Estudio y caracterización de soluciones para juegos cooperativos y bicooperativos

Margarita Domènech Blázquez

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Programa de doctorado: MATEMATICA APLICADA

Estudio y caracterització́n de soluciones para juegos cooperativos y bicooperativos

Tesis presentada por:

Margarita Domènech Blázquez

para obtener el título de doctora por la Universitat Politècnica de Catalunya

Directora de Tesis: M. Albina Puente del Campo

Co-director de Tesis: José Miguel Giménez Pradales

Departament de Matemàtiques

Manresa, 2020

Resumen

La primera parte de la tesis se centra en los juegos cooperativos, concretamente en el estudio de semivalores y valores probabilísticos. Cada semivalor, como concepto de solución definido en juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores, se determina unívocamente mediante coeficientes de ponderación que se aplican a las contribuciones marginales de los jugadores. Teniendo en cuenta que un semivalor induce semivalores en cardinalidades inferiores, estudiaremos la recuperación de sus coeficientes de ponderación a partir de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. Además, proporcionaremos las condiciones que debe cumplir una secuencia de números cualesquiera para que se corresponda con la familia de los últimos coeficientes de un semivalor inducido. Como consecuencia de este hecho, daremos dos caracterizaciones de cada semivalor definido en los juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores: una, entre todos los semivalores; otra, entre todos los conceptos de solución en juegos cooperativos. Veremos que los valores probabilísticos multinomiales constituyen una alternativa consistente a los valores clásicos como son los de Shapley y de Banzhaf. Estos valores fueron introducidos en fiabilidad de sistemas con el nombre de valores probabilísticos multibinarios. Aquí los estudiaremos para juegos cooperativos desde diferentes puntos de vista y, especialmente, como una poderosa generalización de los semivalors binomiales. Daremos condiciones necesarias y / o suficientes sobre los coeficientes de los valores probabilísticos en general y de los valores multinomiales en particular, para que se satisfagan ciertas propiedades clásicas en el contexto de Teoría de Juegos. Finalmente, definiremos la función **p**-potencial para valores probabilísticos multinomiales con un perfil de tendencias positivo.

La segunda parte del trabajo se centra en los juegos bicooperativos. Aquí in-

troduciremos los bisemivalores para estos juegos, dando una caracterización de ellos mediante coeficientes de ponderación, de una manera similar al caso de los semivalores en el contexto de los juegos cooperativos. Siguiendo la misma línea de estudio del caso cooperativo, introduciremos una subfamilia de estos valores, llamada (p,q) - bisemivalores y, como caso particular de ella, los bisemivalores binomiales, que amplía el concepto de valores binomiales a juegos bicooperativos. También presentaremos varias propiedades para valores en juegos bicooperativos con respecto a jugadores nulos y no nulos, contribuciones equilibradas, dominancia, monotonía y sensibilidad y la formación de bloques, que son paralelas a las propiedades clásicas existentes en la literatura sobre teoría de valores, para valores en juegos cooperativos. También estudiaremos el comportamiento de los bisemivalores con respecto a ellas, surgiendo de forma natural la caracterización de alguna subfamilia de bisemivalores, como una condición conveniente para garantizar la validez de algunas de ellas. Caracterizaremos axiomáticamente los bisemivalores de Banzhaf y de Shapley. Daremos procedimientos de cálculo basados en la extensión multilineal del juego para calcular las asignaciones dadas por los bisemivalores en general y los (p,q) - bisemivalores en particular. Finalmente, proporcionaremos también un método de cálculo de las asignaciones correspondientes al bisemivalor de Shapley, en términos de la extensión multilineal generalizada del juego.

Abstract

The first part of this thesis focuses on cooperative games and specifically on the study of semivalues and probabilistic values. Each semivalue, as a solution concept defined on cooperative games with a finite set of players, is univocally determined by weighting coefficients that apply to players' marginal contributions. Taking into account that a semivalue induces semivalues in lower cardinalities, we will study the recovery of its weighting coefficients from the last weighting coefficients of its induced semivalues. Moreover, we will provide the conditions of a sequence of numbers so that they are the family of the last coefficients of any induced semivalues. As a consequence of this fact, we will give two characterizations of each semivalue defined on cooperative games with a finite set of players: one, among all semivalues; another, among all solution concepts on cooperative games. We will see that multinomial probabilistic values constitute a consistent alternative to classical values such as those of Shapley and Banzhaf. These values were introduced in Reliability Systems called multibinary probabilistic values. Here we will study them for cooperative games from different points of view and, especially, as a powerful generalization of binomial semivalues. We will give necessary and / or sufficient conditions for the coefficients of the probabilistic values in general and for the multinomial values in particular, so that certain standard properties in the context of Game Theory are satisfied. Finally, we will define the **p**-potential function for multinomial probabilistic values with a positive tendency profile.

The second part of the work focuses on bicooperative games. Here we introduce the bisemivalues for these games, giving a characterization of them by means of weighting coefficients, in a similar way as it was given for semivalues in the context of cooperative games. Following the same line of study on the cooperative

case, we introduce a subfamily of these values, called (p,q)-bisemivalues and, as a particular case of it, the binomial bisemivalues, which extends the concept of binomial values to bicooperative games. We will also present several properties for values in bicooperatives games with respect to null and nonnull players, balanced contributions, dominance, monotony and sensitivity and block formation, that parallels a series of standard properties considered for values on cooperative games in the literature on value theory. We will also study the behavior of the bisemivalues with respect to them, the characterization of some subfamily of bisemivalues arises in a natural way as a convenient condition to guarantee the validity of some of them. We will provide axiomatic characterizations of the Banzhaf and the Shapley bisemivalues.We will give computational procedures based on the multilinear extension of the game to calculate bisemivalues in general and the (p,q)-bisemivalues in particular. Finally, we also provide a computational procedure to calculate the allocations given by the Shapley bisemivalue in terms of the generalized multilinear extension of the game.

Publicaciones ligadas a la tesis

Revistas:

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2016]: “Some properties for probabilistic and multinomial (probabilistic) values on cooperative games”. *Optimization* 65:7, 1377-1395.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2018]: “Semivalues: weighting coefficients and allocations on unanimity games”. *Optimization letters* 12:8, 1841-1854.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2018]: “Bisemivalues for bicooperative games”. *Optimization* 67:6, 907-919.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2020]: “Some properties for bisemivalues on bicooperative games”. *Journal of Optimization Theory and Applications* 185, 270-288.

Congresos:

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2015]: “A note on multinomial (probabilistic) values”. *XXXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las IX Jornadas de Estadística Pública*, p. 106. Pamplona. Fecha de presentación: 2015-05-28.

- Puente, M.A., Domènech M. and Giménez, J.M. [2015]: “Study and characterization of the multinomial values”. *XII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*, p. 398-399. Lugo. Fecha de presentación: 2015-10-22.

- Puente, M.A., Domènech M. and Giménez, J.M. [2016]: “Multilinear extension of a bicooperative game. A computational method to calculate bisemivalues”. *XXXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las X Jornadas de Estadística Pública*, p. 79. Toledo. Fecha de presentación: 2016-09-06.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2016]: “Bisemivalues and binomial bisemivalues: study and characteritzation”. *XXXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las X Jornadas de Estadística Pública*, p. 117. Toledo. Fecha de presentación: 2016-09-07.

- Giménez, J.M., Domènech M. and Puente, M.A. [2016]: “A n-parametric family of probabilistic values for cooperative games with n players”. *XXXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las X Jornadas de Estadística Pública*, p. 152. Toledo. Fecha de presentación: 2016-09-07.

- Giménez, J.M., Domènech M. and Puente, M.A. [2018]: “A dynamic axiomatization for the semivalues on classic cooperative games”. *XXXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. XI Jornadas de Estadística Pública*, p. 124. Oviedo. Fecha de presentación: 2018-05-30.

- Puente, M.A., Domènech M. and Giménez, J.M. [2018]: “The (p,q)-bisemivalues on bicooperative games”. *XXXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. XI Jornadas de Estadística Pública*, p. 124. Oviedo. Fecha de presentación: 2018-05-30.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2018]: “Bisemivalores en juegos bicooperativos: estudio de algunas propiedades”. *XXXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. XI Jornadas de Estadística Pública*, p. 125. Oviedo. Fecha de presentación: 2018-05-30.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2019]: “A method to calculate the (p,q)-bisemivalues”. *30th EUROPEAN CONFERENCE ON OPERATIONAL RESEARCH*, p. 77. Dublín. Fecha de presentación: 2019-06-24.

- Domènech M., Giménez, J.M and Puente, M.A. [2019]: “Estudio de propiedades complementarias para valores probabilísticos en juegos cooperativos”. *XXXVIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. XII Jornadas de Estadística Pública*, p. 179. Alcoi. Fecha de presentación: 2019-09-06.

Índice general

Introducción

En la mayor parte de las actividades de nuestra sociedad aparecen conflictos de intereses y toma de decisiones: en economía, en sociología, en política y en muchas otras actividades que presentan situaciones de competición entre los agentes que intervienen y que requieren de la cooperación entre ellos mismos para lograr sus objetivos. Es difícil separar los conceptos de competencia y cooperación a la hora de explicar las relaciones entre estos agentes, ya sean individuos de un colectivo, empresas de un sector o incluso países en las instituciones que los representan.

Se puede fijar el inicio de la teoría matemática que estudia los conflictos de intereses, llamada Teoría de Juegos, en el año 1944 con la publicación del libro ”Game Theory and economic behavior” de John von Neumann y Oskar Morgenstern, aunque se tiene constancia de la existencia de trabajos anteriores correspondientes a principios del siglo XX. Desde entonces, la Teoría de Juegos ha evolucionado mucho y ha visto como sus modelos se han aplicado especialmente a la economía y a la política, pero también a otras ciencias sociales como pueden ser la filosofía y la psicología, ya que sus modelos se ajustan al estudio de la conducta humana. Intuitivamente podríamos definir la Teoría de Juegos como la rama de las matemáticas que permite resolver situaciones conflictivas en las que se encuentran involucrados dos o más jugadores. Como hay diferentes tipos de situaciones conflictivas, existen también diferentes tipos o clases de juegos. La primera gran clasificación que podríamos hacer es la que distingue entre *juegos cooperativos* y *juegos no cooperativos*.

La Teoría de Juegos no cooperativos estudia el comportamiento de los agentes en cualquier situación donde la elección de cada jugador está enfocada a maximizar sus propios intereses obviando los del resto de jugadores. En cambio, si el juego permite comunicación entre los jugadores y se pueden establecer acuerdos y por tanto, formar coaliciones entre ellos, entonces lo que tendríamos es un juego cooperativo.

En nuestro caso, en la primera parte del trabajo nos centraremos en este tipo de juegos. Estos juegos vienen caracterizados por el conjunto de jugadores N y una función real definida sobre sus subconjuntos (coaliciones), llamada *función característica* que asigna el valor 0 al conjunto $\emptyset$. Una subfamilia importante de los juegos cooperativos son los juegos simples, que son aquellos que describen los sistemas de decisión y tienen como función característica una función que solo toma los valores 0 y 1. Existen relaciones estrechas entre la Teoría de Juegos y campos como la electrónica y la fiabilidad de sistemas. Formalmente, un juego simple es análogo a una *función interruptor* o función booleana si prescindimos de la condición que valga cero sobre el conjunto vacío. En estas dos áreas se identifica N, el conjunto de jugadores, con el conjunto de componentes del sistema o de la estructura. Se considera que el estado del sistema (funcionamiento o error) depende exclusivamente del estado de los componentes (funcionamiento o error), lo que implica la existencia de una función booleana que asigna a cada conjunto de componentes el estado del sistema. Esta función booleana se denomina *función estructura* y corresponde a la función característica utilizada en la Teoría de Juegos.

Si tenemos un juego cooperativo de n jugadores, un concepto de solución para esta clase de juegos es, en general, una regla que asigna a cada juego un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ siguiendo normas predeterminadas. Hay conceptos de solución que asignan todo un conjunto de vectores a cada juego y otros seleccionan un único vector de pagos, un valor.

La teoría de los valores se inició en 1953 cuando Lloyd S. Shapley [58] introdujo el método axiomático en la Teoría de Juegos para definir un concepto de solución para los juegos cooperativos, conocida ahora con el nombre de *valor de Shapley*. Los axiomas que caracterizan este valor son el de *eficiencia*, la *propiedad del jugador nulo*, *simetría* y *aditividad*. En 1954, Shapley y Shubik [59] aplicaron por primera vez el valor de Shapley sobre juegos simples, obteniendo el *índice de poder de Shapley-Shubik* y abriendo un nuevo camino de aplicación de la Teoría de Juegos en el campo de la política. La eficiencia es una de las características básicas del valor de Shapley, pero muchos autores han considerado la posibilidad de eliminarla. Quizás el primero fue Banzhaf [6] introduciendo en 1965 un índice de poder diferente, obtenido también posteriormente por Coleman [28] en 1971. En 1975, Owen [54] extiende a todos los juegos cooperativos el índice no normalizado de Banzhaf-Coleman que deja de ser eficiente.

Posteriormente en 1981, Dubey *et al.* [33] introducen la noción de *semivalor* como una amplia familia de soluciones que incluye el valor de Banzhaf y con un único miembro efeciente: el valor de Shapley. Los semivalores se definen mediante coeficientes de ponderación que se aplican a la contribución marginal de cada jugador a una coalición y estos coeficientes son iguales para todas las coaliciones del mismo tamaño. En 1988, Weber [60] fue más allá eliminando la simetría. Define los *valores probabilísticos* (evaluaciones del juego de carácter individual), caracterizándolos por los axiomas de *linealidad*, *positividad* y del *jugador títere*. El pago que asigna un valor probabilístico a cada jugador es también una suma ponderada de sus contribuciones marginales en el juego, pero ahora se requiere un coeficiente de ponderación p_S^i para cada jugador i y cada coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$. Los semivalores se caracterizan ahora como valores probabilísticos con el axioma de simetría y el valor de Shapley es el semivalor caracterizado por la eficiencia.

En el año 2000, Puente [56] (véase también Giménez [43] o Amer y Giménez [2]) define una familia especial de semivalores: los *semivalores binomiales*. En este caso, los coeficientes de ponderación dependen de un único parámetro $p \in [0,1]$. Un caso particular corresponde al valor de Banzhaf que se obtiene cuando $p = 1/2$. Se puede encontrar un análisis completo de estos valores en Carreras y Puente [24]. Posteriormente, en 2003 Carreras, Freixas y Puente [22] establecen las bases de los semivalores como índices de poder.

Los *valores probabilísticos multinomiales* fueron introducidos en fiabilidad de sistemas por Puente [56] (véase también [38]) con el nombre de *valores probabilísticos multibinarios*, que también fueron definidos de forma independiente por Carreras [18] como índices de poder, es decir, solo sobre juegos simples, en un trabajo sobre teoría de decisión donde aparecen con el nombre de "*Banzhaf* α*-índices*" (véase también [19]). Como se muestra en [25], los valores multinomiales con n parámetros (donde n es el número de jugadores) permiten mucha más flexibilidad que los semivalors binomiales (con un único parámetro) y por lo tanto muchas más posibilidades de introducir información adicional en el momento de evaluar un juego. Su principal característica es la generación sistemática de los coeficientes de ponderación en términos de algunos parámetros (un parámetro por jugador). En [44] los valores multinomiales se utilizan para estudiar los efectos de la formación de consorcios en juegos cooperativos comparando, para los jugadores involucrados, los beneficios de formar un consorcio frente a formar una alianza. Recientemente, Carreras y Puente [26] introducen los *valores coalicionales probabilísticos multinomiales*, una nueva familia de valores coalicionales diseñada para tener en cuenta las actitudes de los jugadores en el momento de cooperar entre ellos. Esta nueva familia se aplica sobre los juegos cooperativos con estructura de coaliciones, combinando el valor de Shapley y los valores probabilísticos multinomiales.

De hecho, los parámetros que definen los valores probabilísticos (Weber [60]) y los semivalores (Dubey *et al.* [33]) y, en particular, los valores multinomiales y los semivalores binomiales [56], permiten introducir en la evaluación de los juegos información complementaria a la que proporciona la función característica. Estos parámetros nos permiten medir diferentes actitudes de los jugadores cuando participan en un juego dado, tanto si se trata de elementos individuales como si representan países, empresas, partidos políticos, sindicatos o cualquier otro tipo de colectividad.

La mayor parte de las decisiones en la gestión de las organizaciones o empresas públicas y privadas son tomadas por comités. El procedimiento de toma de decisiones más utilizado por estos comités son las votaciones. Los *juegos bicooperativos* representan una generalización de los juegos de votación en los que se tiene en cuenta la fuerza de las diferentes coaliciones. Por lo tanto, en este tipo de juegos consideramos pares ordenados de coaliciones disjuntas. Tenemos pues, una partición del conjunto de jugadores en tres grupos: (*i*) Los jugadores de la primera coalición están a favor de modificar la situación actual y son defensores de una propuesta; (*ii*) los jugadores de la segunda coalición no están de acuerdo en hacer cambios y emprenderán acciones en contra de esta modificación; y (*iii*) el resto de jugadores no están convencidos de los beneficios de los cambios, pero no se opondrán a las acciones que emprendan los jugadores defensores de la propuesta. Se puede pensar que los juegos bicooperativos pueden ser considerados un caso particular de los juegos con n jugadores y r alternativas (cuando $r = 3$), introducidos por Bolger en [14] y [15]. Varios trabajos de Freixas [39], [40] y Freixas y Zwicker [41] se han dedicado al estudio de sistemas de votación con varios niveles ordenados de aprobación en la entrada y en la salida. En este modelo, si contemplamos 3 niveles de aprobación en la entrada, la abstención podría considerarse un nivel intermedio de aprobación en la entrada, entre votar sí o no.

Como hemos comentado, una cuestión central en la Teoría de Juegos es definir un concepto de solución para un juego, es decir, una función que asigne a cada juego un conjunto de vectores con valores reales representando, cada uno de ellos, una distribución de pagos entre los jugadores. En el contexto de los juegos bicooperativos también se ha estudiado este aspecto y se han introducido diferentes conceptos de solución. En el año 2008, Bilbao *et al.* [9] definen el *valor de Shapley* para juegos bicooperativos. En [10] y [13] Bilbao *et al.* introducen el *core*, el *conjunto de Weber* y el *selectope* para juegos bicooperativos. En [11] Bilbao *et al.* definen y caracterizan los valores biprobabilísticos para juegos bicooperativos siguiendo la caracterización dada por Weber [60] para los juegos cooperativos.

En el año 2010 Bilbao *et al.* [12] estudian los *juegos bicooperativos ternarios*, que son un refinamiento de los juegos de votación ternarios introducidos en [36], definen el *índice de poder de Banzhaf* para este tipo de juegos y dan una caracterización axiomática de este índice. Podemos encontrar otras definiciones diferentes de valores sobre juegos bicooperativos en Grabisch y Labreuche [48] y [49]. Más recientemente, Borkotokey y Sarmah [16] introducen el concepto de *juego bicooperativo con bicoaliciones difusas* y obtienen una forma explícita del valor de Shapley como un concepto de solución posible para una clase particular de este tipo de juegos. Nuestro trabajo tendrá como base la línea de investigación iniciada por Bilbao en este campo.

Hemos titulado la memoria “Estudio y caracterització de soluciones para juegos cooperativos y bicooperativos” en alusión directa a las dos partes de las que consta. Ha sido estructurada en 4 capítulos que a continuación resumimos brevemente:

La introducción para situarnos en la temática de la Tesis.

En el primer capítulo exponemos los conceptos y resultados que hemos creído indispensable recordar como antecedentes del trabajo. Su contenido no es, por lo tanto original. Cabe señalar que en este capítulo se han uniformado notaciones, extraído los resultados más importantes y recapitulado los temas que eran de mayor interés para nuestros propósitos.

En el segundo capítulo se inicia la tesis propiamente dicha y se hace referencia a los semivalores sobre juegos cooperativos. Cada semivalor, como concepto de solución definido en juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores, está determinado de manera unívoca por coeficientes que ponderan las contribuciones marginales de los jugadores. Teniendo en cuenta que un semivalor induce semivalores en cardinalidades inferiores, demostramos que sus coeficientes de ponderación se pueden reconstruir a partir de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. Nos centramos en los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos para establecer condiciones que nos permitan reconstruir los coeficientes de ponderación asociados al semivalor original. Finalmente, damos dos caracterizaciones de cada semivalor definido en los juegos con un conjunto finito de jugadores: una, entre todos los semivalores; otra, entre todos los conceptos de solución en juegos cooperativos.

La primera sección del capítulo tercero no es original, ya que está dedicada a recordar los conceptos y resultados fundamentales obtenidos por Carreras y Puente [25] sobre los valores probabilísticos multinomiales. El hecho de que estos valores se basen en perfiles de tendencias, ofrece la posibilidad de introducir una amplia variedad de situaciones derivadas de la personalidad de los jugadores en un juego dado. Comparamos el comportamiento de los valores probabilísticos en general y, de los valores multinomiales en particular, frente a diversas propiedades clásicas de la teoría de valores y de índices de poder como pueden ser las propiedades de: jugadores nulos, las contribuciones equilibradas, dominancia, monotonía, sensibilidad y donación. Introducimos la noción de valor probabilístico hereditario y de valor probabilístico regular para garantizar la validez de algunas de estas propiedades. Caracterizamos la clase de los valores regulares dentro de los valores probabilísticos y la clase de las soluciones que satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas dentro de la clase de los valores probabilísticos regulares y regulares hereditarios. Además, definimos y estudiamos la función $\mathbf{p}$-potencial para dichos valores. Por último, analizamos con más detalle los valores multinomiales, estimando cómo afecta una variación de la tendencia a formar coaliciones del jugador j, en el vector de pagos del jugador i, $i \neq j$, a partir de las derivadas segundas de la extensión multilineal del juego.

En la primera parte del capítulo cuarto definimos y caracterizamos los bisemivalores para juegos bicooperativos, caracterización en línea con la obtenida por Dubey, Neyman y Weber [33] para los semivalores en juegos cooperativos. Además, estudiamos los bisemivalores inducidos sobre el espacio de juegos bicooperativos con un número menor de jugadores y obtenemos una adaptación de la fórmula de recurrencia de Dragan [30].

Introducimos los (p,q)-bisemivalores y demostramos que sus coeficientes de ponderación se encuentran en progresión geométrica, la forma más simple de monotonía. Estos bisemivalores proporcionan herramientas para estudiar no solo juegos en abstracto (es decir, desde un punto de vista meramente estructural) sino también la influencia de la personalidad de los jugadores en el reparto. En el caso concreto de los (p,q)-bisemivalores, se usan dos parámetros para hacer frente a las diferentes actitudes que los jugadores pueden tener al jugar un determinado juego. Para todos los jugadores, daremos al parámetro p el significado de la tendencia genérica para apoyar a un jugador en su decisión y al parámetro q la tendencia genérica para ir en contra de él.

Posteriormente, y siguiendo la misma línea del capítulo tercero, definimos una serie de propiedades para los juegos bicooperativos similares a las propiedades clásicas que se encuentran en la literatura para el caso cooperativo como son dominancia, monotonía, sensibilidad, jugadores nulos y no nulos, contribuciones equilibradas y formación de un bloque, analizando el comportamiento de los bisemivalores frente a ellas.

En la segunda parte del capítulo, caracterizamos axiomáticamente los bisemivalores de Banzhaf y Shapley dando, en ambos casos, un conjunto de propiedades independientes que los determinan unívocamente. Definimos la extensión multilineal de un juego bicooperativo e introducimos procedimientos de cálculo en términos de la extensión multilineal del juego para las asignaciones dadas por los (p,q)-bisemivalores en particular y para los bisemivalores en general. Finalmente, proporcionamos un procedimiento de cálculo de las asignaciones otorgadas por el bisemivalor de Shapley, basado en la extensión multilineal generalizada del juego.

Desde que Shapley introdujo la noción de valor como una evaluación a priori de la expectativa de cada jugador en un juego cooperativo, gran parte de la Teoría de Juegos se ha centrado en el análisis de este concepto de solución, buscando alternativas válidas y generalizaciones. Los objetivos generales de la tesis son aportar resultados en este campo, estudiando los valores multinomiales y los probabilísticos sobre juegos cooperativos y definiendo bisemivalores sobre los juegos bicooperativos, estableciendo un paralelismo con el caso cooperativo y profundizando en el estudio de este tipo de soluciones para tales juegos. Así pues, los podríamos resumir en:

- Considerar la relación entre los coeficientes de ponderación de un semivalor y de sus semivalores inducidos, estableciendo cotas que permitan recuperar los primeros a partir de estos últimos.
- Obtener una caracterización axiomática de cada semivalor entre la familia de semivalores y entre los conceptos de solución para los juegos cooperativos.
- Contribuir a entender los valores multinomiales como una alternativa consistente o complementaria a los valores clásicos, ya que el hecho de que se basan en perfiles de tendencias ofrece la posibilidad de introducir una amplia variedad de información derivada de la personalidad de los jugadores en un juego dado.
- Comparar el comportamiento de los valores probabilísticos en general y, de los valores multinomiales en particular, frente a diversas propiedades clásicas de la teoría de valores y de índices de poder como pueden ser las propiedades de: jugadores nulos, las contribuciones equilibradas, dominancia, monotonía, sensibilidad y donación. Introduciremos la noción de valor probabilístico hereditario y de valor probabilístico regular para garantizar la validez de algunas de estas propiedades.
- Caracterizar la clase de los valores regulares dentro de los valores probabilísticos y la clase de las soluciones que satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas dentro de la clase de los valores probabilísticos regulares y regulares hereditarios.

- Estudiar la función potencial para los valores multinomiales.

- Profundizar en los valores multinomiales, estimando cómo afecta una variación de la tendencia a formar coaliciones del jugador j, p_j ($j \neq i$), en el vector de pagos del jugador i a partir de las derivadas segundas de la extensión multilineal del juego.

- Definir axiomáticamente los bisemivalores sobre juegos bicooperativos y caracterizarlos mediante coeficientes de ponderación, introduciendo este concepto de solución de forma similar al caso cooperativo. Estudiar los bisemivalores inducidos para cardinalidades inferiores, obteniendo una fórmula de recurrencia de sus coeficientes de ponderación para calcularlos. Definir los (p,q)-bisemivalores, dando sus características principales.

- Estudiar el comportamiento de los bisemivalores frente a diversas propiedades similares a las clásicas de la teoría de valores en el caso cooperativo.

- Ofrecer una caracterización de los bisemivalores de Banzhaf y de Shapley.

- Definir una extensión multilineal de un juego bicooperativo de forma similar al caso cooperativo.

- Calcular las asignaciones debidas a los bisemivalores en general y (p,q)-bisemivalores en particular, a partir de la extensión multilineal del juego definida previamente.

- Definir la extensión multilineal generalizada del juego que nos permite calcular las asignaciones debidas al bisemivalor de Shapley.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Juegos cooperativos

1.1.1. Definiciones

Un *juego cooperativo* con utilidad transferible es un par (N,v) donde $N = \{1,2,\ldots,n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función tal que $v(\emptyset) = 0$, que se denomina *función característica* del juego. 2^N es el conjunto de sus coaliciones (subconjuntos de N) y $v(S)$ es la utilidad que pueden garantizarse los jugadores de S si deciden cooperar, con independencia de las acciones de los jugadores de $N \backslash S$. Habitualmente se representa el juego sencillamente por v.

El conjunto de todos los juegos cooperativos sobre N, $\mathcal{G}_N$, con las operaciones naturales de las funciones reales, es decir, $v+v'$ y λv para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Dada una coalición cualquiera $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, podemos definir el juego 1_T en la forma

$$1_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Estos juegos se conocen con el nombre de *juegos de identidad* y todos ellos forman una base de $\mathcal{G}_N$. Así pues, $\dim \mathcal{G}_N = 2^n - 1$.

Los *juegos de unanimidad* u_T definidos para cada coalición no vacía $T \subseteq N$

como:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \supseteq T \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

forman también una base del espacio de juegos $\mathcal{G}_N$.

Según las propiedades que cumpla la función característica v, los juegos cooperativos reciben denominaciones especiales. Así el juego (N, v) es:

- *no negativo* si $v(S) \geq 0$ para toda coalición $S \subset N$.
- *monótono* si $v(S) \leq v(T)$ cuando $S \subset T \subseteq N$.
- *simple* si además de ser monótono se cumple que $v(S) \in \{0, 1\}$, para toda coalición $S \subseteq N$ y $v(N) = 1$.
- *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para cada par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$.

La restricción de un juego cooperativo (N, v) a una coalición T es el juego $(T, v_{|T})$ definido por $v_{|T}(S) = v(S)$, para toda coalición $S \subseteq T$.

Por otro lado, un jugador $i \in N$ es un *títere* en v si y solo si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$, y es *nulo* si además $v(\{i\}) = 0$.

Dos jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* en v si y solo si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$.

Finalmente, cada permutación θ sobre N define un automorfismo lineal sobre $\mathcal{G}_N$ dado por $(\theta v)(S) = v(\theta^{-1} S)$ para toda coalición $S \subseteq N$ y todo v.

Veamos a continuación un ejemplo que sirve para ilustrar este tipo de juegos.

Ejemplo 1.1.1 (El problema de la bancarrota. Driessen, 1988) El Talmud es un antiguo documento judío donde se han ido recopilando numerosos comentarios sobre la ley mosaica y en el que está fijada la enseñanza de las grandes escuelas rabínicas. De hecho, el Talmud consta de dos partes: El Mišná, donde se incluyen las leyes, y el Guemará, que contiene los comentarios e investigaciones sobre el Mišná de los rabinos de cada época. Precisamente, hacia el año 1140 a.C. el rabino

Ibn Ezra proponía el siguiente problema en el Talmud: "Jacob muere y cada uno de sus cuatro hijos, Rubén, Simeón, Leví y Judá, presenta un escrito en el cual Jacob lo reconoce como su heredero y le lega, respectivamente, un cuarto, un tercio, la mitad y el total de sus bienes, que ascienden a 120 unidades. Todos los escritos tienen la misma fecha y, por lo tanto, ninguno tiene prioridad sobre los otros. ¿Cómo repartir las 120 unidades entre los cuatro?"

Este es un ejemplo concreto de lo que se ha dado en llamar el *problema de la bancarrota* que, en general, puede ser enunciado así: sea E un número real positivo, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $d_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $E < \sum_{i=1}^{n} d_i$. Una interpretación posible es la que se daba en el párrafo anterior: una persona (empresa) muere (quiebra) dejando n deudas $d_1, d_2, \ldots, d_n$ cuya suma supera la totalidad de sus bienes E.

O'Neill [52] utiliza por primera vez la Teoría de Juegos como marco en el que estudiar este problema y resolverlo. Para ello propone el juego cooperativo de n jugadores siguiente:

$$v_{E;d} = \, max\{0,\, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\}, \text{ para toda } S \subseteq N;$$

es decir, cada coalición S obtiene lo que cobraría en el peor de los casos, cuando todos los jugadores de $N \setminus S$ vayan a cobrar antes que los de S.

Obviamente, de la definición de $v_{E;d}$ se tiene que $v_{E;d}(N) = E$. Es decir, la coalición global se lleva la totalidad de los bienes.

En el caso particular anterior, sería: $E = 120$, $d_1 = 30$, $d_2 = 40$, $d_3 = 60$ y $d_4 = 120$. La función característica $v = v_{E;d}$ será entonces:

v({1,4})=20	v({2,4})=30	v({3,4})=50
v({1,2,4})=60	v({1,3,4})=80	v({2,3,4})=90
v(N)=120	v(S)=0	para las demás $S \subset N$.

1.1.2. Juegos Simples

Hemos visto que un juego simple es un juego cooperativo monótono, no nulo, (N,v) tal que $v(N)=1$ y para toda coalición $S\subseteq N$ se tiene $v(S)\in\{0,1\}$. Si $v(S)=0$ se dice que la coalición S es *perdedora*, mientras que si $v(S)=1$ entonces es *ganadora*. Se denota el conjunto de todas las coaliciones ganadoras por

$$W=W(v)=\{S\subseteq N: v(S)=1\}$$

De este modo, la propiedad de monotonía se puede escribir de la siguiente manera:

$$S\in W \ \text{ y } \ S\subseteq T\Rightarrow T\in W.$$

Nótese que si se conoce W, el juego está completamente determinado. De hecho, se puede definir también un juego simple a partir de sus coaliciones ganadoras como un par (N,W) con $W\subseteq 2^N$ tal que $\emptyset\notin W,\ N\in W$ y W satisface la condición de monotonía expresada por la implicación anterior.

Se dice que una coalición S es *ganadora minimal* (con respecto a la inclusión) si es ganadora y toda subcoalición estricta de S es perdedora. Denotaremos el conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales de v por

$$W^m=W^m(v)=\{S\in W: S\supset T\Rightarrow T\notin W\}$$

Las coaliciones ganadoras minimales determinan el juego y deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\emptyset\notin W^m$;
- $T\nsubseteq S\,,\forall S,T\in W^m$.

La clasificación de las coaliciones en ganadoras y perdedoras puede refinarse. Se obtiene una clasificación más detallada observando el carácter de la coalición complementaria:

- Una coalición S es *ganadora decisiva* si $S\in W$ y $N\setminus S\notin W$.
- Una coalición S es *ganadora conflictiva* si $S\in W$ y $N\setminus S\in W$.

- Una coalición S es de *bloqueo* si $S \notin W$ y $N \setminus S \notin W$.

- Una coalición S es *perdedora estricta* si $S \notin W$ y $N \setminus S \in W$.

Estas cuatro familias se denotan por D, C, Q y P respectivamente. Está claro que $W = D \cup C$.

También existen diferentes tipos de jugadores, dependiendo de su pertenencia o no a alguna de las clases de coaliciones anteriores:

- Un jugador $i \in N$ es *dictador* si $\{i\} \in D$.

- Un jugador $i \in N$ es *capaz* si $\{i\} \in C$.

- Un jugador $i \in N$ tiene *veto* si $\{i\} \in Q$.

Por otra parte, se dice que un jugador $i \in N$ es *nulo* si $\{i\} \notin S$, $\forall S \in W^m$.

Atendiendo a la naturaleza de las coaliciones de un juego simple, se obtienen las definiciones siguientes:

- Un juego simple (N, v) es *propio* si no tiene coaliciones ganadoras conflictivas, es decir, $C = \emptyset$.

- Un juego simple (N, v) es *fuerte* si no tiene coaliciones de bloqueo, es decir, $Q = \emptyset$.

Por lo tanto, el juego se denomina *impropio* si $C \neq \emptyset$ y *débil* si $Q \neq \emptyset$.

Una clase especialmente interesante de juegos simples la forman los llamados juegos de mayoría ponderada.

Definición 1.1.2 *Un juego simple v es de mayoría ponderada si existe una distribución de pesos no negativos $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ asignados a los jugadores y una cuota positiva $q \leq \sum_{i \in N} w_i$ tal que $S \in W$ si y solo si $\sum_{i \in S} w_i \geq q$.*

Diremos entonces que $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$ es una *representación* del juego de mayoría ponderada (N, v) y escribiremos $(N, v) \equiv [q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$. En este caso, la familia de coaliciones ganadoras es $W = \{S \subseteq N : w(S) \geq q\}$.

Si q es tal que $v(S) = 1$ si $w(S) > q$ y $v(S) = 0$ si $w(S) < q$, entonces

$$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

es una representación estricta de (N, v).

Suele interpretarse w como una distribución de pesos (acciones, votos, ...) entre los elementos de N, que hacen el papel de accionistas o representantes de grupos parlamentarios con disciplina de voto, mientras que q simboliza la mayoría exigida para tomar decisiones.

No todo juego simple puede representarse mediante un juego de mayoría ponderada. En particular, un juego simple débil e impropio no es representable como juego de mayoría ponderada.

Sea (N, v) el juego de 4 jugadores cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $W^m = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, es decir, los subconjuntos formados por los jugadores 1 y 2 por un lado y 3 y 4 por otro. Si existiesen w_1, w_2, w_3, w_4 y q como en la definición anterior, deberían cumplirse las desigualdades siguientes:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 \geq q, & w_1 + w_3 < q, \\ w_3 + w_4 \geq q, & w_2 + w_4 < q. \end{cases}$$

Sumando las dos desigualdades de la izquierda se obtiene

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$$

y sumando las de la derecha

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2q,$$

llegando a una contradicción.

Todos los juegos de unanimidad son simples (y de mayoría ponderada).

Los juegos de mayoría ponderada sirven como modelo para ciertos organismos de decisión que se rigen mediante votaciones, como ejemplo ilustrativo estudiaremos el ayuntamiento de la ciudad de Manresa surgido de las elecciones municipales del 24 de mayo de 2015.

Ejemplo 1.1.3 (Ayuntamiento de Manresa 2015) La composición del consistorio de Manresa tras las elecciones municipales de 2015 es la siguiente:

	Partido	**Concejales**
1	CiU (Convergència i Unió)	9
2	ERC (Esquerra Republicana de Catalunya)	7
3	CUP (Candidatura d'unitat Popular)	3
4	PSC (Partit dels Socialistes de Catalunya)	3
5	C'S (Ciutadans-Partido de la Ciudadania)	2
6	DM (Democràcia Municipal)	1

En total son 25 concejales y, por lo tanto, para conseguir la mayoría absoluta se necesitan al menos 13 votos.

Cuando se toman decisiones por mayoría absoluta, el juego de mayoría ponderada de 6 jugadores que describe la situación es

$$(N,v) \equiv [13;9,7,3,3,2,1]$$

donde cada partido es un jugador cuyo peso es su número de miembros en el consistorio. El conjunto de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{2,3,4\},\{2,3,5,6\},\{2,4,5,6\}\}.$$

Los jugadores 3 y 4, por un lado, y 5 y 6, por el otro, son simétricos en este juego.

1.1.3. Conceptos de solución para juegos cooperativos

Uno de los problemas que pretende resolver la Teoría de Juegos es la distribución de la cantidad $v(N)$ de una manera razonable entre los diferentes agentes del juego. Éste es quizás el problema más ampliamente estudiado en este ámbito.

Un *concepto de solución* para los juegos cooperativos es, en general, una regla que asigna a cada juego v de n jugadores, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, siguiendo unas reglas predeterminadas. En principio ese subconjunto puede ser vacío, contener un único elemento o varios elementos, según el juego que se considere o según la regla que se establezca.

Un *valor* sobre $\mathcal{G}_N$ es una función $g : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$, $n = |N|$, que asigna a cada juego v un vector $g[v]$ con componentes $g_i[v]$ para todo $i \in N$. Éste es un concepto de solución que selecciona un único vector de pagos.

Los conjuntos estables, el núcleo o el core constituyen ejemplos de conceptos de solución que en general proporcionan (cuando existen) un conjunto de vectores para cada juego.

1.1.3.1. El valor de Shapley

Históricamente es el primer concepto de solución que asigna a cada juego cooperativo un único vector de pagos. Introducido y axiomatizado por Lloyd S. Shapley en 1953, es uno de los más estudiados. El método utilizado por Shapley consiste en proponer determinadas propiedades (axiomas) que debería satisfacer una regla de asignación y demostrar que estas propiedades caracterizan de modo unívoco un valor. De entre las muchas axiomatizaciones que existen de este valor, a parte de la original, citamos a continuación la de Feltkamp [34]:

Sea $\mathcal{G}_N$ el espacio vectorial de los juegos cooperativos de n jugadores. El *valor de Shapley* es una función $\varphi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada juego cooperativo v un vector $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \ldots, \varphi_n[v])$ que cumple las siguientes propiedades:

- *Eficiencia*: Para todo juego v, $\sum\limits_{i \in N} \varphi_i[v] = v(N)$.
- *Jugador nulo*: Para todo juego v en el que i es nulo, $\varphi_i[v] = 0$.
- *Simetría*: Para todo juego v, para todo jugador $i \in N$ y para cada permutación θ sobre N, $\varphi_{\theta i}[\theta v] = \varphi_i[v]$.
- *Aditividad*: Si $v, v' \in \mathcal{G}_N$, entonces, $\varphi[v + v'] = \varphi[v] + \varphi[v']$.

Teorema 1.1.4 *(Feltkamp, 1995) Existe una única función $\varphi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades anteriores y es la dada por:*

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{n\binom{n-1}{s}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y } \; v \in \mathcal{G}_N.$$

donde $n = |N|$ y $s = |S|$.

Así pues, el pago que este valor asigna a cada jugador en un juego cualquiera es una suma ponderada de sus contribuciones marginales en el juego. El valor de Shapley es el valor esperado por cada jugador cuando considerando todas las posibles ordenaciones de los jugadores de N como igualmente probables, cada jugador recibe como pago su contribución marginal a la coalición formada por todos los jugadores que le preceden. El valor de Shapley de un juego depende únicamente de las propiedades abstractas del mismo, sin tener en cuenta los distintos grados de cooperación o las posibilidades de comunicación que existan entre los jugadores de cada juego concreto.

En el caso concreto de juegos simples, el axioma de aditividad no tiene sentido, ya que la suma de juegos simples no es, en general, un juego simple.

En 1975, Dubey [32] modificó dicho axioma y lo adecuó a los juegos simples. Consideremos las operaciones siguientes entre juegos simples:

$$\begin{aligned}(v \vee v')(S) &= \; max\{v(S), v'(S)\},\\ (v \wedge v')(S) &= \; min\{v(S), v'(S)\}.\end{aligned}$$

Se denota por $\mathcal{SG}_N$ al conjunto de juegos simples en N. Con las operaciones anteriores, $\mathcal{SG}_N$ tiene estructura de retículo distributivo. En $\mathcal{SG}_N$ el axioma de aditividad puede ser substituido por el denominado axioma de *transferencia*:

$$\varphi[v \vee v'] + \varphi[v \wedge v'] = \varphi[v] + \varphi[v'], \qquad \forall v, v' \in \mathcal{SG}_N.$$

Teorema 1.1.5 *(Dubey, 1975) Existe una única función $\varphi : \mathcal{SG}_N \to \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y transferencia, y es la restricción del valor de Shapley a los juegos simples o índice de Shapley-Shubik.*

En este caso

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \in W, i \in S, S\setminus\{i\} \notin W} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y para todo } v \in \mathcal{SG}_N.$$

Ejemplos 1.1.6 (a) Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.1.1) el valor de Shapley propone el siguiente reparto:

$$\varphi[v] = \left(\frac{85}{6}, \frac{115}{6}, \frac{175}{6}, \frac{115}{2}\right) = (14.167, 19.167, 29.167, 57.5)$$

(b) Para el juego de mayoría ponderada correspondiente al Ayuntamiento de Manresa (Ejemplo 1.1.3) se obtiene el índice de poder de Shapley-Shubik

$$\varphi[v] = \left(\frac{11}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right)$$

que tradicionalmente se expresa en tanto por ciento. En este caso, pues, el primer partido tiene el 36.67 % del poder, el segundo partido el 23.33 %, los partidos 3 y 4 el 13.33 % y finalmente, los partidos 5 y 6 tienen el 6.67 % restante. Nótese que en este caso los jugadores simétricos: CUP y PSC por un lado, C's y DM por otro, reciben la misma asignación.

1.1.3.2. El valor de Banzhaf

El valor de Banzhaf es otro de los conceptos de solución para juegos cooperativos que asigna un único vector de pagos. Un concepto que guarda proporcionalidad con él fue propuesto inicialmente por Banzhaf [6] para juegos simples, es decir como índice de poder, en el año 1965. De forma independiente Coleman [28] también lo introdujo en el año 1971. En 1975, Owen [54] extiende a todos los juegos cooperativos el índice no normalizado de Banzhaf-Coleman. De entre todas las caracterizaciones que existen de este valor, a continuación detallamos la de Feltkamp [34] por su sencillez y por su analogía con la del valor de Shapley.

Sea v un juego con n jugadores y

$$\eta[v] = \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

El *valor de Banzhaf* es una función $b : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada juego cooperativo v un vector $b[v] = (b_1[v], \ldots, b_n[v])$ que cumple las propiedades de simetría, jugador nulo, aditividad y satisface además la propiedad del poder total de Banzhaf

$$\sum_{i \in N} b_i[v] = \eta[v]$$

La propiedad del poder total de Banzhaf establece que el pago total obtenido por los jugadores es la suma de todas las contribuciones marginales posibles en el juego.

Teorema 1.1.7 *(Feltkamp, 1995) Existe una única función $b : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades anteriores y es la dada por:*

$$b_i[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y para todo } \ v \in \mathcal{G}_N.$$

La solución que acaba de introducirse es el valor de Banzhaf no normalizado. Dividiendo todas las componentes de b por 2^{n-1} se obtiene el valor de Banzhaf normalizado, que designaremos por β, siendo el que se emplea habitualmente. β verifica los mismos axiomas, solo que ahora $\sum_{i \in N} \beta_i[v] = \frac{\eta[v]}{2^{n-1}}$. Es decir:

$$\beta_i[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \text{para todo } i \in N \text{ y para todo } \ v \in \mathcal{G}_N.$$

El valor de Banzhaf para cada jugador es, como el de Shapley, una suma ponderada de sus contribuciones marginales en el juego. En este caso los coeficientes de ponderación son todos iguales a $\frac{1}{2^{n-1}}$, de forma que el peso de todas las contribuciones es siempre el mismo. Este valor tampoco tiene en cuenta factores como los distintos grados de cooperación entre los jugadores o las incompatibilidades.

Sustituyendo el axioma de aditividad por el de transferencia se caracteriza β para los juegos simples, obteniédose el que se conoce como índice de poder de Banzhaf-Coleman.

Ejemplos 1.1.8 (a) Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.1.1) el valor de Banzhaf propone el siguiente reparto:

$$\beta[v] = \left(\frac{55}{4}, \frac{75}{4}, \frac{115}{4}, \frac{225}{4}\right) = (13.75, 18.75, 28.75, 56.25)$$

(b) Para el juego de mayoría ponderada correspondiente al Ayuntamiento de Manresa (Ejemplo 1.1.3) se obtiene el índice de poder de Banzhaf-Coleman

$$\beta[v] = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Porcentualmente el primer partido tiene el 35.71 % del poder, el segundo partido el 21.43 %, los partidos 3 y 4 el 14.29 % y finalmente, los partidos 5 y 6 tienen el 7.14 % restante. El índice de poder de Banzhaf-Coleman asigna el mismo poder a los partidos PSC y CUP por un lado y a C's y DM por otro, ya que son simétricos en el juego.

1.1.3.3. Semivalores

El valor de Shapley y el valor de Banzhaf son soluciones para los juegos cooperativos que tienen en común el hecho de asignar a cada jugador un pago en base a sus contribuciones marginales, ponderadas de una u otra forma, según hemos visto en los apartados precedentes. Estas soluciones se obtienen por medio de caracterizaciones por propiedades. Siguiendo esta misma orientación, Dubey, Neyman y Weber [33] introdujeron la noción de *semivalor* como una amplia familia de soluciones que incluye al valor de Banzhaf y que tiene al valor de Shapley como único miembro eficiente. La siguiente definición, debida a Weber [60], proporciona una axiomatización de los semivalores.

Definición 1.1.9 *(Weber, 1988) Una solución $\psi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ es un semivalor si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- *Linealidad: Si $v, v' \in \mathcal{G}_N$ y λ, $\mu \in \mathbb{R}$, entonces, $\psi[\lambda v + \mu v'] = \lambda\psi[v] + \mu\psi[v']$.*
- *Simetría: Para todo juego v, para todo jugador $i \in N$ y para cada permutación θ sobre N, $\psi_{\theta i}[\theta v] = \psi_i[v]$.*

- *Positividad: Si v es monótono, entonces $\psi[v] \geq 0$.*

- *Jugador títere: Para todo juego v en el que i es un títere, $\psi_i[v] = v(\{i\})$.*

En [60] la propiedad de *Positividad* se denomina *Monotonía*, pero preferimos referirnos a ella como *Positividad* tal y como aparece en [33].

El siguiente resultado establece una caracterización de los semivalores mediante coeficientes de ponderación que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.1.10 *(Dubey, Neyman y Weber,1981) Sea $n = |N|$. Entonces:*

(a) Dada una familia de números $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ tales que $p_k \geq 0$ para todo k y

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k = 1, \tag{1.1}$$

la expresión

$$\psi_i[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_s[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y todo } v \in \mathcal{G}_N, \tag{1.2}$$

donde $s = |S|$, define un semivalor ψ;

(b) Recíprocamente, todo semivalor puede obtenerse de esta forma;

(c) La correspondencia dada por $\{p_k\}_{k=0}^{n-1} \mapsto \psi$ es biyectiva.

Por lo tanto, el pago que un semivalor asigna a cada jugador en cualquier juego es una suma ponderada de sus contribuciones marginales en el juego. Si p_k se interpreta como la probabilidad de que un jugador determinado i se una a una coalición de tamaño k, teniendo en cuenta que tiene la misma probabilidad de unirse a todas las coaliciones de un mismo tamaño, entonces $\psi_i[v]$ es la contribución marginal esperada de ese jugador a las coaliciones a las que se une.

En particular, los coeficientes $p_k = \frac{1}{n\binom{n-1}{k}}$ definen el valor de Shapley, mientras que tomando $p_k = \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo k, se obtiene el valor de Banzhaf. Los índices *dictatorial y marginal* introducidos por Owen [55] están definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} \delta_i[v] &= v(\{i\}), \\ \mu_i[v] &= v(\{N\}) - v(\{N \setminus \{i\}\}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

En el primer caso, tenemos que $p_0 = 1$ y $p_k = 0$ para todo $k \neq 0$. En el segundo caso $p_{n-1} = 1$ y $p_k = 0$ para todo $k \neq n-1$.

Semivalores binomiales

En el año 2000, Puente [56] y Freixas y Puente [38] definen una familia especial de semivalores: los *semivalores p–binomiales*, ψ^p. En este caso los coeficientes de ponderación dependen de un único parámetro $p \in [0,1]$ y vienen dados por:

$$p_k = p^k(1-p)^{n-k-1} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Un caso particular corresponde al valor de Banzhaf, que se obtiene quando $p = 1/2$. Tomando $p = 0$ y $p = 1$ se obtienen el índice dictatorial y el índice marginal, respectivamente, admitiendo como abuso de notación $0^0 = 1$.

Es importante resaltar que el parámetro p, cada uno de cuyos valores varía entre 0 y 1, define un miembro de la familia de semivalores binomiales y puede ser interpretado como la tendencia común de los jugadores a formar coaliciones. En este sentido, introduce información adicional a la evaluación de un juego no contemplada en la función característica. Valores pequeños de p indican que los jugadores son, en principio, reticentes a formar coaliciones de cardinal elevado, prefiriendo las pequeñas, mientras que valores elevados de p reflejan que las coaliciones mayores son más probables. El caso equidistante corresponde al valor de Banzhaf.

Técnicamente, los semivalores binomiales están caracterizados por la monotonía de los coeficientes, $p_{k+1} = \alpha p_k$ para todo k, que forman una progresión geométrica de razón $\alpha = \dfrac{p}{1-p}$.

Ejemplo 1.1.11 (a) Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.1.1) se obtienen las asignaciones por el semivalor binomial $\psi^p[v]$, con valores:

$$\begin{aligned}
\psi_1^p[v] &= 20p + 20p^2 - 10p^3 \\
\psi_2^p[v] &= 30p + 20p^2 - 10p^3 \\
\psi_3^p[v] &= 50p + 20p^2 - 10p^3 \\
\psi_4^p[v] &= 100p + 30p^2 - 10p^3
\end{aligned}$$

Las gráficas de la figura 1.1 muestran la evolución de las asignaciones por estos semivalores para cada jugador según los valores de p y la Tabla 1.1 indica las asignaciones por estos semivalores para cada jugador i y para distintos valores de p.

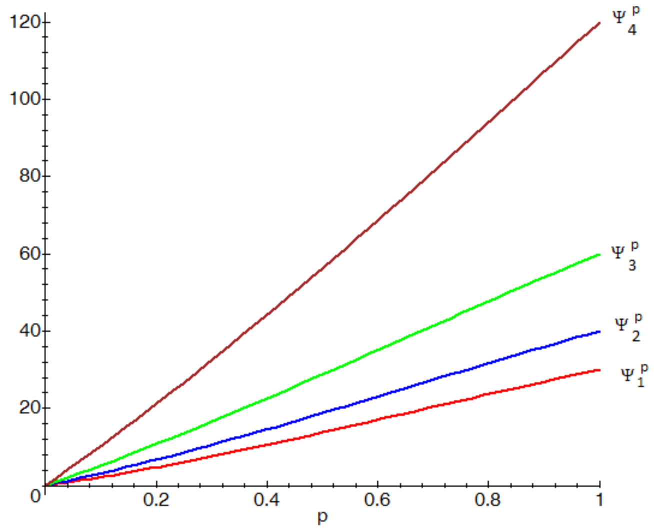


Figura 1.1: semivalores p–binomiales

i	$\psi_i^{1/4}[v]$	$\psi_i^{1/2}[v]$ (Banzhaf)	$\psi_i^{3/4}[v]$
1	6.094 (11.08 %)	13.75 (11.70 %)	22.031 (11.99 %)
2	8.594 (15.625 %)	18.75 (15.96 %)	29.531 (16.07 %)
3	13.594 (24.715 %)	28.75 (24.47 %)	44.531 (24.23 %)
4	26.719 (48.58 %)	56.25 (47.87 %)	87.656 (47.71 %)

Tabla 1.1: semivalores p–binomiales para cada jugador i y para distintos valores de p

Observando la Figura 1.1, vemos que $\psi_1^p[v] \leq \psi_2^p[v] \leq \psi_3^p[v] \leq \psi_4^p[v]$ para todo $p \in [0,1]$ y la asignación mínima y máxima recibida por los cuatro jugadores, $\psi_i^p[v]$, $i = 1,2,3,4$, se obtiene para $p = 0$ y $p = 1$, respectivamente. La proporción entre las asignaciones recibidas por los jugadores varía de manera significativa, como se muestra en la Tabla 1.1 para los valores $p = 1/4$, $1/2$ y $3/4$.

(b) Retomemos el juego de mayoría ponderada correspondiente al Ayuntamiento de Manresa (Ejemplo 1.1.3). Para este juego, las asignaciones por el semivalor binomial $\psi^p[v] = (\psi_1^p[v], \psi_2^p[v], \psi_3^p[v], \psi_4^p[v], \psi_5^p[v], \psi_6^p[v])$ son:

$$\begin{aligned}
\psi_1^p[v] &= p + 5p^2 - 12p^3 + 6p^4 \\
\psi_2^p[v] &= p + p^2 - 4p^3 + 2p^4 \\
\psi_3^p[v] &= \psi_4^p[v] = 4p^2 - 8p^3 + 4p^4 \\
\psi_5^p[v] &= \psi_6^p[v] = 2p^2 - 4p^3 + 2p^4
\end{aligned}$$

Las gráficas de la Figura 1.2 muestran la evolución de las assignaciones por estos semivalores para cada jugador según los valores de p.

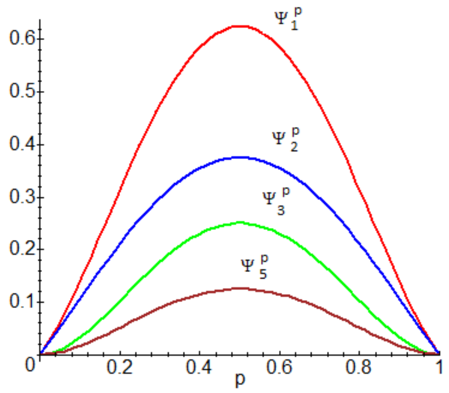


Figura 1.2: semivalores p–binomiales

Puesto que $\psi_3^p[v] = \psi_4^p[v]$ y $\psi_5^p[v] = \psi_6^p[v]$, solo se han representado cuatro curvas.

Se comprueba para cada jugador i que las asignaciones de $\psi_i^p[v]$ para p y $1 - p$ son, en este caso las mismas. Se observa, además, que la proporción entre las asignaciones a un jugador y a otro con menor peso decrece a medida que p se aleja de 0.5. La máxima asignación para cada jugador se obtiene para $p = 0.5$, es decir, para el índice de Banzhaf.

1.1.3.4. Valores probabilísticos

Definidos por Weber [60], los valores probabilísticos proporcionan inicialmente evaluaciones del juego de carácter individual, aunque admiten una reformulación como evaluaciones de grupo que permiten considerarlos como un concepto de solución de carácter más general que la del semivalor. Podemos decir que los semivalores se caracterizan a partir de ellos por la simetría, o equivalentemente, por el hecho que cada coeficiente de ponderación solo depende del tamaño de la coalición a la que se refiere.

Definición 1.1.12 *(Weber, 1988) Una solución $\phi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^n$ es un valor probabilístico si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- *Linealidad: Si $v, v' \in \mathcal{G}_N$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces, $\phi[\lambda v + \mu v'] = \lambda\phi[v] + \mu\phi[v']$.*
- *Positividad: Si v es monótono, entonces $\phi[v] \geq 0$.*
- *Jugador títere: Para todo juego v en el que i es un títere, $\phi_i[v] = v(\{i\})$.*

Teorema 1.1.13 *(Weber, 1988) Dado un conjunto de $n2^{n-1}$ coeficientes de ponderación $\{p_S^i : i \in N,\ S \subseteq N \backslash \{i\}\}$ tal que $\sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} p_S^i = 1$ para cada $i \in N$ y $p_S^i \geq 0$ para todo $i \in N$ y $S \subseteq N \backslash \{i\}$,*

$$\phi_i[v] = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} p_S^i [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y para todo } v \in \mathcal{G}_N \quad (1.4)$$

define un valor probabilístico ϕ sobre N, y recíprocamente.

Por lo tanto, el pago que un valor probabilístico asigna a cada jugador en cualquier juego es una suma ponderada de sus contribuciones marginales en el juego. El coeficiente p_S^i puede interpretarse como la probabilidad de que un jugador determinado i se una a una coalición S.

1.1.4. Extensión multilineal de un juego

Un juego cooperativo en forma de función característica consiste en una función real cuyo dominio es 2^N, es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de N. Este dominio puede interpretarse también como el conjunto de vectores

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,:\,x_i=0 \text{ ó } 1,\ i=1,2,\ldots,n\},$$

puesto que cada subconjunto $S\subseteq N$ está en correspondencia biunívoca con el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $x_i=1$ si $i\in S$ y $x_j=0$ si $j\notin S$. Es decir, $2^N\equiv\{0,1\}^n$ y por lo tanto, se puede pensar que v es una función real definida en el conjunto formado por los vértices del cubo unidad en el espacio n-dimensional. A partir de esta idea, Owen [53] extiende dicha función a todo el cubo unidad

$$I^n=[0,1]^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,:\,0\leq x_i\leq 1,\ i=1,2,\ldots,n\},$$

de manera que la función resultante es lineal respecto a cada variable.

Definición 1.1.14 *Sea (N,v) un juego cooperativo de n jugadores. La extensión multilineal (EML) de v es la función real de n variables*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{S\subseteq N}\prod_{i\in S}x_i\prod_{j\in N\setminus S}(1-x_j)v(S),\ \textit{donde}\ 0\leq x_i\leq 1, i=1,...,n.$$

Teniendo en cuenta la identificación entre subconjuntos de N y vectores de $\{0,1\}^n$ se comprueba que f coincide con v en los vértices de I^n. De esta forma queda justificada la afirmación de que f es una extensión de v. Además, como dicha función es lineal respecto de cada variable x_i, se trata de una extensión multilineal de v. Es más, se demuestra que f es la única aplicación multilineal definida en I^n que coincide con v en los vértices de I^n.

La EML es especialmente útil para el cálculo de algunos de los conceptos de solución que han sido presentados con anterioridad.

Teorema 1.1.15 *(Owen 1972, 1975) Sea (N,v) un juego cooperativo de n jugadores y $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ su EML. Entonces*

- *El valor de Shapley para cada jugador $i\in N$ es*

$$\varphi_i[v]=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\ldots,t)\,dt$$

- *El valor de Banzhaf para cada jugador $i \in N$ es*

$$\beta_i[v]=\frac{\partial f}{\partial x_i}(1/2,\ldots,1/2)$$

Como puede verse en [2] y [56], este último procedimiento puede extenderse al cálculo de todo semivalor p–binomial evaluando las derivadas parciales de la EML en el punto $(p,p,\ldots,p)$,

$$\psi_i^p[v]=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,\ldots,p)$$

Ejemplos 1.1.16 (a) Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.1.1) La extensión multilineal del juego es:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) =& 20x_1x_4+30x_2x_4+50x_3x_4+10x_1x_2x_4+10x_1x_3x_4+ \\ & 10x_2x_3x_4-10x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

(b) Para el juego de mayoría ponderada planteado en el Ejemplo 1.1.3, que hace referencia a la toma de decisiones por mayoría absoluta en el Ayuntamiento de Manresa, la expresión correspondiente a la extensión multilineal es

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \; & x_1x_2+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_1x_3x_6+x_1x_4x_5+ \\ & x_1x_4x_6+x_2x_3x_4-2x_1x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_5- \\ & x_1x_2x_3x_6-x_1x_2x_4x_5-x_1x_2x_4x_6-2x_1x_3x_4x_5- \\ & 2x_1x_3x_4x_6-x_1x_3x_5x_6-x_1x_4x_5x_6+x_2x_3x_5x_6+ \\ & x_2x_4x_5x_6+2x_1x_2x_3x_4x_5+2x_1x_2x_3x_4x_6+ \\ & 2x_1x_3x_4x_5x_6-2x_2x_3x_4x_5x_6. \end{aligned}$$

Las asignaciones por los valores de Shapley, de Banzhaf y por los semivalores binomiales de los ejemplos anteriores han sido calculados a partir de la correspondiente EML.

1.1.5. El concepto de potencial

El valor de Shapley asigna a cada juego (N,v) un vector de pagos, es decir, a cada juego de n jugadores le corresponde n números reales que forman el vector solución que se ha establecido axiomáticamente.

Sea Γ el conjunto de juegos cooperativos con utilidad transferible. Definimos una aplicación sobre Γ de forma que a cada juego $(N,v) \in \Gamma$ se le asocie un único número real.

Una función $P : \Gamma \to \mathbb{R}$, con $P(\emptyset, v) = 0$, recibe el nombre de *función potencial* si verifica

$$\sum_{i\in N} [P(N,v) - P(N\backslash\{i\},v)] = v(N). \tag{1.5}$$

Teorema 1.1.17 *(Hart, Mas-Colell,1988) Existe una única función potencial* $P : \Gamma \to \mathbb{R}$. *Para cada juego v sobre N el vector de contribuciones marginales*

$$(P(N,v) - P(N\setminus\{i\},v))_{i\in N}$$

coincide con el valor de Shapley del juego. Además, el potencial de un juego queda unívocamente determinado aplicando recursivamente la expresión (1.5) a (N,v) *y a todos sus subjuegos.*

Observaciones 1.1.18 (a) El concepto de potencial fue introducido en 1988 por Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell ([46]). De la misma manera que derivando la función potencial respecto a cada una de sus variables se obtienen las componentes del campo conservativo, la derivada discreta de la función potencial permite obtener las componentes del valor de Shapley de cada juego:

$$D^i P(N,v) = P(N,v) - P(N\backslash\{i\},v) = \varphi_i[v]$$

(b) El potencial para cualquier juego v definido en N, puede calcularse de modo recursivo a partir de la relación (1.5), obteniendo

$$P(N,v) = \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{i\in N} P(N\setminus\{i\},v)\right] ,$$

junto a la condición inicial $P(\emptyset, v) = 0$.

Ejemplo 1.1.19 Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.1.1), si utilizamos la relación (1.5) para calcular de forma recursiva el potencial a partir de los subjuegos, tenemos:

$P(\{1,4\},v_{|\{1,4\}}) = 10$ $\quad P(\{2,4\},v_{|\{2,4\}}) = 15$ $\quad P(\{3,4\},v_{|\{3,4\}}) = 25$
$P(\{1,2,4\},v_{|\{1,2,4\}}) = \frac{85}{3}$ $\quad P(\{1,3,4\},v_{|\{1,3,4\}}) = \frac{115}{3}$ $\quad P(\{2,3,4\},v_{|\{2,3,4\}}) = \frac{130}{3}$
$P(N,v) = 57.5$ $\quad P(S,v) = 0$ $\quad$ para las demás $S \subset N$.

Recordemos que la derivada discreta de la función potencial permite obtener las componentes del valor de Shapley,

$$\begin{array}{llllll}
D^1P(N,v) = & P(N,v) - P(N\backslash\{1\},v) = & 57.5 - \frac{130}{3} & = & 14.167 & = \varphi_1[v] \\
D^2P(N,v) = & P(N,v) - P(N\backslash\{2\},v) = & 57.5 - \frac{115}{3} & = & 19.167 & = \varphi_2[v] \\
D^3P(N,v) = & P(N,v) - P(N\backslash\{3\},v) = & 57.5 - \frac{85}{3} & = & 29.167 & = \varphi_3[v] \\
D^4P(N,v) = & P(N,v) - P(N\backslash\{4\},v) = & 57.5 - 0 & = & 57.5 & = \varphi_4[v]
\end{array}$$

1.2. Juegos bicooperativos

1.2.1. Definiciones

Sea N un conjunto finito de *jugadores* y $3^N = \{(S,T) : S,T \subseteq N, S \cap T = \emptyset\}$ el conjunto de todas las parejas ordenadas de coaliciones disjuntas. Grabisch y Labreuche [45] definen una relación en 3^N dada por

$$(A,B) \sqsubseteq (C,D) \Leftrightarrow A \subseteq C, B \supseteq D.$$

$(3^N, \sqsubseteq)$ tiene estructura de retículo distributivo.

Siguiendo [8], un *juego bicooperativo* sobre N es una función $b : 3^N \to \mathbb{R}$, que asigna un número real $b(S,T)$ a cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$, tal que $b(\emptyset,\emptyset) = 0$. Para cada $(S,T) \in 3^N$, el valor $b(S,T)$ representa la ganancia máxima (si $b(S,T) > 0$) o la pérdida mínima (si $b(S,T) < 0$) que se obtiene cuando los jugadores de S están a favor de un cambio en la situación planteada, los jugadores de T están en contra del cambio y a los jugadores de $N \setminus (S \cup T)$ les es indiferente. Entonces, $b(\emptyset,N)$ representa el coste cuando todos los jugadores están en contra del cambio y $b(N,\emptyset)$ es la ganancia que se obtiene cuando todos los jugadores quieren cambiar la situación actual. En consecuencia, el beneficio total en un juego bicooperativo viene dado por $b(N,\emptyset) - b(\emptyset,N)$. Denotaremos por $\mathcal{BG}_N$ el conjunto de todos los juegos bicooperativos sobre N.

Veamos a continuación un ejemplo que sirve para ilustrar la utilización de este tipo de juegos.

Ejemplo 1.2.1 Dos compañías de seguros, A_1 y A_2, compiten siempre para conseguir el máximo número de clientes en una región determinada. Si N representa el conjunto de agentes de seguros, cada uno de ellos con una cartera propia de clientes, podemos definir el juego bicooperativo $b(S,T)$ como el beneficio de la compañía A_1 cuando los jugadores de S trabajan para A_1, los jugadores de T trabajan para A_2 y los jugadores de $N \setminus (S \cup T)$ no trabajan para A_1 ni para A_2.

El conjunto de todos los juegos bicooperativos definidos en N, $\mathcal{BG}_N$, con las operaciones naturales de las funciones reales, tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Para cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$ tal que $(S,T) \neq (\emptyset,\emptyset)$, el *juego de identidad* $\delta_{(S,T)}$ viene definido por

$$\delta_{(S,T)}(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A,B) = (S,T) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El conjunto de todos los juegos identidad es una base del espacio $\mathcal{BG}_N$, así pues, $\dim(\mathcal{BG}_N) = 3^n - 1$ si $n = |N|$.

Los *juegos de unanimidad superiores* $\bar{u}_{(S,T)}$, así como los *juegos de unanimidad inferiores* $\underline{u}_{(S,T)}$, definidos para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$ tal que $(S,T) \neq (\emptyset,\emptyset)$, como:

$$\bar{u}_{(S,T)}(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\emptyset,\emptyset) \neq (A,B) \sqsupseteq (S,T) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\underline{u}_{(S,T)}(A,B) = \begin{cases} -1 & \text{si } (\emptyset,\emptyset) \neq (A,B) \sqsubseteq (S,T) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

forman también sendas bases del espacio de juegos bicooperativos $\mathcal{BG}_N$.

Un juego bicooperativo es *monótono* si $b(S,T) \leq b(S',T')$ cuando $(S,T) \sqsubseteq$

(S',T') y *ternario* si, además, $b(S,T) \in \{-1,0,1\}$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$.

Un *juego ternario biponderado*, que representamos por el esquema

$$b \equiv [[k_1;w_1,...,w_n],[k_2;m_1,...m_n]],$$

es el juego bicooperativo ternario definido por

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq k_1 \text{ y } m(T) < k_2 \\ -1 & \text{si } w(S) < k_1 \text{ y } m(T) \geq k_2 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $w_i > 0$ es el número de votos que tiene el jugador i para aprobar una decisión y $m_i > 0$ es el número de votos que tiene el jugador i para bloquearla, siendo $0 < k_1 \leq w(N)$ y $0 < k_2 \leq m(N)$.

Este tipo de juegos puede entenderse como una extensión a los juegos bicooperativos de los juegos de mayoría ponderada de los que hemos hablado en la sección 1.1.2.

Veamos a continuación un ejemplo de este tipo de juegos.

Ejemplo 1.2.2 El consejo de administración de un club deportivo profesional está compuesto por 11 miembros. En el consejo de administración solo están representados los accionistas que poseen un número determinado de acciones y el número de representantes varía según el número de acciones que tienen. Actualmente, en el consejo están representados tres grupos de accionistas: el primero dispone de 6 votos, el segundo tiene 4 votos y el tercero 1 voto. Para aprobar una propuesta cualquiera se requiere como mínimo siete votos a favor y se pueden bloquear las propuestas con un mínimo de 5 votos en contra.

Este sistema de votación puede representarse mediante el juego ternario biponderado

$$b \equiv [[7;6,4,1],[5;6,4,1]]$$

Es decir, para cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$,

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ w(S) \geq 7 \text{ y } m(T) < 5 \\ -1 & \text{si } \ w(S) < 7 \text{ y } m(T) \geq 5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Las coaliciones sobre las que el juego toma valor 1 son

$$(\{1,2\},\{3\}),(\{1,3\},\{2\}),(\{1,2\},\emptyset),(\{1,3\},\emptyset) \text{ y } (\{1,2,3\},\emptyset);$$

El juego toma valor -1 sobre las coaliciones

$$(\emptyset,\{1,2,3\}),(\emptyset,\{1,2\}),(\emptyset,\{1,3\}),(\emptyset,\{2,3\}),(\emptyset,\{1\}),(\{1\},\{2,3\}),$$

$$(\{2\},\{1,3\}),(\{3\},\{1,2\}),(\{2\},\{1\}),(\{3\},\{1\}) \text{ y } (\{2,3\},\{1\});$$

y 0 sobre las coaliciones restantes.

Un jugador $i \in N$ es un *títere* en el juego b si $b(S \cup \{i\},T) = b(S,T) + b(\{i\},\emptyset)$ y $b(S,T \cup \{i\}) = b(S,T) + b(\emptyset,\{i\})$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$, y es *nulo* en b si, además, $b(\{i\},\emptyset) = b(\emptyset,\{i\}) = 0$.

Dos jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* en el juego b si,

$$\begin{aligned} &b(S \cup \{i\},T) = b(S \cup \{j\},T), \\ &b(S,T \cup \{i\}) = b(S,T \cup \{j\}) \text{ y} \\ &b(S \cup \{i\},T \cup \{j\}) = b(S \cup \{j\},T \cup \{i\}) \end{aligned}$$

para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N \setminus \{i,j\}}$.

Para una coalición $R \subseteq N$ diferente del conjunto vacío, la restricción sobre R de un juego b definido en N es el juego $b_{|R}$ que llamaremos *subjuego* de b y viene definido por $b_{|R}(S,T) = b(S,T)$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^R$.

1.2.2. Conceptos de solución para juegos bicooperativos

Análogamente al caso de los juegos cooperativos, se define un *concepto de solución* para los juegos bicooperativos como una regla que asigna a cada juego b de n jugadores un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, siguiendo unas reglas predeterminadas. En principio ese subconjunto puede ser vacío, contener un único elemento o varios elementos, según el juego que se considere o según la regla que se establezca.

Definimos un *valor* sobre $\mathcal{BG}_N$ como una función $g : \mathcal{BG}_N \to \mathbb{R}^n$, que asigna a cada juego b un vector $g[b]$ con componentes $g_i[b]$ para todo $i \in N$, que representa la distribución de pagos entre los jugadores. Éste es un concepto de solución que selecciona un único vector de pagos.

El conjunto de Weber o el core constituyen ejemplos de conceptos de solución que en general proporcionan (cuando existen) un conjunto de vectores para cada juego.

1.2.2.1. El valor de Shapley para juegos bicooperativos

En [9] Bilbao *et al.* definen y caracterizan un valor para juegos bicooperativos al que llaman *valor de Shapley*, que puede interpretarse de manera similar al valor clásico de Shapley para juegos cooperativos.

Definición 1.2.3 *(Bilbao, Fernández, Jiménez y López, 2008) El valor de Shapley para un juego bicooperativo $b \in \mathcal{BG}_N$ viene definido para cada jugador i de la siguiente manera,*

$$\varphi_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[p^i_{(S,T)}(b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)) + q^i_{(S,T)}(b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})) \right],$$

donde para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$,

$$p^i_{s,t} = \frac{(n+s-t)!\,(n+t-s-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t} \;\; y \;\; q^i_{s,t} = \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t}.$$

Los coeficientes de ponderación son independientes del jugador i y solo dependen del cardinal de las coaliciones S y T.

Teorema 1.2.4 *(Bilbao, Fernández, Jiménez y López, 2008) Un valor* ϕ *sobre* $\mathcal{BG}_N$ *es el valor de Shapley si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- *Linealidad:* $\phi[b+b'] = \phi[b] + \phi[b']$ *(aditividad) y* $\phi[\lambda b] = \lambda\phi[b]$ *para todo* $b, b' \in \mathcal{GB}_N$ *y todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

- *Positividad: si b es monótono, entonces* $\phi[b] \geq 0$*;*

- *Jugador títere: si* $i \in N$ *es un títere en el juego b, entonces*

$$\phi_i[b] = b(\{i\},\emptyset) - b(\emptyset,\{i\}).$$

- *Eficiencia:* $\sum_{i\in N} \phi_i[b] = b(N,\emptyset) - b(\emptyset,N)$ *para todo* $b \in \mathcal{BG}_N$*;*

- *Axioma estructural: para cada par de coaliciones* $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$*,* $j \in S$ *y* $k \in T$*, se cumple que:*

$$\frac{c([(\emptyset,N),(S\setminus\{j\},T)])}{c([(\emptyset,N),(S,T\cup\{i\})])} = -\frac{\phi_j[\delta_{(S,T)}]}{\phi_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}]} \ \ y \ \ \frac{c([(S,T\setminus\{k\}),(N,\emptyset)])}{c([(S\cup\{i\},T),(N,\emptyset)])} = -\frac{\phi_k[\delta_{(S,T)}]}{\phi_i[\delta_{(S\cup\{i\},T)}]},$$

  donde $c([((A,B),(C,D)])$ *es el número de cadenas maximales en el subretículo* $[(A,B),(C,D)]$.

Labreuche y Grabisch ([48],[49]) introducen otros conceptos de solución diferentes sobre juegos bicooperativos, que pueden interpretarse también como una “extensión” del valor clásico de Shapley sobre juegos cooperativos. Esto es debido a que en el caso bicooperativo no basta con la propiedad de eficiencia para caracterizar dicho valor tal y como ocurre en el caso cooperativo.

1.2.2.2. Valores biprobabilísticos

En [11] Bilbao *et al.* definen y caracterizan los *valores biprobabilísticos* para juegos bicooperativos de la siguiente forma.

Definición 1.2.5 *(Bilbao, Fernández, Jiménez y López, 2008) Un valor* ϕ *para el jugador i en* $\mathcal{BG}_N$ *es un valor biprobabilístico si existen dos colecciones de números reales*

$$\{p^i_{(S,T)} : (S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}\} \quad y \quad \{q^i_{(S,T)} : (S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}\}$$

satisfaciendo

$$p^i_{(S,T)} \geq 0,\ q^i_{(S,T)} \geq 0,\ \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} p^i_{(S,T)} = 1 \quad y \quad \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} q^i_{(S,T)} = 1$$

tal que,

$$\phi_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[p^i_{(S,T)}(b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)) + q^i_{(S,T)}(b(S,T) - b(S,T\cup\{i\}))\right]$$

para cada juego $b \in \mathcal{BG}_N$.

Aquí también $\phi_i[b]$ es una suma ponderada de las contribuciones marginales del jugador i, $b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)$, cuando i se une a la coalición $S \subseteq N\setminus\{i\}$ y sus contribuciones marginales, $b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})$, cuando i abandona la coalición $T\cup\{i\}$. $p^i_{(S,T)}$ es la probabilidad de que i se una a S y $q^i_{(S,T)}$ es la probabilidad de que el jugador i abandone $T\cup\{i\}$.

Teorema 1.2.6 *(Bilbao, Fernández, Jiménez y López, 2008) Un valor* ϕ *sobre* $\mathcal{BG}_N$ *es un valor biprobabilístico si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- *Linealidad:* $\phi[b+b'] = \phi[b] + \phi[b']$ *(aditividad) y* $\phi[\lambda b] = \lambda\phi[b]$ *para todo* $b, b' \in \mathcal{GB}_N$ *y todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
- *Positividad: si* b *es monótono, entonces* $\phi[b] \geq 0$*;*
- *Jugador títere: si* $i \in N$ *es un títere en el juego* b*, entonces* $\phi_i[b] = b(\{i\},\emptyset) - b(\emptyset,\{i\})$.

Capítulo 2

Recuperación de coeficientes en semivalores

En este capítulo nos centraremos en estudiar la relación existente entre los coeficientes de ponderación que definen un semivalor y los coeficientes de los semivalores inducidos en cardinalidades inferiores. Como ya hemos dicho en el capítulo precedente, cada semivalor, como concepto de solución definido en juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores, queda unívocamente determinado mediante coeficientes que ponderan las contribuciones marginales de los jugadores. Teniendo en cuenta que un semivalor induce semivalores en cardinalidades inferiores, es importante conocer la naturaleza de la relación entre sus coeficientes de ponderación. Diversos autores (Dubey et al. [33] y Dragan ([30], [31]) han estudiado esta relación dando expresiones que las relacionan. Así pues, nos preguntamos si es posible reconstruir los coeficientes de ponderación de un semivalor a partir de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. Es más, ¿qué condiciones debería satisfacer una secuencia de números cualesquiera para que se corresponda con la familia de los últimos coeficientes de ponderación de un semivalor inducido? A parte de responder a las cuestiones planteadas, proporcionamos dos caracterizaciones de cada semivalor definido en los juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores: una, entre todos los semivalores; otra, entre todos los conceptos de solución en juegos cooperativos.

Nuestro objetivo es estudiar los coeficientes de ponderación que caracterizan de manera unívoca un semivalor. En primer lugar, demostramos que estos coeficientes de ponderación pueden reconstruirse a partir de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. En segundo lugar, obtenemos condiciones sobre los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos que permiten obtener los coeficientes de ponderación del semivalor original.

Habida cuenta de que los juegos de unanimidad forman una base del espacio vectorial de los juegos cooperativos, un semivalor está completamente determinado por su acción sobre estos juegos. El hecho de que el pago que un semivalor asigna a cada jugador en estos juegos está estrechamente relacionado con el último coeficiente de ponderación de los semivalores inducidos, nos permite caracterizar cada semivalor dentro del conjunto de todos los semivalores definidos sobre juegos cooperativos con un conjunto finito de jugadores. Con el fin de proporcionar una axiomatización individual de cada semivalor entre todos los conceptos de solución en juegos cooperativos, se introducirá una propiedad no estándar, llamada " *Asignaciones acotadas sucesivamente en juegos de unanimidad*" y se combinará con las propiedades clásicas de *linealidad, simetría* y *propiedad del jugador títere*.

2.1. Recuperación de coeficientes en semivalores

Esta sección está dedicada al estudio de los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos para establecer condiciones que permitan reconstruir los coeficientes de ponderación asociados al semivalor original.

Los semivalores para juegos cooperativos se definen sobre cardinales, más que sobre conjuntos de jugadores específicos. Esto significa que una familia de coeficientes de ponderación $\{p_s\}_{s=0}^{n-1}$ define un semivalor ψ en todos los conjuntos de jugadores N tales que $n = |N|$. Cuando sea necesario, escribiremos $\psi^{(n)}$ para referirnos a un semivalor definido sobre un conjunto de jugadores de cardinal n y p_s^n serán los correspondientes coeficientes de ponderación.

Un semivalor $\psi^{(n)}$ induce semivalores $\psi^{(t)}$ para todas las cardinalidades $t < n$, cuyos coeficientes de ponderación se obtienen de manera recurrente a partir de la fórmula obtenida por Dubey et al. [33] a la que Dragan [30] se refiere como *fórmula del triángulo (inverso) de Pascal*:

$$p_s^t = p_s^{t+1} + p_{s+1}^{t+1} \quad \text{para} \quad 0 \le s < t \le n-1, \tag{2.1}$$

Si $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de semivalores, uno para cada cardinal n, satisfaciendo la fórmula de recurrencia anterior, diremos que Ψ es un *multisemivalor*. En particular, los valores de Shapley, de Banzhaf y todos los semivalores p–binomiales (para cada valor de p) son multisemivalores.

Al aplicar la relación (2.1) repetidamente, se obtiene la expresión de los coeficientes de ponderación de cualquier semivalor inducido en términos de los coeficientes del semivalor original,

$$p_s^t = \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{s+j}^n \quad \text{para} \quad 0 \le s < t \le n-1 \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1.1 Sea ψ^4 un semivalor definido sobre un juego de 4 jugadores con coeficientes de ponderación $(p_s^4)_{s=0}^3 = (0.16, 0.14, 0.12, 0.06)$. Los coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos ψ^t, para todo subconjunto de jugadores con cardinal t tal que $1 \le t \le 3$, se calculan a partir de la expresión (2.1). Por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} p_0^3 = p_0^4 + p_1^4 = 0.16 + 0.14 = 0.3, & p_1^3 = p_1^4 + p_2^4 = 0.14 + 0.12 = 0.26, \\ p_2^3 = p_2^4 + p_3^4 = 0.12 + 0.06 = 0.18, & p_0^2 = p_0^3 + p_1^3 = 0.30 + 0.26 = 0.56, \\ p_1^2 = p_1^3 + p_2^3 = 0.26 + 0.18 = 0.44, \quad \ldots & \end{array}$$

Estos valores se pueden representar en una tabla triangular de la siguiente manera:

	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1
p_0^n	0.16	0.30	0.56	1.00
p_1^n	0.14	0.26	0.44	
p_2^n	0.12	0.18		
p_3^n	0.06			

En particular, la expresión (2.2) nos permite calcular el último coeficiente de ponderación de cada semivalor inducido por ψ^n a partir de sus coeficientes de ponderación:

$$p_{t-1}^t = \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} p_{t-1+j}^n \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq n-1. \tag{2.3}$$

Esta expresión es útil para cardinales $2 \leq t \leq n-1$. Si $t = 1$, de acuerdo con la condición (1.1), $p_0^1 = 1$.

El siguiente resultado proporciona una fórmula inversa que permite expresar los coeficientes de ponderación de cualquier semivalor en términos de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos.

Lema 2.1.2 *Sea ψ^n un semivalor definido sobre $\mathcal{G}_N$, con coeficientes de ponderación p_s^n. Estos coeficientes de ponderación pueden recuperarse a partir de los últimos coeficientes p_{t-1}^t de sus semivalores inducidos ψ^t de la siguiente forma:*

$$p_s^n = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s-1}{t-s-1} p_{t-1}^t \quad \textit{para} \quad 0 \leq s \leq n-2. \tag{2.4}$$

Demostración: Sabemos que $p_{n-2}^{n-1} = p_{n-2}^n + p_{n-1}^n$. Entonces

$$p_{n-2}^n = p_{n-2}^{n-1} - p_{n-1}^n,$$

que prueba la expresión (2.4) para $s = n-2$.

Supongamos que la expresión (2.4) se cumple para s tal que $k \leq s \leq n-2$; demostraremos que se cumple también para $s = k-1$.

Tomemos $t = k$ en la ecuación (2.3),

$$p_{k-1}^k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} p_{k-1+j}^n,$$

Esta expresión nos permite aislar el coeficiente p_{k-1}^n y aplicar la hipótesis de inducción:

$$
\begin{aligned}
p_{k-1}^{n} &= p_{k-1}^{k} - \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} p_{k-1+j}^{n} \\
&= p_{k-1}^{k} - \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} \sum_{t=k+j}^{n} (-1)^{t-k-j} \binom{n-k-j}{t-k-j} p_{t-1}^{t} \\
&= p_{k-1}^{k} - \sum_{t=k+1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{t-k} (-1)^{t-k-j} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{t-k-j} \right] p_{t-1}^{t} \\
&= p_{k-1}^{k} - \sum_{t=k+1}^{n} (-1)^{t-k} \binom{n-k}{t-k} \left[\sum_{j=1}^{t-k} \binom{t-k}{j} (-1)^{j} \right] p_{t-1}^{t},
\end{aligned}
$$

La última igualdad es consecuencia de

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{t-k-j} = \binom{n-k}{t-k}\binom{t-k}{j}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{t-k} \binom{t-k}{j} (-1)^{j} = -1,$$

se deduce

$$p_{k-1}^{n} = p_{k-1}^{k} + \sum_{t=k+1}^{n} (-1)^{t-k} \binom{n-k}{t-k} p_{t-1}^{t} = \sum_{t=k}^{n} (-1)^{t-k} \binom{n-k}{t-k} p_{t-1}^{t}. \quad \square$$

El Teorema 1.1.10 nos dice que cada selección de una familia de coeficientes de ponderación no negativos $(p_s)_{s=0}^{n-1}$ define de manera unívoca un semivalor sobre los juegos cooperativos con n jugadores si, y solo si, estos pesos satisfacen la expresión (1.1). Los coeficientes de ponderación del semivalor nos permiten obtener los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos p_{t-1}^{t} $(1 < t \leq n-1)$ y, en sentido contrario, el Lema anterior demuestra que estos últimos coeficientes de ponderación permiten recuperar los coeficientes de ponderación del semivalor original.

El siguiente resultado establece algunas restricciones para los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos.

Proposición 2.1.3 *(a) Sea ψ un semivalor definido sobre $\mathcal{G}_N$ con coeficientes de ponderación $(p_s^n)_{s=0}^{n-1}$. Los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos están acotados sucesivamente según las expresiones*

$$(i) \quad 0 \leq p_{n-1}^n \leq 1$$
$$(ii) \quad q_s \leq p_{s-1}^s \leq Q_s \quad \textit{para } s = n-1, n-2, \ldots, 2,$$

donde

$$q_s = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s}{t-s} p_{t-1}^t \tag{2.5}$$

y

$$Q_s = \binom{n-1}{s-1}^{-1} + (s-1) \sum_{t=s+1}^{n} \frac{(-1)^{t-s+1}}{t-1} \binom{n-s}{t-s} p_{t-1}^t. \tag{2.6}$$

(b) Siempre es posible encontrar semivalores, dentro del conjunto de todos los semivalores definidos sobre $\mathcal{G}_N$, que satisfacen las igualdades dadas en (i) o en (ii).

Demostración: (a) La condición de no negatividad de todos los coeficientes de ponderación $(p_s^n)_{s=0}^{n-1}$ nos permite afirmar que $p_{n-1}^n \geq 0$. Además, teniendo en cuenta la expresión (1.1), obtenemos $p_{n-1}^n \leq 1$, por lo que queda probada la parte (i) de la proposición.

A continuación probaremos las desigualdades correspondientes a la parte (ii).

En el Lema 2.1.2 hemos demostrado que cada coeficiente de ponderación p_s^n se puede escribir en términos de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. Si aplicamos este resultado al coeficiente p_{s-1}^n,

$$p_{s-1}^n = \sum_{t=s}^{n} (-1)^{t-s} \binom{n-s}{t-s} p_{t-1}^t \geq 0 \quad \text{para } s = n-1, \ldots, 2, \tag{2.7}$$

y por consiguiente

$$p_{s-1}^s \geq \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s}{t-s} p_{t-1}^t \quad \text{para } s = n-1, \ldots, 2. \tag{2.8}$$

Análogamente, para $s = n-1, \ldots, 2$, teniendo en cuenta la expresión (1.1),

$$\sum_{k=s-1}^{n-1}\binom{n-1}{k}p_k^n=\sum_{k=s-1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\sum_{t=k+1}^{n}(-1)^{t-k-1}\binom{n-k-1}{t-k-1}p_{t-1}^t\le 1, \quad (2.9)$$

y consecuentemente,

$$\sum_{t=s}^{n}\left[\sum_{k=s-1}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-k-1}{t-k-1}\right]p_{t-1}^t\le 1,$$

$$\binom{n-1}{s-1}p_{s-1}^s\le 1+\sum_{t=s+1}^{n}\left[\sum_{k=s-1}^{t-1}(-1)^{t-k}\binom{n-1}{k}\binom{n-k-1}{t-k-1}\right]p_{t-1}^t,$$

$$p_{s-1}^s\le\binom{n-1}{s-1}^{-1}+\sum_{t=s+1}^{n}\left[\sum_{k=s-1}^{t-1}(-1)^{t-k}\binom{n-1}{k}\binom{n-k-1}{t-k-1}\binom{n-1}{s-1}^{-1}\right]p_{t-1}^t.$$

Tras varios cálculos en el sumatorio interior, podemos escribir

$$p_{s-1}^s\le\binom{n-1}{s-1}^{-1}+\sum_{t=s+1}^{n}\frac{(n-s)!(s-1)!}{(n-t)!(t-1)!}\left[\sum_{k=s-1}^{t-1}(-1)^{t-k}\binom{t-1}{k}\right]p_{t-1}^t.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la igualdad

$$\sum_{k=s-1}^{t-1}(-1)^{t-k}\binom{t-1}{k}=(-1)^{t-s+1}\frac{s-1}{t-1}\binom{t-1}{s-1},$$

la desigualdad anterior se convierte en

$$p_{s-1}^s\le\binom{n-1}{s-1}^{-1}+(s-1)\sum_{t=s+1}^{n}\frac{(-1)^{t-s+1}}{t-1}\binom{n-s}{t-s}p_{t-1}^t \quad \text{para } s=n-1,n-2,\ldots,2.$$

(b) De acuerdo con la ecuación (1.1), todos los semivalores que satisfacen $\sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-1}{s}p_s^n=1$ cumplen que $p_{n-1}^n=0$, mientras que solo el índice marginal μ verifica que $p_{n-1}^n=1$.

- En el caso extremo $p_{s-1}^s=q_s$ en (ii), las expresiones (2.8) y (2.7) se convierten en igualdades y entonces $p_{s-1}^n=0$.

- El otro caso extremo, $p^s_{s-1} = Q_s$, reduce la ecuación (2.9) a una igualdad, de modo que al considerarla junto con (1.1):

$$\sum_{k=s-1}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^n_k = 1 \quad \Rightarrow \quad p^n_0 = \cdots = p^n_{s-2} = 0 \quad \text{para } s = n-1, \ldots, 2. \quad \square$$

La proposición anterior prueba que los últimos coeficientes de ponderación de cada semivalor inducido están acotados y sus cotas dependen de los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos definidos en juegos con más jugadores.

De ahora en adelante nos preguntamos qué valores pueden tomar los coeficientes p^t_{t-1} $(1 < t \leq n)$ para que cuando realicemos el cálculo en sentido inverso y encontemos los coeficientes p^n_s $(0 \leq s \leq n-1)$, éstos definan efectivamente un semivalor sobre el conjunto de juegos cooperativos con n jugadores. En otras palabras, ¿es posible encontrar una fórmula similar a la expresión (1.1) para los últimos coeficientes de ponderación de cualquier semivalor inducido?

En el siguiente Teorema damos una respuesta parcial a esta pregunta. Concretamente, se fijan condiciones para que una secuencia de números reales pueda ser considerada como familia de los últimos coeficientes de ponderación de cualquier semivalor inducido.

Teorema 2.1.4 *Una familia de números $(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2)$ puede ser elegida de forma secuencial como los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos de un semivalor ψ definido sobre $\mathcal{G}_N$, empezando con p^n_{n-1} y llegando hasta p^2_1, si y solo si se verifica:*

$$(i) \quad 0 \leq k_n \leq 1$$
$$(ii) \quad q_s \leq k_s \leq Q_s \quad \textit{para } s = n-1, n-2, \ldots, 2,$$

donde

$$q_s = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s}{t-s} k_t \tag{2.10}$$

y

$$Q_s = \binom{n-1}{s-1}^{-1} + (s-1) \sum_{t=s+1}^{n} \frac{(-1)^{t-s+1}}{t-1} \binom{n-s}{t-s} k_t. \tag{2.11}$$

Demostración: $(\Rightarrow)$ Se deduce directamente de la parte (a) de la Proposición 2.1.3, identificando $k_n = p^n_{n-1}, \ldots, k_2 = p^2_1$.

$(\Leftarrow)$ Cualquier número k_n tal que $0 \leq k_n \leq 1$ es un valor admisible como coeficiente de ponderación p^n_{n-1} de algún semivalor. Supongamos que $(k_n, k_{n-1}, ..., k_t)$ es una sucesión de números dados de forma secuencial admisibles como coeficientes de ponderación $(p^n_{n-1}, p^{n-1}_{n-2}, ..., p^t_{t-1})$ para $n-2 \geq t \geq 2$, entonces, aplicando la parte (b) de la Proposición 2.1.3, y por continuidad, todos los valores k_{t-1} tales que $q_{t-1} \leq k_{t-1} \leq Q_{t-1}$ son admisibles como últimos coeficientes de ponderación p^{t-1}_{t-2} de algún semivalor. $\square$

Los semivalores *regulares*, introducidos por Carreras y Freixas [20] constituyen un familia particular de semivalores que se caracterizan por tener todos los coeficientes de ponderación positivos. Bajo esta suposición, todas las contribuciones marginales debidas a cada jugador intervienen al considerar las asignaciones correspondientes a tales semivalores. El valor de Shapley y todo p-semivalor binomial para $p \in (0,1)$ son semivalores regulares. En [20] se estudian propiedades interesantes de los semivalores regulares, destacando especialmente su buen comportamiento con respecto a la monotonía estricta, propiedad que los caracteriza dentro de la familia de semivalores. En [3] se proporciona una caracterización axiomática de los semivalores regulares.

Usando la misma notación que en el Teorema 2.1.4, podemos formular un resultado especialmente adaptado a los semivalores regulares.

Corolario 2.1.5 *Una familia de números $(k_n, k_{n-1}, ..., k_2)$ puede ser elegida de forma secuencial como los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos de un semivalor regular ψ, empezando por p^n_{n-1} y continuando hasta p^2_1, si y solo si se verifica:*

$$\begin{array}{ll} (i) & 0 < k_n < 1 \\ (ii) & q_s < k_s < Q_s \quad \textit{para } s = n-1, n-2, \ldots, 2. \end{array}$$

Observación 2.1.6 En una primera lectura, parece que las expresiones (2.10) y (2.11) para las cotas q_s y Q_s son bastante complicadas. Veamos a continuación, qué fórmulas obtenemos para los primeros valores de q_s y Q_s.

- Las cotas para p_{n-2}^{n-1} $(n > 2)$ son:

$$q_{n-1} = k_n; \quad Q_{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}k_n.$$

- Las cotas para p_{n-3}^{n-2} $(n > 3)$ son:

$$\begin{aligned} q_{n-2} &= 2k_{n-1} - k_n; \\ Q_{n-2} &= \frac{2}{(n-1)(n-2)} + (n-3)\left[\frac{2k_{n-1}}{n-2} - \frac{k_n}{n-1}\right]. \end{aligned}$$

- Las cotas para p_{n-4}^{n-3} $(n > 4)$ son:

$$\begin{aligned} q_{n-3} &= 3k_{n-2} - 3k_{n-1} + k_n; \\ Q_{n-3} &= \frac{3!}{(n-1)(n-2)(n-3)} + (n-4)\left[\frac{3k_{n-2}}{n-3} - \frac{3k_{n-1}}{n-2} + \frac{k_n}{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.7 Consideramos el espacio vectorial $\mathcal{G}_N$ de los juegos cooperativos definidos sobre un conjunto de 5 jugadores, donde $|N| = 5$.
(a) La secuencia de números $(0.24,\ 0.36,\ 0.49,\ 0.65)$ es una secuencia admisible como últimos coeficientes de ponderación $(p_4^5, p_3^4, p_2^3, p_1^2)$ de los semivalores inducidos de algún semivalor ψ^5 definido sobre $\mathcal{G}_N$.

Se cumple la primera acotación $0 < 0.24 < 1$.

Utilizando las fórmulas dadas en la observación anterior para $n = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned} q_4 &= 0.24 < 0.36 < 0.43 &&= Q_4; \\ q_3 &= 0.48 < 0.49 < 0.52\widehat{6} &&= Q_3 \qquad \text{y} \\ q_2 &= 0.63 < 0.65 < 0.685 &&= Q_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A partir de estos últimos coeficientes de ponderación

$$(p_4^5, p_3^4, p_2^3, p_1^2, p_0^1) = (0.24,\ 0.36,\ 0.49,\ 0.65,\ 1.00),$$

los restantes coeficientes de ponderación de cada semivalor inducido ψ^t, $1 \le t \le 5$, pueden ser reconstruidos y, en particular, obtendremos los del semivalor ψ^5.

Para ello basta con considerar una tabla triangular como en el Ejemplo 2.1.1, pero ahora empezando con los coeficientes conocidos (en negrita) y luego procediendo de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba:

	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1
p_0^n	0.14	0.16	0.19	0.35	**1.00**
p_1^n	0.02	0.03	0.16	**0.65**	
p_2^n	0.01	0.13	**0.49**		
p_3^n	0.12	**0.36**			
p_4^n	**0.24**				

Por ejemplo,

$$p_3^5 = p_3^4 - p_4^5 = 0.12, \quad p_2^4 = p_2^3 - p_3^4 = 0.13, \quad p_1^3 = p_1^2 - p_2^3 = 0.16,$$
$$p_0^2 = p_0^1 - p_1^2 = 0.35, \quad p_2^5 = p_2^4 - p_3^5 = 0.01, \quad p_1^4 = p_1^3 - p_2^4 = 0.03,$$
$$etc.$$

Las desigualdades estrictas en (2.12) garantizan la condición de regularidad del semivalor.

(b) Por el contrario, la secuencia de números $(0.13,\ 0.24,\ 0.42,\ 0.65)$ no es admisible como familia de los últimos coeficientes de ponderación $(p_4^5, p_3^4, p_2^3, p_1^2)$ de ningún semivalor. Observemos que se cumple que $0 < 0.13 < 1$ y

$$q_4 = 0.13 < 0.24 < 0.3475 = Q_4 \quad \text{y} \quad q_3 = 0.35 < 0.42 < 0.421\widehat{6} = Q_3,$$

sin embargo $q_2 = 0.67$ y $Q_2 = 0.6725$, así que $0.65 \notin [q_2, Q_2]$.

Si llevamos a cabo un procedimiento como el descrito en la parte (a) y construimos una tabla triangular similar a la anterior, los números obtenidos son todos positivos, excepto en la primera columna donde obtenemos

$$(0.09, -0.02, 0.07, 0.11, 0.13).$$

Estas cantidades no se corresponden con los coeficientes de ponderación de ningún semivalor definido en juegos cooperativos sobre un conjunto de cinco jugadores.

2.2. Juegos de unanimidad y semivalores

Dado que los juegos de unanimidad forman una base de $\mathcal{G}_N$, un semivalor queda completamente determinado por su acción sobre estos juegos utilizando la propiedad de linealidad. En esta sección nos planteamos la siguiente pregunta: supongamos que queremos definir un valor lineal sobre un conjunto finito de jugadores asignando una cantidad k_s a los jugadores que pertenecen a S en el juego de unanimidad u_S, donde $s = |S|$. Entonces, ¿bajo qué condiciones dichas cantidades permiten definir un semivalor? Este problema ha sido estudiado recientemente por Bernardi y Lucchetti [7]. En su trabajo establecen una condición suficiente para construir semivalores a través de los juegos de unanimidad mediante secuencias completamente monótonas.

Nuestro objetivo es obtener de forma secuencial intervalos acotados para todas las asignaciones admisibles a jugadores en los juegos de unanimidad. Para ello, en el siguiente lema relacionamos los últimos coeficientes de ponderación p^s_{s-1} de los semivalores inducidos ψ^s, $1 \le s \le n$, estudiados en la Sección 2.1, con las asignaciones sobre los juegos de unanimidad u_S en el espacio vectorial original $\mathcal{G}_N$.

Lema 2.2.1 *Sea ψ un semivalor definido sobre $\mathcal{G}_N$ con coeficientes de ponderación $(p^n_s)^{n-1}_{s=0}$, entonces,*

$$\psi_i[u_S] = p^s_{s-1} \quad \forall i \in S, \forall S \subseteq N \text{ donde } 1 \le s \le n.$$

Demostración: Este resultado se obtiene directamente aplicando (1.2) y (2.3) a los juegos de unanimidad u_S. $\square$

Teniendo en cuenta el resultado anterior, el Teorema 2.1.4 se puede reescribir en términos de las asignaciones correspondientes a los jugadores en los respectivos juegos de unanimidad de la siguiente manera:

Proposición 2.2.2 *(a) Para cada selección de números reales $(k_n, \ldots, k_2)$ existe un único semivalor $\psi : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^N$ satisfaciendo*

(i) $\psi_i[u_N] = k_n \; \forall i \in N$ *tal que* $k_n \in [0,1]$ *y*

(ii) $\psi_i[u_S] = k_s \ \forall S \subset N, 2 \leq s \leq n-1, \forall i \in S$ *tal que* $k_s \in [q_s, Q_s]$, *donde*

$$\begin{aligned} q_s &= \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s+1} \binom{n-s}{t-s} k_t, \\ Q_s &= \binom{n-1}{s-1}^{-1} + (s-1) \sum_{t=s+1}^{n} \frac{(-1)^{t-s+1}}{t-1} \binom{n-s}{t-s} k_t. \end{aligned} \tag{2.13}$$

(b) ψ *es el único semivalor cuyos coeficientes de ponderación* $(p_s^n)_{s=0}^{n-1}$ *vienen dados por*

$$p_s^n = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s-1}{t-s-1} k_t, \tag{2.14}$$

mientras que en todos los casos $1 = k_1 = \psi_i[u_{\{i\}}] \ \forall i \in N$.

Observación 2.2.3 Una interpretación para las cotas q_s y Q_s que se obtienen de forma secuencial en la Proposición anterior se deriva de la siguiente propiedad: las asignaciones a los jugadores debidas a un semivalor ψ con coeficientes de ponderación $(p_s^n)_{s=0}^{n-1}$ en los juegos de unanimidad u_S dependen de las asignaciones en los juegos de unanimidad u_T con $|T| > |S|$. Comenzando con u_N obtenemos

$$\psi_i[u_N] = p_{n-1}^n [u_N(N) - u_N(N \setminus \{i\})] = p_{n-1}^n.$$

Identificando p_{n-1}^n como k_n se cumple la condición (i) de la parte (a) de la Proposición 2.2.2.

Siguiendo con los juegos de unanimidad $u_{N \setminus \{j\}}$, $j \in N$, y para un jugador $i \in N \setminus \{j\}$ cualquiera,

$$\begin{aligned} \psi_i[u_{N\setminus\{j\}}] = p_{n-1}^n &[u_{N\setminus\{j\}}(N) - u_{N\setminus\{j\}}(N \setminus \{i\})] + \\ &p_{n-2}^n [u_{N\setminus\{j\}}(N \setminus \{j\}) - u_{N\setminus\{j\}}(N \setminus \{j,i\})] = p_{n-1}^n + p_{n-2}^n. \end{aligned}$$

Si escogemos p_{n-1}^n como k_n, los valores admisibles para $\psi_i[u_{N\setminus\{j\}}]$, es decir, k_{n-1}, dependen de p_{n-2}^n.

Un caso extremo para la relación $k_n + p_{n-2}^n = k_{n-1}$ surge cuando $p_{n-2}^n = 0$ y entonces $k_{n-1} = k_n$. En este caso, se alcanza la primera cota inferior q_{n-1} en (ii), $(k_{n-1} = k_n = q_{n-1})$.

El otro caso extremo lo tenemos cuando $p_0^n = \cdots = p_{n-3}^n = 0$. Entonces, utilizando la relación (1.1) obtenemos

$$(n-1)p_{n-2}^n + p_{n-1}^n = 1,$$

lo que nos conduce a

$$p_{n-2}^n = \frac{1-k_n}{n-1}$$

y entonces,

$$k_{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}k_n = Q_{n-1}.$$

Así pues, se alcanza la primera cota superior Q_{n-1} en (ii).

Disminuyendo el cardinal de la coalición S, podemos repetir el mismo procedimiento para los restantes juegos de unanimidad u_S y también se alcanzan las cotas respectivas en (ii).

Observación 2.2.4 La proposición anterior nos permite caracterizar, de forma única, un semivalor dentro del conjunto de todos los semivalores definidos sobre juegos cooperativos con un conjunto determinado de jugadores N. La Eq. (2.14) puede escribirse como

$$p_s^n = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s-1}{t-s-1} \psi_i[u_T] \quad \text{donde } |T| = t \text{ y } i \in T, \tag{2.15}$$

tomando k_t como $\psi_i[u_T]$.

Como veremos, el resultado anterior combinado con las propiedades clásicas de linealidad, simetría y del jugador títere, nos ayudará a caracterizar cada semivalor individual entre todos los conceptos de solución definidos sobre el conjunto de juegos cooperativos $\mathcal{G}_N$. Para ello, es necesario introducir una nueva propiedad:

Definición 2.2.5 *Una regla de asignación X definida sobre $\mathcal{G}_N$ satsiface la propiedad de las asignaciones sucesivamente acotadas en juegos de unanimidad, si y solo si dada una familia de números reales $(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2)$ tal que $k_n \in [0,1]$ y $k_s \in [q_s, Q_s]$ para $s = n-1, \ldots, 2$, donde cada límite q_s y Q_s se define en la ecuación (2.13), entonces $X_i[u_S] = k_s$ $\forall i \in S$ y $\forall S \subseteq N$ para $1 \leq s \leq n$.*

En realidad, esta propiedad es una familia de propiedades dada a través de cada selección "válida" de números $(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2)$, donde "válido" debe interpretarse como las únicas asignaciones que los semivalores pueden ofrecer a los jugadores en los juegos de unanimidad, de acuerdo con la relación entre estas asignaciones y los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos previamente probados en Lemma 2.2.1. El método recursivo utilizado para obtener selecciones "válidas" de números $(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2)$ ya se mostró en la Observación 2.2.3. A su vez, cada una de estas familias de asignación caracteriza y define el semivalor.

Teorema 2.2.6 *(a) Para cada selección de números reales* $(k_n, k_{n-1}, \ldots, k_2)$ *tal que* $k_n \in [0,1]$ *y acotado sucesivamente según las ecuaciones (2.13), existe una única regla de asignación* $X : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^N$ *que satisface las propiedades de linealidad, simetría, del jugador títere y de las asignaciones sucesivamente acotadas en juegos de unanimidad. para estos números dados.*
(b) Esta regla de asignación es el semivalor ψ *con coeficientes de ponderación* $(p_s^n)_{s=0}^{n-1}$ *definidos por*

$$p_s^n = \sum_{t=s+1}^{n} (-1)^{t-s-1} \binom{n-s-1}{t-s-1} k_t, \quad \textit{tomando siempre } k_1 = 1. \tag{2.16}$$

Demostración: *(Existencia)* Probaremos que el semivalor ψ dado en (b) satisface las cuatro propiedades.

Está claro que todo semivalor cumple las propiedades de linealidad, simetría y del jugador títere.

Aplicando la Proposición 2.2.2 y el hecho de que cada jugador $i \in N$ es un títere en el juego de unanimidad $u_{\{i\}}$ y por consiguiente $\psi_i[u_{\{i\}}] = 1$ para todo semivalor definido sobre $\mathcal{G}_N$, se deduce que ψ satisface la propiedad de las asignaciones sucesivamente acotadas en juegos de unanimidad.

(Unicidad) Sea X una regla de asignación definida sobre $\mathcal{G}_N$ que satisface las propiedades anteriores. Demostraremos que X está unívocamente determinada sobre todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, de modo que debe coincidir con el semivalor ψ.

Por linealidad, basta probar que X está unívocamente determinada sobre cada juego de unanimidad u_S, donde $\emptyset \neq S \subseteq N$.

Aplicando la propiedad del jugador títere, tenemos que $X_i[u_S] = u_S(\{i\}) = 0$ si $i \notin S$. Ahora nos queda demostrar el resultado para los jugadores de S.

Por otra parte, todos los jugadores de S son simétricos en el juego u_S y, de acuerdo con la propiedad de simetría, sus asignaciones coincidiran.

Finalmente, si $S = \{i\}$, aplicando la propiedad del jugador títere y teniendo en cuenta la propiedad de las asignaciones sucesivamente acotadas en juegos de unanimidad, $X_i[u_S]$ está bien definida para las coaliciones restantes S con cardinal s, $1 < s \leq n$. $\square$

Ejemplo 2.2.7 Consideremos el espacio vectorial de los juegos cooperativos definidos sobre un conjunto de 5 jugadores $\mathcal{G}_N$, donde $|N| = 5$. Nos gustaría saber si existe una solución X definida sobre $\mathcal{G}_N$ que satisfaga las propiedades de linealidad, simetría y del jugador títere y que asigne los siguientes pagos a los jugadores en los respectivos juegos de unanimidad:

$$\begin{aligned}
X_i[u_N] &= 0.24, \ \forall i \in N; \\
X_i[u_S] &= 0.36, \ S \subset N, \ s = 4, \forall i \in S; \\
X_i[u_S] &= 0.49, \ S \subset N, \ s = 3, \forall i \in S; \\
X_i[u_S] &= 0.65, \ S \subset N, \ s = 2, \forall i \in S.
\end{aligned}$$

Las asignaciones que reciben estos jugadores en los juegos de unanimidad, $X_i[u_S]$, $s = 5,4,3,2$, para todo jugador $i \in S$, son respectivamente los números k_5, k_4, k_3, k_2 del Teorema 2.2.6 y, como hemos visto en el Ejemplo 2.1.7, están acotados adecuadamente. Así pues,

$$\begin{aligned}
p_4^5 &= k_5 = 0.24, \\
p_3^5 &= k_4 - k_5 = 0.12, \\
p_2^5 &= k_3 - 2k_4 + k_5 = 0.01, \\
p_1^5 &= k_2 - 3k_3 + 3k_4 - k_5 = 0.02, \\
p_0^5 &= k_1 - 4k_2 + 6k_3 - 4k_4 + k_5 = 0.14.
\end{aligned}$$

También podemos realizar el cálculo, como hemos visto anteriormente, mediante la tabla:

	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1
p_0^n	0.14	0.16	0.19	0.35	**1.00**
p_1^n	0.02	0.03	0.16	**0.65**	
p_2^n	0.01	0.13	**0.49**		
p_3^n	0.12	**0.36**			
p_4^n	**0.24**				

Entonces, los coeficientes de ponderación del semivalor ψ son:

$$(p_0^5,\ p_1^5,\ p_2^5,\ p_3^5,\ p_4^5) = (0.14,\ 0.02,\ 0.01,\ 0.12,\ 0.24).$$

Capítulo 3

Valores probabilísticos y valores probabilísticos multinomiales

Este capítulo se centra en el estudio de los valores probabilístiscos, en general, y de la subfamília de los valores probabilísticos multinomiales, en particular. Estos últimos representan una alternativa consistente o complementaria a los valores clásicos, ya que el hecho de que se basen en perfiles de tendencias ofrece la posibilidad de introducir una amplia variedad de información derivada de la personalidad de los jugadores en un juego dado.

Las principales características de los valores multinomiales son: (1) cada uno de ellos está definido por n parámetros (siendo n el número de jugadores) y (2) los coeficientes de ponderación del valor son generados sistemáticamente en términos de esos parámetros. Asignamos al parámetro p_i el significado de tendencia del jugador i a formar coaliciones, asumiendo que p_i y p_j son independientes si $i \neq j$. También suponemos que $0 \leq p_i \leq 1$ para cada jugador y almacenamos todos los parámetros en un vector de tendencias $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Estos parámetros permiten estudiar una gran variedad de situaciones derivadas de las actitudes de los jugadores al participar en un juego, ya sea como elementos individuales o como representantes de una colectividad. En este sentido, los valores multinomiales constituyen una amplia generalización de los semivalores binomiales, cuya única condición paramétrica limita la capacidad de análisis de dichas situaciones.

En realidad, los coeficientes que definen los valores probabilísticos y los semivalores y, en particular los valores multinomiales y los semivalores binomiales, permiten introducir información adicional no almacenada en la función característica en la evaluación de los juegos.

En la Figura 1 podemos ver las relaciones entre los valores anteriores así como las principales características de cada uno de ellos.

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c}\textit{linealidad}\\ \textit{positividad}\\ \textit{jugador títere}\end{array} & & \textit{+ simetría} & & \textit{+ eficiencia}\\[2ex]
\boxed{\text{Valores probabilísticos}} & \supset & \boxed{\text{Semivalores}} & \ni & \boxed{\text{Valor de Shapley}}\\[2ex]
\cup & & \cup & & \\[2ex]
\boxed{\text{Valores Multinomiales}} & \supset & \boxed{\text{Semivalores Binomiales}} & \ni & \boxed{\text{Valor de Banzhaf}}\\[2ex]
\textit{n parámetros (uno por jugador)} & & \textit{1 parámetro} & & \textit{parámetro = 1/2}
\end{array}$$

Fig. 1: Relaciones de inclusión entre valores y familias de valores

En la última sección del capítulo veremos como los valores probabilísticos multinomiales también pueden ser utilizados para el estudio de jugadores conectados mediante una red.

3.1. Notaciones básicas y definiciones

Los *valores probabilísticos multinomiales* fueron introducidos por Freixas y Puente en el entorno de fiabilidad de sistemas ([56], [38]) con el nombre de "*valores probabilísticos multibinarios*" de la siguiente manera:

Definición 3.1.1 *Dado el conjunto* $N = \{1,2,\ldots,n\}$*, consideramos* $\mathbf{p} \in [0,1]^n$*, es decir,* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *con* $0 \leq p_i \leq 1$ *para* $i = 1,2,\ldots,n$*. Los coeficientes*

$$p_S^i = \prod_{j \in S} p_j \prod_{\substack{k \in N \setminus S \\ k \neq i}} (1 - p_k) \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y } S \subseteq N \setminus \{i\} \tag{3.1}$$

(donde el producto vacío, obtenido cuando $S = \emptyset$ o $S = N \setminus \{i\}$, se considera igual a 1) definen un valor probabilístico sobre $\mathcal{G}_N$ que llamaremos valor probabilistico multinomial y lo notaremos por $\lambda^{\mathbf{p}}$.

Así pues,

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \prod_{j \in S} p_j \prod_{\substack{k \in N \setminus S \\ k \neq i}} (1 - p_k)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \textit{para todo } i \in N \textit{ y todo } v \in \mathcal{G}_N.$$

Como hemos dicho anteriormente, p_i es la tendencia general del jugador i para formar coaliciones y por lo tanto, $\mathbf{p}$ es un perfil de tendencias en N. De acuerdo con la Expresión 3.1, el coeficiente p_S^i, es decir, la probabilidad de que i se una a una coalición S, dependerá de las tendencias positivas de los miembros de S para formar coaliciones y también de las tendencias negativas en este sentido de los jugadores que no forman parte de esta coalición, es decir, de los miembros de $N \setminus (S \cup \{i\})$.

Observaciones 3.1.2 (a) Por ejemplo, en el caso $n = 2$ tenemos $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ y, para $i \neq j$,

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = (1 - p_j)[v(\{i\} - v(\emptyset)] + p_j[v(N) - v(\{j\})].$$

Así pues, el pago asignado por $\lambda^{\mathbf{p}}$ al jugador i no depende de p_i, solo depende de p_j. Si el jugador j no está muy interesado en cooperar, y por lo tanto p_j es pequeño, el jugador i recibe básicamente su utilidad individual. En cambio, si el jugador j está interesado en cooperar, y por lo tanto p_j es grande, el jugador i recibe su contribución marginal a la gran coalición.

(b) El valor de $\lambda^{\mathbf{p}}$ sobre los juegos de unanimidad u_T es:

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[u_T] = \prod_{\substack{j \in T \\ j \neq i}} p_j \quad \text{si } i \in T \qquad \text{y} \qquad \lambda_i^{\mathbf{p}}[u_T] = 0 \quad \text{en caso contrario.} \tag{3.2}$$

(c) En el caso particular que $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, para algun $p \in [0,1]$, el valor de los coeficientes p_S^i para todo $i \in N$, se reduce a

$$p_S^i = p_s = p^s(1-p)^{n-s-1} \quad \text{para } s = 0,1,\ldots,n-1,$$

donde $s = |S|$ y $0^0 = 1$ por convenio si $p = 0$ o $p = 1$. Estos coeficientes $\{p_s\}_{s=0}^{n-1}$ definen el *semivalor p–binomial* ψ^p del que hemos hablado en capítulos anteriores y $\lambda^{\mathbf{p}} = \psi^p$. Si además, $p = 1/2$ obtenemos el valor de Banzhaf $\psi^{1/2} = \beta$.

(d) En [2, 56], se demuestra que el cálculo del valor de Banzhaf a partir de la extensión multilineal se puede extender a todos los semivalores binomiales. En [38, 56], el método se extiende también a cualquier valor probabilístico multinomial: si $\lambda^{\mathbf{p}}$ es un valor de este tipo y f es la extensión multilineal del juego $v \in \mathcal{G}_N$ entonces

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad \text{para todo } i \in N.$$

(e) Recientemente Carreras y Puente en [27] dan dos caracterizaciones de los valores multinomiales: una individual para cada valor multinomial; otra, colectiva para toda la familia.

3.2. Regularidad y otras propiedades

En esta sección estudiaremos primero el comportamiento de los valores probabilísticos, en general y de los valores multinomiales, en particular, frente a diversas propiedades clásicas de la teoría de valores y de índices de poder. La mayoría de estas propiedades son satisfechas por los semivalores, pero como veremos, el estudio de estas propiedades requiere un análisis más detallado en el caso de los valores probabilísticos y multinomiales, en los que los perfiles de tendencias juegan un papel muy importante. En la Subsección 3.2.3 restringiremos nuestro análisis a los índices de poder definidos sobre juegos simples.

En ambos casos, solo una subclase especial de valores (índices) probabilísticos cumplirán algunas de las propiedades. A estos valores (índices) los llamaremos *regulares*.

3.2.1. Dominancia, monotonía y sensibilidad

Este apartado trata sobre las relaciones de *dominancia o desplazamiento* e *indiferencia*. Consideremos $v \in \mathcal{G}_N$ y $i, j \in N$. Siguiendo a Isbell [47], diremos que *i domina o desplaza* a j en el juego v

$$iDj \text{ en } v \quad \text{si y solo si} \quad v(S \cup \{i\}) \geq v(S \cup \{j\}) \quad \text{para toda coalición } S \subseteq N \backslash \{i, j\}.$$

Así pues, iDj en v significa que el jugador *i domina o desplaza* a j (es más atractivo) como compañero de coalición en v. Esta relación nos permite comparar de forma cualitativa las posiciones de dos jugadores en un juego v cualquiera.

Diremos que iIj en v si y solo si iDj y jDi en v. Por lo tanto, iIj en v significa que los jugadores i, j son simétricos, es decir, *indiferentes* como compañeros de coalición.

Si iDj pero $j \not\!D i$ en v diremos que i domina a j *estrictamente*.

No es difícil verificar que D define una relación de preorden y que I es una relación de equivalencia (ambas en N). Estas relaciones dependen solo de la estructura del juego.

Carreras y Freixas [20] demuestran que si g es un semivalor definido sobre N, entonces cuando iDj en v tenemos que $g_i[v] \geq g_j[v]$, y por lo tanto si iIj en v implica $g_i[v] = g_j[v]$, aunque no siempre se cumple que si iDj y simultáneamente $j \not\!D i$ en v entonces $g_i[v] > g_j[v]$. Sin embargo, las cosas no son tan simples cuando se usan valores probabilísticos.

El siguiente ejemplo ilustra las relaciones de *dominancia o desplazamiento* e *indiferencia* y puede ayudarnos a entender mejor los valores multinomiales.

Ejemplo 3.2.1 Consideremos el juego v definido sobre un conjunto de 4 jugadores, $n = 4$, y perfil de tendencias $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, definido por

$$\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0, & v(\{1\}) = v(\{2\}) = 1, & v(\{1,2\}) = 4, \\
v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 3, & v(\{1,4\}) = v(\{2,4\}) = 2, & v(\{3,4\}) = 1, \\
v(\{1,2,3\}) = 4, & v(\{1,2,4\}) = 5, & v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 4, \\
v(N) = 6, & v(S) = 0 \text{ en cualquier otro caso.} &
\end{array}$$

Equivalentemente, si lo expresamos en términos de los juegos de unanimidad,

$$v = [u_{\{1\}} + u_{\{2\}}] + 2u_{\{1,2\}} + 2[u_{\{1,3\}} + u_{\{2,3\}}] + [u_{\{1,4\}} + u_{\{2,4\}}] + u_{\{3,4\}} - 4u_{\{1,2,3\}} - u_{\{1,2,4\}} - [u_{\{1,3,4\}} + u_{\{2,3,4\}}] + 2u_N$$

La extensión multilineal del juego es:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 - 4x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 + 2x_1x_2x_3x_4.$$

En este ejemplo $1I2$, $1D3$ pero $3 \not{D} 1$. Si g es un semivalor definido sobre N, entonces $g_1[v] = g_2[v]$, sin embargo no necesariamente $g_1[v] > g_3[v]$. ¿Qué ocurre si utilizamos valores multinomiales?

Teniendo en cuenta la observación 3.1.2(d) podemos calcular $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v]$ para i=1, 2 y 3 a partir de la extensión multilineal del juego:

$$\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4 - 4p_2p_3 - p_2p_4 - p_3p_4 + 2p_2p_3p_4,$$
$$\lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = 1 + 2p_1 + 2p_3 + p_4 - 4p_1p_3 - p_1p_4 - p_3p_4 + 2p_1p_3p_4,$$
$$\lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = 2p_1 + 2p_2 + p_4 - 4p_1p_2 - p_1p_4 - p_2p_4 + 2p_1p_2p_4.$$

Observamos que el hecho de introducir los perfiles de tendencias rompe la simetría existente entre los jugadores 1 y 2. No obstante, sigue existiendo una simetría "estructural" entre $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v]$ y $\lambda_2^{\mathbf{p}}[v]$ ya que $\lambda_2^{\mathbf{p}}[v]$ se obtiene de $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v]$ substituyendo p_2 por p_1. Esto es debido a las posiciones simétricas de cada par de jugadores en el juego, como se ve reflejado en la extensión multilineal del mismo.

Consideramos a continuación, algunos casos particulares de perfiles de tendencias para mostrar las diferentes relaciones entre $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v]$ y $\lambda_2^{\mathbf{p}}[v]$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v]$ y $\lambda_3^{\mathbf{p}}[v]$.

- Para los jugadores 1 y 2 ($1I2$):

Si $\mathbf{p} = (0.6, 0.6, 0.8, 0.7)$ tenemos $p_1 = p_2$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = \lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = 2.2720$.

Si $\mathbf{p} = (0, 0.7, 0.5, 0.2)$ tenemos $p_1 < p_2$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = \lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = 2.1000$.

Si $\mathbf{p} = (0.7, 0.2, 0.5, 0)$ tenemos $p_1 > p_2$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = \lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = 2.0000$.

Si $\mathbf{p} = (0.4, 0.5, 0.1, 0.2)$ tenemos $p_1 < p_2$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 2.1000 > 1.9560 = \lambda_2^{\mathbf{p}}[v]$.

- Para los jugadores 1 y 3 ($1D3$ pero $3 \not D 1$):

Si $\mathbf{p} = (0.3, 0.7, 0.3, 0.9)$ tenemos $p_1 = p_3$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 2.5380 > \lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = 1.5380$

Si $\mathbf{p} = (0.8, 0.4, 0.2, 0.7)$ tenemos $p_1 > p_3$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 2.2720 > \lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = 1.4280$.

Si $\mathbf{p} = (0.9, 0.1, 0.2, 0.1)$ tenemos $p_1 > p_3$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 1.5940 < \lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = 1.6580$.

Si $\mathbf{p} = (0.3, 0.6, 0.4, 0.7)$ tenemos $p_1 < p_3$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = 2.3760 > \lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = 1.4020$.

La Tabla 1 en el Ejemplo 3.4.6 nos proporciona más ejemplos de perfiles que cubren la mayor parte de los casos de los corolarios 3.4.4 y 3.4.5 que se estudiarán en la Sección 3.4.

Introducimos ahora una família de valores probabilísticos que denominamos *regulares*.

Definición 3.2.2 *Un valor probabilístico ϕ definido sobre $\mathcal{G}_N$ decimos que es regular si y solo si $p_S^i > 0$ para todo jugador $i \in N$ y para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$.*

Un valor multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ es regular si y solo si $0 < p_i < 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. En particular, un valor multinomial regular está definido por un perfil de tendencias positivo.

Definición 3.2.3 *Un valor probabilístico ϕ definido sobre $\mathcal{G}_N$ diremos que es regular para el jugador i si y solo si $p_S^i > 0$ para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$.*

En particular, un valor multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ es regular para el jugador i si y solo si $0 < p_k < 1$ para todo $k \neq i$.

Definición 3.2.4 *Consideramos dos jugadores distintos $i, j \in N$ y un valor probabilístico ϕ definido sobre $\mathcal{G}_N$. Decimos que*

ϕ es (i, j)–simétrico si y solo si para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$, $p_S^i = p_S^j$ y $p_{S \cup \{j\}}^i = p_{S \cup \{i\}}^j$.

En la siguiente proposición caraterizamos los valores (i, j)–simétricos dentro de la clase de los valores probabilísticos.

Proposición 3.2.5 *(Propiedad de dominancia) Dados dos jugadores distintos $i, j \in N$ y un valor probabilístico ϕ definido sobre $\mathcal{G}_N$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) ϕ es (i, j)–simétrico,

(2) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iIj en v entonces $\phi_i[v] = \phi_j[v]$,

(3) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iDj en v entonces $\phi_i[v] \geq \phi_j[v]$.

Si además se cumple que para toda coalición $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$, $p^i_S + p^i_{S\cup\{j\}} > 0$ entonces (1) es equivalente a

(4) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iDj y $j \not{D} i$ en el juego v entonces $\phi_i[v] > \phi_j[v]$.

Demostración: La demostración está organizada de la siguiente forma:

$$(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).$$

$(1) \Rightarrow (3)$ Supongamos que iDj en v. Utilizando la ecuación (1.4) y separando la suma en dos partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi_i[v] &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} p^i_S[v(S\cup\{i\}) - v(S)] \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \Big[p^i_S[v(S\cup\{i\}) - v(S)] + p^i_{S\cup\{j\}}[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{j\})]\Big].
\end{aligned}$$

Comparando este resultado con la expresión análoga para $\phi_j[v]$, y teniendo en cuenta que ϕ es (i, j)–simétrico y que iDj en v,

$$p^i_S = p^j_S, \quad p^i_{S\cup\{j\}} = p^j_{S\cup\{i\}} \quad \text{y} \quad v(S\cup\{i\}) \geq v(S\cup\{j\})$$

para toda coalición $S \subseteq N\backslash\{i, j\}$, resulta que

$$\phi_i[v] - \phi_j[v] = \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} (p^i_S + p^i_{S\cup\{j\}})[v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\})] \geq 0.$$

$(3) \Rightarrow (2)$ Esta implicación se obtiene aplicando dos veces el resultado anterior.

$(2) \Rightarrow (1)$ Consideramos las diferentes casuísticas:

- Supongamos primero que $p^i_S \neq p^j_S$ para alguna coalición $S \subseteq N \backslash \{i,j\}$. Consideramos el juego $w \in \mathcal{G}_N$ definido por

$$w(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \supseteq S \cup \{k\} \text{ para algún } k \in N \backslash S \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{3.3}$$

  Como iIj en w, podemos considerar $p^i_S < p^j_S$ sin pérdida de generalidad. Obtenemos

$$\phi_i[w] = p^i_S < p^j_S = \phi_j[w],$$

  una contradicción.

- Supongamos ahora que $p^i_{S\cup\{j\}} \neq p^j_{S\cup\{i\}}$ para alguna coalición $S \subseteq N \backslash \{i,j\}$. Definimos el juego $w^* \in \mathcal{G}_N$

$$w^*(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \supseteq S \cup \{k\}, \text{ para algún k} \neq i,j \text{ o } T \supseteq S \cup \{i\} \cup \{j\} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{3.4}$$

  iIj en w^* y, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $p^i_{S\cup\{j\}} < p^j_{S\cup\{i\}}$. Pero entonces, llegamos a una contradicción puesto que

$$\phi_i[w^*] = p^i_{S\cup\{j\}} < p^j_{S\cup\{i\}} = \phi_j[w^*].$$

$(1) \Rightarrow (4)$ Si iDj y $j \not{D} i$ en el juego v, existirá alguna coalición $S \subseteq N \backslash \{i,j\}$ tal que $v(S \cup \{i\}) > v(S \cup \{j\})$.

Como se cumple

$$p^i_S = p^j_S,\; p^i_{S\cup\{j\}} = p^j_{S\cup\{i\}} \text{ y } p^i_S + p^i_{S\cup\{j\}} > 0 \text{ para toda coalición } S \subseteq N \backslash \{i,j\},$$

de la demostración de $(1) \Rightarrow (3)$ se deduce que $\phi_i[v] > \phi_j[v]$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Como hemos hecho anteriormente, consideramos los distintos casos posibles.

- Supongamos primero que $p_S^i \neq p_S^j$ para alguna coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Si $p_S^j > p_S^i$, consideramos el juego

  $$v = 2u_{\{i\}} + u_{\{j\}} + cw, \text{ con } c > \frac{1}{p_S^j - p_S^i} \text{ y } w \in \mathcal{G}_N$$

  definido en (3.3).

  Se cumple iDj pero $j \not D i$ en el juego v. Sin embargo,

  $$\phi_i[v] = 2 + cp_S^i \qquad \text{y} \qquad \phi_j[v] = 1 + cp_S^j,$$

  y por lo tanto
  $$\phi_i[v] - \phi_j[v] = 1 - c(p_S^j - p_S^i) < 0,$$

  con lo que llegamos a una contradicción.

  Si $p_S^j < p_S^i$ el argumento es similar, tomando $c < \dfrac{1}{p_S^j - p_S^i}$.

- Supongamos ahora que $p_{S\cup\{j\}}^i \neq p_{S\cup\{i\}}^j$ para alguna coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Si $p_{S\cup\{i\}}^j > p_{S\cup\{j\}}^i$, consideramos el juego

  $$v = 2u_{\{i\}} + u_{\{j\}} + cw^*, \text{ con } c > \frac{1}{p_{S\cup\{i\}}^j - p_{S\cup\{j\}}^i} \text{ y } w^* \in \mathcal{G}_N$$

  definido en (3.4).

  En este caso, iDj y $j \not D i$ en el juego v. Sin embargo,

  $$\phi_i[v] = 2 + cp_{S\cup\{j\}}^i \qquad \text{y} \qquad \phi_j[v] = 1 + cp_{S\cup\{i\}}^j,$$

  y por lo tanto,

  $$\phi_i[v] - \phi_j[v] = 1 - c(p_{S\cup\{i\}}^j - p_{S\cup\{j\}}^i) < 0,$$

  llegamos a una contradicción.

  Si $p_{S\cup\{i\}}^j < p_{S\cup\{j\}}^i$ el argumento es similar, tomando $c < \dfrac{1}{p_{S\cup\{i\}}^i - p_{S\cup\{j\}}^j}$. $\square$

Carreras y Freixas [20], demuestran que todos los semivalores satisfacen (2) y (3) de la Proposición 3.2.5, y que un semivalor cumple también (4) si sus coeficientes de ponderación satisfacen que $p_s + p_{s+1} > 0$ para todo $s = 0, 1, ..., n-2$.

Corolario 3.2.6 *Sean $i, j \in N$ dos jugadores diferentes y $\lambda^{\mathbf{p}}$ un valor probabilístico multinomial regular definido sobre $\mathcal{G}_N$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) $p_i = p_j$,

(2) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iIj en v entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$,

(3) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iDj en v entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] \geq \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$.

(4) para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$, si iDj y $j \not{D} i$ en v entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$.

Demostración: El hecho de que $p_i = p_j$ y $\lambda^{\mathbf{p}}$ sea regular es equivalente a que $\lambda^{\mathbf{p}}$ sea (i, j)–simétrico y por lo tanto la condición $p_S^i + p_{S\cup\{j\}}^i > 0$ se cumple para cualquier valor multilineal regular. $\square$

A partir de ahora, nos centraremos en las condiciones de monotonía consideradas por Young [61] al caracterizar axiomáticamente el valor de Shapley sin usar la propiedad de aditividad, que fueron extendidas posteriormente a los semivalores por Carreras y Freixas [20]. Dados dos juegos cualesquiera $v, w \in \mathcal{G}_N$ y un jugador $i \in N$, siguiendo [20], diremos que:

$v B w$ para i si y solo si $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Es decir, si y solo si las contribuciones marginales debidas a i son mayores (no menores) en v que en w. Esta relación nos permite comparar de forma cualitativa las posiciones de un determinado jugador en dos juegos v y w cualesquiera.

Definición 3.2.7 *Sea g un valor definido sobre $\mathcal{G}_N$, diremos que:*

(a) g satisface la propiedad de monotonía si y solo si $v B w$ para i implica $g_i[v] \geq g_i[w]$,

(b) g satisface la propiedad de sensibilidad si y solo si $v B w$ y $w \not{B} v$ ambos para i implica $g_i[v] > g_i[w]$.

En [20] se demuestra que todas los semivalores satisfacen la propiedad de monotonía, y también que un semivalor satisface la propiedad de sensibilidad si y solo si es regular. No es difícil extender estos resultados a valores probabilísticos.

Proposición 3.2.8 *(Propiedades de monotonía y sensibilidad) Sea ϕ un valor probabilístico definido en $\mathcal{G}_N$ y $v, w \in \mathcal{G}_N$ dos juegos distintos. Entonces para cada $i \in N$:*

(a) ϕ satisface la propiedad de monotonía.

(b) $v B w$ y $w B v$ para $i \Rightarrow \phi_i[v] = \phi_i[w]$.

(c) ϕ satisface la propiedad de sensibilidad si y solo si ϕ es regular para i.

Demostración: (a) El pago asignado al jugador i en cada juego es

$$\phi_i[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \text{y} \quad \phi_i[w] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i [w(S \cup \{i\}) - w(S)],$$

Teniendo en cuenta que $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$ y $p_S^i \geq 0$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$ se deduce

$$\phi_i[v] \geq \phi_i[w].$$

(b) Esta implicación se demuestra aplicando dos veces (a).

(c) ($\Leftarrow$) Si $v B w$ y $w \not{B} v$ para i, entonces se cumplirá que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) > w(S \cup \{i\}) - w(S)$$

para alguna coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Como ϕ es regular para el jugador i, a partir de la demostración del apartado (a) podemos asegurar que $\phi_i[v] > \phi_i[w]$.

($\Rightarrow$) Si $n = 1$, la afirmación es trivial, ya que, en este caso, cualquier valor probabilístico es regular.

Para $n \geq 2$, supongamos que ϕ no es regular para el jugador i. Entonces existirá algúna coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$ tal que $p_S^i = 0$.

Tomando $w \in \mathcal{G}_N$ como se define en (3.3) y

$$w^{**}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; T \supseteq S \cup \{k\}, \; \text{para algún } k \in N \backslash S, \; k \neq i \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{3.5}$$

tenemos $w B w^{**}$ y $w^{**} \not B w$ para i, sin embargo

$$\phi_i[w] = p_S^i = \phi_i[w^{**}] = 0,$$

llegando a una contradicción. $\square$

3.2.2. Exclusión de un jugador nulo, jugador no nulo y contribuciones equilibradas

La primera propiedad de esta sección se refiere a los jugadores no nulos. Por lo general, si g es un valor definido sobre $\mathcal{G}_N$, un jugador no nulo $i \in N$ obtiene en todo juego *monótono* v, un pago positivo $g_i[v] > 0$. Esta propiedad es válida para — y de hecho caracteriza para $n \geq 2$ — todos los valores probabilísticos regulares dentro de la clase de valores probabilísticos.

Proposición 3.2.9 *(Propiedad del jugador no nulo) Un valor probabilístico ϕ asigna un pago positivo a todo jugador no nulo en un juego monótono cualquiera $v \in \mathcal{G}_N$ si y solo si ϕ es regular, para $n \geq 2$.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que ϕ es regular y consideremos un jugador $i \in N$ no nulo en un juego monótono $v \in \mathcal{G}_N$. Entonces, por la propiedad de monotonía tenemos que

$$\begin{aligned} & v(S \cup \{i\}) \geq v(S) \; \text{ para toda coalición } \; S \subseteq N \backslash \{i\}, \; \text{ y como i es no nulo} \\ & v(S \cup \{i\}) > v(S) \; \text{ para alguna coalición. } \; S \end{aligned}$$

Además, del hecho que ϕ sea regular se desprende que $p_S^i > 0$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Así pues,

$$\phi_i[v] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i [v(S \cup \{i\}) - v(S)] > 0.$$

($\Rightarrow$) Si $n = 1$, el juego v es monótono e i es no nulo en v, entonces $v(\{i\}) > 0$, $p_\emptyset^1 = 1$ para un perfil cualquiera $\mathbf{p}$ y

$$\phi_i[v] = v(\{i\}) > 0$$

para todo valor ϕ, regular o no.

Consideremos ahora, $n \geq 2$ y supongamos que ϕ no es un valor regular. En este caso, existirá alguna coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$ para la que $p_S^i = 0$.

Sea $w \in \mathcal{G}_N$ el juego definido en (3.3). w es monótono e i es un jugador no nulo en el juego w ya que $w(S \cup \{i\}) - w(S) = 1$. Sin embargo,

$$\phi_i[w] = p_S^i = 0. \quad \square$$

Antes de estudiar las siguientes propiedades, recordamos la definición de subjuego y definimos el concepto de subperfil correspondiente a una coalición no vacía $T \subseteq N$. Dado un juego $v \in \mathcal{G}_N$, el juego $v_T \in \mathcal{G}_T$, definido por $v_T(S) = v(S)$ para todo $S \subseteq T$, es un *subjuego* de v. Analogamente, si $\mathbf{p} \in [0,1]^n$ es un perfil en N, diremos que todo $\mathbf{p}^T \in [0,1]^t$ (donde $t = |T|$), definido por $p_i^T = p_i$ para $i \in T$, es un *subperfil* de $\mathbf{p}$. Así pues, cada valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ sobre $\mathcal{G}_N$ induce un valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}^T}$ sobre $\mathcal{G}_T$ para cada coalición no vacía $T \subseteq N$.

En el caso particular en que $T = N \setminus \{i\}$ para algún $i \in N$ usaremos la notación $v_{-\{i\}}$ y $\mathbf{p}^{-i}$ en lugar de $v_{N \setminus \{i\}}$ y $\mathbf{p}^{N \setminus \{i\}}$, respectivamente.

Es decir, si $i \in N$ entonces cada valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ definido sobre $\mathcal{G}_N$ induce un valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}^{-i}}$ sobre $\mathcal{G}_{N \setminus \{i\}}$ con perfil $\mathbf{p}^{-i}$, cuyos coeficientes de ponderación se denotarán como $(p^{-i})_S^j$ para cada jugador $j \in N \setminus \{i\}$ y cada coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.

La propiedad que estudiaremos a continuación se refiere al efecto que produce la salida de un jugador nulo en el juego. Seria deseable que los pagos asignados por un valor a los jugadores restantes no se vieran afectados por esta exclusión.

Como veremos a continuación, esta propiedad es válida para cualquier valor probabilístico multinomial.

Definición 3.2.10 *Un valor g definido en $\mathcal{G}_N$ satisface la propiedad de exclusión de un jugador nulo si para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$*

$$g_j[v] = g_j[v_{-\{i\}}],$$

para todo $i, j \in N$ tal que i es nulo en v.

La propiedad siguiente se refiere al efecto que produce sobre el pago a un jugador cualquiera la exclusión en el juego de cualquier otro jugador.

Definición 3.2.11 *Un valor g definido en $\mathcal{G}_N$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si para cada juego $v \in \mathcal{G}_N$ y todo $i, j \in N$*

$$g_i[v] - g_i[v_{-\{j\}}] = g_j[v] - g_j[v_{-\{i\}}].$$

Como veremos, estas dos propiedades no tienen sentido para los valores probabilísticos en general y es por ello que introducimos la siguiente subclase de estos valores.

Definición 3.2.12 *Un valor probabilístico ϕ definido en $\mathcal{G}_N$ es hereditario si y solo si sus coeficientes de ponderación en $N\backslash\{i\}$ satisfacen*

$$(p^{-i})_S^j = p_S^j + p_{S\cup\{i\}}^j \quad \textit{para toda coalición } \; S \subseteq N\backslash\{i, j\}.$$

Proposición 3.2.13 *Todo valor probabilístico multinomial definido sobre $\mathcal{G}_N$ es hereditario.*

Demostración: Para toda coalición $S \subseteq N\backslash\{i, j\}$ tenemos que

$$p_S^j = (1-p_i)\prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\backslash S \\ h\neq i,j}} (1-p_h) \qquad \text{y} \qquad p_{S\cup\{i\}}^j = p_i \prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\backslash S \\ h\neq i,j}} (1-p_h).$$

Así pues,

$$p_S^j + p_{S\cup\{i\}}^j = \prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\setminus S\\ h\neq i,j}} (1-p_h) = (p^{-i})_S^j. \quad \square$$

Observación 3.2.14 Teniendo en cuenta la última proposición, un valor multinomial induce valores multinomiales en cardinalidades inferiores. Podemos decir que el valor multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ es *hereditario* en el sentido de que para cada conjunto de jugadores N, todos sus valores inducidos en $T \subseteq N$ son también valores multinomiales. Sin embargo, esto no es cierto para todos los valores probabilísticos. Por ejemplo, el valor probabilístico definido por

$$p_S^i = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es par y } |S| = n-1 \text{ o } n \text{ es impar y } |S| = 0, \\ 0 \text{ en caso contrario,} \end{cases}$$

no es hereditario.

Es fácil ver que si n es par, tomando $S = N\setminus\{i\}$ tenemos que

$$(p^{-i})_S^j = 0 \quad \text{y} \quad p_S^j + p_{S\cup\{i\}}^j = 1.$$

Si n es impar, tomando $S = \emptyset$ vemos que

$$(p^{-i})_S^j = 0 \quad \text{y} \quad p_S^j + p_{S\cup\{i\}}^j = 1.$$

La siguiente proposición muestra que para los valores probabilísticos el hecho de que un valor satisfaga la propiedad de exclusión de un jugador nulo es equivalente a que sea hereditario.

Proposición 3.2.15 *(Propiedad de exclusión de un jugador nulo) Sea ϕ un valor probabilístico definido en $\mathcal{G}_N$. Entonces*

ϕ satisface la propiedad de exclusión de un jugador nulo si y solo si ϕ es hereditario.

Demostración: ($\Leftarrow$) Utilizando el mismo argumento inicial que en la demostración de la proposición 3.2.5 obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_j[v] &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}} p_S^j[v(S\cup\{j\})-v(S)] \\ &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \Big[p_S^j[v(S\cup\{j\})-v(S)]+p_{S\cup\{i\}}^j[v(S\cup\{i\}\cup\{j\})-v(S\cup\{i\})]\Big].\end{aligned}$$

Como i es un jugador nulo en v, se cumple que $v(S\cup\{i\}\cup\{j\})=v(S\cup\{j\})$ y $v(S\cup\{i\})=v(S)$. Así pues, utilizando que ϕ es hereditario,

$$\begin{aligned}\phi_j[v] &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} (p_S^j+p_{S\cup\{i\}}^j)[v(S\cup\{j\})-v(S)] \\ &= \sum_{S\subseteq(N\backslash\{i\})\backslash\{j\}} (p^{-i})_S^j[v_{-\{i\}}(S\cup\{j\})-v_{-\{i\}}(S)] \\ &= \phi_j[v_{-\{i\}}].\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Supongamos que ϕ es un valor probabilístico no hereditario. Entonces, existe alguna coalición $S\subseteq N\backslash\{i,j\}$ tal que $(p^{-i})_S^j \neq p_S^j+p_{S\cup\{i\}}^j$.

Consideremos el juego $w^{**}\in\mathcal{G}_N$ definido en (3.5).

El jugador i es nulo en w^{**} y

$$\phi_j[w^{**}]=p_S^j+p_{s\cup\{i\}}^j \neq (p^{-i})_S^j=\phi_j[w_{-\{i\}}^{**}]. \quad \square$$

Corolario 3.2.16 *Todo valor probabilístico multinomial definido sobre $\mathcal{G}_N$ satisface la propiedad de exclusión de un jugador nulo.*

Demostración: Es consecuencia directa de la proposición 3.2.13. $\square$

La siguiente propiedad se refiere al efecto de excluir a un jugador en el pago a cualquier otro jugador y caracteriza la clase de soluciones que satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas dentro de la clase de los valores probabilísticos regulares y regulares hereditarios.

Proposición 3.2.17 *(Propiedad de contribuciones equilibradas) Dado un juego $v \in \mathcal{G}_N$, $i, j \in N$ y un valor probabilístico regular y hereditario ϕ, entonces*

> *ϕ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si y solo si, $p^j_{S\cup\{i\}} = p^i_{S\cup\{j\}}$ para toda coalición $S \subseteq N\backslash\{i,j\}$.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Sabemos que el valor ϕ es hereditario, entonces se cumplirá que

$$\begin{aligned}
\phi_i[v] - \phi_i[v_{-\{j\}}] &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} p^i_S[v(S\cup\{i\}) - v(S)] + \\
&\sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} p^i_{S\cup\{j\}}[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{j\})] - \\
&\sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} (p^{-j})^i_S[v((S\cup\{i\}) - v(S)] \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} p^i_{S\cup\{j\}}[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\}) + v(S)].
\end{aligned}$$

De forma análoga tenemos que

$$\phi_j[v] - \phi_j[v_{-\{i\}}] = \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} p^j_{S\cup\{i\}}[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\}) + v(S)].$$

Teniendo en cuenta que $p^j_{S\cup\{i\}} = p^i_{S\cup\{j\}}$, ambas expresiones coinciden.

($\Rightarrow$) Supongamos que $p^i_{S\cup\{j\}} \neq p^j_{S\cup\{i\}}$ para alguna coalición $S \subseteq \backslash N\{i,j\}$.

Consideramos el juego $w \in \mathcal{G}_N$ definido en (3.3) para el que se cumple:

$$\phi_i[w] = p^i_S, \quad \phi_i[w_{-\{j\}}] = (p^{-j})^i_S, \quad \phi_j[w] = p^j_S \quad \text{y} \quad \phi_j[w_{-\{i\}}] = (p^{-i})^j_S.$$

Utilizando que ϕ es hereditario y regular, obtenemos

$$\phi_i[w] - \phi_i[w_{-\{j\}}] = -p^i_{S\cup\{j\}} \neq -p^j_{S\cup\{i\}} = \phi_j[w] - \phi_j[w_{-\{i\}}]. \quad \square$$

Veamos como podemos adaptar esta propiedad al caso particular de los valores probabilísticos multinomiales.

Proposición 3.2.18 *Supongamos que v es un juego definido en $\mathcal{G}_N$.*

(a) (Propiedad de contribuciones equilibradas ponderadas) Cualquier valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$ definido en $\mathcal{G}_N$ satisface

$$p_i(\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_i^{\mathbf{p}_{-j}}[v_{-\{j\}}]) = p_j(\lambda_j^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_j^{\mathbf{p}_{-i}}[v_{-\{i\}}]).$$

(b) (Propiedad de contribuciones equilibradas) Si $\lambda^{\mathbf{p}}$ es un valor probabilístico multinomial regular, entonces

$\lambda^{\mathbf{p}}$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si y solo si $p_i = p_j$.

Demostración: (a) Utilizando la expresión obtenida en la demostración de la proposición 3.2.17 y teniendo en cuenta el valor de los coeficientes en el caso de los valores probabilísticos multinomiales vistos en la demostración de la proposición 3.2.13 podemos escribir

$$p_i(\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_i^{\mathbf{p}_{-j}}[v_{-\{j\}}]) =$$

$$p_i \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} p_j \prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\setminus S\\ h\neq i,j}} (1-p_h)[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\}) + v(S)] =$$

$$p_j \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} p_i \prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\setminus S\\ h\neq i,j}} (1-p_h)[v(S\cup\{i\}\cup\{j\}) - v(S\cup\{i\}) - v(S\cup\{j\}) + v(S)] =$$

$$p_j(\lambda_j^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_j^{\mathbf{p}_{-i}}[v_{-\{i\}}]).$$

(b) Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.17, puesto que para todo valor probabilístico multinomial se cumple

$$p^j_{S\cup\{i\}} = p_i \prod_{k\in S} p_k \prod_{\substack{h\in N\setminus S\\ h\neq i,j}} (1-p_h) \text{ para toda coalición } S\subseteq N\setminus\{i,j\}.$$

Entonces, $p^j_{S\cup\{i\}} = p^i_{S\cup\{j\}} \Leftrightarrow p_i = p_j$. $\square$

Observación 3.2.19 En particular, la Proposición 3.2.17 demuestra que todos los semivalores satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas, generalizando los resultados obtenidos en [35]. Myerson [51] demostró que la propiedad de contribuciones equilibradas y la de eficiencia caracterizan el valor de Shapley y, en un contexto más general, Dragan [31] muestra que la propiedad de contribuciones equilibradas es equivalente a la existencia de una función potencial.

3.2.3. Juegos simples y propiedad de donación

Los juegos simples han sido utilizados frecuentemente para modelizar situaciones de cooperación. En particular, permiten describir y analizar la toma de decisiones colectivas, así como el poder de un individuo en una votación.

Si (N,v) es un juego simple y W el conjunto de coaliciones ganadoras, se dice que un jugador $i \in N$ es *crucial* para una coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$ si $S \notin W$ pero en cambio, $S \cup \{i\} \in W$; denotaremos por $\mathcal{C}(i,v)$ al conjunto de coaliciones en las que i es crucial. Parece razonable que cualquier medida de poder tenga en cuenta las veces en que cada jugador es crucial en un juego.

En particular, todas las propiedades estudiadas para valores probabilísticos en este capítulo tienen sentido para índices probabilísticos de poder y la restricción a $\mathcal{SG}_N$ de un valor probabilístico cualquiera definido sobre $\mathcal{G}_N$, es, por supuesto, un índice de poder, que se denotará con el mismo símbolo que el valor probabilístico:

Si $v \in \mathcal{SG}_N$ y un jugador $i \in N$ entonces,

$$\phi_i[v] = \sum_{S \in \mathcal{C}(i,v)} p_S^i. \tag{3.6}$$

En este contexto, tal como aparece en [18], una interpretación alternativa del perfil que define un valor multinomial en juegos simples es la siguiente: supongamos que existe un status quo Q y una propuesta P para modificarlo. La acción de los miembros de un parlamento se reduce a votar a favor o en contra de P. Entonces *cada p_i se puede interpretar como la probabilidad de que el jugador i vote a favor de P*. Dado que el resultado de una votación es esencialmente equivalente a formar una coalición (la coalición de jugadores que vota a favor de P), esta interpretación de p_i concuerda con la de "tendencia a formar una coalición" que estamos usando en este capítulo.

Consideramos a continuación los índices probabilísticos en juegos de mayoría ponderada. La situación que analizaremos es la siguiente: dos juegos de mayoría ponderada $(N,v) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_n]$ y $(N,v') \equiv [q; w'_1, w'_2, ..., w'_n]$ definidos sobre el mismo conjunto de jugadores, con igual cuota e igual peso total $\sum_{i \in N} w_i = \sum_{i \in N} w'_i$.

Diremos que un jugador i es *donante* si $w_i > w'_i$ mientras que un jugador j es *receptor* si $w_j < w'_j$.

Intuitivamente, la idea es que (N,v) representa la distribución inicial de pesos y (N,v') se obtiene a partir de ella mediante una redistribución de estos pesos, como consecuencia de la donación y recepción de pesos entre los jugadores, de manera que cada donante pierde peso y cada receptor lo gana, mientras que la suma total de los pesos no varía.

Proposición 3.2.20 *(Propiedad de donación). Si, en la situación anterior, solo hay un donante i y un receptor j, entonces, para cada índice probabilístico ϕ, $\phi_i[v] \geq \phi_i[v']$.*

Demostración: Si existe un único donante y un único receptor, la situación actual podemos resumirla de la siguiente forma:

$$(N,v) \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_n]$$
$$(N,v') \equiv [q; w'_1, w'_2, ..., w'_n]$$
$$\sum_{i \in N} w_i = \sum_{i \in N} w'_i$$

$$w_i > w'_i, \quad i \text{ es el donante}$$
$$w_j < w'_j, \quad j \text{ es el receptor}$$
$$w_k = w'_k, \quad k \neq i, j.$$

Basta solo comprobar que

$$\mathcal{C}(i,v') \subseteq \mathcal{C}(i,v).$$

Si $S \in \mathcal{C}(i,v')$, entonces $w'(S) < q$ y $w'(S) + w'_i \geq q$, donde $w'(S) = \sum_{i \in S} w'_i$. Tenemos que comprobar que $S \in \mathcal{C}(i,v)$, es decir, $w(S) < q$ y $w(S) + w_i \geq q$.

Llegados a este punto, distinguimos dos casos:

- Si $j \in S$, tenemos que

$$w(S) = w_j + w(S \backslash \{j\}) = w_j + w'(S \backslash \{j\}) < w'_j + w'(S \backslash \{j\}) = w'(S) < q,$$
$$w(S) + w_i = w_j + w(S \backslash \{j\}) + w_i = w'_j + w'(S \backslash \{j\}) + w'_i = w'(S) + w'_i \geq q$$

  y entonces $S \in \mathcal{C}(i,v)$.

- Si $j \notin S$, se cumple

$$w(S) = w'(S) < q,$$
$$w(S) + w_i = w'(S) + w_i > w'(S) + w'_i \geq q$$

  y en este caso $S \in \mathcal{C}(i,v)$. $\square$

Proposición 3.2.21 *(Propiedad de donación estricta). Supongamos que, además de cumplirse las condiciones de la Proposición 3.2.20, tenemos $v \neq v'$. Un índice probabilístico ϕ satisface $\phi_i[v] > \phi_i[v']$ si y solo si ϕ es regular para el jugador i.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Como ϕ es regular, basta con demostrar que existe alguna coalición $S \in \mathcal{C}(i,v) \backslash \mathcal{C}(i,v')$.

Dado que los juegos son diferentes, $v \neq v'$, se cumplirá una de las siguientes condiciones:

- Existe alguna coalición S tal que $S \in W$ y $S \notin W'$. Es decir, existe $S \subseteq N$, $i \in S$ y $j \notin S$ tal que $w(S) \geq q$ y $w'(S) < q$.

  Veamos que en este caso $S \backslash \{i\} \in \mathcal{C}(i,v)$ y $S \backslash \{i\} \notin \mathcal{C}(i,v')$.

  Comprobemos en primer lugar que $S \backslash \{i\} \in \mathcal{C}(i,v)$:

$$w(S \backslash \{i\}) = w'(S \backslash \{i\}) < q,$$
$$w(S) \geq q.$$

Sin embargo, $S\backslash\{i\} \notin \mathcal{C}(i,v')$, ya que $w'(S\backslash\{i\}) < q$ y $w'(S) < q$.

- Existe alguna coalición S tal que $S \notin W$ y $S \in W'$. Es decir, existe $S \subseteq N$, $i \notin S$ y $j \in S$ tal que $w(S) < q$ y $w'(S) \geq q$.

  Veamos que en este caso $S \in \mathcal{C}(i,v)$ y $S \notin \mathcal{C}(i,v')$.

  Comprobemos en primer lugar que $S \in \mathcal{C}(i,v)$:

$$\begin{aligned} w(S) &< q, \\ w(S \cup \{i\}) = w(S) + w_i &= w'(S \cup \{i\}) \geq q. \end{aligned}$$

  Sin embargo, $S \notin \mathcal{C}(i,v')$, ya que $w'(S) \geq q$.

($\Rightarrow$) Supongamos que ϕ no es regular para el jugador i y que $n > 2$. Entonces existe una coalición $S \subseteq N\backslash\{i\}$ tal que $p_S^i = 0$.

- Si $j \notin S$, definimos el juego de mayoría ponderada v tal que

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in S, \\ s+2 & \text{si } k = i, \\ s & \text{si } k = j, \\ 2s+2 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  y cuota $q = 2s+2$. El juego v' es el obtenido a partir de v después de que el jugadaor i done una unidad de su peso al jugador j, manteniendo la misma cuota. Es decir,

$$w'_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in S, \\ s+1 & \text{si } k = i, \\ s+1 & \text{si } k = j, \\ 2s+2 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  En esta situación $\mathcal{C}(i,v)\backslash\mathcal{C}(i,v') = S$, y por lo tanto, $v \neq v'$ pero en cambio

$$\phi_i[v] = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v)} p_T^i = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v')} p_T^i + p_S^i = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v')} p_T^i = \phi_i[v'].$$

- Si $j \in S$ definimos el juego $v \in \mathcal{G}_N$ con pesos

$$w_k = \begin{cases} s+1 & \text{si } k = i, \\ s+3 & \text{si } k = j, \\ 1 & \text{si } k \in S \backslash \{j\}, \\ 2s+3 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  y cuota $q = 2s+3$. El juego v' es el obtenido a partir de v después de que el jugador i done una unidad de peso a j, manteniendo la cuota. Es decir,

$$w'_k = \begin{cases} s & \text{si } k = i, \\ s+4 & \text{si } k = j, \\ 1 & \text{si } k \in S \backslash \{j\}, \\ 2s+3 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  Igual que en el caso anterior $\mathcal{C}(i,v) \backslash \mathcal{C}(i,v') = S$, y por lo tanto, $v \neq v'$, pero

$$\phi_i[v] = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v)} p_T^i = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v')} p_T^i + p_S^i = \sum_{T \in \mathcal{C}(i,v')} p_T^i = \phi_i[v']. \quad \square$$

Observación 3.2.22 Schotter [57] presenta y discute casos en los que es posible disminuir el peso de un votante y, al mismo tiempo, aumentar su poder. Este fenómeno ha sido considerado como paradójico; de hecho, Fisher and Schotter [37] lo denominaron la *paradoja de la redistribución*. Como hemos demostrado en la Proposición 3.2.20 y en la Proposición 3.2.21, las cosas son más fáciles cuando restringimos nuestro análisis a los índices probabilísticos. Además, la Proposición 3.2.21 generaliza un resultado dado sobre el índice de Shapley-Shubik por Gambarelli [42].

La propiedad de donación estricta fue generalizada por Felsenthal y Machover [35] a todos los juegos simples con la *propiedad de transferencia* de la siguiente manera:

Sean (N,v) y (N,v') dos juegos simples distintos. Supongamos que existen dos jugadores $i,j \in N$ tales que, para cualquier $S \subseteq N$,

(a) si $i,j \in S$ o bien $i,j \notin S$, entonces $S \in W$ si y solo si $S \in W'$;

(b) si $i \in S$, $j \notin S$ y $S \in W'$ entonces $S \in W$;

(c) si $i \notin S$, $j \in S$ y $S \in W$ entonces $S \in W'$.

En tal caso, decimos que hay una *donación* de (N,v) a (N,v'). El jugador i puede perder en el juego v' algunas posiciones cruciales que tenía en v, mientras que el jugador j puede ganar posiciones cruciales en el juego v' que no tenía en v. Por lo tanto, debemos esperar una transferencia de poder del jugador i al jugador j cuando pasamos del juego v al juego v'.

Proposición 3.2.23 *(Propiedad de donación estricta generalizada). Un índice probabilístico ϕ satisface que $\phi_i[v] > \phi_j[v]$ en una donación de (N,v) a (N,v') si y solo si ϕ es regular para el jugador i.*

Demostración: La demostración es análoga a la de la Proposición 3.2.21. □

3.3. La función p-potencial

En esta sección estudiaremos la función potencial para los valores probabilísticos multinomiales con un perfil de tendencias positivo, es decir, tal que $p_i > 0$ para todo jugador i. Como ya hemos dicho anteriormente, el concepto de potencial fue introducido en 1988 por Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell para el valor de Shapley. Dragan extendió posteriormente dicho concepto al valor de Banzhaf y a todos los semivalores.

Pretendemos definir una función $P_{\lambda^{\mathbf{p}}}$ para cada valor multinomial, $\lambda^{\mathbf{p}}$, con un perfil de tendencias positivo de manera que se cumpla que

$$P_{\lambda^{\mathbf{p}}}(v) - P_{\lambda^{\mathbf{p}}}(v_{-\{i\}}) = \lambda_i^{\mathbf{p}}(v)$$

para todo juego v definido en $\mathcal{G}_N$.

Observación 3.3.1 Para un juego $v \in \mathcal{G}_N$ y una coalición $T \subseteq N$ hemos definido $v_{|T} \in \mathcal{G}_T$ como el juego tal que $v_{|T}(S) = v(S)$, para toda coalición $S \subseteq T$.

Como hemos visto en la observación 3.2.14, si $\lambda^{\mathbf{p}}$ es un valor multinomial, define un $\lambda^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}$, valor multinomial sobre $\mathcal{G}_T$ para todo $T \subseteq N$ ya que es un valor probabilístico hereditario.

Si $\mathbf{p} \in [0,1]^n$ es un perfil definido en el conjunto N, $\mathbf{p^T} \in [0,1]^t$ tal que $p_i^T = p_i$ para todo $i \in T$ es un subperfil dado sobre el conjunto T.

Definición 3.3.2 *Sea $N = \{1,2,\ldots,n\}$ un conjunto de jugadores y $\mathbf{p} \in [0,1]^n$ un perfil de tendencias definido sobre él. Dado un juego $v \in \mathcal{G}_N$, para cada coalición $T \subseteq N$, definimos la función*

$$\begin{aligned} R(v_{|T}) &= \sum_{S \subseteq T} \prod_{j \in S} p_j^T \prod_{k \in T \setminus S} (1 - p_k^T) v_{|T}(S) \quad \textit{si} \;\; T \neq \emptyset \\ R(v_{|\emptyset}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

De ahora en adelante, para simplificar la notación, representaremos los subperfiles dados sobre un conjunto $T \subseteq N$ como $\mathbf{p}$.

Claramente, R está bien definida a partir de la ecuación (3.7), ya que si $v, w \in \mathcal{G}_N$ y se cumple que $v_{|T} = w_{|T}$ para algún $T \subseteq N$, entonces $R(v_{|T}) = R(w_{|T})$, y tenemos en particular que

$$R(v) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} p_j \prod_{k \in N \setminus S} (1 - p_k) v(S) \quad \text{para todo } v \in \mathcal{G}_N$$

Proposición 3.3.3 *Sea $\lambda^{\mathbf{p}}$ el valor probabilístico multinomial definido por el perfil de tendencias $\mathbf{p}$ sobre el conjunto N. Entonces*

$$R(v_{|T}) - R(v_{|T \setminus \{i\}}) = p_i \lambda_i^{\mathbf{p}}[v_{|T}]$$

para todo jugador $i \in T$, toda coalición $T \subseteq N$ ($T \neq \emptyset$) y para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$.

Demostración: Si $t = 1$ el resultado es trivial ya que $R(v) = p_1 v(\{1\})$, $R(v_{|\emptyset}) = 0$ y $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = v(\{1\})$.

Si $t \geq 2$, podemos escribir la expresión (3.7) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R(v_{|T}) &= \sum_{\substack{S\subseteq T\\ i\notin S}} \prod_{j\in S} p_j \prod_{k\in T\setminus S} (1-p_k) v_{|T}(S) + \sum_{\substack{S\subseteq T\\ i\in S}} \prod_{j\in S} p_j \prod_{k\in T\setminus S} (1-p_k) v_{|T}(S) \\ &= \sum_{S\subseteq T\setminus\{i\}} (1-p_i) \prod_{j\in S} p_j \prod_{\substack{k\in T\setminus S:\\ k\neq i}} (1-p_k) v_{|T}(S) + \sum_{S\subseteq T\setminus\{i\}} p_i \prod_{j\in S} p_j \prod_{\substack{k\in T\setminus S:\\ k\neq i}} (1-p_k) v_{|T}(S\cup\{i\}) \end{aligned}$$

Aplicando la expresión (3.7) al subjuego $R(v_{|T\setminus\{i\}})$ tenemos:

$$R(v_{|T\setminus\{i\}}) = \sum_{S\subseteq T\setminus\{i\}} \prod_{j\in S} p_j \prod_{\substack{k\in T\setminus S:\\ k\neq i}} (1-p_k) v_{|T\setminus\{i\}}(S).$$

Restando ambas expresiones y teniendo en cuenta que cuando $S \subseteq T \setminus \{i\}$ entonces $v_{|T\setminus\{i\}}(S) = v_{|T}(S)$ obtenemos:

$$R(v_{|T}) - R(v_{|T\setminus\{i\}}) = p_i \sum_{S\subseteq T\setminus\{i\}} \prod_{j\in S} p_j \prod_{\substack{k\in T\setminus S:\\ k\neq i}} (1-p_k)[v_{|T}(S\cup\{i\}) - v_{|T}(S)] = p_i \lambda_i^{\mathbf{p}}[v_{|T}]. \quad \square$$

Observación 3.3.4 Si $\lambda^{\mathbf{p}}$ es un valor pobabilístico multinomial definido por el perfil positivo de tendencias $\mathbf{p} \in (0,1]^n$ sobre el conjunto N, la proposición anterior nos permite recuperar la asignación a un jugador i. En efecto, aplicando la proposición 3.3.3 obtenemos

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v_{|T}] = \frac{1}{p_i}[R(v_{|T}) - R(v_{|T\setminus\{i\}})] \quad \text{para cada } i \in T,\; T \subseteq N\ (T \neq \emptyset).$$

En particular,

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \frac{1}{p_i}[R(v) - R(v_{-\{i\}})] \quad \text{para cada } i \in N.$$

Se define el poder total para un valor probabilístico cualquiera g, como la suma de todas la asignaciones a los distintos jugadores de N debidas a dicho valor. Si tenemos un valor probabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$, denotamos por

$$\pi^{\mathbf{p}}(v) = \sum_{i\in N} \lambda_i^{\mathbf{p}}[v].$$

Proposición 3.3.5 *Sea $\lambda^{\mathbf{p}}$ el valor probabilístico multinomial definido por el perfil de tendencias $\mathbf{p} \in (0,1]^n$ sobre el conjunto N. Entonces*

$$R(v_{|T}) = \frac{1}{\sum_{i \in T} \frac{1}{p_i}} \left[\pi^{\mathbf{p}}(v_{|T}) + \sum_{i \in T} \frac{1}{p_i} R(v_{|T \setminus \{i\}}) \right]$$

para todo jugador $i \in T$, toda coalición $T \subseteq N$ $(T \neq \emptyset)$ y para todo juego $v \in \mathcal{G}_N$.

Demostración: Si $\mathbf{p} \in (0,1]^n$ es un perfil de tendencias definido sobre el conjunto N y $\lambda^{\mathbf{p}}$ el valor pobabilístico multinomial correspondiente, como hemos visto antes, aplicando la proposición 3.3.3 obtenemos

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v_{|T}] = \frac{1}{p_i}[R(v_{|T}) - R(v_{|T \setminus \{i\}})] \quad \text{para cada } i \in T, \ T \subseteq N \ (T \neq \emptyset)$$

Por lo tanto,

$$\pi^{\mathbf{p}}(v_{|T}) = \sum_{i \in N} \lambda_i^{\mathbf{p}}[v_{|T}] = \sum_{i \in T} \frac{1}{p_i}[R(v_{|T}) - R(v_{|T \setminus \{i\}})]$$

Finalmente,

$$R(v_{|T}) = \frac{1}{\sum_{i \in T} \frac{1}{p_i}} \left[\pi^{\mathbf{p}}(v_{|T}) + \sum_{i \in T} \frac{1}{p_i} R(v_{|T \setminus \{i\}}) \right]. \quad \square$$

Este resultado nos proporciona una fórmula recursiva que es una generalización de la dada por Dragan [31] para los semivalores.

Así pues, si $\mathbf{p}$ es un perfil positivo de tendencias definido sobre el conjunto N y $\lambda^{\mathbf{p}}$ el valor probabilístico multinomial regular correspondiente podemos considerar que $R(v)$ es el $\mathbf{p}$-potencial del juego v. Entonces, podemos calcular el $\mathbf{p}$-potencial de manera recurrente a partir del poder total, obteniendo

$$R(v_{|T}) = \frac{1}{\sum_{i \in T} \frac{1}{p_i}} \left[\pi^{\mathbf{p}}(v_{|T}) + \sum_{i \in T} \frac{1}{p_i} R(v_{|T \setminus \{i\}}) \right],$$

junto a la condición inicial $R(v_{|\emptyset}) = 0$.

El **p**-potencial R asociado a un valor multinomial con un perfil de tendencias positivo $\lambda^{\mathbf{p}}$ se interpreta como una “regla” que asigna un número a cada subjuego $v_{|T}$. En este caso, la aplicación satisface:

(a) $R(v_{|\{i\}}) = p_i v(\{i\}) = p_i \lambda^{\mathbf{p}}[v]$ si $|T| = 1$.

(b) $R(v_{|T}) - R(v_{|T\setminus\{i\}}) = p_i \lambda^{\mathbf{p}}[v]$ si $|T| > 1$.

Definición 3.3.6 *Sea $\lambda^{\mathbf{p}}$ el valor probabilístico multinomial con perfil de tendencias positivo $\mathbf{p} \in (0,1]^n$ definido sobre el conjunto N. El juego $\lambda^{\mathbf{p}}$-potencial es el juego $R^*_{\mathbf{p}}(v)$ definido por*

$$R^*_{\mathbf{p}}(v)(\emptyset) = 0 \quad y \quad R^*_{\mathbf{p}}(v)(S) = R^*_{\mathbf{p}}(v_{|S}) \quad para\ todo \quad \emptyset \neq S \subseteq N.$$

Llamaremos aplicación $\lambda^{\mathbf{p}}$-potencial al endomorfismo $R^*_{\mathbf{p}} : \mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_N$ que transforma el juego v en $R^*_{\mathbf{p}}(v)$.

Proposición 3.3.7 *Sea $R^*_{\mathbf{p}}$ la aplicación $\lambda^{\mathbf{p}}$-potencial correspondiente al valor pobabilístico multinomial $\lambda^{\mathbf{p}}$. Cada juego de unanimidad u_T, $\emptyset \neq T \subseteq N$, es un vector propio con valor propio $\prod_{j\in T} p_j$ de la aplicación $R^*_{\mathbf{p}}$. Es decir*

$$R^*_{\mathbf{p}}(u_T) = \left(\prod_{j\in T} p_j\right) u_T \quad si \quad \emptyset \neq T \subseteq N.$$

Demostración: Veamos que aplicando $R^*_{\mathbf{p}}(u_T)$ sobre cada coalición $S \subseteq N$, obtenemos

$$R^*_{\mathbf{p}}(u_T)(S) = \begin{cases} \prod_{j\in S} p_j & \text{si } S \supseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{3.8}$$

para toda coalición $\emptyset \neq T \subseteq N$.

Estudiemos ahora las distintas situaciones.

- Si $T = S$, entonces

$$\begin{aligned}
R^*_{\mathbf{p}}(u_T)(T) = R(u_{T_{|T}}) &= \sum_{S' \subseteq T} \prod_{j \in S'} p_j \prod_{k \in T \setminus S'} (1-p_k) u_{T_{|T}}(S') \\
&= \prod_{j \in T} p_j (u_T)(T) \\
&= \prod_{j \in T} p_j
\end{aligned}$$

lo que prueba la relación (3.8) en este caso.

- Si $T \subsetneq S$, tenemos

$$\begin{aligned}
R^*_{\mathbf{p}}(u_T)(S) = R(u_{T_{|S}}) &= \sum_{S' \subseteq S} \prod_{j \in S'} p_j \prod_{k \in S \setminus S'} (1-p_k) u_{T_{|S}}(S') \\
&= \sum_{T \subseteq S' \subseteq S} \prod_{j \in S'} p_j \prod_{k \in S \setminus S'} (1-p_k)(u_T)(S') \\
&= \prod_{j \in T} p_j \sum_{T \subseteq S' \subseteq S} \prod_{j \in S \setminus T} p_j \prod_{k \in S \setminus S'} (1-p_k) \\
&= \prod_{j \in T} p_j
\end{aligned}$$

lo que prueba la relación (3.8) en este segundo caso.

- Por último, si $T \nsubseteq S$,

$$\begin{aligned}
R^*_{\mathbf{p}}(u_T)(S) = R(u_{T_{|S}}) &= \sum_{S' \subseteq S} \prod_{j \in S'} p_j \prod_{k \in S \setminus S'} (1-p_k) u_{T_{|S}}(S') \\
&= 0.
\end{aligned}$$

lo que prueba la relación (3.8) en este tercer caso. $\square$

Observación 3.3.8 El **p**-potencial de un juego v se puede calcular a partir de su extensión multilineal. Si $f_v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la extensión multilineal de un juego v, podemos calcular la extensión multilineal de cualquier subjuego $v_{|T}$ a partir de esta substituyendo $x_j = 0$ si $j \notin T$, así pues

$$f_{v_{|T}}((x_i)_{i \in T}) = f_v((x_i)_{i \in T}, (0)_{j \in N \setminus T})$$

En esta situación, está claro que $R(v) = f_v(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y en general,

$$R(v_{|T}) = f_{v_{|T}}((p_i)_{i \in T})$$

para todo $v_{|T} \in \mathcal{G}_T$, por lo que podemos utilizar la expresión de la extensión multilineal para calcular el potencial.

Veamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 3.3.9 Consideremos el juego v definido sobre un conjunto de 4 jugadores, $n = 4$, y perfil de tendencias $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ tal que $p_i > 0$, definido por

$$\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0, & v(\{1\}) = 1, & v(\{1,2\}) = 3, \\
v(\{1,3\}) = 2, & v(\{1,4\}) = 1, & v(\{2,3\}) = 1, \\
v(\{1,2,3\}) = 5, & v(\{1,2,4\}) = 3, & v(\{1,3,4\}) = 2, \\
v(\{2,3,4\}) = 4, & v(N) = 6, & v(S) = 0 \text{ en cualquier otro caso.}
\end{array}$$

o de forma equivalente, si lo expresamos en términos de los juegos de unanimidad,

$$v = u_{\{1\}} + 2u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} + u_{\{2,3\}} + 3u_{\{2,3,4\}} - 2u_N.$$

La extensión multilineal del juego es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3x_4.$$

A partir de esta expresión podemos calcular el $\mathbf{p}$-potencial del juego v,

$$R(v) = p_1 + 2p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 + 3p_2p_3p_4 - 2p_1p_2p_3p_4.$$

En cuanto al $\mathbf{p}$-potencial de cada subjuego, tenemos

$$\begin{array}{ll}
R(v_{|\{1\}}) = R(v_{|\{1,4\}}) = p_1 & R(v_{|\{1,2\}}) = p_1 + 2p_1p_2, \\
R(v_{|\{1,3\}}) = p_1 + p_1p_3, & R(v_{|\{2,3\}}) = p_2p_3, \\
R(v_{|\{1,2,3\}}) = p_1 + 2p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3, & R(v_{|\{1,2,4\}}) = p_1 + 2p_1p_2, \\
R(v_{|\{1,3,4\}}) = p_1 + p_1p_3, & R(v_{|\{2,3,4\}}) = p_2p_3 + 3p_2p_3p_4,
\end{array}$$

y $R(v_{|T}) = 0$, para cualquier otra coalición $T \neq N$.

Obteniendo el valor pobabilístico multinomial, $\lambda^{\mathbf{p}}$, correspondiente.

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\mathbf{p}}[v] = \ & \frac{1}{p_1}[R(v) - R(v_{|\{2,3,4\}})] = & 1 + 2p_2 + p_3 - 2p_2p_3p_4, \\
\lambda_2^{\mathbf{p}}[v] = \ & \frac{1}{p_2}[R(v) - R(v_{|\{1,3,4\}})] = & 2p_1 + p_3 + 3p_3p_4 - 2p_1p_3p_4, \\
\lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = \ & \frac{1}{p_3}[R(v) - R(v_{|\{1,2,4\}})] = & p_1 + p_2 + 3p_2p_4 - 2p_1p_2p_4, \\
\lambda_3^{\mathbf{p}}[v] = \ & \frac{1}{p_4}[R(v) - R(v_{|\{1,2,3\}})] = & 3p_2p_3 - 2p_1p_2p_3.
\end{aligned}$$

En cuanto a los valores probabilísticos multinomiales inducidos en cardinales inferiores, si consideramos por ejemplo la coalición $T = \{2,3,4\}$, el juego restringido a esta coalición corresponde a $v_{|T} = u_{\{2,3\}} + 3u_{\{2,3,4\}}$. Entonces,

$$\lambda_2^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}[v_{|T}] = p_3 + 3p_3p_4, \qquad \lambda_3^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}[v_{|T}] = p_2 + 3p_2p_4 \quad \text{y} \quad \lambda_4^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}[v_{|T}] = 3p_2p_3.$$

3.4. Estudio de los valores multinomiales mediante segundas derivadas

Una de las características diferenciales de los valores probabilísticos multinomiales es que el pago obtenido por un jugador i cualquiera no depende de su tendencia a cooperar, p_i, pero si de la intención de cooperar que pueda tener el resto de jugadores. Entonces puede resultar interesante medir el efecto de una variación en la intención de cooperar de otro jugador cualquiera, p_j $(j \neq i)$ en el pago al jugador i. Como este pago viene dado por la primera derivada parcial de la extensión multilineal del juego f, con respecto a la variable x_i evaluada en el punto $\mathbf{p}$, resulta razonable estudiar las segundas derivadas de la forma $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ con $j \neq i$.

Tal y como se indica en el Corolario 3.2.6, cuando $p_i = p_j$ los pagos concuerdan con las relaciones de dominancia (estricta o no) y de indiferencia (iDj, iIj, o iDj pero $j \not D i$), que dependen solo de la estructura del juego.

¿Qué ocurre cuando $p_i \neq p_j$? Por ejemplo, si consideramos el juego de unanimidad $u_{\{1,2\}}$ definido en un conjunto cualquiera de jugadores N con $n \geq 2$, se cumple que $1I2$ pero, para todo perfil $\mathbf{p}$,

$$\lambda_1^{\mathbf{p}}[u_{\{1,2\}}] - \lambda_2^{\mathbf{p}}[u_{\{1,2\}}] = p_2 - p_1 \neq 0 \text{ si } p_1 \neq p_2.$$

Buscamos una respuesta a dicha pregunta y así conocer mejor cómo funcionan los valores multinomiales.

Recordemos que, si $v \in \mathcal{G}_N$, su extensión multilineal f está definida, en principio, sobre todo el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ aunque, en general, solo nos interesa su comportamiento en el n–cubo $[0,1]^n$. El conjunto 2^N de coaliciones de N se puede identificar con $\{0,1\}^n$, el conjunto de vértices del cubo, mediante la aplicación $S \mapsto \mathbf{x}^S = (x_1^S, x_2^S, \ldots, x_n^S)$ definida por $x_i^S = 1$ si $i \in S$ o $x_i^S = 0$ en caso contrario.

Entonces, $v(S) = f(\mathbf{x}^S)$ para todo $S \subseteq N$.

A partir de ahora, usaremos notaciones del tipo

$$f(1_i, \mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, \overset{\underset{\smile}{i}}{1}, \ldots, x_n) \quad \text{o} \quad f(0_i, 1_j, \mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, \overset{\underset{\smile}{i}}{0}, \ldots, \overset{\underset{\smile}{j}}{1}, \ldots, x_n),$$

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Observamos que, para cada $i \in N$, f es una función lineal de x_i, es decir,

$$f(\mathbf{x}) = a + bx_i$$

donde
$$a = f(0_i, \mathbf{x}) \quad \text{y} \quad b = f(1_i, \mathbf{x}) - f(0_i, \mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x}.$$

Entonces
$$f(\mathbf{x}) = x_i f(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) f(0_i, \mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x}. \tag{3.9}$$

Lema 3.4.1 *Sea* $\mathbf{p}$ *un perfil de tendencias definido en* N*. Para toda pareja de jugadores distintos* $i, j \in N$ *y todo juego* $v \in \mathcal{G}_N$*, si* f *es la extensión multilineal de* v *entonces:*

(a) $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = f(1_i, \mathbf{p}) - f(0_i, \mathbf{p})$.

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) = f(1_i, 1_j, \mathbf{p}) - f(1_i, 0_j, \mathbf{p}) - f(0_i, 1_j, \mathbf{p}) + f(0_i, 0_j, \mathbf{p})$.

Demostración: (a) Aplicando la propiedad de linealidad de f respecto a la variable x_i, obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{f(\mathbf{p}) - f(0_i,\mathbf{p})}{p_i} \\ &= \frac{p_i f(1_i,\mathbf{p}) + (1-p_i) f(0_i,\mathbf{p}) - f(0_i,\mathbf{p})}{p_i} \\ &= f(1_i,\mathbf{p}) - f(0_i,\mathbf{p}).\end{aligned}$$

(b) La segunda igualdad en (a) es cierta no solo para cualquier perfil, sino para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f(1_i,\mathbf{x}) - f(0_i,\mathbf{x}).$$

Así pues, derivando esta expresión y evaluando en $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ obtenemos el resultado. $\square$

La segunda igualdad en (a) se podría deducir directamente de la expresión introducida en la definición (1.1.14), pero con mucho más esfuerzo.

Teorema 3.4.2 *Sean $i, j \in N$ dos jugadores distintos, $v \in \mathcal{G}_N$ y f la extensión multilineal del juego v. Entonces, para cualquier perfil de tendencias* $\mathbf{p}$ *definido sobre N, se cumple que*

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_j^{\mathbf{p}}[v] = (p_j - p_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) + f(1_i,0_j,\mathbf{p}) - f(0_i,1_j,\mathbf{p}).$$

Demostración: Utilizando el Lema 3.4.1 y la Eq. (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] &= f(1_i,\mathbf{p}) - f(0_i,\mathbf{p}) \\ &= p_j f(1_i,1_j,\mathbf{p}) + (1-p_j) f(1_i,0_j,\mathbf{p}) - p_j f(0_i,1_j,\mathbf{p}) - (1-p_j) f(0_i,0_j,\mathbf{p})\end{aligned}$$

y una expresión similar para $\lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$.

Por lo tanto,

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = p_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) + f(1_i, 0_j, \mathbf{p}) - f(0_i, 0_j, \mathbf{p})$$

$$\lambda_j^{\mathbf{p}}[v] = p_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) + f(0_i, 1_j, \mathbf{p}) - f(0_i, 0_j, \mathbf{p})$$

y, como f es C^∞, satisface el Teorema de Schwartz sobre la coincidencia de las derivadas parciales cruzadas.

Restando las expresiones anteriores y cancelando el término común obtenemos el resultado. $\square$

Ahora estamos en condiciones de proporcionar algunas respuestas a la pregunta formulada anteriormente, que surgirán como consecuencia inmediata del Teorema 3.4.2. Para facilitar la notación, denominamos

$$d(i, j, \mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) \qquad \text{y} \qquad \Delta(i, j, \mathbf{p}) = f(1_i, 0_j, \mathbf{p}) - f(0_i, 1_j, \mathbf{p}),$$

de modo que

$$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] - \lambda_j^{\mathbf{p}}[v] = (p_j - p_i) d(i, j, \mathbf{p}) + \Delta(i, j, \mathbf{p}).$$

Como f es multilineal, observamos que

$$v(S \cup \{i\}) \geq v(S \cup \{j\}) \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i, j\} \quad \text{si y solo si} \quad \Delta(i, j, \mathbf{p}) \geq 0 \text{ para todo } \mathbf{p},$$

pero incluso si, $v(S \cup \{i\}) > v(S \cup \{j\})$ para alguna de estas coaliciones S, no podríamos deducir que $\Delta(i, j, \mathbf{p}) > 0$ para todo $\mathbf{p}$ (ver el caso de los jugadores 4 y 3, y la coalición $S = \{1, 2\}$ en el Ejemplo 3.4.6).

Corolario 3.4.3 *Si iDj en el juego v, entonces $\Delta(i, j, \mathbf{p}) \geq 0$ para todo $\mathbf{p}$. Si, además,*

(a) $d(i, j, \mathbf{p}) = 0$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] \geq \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;
(b) $d(i, j, \mathbf{p}) > 0$ y $p_i < p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;
(c) $d(i, j, \mathbf{p}) < 0$ y $p_i > p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$. $\square$

Corolario 3.4.4 *Si iIj en el juego v, entonces $\Delta(i,j,\mathbf{p}) = 0$ para todo $\mathbf{p}$. Si, además,*

(a) $d(i,j,\mathbf{p}) = 0$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] = \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;

(b) $d(i,j,\mathbf{p}) > 0$ y $p_i < p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;

(c) $d(i,j,\mathbf{p}) > 0$ y $p_i > p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] < \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;

(d) $d(i,j,\mathbf{p}) < 0$ y $p_i < p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] < \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$;

(e) $d(i,j,\mathbf{p}) < 0$ y $p_i > p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$. $\square$

Corolario 3.4.5 *Si iDj pero $j\not D i$ en el juego v, entonces $\Delta(i,j,\mathbf{p}) \geq 0$ para todo $\mathbf{p}$ y $\Delta(i,j,\mathbf{p}) > 0$ para algún $\mathbf{p}$. Si, además,*

(a) $d(i,j,\mathbf{p}) = 0$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$ para dichos perfiles $\mathbf{p}$;

(b) $d(i,j,\mathbf{p}) > 0$ y $p_i < p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$ para cualquiera de tales perfiles $\mathbf{p}$;

(c) $d(i,j,\mathbf{p}) < 0$ y $p_i > p_j$, entonces $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v] > \lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$ para cualquiera de tales perfiles $\mathbf{p}$. $\square$

No hemos detallado, en los Corolarios 3.4.3 y 3.4.5, los casos en los que no se puede llegar a establecer una conclusión debido a la influencia de $\Delta(i,j,\mathbf{p})$.

Consideremos ahora nuevamente el Ejemplo 3.2.1 que nos servirá para ilustrar alguno de estos casos.

Ejemplo 3.4.6 Consideremos el juego v definido sobre un conjunto de 4 jugadores, $n = 4$, y perfil de tendencias $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, definido por

$$\begin{array}{lll} v(\emptyset) = 0, & v(\{1\}) = v(\{2\}) = 1, & v(\{1,2\}) = 4, \\ v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 3, & v(\{1,4\}) = v(\{2,4\}) = 2, & v(\{3,4\}) = 1, \\ v(\{1,2,3\}) = 4, & v(\{1,2,4\}) = 5, & v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 4, \\ v(N) = 6, & v(S) = 0 \text{ en caso contrario.} & \end{array}$$

En este juego tenemos que $1I2$, $1D3$ pero $3\not D 1$, además $1D4$ pero $4\not D 1$ y, por último, $3\not D 4$ y $4\not D 3$. En la Tabla 3.1 damos algunos ejemplos particulares de perfiles de tendencias que cubren, más o menos, todos los casos contemplados en los Corolarios 3.4.4 y 3.4.5. Podemos añadir que, para todo $\mathbf{p}$,

$$\Delta(1,2,\mathbf{p}) = 0, \quad \Delta(1,3,\mathbf{p}) = 1 \quad \text{y} \quad \Delta(1,4,\mathbf{p}) = 1 + p_2 + p_3 - 3p_2p_3,$$

y también que $d(1,4,\mathbf{p})$ no es nunca negativa y se anula solo en dos puntos.

caso para i, j	p_1	p_2	p_3	p_4	$d(i,j,p)$	p_i ? p_j	$\lambda_i^{\mathbf{p}}[v]$	signo	$\lambda_j^{\mathbf{p}}[v]$
	0.0	0.7	0.5	0.2	0.0000	$p_i < p_j$	2.1000	=	2.1000
	0.7	0.2	0.5	0.0	0.0000	$p_i > p_j$	2.0000	=	2.0000
$1I2$	0.4	0.5	0.1	0.2	1.4400	$p_i < p_j$	2.1000	$>$	1.9560
($1D2$ y $2D1$)	0.6	0.5	0.1	0.2	1.4400	$p_i > p_j$	2.1000	$<$	2.2440
	0.4	0.5	0.8	0.7	-0.7800	$p_i < p_j$	2.3500	$<$	2.4280
	0.6	0.5	0.8	0.7	-0.7800	$p_i > p_j$	2.3500	$>$	2.2720
	0.1	0.5	0.8	0.1	0.0000	$p_i < p_j$	2.0500	$>$	1.0500
	0.8	0.5	0.1	0.7	0.0000	$p_i > p_j$	2.3500	$>$	1.3500
$1D3$ y	0.4	0.3	0.5	0.7	0.5200	$p_i < p_j$	2.3500	$>$	1.2980
$3\not{D}1$	0.8	0.4	0.2	0.7	0.2600	$p_i > p_j$	2.2720	$>$	1.4280
	0.3	0.6	0.4	0.7	-0.2600	$p_i < p_j$	2.3760	$>$	1.4020
	0.3	0.7	0.2	0.1	-0.7600	$p_i > p_j$	2.2780	$>$	1.2020
	0.1	0.0	1.0	0.8	0.0000	$p_i < p_j$	3.0000	$>$	1.0000
$1D4$ y	0.8	0.0	1.0	0.1	0.0000	$p_i > p_j$	3.0000	$>$	1.0000
$4\not{D}1$	0.6	0.3	0.4	0.8	0.5400	$p_i < p_j$	2.3520	$>$	0.9040
	0.2	0.3	0.4	0.6	0.5400	$p_i > p_j$	2.2440	$>$	0.6880

Tabla 3.1: Comportamiento de los valores multinomiales frente a las relaciones de indiferencia y dominancia estricta

3.5. Un ejemplo de aplicación: valores multinomiales definidos sobre jugadores conectados mediante una red

En [50], Myerson utiliza la teoría de grafos para analizar la estructura de cooperación en juegos. Su idea principal es que los jugadores podrían cooperar en un juego formando acuerdos bilaterales entre ellos. Estos acuerdos de cooperación pueden ser representados por vínculos o enlaces (aristas del grafo) entre los jugadores (vértices o nodos del grafo) que forman parte del acuerdo.

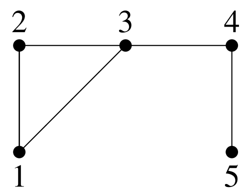
Una vez determinado el grafo, este puede verse como un juego cooperativo en el que el rol del grafo es definir qué coaliciones son factibles. Las coaliciones factibles son aquellas formadas por nodos conectados mediante el grafo, es decir, el grafo restringido sobre ellas es connexo. El valor de la coalición se obtiene al agregar las utilidades logradas por aquellos miembros de la coalición que están comunicados por la red. Estas situaciones son particularmente importantes cuando los jugadores pueden, debido a su afinidad, parentesco u otros factores, tener preferencias claras para unirse a ciertas coaliciones en lugar de otras.

No solo en el campo social podemos encontrar situaciones en las que muchas de las coaliciones teòricamente posibles, en realidad no se acabaran formando. Cuando estudiamos coaliciones cooperativas entre jugadores conectados por rutas de suministro, redes informáticas o enlaces web, hay razones estructurales claras para excluir por completo algunas coaliciones e incluir, en cambio, solo coaliciones que están conectadas a lo largo de la red.

Como veremos en el siguiente ejemplo, la forma en la que los jugadores están conectados entre sí es importante y el perfil de tendencias asociado a los valores multinomiales proporciona nuevas herramientas para estudiar dichas situaciones.

Ejemplo 3.5.1 Consideremos una situación en la que 5 jugadores están conectados en alguna red Γ, como podrían ser amistades o relaciones sociales, líneas de comunicación o alianzas dadas por

Γ :



Sea v el juego cooperativo definido por $v(S) = \dfrac{s(s-1)}{2}$ donde $s = |S|$.

Consideramos el juego v_Γ asociado al grafo Γ en el sentido definido por Myerson, es decir, utilizando el grafo para definir la utilidad que pueden obtener las coaliciones como suma de las utilidades de sus componentes connexas. Es decir, para toda coalición $S \subseteq N$ definimos

$$v_\Gamma(S) = \sum_{T \subseteq S/\Gamma} v(T)$$

donde S/Γ es la partición de S en componentes connexas asociada al grafo Γ.

La extensión multilineal correspondiente a este juego es

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \quad & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_1x_3x_4+ \\ & x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$ un perfil de tendencias.

Abordamos el cálculo de los valores $\lambda_i^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$ para i=1, 2, 3, 4 y 5 a partir de la Observación 3.1.2(d), obteniendo:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mathbf{p}}[v_\Gamma] &= p_2+p_3+p_3p_4(1+p_5), \\ \lambda_2^{\mathbf{p}}[v_\Gamma] &= p_1+p_3+p_3p_4(1+p_5), \\ \lambda_3^{\mathbf{p}}[v_\Gamma] &= p_1+p_2+p_4(1+p_5)(1+p_1+p_2), \\ \lambda_4^{\mathbf{p}}[v_\Gamma] &= p_5+p_3(1+p_5)(1+p_1+p_2), \\ \lambda_5^{\mathbf{p}}[v_\Gamma] &= p_4[1+p_3(1+p_1+p_2)]. \end{aligned}$$

Observamos que la introducción de los perfiles de tendencias rompe la simetría existente entre los jugadores 1 y 2 en el juego v_Γ. No obstante, sigue existiendo una simetría "estructural" entre $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$ y $\lambda_2^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$ ya que $\lambda_2^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$ se obtiene de $\lambda_1^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$ substituyendo p_2 por p_1.

Estas asignaciones reflejan la distribución de poder a priori. Las posibilidades del jugador 3 dependen de p_4 así como de p_1 y p_2 como consecuencia de la posición central del jugador 3 en la red. Las asignaciones para el jugador 4 están fuertemente influenciadas por p_3. Además, las posibilidades del jugador 5 dependen claramente del interés del jugador 4 para formar coaliciones (ver Tabla 3.2).

	$\mathbf{p}=(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)$	$\mathbf{p}=(0.1,0.8,0.2,0.5,0.9)$	$\mathbf{p}=(0.1,0.8,0.2,0.9,0.9)$
$\lambda_1^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$	1.375 (16.67%)	1.190 (17.77%)	1.342 (14.92%)
$\lambda_2^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$	1.375 (16.67%)	0.490 (7.32%)	0.642 (7.14%)
$\lambda_3^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$	2.500 (30.30%)	2.705 (40.39%)	4.149 (46.12%)
$\lambda_4^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$	2.000 (24.24%)	1.622 (24.22%)	1.622 (18.03%)
$\lambda_5^{\mathbf{p}}[v_\Gamma]$	1.000 (12.12%)	0.690 (10.30%)	1.242 (13.80%)

Tabla 3.2: Valores multinomiales para distintos valores de **p**

Capítulo 4

Bisemivalores para juegos bicooperativos

Este capítulo se centra en el estudio de conceptos de solución para juegos bicooperativos. Como ya hemos comentado anteriormente, los juegos bicooperativos fueron introducidos por Bilbao [8] como una generalización de los juegos cooperativos clásicos, donde cada jugador puede participar en el juego de forma positiva, negativa o no participar. Por lo tanto, en este tipo de juegos consideramos pares ordenados de coaliciones disjuntas. Tenemos pues, una partición del conjunto de jugadores en tres grupos: (*i*) Los jugadores de la primera coalición están a favor de modificar la situación actual y emprenderán acciones en este sentido; (*ii*) los jugadores de la segunda coalición no están de acuerdo en hacer cambios y emprenderán acciones en contra de esta modificación; y (*iii*) el resto de jugadores no está convencido de los beneficios de los cambios, pero no se opondrán a las acciones que emprendan los jugadores de la primera coalición. Posteriormente en [12], Bilbao *et al* analizan los juegos bicooperativos ternarios, que son un refinamiento de los juegos de votación ternarios introducidos por Felshental y Machover [36]. Definen los conceptos de *movimiento (corriente) defensor(a)* y *movimiento (corriente) detractor(a)* para un jugador e introducen y axiomatizan el índice de poder de Banzhaf para esta clase de juegos.

Teniendo en cuenta estos resultados, introducimos y estudiamos los bisemivalores para juegos bicooperativos. Esto incluye, además de la descripción axiomática, una caracterización de los mismos por medio de coeficientes de ponderación de forma similar a la caracterización existente para los semivalores dada por Dubey, Neyman y Weber [33] en el contexto de los juegos cooperativos. Definimos una familia particular de estos bisemivalores que llamaremos (p,q)–bisemivalores que permiten el estudio de juegos bicooperativos donde los jugadores muestran dos tendencias distintas en el momento de formar coaliciones.

Completamos el análisis de los bisemivalores viendo cómo se comportan frente a propiedades similares a las propiedades clásicas que se encuentran en la literatura para el caso cooperativo, siguiendo un esquema similar al del capítulo 3 de esta Tesis.

Definimos y caracterizamos axiomáticamente el bisemivalor de Banzhaf, extendiendo la definición dada por Bilbao *et al* [12] del índice de poder de Banzhaf para juegos bicooperativos ternarios, a todos los juegos bicooperativos. También damos una nueva caracterización axiomática para el bisemivalor de Shapley introducido en [9].

Definimos la extensión multilineal de un juego bicooperativo de forma similar al caso cooperativo e introducimos un procedimiento de cálculo en términos de la extensión multilineal del juego para determinar las asignaciones dadas por los (p,q)-bisemivalores en particular y otro para los bisemivalores en general. Finalmente, introducimos la extensión multilineal generalizada del juego que nos permite calcular las asignaciones debidas al bisemivalor de Shapley a partir de ella.

4.1. Bisemivalores sobre juegos bicooperativos

Como ya hemos comentado anteriormente, una cuestión central en la Teoría de Juegos es definir un concepto de solución para un juego, es decir, una función que asigna a cada juego un conjunto de vectores con valores reales representando, cada uno de ellos, una distribución de pagos entre los jugadores. Definimos aquí una nueva familia de soluciones que llamamos bisemivalores para juegos bicooperativos.

De manera similar al caso cooperativo, si queremos que la comparación de roles en un juego sea significativa, la evaluación de una posición particular debe depender de la estructura del juego pero no de las etiquetas de los jugadores.

Para definir esta familia necesitamos un nuevo axioma, introducido por Bilbao *et al* en [9].

Definición 4.1.1 *(Axioma de simetría) Un valor ϕ definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de siemtría si y solo si $\phi_{\pi i}[\pi b] = \phi_i[b]$ para toda permutación π definida sobre N, todo jugador $i \in N$ y todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$, donde $\pi b(\pi S, \pi T) = b(S,T)$ y $\pi S = \{\pi i : i \in S\}$.*

Ahora estamos en condiciones de introducir los bisemivalores para juegos bicooperativos siguiendo la descripción axiomática dada por Weber para los semivalores sobre juegos cooperativos.

Definición 4.1.2 *Un bisemivalor sobre $\mathcal{BG}_N$ es una función $\psi : \mathcal{BG}_N \to \mathbb{R}^N$ que satisface los axiomas (propiedades) de linealidad, simetría, positividad y del jugador títere.*

Como veremos, la simetría caracteriza los bisemivalores dentro de la família de valores biprobabilísticos.

Teorema 4.1.3 *Un valor ψ definido en $\mathcal{BG}_N$ es un bisemivalor si y solo si existen dos familias de números reales $\{p_{s,t}\}$ y $\{q_{s,t}\}$ que satisfacen:*

$$\begin{aligned} & p_{s,t} \geq 0, q_{s,t} \geq 0, \\ & \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \left[\sum_{t=0}^{n-s-1} \binom{n-s-1}{t} p_{s,t} \right] = 1, \\ & \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \left[\sum_{s=0}^{n-t-1} \binom{n-t-1}{s} q_{s,t} \right] = 1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

de manera que

$$\psi_i[b] = \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [p_{s,t}(b(S \cup \{i\}, T) - b(S,T)) + q_{s,t}(b(S,T) - b(S, T \cup \{i\}))]$$

para todo jugador $i \in N$ y todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$, donde $s = |S|$ y $t = |T|$.

Demostración: ($\Leftarrow$) Teniendo en cuenta que los bisemivalores son un caso particular de los valores biprobabilísticos, la linealidad, la positividad y el axioma del jugador títere se demuestran en [11]. La simetría se deriva del hecho de que los coeficientes de ponderación solo dependen del cardinal de los subconjuntos S y T.

($\Rightarrow$) Teniendo en cuenta [11], es suficiente demostrar que si un valor biprobabilístico satisface el axioma de simetría, entonces $p^i_{(S,T)} = p_{s,t}$ y $q^i_{(S,T)} = q_{s,t}$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ con $s = |S|$ y $t = |T|$ y para todo jugador $i \in N$.

Sea ϕ un valor biprobabilístico. Entonces

$$\phi_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[p^i_{(S,T)}(b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)) + q^i_{(S,T)}(b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})) \right]$$

para cada jugador $i \in N$ y para cada juego $b \in \mathcal{BG}_N$.

Consideramos el *juego identidad* $\delta_{(S,T)}$ definido para cada $(S,T) \in 3^N$ tal que $(S,T) \neq (\emptyset,\emptyset)$, como:

$$\delta_{(S,T)}(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (A,B) = (S,T) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observamos que

$$\phi_i[\delta_{(S\cup\{i\},T)}] = p^i_{(S,T)} \quad \text{y} \quad \phi_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] = -q^i_{(S,T)}$$

para todo $i \in N$ y $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$.

Consideramos (S,T) y (S',T') dos pares de coaliciones en $3^{N\setminus\{i\}}$ tales que $(S,T),(S',T') \neq (\emptyset,\emptyset)$ y que, además, satisfacen

$$|S| = |S'| < n-1 \;\text{ y }\; |T| = |T'| < n-1.$$

Sea π una permutación sobre N tal que $\pi S = S'$ y $\pi T = T'$ mientras i permanece fijo. Entonces $\pi\delta_{(S,T)} = \delta_{(S',T')}$.

Por el axioma de simetría tenemos

$$\phi_i[\delta_{(S\cup\{i\},T)}] = \phi_i[\delta_{(S'\cup\{i\},T')}] \quad \text{y} \quad \phi_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] = \phi_i[\delta_{(S',T'\cup\{i\})}]$$

Así pues

$$p^i_{(S,T)} = p^i_{(S',T')} \quad \text{y} \quad q^i_{(S,T)} = q^i_{(S',T')}.$$

Ahora, tomemos $i, j \in N$, $i \neq j$ y $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$.

Sea π la permutación sobre N que intercambia los jugadores i y j mientras deja fijos a los jugadores restantes. Como $\pi\delta_{(S,T)} = \delta_{(S,T)}$ obtenemos

$$\phi_i[\delta_{(S\cup\{i\},T)}] = \phi_j[\delta_{(S\cup\{j\},T)}] \quad \text{y} \quad \phi_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] = \phi_j[\delta_{(S,T\cup\{j\})}]$$

Además,

$$\phi_i[\delta_{(N,\emptyset)}] = \phi_j[\delta_{(N,\emptyset)}] \quad \text{y} \quad \phi_i[\delta_{(\emptyset,N)}] = \phi_j[\delta_{(\emptyset,N)}]$$

Por lo tanto, para cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ existen $p_{s,t}$ y $q_{s,t}$ tales que $p^i_{(S,T)} = p_{s,t}$ y $q^i_{(S,T)} = q_{s,t}$ para todo $i \in N$. $\square$

Observación 4.1.4 El pago que un bisemivalor asigna a cada jugador en cualquier juego bicooperativo es una suma ponderada de sus contribuciones marginales $b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)$ cuando i se une a la coalición $S \subseteq N\setminus\{i\}$ y sus contribuciones marginales $b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})$ cuando i abandona la coalición $T\cup\{i\}$, donde $p_{s,t}$ es la probabilidad de que el jugador i se una a S en presencia de los jugadores de T y $q_{s,t}$ es la probabilidad de que el jugador i deje la coalición $T\cup\{i\}$ en presencia de los jugadores de S, siempre que la probabilidad de que un jugador pueda incorporarse o retirarse de una coalición sea igual para todas las coaliciones de un mismo tamaño. Observamos que en la família de valores biprobabilísticos, los bisemivalores se caracterizan por el hecho de que todas las coaliciones del mismo tamaño tienen asociadas los mismos coeficientes de ponderación.

Teniendo en cuenta que los juegos de identidad forman una base de $\mathcal{BG}_N$, es interesante conocer las asignaciones que recibe un jugador en estos juegos.

Lema 4.1.5 *Sea ψ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$. Las asignaciones correspondientes al jugador $i \in N$ en el juego identidad $\delta_{(A,B)}$ vienen dadas por*

$$\psi_i[\delta_{(A,B)}] = \begin{cases} p_{a-1,b} & \text{si } i \in A, \\ -q_{a,b-1} & \text{si } i \in B, \\ q_{a,b} - p_{a,b} & \text{si } i \in N \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

Demostración: Se deduce fácilmente aplicando la definición de bisemivalor dada en el Teorema 4.1.3 a los juegos de identidad $\delta_{(A,B)}$. □

Definimos ahora el valor de Banzhaf, que denotaremos por β. Es una generalización del índice de poder de Banzhaf introducido por Bilbao *et al* [12] para *juegos bicooperativos ternarios*. Este valor se puede interpretar de manera similar al valor clásico de Banzhaf para juegos cooperativos.

Definición 4.1.6 *Diremos que una función $\beta : \mathcal{BG}_N \to \mathbb{R}^N$ definida sobre $\mathcal{BG}_N$ es el valor de Banzhaf si*

$$\beta_i[b] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})]$$

Observación 4.1.7 (a) Forman parte de la família de bisemivalores, el valor de Shapley [9] definido en la sección 1.2.2.1 y el valor de Banzhaf que acabamos de definir, cuyos coeficientes de ponderación son

$$p_{s,t} = q_{s,t} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ \forall s,t = 0,\ldots,n-1.$$

(b) Como hemos mencionado al principio del capítulo 2, los semivalores para juegos cooperativos se definen sobre cardinales, más que sobre conjuntos de jugadores específicos. Esto significa que una familia de coeficientes de ponderación $\{p_s\}_{s=0}^{n-1}$ define un semivalor $\psi^{(n)}$ en todos los conjuntos de jugadores N tales que $n = |N|$. Además, un semivalor $\psi^{(n)}$ induce semivalores $\psi^{(t)}$ para todas las cardinalidades $t < n$, definidas de manera recurrente por medio de la fórmula (2.1) del triángulo (inverso) de Pascal dada por Dragan [30].

Como veremos, el comportamiento de los bisemivalores para juegos bicooperativos es muy similar.

En la siguiente proposición vemos que, al igual que el caso cooperativo, el bisemivalor de Banzhaf es el único bisemivalor con coeficientes de ponderación constantes, es decir, sus coeficientes de ponderación no dependen del tamaño de las coaliciones S y T.

Proposición 4.1.8 *Sea ψ un bisemivalor con coeficientes de ponderación constantes, es decir, $p_{s,t} = q_{s,t} = k$, $\forall s,t = 0,\ldots,n-1$. Entonces ψ es el bisemivalor de Banzhaf β.*

Demostración: Sea ψ un bisemivalor con coeficientes de ponderación constantes. Aplicando el Teorema 4.1.3, los coeficientes de ponderación satisfacen (4.1).

Si $p_{s,t} = k$ para todo $s,t = 0,\ldots,n-1$, obtendremos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \left[\sum_{t=0}^{n-s-1} \binom{n-s-1}{t} p_{s,t} \right] \\ &= k \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \left[\sum_{t=0}^{n-s-1} \binom{n-s-1}{t} \right] = k3^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo que, $p_{s,t} = k = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Análogamente para los coeficientes de ponderación $q_{s,t} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Así pues, $\psi = \beta$. $\square$

A partir del Teorema 4.1.3, y de manera análoga al caso cooperativo, los bisemivalores están esencialmente asociados a cardinales más que a un conjunto específico de jugadores: es decir, dos vectores de ponderación $p_{s,t}$ y $q_{s,t}$ definen un bisemivalor ψ en todo conjunto N tal que $n = |N|$. Cuando sea necesario, escribiremos $\psi^{(n)}$ para denotar un bisemivalor en la cardinalidad n, a la vez que $p^n_{s,t}$ y $q^n_{s,t}$ para referirnos a sus coeficientes de ponderación.

Proposición 4.1.9 *Dado un bisemivalor $\psi^{(n)}$ definido sobre $\mathcal{BG}_N$ con coeficientes de ponderación $p^n_{s,t}$ y $q^n_{s,t}$, los coeficientes obtenidos de forma recursiva*

$$\begin{aligned} p_{s,t}^{m-1} &= p_{s+1,t}^{m} + p_{s,t}^{m} + p_{s,t+1}^{m}, \\ q_{s,t}^{m-1} &= q_{s+1,t}^{m} + q_{s,t}^{m} + q_{s,t+1}^{m} \end{aligned} \tag{4.2}$$

para $0 \leq s,t < m \leq n$*, definen un bisemivalor inducido* $\psi^{(m)}$ *en el espacio de juegos bicooperativos con m jugadores.*

Demostración: Sea $\psi^{(n)}$ un bisemivalor con coeficientes de ponderación $p_{s,t}^{n}$ y $q_{s,t}^{n}$.

Basta probar que si $\psi^{(n)}$ es un bisemivalor definido en $\mathcal{BG}_N$ entonces los coeficientes de ponderación inducidos $p_{s,t}^{n-1}$ y $q_{s,t}^{n-1}$ obtenidos a partir de (4.2) definen un bisemivalor $\psi^{(n-1)}$ en los juegos bicooperativos con $n-1$ jugadores.

Tenemos que comprobar que los coeficientes de ponderación inducidos satisfacen (4.1).

Es sencillo verificar que

$$p_{s,t}^{n-1} \geq 0 \quad \text{y} \quad q_{s,t}^{n-1} \geq 0.$$

La condición restante para los coeficientes de ponderación $p_{s,t}^{n-1}$ se deduce del hecho de que:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-2}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-2}\binom{n-s-2}{t}p_{s,t}^{n-1}\right] = \\ &\quad = \sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-2}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-2}\binom{n-s-2}{t}\left(p_{s+1,t}^{n}+p_{s,t}^{n}+p_{s,t+1}^{n}\right)\right] \\ &\quad = \sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-2}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{t}p_{s,t}^{n}+\sum_{t=0}^{n-s-2}\binom{n-s-2}{t}p_{s+1,t}^{n}\right] \\ &\quad = \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{t}p_{s,t}^{n}\right] \\ &\quad = 1. \end{aligned}$$

Análogamente para los coeficientes de ponderación $q_{s,t}^{n-1}$. $\square$

Definición 4.1.10 *Una familia de bisemivalores* $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n\geq 1}$*, uno para cada cardinal n, es un multibisemivalor si y solo si satisface (4.2).*

Proposición 4.1.11 *La expresión de los coeficientes de ponderación de cualquier bisemivalor inducido* $\psi^{(m)}$ *en función de los coeficientes del bisemivalor original* $\psi^{(n)}$*, es*

$$\begin{aligned} p^m_{s,t} &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \sum_{j=0}^{n-m-i} \binom{n-m-i}{j} p^n_{s+i,t+j}, \\ q^m_{s,t} &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \sum_{j=0}^{n-m-i} \binom{n-m-i}{j} p^n_{s+i,t+j} \end{aligned} \tag{4.3}$$

para $0 \leq s,t < m < n$.

Demostración: Aplicando (4.2) para $m = n$ obtenemos la expresión:

$$p^{n-1}_{s,t} = p^n_{s+1,t} + p^n_{s,t} + p^n_{s,t+1}$$

que prueba la relación (4.3) para $m = n-1$.

Supongamos que la expresión (4.3) se cumple para $m = k$, $0 \leq s,t < k \leq n-1$. Demostraremos que también se cumple para $m = k-1$.

Aplicando (4.2) para $m = k$ obtenemos la expresión:

$$p^{k-1}_{s,t} = p^k_{s+1,t} + p^k_{s,t} + p^k_{s,t+1}$$

Por hipótesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned} p^{k-1}_{s,t} =& \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n-k-i}{j} p^n_{s+1+i,t+j} + \\ & \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n-k-i}{j} p^n_{s+i,t+j} + \\ & \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n-k-i}{j} p^n_{s+i,t+1+j} \\ =& \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-k}{i-1} \sum_{j=0}^{n-k-i+1} \binom{n-k-i+1}{j} p^n_{s+i,t+j} + \\ & \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n-k-i}{j} p^n_{s+i,t+j} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\sum_{j=1}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i}{j-1}p^{n}_{s+i,t+j}\\
&=\sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-k}{i-1}\sum_{j=0}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i+1}{j}p^{n}_{s+i,t+j}+\\
&\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\left[\sum_{j=0}^{n-k-i}\binom{n-k-i}{j}+\sum_{j=1}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i}{j-1}\right]p^{n}_{s+i,t+j}\\
&=\sum_{i=1}^{n-k+1}\binom{n-k}{i-1}\sum_{j=0}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i+1}{j}p^{n}_{s+i,t+j}+\\
&\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\sum_{j=0}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i+1}{j}p^{n}_{s+i,t+j}\\
&=\sum_{j=0}^{n-k+1}\binom{n-k+1}{j}p^{n}_{s,t+j}+\sum_{i=1}^{n-k}\left[\binom{n-k}{i-1}+\binom{n-k}{i}\right]\sum_{j=0}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i+1}{j}p^{n}_{s+i,t+j}+p^{n}_{s+n-k+1,t}\\
&=\sum_{i=0}^{n-k+1}\binom{n-k+1}{i}\sum_{j=0}^{n-k-i+1}\binom{n-k-i+1}{j}p^{n}_{s+i,t+j}.
\end{aligned}
$$

Análogamente para los coeficientes de ponderación $q^{n-1}_{s,t}$. $\square$

Esta fórmula nos permite definir recurrentemente los coeficientes de ponderación de los bisemivalores $\psi^{(m)}$, inducidos por $\psi^{(n)}$, para todos los cardinales $m<n$ de manera semejante al caso cooperativo, (2.2).

4.2. $(\mathbf{p},\mathbf{q})$–bisemivalores

En esta sección introducimos una subfamilia de bisemivalores que llamaremos (p,q)*–bisemivalores*. Como veremos, para cada uno de ellos, los coeficientes de ponderación dependen de dos parámetros $p,q\in[0,1]$. Estos bisemivalores son adecuados para el estudio de juegos bicooperativos donde los jugadores muestran dos tendencias distintas en el momento de formar coaliciones. Estas tendencias se definen para todos los jugadores mediante los *parámetros* p y q. A partir de ahora supondremos que p es la probabilidad de apoyar a un jugador en su decisión y q es la probabilidad de ir en su contra.

Proposición 4.2.1 *Sean* $p,q\in[0,1]$ *tales que* $p+q\leq 1$. *Entonces los coeficientes*

$p_{s,t} = p^s q^t (1-p-q)^{n-s-t-1}$ *y* $q_{s,t} = p^t q^s (1-p-q)^{n-s-t-1}$ *definen un bisemivalor sobre el espacio de los juegos bicooperativos de n jugadores.*

Demostración: Tenemos que probar que los coeficientes de ponderación satisfacen (4.1). Se puede verificar fácilmente que $p_{s,t} \geq 0$ y $q_{s,t} \geq 0$. La condición restante para los coeficientes de ponderación $p_{s,t}$ se deduce del hecho de que:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{t} p_{s,t}\right] &= \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}\left[\sum_{t=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{t} p^s q^t (1-p-q)^{n-s-t-1}\right] \\
&= \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s} p^s \left[\sum_{t=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{t} q^t (1-p-q)^{n-s-t-1}\right] \\
&= \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-s-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Para los coeficientes $q_{s,t}$ se sigue un razonamiento similar. □

Definición 4.2.2 *(i) La familia de índices dictatoriales D, para el jugador* $i \in N$ *viene dada por*

$$D_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} p_T^i \left[b(\{i\},T) - b(\emptyset,T)\right] + q_S^i \left[b(S,\emptyset) - b(S,\{i\})\right],$$

para todo $b \in \mathcal{BG}_N$, *donde* $p_T^i \geq 0$, $\sum_{T\subseteq N\setminus\{i\}} p_T^i = 1$ *y* $q_S^i \geq 0$, $\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} q_S^i = 1$.

En particular, el índice super-dictatorial SD para el jugador $i \in N$ *corresponde a*

$$SD_i[b] = b(\{i\}, N\setminus\{i\}) - b(\emptyset, N\setminus\{i\}) + b(N\setminus\{i\},\emptyset) - b(N\setminus\{i\},\{i\})$$

para todo $b \in \mathcal{BG}_N$.

(ii) El índice marginal M para el jugador $i \in N$ *se define como*

$$M_i[b] = b(N,\emptyset) - b(N\setminus\{i\},\emptyset) + b(\emptyset, N\setminus\{i\}) - b(\emptyset,N) \text{ para todo } b \in \mathcal{BG}_N.$$

Definición 4.2.3 *Sean $p,q \in [0,1]$ tales que $p+q \leq 1$. El (p,q)–bisemivalor ψ^{pq} sobre $\mathcal{BG}_N$ viene definido por los coeficientes de ponderación*

$$p_{s,t} = p^s q^t (1-p-q)^{n-s-t-1} \text{ y } q_{s,t} = p^t q^s (1-p-q)^{n-s-t-1}.$$

Usando la convención $0^0 = 1$, en caso de que $p = 0$ obtenemos una subfamilia de índices dictatoriales D^q, $q \in [0,1]$, dada por

$$D_i^q[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} q^t(1-q)^{n-t-1}\,[b(\{i\},T) - b(\emptyset,T)] + q^s(1-q)^{n-s-1}\,[b(S,\emptyset) - b(S,\{i\})],$$

para todo $b \in \mathcal{BG}_N$.

Si además $q = 1$, obtenemos el índice super-dictatorial *SD*. Finalmente, cuando $p = 1$ y $q = 0$ se obtiene el índice marginal M.

Observación 4.2.4 Para todo par de parámetros $p,q \in (0,1)$ tales que $p+q < 1$, los coeficientes de ponderación de ψ^{pq} están en progresión geométrica

$$\frac{p_{s+1,t}}{p_{s,t}} = \frac{q_{s,t+1}}{q_{s,t}} = \frac{p}{1-p-q}.$$

Es decir, vienen dados o definidos por la (forma más simple de) monotonía de los coeficientes de ponderación.

Como ya hemos dicho anteriormente, Puente [56] y Freixas y Puente [38] definen una familia especial de semivalores en juegos cooperativos: los semivalores p–binomiales, ψ^p. En este caso, los coeficientes de ponderación dependen de un único paràmetro $p \in [0,1]$ — el valor de Banzhaf se obtiene cuando $p = 1/2$. Estos semivalores resultan especialmente adecuados para el estudio de juegos cooperativos donde los jugadores muestran una tendencia (común) a formar coaliciones. Esta tendencia está definida por el *parámetro p*.

¿Cuál es la razón por la que p varía entre 0 y 1? Una suposición razonable de regularidad en el comportamiento de los jugadores es que la probabilidad de formar coaliciones siga un comportamiento monótono (creciente o decreciente). Entonces, los únicos semivalores tales que $p_{k+1} = \lambda p_k$ para todo k son precisamente los semivalores p–binomiales, en cuyo caso $\lambda = p/(1-p)$ para cada $p \in [0,1]$.

A partir de esta idea, introduciremos en la siguiente definición una subfamília de los (p,q)–bisemivalores, obtenida cuando $p=q$, a la que llamaremos familia de *bisemivalores binomiales*. Como veremos, estos bisemivalores "extienden" el concepto de semivalores binomiales a los juegos bicooperativos.

Definición 4.2.5 *Consideremos $p \in [0,1/2]$. El bisemivalor p–binomial ψ^p definido sobre $\mathcal{BG}_N$ viene dado por los coeficientes*

$$p_{s,t} = q_{s,t} = p^{s+t}(1-2p)^{n-s-t-1}.$$

El caso $p = 1/3$ corresponde al bisemivalor de Banzhaf.

Observación 4.2.6 Los únicos (p,q)–bisemivalores que satisfacen $p_{s,t} = q_{s,t}$, es decir, que ponderan de la misma manera las contribuciones marginales de los jugadores a favor o en contra del cambio se dan cuando:

(i) $p = q$, este caso corresponde a los bisemivalores binomiales ;

(ii) $p = 0$, este caso corresponde a la familia de índices dictatoriales;

(iii) $q = 0$ y

(iv) $p+q = 1$.

Cuando los dos últimos casos se dan simultáneamente obtenemos el índice marginal.

4.3. Propiedades complementarias de los bisemivalores

Esta sección sigue un esquema análogo al realizado en la sección 3.2 de esta Tesis. Concretamente estudiamos para los bisemivalores un conjunto de propiedades clásicas consideradas en la literatura sobre la teoría de valores tal y como hemos hecho anteriormente para los valores probabilísticos y los valores multinomiales en el capítulo 3. La mayoría de ellas son satisfechas por los semivalores en el contexto de los juegos cooperativos, pero como veremos, el estudio de estas propiedades requiere un análisis más detallado cuando consideramos juegos bicooperativos y usamos bisemivalores. Algunas de estas propiedades solo son válidas para subclases especiales de bisemivalores.

Introducimos en primer lugar la noción de bisemivalor *regular* siguiendo la línea del caso cooperativo.

Definición 4.3.1 *Un bisemivalor ψ definido sobre $\mathcal{BG}_N$ decimos que es regular si y solo si $p_{s,t} > 0$ y $q_{s,t} > 0$ para todo $s,t = 0,...,n-1$.*

Se puede observar que un (p,q)–bisemivalor ψ^{pq} en $\mathcal{BG}_N$ es regular si y solo si $p > 0$, $q > 0$ y $p+q < 1$. Los bisemivalores de Shapley y Banzhaf para juegos bicooperativos son bisemivalores regulares.

4.3.1. Dominancia, monotonía y sensibilidad

Las primeras propiedades que veremos se refieren a los conceptos de *dominancia o desplazamiento* e *indiferencia* introducidos por Isbell [47] en el contexto de los juegos cooperativos. Si tenemos un juego $v \in \mathcal{G}_N$ y dos jugadores $i, j \in N$, recordamos la relación de dominancia dada en el capítulo 3:

$$iDj \text{ en } v \qquad \text{si y solo si} \qquad v(S\cup\{i\}) \geq v(S\cup\{j\}) \quad \text{para todo } \; S \subseteq N\backslash\{i,j\}.$$

En la siguiente definición readaptamos esta relación a los juegos bicooperativos para obtener la misma interpretación que en el caso cooperativo. Esta relación nos permitirá comparar de forma cualitativa la posición de dos jugadores en un juego dado.

Definición 4.3.2 *Supongamos $b \in \mathcal{BG}_N$ y $i, j \in N$.*

$$iDj \quad en\, b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b(S\cup\{i\},T) \geq b(S\cup\{j\},T), \\ b(S,T\cup\{i\}) \leq b(S,T\cup\{j\}) \quad y \\ b(S\cup\{i\},T\cup\{j\}) \geq b(S\cup\{j\},T\cup\{i\}) \end{cases}$$

para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\backslash\{i,j\}}$.

Así pues, iDj en b significa que el jugador *i domina o desplaza* a j (es más atractivo como compañero de coalición en b). Esta relación solo depende de la estructura del juego.

Si iDj pero en cambio, $j \not D i$ en el juego b, diremos que el jugador i domina *estrictamente* al jugador j .

En cuanto a las comparaciones cuantitativas, en [20], se demuestra que si g es un semivalor definido en $\mathcal{G}_N$ y iDj en v, esto implica que $g_i[v] \geq g_j[v]$. Sin embargo, si el jugador i domina de forma estricta al jugador j en el juego, no siempre tenemos que $g_i[v] > g_j[v]$. Solo se cumple para una familia particular de semivalores, los semivalores *V-regulares*, cuyos coeficientes de ponderación satisfacen $p_s + p_{s+1} > 0$, $s = 0, \ldots, n-2$. ¿Qué sucede cuando se usan bisemivalores y juegos bicooperativos?

Proposición 4.3.3 *(Propiedad de dominancia o desplazamiento) Sea ψ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ y sean $i, j \in N$ dos jugadores distintos. Entonces, para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$,*

(a) iDj implica $\psi_i[b] \geq \psi_j[b]$ si y solo si $p_{s,t} + p_{s+1,t} \geq q_{s+1,t}$ y $q_{s,t} + q_{s,t+1} \geq p_{s,t+1}$, para todo $s, t = 0, \ldots, n-2$.

(b) iDj y $j \not D i$ implica $\psi_i[b] > \psi_j[b]$ si y solo si $p_{s,t} + p_{s+1,t} > q_{s+1,t}, p_{s,t+1} + q_{s+1,t} > 0$ y $q_{s,t} + q_{s,t+1} > p_{s,t+1}$, para todo $s, t = 0, \ldots, n-2$.

Demostración: (a) ($\Leftarrow$) Asumamos que iDj en b. Utilizando la expresión (4.1) y descomponiendo la suma, obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_i[b] = \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i,j\}}} [\, & p_{s,t}(b(S \cup \{i\}, T) - b(S,T)) + q_{s,t}(b(S,T) - b(S, T \cup \{i\})) + \\
& p_{s+1,t}(b(S \cup \{j\} \cup \{i\}, T) - b(S \cup \{j\}, T)) + \\
& q_{s+1,t}(b(S \cup \{j\}, T) - b(S \cup \{j\}, T \cup \{i\})) + \\
& p_{s,t+1}(b(S \cup \{i\}, T \cup \{j\}) - b(S, T \cup \{j\})) + \\
& q_{s,t+1}(b(S, T \cup \{j\}) - b(S, T \cup \{i\} \cup \{j\}))].
\end{aligned}$$

Ahora, mediante la comparación de esta expresión con la expresión análoga para $\psi_j[b]$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}\psi_i[b]-\psi_j[b]=\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}}[\ &(p_{s,t}+p_{s+1,t}-q_{s+1,t})(b(S\cup\{i\},T)-b(S\cup\{j\},T))+\\ &(q_{s,t}+q_{s,t+1}-p_{s,t+1})(b(S,T\cup\{j\})-b(S,T\cup\{i\}))+\\ &(p_{s,t+1}+q_{s+1,t})(b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})-b(S\cup\{j\},T\cup\{i\}))].\end{aligned}$$

de donde $\psi_i[b]-\psi_j[b]\geq 0$.

($\Rightarrow$) Sabemos que iDj implica $\psi_i[b]\geq\psi_j[b]$. Veamos que solo ocurre cuando $p_{s,t}+p_{s+1,t}\geq q_{s+1,t}$ y $q_{s,t}+q_{s,t+1}\geq p_{s,t+1}$.

- Supongamos en primer lugar que se cumple $p_{a,b}+p_{a+1,b}<q_{a+1,b}$ para algún $a,b=0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j\in N$ y $(A,B)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A|=a$ y $|B|=b$.

  Consideremos el juego de identidad $\delta_{(A\cup\{i\},B)}$. Observamos que iDj en este juego pero

  $$\psi_i[\delta_{(A\cup\{i\},B)}]-\psi_j[\delta_{(A\cup\{i\},B)}]=p_{a,b}+p_{a+1,b}-q_{a+1,b}<0.$$

  Contradicción.

- De forma análoga, supongamos ahora que $q_{a,b}+q_{a,b+1}<p_{a,b+1}$ para algún $a,b=0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j\in N$ y $(A,B)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A|=a$ y $|B|=b$.

  Consideremos el juego de identidad $\delta_{(A,B\cup\{j\})}$. Observamos que iDj en este juego pero

  $$\psi_i[\delta_{(A,B\cup\{j\})}]-\psi_j[\delta_{(A,B\cup\{j\})}]=q_{a,b}+q_{a,b+1}-p_{a,b+1}<0.$$

  Contradicción.

(b) ($\Leftarrow$) Asumamos que iDj y $j\not D i$, entonces existirá algún par de coaliciones

$(S,T) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que

$$\begin{aligned} &b(S\cup\{i\},T) > b(S\cup\{j\},T) \quad \text{o} \\ &b(S,T\cup\{i\}) < b(S,T\cup\{j\}) \quad \text{o bien} \\ &b(S\cup\{i\},T\cup\{j\}) > b(S\cup\{j\},T\cup\{i\}). \end{aligned}$$

Como $p_{s,t}+p_{s+1,t} > q_{s+1,t}$, $p_{s,t+1}+q_{s+1,t} > 0$ y $q_{s,t}+q_{s,t+1} > p_{s,t+1}$ para todo $s,t = 0,...,n-2$, de la demostración del apartado (a) se deduce que $\psi_i[b] > \psi_j[b]$.

($\Rightarrow$) Sabemos que si iDj y $j \not{D} i$ implica que $\psi_i[b] > \psi_j[b]$. Veamos que solo ocurre cuando $p_{s,t}+p_{s+1,t} > q_{s+1,t}$, $p_{s,t+1}+q_{s+1,t} > 0$ y $q_{s,t}+q_{s,t+1} > p_{s,t+1}$. Procederemos como en el apartado anterior:

- Supongamos en primer lugar que se cumple $p_{a,b}+p_{a+1,b} \leq q_{a+1,b}$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideremos el juego de identidad $\delta_{(A\cup\{i\},B)}$. Observamos que iDj y $j \not{D} i$ en este juego pero

  $$\psi_i[\delta_{(A\cup\{i\},B)}] - \psi_j[\delta_{(A\cup\{i\},B)}] = p_{a,b}+p_{a+1,b}-q_{a+1,b} \leq 0.$$

  Contradicción.

- De forma análoga, supongamos que $q_{a,b}+q_{a,b+1} \leq p_{a,b+1}$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideremos el juego de identidad $\delta_{(A,B\cup\{j\})}$. Observamos que iDj y $j \not{D} i$ en este juego pero

  $$\psi_i[\delta_{(A,B\cup\{j\})}] - \psi_j[\delta_{(A,B\cup\{j\})}] = q_{a,b}+q_{a,b+1}-p_{a,b+1} \leq 0.$$

  Contradicción.

- Finalmente, supongamos que $p_{a,b+1}+q_{a+1,b} = 0$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideremos el juego de identidad $\delta_{(A\cup\{i\},B\cup\{j\})}$. Observamos que iDj y $j \not{D} i$ en este juego pero

$$\psi_i[\delta_{(A\cup\{i\},B\cup\{j\})}] - \psi_j[\delta_{(A\cup\{i\},B\cup\{j\})}] = p_{a,b+1} + q_{a+1,b} = 0.$$

Contradicción. $\square$

Corolario 4.3.4 *Los bisemivalores de Shapley y de Banzhaf, así como la família de los (p,q)–bisemivalores regulares satisfacen la propiedad de dominancia. Los (p,q)–bisemivalores no regulares solo satisfacen la primera parte de la proposición 4.3.3.*

Demostración: Teniendo en cuenta que el bisemivalor de Banzhaf forma parte de la familia de los (p,q)–bisemivalores regulares, basta comprobar que el bisemivalor de Shapley y esta familia satisfacen esta propiedad.

Veremos que todos ellos cumplen

$$p_{s,t+1} + q_{s+1,t} > 0, \quad p_{s,t} + p_{s+1,t} - q_{s+1,t} > 0 \text{ y } q_{s,t} + q_{s,t+1} - p_{s,t+1} > 0.$$

Si se cumplen estas condiciones, también se cumplirán las condiciones del apartado (a),

$$p_{s,t} + p_{s+1,t} \geq q_{s+1,t} \text{ y } q_{s,t} + q_{s,t+1} \geq p_{s,t+1}.$$

- Para el bisemivalor de Shapley φ,

$$p_{s,t} = \frac{(n+s-t)!\,(n+t-s-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t} \text{ y } q_{s,t} = \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t}.$$

Así pues,

$$p_{s,t+1} + q_{s+1,t} = \frac{(n+s-t-1)!\,(n+t-s-1)!}{2^{s+t+1-n}\,(2n-1)!} > 0.$$

De forma análoga,

$$p_{s,t} + p_{s+1,t} - q_{s+1,t} = \frac{(n+s-t)!\,(n+t-s-2)!}{2^{s+t+1-n}\,(2n-1)!} > 0.$$

Por último,

$$q_{s,t} + q_{s,t+1} - p_{s,t+1} = \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-2)!}{2^{s+t+1-n}\,(2n-1)!} > 0.$$

- Si consideramos ahora los (p,q)–bisemivalores definidos en (4.2.3) tenemos,

$$\begin{aligned}
p_{s,t+1}+q_{s+1,t} &= p^s q^{t+1}(1-p-q)^{n-s-t-2}[1+p^{t-s}q^{s-t}],\\
p_{s,t}+p_{s+1,t}-q_{s+1,t} &= p^s q^t(1-p-q)^{n-s-t-2}[1-q-p^{t-s}q^{s+1-t}],\\
q_{s,t}+q_{s,t+1}-p_{s,t+1} &= p^t q^s(1-p-q)^{n-s-t-2}[1-q-p^{s-t}q^{t+1-s}].
\end{aligned}$$

  Si son regulares, entonces $p,q>0$ y $p+q<1$. En este caso, claramente, $p_{s,t+1}+q_{s+1,t}>0$.

  Veamos las restantes desigualdades.

$$\begin{aligned}
1-q-p^{t-s}q^{s+1-t} =& 1-q\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{s-t}\right] \geq\\
& 1-\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{s-t}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{s-t} > 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1-q-p^{s-t}q^{t+1-s} =& 1-q\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{t-s}\right] \geq\\
& 1-\left(1-\left[\frac{q}{p}\right)^{t-s}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{t-s} > 0.
\end{aligned}$$

- Si consideramos ahora los (p,q)–bisemivalores no regulares, entonces p o q son nulos o bien $p+q=1$ y no se cumplirán las condiciones anteriores. Sin embargo, se verifica

$$p_{s,t}+p_{s+1,t} \geq q_{s+1,t} \text{ y } q_{s,t}+q_{s,t+1} \geq p_{s,t+1}. \qquad \square$$

Definimos la relación de indiferencia de igual modo al caso cooperativo. Esta relación depende también únicamente de la estructura del juego.

Definición 4.3.5 *Consideremos $b \in \mathcal{BG}_N$ e $i,j \in N$.*

$$iIj \quad en \quad b \quad si\ y\ solo\ si \quad iDj \quad y \quad jDi \quad en \quad b.$$

Por lo tanto, iIj en b significa que los jugadores i, j son *indiferentes* (perfectos substitutos uno del otro) como compañeros de coalición.

Observación 4.3.6 *I es una relación de equivalencia definida sobre N.*

Carreras y Freixas, [20] demuestran también que si g es un semivalor definido sobre $\mathcal{G}_N$, que i y j sean indiferentes en v implica $g_i[v] = g_j[v]$. Veamos qué ocurre en el caso bicooperativo.

Proposición 4.3.7 *(Propiedad de indiferencia) Sea ψ un bisemivalor definido en $\mathcal{BG}_N$ y sean $i, j \in N$ dos jugadores distintos.*

$$iIj \;\Leftrightarrow\; \psi_i[b] = \psi_j[b] \quad \textit{para todo juego} \quad b \in \mathcal{BG}_N.$$

Demostración: Sean $i, j \in N$ dos jugadores distintos, entonces

$$iIj \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b(S\cup\{i\},T) = b(S\cup\{j\},T), \\ b(S,T\cup\{i\}) = b(S,T\cup\{j\}) \quad \text{y} \\ b(S\cup\{i\},T\cup\{j\}) = b(S\cup\{j\},T\cup\{i\}) \end{cases}$$

para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$.

Teniendo en cuenta la demostración del apartado (a) de la Proposición 4.3.3, en teste caso se deduce, $\psi_i[b] = \psi_j[b]$ para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$. $\square$

Tomando como punto de partida los trabajos de Young [61] al dar una caracterización axiomática del valor de Shapley sin usar la aditividad y la extensión posterior a semivalores dada por Carreras y Freixas [20], introducimos las propiedades de monotonía y sensibilidad.

La relación definida a continuación y notada como B, nos permite comparar de forma cualitativa la posición de un determinado jugador en dos juegos bicooperativos b_1 y b_2.

Definición 4.3.8 *Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{BG}_N$ e $i \in N$.*

$$b_1 B b_2 \text{ para } i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(S \cup \{i\}, T) - b_1(S,T) \geq b_2(S \cup \{i\}, T) - b_2(S,T), \\ b_1(S,T) - b_1(S, T \cup \{i\}) \geq b_2(S,T) - b_2(S, T \cup \{i\}). \end{cases}$$

para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$.

Es decir, $b_1 B b_2$ para i si y solo si las contribuciones marginales debidas a i son mayores (no menores) en b_1 que en b_2.

Definición 4.3.9 *Si g es un valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$, diremos que*

(a) g satisface la propiedad de monotonía si y solo si $b_1 B b_2$ para i, implica $g_i[b_1] \geq g_i[b_2]$,

(b) g satisface la propiedad de sensibilidad si y solo si $b_1 B b_2$ y $b_2 \not{B} b_1$ ambos para i, implica $g_i[b_1] > g_i[b_2]$.

Proposición 4.3.10 *(Propiedades de monotonía y sensibilidad) Sea ψ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ y $b_1, b_2 \in \mathcal{BG}_N$ dos juegos distintos. Entonces, para cada $i \in N$:*

(a) ψ satisface la propiedad de monotonía.

(b) $b_1 B b_2$ y $b_2 B b_1$ para i, implica $\psi_i[b_1] = \psi_i[b_2]$.

(c) ψ satisface la propiedad de sensibilidad si y solo si ψ es regular.

Demostración:

$$\psi_i[b_1] - \psi_i[b_2] = \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [p_{s,t}(b_1(S \cup \{i\}, T) - b_1(S,T) - b_2(S \cup \{i\}, T) + b_2(S,T)) + \\ q_{s,t}(b_1(S,T) - b_1(S, T \cup \{i\}) - b_2(S,T) + b_2(S, T \cup \{i\}))].$$

(a) Se deduce $\psi_i[b_1] \geq \psi_i[b_2]$, ya que

$$b_1 B b_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(S \cup \{i\}, T) - b_1(S,T) \geq b_2(S \cup \{i\}, T) - b_2(S,T), \\ b_1(S,T) - b_1(S, T \cup \{i\}) \geq b_2(S,T) - b_2(S, T \cup \{i\}), \end{cases}$$

y $p_{s,t} \geq 0$, $q_{s,t} \geq 0$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$.

(b) Se obtiene directamente al aplicar el apartado (a) en ambos sentidos.

(c) ($\Leftarrow$) Si $b_1 B b_2$ y $b_2 \not{B} b_1$ para i, entonces existirá algún par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ tal que

$$b_1(S \cup \{i\}, T) - b_1(S,T) > b_2(S \cup \{i\}, T) - b_2(S,T)$$

o bien

$$b_1(S,T) - b_1(S, T \cup \{i\}) > b_2(S,T) - b_2(S, T \cup \{i\})$$

y como ψ es regular, se obtiene $\psi_i[b_1] > \psi_i[b_2]$ a partir de la demostración de (a).

($\Rightarrow$) Si $n = 1$ es evidente ya que todo bisemivalor es regular.

Si $n \geq 2$, supongamos que ψ no es regular. Entonces alguno de los coeficientes de ponderación será nulo.

- Supongamos primero que $p_{a,b} = 0$, para algún $a, b = 0, \ldots, n-1$. Tomamos $i \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos los juegos $b_1 = \delta_{(A\cup\{i\},B)}$ y $b_2 = \frac{1}{2} b_1$. En este caso $b_1 B b_2$ y $b_2 \not{B} b_1$ pero
  $$\psi_i[b_1] = p_{a,b} = 0 = \frac{1}{2} p_{a,b} = \psi_i[b_2],$$
  llegando a una contradicción.

- Supongamos ahora que $q_{a,b} = 0$ para algún $a, b = 0, \ldots, n-1$. Tomamos $i \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos los juegos $b_1 = \delta_{(A,B\cup i)}$ i $b_2 = 2b_1$. También en este caso $b_1 B b_2$ y $b_2 \not{B} b_1$ pero
  $$\psi_i[b_1] = -q_{a,b} = 0 = -2q_{a,b} = \psi_i[b_2],$$
  llegando a una contradicción. □

4.3.2. Exclusión de un jugador nulo, jugador no nulo y contribuciones equilibradas

La primera propiedad de esta sección se refiere a los jugadores no nulos. Por lo general, en el caso cooperativo, si g es un valor definido en $\mathcal{G}_N$, un jugador no nulo obtiene un pago positivo en todo juego *monótono* v. En el caso bicooperativo, esta propiedad se cumple para todos los bisemivalores regulares y veremos que de hecho los caracteriza dentro de la clase de los bisemivalores.

Proposición 4.3.11 *(Propiedad del jugador no nulo) Un bisemivalor ψ definido sobre $\mathcal{BG}_N$ asigna un pago positivo a todo jugador no nulo en un juego monótono cualquiera $b \in \mathcal{BG}_N$ si y solo si ψ es regular.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que ψ es regular. Sea $i \in N$ un jugador no nulo en el juego monótono $b \in \mathcal{BG}_N$. Por monotonía,

$$b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T) \geq 0 \quad \text{y} \quad b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}) \geq 0$$

para todo par de coaliciones $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$.

Además, como el jugador i es no nulo en b, existirá algun par de coaliciones $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ tal que

$$b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T) > 0 \quad \text{o bien} \quad b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}) > 0.$$

Finalmente, por la regularidad del bisemivalor ψ, tenemos $p_{s,t} > 0$ y $q_{s,t} > 0$, para todo $s, t = 0, \dots, n-1$. Así pues,

$$\psi_i[b] = \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus i}} [p_{s,t}(b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)) + q_{s,t}(b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}))] > 0.$$

($\Rightarrow$) Si $n = 1$, $N = \{1\}$, $\psi_1[b] = b(1, \emptyset) - b(\emptyset, 1) > 0$, ya que b es monótono y 1 no nulo en b.

Cuando $n \geq 2$, si ψ no es regular, entonces existirá algun coeficiente de ponderación nulo.

- Supongamos en primer lugar que $p_{a,b} = 0$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-1$. Tomamos $i \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Definimos el juego:

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & si\,(S,T) \sqsupseteq (A \cup \{k\}, B) \text{ para algún } k \in N \setminus (A \cup B) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  $b(S,T)$ es monótono, i es no nulo en b, sin embargo $\psi_i[b] = p_{a,b} = 0$.

- Si $q_{a,b} = 0$, para algún $a,b = 0,\ldots,n-1$. Tomamos $i \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Definimos el juego:

$$b(S,T) = \begin{cases} -1 & si\,(S,T) \sqsubseteq (A, B \cup \{k\}) \text{ para algún } k \in N \setminus (A \cup B) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  $b(S,T)$ es monótono, i es no nulo en b, sin embargo $\psi_i[b] = q_{a,b} = 0$. □

Como paso previo al estudio de las siguientes propiedades recordamos el concepto de subjuego con respecto a un subconjunto $R \subseteq N$ no vacío que hemos visto en el capítulo 1. Sea $R \subseteq N$ una coalición diferente del conjunto vacío, la restricción sobre R de un juego bicooperativo b definido en N, es el juego $b_{|R}$ sobre R que llamaremos *subjuego* de b y viene definido por $b_{|R}(S,T) = b(S,T)$ para todo $S,T \subseteq 3^R$.

En el caso particular del subconjunto $R = N\setminus\{i\}$ para algún $i \in N$, escribiremos $b_{-\{i\}}$ para referirnos al subjuego $b_{|N\setminus\{i\}}$.

Utilizaremos también el concepto de bisemivalor inducido introducido en la sección 4.1 de este capítulo.

La siguiente definición y posterior proposición hacen referencia al efecto que produce la eliminación de un jugador nulo del juego. Esta eliminación no debería afectar a los pagos recibidos por los restantes jugadores. Como veremos, esta propiedad se cumple para cualquier bisemivalor.

Definición 4.3.12 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de exclusión de un jugador nulo si para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$*

$$g_j[b] = g_j[b_{-\{i\}}],$$

para todo $i, j \in N$ tal que i es nulo en b.

Proposición 4.3.13 *(Propiedad de exclusión de un jugador nulo) Todo bisemivalor $\psi^{(n)}$ definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de exclusión de un jugador nulo.*

Demostración: Utilizando la expresión (4.1) y descomponiendo la suma, obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_j^{(n)}[b] &= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{j\}}} p^n_{s,t}[b(S\cup\{j\},T)-b(S,T)] + q^n_{s,t}[b(S,T)-b(S,T\cup\{j\})] \\
&= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} p^n_{s,t}[b(S\cup\{j\},T)-b(S,T)] + q^n_{s,t}[b(S,T)-b(S,T\cup\{j\})] + \\
&\qquad p^n_{s+1,t}[b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T)] + \\
&\qquad q^n_{s+1,t}[b(S\cup\{i\},T)-b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})] + \\
&\qquad p^n_{s,t+1}[b(S\cup\{j\},T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{i\})] + \\
&\qquad q^n_{s,t+1}[b(S,T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{j\}\cup\{i\})].
\end{aligned}$$

Como $i \in N$ es un jugador nulo en b, tenemos

$$\begin{aligned}
&b(S\cup\{i\},T) = b(S,T\cup\{i\}) = b(S,T), \\
&b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T) = b(S\cup\{j\},T), \\
&b(S,T\cup\{i\}\cup\{j\}) = b(S,T\cup\{j\}), \\
&b(S\cup\{j\},T\cup\{i\}) = b(S\cup\{j\},T) \text{ y} \\
&b(S\cup\{i\},T\cup\{j\}) = b(S,T\cup\{j\}).
\end{aligned}$$

Si se excluye al jugador i y teniendo en cuenta que todo bisemivalor satisface las relaciones (4.2) entonces

$$\begin{aligned}
\psi_j^{(n)}[b] &= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} (p^n_{s+1,t}+p^n_{s,t}+p^n_{s,t+1})[b(S\cup\{j\},T)-b(S,T)]+ \\
&\qquad (q^n_{s+1,t}+q^n_{s,t}+q^n_{s,t+1})[b(S,T)-b(S,T\cup\{j\})] \\
&= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} p^{n-1}_{s,t}[b_{-\{i\}}(S\cup\{j\},T)-b_{-\{i\}}(S,T)]+ \\
&\qquad q^{n-1}_{s,t}[b_{-\{i\}}(S,T)-b_{-\{i\}}(S,T\cup\{j\})] \\
&= \psi_j^{(n-1)}[b_{-\{i\}}]. \qquad \square
\end{aligned}$$

La siguiente propiedad se refiere al efecto que produce, sobre el pago a un jugador cualquiera, la exclusión en el juego de cualquier otro jugador y caracteriza la clase de soluciones que satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas dentro de la clase de bisemivalores.

Definición 4.3.14 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de las contribuciones equilibradas si para cada juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y todo par de jugadores $i, j \in N$*

$$g_i[b] - g_i[b_{-\{j\}}] = g_j[b] - g_j[b_{-\{i\}}].$$

Proposición 4.3.15 *(Propiedad de las contribuciones equilibradas)*

Sea $\psi^{(n)}$ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$, entonces

$$\psi^{(n)} \textit{satisface la propiedad de contribuciones equilibradas} \Leftrightarrow$$

$$p^n_{s,t+1} = q^n_{s+1,t} = 0\,,\ \textit{para todo}\ s,t = 0,\dots,n-2.$$

Demostración: ($\Leftarrow$) Sea $\psi^{(n)}$ un bisemivalor definido sobre el espacio de juegos bicooperativos con n jugadores. Partiendo de la ecuación (4.1), descomponiendo la suma y utilizando las relaciones (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\psi_i^{(n)}[b]-\psi_i^{(n-1)}[b_{-\{j\}}] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} & p^n_{s+1,t}[b(S\cup\{j\}\cup\{i\},T)-b(S\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T)+b(S,T)]+\\ & q^n_{s+1,t}[b(S\cup\{j\},T)-b(S\cup\{j\},T\cup\{i\})-b(S,T)+b(S,T\cup\{i\})]+\\ & p^n_{s,t+1}[b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})-b(S,T\cup\{j\})-b(S\cup\{i\},T)+b(S,T)]+\\ & q^n_{s,t+1}[b(S,T\cup\{j\})-b(S,T\cup\{i\}\cup\{j\})-b(S,T)+b(S,T\cup\{i\})].\end{aligned}$$

Si comparamos esta expresión con la expresión análoga para el otro jugador,

$$\begin{aligned}\psi_j^{(n)}[b]-\psi_j^{(n-1)}[b_{-\{i\}}] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} & p^n_{s+1,t}[b(S\cup\{j\}\cup\{i\},T)-b(S\cup\{i\},T)-b(S\cup\{j\},T)+b(S,T)]+\\ & q^n_{s+1,t}[b(S\cup\{i\},T)-b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})-b(S,T)+b(S,T\cup\{j\})]+\\ & p^n_{s,t+1}[b(S\cup\{j\},T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{i\})-b(S\cup\{j\},T)+b(S,T)]+\\ & q^n_{s,t+1}[b(S,T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{j\}\cup\{i\})-b(S,T)+b(S,T\cup\{j\})],\end{aligned}$$

y tenemos en cuenta que $p^n_{s,t+1}=q^n_{s+1,t}=0$, para todo $s,t=0,\ldots,n-2$, se deduce

$$[\psi_i^{(n)}[b]-\quad\psi_i^{(n-1)}[b_{-\{j\}}]]-[\psi_j^{(n)}[b]-\psi_j^{(n-1)}[b_{-\{i\}}]]=$$

$$\begin{aligned}=\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}}(p^n_{s,t+1}+q^n_{s+1,t})[b(S\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T)+b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})-\\ b(S,T\cup\{j\})-b(S\cup\{j\},T\cup\{i\})+b(S,T\cup\{i\})]=0.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\psi_i^{(n)}[b]-\psi_i^{(n-1)}[b_{-\{j\}}]=\psi_j^{(n)}[b]-\psi_j^{(n-1)}[b_{-\{i\}}].$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $p_{a,b+1}+q_{a+1,b}\neq 0$ para algún $a,b=0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j\in N$ y $(A,B)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A|=a$ y $|B|=b$.

Consideramos el juego de identidad $\delta_{(A\cup\{i\},B\cup\{j\})}$. En este caso,

$$[\psi_i^{(n)}[\delta_{(A\cup i,B\cup j)}]-\psi_i^{(n-1)}[\delta_{(A\cup i,B\cup j)-\{j\}}]]-[\psi_j^{(n)}[\delta_{(A\cup i,B\cup j)}]-\psi_j^{(n-1)}[\delta_{(A\cup i,B\cup j)-\{i\}}]]=$$

$$=p^n_{a,b+1}+q^n_{a+1,b}\neq 0,$$

llegando a una contradicción. $\square$

4.3.3. Propiedad del bloque

Empezaremos esta sección definiendo formalmente qué significa que dos jugadores, i y j en un juego bicooperativo formen un bloque y actúen como un solo jugador. Obtendremos un nuevo juego bicooperativo cuyo conjunto de jugadores será el conjunto inicial eliminando los jugadores i y j e introduciendo un nuevo jugador que representará el bloque. A partir de ahora, indicaremos a este nuevo jugador por $i\&j$ y por $b_{i\&j}$ el juego bicooperativo correspondiente.

Veamos en la siguiente definición cómo entendemos la formación de un bloque.

Definición 4.3.16 *Dado un juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y dos jugadores distintos $i, j \in N$, tomamos $i\&j$ como un nuevo jugador, no perteneciente a N. Definimos el juego $b_{i\&j} \in \mathcal{BG}_{N'}$, sobre el conjunto de jugadores $N' = N \setminus \{i, j\} \cup \{i\&j\}$, como*

$$b_{i\&j}(S,T) = \begin{cases} b(S \setminus \{i\&j\} \cup \{i\} \cup \{j\}, T) & \textit{si } i\&j \in S \\ b(S, T \setminus \{i\&j\} \cup \{i\} \cup \{j\}) & \textit{si } i\&j \in T \\ b(S,T) & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

A partir de aquí, nos preguntamos qué relación puede existir entre el poder del bloque $i\&j$ en el nuevo juego y los poderes de los jugadores i y j en el juego inicial.

Definición 4.3.17 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad del bloque si para todo juego monótono $b \in \mathcal{BG}_N$ y todo par de jugdores $i, j \in N$, tal que j no es un jugador nulo en el juego b, se cumple*

$$g_{i\&j}[b_{i\&j}] > g_i[b]$$

Proposición 4.3.18 *(Propiedad del bloque) Sea $\psi^{(n)}$ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$. Entonces, $\psi^{(n)}$ satisface la propiedad del bloque si y solo si*

$$p^n_{s+1,t} - q^n_{s+1,t} > 0,\ q^n_{s,t+1} - p^n_{s,t+1} > 0,\ p^n_{s,t} + p^n_{s,t+1} > 0 \ \text{ y } q^n_{s,t} + q^n_{s+1,t} > 0$$

para todo $s,t = 0, 1, ..., n-2$.

Demostración:($\Leftarrow$) Sea $\psi^{(n)}$ un bisemivalor definido sobre el espacio de juegos bicooperativos con n jugadores. Partiendo de la ecuación (4.1), descomponiendo la suma y utilizando las relaciones (4.2), obtenemos

$$\psi_{i\&j}^{(n-1)}[b_{i\&j}] - \psi_i^{(n)}[b] =$$

$$\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}} p_{s,t}^n[b(S\cup i\cup j,T)-b(S\cup i,T)] + (p_{s+1,t}^n - q_{s+1,t}^n)[b(S\cup j,T)-b(S,T)]+$$

$$q_{s+1,t}^n[b(S\cup j,T\cup i)-b(S,T\cup i\cup j)] + (q_{s,t+1}^n - p_{s,t+1}^n)[b(S,T)-b(S,T\cup j)]+$$

$$p_{s,t+1}^n[b(S\cup i\cup j,T)-b(S\cup i,T\cup j)] + q_{s,t}^n[b(S,T\cup i)-b(S,T\cup i\cup j)]$$

Como b es un juego monótono,

$$b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T)\geq 0,\ b(S\cup\{j\},T)-b(S,T)\geq 0,$$
$$b(S\cup\{j\},T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{i\}\cup\{j\})\geq 0,\ b(S,T)-b(S,T\cup\{j\})\geq 0,$$
$$b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})\geq 0,\ b(S,T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{i\}\cup\{j\})\geq 0$$

para todo par de coaliciones $(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}$.

Además, se cumplirá alguna de las siguientes relaciones:

(i) $b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T)-b(S\cup i,T)>0$

(ii) $b(S\cup\{j\},T)-b(S,T)>0$

(iii) $b(S,T)-b(S,T\cup\{j\})>0$

(iv) $b(S,T\cup\{i\})-b(S,T\cup\{i\}\cup\{j\})>0$

para algún par de coaliciones $(S,T)\in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ ya que j es no nulo en b.

Estudiemos ahora las distintas situaciones:

- Si se cumple (i), como b es un juego monótono, tenemos que

$$b(S\cup\{i\}\cup\{j\},T)-b(S\cup\{i\},T\cup\{j\})>0$$

y si $p_{s,t}=0$, entonces $p_{s,t+1}>0$.

- Si se cumplen (ii) o (iii), teniendo en cuenta que $p^n_{s+1,t} - q^n_{s+1,t} > 0$ y $q^n_{s,t+1} - p^n_{s,t+1} > 0$, obtenemos el resultado buscado.

- Si se cumple (iv), utilizando la monotonía del juego b, tenemos que

$$b(S \cup \{j\}, T \cup \{i\}) - b(S, T \cup \{i\} \cup \{j\}) > 0$$

y si $q_{s,t} = 0$, entonces $q_{s+1,t} > 0$.

En todas las casuísticas obtenemos

$$\psi^{(n-1)}_{i\&j}[b_{i\&j}] - \psi^{(n)}_i[b] > 0$$

($\Rightarrow$) Veamos que se cumple la propiedad del bloque en las distintas situaciones.

- Supongamos en primer lugar que $p^n_{a+1,b} - q^n_{a+1,b} \leq 0$ para algún $a, b = 0, ..., n-2$. Tomamos $i, j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N \setminus \{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos el juego

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,T) \sqsupseteq (A \cup \{k\}, B) \text{ para algún } k \in N \setminus (A \cup B) \text{ o bien} \\ & \text{si } (S,T) \sqsupseteq (A \cup \{k\}, B \cup \{j\}) \text{ para algún } k \in N \setminus (A \cup B),\ k \neq j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  En este caso, b es un juego monótono y j es un jugador no nulo en b. Sin embargo,

$$\psi^{(n-1)}_{i\&j}[b_{i\&j}] - \psi^{(n)}_i[b] = p^n_{a+1,b} - q^n_{a+1,b} \leq 0,$$

  llegando a una contradicción.

- De forma análoga, supongamos que $q^n_{a,b+1} - p^n_{a,b+1} \leq 0$ para algún $a, b = 0, ..., n-2$. Tomamos $i, j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N \setminus \{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos el juego

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,T) \sqsupseteq (A,B) \text{ o bien } (S,T) \sqsupseteq (A \cup \{i\}, B \cup \{j\}) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En este caso, b es un juego monótono y j es un jugador no nulo en b. Sin embargo,

$$\psi_{i\&j}^{(n-1)}[b_{i\&j}] - \psi_i^{(n)}[b] = q_{a,b+1}^n - p_{a,b+1}^n \leq 0,$$

llegando a una contradicción.

- Análogamente, supongamos que $p_{a,b}^n + p_{a,b+1}^n = 0$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos el juego

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,T) \sqsupseteq (A\cup\{k\}\cup\{l\},B) \text{ para algún } k,l \in N\setminus(A\cup B) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  En este caso, b es un juego monótono y j es un jugador no nulo en b. Sin embargo,

$$\psi_{i\&j}^{(n-1)}[b_{i\&j}] - \psi_i^{(n)}[b] = p_{a,b}^n + p_{a,b+1}^n = 0,$$

  llegando a una contradicción.

- Por último, supongamos que $q_{a,b}^n + q_{a+1,b}^n = 0$ para algún $a,b = 0,\ldots,n-2$. Tomamos $i,j \in N$ y $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i,j\}}$ tal que $|A| = a$ y $|B| = b$.

  Consideramos el juego

$$b(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,T) \sqsupseteq (A,B\cup\{k\}) \text{ para algún } k \in N\setminus(A\cup B) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  En este caso, b es un juego monótono y j es un jugador no nulo en b. Sin embargo,

$$\psi_{i\&j}^{(n-1)}[b_{i\&j}] - \psi_i^{(n)}[b] = q_{a,b}^n + q_{a+1,b}^n = 0,$$

  llegando a una contradicción. $\square$

El bloque $i\&j$ puede ser interpretado como el resultado de una fusión voluntaria entre los jugadores i y j, pero puede ser también visto como el resultado de un relevo o compra, en el que i, habiendo adquirido los derechos del jugador j, ahora actúa bajo el nuevo nombre $i\&j$. La suposición de que el jugador i debe ganar poder al absorber de esta manera al jugador j que no es un jugador nulo parece intuitivamente razonable. Una fusión voluntaria se realizará solo si como resultado de ella, ambas partes poseen como mínimo el poder que tenían anteriormente. Sin embargo, una toma de posesión, relevo o adquisición no tiene por qué ser beneficiosa para ambas partes, sino solo para la promotora.

4.4. Caracterización del bisemivalor de Banzhaf

El principal objetivo de esta sección es caracterizar axiomáticamente el bisemivalor de Banzhaf para juegos bicooperativos, introducido en la Definición 4.1.6. Este bisemivalor se puede interpretar de manera similar al valor clásico de Banzhaf para juegos cooperativos.

Como ya hemos visto anteriormente, y como ocurre en el caso cooperativo, el bisemivalor de Banzhaf es el único bisemivalor con coeficientes de ponderación constantes, es decir, los coeficientes de ponderación no dependen del tamaño de las coaliciones S y T.

Para ello, a parte de las propiedades clásicas consideradas anteriormente, introducimos nuevas propiedades adicionales.

En primer lugar recordamos la propiedad de linealidad introducida en los Preliminares y que ya hemos utilizado en la sección 4.1 al definir el concepto de bisemivalor.

Definición 4.4.1 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de linealidad, si y solo si se cumple $g[b+b'] = g[b]+g[b']$ (aditividad) y $g[\lambda b] = \lambda g[b]$ para todo $b,b' \in \mathcal{GB}_N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Como hemos dicho anteriormente, un jugador $i \in N$ es nulo en b si y solo si es un títere y además se cumple, $b(\{i\},\emptyset) = b(\emptyset,\{i\}) = 0$. Está claro que si i es un jugador nulo, entonces se cumplirá que $b(S\cup\{i\},T) = b(S,T\cup\{i\})$, pero lo contrario, en general, no es cierto. Este hecho nos lleva a considerar la siguiente definición.

Definición 4.4.2 *Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo débil en b si y solo si $b(S\cup\{i\},T) = b(S,T\cup\{i\})$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$.*

Definición 4.4.3 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad del jugador nulo débil si y solo si para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ en el que $i \in N$ es un jugador nulo débil, $g_i[b] = 0$.*

La caracterización del bisemivalor de Banzhaf que proponemos en esta sección recuerda la formulada para juegos cooperativos por Alonso-Mejide *et al* [1]. En este trabajo se caracteriza el valor de Banzhaf como el único valor que satisface las propiedades de aditividad, jugador nulo y los jugadores necesarios obtienen la media. Para ello introducen el concepto de jugador necesario como aquel que anula el valor de cada coalición en la que no está incluido y proponen una nueva propiedad según la cual, estos jugadores reciben el valor promedio sobre todas las coaliciones $S \subseteq N$.

Siguiendo esta idea, en el caso de los juegos bicooperativos podemos considerar un tipo especial de jugador: el jugador defensor necesario.

Definición 4.4.4 *Un jugador $i \in N$ es un jugador defensor necesario en b si y solo si $b(S,T) = 0$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$.*

En este caso, un jugador defensor necesario anula el valor de cada par de coaliciones (S,T) cuando no pertenece a S.

Observación 4.4.5 Para todo par de coaliciones $(A,B) \in 3^N$ tal que $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)$, se cumple:

- Los jugadores del subconjunto $N \setminus (A \cup B)$ son jugadores nulos débiles en el juego de identidad $\delta_{(A,B)}$.
- los jugadores de la coalición A son jugadores defensores necesarios en el juego de identidad $\delta_{(A,B)}$.

Tenemos varias posibilidades en la asignación de pagos a estos jugadores. Introducimos a continuación una nueva propiedad que proporciona asignaciones razonables a este tipo de jugadores. Si i es un jugador defensor necesario en b, una propuesta no puede prosperar sin él. Por ello proponemos que este tipo de jugadores obtenga el valor promedio sobre todos los pares de coaliciones $(S,T) \in 3^N$, tal como se especifica en la siguiente definición.

Definición 4.4.6 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad del jugador defensor necesario, si y solo si para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ en el que $i \in N$ es un jugador defensor necesario,*

$$g_i[b] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^N} b(S,T).$$

Teorema 4.4.7 *El único valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ que satisface las propiedades de linealidad, jugador nulo débil y jugador defensor necesario es el bisemivalor de Banzhaf, β.*

Demostración: (*Existencia*) Es sencillo comprobar que el bisemivalor de Banzhaf β satisface las propiedades anteriores. Para ello, basta tener en cuenta que β es un bisemivalor, por lo tanto satisface la propiedad de linealidad.

Satisface la propiedad del jugador nulo débil ya que si $i \in N$ es un jugador jugador nulo débil en b, entonces $b(S\cup\{i\},T) = b(S,T\cup\{i\})$ para todo par de coaliciones $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$, por lo que

$$\beta_i[b] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} [b(S\cup\{i\},T) - b(S,T\cup\{i\})] = 0.$$

Satisface la propiedad del jugador defensor necesario ya que si $i \in N$ es un jugador defensor necesario en b,

$$\sum_{(S,T)\in 3^N} b(S,T) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} [b(S,T) + b(S\cup\{i\},T) + b(S,T\cup\{i\})] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} b(S\cup\{i\},T)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta_i[b] &= \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} [b(S\cup\{i\},T) - b(S,T\cup\{i\})] \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} b(S\cup\{i\},T) = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^N} b(S,T). \end{aligned}$$

(*Unicidad*) Supongamos que g es un valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ que satisface las propiedades indicadas en el enunciado. Demostraremos que g está unívocamente determinado sobre todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y por lo tanto, debe coincidir con el bisemivalor de Banzhaf, β.

Todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ puede escribirse como $b = \sum_{\substack{(S,T)\in 3^N \\ (S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)}} \delta_{(S,T)} b(S,T)$ ya que los juegos de identidad forman una base de $\mathcal{BG}_N$.

Aplicando la propiedad de linealidad obtenemos

$$g_i[b] = \sum_{\substack{(S,T)\in 3^N \\ (S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)}} g_i[\delta_{(S,T)}] b(S,T).$$

Podemos escribir

$$g_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[g_i[\delta_{(S\cup\{i\},T)}] b(S\cup\{i\},T) + g_i[\delta_{(S,T)}] b(S,T) + g_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] b(S,T\cup\{i\}) \right].$$

Para todo par de coaliciones $(A,B) \in 3^N$ tal que $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)$, observamos que:

- Si $i \in N \setminus (A\cup B)$, entonces es un jugador nulo débil en $\delta_{(A,B)}$ y, aplicando la propiedad del jugador nulo débil, obtenemos

$$g_i[\delta_{(A,B)}] = 0.$$

- Si $i \in A$, entonces es un jugador defensor necesario en $\delta_{(A,B)}$ y, aplicando la propiedad del jugador defensor necesario, obtenemos

$$g_i[\delta_{(A,B)}] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^N} \delta_{(A,B)}(S,T) = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Teniendo en cuenta este resultado,

$$g_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\frac{1}{3^{n-1}} b(S\cup\{i\},T) + g_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] b(S,T\cup\{i\}) \right].$$

Consideramos ahora, el juego

$$b_i^{AB} = \delta_{(A\cup\{i\},B)} + \delta_{(A,B\cup\{i\})},$$

para cada $i \in N$ y cada par de coaliciones $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$.

El jugador i es un jugador nulo débil en el juego b_i^{AB} y, aplicando la propiedad del jugador nulo débil, obtenemos

$$0 = g_i[b_i^{AB}] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\frac{1}{3^{n-1}} b(S\cup\{i\},T) + g_i[\delta_{(S,T\cup\{i\})}] b(S,T\cup\{i\}) \right]$$
$$= \frac{1}{3^{n-1}} + g_i[\delta_{(A,B\cup\{i\})}].$$

Por lo que

$$g_i[\delta_{(A,B\cup\{i\})}] = -\frac{1}{3^{n-1}},$$

para todo $i \in N$ y todo par de coaliciones $(A,B) \in 3^{N\setminus\{i\}}$.

Así pues,

$$g_i[b] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} [b(S\cup\{i\},T) - b(S,T\cup\{i\})] = \beta_i[b],$$

para todo $i \in N$ y para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$. $\square$

Observación 4.4.8 (Independencia del sistema axiomático del Teorema 4.4.7) Las propiedades de linealidad, jugador nulo débil y jugador defensor necesario son independientes entre ellas.

- *La propiedad de linealidad es independiente de las propiedades de jugador nulo débil y jugador defensor necesario.*

  Sea g el valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ por

  $$g_i[b] = \begin{cases} \beta_i[b] & \text{si } i \text{ es un jugador nulo débil o defensor necesario en } b, \\ k & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  donde k es un número real distinto de zero.

  Este valor satisface las propiedades de jugador nulo débil y jugador defensor necesario, pero no la propiedad de linealidad.

- *La propiedad del jugador nulo débil es independiente de las propiedades de linealidad y jugador defensor necesario.*

Sea g el valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ por

$$g_i[b] = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^N} b(S,T).$$

Este valor satisface las propiedades de linealidad y jugador defensor necesario, pero no la propiedad del jugador nulo débil.

- *La propiedad del jugador defensor necesario es independiente de las propiedades de linealidad y jugador nulo débil.*

  Sea g el valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ por

  $$g_i[b] = k\beta_i[b]$$

  donde k es un número real distinto de uno.

  Este valor satisface las propiedades de linealidad y jugador nulo débil, pero no la propiedad del jugador defensor necesario.

4.5. Caracterización del bisemivalor de Shapley

Bilbao *et al.*, como hemos visto en el capítulo de preliminares, introducen y caracterizan el bisemivalor de Shapley en [9], como el único valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ que satisface las propiedades de linealidad, positividad, jugador títere, eficiencia y axioma estructural .

En esta sección proporcionamos una nueva caracterización de este bisemivalor en la misma línea de la caracterización de Banzhaf dada en el Teorema 4.4.7.

En primer lugar, recordamos algunos resultados obtenidos en [9] referentes a cadenas maximales.

Observación 4.5.1

- El número de cadenas maximales en 3^N es $(2n)!/2^n$.
- Para todo par de coaliciones $(A,B) \in 3^N$, el número de cadenas maximales en el subretículo $[(\emptyset,N),(A,B)]$ es $c[(\emptyset,N),(A,B)] = (n+a-b)!/2^a$, donde $a = |A|$ y $b = |B|$.

- Sean (A,B), $(C,D) \in 3^N$ tal que $(A,B) \sqsubseteq (C,D)$. El número de cadenas maximales en el subretículo $[(A,B),(C,D)]$ es igual a el número de cadenas maximales en el subretículo $[(D,C),(B,A)]$.

En segundo lugar, recordamos la propiedad de simetría que ya habíamos utilizado en la sección 4.1 al definir el concepto de bisemivalor y la de eficiencia que aparece en la axiomatización del bisemivalor de Shapley dada por Bilbao *et al* en [9].

Definición 4.5.2 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de simetría si y solo si se cumple $g_{\pi i}[\pi b] = g_i[b]$ para toda permutación π definida sobre N, todo jugador $i \in N$ y juego $b \in \mathcal{BG}_N$, donde $\pi b(\pi S, \pi T) = b(S,T)$ y $\pi S = \{\pi i : i \in S\}$.*

Definición 4.5.3 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad de eficiencia si y solo si $\sum_{i \in N} g_i[b] = b(N,\emptyset) - b(\emptyset,N)$ para todo $b \in \mathcal{BG}_N$.*

Finalmente introducimos un nuevo tipo de jugador especial en los juegos bicooperativos: el jugador detractor necesario.

Definición 4.5.4 *Un jugador $i \in N$ es un jugador detractor necesario en b si y solo si $b(S,T) = 0$ para toda coalición $T \subseteq N \setminus \{i\}$.*

En este caso, un jugador detractor necesario anula el valor de cada par de coaliciones (S,T) cuando no pertenece a T.

Según esta definición, los jugadores de la coalición B son jugadores detractores necesarios en los juegos de identidad de la forma $\delta_{(A,B)}$, $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)$.

Como hemos comentado anteriormente, existen varias posibilidades de asignación de pagos a los jugadores defensores y detractores necesarios. En este caso, teniendo en cuenta la filosofía del valor de Shapley, proponemos dos nuevas propiedades que proporcionan asignaciones a este tipo de jugadores, basadas en la media ponderada.

Así pues, las siguientes propiedades proponen que los jugadores defensores necesarios obtengan un valor medio ponderado sobre todas las coaliciones $(S,T) \in 3^N$ y, por el contrario, los jugadores detractores necesarios paguen por un valor medio ponderado sobre todas las coaliciones $(S,T) \in 3^N$. Los pesos en ambos casos se definen teniendo en cuenta que (a) todos los órdenes secuenciales de cadenas tienen la misma probabilidad y (b) la probabilidad de que un jugador se una o abandone una coalición es la misma para todas las coaliciones de igual cardinal.

Definición 4.5.5 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario, si y solo si*

$$g_i[b] = \frac{2^n}{(2n)!} \sum_{(S,T) \in 3^N} \frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}} b(S,T),$$

para todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y para todo jugador necesario $i \in N$ en b.

Observación 4.5.6 Observemos que, teniendo en cuenta la observación 4.5.1, los pesos

$$\frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}}$$

coinciden con el número de cadenas que van desde $(\emptyset,N)$ hasta $(N,\emptyset)$ que contienen a los pares de coaliciones $(S \setminus \{i\},T)$ y (S,T). Es decir,

$$c[(\emptyset,N),(S \setminus \{i\},T)] \cdot c[(S,T),(N,\emptyset)].$$

Es más,

$$\frac{2^n}{(2n)!} \frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que el jugador i se una a la coalición $S \setminus \{i\}$ en presencia de los jugadores que forman la coalición T.

Definición 4.5.7 *Un valor g definido sobre $\mathcal{BG}_N$ satisface la propiedad del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario, si y solo si*

$$g_i[b] = -\frac{2^n}{(2n)!} \sum_{(S,T) \in 3^N} \frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}} b(S,T),$$

todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y para todo jugador necesario $i \in N$ en b.

Observación 4.5.8 A partir de la observación 4.5.1, obtenemos que los pesos

$$\frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}}$$

coinciden con el número de cadenas que van desde $(\emptyset,N)$ hasta $(N,\emptyset)$ que contienen a los pares de coaliciones (S,T) y $(S,T\setminus\{i\})$. Es decir,

$$c[(\emptyset,N),(S,T)]\cdot c[(S,T\setminus\{i\}),(N,\emptyset)].$$

Es más,

$$\frac{2^n}{(2n)!}\frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que el jugador i abandone la coalición T en presencia de los jugadores que forman la coalición S.

Teorema 4.5.9 *El único valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ que satisface las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario es el bisemivalor de Shapley, φ.*

Demostración: (*Existencia*) Es sencillo comprobar que el bisemivalor de Shapley φ satisface las propiedades anteriores. Para ello, basta tener en cuenta que φ es un bisemivalor, por lo tanto satisface las propiedades de linealidad y simetría. En [9] se demuestra la eficiencia. Veamos ahora que cumple las propiedades restantes.

Si $i\in N$ es un jugador defensor necesario en b entonces,

$$\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^N}\frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}}b(S,T)=\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\Big[\frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}}b(S,T)+$$
$$\frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{2^{s+t}}b(S\cup\{i\},T)\Big]=\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{2^{s+t}}b(S\cup\{i\},T).$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
\varphi_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} & \frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t}\left[b(S\cup\{i\},T)-b(S,T)\right]+ \\
& \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-1)!}{(2n)!}\, 2^{n-s-t}\left[b(S,T)-b(S,T\cup\{i\})\right] \\
= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} & \frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t} b(S\cup\{i\},T) \\
= \frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^N} & \frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}} b(S,T).
\end{aligned}$$

Así pues, φ satisface la propiedad del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario.

Además, si $i \in N$ es un jugador detractor necesario en b tenemos que

$$\begin{aligned}
& -\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^N} \frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}} b(S,T) = \\
& = -\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}} b(S,T) + \frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{2^{s+t}} b(S,T\cup\{i\})\right] \\
& = -\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{2^{s+t}} b(S,T\cup\{i\}).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi_i[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} & \frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t}\left[b(S\cup\{i\},T)-b(S,T)\right]+ \\
& \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-1)!}{(2n)!}\, 2^{n-s-t}\left[b(S,T)-b(S,T\cup\{i\})\right] \\
= - \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} & \frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t} b(S,T\cup\{i\}) \\
= -\frac{2^n}{(2n)!}\sum_{(S,T)\in 3^N} & \frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}} b(S,T).
\end{aligned}$$

Así pues, φ satisface la propiedad del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.

(*Unicidad*) Supongamos que g es un valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ que satisface las propiedades indicadas en el enunciado. Demostraremos que g está unívocamente determinado sobre todo juego $b \in \mathcal{BG}_N$ y por lo tanto, debe coincidir con el bisemivalor de Shapley, φ.

Por la propiedad de linealidad, bastará comprobar que g queda determinado únivocamente sobre cada juego de identidad $\delta_{(A,B)}$, ya que estos juegos forman una base de $\mathcal{BG}_N$.

Dado un par de coaliciones cualesquiera $(A,B) \in 3^N$ tal que $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)$, distinguiremos tres casos.

- Si $i \in A$, entonces es un jugador defensor necesario en $\delta_{(A,B)}$. Aplicando la propiedad del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y el Lema 4.1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} g_i[\delta_{(A,B)}] &= \frac{2^n}{(2n)!} \sum_{(S,T)\in 3^N} \frac{(n+s-t-1)!(n+t-s)!}{2^{s+t-1}} \delta_{(A,B)}(S,T) \\ &= \frac{2^n}{(2n)!} \frac{(n+a-b-1)!(n+b-a)!}{2^{a+b-1}} = \varphi_i[\delta_{(A,B)}]. \end{aligned}$$

- Si $i \in B$, entonces es un jugador detractor necesario en $\delta_{(A,B)}$. Aplicando la propiedad del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario y el Lema 4.1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} g_i[\delta_{(A,B)}] &= -\frac{2^n}{(2n)!} \sum_{(S,T)\in 3^N} \frac{(n+t-s-1)!(n+s-t)!}{2^{s+t-1}} \delta_{(A,B)}(S,T) \\ &= -\frac{2^n}{(2n)!} \frac{(n+b-a-1)!(n+a-b)!}{2^{a+b-1}} = \varphi_i[\delta_{(A,B)}]. \end{aligned}$$

- Si $i \in N \setminus (A \cup B)$, aplicando la propiedad de eficiencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{(A,B)}(N,\emptyset) - \delta_{(A,B)}(\emptyset,N) &= \sum_{i\in N} g_i[\delta_{(A,B)}] \\ &= \sum_{i\in A} g_i[\delta_{(A,B)}] + \sum_{j\in B} g_j[\delta_{(A,B)}] + \sum_{k\in N\setminus(A\cup B)} g_k[\delta_{(A,B)}]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de simetría, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in A} g_i[\delta_{(A,B)}] &= a\,g_i[\delta_{(A,B)}] = a\,\varphi_i[\delta_{(A,B)}], \text{ para todo } i\in A\\
\sum_{j\in B} g_j[\delta_{(A,B)}] &= b\,g_j[\delta_{(A,B)}] = b\,\varphi_j[\delta_{(A,B)}], \text{ para todo } j\in B, \text{ y}\\
\sum_{k\in N\setminus(A\cup B)} g_k[\delta_{(A,B)}] &= (n-a-b)g_k[\delta_{(A,B)}], \text{ para todo } k\in N\setminus(A\cup B).
\end{aligned}$$

Finalmente, deducimos que

$$g_i[\delta_{(A,B)}] = \varphi_i[\delta_{(A,B)}], \text{ para todo } i\in N\setminus(A\cup B). \qquad \square$$

Observación 4.5.10 (Independencia del sistema axiomático del Teorema 4.5.9) Las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario son independientes entre ellas.

- *La propiedad de linealidad es independiente de las propiedades de eficiencia, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.*

  Sea g el valor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ por

  (a) Juegos de identidad. Si $b=\delta_{(A,B)}$, entonces $g_i[b]=\varphi_i[b]$, $\forall i\in N$.

  (b) En caso contrario, es decir, si b no es un juego de identidad, denotamos por D_1 al conjunto de jugadores defensores necesarios y por D_2 al conjunto de jugadores detractores necesarios en un juego $b\in\mathcal{BG}_N$. Entonces

$$g_i[b]=\begin{cases}\varphi_i[b] & \text{si } i\in D_1\cup D_2\\ \frac{1}{n-(d_1+d_2)}\left[b(N,\emptyset)-b(\emptyset,N)-\big(\sum_{j\in D_1}\varphi_j[b]+\sum_{k\in D_2}\varphi_k[b]\big)\right] & \text{si } i\in N\setminus(D_1\cup D_2)\end{cases}$$

  donde $d_1=\mid D_1\mid$ y $d_2=\mid D_2\mid$.

  Este valor satisface las propiedades de eficiencia, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario, pero no la propiedad de linealidad. Falla por ejemplo si $b = \delta_{(1,\emptyset)} + \delta_{(\emptyset,2)}$ y $n = 2$.

- *La propiedad de eficiencia es independiente de las propiedades de linealidad, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.*

  (a) Si $n = 2$ definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como

$$g_1[b] = \varphi_1[b] - [b(\{2\},\emptyset) - b(\emptyset,\{2\})]$$
$$g_2[b] = \varphi_2[b] - [b(\{1\},\emptyset) - b(\emptyset,\{1\})].$$

  (b) En caso contrario, es decir, si $n > 2$, definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como $g_i[b] = \varphi_i[b]$, para todo jugador $i \in N$.

  Este valor satisface las propiedades de linealidad, simetría, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario, pero no la propiedad de eficiencia.

- *La propiedad de simetría es independiente de las propiedades de linealidad, eficiencia, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.*

  (a) Si $n = 3$ definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como

$$g_1[b] = \varphi_1[b] - [b(\{2\},\emptyset) - b(\emptyset,\{2\}) - b(\{3\},\emptyset) + b(\emptyset,\{3\})],$$
$$g_2[b] = \varphi_2[b] + [b(\{1\},\emptyset) - b(\emptyset,\{1\}) - b(\{3\},\emptyset) + b(\emptyset,\{3\})],$$
$$g_3[b] = \varphi_3[b] - [b(\{1\},\emptyset) - b(\emptyset,\{1\}) - b(\{2\},\emptyset) + b(\emptyset,\{2\})].$$

  (b) En caso contrario, es decir, si $n \neq 3$, definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como $g_i[b] = \varphi_i[b]$, para todo jugador $i \in N$.

  Este valor satisface las propiedades de linealidad, eficiencia, del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario, pero no la propiedad de simetría .

- *La propiedad del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario es independiente de las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.*

  (a) Si $n = 2$ definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como

  $$\begin{aligned} g_1[b] =& \varphi_1[b] + [b(\{1\},\emptyset) - b(\{2\},\emptyset)], \\ g_2[b] =& \varphi_2[b] - [b(\{1\},\emptyset) - b(\{2\},\emptyset)]. \end{aligned}$$

  (b) En caso contrario, es decir, si $n > 2$, definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como $g_i[b] = \varphi_i[b]$, para todo jugador $i \in N$.

  Este valor satisface las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría y del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario, pero no la propiedad del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario.

- *La propiedad del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario es independiente de las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría y del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario.*

  (a) Si $n = 2$ definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como

  $$\begin{aligned} g_1[b] =& \varphi_1[b] + [b(\emptyset,\{1\}) - b(\emptyset,\{2\})], \\ g_2[b] =& \varphi_2[b] - [b(\emptyset,\{1\}) - b(\emptyset,\{2\})]. \end{aligned}$$

  (b) En caso contrario, es decir, si $n > 2$, definimos el valor g sobre $\mathcal{BG}_N$ como $g_i[b] = \varphi_i[b]$, para todo jugador $i \in N$.

  Este valor satisface las propiedades de linealidad, eficiencia, simetría y del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario, pero no la propiedad del valor medio ponderado para el jugador detractor necesario.

4.6. Cálculo de bisemivalores mediante la extensión multilineal

La extensión multilineal de un juego, EML, es una herramienta útil para el cálculo de valores en juegos cooperativos. Como vimos en los preliminares se aplica, por ejemplo, al valor de Shapley y al valor de Banzhaf. En efecto, $\varphi[v]$ se puede calcular integrando las derivadas parciales de la extensión multilineal del juego a lo largo de la diagonal principal del cubo $[0,1]^n$ (Owen [53]), mientras que las derivadas parciales de esta extensión multilineal evaluadas en el punto $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$ nos permite obtener $\beta[v]$ (Owen [54]).

Este último procedimiento se extiende bien al cálculo de los semivalores p- binomiales evaluando las derivadas parciales en el punto de coordenadas $(p, p, \ldots, p)$ (Puente [56], Amer y Giménez [2]). Como hemos comentado en el capítulo 3, el método también se extiende al cálculo de cualquier valor probabilístico multinomial (Puente [56], Freixas y Puente [38]). Carreras y Giménez en [23] calculan los semivalores sobre juegos cooperativos por medio de la EML del juego.

En esta sección primero definiremos la *extensión multilineal de un juego bicooperativo* de forma análoga a la *extensión multilineal de un juego cooperativo* dada por Owen en [53] y luego, introduciremos un procedimiento de calculo en términos de la extensión multilineal del juego para obtener las asignaciones dadas por (p,q)-bisemivalores en particular y otro para los bisemivalores en general. Finalmente definiremos la *extensión multilineal generalizada de un juego bicooperativo* que nos permitirá calcular las asignaciones correspondientes al bisemivalor de Shapley.

Para definir la extensión multilineal, primero identificaremos cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$ con los vectores (X,Y) de $\mathbb{R}^{2n}$ tales que $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, donde

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{y} \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por ejemplo, si tenemos tres jugadores, $N = \{1,2,3\}$, el par de coaliciones

$(\{1,3\},\{2\})$ y $(\{1,2\},\emptyset)$ se identifican con los vectores $(X,Y) = (1,0,1,0,1,0)$ y $(X,Y) = (1,1,0,0,0,0)$ respectivamente.

Introducimos ahora el concepto d'extensión multilineal de un juego bicooperativo de la siguiente forma:

Definición 4.6.1 *La extensión multilineal de un juego $b \in \mathcal{BG}_N$ es la función real de $2n$ variables*

$$f(X,Y) = \sum_{(S,T)\in 3^N} \left[\prod_{i\in S} x_i \prod_{j\in T} y_j \prod_{k\in N\setminus(S\cup T)} (1 - x_k - y_k) \right] b(S,T). \tag{4.4}$$

Es fácil comprobar que f coincide con b donde b está definido.

Teniendo en cuenta que los juegos de identidad y los juegos de unanimidad superiores e inferiores forman sendas bases del espacio de juegos bicooperativos $\mathcal{BG}_N$, es interesante ver qué expresión tiene la extensión multilineal de dichos juegos.

Observación 4.6.2 Sean $(A,B) \in 3^N$ un par de coaliciones tal que $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)$. Es fácil comprobar que

- La extensión multilineal del *juego de identidad* $\delta_{(A,B)}$, definido como

  $$\delta_{(A,B)}(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,T) = (A,B) \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

  es

  $$f_{\delta_{(A,B)}}(X,Y) = \prod_{i\in A} x_i \prod_{j\in B} y_j \prod_{k\in N\setminus(A\cup B)} (1 - x_k - y_k)$$

- La extensión multilineal del *juego de unanimidad superior* $\bar{u}_{(A,B)}$, definido como

  $$\bar{u}_{(A,B)}(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\emptyset,\emptyset) \neq (S,T) \sqsupseteq (A,B) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  es

  $$f_{\bar{u}_{(A,B)}}(X,Y) = \prod_{i\in A} x_i \prod_{j\in N\setminus(A\cup B)} (1 - y_j)$$

- La extensión multilineal del *juego de unanimidad inferior* $\underline{u}_{(A,B)}$, definido como
$$\underline{u}_{(A,B)}(S,T) = \begin{cases} -1 & \text{si } (\emptyset,\emptyset) \neq (S,T) \sqsubseteq (A,B) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
es
$$f_{\underline{u}_{(A,B)}}(X,Y) = -\prod_{i\in N\setminus(A\cup B)}(1-x_i)\prod_{j\in B} y_j$$

Una vez definida la EML de un juego bicooperativo, veremos en primer lugar como podemos calcular los (p,q)–bisemivalores a partir de ella. Este método recuerda al utilizado para calcular el valor de Banzhaf, los semivalores p-binomiales y los valores probabilísticos multinomiales en el caso cooperativo, en el que se usan las derivadas parciales de la extesión multilineal de un juego.

En segundo lugar, introduciremos un método para calcular los bisemivalores en general que amplia el utilizado por Carreras y Giménez [23] en el caso cooperativo.

4.6.1. Método para calcular los $(\mathbf{p},\mathbf{q})$–bisemivalores

Veamos pues, como podemos calcular las asignaciones debidas a un (p,q)–bisemivalor a partir de la extensión multilineal del juego.

Proposición 4.6.3 *Si ψ^{pq} es un (p,q)–bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ y f es la extensión multilineal del juego $b \in \mathcal{BG}_N$ entonces*
$$\psi_i^{pq}[b] = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(P,Q\Big) - \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big(Q,P\Big)$$
para todo jugador $i \in N$, donde $P = (p,\overset{n}{\ldots},p)$ y $Q = (q,\overset{n}{\ldots},q)$.

Demostración: Partiendo de la Definición 4.6.1 y calculando las derivadas parciales de f respecto a x_i e y_i obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X,Y) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} (1-x_l-y_l)\right] [b(S\cup\{i\},T)-b(S,T)], \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(X,Y) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} (1-x_l-y_l)\right] [b(S,T\cup\{i\})-b(S,T)]. \tag{4.6}$$

Evaluando (4.5) en el punto (P,Q) y (4.6) en el punto (Q,P) y restando los dos resultados, obtenemos la asignación a cualquier jugador debida al (p,q)–bisemivalor.

$$\psi_i^{pq}[b] = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} p^s q^t (1-p-q)^{n-s-t-1} (b(S\cup\{i\},T)-b(S,T))$$
$$+p^t q^s (1-p-q)^{n-s-t-1} (b(S,T)-b(S,T\cup\{i\})). \square$$

Corolario 4.6.4 *Si ψ^p, donde $p\in[0,1/2]$, es el bisemivalor p–binomial y f es la extensión multilineal del juego $b\in\mathcal{BG}_N$ entonces*

$$\psi_i^p[b] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P,P) - \frac{\partial f}{\partial y_i}(P,P).$$

En particular, si $p=1/3$ obtenemos las asignaciones dadas por el bisemivalor de Banzhaf.

Podemos observar que este resultado es una extensión del obtenido por Puente [56] para los semivalores p- binomiales definidos sobre juegos cooperativos.

Para ilustrar el cálculo de los (p,q)–bisemivalores retomamos el ejemplo de juego bicooperativo introducido en el capítulo 1. Los pagos obtenidos por los diferentes jugadores serán analizados usando (p,q)–bisemivalores que serán calculados utilizando la técnica de la extensión multilineal dada en la Proposición 4.6.3.

Ejemplo 4.6.5 (Ejemplo 1.2.1) Dos compañías de seguros, A_1 y A_2, compiten siempre para conseguir el máximo número de clientes en una región determinada. Si N representa el conjunto de agentes de seguros, cada uno de ellos con una cartera propia de clientes, podemos definir el juego bicooperativo $b(S,T)$ como el beneficio de la compañía A_1 cuando los jugadores de S trabajan para A_1, los jugadores de T trabajan para A_2 y los jugadores de $N \setminus (S \cup T)$ no trabajan para A_1 ni para A_2.

Consideramos el conjunto $N = \{1,2,3\}$ representando el conjunto de agentes de seguros y asumimos que los jugadores 1 y 3 son los agentes con una cartera con un mayor y menor nùmero de clientes respectivamente. Si un agente se va de la compañía A_1, puede incorporarse a la compañía A_2 y llevarse toda la cartera de clientes o parte de ella con él o, por el contrario, incorporarse a otro tipo de compañía que no sea una aseguradora, retirarse, ... El perjuicio para la compañía A_1 es mayor o superior en el primer caso que en el segundo.

El juego b definido por

$$
\begin{array}{lll}
b(\{1,2,3\},\emptyset) = 100, & b(\emptyset,\emptyset) = 0, & b(\emptyset,\{1,2,3\}) = -60, \\
b(\{1,3\},\emptyset) = 85, & b(\{2,3\},\emptyset) = 75, & b(\{1,2\},\emptyset) = 90, \\
b(\{1,3\},\{2\}) = 50, & b(\{2,3\},\{1\}) = 20, & b(\{1,2\},\{3\}) = 60, \\
b(\{3\},\emptyset) = 65, & b(\{2\},\emptyset) = 70, & b(\{1\},\emptyset) = 80, \\
b(\{3\},\{1\}) = 5, & b(\{3\},\{2\}) = 15, & b(\{2\},\{1\}) = 10, \\
b(\{2\},\{3\}) = 35, & b(\{1\},\{2\}) = 40, & b(\{1\},\{3\}) = 50, \\
b(\{3\},\{1,2\}) = -25, & b(\{2\},\{1,3\}) = -20, & b(\{1\},\{2,3\}) = 5, \\
b(\emptyset,\{1\}) = -30, & b(\emptyset,\{2\}) = -15, & b(\emptyset,\{3\}) = -10, \\
b(\emptyset,\{2,3\}) = -30, & b(\emptyset,\{1,3\}) = -40, & b(\emptyset,\{1,2\}) = -50.
\end{array}
$$

recoge la situación planteada en este ejemplo.

Considerando la Definición 4.6.1, la extensión multilineal del juego b es

$$
\begin{aligned}
f(X,Y) = {} & 80x_1 + 70x_2 + 65x_3 - 30y_1 - 15y_2 - 10y_3 - 60x_1x_2 - 60x_1x_3 - 25x_1y_2 - \\
& 20x_1y_3 - 60x_2x_3 - 30x_2y_1 - 25x_2y_3 - 30x_3y_1 - 35x_3y_2 - 5y_1y_2 - 5y_2y_3 + \\
& 65x_1x_2x_3 + 25x_1x_2y_3 + 40x_1x_3y_2 + 35x_2x_3y_1 + 5x_2y_1y_3 + 25x_3y_1y_2 + 5y_1y_2y_3
\end{aligned}
$$

Calculamos los (p,q)–bisemivalores utilizando la técnica de la extensión multilineal para cada jugador i:

$$\psi_1^{pq}[b] = 60p^2 + 35pq - 35q^2 - 115p + 15q + 110$$
$$\psi_2^{pq}[b] = 60p^2 + 35pq - 35q^2 - 110p + 5q + 85$$
$$\psi_3^{pq}[b] = 60p^2 + 70pq - 115p - 20q + 75$$

La Tabla 4.1 muestra el valor que toman los (p,q)–bisemivalores para cada jugador i y para distintos valores de p y q.

$\psi_i^{pq}[b]$	$(p,q)=(0.1,0.7)$	$(p,q)=(0.2,0.6)$	$(p,q)=(0.6,0.2)$	$(p,q)=(0.7,0.1)$
$i=1$	94.9 (44.49 %)	90.0 (44.82 %)	68.4 (47.24 %)	62.5 (48.34 %)
$i=2$	63.4 (29.72 %)	60.0 (29.88 %)	44.4 (30.66 %)	40.0 (30.93 %)
$i=3$	55.0 (25.79 %)	50.8 (25.30 %)	32.0 (22.10 %)	26.8 (20.73 %)

Tabla 4.1: (p,q)–bisemivalores para cada jugador i y para distintos valores de p y q

Si $q = p$ obtenemos los bisemivalores p–binomiales. La Figura 4.1 muestra el valor de los bisemivalores p–binomiales para cada jugador i y la Tabla 4.2 muestra los bisemivalores p–binomiales para cada jugador i y para distintos valores de p.

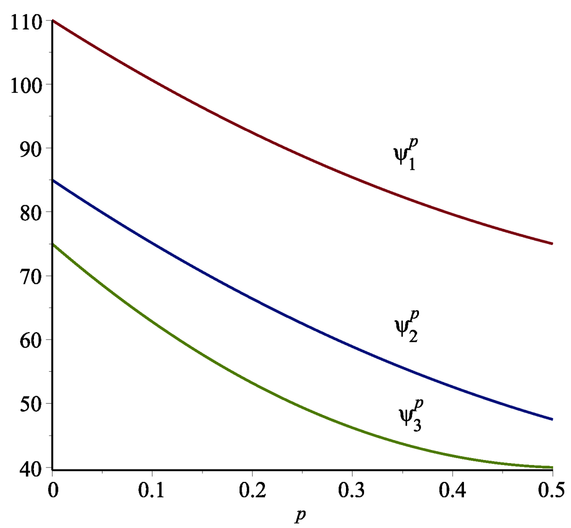


Figura 4.1: bisemivalores p–binomiales para cada jugador i

i	$\psi_i^p[b]$	$\psi_i^{0.1}[b]$	$\psi_i^{1/3}[b]$ (Banzhaf)	$\psi_i^{0.4}[b]$
1	$60p^2-100p+110$	100.6 (42.18 %)	83.3333 (45.18 %)	79.6 (45.75 %)
2	$60p^2-105p+85$	75.1 (31.49 %)	56.6667 (30.72 %)	52.6 (30.23 %)
3	$130p^2-135p+75$	62.8 (26.33 %)	44.4445 (24.10 %)	41.8 (24.02 %)

Tabla 4.2: bisemivalores p–binomiales para cada jugador i y para distintos valores de p

Observando la Figura 4.1, vemos que $\psi_1^p[v] \geq \psi_2^p[v] \geq \psi_3^p[v]$ para todo $p \in [0,1/2]$ y la asignación máxima y mínima recibida por los tres jugadores, $\psi_i^p[v]$, $i = 1,2,3$, se da para $p = 0$ y $p = 1/2$, respectivamente. La proporción entre las asignaciones recibidas por los jugadores varía de manera significativa, como se muestra en el Tabla 4.2 para los valores $p = 0.1$, $1/3$ y 0.4.

4.6.2. Método para calcular los bisemivalores

En la sección anterior hemos dado un método basado en el concepto de la extensión multilineal de un juego bicooperativo b para calcular la asignación a cada jugador debida a un (p,q)–bisemivalor en general y a un bisemivalor p–binomial en particular. Además, si $p = \frac{1}{3}$ obtenemos las asignaciones del bisemivalor de Banzhaf para cada jugador.

En esta sección vamos más allá y presentamos un método para calcular la asignación que recibe cada jugador mediante un bisemivalor a partir de la extensión multilineal del juego.

Para ello tendremos en cuenta la expresión de la extensión multilineal de los juegos de identidad vista en la Observación 4.6.2 y el resultado introducido en el Lema 4.1.5.

En el siguiente teorema proporcionamos el citado método.

Teorema 4.6.6 *Sea $b \in \mathcal{BG}_N$ y ψ un bisemivalor definido sobre $\mathcal{BG}_N$ con coeficientes de ponderación $p_{s,t}$ y $q_{s,t}$, $s,t = 0,1,\ldots,n-1$. El siguiente procedimiento nos permite calcular la asignación que recibe un jugador $i \in N$ mediante el bisemivalor ψ.*

1. *Calculamos la extensión multilineal $f(X,Y)$ del juego b.*

2. *Para cada $i \in N$, definimos una nueva función multilineal que llamaremos f^i multiplicando cada producto*

$$\prod_{i\in S} x_i \prod_{j\in T} y_j \prod_{k\in N\setminus(S\cup T)} (1 - x_k - y_k)$$

por el coeficiente $p_{s-1,t}$ si $i \in S$; por $-q_{s,t-1}$ si $i \in T$ y por $(q_{s,t} - p_{s,t})$ si $i \in N \setminus (S \cup T)$.

3. *Evaluamos f^i en el punto de coordenadas $(\mathbf{1}_S, \mathbf{1}_T)$, donde*

$$\mathbf{1}_S = \begin{cases} 1 & si\ j \in S \\ 0 & si\ j \in N \setminus (S \cup T) \end{cases} \quad y \quad \mathbf{1}_T = \begin{cases} 1 & si\ j \in T \\ 0 & si\ j \in N \setminus (S \cup T) \end{cases}$$

para cada $j \in N$ resultando

$$\psi_i[b] = f^i(\mathbf{1}_S, \mathbf{1}_T).$$

Demostración: En el paso 1 vemos que la extensión multilineal del juego bicooperativo b es una combinación lineal de las extensiones multilineales de los juegos de identidad.

En el paso 2 ponderamos cada juego de identidad según el Lema 4.1.5.

En el paso 3 obtenemos $\psi_i[b]$ evaluando cada función f^i en el punto de coordenadas $(\mathbf{1}_S, \mathbf{1}_T)$. $\square$

Para ilustrar este cálculo presentamos otro ejemplo de juego bicooperativo. Las asignaciones a los diferentes jugadores serán analizadas utilizando bisemivalores que serán calculados utilizando la técnica de la extensión multilineal dada en el Teorema 4.6.6.

Ejemplo 4.6.7 La compañía *Navigator* tiene 3 inversores. El capital que tiene depositado cada uno de ellos en la compañía es de 2, 4 y 6 millones de euros respectivamente. La compañía está estudiando un nuevo proyecto donde, por cada millón invertido, se recibirán 1,5 millones. La compañía *Navigator* necesita conocer las intenciones de actuación de sus inversores frente al nuevo proyecto.

Si $N = \{1,2,3\}$ representa al conjunto de inversores, podemos definir el juego bicooperativo $b(S,T)$ que representa el beneficio de la empresa cuando los jugadores de la coalición S están de acuerdo en invertir su capital en el proyecto y los jugadores de la coalición T no están de acuerdo con el proyecto y retiran su capital de la empresa ya que tienen alguna alternativa que les resulta más atractiva. Finalmente, la abstención significa que el inversor no invierte en el proyecto, pero no retira su capital de la compañía.

En esta situación, b es el juego bicooperativo definido por

$$\begin{array}{lll}
b(\{1,2,3\},\emptyset) = 6, & b(\emptyset,\emptyset) = 0, & b(\emptyset,\{1,2,3\}) = -12, \\
b(\{1,3\},\emptyset) = 4, & b(\{2,3\},\emptyset) = 5, & b(\{1,2\},\emptyset) = 3, \\
b(\{1,3\},\{2\}) = 0, & b(\{2,3\},\{1\}) = 3, & b(\{1,2\},\{3\}) = -3, \\
b(\{3\},\emptyset) = 3, & b(\{2\},\emptyset) = 2, & b(\{1\},\emptyset) = 1, \\
b(\{3\},\{1\}) = 1, & b(\{3\},\{2\}) = -1, & b(\{2\},\{1\}) = 0, \\
b(\{2\},\{3\}) = -4, & b(\{1\},\{2\}) = -3, & b(\{1\},\{3\}) = -5, \\
b(\{3\},\{1,2\}) = -3, & b(\{2\},\{1,3\}) = -6, & b(\{1\},\{2,3\}) = -9, \\
b(\emptyset,\{1\}) = -2, & b(\emptyset,\{2\}) = -4, & b(\emptyset,\{3\}) = -6, \\
b(\emptyset,\{2,3\}) = -10, & b(\emptyset,\{1,3\}) = -8, & b(\emptyset,\{1,2\}) = -6.
\end{array}$$

Partiendo de la Definición 4.6.1, la extensión multilineal del juego b es

$$\begin{aligned}
f(X,Y) =& 6x_1x_2x_3 + 4x_1x_3(1-x_2-y_2) + 3x_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2) + x_3y_1(1-x_2-y_2) - \\
& 4x_2y_3(1-x_1-y_1) - 3x_3y_1y_2 - 2y_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3) - 10y_2y_3(1-x_1-y_1) + \\
& 5x_2x_3(1-x_1-y_1) + 3x_2x_3y_1 + 2x_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3) - x_3y_2(1-x_1-y_1) - \\
& 3x_1y_2(1-x_3-y_3) - 6x_2y_1y_3 - 4y_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3) - 8y_1y_3(1-x_2-y_2) - \\
& 12y_1y_2y_3 + 3x_1x_2(1-x_3-y_3) - 3x_1x_2y_3 + x_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3) - \\
& 5x_1y_3(1-x_2-y_2) - 9x_1y_2y_3 - 6y_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2) - 6y_1y_2(1-x_3-y_3)
\end{aligned}$$

Calcularemos $\psi[b]$, donde ψ es un bisemivalor definido en $\mathcal{BG}_N$ con coeficientes de ponderación $p_{s,t}$ y $q_{s,t}$, $s,t = 0,1,2$.

Aplicando el paso 2 del Teorema 4.6.6 obtenemos una nueva función multilineal f^i, para cada jugador $i = 1,2,3$.

$$
\begin{aligned}
f^1(X,Y) =&6p_{2,0}x_1x_2x_3+4p_{1,0}x_1x_3(1-x_2-y_2)+3(q_{1,0}-p_{1,0})x_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2)-\\
&q_{1,0}x_3y_1(1-x_2-y_2)-4(q_{1,1}-p_{1,1})x_2y_3(1-x_1-y_1)+3q_{1,1}x_3y_1y_2+\\
&2q_{0,0}y_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3)-10(q_{0,2}-p_{0,2})y_2y_3(1-x_1-y_1)+5(q_{2,0}-\\
&p_{2,0})x_2x_3(1-x_1-y_1)-3q_{2,0}x_2x_3y_1+2(q_{1,0}-p_{1,0})x_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3)-\\
&(q_{1,1}-p_{1,1})x_3y_2(1-x_1-y_1)-3p_{0,1}x_1y_2(1-x_3-y_3)+6q_{1,1}x_2y_1y_3-4(q_{0,1}-\\
&p_{0,1})y_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3)+8q_{0,1}y_1y_3(1-x_2-y_2)+12q_{0,2}y_1y_2y_3+\\
&3p_{1,0}x_1x_2(1-x_3-y_3)-3p_{1,1}x_1x_2y_3+p_{0,0}x_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3)-\\
&5p_{0,1}x_1y_3(1-x_2-y_2)-9p_{0,2}x_1y_2y_3-6(q_{0,1}-p_{0,1})y_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2)+\\
&6q_{0,1}y_1y_2(1-x_3-y_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^2(X,Y) =&6p_{2,0}x_1x_2x_3+4(q_{2,0}-p_{2,0})x_1x_3(1-x_2-y_2)+3(q_{1,0}-p_{1,0})x_3(1-x_1-y_1)(1-x_2\\
&-y_2)+(q_{1,1}-p_{1,1})x_3y_1(1-x_2-y_2)-4p_{0,1}x_2y_3(1-x_1-y_1)+3q_{1,1}x_3y_1y_2-\\
&2(q_{0,1}-p_{0,1})y_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3)+10q_{0,1}y_2y_3(1-x_1-y_1)+\\
&5p_{1,0}x_2x_3(1-x_1-y_1)+3p_{1,1}x_2x_3y_1+2p_{0,0}x_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3)+\\
&q_{1,0}x_3y_2(1-x_1-y_1)+3q_{1,0}x_1y_2(1-x_3-y_3)-6p_{0,2}x_2y_1y_3+\\
&4q_{0,0}y_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3)-8(q_{0,2}-p_{0,2})y_1y_3(1-x_2-y_2)+\\
&12q_{0,2}y_1y_2y_3+3p_{1,0}x_1x_2(1-x_3-y_3)-3p_{1,1}x_1x_2y_3+(q_{1,0}-p_{1,0})x_1(1-x_2-\\
&y_2)(1-x_3-y_3)-5(q_{1,1}-p_{1,1})x_1y_3(1-x_2-y_2)+9q_{1,1}x_1y_2y_3-6(q_{0,1}-p_{0,1})+\\
&y_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2)+6q_{0,1}y_1y_2(1-x_3-y_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^3(X,Y) =&6p_{2,0}x_1x_2x_3+4p_{1,0}x_1x_3(1-x_2-y_2)+3p_{0,0}x_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2)+p_{0,1}x_3y_1(1-x_2\\
&-y_2)+4q_{1,0}x_2y_3(1-x_1-y_1)-3p_{0,2}x_3y_1y_2-2(q_{0,1}-p_{0,1})y_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3)+\\
&10q_{0,1}y_2y_3(1-x_1-y_1)+5p_{1,0}x_2x_3(1-x_1-y_1)+3p_{1,1}x_2x_3y_1+2(q_{1,0}-p_{1,0})x_2(1-x_1-\\
&y_1)(1-x_3-y_3)-p_{0,1})x_3y_2(1-x_1-y_1)-3(q_{1,1}-p_{1,1})x_1y_2(1-x_3-y_3)+6q_{1,1}x_2y_1y_3\\
&-4(q_{0,1}-p_{0,1})y_2(1-x_1-y_1)(1-x_3-y_3)+8q_{0,1}y_1y_3(1-x_2-y_2)+12q_{0,2}y_1y_2y_3\\
&+3(q_{2,0}-p_{2,0})x_1x_2(1-x_3-y_3)+3q_{2,0}x_1x_2y_3+(q_{1,0}-p_{1,0})x_1(1-x_2-y_2)(1-x_3-y_3)+\\
&5q_{1,0}x_1y_3(1-x_2-y_2)+9q_{1,1}x_1y_2y_3+6q_{0,0}y_3(1-x_1-y_1)(1-x_2-y_2)-\\
&6(q_{0,2}-p_{0,2})y_1y_2(1-x_3-y_3)
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicando el paso 3 obtenemos las asignaciones debidas al bisemivalor ψ.

$$\psi_1[b] = p_{0,0}+2p_{1,0}+2p_{0,1}+p_{2,0}+2p_{1,1}+p_{0,2}+2q_{0,0}+4q_{1,0}+4q_{0,1}+2q_{2,0}+4q_{1,1}+2q_{0,2},$$
$$\psi_2[b] = 2p_{0,0}+4p_{1,0}+4p_{0,1}+2p_{2,0}+4p_{1,1}+2p_{0,2}+4q_{0,0}+8q_{1,0}+8q_{0,1}+4q_{2,0}+8q_{1,1}+4q_{0,2},$$
$$\psi_3[b] = 3p_{0,0}+6p_{1,0}+6p_{0,1}+3p_{2,0}+6p_{1,1}+3p_{0,2}+6q_{0,0}+12q_{1,0}+12q_{0,1}+6q_{2,0}+12q_{1,1}+6q_{0,2}.$$

- Para el caso particular del bisemivalor de Banzhaf β, cuyos coeficientes de ponderación son $p_{s,t} = q_{s,t} = \frac{1}{9}$, para $s = 0,1,2$, obtenemos:

$$\beta_1[b] = 3,$$
$$\beta_2[b] = 6,$$
$$\beta_3[b] = 8.$$

- Para el caso particular del bisemivalor de Shapley φ, cuyos coeficientes de ponderación son

$$p_{s,t} = \frac{(3+s-t)!\,(3+t-s-1)!}{(6)!}\,2^{3-s-t} \quad \text{y}$$

$$q_{s,t} = \frac{(3+t-s)!\,(3+s-t-1)!}{(6)!}\,2^{3-s-t},$$

para $s = 0,1,2$, obtenemos:

$$\varphi_1[b] = 3,$$
$$\varphi_2[b] = 6,$$
$$\varphi_3[b] = 9.$$

Observamos que se cumple $\sum_{i\in N} \varphi_i[b] = b(N,\emptyset) - b(\emptyset,N) = 18.$

4.7. Cálculo del bisemivalor de Shapley mediante la extensión multilineal generalizada

En esta sección, presentamos una nueva representación de la extensión multilineal de un juego bicooperativo que amplía la introducida en la sección anterior, a fin de proporcionar un mètodo para obtener las asignaciones a los jugadores debidas al bisemivalor de Shapley, que recuerda al dado por Owen [53] en el caso cooperativo.

Para definir esta nueva representación, primero identificaremos cada par de coaliciones $(S,T) \in 3^N$ con los vectores (X,Y,Z) de $\mathbb{R}^{3n}$ tales que $X = (x_1,\ldots,x_n)$, $Y = (y_1,\ldots,y_n)$, $Z = (z_1,\ldots,z_n)$ donde

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{y} \quad z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in N \setminus (S \cup T) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por ejemplo, si tenemos tres jugadores, $N = \{1,2,3\}$, el par de coaliciones $(\{1,3\},\{2\})$ y $(\{1,2\},\emptyset)$ se identifican con los vectores

$$(X,Y,Z) = (1,0,1,0,1,0,0,0,0) \text{ y } (X,Y,Z) = (1,1,0,0,0,0,0,0,1)$$

respectivamente.

Introducimos ahora el concepto de extensión multilineal generalizada de un juego bicooperativo de la siguiente forma:

Definición 4.7.1 *La extensión multilineal generalizada de un juego $b \in \mathcal{BG}_N$ es la función real definida sobre $\mathbb{R}^{3n}$ por*

$$f(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^N} \left[\prod_{i\in S} x_i \prod_{j\in T} y_j \prod_{k\in N\setminus(S\cup T)} z_k \right] b(S,T). \tag{4.7}$$

donde $X = (x_1,\ldots,x_n)$, $Y = (y_1,\ldots,y_n)$, $Z = (z_1,\ldots,z_n) \in [0,1]^n$.

Es fácil comprobar que f coincide con b donde b está definido.

Lema 4.7.2 *Sean $p_{s,t}$, $q_{s,t}$, $s,t = 0,...,n-1$ los coeficientes de ponderación asociados al bisemivalor de Shapley definido en la sección 1.2.2.1. Entonces, podemos calcular dichos coeficientes de la siguiente manera:*

$$p_{s,t} = 2^n \int_0^1 p^n (1-p)^{n-1} \left(\frac{p}{2(1-p)}\right)^s \left(\frac{1-p}{2p}\right)^t dp$$

$$q_{s,t} = 2^n \int_0^1 p^n (1-p)^{n-1} \left(\frac{1-p}{2p}\right)^s \left(\frac{p}{2(1-p)}\right)^t dp.$$

Demostración: Teniendo en cuenta que

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

y

$$\Gamma(a) = (a-1)!, \text{ si } a \in \mathbb{N},$$

podemos escribir el coeficiente de ponderación $p_{s,t}$ en términos de la función Γ como

$$p_{s,t} = \frac{(n+s-t)!\,(n+t-s-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t} = 2^{n-s-t} \frac{\Gamma(n+s-t+1)\Gamma(n+t-s)}{\Gamma(2n+1)}.$$

Así pues,

$$p_{s,t} = 2^{n-s-t}\,\beta(n+s-t+1, n+t-s) = 2^{n-s-t} \int_0^1 p^{n+s-t}(1-p)^{n+t-s-1}\,dp$$

$$= 2^n \int_0^1 p^n (1-p)^{n-1} \left(\frac{p}{2(1-p)}\right)^s \left(\frac{1-p}{2p}\right)^t dp$$

De forma análoga, podemos expresar el coeficiente de ponderación $q_{s,t}$,

$$q_{s,t} = \frac{(n+t-s)!\,(n+s-t-1)!}{(2n)!} 2^{n-s-t} = 2^{n-s-t} \frac{\Gamma(n+t-s+1)\Gamma(n+s-t)}{\Gamma(2n+1)}$$

$$= 2^{n-s-t}\,\beta(n+t-s+1, n+s-t) = 2^{n-s-t}\int_0^1 p^{n+t-s}(1-p)^{n+s-t-1}\,dp$$

$$= 2^n \int_0^1 p^n(1-p)^{n-1}\left(\frac{1-p}{2p}\right)^s\left(\frac{p}{2(1-p)}\right)^t dp \qquad \square$$

Veamos a continuación, como podemos calcular las asignaciones debidas al bisemivalor de Shapley a partir de la extensión multilineal generalizada del juego bicooperativo.

Proposición 4.7.3 *Si* φ *es el bisemivalor de Shapley y* f *es la extensión multilineal generalizada del juego* $b \in \mathcal{BG}_N$ *entonces, para todo jugador* $i \in N$ *tenemos*

$$\varphi_i[b] = 2^n \int_0^1 p^n(1-p)^{n-1}\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i}\Big)\Big(\frac{P}{2(1-P)}, \frac{1-P}{2P}, \mathbf{1}\Big) + \Big(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big)\Big(\frac{1-P}{2P}, \frac{P}{2(1-P)}, \mathbf{1}\Big)\Big]\,dp,$$

donde

$$\frac{P}{2(1-P)} = \left(\frac{p}{2(1-p)}, \overset{n}{\ldots}, \frac{p}{2(1-p)}\right),$$

$$\frac{1-P}{2P} = \left(\frac{1-p}{2p}, \overset{n}{\ldots}, \frac{1-p}{2p}\right) \quad y \quad \mathbf{1} = (1, \overset{n}{\ldots}, 1).$$

Demostración: Partiendo de la Definición 4.7.1 y calculando las derivadas parciales de f respecto a x_i, y_i y z_i obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} z_l\right] b(S\cup\{i\}, T),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} z_l\right] b(S, T\cup\{i\}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} z_l\right] b(S, T).$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X,Y,Z) - \frac{\partial f}{\partial z_i}(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} z_l\right] [b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)] \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(X,Y,Z) - \frac{\partial f}{\partial y_i}(X,Y,Z) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} \left[\prod_{j\in S} x_j \prod_{k\in T} y_k \prod_{l\in N\setminus(S\cup T\cup\{i\})} z_l\right] [b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})] \tag{4.9}$$

Finalmente, si integramos entre 0 y 1 la expresión obtenida al evaluar (4.8) en el punto $\left(\frac{P}{2(1-P)}, \frac{1-P}{2P}, \mathbf{1}\right)$ y (4.9) en el punto $\left(\frac{1-P}{2P}, \frac{P}{2(1-P)}, \mathbf{1}\right)$, y sumando estos dos resultados multiplicados por $2^n p^n (1-p)^{n-1}$, utilizando el Lema 4.7.2, obtenemos el bisemivalor de Shapley $\varphi_i[b]$. $\square$

Para ilustrar el cálculo de las asignaciones a los diferentes jugadores correspondientes al bisemivalor de Shapley, retomamos el ejemplo de juego bicooperativo introducido en el capítulo 1 que también hemos usado en la sección anterior.

Ejemplo 4.7.4 (Ejemplo 1.2.1) Dos compañías de seguros, A_1 y A_2, compiten siempre para conseguir el máximo número de clientes en una región determinada. Si N representa el conjunto de agentes de seguros, cada uno de ellos con una cartera propia de clientes, podemos definir el juego bicooperativo $b(S,T)$ como el beneficio de la compañía A_1 cuando los jugadores de S trabajan para A_1, los jugadores de T trabajan para A_2 y los jugadores de $N \setminus (S \cup T)$ no trabajan para A_1 ni para A_2.

Consideramos el conjunto $N = \{1,2,3\}$ representando el conjunto de agentes de seguros y asumimos que los jugadores 1 y 3 son los agentes con una cartera con un mayor y menor nùmero de clientes respectivamente. Si un agente se va de la compañía A_1, puede incorporarse a la compañía A_2 y llevarse toda la cartera de clientes o parte de ella con él o, por el contrario, incorporarse a otro tipo de compañía que no sea una aseguradora, retirarse, ... El perjuicio para la compañía A_1 es mayor o superior en el primer caso que en el segundo.

El juego b definido por

$$\begin{array}{lll}
b(\{1,2,3\},\emptyset)=100, & b(\emptyset,\emptyset)=0, & b(\emptyset,\{1,2,3\})=-60,\\
b(\{1,3\},\emptyset)=85, & b(\{2,3\},\emptyset)=75, & b(\{1,2\},\emptyset)=90,\\
b(\{1,3\},\{2\})=50, & b(\{2,3\},\{1\})=20, & b(\{1,2\},\{3\})=60,\\
b(\{3\},\emptyset)=65, & b(\{2\},\emptyset)=70, & b(\{1\},\emptyset)=80,\\
b(\{3\},\{1\})=5, & b(\{3\},\{2\})=15, & b(\{2\},\{1\})=10,\\
b(\{2\},\{3\})=35, & b(\{1\},\{2\})=40, & b(\{1\},\{3\})=50,\\
b(\{3\},\{1,2\})=-25, & b(\{2\},\{1,3\})=-20, & b(\{1\},\{2,3\})=5,\\
b(\emptyset,\{1\})=-30, & b(\emptyset,\{2\})=-15, & b(\emptyset,\{3\})=-10,\\
b(\emptyset,\{2,3\})=-30, & b(\emptyset,\{1,3\})=-40, & b(\emptyset,\{1,2\})=-50.
\end{array}$$

recoge la situación planteada en este ejemplo.

Considerando la Definición 4.7.1, la extensión multilineal generalizada del juego bicooperativo b es,

$$\begin{aligned}
f(X,Y,Z) =\, & 100x_1x_2x_3+85x_1x_3z_2+50x_1x_3y_2+65x_3z_1z_2+5x_3y_1z_2+35x_2y_3z_1-\\
& 25x_3y_1y_2-30y_1z_2z_3-30y_2y_3z_1+75x_2x_3z_1+20x_2x_3y_1+70x_2z_1z_3+\\
& 15x_3y_2z_1+40x_1y_2z_3-20x_2y_1y_3-15y_2z_1z_3-40y_1y_3z_2-60y_1y_2y_3+\\
& 90x_1x_2z_3+60x_1x_2y_3+80x_1z_2z_3+10x_2y_1z_3+50x_1y_3z_2+5x_1y_2y_3-\\
& 10y_3z_1z_2-50y_1y_2z_3
\end{aligned}$$

Calculamos el bisemivalor de Shapley utilizando la técnica de la extensión multilineal generalizada para cada jugador i:

$$\begin{aligned}
\varphi_1[b] &= 2^3\int_0^1 p^3(1-p)^2\left[\frac{5}{4}\,\frac{12p^4+14p^3-55p^2+22p+18}{p^2(p-1)^2}\right]dp,\\
\varphi_2[b] &= 2^3\int_0^1 p^3(1-p)^2\left[\frac{5}{4}\,\frac{12p^4+14p^3-56p^2+26p+11}{p^2(p-1)^2}\right]dp,\\
\varphi_3[b] &= 2^3\int_0^1 p^3(1-p)^2\left[\frac{5}{4}\,\frac{26p^4-28p^3-13p^2+8p+11}{p^2(p-1)^2}\right]dp.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\varphi_1[b] = 73.83,$$
$$\varphi_2[b] = 49.67,$$
$$\varphi_3[b] = 36.50.$$

Observamos que se cumple

$$\sum_{i \in N} \varphi_i[b] = b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N) = 160.$$

Conclusiones

La motivación y uno de los objetivos del trabajo es contribuir, en la medida de lo posible, al desarrollo de la Teoría de Juegos y sus aplicaciones. Los juegos cooperativos con utilidad transferible son excelentes modelos matemáticos con los que analizar situaciones de conflicto y cooperación que surgen en diversos ámbitos sociales y en campos como la electrónica y la fiabilidad de sistemas. En ellos, el término coalición es, formalmente, sinónimo de subconjunto de jugadores y no tiene connotaciones de alianza efectiva entre sus integrantes. Los juegos bicooperativos surgen como una generalización de estos juegos cooperativos clásicos, donde cada agente puede participar en el juego de tres formas distintas: positivamente, negativamente o de forma indiferente.

Además de proporcionar modelos matemáticos descriptivos, la Teoría de Juegos intenta aportar soluciones a dichas situaciones conflictivas. Hay muchos conceptos de solución para los juegos cooperativos y aquí se ha trabajado básicamente con semivalores y valores probabilísticos, poniendo énfasis en los valores probabilísticos multinomiales. No están tan estudiados los conceptos de solución para los juegos bicooperativos, permitiéndonos definir nuevos conceptos de solución para dichos juegos y estudiarlos estableciendo paralelismos entre este campo y el cooperativo.

El enfoque axiomático es una herramienta útil para conocer mejor las soluciones disponibles para un modelo. Este enfoque puede utilizarse para identificar la solución más adecuada a un problema particular eligiendo aquella solución, cuyas propiedades son más adecuadas para el problema planteado. En nuestro caso, caracterizamos los semivalores para juegos cooperativos, los bisemivalores para juegos bicooperativos en general y los bisemivalores de Banzhaf y Shapley en particular.

Además, estudiamos en profundidad el comportamiento de los valores probabilísticos en el caso cooperativo y de los bisemivalores en el bicooperativo, frente a diversas propiedades clásicas de la teoría de valores.

Como ya hemos comentado, esta memoria consta de dos partes: la primera centrada en juegos cooperativos y la segunda en juegos bicooperativos. A continuación pasamos a resumir los principales resultados obtenidos.

El primer capítulo es un compendio de los conceptos y resultados conocidos que constituyen el punto de partida de esta memoria.

El segundo capítulo hace referencia exclusivamente a los semivalores sobre juegos cooperativos. Teniendo en cuenta que un semivalor induce semivalores en cardinalidades inferiores, hemos demostrado que sus coeficientes de ponderación se pueden reconstruir a partir de los últimos coeficientes de ponderación de sus semivalores inducidos. Nos hemos centrado en los últimos coeficientes de ponderación de los semivalores inducidos para establecer condiciones que nos permiten reconstruir los coeficientes de ponderación asociados al semivalor original. Finalmente hemos dado dos caracterizaciones de cada semivalor definido en los juegos con un conjunto finito de jugadores: una, entre todos los semivalores; otra, entre todos los conceptos de solución en juegos cooperativos.

En el tercer capítulo, hemos comparado el comportamiento de los valores probabilísticos en general y, de los valores multinomiales en particular, frente a diversas propiedades clásicas de la teoría de valores y de índices de poder como son las propiedades de: jugador nulo, contribuciones equilibradas, dominación, monotonía, sensibilidad y donación. Hemos definido los conceptos de valor probabilístico hereditario y de valor probabilístico regular para garantizar la validez de algunas de estas propiedades. Hemos caracterizado la clase de los valores regulares dentro de los valores probabilísticos y la clase de las soluciones que satisfacen la propiedad de contribuciones equilibradas dentro de la clase de los valores probabilísticos regulares y regulares hereditarios. Además, hemos estudiado la función potencial para dichos valores. Por último, hemos profundizado en el estudio de los valores multinomiales, estimando cómo afecta una variación de la tendencia a formar coaliciones de un jugador, en el vector de pagos de otro jugador a partir de las derivadas segundas de la extensión multilineal del juego.

El cuarto capítulo está dedicado a los juegos bicooperativos. En primer lugar, hemos definido los bisemivalores para juegos bicooperativos, proporcionando una caracterización por medio de coeficientes de ponderación paralela a la existente para semivalores en el caso cooperativo. Además, hemos estudiado los bisemivalores inducidos sobre el espacio de juegos bicooperativos con un número menor de jugadores obteniendo una fórmula de recurrencia que los relaciona. Hemos definido una subfamilia de los bisemivalores, a la que hemos llamado (p,q)-bisemivalores. En el caso concreto de los (p,q)-bisemivalores, se usan dos parámetros para hacer frente a las diferentes actitudes que los jugadores pueden tener al participar en un determinado juego, de manera que podemos considerar la influencia de la personalidad de los jugadores en el reparto. Hemos demostrado que sus coeficientes de ponderación se encuentran en progresión geométrica, la forma más simple de monotonía.

Posteriormente y siguiendo la misma línea del capítulo tercero, hemos definido una serie de propiedades para los juegos bicooperativos similares a las propiedades clásicas que se encuentran en la literatura para el caso cooperativo como son dominancia, monotonía, sensibilidad, jugador nulo y no nulo, contribuciones equilibradas y formación de un bloque, analizando el comportamiento de los bisemivalores frente a ellas.

También hemos caracterizado axiomáticamente los bisemivalores de Banzhaf y Shapley dando, en ambos casos, un conjunto de propiedades independientes que los determinan unívocamente. Es importante resaltar que la nueva caracterización axiomática del bisemivalor de Banzhaf (con solo tres propiedades, en lugar de las cinco propiedades utilizadas en [12] cuando se caracteriza el índice de poder de Banzhaf sobre el conjunto de los juegos bicooperativos ternarios) no incluye la propiedad del poder total, remplazando esta propiedad y la propiedad estructural, dada en [12], por la propiedad más intuitiva del jugador defensor necesario. En el caso del bisemivalor de Shapley, la caracterización axiomática (con cinco propiedades, como en [9]), es el resultado de eliminar las propiedades estructural y del jugador títere, dadas en [9] y, como en el caso del bisemivalor de Banzhaf, introducir dos propiedades más intuitivas: las propiedades del valor medio ponderado para el jugador defensor necesario y el jugador detractor necesario.

Posteriormente, hemos introducido el concepto de extensión multilineal de un juego bicooperativo de forma similar al caso cooperativo, proporcionando un procedimiento de cálculo en términos de la extensión multilineal del juego para determinar la asignación que recibe cada jugador mediante un (p,q)-bisemivalor en particular y otro para los bisemivalores en general. Finalmente, hemos definido el concepto de extensión multilineal generalizada de un juego bicooperativo, proponiendo un procedimiento que nos permite calcular las asignaciones otorgadas por el bisemivalor de Shapley, basado en ella.

A lo largo de este trabajo se han presentado diferentes ejemplos y se han aplicado sobre ellos los conceptos y las técnicas que se han introducido previamente con la finalidad de mostrar su adecuación para la resolución de las situaciones que se han descrito.

Como posibles derivaciones de esta memoria podrían citarse las siguientes líneas de trabajo:

- Analizar con detalle la relación de los coeficientes de ponderación de un bisemivalor y los bisemivalores inducidos en cardinalidades inferiores, realizando un estudio similar al del capítulo 2 para semivalores en el contexto cooperativo.
- Axiomatización y/o caracterización de diferentes tipos de bisemivalores.
- Determinación de un potencial para soluciones definidas sobre juegos bicooperativos.

Bibliografía

[1] Alonso-Mejide, J.M., Costa J. and García-Jurado, I. [2019]: "Null, Nullifying and Necessary Agents: Parallel Characterizations of the Banzhaf and Shapley values." *Journal of Optimization Theory and Applications* 180, 1027–1035.

[2] Amer, R. and Giménez, J.M. [2003]: "Modification of semivalues for games with coalition structures." *Theory and Decision* 54, 185–205.

[3] Amer, R. and Giménez, J.M. [2006]: "An axiomatic characterization for regular semivalues." *Mathematical Social Sciences* 51, 217–226.

[4] Amer, R., Derks J. and Giménez, J.M. [2003]: "On cooperative games, inseparable by semivalues." *International Journal of Game Theory* 32, 181–188.

[5] Amer, R., Giménez, J.M. and Magaña A.[2013]: "Reconstructing a simple game from uniparametric family of allocations." *TOP* 21, 505–523.

[6] Banzhaf, J.F. [1965]: "Weigthed voting doesn't work: A mathematical analysis." *Rutgers Law Review* 19, 317–343.

[7] Bernardi, G. and Lucchetti, R. [2015]: "Generating Semivalues via Unanimity Games " *Journal of Optimization Theory and Applications* 166(3), 1051–1062.

[8] Bilbao, J.M. [2000]: "Cooperation games on combinatorial structures " *Kluwer Academic Publishers*, Boston.

[9] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jimenez, N. and López, JJ. [2008]: "The Shapley value for bicooperative games" *Annals of Operations Research* 158, 99–115.

[10] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jimenez, N. and López, JJ. [2007]: "The core and the Weber set for bicooperative games" *International Journal of Game Theory* 36, 209–222.

[11] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jimenez, N. and López, JJ. [2008]: "Biprobabilistic values for bicooperative games" *Discrete Applied Mathematics* 156, 2698–2711.

[12] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jimenez, N. and López, JJ. [2010]: "The Banzhaf power index for ternary bicooperative games" *Discrete Applied Mathematics* 158, 967–980.

[13] Bilbao, J.M., Jimenez, N. and López, JJ. [2010]: "The selectope for bicooperative games" *European Journal of Operations Research* 204, 522–532.

[14] Bolger, E. M. [1993]: "A value for games with *n* playerts and *r* alternatives" *International Journal of Game Theory* 22, 319–334.

[15] Bolger, E. M. [2000]: "A consistent value for games with *n* playerts and *r* alternatives" *International Journal of Game Theory* 29, 93–99.

[16] Borkotokey, S. and Sarmah, P. [2012]: "Bicooperative games with fuzzy bicoalictions." *Fuzzy Sets Systems* 198, 46–58.

[17] Borkotokey, S., Kumar, R ans Sarangi, S. [2014]: " Bi-cooperative Games : Applications in Management and a Simple Solution", Book Chapter, Applications of Game Theory, Ed. R. K. Mishra, Shaheen, J. Raveendran, S. Deman, 51–65, Academic Foundation Pub.

[18] Carreras, F. [2004]: "α–decisiveness in simple games." *Theory and Decision* 56, 77–91. Also in: Essays on Cooperative Games (G. Gambarelli, ed.), Kluwer Academic Publishers, 77–91.

[19] Carreras, F. [2005]: “A decisiveness index for simple games.” *European Journal of Operational Research* 163, 370–387.

[20] Carreras, F. and Freixas, J. [1999]: Some theoretical reasons for using (regular) semivalues. In: Logic, Game Theory and Social Choice (H. de Swart, ed.), Tilburg University Press, 140-ï¿154.

[21] Carreras, F. and Freixas, J. [2002]: “Semivalue versatility and applications.” *Annals of Operations Research* 109, 343–358.

[22] Carreras, F., Freixas, J. and Puente, M.A. [2003]: “Semivalues as power indices.” *European Journal of Operational Research* 149, 676–687.

[23] Carreras, F. and Giménez, J.M. [2011]: “Power and potencial maps induced by any semivalue: some algebraic properties and computation by multilinear extensions.” *European Journal of Operational Research* 211, num 1, 148–159.

[24] Carreras, F. and Puente, M.A. [2011]: “Symmetric coalitional binomial semivalues.” *Group Decision and Negotiation* 21, 637–662.

[25] Carreras, F. and Puente, M.A. [2014]: “Multinomial probabilistic values.” *Group Decision and Negotiation*, 24, 981–991.

[26] Carreras, F. and Puente, M.A. [2015]: “Coalitional multinomial probabilistic values.”*European Journal of Operational Research* 245, 236–246.

[27] Carreras, F. and Puente, M.A. [2018]: “A note on multinomial probabilistic values.” *TOP* 26(1), 164–186.

[28] Coleman, J.S. [1971]: “Control of collectivities and the power of a collectivity to act.” In: Social Choice (B. Lieberman, ed.), Gordon and Breach, 269–300.

[29] Derks, J. and Haller, H. [1999]: “Null players out: linear values for games with variable supports.” *Game Theory Review* 1, 301–314.

[30] Dragan, I. [1997]: “Some recursive definitions of the Shapley value and other linear values of cooperative TU games.” Working paper 328, University of Texas at Arlington, United States of America.

[31] Dragan, I. [1999]: “Potential and consistency for semivalues of finite cooperative TU games” *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra* 9, 85–97.

[32] Dubey, P. [1975]: “On the uniqueness of the Shapley value.” *International Journal of Game Theory* 4, 131–139.

[33] Dubey, P., Neyman, A. and Weber, R.J. [1981]: “Value theory without efficiency.” *Mathematics of Operations Research* 6, 122–128.

[34] Feltkamp, V.[1995]: “Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf Values” *International Journal of Game Theory* 24, 179–186.

[35] Felsenthal, D. S. and Machover, M. [1995]: “Postulate and paradoxes of relative voting power –a critical re–appraisal.” *Theory and Decision* 38, 195–229.

[36] Felsenthal, D. and Machover, M. [1997]: “Ternary voting games” *International Journal of Game Theory* 26, 335–351.

[37] Fisher, D. and Schotter, A. [1978]: “The inetability of the paradox of redistribution in the allocation of voting weights.” *Public Choice* 33, 49–67.

[38] Freixas, J. and Puente, M.A. [2002]: “Reliability importance measures of the components in a system based on semivalues and probabilistic values.” *Annals of Operations Research* 109, 331–342.

[39] Freixas, J. [2005]: “The Shapley–Shubik power index for games with several levels of approval in the input and output“, *Decision Support Systems* 39,185–195.

[40] Freixas, J. [2005]: “Banzhaf measures for games with several levels of approval in the input and output“, *Annals of Operations Research* 137, 45–66.

[41] Freixas J., Zwicker W.S.[2003] "Weighted voting, abstention, and multiple levels of approval", *Social Choice and Welfare* 21, 399–431.

[42] Gambarelli, G. [1983]: "Common behaviour of power indices." *International Journal of Game Theory* 12, 237–244.

[43] Giménez, J.M. [2001]: Contribuciones al estudio de soluciones para juegos cooperativos (in Spanish). Ph.D. Thesis. Technical University of Catalonia, Spain.

[44] Giménez J.M., Llongueras, M.D. and Puente, M.A. [2014]: "Partnership formation and multinomial values" *Discrete Applied Mathematics* 170, 7–20.

[45] Grabisch, M. and Labreuche, Ch. [2005]; "Bi-capacities–I: Definition, Möbius transform and interaction", *Fuzzy Sets and Systems* 151, 211–236.

[46] Hart, S. and Mas-Colell, A. [1988]; "The potential of the Shapley value", In: The Shapley value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley (A.E. Roth ed.) Cambridge University Press, 127–137.

[47] Isbell, J.R. [1958]: "A class of simple games." *Duke Mathematics Journal* 25, 423–439.

[48] Labreuche, Ch. and Grabisch, M. [2006]: "Axiomatization of the Shapley value and power index for bicooperative games", Cahiers de la Maison des Sciences Economiques 2006.23 - ISSN 1624-0340. $< halshs - 00113340 >$

[49] Labreuche, Ch. and Grabisch, M. [2008]: "A value for bi-cooperative games" *International Journal of Game Theory* 37, 409–438.

[50] Myerson, R. B. [1977]: "Graphs and cooperation games." *Mathematics of Operations Research* 2 (3), 225–229.

[51] Myerson, R. B. [1980]: "Conference structures and fair allocation rules." *J. Game Theory* 9 (3), 169–182.

[52] O'Neill, B. [1982]: "A problem of rights arbitration from the Talmud." *Mathematical Social Sciences* 2, 345–371.

[53] Owen, G. [1972]: “Multilinear extensions of games.” *Management Science* 18, 64–79.

[54] Owen, G. [1975]: “Multilinear extensions and the Banzhaf value.” *Naval Research Logistics Quarterly* 22, 741–750.

[55] Owen, G. [1978]: “Characterization of the Banzhaf–Coleman index.” *SIAM Journal of Applied Mathematics* 35, 315–327.

[56] Puente, M.A. [2000]: Aportaciones a la representabilidad de juegos simples y al cálculo de soluciones de esta clase de juegos.Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.

[57] Schotter, A. [1981]: “The paradox of redistribution: Some theoreticat and empirical results. In: Power, Voting and Voting Power (Holler, M. J. ed.), Würzburg, Physica-Verlag, 324–338.

[58] Shapley, L.S. [1953]: “A value for n-person games.” In: Contributions to the Theory of Games II (H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds.), Princeton University Press, 307–317.

[59] Shapley, L.S. and Shubik, M. [1954]: “A method for evaluating the distribution of power in a committee system.” *American Political Science Review* 48, 787–792.

[60] Weber, R.J. [1988]: “Probabilistic values for games.” In: The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley (A.E. Roth, ed.), Cambridge University Press, 101–119.

[61] Young, H.P. [1985]: “Monotonic solutions of cooperative games.” *International Journal of Game Theory* 14, 65–72.