|^{ec} = (I^m|^{ece})^n|^c = (I^m|^e)^n|^c = I^{nm}|^{ec} = S(I^{nm})$, (donde e y c denotan la extensión y la contracción vía el morfimo de localización $R \to S^{-1}R$). Así, para cualquier par de números naturales n y m se tendrá que $S(S(I^m)^n) = S(S(I^n)^m) = S(I^{mn})$.

Veamos que (i) implica (ii). Supongamos que I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). Sea $m \geq 1$ un natural. Queremos demostrar que $S(I^m)$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). De la Proposición 4.3.2 se sigue que podemos suponer que $m = 1$ (pues si I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal), entonces también lo es I^m). Luego hemos de ver que si I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal), entonces también lo es $S(I)$. Como que I es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal) entonces, por definición, existirá un natural $k \geq 0$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ (resp. $S(I^{n+k}) \subset \overline{I^n}$). Así, para todo natural $n \geq 0$ tendremos que, $S(S(I)^{n+k}) = S(I^{n+k}) \subset I^n \subset S(I)^n$ (resp. $S(S(I)^{n+k}) \subset \overline{S(I)^n}$). Y, por lo tanto, $S(I)$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal), como queríamos demostrar. Luego (i) implica (ii).

Demostremos la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii) en el caso en que exista un natural $m_0 \geq 1$ tal que $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I^{m_0}\}$. Para ello es suficiente con demostrar que (iii) implica (i). Por hipótesis $m_0 \geq 1$ es tal que $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I^{m_0}\}$. Luego $I^{m_0} = S(I^{m_0})$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\bar{s}$-(S)-ideal). De donde, aplicando la Proposición 4.3.2 se sigue que también lo es I. □

Proposición 4.3.4 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

(ii) Toda reducción J de I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

(iii) Existe una reducción J de I tal que J es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

(iv) $\overline{I}$ es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

Demostración: Veamos que (i) implica (ii). Sea $J \subset I$ una reducción de I. Luego, por definición, existe un natural ξ tal que $JI^{\xi} = I^{\xi+1}$ y, por lo tanto, $J^nI^{\xi} = I^{\xi+n}$ para todo $n \geq 0$. Supongamos que I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal). Luego existe un natural k' tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $S(I^{n+k'}) \subset I^n$ (resp. $S(I^{n+k'}) \subset \overline{I^n}$). Consideremos $k = \xi + k'$. Entonces, para todo $n \geq 0$ tendremos que $S(J^{n+k}) = S(J^{n+\xi+k'}) \subset S(I^{n+\xi+k'}) \subset I^{n+\xi} = J^nI^{\xi} \subset J^n$ (resp. $S(J^{n+k}) \subset \overline{J^n}$). Por lo tanto, J es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal).

Obviamente se tiene que (ii) implica (iii).

Veamos que (iii) implica (i). Sea $J \subset I$ una reducción de I tal que J es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal). Luego existe un natural ξ tal que $JI^{\xi} = I^{\xi+1}$ y, por lo tanto, $J^nI^{\xi} = I^{\xi+n}$ para todo $n \geq 0$ y, además, existe un natural k' tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $S(J^{n+k'}) \subset J^n$ (resp. $S(J^{n+k'}) \subset \overline{J^n}$). Consideremos $k = \xi + k'$. Entonces, para todo $n \geq 0$ tendremos que $S(I^{n+k}) = S(I^{n+\xi+k'}) = S(J^{n+k'}I^{\xi}) \subset S(J^{n+k'}) \subset J^n \subset I^n$ (resp. $S(I^{n+k}) \subset \overline{I^n}$). Por lo tanto, I es un s-(S)-ideal (resp. un $\overline{s}$-(S)-ideal), como queríamos demostrar.

Luego tenemos la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii).

Para concluir la demostración, veamos la equivalencia con (iv). Para ello basta con observar que si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ son dos ideales de un anillo noetheriano A, entonces $\mathfrak{b}$ es una reducción de $\mathfrak{a}$ si y sólo si $\overline{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}}$. En particular tendremos que $I \subset \overline{I}$ es una reducción de $\overline{I}$. Luego de la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii) aplicadas al ideal $\overline{I}$ y a la reducción I, se concluye la demostración. □

Corolario 4.3.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si para todo natural $m \geq 1$ se tiene que I^m es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si existe un natural $m \geq 1$ tal que I^m es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal).

(b) Si I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal), entonces para todo natural $m \geq 1$ se tiene que $I^{(m)}$ es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal). Además, el recíproco es cierto si existe un natural $m_0 \geq 1$ tal que I^{m_0} carece de componentes sumergidas, en cuyo caso también se tiene la equivalencia con $I^{(m_0)}$ es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal).

(c) I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si toda reducción J de I es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si existe una reducción J de I tal que J es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal) si y sólo si $\overline{I}$ es un s-ideal (resp. un $\overline{s}$-ideal).

Demostración: Todos los ideales que aparecen en el enunciado tienen el mismo radical. Luego, aunque en un principio trabajamos con las potencias simbólicas de un ideal respecto del sistema multiplicativo definido por el complementario de sus primos minimales, en realidad trabajamos con un único sistema multiplicativo S de R (el sistema $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$). Aplicando las proposiciones 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4 se concluye la demostración. □

Comentario 4.3.6 Las proposiciones anteriores nos dan tres situaciones en las que la equivalencia lineal es invariante por radical. En efecto. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que I e I^n son ideales de igual radical; que si I es un $s, \bar{s}$-(S)-ideal entonces para todo natural n se tiene que I y $S(I^n)$ tiene el mismo radical (pues si I es un $s, \bar{s}$-(S)-ideal, entonces $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\} = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/r(I)\}$ y, por lo tanto, $r(S(I^m)) = r(I^m|^{ec}) = r(I^m)|^{ec} = r(I)|^{ec} = r(I)$); y que si J es una reducción de I, entonces I y J tienen igual radical.

Comentario 4.3.7 Sabemos que los $t, \bar{t}$-(S)-ideales están caracterizados por ciertas desigualdades entre alturas y dimensiones (teoremas 3.4.1 y 3.4.2), mientras que los $s, \bar{s}$-(S)-ideales están caracterizados por ciertas desigualdades entre dispersiones analíticas y dimensiones (teoremas 3.5.1 y 3.5.2). Así, es natural esperar que ser $t, \bar{t}$-(S)-ideal sea invariante por radical pues, obviamente, la altura de un ideal lo es. Mientras que es natural esperar que ser $s, \bar{s}$-(S)-ideal sea invariante por radical si y sólo si lo es la dispersión analítica. Es aquí donde reside el problema pues, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo local noetheriano $(A, \mathfrak{n})$ entonces:

(a) En general, $l(\mathfrak{a}) \neq l(r(\mathfrak{a}))$, (por ejemplo, con las notaciones del Ejemplo 4.3.1, tenemos que $l(IR_{\mathfrak{m}}) = 2$ pues $IR_{\mathfrak{m}}$ es un ideal intersección completa y, por lo tanto, equimúltiple; mientras que $l(r(IR_{\mathfrak{m}})) = l(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}) = 3$).

(b) Para todo natural n se tiene que $l(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{a}^n)$, [53, Prop. 2.5].

(c) En general, $l(\mathfrak{a}) \neq l(\mathfrak{a}^{(n)})$, (véase el Ejemplo 5.1.13 de donde además se sigue que, en general, las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 4.3.3 no son equivalentes).

(d) Si $\mathfrak{b}$ es una reducción de $\mathfrak{a}$, entonces $l(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{b})$, (pues la dispersión analítica de un ideal es el mínimo número de generadores de una reducción minimal del ideal). En particular, $l(\mathfrak{a}) = l(\bar{\mathfrak{a}})$, (pues $\mathfrak{a}$ es una reducción de $\bar{\mathfrak{a}}$).

5 Álgebras asociadas a filtraciones simbólicas

En este capítulo se estudiarán la generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees simbólica, así cómo la relación existente entre las potencias simbólicas de un ideal y propiedades del anillo graduado asociado al ideal.

5.1 Propiedades de finitud del álgebra de Rees simbólica

Dado un ideal I de un anillo noetheriano R y dado un sistema multiplicativo S de R, definimos el *álgebra de Rees* (S)*-simbólica asociada al ideal* I, que notaremos por $R((S),I)$, como el álgebra de Rees asociada a la filtración (S)-simbólica $\{S(I^n)\}_{n\geq 0}$. Es decir, $R((S),I) = \oplus_{n\geq 0}S(I^n)$. Así tenemos una extensión de R-álgebras graduadas $R(I) \subset R((S),I)$.

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades de generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S),I)$. Los resultados que se expondrán (proposiciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3) se obtendrán al combinar el estudio realizado de las álgebras de Rees asociadas a una filtración (Sección 1.3), junto con las caracterizaciones de los $s,\overline{s}$-(S)-ideales (Sección 3.5). Los resultados que obtendremos generalizan las caracterizaciones que en esta dirección se establecen en los trabajos de Cowsik [11], Goto-Herrmann-Nishida-Villamayor [16], Huneke [24, 25], McAdam [34], Morales [38], Ooishi [42], Rees [47] y Schenzel [52, 53, 54].

• Generación finita, noetherianidad y dependencia entera:

Proposición 5.1.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R((S),I)$ *es un $R(I)$-módulo finito generado.*

(ii) I *es un s-(S)-ideal.*

(iii) Existe un natural $k \geq 0$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $S(I^{n+k}) = I^nS(I^k)$.

(iv) $l((IR_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

(v) $l((IR_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in U(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

En el caso particular en que el anillo R sea localmente unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(vi) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(vii) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R((S), I) = \dim R(I)$.

Demostración: Sea $\mathcal{J} = \{S(I^n)\}_{n\geq 0}$ la I-filtración definida por las potencias (S)-simbólicas de I. De la Proposición 1.3.5 aplicada a la I-filtración $\mathcal{J}$ se sigue que las condiciones (i) y (iii) son equivalentes y, además, que estas condiciones son también equivalentes a que $\mathcal{J}$ es una s-I-filtración. Pero, por definición, $\mathcal{J}$ es una s-I-filtración si y sólo si I es un s-(S)-ideal. Luego se tiene la equivalencia entre las condiciones (i), (ii) y (iii).

La equivalencia entre las condiciones (ii), (iv) y (v) se sigue de la caracterización de los s-(S)-ideales dada en el Teorema 3.5.1.

En el caso localmente unmixed tendremos que I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\overline{s}$-(S)-ideal (página 73 apartado (a)) de donde, aplicando el Corolario 3.5.7, se obtiene la equivalencia con las condiciones (vi) y (vii).

La igualdad de dimensiones se sigue de la Proposición 1.3.5. □

Proposición 5.1.2 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R((S), I)$ *es un anillo noetheriano.*

(ii) $R((S), I)$ *es una R-álgebra finito generada.*

(iii) Existe un natural $k \geq 1$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $S(I^{kn}) = S(I^k)^n$.

(iv) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $S(I^k)$ es un s-(S)-ideal.

(v) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $l((S(I^k)R_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(S(I^k))$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

(vi) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $l((S(I^k)R_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in U(S(I^k))$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo asociado* $z \in Ass\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

En el caso particular en que el anillo R sea localmente unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(vii) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $l(S(I^k)R_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(S(I^k))$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(viii) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $l(S(I^k)R_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \overline{U}(S(I^k))$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R((S), I) = \dim R(S(I))$.

Demostración: Sea $\mathcal{J}$ la I-filtración de R definida por las potencias (S)-simbólicas asociadas al ideal I, es decir $\mathcal{J} = \{S(I^n)\}_{n\geq 0}$. Así tendremos que para todo natural k la filtración $\mathcal{J}_k = \{J_{kn}\}_{n\geq 0} = \{S(I^{nk})\}_{n\geq 0} = \{S(S(I^k)^n)\}_{n\geq 0}$ es la filtración (S)-simbólica asociada al ideal $S(I^k)$ (ver la primera parte de la demostración de la Proposición 4.3.3). Luego, aplicando la Proposición 1.3.6, se sigue que las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes y, además, que estas condiciones son también equivalentes a que $\mathcal{J}_k$ es una

s-$S(I^k)$-filtración. Pero $\mathcal{J}_k$ es una s-$S(I^k)$-filtración si y sólo si $S(I^k)$ es un s-(S)-ideal. Luego las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) son equivalentes.

La equivalencia entre las condiciones (iv), (v) y (vi) es consecuencia de la caracterización de los s-(S)-ideales dada en el Teorema 3.5.1 y, como en la demostración de la proposición anterior, la equivalencia en el caso localmente unmixed se sigue al aplicar el Corolario 3.5.7.

La igualdad de dimensiones se sigue de la Proposición 1.3.6. □

Proposición 5.1.3 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R((S), I)$ *es entera sobre* $R(I)$.

(ii) $S(I^n) \subset \overline{I^n}$ *para todo* $n \geq 0$.

(iii) I *es un* $\overline{s}$-(S)-*ideal.*

(iv) $l((IR_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo minimal* $z \in Min\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

(v) $l((IR_{\mathfrak{q}}^* + z)/z) < \dim(R_{\mathfrak{q}}^*/z)$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ *y para todo primo minimal* $z \in Min\ R_{\mathfrak{q}}^*$.

En el caso particular en que el anillo R sea localmente quasi-unmixed, entonces las condiciones anteriores también son equivalentes a:

(vi) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

(vii) $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in \overline{U}(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En particular, si se verifica una de las condiciones anteriores entonces se tendrá que $\dim R((S), I) = \dim R(I)$.

Demostración: De la Proposición 1.3.7 se sigue que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes. Aplicando el Lema 2.1.9.(b) tendremos la equivalencia con (iii) y, de la caracterización de los $\overline{s}$-(S)-ideales dada en el Teorema 3.5.2, se seguirá la equivalencia con las condiciones (iv) y (v). La equivalencia en el caso localmente quasi-unmixed se sigue del Corolario 3.5.7. La igualdad de dimensiones se sigue de la Proposición 1.3.7. □

• Comentarios, corolarios y ejemplos:

Comentario 5.1.4 Sean I y J dos ideales de un anillo noetheriano R. En tal situación, se define el álgebra de Rees $R_J(I)$ como $R_J(I) = \oplus_{n\geq 0}(I^n : \langle J \rangle)$. Es decir, $R_J(I)$ es el álgebra de Rees asociada a la filtración $\{I^n : \langle J \rangle\}_{n\geq 0}$. Esta filtración es una filtración (S)-simbólica para cierto sistema multiplicativo S de R (Lema 2.1.5). Luego, podemos entender el álgebra de Rees $R_J(I)$ como una álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ y, por lo tanto, podemos caracterizar su generación finita, noetherianiad y depenencia entera. Para ello, únicamente hemos de reescribir las proposiciones anteriores relativas a las álgebras de Rees simbólicas, y tener presente que, ahora: S es el sistema multiplicativo del Lema 2.1.5; que la n-(S)-ésima potencia simbólica de I es $S(I^n) = I^n : \langle J \rangle$; y que la condición "$\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$" la podemos reemplazar por "$\mathfrak{q} \in V(J)$". Las caracterizaciones que así obtenemos generalizan los resultados expuestos por McAdam en [34] y por Schenzel en [52, 53, 54], y nos da un nuevo punto de vista de los resultados que, en esta dirección se establecen en Goto-Herrmann-Nishida-Villamayor [16].

Además de las caracterizaciones dadas en las proposiciones anteriores, la generación finita, noetherianidad y dependencia entera del álgebra de Rees (S)-simbólica también admite caracterizaciones mediante la anulación de morfismos naturales entre grupos 0-ésimos de cohomología local y mediante la anulación de ciertos morfismos naturales asociados al functor Ext. Para ello basta con tener presente las caracterizaciones homológicas de los $s, \bar{s}$-(S)-ideales expuestas en la Sección 3.5. Además, combinando las proposiciones anteriores y los resultados expuestos en la Sección 3.7 tendremos resultados del siguiente estilo:

Corolario 5.1.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$ un sistema multiplicativo de R. Supongamos que el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es o bien un anillo noetheriano o bien entera sobre $R(I)$. En tal situación se tendrá que $cd_{IR_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que en las hipótesis en que estamos tenemos que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

Supongamos, en primer lugar, que $R((S), I)$ es un anillo noetheriano. Luego existirá un natural $k \geq 1$ tal que $S(I^k)$ es un s-(S)-ideal (Proposición 5.1.2). En particular tendremos que $S(I^k)$ es un $\bar{t}$-(S)-ideal. Por hipótesis se tiene que $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Luego I y $S(I^k)$ son ideales de igual radical (veáse Comentario 4.3.6) y, por lo tanto, el ideal I también es un $\bar{t}$-(S)-ideal (Proposición 4.2.2).

Supongamos, ahora, que $R((S), I)$ es entera sobre $R(I)$. Entonces tendremos que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal (Proposición 5.1.3) y, por lo tanto, I es un $\bar{t}$-(S)-ideal.

Luego, en las hipótesis en que estamos tenemos que I es un $\bar{t}$-(S)-ideal de donde, aplicando la Proposición 3.7.10 tendremos que $H_I^{ht(\mathfrak{q})}(R) \otimes_R R_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, como queríamos demostrar. □

Ejemplo 5.1.6 Como caso particular del corolario anterior tenemos que si I es un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ tal que, para algún sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es o bien un anillo noetheriano o bien entera sobre $R(I)$, entonces $cd_I(R) < \dim R$. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, consideremos un ideal primo $\mathfrak{p}$ no intersección completa de altura $ht(\mathfrak{p}) = d - 1$ de un anillo local regular d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. En tal situación (ver Ejemplo 3.7.16) se tiene que $\mathfrak{p}$ es un $\bar{t}$-ideal, que $H_\mathfrak{p}^d(R) = 0$, y que $l(\mathfrak{p}) = \dim R$. Como que $H_\mathfrak{p}^d(R) = 0$ entonces, por definición, $cd_\mathfrak{p}(R) < \dim R$. Por otro lado, como que $l(\mathfrak{p}) = \dim R$ entonces tendremos que $\mathfrak{p}$ no es un s-ideal ni es un $\bar{s}$-ideal (página 73 apartados (e) y (f)) y, por lo tanto, su álgebra de Rees simbólica asociada no es ni anillo noetheriano ni entera sobre $R(\mathfrak{p})$.

Un resultado del mismo estilo que el corolario anterior es el siguiente corolario (Corolario 5.1.7), que es una generalización de un resultado de Cowsik [11]. Recuérdese que, para un ideal J de un anillo noetheriano R se define su rango aritmético como $ara(J) = \min\{s \geq 0$ para los que existen $a_1, \ldots, a_s \in R$ con $r(J) = r((a_1, \ldots, a_s))\}$. Es obvio que $ara(J) \leq \mu(J)$, y que si J' es un ideal con $r(J) = r(J')$, entonces $ara(J) = ara(J')$.

Corolario 5.1.7 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente unmixed R y sea $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$ un sistema multiplicativo de R. Supongamos que el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es o bien un anillo noetheriano o bien entera sobre $R(I)$. En tal situación se tendrá que $ara(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ tal que el cuerpo residuo $k(\mathfrak{q})$ es infinito.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es entera sobre $R(I)$. En tal situación, de la Proposición 5.1.3 se sigue que $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ tal que el cuerpo residuo $k(\mathfrak{q})$ es infinito. Sea $J_\mathfrak{q}$ una reducción minimal de $I_\mathfrak{q}$. Luego $ara(I_\mathfrak{q}) = ara(J_\mathfrak{q}) \leq \mu(J_\mathfrak{q}) = l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$, como queríamos demostrar.

Para concluir la demostración hemos de ver que si el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es un anillo noetheriano, entonces $ara(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ tal que el cuerpo residuo $k(\mathfrak{q})$ es infinito. Por hipótesis, y aplicando la Proposición 5.1.2, se sigue que existe un natural $k \geq 1$ tal que $l(S(I^k)R_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Supongamos que el cuerpo residuo $k(\mathfrak{q})$ es infinito. Sea $J_\mathfrak{q}$ una reducción minimal de $S(I^k)R_\mathfrak{q}$. Luego $ara(S(I^k)R_\mathfrak{q}) = ara(J_\mathfrak{q}) \leq \mu(J_\mathfrak{q}) = l(S(I^k)R_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$. Por otro lado, por hipótesis se tiene que $S \subset R - \cup\{\mathfrak{p} \in M(I)\}$. Luego $I_\mathfrak{q}$ y $S(I^k)R_\mathfrak{q}$ son ideales de igual radical (veáse Comentario 4.3.6). De donde se sigue que $ara(I_\mathfrak{q}) = ara(S(I^k)R_\mathfrak{q})$ y, por lo tanto, $ara(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$, con lo que se concluye la demostración del corolario. □

Ejemplo 5.1.8 Como caso particular del corolario anterior tenemos que si I es un ideal de un anillo local noetheriano d-dimensional unmixed $(R, \mathfrak{m})$ con cuerpo residuo infinito tal que, para algún sistema multiplicativo S de R con $\mathfrak{m} \cap S \neq \emptyset$ el álgebra de Rees (S)-simbólica $R((S), I)$ es o bien un anillo noetheriano o bien entera sobre $R(I)$, entonces $ara(I) < \dim R$ (en particular, si $ht(I) = \dim R - 1$ entonces I es radicalmente intersección completa). El recíproco no es cierto. Por ejemplo, sea $R = K[x, y, z]$ el anillo de polinomios en tres variables sobre un cuerpo K. Sea $\mathfrak{p}$ el ideal primo de R definido por el núcleo del morfismo $\varphi : K[x, y, z] \to K[t]$ donde $\varphi(x) = t^3$, $\varphi(y) = t^4$ y donde $\varphi(z) = t^5$. En tal situación [31, p.137], tenemos que $\mathfrak{p} = (xz - y^2, x^3 - yz, yx^2 - z^2)$ es un ideal primo radicalmente intersección completa, minimalmente generado por tres elementos y que no es ni s-ideal ni $\bar{s}$-ideal (ver Ejemplo 4.3.1). Por lo tanto, su álgebra de Rees simbólica asociada no es ni anillo noetheriano ni entera sobre $R(\mathfrak{p})$.

Analicemos otras consecuencias.

Corolario 5.1.9 *Sea I un ideal de un anillo R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las condiciones:*

(a.i) $R((S), I)$ *es un $R(I)$-módulo finito generado.*

(a.ii) $R((S), I)$ *es entera sobre $R(I)$.*

son equivalentes si y sólo si lo son las condiciones:

(b.i) I es un s-(S)-ideal.

(b.ii) I es un $\bar{s}$-(S)-ideal.

Demostración: Por la Proposición 5.1.1 tenemos que $R((S), I)$ es un $R(I)$-módulo finito generado si y sólo si I es un s-(S)-ideal. Mientras que por la Proposición 5.1.3 tenemos que $R((S), I)$ es entera sobre $R(I)$ si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Luego, las condiciones (a.i) y (a.ii) son equivalentes si y sólo si lo son las condiciones (b.i) y (b.ii), como queríamos demostrar. □

Corolario 5.1.10 *Sea R un anillo noetheriano tal que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local noetheriano completo $R^*_\mathfrak{p}$ verifica la condición de Serre (S_1). Sea I un ideal de R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R((S), I)$ es un $R(I)$-módulo finito generado.

(ii) $R((S), I)$ es entera sobre $R(I)$.

Demostración: Por hipótesis, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R el anillo local noetheriano completo $R^*_\mathfrak{p}$ verifica la condición de Serre (S_1). Luego $Ass\ R^*_\mathfrak{p} = Min\ R^*_\mathfrak{p}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Luego tendremos que $Ass\ R^*_\mathfrak{p} = Min\ R^*_\mathfrak{p}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ y, por lo tanto, del Corolario 3.5.6 se sigue que I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Aplicando el corolario anterior se concluye la demostración. □

Ejemplo 5.1.11 Ejemplos de anillos verificando la hipótesis del corolario anterior son los anillos localmente unmixed (por ejemplo los anillos Cohen-Macaulay), los anillos localmente analíticamente no ramificados, y los anillos localmente analíticamente primarios (por ejemplo los anillos regulares).

Corolario 5.1.12 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $R((S), I)$ es un anillo noetheriano.

(ii) Existe un natural $k \geq 1$ tal que $R((S), S(I^k))$ es un $R(S(I^k))$-módulo finito generado.

Demostración: De la Proposición 5.1.2 se sigue que la condición (i) es equivalente a que existe un natural $k \geq 1$ tal que $S(I^k)$ es un s-(S)-ideal. Aplicando la Proposición 5.1.1 se concluye la demostración. □

Ejemplo 5.1.13 Dado un ideal I de un anillo noetheriano R y un sistema multiplicativo S de R tenemos que, si $R((S), I)$ es un $R(I)$-módulo finito generado entonces $R((S), I)$ es un anillo noetheriano. Veamos que el recíproco no es cierto. Para ello consideremos $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo local regular 3-dimensional $(R, \mathfrak{m})$. Supongamos que $ht(\mathfrak{p}) = 2$ y que $\mathfrak{p}$ no es intersección completa. En particular $\mathfrak{p}$ no es un s-ideal (Proposición 3.6.6) y, por lo tanto, el álgebra de Rees simbólica no es un $R(\mathfrak{p})$-módulo finito generado. Sin embargo, el álgebra de Rees simbólica es un anillo noetheriano si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n_1, n_2, n_3)$ es un ideal primo monomial no intersección completa con n_1, n_2, n_3 adecuados (Huneke [25]). De este ejemplo, y por las proposiciones 5.1.1 y 5.1.2, se sigue que existe un natural $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{p}^{(k)}$ es un s-ideal pero que $\mathfrak{p}$ no es un s-ideal. Luego, la equivalencia "$\mathfrak{p}$ es un s-ideal si y sólo si existe un natural k tal que $\mathfrak{p}^{(k)}$ es un s-(S)-ideal" no es cierta en general (a diferencia de lo que ocurría con las potencias ordinarias de un ideal (Sección 4.3)). Además, como que tanto $\mathfrak{p}$ como $\mathfrak{p}^{(k)}$ son ideales de altura $\dim R - 1$ entonces tendremos que $\mathfrak{p}$ no es equimultiple mientras que $\mathfrak{p}^{(k)}$ si lo es (página 73 apartado (f)). En particular, $l(\mathfrak{p}) \neq l(\mathfrak{p}^{(k)})$.

Corolario 5.1.14 *Sea I un ideal de un anillo local noetheriano unmixed d-dimensional $(R, \mathfrak{m})$ de altura $ht(I) = d - 1$. En tal situación se tiene que:*

(a) $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es un $R(I)$-módulo finito generado si y sólo si I es equimúltiple.

(b) $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es anillo noetheriano si y sólo si existe un natural $k \geq 1$ tal que $I^{(k)}$ es equimúltiple.

Demostración: Por la Proposición 5.1.1 tenemos que $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es un $R(I)$-módulo finito generado si y sólo si I es un s-ideal. Por la Proposición 5.1.2 tenemos que $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es anillo noetheriano si y sólo si existe un natural $k \geq 1$ tal que $I^{(k)}$ es un s-ideal. Luego la demostración del corolario se concluye al observar que un ideal de altura $\dim R - 1$ de un anillo local noetheriano unmixed es un s-ideal si y sólo si es equimúltiple (página 73 apartado (f)). □

Comentario 5.1.15 El corolario anterior generaliza el resultado establecido por Rees en [47] pues, si I es un ideal genéricamente intersección completa de altura $\dim R - 1$ de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay $(R, \mathfrak{m})$ entonces, de la Proposición 3.6.6 y del Corolario 5.1.14 se sigue que:

(a) $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es un $R(I)$-módulo finito generado si y sólo si I es de la clase principal.

(b) $\oplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ es anillo noetheriano si y sólo si existe un natural $k \geq 1$ tal que $I^{(k)}$ es de la clase principal.

5.2 Potencias simbólicas y el anillo graduado asociado

En la primera parte de esta sección estudiaremos cómo se reflejan, sobre el anillo graduado asociado a un ideal, propiedades de sus potencias simbólicas. Como casos particulares de los resultados que se establecerán se obtendrán los que, en esta dirección, se demuestran en los trabajos de Huneke [24], Ratliff [45], Robbiano-Valla [48], Schenzel [54] y Verma [58].

En la segunda parte de esta sección se analizarán diversas situaciones bajo las cuales se puede afirmar que la equivalencia lineal entre las topologías ádica y simbólica asociadas a un ideal I implique la igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas de I.

La tercera y última parte de esta sección se dedicará a establecer aplicaciones y corolarios de los resultados obtenidos.

• Potencias simbólicas y propiedades del anillo graduado asociado:

Proposición 5.2.1 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{Gr}(I,R)$ *es un dominio.*

(ii) $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)$ *es un dominio e* $I^n = S(I^n)$ *para todo natural* n.

Demostración: Consideremos el morfismo natural $\varphi : \mathrm{Gr}(I,R) \to S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R)) \cong \mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)$. Obviamente φ es un morfismo graduado de grado cero y, por lo tanto, su núcleo será un ideal homogéneo de $\mathrm{Gr}(I,R)$. Tenemos que $\ker\varphi = \oplus_{n\geq 0}\ker\varphi_n$ donde $\varphi_n : I^n/I^{n+1} \to S^{-1}I^n/S^{-1}I^{n+1}$ es la n-ésima componente del morfismo graduado φ y, por lo tanto, $\ker\varphi_n = (I^n \cap S(I^{n+1}))/I^{n+1}$. Así se tendrá que, si n_0 es un número natural fijo entonces, $\ker\varphi_n = 0$ para todo $n \leq n_0$ si y sólo si $I^n = S(I^n)$ para todo $n \leq n_0 + 1$. En efecto. El recíproco es obvio pues, si $I^n = S(I^n)$ para todo $n \leq n_0 + 1$ entonces, para $n \leq n_0$ tendremos que $\ker\varphi_n = (I^n \cap S(I^{n+1}))/I^{n+1} = (I^n \cap I^{n+1})/I^{n+1} = 0$. Demostremos el directo. Supongamos que $\ker\varphi_n = 0$ para todo $n \leq n_0$. Veamos, por inducción sobre n, que $I^n = S(I^n)$ para $n \leq n_0 + 1$. Para $n = 1$ es evidente (pues $0 = \ker\varphi_0 = S(I)/I$). Supongamos demostrado que $I^{n-1} = S(I^{n-1})$. Entonces tendremos que $0 = \ker\varphi_{n-1} = (I^{n-1} \cap S(I^n))/I^n = (S(I^{n-1}) \cap S(I^n))/I^n = S(I^n)/I^n$. Luego $I^n = S(I^n)$, como queríamos demostrar.

En particular tendremos que, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si el morfismo natural $\varphi : \mathrm{Gr}(I,R) \to S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R))$ es inyectivo.

Veamos la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii).

Supongamos (i). Como que $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un dominio, entonces $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R) \cong S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R))$ es un dominio y φ es inyectivo. Luego (i) implica (ii).

Recíprocamente. Supongamos (ii). Como que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n, entonces tendremos que $\varphi : \mathrm{Gr}(I,R) \to S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R))$ es inyectivo, de donde se sigue que $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un dominio por serlo $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R) \cong S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R))$. □

Comentario 5.2.2 Observar que de la demostración de la proposición anterior se sigue que, si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un R-módulo libre de S-torsión (pues, en general, la S-torsión de un R-módulo M es el conjunto $\{m \in M$ tales que existe un $s \in S$ con $sm = 0\}$, es decir, es el núcleo del morfismo $M \to S^{-1}M$). Luego, en el caso particular en el que consideremos como sistema multiplicativo $S = R - \cup\{\mathfrak{p} \in Ass\ R/I\}$ entonces tendremos que, $I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un R/I-módulo libre de R/I-torsión. De donde se sigue que si I está generado por una R-sucesión, entonces $I^n = S(I^n)$ para todo natural n (pues, por el Teorema de Macaulay-Rees, el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un anillo de polinomios sobre

R/I y, por lo tanto, $\mathrm{Gr}(I,R)$ es un R/I-módulo libre de R/I-torsión). En particular, un ideal unmixed generado por una R-sucesión es tal que sus potencias ordinarias y simbólicas coinciden (es decir, $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n).

Proposición 5.2.3 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ *es un dominio.*

(ii) $\mathrm{Gr}(S^{-1}I,S^{-1}R)^{red}$ *es un dominio e I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos que $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ es un dominio. Entonces $\mathrm{Gr}(S^{-1}I,S^{-1}R)^{red} \cong S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R)^{red})$ es un dominio. Veamos que $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Como que $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ es un dominio, entonces tendremos que $r(I) = \mathfrak{p}$ es un ideal primo. Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ un ideal primo tal que $l(I_\mathfrak{q}) = \dim R_\mathfrak{q}$. Veamos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Por hipótesis y por [19, Th. (9.7)] tendremos que $\dim \mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q}) = \dim R_\mathfrak{q} = l(I_\mathfrak{q}) = \dim \mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})$ y, por lo tanto, $ht(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})) = 0$ (pues, en general, si J es un ideal de un anillo A entonces se tiene que $ht(J) + \dim A/J \leq \dim A$). Por hipótesis se tiene que $\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})^{red} \cong (\mathrm{Gr}(I,R)^{red})_\mathfrak{q}$ es un dominio, de donde se sigue que $\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})$ tiene un único ideal primo minimal que es nilpotente. Luego $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})$ es nilpotente y, por lo tanto, (si miramos en grado cero), se sigue que existe un número natural n tal que $((\mathfrak{q}R_\mathfrak{q})^n + IR_\mathfrak{q})/IR_\mathfrak{q} = 0$. Por lo tanto, $(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q})^n \subset IR_\mathfrak{q}$. Tomando radicales se tendrá que $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}R_\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$. Luego $\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$, de donde se concluye que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Así tenemos que $\{\mathfrak{q} \in V(I)$ tales que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset\} \subset \{\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{q} \in V(I)$ tales que $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}\}$. De donde, aplicando el Corolario 3.5.7, se sigue que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

Recíprocamente. Veamos que (ii) implica (i). Sean $[x]$ e $[y]$ dos elementos homogéneos no nulos de $\mathrm{Gr}(I,R)$ tales que $[x][y]$ es nilpotente. Entonces $[x][y]/1$ es nilpotente en $S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R)) \cong \mathrm{Gr}(S^{-1}I,S^{-1}R)$. Luego, por hipótesis, podemos suponer que $[x]/1$ es nilpotente en $S^{-1}(\mathrm{Gr}(I,R))$. Por lo tanto, existirá un número natural r y un elemento $s \in S$ tal que $s[x]^r = 0$ en $\mathrm{Gr}(I,R)$. Para concluir la demostración basta con demostrar que $[x]$ es nilpotente. Sea l el orden de $[x]$, (i.e. $x \in I^l$ pero $x \notin I^{l+1}$). Como que $s[x]^r = 0$ para cierto $s \in S$, entonces se tendrá que $s[x]^r = 0$ en I^{rl}/I^{rl+1} y, por lo tanto, $sx^r \in I^{rl+1}$. Luego $x^r \in S(I^{rl+1})$. Como que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal entonces $S(I^{rl+1}) \subset \overline{I^{rl+1}}$, (Lema 2.1.9.(b)). Así, existirá $(x^r)^m + a_1(x^r)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(x^r) + a_m = 0$ con $a_i \in I^{(rl+1)i}$. Pero para $i \in \{1,\ldots,m\}$ se tiene que $a_i(x^r)^{m-i} \in I^{(rl+1)i}I^{(m-i)lr} = I^{lmr+i} \subset I^{lmr+1}$. Por lo tanto $[x]^{rm} = [-a_1(x^r)^{m-1} - \ldots - a_{m-1}(x^r) - a_m] = [0] \in I^{lmr}/I^{lmr+1}$. Es decir, $[x]$ es nilpotente. □

Comentario 5.2.4 Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Consideremos las siguientes condiciones:

(i) $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ es un dominio.

(ii) $\mathrm{Gr}(S^{-1}I,S^{-1}R)^{red}$ es un dominio e I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

(iii) $\mathrm{Gr}(S^{-1}I,S^{-1}R)^{red}$ es un dominio y $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

En tal situación, de la demostración de la proposición anterior se sigue que siempre (ii) implica (i), que siempre (i) implica (iii), y que la equivalencia se tiene si R es localmente quasi-unmixed.

Proposición 5.2.5 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación, si el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ es reducido, entonces I es normal (es decir, $I^n = \overline{I^n}$ para todo natural n).*

Demostración: Sea $n > 0$ y sea $x \in \overline{I^n}$. Supongamos que $x \notin I^n$. Sea $l = \max\{m$ tales que $x \in I^m\} < n$. Como que $x \in \overline{I^n}$, entonces existirá $x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$ con $a_i \in I^{ni}$. Tenemos que $(n-l)i \geq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ y, por lo tanto, $a_ix^{m-i} \in I^{ni}I^{(m-i)l} = I^{ml+(n-l)i} \subset I^{ml+1}$. Luego $a_ix^{m-i} \in I^{ml}$ y es cero en I^{ml}/I^{ml+1}. Consideremos la clase de x en $\mathrm{Gr}(I,R)$ que es un elemento homogéneo no nulo de grado l. Como que $[x]^m = [-a_1x^{m-1} - \ldots - a_{m-1}x - a_m] = [0] \in I^{lm}/I^{ml+1}$, entonces se tendrá que $[x]$ es nilpotente en $\mathrm{Gr}(I,R)$, lo cual es absurdo. □

Ejemplo 5.2.6 Veamos que el recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, es decir, que un ideal I de un anillo noetheriano R puede ser normal sin que su anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ sea reducido. Sea I un ideal de un anillo noetheriano íntegro e íntegramente cerrado R. En tal situación, I es normal si y sólo si el anillo de Rees es íntegramente cerrado en el anillo de poliniomios (pues $\oplus_{n\geq 0}\overline{I^n}$ es la clausura entera de $R(I)$ en $R[t]$). Por lo tanto, I es normal si y sólo si $R(I)$ es normal. Sea a un elemento no unidad de un anillo local regular $(R,\mathfrak{m})$, y sea I el ideal generado por a. Entonces el anillo de Rees $R(I)$ es un anillo regular (pues es isomorfo al anillo de polinomios sobre R) y, en particular, es normal. Luego I es un ideal normal. Pero si tomamos a tal que el ideal I no sea ideal radical, entonces tendremos que $\mathrm{Gr}(I,R)$ no es reducido.

Comentario 5.2.7 Por el criterio de normalidad de Serre [32, Th. 23.8] tenemos que, un anillo es normal si y sólo si verifica las condiciones de Serre (R_1) y (S_2). Mientras que, un anillo es reducido si y sólo si verifica las condiciones de Serre (R_0) y (S_1). Luego del ejemplo anterior se sigue que, que el anillo de Rees $R(I)$ verifique las condiciones de Serre (R_1) y (S_2) no implica que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifique las condiciones de Serre (R_0) y (S_1). Ahora bien ([6, Th. 1.5] y [41, Th. 2.2]), si $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2) entonces $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición (S_1). De donde se sigue que, que el anillo de Rees $R(I)$ verifique la condición de Serre (R_1) no implica, en general, que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifique la condición (R_0).

Como corolario de las proposiciones 5.2.1, 5.2.3 y 5.2.5 se tiene que:

Corolario 5.2.8 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)$ es un dominio. En tal situación se tiene que:*

(a) $\mathrm{Gr}(I,R)$ *es un dominio si y sólo si $I^n = S(I^n)$ para todo natural n.*

(b) $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ *es un dominio si y sólo si $\overline{I^n} = S(I^n)$ para todo natural n.*

En particular, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R tal que el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$ es regular, entonces:

(a') $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ *es un dominio si y sólo si* $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ *para todo natural* n*.*

(b') $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)^{red}$ *es un dominio si y sólo si* $\overline{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}^{(n)}$ *para todo natural* n*.*

Demostración: De la Proposición 5.2.1 se sigue (a). Demostremos (b). Como que $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)$ es un dominio, en particular es reducido y, por lo tanto, $S^{-1}I$ es un ideal normal (Proposición 5.2.5). Aplicando el Lema 2.1.9 (apartados (a) y (b)) y la Proposición 5.2.3, se concluye la demostración.

En el caso particular en que, $\mathfrak{p}$ sea un ideal primo de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R tal que el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$ es regular, entonces tendremos que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})$ es un dominio. Luego, aplicando (a) y (b) al sistema multiplicativo $S = R - \mathfrak{p}$ se sigue (a') y (b'). □

Relacionemos las propiedades del anillo graduado asociado y del álgebra de Rees (S)-simbólica.

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación, si $\mathrm{Gr}(I, R)$ es un dominio entonces tendremos que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n (Proposición 5.2.1), luego $R((S), I) = R(I)$. Mientras que si $\mathrm{Gr}(I, R)$ es reducido, entonces I es normal (Proposición 5.2.5) y, por lo tanto, o bien $R((S), I) = R(I)$ o bien $R((S), I)$ no es entera sobre $R(I)$, (Proposición 5.1.3 y Lema 2.1.9.(b)). Además:

Corolario 5.2.9 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. Consideremos las siguientes condiciones:*

(i) $\mathrm{Gr}(I, R)^{red}$ *es un dominio.*

(ii) $R((S), I)$ *es entera sobre* $R(I)$*.*

En tal situación se tiene que siempre (i) implica (ii), y que el recíproco es cierto si $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)^{red}$ *es un dominio.*

Demostración: Supongamos que $\mathrm{Gr}(I, R)^{red}$ es un dominio. Entonces, aplicando la Proposición 5.2.3 tendremos que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal. Luego de la Proposición 5.1.3 se sigue (ii). Recíprocamente. Si $R((S), I)$ es entera sobre $R(I)$, entonces tendremos que I es un $\overline{s}$-(S)-ideal, (Proposición 5.1.3) y, como que $\mathrm{Gr}(S^{-1}I, S^{-1}R)^{red}$ es un dominio, se concluye que también lo es $\mathrm{Gr}(I, R)^{red}$, (Proposición 5.2.3). □

En particular tendremos que:

Corolario 5.2.10 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente unmixed R tal que* $\mathrm{Gr}(I, R)^{red}$ *es un dominio. En tal situación se tiene que:*

(a) $cd_{IR_{\mathfrak{q}}}(R_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *no minimal de* I*.*

(b) $ara(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *no minimal de I tal que el cuerpo residuo* $k(\mathfrak{q})$ *es infinito. En particular, si* $ht(I) = \dim R - 1$ *entonces I es radicalmente intersección completa.*

Demostración: Sea S el sistema multiplicativo de R definido por el complementario de los primos minimales de I. Como que $\mathrm{Gr}(I,R)^{red}$ es un dominio entonces tendremos que $R((S),I)$ es entera sobre $R(I)$. Aplicando los corolarios 5.1.5 y 5.1.7 se concluye la demostración. □

• **Cuándo la equivalencia lineal implica la igualdad:**

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación tenemos que, si $I^n = S(I^n)$ para todo natural n entonces I es un s-(S)-ideal es decir, existe un natural $k \geq 0$ tal que $S(I^{n+k}) \subset I^n$ para todo n. Luego, la igualdad entre potencias ordinarias y simbólicas se puede entender como la equivalencia lineal con $k = 0$. Más aún, tenemos que la equivalencia lineal es una buena aproximación a la igualdad pues:

Proposición 5.2.11 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R. En tal situación se tiene que:*

(a) I es un s-ideal si y sólo si existe un natural $k \geq 1$ tal que $(I^k)^{(n+1)} \subset (I^k)^n$ para todo natural n.

(b) Si I es un s-ideal entonces existe un natural $k \geq 1$ tal que $(I^{(k)})^n = (I^{(k)})^{(n)}$ para todo natural n.

Demostración: Demostremos (a). Veamos el directo. Supongamos que I es un s-ideal. Luego existe un natural k (podemos suponer $k \geq 1$), tal que $I^{(n+k)} \subset I^n$ para todo n. Luego $(I^k)^{(n+1)} = I^{(kn+k)} \subset I^{kn} = (I^k)^n$ para todo n, como queríamos demostrar. Recíprocamente. Supongamos que existe un natural $k \geq 1$ tal que $(I^k)^{(n+1)} \subset (I^k)^n$ para todo natural n. Luego, por definición, I^k es un s-ideal y, por lo tanto, también lo es I (Proposición 4.3.2).

Demostremos (b). Supongamos que I es un s-ideal. Luego de la Proposición 4.3.3 se sigue que $I^{(1)}$ es un s-ideal y, por lo tanto, existe un natural $k \geq 1$ tal que $(I^{(k)})^{(n)} = I^{(kn)} = (I^{(k)})^n$ para todo natural n, (Proposición 5.1.2). □

Así, pues, es natural preguntarse cuándo la equivalencia lineal entre las filtraciones ádica y simbólica implica la igualdad.

Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. En tal situación tenemos que, si $I^n = S(I^n)$ para todo natural n entonces I es un s-(S)-ideal y, por lo tanto, I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Además, si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal, entonces $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, (véase la demostración del Corolario 3.5.7). El objetivo de este apartado es estudiar bajo qué condiciones podemos afirmar que las implicaciones anteriores son equivalencias.

En la Sección 2.1 hemos visto ejemplos de ideales para los que se verifica la equivalencia "$I^n = S(I^n)$ para todo natural n si y sólo si I es un s-(S)-ideal" sin ninguna condición sobre el anillo (por ejemplo el ideal cero y los ideales irrelevantes de las álgebras graduadas noetherianas). En la Sección 3.5 hemos visto que la equivalencia "I es un s-(S)-ideal si y sólo si I es un $\bar{s}$-(S)-ideal" se tiene para anillos localmente unmixed (por ejemplo los anillos Cohen-Macaulay), para anillos localmente analíticamente no ramificados, y para anillos localmente analíticamente primarios (por ejemplo los anillos regulares). Y también, en la Sección 3.5 (Corolario 3.5.7), hemos visto que la equivalencia "I es un $\bar{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$" se verifica para anillos localmente quasi-unmixed.

Veamos otras situaciones en las que se tienen estas equivalencias. La primera de ellas (Corolario 5.2.12) se obtiene como corolario de los resultados expuestos en el apartado anterior. La segunda (Corolario 5.2.14) se obtendrá como consecuencia del Teorema 5.2.13.

Corolario 5.2.12 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que el anillo graduado asociado* $\mathrm{Gr}(I,R)$ *es reducido. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I^n = S(I^n)$ *para todo natural* n.

(ii) I *es un* s-(S)*-ideal.*

(iii) I *es un* $\bar{s}$-(S)*-ideal.*

Demostración: Únicamente hemos de demostrar que (iii) implica (i). Supongamos que I es un $\bar{s}$-(S)-ideal. Como que $\mathrm{Gr}(I,R)$ es reducido entonces, por la Proposición 5.2.5 tendremos que I es normal. Luego, aplicando el Lema 2.1.9.(c) tendremos que $I^n = S(I^n) = \overline{I^n}$ para todo natural n. En particular tendremos que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n, como queríamos demostrar. □

Teorema 5.2.13 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que el anillo graduado asociado* $\mathrm{Gr}(I,R)$ *verifica la condición de Serre* (S_1). *En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I^n = S(I^n)$ *para todo natural* n.

(ii) $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ *para todo* $\mathfrak{q} \in V(I)$ *con* $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos (i). Luego I es un s-(S)-ideal, en particular I es un $\bar{s}$-(S)-ideal y, por lo tanto, $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Recíprocamente, demostremos que (ii) implica (i). Supongamos (ii). Sea $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Tenemos que $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})}(\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})) = \inf\{\mathrm{depth}(\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q}))_\mathfrak{P}$ donde $\mathfrak{P} \in V(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q}))\}$. Como que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición de Serre (S_1) entonces, localizando, tendremos que $\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})$ también verifica la condición de Serre (S_1). Luego $\mathrm{depth}(\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q}))_\mathfrak{P} \geq \min\{ht(\mathfrak{P}),1\}$ y, por lo tanto, tendremos que $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})}(\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})) \geq \min\{ht(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})),1\}$.

Supongamos demostrado que $ht(\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})) > 0$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Luego tendremos que $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\,\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})}(\mathrm{Gr}(I_\mathfrak{q},R_\mathfrak{q})) \geq 1$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$.

Consideremos, ahora, los módulos de cohomología local. Es conocido que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo noetheriano A entonces para todo A-módulo finito generado N se tiene que $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}}(N) = \inf\{i \in \mathbf{Z}$ tales que $H^i_{\mathfrak{a}}(N) \neq 0\}$, [19, (35.7)]. Y además, en general, si $B \to A$ es un morfismo de anillo noetherianos, entonces para todo ideal $\mathfrak{b}$ de B y para todo A-módulo N se tiene un isomorfismo natural $H^i_{\mathfrak{b}}(N) \cong H^i_{\mathfrak{b}A}(N)$ para todo $i \in \mathbf{Z}$, [19, (35.20)]. Así, en nuestro caso tendremos que $H^0_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Gr}(I,R)) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \cong H^0_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(\mathrm{Gr}(I_{\mathfrak{q}}, R_{\mathfrak{q}})) \cong H^0_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}\,\mathrm{Gr}(I_{\mathfrak{q}},R_{\mathfrak{q}})}(\mathrm{Gr}(I_{\mathfrak{q}}, R_{\mathfrak{q}})) = 0$. Aplicando el functor de cohomología local a la sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to I^n/I^{n+1} \to R/I^{n+1} \to R/I^n \to 0$ obtendremos la sucesión exacta larga de R-módulos $0 \to H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+1}) \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \to \ldots$, de donde deducimos la sucesión exacta larga de $R_{\mathfrak{q}}$-módulos $0 \to H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^{n+1}) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \to H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \to \ldots$. Por inducción sobre n tendremos que $H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} = 0$ para todo n si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(I^n/I^{n+1}) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} = 0$ para todo n, si y sólo si $H^0_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Gr}(I,R)) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} = 0$. Luego $H^0_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(R_{\mathfrak{q}}/I^n_{\mathfrak{q}}) \cong H^0_{\mathfrak{q}}(R/I^n) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} = 0$ para todo n, de donde deduciremos que $I^n = S(I^n)$ para todo natural n (véase página 79 apartado 3).

Para concluir la demostración de (ii) implica (i) hemos de ver que para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ se tiene que $ht(\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}\,\mathrm{Gr}(I_{\mathfrak{q}}, R_{\mathfrak{q}})) > 0$.

Por hipótesis tenemos que $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$. Luego el problema es demostrar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo local noetheriano quasi-unmixed $(A, \mathfrak{n})$ entonces, $l(\mathfrak{a}) = \dim A$ si y sólo si $ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)) = 0$.

Demostremos el directo. Como que $l(\mathfrak{a}) = \dim \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)/\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$, entonces $l(\mathfrak{a}) + ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)) \leq \dim A$. Luego, si $l(\mathfrak{a}) = \dim A$ entonces $ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)) = 0$.

Recíprocamente. Supongamos que $ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)) = 0$. Demostremos que $l(\mathfrak{a}) = \dim A$. Sea $\mathcal{N} = \mathfrak{n}/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \oplus \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^3 \oplus \ldots$ que es el único ideal maximal homogéneo de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$. Consideremos el anillo local noetheriano $B = (\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A))_{\mathcal{N}}$. Sea $\mathfrak{b}$ el ideal de B definido por $\mathfrak{b} = (\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A))_{\mathcal{N}}$. Como que $\mathcal{N}$ es el único ideal maximal homogéneo de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$ entonces se tendrá que $\dim B = ht(\mathcal{N}) = \dim \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A) = \dim A$. Además, como que $\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$ es un ideal homogéneo de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$, entonces $ht(\mathfrak{b}) = ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A))$. Como que A es quasi-unmixed, entonces $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)$ es también quasi-unmixed y, por lo tanto, B es un anillo local quasi-unmixed [19, (18.14),(18.24)]. En particular B es equidimensional y, por lo tanto, tendremos que $\dim B/\mathfrak{b} + ht(\mathfrak{b}) = \dim B$, [19, (18.6),(18.17)]. Luego, si $ht(\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)) = 0$ entonces $ht(\mathfrak{b}) = 0$, de donde se sigue que $\dim A = \dim B = \dim B/\mathfrak{b} = \dim(\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)/\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A))_{\mathcal{N}} \leq \dim \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A)/\mathfrak{n}\,\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}, A) = l(\mathfrak{a}) \leq \dim A$. Luego $l(\mathfrak{a}) = \dim A$, con lo que se concluye la demostración del teorema. □

Corolario 5.2.14 *Sea I un ideal de un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R y sea S un sistema multiplicativo de R. Supongamos que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ verifica la condición de Serre (S_1). En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I^n = S(I^n)$ para todo natural n.

(ii) I es un s-(S)-ideal.

(iii) I es un $\overline{s}$-(S)-ideal.

Demostración: Obviamente siempre se tiene que (i) implica (ii), y que (ii) implica (iii). Veamos que (iii) implica (i). Supongamos (iii). Como que R es localmente quasi-unmixed entonces tendremos que, I es un $\overline{s}$-(S)-ideal si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ (Corolario 3.5.7). Luego, aplicando el Teorema 5.2.13 deduciremos (i). □

Ejemplo 5.2.15 Comparemos las hipótesis de los corolarios 5.2.12 y 5.2.14. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo local noetheriano completo $(A, \mathfrak{n})$. Sea $R = A/\mathfrak{a}$ y sea $I = 0$ el ideal cero de R. En tal situación tenemos que $\mathrm{Gr}(I, R) = R$. Luego $\mathrm{Gr}(I, R)$ es reducido si y sólo si $\mathfrak{a}$ es un ideal radical; $\mathrm{Gr}(I, R)$ verifica la condición de Serre (S_1) si y sólo si $\mathfrak{a}$ carece de componentes sumergidas; y R es localmente quasi-unmixed si y sólo si todos los primos minimales de $\mathfrak{a}$ tienen la misma dimensión. Por lo tanto, ni las hipótesis del Corolario 5.2.12 implican las hipótesis del Corolario 5.2.14, ni las hipótesis del Corolario 5.2.14 implican las hipótesis del Corolario 5.2.12.

- **Aplicaciones y corolarios:**

Para finalizar, veamos cómo podemos aplicar los resultados anteriores.

Aplicación 5.2.16 Sabemos que si I es un ideal de un anillo noetheriano R y si S es un sistema multiplicativo de R entonces, una condición necesaria para la igualdad $I^n = S(I^n)$ para todo n es que $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, (véase la demostración de (i) implica (ii) del Teorema 5.2.13). Eisenbud-Huneke [13, Prop. 3.3] demuestran que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay $(A, \mathfrak{n})$ tal que el álgebra de Rees $R(\mathfrak{a})$ es Cohen-Macaulay, entonces la desigualdad de Burch [8], $l(\mathfrak{a}) \leq \dim A - \inf_{n\geq 0}\{\mathrm{depth}_\mathfrak{n} A/\mathfrak{a}^n\}$, es una igualdad. Por lo tanto, si I es un ideal de un anillo noetheriano Cohen-Macaulay R tal que el álgebra de Rees $R(I)$ es Cohen-Macaulay entonces, $I^n = S(I^n)$ para todo n si y sólo si $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$, (página 79 apartado 1). Esta equivalencia se puede obtener directamente como corolario del Teorema 5.2.13 pues, si el álgebra de Rees $R(I)$ es Cohen-Macaulay, entonces el anillo graduado $\mathrm{Gr}(I, R)$ también lo es, por lo tanto satisface las condiciones de Serre (S_k) para todo k y, en particular, es (S_1).

Aplicación 5.2.17 En [41, Th. 2.5] Noh-Vasconcelos demuestran que si I es un ideal equimúltiple de un anillo Cohen-Macaulay tal que el álgebra de Rees $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2), entonces $I^n = I^{(n)}$ para todo n. Veamos cómo podemos generalizar este resultado. Sea R un anillo Cohen-Macaulay y sea I un ideal de R tal que el álgebra de Rees $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2). Luego tendremos que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I, R)$ verifica la condición de Serre (S_1) ([6, Th. 1.5] y [41, Th. 2.2]). De donde, aplicando el Teorema 5.2.13 se sigue que $I^n = I^{(n)}$ para todo n si y sólo si $l(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal de I. En particular, si I es un ideal equimúltiple de un anillo Cohen-Macaulay tal que el álgebra de Rees $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2), entonces tendremos que $l(I_\mathfrak{q}) = ht(I_\mathfrak{q}) < \dim R_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal de I y, por lo tanto, $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n.

Aplicación 5.2.18 Sea R un anillo Cohen-Macaulay y sea I un ideal de altura g generado por $g + 1$ elementos. Supongamos que I es genéricamente intersección completa (es decir, que $I_\mathfrak{p}$ es intersección completa para todo primo minimal $\mathfrak{p}$ de I). Veamos que, en tal situación, $I^n = I^{(n)}$ para todo n si y sólo si $I_\mathfrak{q}$ está generado por una $R_\mathfrak{q}$-sucesión regular para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$. (Este resultado también se demuestra en Brodmann [5], en Huneke [27, Th. 3.1] y en Simis-Vasconcelos [57, Cor. 3.6]).

Demostración: Por hipótesis R es un anillo Cohen-Macaulay e I es un ideal genéricamente intersección completa de altura g generado por $g+1$ elementos. Luego, de [6, Prop. 2.6] se sigue que el álgebra de Rees $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2) y, por lo tanto, el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición de Serre (S_1). Aplicando el Teorema 5.2.13 tendremos que, $I^n = I^{(n)}$ para todo n si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal de I. Pero para un ideal primo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal con $ht(\mathfrak{q}/I) > 1$ tendremos que $l(I_{\mathfrak{q}}) \leq l(I) \leq \mu(I) \leq ht(I)+1 < ht(\mathfrak{q}) = \dim R_{\mathfrak{q}}$. Luego, $I^n = I^{(n)}$ para todo n si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal de I, si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$. Es decir, si y sólo si $I_{\mathfrak{q}}$ es equimúltiple para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$. Es decir, si y sólo si $I_{\mathfrak{q}}$ está generado por una $R_{\mathfrak{q}}$-sucesión regular para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$, (Proposición 3.6.6). □

Aplicación 5.2.19 Sea R un anillo Cohen-Macaulay y sea I un ideal unmixed de altura $ht(I) \geq 1$ y de desviación analítica uno (es decir, tal que $l(I) = ht(I)+1$). Supongamos que I es genéricamente intersección completa y que $R_{\mathfrak{q}}$ es anillo local regular para todo $\mathfrak{q} \in M(I)$. En tal situación, Huckaba y Huneke demuestran [22, Th. 2.5] que $I^n = I^{(n)}$ para todo n si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$. Veamos una demostración alternativa de este resultado sin usar la hipótesis de que el anillo local $R_{\mathfrak{q}}$ sea un anillo local regular si $\mathfrak{q} \in M(I)$.

Demostración: Es evidente que $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$ si y sólo si $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ no minimal de I (pues si $ht(\mathfrak{q}/I) > 1$ entonces tendremos que $l(I_{\mathfrak{q}}) \leq l(I) = ht(I)+1 < ht(\mathfrak{q}) = \dim R_{\mathfrak{q}}$). Luego, si demostramos que el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición de Serre (S_1) entonces, por el Teorema 5.2.13, deduciremos la equivalencia. Supongamos que $l(I_{\mathfrak{q}}) < \dim R_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$. Entonces tendremos que $I_{\mathfrak{q}}$ es intersección completa para todo $\mathfrak{q} \in V(I)$ con $ht(\mathfrak{q}/I) = 1$, (Proposición 3.6.6). Luego aplicando [22, Th. 2.2] deduciremos que para toda reducción minimal J de I el índice de reducción de I respecto de J es menor o igual que 1 y, por lo tanto, tendremos que el índice de reducción de I será menor o igual que 1. Aplicando [65, Th. 4.4] deduciremos que el álgebra de Rees $R(I)$ verifica la condición de Serre (S_2) y, por lo tanto, $\mathrm{Gr}(I,R)$ satisface la condición de Serre (S_1), como queríamos demostrar. □

Corolario 5.2.20 *Sea R un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed R. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R es Cohen-Macaulay.

(ii) Para todo ideal I de R de la clase principal, el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ *verifica la condición de Serre* (S_1).

Demostración: Veamos, en primer lugar, que (i) implica (ii). Supongamos que R es un anillo Cohen-Macaulay y sea I un ideal de R de la clase principal. Luego I es un ideal sin componentes sumergidas y, además, el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ es isomorfo a un anillo de polinomios sobre R/I, que es Cohen-Macaulay. En particular, $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición de Serre (S_1).

Recíprocamente. Supongamos (ii) y demostremos (i). Sea I un ideal de la clase principal de R. Como que R es localmente quasi-unmixed entonces tendremos que I es un $\bar{s}$-ideal (Corolario 3.5.9). Por hipótesis el anillo graduado asociado $\mathrm{Gr}(I,R)$ verifica la condición de Serre (S_1). Luego, aplicando el Corolario 5.2.14 tendremos la igualdad $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n. Luego, para todo ideal I de R de la clase principal se tiene que $I^n = I^{(n)}$ para todo natural n. De donde se sigue que R es anillo Cohen-Macaulay (Ejemplo 2.1.15), como queríamos demostrar. □

Corolario 5.2.21 *Sea R un anillo noetheriano localmente quasi-unmixed y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R tal que el anillo local $R_\mathfrak{p}$ es regular. En tal situación, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ *es un dominio.*

(ii) $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ *tiene un único primo asociado.*

Demostración: Es obvio que (i) implica (ii). Demostremos el recíproco. Supongamos que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ tiene un único primo asociado. Luego $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)^{red}$ es un dominio y que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ verifica la condición de Serre (S_1). Como que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)^{red}$ es un dominio, entonces tendremos que $\mathfrak{p}$ es un $\bar{s}$-ideal (Proposición 5.2.3) y, por lo tanto, del Corolario 5.2.14 se seguirá que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ para todo natural n (pues $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ verifica la condición de Serre (S_1)). Por hipótesis el anillo local $R_\mathfrak{p}$ es un anillo local regular y, por lo tanto, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})$ es un dominio. De donde aplicando la Proposición 5.2.1 se sigue que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R)$ es un dominio, como queríamos demostrar. □

Ejemplo 5.2.22 Veamos que la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) del corolario anterior no es cierta en general. Sea $k[x]$ el anillo de polinomios en una variable sobre un cuerpo k. Consideremos el anillo noetheriano R definido por $R = k[x]/(x^2)$. En tal situación tenemos que R tiene un único primo asociado, y que R no es un dominio. Luego, la equivalencia "R es un dominio si y sólo si R tiene un único primo asociado" no es cierta en general. Más aún, si pensamos R como un anillo graduado noetheriano $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ generado por R_1 como R_0-álgebra (con R_0 un dominio), y si consideramos $\mathfrak{p}$ el ideal primo de R definido por $\mathfrak{p} = \oplus_{n\geq 1} R_n$, entonces tendremos que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}, R) \cong R$. De donde se sigue que la equivalencia entre las condiciones (i) y (ii) del Corolario 5.2.21 no es cierta en general.

Bibliografía

[1] R.Achilles, W.Vogel. Über vollständige Durchschnitte in lokalen Ringen. *Math. Nachr.* 89 (1979), 285-298.

[2] M.F.Atiyah, I.G.Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra* . Addison-Wesley (1969).

[3] N.Bourbaki. *Commutative Algebra, Chapters 1-7*. Springer-Verlag (1989).

[4] N.Bourbaki. *General Topology, Chapters 1-4*. Springer-Verlag (1989).

[5] M.Brodmann. Rees rings and form rings of almost complete intersections. *Nagoya Math. J.* 88 (1982), 1-16.

[6] P.Brumatti, A.Simis, W.Vasconcelos. Normal Rees algebras. *J. Algebra.* 112 (1988), 26-48.

[7] W.Bruns, J.Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press (1993).

[8] L.Burch. Codimension and analytic spread. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 72 (1972), 369-373.

[9] F.W.Call. On local cohomology modules. *J. Pure Appl. Algebra.* 43 (1986), 111-117.

[10] F.W.Call, R.Y.Sharp. A short proof of the local Lichtenbaum-Hartshorne theorem on the vanishing of local cohomology. *Bull. London Math. Soc.* 18 (1986), 261-264.

[11] R.C.Cowsik. Symbolic powers and number of defining equations. *Lecture Notes in Pure and Applied Math.* 91 (13-14). Dekker (1985).

[12] R.C.Cowsik, M.V.Nori. On the fibres of blowing up. *J. Indian Math. Soc.* 40 (1976), 217-222.

[13] D.Eisenbud, C.Huneke. Cohen-Macaulay Rees algebras and their specialization. *J. Algebra.* 81 (1983), 202-224.

[14] S.Eliahou. *Courbes monomiales et algèbre de Rees symbolique.* Thèse, Université de Genève, 1983.

[15] S.Eliahou. Symbolic powers of monomial curves. *J. Algebra.* 117 (1988), 437-456.

[16] S.Goto, M.Herrmann, K.Nishida, O.Villamayor. On the structure of Noetherian Symbolic Rees Algebras. *Manuscripta Math.* 67 (1990), 197-225.

[17] R.Hartshorne. Affine duality and cofiniteness. *Invent. Math.* 9 (1970), 145-164.

[18] R.Hartshorne. Cohomological dimension of algebraic varieties. *Ann. of Math.* 88 (1968), 403-450.

[19] M.Herrmann, S.Ikeda, U.Orbanz. *Equimultiplicity and blowing up*. Springer-Verlag (1988).

[20] M.Hochster. Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes. *Math. Z.* 133 (1973), 53-65.

[21] S.Huckaba, C.Huneke. Powers of ideals having small analytic deviation. *Amer. J. Math.* 114 (1992), 367-403.

[22] S.Huckaba, C.Huneke. Rees algebras of ideals having small analytic deviation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 339 (1993), 373-402.

[23] C.Huneke. Hilbert functions and symbolic powers. *Michigan Math. J.* 34 (1987), 293-318.

[24] C.Huneke. On the associated graded ring of an ideal. *Illinois J. Math.* 26 (1982), 121-137.

[25] C.Huneke. On the finite generation of symbolic blow-ups. *Math. Z.* 179 (1982), 465-472.

[26] C.Huneke. *Symbolic powers and weak d-sequences.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 68, (173-199). Marcel-Dekker

[27] C.Huneke. Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras. *Comm. Algebra.* 9 (1981), 339-366.

[28] C.Huneke. The primary components of and integral closures of ideals in 3-dimensional regular local rings. *Math. Ann.* 275 (1986), 617-635.

[29] D.Katz, L.J.Ratliff. U-essential prime divisors and sequences over an ideal. *Nagoya Math. J.* 103 (1986), 39-66.

[30] W.E.Kuan. A note on primary powers of a prime ideal. *Pacific J. Math.* 108 (1983), 319-325.

[31] E.Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhaüser, Boston (1985).

[32] H.Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge University Press, 8 (1990).

[33] S.McAdam. *Asymptotic Prime Divisors.* L.N.M. 1023, Springer-Verlag (1983).

[34] S.McAdam. *Primes associated to an ideal.* Contemp. Math. 102 (1989).

[35] S.McAdam. Quintasymptotic primes and four results of Schenzel. *J. Pure Appl. Algebra.* 47 (1987), 283-298.

[36] S.McAdam, L.J.Ratliff. Essential sequences. *J. Algebra.* 95 (1985), 217-235.

[37] S.McAdam, L.J.Ratliff. Note on symbolic powers and going down. *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (1986), 199-204.

[38] M.Morales. Noetherian Symbolic Blow-ups. *J. Algebra.* 140 (1991), 12-25.

[39] M.Nagata. *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert.* Tata Inst. Fund. Res., Lectures on Math. and Phys., Vol. 31, Bombay, 1965.

[40] M.Nagata. *Local Rings.* Interscience, New York, 1961.

[41] S.Noh, W.Vasconcelos. The S_2-Closure of a Rees Algebra. *Results in Math.* 23 (1993), 149-161.

[42] A.Ooishi. Noetherian property of symbolic Rees algebras. *Hiroshima Math. J.* 15 (1985), 581-584.

[43] C.Peskine, L.Szpiro. Dimension projective finie et cohomologie locale. *Publ. Math. I.H.E.S.* 42 (1973), 77-119.

[44] L.J.Ratliff. The topology determined by the symbolic powers of primary ideals. *Comm. Algebra.* 13 (1985), 2073-2104.

[45] L.J.Ratliff. Three theorems on form rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987), 432-436.

[46] D.Rees. A note on analytically unramified local rings. *J. London Math. Soc.* 36 (1961), 24-28.

[47] D.Rees. On a problem of Zariski. *Illinois J. Math.* 2 (1958), 145-149.

[48] L.Robbiano, G.Valla. Primary powers of a prime ideal. *Pacific J. Math.* 63 (1976), 491-498.

[49] P.C.Roberts. A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not noetherian. *Proc. Amer. Math. Soc.* 94 (1985), 589-592.

[50] P.Schenzel. Examples of noetherian symbolic blow-up rings. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 33 (1988), 375-383.

[51] P.Schenzel. Explicit computations around the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem. *Manuscripta Math.* 78 (1993), 57-68.

[52] P.Schenzel. Filtrations and noetherian symbolic blow-up rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 102 (1988), 817-822.

[53] P.Schenzel. Finiteness of relative Rees rings and Asymptotic prime divisors. *Math. Nachr.* 129 (1986), 123-148.

[54] P.Schenzel. Symbolic powers of prime ideals and their topology. *Proc. Amer. Math. Soc.* 93 (1985), 15-20.

[55] R.Y.Sharp. On the attached prime ideals of certain artinian local cohomology modules. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 24 (1981), 9-14.

[56] R.Y.Sharp. On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring. *Quart. J. Math. Oxford.* (2), 22 (1971), 425-434.

[57] A.Simis, W.Vasconcelos. The syzygies of the conormal module. *Amer. J. Math.* 103 (1981), 203-224.

[58] J.K.Verma. On ideals whose adic and symbolic topologies are linearly equivalent. *J. Pure Appl. Algebra.* 47 (1987), 205-212.

[59] J.K.Verma. On the symbolic topology of an ideal. *J. Algebra.* 112 (1988), 416-429.

[60] R.Waldi. Vollständige Durchschnitte in Cohen-Macaulay-Ringen. *Arch. Math.* 31 (1978), 439-442.

[61] D.Weston. On descent in dimension two and non-split Gorenstein modules. *J. Algebra.* 118 (1988), 263-275.