



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

## El problema del confinament atacat des de l'acció efectiva de la Q. C. D.

Joan Soto Riera



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- Compartigual 4.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - Compartigual 4.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0. Spain License.**

EL PROBLEMA DEL CONFINAMENT ATACAT DES DE L'ACCIÓ EFECTIVA

DE LA Q. C. D.



BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA<sup>L</sup>



0700448418

Joan Soto Riera

Decembre 1985

Grup	Secció
Regist. n.º 21.415	



Memòria presentada per en Joan Soto Riera per tal d' optar al grau de Doctor en Ciències Físiques per la Universitat de Barcelona. Aquest treball ha estat realitzat en el Departament de Física Teòrica de la mateixa Universitat sota la direcció del doctor Emili Elizalde, professor titular de Física Teòrica.

Barcelona, Decembre del 85

Prof. Emili Elizalde

# ÍNDIX

## AGRAÏMENTS

## PRESENTACIÓ

### I. Q.C.D. I EL CONFINAMENT DELS QUARKS

I.1 Q.C.D. ....	1
I.2 El confinament dels quarks .....	5

### II. UN MODEL CONFINANT

### III. ACCIÓ EFECTIVA A UN LOOP

III.1 Formalisme i tècniques de càlcul .....	1
III.2 Camp Cromomagnètic Constant .....	7
III.3 Camp Autodual Constant .....	15

### IV. RESULTAT A TOT ORDRE EN LOOPS

IV. 1 Introducció .....	1
IV. 2 Factorització .....	2
IV. 3 Ghost .....	6
IV. 4 Normalització i renormalització .....	8
IV. 5 Comentaris tècnics .....	10
IV. 6 Comentaris físics .....	13
IV. 7 Introducció dels quarks .....	15
IV. 8 Cas cromomagnètic (comentari) .....	18

### V. RESULTATS SUPLEMENTARIS A PARTIR DE L'ACCIÓ EFECTIVA A UN LOOP

V. 1 Introducció .....	1
V. 2 Valor del condensat i connexió amb la la constant del model de sac .....	3
V. 3 Relacions entre condensats .....	18

### VI. ACCIÓ EFECTIVA A TEMPERATURA FINITA

VI. 1 Introducció .....	1
VI. 2 Regularització $\zeta$ a $T \neq 0$ .....	4

VI. 3 Modus inestables .....	8
VI. 4 Acció efectiva per Y.M. pura .....	12
VI. 5 Influència dels quarks .....	16

VII. RESULTAT EXACTE A TEMPERATURA FINITA

VII. 1 Introducció .....	1
VII. 2 Estructura .....	2
VII. 3 Factorització .....	4
VII. 4 Desconfinament .....	6

APÈNDIX A. DIAGONALITZACIÓ D'OPERADORS

APÈNDIX B. REGULARITZACIÓ  $\zeta$

APÈNDIX C. PROPIETATS DE  $\zeta(\nu, q)$

APÈNDIX D. PARTS IMAGINÀRIES

APÈNDIX E. NÚMERO DE GRAUS DE LLIBERTAT DE  $\bar{\mathcal{D}} + im$

APÈNDIX F. INDEPENDÈNCIA DEL PARÀMETRE DE GAUGE DEL NÚMERO DE GRAUS DE LLIBERTAT

APÈNDIX G. EQUIVALÈNCIA ENTRE EL FORMALISME MECÀNICO-ESTADÍSTIC I EL FUNCIONAL

APÈNDIX H. DESENVOLUPAMENT PER  $F_1, F_2, I F_3$

H.1 $F_1$ .....	1
H.2 $F_2$ i $F_3$ .....	6

APÈNDIX I. PARTS IMAGINÀRIES A  $T \neq 0$

REFERÈNCIES

## AGRAÏMENTS

Vull agrair, en primer lloc, al Dr. Elizalde haver acceptat la compromesa tasca que sempre suposa la direcció d'una tesi. Seguidament al Dr. Pascual, de qui he après gran part de la física que sé, la seva constant preocupació per la correcta formació científica dels doctorants del departament, i en concret per la meva. Al Dr. Tarrach, la seva accessibilitat i sempre bona disposició a aclarir qualsevol qüestió relacionada amb la física., A J. I. Latorre (actual Dr. Latorre ), d'una manera especial, les constants (i estimulants) discussions dutes a terme durant aquests dos anys. Un agraïment també, a tots aquells membres del departament a qui, un cop o altre, he destorbat amb preguntes sobre física o sobre qualsevol altra cosa, i que sempre m'han atès correctament i proporcionat ajut quan calia.

En el terreny personal, em sento agraït a tots aquells que han contribuït, en més o menys mesura, a fer més agradables aquests dos anys de tesi, mencionant de manera especial i merescuda a la meva família, sense l'esforç i suport de la qual hauria estat impossible d'arribar a aquest punt.

## PRESENTACIO

Aquesta memòria està estructurada en set capítols i vuit apèndix. Dels capítols, els dos primers es poden considerar introducció, mentre que la resta són ja treball original. El capítol I està dedicat a una descripció ràpida de la Q.C.D., a exposar el problema del confinament i a comentar les diverses línies actuals per atacar-lo. En el capítol II s'explica, mitjançant un model senzill però realista, quina és la visió del problema en l'aproximació de l'acció efectiva. La resta de la tesi està dedicada bàsicament a trobar accions efectives que siguin confinants segons els criteris deduïts a II. He intentat d'evitar al màxim l'exposició de càlculs en els capítols, relegant-los als apèndix, per tal de fer més fàcil una primera lectura; sense ometre, però, els comentaris sobre qualsevol punt d'interès físic o aproximació matemàtica delicada. En el capítol III i apèndix que allà referencio es troba l'aparell matemàtic bàsic que faré servir durant la memòria, que malgrat no ser complicat, tampoc no és d'ús massa corrent entre els físics teòrics. La major part d'ells correspon a l'article [ES85(I)], però hi ha incorporades algunes idees més recents [ES85(III)] sobre la invariància gauge. El capítol IV consisteix en l'exposició i comentaris d'un resultat exacte que correspon principalment a [ES85(II)] amb questions aclaratòries suplementàries [ES84]. El capítol V és un xic marginal ja que tracta de questions relacionades amb l'acció efectiva encara que no directament en el confinament, correspon als treballs [ES85(III)] i [SO85]. El capítol VI estudia la introducció de la temperatura a un loop, sent potser el més tècnic; correspon a [ES85(VI)]. El capítol VII i últim tracta de dir quelcom o tot ordre en loops mantenint els efectes de la temperatura.

Els apèndix es podrien dividir en purament matemàtics (A, B, C, E, F, H, I) que expliquen en més detall passos o fórmules usats als capítols, i matemàtico-físics (D,G), que contenen, més a més, comentaris sobre interpretacions o formalismes diferents als nostres que en certs assumptes es troben a la literatura.



I. Q.C.D. I EL CONFINAMENT DELS QUARKSI.1 Q.C.D.

La Q.C.D. és una teoria gauge no abeliana basada en el grup SU (3). El seu lagrangià es pot escriure [PT 84] com

$$\mathcal{L}_{\text{Q.C.D.}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i \bar{q}_k^a \gamma^\mu D_\mu^{ab} q_k^b - m_k \bar{q}_k^a q_k^a \quad (1)$$

on

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu - i g (T^c)^{ab} A_\mu^c \quad (2)$$

$f^{abc}$  són les constants d'estructura de SU(3) i  $(T^c)^{ab}$  els generadors de la representació fonamental.  $A_\mu^c$  ( $c=1,2, \dots, 8$ ) són els camps que descriuen les partícules gauge d'spin 1 anomenats gluons, i  $q_k^c$  ( $c=1,2,3$ ;  $k=\text{up, down, strange, charm, bottom, top}$ ) descriuen els fermions d'spin 1/2 i càrrega elèctrica (i bariònica) fraccionària anomenats quarks.

(1) és invariant sota la transformació infinitesimal

$$\begin{aligned}
 \psi_k^a &\longrightarrow \psi_k'^a = \psi_k^a - ig(T^b)^{ac} \delta\theta^b \psi_k^c \\
 A_\mu^a &\longrightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a + gf^{abc} \delta\theta^b A_\mu^c - \partial_\mu \delta\theta^a
 \end{aligned} \tag{3}$$

i sota la transformació finita corresponent. D'ací que diguem que (1) és invariant gauge.

Per a quantitzar la teoria a la Feynman hem de considerar una integral funcional sobre totes les configuracions físicament diferents amb un pes

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{p.c.D.}}} \tag{4}$$

Si assumim que la natura és invariant gauge, les configuracions  $A_\mu^a$  que es diferenciïn només en una transformació de gauge, seran físicament equivalents i només n'haurem de contar una al fer la integral funcional (fixar el gauge). Així, la teoria quàntica queda finalment descrita per

$$\begin{aligned}
 Z(j_\mu^a, \bar{n}_k^a, n_k^a) &= \int d[A_\mu^a] d[\bar{\psi}_k^a] d[\psi_k^a] \cdot \Delta_{\text{F.P.}} \\
 &\cdot \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{\text{p.c.D.}} - \frac{1}{2\xi} g^a g^a + j_\mu^a A_\mu^a + \bar{n}_k^a \psi_k^a + \bar{\psi}_k^a n_k^a \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

on  $Z$  és el funcional generador de les funcions de Green.  $g^a = g^a(A_\mu^b)$  és una funció qualsevol de  $A_\mu^a$  amb l'única restricció que  $g^a(A_\mu^b) = 0$  (gauge fixing) tingui una única solució per cada família de camps físicament equivalents.  $\Delta_{FP}$  està definit finalment com

$$\Delta_{FP} \equiv \det \left[ \frac{\delta}{\delta \theta^b} g^a(A_\mu^a(\theta)) \Big|_{\theta^b=0} \right] \quad (6)$$

on  $A_\mu^a(\theta)$  és el transformat gauge un angle  $\theta^b$  de  $A_\mu^a$ .  $g^a$  i  $\Delta_{FP}$  apareixen com a conseqüència de fixar el gauge.

El fet que l'exponent a (5) sigui imaginari pur fa que la integral funcional sigui difícilment tractable. Per a sol·ventar aquest problema es fa normalment una continuació analítica a l'espai euclidi

$$d^4x \longrightarrow -i d^4x \quad g_{\mu\nu} \longrightarrow -\delta_{\mu\nu} \quad (7)$$

quedant (5)

$$Z(j_\mu^a, \bar{\eta}_k^a, \eta_k^a) = \int d[A_\mu^a] d[\bar{\psi}_k^a] d[\psi_k^a] \Delta_{FP} \cdot \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{q}_k^a (\not{\partial} + im_k)^{ab} q_k^b + \frac{1}{2\xi} g^a g^a + j_\mu^a A_\mu^a - \bar{\eta}_k^a \psi_k^a - \bar{\psi}_k^a \eta_k^a \right] \right\} \quad (8)$$

que serà el nostre punt de partida. Hom assumeix que, un cop acabat el càlcul pertinent, desfent (7) obtindrà el resultat correcte (postulat euclidi).

La Q.C.D. (la existència d'un número quàntic de color, primerament) va tenir els seus primers èxits en l'explicació de l'estat fonamental de la  $\Delta^{++}$  i, més endavant, en la correcta descripció de la desintegració del pió anant a dos fotons. Finalment, la demostració que la Q.C.D. era una teoria asimptòticament lliure [PO 73] [GW 73] [TH 85] va explicar per què els models de partons funcionaven tant bé en l'estudi de col·lisions molt energètiques d'electrons amb hadrons (deep inelastic scattering). Malgrat que encara resta lluny d'ésser comprovada en la seva totalitat, podem dir que la Q.C.D. és compatible amb totes les dades experimentals actuals [GO 85] [AL 85]

La llibertat asimptòtica, punt crucial a la Q.C.D., ens diu que els quarks i gluons es comporten com a partícules lliures ( $g \sim 0$ ) a molt alts moments, podem així usar tota la potència de càlcul de la teoria de perturbacions en  $g$  (constant d'acoplament) per l'estudi de fenòmens que tenen lloc en aquesta zona d'energies ( $\gtrsim 10$  GeV). En canvi, per moments baixos ( $\lesssim 1$  GeV) la Q.C.D. esdevé una teoria no trivial i no hi ha una manera sistemàtica d'atacar-la. Així, un dels problemes més importants que té la física des que existeix la Q.C.D., és explicar la raó pel la qual no s'han observat quarks lliures, malgrat que aquests apareguin al lagrangià de la teoria. Actualment es creu que els quarks mai podran ser vistos aïllats, i que hi ha algun mecanisme, amagat en la no trivialitat dels moments petits de la Q.C.D., que prohibeix que ho estiguin. És l'anomenat confinament dels quarks. Avançar en la comprensió d'aquest problema, a través de la Q.C.D. és l'objectiu d'aquesta tesi.

## I.2 El confinament dels quarks

El planteig més elemental del problema del confinament és considerar dues càrregues de color estàtiques i puntuals, i estudiar si l'energia associada al sistema ( $E(R)$ ) creix amb la separació d'aquestes  $R$  (per exemple  $E(R) \sim R$ ). Aquest problema és fàcilment traduïble a l'estudi del loop de Wilson [WI 74]

$$W(C) \equiv \langle \text{tr} \exp \left\{ -ig \int_C dx^\mu A_\mu^a(x) T^a \right\} \rangle \quad (9)$$

Les aproximacions actuals al problema del confinament es restringeixen, en última instància, a l'estudi d'aquest objecte ( $W(C)$ ) o directament al de  $E(R)$  [BA 81].

Cal dir que no tenim, ni de bon tros, una demostració satisfactoria que el confinament dels quarks sigui explicat per la Q.C.D.. Malgrat això, cada una de diverses aproximacions al problema suggereix que realment és així des del seu punt de vista. El que sí sembla clar és que el confinament està íntimament lligat a l'estructura de l'estat fonamental de la Q.C.D. (buit físic) i que aquest no té res a veure amb el buit pertorbatiu (l'usual, sobre el que es construeix l'espai de Fock a teoria de pertorbacions en  $g$ ). Així doncs, el problema del confinament està relacionat amb la recerca d'estats d'energia més baixa que el buit pertorbatiu.

A continuació exposaré breument les aproximacions alternatives a la presentada tesi, que han estat de més nomenada en els darrers anys [BA 81].

INSTANTONS [CD 78] [CD 79] : Són solucions a les equacions de Y.M. euclídiades d'acció finita, que considerats fins a la seva primera correcció quàntica (un loop) donen lloc a un estat d'energia més baixa que el buit pertorbatiu. Els seus

efectes sobre el camp creat per una font de color externa es poden simular per una constant "dielèctrica" de manera similar a (II.9) i podrien donar lloc al confinament si la seva contribució fos prou important. Els principals problemes amb què es troba l'aproximació són una simulació correcta de l'anomenada interacció instantó-anti-instantó (gas, líquid o sòlid?) i l'arbitrarietat del tall en el "tamany" (size) dels instantons que es consideren; a afegir la no consideració d'altres contribucions que podrien ser rellevants pel problema. (Per un treball recent veure [DP 84] ).

EQUACIONS D'SCHWINGER-DYSON [AB 79] [MA 79]: Aquesta aproximació està basada en què el potencial d'interacció entre dues fonts ve donat a la Q.E.D. en primer ordre de teoria de perturbacions pel propagador pertorbatiu de la partícula de gauge. Hom suposa que a la Q.C.D. pot passar el mateix, però amb el propagador exacte. Si aquest es comporta  $K^{-4}$  a l'espai de moments llavors la teoria és confinant. Un propagador d'aquest estil és obtingut a partir de solucions no pertorbatives a l'equació funcional d'Schwinger-Dyson. Els principals problemes d'aquesta aproximació són que el propagador del gluó és difícilment significatiu (no és invariant gauge), que no només el propagador del gluó intervé al potencial entre dues fonts i que les truncacions que es fan a l'equació funcional són força arbitràries.

TEORIA DE CAMPS PER LOOPS [NA 79] [GN 79] [PO 79] : Es tracta d'obtenir equacions funcionals pel loop de Wilson (o altres objectes similars) que admetin solucions confinants. Es un terreny difícil a causa del poc aparell matemàtic disponible a l'hora de resoldre equacions funcionals (el mateix passa a l'equació de Schwinger-Dyson). Els principals problemes d'aquesta aproximació són, però, l'existència de productes d'operadors molt singulars, i uns infinits suplementaris que apareixen a causa del gran nombre de configuracions a l'espai dels loops.

EL RETÍCUL (LATTICE) [WI 74] [KO 79] [CR 83] : Es una regularització de la Q.C.D. que consisteix a discretitzar l'espai-temps (retícul) tot mantenint explícita la invariància gauge. El gran avantatge d'aquesta regularització és que permet la simulació numèrica de la Q.C.D.. Hom pot demostrar teòricament en el que s'anomena límit de l'strong coupling que la teoria és confinant. La possible existència d'una transició de fase entre el règim strong, i el weak de la teoria de perturbacions fa que aquella no sigui una prova definitiva. Simulacions numèriques per mètodes de monte-carlo suggereixen també que la Q.C.D. és confinant. Els principals problemes d'aquesta aproximació són la pèrdua d'invariància lorentz i la dificultat d'admetre fermions. Per altra banda les simulacions numèriques es fan en retículs relativament petits ( $16^4$ ) com per ser completament fiables. A més a més, hi han problemes tècnics suplementaris que poden trobar-se discutits a [BA 81] (Veure també [DZ 83] [SH 85]).

DUALITAT CROMOELÈCTRICA-CROMOMAGNÈTICA: [TH 78] [TH 79] . Es una forma de treballar inspirada en mètodes mecànic-estadístics que relacionen expressions per altes i baixes temperatures. Traduïts a la O.F.T. intentarien de relacionar règims d'strong i weak coupling. L'anàlisi del confinament es fa a través dels fluxes dels camps cromoeleèctrics i cromomagnètics. La concentració del flux del camp cromoeleèctric dins de fines cordes ('strings') és assimilable al confinament. A través de les transformacions de dualitat, hom pot demostrar [TH 79] que o bé el flux cromoeleèctric es concentra en strings o bé ho fa el cromomagnètic però no els dos alhora, sent així equivalent per demostrar l'existència de confinament provar que el flux cromoeleèctric es concentra en strings o provar que el cromomagnètic no ho fa. Per altra banda, analogies amb la teoria de la superconductivitat han suggerit de considerar monopols com a configuracions dominants al buit [MA 75] , donant efectivament una energia més baixa que el buit

pertorbatiu. Explotant també aquella analogia així com fent una anàlisi profunda de les teories de Y.M. no abelianes, G.'t Hooft ha donat una explicació qualitativa de quins són els mecanismes que poden donar lloc al confinament [TH 84]

Val a dir, finalment, que un cop acceptada la idea que els quarks estan confinats hi ha aproximacions, com poden ser les regles de suma [RR 85] , el model bag [TH 81] i els models de potencial [GM 80] que reproduïxen la fenomenologia satisfactòriament.



## II. UN MODEL CONFINANT

La primera cosa que a hom se li acut per a explicar el confinament dels quarks és intentar de trobar solucions a les equacions de Y.M. clàssiques en presència de fonts de color estàtiques i puntuals, que poden ser interpretades com quarks infinitament pesats. Si hom aconsegueix potencials que divergeixin al allunyar-nos més i més de la font a través de la resolució de les esmentades equacions, hom podria dir que la teoria clàssica de Y.M. és confinant, i només li caldria demostrar que les fluctuacions quàntiques són prou petites com per no estroncar el resultat clàssic, per tal de provar, definitivament, que la Q.C.D. és una teoria confinant. Malgrat nombrosos intents (que encara segueixen [CH84]), no s'ha trobat cap solució clàssica satisfactòria [AC79], i actualment, es tendeix a pensar que són de fet les fluctuacions quàntiques les responsables del confinament dels quarks.

Abans, però, de plantejar un atac frontal a la teoria quàntica és bo preguntar-se quins tipus de lagrangians clàssics donen lloc a potencials confinants. Si en trobem algun, sempre podrem acollir l'esperança que la Q.C.D. el reproduïxi d'alguna manera com a teoria efectiva, és a dir com a teoria clàssica que du incorporades totes o part de les correccions quàntiques. Seguint aquesta línia presentaré el model [PT78] de H. Pagels i E. Tomboulis, anomenat dielèctric field theory (D.F.T.) per la seva semblança amb l'electromagnetisme en medi material. Aquest model, malgrat la seva senzillesa, dóna una idea prou clara de què s'ha de cercar per trobar una teoria confinant i això és simplement, com veurem més endavant, un  $L_{\text{ef}}$  que atenyi el seu mínim a  $F^2 \neq 0$ . Aquest resultat és extraordinàriament valuós ja que ens estalvia anàlisis més detallades d'un determinat  $L_{\text{ef}}$  i serà usat durant tota la tesi com a criteri de confinament.

L'esmentat model està definit a l'espai euclidi de la

següent manera:

$$d_{\text{ef}}(x) \equiv \frac{1}{4g^2(t)} F^2(x); \quad F^2(x) \equiv F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x); \quad t \equiv \log\left(\frac{F^2}{\mu^4}\right) \quad (1)$$

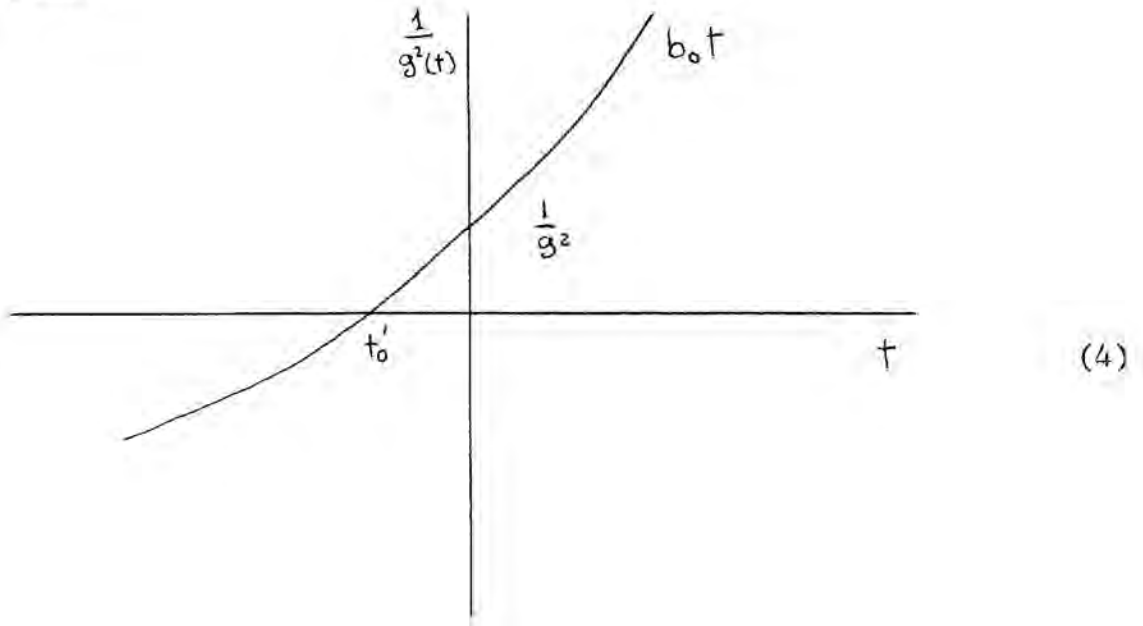
on  $\mu$  és un paràmetre arbitrari. Fixem-nos que  $1/g^2(t)$  juga el paper d'una permeabilitat elèctrica i magnètica, sent (1) matemàticament equivalent a considerar una teoria de Y.M. clàssica en un medi material caracteritzat per  $1/g^2(t)$  (d'ací el nom de D.F.T.). Per altra banda, i pensant en la teoria quàntica de camps (Q.F.T.),  $g^2(t)$  es pot considerar com una constant d'acoptament "running", la funcionalitat de la qual vindrà donada per la funció  $\beta(g)$  de Callan-Symanzik de la Q.C.D., de forma que

$$4 \frac{dg(t)}{dt} = \beta(g) \quad ; \quad g(0) = g \quad (2)$$

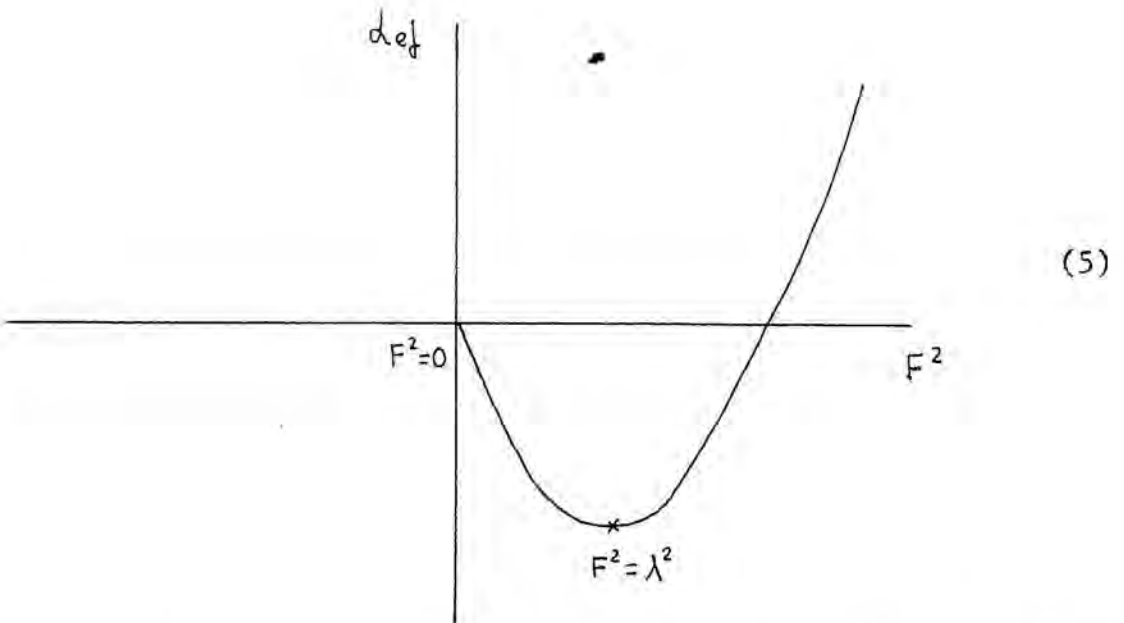
si el paràmetre  $\mu$  a (1) s'interpreta com l'escala de normalització, llavors el  $L_{\text{ef}}$  de (1) és invariant sota el grup de renormalització, reproduint a més a més correctament l'anomalia de la traça. Això fa que (1) sigui plausible com a teoria efectiva de la Q.C.D. La definició concreta del model, però, suposa conèixer  $1/g^2(t)$  en tot el rang de variació de  $t$ , i les tècniques actuals, malauradament, només permeten la coneixença de  $1/g^2(t)$  quan  $t \gg 1$ , gràcies a la llibertat asimptòtica.

$$\frac{1}{g^2(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} b_0 t \quad ; \quad b_0 \equiv \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{11}{3}\right) \mathcal{N} \quad (3)$$

El comportament de  $1/g^2(t)$  per  $t \ll -1$  constituirà la principal hipòtesi del model i el prendrem d'acord amb la gràfica següent:



la qual implica per Lef un comportament del tipus



Fixem-nos que el mínim s'ateny a  $F^2 = \lambda^2 \neq 0$  i que això només pot ser així si  $1/g^2(t)$  creua l'eix  $x$  per  $t < 0$ . En el mateix treball [PT78] es demostra que si  $1/g^2(t) > 0 \quad t \in [-\infty, \infty)$

el model (1) no dóna lloc a potencials confinants, llevat en el cas límit  $1/g^2(-\infty) = 0$  on es pot trobar un potencial que es comporta com  $R^\gamma$ ,  $\gamma < 1$  a grans  $R$ . A aquest darrer cas li correspon una gràfica (5) de  $L_{eff}$  on  $L_{eff} \geq 0$  i té pendent nul a l'origen, podent-se considerar com un cas límit de (4) o (5) quan  $t'_0 \rightarrow -\infty$  o  $\lambda^2 \rightarrow 0$ . L'existència de confinament restà així lligada a què el mínim del  $L_{eff}$  s'atenyi a  $F^2 \neq 0$ .

Per veure que (1), juntament amb (4), condueix a potencials confinants, considerem-lo en presència d'una font puntual externa

$$\Delta_{eff} = \frac{1}{4g^2(t)} F^2(x) - A_M^a(x) J_M^a(x)$$

$$J_M^a(x) = \int dz \dot{\xi}_M^i(z) \delta^{(4)}(x - \xi(z)) T^a(z) \quad (6)$$

L'evolució de la font ve regida per les següents equacions [W070].

$$m \ddot{\xi}_M^i = F_{M\nu}^a T^a(z) \dot{\xi}_\nu^i(z)$$

$$\dot{T}^a(z) + f^{abc} A_M^b T^c(z) \dot{\xi}_M^i(z) = 0 \quad (7)$$

Les equacions (7) admeten com a solució una font estàtica  $\dot{\xi}_M^i(z) = \delta_{M0}$  i constant  $T^c(z) = T \delta^{c4}$  si  $A_M^b = A_M \delta^{b4}$ ,

la qual cosa abelianitza (6), quedant  $F^2$  en la forma típica de l'electrodinàmica

$$F^2 = (E^i)^2 + (B^i)^2 \quad ; \quad E^i \equiv \frac{\partial A_0}{\partial x^i} \quad ; \quad B^i \equiv \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k \quad (8)$$

Les equacions del moviment per (6) amb les hipòtesis simplificadores introduïdes són:

$$\begin{aligned} \partial_i (\varepsilon(t) E^i) &= T \delta^{(3)}(\vec{x}) \\ \varepsilon^{kij} \partial_i (\varepsilon(t) B^j) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{g^2(t)} + \frac{d}{dt} \frac{1}{g^2(t)}$$

Fixem-nos que en absència de fonts o lluny d'aquestes, (9) admet dues solucions

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_0) = 0 \quad ; \quad t_0 &\equiv \log\left(\frac{\lambda^2}{\mu^4}\right) \\ E^i = B^i &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

corresponent la primera al mínim de Lef (5) i per tant restant associada al buit. Si suposem simetria esfèrica una solució de (9) és

$$\varepsilon(t)E = \frac{T}{4\pi r^2}, \quad E = E(r), \quad E^i = E(r) \frac{x^i}{r} \quad (11)$$

$$B^i = 0$$

La tria  $B^i = 0$  està justificada almenys a la zona propera a la font, on la llibertat asimptòtica (petites distàncies) ens assegura una solució tipus Coulomb.

En aquesta zona  $1/g^2(t) \rightarrow b_0 t$ , tenint (11) com a solució aproximada

$$E \simeq \frac{T}{4\pi r^2 b_0} \frac{1}{\log\left(\frac{T^2}{\lambda^2 e b_0 4\pi r^2}\right)} \quad (12)$$

que és una llei de Coulomb amb correccions logarítmiques. A la zona llunyana a la font podem considerar que  $E^2$  s'apropa al valor  $F^2$  al buit, (influència petita de la font). Tindrem

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \varepsilon'(t_0)(t-t_0) = \varepsilon'(t_0)(t-t_0) \quad (13)$$

que substituït a (11) dóna lloc a

$$\varepsilon'(t_0) \log\left(\frac{2E^2}{\lambda^2}\right) E = \frac{T}{4\pi r^2} \quad (14)$$

que té com a solució aproximada

$$E^2 \simeq \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\sqrt{2} T \lambda}{8\pi \varepsilon'(t_0) \cdot r^2} \quad (15)$$

L'energia associada a la regió de l'espai centrada en la font i de radi  $R$  està definida com ( $\sim$  potencial)

$$- \mathcal{E}(R) = \int_0^R \mathcal{O}_{00} d^3x \quad (16)$$

on  $\mathcal{O}_{\mu\nu}$  és el tensor energia-impuls definit de la forma usual

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} \equiv \tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu} - \tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu}|_{\text{VAC}} \quad (17)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu} = \varepsilon(t) F_{\mu\lambda}^a F_{\lambda\nu}^a + \frac{1}{4} \frac{1}{g^2(t)} g_{\mu\nu} (F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a)$$

Per  $\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu}|_{\text{VAC}}$  s'enten el  $\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu}$  calculat a la configuració que fa mínim el  $\mathcal{L}_{\text{ef}}$ , això és:

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu}|_{\text{VAC}} = \frac{1}{4g^2(t_0)} g_{\mu\nu} \lambda^2 \quad (18)$$

Fent servir (15) i (16), trobem que l'energia associada a l'esmentada regió es comporta, lluny de la font, com

$$\mathcal{E}(R) \simeq \frac{\sqrt{2} T}{4\pi\lambda} R \quad (19)$$

que és l'esperat potencial linial en R. Val a dir que hom arriba al mateix resultat si hom considera  $1/g^2(t) \simeq c(\lambda^2/2 - E^2)^\gamma$ ,  $\gamma > 1$  quan  $E^2 \sim \lambda^2/2$  en comptes de suposar  $1/g^2(t)$  analítica.

Del resultat obtingut cal destacar:

(i) Que partint d'un lagrangià clàssic que molt bé podria ser una bona aproximació a un lagrangià efectiu de la Q.C.D. s'ha obtingut un potencial confinant. Posem èmfasi en què aquest resultat depèn bàsicament de l'estructura (5) del Lef i no dels detalls del model.

(ii) Que les equacions (9), junt amb (10) suggereixen una possible divisió de l'espai en dues zones que podria conduir cap a una explicació dels models de sac, tant exitosos fenomenològicament. De fet S.L. Adler [AD81] basant-se en un model d'aquest tipus ha provat la formació d'un sac amb dues fonts puntuals (quark i anti-quark) amb un potencial que creix almenys linealment amb la separació de les fonts.

Per contra, hom podria argüir que tot això ho hem fet a l'espai euclidi i que cal una continuació analítica a l'espai de Minkowski perquè tingui sentit físic. Una continuació analítica naïve  $E^2 \rightarrow -E^2$  fa que el paràmetre  $t$  esdevingui imaginari. Aleshores el càlcul fet sembla de validesa dubtosa malgrat que hom pugui raonar [PT78] que la contribució imaginària només reflecteix una inestabilitat en el sistema que acabaria desintegrant-se en estats  $B^2 > E^2$ . No és difícil adonar-se, però, que el model

$$d_{\text{eff}} = -\frac{1}{4g^2(t)} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad t \equiv \log\left(-\frac{F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}{\mu^4}\right) \quad (20)$$



definit a l'espai de Minkowski gaudeix d'idèntiques propietats que el considerat a l'espai euclidi. Més a més, una redefinició de  $t$  a (1)

$$t \equiv \frac{1}{2} \log \left( \left( \frac{F^2}{\mu^4} \right)^2 \right) \quad (21)$$

no canviaria en cap aspecte el càlcul fet, i ens estalviaria el problema de les parts imaginàries al fer prolongacions analítiques. Així doncs, a un model euclidi com (1) li podem fer correspondre un altre a l'espai de Minkowski amb les mateixes propietats confinants sense més complicació [AP84] [LW84].

Es valúo comentar que  $F^2 = \lambda^2$  no presuposa que  $E^{a_i}$ ,  $\beta^{a_i}$  prenguin un valor esperat al buit diferent de zero, com han comentat alguns autors [PT78], la qual cosa implicaria una ruptura de la invariància Lorentz i Gauge.  $E^{a_i}$ ,  $\beta^{a_i}$  poden tenir direccions arbitràries a l'espai de Lorentz i al de color [AD81] i, possiblement, no puguem forçar-los a escollir-ne una a causa que la seva observació no estigui a l'abast experimental: si volem mesurar aquestes direccions hem d'introduir una font, almenys puntual, i, com hem vist, aquesta modifica tot l'espai i  $F^2 = \lambda^2$  deixa de valer. Si introduïm dues fonts puntuals, com a l'esmentat model de l'Adler, al voltant d'aquestes es forma un sac on  $F^2 = \lambda^2$  tampoc val i no podem dir res de les direccions cercades. Hauríem d'acceptar, doncs, que el buit se les arregla per aconseguir  $F^2 = \lambda^2$  sense donar-nos informació suplementària sobre les direccions particulars de  $E^{a_i}$ ,  $\beta^{a_i}$  evitant així una violació de les simetries Lorentz i Gauge.

La pregunta que cal fer-nos a continuació és si la Q.C.D. és capaç de reproduir, d'alguna manera, models d'aquest tipus. La resposta és que sí: prenent (1) i (2) amb  $\beta(g)$  calculada a un loop obtenim un model confinant. Per altra

banda hom pot obtenir l'acció efectiva a un loop de la Q.C.D. per camps cromomagnètics [SA77] i autoduals [LE81] constants i hom troba un resultat formalment idèntic a l'anterior. Resta però justificar la validesa dels resultats quan anem incorporant més correccions quàntiques, així com, aclarir quin és el paper dels quarks dinàmics que han estat oblidats fins ara; d'això s'ocupa principalment aquesta tesi.

El problema de trobar un lagrangià efectiu a la Q.C.D. està ben plantejat teòricament dins del formalisme funcional de la Q.F.T. [RA81].

$$\Gamma(\bar{A}_\mu^a) \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\bar{A}_\mu^a(x)) \quad (22)$$

$\Gamma(\bar{A})$ , el funcional generador de les funcions vèrtex, conté tota la informació sobre el buit i més a més sabem que la configuració que representa aquest últim compleix:

$$\frac{\delta \Gamma(\bar{A}_\mu^a)}{\delta \bar{A}_\mu^a(x)} = 0 \quad (23)$$

és a dir un principi variacional clàssic. Per altra banda  $\Gamma(\bar{A})$  a ordre zero coincideix amb l'acció clàssica. (22) és així el candidat ideal per considerar-lo el lagrangià clàssic portador de tota la informació quàntica de la teoria.

La dificultat de calcular  $\Gamma(\bar{A})$  és, però, extrema. Fins i tot a l'ordre d'un loop les aproximacions són inevitables i malgrat que els resultats obtinguts fins al moment són encoratjadors cal afinar-los incloent efectes que no han estat tinguts en compte fins ara. D'això tractarem, en els propers capítols.

### III. LAGRANGIA EFECTIU A UN LOOP

#### III.1 Formalisme i tècniques de càlcul

Introduïrem el lagrangià efectiu com l'integrand de l'acció efectiva definida de la manera usual en el formalisme funcional de la Q.F.T. [RAS1]. El funcional generador de les funcions vèrtex està definit a l'espai euclidi com

$$Z(J_{\mu}^a) \equiv \int d[A_{\mu}^a(x)] d[\bar{\psi}^a(x)] d[\psi^a(x)] \cdot \Delta_{FP} \exp \left\{ - \left[ S(A_{\mu}^a) + \int d^4x \left( \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}_k^a (\not{\partial} + im_k)^{ab} \psi_k^b + J_{\mu}^a A_{\mu}^a \right) \right] \right\} \quad (1)$$

on

$$S(A_{\mu}^a) = \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\xi} g^a g^a \right) \quad (2)$$

essent  $g^a$  el terme que fixa el gauge. Treballarem sempre en el background field gauge amb la qual cosa

$$g^a \equiv \bar{D}_{\mu}^{ab} (A_{\mu}^b - \bar{A}_{\mu}^b) \quad (3)$$

on  $\bar{A}_{\mu}^b$  és un camp fix (no integrat) arbitrari i  $\bar{D}_{\mu}^{ab}$  significa la derivada covariant on el camp és justament  $\bar{A}_{\mu}^b$ .  $\Delta_{FP}$  és el determinant de Faddeev-Popov que en aquest gauge esdevé:

$$\Delta_{FP} = \det \left\{ -D_{\mu}^{bc}(\gamma) \bar{D}_{\mu}^{ca}(\gamma) \delta(x-\gamma) \right\} \quad (4)$$

Si desenvolupem l'exponent de (1) entorn del camp  $\bar{A}_\mu^a$  i més a més triem  $\bar{A}_\mu^a$  de manera que compleixi les equacions de Y.M. en presència de la font  $J_\mu^a$ .

$$\frac{\delta S(\bar{A}_\mu^a)}{\delta \bar{A}_\mu^a(x)} + J_\mu^a(x) = 0 \quad ; \quad \bar{D}_\mu^{ab} \bar{F}_{\mu\nu}^b + J_\nu^a = 0 \quad (5)$$

obtenim de (1)  $(A_\mu^a(x) = \bar{A}_\mu^a(x) + b_\mu^a(x))$

$$\begin{aligned} Z(J_\mu^a) = & \int d[b_\mu^a(x)] d[\bar{\Psi}_k^a(x)] d[\Psi_k^a(x)] \det \left\{ -\bar{D}_\mu^{bc} \bar{D}_\mu^{ca} + ig(T^r)^{bc} b_\mu^r \bar{D}_\mu^{ca} \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ - \left[ \int d^4x \left( \frac{1}{2} b_\mu^a \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} b_\nu^b - gf^{abc} b_\mu^c b_\nu^d \bar{D}_\nu^{ae} b_\mu^e \right. \right. \right. \\ & + \frac{g^2}{4} f^{acd} f^{abe} b_\mu^c b_\mu^b b_\nu^d b_\nu^e + \\ & \left. \left. \left. + \sum_{k=1}^{N_f} \left( \bar{\Psi}_k^a (\bar{D} + im_k)^{ab} \Psi_k^b - \bar{\Psi}_k^d ig(T^b)^{ac} \phi^b \Psi_k^c \right) \right) \right] \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ - \int d^4x \left( J_\mu^a \bar{A}_\mu^a + \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

on  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ac}$  està definit com

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ac} \equiv -\delta_{\mu\nu} (\bar{D}_\sigma \bar{D}_\sigma)^{ac} + 2ig(T^d)^{ac} \bar{F}_{\mu\nu}^d + \left(1 - \frac{1}{2}\right) (\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu)^{ac} \quad (7)$$

L'aproximació a un loop de (6) consisteix a menysprear tots els termes que continguin més de dos camps a integrar ( $b_\mu^a$ ), quedant

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(J_{\mu}^a) = & \int d[b_{\mu}^a(x)] d[\bar{\psi}_{\kappa}^a(x)] d[\psi_{\kappa}^a(x)] \det \{-\bar{D}_{\mu}^{bc} \bar{D}_{\mu}^{ca}\} \\
& \cdot \exp \left\{ -\int d^4x \left( \frac{1}{2} b_{\mu}^a \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} b_{\nu}^b + \sum_{\kappa=1}^{N_f} \bar{\psi}_{\kappa}^a (\bar{D} + i m_{\kappa})^{ab} \psi_{\kappa}^b \right) \right\} \quad (8) \\
& \cdot \exp \left\{ -\int d^4x \left( J_{\mu}^a \bar{A}_{\mu}^a + \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \right) \right\}
\end{aligned}$$

(El determinant de F.P. es pot posar com una exponencial introduint els camps ghost

$$\det \{-D_{\mu}^{bc} \bar{D}_{\mu}^{ca}\} = \int d[\bar{\phi}^b] d[\phi^a] \exp \left\{ -\int d^4x \bar{\phi}^b (-D_{\mu}^{bc} \bar{D}_{\mu}^{ca}) \phi^a \right\} \quad (9)$$

llavors el terme proporcional a  $b_{\mu}^a$  desapareix en l'aproximació esmentada.)

L'aproximació (8) només té sentit estricta si  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$ , i  $(\bar{D} + i m_{\kappa})^{ab}$  són definits positius ( $-(\bar{D}_{\mu} \bar{D}_{\mu})^{ab}$  sempre ho és), però, formalment, sempre podem escriure

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(J_{\mu}^a) = & \exp \left\{ -\int d^4x \left( J_{\mu}^a \bar{A}_{\mu}^a + \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \right) \right\} \\
& \cdot \left( \det \{ \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ac} \} \right)^{-1/2} \cdot \det \{-\bar{D}_{\mu}^{bc} \bar{D}_{\mu}^{ca}\} \quad (10) \\
& \cdot \prod_{\kappa=1}^{N_f} \det \{ \bar{D} + i m_{\kappa} \}
\end{aligned}$$

Cal advertir que l'  $\bar{A}_{\mu}^a(x)$  que estem fent servir no és el definit de la manera usual

$$A_{\mu}^a(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J_{\mu}^a(x)} \quad (11)$$

però és fàcil veure que dins de l'aproximació d'un loop es poden prendre iguals. De fet, l'aproximació a un loop és quedar-se en la primera correcció quàntica  $O(\hbar)$ , i la diferència entre posar  $\bar{A}_\mu^a$  i  $\tilde{A}_\mu^a$  és  $O(\hbar^2)$  en el  $\Gamma(\bar{A}_\mu^a)$ .

L'acció efectiva està definida com

$$e^{-\Gamma(\bar{A}_\mu^a)} \equiv e^{\int d^4x J_\mu^a A_\mu^a} Z(J_\mu^a) \quad (12)$$

i per tant, finalment,

$$e^{-\Gamma(\bar{A}_\mu^a)} = e^{-\int d^4x \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a} \cdot (\det \{ \bar{O}_{\mu\nu}^{ab} \})^{-1/2} \cdot \det \{ -\bar{D}_\mu^{bc} \bar{D}_\mu^{ca} \} \cdot \prod_{k=1}^{N_f} \det \{ (\not{D} + im_k)^{ab} \} \quad (13)$$

Important és el fet que  $\Gamma(\bar{A})$  a (13) és manifestament invariant gauge, a causa de les propietats del background fixing gauge [AB81]; i podem, per tant, considerar-la com un funcional de tots els invariants gauge que poguem construir

$$\Gamma(\bar{A}_\mu^a) = \Gamma( \text{tr} \{ \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} \}, \text{tr} \{ \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^2 \}, \text{tr} \{ \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\nu\sigma} \bar{F}_{\sigma\mu} \}, \dots, \text{tr} \{ \bar{D}_\mu \bar{F}_{\nu\sigma} \bar{D}_\mu \bar{F}_{\nu\sigma} \}, \dots ) ; F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a T^a \quad (14)$$

Trobar  $\Gamma(\bar{A})$  per camps  $\bar{A}_\mu^a$  arbitraris és, però, un problema que no és a l'abast del nostre aparell matemàtic, i de moment, hem de contentar-nos amb treure informació sobre  $\Gamma(\bar{A})$  calculant-la per unes configuracions molt restringides, que ens permetin resoldre el problema de valors propis que apareix quan calculem els determinants de (13). Els camps  $\bar{A}_\mu^a(x)$  que

farem servir són del tipus:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\mu^a(x) &= -\frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu}^a x_\nu & ; & & \bar{F}_{\mu\nu}^a &\equiv \bar{F}_{\mu\nu} n^a \\ n^a n^a &= 1 & & & & (15) \\ \bar{F}_{\mu\nu} &= \text{des} \end{aligned}$$

la qual cosa implica:

(i) Que tots els termes en què aparegui una derivada covariant a (14) seran posats zero. Aquest fet no suposa una restricció important si estem interessats en fenòmens de baixa energia, com és el confinament, on  $\bar{D}_\mu \sim$  termes cinètics  $\sim 0$ .

(ii) Que termes on intervinguin  $f^{abc}$ , les constants d'estructura del grup, també són posats zero ( $f^{abc} n^b n^c = 0$ ). Aquests termes podrien en principi tenir importància, però per raons tècniques no podem tenir-los en compte. Aquesta manca dels camps (15) no serà relevant si la teoria no depèn massa de la no abelianitat del grup en el sentit que, un cop tinguda en compte l'autointeracció com ho ha estat a (13), els  $\bar{A}_\mu^a(x)$  propers a la configuració del buit no se separin massa de direccions fixes de color  $\bar{A}_\mu^a(x) \sim n^a A_\mu(x)$  ( $n^a$  en principi podria canviar arbitràriament).

Calcular  $\Gamma(\bar{A})$  amb els camps (15) ens donarà així informació sobre la seva funcionalitat en

$$\text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}), \text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \tilde{\bar{F}}_{\mu\nu}), \text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\nu\sigma} \bar{F}_{\sigma\delta} \bar{F}_{\delta\mu}), \dots \quad (16)$$

i a causa que  $\bar{F}_{\mu\nu}^a$  és constant, obtindrem

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega \text{def}(\text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}), \text{tr}(\bar{F}_{\mu\nu} \tilde{\bar{F}}_{\mu\nu}), \dots) \quad (17)$$

on  $\Omega$  és el volum de l'espai-temps.

Per a poder calcular  $\text{Lef}$  en les configuracions (15) o en qualsevol altra configuració ens és necessari donar sentit als determinants de (13). Per això, farem servir la regularització  $\zeta$  de Hawking [HA77] que associa un número finit a cada un d'ells. Molt breument (per detalls vegeu l'apèndix B) direm com funciona aquesta regularització: si  $\hat{O}$  és un operador definit positiu i  $\lambda_n$  els seus valors propis, llavors

$$\det \hat{O} = \prod_n \lambda_n = e^{\sum_n \log \lambda_n} = e^{\text{tr} \log \hat{O}} \quad (18)$$

per altra banda hom defineix

$$\zeta_{\hat{O}}(s) \equiv \sum_n \lambda_n^{-s} \quad (19)$$

i formalment

$$\det \hat{O} = e^{-\zeta'_{\hat{O}}(0)}$$

Ara bé, hom pot provar [HA77] que  $\zeta_{\hat{O}}(s)$  és analítica  $\forall s \in \mathbb{C} - \{1, 2\}$ , donant així una prescripció finita per calcular determinants d'operadors.

Necessitem, doncs, resoldre les equacions de valors propis (formalment)

$$\begin{aligned} (\bar{\Theta})_{\mu\nu}^{ab} \varphi_n^b &= \lambda_n \varphi_n^a \\ (-\bar{D}^2)^{ab} \varphi_n^b &= \lambda_n' \varphi_n^a \\ (\bar{D} + im)^{ab} \varphi_n^b &= \lambda_n'' \varphi_n^a \end{aligned} \quad (20)$$



la qual cosa està feta en detall a l'apèndix A pels casos cromomagnètic i autodual que considerarem a continuació (vegis també l'apèndix B).

### III.2 Camp cromomagnètic constant

El cas cromomagnètic consisteix a prendre (15) amb

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \equiv B \quad \text{resta de} \quad \bar{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (17')$$

L'operador  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  té els següents valors propis ( $\xi=1$ )

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(\varphi, n, k_0, k_3) = k_0^2 + k_3^2 + (2n+1)K_{a'} + p_{\mu'}^{a'} \quad (18')$$

on

$$k_0, k_3 \in \mathbb{R} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$K_{a'} \equiv |\nu_{a'}| g_B$$

$$p_{0'}^{a'} = p_{3'}^{a'} = 0 \quad ; \quad p_{1'}^{a'} = -p_{2'}^{a'} = 2K_{a'} \quad (19')$$

i  $\nu_{a'}$  són els valors propis de la matriu  $(T^a n^a)$  en la representació adjunta. Les seves funcions pròpies són

$$\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; \varphi, n, k_0, k_3) = (V_\mu)_{\mu'} (W^a)^{a'} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_0 x_0 + k_3 x_3)} \quad (20')$$

$$\frac{1}{\pi^{1/4}} \left( \frac{1}{2^n n!} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{k_{0'}}}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{k_{0'}} \frac{x_1}{2} (\sqrt{k_{0'}} x_2 + 2\varphi) - \frac{1}{2} (\sqrt{k_{0'}} x_2 + \varphi)^2} \cdot H_n(\sqrt{k_{0'}} x_2 + \varphi)$$

on

$$(V_\mu)_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & 1 & 1 & \\ & i & -i & \\ & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

i  $(W^a)^{a'}$  seria la matriu que canvia  $T^a n^a$  a la base on és diagonal.

Fixem-nos que els valors propis (17) són degenerats en  $Q$ . La funció  $\zeta$  d'aquest operador serà

$$\zeta_{\bar{0}}(s) = \sum_a \sum_{\mu} \int d^4x \sum_{a'} \sum_{\mu'} \sum_n \int d\varphi \int dk_0 dk_3 \quad (22)$$

$$\cdot \varphi_{\mu\mu'}^{aa'*}(x; \varphi, n, k_0, k_3) \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; \varphi, n, k_0, k_3)$$

$$\cdot \left( \lambda_{\mu'}^{a'}(\varphi, n, k_0, k_3) / M^2 \right)^{-s}$$

on  $M^2$  és arbitrari i s'introdueix perquè  $\zeta_{\bar{0}}(s)$  tingui dimensions ben definides;  $[M] = M$ .

A (22) les dependències en  $x_0$ ,  $x_3$  i  $x_1$  es cancel·len immediatament, i a la dependència en  $x_2$  desapareix al fer  $Q \rightarrow Q - \sqrt{k_{0'}} x_2$  quedant un factor  $\Omega$  proporcional al volum de l'espai-temps. Així doncs

$$\zeta_{\bar{\Theta}}(s) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{a'} \sum_{\mu'} \frac{K_{a'}}{2\pi} \sum_n \int dk_0 dk_3 (\lambda_{\mu'}^{a'}(\varphi, n, k_0, k_3) / M^2)^{-s}$$

$$= \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{\mu'} \sum_{a'} \frac{K_{a'}}{2\pi} \sum_n \int dk_0 dk_3 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t \frac{(k_0^2 + k_3^2 + (2n+1)K_{a'} + P_{\mu'}^{a'})}{M^2}}$$

(23)

donant finalment (Vegis l'apèndix B)

$$\zeta_{\bar{\Theta}}(s) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{a'} \frac{K_{a'}^2}{2\pi} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^s \frac{1}{s-1} \left[ \zeta(s-1, \frac{3}{2}) + \zeta(s-1, -\frac{1}{2}) + 2\zeta(s-1, \frac{1}{2}) \right] \quad (24)$$

on  $\zeta(\nu, q)$  és la funció  $\zeta$  de Riemann generalitzada [M066]

$$\zeta(\nu, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} \frac{e^{-qt}}{1-e^{-t}} \quad (24')$$

L'operador  $-\bar{D}^2$  té com a valors propis

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(\varphi, n, k_0, k_3) = k_0^2 + k_3^2 + (2n+1)K_{a'} \quad (25)$$

i com a funcions les mateixes que (20), traient la matriu  $(V_M)_{\mu'}$  d'índex Lorentz. Un càlcul idèntic al fet per  $\bar{\Theta}$  porta a

$$\zeta_{-\bar{D}^2} = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{a'} \frac{K_{a'}^2}{2\pi} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^s \frac{1}{s-1} \zeta(s-1, \frac{1}{2}) \quad (26)$$

El determinant  $\det(\not{D} + im)$  es pot escriure com (vegis l'apèndix A)

$$\det(\not{D} + im_k) = \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 + (T^a n^a) g_B) \cdot \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 - (T^a n^a) g_B) \quad (27)$$

Això permet de considerar les funcions  $\zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2 + (T^a n^a) g_B}^{(s)}$ , que són del tipus tractat fins ara, en comptes de  $\zeta_{\not{D} + im}^{(s)}$  la qual duria a complicacions innecessàries. Simbòlicament escriurem

$$\zeta_{\not{D} + im_k}^{(s)} \equiv \zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2 + (T^a n^a) g_B}^{(s)} + \zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2 - (T^a n^a) g_B}^{(s)} \quad (28)$$

obtenint

$$\zeta_{\not{D} + im_k} = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{a'=1}^{\omega} \frac{r_{a'}^2}{2\pi} \left( \frac{\mu^2}{2r_{a'}} \right)^s \frac{1}{s-1} \left[ \zeta^{(s-1)}(q_{ka'}+1) + \zeta^{(s-1)}(q_{ka'}) \right] \quad (29)$$

$$\text{on } r_{a'} \equiv |S_{a'}| g_B \quad ; \quad q_{ka'} \equiv \frac{m_k^2}{2r_{a'}} \quad (30)$$

essent  $S_{a'}$  els valors propis de  $T^a n^a$  en la representació fonamental

D'acord amb (13) i (19) tindrem

$$\Gamma(\bar{A}) = S(\bar{A}) - \frac{1}{2} \zeta'_{\bar{0}}(0) + \zeta'_{-\bar{D}^2}(0) + \sum_{k=1}^{N_f} \zeta'_{\not{D} + im_k}(0) \quad (31)$$

i substituïnt-hi (24), (26) i (29) tenim, finalment

$$\begin{aligned}
 d_{ef} &= \frac{1}{2} B^2 - \frac{(gB)^2}{8\pi^2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} |w_{a'}|^2 \left\{ \left[ \zeta(-1, \frac{3}{2}) + \zeta(-1, -\frac{1}{2}) \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. - \left( \log \left( \frac{2g|w_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) - \left[ \zeta'(-1, \frac{3}{2}) + \zeta'(-1, -\frac{1}{2}) \right] \right\} \\
 &+ \frac{(gB)^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\alpha^r} |s_{a'}|^2 \left\{ \left[ \zeta(-1, q_{ka'}+1) + \zeta(-1, q_{ka'}) \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. - \left( \log \left( \frac{2g|s_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) - \left[ \zeta'(-1, q_{ka'}+1) + \zeta'(-1, q_{ka'}) \right] \right\} \\
 \\
 d_{ef} &= \frac{1}{2} B^2 - \frac{(gB)^2}{8\pi^2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} |w_{a'}|^2 \left\{ -\frac{11}{12} \left( \log \left( \frac{2g|w_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \zeta'(-1, \frac{3}{2}) + \zeta'(-1, -\frac{1}{2}) \right) \right\} \tag{32} \\
 &+ \frac{(gB)^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\alpha^r} |s_{a'}|^2 \left\{ - \left( q_{ka'}^2 + \frac{1}{6} \right) \left( \log \left( \frac{2g|s_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( q_{ka'} \log(q_{ka'}) + 2\zeta'(-1, q_{ka'}) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

on s'han fet servir propietats de la funció  $\zeta(\nu, q)$  (Vegeu l'apèndix C). L'expressió (32) sense incloure els termes de

quarks fou trobada primerament per Savvidy [SA77], essent l'inclusió dels termes fermiònics deguda a [DR83] malgrat que aquests autors no van saber explotar tota la informació continguda a (32) la qual cosa està feta a [EL84]. Per explicitar (32) de manera que les propietats confinants apareguin, podem considerar que hi ha  $N_f'$  fermions lleugers les masses dels quals posarem iguals a zero, i  $N_f - N_f'$  fermions pesats, de manera que  $q_{ka'} \gg 1$  amb la qual cosa podrem fer servir [EL84].

$$\zeta'(-1, q) = -\frac{1}{2} q \log q - \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{2} q^2 \log q + \frac{1}{12} \log q + \frac{1}{12} \quad (33)$$

$$+ O(q^{-2})$$

quedant (32)

$$\begin{aligned} d_{eff} = & \frac{1}{2} B^2 + \frac{(gB)^2}{8\pi^2} \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}-1} |v_{a'}|^2 \left\{ \frac{11}{12} \left( \log \left( \frac{2g|v_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) \right. \\ & \left. + \zeta' \left( -1, \frac{3}{2} \right) + \zeta' \left( -1, -\frac{1}{2} \right) \right\} \\ & + \frac{(gB)^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{N_f'} \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}} |s_{a'}|^2 \left\{ -\frac{1}{6} \left( \log \left( \frac{2g|v_{a'}|B}{\mu^2} \right) - 1 \right) \right. \\ & \left. - 2 \zeta'(-1, 0) \right\} \\ & + \frac{(gB)^2}{4\pi^2} \sum_{k=N_f'+1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}} |s_{a'}|^2 \left\{ - \left( q_{ka'}^2 + \frac{1}{6} \right) \log \left( \frac{m_k^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} q_{ka'}^2 \right\} \end{aligned}$$

L'acció efectiva  $\Gamma(\bar{A})$  ha de ser invariant gauge, per tant ha d'existir algun funcional manifestament invariant gauge que al particularitzar-lo a (15), (17') doni lloc a (34). Dels diversos invariants compatibles amb (34) triarem, i no deixa de ser un assaig, el més senzill, això és

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ef} = & \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{16\pi^2} \frac{11}{24} \text{tr}_A \left\{ g^2 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} \left( \log \left( \frac{2g^2 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}}{\mathcal{M}^4} \right) - 2 \right) \right\} \\
 & + \frac{\mathcal{N}}{16\pi^2} \left( 3'(-1, \frac{3}{2}) + 3'(-1, -\frac{1}{2}) \right) g^2 \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \\
 & + \frac{1}{16\pi^2} \left( -\frac{N_f'}{6} \right) \text{tr}_F \left\{ g^2 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} \left( \log \left( \frac{2g^2 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}}{\mathcal{M}^4} \right) - 2 \right) \right\} \\
 & - \frac{N_f'}{8\pi^2} 3'(-1, 0) g^2 \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \\
 & + \frac{\mathcal{N}}{16\pi^2} \sum_{k=N_f'+1}^{N_f} \left( -m_k^4 \log \frac{m_k^2}{\mathcal{M}^2} + \frac{3}{2} m_k^4 \right) \\
 & - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left( \sum_{k=N_f'+1}^{N_f} \log \left( \frac{m_k^2}{\mathcal{M}^2} \right) \right) g^2 \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \tag{35}
 \end{aligned}$$

on  $\bar{F}_{\mu\nu} \equiv \bar{F}_{\mu\nu}^a T^a$  ; A = adjunta F = fonamental

$$\text{i s'ha fet servir } \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}-1} |2a'|^2 = \mathcal{N} \quad ; \quad \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}} |3a'|^2 = \frac{1}{2} \tag{36}$$

Fixem-nos que (35) depèn de més d'un invariant gauge, la qual cosa es veu explícitament si desenvolupem els logaritmes en torn de  $\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} = \text{cte.}$  Per connectar, però, amb resultats anteriors, com el model il·lustratiu del capítol II, és convenient reescriure (35) en l'aproximació.

$$\bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^b = \frac{\delta^{ab}}{\alpha^2 - 1} \bar{F}_{\mu\nu}^c \bar{F}_{\mu\nu}^c \quad (37)$$

on s'assumeix que tota la funcionalitat important la du  $\bar{F}_{\mu\nu}^c \bar{F}_{\mu\nu}^c$ . Aleshores (35) es pot escriure (ometent constants irrelevantes)

$$d_{\text{eff}} = \frac{1}{8} b_0(N_f') g^2 \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a \text{Pog} \left( \frac{g^2 \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a}{\lambda^4} \right) \quad (38)$$

on

$$b_0(N_f') \equiv \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} \alpha - \frac{2}{3} N_f' \right)$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 \equiv \exp \left\{ - \frac{2}{b_0(N_f')} \left[ \frac{1}{4g^2} + \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{11}{48} \alpha \left( \text{Pog} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} - 2 \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{12} N_f' \left( \text{Pog} \frac{1}{\alpha} - 2 \right) + \frac{\alpha}{16\pi^2} \left( \zeta'(-1, \frac{3}{2}) + \zeta'(-1, -\frac{1}{2}) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{N_f'}{8\pi^2} \zeta'(-1, 0) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left( \sum_{k=N_f'}^{N_f} \text{Pog} \left( \frac{m_k^2}{\mu^2} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

(38) té un mínim a  $F^2 \neq 0$  si el nombre de quarks lleugers no excedeix de 16 independentment del nombre de quarks pesats que puguin existir. Així doncs, segons aquest resultat, el confinament es manté malgrat la existència d'un nombre indeterminat de quarks pesats.



Cal advertir que dins de  $\lambda^4$  a (39) hi ha una part imaginària, concretament a  $\zeta'(-1, -1/2)$ , que és deguda al fet que l'aproximació a un loop (8), només és vàlida de manera estricta quan tots els valors propis de tots els operadors de tots els determinants són positius, com havíem ja esmentat, i això no succeix en el cas de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  quan  $n = 0$   $\rho_{\mu}^{a'} = -2K_{a'}$  i  $K_0^2 + K_3^2 < K_{a'}$ . La part imaginària a (39) és el senyal que ens recorda que la configuració cromomagnètica no és tan bona com fora desitjable per obtenir informació sobre  $\Gamma(\bar{A})$  a un loop. Malgrat això, assumirem que la part real sí que és significativa ja que és difícil de creure que la contribució problemàtica d'un rang de valors propis  $K_0^2 + K_3^2 \lesssim K_{a'}$  petit pugui afectar substancialment la funcionalitat trobada per  $\Gamma(\bar{A})$ . L'apèndix D està dedicat a donar una explicació més exhaustiva sobre aquesta part imaginària i les seves possibles interpretacions.

### III.3 Camp autodual constant

Podem, però, intentar de trobar configuracions que no tinguin contribució imaginària per assegurar-nos que la interpretació del resultat anterior és correcta. La configuració auto-dual

$$\bar{F}_{03} = -\bar{F}_{30} = \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \equiv B \quad \text{resta de} \quad \bar{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (40)$$

fa que cap dels operadors que apareixen a (13) i (20) no tingui valors propis negatius; per contra  $\bar{\Theta}$  i  $\bar{\chi}$  tenen valors propis nuls (els anomenats modus zero) que fan difícil la interpretació dels determinants a (13). De fet, l'existència d'aquests valors propis nuls l'única cosa que significa és que hi ha direccions en  $b_{\mu}^a(x)$  a (6) en què els

termes quadràtics desapareixen i, per tant, no és estrictament correcte considerar l'aproximació a un loop (8) en aquestes direccions. Hi ha tècniques més o menys sofisticades per tractar els modus zero [LE81] [FL83(I)] però totes tenen en comú la indeterminació del resultat a causa de les aproximacions necessàries a cada una d'elles. Nosaltres farem servir un criteri molt simple que serà considerar (ho farem mentalment) una massa reguladora  $m^2$  que farem tendir a zero abans o després de  $s$  (de  $\zeta_{\hat{G}}(s)$ ) de manera que el resultat sigui finit. De fet, això suposa continuar amb la mateixa filosofia esmentada al comentar les parts imaginàries del cas cromomagnètic, que és, considerar que les contribucions dels (pocs) autovalors nuls no canviaran essencialment la funcionalitat de  $\Gamma(\bar{A})$ . Val a dir que els criteris emprats reproduïen correctament la funció  $\beta$  de Callan-Symanzik que rep contribucions d'aquestes parts problemàtiques.

Els passos a seguir per calcular  $\Gamma(\bar{A})$  en el cas autodual són idèntics als del cas cromomagnètic, i, simplement, posaré un resum dels punts de partida i resultats a continuació (per detalls vegeu els apèndixs A i B).

(i) Operador  $\bar{\Theta}$  ( $\xi=1$ )

Valors propis

(41)

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') = (2n+2m+2)K_{a'} + P_{\mu'}^{a'} \quad n, m=0, 1, 2, \dots$$

$$P_{0'}^{a'} = P_{1'}^{a'} = -P_{2'}^{a'} = -P_{3'}^{a'} = 2K_{a'}$$

Funcions pròpies

$$\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; nm\varphi\varphi') = \frac{K_{a'}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2^m m!}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2}$$

$$e^{i\sqrt{K_{a'}} \frac{x_0}{2} (\sqrt{K_{a'}} x_3 + 2\varphi) - \frac{1}{2} (\sqrt{K_{a'}} x_3 + \varphi)^2} \cdot H_n(\sqrt{K_{a'}} x_3 + \varphi)$$

$$e^{i\sqrt{K_{a'}} \frac{x_1}{2} (\sqrt{K_{a'}} x_2 + 2\varphi') - \frac{1}{2} (\sqrt{K_{a'}} x_2 + \varphi')^2} \cdot H_n(\sqrt{K_{a'}} x_2 + \varphi')$$

$$\cdot (V_{\mu})_{\mu'} (W^a)^{a'}$$

on

$$(V_{\mu})_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\zeta_{\bar{0}}(s) = \Omega \cdot 2 \cdot \sum_{a'=1}^{\mathcal{D}^2-1} \frac{(K_{a'})^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{2K_{a'}}\right)^s \left[ \zeta(s-1, 2) - \zeta(s, 2) + \zeta(s-1, 0) + \zeta(s, 0) \right]$$

(43)

(ii) Operator  $-\bar{D}^2$

$$\text{Valors propis } \Lambda^{a'}(nm\varphi\varphi') = (2n+2m+2)K_{a'} \quad (44)$$

$$\zeta_{-\bar{D}^2}(s) = \Omega \sum_{a'=1}^{\mathcal{D}^2-1} \frac{(K_{a'})^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{2K_{a'}}\right)^s \zeta(s-1, 1) \quad (45)$$

(iii) Operador  $\tilde{\mathcal{D}} + im_k$ . Hom pot provar pel cas (15), (40) (Vegeu l'apèndix A)

$$\det(\tilde{\mathcal{D}} + im_k) = \left[ \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 + 2gB(T^a n^a)) \cdot \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 - 2gB(T^a n^a)) \right]^{1/2} = \det(-\bar{D}^2 + m_k^2) \quad (46)$$

Així, simbòlicament,

$$\zeta_{\tilde{\mathcal{D}} + im_k}^{(s)} \equiv \frac{1}{2} \zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2 + 2gB(T^a n^a)}^{(s)} + \frac{1}{2} \zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2 - 2gB(T^a n^a)}^{(s)} + \zeta_{-\bar{D}^2 + m_k^2}^{(s)} \quad (47)$$

i obtenim

$$\begin{aligned} \zeta_{\tilde{\mathcal{D}} + im_k}^{(s)} &= \Omega \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\mathcal{X}} \frac{r_{a'}^2}{4\pi^2} \left( \frac{M^2}{2r_{a'}} \right)^s \left[ \frac{1}{2} \left\{ \zeta^{(s-1, 2+q_{ka'})} \right. \right. \\ &\quad - (1+q_{ka'}) \zeta^{(s, 2+q_{ka'})} + \zeta^{(s-1, q_{ka'})} \\ &\quad \left. - (-1+q_{ka'}) \zeta^{(s, q_{ka'})} \right\} + \zeta^{(s-1, 1+q_{ka'})} \\ &\quad \left. - q_{ka'} \zeta^{(s, 1+q_{ka'})} \right] \\ &= \Omega \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\mathcal{X}} \frac{r_{a'}^2}{4\pi^2} \left( \frac{M^2}{2r_{a'}} \right)^s \left[ 2 \left( \zeta^{(s-1, q_{ka'})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - q_{ka'} \zeta^{(s, q_{ka'})} \right) + \frac{1}{2} q_{ka'}^{-s} \right] \end{aligned}$$

Substituint (43), (45) i (48) dins de (31), prenent  $q_{ka'} = 0$  pels  $N_f'$  quarks lleugers i desenvolupant  $Z'(-1, q_{ka'})$ ,  $Z'(0, q_{ka'})$  per  $q_{ka'} \gg 1$  pels quarks pesats tenim finalment (vegeu l'apèndix C)

$$\begin{aligned}
 d_{eff} = & B^2 + \frac{(gB)^2}{4\pi^2} \sum_{a'=1}^{d_f-1} |w_{a'}|^2 \left\{ \frac{11}{12} \log\left(\frac{2g|w_{a'}|B}{\mu^2}\right) \right. \\
 & - \left. (Z'(-1, -1) + Z'(0, -1) + Z'(-1, 1) - Z'(0, 1) + Z'(-1, 0)) \right\} \\
 & - \frac{N_f'}{4\pi^2} (gB)^2 \sum_{a'=1}^{d_f} |s_{a'}|^2 \left\{ \frac{1}{3} \log\left(\frac{2g|s_{a'}|B}{\mu^2}\right) + 2Z'(-1, 0) \right\} \\
 & + \sum_{k=N_f'+1}^{N_f} \left\{ \frac{d_f m_k^4}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2} - \log\left(\frac{m_k^2}{\mu^2}\right) \right) - \frac{(gB)^2}{48\pi^2} \log\left(\frac{m_k^2}{\mu^2}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Fixem-nos que (49) té el mateix tipus de funcionalitat que (34), donant lloc, per tant, a les mateixes propietats confinants que aquella expressió. Cal ressaltar, però, que repetir el càlcul pel cas autodual ens ha servit per:

(i) Refermar la creença que amb configuracions  $\bar{F}_{\mu\nu}^a$  cte., no importa quin sigui, obtenim informació sobre la part de  $\Gamma(\bar{A})$  que no depèn de  $\bar{D}_\mu$  ni de  $f^{abc}$ , i per tant, hom pot assumir que (35) és vàlid per qualsevol configuració llevat termes en  $\bar{D}_\mu$  i  $f^{abc}$ .

(ii) Assegurar-nos que la part imaginària que apareixia al cas cromomagnètic no era, efectivament, un símptoma greu que pugués suposar un canvi de funcionalitat important.

Notis també que malgrat que els procediments i resultats finals són els mateixos pel cas cromomagnètic i per l'autodual, els passos intermitjos del càlcul difereixen notablement (compareu per exemple (24), (26), (29) amb (43), (45) i (48)).

El resultat obtingut en aquest capítol és encoratjador però resta limitat a l'aproximació d'un loop. Anar a més ordres en loops fora interessant però necessitariem una configuració senzilla de la qual sabéssim calcular els propagadors exactament, la qual cosa implica, entre altres fets, evitar valors propis negatius o nuls en els operadors que ens han surtit fins ara. Aquesta configuració ningú no l'ha trobada, i encara que formalment es pot plantejar el problema a dos loops o més per un camp arbitrari ens trobaríem pel cas cromomagnètic i autodual amb problemes causats per les parts imaginàries i pels modus zero, respectivament. Tenint en compte que anar un ordre més enllà en loops tampoc fora l'última paraula sobre l'assumpte i que per Y.M. pura amb algunes hipòtesis restrictives el grup de renormalització [MS78] dóna ja idea de quina funcionalitat tindrà  $\Gamma(\bar{A})$  a dos loops, fa pensar que seria millor analitzar l'estructura de la integral funcional completa i veure si hom pot treure resultats més generals a partir d'ella.

## IV. RESULTAT A TOT ORDRE EN LOOPS

### IV.1 Introducció

L'anàlisi dels termes d'ordre tres i quatre en el camp quàntic  $b_\mu^a$  a la integral funcional ha estat motivada pels problemes causats per les parts imaginàries i modus zero a l'aproximació d'un loop. Com hem comentat repetidament, aquesta aproximació no és estrictament vàlida si els operadors quadràtics no són definits positius, cosa que ocorria en els casos considerats al capítol anterior; aleshores sembla natural preguntar-se si els termes menyspreats  $O(b^3, b^4)$  es poden tenir en compte d'alguna manera que ens permeti d'obtenir una aproximació ben definida. Malgrat la naturalitat de la pregunta, no es va atacar, en un principi, el problema per aquest camí sinó que més aviat hom intentava de trobar mètodes alternatius, com poden ser el de les variables col·lectives pels modus zero [LF81] o la introducció d'un "Higgs" per les parts imaginàries [NO78], ja que l'anàlisi dels termes  $O(b^3, b^4)$  suposa de fet un enfrontament amb la teoria quàntica en ple. Un treball pioner, en aquest sentit, és degut a C.A. Flory [FL83(II)] que, dins d'una sèrie d'aproximacions, aconsegueix una  $\Gamma(\bar{A})$  completament real i ben definida per un camp autodual constant (III.40), que és funcionalment idèntic a (III.49), tenint en compte algunes contribucions  $O(b^4)$  per una teoria de Y.M. pura en SU(2). Això ens va fer pensar que fora possible que la particular estructura de la integral funcional permetés de conèixer tota la funcionalitat en  $g_B$ , l'únic paràmetre en els casos cromomagnètic i autodual, d'una manera exacta.

IV.2 Factorització

Centrem-nos, per començar, en el cas autodual i mirem l'estructura de les funcions pròpies de  $\bar{D}_{\mu\nu}^{ab}$  a (III.42).

Si hi fem un canvi de variables

$$\hat{x}_{\mu} = \sqrt{g_B} X_{\mu} \quad (\text{Recordem: } K_{a'} = 120/g_B) \quad (1)$$

tota la dependència en  $g_B$  és un factor. Per altra banda la derivada covariant, un cop fet (1), es pot escriure

$$\bar{D}_{\mu}^{ab} = \sqrt{g_B} \hat{D}_{\mu}^{ab} \quad (2)$$

on dins de  $\hat{D}_{\mu}^{ab}$  no hi ha cap dependència en  $g_B$ . Si fem a continuació el canvi de variables funcional

$$b_{\mu}^a(x) = \tilde{b}_{\mu}^a(\hat{x})$$

$$\tilde{b}_{\mu}^a(x) = \sum_{a'} \sum_{\mu'} \int d\varphi d\varphi' \sum_{n,m} \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi') \Psi_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') \quad (3)$$

tindrem a l'exponencial de (III.6) totes les dependències en  $g_B$  de forma explícita com a factors davant cada terme de l'exponent. Notem que:



- per a cada  $\int d^4x$  apareixerà un factor  $(g_B)^{-2}$
- per a cada  $\bar{D}$  apareixerà un factor  $\sqrt{g_B}$  (4)
- per a cada  $b_\mu^a(x)$  apareixerà un factor  $g_B$

Si ens oblidem, de moment, dels ghost i dels quarks, i mirem els termes glònics ( $b_\mu^a$ ), veurem que la dependència en  $g_B$  de cada terme és:

$$\begin{aligned} \text{ordre } (b_\mu^a)^2 &: (g_B)^{-2} (\sqrt{g_B})^2 (g_B)^2 = g_B \\ \text{ordre } (b_\mu^a)^3 &: (g_B)^{-2} \sqrt{g_B} (g_B)^3 = (g_B)^{3/2} \\ \text{ordre } (b_\mu^a)^4 &: (g_B)^{-2} \cdot 1 \cdot (g_B)^4 = (g_B)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

la qual cosa implica que un darrer canvi funcional

$$\psi_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') = \frac{\mu}{\sqrt{g_B}} \tilde{\psi}_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') \quad (6)$$

permet de factoritzar fora de la integral funcional tota la dependència en  $g_B$  si la  $J_\mu^a(x)$  és presa zero.  $J_\mu^a(x) = 0$  és coherent amb (III.6) ja que, tant el cas autodual com el cromomagnètic constants compleixen

$$\bar{D}_{\mu}^{ab} \bar{F}_{\mu\nu}^b = 0 \quad (7)$$

sinó hauríem de considerar també un terme linial en  $b_\mu^a$  que no espantia l'estructura que permet la factorització.

Els canvis de variable (3) fan que la mesura de la integral funcional es transformi com

$$d[b_\mu^a(x)] = \det(\delta^{aa'} \delta_{\mu\mu'} \delta(\sqrt{g_B} x - \hat{y})) \det(\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')) d[\psi_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi')] \quad (8)$$

Si hom assumeix que els determinants funcionals compleixen les mateixes propietats que els usuals

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B); \quad \det(A) = \det(A^T); \quad \det(\lambda A) = \lambda^D \det(A) \quad (9)$$

és fàcil veure que

$$\det(\delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta(\sqrt{g_B} x - \hat{y})) = \det(g_B)^{-R}$$

$$\det(\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')) = \det'(g_B)^R \quad (10)$$

on  $R$  és el número de graus de llibertat o dimensió generalitzada dels camps gluònics. (10) implica que la dependència en  $g_B$  a la banda dreta de (8) cancel·la. Així doncs l'única dependència en  $g_B$  que restarà serà la provinent de (6). Podem escriure

$$Z(g_B) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{g_B}}\right)^R e^{-\Omega B^2 + \Omega \frac{\mu^4}{g^2}} Z(\mu^2) \quad (11)$$

ja que (6) el que fa és substituir tota la dependència en  $g_B$  dins de la integral funcional (III.6) per una altra en  $\mathcal{M}^2$ . Per  $Z(g_B)$  entendrem la  $Z(J_\mu^a(x)=0)$  desenvolupada entorn el camp  $\bar{A}_\mu^a(x)$  que dóna lloc a  $g_B$ .

Notis a (11) que  $Z(\mathcal{M}^2)$  és una integral funcional ben definida a causa que no hi hem menyspreat cap terme.

$R$ , el nombre de graus de llibertat dels camps gluònics, necessita regularització (un camp té infinits graus de llibertat) o, més aviat, una definició acurada. Per donar-la ens basarem en què per un sistema matricial finit

$$R = \text{tr}(I) \quad ; \quad I = \text{matriu identitat} \quad (12)$$

Per definir la matriu identitat en el cas que ens ocupa no més disposem de l'operador  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  i la forma de fer-ho pot ser

$$I \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \left( \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \right)^{-s}$$

donant lloc a

$$R \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ \left( \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \right)^{-s} \right\} = \zeta_{\bar{\Theta}}^{(0)} \quad (13)$$

De fet (13) és realment la definició matemàtica de la dimensió generalitzada d'un operador [SW 78].  $R$  la podem trobar aprofitant el càlcul de  $\zeta_{\bar{\Theta}}^{(s)}$  fet al capítol anterior (III.43)

$$R = \Omega \frac{5}{12} \mathcal{N} \frac{(g_B)^2}{\pi^2} \quad (14)$$

IV.3 Ghost

Analitzem a continuació el terme ghost, on al fer els canvis (1), (3) i (6) esdevé (de (III.6) i (III.9))

$$\begin{aligned}
 \Delta_{FP} &= \int d[\bar{\phi}^a(x)] d[\phi^a(x)] \exp \left\{ - \int d^4x \bar{\phi}^b(x) \left( -\bar{D}_M^{bc} \bar{D}_M^{ca} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i g (T^r)^{bc} \bar{D}_M^{ca} \right) \phi^a(x) \right\} \\
 &= \int d[\bar{\phi}^a(x)] d[\phi^a(x)] \exp \left\{ - \int \frac{d^4\hat{x}}{g_B} \bar{\phi}^b(x) \left( -\hat{D}_M^{bc} \hat{D}_M^{ca} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i g (T^r)^{bc} \sum_{r'M'} \int d\varphi d\varphi' \sum_{nm} \mathcal{M} \hat{\varphi}_{\mu\mu'}^{rr'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi') \cdot \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \hat{\psi}_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') \hat{D}_M^{ca} \right) \phi^a(x) \right\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

on

$$\hat{\varphi}_{\mu\mu'}^{rr'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi') \equiv \frac{1}{g_B} \varphi_{\mu\mu'}^{rrca}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')$$

és independent de  $g_B$

La possibilitat de factorització de  $g_B$  a (15) és clara, treballant, però, acuradament haurem de seguir uns passos idèntics als fets pel camp gluònic. És a dir considerar primer

$$\phi^a(x) = \tilde{\phi}^a(\hat{x})$$

$$\tilde{\phi}^a(\hat{x}) = \sum_{a'} \int d\varphi d\varphi' \sum_{nm} \varphi^{aa'}(\hat{x}, nm\varphi\varphi') \psi^{a'}(nm\varphi\varphi')$$

(16)

(idem per  $\bar{\phi}^b(x)$ )

amb la qual cosa l'exponent de (15) tindrà un únic factor  $g_B$  global (Recordem que  $\varphi^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')$  té un factor  $g_B$  com a única dependència (III.42);  $\varphi^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi') \sim \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')$  sense estructura Lorentz), que permetrà la factorització fent el darrer canvi

$$\Psi^{a'}(nm\varphi\varphi') = \frac{\mu}{\sqrt{g_B}} \tilde{\Psi}^{a'}(nm\varphi\varphi') \quad (\text{idem per } \bar{\Psi}^{a'}(nm\varphi\varphi')) \quad (17)$$

Els jacobians corresponents a (16) cancel·len la seva dependència en  $g_B$  de la mateixa manera que els gluònics. Així doncs, a causa de la existència dels ghost, (11) esdevé

$$Z(g_B) = \left(\frac{\mu}{\sqrt{g_B}}\right)^R \left(\frac{\mu}{\sqrt{g_B}}\right)^{-2R'} e^{-\Omega B^2 + \Omega \frac{\mu^4}{g^2}} Z(\mu^2) \quad (18)$$

on s'ha tingut en compte que els ghost, al ser variables de Grassmann, transformen sota canvis de variables, amb el jacobiana invers.  $R'$  és el número de graus de llibertat del camp ghost

$$R' \equiv \int_{-\bar{D}^2} (0) \quad (19)$$

i de (III.45)

$$R' = - \frac{\mathcal{N}(g_B)^2}{48\pi^2} \Omega \quad (20)$$

Així (18) es pot escriure

$$Z(g_B) = \exp \left\{ -\Omega \left[ B^2 - \frac{\mathcal{M}^4}{g^2} + \frac{11N}{48\pi^2} (g_B)^2 \log \left( \frac{g_B}{\mathcal{M}^2} \right) \right] \right\} Z(\mathcal{M}^2) \quad (21)$$

#### IV.4 Normalització i Renormalització

Definim l'acció efectiva normalitzada com

$$e^{-\Gamma(g_B)} \equiv \frac{Z(g_B)}{Z(\mathcal{M}^2)} \quad (22)$$

la qual cosa vol dir que estem mesurant la nostra acció efectiva  $\Gamma(g_B)$  respecte a la d'un camp  $\mathcal{M}^2$ . Si fem  $\mathcal{M} \rightarrow 0$  la compararem amb la configuració del buit pertorbatiu ( $g_B=0$ ). Abans, però, convé renormalitzar  $\Gamma(g_B)$  ja que sent  $\mathcal{M}^2$  l'únic paràmetre amb dimensions apart de ( $g_B$ ), juga el doble paper de regulador i, com hem dit, de normalitzador; aleshores, al ser la Q.C.D. renormalitzable, el paper de regulador és inessencial i pot ser absorbit per la condició de renormalització. Treballant amb camps de background constants, s'acostuma a fer servir l'esquema de Savvidy, que consisteix a exigir que el  $\Gamma(g_B)$  mantingui l'estructura de l'acció clàssica en el punt de substracció. En el nostre cas això es tradueix a demanar

$$\Gamma(g_B) \equiv \Omega \mathcal{L}_{\text{ef}}(g_B)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ef}}}{\partial (g_B)^2} \right|_{g_B = \mathcal{M}^2} = \frac{1}{g_R^2} \quad (23)$$

amb la qual cosa

$$\frac{1}{g_R^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{11N}{96\pi^2} \left( \log \frac{\nu^4}{\mu^4} + 1 \right)$$

$$d_{\text{ef}}(g_B) \Big|_{\text{ren}} = \frac{1}{g_R^2} (g_B)^2 + \frac{11N}{96\pi^2} \left( \log \left( \frac{g_B}{\nu^2} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\mu^4}{g^2} \quad (24)$$

on recordem  $g_B = g_R B_R$  a causa de les propietats del background field gauge [AB81]

Fent a continuació el límit  $\mu \rightarrow 0$ , ja que interessa tenir  $\Gamma(g_B)$  mesurada respecte el camp pertorbatiu  $\bar{A}_\mu^a(x) = 0$ , obtenim finalment

$$d_{\text{ef}}(g_B) = \frac{1}{g^2} (g_B)^2 + \frac{11N}{96\pi^2} (g_B)^2 \left( \log \frac{(g_B)^2}{\nu^4} - 1 \right) \quad (25)$$

Fixem-nos que (25) té el mateix aspecte que les accions efectives a un loop trobades en el capítol III, donant lloc per tant a un  $\langle F^2 \rangle \neq 0$ . El resultat (25), però és un resultat a tot ordre i com a tal hauria de ser invariant sota el grup de renormalització. Aixó vol dir que

$$\nu \frac{d}{d\nu} d_{\text{ef}}(g_B) = 0 \quad (26)$$

la qual cosa es compleix a causa de (24)

$$\nu \frac{d}{d\nu} \frac{1}{g_R^2} - \frac{11 \mathcal{N}}{24 \pi^2} = 0 \quad (27)$$

Més a més, de (27) hom dedueix

$$\frac{1}{g_R^2} = \frac{11 \mathcal{N}}{24 \pi^2} \log \left( \frac{\nu}{\Lambda} \right) \quad (28)$$

on  $\Lambda$  és un paràmetre invariant sota el R.G.. Substituint (28) a (25) tenim finalment

$$\alpha_{\text{ef}}(g_B) = \frac{11 \mathcal{N}}{96 \pi^2} (g_B)^2 \left( \log \frac{(g_B)^2}{\Lambda^4} - 1 \right) \quad (29)$$

expressió manifestament invariant sota R.G. a qualsevol ordre.

#### IV.5 Comentaris tècnics

Cal advertir que el camp  $g_B$  que estem fent servir compleix

$$\frac{\delta S(\bar{A}_\mu^a)}{\delta \bar{A}_\mu^a(x)} = 0 \quad (= -J_\mu^a(x) \text{ en general}) \quad (30)$$



però, en principi, no té cap raó per coincidir amb

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^a(x)} \quad (30)$$

que és el camp en funció del qual hem d'escriure l'acció efectiva  $\Gamma(\tilde{A}_\mu^a(x))$ . Si escrivim el funcional generador de la següent manera

$$-\log Z(J_\mu^a) \equiv W(J_\mu^a) = S(\bar{A}_\mu^a) + J_\mu^a \bar{A}_\mu^a + \bar{W}(\bar{A}_\mu^a) \quad (31)$$

on  $\bar{W}(\bar{A}_\mu^a)$  conté totes les correccions quàntiques ( $S(\bar{A}_\mu^a)$  és l'acció clàssica). Aplicant (30) tenim

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = \bar{A}_\mu^a(x) + \int d^4y \frac{\delta \bar{W}(\bar{A})}{\delta \bar{A}_\nu^b(y)} \frac{\delta \bar{A}_\nu^b(y)}{\delta J_\mu^a(x)} \quad (32)$$

on s'ha fet servir

$$\frac{\delta S(\bar{A})}{\delta \bar{A}_\nu^b(y)} + J_\nu^b(y) = 0 \quad (33)$$

En general (35) dóna lloc a una equació transcendent de difícil solució. Si suposem però que  $\bar{W}(\bar{A}_\mu^a(x)) = \bar{W}(\bar{F}_{\mu\nu}^a, \bar{F}_{\mu\nu}^a)$  i que el camp  $\bar{F}_{\mu\nu}^a = n^a \bar{F}_{\mu\nu}$ ,  $\bar{F}_{\mu\nu} = \text{cte.}$ , com el considerat, llavors tenim

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = \bar{A}_\mu^a(x) + \int d^4y \bar{D}_s^{cb(y)} \left( \frac{\delta \bar{W}}{\delta \bar{F}_\nu^c(y)} \bar{F}_\nu^c(y) \frac{\delta \bar{A}_\nu^b(y)}{\delta J_\mu^a(x)} \right) \quad (34)$$

on el terme de la dreta desapareix a causa de la constància de  $\bar{F}_{\mu\nu}(y)$  i la direcció única de color. ( $\int d^4y \partial_S^{(\nu)} \frac{\delta \bar{A}_\nu^b(y)}{\delta J_\mu^a(x)} = 0$  per condicions de contorn). Així, amb l'hipòtesi adicional.

$$\Gamma(\tilde{A}_\mu^a(x)) = \Gamma(\tilde{F}_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a) \quad (35)$$

l'acció efectiva (29) es pot considerar escrita en termes del camp correcte  $\tilde{A}_\mu^a(x)$ .

Un altre punt a comentar és que hem fet servir les funcions pròpies de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  pel paràmetre de gauge  $\xi = 1$ . Hom pot argüir que  $\xi$ , en general necessita ser renormalitzat a ordres elevats de teoria de pertorbacions [AB81], que en un resultat a tot ordre, com el trobat, no l'hauríem de fixar a priori. És fàcil veure, però, que deixar el terme proporcional a  $1/\xi$  dins de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  no desfà l'estructura que permet la factorització (veure (III.7)), i per altra banda l'únic lloc on podria contribuir seria dins de  $R$ .

$$R = \lim_{s \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ \left( \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \right)^{-s} \right\} = \zeta_{\bar{\Theta}}^{(0)} \quad (36)$$

$R$ , però, té una interpretació molt clara: és el número de graus de llibertat de les variables gluòniques i fora, per tant, molt estrany que depengués del paràmetre triat per fixar el gauge. De qualsevol manera, hom pot provar que no hi depèn, explotant a fons les propietats del camp autodual (Veure l'apèndix F).

Com a última cosa cal observar que fins ara no hem parat atenció al fet que  $\nu a'$  (els valors propis de  $Ta\eta^a$ ) pot ser zero per alguns  $a'$ . A un loop això no té cap importància ja que aquests termes donen contribucions indepen-

dents de  $g_B$ , però ací hom s'ha d'assegurar que aquest terme no estronquen l'estructura factoritzant. Per veure-ho, considerem

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{a'} = -\delta_{\mu\nu} \partial_3 \partial_3 \quad (37)$$

que admet com a funcions pròpies

$$\varphi_{\mu\mu'}^{a'}(x; k) = \delta_{\mu\mu'} \frac{g_B}{(2\pi)^2} e^{-ikx\sqrt{g_B}} \quad (38)$$

i un cop fet el canvi (1) esdevé

$$\varphi_{\mu\mu'}^{a'}(x; k) = \delta_{\mu\mu'} \frac{g_B}{(2\pi)^2} e^{-ik\hat{x}} \quad (39)$$

que té la mateixa dependència en  $g_B$  que  $\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')$  a (3). Totes les factoritzacions fetes anteriorment són vàlides si per  $\nu_{a'}=0$  fem el canvi

$$b_{\mu}^a(x) = \tilde{b}_{\mu}^a(x)$$

$$\tilde{b}_{\mu}^a(x) = (W^a)^{a'} \delta_{\mu\mu'} \frac{g_B}{(2\pi)^2} e^{-ik\hat{x}} \psi_{\mu'}^{a'}(k) \quad (40)$$

#### IV.6 Comentaris físics

Un cop comentats els detalls tècnics, val la pena gastar unes línies interpretant què ens diu el resultat o tot ordre en loops (29). Cal recordar, primerament, que (29) ha estat calculat per una configuració autodual constant; que s'ha fet servir que  $\bar{D}_\mu^{\text{ba}} \bar{F}_{\mu\nu}^a = 0$  i que, més a més, era necessària la hipòtesi que l'acció efectiva només depenia de  $F^2$ ; això fa que, malgrat ser un resultat a tot ordre en loops, (29) tingui una validesa limitada. La millor lectura que hom pot fer de (29) és la següent: si mai ningú troba  $\Gamma(\bar{A})$  exactament, posa zero tots els invariants gauge que no siguin  $F^2$ , particularitza al camp autodual considerat, i finalment re-renormalitza a l'esquema de Savvidy, com a resultat haurà d'obtenir (29). Més endavant, però, argumentarem que un resultat idèntic val pel cas cromomagnètic [ES85(II)], la qual cosa fa pensar que la dependència en  $F^2$  de (29) és la correcta per qualsevol camp. Això significa que si  $F^2$  és l'invariant gauge important a baixes energies (concretament a la zona on el confinament tingui lloc), (29) seria una acció efectiva correcta per estudiar el confinament i aquest quedaria provat ja que (29) és confinant.

Un altre fet que és valuós comentar és que no hem tingut cap problema amb els modus zero, ni en el cas cromomagnètic n'hi ha amb les parts imaginàries ja que  $\zeta_0^{(0)}$  està perfectament definida i és real per ambdues configuracions. Això demostra, tal com havíem dit repetidament al capítol anterior, que els modus zero i les parts imaginàries apareixien perquè l'aproximació a un loop no era estrictament vàlida pels casos considerats. Al fer el càlcul a tot ordre, els esmentats problemes, com era d'esperar, desapareixen.

Resulta curiós, i més aviat sorprenent, que un resultat a tot ordre com (29) coincideixi bàsicament amb el resultat a un loop (III.49). Donaré, a continuació, un parell d'arguments que fan l'assumpte més entenedor. El primer està basat en el resultat [MS 78], on fent servir la hipòtesi (35)

i el grup de renormalització, aconseguen provar que

$$\Gamma(F^2) = \int d^4x \, g^2 F^2 f\left(\frac{g^2 F^2}{\Lambda^4}\right) \quad (41)$$

de manera exacta. Notis que un resultat com aquest no pot ser obtingut en teoria de pertorbacions en  $g$  més que a un loop, ja que a ordres superiors apareixen  $g$  no acompanyades de  $F^2$ , violant l'estructura (41). No és d'estranyar tampoc, en vista de (41), que un resultat a tot ordre com l'obtingut, no sigui desenvolupable en sèrie perturbativa en  $g$ . Un cop aperçebuts que el resultat trobat es compatible amb l'estructura a tot ordre obligada pel R.G., el segon argument va encaminat a entendre per què coincideix exactament amb el resultat a un loop. De fet, la raó d'aquesta coincidència esdevé clara un cop hem vist que tota la dependència en  $gB$  de la integral funcional pot ser factoritzada. Això vol dir que la funcionalitat en  $gB$  serà la mateixa malrat que menyspreem alguns termes a la integral funcional; però, restar a un loop és just menysprear termes  $O(b^3, b^4)$  i per tant el resultat ha de ser idèntic a l'exacte.

#### IV.7 Introducció dels quarks

Fins ara, hem estudiat només la Q. C. D. pura. La introducció de  $N_f$  quarks de massa nul·la, però, no espatlla l'estructura que permet la factorització. El terme fermiònic, un cop fets els canvis (1), (3) i (6) esdevé

$$\int \frac{d^4 \hat{x}}{(gB)^{3/2}} \bar{\Psi}_i^a(x) \left[ \hat{\mathcal{D}}_{ij}^{ab} - ig (T^r)^{ab} (\gamma_\mu)_{ij} \sum_{a', \mu'} \int d\varphi d\varphi' \sum_{nm} \hat{\Psi}_{\mu\mu'}^{rr'}(nm\varphi\varphi') \right. \\ \left. M \tilde{\Psi}_{\mu\mu'}^{rr'}(nm\varphi\varphi') \right] \Psi_i^b(x) \quad (42)$$

Fent els canvis de variable funcionals (amb els anàlegs per  $\tilde{\Psi}_i^a(x)$ )

$$\Psi_i^a(x) = \tilde{\Psi}_i^a(\hat{x})$$

$$\tilde{\Psi}_i^a(\hat{x}) = \int d\varphi d\varphi' \sum_{i'a'} \sum_{nm} \varphi_{ii'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi') \Psi_{i'}^{a'}(nm\varphi\varphi') \quad (43)$$

( $i, i'$  són aci índex de Dirac)

on  $\varphi_{ii'}^{aa'}(\hat{x}; nm\varphi\varphi')$  és la funció pròpia de  $(\tilde{D} + im_k)_{ij}^{ab}$  amb valor propi

$$\lambda_{i' \pm}^{a'}(nm\varphi\varphi') = im_k \pm \sqrt{2|g^{a'}|g_B(n+m+1+\alpha_{i'})} \quad (44)$$

$$\alpha_{0i} = \alpha_{2i} = 0; \alpha_{1i} = -\alpha_{2i} = 1; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

tal com han estat trobats a l'apèndix F. Tota la dependència en  $g_B$  de  $\varphi_{ii'}^{aa'}(\hat{x}, nm\varphi\varphi')$  és un factor  $g_B$ , i per tant un darrer canvi de variable funcional

$$\Psi_{i'}^{a'}(nm\varphi\varphi') = \frac{\mathcal{M}^{1/2}}{(g_B)^{1/4}} \Psi_{i'}^{*a'}(nm\varphi\varphi') \quad (45)$$

permetrà la completa factorització de  $g_B$ . La contribució de cada quark de massa nul·la a l'acció efectiva serà

$$2R'' \log \left( \frac{\mathcal{M}^{1/2}}{(g_B)^{1/4}} \right) \quad (46)$$

on s'ha tingut en compte que les variables de Grassmann transformen amb el jacobinà invers  $R''$  és el número de graus de llibertat de les variables fermiòniques

$$R'' = \int_{\bar{\psi} + im} (0) = \Omega \frac{(g_B)^2}{12\pi^2} \quad (47)$$

que ha estat calculat a l'apèndix E. El Lef incloent  $N_f'$  quarks de massa zero és

$$\Gamma(g_B) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11N}{6} - \frac{N_f'}{3} \right) (g_B)^2 \left( \log \frac{(g_B)^2}{\Lambda^4} - 1 \right) \quad (48)$$

Per quarks pesats resulta obvi que no podem factoritzar tota la dependència en  $g_B$  a causa de l'existència d'altres paràmetres significatius: les masses. Podem aprofitar, però, l'aproximació del camp mig a l'acció efectiva [AD 82] en la qual es considera que els quarks només senten els efectes d'un camp mig gluònic. La fórmula de l'acció efectiva en aquesta aproximació és (a l'espai euclidi)

$$e^{-\Gamma(\bar{A})} = e^{-\Gamma_0(\bar{A})} \int d[\bar{\psi}_k] d[\psi_k] e^{-\int d^4x \bar{\psi}_k (\not{D} + im_k) \psi_k} \quad (49)$$

on  $\Gamma_0(\bar{A})$  és l'acció efectiva de la O. C. D. pura. Fixem-nos que la contribució dels quarks massius a (49) restarà a la pràctica idèntica a la d'un loop, però al tenir-se en compte la contribució gluònica a tot ordre, (49) significa una millora notable per l'estudi del confinament si, com es creu actualment, aquest és un efecte bàsicament gluònic. Fent servir (48) i (49) hom arriba bàsicament a la mateixa acció efectiva trobada al capítol II, que convenientment normalitzada ( $\Gamma(g_B=0)=0$ ), i renormalitzada en l'esquema

de Savvidy es pot escriure

$$\Gamma(gB) = \Omega \frac{1}{2} b_0(N_f') (gB)^2 \log \left( \frac{(gB)^2}{e\Lambda^4} \right) \quad ; \quad b_0(N_f') = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11N_c}{3} - \frac{2N_f'}{3} \right) \quad (50)$$

on  $\Lambda'$  conté els efectes dels quarks massius. El resultat (50) és, però, d'una validesa molt més general que els del capítol III, ja que només els efectes dels quarks pesats són presos de forma aproximada. Resumint concisament les coses dites fins ací, (50) serà una bona acció efectiva per descriure el confinament si  $F^2$  és l'invariant gauge relevant i si els quarks pesats noten només els efectes d'un camp mig gluònic.

#### IV.8 Cas Cromomagnètic (Comentari)

Hem esmentat anteriorment que en el cas cromomagnètic la factorització també era possible. De fet, l'única cosa nova que cal tenir en compte és que les funcions pròpies de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  en aquest cas es poden escriure (III.20)

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; \varphi, k_0, k_3) &= (V_\mu)_{\mu'} (W^{a'})^{a'} \frac{\sqrt{gB}}{(2\pi)} e^{-i\sqrt{gB}(k_0 x_0 + k_3 x_3)} \\ &\cdot \left( \frac{1}{2^n n!} \right) \frac{\sqrt{k_{a'}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i\sqrt{k_{a'}} \frac{x_1}{2} (\sqrt{k_{a'}} x_2 + 2\varphi)} \\ &\cdot H_n(\sqrt{k_{a'}} x_2 + \varphi) e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{k_{a'}} x_2 + \varphi)^2} \end{aligned} \quad (51)$$



donant lloc a uns valors propis

$$\lambda_{\mu'}^{a'} (k_0 k_3 n \varphi) = g_B (k_0^2 + k_3^2) + (2n+1)k_{a'} + p_{\mu'}^{a'} \quad (52)$$

$$k_{a'} = 12a_1 g_B \quad ; \quad p_{0'}^{a'} = p_{3'}^{a'} = 0 \quad p_{1'}^{a'} = -p_{2'}^{a'} = 2k_{a'}$$

que permeten la factorització de  $g_B$ . La resta de canvis de variables funcionan de forma anàloga als fets a (1), (3) i (6) per  $b_{\mu}^a(x)$ , (1), (16) i (17) pels ghost i (1), (43) i (45) pels fermions de massa nul·la, canviant les corresponents funcions pròpies del cas autodual per les de cas cromomagnètic. Al no aparèixer cap problema suplementari als vistos pel cas autodual, no comentaré aquest cas amb més detall (veure [ES85(II)] en tot cas).

## V. RESULTATS SUPLEMENTARIS A PARTIR DE L'ACCIÓ EFECTIVA A UN LOOP.

### V. 1. Introducció

En el capítol anterior, hem vist que l'estructura confinant de l'acció efectiva es mantenia a tot ordre. Això fa pensar que les coses que hom dedueixi del resultat a un loop poden tenir una validesa més general. Es doncs valúós preguntar-nos quines coses més podem estudiar partint de l'acció efectiva a un loop.

Una possible línia, que ha estat duta a terme per S.L. Adler i T.V. Piran [AP 84], és calcular a partir del lagrangiana efectiu a un loop quin és exactament el potencial que lliga una parella quark-antiquark estàtica; per la qual cosa cal un considerable treball matemàtic i numèric en la resolució d'equacions diferencials no lineals. El resultat que obtenen és bàsicament [AP 82]

$$V(R) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} KR + 1.95 K^{1/2} \log(K^{1/2} R) - 0.40/R + \text{cte} \quad (1)$$

$$F^2 = K^2 \quad . \quad \text{mínim de def}$$

Una altre línia és intentar de connectar el mètode de l'acció efectiva amb altres aproximacions menys fonamentals però de reconegut èxit fenomenològic, com són els models de sac i les regles de suma (SR). La idea de connectar numèricament l'acció efectiva amb els models de sac, és deguda a H.B. Nielsen [NI78]. El seu raonament és el següent:

el model de sac divideix l'espai en dues zones, la de dins del sac on els quarks es mouen lliurement i la de fora el sac on la seva existència isolada és prohibida. Podem interpretar el fet que els quarks es moguin lliurement a la zona interior si imaginem que aquella zona ve dominada completament pel buit perturbatiu  $F^2 = 0$ , mentre que el buit físic de la Q.C.D.  $F^2 = \langle F^2 \rangle \neq 0$  domina completament la zona exterior i no permet la seva existència com a partícules lliures. El paràmetre del sac que relaciona la densitat d'energia ( $\sim \Gamma(\bar{A})$ ) a l'interior amb la del exterior està així lligat al  $\langle F^2 \rangle$  del mètode de l'acció efectiva. Nosaltres introduïrem algunes millores als treballs existents sobre aquest assumpte al fer servir accions afectives reals (sense parts imaginàries), assajos invariants gauge i algunes correccions no tingudes en compte anteriorment. La connexió amb les regles de suma és a primera vista, molt més senzilla. Aquelles fan servir uns paràmetres anomenats condensats que no són res més que valors esperats al buit d'invariants gauge. Aleshores l'única cosa que cal fer és identificar el nostre  $\langle F^2 \rangle$  amb el de les regles de suma. Cal advertir, però, que tant ací com en el model de sac, anàlisis més acurades podrien afegir correccions a les identificacions intuïtives que hem donat. No hem d'esperar doncs uns assemblatges numèrics perfectes, sinó més aviat un ordre de magnitud, que a la pràctica, i per raons que comentarem més endavant, tampoc serà massa satisfactori.

A part de la recerca de connexions numèriques, que es farà a continuació, hom pot preguntar-se també com trobar relacions entre objectes usats en altres aproximacions; així, la part final del capítol ha estat dedicada a relacionar l'anomenat condensat de quarks  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  amb condensat gluònic, ambdós emprats a les regles de suma.

## V. 2. Valor del condensat i connexió amb la constant del model de sac

El lagrangià efectiu (III. 35) té la virtut que, si no considerem quarks massius, renormalitzem a l'esquema de Savvidy i fem servir el grup de renormalització (R.G.), només depèn d'un paràmetre lliure,  $\Lambda$ , invariant sota R.G. Així doncs, conegut  $\Lambda$  podríem donar un número per  $\langle F^2 \rangle$  que seria

$$\langle F^2 \rangle = \Lambda^4 \quad (2)$$

una predicció directa de Q.C.D. pel condensat gluònic.  $\Lambda$ , però, que s'ha de trobar comparant amb dades experimentals, depèn de l'esquema de renormalització fet servir en l'obtenció de  $\mathcal{L}_{\text{ef}}$ , i el número corresponent a  $\Lambda$  ha estat trobat, sempre a partir de dades experimentals d'altres energies, per una llista relativament curta d'esquemes [SH 84] en la qual no hi és inclòs el de Savvidy amb regularització  $\zeta$ , usat en els capítols anteriors. Per tant, si volem obtenir un valor numèric, haurem de repetir els càlculs fets al capítol III emprant un esquema més conegut, que serà la regularització dimensional en el  $\overline{\text{MS}}$  [PT 84]. Aquest nou esquema resulta ser, afortunadament, molt semblant al usat i podrem aprofitar una gran part del treball realitzat.

Farem el càlcul pel cas autodual ja que no dóna lloc a parts imaginàries i és, per tant, el que més hauria d'acostar-nos al veritable  $\mathcal{L}_{\text{ef}}$  a un loop. La regularització dimensional es durà a terme de la següent manera: es considerarà que en les quatre primeres dimensions  $\bar{A}_\mu^a(x)$  té la mateixa expressió que a (III.15), però a les D-4 restants  $A_\mu^a(x)=0$ ; les matrius de Dirac es consideraran sempre en quatre dimensions, com és norma a la teoria de pertorbacions usual.

L'operador  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  en D dimensions té com a valors propis

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(nm \varphi \varphi' k) = (2n+2m+2)K_{a'} + p_{\mu'}^{a'} + \sum_{i>4}^D k^2 \quad (3)$$

i com a funcions pròpies, les mateixes que (III.42) multiplicades per

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-4}{2}}} \cdot e^{-i \sum_{i>4}^D k \cdot x} \quad (4)$$

tenim així

$$\text{tr} \log \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} = \Omega(D) \sum_{a'} \sum_{\mu'} \frac{(K_{a'})^2}{4\pi^2} \sum_{nm} \int \frac{d^{D-4} k}{(2\pi)^{D-4}} \log \left( (2n+2m+2)K_{a'} + p_{\mu'}^{a'} + \sum_{i>4}^D k^2 \right) \quad (5)$$

$\Omega(D) \equiv$  volum de l'espai temps en D dimensions. Usant la representació integral del logaritme

$$\text{tr} \log \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} = \Omega(D) \sum_{a'} \sum_{\mu'} \frac{(K_{a'})^2}{4\pi^2} \sum_{nm} \int \frac{d^{D-4} k}{(2\pi)^{D-4}} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left( \exp(-t) - \exp(-t \left[ (2n+2m+2)K_{a'} + p_{\mu'}^{a'} + \sum_{i>4}^D k^2 \right]) \right) \quad (6)$$

on el primer terme regularitza a zero per raons dimensionals i el segon, fent servir passos anàlegs als emprats a la regularització } (Veure l'apèndix B), esdevé:

$$\begin{aligned} \text{tr log } \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} &= \Omega(D) \sum_{a'} \frac{(k_{a'})^2}{4\pi^2} \left[ -2 \left( \frac{k_{a'}}{4\pi} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left( \right. \right. \\ &+ \zeta(-1-\varepsilon, 2) - \zeta(-\varepsilon, 2) \\ &\left. \left. + \zeta(-1-\varepsilon, 0) + \zeta(-\varepsilon, 0) \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

on

$$2\varepsilon \equiv D-4$$

L'operador  $-\bar{D}^2$  té com a valors propis en  $D$  dimensions

$$\lambda^{a'}(nm\varphi\varphi'\kappa) = (2n+2m+1)k_{a'} + \sum_{i>4}^D k^2 \quad (8)$$

i com a funcions pròpies les mateixes que (III. 44), multiplicades pel factor (4). Tenim doncs:

$$\text{tr log } (-\bar{D}^2) = \Omega(D) \sum_{a'} \frac{(k_{a'})^2}{4\pi^2} \left[ -2 \left( \frac{k_{a'}}{4\pi} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \zeta(-1-\varepsilon, 1) \right] \quad (9)$$

Així, la contribució gluònica a l'acció efectiva es pot escriure (de (III. 13), (III.18))

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega(D) \left\{ \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^a \bar{F}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \text{tr log } \bar{\Theta} - \text{tr log } (-\bar{D}^2) \right\} \quad (10)$$

i de (7) i (9) per  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega(0) \left\{ B^2 + \frac{\mathcal{N}}{4\pi^2} \frac{a}{\varepsilon} (gB)^2 + \frac{a}{4\pi^2} (gB)^2 \sum_{a'=1}^{d^2-1} \mathcal{N}_{a'}^2 \right. \\ \left. + \log \left( \frac{12a \cdot gB}{2\pi} \exp\left(\gamma - \frac{b}{a}\right) \right) \right\}$$

$$a \equiv \zeta(-1, 2) + \zeta(0, 2) + \zeta(-1, 0) - \zeta(0, 0) - \zeta(-1, 1) = \frac{11}{12}$$

$$b \equiv \zeta'(-1, 2) + \zeta'(0, 2) + \zeta'(-1, 0) - \zeta'(0, 0) - \zeta'(-1, 1) = \quad (11) \\ = \zeta'(-1, 1) \simeq -\frac{1}{6}$$

Notem que en  $D$  dimensions, ni  $g$  ni  $B$  tenen dimensions enteres, per aconseguir-les s'introdueix

$$B(\mathcal{M}) \equiv B \mathcal{M}^{-\varepsilon} \quad [B(\mathcal{M})] = M^2$$

$$g(\mathcal{M}) \equiv g \mathcal{M}^{\varepsilon} \quad [g(\mathcal{M})] = 1$$

$$[gB] = [g(\mathcal{M})B(\mathcal{M})] = M^2$$

(12)

$$([M] = M)$$

Si escrivim

$$\Omega(D) = L^D = L^4 L^{2\varepsilon} = \Omega L^{2\varepsilon} \quad (13)$$

(11) esdevé (per  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{A}) = \Omega \left\{ B^2(\mu) (1 + \varepsilon \log(L\mu)^2) + \frac{\alpha_r}{4\pi^2} \frac{a}{\varepsilon} (g_B)^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha_r}{4\pi^2} a (g_B)^2 \log L^2 \right. \\ \left. + \frac{a}{4\pi^2} (g_B)^2 \sum_{a=1}^{\alpha^2-1} \nu_a^2 \log \left( \frac{|\nu_a| g_B}{2\pi} e^{\gamma - \frac{b}{a}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

En el background field gauge  $B(\mu)$  i  $g(\mu)$  renormalitzen

$$B(\mu) = Z^{1/2} B_R \quad g(\mu) = Z^{-1/2} g_R \quad (15)$$

on  $Z$  a un loop es pot escriure

$$Z = 1 + c g_R^2 \quad (16)$$



cancel·lin els termes proporcionals a

$$\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 4\pi \quad (17)$$

aleshores

$$C = -\frac{\mathcal{N}}{4\pi^2} a \left( \frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 4\pi \right) \quad (18)$$

sent l'expressió per  $\Gamma(A)$  renormalitzada

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega \left\{ B_R^2 + \frac{a}{4\pi^2} (g_B)^2 \sum_{d'=1}^{d-1} \mu_{d'}^2 \log \left( \frac{2(2a' g_B)}{\mu^2} e^{-\frac{b}{a}} \right) \right\} \quad (19)$$

si fem servir el grup de renormalització a un loop [PT 84]

$$\log \frac{1}{\mu^4} - \frac{(4\pi)^2}{\beta_1 g_R^2} = \log \frac{1}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \quad (20)$$

$$\beta_1 \equiv -\frac{11\mathcal{N}}{6} = -2a\mathcal{N}$$

(19) es pot escriure

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega \left\{ \frac{11}{48\pi^2} (g\theta)^2 \sum_{a'=1}^{N^2-1} \lambda_{a'}^2 \log \left( \frac{2|\lambda_{a'}| g\theta e^{-b/a}}{\Lambda_{\overline{MS}}^2} \right) \right\} \quad (21)$$

Sent l'invariant gauge més senzill compatible amb (21)

$$\Gamma(\bar{A}) = \Omega \text{ def}(\bar{A})$$

$$\text{def}(\bar{A}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{11}{96} \text{tr}_A \left\{ g^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \log \left( \frac{g^2 F_{35} F_{35} e^{-2b/a}}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \right) \right\} \quad (22)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a T^a$$

Si fem l'hipòtesi que el mínim de (22) s'ateny per configuracions

$$F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b = \frac{\delta^{ab}}{N^2-1} F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \quad (23)$$

implica

$$\langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} e^{-\frac{2b}{a} - 1} \Lambda_{\overline{MS}}^4$$

$$= (0.91 \Lambda_{\overline{MS}})^4$$

$$= (0.14 \text{ GeV})^4$$

(24)

$$(\Lambda_{\overline{MS}} = 150 \text{ MeV})$$

que difereix notablement del valor usat a les regles de suma

$$\langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle \simeq 0.5 \text{ GeV}^4 = (0.84 \text{ GeV})^4 = (5.6 \Lambda_{\overline{MS}})^4$$

(25)

(els valors numèrics de  $\Lambda_{\overline{MS}}$  i  $\langle g^2 F^2 \rangle$  estan trets de [SH 84]).

Per altra banda, la comparació amb el model de sac es fa a

a través de la constant  $B_s$  d'aquell model

$$B_s = - \mathcal{E}(\bar{A}_{vac}) \quad (26)$$

on  $\mathcal{E}(\bar{A}_{vac})$  es la densitat d'energia del buit mesurada respecte la configuració pertorbativa  $\mathcal{E}(\bar{A}=0) = 0$ . En el mètode de l'acció efectiva les densitats d'energia d'una certa configuració es calculen fent servir

$$\mathcal{E}(\bar{A}) = \Omega^{-1} \Gamma(\bar{A}) \quad (27)$$

on  $\Gamma(\bar{A})$  és l'acció efectiva a l'espai euclidi que juga un paper equivalent al Hamiltonià a l'espai de Minkowski [BE 74]. Pel nostre assaig obtenim

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\bar{A}_{vac}) &= - (0.277 \Lambda_{MS})^4 \\ &= - (0.041 \text{ GeV})^4 \end{aligned}$$

(28)

a comparar amb

$$B = (0.145 \text{ GeV})^4 \quad (29)$$

La diferència numèrica entre (28) i (29) pot ser interpretada com una mesura de quan lluny està el nostre assaig de buit (23) del buit autèntic. [NN 79] han usat el fet que qualsevol assaig de buit tindrà una densitat d'energia associada superior a la del buit autèntic per treure una cota inferior a la  $B_5$  del sac que es pot traduir altrament en una cota superior a  $\Lambda_{\overline{MS}}$ . Aquestes cotes, malgrat estar basades en Q.C.D., no són riguroses ja que depenen de quan bona sigui l'aproximació a un loop. Per l'estat de Savvidy, l'assaig és

$$\bar{F}_{\mu\nu}^a = \delta^{a3} F_{\mu\nu} (\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 3} - \delta_{\mu 3} \delta_{\nu 0}) \quad (30)$$

i el resultat

$$\langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle = (0.80 \Lambda_{\overline{MS}})^4 = (0.12 \text{ GeV})^4$$

$$\mathcal{E}(\bar{A}_{\text{VAC}}) = -(0.24 \Lambda_{\overline{MS}})^4 = -(0.036 \text{ GeV})^4$$

(31)

que són un xic pitjors que pel nostre assaig (23), numèricament no massa significatiu, però conceptualment més pobre ja que es fixen direccions als espais de color i de lorentz.

La introducció de quarks de massa nul·la, no porta problemes suplementaris en D-dimensions, ja que l'àlgebra de Dirac la deixem a quatre i es poden fer servir les igualtats per determinants emprades a (III. 46). Amb passos anàlegs als usats per  $\bar{\mathcal{O}}$  i  $-\bar{\mathcal{D}}^2$  hom arriba a

$$-\text{tr} \log \bar{\mathcal{D}} = \Omega \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{a_0}{16\pi^2} (g_B)^2 - \frac{u_0}{16\pi^2} \sum_{a'} (g_B)^2 |S_{a'}|^2 - \log \left( \frac{(g_B)^2 |S_{a'}|^2}{4\pi^2 \mathcal{M}^4} e^{2\gamma - \frac{2b_0}{a_0}} \right) \right\} \quad (32)$$

on

$$u_0 \equiv 3(-1, -1) + 23(-1, 0) + 3(-1, 1) + 3(0, -1) - 3(0, 1) = \frac{2}{3}$$

$$b_0 \equiv 3'(-1, -1) + 23'(-1, 0) + 3'(-1, 1) + 3'(0, -1) - 3'(0, 1) \simeq -\frac{2}{3}$$

Renormalitzant en el  $\overline{\text{MS}}$  la C de (18) ara esdevé (per  $N_f'$  quarks lleugers)

$$C = -\frac{11\mathcal{N} - 2N_f'}{12} \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 4\pi \right) \quad (33)$$

El resultat final expressat en termes de  $\Lambda_{\overline{MS}}$  i dels invariants gauge més senzills és

$$\begin{aligned} \text{def } (\bar{A}) = & \frac{1}{4\pi^2} \frac{11}{96} \text{tr}_A \left\{ g^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \log \left( \frac{g^2 F_{3\sigma} F_{3\sigma} e^{-\frac{2b}{a}}}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \frac{N_f}{24} \text{tr}_F \left\{ g^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \log \left( \frac{g^2 F_{3\sigma} F_{3\sigma} e^{-\frac{2b_0}{a_0}}}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

obtenint amb l'assaig (23)

$$\begin{aligned} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle &= (0.67 \Lambda_{\overline{MS}})^4 \\ \mathcal{E}(\bar{A}_{\text{VAC}}) &= - (0.276 \Lambda_{\overline{MS}})^4 \end{aligned} \quad (35)$$

Com era d'esperar la inclusió de quarks de massa nul·la augmenta una mica la densitat d'energia del buit. Per l'estat de Savvidy (30) els resultats són

$$\begin{aligned} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle &= (0.58 \Lambda_{\overline{MS}})^4 \\ \mathcal{E}(\bar{A}_{\text{VAC}}) &= - (0.241 \Lambda_{\overline{MS}})^4 \end{aligned} \quad (36)$$

altre cop un xic pitjors.

Hom pot pensar de millorar els resultats anteriors, substituint l'assaig (23), per un de més complet, com pot ser desenvolupar el terme dins del logaritme en torn d'una matriu diagonal constant  $M^4$

$$\log \left( \frac{g^2 F_{3\sigma} F_{3\sigma}}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \right) \simeq \log \left( \frac{M^4}{\Lambda_{\overline{MS}}^4} \right) + \frac{g^2 F_{3\sigma} F_{3\sigma} - M^4}{M^4} + \dots \quad (37)$$

Així tindrem en compte més d'un invariant gauge. Per a no augmentar, però, el número de paràmetres farem servir les hipòtesis de factorització [SV 79] [NS 84], usuals a les regles de suma

$$\begin{aligned} \langle F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b F_{3\sigma}^c F_{3\sigma}^d \rangle &= \langle F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \rangle \langle F_{3\sigma}^c F_{3\sigma}^d \rangle + \langle F_{\mu\nu}^a F_{3\sigma}^c \rangle \langle F_{\mu\nu}^b F_{3\sigma}^d \rangle \\ &+ \langle F_{\mu\nu}^a F_{3\sigma}^d \rangle \langle F_{\mu\nu}^b F_{3\sigma}^c \rangle \end{aligned} \quad (38)$$

$$\langle F_{\mu\nu}^a F_{3\sigma}^b \rangle = \frac{1}{12(\alpha^2-1)} \delta^{ab} (\delta_{\mu 3} \delta_{\nu \sigma} - \delta_{\mu \sigma} \delta_{\nu 3}) \langle F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \rangle$$

$$\langle F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \rangle = \frac{1}{(\alpha^2-1)} \delta^{ab} \langle F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \rangle$$

amb això i emprant propietats de les  $T^a$  en les



representacions adjunta i fonamental tenim

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}_A (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{36} F_{36}) \rangle &= \frac{5}{4} \frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2-1} \langle F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \rangle^2 \\ \langle \text{tr}_F (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{36} F_{36}) \rangle &= \frac{1}{24\mathcal{N}} \left( 7 - \frac{1}{\mathcal{N}^2-1} \right) \langle F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \rangle^2 \end{aligned} \quad (39)$$

que substituït al def esdevé

$$\begin{aligned} \text{def}(\bar{A}) &= \frac{1}{4} \frac{1}{4\pi^2} \frac{11\mathcal{N} - 2N_f'}{6} \left( \log \left( \frac{M^4}{\Lambda_{MS}^4} \right) - 1 \right) g^2 F^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathcal{N} - N_f'}{6} g^2 F^2 \\ &+ \frac{1}{24\pi^2} \left( \frac{55}{4} \frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2-1} - \frac{N_f'}{\mathcal{N}} \left( 7 - \frac{1}{\mathcal{N}^2-1} \right) \right) \frac{(g^2 F^2)^2}{M^4} \end{aligned} \quad (40)$$

$\langle g^2 F^2 \rangle$  el trobarem minimitzant (40) respecte  $g^2 F^2$  i  $M^4$ . Els resultats finals són

$$\begin{aligned} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle &= (0.73 \Lambda_{MS})^4 \\ \mathcal{E}(\bar{A}_{VAC}) &= -(0.301 \Lambda_{MS})^4 \end{aligned} \quad (41)$$

que milloren una mica (35), però no prou com per pensar que correccions a (37) ens aproparan substancialment a l'autèntic buit (29).

Un cop vistos aquests resultats numèrics més aviat pobres, cal preguntar-nos per les seves causes. Recordem, primer, que la motivació de l'anàlisi numèric dut a terme ha estat adonar-nos que l'acció efectiva a tot ordre coïncidia funcionalment amb la trobada un loop, i que a causa de l'absència de paràmetres lliures hom podia trobar una predicció per  $F^2$  amb una única dada  $\Lambda_{\overline{MS}}$ . Més a més teníem l'avantatge respecte treballs anteriors de partir d'un  $\Delta_{eff}$  real i manifestament invariant gauge. Per contra, existeix un argument, trobat amb freqüència a la literatura [LE 81] [FL 83], que diu que l'aproximació a un loop no té massa sentit en una teoria amb constant d'acoplament grossa com hom suposa que és la Q.C.D., ja que la correcció quàntica és més gran que l'ordre zero clàssic; aquest argument perd validesa, però, quan hom s'adona que tota la dependència en la constant d'acoplament és dins de termes invariants sota el grup de renormalització, no tenint ja sentit parlar de si és grossa o petita. Assumint doncs, que l'aproximació a un loop no és intrínsecament dolenta, hi ha encara un parell de punts que poden donar compte de les discrepàncies:

i) Una connexió deficient amb la fenomenologia. La connexió amb el model de sac es fa sobre la base que dins del sac hi ha buit pertorbatiu i fora l'autèntic buit de la Q.C.D.. Resulta obvi, però, que aquesta situació és ideal [NN 79]: dins del bag hi hauran correccions pertorbatives de la Q.C.D. al moviment dels quarks lliures [LE 79], i el buit de la Q.C.D. s'atenyerà lluny del sac i no justament a la paret d'aquest (la  $B_s$  del sac dona compte de la diferència de densitats d'energia a la paret dels sac). Per altra banda el  $\langle g^2 F^2 \rangle$  a les regles de suma és el resultat d'una O.P.E. i per tant, en rigor, només conté contribucions fins una certa escala de moments [NS 85]; el nostre  $\langle g^2 F^2 \rangle$ , en canvi, conté contribucions de totes les escales de moments.

Aquests efectes, tant els del model de sac com els de les regles de suma, són difícils de valorar malgrat que hom tendeix a creure que són petits.

ii) Els modus zero. Recordem que hi havia una certa arbitriietat en el tractament dels modus zero. Al capítol III havíem argumentat que aquestes contribucions no canviaven la funcionalitat del  $L_{\text{ef}}$ , la qual cosa ha estat provada al capítol IV. Malgrat això, no tenim cap raó per pensar que un tractament diferent al nostre no canviï numèricament les contribucions al  $L_{\text{ef}}$ , i, de fet, tampoc tenim un criteri objectiu per dir quin tractament és el millor. Així doncs no podem fer res més que assenyalar que els modus zero podrien aportar contribucions que no s'han tingut en compte. A la vista de les deficiències numèriques i de la dificultat d'analitzar les seves causes, ens restringirem a partir d'ara a l'estudi d'objectes pels quals només la funcionalitat de  $L_{\text{ef}}$  és important i no els seus precisos valors numèrics.

### V. 3. Relacions entre condensats

L'acció efectiva de la Q.C.D. que hem trobat al capítol III pot donar-nos relacions entre el condensat de quarks i condensats gluònics a través de la fórmula

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{d}{dm} \Gamma(\bar{A}) \Big|_{\bar{A} = \bar{A}_{\text{VAC}}} \quad (42)$$

que es dedueix immediatament de la representació per mitjà de la integral funcional de la teoria.  $\Gamma(\bar{A})$  és manifestament invariant gauge, i per tant (42) relacionarà  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$  amb invariants gauge gluònics. Fixem-nos que per quarks pesats, les fórmules (III.34) i (III.49) ens donaran trivialment, usant (42), una relació. Pel cas cromomagnètic és:



$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \frac{(gB)^2}{24\pi^2} \frac{1}{m} + O(m^{-5}) \tag{43}$$

i per l'autodual

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \frac{(gB)^2}{12\pi^2} \frac{1}{m} + O(m^{-5}) \tag{44}$$

amb la qual cosa deduïm

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \frac{1}{48\pi^2} \frac{1}{m} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle + O(m^{-5}) \tag{45}$$

que és el primer terme de l'anomenat heavy quark expansion a les regles de suma [SV 79]. Cal dir que les  $\Gamma(\bar{A})$  usades per a obtenir (43) i (44) no són exactament (III. 34) i (III. 49) sinó aquelles però normalitzades respecte el buit pertorbatiu, això és  $\Gamma(\bar{A}=0) = 0$ . La generalització de (43), (44) a (45) s'ha fet, com sempre, seguint criteris de màxima simplicitat. Per altre banda és conegut que a (45) existeix un terme  $(\langle f^{abc} F_{\mu\nu}^a F_{\nu\sigma}^b F_{\sigma\mu}^c \rangle)$ , però no podíem tenir cap esperança de trobar-lo a causa del tipus d'assaig per  $\bar{A}_\mu^a$  (III. 15) que el posa zero automàticament. Per obtenir fòrmules pels quarks lleugers hem de treballar un xic més, ja que necessitem expressions per  $\Gamma(\bar{A})$  quan  $m \rightarrow 0$  però  $m=0$  i no les hem trobades abans. Concretament necessitarem els següents desenvolupaments (Veure l'apèndix C)

$$\zeta'(0, q) = -\log q - \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(q \log q)$$

$$\zeta'(-1, q) = \kappa - q \log q - \frac{q}{2} (\log(2\pi) - 1) + O(q^2 \log q) \quad (46)$$

$$\kappa \in \mathbb{R}$$

Així pel cas cromomagnètic, la part que depèn de  $m$  de  $\Gamma(A)$  normalitzada és

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} \Gamma(\bar{A}) &= \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\omega_k} \frac{|g_B s_{a'}|}{8\pi^2} m_k^2 \left( \log \left( \frac{m_k^2}{2|g_B s_{a'}|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \log(2\pi) - 1 \right) + O(m_k^4) \end{aligned} \quad (47)$$

obtenint d'ací

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \sum_{a'=1}^{\omega_k} m \frac{|g_B s_{a'}|}{4\pi^2} \log \left( \frac{\pi m^2}{|g_B s_{a'}|} \right) + O(m^3) \quad (48)$$

Pel cas autodual tenim

$$\Omega^{-1} \Gamma(\bar{A}) = \sum_{k=1}^{N_g} \left\{ -\frac{(g_B)^2}{16\pi^2} \log\left(\frac{m_k^2}{g_B}\right) + \sum_{a'=1}^{\mathcal{D}} \frac{m_k^2 |g_B g_{a'}|}{8\pi^2} + O(m_k^4) \right\}$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{(g_B)^2}{8\pi^2} \frac{1}{m} + \sum_{a'=1}^{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi^2} m |g_B g_{a'}| + O(m^3) \quad (49)$$

(48) i (49) són fórmules funcionalment força diferents, la qual cosa suggereix que per quarks lleugers el condensat té una dependència no trivial en invariants gauge gluònics. Malgrat tot, intentarem de trobar un invariant gauge que doni lloc a (48) quan el particularitzem al cas cromomagnètic i a (49) quan ho fem pel cas autodual. Primerament, cal notar que l'absència del terme en  $1/m$  a (48) és fàcilment explicable si prové de l'invariant

$$F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \quad ; \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}^a \quad (50)$$

l'existència d'aquest terme es pot provar per un  $\bar{A}_\mu^a(x)$  més general, amb camp cromomagnètic i cromoelèctric diferents [SO 85]. L'invariant gauge que dona a la resta de termes no es pot escriure inequívocament, posarem a continuació les dues possibilitats més senzilles.

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle &= -\frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \rangle \\
&+ \frac{m}{16\pi^2} \langle \text{tr} \{ (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^{1/2} \log \left( \frac{4\pi^2 m^2}{e^2 F_{35} F_{36}} \right) \} \rangle \\
&+ \frac{1}{8\pi^2} m \langle \text{tr} \{ (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})^{1/2} \} \rangle
\end{aligned}
\tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle &= -\frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m} \langle g^2 F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \rangle \\
&+ \frac{m}{16\pi^2} \langle \text{tr} \{ (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^{1/2} \log \left( \frac{4\pi^2 m^4}{F_{35} F_{36}} \right) \} \rangle \\
&+ \frac{1}{8\pi^2} m \langle \text{tr} \{ (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^{1/2} \} \rangle
\end{aligned}$$

Mirant (51) hom s'adona que un límit quirial  $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \neq 0$  només es pot obtenir si  $\langle F\tilde{F} \rangle = 0(m)$ , la qual cosa implicaria una violació de paritat a les interaccions fortes que no ha estat observada [BA 79], (teòricament es pot aconseguir un  $\langle F\tilde{F} \rangle \neq 0$  introduint un terme  $\sim \theta F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a$  al lagrangiana de la Q.C.D.). Si assumim que  $\langle F\tilde{F} \rangle = 0$ , aleshores

$$\lim_{m \rightarrow 0} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = 0
\tag{52}$$

tenint  $\frac{d}{dm} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$  una singularitat logarítmica a  $m=0$  tal com obliguen arguments fenomenològics [NS 81].

Cal assenyalar que tots els càlculs d'aquest sub-apartat s'han dut a terme suposant que la configuració gluònica que descriu el buit no depèn de les masses dels quarks, la qual cosa és plausible; de tota manera amb hipòtesis suplementàries com  $\Gamma(\bar{A}) = \Gamma(F^2, F\tilde{F})$  i  $\langle F\tilde{F} \rangle = 0$ , és fàcil veure que el procediment emprat és exacte. Resumint doncs, hem obtingut fórmules que relacionen el condensat de quarks amb valors esperats al buit d'invariants gauge gluònics que són estrictament vàlids a un loop o fins allà on l'aproximació del camp mig d'Adler (IV. 49) sigui acceptable.



## VI. ACCIÓ EFECTIVA A TEMPERATURA FINITA

### VI.1 Introducció

En el capítol III hem trobat una acció efectiva a un loop que era confinant i en el IV hem vist que el mateix resultat era vàlid a tot ordre. Hem donat doncs suport a la creença que el confinament és realment una conseqüència de la Q. C. D. i així, l'existència dels quarks només seria permesa a l'interior dels hadrons. Obviament tots els càlculs s'han fet en absència de temperatura, hom pot preguntar-se, però, que passaria si escalfem més i més un sistema d'hadrons: seguirien existint sempre hadrons individuals o acabarien fonent-se en una sopa de quarks i gluons?. El fet que la Q. C. D. sigui una teoria asimptòticament lliure apunta cap a la segona d'ambdues possibilitats, ja que la introducció de la temperatura pot entendre's com un augment de l'energia cinètica de les partícules del sistema que implicaria alhora un augment del moment, acostant-nos a la regió on els quarks i gluons es comporten com partícules lliures (moments alts). Alguns càlculs en el retícul [FR 84] suggereixen l'existència d'aquesta fase on quarks i gluons no estan confinats a l'interior d'hadrons, i hom espera [SH 84] la seva possible observació experimental en col·lisions d'ions pesats. Així doncs, té sentit preguntar-se que passarà amb la nostra acció efectiva quan hi introduïm els efectes de la temperatura.

Alguns autors [KA 81] [MR 81] [DS 81] han estudiat ja el problema per la Q. C. D. pura i, últimament, considerant quarks lleugers [PS 85]. Les conclusions a les que arriben són, però, molt diferents, i depenen radicalment del tractament donat a les contribucions responsables de l'aparició de parts imaginàries (d'ara en endavant modus inestables). Així [MR 81] i [KA 81] eliminen a ma tot el rang d'autovalors que contribuïxen als modus inestables i obtenen una transició de fase, mentre que [DS 81] els tenen en compte

i no l'obtenen. Fora doncs valuós, aclarir aquesta situació, així com estudiar l'efecte dels quarks pesats que no ha estat tingut en compte fins ara.

L'estudi d'un sistema de partícules a una temperatura  $T \equiv 1/\beta$  fixa es fa mitjançant la funció de partició de Boltzman

$$Z(\beta) = \text{tr} ( e^{-\beta H} ) \quad (1)$$

on  $H$  és l'operador hamiltonià del sistema. Fixem-nos, però que la fórmula (1) té una forta semblança amb la del propagador d'un camp a O.F.T.

$$\langle \phi(\vec{x}, t) | \phi(\vec{x}, 0) \rangle = \langle \phi(\vec{x}) | e^{-i t H} | \phi(\vec{x}) \rangle \quad (2)$$

admetrà, així també, una representació en termes d'integral funcional que resulta ser la següent [WE 74][DJ 74]

$$Z(\beta) = \int_{\substack{\text{periòdics} \\ \text{en } t \equiv x_0}} d[\phi(\vec{x}, x_0)] e^{-\int_0^\beta dt S_E(\phi)} \quad (3)$$

on  $S_E(\phi)$  és l'acció clàssica a l'espai euclidi i la integral funcional abarca només configuracions periòdiques (per bosons i antiperiòdiques per fermions) en  $t$ . Fixem-nos que quan  $\beta \rightarrow \infty$ , (3) es converteix en la integral funcional que dóna lloc a l'acció efectiva a temperatura zero. Així, anomenarem acció efectiva a temperatura

finita i lagrangià efectiu a temperatura finita a

$$\Gamma \equiv - \log Z(\beta) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_{ef} \equiv \Omega^{-1} \Gamma$$

$$\Omega \equiv \beta V \quad ; \quad V \equiv \text{Volum de l'espai ( } \mathbb{R}^3 \text{ )}$$

malgrat que aquest darrer tingui un nom prou conegut pels mecànico-estadístics: l'energia lliure.

El fet que (3) estigui només integrat sobre configuracions periòdiques imposa restriccions als nostres assajos (III. 15). Els operadors  $\bar{\mathcal{O}}$ ,  $-\bar{\mathcal{D}}^2$ ,  $\bar{\mathcal{D}} + im_K$  han d'admetre condicions de contorn periòdiques en  $\star$  (antiperiòdiques per fermions); això fa que no puguem considerar el cas autodual i haguem de restringir-nos al cromomagnètic.

Per tal d'aclarir les discrepàncies entre els resultats anteriors, treballarem de la forma més neta possible, enunciant a continuació els criteris fets servir en els punts conflictius. Per començar, no menysprearem els modus inestables, per un motiu clar: si ho haguéssim fet a  $T = 0$  no hauríem obtingut la funció  $\beta$  de Callan-Symanzik correctament. Seguidament, el criteri per a trobar el signe de les parts imaginàries serà el mateix que el emprat al capítol III; comprovarem que la regularització usada no n'introdueix de noves. Veurem, finalment, que el  $\mathcal{L}_{ef}$  es pot escriure com la contribució a  $T = 0$  més una contribució finita que du tota la dependència en  $T$ ; evitarem qualsevol mena de prolongació analítica en aquest darrer terme.

Val a dir, també, abans d'entrar en matèria, que a la literatura es troben dos sistemes per a atacar l'introducció de la temperatura en l'acció efectiva. El primer, usat per [KA 81], [PS 85], empra directament (1); mentre que l'altre, més proper a la Q.F.T. empra (3), i és usat per [DS 81], MR 81 i nosaltres. L'equivalència a un loop d'aquests dos sistemes és provada a l'apèndix G.

## VI.2. Regularització $\zeta$ a $T \neq 0$

Considerarem a continuació un operador típic, que apareix sistemàticament en el càlcul un cop diagonalitzades les estructures de color, Lorentz o de Dirac dels originals. Aquest serà

$$\hat{O} \equiv - \left( \partial_{\mu} + i \frac{g}{2} \gamma_{\alpha} \bar{F}_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \right)^2 + M \quad ; \quad M = de. \quad (5)$$

on  $\bar{F}_{\mu\nu}$  és dins del cas cromomagnètic (III.17). Els valors propis de  $\hat{O}$  són:

$$\lambda(k_0, k_3, n, \varphi) = k_0^2 + k_3^2 + (2n+1)k_{\alpha'} + M \quad (6)$$

$$(k_{\alpha'} \equiv |2\alpha' g B|)$$

Imposar condicions de contorn periòdiques (antiperiòdiques) en  $t$  pels camps bosònics (fermiònics) implica

$$\kappa_0 = \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right) \quad \text{bosons} \quad (7)$$

$$\kappa_0 = \left( \frac{2\pi(m + \frac{1}{2})}{\beta} \right) \quad \text{fermions} \quad m \in \mathbb{Z}$$

La funció  $\zeta_{\hat{O}}(s)$  està definida

$$\zeta_{\hat{O}}(s) \equiv \text{tr} [\hat{O}^{-s}] = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \text{tr} [e^{-t\hat{O}}] \quad (8)$$

que en el nostre cas (7), (8) es pot escriure

$$\zeta_{\hat{O}}(s) = \frac{\Omega}{\Gamma(s)} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{dK_3}{2\pi} \frac{\kappa_0'}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t(K_0^2 + K_3^2 + (2n+1)\kappa_0' + M)} \quad (9)$$

i un cop realitzada la integral sobre  $K_3$ , el sumatori sobre  $n$  i un canvi de variables trivial esdevé

$$\zeta_{\hat{O}}(s) = \Omega \frac{\kappa_0'}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \frac{1}{(2\kappa_0')^{s-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}} \cdot e^{-t \left( \frac{1}{2\kappa_0'} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{M}{2\kappa_0'} \right)} / (1 - e^{-t}) \quad (10)$$

on usant la fórmula

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-am^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 m^2}{a}} \right) \quad (11)$$

,  $a > 0$

podem escriure

$$\zeta_{\hat{0}}(s) = \zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T=0} + \zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T>0} \quad (12)$$

on  $\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T=0}$  conté la contribució de  $T=0$  i  $\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T>0}$  tota la dependència en  $T$ , tenim

$$\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T=0} = \Omega \frac{\kappa_{a'}^2}{4\pi^2} \frac{1}{(2\kappa_{a'})^s} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} \frac{e^{-t(\frac{1}{2} + \frac{M}{2\kappa_{a'}})}}{(1 - e^{-t})} \quad (13)$$

$$\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T>0} = \Omega \frac{\kappa_{a'}^2}{4\pi^2} \frac{1}{(2\kappa_{a'})^s} \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\kappa_{a'} \frac{\beta^2 m^2}{2t}} \cdot e^{-t(\frac{1}{2} + \frac{M}{2\kappa_{a'}})} / (1 - e^{-t})$$

Fixem-nos que la integral a  $\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T>0}$  està ben definida  $\forall s$  i, per tant, no necessita de cap prolongació analítica regularitzadora. A la resta del capítol només ens preocuparem d'aquesta contribució ja que l'altra ( $\zeta_{\hat{0}}(s) \Big|_{T=0}$ ) ja ha estat trobada al capítol III.

Si consideréssim condicions de contorn antiperiòdiques, faríem servir a (10)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{4}(2n+1)^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{4}n^2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-an^2} \quad (14)$$

de la qual cosa hom dedueix

$$\zeta_{\hat{0}}^{(\beta)}(s) \Big|_{\text{antiperiòdic}} = \zeta_{\hat{0}}^{(2\beta)}(s) \Big|_{\text{periòdic}} - \zeta_{\hat{0}}^{(\beta)}(s) \Big|_{\text{periòdic}} \quad (15)$$

( $\Omega$  és considerat independent de  $\beta$ ). Així doncs, només ens preocuparem de les condicions de contorn periòdiques i aplicarem (15) per les antiperiòdiques.

De (13), obtenim finalment

$$-\zeta'_{\hat{0}}(0) \Big|_{T>0} = -\Omega \frac{\kappa_a^2}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} \frac{e^{-\kappa_a' \frac{\beta^2 m^2}{2t} - t(\frac{1}{2} + \frac{M}{2\kappa_a'})}}{(1 - e^{-t})} \quad (16)$$

on s'ha fet servir

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \Big|_{s=0} = 1 \quad ; \quad \frac{1}{\Gamma(0)} = 0 \quad (17)$$

És doncs convenient introduir la funció

$$F_1(a, b) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} \frac{e^{-at - \frac{bm^2}{t}}}{(1 - e^{-t})} \quad (18)$$

que és estudiada a l'apèndix H.

### VI.3. Modus inestables.

La integral (10), no té sentit si  $M$  és negatiu i de valor absolut prou gros. Això succeirà en un cert rang de valors propis de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  que és el que dóna lloc a les parts imaginàries. Concretament, quan els valors propis de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  a (III.18) són

$$p_{\mu'}^{a'} = -2K_{a'} \quad ; \quad n=0 \quad ; \quad K_0^2 + K_3^2 < K_{a'}^2 \quad (19)$$

estem en aquesta situació. La seva contribució al  $d_{ef}$  és

$$d_{in} = \frac{1}{2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} \frac{K_{a'}}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_3}{2\pi} \log \left( K_3^2 + \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^2 - K_{a'} - i\varepsilon \right) \quad (20)$$

$$; \quad \varepsilon > 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Com a test de la nostra forma de treballar, calculem a l'apèndix I la part imaginària de (20) després de regularitzar, per comprovar que coincideix amb l'obtinguda immediatament a partir de (20) sense regularitzar. Aquesta és:

$$\text{Im}(d_{ef}) = -\frac{\pi}{2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} \frac{K_{a'}^{3/2}}{2\pi^2} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{O} \left( 1 - \left( \frac{2\pi m}{\sqrt{K_{a'}}\beta} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi m}{\sqrt{K_{a'}}\beta} \right)^2} \quad (21)$$

Cal recordar que la part imaginària no ha de ser modificada per la regularització ja que prové de contribucions infra-rojes. Val a dir que aquest criteri no ha estat emprat en els treballs anteriors.



Quan la quantitat dins del log és real però no definida positiva, com a (19), s'ha de substituir (8) per

$$a^{-s} = (-i)^{-s} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-iat}$$

$$\left( \log a = -\frac{d}{ds} a^{-s} \Big|_{s=0} \right) \quad (22)$$

vàlida  $\forall a \in \mathbb{R}$  ; sent el  $-i\varepsilon$  de (20) qui ens decideix per (22) i no per la seva complexa conjugada. Considerem doncs

$$I \equiv \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{(-i)^{-s}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-it(k_3^2 + (\frac{2\pi m}{\beta})^2 - K_0^2)} \quad (23)$$

on fent servir la fórmula

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-iam^2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i\frac{\pi m^2}{a}} \right) \quad (24)$$

;  $a > 0$

podem separar les contribucions de  $T=0$  i  $T > 0$

$$I = I_1 + I_2$$

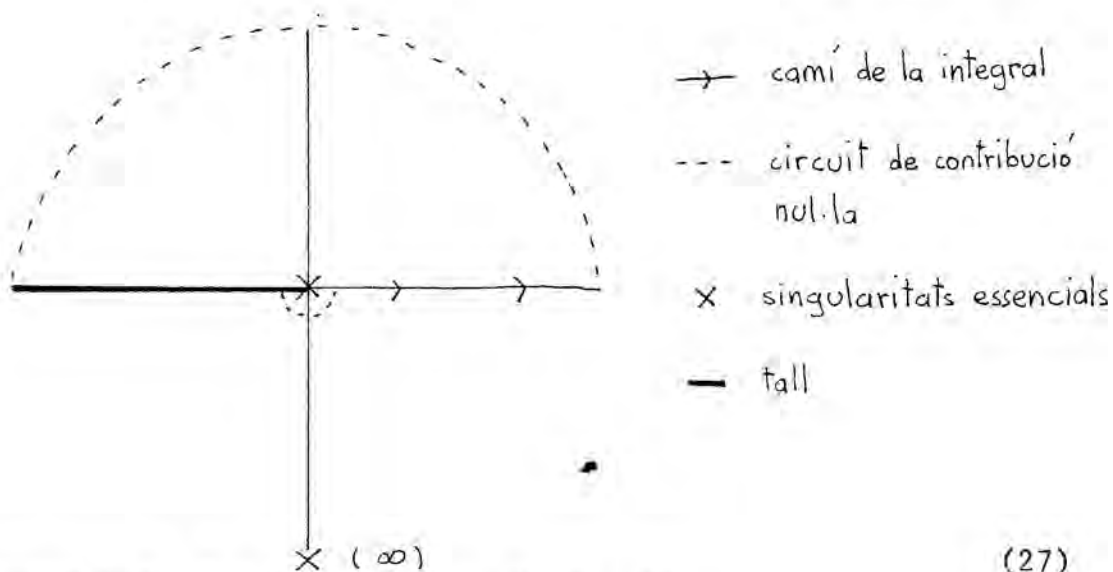
$$I_1 = (-i)^{-s} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{(-i)}{4\pi} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} e^{iK_0^2 t}$$

$$I_2 = (-i)^{-s} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{(-i)}{4\pi} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} e^{iK_0^2 t} 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i\frac{\beta^2 m^2}{4t}} \quad (25)$$

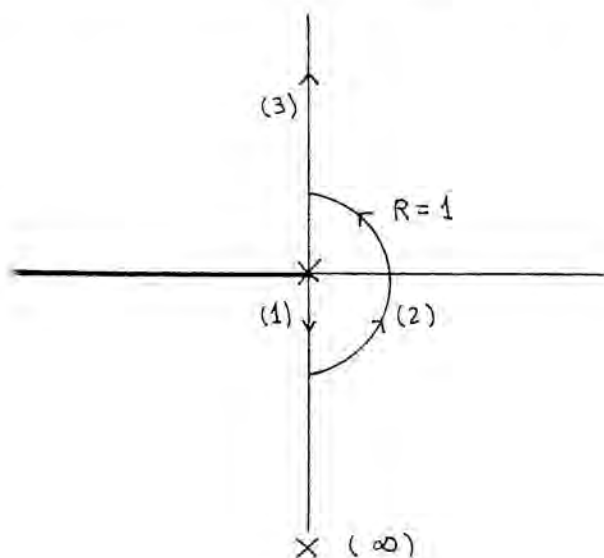
$I_1$  és fàcilment calculable, i dóna lloc, entre altres contribucions a la part imaginària a  $T=0$

$$\text{Im}(\text{def}) \Big|_{T=0} = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{N}(gB)^2 \quad (26)$$

$I_2$ , du tota la dependència en  $T$ , i és força més difícil de calcular a causa de la seva estructura al pla complex



per tal de fer-ho prendrem el circuit



podent escriure al final (per detalls veure l'apèndix I)

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{21} + \bar{I}_{22} + \bar{I}_{23}$$

$$\bar{I}_{21} = \frac{(-i)^{-s}}{\Gamma(s)} \frac{(-i)}{4\pi} (-i)^{s-1} 2 \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_0^1 dx x^{s-2} e^{\beta\sqrt{k_{a'}} \frac{m}{2} (x - \frac{1}{x})}$$

$$\bar{I}_{22} = \frac{(-i)^{-s}}{\Gamma(s)} \frac{(-i)}{4\pi} (-i)^{s-1} 2 \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i d\theta e^{i\theta(s-1) + i\beta\sqrt{k_{a'}} m \cos\theta}$$

(29)

$$\bar{I}_{23} = \frac{(-i)^{-s}}{\Gamma(s)} \frac{(-i)}{4\pi} (i)^{s-1} 2 \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_1^{\infty} dx x^{s-2} e^{-\beta\sqrt{k_{a'}} \frac{m}{2} (x - \frac{1}{x})}$$

La contribució imaginària dependent de  $T$  és tota inclosa a  $\bar{I}_{22}$ . Sumada a (26) (veure l'apèndix I) dóna exactament el resultat obtingut abans de regularitzar (21). La contribució real és finalment

$$\text{Re}(d_{in}) = \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} - \frac{1}{4\pi^2\beta} |k_{a'}|^{3/2} \left[ F_3 \left( \frac{\beta\sqrt{k_{a'}}}{2} \right) - 2F_2 \left( \frac{\beta\sqrt{k_{a'}}}{2} \right) \right] \quad (30)$$

on

$$F_3(a) \equiv \int_0^1 dx \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \log \left(1 - \exp\left\{ a \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right\}\right) \quad (31)$$

$$F_2(a) \equiv \int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log |2 \sin(ax)|$$

#### VI.4. Acció efectiva per Y.M. pura

L'operador  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$ , un cop diagonalitzades les estructures de color i lorentz, dóna lloc a quatre operadors del tipus (5) on (de III.19)

$$M = 2Ka', 0, 0, -2Ka' \quad (32)$$

El darrer operador ( $M=-2Ka'$ ) du la contribució dels modus inestables per  $n=0$  que ha estat donada a (31). Els dos operadors amb  $M=0$  cancel·len exactament amb la contribució de  $-\bar{D}^2$ , si prenem pels ghosts condicions de contorn periòdiques, la qual cosa serà justificada a posteriori. Així, la contribució final de la Y.M. pura vindrà de  $M=2Ka', M=-2Ka'$  amb  $n > 0$  i de (31), sent la part dependent de  $T$  (de (16), (18) i (31))

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha_{\text{def}}^{\text{YM}}) \Big|_{T>0} &= - \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}^2-1} \frac{\kappa_{a'}^2}{4\pi^2} \left[ F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\kappa_{a'}\beta}{2}\right) + F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\kappa_{a'}\beta^2}{2}\right) \right] \\ &\quad - \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}^2-1} \frac{\kappa_{a'}^{3/2}}{4\pi^2\beta} \left[ F_3\left(\frac{\beta\sqrt{\kappa_{a'}}}{2}\right) - 2F_2\left(\frac{\beta\sqrt{\kappa_{a'}}}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Per veure si (33) desconfina a altes temperatures, necessitem desenvolupaments per  $\beta \rightarrow 0$  de  $F_1$ ,  $F_2$ , i  $F_3$ . Aquests estan fets a l'apèndix H i ací només llistem els resultats:

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &= \frac{\pi^4}{90} b^{-2} - \frac{\pi^2}{6} \left(a - \frac{1}{2}\right) b^{-1} + k_1(a) b^{-1/2} + k_2(a) \log b \\ &\quad + k_3(a) + O(b) \end{aligned}$$

$$k_1(a) \equiv \frac{\pi}{24} \frac{16a^2 - 12a + 1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} c_1(a)$$

$$k_2(a) \equiv \frac{1}{24} (6a^2 - 6a + 1)$$

$$\begin{aligned} k_3(a) &\equiv \left[ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{4} (\gamma + \log a) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_3 \right] \left(a^2 - a + \frac{1}{6}\right) \\ &\quad - \frac{a}{4} \left(\frac{3}{2}a - 1\right) - \frac{1}{2} c_4(a) \end{aligned}$$

$$C_1(a) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{-5/2} e^{-ax} \left( \frac{x}{1-e^{-x}} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right)$$

$$C_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dx x^{-1/2} e^{-\pi^2 m^2 x}$$

$$C_3 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x} e^{-\frac{m^2}{x}}$$

$$C_4(a) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{-3} e^{-ax} \left( \frac{x}{1-e^{-x}} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right) \quad (34)$$

$$F_2(a) = \log(a) + (-1 + 2\log 2) - \frac{1}{9} a^2 \log a + \frac{1}{9} \left( \frac{5}{6} - 2\log 2 \right) a^2 \\ + O(a^4 \log a)$$

$$F_3(a) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{a} + 2 \log a + 2(-1 + 2\log 2) + a \log a \\ + O(a)$$

Substituint aquests desenvolupaments a (33) obtenim

$$d_{ef}^{y.M.} \Big|_{T>0} = - \left[ \frac{\pi^2}{46} T^4 (\alpha^2 - 1) + \sum_{\alpha'=1}^{\alpha^2-1} \left( (K_1(\frac{3}{2}) + K_1(\frac{1}{2})) \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} K_{\alpha'}^{3/2} T \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{11}{12} \frac{K_{\alpha'}^2}{4\pi^2} \log \left( \frac{K_{\alpha'}}{2T^2} \right) \right) + de (gB)^2 \right] + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (35)$$

on afegint la contribució a  $T=0$  tenim (de III.34)

$$\begin{aligned}
 d_{\text{ef}}^{\text{YM}} = & -\frac{\pi^2}{45} T^4 (\mathcal{N}^2 - 1) + \frac{11}{12} \frac{\mathcal{N}}{4\pi^2} (g_B)^2 \log \frac{2T^2}{\mu^2} \\
 & + d_{\text{ef}}' (g_B)^2 - r \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}^2-1} \frac{k_{a'}^{3/2} \sqrt{2}}{4\pi^2} T + O\left(\frac{1}{T}\right)
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$r \equiv k_1\left(\frac{3}{2}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1.8 > 0$$

Fixem-nos primer que la contribució independent de  $g_B$  és la corresponent a  $\mathcal{N}^2-1$  bosons lliures com és desitjable. Això vol dir que efectivament s'havien de prendre condicions de contorn periòdiques pels ghost. A altes temperatures, el terme lineal en  $T$  dominarà el  $d_{\text{ef}}$  i com és negatiu implica que el mínim d'aquest sempre s'ateny a  $g_B \neq 0$ ; no obtenim doncs desconfinament per cap temperatura. Si no haguéssim considerat les contribucions que donen lloc a parts imaginàries, la qual cosa correspon exactament a excloure  $F_2$  a (33), apareix una contribució suplementària que resulta ser dominant a altes temperatures. Aquesta és

$$- \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}^2-1} \frac{\Omega k_{a'}^{3/2}}{4\pi^2} 2T \log \frac{\sqrt{k_{a'}}}{2T} \tag{37}$$

responsable de les transicions de fase fictícies trobades per [KA 81], [MR 81] i [PS 85].

### VI.5. Efectes dels quarks

Un cop vist que la Q.C.D. pura no dona lloc a cap transició de fase cal preguntar-nos si la introducció dels quarks canviarà qualitativament aquest fet.

La diagonalització respecte l'estructura de Dirac de l'operador  $\bar{D} + i m_K$ , dóna lloc (III.28) a dos operadors tipus (5) amb

$$M = -K_{a'} + m_K^2, \quad M = K_{a'} + m_K^2 \quad (38)$$

Tenint en compte això i que les condicions de contorn són ara antiperiòdiques (15) obtenim

$$\begin{aligned} \text{quarks} \Big|_{T>0} &= \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}} \frac{K_{a'}^2}{2\pi^2} \left[ 2F_1 \left( \frac{m_K^2}{2K_{a'}}, 2K_{a'}\beta^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - F_1 \left( \frac{m_K^2}{2K_{a'}}, \frac{K_{a'}\beta^2}{2} \right) + 2F_1 \left( 1 + \frac{m_K^2}{2K_{a'}}, 2K_{a'}\beta^2 \right) - F_1 \left( 1 + \frac{m_K^2}{2K_{a'}}, \frac{K_{a'}\beta^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Notem que  $F_1(0, b)$  és una funció ben definida (18), per tant no tindrem problemes al prendre  $M_K = 0$ . Per aquests quarks, el desenvolupament  $\beta \rightarrow 0$  dóna lloc a (34).

$$\begin{aligned} \text{quarks} \Big|_{T>0} &= -\frac{7\pi^2}{360} 2\mathcal{N} N_f' T^4 + \frac{N_f'}{4\pi^2} \sum_{a'=1}^{\mathcal{N}} \frac{S_{a'}^2 (gB)^3}{6} \log \left( \frac{gB |S_{a'}|}{T^2} \right) \\ &\quad + de'' \cdot (gB)^2 \end{aligned} \quad (40)$$

Al no haver-hi contribució lineal dominant en T, els quarks de massa nul·la no canvien qualitativament el comportament de la Y.M. pura. Pels quarks pesats farem servir la mateixa expansió (34), tenint en compte que  $C_1(a)$ ,  $C_4(a)$



tendeixen a zero si  $a \rightarrow \infty$  ( $a \sim \frac{m_k^2}{2Ka^4} \gg 1$ ), així

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ef}^{m_k \neq 0} \Big|_{T>0} &= -\frac{7\pi^2}{360} 2\alpha(N_f - N'_f) T^4 + \sum_{k=N'_f+1}^{N_f} \frac{m_k^2}{12} \alpha T^2 \\
 &+ \frac{\alpha}{144\pi^2} \sum_{k=N'_f+1}^{N_f} (g_B)^2 \log\left(\frac{m_k^2}{T^2}\right) \\
 &+ \frac{1}{8\pi^2} \sum_{k=N'_f+1}^{N_f} m_k^4 \log\left(\frac{m_k^2}{T^2}\right)
 \end{aligned} \tag{41}$$

no havent-hi tampoc cap terme lineal en  $T$  i per tant resta sense modificar el comportament bàsic de la  $\alpha_{ef}^{YM}$ . Podem concloure, doncs, que la introducció de quarks, tant de massa nul·la com pesats, no canvia el fet que  $L_{ef}$  sigui confinant a qualsevol  $T$ . El resultat final el podem escriure de (36), (40) i (41) i introduint els termes de  $T=0$  pels quarks

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ef} &= -\frac{\pi^2}{45} (\alpha^2 - 1) T^4 - 2\alpha N_f \frac{7\pi^2}{360} T^4 + \frac{\alpha}{12} T^2 \sum_{k=N'_f+1}^{N_f} m_k^2 \\
 &+ \sum_{k=N'_f+1}^{N_f} \frac{1}{8\pi^2} m_k^4 \log\left(\frac{m_k^2}{T^2}\right) + \text{des } (g_B)^2 \\
 &+ \frac{11\alpha - 2N_f}{96\pi^2} (g_B)^2 \log\left(\frac{T^2}{\mu^2}\right) - r \sum_{d=1}^{\alpha^2-1} \frac{\sqrt{2} |c_d|^{3/2}}{4\pi^2} T (g_B)^{3/2}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Cal comentar que tant els quarks de massa nul·la com els pesats tendeixen a disminuir l'energia del buit (fer-lo més confinant) a mida que augmenta la temperatura. Si hi hagués transició de fase, això voldria dir que tendirien a augmentar la temperatura de desconfinament, d'acord amb el que s'observa en el retícul [FR 84] .

Finalment cal també notar que la part imaginària (21) creix linealment en  $T$  per  $T \rightarrow \infty$  i no tendeix a desaparèixer com han argumentat [KA 81] ; la qual cosa vol dir que l'assaig cromomagnètic no millora en absolut al augmentar la temperatura.

## VII. RESULTAT EXACTE A TEMPERATURA FINITA

### VII.1 Introducció

En el capítol anterior hem vist que, en l'aproximació a un loop, el confinament es mantenia per qualsevol temperatura contràriament al que hom creu que succeix en realitat. Aleshores, cal preguntar-nos si aquest resultat a un loop seguirà valent a tot ordre, com passava amb l'obtingut per temperatura zero, o canviarà al tenir en compte més contribucions de la integral funcional.

Recordem que a  $T=0$ , l'acció efectiva podia ser trobada de forma exacta a causa que (bàsicament):

- i) Només existia un paràmetre ( $g_B$ )
- ii) La particular estructura de la integral funcional permetia de factoritzar-lo

Considerar els efectes de la temperatura introdueix un nou paràmetre ( $T$ ) i, per tant, no podem esperar un resultat anàleg al cas  $T=0$  ja que i) no es compleix. Malgrat això, la particular estructura que permetia la factorització (ii) en aquell cas, es manté i, encara que no podrem factoritzar tota la dependència en  $g_B$  i  $T$ , possiblement podrem fer-ho per alguna combinació d'ells. Això ens donarà relacions entre funcionals generadors (funcions de partició) que ens permetran d'obtenir informació sobre l'acció efectiva exacta.

VII.2 Estructura

Les funcions pròpies de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  a  $T \neq 0$  (de (III.20') i (VI.7)) són

$$\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; m\kappa_3\varphi n) = (W^a)^{a'} (V_\mu)_{\mu'} \frac{(\kappa_{a'})^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa_3\sqrt{\kappa_{a'}}x_3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{-i\frac{2\pi m}{\beta}x_0} \left(\frac{\kappa_{a'}}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2} e^{i\sqrt{\kappa_{a'}}\frac{x_1}{2}(\sqrt{\kappa_{a'}}x_2 + 2\varphi')}$$

$$e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\kappa_{a'}}x_2 + \varphi')^2} H_n(\sqrt{\kappa_{a'}}x_2 + \varphi') \quad (1)$$

i per tant fent els canvis funcionals

$$b_\mu^a(x) = \tilde{b}_\mu^a(\hat{x}) \quad ; \quad x_\mu = \frac{\hat{x}_\mu}{\sqrt{\beta B}} \quad (2)$$

$$\tilde{b}_\mu^a(x) = \sum_{a'} \sum_{\mu'} \int d\kappa_3 \sum_m \int d\varphi \sum_n \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; \kappa_3 m \varphi n) \psi_{\mu'}^{a'}(m\kappa_3 n \varphi)$$

tindrem als termes dins de la integral funcional:

per cada  $b_\mu^a(x)$  un factor  $\frac{(\beta B)^{3/4}}{\sqrt{\beta}}$

per cada  $\bar{D}_{\mu}^{ab}(x)$  un factor  $(gB)^{1/2}$ .

$$(3)$$

per cada  $\int d^4x$  un factor  $\frac{1}{(gB)^2}$

Així els diversos termes del langragià (veure (III.6)) mostraran una dependència en  $(gB)$  i  $\beta$  com a factors de la següent manera

terme d'ordre 2 (en  $b_{\mu}^a(x)$ )

$$\frac{1}{(gB)^2} \left( (gB)^{1/2} \right)^2 \left( \frac{(gB)^{3/4}}{\sqrt{\beta}} \right)^2 = (gB)^{1/2}$$

terme d'ordre 3 (en  $b_{\mu}^a(x)$ )

$$\frac{1}{(gB)^2} \left( (gB)^{1/2} \right) \left( \frac{(gB)^{3/4}}{\sqrt{\beta}} \right)^3 = \frac{(gB)^{3/4}}{\beta^{3/2}} \quad (4)$$

terme d'ordre 4 (en  $b_{\mu}^a(x)$ )

$$\frac{1}{(gB)^2} \cdot 1 \cdot \left( \frac{(gB)^{3/4}}{\sqrt{\beta}} \right)^4 = \frac{gB}{\beta^2}$$

la resta de la dependència en  $gB$  i  $\beta$  està en

$$\int_0^{\sqrt{gB}\beta} d\hat{x}_0 \quad ; \quad e^{-\frac{i2\pi m \hat{x}_0}{\beta \sqrt{gB}}} \quad (5)$$

Si assumim que les propietats dels determinants funcionals són les mateixes que les dels usuals (IV.9), és fàcil veure que la possible dependència en  $g_B$  i  $\beta$  provinent dels jacobians de (2) cancel·la, al igual que succeïa a temperatura zero.

### VII.3 Factorització

A causa de (5), resulta obvi que no podem factoritzar fora de la integral funcional tota la dependència en  $g_B$  i  $\beta$ . Podem, però, fer-ho per la dependència en  $g_B$  corresponent a  $T=0$ .

$$\Psi_{\mu'}^{a'}(mk_3 n \varphi) = \left( \frac{g_B}{\mu^2} \right)^{-1/2} \tilde{\Psi}_{\mu'}^{a'}(mk_3 n \varphi) \quad (6)$$

Un cop fet aquest canvi, tota la dependència en  $g_B$  i  $\beta$  són factors  $\beta \sqrt{g_B}$ . Si desfem els canvis funcionals (2) però ara amb  $g_B = \mu^2$  obtenim una fórmula per  $Z$  que és (veure (IV.18)):

$$Z(g_B, \beta, g_0) = \exp \left\{ -V\beta \frac{1}{2g_0^2} (g_B)^2 + V\beta \frac{1}{2g_0^2} \sqrt{g_B} \mu^3 - \frac{R}{2} \log \left( \frac{g_B}{\mu^2} \right) \right\} \\ Z(\mu^2, \beta \frac{\sqrt{g_B}}{\mu}, g_0) \quad (7)$$

on  $M$  és un paràmetre arbitrari,  $V$  el volum de l'espai i  $R$  el número de graus de llibertat dels camps gluònics. El primer i segon terme a l'exponencial tenem en compte que el terme d'ordre zero de  $Z$  no és dins de la integral funcional analitzada.

Fins ací, no hem considerat ni els ghost ni els fermions lleugers, no és difícil adonar-se, però, (en vista del capítol IV) que totes les coses dites fins ara valen en presència d'aquests camps, i que l'única cosa que cal per tenir-los en compte és subsistir a (7)

$$R \rightarrow R - 2R' - R'' \quad (8)$$

on  $R'$  són el número de graus de llibertat dels ghost i  $R''$  els de cada fermió lleuger ( $m_f=0$ ). Per altra banda, des de (VI.13) i (IV.13) hom dedueix immediatament que els números de graus de llibertat de tots els camps a  $T=0$  són els mateixos que a  $T=0$  llevat d'un canvi trivial

$$\Omega \rightarrow V\beta \quad (9)$$

on abans  $\Omega$  era el volum de l'espai-temps i ara es converteix en el volum de l'espai multiplicat per l'inversa de la temperatura. Per simplificar notació escriurem

$$R - 2R' - R'' \equiv \bar{b}_0 (g_B)^2 \beta V \quad ; \quad \bar{b}_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f' \right) \quad (10)$$

L'equació (7) ens diu fonamentalment que un canvi en  $g_B$  a  $Z$  pot ser compensat per un canvi en  $\beta$ . Cal advertir, però, que hom ha d'anar amb cura al tractar (7) ja que  $Z$  necessita normalització i renormalització per tenir sentit físic. Nosaltres considerarem

$$e^{-\beta V(g_B, \beta, g_0)} \equiv \frac{Z(g_B, \beta, g_0)}{Z(0, \beta, g_0)} \quad (11)$$

on  $V$  no correspon exactament al  $L_{ef}$  introduït al capítol anterior, sinó que

$$V(g_B, \beta, g_0) = \text{def } (g_B, \beta, g_0) - \text{def } (0, \beta, g_0) \quad (12)$$

#### VII.4 Desconfinament

El següent pas a fer és deduir a partir de (7) si a altes temperatures la teoria desconfina o no. Un possible camí és cercar una expressió de (7) en forma d'equació diferencial i intentar de resoldre-la. Malgrat que això és factible amb no massa dificultat, les expressions finals no donen prou informació com per esbrinar que succeeix realment. Un exemple és (resultat no renormalitzat)

$$V(g_B, \beta, g_0) = \frac{1}{2g_0^2} (g_B)^2 + \bar{b}_0 (g_B)^2 \log\left(\frac{T}{T_0}\right) + T_0^3 (g_B)^{3/2} f\left(\frac{g_B}{T^2}, g_0\right) \quad (13)$$



on  $f$  es una funció completament arbitrària. ( $T_0$  fa el paper de paràmetre regulatizador). (16) ha estat obtinguda a partir de (7) fent prèviament

$$\mathcal{M}^2 = gB \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \quad ; \quad \beta_0 \equiv \frac{1}{T_0} \quad (14)$$

El camí exitós ha estat, però, considerar (7) i fer

$$\mathcal{M}^2 = gB \left( \frac{T_0}{T} \right)^{2n} \quad ; \quad n \gg 1 \quad (15)$$

amb la qual cosa

$$Z(gB, \beta, g_0) = \exp \left\{ -V\beta \frac{1}{2g_0^2} (gB)^2 \left( 1 - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{3n/2} \right) \right. \\ \left. - V\beta b_0 \frac{(gB)^2}{2} \log \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2} \right\} \\ Z \left( gB \left( \frac{T_0}{T} \right)^n, \beta \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2}, g_0 \right) \quad (16)$$

Normalitzant segons (11) tenim

$$V(g_B, \beta, g_0) = \frac{1}{2g_0^2} (g_B)^2 \left( 1 - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{3n/2} \right) + b_0 \frac{(g_B)^2}{2} \log \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2} \\ + \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2} V \left( g_B \left( \frac{T_0}{T} \right)^n, \beta \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2}, g_0 \right) \quad (17)$$

Si prenem el límit  $T \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow 0$ ), a la banda dreta de (17) tindrem

$$\beta_{ef} \equiv \beta \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2} \longrightarrow \infty \quad (18)$$

per tant podrem substituir  $V$  per la seva expressió a  $T=0$  (IV.29)

$$V \left( g_B \left( \frac{T_0}{T} \right)^n, \beta \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n/2}, g_0 \right) \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \bar{b}_0 (g_B \left( \frac{T_0}{T} \right)^n)^2 \log \frac{g_B \left( \frac{T_0}{T} \right)^n}{e^{1/\Lambda^2}} \rightarrow 0 \quad (19)$$

Així en el límit  $T \rightarrow \infty$  (17) esdevé

$$V(g_B, \beta, g_0) \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2g_0^2} (g_B)^2 + \bar{b}_0 \frac{(g_B)^2}{2} \frac{n}{2} \log \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (20)$$

que, al ser  $\bar{b}_0 > 0$ , té el mínim a  $g_B = 0$ , donant lloc a una fase desconfinant. Notem que al ser (20) una expressió finita no necessita renormalització (al igual que en el capítol III). To fa el paper de paràmetre regulador ( $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0(T_0)$ )

Així doncs, hem provat que la Q. C. D. desenvolupada en torn d'un camp cromomagnètic constant (amb les restriccions i validesa comentats al capítol IV) té una fase desconfinant a temperatures prou altes. Aquest resultat difereix del trobat a un loop. Realment el fet que la contribució imaginària fos dominant a altes temperatures feia sospitar que aquella aproximació no era prou significativa. En canvi a  $T=0$  la part imaginària no era dominant (ni a  $g_B \rightarrow 0$  ni a  $g_B \rightarrow \infty$ ), i al anar a tot ordre les característiques de l'aproximació a un loop es mantenien.

APÈNDIX A: DIAGONALITZACIÓ D'OPERADORS

Considerarem primer l'operador  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  en el cas cromomagnètic per  $\xi = 1$

$$\bar{A}_\mu^a = -\frac{1}{2} \bar{F}_{\sigma\delta} x_\delta n^a \quad ; \quad \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \equiv B \quad \text{resta de } \bar{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} = -\delta_{\mu\nu} (\bar{D}_\sigma \bar{D}_\sigma)^{ab} + 2i (T^c)^{ab} g \bar{F}_{\mu\nu}^c$$

$$\bar{D}_\sigma = \partial_\sigma - ig (T^c) \bar{A}_\sigma^c \quad ; \quad (T^c)^{ab} = -if^{cab} \quad (2)$$

l'estructura de color de (2) queda formalment diagonalitzada

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{a'} = -\delta_{\mu\nu} \left( \partial_\sigma + ig \frac{\nu_{a'}}{2} \bar{F}_{\sigma\delta} x_\delta \right)^2 + 2ig \nu_{a'} \bar{F}_{\mu\nu} \quad (3)$$

$\nu_{a'}$  són els valors propis de  $T^a n^a$  en la representació adjunta

L'estructura lorentz de (3) és la següent

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & iC & \\ & -iC & A & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

(4)

$$A \equiv - \left( \partial_\sigma + i g \frac{\nu_{\sigma'}}{2} \bar{F}_{\sigma\beta} x_\beta \right)^2$$

$$C \equiv 2g \nu_{\alpha'} B$$

sent els seus valors propis

$$\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'} = - \left( \partial_\sigma + i g \frac{\nu_{\sigma'}}{2} \bar{F}_{\sigma\beta} x_\beta \right)^2 + p_{\mu'}^{a'}$$

$$p_{0'}^{a'} = p_{3'}^{a'} = 0 \quad p_{1'}^{a'} = -p_{2'}^{a'} = 2g \nu_{\alpha'} B \quad (5)$$

explícitament  $\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'}$  esdevé

$$\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'} = -\partial_0^2 - \partial_3^2 - \left( \partial_1 + i g \frac{\nu_{\alpha'}}{2} B x_2 \right)^2 - \left( \partial_2 - i g \frac{\nu_{\alpha'}}{2} B x_1 \right)^2$$

(6)

Fixem-nos que la part depenent de  $x_0, x_3$  desacopla de la que depèn de  $x_1, x_2$ , sent els seus valors propis i funcions pròpies els corresponents a ones planes, per altre banda podem definir

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \partial_2 - ig \frac{\nu_a'}{2} B x_1 & \varphi_2 &\equiv \partial_1 - ig \frac{\nu_a'}{2} B x_2 \\ \pi_1 &\equiv \partial_1 + ig \frac{\nu_a'}{2} B x_2 & \pi_2 &\equiv \partial_2 + ig \frac{\nu_a'}{2} B x_1 \end{aligned} \quad (7)$$

complint

$$[\pi_i, \varphi_i] = -ig \nu_a' B \quad (\text{resta de commutadors zero}) \quad (8)$$

i per tant admeten la representació

$$\pi_i = -ig \nu_a' B \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

amb la qual cosa (6) esdevé un oscil·lador harmònic en  $\varphi_1$

$$\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'} = -\partial_0^2 - \partial_3^2 - (g v_{a'} B)^2 \frac{\delta^2}{\delta \varphi_1^2} - \varphi_1^2 + p_{\mu'}^{a'} \quad (10)$$

tenint com espectre

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(k_0, k_3, n\varphi) = k_0^2 + k_3^2 + 2|g v_{a'} B| \left(n + \frac{1}{2}\right) + p_{\mu'}^{a'} \quad (11)$$

Per trobar les funcions pròpies considerem primer

$$\varphi_1 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle = i \varphi_1 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

$$\varphi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle = i \varphi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

$$\left( \partial_2 - i g \frac{v_{a'}}{2} B x_1 \right) \langle x_1, x_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle = i \varphi_1 \langle x_1, x_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle \quad (12)$$

$$\left( \partial_2 + i g \frac{v_{a'}}{2} B x_1 \right) \langle x_1, x_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle = i \varphi_2 \langle x_1, x_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

que té com a solució normalitzada

$$\langle x_1 x_2 | \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \left( \frac{|g\lambda_0' B|}{2\pi} \right)^{1/2} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) \frac{x_2}{2}} \delta(g\lambda_0' B x_1 - \varphi_2 + \varphi_1) \quad (13)$$

Si caracteritzem per  $|n \varphi\rangle$  les funcions pròpies que donen lloc a la part provinent de  $x_1, x_2$  a (11) (Q caracteritza la degeneració) llavors

$$\langle n \varphi | \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \delta(\varphi - \varphi_2) \left( \frac{|g\lambda_0' B|}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\varphi_1 |g\lambda_0' B|) e^{-\frac{1}{2} \varphi_1^2 (g\lambda_0' B)^2} \quad (14)$$

i combinant amb (13)

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 | n \varphi \rangle &= \left( \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{|g\lambda_0' B|}}{\sqrt{2\pi}} H_n(\sqrt{|g\lambda_0' B|} x_2 + \varphi) \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\sqrt{|g\lambda_0' B|} x_2 + \varphi)^2 \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

d'on segueix el resultat final

$$\langle a_\mu x | a'_{\mu'} k_0 k_3 n \varphi \rangle \equiv \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; k_0 k_3 n \varphi) \quad (16)$$

$$\varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; k_0 k_3 n \varphi) = (V_\mu)_{\mu'} (W^a)^{a'} \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_0 x_0 + k_3 x_3)}$$

$$\cdot \langle x_1 x_2 | n \varphi \rangle$$



$(V_{\mu})_{\mu'}$  és la matriu de canvi de base que diagonalitza (4) i  $(W^a)^{a'}$  la que ho fa en (3)

Pel cas auto-dual

$$\bar{F}_{03} = -\bar{F}_{30} = \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \equiv B \quad (18)$$

la diagonalització de l'estructura de color és idèntica a (3). L'estructura lorentz és però un xic diferent.

$$\begin{pmatrix} A & & & iC \\ & A & iC & \\ & -iC & A & \\ -iC & & & A \end{pmatrix} \quad (19)$$

sent els seus valors propis

$$\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'} = -\left(\partial_{\sigma} + ig \frac{\nu_{\sigma'}}{2} \bar{F}_{\sigma\tau} x_{\tau}\right)^2 + p_{\mu'}^{a'}$$

$$p_{0'}^{a'} = p_{1'}^{a'} \Rightarrow p_{2'}^{a'} = -p_{3'}^{a'} = 2\nu_{\sigma'} g B \quad (20)$$

explícitament  $\bar{\Theta}_{\mu'}^{a'}$  esdevé ara

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{\mu'}^{a'} = & - \left( \partial_0 + i g \frac{\nu_{a'}}{2} B x_3 \right)^2 - \left( \partial_3 - i g \frac{\nu_{a'}}{2} B x_0 \right)^2 \\ & - \left( \partial_1 + i g \frac{\nu_{a'}}{2} B x_2 \right)^2 - \left( \partial_2 - i g \frac{\nu_{a'}}{2} B x_1 \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

on  $x_0, x_3$  i  $x_1, x_2$  estan desacoplats, amb la qual cosa seguint els passos (7-15) per cada parell de variables s'obté que els valors propis són

$$\lambda_{\mu'}^{a'}(nm\varphi\varphi') = (2n+2m+2) |g\nu_{a'}B| + \rho_{\mu'}^{a'} \quad (22)$$

$$; n, m = 0, 1, 2, \dots$$

i les funcions pròpies

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\mu'}^{aa'}(x; nm\varphi\varphi') = & \frac{|g\nu_{a'}B|}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2^m m!} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2^n n!} \right)^{1/2} \\ & \cdot e^{i\sqrt{|g\nu_{a'}B|} \frac{x_0}{2} (\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_3 + 2\varphi) - \frac{1}{2} (\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_3 + \varphi)^2} \\ & \cdot e^{i\sqrt{|g\nu_{a'}B|} \frac{x_1}{2} (\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_2 + 2\varphi') - \frac{1}{2} (\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_2 + \varphi')^2} \\ & H_n(\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_3 + \varphi) \cdot H_m(\sqrt{|g\nu_{a'}B|} x_2 + \varphi') \cdot (V_{\mu})_{\mu'} \cdot (W^a)^{a'} \end{aligned}$$

on  $(V_{\mu})_{\mu'}$  és la matriu de canvi de base que diagonalitza (19) i  $(W^{\alpha})^{\alpha'}$  la mateixa que a (16).

La diagonalització de  $-\bar{D}^2$ , així com la de  $-\bar{D}^2 + m_k^2 \pm g_B(T^a n^a)$  és immediata a partir del que hem fet.

Considerem a continuació l'operador  $\bar{D} + im_k$  en la seva estructura de matrius de Dirac. Si  $\lambda$  és un valor propi de  $\bar{D} + im_k$ , llavors  $\lambda - 2im_k$  ho és de  $\bar{D} - im_k$  i més a més

$$(\bar{D} + im_k)(\bar{D} - im_k) = \bar{D}\bar{D} + m_k^2 = -\bar{D}^2 \quad (24)$$

amb la qual cosa

$$\lambda(\lambda - 2im_k) = \text{valor propi} \left( -\bar{D}^2 - i\frac{g}{2}(T^c)\bar{F}_{\mu\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + m_k^2 \right) \quad (25)$$

En el cas cromomagnètic tindrem

$$\gamma_1\gamma_2 = i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

donant lloc a

$$\lambda(\lambda - 2m_K) = -\bar{D}^2 + m_K^2 + \alpha_j g_B(T^a n^a)$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = 1$$

(27)

$$\lambda = im_K \pm \left( -\bar{D}^2 + \alpha_j g_B(T^a n^a) \right)^{1/2}$$

i per tant

$$\det(\bar{D} + im) = \prod_j \lambda = \det(-\bar{D}^2 + m_K^2 - 2g_B(T^a n^a)) \cdot \det(-\bar{D}^2 + m_K^2 + 2g_B(T^a n^a))$$

(28)

En el cas autodual hi haurà més a més de (26)

$$\gamma_0 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

que dona lloc

$$\lambda(\lambda - 2im_K) = -\bar{D}^2 + m_K^2 + 2\alpha_j g_B(T^a n^a)$$

on  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$        $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$

(29)

$$\lambda = im_K \pm \left( -\bar{D}^2 + 2\alpha_j g_B(T^a n^a) \right)$$

quedant finalment

$$\det(\bar{D} + im_k) = \prod_j \lambda = \left[ \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 + 2gB(\tau^0 n^a)) \cdot \det(-\bar{D}^2 + m_k^2 - 2gB(\tau^0 n^a)) \right]^{1/2} \det(-\bar{D}^2 + m_k^2) \quad (30)$$

on les arrels quadrades apareixen a causa que (28) dona lloc a 8  $\lambda$  i només en volem el producte de quatre (per dimensions).

Apèndix B. REGULARITZACIÓ  $\zeta$ 

Donat un operador lineal  $\hat{O}$ , definit positiu, que actua sobre un espai de Hilbert de funcions, hom pot definir la funció  $\zeta_{\hat{O}}(s)$  de la següent manera

$$\zeta_{\hat{O}}(s) \equiv \text{tr}(\hat{O}^{-s}) \quad (1)$$

Fixem-nos primer que

$$\zeta_{\hat{O}}(0) = \text{tr}(\mathbb{I}) \quad (2)$$

la qual cosa suggereix anomenar  $\zeta_{\hat{O}}(0)$  dimensió generalitzada de l'operador  $\hat{O}$

Per altra banda, formalment tenim

$$\det \hat{O} = e^{\text{tr} \log \hat{O}} = e^{-\zeta'_{\hat{O}}(0)} \quad (3)$$

la qual cosa ens permet de calcular el determinant a través de  $\zeta_{\hat{O}}(s)$ .

El fet important és que hom pot demostrar [HA77] que per operadors definits positius,  $\zeta_{\hat{O}}(s)$  admet una prolongació analítica que la fa regular  $\forall s$  llevat  $s=1$  i  $s=2$  on té pols simples. Així doncs (2) i (3) donen lloc a una prescripció finita per calcular dimensions generalitzades i determinants d'operadors.

Calcularem  $\zeta_{\hat{O}}(s)$  de la següent manera: sigui  $|x\rangle$  la base que caracteritza l'espai temps, índex Lorentz, de color o de Dirac, i  $|n\rangle$  la base de vectors propis de  $\hat{O}$  amb  $\lambda_n$  com a valors propis.

$$\begin{aligned}\zeta_{\hat{O}}(s) &= \int d^4x \langle x | \hat{O}^{-s} | x \rangle = \int d^4x \langle x | \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t\hat{O}} | x \rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_n \int d^4x |\langle x | n \rangle|^2 e^{-t\lambda_n}\end{aligned}\quad (4)$$

(En els casos considerats a la tesi, la suma sobre part del números quàntics  $n$  dona lloc a una independència d' $x$  de  $|\langle x | n \rangle|^2$ , obtenint un factor  $\int d^4x \equiv \Omega$  global)

Com a exemple trivial podem considerar

$$\hat{O} = -\square + m^2$$

$$|n\rangle \equiv |k\rangle \quad ; \quad \langle x | k \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-ikx}\quad (5)$$

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k - k')$$

Tenim

$$|\langle x | k \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \quad ; \quad \lambda_n = k^2 + m^2 \quad k \in \mathbb{R}\quad (6)$$

que substituït a (4) dona

$$\zeta_{\hat{O}}(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t(k^2+m^2)} = \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\hat{O}}(s) &= \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-3} e^{-tm^2} \\ &= \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \pi^2 (m^2)^{2-s} \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} = \frac{\Omega m^4}{16 \pi^2} \frac{m^{-2s}}{(s-1)(s-2)} \end{aligned} \quad (7)$$

d'on fàcilment traiem

$$\zeta_{\hat{O}}(0) = \frac{\Omega m^4}{32 \pi^2}, \quad \det \hat{O} = (m^2)^{\frac{\Omega m^4}{32 \pi^2}} e^{-\frac{3}{2} \frac{\Omega m^4}{32 \pi^2}} \quad (8)$$

Notis que a (7) són explícits els pols a  $S=1$ ,  $S=2$  i que les dimensions del determinat a (8) són coherents amb  $\zeta_{\hat{O}}(0)$ . Normalment, però, estem interessats en

$$\log \det \hat{O} = \frac{\Omega m^4}{32 \pi^2} \left( -\frac{3}{2} + \log m^2 \right) \quad (9)$$

i volem un log adimensional. Això s'aconsegueix considerant

$$\hat{O} = \frac{-\square + m^2}{M^2} \quad (10)$$

$M^2$  arbitrari o; altrament, renormalitzant el resultat final de la teoria.

Considerem seguidament l'operador típic a regularitzar en



el cas cromomagnètic (III.23).

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\hat{O}}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dK_0 dK_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t \frac{(K_0^2 + K_3^2 + (2n+1)K_{a'} + M)}{M^2}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{M^2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} \frac{\pi e^{-t \left( \frac{M + K_{a'}}{M^2} \right)}}{(1 - e^{-\frac{2K_{a'}t}{M^2}})} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{M^2}{\Gamma(s)} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^{s-1} \int_0^{\infty} dt t^{s-2} \frac{e^{-t \left( \frac{1}{2} + \frac{M}{2K_{a'}} \right)}}{(1 - e^{-t})} \quad (11) \\
 &= \frac{M^2}{4\pi} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^{s-1} \zeta \left( s-1, \frac{1}{2} + \frac{M}{2K_{a'}} \right) \cdot \frac{1}{s-1}
 \end{aligned}$$

on  $\zeta(\nu, q)$  és la funció  $\zeta$  de Riemann generalitzada [MO66]

Pel cas autodual (III. 41) en  $D$  dimensions (així el càlcul il.lustrarà alhora el capítol V) apareix

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\hat{O}}(s) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \int \frac{d^{D-4}k}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t \left( \frac{(2n+2m+2)K_{a'} + \sum_{i=4}^D k^2 + M}{M^2} \right)} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{D-4}} \frac{M^{D-4}}{\Gamma(s)} \pi^{\frac{D-4}{2}} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} t^{-\frac{D+4}{2}} \frac{e^{-t \left( \frac{2K_{a'} + M}{M^2} \right)}}{(1 - e^{-\frac{2K_{a'}t}{M^2}})^2} \\
 &= \frac{\pi^{\frac{D-4}{2}}}{(2\pi)^{D-4}} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^{s - \frac{D-4}{2}} \frac{M^{D-4}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1 - \frac{D-4}{2}} \frac{e^{-t \left( 1 + \frac{M}{2K_{a'}} \right)}}{(1 - e^{-t})^2} = \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\zeta_{\delta}^{\circ}(s) = \frac{\pi^{\frac{D-4}{2}} M^{D-4}}{(2\pi)^{D-4}} \left( \frac{M^2}{2K_{a'}} \right)^{s - \frac{D-4}{2}} \left[ \zeta\left(s-1 - \frac{D-4}{2}, \frac{M}{2K_{a'}} + 1\right) - \frac{M}{2K_{a'}} \zeta\left(s - \frac{D-4}{2}, \frac{M}{2K_{a'}} + 1\right) \right]$$

on a l'últim pas s'ha usat un resultat de les taules GH75

Si fem  $D=4$  a (12), obtenim els resultats necessaris al capítol III i si fem  $S=0$  obtenim els necessaris pel capítol V. Recordem finalment que

$$\zeta(s-1, q) - q \zeta(s, q) = \zeta(s-1, q+1) - q \zeta(s, q+1) \quad (13)$$

(Veure l'apèndix C)

APÈNDIX C. PROPIETATS DE  $\zeta(\nu, q)$

Aquest apèndix és un resum de les principals propietats de la funció  $\zeta$  de Riemann generalitzada [MO66], així com dels seus desenvolupaments, usats al llarg de la tesi.

$\zeta(\nu, q)$  està definida

$$\zeta(\nu, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)^{-\nu} \quad ; \quad \nu > 1 \quad ; \quad q \neq -1, -2, -3, \dots \quad (1)$$

i es pot expressar fàcilment com

$$\zeta(\nu, q) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} \frac{e^{-qt}}{(1-e^{-t})} \quad ; \quad q > 0 \quad (2)$$

admetent una prolongació analítica que la fa regular  $\forall \nu$ , llevat  $\nu=1$  on té un pol simple.

De (1) es dedueix trivialment

$$\zeta(\nu, q+1) = \zeta(\nu, q) - q^{-\nu} \quad (3)$$

i per tant

$$\zeta'(\nu, q+1) = \zeta'(\nu, q) + q^{-\nu} \log q$$

$$\zeta(\nu-1, q) - q \zeta(\nu, q) = \zeta(\nu-1, q+1) - q \zeta(\nu, q+1) \quad (4)$$

Per  $\nu=0, -1, -2, \dots$ ,  $\zeta(\nu, q)$  es pot expressar en termes dels polinomis de Bernoulli

$$\zeta(-n, q) = - \frac{B_{n+1}(q)}{n+1} \quad (5)$$

fem servir particularment

$$\zeta(-1, q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{12}$$

$$\zeta(0, q) = -q + \frac{1}{2} \quad (6)$$

Per tal d'obtenir desenvolupaments a grans i petites  $q$ , és útil la representació

$$\zeta(\nu, q) = \frac{1}{2}q^{-\nu} + \frac{q^{1-\nu}}{\nu-1} + 2 \int_0^{\infty} (q^2+t^2)^{-\nu/2} \sin(\nu \tan^{-1}(\frac{t}{q})) \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \quad (7)$$

$$; \operatorname{Re}(q) > 0 \quad \nu \neq 1$$

D'ací, per  $q \gg 1$ , s'obté

$$\zeta'(0, q) = (q - \frac{1}{2}) \log q - q + \frac{1}{12q} + O(q^{-3})$$

i [EL84]

$$\zeta'(-1, q) = -\frac{1}{2} q \log q - \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{2} q^2 \log q + \frac{1}{12} \log q + \frac{1}{12} + O(q^{-2}) \quad (9)$$

també de (7) per  $q \ll 1$  tenim [SO85]

$$\zeta'(0, q) = -\log q - \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(q \log q)$$

$$\zeta'(-1, q) = K - q \log q - \frac{q}{2} (\log(2\pi) - 1) + O(q^2 \log q)$$

;  $K \in \mathbb{R}$ 

(10)

## APÈNDIX D. PARTS IMAGINÀRIES

A causa que la configuració cromomagnètica constant no minimitza totalment l'acció clàssica euclídia (existeixen valors propis de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  euclidi negatius), en el càlcul del langrangia efectiu per a aquesta configuració apareix una part imaginària, havent-hi certa controvèrsia a la literatura respecte el valor i sobretot respecte el seu signe [SG 82] [NO 78] [YC 80].

Per a analitzar amb cura l'arrel del problema, considerem l'acció efectiva a un loop de la Q.C.D. p r a a l'espai de Minkowski

$$e^{i\Gamma(\bar{A})} = e^{iS(\bar{A})} \Delta_{FP}(\bar{A}) \int d[b_{\mu}^a(x)] \exp\left\{\frac{i}{2} \int d^4x b^{a\mu} \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} b^{b\nu}\right\} \quad (1)$$

$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  és un operador autoadjunt, per tant de valors propis reals, que treballant en el background field gauge ( $\xi=1$ ) esdevé

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} = -(g_{\mu\nu} \bar{D}^2 - 2ig\bar{F}_{\mu\nu})^{ab} \quad (2)$$

i que dóna lloc a un exponent imaginari pur a (1); això fa que la integral funcional sigui oscil.lant. Per a solventar aquest problem hom pot pensar en canviar  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \rightarrow \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} + i\varepsilon$  però si hom ho vol fer d'una manera covariant senzilla hom haurà d'escriure

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \longrightarrow \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} + ig_{\mu\nu} \delta^{ab} \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0 \quad (3)$$

que tampoc fa convergent la integral en totes les direccions ( $g_{00} = -1$ ). La solució standard consisteix a passar a l'espai euclidi, fent

$$d^4x \longrightarrow -i d^4x$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow -\delta_{\mu\nu}$$
(4)

amb la qual cosa

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \longrightarrow \bar{\Theta}_{\mu\nu E}^{ab} = (-\delta_{\mu\nu} \bar{D}^2 + 2i \bar{F}_{\mu\nu})^{ab}$$
(5)

Si tots els valors propis de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu E}^{ab}$  són positius la integral (1) queda perfectament definida, i hom assumeix que podrà recuperar l'expressió minkowskiana al final dels càlculs fent la transformació inversa de (4) (postulat euclidi)

$$d^4x \longrightarrow i d^4x$$

$$\delta_{\mu\nu} \longrightarrow -g_{\mu\nu}$$
(6)

si algun dels valors propis és negatiu o nul, però, (1) resta encara mal definida. Si malgrat això, volem calcular-la formalment

$$e^{-\Gamma(\bar{A})} = e^{-S(\bar{A})} \Delta_{FP}(\bar{A}) [\det(\bar{O}_{\mu\nu}^{ab})]^{-1/2} \quad (7)$$

el postulat euclidi no ens dóna cap guia per a trobar el signe de la part imaginària que apareixerà. Cal prendre doncs un criteri adicional. El que elegirem està basat en l'estructura del propagador lliure i és conseqüència del fet que els gluons lliures es propaguen correctament (causalment). El propagador lliure per una teoria de Y.M. és [PT84]

$$\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y))|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4K \frac{-g_{\mu\nu}}{K^2+i\eta} e^{-ik(x-y)} \delta^{ab} \quad (8)$$

$$; \eta > 0 \quad \eta \rightarrow 0$$

i com que

$$\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y))|0\rangle = i^2 \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta Z(J)}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)} \Big|_{J=0} \quad (9)$$

(Z(J)) lliure

el terme  $i\eta$  es pot implementar afegint al lagrangià

$$-i\eta A_\mu^a(x)A^{\mu a}(x)$$



Aquest terme serà el que ens donarà el signe de la part imaginària. A l'espai de Minkowski implicarà

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \longrightarrow \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ub} + i\varepsilon g_{\mu\nu} \delta^{ab} \quad (11)$$

i a l'euclidi

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu E}^{ab} \longrightarrow \bar{\Theta}_{\mu\nu E}^{ab} - i\varepsilon \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \quad (12)$$

la qual cosa indica que hem d'afegir  $-i\varepsilon$  als valors propis de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  quan hi hagi una part imaginària.

Un cop fixat el signe convé comentar que una regularització grollera pot introduir noves parts imaginàries. Aquest fet no es pot admetre ja que les contribucions a les parts imaginàries provenen sempre dels autovalors més baixos del espectre (de  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$ ), és a dir, de la zona infraroja que no té res a veure amb la regularització, que és un problema ultravioleta (valors propis alts). Així doncs per assegurar-nos que la part imaginària és correcta hem de calcular-la abans de regularitzar.

Així, per exemple, pel  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  del cas cromomagnètic tindriem

$$\begin{aligned} \text{Im} \left( \frac{1}{2} \text{tr} \log \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} \text{Im} \left\{ \frac{|g_{\nu\alpha'} B|}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk_0 dk_3 \log(k_0^2 + k_3^2 - |g_{\nu\alpha'} B| - i\varepsilon) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} \frac{|g_{\nu\alpha'} B|}{(2\pi)^2} \int_0^{\sqrt{|g_{\nu\alpha'} B|}} dk k (-\pi) = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{N} (g_B)^2 \end{aligned}$$

Per altra banda amb la regularització  $\zeta$  usada (III. 32) tenim

$$\text{Im}(\text{def}) = \frac{\mathcal{N}}{8\pi^2} (gB)^2 \text{Im} \left\{ \zeta' \left( -1, -\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \right\} \quad (14)$$

sabem més a més (veure l'apèndix C)

$$\zeta'(\nu, q) = \zeta'(\nu, q+1) - q^{-\nu} \log q$$

$$\zeta'(\nu, q) \in \mathbb{R} \quad \text{si } \nu \in \mathbb{R} \text{ i } q \in \mathbb{R}^+ \quad (15)$$

per tant

$$\text{Im} \left\{ \zeta' \left( -1, -\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2} \log \left( -\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \right\} = -\frac{\pi}{2} \quad (16)$$

i finalment

$$\text{Im}(\text{def}) = -\frac{\mathcal{N}}{16\pi^2} (gB)^2 \quad (17)$$

donant el mateix resultat que (13), la qual cosa vol dir que la regularització  $\zeta$  és una regularització correcta (no introdueix parts imaginàries noves).

Alguns autors interpreten les parts imaginàries com inestabilitats del buit format per les configuracions en què hi apareixen. És una filosofia diferent a la que du la tesi, però potser sigui valuós comentar-la ací. Pensem primer en l'electrodinàmica: la teoria quàntica es planteja desenvolupant el lagrangianà entorn  $\bar{A}_\mu = 0$  i les funcions pròpies de l'operador quadràtic són les que construeixen l'espai de Fock, anihilant les freqüències negatives el buit. A Q.E.D. això funciona molt bé perquè el buit de la teoria clàssica i el de la quàntica coincideixen. A la Q.C.D. hom creu que el buit de la teoria clàssica ( $\bar{A}_\mu = 0$ ) i el de la quàntica són diferents; s'ha intentat trobar solucions a les equacions de Y.M. amb camps  $\bar{A}_\mu^a \neq 0$  i construir l'espai de Fock sobre aquestes solucions. Una d'elles és el camp cromomagnètic constant, altrament dit estat de Savvidy, que com a configuració de buit té el greu problema de no ser invariant gauge ni Lorentz. Malgrat això, hom pot pensar que sense ser l'autèntic buit l'estat de Sawidy està entre el buit clàssic ( $\bar{A}_\mu^a = 0$ ) i el físic; una espècie d'estat metaestable la probabilitat de desintegració del qual ve donada per la part imaginària a (13) [SC82].

La línia de raonament de la tesi és diferent, i està motivada en el fet que la Q.F.T. només ens diu que la configuració del buit ha de complir

$$\frac{\delta \Gamma(\bar{A}_\mu)}{\delta \bar{A}_\mu^a(x)} = 0 \quad (18)$$

on  $\Gamma$  és l'acció efectiva sense esmentar res sobre si s'ha de complir o no

$$\frac{\delta S(\bar{A}_\mu^a)}{\delta \bar{A}_\mu^a(x)} = 0 \quad (19)$$

Aleshores per nosaltres l'objecte important a trobar és  $\Gamma$  sent les configuracions cromomagnètiques constants, només un instrument per treure informació sobre ella. Les parts imaginàries reflecteixen que no és un instrument prou bo a l'ordre d'un loop.

Finalment, cal advertir, que si volem calcular  $\Gamma(\bar{A})$  a un loop per un camp cromoelectric constant, els passos i resultats són idèntics al cas cromomagnètic a l'espai euclidi, però apareixen noves parts imaginàries al fer la prolongació analítica a l'espai de Minkowski. El signe d'aquestes parts imaginàries ve ara completament determinat pel postulat euclidi, sent la regla pràctica per a aconseguir el resultat minkowskià

$$E^2 \longrightarrow -E^2 + i\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(20)

APÈNDIX E. NÚMERO DE GRAUS DE LLIBERTAT DE  $\bar{\mathcal{D}} + im$

El número de graus de llibertat o dimensió generalitzada d'un operador està definit com

$$\zeta_{\bar{\mathcal{D}} + im}(s) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ (\bar{\mathcal{D}} + im)^{-\nu} \right\} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{\text{valors propis}} \lambda^{-\nu} \quad (1)$$

A l'apèndix A s'ha vist que els valors propis respecte l'estructura de Dirac es podien escriure com

$$\lambda = im \pm \left( -\bar{D}^2 + \alpha_j g_B(T^a n^a) \right)^{1/2} \quad (2)$$

on pel cas cromomagnètic

$$\alpha_0 = \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = 1 \quad (3)$$

i per l'autodual,

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0 \quad ; \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = 2 \quad (4)$$

Fixem-nos que al ser els valors propis de  $-\bar{D}^2$  (III.25) i (III.44) la quantitat dins de l'arrel quadrada serà sempre positiva. Així pel cas autodual podem escriure

$$\begin{aligned} \zeta_{\bar{D}+im}^{(0)} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{\text{v.p.}} \frac{1}{2} \left\{ 2(i\text{m} + (-\bar{D}^2)^{1/2})^{-\nu} + 2(i\text{m} - (-\bar{D}^2)^{1/2})^{-\nu} \right. \\ + (i\text{m} + (-\bar{D}^2 + 2gB(T^a n^a))^{1/2})^{-\nu} + (i\text{m} - (-\bar{D}^2 + 2gB(T^a n^a))^{1/2})^{-\nu} \\ + (i\text{m} + (-\bar{D}^2 - 2gB(T^a n^a))^{1/2})^{-\nu} \\ \left. + (i\text{m} - (-\bar{D}^2 - 2gB(T^a n^a))^{1/2})^{-\nu} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

i fent servir

$$(A + iB)^{-\nu} = (A^2 + B^2)^{-\nu/2} e^{-i\nu \arctg \frac{B}{A}}$$

$$(A + iB)^{-\nu} + (A - iB)^{-\nu} = (A^2 + B^2)^{-\nu/2} 2 \cos(\nu \arctg \frac{B}{A})$$

$$= 2(A^2 + B^2)^{-\nu/2} + O(\nu^2) \quad (6)$$

tenim

$$\begin{aligned} \zeta_{\bar{D}+im}^{(0)} = 2 \zeta_{-\bar{D}^2+m^2}^{(0)} + \zeta_{-\bar{D}^2+m^2+2gB(T^a n^a)}^{(0)} \\ + \zeta_{-\bar{D}^2+m^2-2gB(T^a n^a)}^{(0)} \end{aligned} \quad (7)$$

fòrmula anàloga a (III.47) que dóna finalment de (III.48)

$$\int_{\mathcal{D}+im}^{(0)} = \Omega \frac{(gB)^2}{12\pi^2} \quad (8)$$

Pel cas cromomagnètic, seguint passos semblants hom arriba a

$$\int_{\mathcal{D}+im}^{(0)} = 2 \int_{-\mathcal{D}^2+m^2+gB(\tau^a n^a)}^{(0)} + 2 \int_{-\mathcal{D}^2+m^2-gB(\tau^a n^a)}^{(0)} \quad (9)$$

anàleg també a (III.28).

APÈNDIX F. INDEPENDÈNCIA DEL PARÀMETRE DE GAUGE DEL NÚMERO DE GRAUS DE LLIBERTAT

Per a veure que efectivament el número de graus de llibertat gluònics  $R$  no depèn del paràmetre de gauge  $\xi$ , haurem de calcular

$$\begin{aligned}
 R &= \zeta_{\bar{0}}^{(0)} = \zeta_{-D^2 - 2F + (1 - 1/\xi) D \cdot D}^{(0)} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ [-D^2 - 2F + (1 - 1/\xi) D \cdot D]^{-s} \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

on hem fet servir la notació compacta

$$\begin{aligned}
 \langle \mu | D^2 | \nu \rangle &= D^2 \delta_{\mu\nu} \\
 \langle \mu | F | \nu \rangle &= F_{\mu\nu} = ig T^c F_{\mu\nu}^c \\
 \langle \mu | D \cdot D | \nu \rangle &= D_\mu D_\nu
 \end{aligned} \quad (2)$$

Usant la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{z+a} = \pi a^{s-1} \csc(\pi s) \quad ; \quad |\arg(a)| < \pi \quad (3)$$

(1) es pot escriure



$$R = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty dz z^{-s} \text{tr} \left\{ \frac{1}{-D^2 - 2F + (1-1/\xi)D \cdot D + Z} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty dz z^{-s} \sum_{a,b} \sum_{\mu,\nu} \int d^4x \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \lim_{Y \rightarrow X} \langle X a \mu |$$
(4)

$$\frac{1}{-D^2 - 2F + (1-1/\xi)D \cdot D + Z} | \nu b Y \rangle \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int d^4x \lim_{Y \rightarrow X} P(x, Y; z)$$

Fixem-nos que la quantitat entre  $\langle X a \mu |$  i  $| \nu b Y \rangle$  a (4) no és més que el propagador d'un camp vectorial massiu amb  $m^2 = z$  dels estudiats a [BL 78] per camps autoduals. Prenent el seu resultat

$$\frac{1}{-D^2 - 2F + (1-1/\xi)D \cdot D + Z} = \frac{1}{Z} \left\{ \frac{1}{-D^2 + Z} \right\} + \frac{1}{Z}$$

$$+ \frac{1}{Z} D \cdot \left( \frac{1}{-D^2 + Z} - \frac{1}{-D^2 + \xi Z} \right) \cdot D$$
(5)

on donat un operador  $\hat{O}$ ;  $\{\hat{O}\}$  està definit (per camps autoduals)

$$\langle \mu | \{\hat{O}\} | \nu \rangle \equiv ( \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} + \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} ) \cdot D_\lambda \hat{O} D_\kappa$$
(6)

Així de (4), (5) i (6) tindrem

$$P(x, Y; z) = \langle X a | \frac{4}{Z} D_\mu \frac{1}{-D^2 + Z} D_\mu + \frac{4}{Z} +$$

$$+ \frac{1}{Z} D_\mu \left( \frac{1}{-D^2 + \xi Z} - \frac{1}{-D^2 + Z} \right) D_\mu | b Y \rangle$$
(7)

i definit

$$\varphi(x, y; z) = \langle x a | D_{\mu} \frac{1}{-D^2 + z} D_{\mu} | y a \rangle \quad (8)$$

(4) quedarà

$$R = \lim_{s \rightarrow 0} \int d^4 x \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^{\infty} dz z^{-s-1} \left( 4 \varphi(x, y; z) + 4(\nu^2 - 1) \delta(x-y) + (\xi^s - 1) \varphi(x, y; z) \right) \quad (9)$$

on s'ha fet servir, que

$$\int_0^{\infty} \varphi(x, y; \xi z) z^{-s+1} dz = \xi^s \int_0^{\infty} dz z^{-s-1} \varphi(x, y; z) \quad (10)$$

Fixem-nos a (9) que la dependència en  $\xi$  està a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int d^4 x \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} (\xi^s - 1) \int_0^{\infty} dz z^{-s-1} \varphi(x, y; z) \quad (11)$$

Quan  $s \rightarrow 0$  (11) esdevé

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int d^4 x \lim_{y \rightarrow x} (s^2 \log \xi + O(s^3)) \int_0^{\infty} dz z^{-s-1} \varphi(x, y; z) \quad (12)$$

Així perquè hi hagi una dependència en  $\xi$  cal, almenys, que

$$\int_0^{\infty} dz z^{-s-1} \varphi(x, y; z) \underset{s \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (13)$$

però si això fos així, el primer terme de (9) seria divergent quan  $S \rightarrow 0$  contra arguments generals de finitud de  $\zeta_0^{(0)}$  [HA 77]. Així doncs (12) no depèn de  $\xi$  en el límit  $S \rightarrow 0$  que era el que volíem provar.

Una demostració més detallada comporta el càlcul del propagador escolar massiu ( $\langle x a | 1/(-D^2 + Z) | y b \rangle$ ), la seva expansió a curtes distàncies ( $y \rightarrow x$ ) i finalment fer les integracions en  $z$ . El camí és clar però llarg i pesat, i no creiem que valgui la pena exposar-lo ací amb detall. El resultat final per  $R$ , tal com hem provat breument abans, és exactament el mateix que prenent  $\xi = 1$  (o qualsevol altre).

APÈNDIX G. EQUIVALÈNCIA ENTRE EL FORMALISME MECÀNICO-ESTADÍSTIC I EL FUNCIONAL (Q.F.T.)

El punt de partida mecànic-estadístic [KA 81] de l'estudi d'un sistema de gluons a  $T \neq 0$  és :

$$Z = \prod_{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \exp [ -(m + \frac{1}{2}) \omega_{\alpha} / T ] \quad (1)$$

on  $Z$  és la funció de partició gran caònica d'un sistema de número indeterminat de partícules (de potencial químic zero) que no interaccionen entre elles i que ocupen els estats energètics  $\omega_{\alpha}$  d'un sistema hamiltonià  $H$ . A la fórmula usual s'hi ha afegit l'energia del punt zero (buit)  $\frac{1}{2}\omega_{\alpha}$ . El sumatori sobre  $m$  implica que pot haver tantes partícules com volguem en un mateix estat energètic  $\omega_{\alpha}$ , per tant (1) valdrà per bosons.

Si fem una teoria clàssica de camps,  $A_{\mu}^a(x)$  haurà de complir

$$D_{\mu}^{ab} F_{\mu\nu}^b = 0 \quad (2)$$

assajant

$$A_{\mu}^a(x) = - \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu} x_{\nu} n^a + b_{\mu}^a(x)$$

on  $\bar{F}_{\mu\nu}$  és l'habitual (III.15), (III.17') s'obté

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} b_{\nu}^b(x) + O(b^2) = 0 \quad (4)$$

on  $\bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab}$  és el de sempre ((III.7) amb  $\xi = 1$ ). Pel cas cromomagnètic (4) es pot escriure

$$(-\partial_0^2 + H^2(\vec{x}))_{\mu\nu}^{ab} b_{\nu}^b(x) = 0 + O(b^2) \quad (5)$$

on  $H$  fa el paper d'un hamiltonià els valors propis del qual ( $\omega_q$ ) es col.loquen a (1).

En el formalisme funcional (Q.F.T.) partim de

$$Z = e^{-\Gamma} \quad (6)$$

i a un loop tenim (oblidant la contribució clàssica)

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{tr} \log \bar{\Theta}_{\mu\nu}^{ab} \quad (7)$$

on  $\bar{\Theta}$  igual que a (4), (5)

$$\bar{\Theta} = -\partial_0^2 + H^2(\vec{x}) \quad (8)$$

considerem  $\omega_\alpha$  els valors propis d'H. De (7) tenim

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left( \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^2 + \omega_\alpha^2 \right) \quad (9)$$

regularitzant  $\zeta$  obtenim

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} - \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} e^{-t \left( \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^2 + \omega_\alpha^2 \right)} \Big|_{\nu=0} \quad (10)$$

on, fent servir (VI.11), podem separar

$$\Gamma = \Gamma(T=0) + \Gamma(T>0)$$

$$\Gamma(T=0) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left( - \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-3/2} e^{-t \omega_\alpha^2} \right) \Big|_{\nu=0}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left( - \frac{d}{d\nu} \frac{\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \omega_\alpha^{1-\nu} \right) \Big|_{\nu=0} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \omega_\alpha$$

$$\Gamma(T>0) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\beta} \left( - \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} \frac{\beta}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \beta^2}{4t}} \right) \Big|_{\nu=0} \quad (11)$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt t^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-t \omega_\alpha^2 - \frac{m^2 \beta^2}{4t}}$$

la última integral en (11) és a les taules usuals ;  
obtenim

$$\begin{aligned} \Gamma(T > 0) &= - \sum_{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\beta} e^{-\omega_{\alpha} m\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{\alpha} \log(1 - e^{-\omega_{\alpha}\beta}) \end{aligned} \quad (12)$$

i així finalment de (11) i (12)

$$\Gamma = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \omega_{\alpha} + \frac{1}{\beta} \log(1 - e^{-\omega_{\alpha}\beta}) \right) \quad (13)$$

fòrmula que per altra banda s'obté immediatament de (1) i (6), restant provada l'equivalència d'ambdues aproximacions

Per acabar només dos comentaris : notar primer que el que hem fet només és rigurosament vàlid si  $\omega_{\alpha}^2 > 0$  (la qual cosa no ocorre en els modus inestables). I segon, que en el formalisme (1) cal treure a mà els graus de llibertat longitudinals del gluó (no físics), metre que en el (7) venen compensats pel determinant de F.P.  $(-\text{tr} \log(-\bar{D}^2))$ .

APENDIX H. DESENVOLUPAMENTS PER  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$ ,

H.1,  $F_1$

Necessitem el desenvolupament de  $F_1(a, b)$  per  $b \rightarrow 0$

$$F_1(a, b) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^{-2} (1 - e^{-x})^{-1} \exp(-ax - bm^2/x) \quad (1)$$

Fent servir

$$x(1 - e^{-x})^{-1} e^{-ax} = 1 - (a - \frac{1}{2})x + \frac{1}{12}(6a^2 - 6a + 1)x^2 + \dots \quad (2)$$

podem escriure (1) com

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^b dx x^{-3} \exp(-\frac{bm^2}{x}) \left[ 1 - (a - \frac{1}{2})x + \frac{1}{12}(6a^2 - 6a + 1)x^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \\ &\quad + \int_b^{\infty} dx x^{-2} (1 - e^{-x})^{-1} e^{-ax} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi x}{b} \right)^{1/2} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\pi x}{b} \right)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 x}{b}\right) \right\} \\ &\equiv F_{11} + F_{12} \equiv F_{11} + F_{121} + F_{122} + F_{123} \end{aligned} \quad (3)$$



integrant per parts,  $F_{11}$  es pot escriure

$$F_{11}(a,b) = a_1 b^{-2} - a_2 (a - \frac{1}{2}) b^{-1} + \frac{c_3}{12} (6a^2 - 6a + 1) + O(b) \quad (4)$$

on

$$a_1 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} (m^{-2} + m^{-4}) e^{-m^2}$$

$$a_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} e^{-m^2} \quad (5)$$

$$c_3 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{m^2}{x}\right)$$

per  $F_{121}(a,b)$  tenim

$$\begin{aligned} F_{121}(a,b) &= -\frac{1}{2b^2} \int_1^{\infty} dx x^{-3} e^{-abx} \left(1 + \frac{bx}{2} + \frac{b^2 x^2}{12} - \frac{b^4 x^4}{30} + \dots\right) \\ &= -\frac{1}{4b^2} \left[1 - (2a-1)b + \left(\frac{3}{2}a^2 - a\right)b^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{24} (6a^2 - 6a + 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-abx} \quad (6) \\ &= -\frac{1}{2} \int_b^{\infty} dx x^{-3} e^{-ax} \left(\frac{x}{1-e^{-x}} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) \end{aligned}$$

on s'han dut a terme v\u00e0ries integracions per parts. Calcu-

l'ant un xic més obtenim

$$\begin{aligned}
 F_{121}(a, b) &= -\frac{1}{4} b^{-2} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right) b^{-1} + \frac{1}{24} (6a^2 - 6a - 1) \log b \\
 &\quad + \frac{1}{24} (6a^2 - 6a + 1) (\gamma + \log a) \\
 &\quad - \frac{a}{4} \left(\frac{3}{2} a - 1\right) - \frac{1}{2} C_4(a) + O(b)
 \end{aligned} \tag{7}$$

on  $\gamma$  és la constant d'Euler i

$$C_4(a) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{-3} e^{-ax} \left( \frac{x}{1-e^{-x}} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right) \tag{8}$$

Per  $F_{122}$  tenim

$$\begin{aligned}
 F_{122}(a, b) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2b^2} \int_1^{\infty} dx x^{-5/2} e^{-abx} \left( 1 + \frac{bx}{2} + \frac{b^2 x^2}{12} + \dots \right) \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2b^2} \left\{ \frac{2}{3} e^{-ab} - \left(\frac{4}{3} a - 1\right) e^{-ab} b \right. \\
 &\quad + \frac{b^2}{12} (16a^2 - 12a + 1) \int_1^{\infty} dx x^{-1/2} e^{-abx} \\
 &\quad \left. + \int_1^{\infty} dx x^{-5/2} e^{-abx} \left( \frac{bx}{1-e^{-bx}} - 1 - \frac{bx}{2} - \frac{b^2 x^2}{12} \right) \right\} \tag{9}
 \end{aligned}$$

d'on finalment

$$\begin{aligned}
 F_{122}(a, b) &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} b^{-2} - \sqrt{\pi} \left(a - \frac{1}{2}\right) b^{-1} + k_1(a) b^{-1/2} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{6} a(6a-3) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{12} (16a^2 - 12a + 1) + O(b)
 \end{aligned} \tag{10}$$

amb

$$\begin{aligned}
 k_1(a) &= \frac{\pi}{24} \frac{16a^2 - 12a + 1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} c_1(a) \\
 c_1(a) &= \int_0^{\infty} dx x^{-5/2} e^{-ax} \left( \frac{x}{1-e^{-x}} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

$F_{123}$ , és donada per

$$\begin{aligned}
 F_{123}(a, b) &= \frac{\sqrt{\pi}}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dx x^{-5/2} \exp(-\pi^2 m^2 x^2) \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 - \left(a - \frac{1}{2}\right) bx + \frac{1}{12} (6a^2 - 6a + 1) b^2 x^2 + \dots \right\} \\
 &= \sqrt{\pi} c_2 b^{-2} - \sqrt{\pi} \left(a - \frac{1}{2}\right) c_1 b^{-1} + \frac{\sqrt{\pi}}{12} (6a^2 - 6a + 1) c_0 \\
 &\quad + O(b)
 \end{aligned} \tag{12}$$

on

$$C_{-k} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dx x^{-k-1/2} \exp(-\pi^2 m^2 x) \quad (13)$$

per  $k=1,2$  s'obté

$$C_{-2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} - \frac{1}{3} + \frac{\pi^{7/2}}{90} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} (m^{-2} + m^{-4}) e^{-m^2}$$

$$C_{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - 1 + \frac{\pi^{3/2}}{6} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} e^{-m^2} \quad (14)$$

Ajuntant finalment (4), (7), (10) i (12), l'expressió final per  $F_1(a, b)$  quan  $b \rightarrow 0$  esdevé

$$F_1(a, b) = \frac{\pi^4}{90} b^{-2} - \frac{\pi^2}{6} (a - \frac{1}{2}) b^{-1} + k_1(a) b^{-1/2} + k_2(a) \log b + k_3(a) + O(b) \quad (15)$$

on

$$k_2(a) = \frac{1}{24} (6a^2 - 6a + 1)$$

$$k_3(a) = \left[ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{4} (\gamma + \log a) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_3 \right] (a^2 - a + \frac{1}{6}) - \frac{a}{4} \left( \frac{3}{2} a - 1 \right) - \frac{1}{2} c_4(a)$$

$$c_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dx x^{-1/2} \exp(-\pi^2 m^2 x) \quad (16)$$

$C_3, C_4(a)$  i  $K_1(a)$  són donades respectivament per (5), (8) i (11).

H.2.  $F_2(a)$  i  $F_3(a)$

Necessitem un desenvolupament de  $F_2(a)$  per  $a \rightarrow 0$

$$F_2(a) \equiv \int_0^1 dx x(1-x^2)^{-1/2} \log|2\sin(ax)| \quad (17)$$

desenvolupant el sinus i el logaritme obtenim

$$\begin{aligned} F_2(a) &= \int_0^1 dx x(1-x^2)^{-1/2} \log|2ax| - \frac{a^2}{6} \int_0^1 dx x^3(1-x^2)^{-1/2} \log|2ax| \\ &= \log a + (-1 + 2\log 2) - \frac{1}{9} a^2 \log a + \frac{1}{9} \left(\frac{5}{6} - 2\log 2\right) a^2 \\ &\quad + O(a^4 \log a) \end{aligned} \quad (18)$$

Considerem a continuació

$$F_3(a) = \int_0^1 dx (1-x^2) \log\left(1 - \exp\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)\right) \quad (19)$$

podem escriure

$$\begin{aligned} F_3(a) &= -\frac{1}{a} \int_0^\infty dy \frac{y}{\sqrt{y^2 + (2a)^2}} \log(1 - e^{-y}) \\ &= \int_0^{2a} + \int_{2a}^1 + \int_1^\infty \equiv F_{31} + F_{32} + F_{33} \end{aligned} \quad (20)$$

$F_{31}(a)$  es pot calcular immediatament expandint el log

$$F_{31}(a) = 2(1-\sqrt{2}) \log(2a) + 2[-1 + \sqrt{2} + \log 2 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)] \\ + [\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})] a + O(a^2)$$

a més a més

$$F_{32}(a) = -\frac{1}{a} \int_{2a}^1 dy \left[ \frac{y}{\sqrt{y^2+(2a)^2}} - 1 + \frac{2a^2}{y^2} \right] \log(1-e^{-y}) \\ - \frac{1}{a} \int_{2a}^1 dy \left(1 - \frac{2a^2}{y^2}\right) \log(1-e^{-y}) \quad (21)$$

$$\equiv F_{321}(a) + F_{322}(a)$$

fins a  $O(a^2)$  és cert

$$F_{32}(a) + F_{33}(a) = F_{321}(a) + \bar{F}_3(a)$$

$$\bar{F}_3(a) = -\frac{1}{a} \int_{2a}^{\infty} dy \left(1 - \frac{2a^2}{y^2}\right) \log(1-e^{-y}) \quad (22)$$

$F_{321}(a)$  es calcula desenvolupant el logaritme

$$\begin{aligned}
 F_{321}(a) = & (2\sqrt{2}-3) \log(2a) + (1-2\sqrt{2} + 2\log(1+\sqrt{2})) \\
 & + \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \log 2 + \log(1+\sqrt{2}) \right) a \\
 & + O(a^2)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Per a obtenir  $\bar{F}_3(a)$  fem una expansió directa en  $a$  i després d'alguns càlculs arribem a

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_3(a) = & \frac{\pi^2}{6a} + 3 \log(3a) - 1 + a \log a + \left( \frac{3}{2} - \log 2 + k \right) a \\
 & + O(a^2)
 \end{aligned} \tag{24}$$

$k \simeq 1.76$

Finalment

$$\begin{aligned}
 F_3(u) = & \bar{F}_3(a) + F_{321}(u) + \bar{F}_3(a) \\
 = & \frac{\pi^2}{6a} + 2 \log a + 2(-1 + 2 \log 2) + a \log a \\
 & - ka + O(a^2 \log a)
 \end{aligned} \tag{25}$$

APENDIC I. PARTS IMAGINARIES A  $T \neq 0$

La contribució dels modus inestables (VI.29) es podia dividir en tres integrals

$$I_{21} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{-s+1}}{\Gamma(s)} \frac{(-i)^{s-1}}{4\pi} 2 \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_0^1 dt t^{s-2} \exp \left\{ \frac{1}{2} k_{a'}^{1/2} \beta m (t-1/t) \right\}$$

$$I_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{-s+1}}{\Gamma(s)} \frac{2}{4\pi} \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i d\theta e^{i(s-1)\theta} \exp(i\sqrt{k_{a'}} \beta m \cos \theta)$$
(1)

$$I_{23} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^{-s+1}}{\Gamma(s)} \frac{(i)^{s-1}}{4\pi} 2 \left( \frac{\beta m}{2\sqrt{k_{a'}}} \right)^{s-1} \int_1^{\infty} dt t^{s-2} \exp \left\{ \frac{1}{2} k_{a'}^{1/2} \beta m (-t+1/t) \right\}$$

Fixem-nos que al ser totes convergents per tot  $s$ , quan derivem respecte  $s$  i fem  $s=0$  només sobreviurà el terme  $\frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s)} \Big|_{s=0} = 1$ . Si després fem servir

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-am} = -\log(1-e^{-a})$$
(2)

tindrem

$$\frac{dI_{21}}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{k_{a'}^{1/2}}{\pi\beta} \int_0^1 dt t^{-2} \log(1 - e^{\frac{1}{2} k_{a'}^{1/2} \beta (t-1/t)})$$

$$\frac{dI_{22}}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{k_{a'}^{1/2}}{\pi\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{-i\theta} \log(1 - e^{i k_{a'}^{1/2} \beta \cos \theta})$$
(3)



$$\frac{dI_{23}}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{k_a^{1/2}}{\pi\beta} \int_1^\infty dt t^{-2} \log(1 - e^{\frac{1}{2} k_a^{1/2} \beta (1/t - t)})$$

Hom por canviar l'interval d'integració de l'última integral a  $[0,1]$  fent  $t=1/t$  i agrupar-la amb la primera.

La única integral amb contribució imaginària és  $\frac{dI_{22}}{ds} \Big|_{s=0}$   
Considerem, per a analitzar-la

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \log(1 - e^{i a \cos\theta}) \\ &= \int_0^1 dx x(1-x^2)^{-1/2} \log(1 - e^{i a x}) \end{aligned} \quad (4)$$

podem escriure

$$\log(1 - e^{i a x}) = \log |2 \sin(\frac{ax}{2})| + i \left( \frac{ax}{2} - (n + \frac{1}{2})\pi \right)$$

$$\frac{2\pi n}{a} < x \leq \frac{2\pi(n+1)}{a} \quad (5)$$

aleshores

$$\operatorname{Re}(I) = \int_0^1 dx x(1-x^2)^{-1/2} \log |2 \sin(ax)|$$

$$\operatorname{Im}(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\left(1 - \frac{2\pi n}{a}\right) \int_{\frac{2\pi n}{a}}^{\min\left(\frac{2\pi(n+1)}{a}, 1\right)} dx x(1-x^2)^{-1/2} \left[ \frac{ax}{2} - (n + \frac{1}{2})\pi \right] \quad (6)$$

convé calcular aquesta part imaginària per assegurar-nos que coincideix amb la obtinguda abans de regularitzar (VI.21). Això proporciona un test a la nostre forma de treballar. De (7) tenim

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(I) &= \frac{a}{2} \int_0^1 dx x^2 (1-x^2)^{-1/2} \\
 &\quad - \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) \mathcal{O}\left(1 - \frac{2\pi n}{a}\right) \int_{\frac{2\pi n}{a}}^{\min\left(\frac{2\pi(n+1)}{a}, 1\right)} dx x (1-x^2)^{-1/2} \\
 &= \frac{\pi a}{8} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}\left(1 - \frac{2\pi n}{a}\right) \left[1 - \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Substituint  $a$  per  $K_{a'}^{1/2} \beta$  i usant (3) obtenim

$$\text{Im}\left(\frac{dI_{22}}{ds}\Big|_{s=0}\right) = -\frac{2K_{a'}^{1/2}}{\pi\beta} \left[ \frac{\pi K_{a'}^{1/2} \beta}{8} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}\left(1 - \frac{2\pi n}{\sqrt{K_{a'}\beta}}\right) \left(1 - \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K_{a'}\beta}}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{\pi}{2} \right] \tag{9}$$

que un cop substituït a (VI.29) dóna lloc a

$$\text{Im}(def) = - \sum_{a'=1}^{\alpha^2-1} \frac{K_{a'}^{3/2}}{4\pi\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}\left(1 - \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{K_{a'}\beta}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{K_{a'}\beta}}\right)^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

on el primer terme de (9) ha cancel·lat amb la contribució de  $T=0$  (VI.26). Aquesta part imaginària és efectivament igual a la que s'obté fàcilment a partir de l'expressió del

des abans de regularitzar.

Finalment de (6) s'obté

$$\operatorname{Re} \left( \frac{dI_{22}}{ds} \Big|_{s=0} \right) = - \frac{2K_0^{1/2}}{\pi\beta} \int_0^1 dx (1-x^2)^{-1/2} \log |2 \sin [K_0^{1/2} \beta x]| \quad (10)$$

La fórmula (VI.30) és conseqüència immediata de (3) i (10).

REFERÈNCIES

- [AB 79] R. Anishetty et al., Phys. Lett. 86B (1979) 59
- [AB 81] L.F. Abbot, Nucl. Phys. B185 (1981) 189
- [AC 79] A. Actor, Rev. of Mod. Phys. 51 (1979) 461
- [AD 81] S.L. Adler, Phys. Rev. D23 (1981) 2905
- [AD 82] S.L. Adler, Phys. Lett. 110B (1982) 302
- [AL 85] G. Altarelli, Bari 1986
- [AP 82] S.L. Adler i T.V. Piran, Phys. Lett 113B (1982) 405, Phys. Lett. 117B (1982) 302
- [AP 84] S.L. Adler i T.V. Piran, Rev. of Mod. Phys. 56 (1984) 1
- [BA 79] V. Baluni, Phys. Rev. A19 (1979) 2227
- [BA 81] M. Bander, Phys. Rep. 75 (1981) 207
- [BE 74] C.W. Bernard, Phys. Rev. D9 (1974) 3312
- [BL 78] L.S. Brown i C. Lee, Phys. Rev. D18 (1978) 2180
- [CD 78] G. Callan, R. Dashen i D. Gross, Phys. Rev. D17 (1978) 2717,
- [CD 79] G. Callan, R. Dashen i D. Gross, Phys. Rev. D19 (1979) 1826, Phys. Rev. D20 (1979) 3279
- [CH 84] S-J. Chang, Phys. Rev. D29 (1984) 259
- [CR 83] M. Creutz , " Quarks, gluons and lattices " , Cambridge Univ. Press. 1983 .

- [DJ 74] L. Dolan i R. Jackiw, Phys. Rev. D9 (1974) 3320
- [DP 84] D.I. Dyakonov i V.Y. Petrov, Nucl. Phys. B245 (1984) 259
- [DR 83] W. Dittrich i M. Reuter, Phys. Lett. 128B (1983) 321
- [DS 81] W. Dittrich i V. Schanbacher, Phys. Lett. 100B (1981) 415
- [DZ 83] J-M. Drouffe i J-B. Zuber, Phys. Rep. 102 (1983) 1
- [EL 84] E. Elizalde, Nucl. Phys. B246 (1984) 398
- [ES 84] E. Elizalde i J. Soto, "Effective action to all loop order" UR-FT-FP-7-84, versió revisada (sotmès a Phys. Rev. Lett.)
- [ES 85 (I)] E. Elizalde i J. Soto, Ann. of Phys. 162 (1985) 192
- [ES 85 (II)] E. Elizalde i J. Soto, Nucl. Phys. B260 (1985) 136
- [ES 85 (III)] E. Elizalde i J. Soto, "A field configuration closer to the O.C.D. vacuum", Univ. of Barcelona preprint (Juny del 85), (Sotmès a Z. Phys.)
- [ES 85 (IV)] E. Elizalde i J. Soto, "On the absence of a deconfining phase transition in the Savvidy model at one loop order". Univ. of Barcelona preprint (Setembre del 85), (Sotmès a Phys. Rev. D)

- [FL 83 (I)] C.A. Florv, Phys. Rev. D28 (1983) 1425
- [FL 83 (II)] C.A. Florv, SLAC preprint (Octubre del 83)
- [FR 84] F.Fucito, C. Rebbi i S. Solomon, Nucl. Phys. B248 (1984) 615
- [GH 75] W. Gröbner i N. Hofreiter, "Integraltafel (Bestimmte Integrate)", Springer-Verlay, 1973, Wien-New York
- [GM 80] H. Grosse i A. Martin, Phys. Rep. C60 (1980), 342
- [GN 79] J.L. Gervais i A. Neveu, Phys. Lett. 80B (1979) 255
- [GO 85] G. Goggi , "UA2 Report". Tessalònica 1985
- [GW 73] D.J. Gross i F. Wilczek, Phys. Rev. D8 (1973) 3633
- [HA 77] S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. 55 (1977) 133
- [KA 81] J.I. Kapusta, Nucl. Phys. B191 FS 3 (1981) 425
- [KO 79] J.B. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659
- [LE 79] T.D. Lee, Phys. Rev. D19 (1979) 1802
- [LE 81] H. Leutwyler, Nucl. Phys. B179 (1981) 129
- [LW 84] H. Lehmann i T.T. Wu, Nucl. Phys. B237 (1984) 205
- [MA 75] S. Mandelstam, Phys. Lett. 53B (1975) 476
- [MA 79] S. Mandelstam, Phys. Rev. D20 (1979) 3223

- [MO 66] W. Magnus, F. Oberhettinger i R.P. Soni, "Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics", Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [MR 81] M. Müller i J. Rafelski, Phys. Lett. 101B (1981) 111
- [MS 78] S.G. Mantinyan i G. K. Savvidy, Nucl. Phys. B134 (1978) 539
- [NA 79] Y. Nambu, Phys. Lett. 80B (1979) 372
- [NI 78] H.B. Nielsen, Phys. Lett. 79B (1978) 304
- [NN 79] H.B. Nielsen i N. Nimovina, Nucl. Phys. B156 (1979) 1
- [NO 78] N.K. Nielsen i P. Olesen, Nucl. Phys. B144 (1978) 376; Phys. Lett. 79B (1978) 304
- [NS 81] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein i V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B191 (1981) 301
- [NS 84] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein, M.B. Voloshin i V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B237 (1984) 525
- [NS 85] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein i V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B249 (1985) 445
- [PO 73] N.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346
- [PO 79] A.M. Polyakov, Phys. Lett. 82B (1979) 247
- [PS 85] D.P. Page i M. Socolovski, Phys. Rev. D31 (1985) 923
- [PT 78] H. Pagels i E. Tomboulis, Nucl. Phys. B143 (1978) 485

- [PT 84] P. Pascual i R. Tarrach, "Q.C.D.: Renormalization for the Practitioner", Springer-Verlag, Berlin 1984
- [RA 81] P. Ramond, "Field Theory, a modern primer", Benjamin/Cummings, Mass. 1981
- [RR 85] L.J. Reinders, H. Rubinstein i S. Yazaki, "Hadrons properties for Q.C.D. sum rules", CERN-TH 4079/84 (a publicar en Phys. Rep.)
- [SA 77] G.K. Sawvidy, Phys. Lett 73B (1977) 133
- [SC 82] V. Schanbacher, Phys. Rev. D26 (1982) 489
- [SH 84] F.V. Shuryak, Phys. Rep. 115 (1984) 151
- [SH 85] G. Schierholz, "Lattice Q.C.D.", CERN-TH 4139/85 (Març)
- [SO 85] J. Soto, "Relations between quarks and gluon condensates from one loop effective actions in constant background fields", Univ. of Barcelona preprint (Novembre del 85), (a aparèixer en Phys. Lett. B)
- [SV 79] M.A. Shifman, A.I. Vainstein i V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B147 (1979) 385
- [SW 78] A.S. Schwarz, Comm. Math. Phys. 67 (1978) 233
- [TH 78] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B138 (1978) 1
- [TH 79] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141
- [TH 81] A.W. Thomas, Phys. Rep. 24 (1981) 216
- [TH 84] G. 't Hooft, "Gauge field theory and permanent quark confinement", Kupari 1984.



- [TH 85] G.'t Hooft, Nucl. Phys. B254 (1985) 11
- [WE 71] F. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259
- [WI 74] K.G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445
- [WO 70] S.K. Wong, Nouv. Cim. 65 (1970) 689
- [YC 80] A. Yildiz i P.H. Cox, Phys. Rev. D21 (1980) 1095

Grupo	Sección
Registro n.º 21415	