UNIVERSITAT DE BARCELONA

Sobre la profundidad de los anillos graduados asociados a una filtración

Teresa Cortadellas Benítez

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Departament d'Àlgebra i Geometria

SOBRE LA PROFUNDIDAD DE LOS ANILLOS GRADUADOS ASOCIADOS A UNA FILTRACIÓN

Teresa Cortadellas Benítez

Departament d'Àlgebra i Geometria.

Programa de doctorat d'Àlgebra i Geometria, Bienni 1991-1993.

Doctoranda: Teresa Cortadellas Benítez.

Tutor: José María Giral Silió.

Director de Tesi: Santiago Zarzuela Armengou.

Santiago Zarzuela Armengou, professor titular del Departament d'Àlgebra i Geometria de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona

CERTIFICA

que la present memòria ha estat realitzada sota la seva direcció per Teresa Cortadellas Benítez, i que constitueix la tesi d'aquesta per aspirar al grau de Doctora en Matemàtiques.

Barcelona, octubre de 1997.

Signat: Santiago Zarzuela Armengou.

Índice General

Introducción

Entenderemos por anillos *blowup* cierto tipo de anillos graduados asociados a filtraciones de un anillo conmutativo A. Los anillos *blowup* aparecen a menudo en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica. Expondremos a continuación algunas de las aplicaciones de estos anillos en diversos problemas y que han motivado el estudio de sus propiedades.

Destacan entre ellos los anillos *blowup* asociados a un ideal I ya que el anillo $R_A(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n$ supone una realización algebraica de la noción clásica de explosión de una variedad a lo largo de una subvariedad. Concretamente, si $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema afín e $Y = V(I)$ es un subesquema cerrado de X, entonces

$$\mathbf{Proj}(R_A(I)) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(A)$$

es la explosión de X con centro Y. El morfismo estructural π es un isomorfismo fuera de $\pi^{-1}(V(I)) = \mathbf{Proj}(G_A(I))$, donde $G_A(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$. Nos referiremos a los anillos $R_A(I)$ (el anillo de Rees) y $G_A(I)$ (el anillo graduado asociado) como anillos *blowup*.

Estas transformaciones juegan un papel importante en el estudio de variedades algebraicas y particularmente en el estudio de singularidades. Para centros generales (ideales arbitrarios) poco se conoce del morfismo explosión $\mathbf{Proj}(R_A(I)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, excepto que es propio y birracional [Ha]. El estudio de estos morfismos supone describir como dependen de las propiedades de $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = V(I)$ y de la inmersión $Y \subset X$. Entre las aplicaciones de este tipo de transformaciones destacan los resultados de Zariski e Hironaka para la desingularización de variedades de característica cero. En el caso de superficies Zariski considera centros regulares Y tales que X es equimúltiple a lo largo de Y; estos centros permisibles se corresponden algebraicamente con ideales I equimúltiples tales que A/I es regular. Hironaka, para el caso general, refina la condición de equimultiplicidad por la de X normalmente plano a lo largo de Y. Así, algebraicamente, la condición de equimúltiple es sustituida en el caso de Hironaka por la de ideales normalmente planos, es decir, tales que I^n/I^{n+1} son planos sobre A/I para todo $n \geq 0$ (o, equivalentemente, $G_A(I)$ es un módulo libre sobre A/I). Una motivación geométrica para el estudio de la propiedad Cohen-Macaulay de los anillos *blowup* es relacionar entre sí estas distintas nociones de centros permisibles. En [HIO] se ofrece un estudio detallado de todas ellas que permite deducir las siguientes relaciones entre las mismas: sea A un anillo local. Si I es normalmente plano entonces I es equimúltiple. Por otra parte, si A/I es regular y $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay entonces equimúltiple implica normalmente plano.

En el estudio de singularidades aparecen también anillos *blowup* asociados a filtraciones no ádicas. Tomari y Watanabe en [TW] presentan una teoría de *blowup* de filtraciones generales de un anillo local $(A, \mathfrak{m})$ que permite conocer propiedades e invariantes de $(A, \mathfrak{m})$ en el contexto de singularidades. Esencialmente, su método consiste en "aproximar" el anillo A por un anillo graduado $G_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$ asociado a una filtración de A (en general no ádica) y ver como buenas propiedades aritméticas del anillo $G_A(\mathcal{I})$ se traducen en buenas propiedades geométricas de A. Entre las aplicaciones de la teoria que desarrollan destaca el estudio de las singularidades normales 2-dimensionales.

Otra de las aplicaciones de los anillos *blowup* es la construcción de contraejemplos al Problema 14 de Hilbert. En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en 1900 en Paris, Hilbert propuso, entre otros, el siguiente problema: sea S el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un cuerpo K y sea F un subcuerpo del cuerpo de fracciones de S conteniendo K. Entonces, ¿es el anillo $S \cap F$ finito generado sobre K?. En 1954 Zariski [Za] planteó el siguiente problema que generaliza el de Hilbert: sea F un cuerpo finito generado sobre un cuerpo K. Sea S una K-álgebra finito generada íntegra y normal con cuerpo de fracciones F' conteniendo F. Entonces, ¿es el anillo $S \cap F$ finito generado sobre K?. Los anillos *blowup* de filtraciones simbólicas aparecen en este contexto y permiten encontrar contraejemplos.

Sean A un dominio noetheriano e I un ideal de A. Denotaremos por $I^{(n)}$ a la intersección de las componentes primarias minimales de I^n (n-ésima potencia simbólica de I). Entonces $(I^{(n)})_{n\geq 0}$ define una filtración de ideales de A y denotaremos por $R_s(I) = \oplus_{n\geq 0} I^{(n)}t^n$ a su anillo de Rees (anillo de Rees simbólico). Si A es un anillo verificando la condición de Serre S_2, entonces el anillo $R_s(I)$ es el anillo de funciones regulares de un abierto de $\mathrm{Spec}(R_A(I))$ definido por el complementario de $V(f,g)$ para ciertos $f,g \in A$. Rees [Re1] ofrece el siguiente argumento para encontrar el primer contraejemplo al problema de Zariski: sean A un dominio noetheriano e I un ideal de A y consideremos T_1 una indeterminada sobre $R_A(I)$ y T_2 tal que $fT_1 + gT_2 = 1$; entonces, $R_A(I)[T_1, T_2] \cap L = R_s(I)$ (donde L es el cuerpo de fracciones de $R_A(I)$). Además, Rees construye un ideal primo P en el anillo de coordenadas homogéneas de una curva proyectiva de género ≥ 1 tal que $R_s(P)$ no es noetheriano. Posteriormente, diversos autores como Nagata [Na2], Roberts [Ro] y Goto, Nishida y Watanabe [GNW] construyen ideales I con $R_s(I)$ no noetheriano.

Sea I un ideal de A. Un elemento $a \in A$ es íntegro sobre I si satisface una ecuación del tipo
$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad \text{con } a_i \in I^i.$$
El conjunto de elementos íntegros sobre I es un ideal que denotaremos por $\overline{I}$. Entonces, $(\overline{I^n})_{n\geq 0}$ define una filtración de ideales de A y el anillo de Rees de esta filtración, que denotaremos por $\overline{R}_A(I) = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n} t^n$, es la clausura entera de $R_A(I)$ en $A[t]$. A menudo nos referiremos al anillo $\overline{R}_A(I)$ como anillo de Rees normalizado de I. Se dice que I es íntegramente cerrado si $I = \overline{I}$ y que I es normal si $I^n = \overline{I^n}$ para todo $n \geq 0$. Es bien conocido el siguiente resultado de Zariski (ver [ZS]): si A es un anillo local regular 2-dimensional (más en general, si A es una singularidad racional 2-dimensional [Li1]), entonces todo ideal íntegramente cerrado es normal. Este resultado no es cierto en dimensiones superiores y demostrar este hecho supone una motivación para el estudio de los anillos *blowup* asociados a la filtración de las clausuras enteras de las potencias de un ideal.

Sean A un anillo noetheriano e I un ideal de A. Ratliff y Rush definen en [RR] la siguiente clausura de I:
$$\widetilde{I} = \bigcup_{k\geq 1} (I^{k+1} : I^k).$$
Geométricamente, si I contiene una sucesión A-regular de longitud 2 y $Z = \mathbf{Proj}(R_A(I))$

tenemos que $\Gamma(Z, O_Z(n)) = \widetilde{I^n}$ (ver [HHK]). Si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local e I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, entonces $\widetilde{I}$ es el ideal mas grande que contiene I con su mismo polinomio de Hilbert. La sucesión de ideales $(\widetilde{I^n})_{n\geq 0}$ define una filtración de A. El estudio de los anillos *blowup* de estas filtraciones permite obtener información sobre la función de Hilbert de los anillos *blowup* asociados a I (ver, por ejemplo, los trabajos de Huneke [Hun2], Itoh [It3] , Sally [Sa3], Blancafort [Bl] y Hoa [Ho]).

Además, buenas propiedades aritméticas de los anillos *blowup* asociados a un ideal nos aseguran un buen comportamiento de sus funciones de Hilbert y viceversa. En particular, buenas propiedades del anillo *blowup* $F_{\mathfrak{m}}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ nos ofrecen resultados acerca del mínimo número de generadores de las potencias de un ideal. Notemos que geométricamente, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es la fibra del morfismo explosión en el maximal $\mathfrak{m}$.

Lo anterior supone una pequeña ilustración de las múltiples ocasiones en que aparecen los anillos *blowup* y de porque es interesante el estudio de sus propiedades aritméticas.

En esta memoria estudiaremos principalmente la profundidad, y en particular la propiedad Cohen-Macaulay de los anillos y módulos *blowup* noetherianos asociados a filtraciones generales de un anillo local $(A, \mathfrak{m})$ de dimensión d. Diversos autores se han dedicado al estudio de tal propiedad en el caso de filtraciones ádicas y en los últimos años el número de trabajos en esta dirección ha sido muy alto. Podemos destacar esencialmente dos tipos de resultados. Por una parte, los que relacionan la propiedad Cohen-Macaulay de A, $G_A(I)$ y $R_A(I)$ y, por otra, resultados positivos acerca de la propiedad Cohen-Macaulay de los mismos. Un tercer tipo de resultados sería el estudio de la propiedad Cohen-Macaulay de $F_{\mathfrak{m}}(I)$, pero los resultados conocidos en este sentido son escasos.

Es bien conocido que imponer que los anillos *blowup* sean lo más sencillos posible, por ejemplo anillos de polinomios, implica fuertes condiciones sobre el ideal. Los siguientes resultados sirven de muestra:

(i) I está generado por una sucesión regular de longitud n si y solo si $G_A(I)$ es isomorfo al anillo de polinomios $A/I[X_1, \ldots, X_n]$.

(ii) I está generado por una familia de elementos analíticamente independiente en I de longitud n si y solo si el anillo $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es isomorfo al anillo de polinomios $A/\mathfrak{m}[X_1, \ldots, X_n]$.

Sin embargo los ideales I con anillos $G_A(I)$ y $R_A(I)$ Cohen-Macaulay son muy diversos. Son bien conocidos, entre otros, los resultados siguientes:

Supongamos que I está generado por una A-sucesión regular y que A es Cohen-Macaulay. Entonces Barshay demuestra en [Ba] que el anillo $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay. Además, se pregunta si se obtiene el mismo resultado para potencias de tales ideales. El propio Barshay demuestra en el mismo artículo que la respuesta es afirmativa si I está generado por una sucesión regular de longitud 2. Valla en [Va] cierra el problema demostrando que si A es Cohen-Macaulay e I está generado por una sucesión A-regular (de longitud arbitraria) entonces los anillos $R_A(I^n)$ son Cohen-Macaulay para todo $n \geq 1$.

Supongamos que I está generado por una d-sucesión $a_1, \ldots, a_k$ (la noción de d-sucesión generaliza la de sucesión regular y fue introducida por Huneke en [Hun1]). Si A es Cohen-Macaulay entonces Herzog, Simis y Vasconcelos (ver [HSV1] y [HSV2]) desarrollan una teoría de complejos de aproximación que les permite caracterizar la propiedad Cohen-Macaulay de $G_A(I)$ en función de cotas sobre las profundidades de los módulos de homología del complejo de Koszul de A a coeficientes en $a_1, \ldots, a_k$.

Supongamos que I es un ideal casi intersección completa. Si además A es Cohen-Macaulay e I es genericamente intersección completa, Brodmann en [Br] calcula las profundidades de $R_A(I)$ y $G_A(I)$ en función de la profundidad de A/I y en particular caracteriza cuando estos anillos son Cohen-Macaulay.

Uno de los métodos que permite estudiar ideales con anillos *blowup* Cohen-Macaulay involucra la noción de reducción de un ideal introducida por Northcott y Rees [NR] (y utilizada por ellos para el estudio de las funciones de Hilbert). Un ideal $J \subseteq I$ es una reducción de I si existe un entero r tal que $I^{r+1} = JI^r$, equivalentemente si $R_A(J) \hookrightarrow R_A(I)$ es un morfismo finito de anillos graduados (o equivalentemente si $\overline{J} = \overline{I}$). La relación entre un ideal y una reducción del mismo permiten obtener información de los anillos *blowup* asociados a I a través de la de los anillos *blowup* asociados a J. Se define el número de reducción de I respecto una reducción J como el mínimo entero r tal que $I^{r+1} = JI^r$. Se demuestra que si $A/\mathfrak{m}$ es infinito existen reducciones minimales, es decir, que no contienen ninguna otra reducción propia de I y se define el número de reducción de I (que denotaremos por $r(I)$) como el mínimo de los números de reducción de I respecto sus reducciones minimales.

Este método permite estudiar la propiedad Cohen-Macaulay de $G_A(I)$ para ideales con desviación analítica y número de reducción pequeños. Supongamos que A es Cohen-Macaulay. Sally demuestra en [Sa1] que si $r(\mathfrak{m}) \leq 2$, entonces $G_A(\mathfrak{m})$ es Cohen-Macaulay. Para ideales I equimúltiples, Ikeda y Trung demuestran en [TI] que si $r(I) = 1$, entonces el anillo $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente lo es el anillo A/I. En [HH1] y [HH2], Huckaba y Huneke ofrecen condiciones suficientes para que el anillo $G_A(I)$ sea Cohen-Macaulay para ideales I con desviación analítica 1 o 2 y número de reducción menor o igual que 1. Posteriormente, se han obtenido diversas generalizaciones de estos resultados, siempre bajo la condición I genericamente intersección completa, como son los obtenidos en [GN1], [GN2], [Ab], [AH], [JU], [Ul2], [Ul3]. En [GNN], Goto, Nakamura y Nishida unifican estos resultados dando una única lista de condiciones suficientes que aseguran que $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay. Una herramienta importante en la demostración de este tipo de resultados es la aplicación de un resultado de Valabrega y Valla [VV, Corollary 2.7], al cual nos referiremos como criterio de Valabrega-Valla, que caracteriza cuando una sucesión de formas iniciales de elementos de A es regular en $G_A(I)$.

En cuanto a aquellos resultados que giran entorno a las relaciones entre la propiedad Cohen-Macaulay de los anillos A, $G_A(I)$ y $R_A(I)$ recordamos los siguientes resultados:

es bien conocido que si $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay entonces A es Cohen-Macaulay y que sin embargo, el recíproco no es cierto.

Goto y Shimoda en [GS] demuestran que si A es Cohen-Macaulay e I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, entonces $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay y $r(I) \leq d-1$.

Supongamos que I es un ideal equimúltiple. Entonces, Grothe, Herrmann y Orbanz en [GHO] ofrecen un resultado que relaciona la propiedad Cohen-Macaulay de $G_A(I)$ y

$G_A(I+(x_1,\ldots,x_r))$ via la propiedad A normalmente Cohen-Macaulay a lo largo de I, donde $x_1,\ldots,x_r$ es un sistema de parámetros módulo I. Ésto, les permite generalizar el resultado de [GS] a ideales equimúltiples. Concretamente, demuestran que si I es un ideal equimúltiple en un anillo A Cohen-Macaulay entonces, $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay y $r(I) \leq \mathrm{ht}\,(I) - 1$.

Por otra parte, Ikeda y Trung en [TI] extienden un resultado previo de Ikeda [Ik] a ideales arbitrarios que permite caracterizar la propiedad Cohen-Macaulay de $R_A(I)$ en función de los módulos de cohomologia local de $G_A(I)$ y A. Este resultado particulariza en el caso A Cohen-Macaulay al siguiente: $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay y $a(G_A(I)) < 0$, donde $a(G_A(I))$ es un invariante cohomológico de $G_A(I)$.

Por tanto, si $G_A(I)$ es un anillo Cohen-Macaulay el cálculo de $a(G_A(I))$ determina la propiedad Cohen-Macaulay de $R_A(I)$. Bajo esta condición, Herrmann, Ribbe y Zarzuela notan en [HRZ] que si I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario entonces $a(G_A(I)) = r(I) - \mathrm{ht}\,(I)$ y posteriormente, Trung en [Tr1] generaliza este resultado para ideales equimúltiples. Ribbe [Ri] demuestra que si I es casi intersección completa entonces $a(G_A(I)) = -\mathrm{ht}\,(I)$. Goto y Huckaba en [GH] calculan este invariante para ideales I genéricamente intersección completa con desviación analítica uno y $r(I) > 0$, demostrando que $a(G_A(I)) = r(I) - \mathrm{ht}\,(I) - 1$. En [HRZ] se calcula también $a(G_A(I))$ para ideales I fuertemente Cohen-Macaulay obteniendo en este caso que $a(G_A(I)) = -\mathrm{ht}\,(I)$. Para ideales con desviación analítica arbitraria existen resultados que determinan el a-invariante de $G_A(I)$ si I verifica ciertas condiciones (ver, por ejemplo, [Ta], [SUV]).

Los resultados de Aberbach, Huneke y Trung [AHT], Johnston y Katz en [JK] y Ulrich en [Ul1] en los cuales se determina el invariante $a(G_A(I))$ en función de números de reducción y desviación analítica permiten recuperar los resultados anteriores.

Existen también resultados que relacionan las profundidades de los anillos A, $G_A(I)$ y $R_A(I)$. En este sentido Huckaba y Marley demuestran en [HM1] las desigualdades $\mathrm{depth} G_A(I) \leq \mathrm{depth} A$, $\mathrm{depth} G_A(I) \leq \mathrm{depth} R_A(I)$ y que $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} G_A(I) + 1$ si $\mathrm{depth} G_A(I) < \mathrm{depth} A$ o bien cierto invariante cohomológico $a_{\mathrm{depth} G_A(I)}(G_A(I))$ es negativo. Posteriormente, Marley en [Ma] obtiene resultados análogos para los grados de un ideal homogéneo conteniendo $R_A(I)_+(1)$ respectivamente en los anillos A, $G_A(I)$

y $R_A(I)$.

Los resultados que obtenemos en esta memoria pueden clasificarse en tres tipos:

– **Relaciones entre los grados de los distintos anillos y módulos** *blowup*.

– **Estudio de la profundidad de los anillos** *blowup* **asociados a un ideal** I **con desviación analítica pequeña.**

– **Estudio de la propiedad Cohen-Macaulay del cono de la fibra.**

Fijaremos a continuación las notaciones necesarias para ofrecer un resumen de los resultados obtenidos.

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Dada una filtración de ideales $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ de A (es decir, una sucesión decreciente de ideales $A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n \ldots$ verificando $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$) consideraremos los anillos graduados *blowup* asociados a $\mathcal{I}$:

$R_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n t^n \subseteq A[t]$, el anillo de Rees de A respecto $\mathcal{I}$,
$G_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$, el anillo graduado de A respecto $\mathcal{I}$ o anillo de formas de $\mathcal{I}$,
$F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/\mathfrak{m}I_n$, el cono de la fibra de A respecto $\mathcal{I}$.

Diremos que $\mathcal{I}$ es una filtración noetheriana si su anillo de Rees $R_A(\mathcal{I})$ es noetheriano.

Sea E un A-módulo y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ (donde $E =: E_0$) una filtración de módulos $\mathcal{I}$-compatible (es decir, tal que $I_n E_m \subseteq E_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$). Podemos entonces considerar los siguientes módulos respectivamente sobre los anillos $R_A(\mathcal{I})$, $G_A(\mathcal{I})$ y $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$

$$R(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n t^n,$$
$$G(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n/E_{n+1},$$
$$F_{\mathfrak{m}}(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n/\mathfrak{m}E_n,$$

a los cuales nos referiremos en general como módulos *blowup* asociados a $\mathbf{E}$ respecto $\mathcal{I}$. En este trabajo los anillos y módulos *blowup* se supondrán siempre noetherianos.

En el **Capítulo 1** introduciremos los conceptos y notaciones necesarios para el desarrollo de la memoria. Para el estudio de la propiedad Cohen-Macaulay de los anillos *blowup* asociados a un ideal I hemos destacado tres resultados: el criterio de Valabrega-Valla [VV, Corollary 2.7] que caracteriza cuando una sucesión de formas iniciales de elementos de A es regular en $G_A(I)$, el resultado de Ikeda y Trung [TI, Theorem 1.1] que caracteriza la propiedad Cohen-Macaulay de $R_A(I)$ en función de los módulos de cohomologia local de A y $G_A(I)$, y el cálculo del a-invariante de $G_A(I)$ cuando éste es Cohen-Macaulay, resultado este último probado independientemente por Aberbach, Huneke y Trung [AHT], Johnston y Katz [JK] y Ulrich [Ul1]. En el caso general de filtraciones de ideales noetherianas se pueden obtener resultados análogos a los anteriores. En este sentido, en la última sección del **Capítulo 1**, presentamos un resultado de Viet [Vi] que generaliza a filtraciones de ideales el correspondiente resultado ádico de [TI] y ofrecemos la versión correspondiente del criterio de Valabrega-Valla y del cálculo del a-invariante. Para la demostración de estas versiones generales podemos seguir esencialmente la misma línea que en las originales pero algunos de los argumentos utilizados en el caso ádico requieren un refinamiento en el caso general. (Notemos por ejemplo que a diferencia del caso ádico el álgebra de Rees de una filtración de ideales no está necesariamente generada por elementos de grado uno.) Ofreceremos con detalle la demostración de la versión general del criterio de Valabrega-Valla ya que ésta será aplicada a lo largo del trabajo.

Una de las principales técnicas utilizadas para determinar el grado de un ideal homogéneo respecto un módulo graduado es el estudio de la anulación de sus módulos de cohomologia local. En el **Capítulo 2** veremos como los morfismos de conexión entre los módulos *blowup*

$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+ \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+(1) \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow G(\mathbf{E}) \longrightarrow 0$$

y la graduación de sus módulos de cohomologia local nos permiten relacionar los grados de E, $G_A(\mathbf{E})$ y $R_A(\mathbf{E})$. El principal resultado que obtenemos es el siguiente:

Teorema *Sea J un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ conteniendo $R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Entonces*

(i) $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \mathrm{depth}_J R(\mathbf{E})$.

(ii) $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \mathrm{depth}_{J\cap A} E$, *y*

si $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) < \mathrm{depth}_{J\cap A} E$ *entonces* $\mathrm{depth}_J R(\mathbf{E}) = \mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) + 1$.

Además, para $J = \mathcal{M}$ el ideal maximal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ tenemos que

(iii) si $a_{\mathrm{depth}G(\mathbf{E})}(G(\mathbf{E})) < 0$ *entonces* $\mathrm{depth}R(\mathbf{E}) \geq \mathrm{depth}G(\mathbf{E}) + 1$.

Estos resultados generalizan los obtenidos por Huckaba y Marley y Marley respectivamente en [HM1] y [Ma] para filtraciones ádicas. Estas fórmulas nos permitirán por ejemplo obtener información sobre la profundidad del módulo canónico del anillo de formas de una filtración noetheriana. Podemos también emplear las fórmulas que nos ofrece el teorema principal para relacionar la condición de Serre de los módulos E, $R(\mathbf{E})$ y $G(\mathbf{E})$. Para filtraciones de módulos E Cohen-Macaulay podremos determinar la propiedad Cohen-Macaulay de $R(\mathbf{E})$ en función de la propiedad Cohen-Macaulay de $G(\mathbf{E})$ y del invariante $a(G(\mathbf{E}))$, generalizando así el resultado de Ikeda y Trung en [TI] para filtraciones ádicas.

En el **Capítulo 3** consideraremos ideales I de anillos A Cohen-Macaulay. Nuestro principal objetivo es determinar la profundidad del anillo $G_A(I)$ en función de la profundidad de los anillos A/I^n en la línea de los resultados ya conocidos ([TI], [Br], [HH1], [HH2], [Zar], [GNi]).

Los principales resultados que obtenemos aquí son los siguientes.

Teorema *Si I es un ideal equimúltiple con $r(I) \leq 1$ entonces*

$$\mathrm{depth}G_A(I) = \mathrm{depth}A/I + \mathrm{ht}\,(I).$$

En particular, recuperamos el resultado de [TI] donde se obtiene que $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si A/I es Cohen-Macaulay.

Teorema *Si I es un ideal equimúltiple íntegramente cerrado con $r(I) \leq 2$ entonces*

$$\begin{gathered}\min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) - 1 \leq \\ \operatorname{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I).\end{gathered}$$

Además,

(i) si $\operatorname{depth} A/I^2 < \operatorname{depth} A/I$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I^2 + \operatorname{ht}(I)$, *y*

(ii) si $\operatorname{depth} A/I < \operatorname{depth} A/I^2$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{ht}(I) - 1$.

Para el caso de desviación analítica uno obtenemos.

Teorema *Si I es un ideal puro genericamente intersección completa con* $\operatorname{ad}(I) = 1$ *y* $r(I) \leq 2$ *entonces*

$$\begin{gathered}\min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) \leq \\ \operatorname{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) + 1.\end{gathered}$$

Además,

(i) si $\operatorname{depth} A/I^2 < \operatorname{depth} A/I$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I^2 + \operatorname{ht}(I) + 1$, *y*

(ii) si $\operatorname{depth} A/I < \operatorname{depth} A/I^2$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{ht}(I)$ *si* $\operatorname{ht}(I) > 0$ *y* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I$ *si* $\operatorname{ht}(I) = 0$ *y* $\operatorname{depth} A/I < d - 1$.

En particular, recuperamos el resultado de Goto y Nakamura en [GN1] en el cual se demuestra bajo la hipótesis A/I Cohen-Macaulay que $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $\operatorname{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 1$.

Mediante estos resultados podemos también obtener fórmulas para la profundidad del anillo de Rees de I y de los anillos graduados asociados a potencias de I.

Los dos últimos capítulos están dedicados al estudio de la profundidad del cono de la fibra. Si I es un ideal generado por una familia de elementos analíticamente independiente, entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es isomorfo al anillo de polinomios a coeficientes en $A/\mathfrak{m}$ y $\mu(I)$ variables y por tanto es Cohen-Macaulay. Shah demuestra en [Sh] que si J es una reducción minimal de I generada por una sucesión regular verificando las condiciones $I^3 = JI^2$, $I^2 \cap J = JI$ y $\mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$, entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. El principal resultado que obtenemos en el **Capítulo 4** es una extensión del resultado de Shah para filtraciones $\mathbf{E}$ de módulos $\mathcal{I}$-compatibles. (Si a es un elemento de I_1 denotaremos por a^* y a^0 respectivamente a sus imágenes en I_1/I_2 y $I_1/\mathfrak{m}I_1$).

Teorema *Sean $a_1, \ldots, a_k$ elementos de I_1 tal que*

(i) $a_1, \ldots, a_k$ es una sucesión regular en E.

(ii) $(a_1, \ldots, a_k)E \cap E_{n+1} = (a_1, \ldots, a_k)E_n$ para todo $n \geq 0$.

Entonces:

$a_1^0, \ldots, a_k^0$ es una $F_{\mathfrak{m}}(\mathbf{E})$-sucesión regular $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{m}E_{n+1} \cap (a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_k)\mathfrak{m}E_n$ para todo $n \geq 0$.

Para demostrar este resultado utilizaremos ciertos complejos de Koszul modificados que permiten obtener una versión del criterio de Valabrega-Valla para los módulos $G(\mathbf{E})$. Estos complejos han sido construidos de diversas maneras por diferentes autores, como Kirby y Mehran [KM], Marley [Ma], Guerrieri [Gue] y Huckaba y Marley [HM2] y utilizados por los mismos para el estudio de la función de Hilbert y la profundidad de los anillos $G_A(\mathcal{I})$. Aquí adaptaremos la construcción de [KM] a nuestra situación.

En el **Capítulo 5** estudiamos el cono de la fibra en el caso de filtraciones buenas de ideales. Esta clase de filtraciones noetherianas verifican $I_{n+1} = I_1 I_n$ para n suficientemente grande e incluyen, entre otras, las filtraciones ádicas, las filtraciones de las clausuras enteras de las potencias de un ideal y las filtraciones de clausuras Ratliff-Rush de las potencias de un ideal. Una de las ventajas que ofrecen este tipo de filtraciones es que permiten definir (como en el caso ádico) una filtración "reducción" de las mismas.

El teorema principal del capítulo anterior junto con el criterio de Valabrega-Valla nos permiten formular lo siguiente:

Teorema *Sean $\mathcal{I}$ una filtración buena de ideales y $J = (a_1, \ldots, a_s)$ una reducción minimal de $\mathcal{I}$ con $a_1, \ldots, a_s$ sistema minimal de generadores de J. Supongamos que $a_1^*, \ldots, a_s^*$ es una $G_A(\mathcal{I})$-sucesión regular. Entonces son equivalentes*

(i) $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ *es Cohen-Macaulay*

(ii) $\mathfrak{m}I_{n+1} \cap J = J\mathfrak{m}I_n$ *para todo* $n \leq r_J(\mathcal{I})$.

Aplicaremos especialmente este resultado al cono de la fibra de un ideal (es decir para $\mathcal{I}$ filtración ádica) y al cono de la fibra normalizado de un ideal (es decir para $\mathcal{I}$ filtración de las clausuras enteras de la potencias de un ideal).

Podremos entonces determinar la propiedad Cohen-Macaulay de $F_{\mathfrak{m}}(I)$ para ciertos tipos de ideales. Por ejemplo, si I es un ideal equimúltiple con $r(I) \leq 1$ o bien I es genéricamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 1$ entonces el anillo $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay.

Daremos también un criterio para determinar cuando el cono de la fibra (respectivamente el cono de la fibra normalizado) de un ideal $\mathfrak{m}$-primario con segundo coeficiente de Hilbert (respectivamente el segundo coeficiente de Hilbert normalizado) igual a uno es Cohen-Macaulay. Esto nos permitirá caracterizar las singularidades racionales o elípticas 2-dimensionales cuyo cono de la fibra normalizado es Cohen-Macaulay.

Finalmente, probaremos el siguiente comportamiento de la función de Hilbert del cono de la fibra cuando éste es Cohen-Macaulay.

Teorema *Sean J una reducción minimal de $\mathcal{I}$, $r = r_J(\mathcal{I})$ y $s = s(\mathcal{I})$. Si $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay entonces*

$$\begin{aligned}\mu(I_n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{r}(\mu(I_i) - \mathrm{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1} \cap \mathfrak{m}I_i))\binom{n+s-i-1}{s-1} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(I_i) - \mathrm{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1} \cap \mathfrak{m}I_i))\binom{n+s-i-1}{s-1}.\end{aligned}$$

Este resultado generaliza otro de Shah [Sh] a filtraciones buenas. Obtendremos entonces expresiones "agradables " para el mínimo número de generadores de las potencias de un ideal I (respectivamente de las clausuras enteras de las potencias de un ideal I) si el anillo $F_{\mathfrak{m}}(I)$ (respectivamente $\overline{F}_{\mathfrak{m}}(I)$) es Cohen-Macaulay.

Parte de los resultados que aparecen en esta memoria se encuentran en las siguientes publicaciones:

- T. Cortadellas, *Depth Formulas for the Rees Algebras of Filtrations*, Comm. Algebra, **24**(2) (1996), 705–716.

- T. Cortadellas, S. Zarzuela, *On the Depth of the Fiber Cone of Filtrations*, que aparecerá en J. Algebra.

- T. Cortadellas, S. Zarzuela, *On the Cohen-Macaulay property of the fiber cone of ideals with reduction number at most one*, que aparecerá en los Proceedings de la International Conference de Hanoi sobre Algebra, Geometry and Computer Algebra.

Vull ara expressar el meu agraïment a totes aquelles persones que han fet possible la realització d'aquest treball.

En primer lloc, al meu director de tesi, el professor Santiago Zarzuela Armengou, per les seves idees, ajut i dedicació.

Al meu tutor, el professor José María Giral, per tot el que he aprés d'ell.

A tots els companys del Departament d'Àlgebra i Geometria i del Seminari d'Àlgebra Commutativa pel seu recolzament. I, molt especialment als meus companys de despatx, la Montse i el Jordi, per tantes estones agradables.

Als meus amics per ser al meu costat. Als meus alumnes.

Finalment, i de manera molt especial als meus pares i als meus germans, Montse i Nando, per tantes raons. I a tú Oscar per tot.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos conceptos y notaciones utilizados a lo largo del presente trabajo. Los resultados que aparecen sin demostración o referencia explícita pueden encontrarse, entre otros, en los libros [BH] y [HIO]. Todos los anillos se suponen conmutativos y unitarios.

Un anillo graduado S es un anillo con una descomposición $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ como $\mathbb{Z}$-módulo tal que

$$S_n S_m \subseteq S_{n+m}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Un S-módulo graduado M es un S-módulo con una descomposición $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ como $\mathbb{Z}$-módulo tal que

$$S_n M_m \subseteq M_{n+m}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

M_n se denomina la n-ésima componente homogénea de M. Los elementos de M_n se llaman elementos homogéneos de grado n. Un ideal de S se dice que es homogéneo si es un S-módulo graduado.

El siguiente resultado permite caracterizar los anillos graduados noetherianos. Sea S un anillo graduado. Entonces son equivalentes:

(i) S es un anillo noetheriano.

(ii) Todo ideal homogéneo de S es finito generado.

(iii) S_0 es un anillo noetheriano y S es de tipo finito sobre S_0.

(iv) S_0 es un anillo noetheriano y $\bigoplus_{n\geq 0} S_n$, $\bigoplus_{n\geq 0} S_{-n}$ son de tipo finito sobre S_0.

1.1 Cohomología local graduada

Sea S un anillo graduado noetheriano y consideremos la categoría de S-módulos graduados que denotaremos $M^h(S)$. Sean $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ S-módulos graduados. Un morfimo $f : M \longrightarrow N$ en $M^h(S)$ es una aplicación S-lineal tal que $f(M_n) \subseteq N_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $M(n)$ es el S-módulo graduado cuya graduación viene definida por $M(n)_m = M_{n+m}$, denotamos por $\underline{\mathrm{Hom}}_S(M,N)_n$ el grupo abeliano de morfismos en $M^h(S)$ de M en $N(n)$. Sea $\underline{\mathrm{Hom}}_S(M,N) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \underline{\mathrm{Hom}}_S(M,N)_n$. $\underline{\mathrm{Hom}}_S(M,N)$ es un S-módulo graduado, que coincide con $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ si M es un S-módulo graduado finito generado.

Puede verse fácilmente que un S-módulo graduado I es inyectivo (respectivamente proyectivo) en $M^h(S)$ si el functor $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\,\cdot\,,I) : M^h(S) \longrightarrow M^h(S)$ es exacto (respectivamente si el functor $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I,\,\cdot) : M^h(S) \longrightarrow M^h(S)$ es exacto). Notemos que un S-módulo graduado I inyectivo en $M^h(S)$ puede no ser inyectivo como S-módulo (ver por ejemplo [HIO, (33.7) Example]). $M^h(S)$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Todo S-módulo graduado libre es proyectivo en $M^h(S)$ y todo S-módulo graduado es cociente de un S-módulo graduado libre, por tanto $M^h(S)$ tiene suficientes proyectivos. Denotaremos los functores derivados por la derecha de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(M,\,\cdot\,)$ por $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(M,\,\cdot\,)$ (respectivamente a los functores derivados de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\,\cdot\,,N)$ por $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(\,\cdot\,,N)$).

Sean M, N S-módulos graduados. Entonces, como en el caso no graduado, podemos calcular $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(M,N)$ mediante una resolución projectiva de M. Como S es noetheriano, si M es un S-módulo graduado finito generado, tenemos una resolución de M por S-módulos graduados finito generados. Así, $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^i_S(M,N)$ para todo $i \geq 0$.

Sean M un S-módulo graduado y J un ideal homogéneo de S. Definimos el i-ésimo módulo de cohomología local graduada de M respecto J como

$$\underline{H}^i_J(M) := \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^i_S(S/J^n, M).$$

Como S/J^n es un S-módulo finito generado para todo $n > 0$, de lo anterior se deduce que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(S/J^n, M) = \mathrm{Ext}^i_S(S/J^n, M)$. Por lo tanto

$$\underline{H}^i_J(M) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_S(S/J^n, M) =: H^i_J(M).$$

Es decir, $\underline{H}^i_J(M)$ y $H^i_J(M)$ coinciden como S-módulos. A partir de ahora para todo S-módulo graduado M e ideal homogéneo J, denotaremos $\underline{H}^i_J(M)$ por $H^i_J(M)$, sin olvidarnos por ello de su graduación.

Consideremos ahora el S-submódulo graduado de M

$$\Gamma_J(M) = \{x \in M \mid J^n x = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\} = \bigcup_{n>0} (0 :_M J^n).$$

Obtenemos entonces un functor aditivo, covariante, exacto por la izquierda

$$\Gamma_J(\,.\,) : M^h(S) \longrightarrow M^h(S).$$

Comprobando que los functores $H^i_J(\,\cdot\,)$ verifican las propiedades características de los functores derivados $R^i\Gamma_J(\,\cdot\,)$, es decir:

(i) Si I es un modulo inyectivo en $M^h(S)$, entonces $H^i_J(I) = 0$ para todo $i > 0$.

(ii) Para toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ en $M^h(S)$ tenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow H^0_J(M') \longrightarrow H^0_J(M) \longrightarrow H^0_J(M'') \longrightarrow H^1_J(M') \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H^i_J(M') \longrightarrow H^i_J(M) \longrightarrow H^i_J(M'') \longrightarrow H^{i+1}_J(M') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

se obtiene que los functores de cohomología local $H^i_J(\,\cdot\,)$ son equivalentes a los functores derivados $R^i\Gamma_J(\,\cdot\,)$.

Sea $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ un anillo graduado noetheriano con $(S_0, \mathfrak{m}_0)$ un anillo local. Denotaremos $S_+ := \bigoplus_{n>0} S_n$ al *ideal irrelevante* de S y $\mathcal{M} := \mathfrak{m}_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \cdots$ al *ideal maximal homogéneo* de S.

Consideremos el siguiente resultado general: sea $A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos plano. Sea I un ideal de A y T un A-módulo. Entonces tenemos isomorfismos

$$H^i_I(T) \otimes_A B \simeq H^i_{IB}(T \otimes B).$$

Sean M un S-módulo graduado y J un ideal homogéneo de S. Sea $\widehat{S}_0$ la completación $\mathfrak{m}_0$-ádica de S_0 y $\widehat{M} := M \otimes_{S_0} \widehat{S}_0$. Por el resultado anterior obtenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} H^i_J(M) \otimes_S S_{\mathcal{M}} &\simeq H^i_{JS_{\mathcal{M}}}(M \otimes_S S_{\mathcal{M}}), \\ H^i_J(M) \otimes_S \widehat{S} &\simeq H^i_{\widehat{J}}(\widehat{M}). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} H^i_J(M) = 0 &\Leftrightarrow H^i_{JS_{\mathcal{M}}}(M \otimes_S S_{\mathcal{M}}) = 0 \\ H^i_J(M) = 0 &\Leftrightarrow H^i_{\widehat{J}}(\widehat{M}) = 0. \end{aligned}$$

ya que $S_{\mathcal{M}}$ y $\widehat{S}$ son S-módulos fielmente planos en la categoría $M^h(S)$.

Si M es un S-módulo graduado finitamente generado y J es un ideal homogéneo de S, se definen los invariantes

$$a_i(J, M) = \sup\{n | [H^i_J(M)]_n \neq 0\}.$$

En particular,

$$\begin{aligned} a_i(M) &:= a_i(\mathcal{M}, M) = \sup\{n | [H^i_{\mathcal{M}}(M)]_n \neq 0\}, \\ \underline{a}_i(M) &:= a_i(S_+, M) = \sup\{n | [H^i_{S_+}(M)]_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Por la propiedad artiniana de los módulos $H^i_{\mathcal{M}}(M)$ tenemos que $a_i(M) < \infty$. Por otra parte es conocido que de un teorema de Serre se deduce que $[H^i_{S_+}(M)]_n = 0$ para $n \gg 0$ (para su demostración ver, por ejemplo, [Ko] o [Bl]), por tanto tenemos también $\underline{a}_i(M) < \infty$. $a_{\dim S}(S)$ se denomina a menudo el *a-invariante de* S y se denota $a(S)$. Se define también la *regularidad de Castelnuovo-Mumford*

$$\operatorname{reg} S = \max\{i + \underline{a}_i(S);\ i \geq 0\}.$$

Decimos que M es finitamente graduado si $M_n = 0$ para $n \gg 0$. Goto y Huckaba [GH, Lema 2.2] demuestran que si M es un S-módulo graduado finitamente generado y finitamente graduado entonces tenemos isomorfismos de S_0-módulos

$$[H^i_{\mathcal{M}}(M)]_n \simeq H^i_{\mathfrak{m}_0}(M_n)$$

para cualesquiera $i, n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Anillos graduados sobre anillos locales

Sea A un anillo noetheriano y T un A-módulo finitamente generado. Recordemos que una sucesión $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de A es una sucesión T-regular si y solamente si satisface las siguientes condiciones: $T \neq (x_1, \ldots, x_n)T$ y x_i no es un divisor de cero en $T/(x_1, \ldots, x_{i-1})T$ para $i = 1, \ldots, n$. Si I es un ideal de A se define entonces $\mathrm{depth}_I T$, el grado de I en T, como la longitud máxima de una sucesión T-regular de elementos en I. El grado de I en A se denota a menudo por $\mathrm{grade}(I)$.

Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Entonces se define la profundidad de T como el grado de $\mathfrak{m}$ en T, que denotaremos por $\mathrm{depth}_A T$. Decimos que T es un A-módulo Cohen-Macaulay (C.M.) si $\dim T = \mathrm{depth}_A T$. Si A es un A-módulo Cohen-Macaulay entonces se dice que A es un anillo Cohen-Macaulay. (Escribiremos $\mathrm{depth}\, T$ en lugar de $\mathrm{depth}_A T$ si ello no induce a confusión.)

El siguiente resultado es conocido como *depth-lemma*: dada una sucesión exacta de A-módulos finito generados

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

entonces

(i) $\mathrm{depth} T' \geq \mathrm{depth} T = \mathrm{depth} T''$, o bien

(ii) $\mathrm{depth} T \geq \mathrm{depth} T' = \mathrm{depth} T'' + 1$, o bien

(iii) $\mathrm{depth} T'' > \mathrm{depth} T = \mathrm{depth} T'$.

Sean A un anillo noetheriano y T un A-módulo finito generado. Decimos que T es un A-módulo Cohen-Macaulay si $T_\mathfrak{m}$ es Cohen-Macaulay como $A_\mathfrak{m}$-módulo para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de A. Se demuestra entonces que son equivalentes:

(i) T es un A-módulo Cohen-Macaulay.

(ii) $T_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{p}$ ideal primo de A.

Decimos que T satisface la *condición de Serre* S_k si

$$\mathrm{depth} T_\mathfrak{p} \geq \min\{k, \dim T_\mathfrak{p}\}$$

para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Sean S un anillo graduado noetheriano sobre un anillo local $(S_0, \mathfrak{m}_0)$ y M un S-módulo graduado finito generado. Se define entonces $\operatorname{depth}_S M := \operatorname{depth}_{\mathcal{M}} M$. Si J es un ideal homogéneo de S se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}_J M &= \inf\{i | H^i_J(M) \neq 0\},\\ \dim M &= \sup\{i | H^i_{\mathcal{M}}(M) \neq 0\}\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}_S M &\leq \dim M,\\ \operatorname{depth}_J M &= \operatorname{depth}_{\hat{J}} \widehat{M},\\ \operatorname{depth}_J M &= \operatorname{depth}_{JS_{\mathcal{M}}}(M \otimes_S S_{\mathcal{M}}), \text{ y}\\ \operatorname{depth}_S M &= \operatorname{depth}_{S_{\mathcal{M}}}(M \otimes_S S_{\mathcal{M}}).\end{aligned}$$

Nota 1.2.1 En particular, si M es un S-módulo finito generado y finitamente graduado, de los isomorfismos $[H^i_{\mathcal{M}}(M)]_n \simeq H^i_{\mathfrak{m}_0}(M_n)$ se deduce inmediatamente que

$$\operatorname{depth}_S M = \min_{n \in \mathbb{Z}}\{\operatorname{depth} M_n\}.$$

Si P es un ideal primo de S se define P^* como el ideal de S generado por todos los elementos homogéneos de P; es decir, P^* es el ideal homogéneo más grande contenido en P. P^* es un ideal primo de S. Sea M un S-módulo finito generado. Entonces, todo ideal primo P de S verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}&P^* \neq P \Rightarrow \dim M_P = \dim M_{P^*} + 1,\\ &P \in \operatorname{Supp}(M) \text{ y } P^* \neq P \Rightarrow \operatorname{depth} M_P = \operatorname{depth} M_{P^*} + 1,\\ &M_P \text{ es Cohen-Macaulay } \Leftrightarrow M_{P^*} \text{ es Cohen-Macaulay.}\end{aligned}$$

Se deduce entonces que son equivalentes:

(i) M es un S-módulo Cohen-Macaulay.

(ii) M_P es un S_P-módulo Cohen-Macaulay para todo P ideal primo homogéneo.

(iii) $M_{\mathcal{M}}$ es un $S_{\mathcal{M}}$-módulo Cohen-Macaulay.

Luego, M es un S-módulo Cohen-Macaulay si y solo si $\operatorname{depth}_S M = \dim M$. O equivalentemente, M es un S-módulo Cohen-Macaulay si y solamente si $H^i_{\mathcal{M}}(M) = 0$ para todo $i < \dim M$.

1.3 Filtraciones

Sea A una anillo de dimensión d.

Una filtración de ideales de A es una sucesión decreciente de ideales de A,

$$I_0 = A \supsetneq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

verificando $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$.

Dada una filtración $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ de A, podemos asociarle los siguientes anillos graduados:

$R_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n t^n \subseteq A[t]$, el anillo de Rees de A respecto $\mathcal{I}$,
$R_A^*(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n t^n \subseteq A[t, t^{-1}]$, el anillo de Rees extendido de A respecto $\mathcal{I}$,
$G_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$, el anillo graduado de A respecto $\mathcal{I}$ o anillo de formas de $\mathcal{I}$,

donde $I_n = A$ para todo $n < 0$.

Tenemos entonces las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow t^{-1}R_A^*(\mathcal{I}) \longrightarrow R_A^*(\mathcal{I}) \longrightarrow G_A(\mathcal{I}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R_A(\mathcal{I})_+ \longrightarrow R_A(\mathcal{I}) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R_A(\mathcal{I})_+(1) \longrightarrow R_A(\mathcal{I}) \longrightarrow G_A(\mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

1.3.1 Filtraciones noetherianas

Una filtración $\mathcal{I}$ de ideales de A se denomina filtración noetheriana si el anillo $R_A(\mathcal{I})$ es noetheriano.

El siguiente resultado nos permite caracterizar las filtraciones noetherianas. Sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración de ideales de A. Entonces son equivalentes:

(i) $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ es una filtración noetheriana.

(ii) A es un anillo noetheriano y $R_A(\mathcal{I})$ es una A-álgebra finito generada.

(iii) A es un anillo noetheriano y existen enteros positivos $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $I_n = \sum_{i=1}^r I_{n-n_i} I_{n_i}$, $\forall n$.

(iv) A es un anillo noetheriano y existe un entero positivo $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_{nk} = (I_k)^n$, $\forall n$.

Notemos que si $\mathcal{I}$ es noetheriana, entonces los anillos A y $G_A(\mathcal{I})$ son noetherianos.

Ejemplo 1.3.1 Sea I un ideal de A; a la filtración $(I^n)_{n\geq 0}$ de A la denominaremos filtración I-ádica de A. Si A es un anillo noetheriano entonces toda filtración I-ádica es noetheriana. En este caso denotamos a los anillos graduados asociados por $R_A(I)$ y $G_A(I)$.

Ejemplo 1.3.2 Sea $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ un anillo graduado noetheriano e $\mathcal{I}'$ la filtración de ideales de S definida por $\mathcal{I}'_n = \bigoplus_{m\geq n} S_m$. Si $S = S_0[a_1, \ldots, a_r]$ con $a_i \in S_{m_i}$ y $m_1 \leq \ldots \leq m_r$ entonces $R_S(\mathcal{I}') = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}'_n t^n = S_0[a_i t^j;\ 1 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq m_r]$, y por tanto $\mathcal{I}'$ es una filtración noetheriana. En particular si $\mathcal{I}$ es una filtración noetheriana de A, $(\bigoplus_{m\geq n} R(\mathcal{I})_m)_{n\geq 0}$ es una filtración noetheriana de $R_A(\mathcal{I})$.

Ejemplo 1.3.3 Sean $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ un ideal primo y $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \cap A$ la n-potencia simbólica de $\mathfrak{p}$. $\mathcal{I} = (\mathfrak{p}^{(n)})_{n\geq 0}$ define una filtración de ideales de A en general no noetheriana. Si A es un anillo noetheriano sabemos que $R_s(\mathfrak{p}) := R_A(\mathcal{I})$ es noetheriano si y solo si existe un entero $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{p}^{(nk)} = (\mathfrak{p}^k)^n$. En [GNi] podemos encontrar ejemplos de filtraciones simbólicas noetherianas y no noetherianas.

Ejemplo 1.3.4 Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local reducido e I un ideal de A. Denotaremos por $\overline{I}$ a la clausura entera de I:

$$\overline{I} = \{x \in A|\ \text{existen } a_i \in I^i \text{ verificando } x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0\}.$$

En [Re2, Theorem 5.32] se demuestra que A es un anillo analíticamente no ramificado si y solo si para todo ideal I de A existe un entero $p = p(I)$ tal que $\overline{I^n} \subseteq I^{n-p}$ para todo $n \geq 0$. Así pues, si A es un anillo local analíticamente no ramificado la filtración $(\overline{I^n})_{n\geq 0}$ es noetheriana para todo ideal I de A. En este caso denotamos $\overline{R}_A(I) := R_A(\mathcal{I})$ y $\overline{G}_A(I) := G_A(\mathcal{I})$.

Ejemplo 1.3.5 Sea I un ideal de A. Ratliff y Rush en [RR] definen la siguiente clausura de I:

$$\widetilde{I} = \bigcup_{k\geq 1} (I^{k+1} : I^k).$$

Si I contiene un elemento no divisor de cero, entonces $\widetilde{I^n} = I^n$ para n suficientemente grande y por tanto la filtración $\mathcal{I} = (\widetilde{I^n})_{n\geq 0}$ es noetheriana.

En particular, si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local Cohen-Macaulay e I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, entonces la filtración de las clausuras Ratliff-Rush de las potencias de I es noetheriana.

Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A. Entonces

(i) $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_n}$ para todo $n \geq 1$.

(ii) $\dim G_A(\mathcal{I}) = d$.

(iii) $\dim R_A(\mathcal{I}) = \begin{cases} d+1 \text{ si } I_1 \not\subseteq \mathfrak{p} \text{ para algún } \mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}(A), \\ d \text{ en caso contrario.} \end{cases}$

(iv) $\dim R_A^*(\mathcal{I}) = d + 1$.

donde $\mathrm{Assh}(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim A\}$.

Diremos que una filtración $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ es separada si $\bigcap_{n\geq 0} I_n = 0$, y fuertamente separada si $\bigcap_{n\geq 0}(K + I_n) = K$ para cualquier ideal K de A.

Nota 1.3.6 Por el teorema de intersección de Krull, toda filtración I-ádica sobre un anillo local noetheriano es fuertemente separada. Es fácil por tanto deducir que las filtraciones noetherianas sobre anillos locales son fuertamente separadas ya que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $I_{nk} = (I_k)^n$ para todo $n \geq 0$ entonces para todo ideal K de A tenemos

$$\bigcap_{n\geq 0}(I_n + K) \subseteq \bigcap_{n\geq 0}(I_{nk} + K) = \bigcap_{n\geq 0}((I_k)^n + K) = K.$$

1.3.2 Filtraciones de módulos

Sea E un A-módulo. Una filtración $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ de E es una cadena decreciente de A-submódulos de E tal que $E_0 = E$.

Sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración de ideales de A. Decimos que $\mathbf{E}$ es una filtración $\mathcal{I}$-compatible si $I_n E_m \subseteq E_{n+m}$ $\forall n, m \geq 0$. Sea $E_n = E$ para todo $n < 0$. Entonces

$$R(\mathbf{E}) = \textstyle\bigoplus_{n\geq 0} E_n t^n \text{ es un } R_A(\mathcal{I}) - \text{módulo graduado,}$$
$$R^*(\mathbf{E}) = \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n t^n \text{ es un } R_A^*(\mathcal{I}) - \text{módulo graduado,}$$
$$G(\mathbf{E}) = \textstyle\bigoplus_{n\geq 0} E_n/E_{n+1} \text{ es un } G_A(\mathcal{I}) - \text{módulo graduado,}$$

y tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow t^{-1}R^*(\mathbf{E}) \longrightarrow R^*(\mathbf{E}) \longrightarrow G(\mathbf{E}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+ \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+(1) \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow G(\mathbf{E}) \longrightarrow 0$$

Diremos que $\mathbf{E}$ es una filtración noetheriana si $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo noetheriano. Tenemos entonces el siguiente resultado de Bishop, Petro, Ratliff y Rush que permite caracterizar las filtraciones noetherianas.

Proposición 1.3.7 *([BPRR, Theorem 3.8]) Sean A un anillo noetheriano, E un A-módulo finito generado, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración de ideales de A y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Entonces son equivalentes:*

(i) $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado.

(ii) Existe un entero positivo m tal que $E_n = \sum_{i=1}^{m} I_{n-i}E_i$ para $n \gg 0$.

(iii) Existe un entero positivo k tal que $E_{n+k} = I_k E_n$ para todo $n \geq k$.

(iv) $G(\mathbf{E})$ es un $G_A(\mathcal{I})$-módulo noetheriano y existe un entero positivo g tal que $E_{gn} \subseteq rad(I_1)^n E_1$ para $n \gg 0$.

(v) $G(\mathbf{E})$ es un $G_A(\mathcal{I})$-módulo noetheriano y para todo n existe un entero positivo $\rho(n)$ tal que $E_{\rho(n)} \subseteq rad(I_1)^n E_1$.

En particular si $\mathcal{I}$ es una filtración noetheriana entonces $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo noetheriano si y solamente si se verifica alguna de las condiciones equivalentes de la Proposición 1.3.7.

Nota 1.3.8 En [BPRR] se dice que $\mathbf{E}$ es una filtración noetheriana si $G(\mathbf{E})$ es un $G_A(\mathcal{I})$-módulo noetheriano y que es $\mathcal{I}$ -buena si satisface la condición (ii) de la Proposición 1.3.7.

Nota 1.3.9 Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano, E un A-módulo finito generado, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración de ideales de A y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R(\mathcal{I})$-módulo finito generado, entonces la filtración $\mathbf{E}$ es fuertemente separada: en efecto, de la Proposición 1.3.7 tenemos que existe un entero k tal que $E_{nk} = I_k^{n-1}E_k$ para todo $n \geq 1$. Entonces para todo submódulo E' de E tenemos

$$\bigcap_{n\geq 0}(E_n + E') \subseteq \bigcap_{n\geq 0}(E_{nk} + E') = \bigcap_{n\geq 0}(I_k^{n-1}E_k + E') \subseteq \bigcap_{n\geq 0}(I_k^{n-1}E + E') = E'$$

por el Teorema de intersección de Krull.

Nota 1.3.10 Si I es un ideal de A diremos que $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ es una filtración I-compatible si $IE_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Entonces, una filtración es I-compatible si y sólo si es $\{I^n\}_{n\geq 0}$-compatible. Notemos también que si $\mathbf{E}$ es una filtración $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$-compatible, entonces es I_1-compatible.

Concluiremos esta sección con el siguiente resultado que determina las dimensiones de $G(\mathbf{E})$, $R(\mathbf{E})$ y $R^*(\mathbf{E})$ en función de la dimensión de E.

Proposición 1.3.11 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, E un A-módulo, $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de ideales de A y $\mathbf{E}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado. Sea* $\operatorname{Assh}(E) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(Ann(E)) \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim E\}$. *Entonces:*

(i) $\dim G(\mathbf{E}) = \dim E$.

(ii) $\dim R(\mathbf{E}) = \begin{cases} \dim E + 1 & \textit{si } I_1 \not\subseteq \mathfrak{p} \textit{ para algún } \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}(E), \\ \dim E & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$

(iii) $\dim R^*(\mathbf{E}) = \dim E + 1$.

Demostración: Como $G(\mathbf{E}) \simeq R^*(\mathbf{E})/t^{-1}R^*(\mathbf{E})$ y t^{-1} es un elemento regular en $R^*(\mathbf{E})$ contenido en el único ideal maximal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ es suficiente probar (ii) y (iii).

Por otra parte, $\operatorname{Ann}R(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0}(I_n \cap \operatorname{Ann}E)t^n$ y $\operatorname{Ann}R^*(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(I_n \cap \operatorname{Ann}E)t^n$: si $a \in I_n \cap \operatorname{AnnE}$ e $y = bt^m$ es un elemento homogéneo de $R(\mathbf{E})$, entonces $(at^n)(bt^m) = 0$. Recíprocamente, sea $x = at^n \in \operatorname{Ann}R(\mathbf{E})$; entonces, si y es cualquier elemento de E tenemos $0 = x(yt^0) = (at^n)(yt^0) = ayt^n$ y por tanto $a \in \operatorname{Ann}E$. De forma análoga se demuestra el resultado para $R^*(\mathbf{E})$.

Entonces $\dim R(\mathbf{E}) = \dim R_A(\mathcal{I})/\operatorname{Ann}R(\mathbf{E}) = \dim \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_n \cap \operatorname{Ann}E$. Por lo tanto, la dimensión de $R(\mathbf{E})$ coincide con la dimensión del anillo de Rees asociado a una filtración noetheriana de ideales del anillo $A/\mathrm{Ann}E$ para el cual su dimensión es conocida y coincide con la del enunciado. Análogamente obtenemos el resultado correspondiente para $R^*(\mathbf{E})$. □

1.4 El módulo canónico

Sea S un anillo graduado noetheriano sobre un anillo local $(S_0, \mathfrak{m}_0)$ de dimensión d.

Se dice que una extensión $M \subseteq N$ de S-módulos graduados es esencial en $M^h(S)$ si para todo submódulo graduado $0 \neq L \subseteq N$ se tiene $L \cap M \neq 0$. Si además, $M \neq N$, se dice que $M \subseteq N$ es una extensión esencial propia en $M^h(S)$. Como en el caso no graduado, se tiene que un S-módulo graduado es inyectivo si y solamente si no admite extensiones esenciales propias en $M^h(S)$ y que todo S-módulo graduado M tiene una única (salvo isomorfismos) envolvente inyectiva en $M^h(S)$ que denotaremos por $E_S(M)$. En general, la envolvente inyectiva de M en $M^h(S)$ no es la envolvente inyectiva de M como S-módulo.

Si S_0 es completo se define el módulo canónico de S como $K_S := \underline{\mathrm{Hom}}_S(H^d_{\mathcal{M}}(S), E)$, donde $E := E_S(S/\mathcal{M})$ es la envolvente inyectiva de $S/\mathcal{M}$ en $M^h(S)$. Si S_0 no es completo se dice que K_S es un módulo canónico de S si $K_S \otimes_{S_0} \widehat{S_0} \simeq K_{S \otimes_{S_0} \widehat{S_0}}$, donde $\widehat{S_0}$ es la completación $\mathfrak{m}_0$-ádica de S_0.

Si S tiene módulo canónico K_S, éste es un S-módulo graduado finito generado y único salvo isomorsfismos. Además

$$a(S) = -\min\{n \mid [K_S]_n \neq 0\}.$$

Una de las principales herramientas en el estudio de los módulos canónicos es el siguiente resultado conocido como *teorema de dualidad local*:

Supongamos que S_0 es completo. Entonces S es Cohen-Macaulay si y solamente si para todo S-módulo graduado finito generado M tenemos isomorfismos naturales en $M^h(S)$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(H^i_{\mathfrak{m}}(M), E) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^{d-i}_S(M, K_S)$$

para todo i.

El anterior resultado permite demostrar, por ejemplo, que si S es Cohen-Macaulay, entonces K_S es un S-módulo graduado Cohen-Macaulay con $\operatorname{depth} K_S = \dim S$ y que K_S tiene dimensión inyectiva finita en $M^h(S)$.

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de ideales de A. Si A es Cohen-Macaulay y A tiene módulo canónico, entonces los anillos $R_A(\mathcal{I})$ y $G_A(\mathcal{I})$ también tienen módulo canónico. Supongamos que $\operatorname{ht}(I_1) > 0$. En el siguiente resultado, Trung, Viet y Zarzuela [TVZ] muestran la relación existente entre los módulos canónicos de $R_A(\mathcal{I})$ y $G_A(\mathcal{I})$ en términos de una filtración del módulo canónico de A.

Teorema 1.4.1 *[TVZ, Theorem 1.2] Supongamos que $R_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay. Entonces existe una filtración $\mathbf{K} = (K_n)_{n\geq 0}$ de K_A tal que*

$$K_{R_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_n = R(\mathbf{K})_+$$
$$K_{G_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_{n-1}/K_n = G(\mathbf{K})(-1).$$

La filtración $\mathbf{K}$ es $\mathcal{I}$-compatible y noetheriana. Notemos que en general $K_{R_A(\mathcal{I})}$ depende de K_n con $n \geq 1$ y en cambio $K_{G_A(\mathcal{I})}$ depende de toda la filtración $\mathbf{K}$. Si $K_0 = K_1$ entonces $K_{R_A(\mathcal{I})}$ y $K_{G_A(\mathcal{I})}$ pueden considerarse respectivamente como el módulo de Rees y el módulo graduado asociados a una filtración de K_1.

1.5 Reducciones

1.5.1 Reducción de un ideal

Sean A un anillo noetheriano e I un ideal de A.

Diremos que un ideal $J \subseteq I$ es una reducción de I si existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1} = JI^n$; es decir, si $R_A(I)$ es un $R_A(J)$-módulo finito generado. Se define entonces el número de reducción de I respecto J como $r_J(I) = \min\{n \mid I^{n+1} = JI^n\}$. Si $\overline{I}$ denota la clausura entera del ideal I, se demuestra que J es reducción de I si y solamente si $\overline{J} = \overline{I}$. Decimos que $J \subseteq I$ es una reducción minimal de I si para todo $J' \subseteq J$ reducción de I entonces $J' = J$.

Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local. En este caso se demuestra que todo ideal I de A tiene una reducción minimal. De hecho puede verse que si $J' \subseteq I$ es una reducción de I existe $J \subseteq I$ reducción minimal de I con $J \subseteq J'$. Se define entonces el número de reducción de I como $r(I) = \min\{r_J(I) \mid J \text{es reducción minimal de I}\}$. Sean I un ideal de A y J una reducción minimal de I. Sea L un ideal de A de manera que $J \subseteq L \subseteq I$. Entonces todo sistema minimal de generadores de J puede completarse a un sistema minimal de generadores de L.

Decimos que $x_1, \ldots, x_n$ es una familia analíticamente independiente en I si para todo polinomio homogéneo $f(X_1, \ldots, X_n) \in A[X_1, \ldots, X_n]$ de grado m tal que $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{m}I^m$ entonces todos los coeficients de f estan en $\mathfrak{m}$. Sea $F_{\mathfrak{m}}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n = R_A(I)/\mathfrak{m}R_A(I) = G_A(I)/\mathfrak{m}G_A(I)$ el cono de la fibra de I. Definimos la dispersión analítica de I como $s(I) = \dim F_{\mathfrak{m}}(I)$. Si $a \in I$ denotaremos $a^0 \in I/\mathfrak{m}I \hookrightarrow F_{\mathfrak{m}}(I)$.

Supongamos que A tiene cuerpo residual infinito. Sean I un ideal de A, $J \subseteq I$ una reducción de I y $x_1, \ldots, x_n$ un sistema minimal de generadores de J. Entonces son equivalentes:

(i) J es reducción minimal de I.

(ii) $x_1^0, \ldots, x_n^0$ es un sistema de parámetros de $F_{\mathfrak{m}}(I)$.

(iii) $x_1, \ldots, x_n$ es una família analíticamente independiente en I.

(iv) $n = s(I)$.

Si $\mu(I)$ denota el mínimo número de generadores de I tenemos

$$\mathrm{ht}\,(I) \leq s(I) \leq \mu(I).$$

En [HH1] se define la desviación analítica de I como la diferencia $\mathrm{ad}(I) = s(I) - \mathrm{ht}\,(I)$. Decimos que un ideal es equimúltiple si $s(I) = \mathrm{ht}\,(I)$; es decir, si tiene desviación analítica 0. (Ver [HIO] para más información sobre estos ideales.)

1.5.2 Reducción de una filtración

Sea A un anillo noetheriano. Okon y Ratliff [OR] extienden la noción de reducción y reducción minimal de un ideal al caso de filtraciones. Sean $\mathcal{J} = (J_n)_{n\geq 0}$ e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$

filtraciones de ideales de A. Se dice que $\mathcal{J}$ es una reducción de $\mathcal{I}$ si: $J_n \subseteq I_n$ para todo $n \geq 0$, y existe un entero positivo m tal que $I_n = I_{n-1}J_1 + \cdots + I_{n-m}J_m$ para todo $n \gg 0$. Una reducción de $\mathcal{I}$ se llama minimal si no contiene propiamente ninguna reducción de $\mathcal{I}$. En [OR] se demuestra que no existen reducciones minimales para ninguna filtración.

No obstante, si nos restringimos a un cierto tipo de "buenas" filtraciones tendremos la existencia de "buenas" reducciones minimales. Sea I un ideal de A. Una filtración $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ de ideales de A se denomina I-filtración buena si $II_n \subseteq I_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ e $I_{n+1} = II_n$ para todo $n \gg 0$. $\mathcal{I}$ se denomina filtración buena si es una I-filtración buena para algún ideal I de A. Se deduce fácilmente que $\mathcal{I}$ es una filtración buena si y solo si es una I_1-filtración buena. Es inmediato que toda filtración buena es noetheriana. Es muy útil también la siguiente caracterización de las filtraciones buenas: $\mathcal{I}$ es una I-filtración buena si y solo si $II_n \subseteq I_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ y existe un entero r tal que $I_n \subseteq I^{n-r}$ (ver [Bo, Corollary III.3.1.4]).

Ejemplos 1.5.1 (i) Si I es un ideal de A, la filtración I-ádica es buena.

(ii) Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local reducido e I un ideal de A. Sea $\mathcal{I} = (\overline{I^n})_{n\geq 0}$ la filtración definida por las clausuras enteras de las potencias de I. Entonces A es un anillo analíticamente no ramificado si y solo si la filtración $\mathcal{I} = (\overline{I^n})_{n\geq 0}$ es buena para todo I ideal de A.

(iii) Sea I un ideal de A conteniendo un elemento regular. Sea $\mathcal{I} = (\widetilde{I^n})_{n\geq 0}$ la filtración definida por las clausuras de Ratliff-Rush de las potencias de I. Entonces, $\mathcal{I} = (\widetilde{I^n})_{n\geq 0}$ es una I-filtración buena.

(iv) Blancafort [Bl] y Hoa [Ho] extienden la noción de clausura de Ratliff-Rush de ideales a filtraciones buenas: si $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ es una filtración buena de ideales de A la clausura de Ratliff-Rush de $\mathcal{I}$ es la filtración $\widetilde{\mathcal{I}} = (\widetilde{I_n}^{\mathcal{I}})_{n\geq 0}$, donde $\widetilde{I_n}^{\mathcal{I}}$ denota la clausura de Ratliff-Rush de I_n respecto $\mathcal{I}$ y esta definida por

$$\widetilde{I_n}^{\mathcal{I}} = \bigcup_{k\geq 1}(I_{n+k} : I_k) = \bigcup_{k\geq 1}(I_{n+k} : I_1^k).$$

Si I_1 contiene un elemento regular, entonces $\widetilde{\mathcal{I}}$ es una filtración buena de ideales de A que coincide en el caso ádico con la definición habitual.

Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local con cuerpo residual infinito.

Sean $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$ filtraciones de ideales de A. Supongamos que $\mathcal{I}$ es una filtración buena. Decimos que $\mathcal{J}$ es una reducción buena de $\mathcal{I}$ si es una filtración buena y es reducción de $\mathcal{I}$. Supongamos que $\mathcal{J}$ es una reducción buena de $\mathcal{I}$. Decimos que es una reducción minimal de $\mathcal{I}$ (buena) si no esta propiamente contenida en ninguna otra reducción buena de $\mathcal{I}$. Contrariamente al caso general, tenemos ahora el siguiente resultado que prueba que toda filtración buena admite una reducción minimal.

Proposición 1.5.2 *[HZ, Proposition 2.6] $\mathcal{J}$ es una reducción minimal de una filtración buena $\mathcal{I}$ si y solamente si $\mathcal{J} = (J^n)_{n\geq 0}$, donde J es una reducción minimal de I_1. En particular, existen reducciones minimales de $\mathcal{I}$.*

Sea $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) := \bigoplus_{n\geq 0} I_n/\mathfrak{m}I_n$, el cono de la fibra de $\mathcal{I}$. Análogamente al caso ádico se define la dispersión analítica de $\mathcal{I}$ como $s(\mathcal{I})$ =dim $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$. El siguiente resultado permite ver que la noción de reducción minimal de filtraciones buenas coincide con la noción básica de reducción minimal de ideales. Si $a \in I_1$, denotaremos por $a^0 \in I_1/\mathfrak{m}I_1 \hookrightarrow F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$.

Proposición 1.5.3 *[HZ, Lema 2.8] Sean $\mathcal{I}$ una I-filtración buena y $a_1, \ldots, a_s \in I_1$. Entonces, son equivalentes:*

(i) $a_1, \ldots, a_s$ es un sistema minimal de generadores de una reducción minimal de I_1.

(ii) $a_1^0, \ldots, a_s^0$ es un sistema de parámetros de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$.

En particular $s(\mathcal{I}) = s(I_1) = s(I)$.

Si $\mathcal{I}$ es una filtración buena y J es una reducción de $\mathcal{I}$, se define el número de reducción de $\mathcal{I}$ respecto J como $r_J(\mathcal{I}) = \min\{n \mid I_{m+1} = JI_m \text{ para todo } m \geq n\}$, y el número de reducción de $\mathcal{I}$ como $r(\mathcal{I}) = \min\{r_J(\mathcal{I}) \mid J \text{ reducción minimal de } \mathcal{I}\}$. Si $\mathcal{I}$ es I-ádica entonces $r(\mathcal{I}) = r(I)$.

Nota 1.5.4 Si $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ es una filtración buena de A con $r(\mathcal{I}) \leq 1$, entonces $\mathcal{I}$ es una filtración ádica; de hecho $\mathcal{I} = \{I_1^n\}_{n\geq 0}$ con $r(\mathcal{I}) = r(I_1)$. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$ con $r(\mathcal{I}) = r_J(\mathcal{I})$. Si $r(\mathcal{I}) = 1$, $I_{n+1} = JI_n \quad \forall n \geq 1$ y entonces $I_{n+1} = J^n I_1 \subseteq I^{n+1}$, luego tenemos la igualdad. Si $r(\mathcal{I}) = 0$, $I_{n+1} = JI_n \quad \forall n \geq 0$ y $\mathcal{I} = \{J^n\}_{n\geq 0}$.

Notemos también que en general $r(\mathcal{I})$ y $r(I_1)$ no tienen relación alguna como veremos por ejemplo en el Capítulo 5, Ejemplo 5.2.13.

1.6 Algunos resultados conocidos sobre la profundidad de los anillos *blowup*

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A. Para todo elemento $x \in A$ no nulo podemos considerar el entero $v(x)$ tal que $x \in I_{v(x)} \setminus I_{v(x)+1}$. Notemos que para $x, y \in A$ tenemos:

(i) $v(x)$ es finito ya que la filtración es fuertemente separada como observamos en la Nota 1.3.6.

(ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$.

(iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, y si $v(x) \neq v(y)$ tenemos la igualdad.

Denotaremos entonces por x^* a la clase de x en $I_{v(x)}/I_{v(x)+1} \hookrightarrow G_A(\mathcal{I})$, y diremos que x^* es la forma inicial de x en $G_A(\mathcal{I})$.

Sea K un ideal de A y K^* el ideal de $G_A(\mathcal{I})$ generado por las formas iniciales de todos los elementos de K. Si $K = (a_1, \ldots, a_r)$, en general los ideales K^* y $(a_1^*, \ldots, a_r^*)$ no coinciden. De hecho para todo $n \geq 0$ tenemos

$$(a_1, \ldots, a_r)^*_n = (I_n \cap (a_1, \ldots, a_r) + I_{n+1})/I_{n+1}, \text{ y} \tag{1.1}$$

$$(a_1^*, \ldots, a_r^*)_n = \textstyle\sum_{i=1}^r (I_{n-p_i} a_i + I_{n+1})/I_{n+1}, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1.2}$$

donde $p_i = v(a_i)$ para $i = 1, \ldots, r$.

El siguiente lema caracteriza cuando ambos ideales coinciden.

Lema 1.6.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de ideales de A y K un ideal de A. Si $K = (a_1, \ldots, a_r)$, entonces*

$$K^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*) \Leftrightarrow I_n \cap K = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i, \ \forall n \geq 1,$$

donde $p_i := v(a_i)$.

Demostración: Supongamos $I_n \cap K = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i$, $\forall n \geq 1$. Entonces por las expresiones (1.1) y (1.2) es inmediato que $K^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*)$.

Recíprocamente, supongamos $K^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*)$. Entonces tenemos inclusiones $K \cap I_n \subseteq \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i + I_{n+1}$ para todo n. Por tanto, $K \cap I_n = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i + K \cap I_{n+1}$ para todo n, luego $K \cap I_n = \bigcap_{t \geq 1} (\sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i + K \cap I_{n+t}) \subseteq \bigcap_{t \geq 1} (\sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i + I_{n+t}) = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} a_i$ por ser $\mathcal{I}$ fuertemente separada. □

El siguiente resultado es una generalización al caso de filtraciones noetherianas del conocido criterio de Valabrega-Valla [VV]. Este criterio nos dice cuando una familia de formas iniciales del anillo $G_A(\mathcal{I})$ es una sucesión regular. La demostración que daremos sigue esencialmente la misma línea que la original de [VV] y utiliza reiteradamente la propiedad de que toda filtración noetheriana es fuertemente separada.

Proposición 1.6.2 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n \geq 0}$ una filtración noetheriana de ideales de A. Si $x_1, \ldots, x_r$ son elementos de A, entonces son equivalentes:*

(i) $x_1^*, \ldots, x_r^*$ es una sucesión $G_A(\mathcal{I})$-regular.

(ii) $x_1, \ldots, x_r$ es una sucesión A-regular e $I_n \cap (x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} x_i$ para todo $n \geq 1$,

donde $p_i := v(x_i)$.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que $x_1^*, \ldots, x_r^*$ es una $G(\mathcal{I})$-sucesión regular y sea $J = (x_1, \ldots, x_r)$. Para ver la igualdad $I_n \cap J = \sum_{i=1}^r I_{n-p_i} x_i$, $\forall n \geq 1$ procederemos por inducción sobre r.

Supongamos que $r = 1$. Sea $x \in A$ tal que x^* es regular en $G(\mathcal{I})$. Entonces tenemos la igualdad de ideales $(x)^* = (x^*)$. En efecto, si $a \in A$ es un elemento no nulo, entonces $a^* x^* \neq 0$ y por tanto $(ax)^* = a^* x^* \in (x^*)$. Aplicando el Lema 1.6.1 tenemos el resultado en este caso. Supongamos $r > 1$ y sea $a \in (x_1, \ldots, x_r) \cap I_n$. Entonces $a = x + y x_r$ con $x \in (x_1, \ldots, x_{r-1})$ e $y \in A$. Podemos suponer que $a \notin (x_1, \ldots, x_{r-1})$. Sea entonces $t := \max\{m \mid a \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) + x_r I_m\}$ (t es finito ya que $\mathcal{I}$ es fuertemente separada). Así pues $y x_r \in (I_n + (x_1, \ldots, x_{r-1})) \cap I_{t+p_r}$. Supongamos que $t + p_r < n$; entonces $y x_r \in I_{t+p_r+1} + (x_1, \ldots, x_{r-1}) \cap I_{t+p_r}$ y por tanto $(y x_r)^* \in (x_1, \ldots, x_{r-1})^*$. Por otra parte $y^* x_r^* = (y x_r)^*$ por ser x_r regular en $G(\mathcal{I})$, y $(x_1, \ldots, x_{r-1}) = (x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*)$ por hipótesis de inducción y el Lema 1.6.1. Entonces $y^* \in (x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*)$. Así $y \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) \cap I_t + I_{t+1}$ y consecuentemente $a \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) + x_r I_{t+1}$ contradiciendo la elección de y. Por lo tanto $t + p_r \geq n$. Entonces $a = x + yx_r \in ((x_1, \ldots, x_{r-1}) + x_r I_{n-p_r}) \cap I_n \subseteq (I_n \cap (x_1, \ldots, x_{r-1})) + x_r I_{n-p_r} = \sum_{i=1}^{r-1} I_{n-p_i} x_i + x_r I_{n-p_r}$ por hipótesis de inducción.

Veamos ahora que la sucesión $x_1, \ldots, x_r$ es regular. Sea $a \in (x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i$ con $v(a) = n$; entonces $(ax_i)^* = a^* x_i^* \in (x_1, \ldots, x_{i-1})^* = (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*)$. Luego $a^* \in (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*)$ y por tanto $a \in ((x_1, \ldots, x_{i-1}) + I_{n+1}) \cap ((x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i)$. Entonces $a = x + y$ con $x \in (x_1, \ldots, x_{i-1})$ e $y \in I_{n+1}$. Por tanto $y \in ((x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i) \cap I_{n+1}$. Repitiendo el argumento sucesivamente y utilizando una vez más que $\mathcal{I}$ es fuertemente separada obtenemos $a \in \bigcap_{t \geq 0}((x_1, \ldots, x_{i-1}) + I_{n+t}) = (x_1, \ldots, x_{i-1})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Veamos primero las igualdades $I_n \cap (x_1, \ldots, x_j) = \sum_{i=1}^{j} I_{n-p_i} x_i$, para j=1,...,r. Procediendo por recurrencia es suficiente demostrar el caso $j = r - 1$. Sea $a \in I_n \cap (x_1, \ldots, x_{r-1}) \subseteq I_n \cap (x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} I_{n-p_i} x_i$. Por tanto $a = \sum_{i=1}^{r} b_i x_i$ con $b_i \in I_{n-p_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Así, $b_r x_r \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) \cap I_{n-p_r}$ y por tanto $b_r \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) \cap I_{n-p_r}$ por ser $x_1, \ldots, x_r$ una A-sucesión regular. Obtenemos así la inclusión $I_n \cap (x_1, \ldots, x_{r-1}) \subseteq \sum_{i=1}^{r-1} I_{n-p_i} x_i + ((x_1, \ldots, x_{r-1}) \cap I_{n-p_r}) x_r$. Si $p_r = 0$ obtenemos el resultado aplicando el lema de Nakayama. Si $p_r > 0$, podemos aplicar inducción sobre n para obtener el resultado.

Veamos ahora que $x_1^*, \ldots, x_r^*$ es una $G(\mathcal{I})$-sucesión regular. Sea $a \in A$ tal que $a^* x_i^* \in (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*)$ con $v(a) = n$, entonces $ax_i \in (x_1, \ldots, x_{i-1}) + I_{n+p_i+1}$. Escribiendo $ax_i = z + b$ con $z \in (x_1, \ldots, x_{i-1})$ y $b \in I_{n+p_i+1}$ obtenemos que $b = \sum_{j=1}^{i} b_j x_j$ con $b_j \in I_{n+p_i+1-p_j}$. Así, $a - b_i \in (x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i = (x_1, \ldots, x_{i-1})$ y $a \in (x_1, \ldots, x_{i-1}) \cap I_n + I_{n+1}$ y por lo tanto $a^* \in (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*)$. □

Sea $x \in A$. Denotaremos por $\mathcal{I}/x$ a la filtración de ideales de $A/(x)$ definida por $(I_n + (x)/(x))_{n \geq 0}$. El resultado anterior permite demostrar fácilmente lo siguiente:

Corolario 1.6.3 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I} = (I_n)_{n \geq 0}$ una filtración noetheriana de A y $x_1, \ldots, x_r$ elementos de A. Supongamos que $x_1^*, \ldots, x_r^*$ es una sucesión $G_A(I)$-regular. Entonces:*

$$G_{A/(x_1, \ldots, x_r)}(\mathcal{I}/(x_1, \ldots, x_r)) \simeq G_A(\mathcal{I})/(x_1^*, \ldots, x_r^*) G_A(\mathcal{I}).$$

Determinar cuando el anillo de Rees de una filtración es Cohen-Macaulay es un problema difícil en general. Un resultado satisfactorio en este sentido es la caracterización de la propiedad Cohen-Macaulay del anillo de Rees en términos de la cohomologia local del anillo graduado asociado. La versión que presentamos aquí es de Viet [Vi] y generaliza al caso de filtraciones noetherianas un resultado previo de Ikeda y Trung [TI] en el caso ádico.

Proposición 1.6.4 *[Vi, Theorem 1.1] Sean $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local de dimensión d e $\mathcal{I}=(I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A con $dim R(\mathcal{I})=d+1$. Entonces*

$$R_A(\mathcal{I}) \text{ es Cohen-Macaulay } \Leftrightarrow \begin{cases} [H^i_M(G_A(\mathcal{I}))]_n = 0 \text{ si } n \neq -1,\ i=0,\ldots,d-1. \\ [H^d_M(G_A(\mathcal{I}))]_n = 0 \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

En este caso, $H^i_M(G_A(\mathcal{I})) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ para $i=0,\ldots,d-1$.

En particular, si A es un anillo Cohen-Macaulay se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.6.5 *[Vi, Corollary 2.1] Sean $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay de dimensión d e $\mathcal{I}=(I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A con $dim R(\mathcal{I})=d+1$. Entonces $R_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay si y solo si $G_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay y $a(G_A(\mathcal{I}))<0$.*

Es por tanto interesante para el estudio de la propiedad Cohen-Macaulay del anillo de Rees poseer información sobre el a-invariante del anillo graduado asociado. En el caso de filtraciones I-ádicas se tienen resultados que relacionan el a-invariante con el número de reducción de I.

En [HZ] se demuestran para filtraciones buenas las siguientes acotaciones para el número de reducción (ver [Tr1] para el caso de filtraciones ádicas)

$$a_s(G_A(\mathcal{I})_+, G_A(\mathcal{I})) + s(\mathcal{I}) \leq r(\mathcal{I}) \leq \operatorname{reg}(G_A(\mathcal{I})).$$

Si $\mathcal{I}$ es una filtración buena y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, la sucesión de ideales definida por $(\mathcal{I}_n \otimes A_{\mathfrak{p}})_{n\geq 0}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ es una filtración buena de $A_{\mathfrak{p}}$ que denotaremos $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$. Entonces $G_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}) = G_A(\mathcal{I}) \otimes A_{\mathfrak{p}}$ y $R_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}) = R_A(\mathcal{I}) \otimes A_{\mathfrak{p}}$. Si I es un ideal de A denotaremos $V(I)=\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}$. Las anteriores acotaciones de $r(\mathcal{I})$ nos permiten demostrar el siguiente resultado utilizando las mismas técnicas que Ulrich en [Ul1]. (Ver también [AHT] y [JK].)

Teorema 1.6.6 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración buena de A con dispersión analítica s y número de reducción r. Sea $\mathcal{A}(I_1) = \{\mathfrak{p} \in V(I_1) \mid s(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}\,(\mathfrak{p})\}$, y supongamos que $G(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$. Entonces*

$$\begin{aligned} a(G_A(\mathcal{I})) &= \max\{r(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) - s(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{A}(I_1)\} \\ &= \max\left\{ \max\{r(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) - s(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{A}(I_1), s(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) < s\},\ r - s\right\} \\ &= \max\{r(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) - s(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in V(I_1)\}. \end{aligned}$$

Además,

$$r \leq r_J(\mathcal{I}) \leq \mathrm{reg}(G_A(\mathcal{I})) \leq a(G_A(\mathcal{I})) + s.$$

Nota 1.6.7 Notemos que si $a(G_A(\mathcal{I})) = r - s$ entonces $r_J(\mathcal{I})$ no depende de la reducción minimal J de I_1.

Definición 1.6.8 *Decimos que una filtración buena $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ es equimúltiple si I_1 es un ideal equimúltiple, es decir si $\mathrm{ht}\,(I_1) = s(I_1)$.*

Utilizando la Proposición 1.6.4 y el Teorema 1.6.6 podemos recuperar algunos resultados conocidos cuando I_1 es un ideal con desviación analítica pequeña.

Corolario 1.6.9 *[HZ] Sea $\mathcal{I}$ una filtración buena equimúltiple. Supongamos que $G_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay. Entonces $a(G_A(\mathcal{I})) = r(\mathcal{I}) - s(\mathcal{I})$ y $r(\mathcal{I})$ no depende de la reducción minimal J de $\mathcal{I}$.*

Corolario 1.6.10 *[HZ, Corollary 3.11] Sea $\mathcal{I}$ una filtración buena equimúltiple. Supongamos que A es Cohen-Macaulay y que $\mathrm{ht}\,(I_1) > 0$. Entonces $R_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay si y solo si $G_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay y $r(\mathcal{I}) < \mathrm{ht}\,(I_1)$.*

Diremos que I es un ideal genéricamente intersección completa si $\mu(I_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}\,(I)$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A/I)$. Si I es un ideal genéricamente intersección completa con desviación analítica uno, el Teorema 1.6.6 nos permite determinar el a-invariante del anillo graduado asociado a la filtración I-ádica de A. Recuperamos así los resultados obtenidos por Ribbe en [Ri] para ideales con número de reducción cero y de Goto-Huckaba en [GH] para ideales con número de reducción positivo.

Corolario 1.6.11 *Sea I un de A ideal genericamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$. *Supongamos que $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay. Entonces*

$$a(G_A(I)) = \max\{-\mathrm{ht}\,(I), r(I) - \mathrm{ht}\,(I) - 1\}.$$

En particular, $a(G_A(I)) = -\mathrm{ht}\,(I)$ si $r(I) = 0$ y $a(G_A(I)) = r(I) - \mathrm{ht}\,(I) - 1$ si $r(I) \geq 1$. En este último caso, $r_J(I) = r(I)$ para cualquier reducción minimal J de I.

Corolario 1.6.12 *Sea I un ideal de A genericamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y* $\mathrm{ht}\,(I) > 0$. *Supongamos que A es Cohen-Macaulay. Entonces $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay si y solo si $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay y $r(I) \leq \mathrm{ht}\,(I)$.*

Capítulo 2

Relación entre las profundidades del anillo de formas y del álgebra de Rees

2.1 Introducción

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano de dimensión d, $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de ideales de A, E un A-módulo y $\mathbf{E}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Consideremos los anillos $R_A(\mathcal{I})$, $G_A(\mathcal{I})$ y sus respectivos módulos $R(\mathbf{E})$ y $G(\mathbf{E})$. Sea J un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$. El objetivo de este capítulo es relacionar los grados $\operatorname{depth}_{J\cap A} E$, $\operatorname{depth}_J(R(\mathbf{E}))$ y $\operatorname{depth}_J(G(\mathbf{E}))$.

Nuestro principal resultado, el Teorema 2.3.1, así como su demostración, estan inspirados en los trabajos de [TI], [HM1] y [Ma]. El teorema se obtiene relacionando los módulos de cohomologia local de E, $R(\mathbf{E})$ y $G(\mathbf{E})$. Uno de los puntos claves para su demostración es la aplicación de la Proposición 2.2.5 que determina los valores de i para los cuales los módulos $H^i_J(R(\mathbf{E}))$ y $H^i_J(G(\mathbf{E}))$ son finitamente graduados.

La Sección 2.2 está dedicada a la finita graduación de los módulos de cohomología local con el propósito de demostrar la Proposición 2.2.5.

En la Sección 2.3 ofrecemos la demostración del Teorema 2.3.1. La aplicación de este resultado en las Secciones 2.4 y 2.5 nos permite determinar la profundidad del módulo canónico de $G_A(\mathcal{I})$ en función de la profundidad del módulo canónico de A (Proposición 2.4.4) y relacionar la condición de Serre de los módulos $R(\mathbf{E})$ y $G(\mathbf{E})$ (Proposición 2.5.1).

En este capítulo recuperamos los resultados de [Co].

2.2 Finita graduación de los módulos de cohomología local

Sea $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ un anillo noetheriano, graduado positivamente. Recordemos que un S-modulo graduado $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ se dice que es finitamente graduado si $N_n = 0$ para todo n excepto un número finito. Sea J un ideal homogéneo de S.

En general, es difícil determinar para que enteros $i \in \mathbb{Z}$ los módulos de $H^i_J(N)$ son finitamente graduados. La siguiente nota puede encontrarse demostrada en [Ma, Sección 2].

Nota 2.2.1 (i) N S-finitamente graduado $\Rightarrow S_+ \subset \sqrt{Ann_S N}$. Además, si N es S-finito generado vale el recíproco.

(ii) N S-finitamente graduado $\Rightarrow H^i_J(N)$ finitamente graduado $\forall i$. Además, si S_0 es un anillo local y N es S-finito generado vale el recíproco.

Definimos entonces los siguientes invariantes:

$$g_J(N) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } H^i_J(N) \text{ es finitamente graduado } \forall i < k\},$$
$$t_J(N) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } S_+ \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_S H^i_J(N)} \ \forall i < k\}.$$

Notemos que $\operatorname{depth}_J N \leq g_J(N)$.

Faltings en [Fa, Satz 1] prueba el resultado siguiente:

supongamos que S un anillo noetheriano imagen homomorfa de un anillo regular. Sean J, K ideales de S y N un S-módulo finito generado. Entonces

$$\sup\{k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } K \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_S H^i_J(N)} \ \forall i < k\} =$$

$$\min_{\substack{p,q \in \mathrm{Spec} S \\ K \not\subseteq p \\ J+p \subseteq q}} \{\operatorname{depth} N_p + \operatorname{ht}(q/p)\}.$$

En [Ma] Marley prueba que si S, K y N son graduados en la fórmula anterior es suficiente considerar los ideales primos homogéneos de S y que $g_J(N) = t_J(N)$ (igualdad probada por Ikeda y Trung en [TI] cuando S_0 es local y J es el ideal maximal homogéneo de S). Agrupamos estos resultados en el siguiente lema (ver [Ma, Section 2] para su demostración). Denotamos HSpec S el conjunto de ideales primos homogéneos de S.

Lema 2.2.2 *Sea S un anillo noetheriano positivamente graduado, imagen homomorfa de un anillo regular y J un ideal homogéneo de S. Sea N un S-módulo finito generado. Entonces:*

$$g_J(N) = t_J(N) = \min_{\substack{p,q \in \mathrm{HSpecS} \\ S_+ \not\subseteq p \\ J+p \subseteq q}} \{\mathrm{depth}\, N_p + \mathrm{ht}\,(q/p)\}.$$

Nota 2.2.3 Si S es catenario y $p_1 \subset p_2 \subset q$ son ideales primos de S entonces depth S_{p_1} + ht $(q/p_1) \geq$ depth S_{p_2} + ht (q/p_2). Observemos pués que para el cálculo de $g_J(N)$ es suficiente considerar los ideales primos maximales del conjunto de ideales que no contienen S_+.

A partir de ahora en toda esta sección $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano, E un A-módulo, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración de ideales A, $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible y J un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$. Denotaremos $R := R_A(\mathcal{I})$, $G := G_A(\mathcal{I})$, e $\mathbf{I} := R_A(\mathcal{I})_+(1) = \bigoplus_{n\geq 0} I_{n+1}t^n$.

Como $G_A(\mathcal{I}) \simeq R_A(\mathcal{I})/\mathbf{I}$, el Lema 2.2.2 nos permite relacionar $g_J(R(\mathbf{E}))$ y $g_J(G(\mathbf{E}))$. Además, el siguiente lema nos será muy útil para tal fin.

Lema 2.2.4 *Sea $P \in \mathrm{Spec}R_A(\mathcal{I})$ tal que $R_A(\mathcal{I})_+ \not\subseteq P$. Sea $\mathbf{I} = R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Supongamos que $\mathbf{I} \subseteq P$ y sea $Q = P/\mathbf{I} \in \mathrm{Spec}G_A(\mathcal{I})$. Entonces*

$$\mathrm{depth} R(\mathbf{E})_P = \mathrm{depth} G(\mathbf{E})_Q + 1.$$

Demostración: Sea $x \in \mathbf{I}$ un elemento homogéneo de R tal que $xt \notin P$ (tal elemento existe ya que $R_+ \not\subseteq P$ e $\mathbf{I}t = R_+$). Veamos que $xR(\mathbf{E})_P = R(\mathbf{E})_+(1)_P$. Notemos que es suficiente demostrar la inclusión $R(\mathbf{E})_+(1)_P \subseteq xR(\mathbf{E})_P$. Sea $y \in E_{n+1}$, entonces $\frac{yt^n}{1} = x\frac{yt^{n+1}}{xt}$ con $yt^{n+1} \in R(\mathbf{E})$ y la inclusión es ahora inmediata. Por lo tanto $G(\mathbf{E})_Q \backsimeq (R(\mathbf{E})/R(\mathbf{E})_+(1))_Q \backsimeq R(\mathbf{E})_P/R(\mathbf{E})_+(1)_P \backsimeq R(\mathbf{E})_P/xR(\mathbf{E})_P$. Ahora es suficiente demostrar que $x \notin Z(R(\mathbf{E})_P)$. Supongamos lo contrario: entonces $x \in q = (0 :_R f)$ para algún primo asociado q de R, $q \subseteq P$. Así, $(xt)f = 0$ y $xt \in q \subset P$ contradiciendo la elección de x. □

Proposición 2.2.5 *Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es imagen homomorfa de un anillo local regular. Sea $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado. Sea $\mathbf{I} = R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Si $J \supseteq \mathbf{I}$ es un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ entonces:*

$$g_J(R(\mathbf{E})) = g_J(G(\mathbf{E})) + 1.$$

Demostración: Observemos que R y G son imagen homomorfa de un anillo regular por serlo A. Por lo tanto podremos aplicar el Lema 2.2.2.

Veamos primero la desigualdad $g_J(R(\mathbf{E})) \leq g_J(G(\mathbf{E})) + 1$: para ello podemos suponer $g_J(G(\mathbf{E})) < \infty$. Entonces $g_J(G(\mathbf{E})) = \operatorname{depth} G(\mathbf{E})_p + \operatorname{ht}(q/p)$ para ciertos $p, q \in$ HSpec R donde $p \not\supseteq R_+$ y $q \supset J + p$. Por el Lema 2.2.4 tenemos entonces

$$g_J(R(\mathbf{E})) \leq \operatorname{depth} R(\mathbf{E})_p + \operatorname{ht}(q/p) = \operatorname{depth} G(\mathbf{E})_p + 1 + \ h(q/p) = g_J(G(\mathbf{E})) + 1.$$

Para la desigualdad $g_J(G(\mathbf{E})) \leq g_J(R(\mathbf{E})) - 1$ podemos de nuevo suponer que $g_J(R(\mathbf{E}))$ es finito. Entonces $g_J(R(\mathbf{E})) = \operatorname{depth} R(\mathbf{E})_p + \operatorname{ht}(q/p)$ para ciertos $p, q \in$ HSpecR con $p \not\supseteq R_+$, $q \supseteq J + p$. Vamos a ver que existe $p' \in$ HSpecR tal que $(\mathbf{I}, p) \subseteq p' \subseteq q$ y $R_+ \not\subseteq p'$.

Esto es inmediato si $R_+ \not\subseteq q$. Si $R_+ \subseteq q$ localizando en $\mathfrak{q}_0 = q \cap A$ podemos suponer que $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{m}$ y que q es el ideal maximal homogéneo de R. En tal caso, si $R_+ \subseteq p'$ para todo ideal primo homogéneo $p' \supseteq (I, p)$ tendriamos que $R_+ \subset \sqrt{(I, p)}$. Así, $(R_+)^{n_0} \subset (I, p)$ para cierto entero n_0. Por ser R noetheriano existe un entero k tal que

$$I_n = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k = n} I_1^{\alpha_1} \cdots I_k^{\alpha_k}$$

para todo $n \geq 1$. Consideremos la función $\alpha_k(n)$ (introducida por Viet en [Vi]) definida como

$$\alpha_k(n) = \min_{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k = n} a_1 + \cdots + a_k.$$

En el posterior Lema 2.2.6 veremos que existe un entero $K \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_k(n) \geq n_0$ para todo $n \geq K$. Por lo tanto $I_1^{\alpha_1} \cdots I_k^{\alpha_k} t^n \subseteq (I_1 t, \cdots, I_k t^k)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \subseteq (I_1 t, \cdots, I_k t^k)^{\alpha_k(n)} \subseteq (R_+)^{\alpha_k(n)} \subseteq (R_+)^{n_0}$ e $I_n t^n \subseteq (R_+)^{n_0} \subseteq (I, p)\ \forall\, n \geq K$. Así, $I_n = I_{n+1} + p_n$ para todo $n \geq K$, donde p_n es la n-ésima componente del ideal primo homogéneo p.

Por otro lado, como $R_+ \not\subseteq p$ existe $1 \leq j \leq k$ tal que $I_j t^j \not\subseteq p$. Pero $p_{n+1} t^n (I_j t^j) = p_{n+1} t^{n+1} (I_j t^{j-1}) \subseteq p$, que implica $p_{n+1} \subseteq p_n$ para todo n ya que p es primo. Entonces $I_n = p_n + I_{n+1} = p_n + I_{n+2} = \bigcap_{m \geq 1} (p_n + I_{n+m}) = p_n\ \forall\, n \geq K$ luego $(R_+)^K \subseteq p$. Como p es primo esto implica que $R_+ \subseteq p$ contradiciendo la hipótesis sobre p.

Sea ahora $Q = p'/I$. Como R es catenario, podemos aplicar la Nota 2.2.3 obteniendo $g_J(R(\mathbf{E})) = \operatorname{depth} R(\mathbf{E})_p + \operatorname{ht}(q/p) = \operatorname{depth} R(\mathbf{E})_{p'} + \operatorname{ht}(q/p') = \operatorname{depth} G(\mathbf{E})_Q + 1 + \operatorname{ht}(q/p') \geq g_J(G(\mathbf{E})) + 1$ por el Lema 2.2.4. □

Acabaremos esta sección con la prueba del lema técnico anunciado como Lema 2.2.6. Su utilización en la demostración de la Proposición 2.2.5 supone un ejemplo de como las demostraciones de resultados sobre filtraciones ádicas pueden adaptarse (no trivialmente) al caso general.

Lema 2.2.6 *Sea k un entero positivo. Definimos para todo $n \geq 0$*

$$\alpha_k(n) := \min_{a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k = n} a_1 + \cdots + a_k. \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Si $n_0 > 0$, existe K tal que $\alpha_k(n) \geq n_0$ para todo $n \geq K$.

Demostración: Notemos que $\alpha_k(n) \geq 1\ \forall\, n, k$. Vamos a ver que

$$\alpha_k(n) = \begin{cases} r & \text{si} \quad n = rk \\ r+1 & \text{si} \quad n = rk + s \quad \text{con } 0 < s < k. \end{cases}$$

Entonces, tomando $K \geq k(n_0 - 1) + 1$ obtenemos el resultado.

Por definición $\alpha_1(n) = n$ para todo n, y si $n = 1, \ldots, k$ entonces $\alpha_k(n) = 1$ para todo k. Supongamos $n > k > 1$. Si $n = rk$ y $a_1, \ldots, a_k$ es una familia de enteros positivos tal que $a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k = rk$ debemos probar que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq r$. Supongamos primero que $a_k \neq 0$. Entonces $a_1 + 2a_2 + \cdots + (k-1)a_{k-1} = k(r - a_k) < kr = n$ con $0 < r - a_k < r$. Por inducción sobre r obtenemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \geq r - a_k$ y por tanto $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq r$.

Si $a_k = 0$, sea $k' = \max\{i \mid a_i \neq 0\} < k$. Entonces $a_1 + 2a_2 + \cdots + k'a_{k'} = n$ y por inducción sobre k obtenemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k'} \geq \alpha_{k'}(n) \geq [\frac{n}{k'}] \geq [\frac{n}{k}] = r,$$

donde [ ] denota la parte entera.

Supongamos ahora que $n = rk + s$ con $0 < s < k$ y sea $a_1, \ldots, a_k$ una familia de enteros positivos tal que $a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k = rk + s$. Debemos probar que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq r + 1$. Si $a_k \neq 0$ entonces $a_1 + 2a_2 + \cdots + (k-1)a_{k-1} = k(r - a_k) + s < kr + s = n$ con $0 < r - a_k < r$ y por inducción sobre r obtenemos $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \geq r - a_k + 1$, luego $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq r + 1$.

Si $a_k = 0$, sea k' como antes. Entonces, $a_1 + 2a_2 + \cdots + k'a_{k'} = n$ y por inducción sobre k tenemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 + \cdots + a_{k'} \geq \alpha_{k'}(n) = \begin{cases} r' & \text{si } n = r'k' \\ r' + 1 & \text{si } n = r'k' + s' \\ & \text{con } 0 < s' < k'. \end{cases}$$

Es fácil probar que en ambos casos $\alpha_{k'}(n) \geq r + 1$. □

2.3 Fórmulas para los grados

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano de dimensión d, $\mathcal{I}$ una filtración de ideales de A y E un A-módulo. El siguiente resultado relaciona los grados de un ideal de $R(\mathcal{I})$ en E y los módulos *blowup* asociados a una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Consideremos $R = R_A(\mathcal{I})$, $G = G_A(\mathcal{I})$ e $\mathbf{I} = R_+(1)$.

Teorema 2.3.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A y J un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ conteniendo $R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Sea E un A-módulo y $\mathbf{E}$ una filtración de E $\mathcal{I}$- compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es $R_A(\mathcal{I})$ finito generado. Entonces*

(i) $\operatorname{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \operatorname{depth}_J R(\mathbf{E})$.

(ii) $\operatorname{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \operatorname{depth}_{J \cap A} E$, *y*

si $\operatorname{depth}_J G(\mathbf{E}) < \operatorname{depth}_{J \cap A} E$ *entonces* $\operatorname{depth}_J R(\mathbf{E}) = \operatorname{depth}_J G(\mathbf{E}) + 1$.

Demostración: Tomando la completación $\mathfrak{m}$-ádica de A podemos suponer que A es imagen homomorfa de un anillo local regular (ver las Secciones 1.1 y 1.2).

Consideremos las sucesiones exactas de R-modulos graduados

$$0 \to R(\mathbf{E})_+ \to R(\mathbf{E}) \to E \to 0 \tag{2.1}$$

$$0 \to R(\mathbf{E})_+(1) \to R(\mathbf{E}) \to G(\mathbf{E}) \to 0 \tag{2.2}$$

y sean $g = \operatorname{depth}_J G(\mathbf{E})$, $r = \operatorname{depth}_J R(\mathbf{E})$, $s = \operatorname{depth}_{J\cap A} E$.

De las sucesiones exactas (2.1) y (2.2) obtenemos las sucesiones exactas largas de cohomologia local

$$\cdots \to H_J^i(R(\mathbf{E})_+) \to H_J^i(R(\mathbf{E})) \to H_J^i(E) \to H_J^{i+1}(R(\mathbf{E})_+) \to \cdots \tag{2.3}$$

$$\cdots \to H_J^i(R(\mathbf{E})_+(1)) \to H_J^i(R(\mathbf{E})) \to H_J^i(G(\mathbf{E})) \to H_J^{i+1}(R(\mathbf{E})_+(1)) \to \cdots \tag{2.4}$$

y tomando la componente de grado n tenemos las sucesiones exactas

$$\cdots \to H_J^i(R(\mathbf{E})_+)_n \to H_J^i(R(\mathbf{E}))_n \to H_J^i(E)_n \to H_J^{i+1}(R(\mathbf{E})_+)_n \to \cdots \tag{2.5}$$

$$\cdots \to H_J^i(R(\mathbf{E})_+)_{n+1} \to H_J^i(R(\mathbf{E}))_n \to H_J^i(G(\mathbf{E}))_n \to H_J^{i+1}(R(\mathbf{E})_+)_{n+1} \to \cdots \tag{2.6}$$

Es fácil ver que $H_J^i(E) = H_{J\cap A}^i(E)$. En particular, $H_J^i(E)_n = 0$ para todo $n \neq 0$. Obtenemos así de (2.5) isomorfismos $H_J^i(R(\mathbf{E})_+)_n \simeq H_J^i(R(\mathbf{E}))_n$ para todo i y $n \neq 0$ y de (2.6) isomorfismos $H_J^i(R(\mathbf{E})_+)_{n+1} \simeq H_J^i(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $i < g$ y todo n. Luego $H_J^i(R(\mathbf{E}))_n \simeq H_J^i(R(\mathbf{E}))_{n+1}$ para $n \neq -1$ e $i < g$. Por otra parte, por la Proposición 2.2.5, $g_J(R(\mathbf{E})) = g_J(G(\mathbf{E})) + 1 \geq g + 1$, y por lo tanto $H_J^i(R(\mathbf{E})) = 0$ para todo $i < g$. Así $\operatorname{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \operatorname{depth}_J R(\mathbf{E})$ y (i) está probado.

Para (ii) supongamos lo contrario. Entonces $s < g$. De la sucesión exacta larga (2.5) tenemos $0 \to H_J^s(E) \to H_J^{s+1}(R(\mathbf{E})_+)_0$ ya que $r \geq g > s$ en virtud de (i). Luego $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E})_+)_0 \neq 0$. De (2.6) obtenemos las inyecciones $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E})_+)_n \hookrightarrow H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_{n-1}$ para todo n ya que $H_J^s(G(\mathbf{E})) = 0$, en particular para $n = 0$ obtenemos $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_{-1} \neq 0$. Teniendo en cuenta que para todo $n \neq 0$ tenemos isomorfismos $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E})_+)_n \simeq H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_n$, obtenemos inyecciones $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_n \hookrightarrow H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_{n-1}$ para todo $n \neq 0$, y como $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))_{-1} \neq 0$ entonces $H_J^{s+1}(R(\mathbf{E}))$

no es finitamente graduado, lo cual implica $g_J(R(\mathbf{E})) \leq s+1 < g+1 \leq g_J(G(\mathbf{E}))+1$. Esto es una contradicción con la Proposición 2.2.5.

Además, si $g < s$ de (2.5) obtenemos $H^i_J(R(\mathbf{E})_+)_n \simeq H^i_J(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $i \leq g$ y de (2.6) las inyecciones $H^i_J(R(\mathbf{E})_+)_{n+1} \hookrightarrow H^i_J(R(\mathbf{E}))_n$ para todo n y $i \leq g$. Por lo tanto $H^i_J(R(\mathbf{E}))_{n+1} \hookrightarrow H^i_J(R(\mathbf{E}))_n$ para $i \leq g$. Así, $H^i_J(R(\mathbf{E})) = 0$ si $i \leq g$ ya que $g_J(R(\mathbf{E})) = g_J(G(\mathbf{E}))+1 \geq g+1$ obteniendo $r \geq g+1$. Por otra parte, de (2.3) y (2.4) obtenemos respectivamente $H^i_{J\cap A}(E) \simeq H^{i+1}_J(R(\mathbf{E})_+)$ y $H^i_J(G(\mathbf{E})) \simeq H^{i+1}_J(R(\mathbf{E})_+(1))$ para todo $i \leq r-2$, por lo que $H^i_{J\cap A}(E) \simeq H^i_J(G(\mathbf{E}))$ si $i \leq r-2$. En particular, si $r \geq g+2$ tendríamos $H^g_J(G(\mathbf{E})) \simeq H^g_{J\cap A}(E) \neq 0$ y por tanto $g = s$, contradiciendo nuestra hipótesis. □

Para $J = \mathcal{M}$, el ideal maximal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.2 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A, E un A-módulo y $\mathbf{E}$ una filtración de E $\mathcal{I}$ compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado. Entonces:*

(i) $\operatorname{depth} G(\mathbf{E}) \leq \operatorname{depth} R(\mathbf{E})$.

(ii) $\operatorname{depth} G(\mathbf{E}) \leq \operatorname{depth} E$, *y*

si $\operatorname{depth} G(\mathbf{E}) < \operatorname{depth} E$ *entonces* $\operatorname{depth} R(\mathbf{E}) = \operatorname{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

(iii) Si $a_{\operatorname{depth} G(\mathbf{E})}(G(\mathbf{E})) < 0$, *entonces* $\operatorname{depth} R(\mathbf{E}) \geq \operatorname{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

Demostración: (i) y (ii) se obtienen directamente del Teorema 2.3.1 teniendo en cuenta que $H^i_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E})) \simeq H^i_{\overline{\mathcal{M}}}(G(\mathbf{E}))$ donde $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathbf{I}$ es el ideal maximal homogéneo de $G(\mathcal{I})$. Vamos a probar (iii). Sea $g = \operatorname{depth} G(\mathbf{E})$. Como $\operatorname{depth} R(\mathbf{E}) \geq g$ es suficiente ver que $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E})) = 0$. De la sucesión exacta larga (2.5) para $J = \mathcal{M}$ obtenemos $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E})_+)_n \simeq H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $n \neq 0$, y por tanto de (2.6) obtenemos inyecciones $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_{n+1} \hookrightarrow H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $n \neq -1$. Por otra parte, como $g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E})) = g_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E})) + 1 \geq g+1$ por la Proposición 2.2.5, $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))$ es finitamente graduado y en particular $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n = 0$ para $n \ll 0$. Así $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n = 0$ para $n \leq -1$. Además para $n \geq 0$ tenemos por hipótesis que $H^g_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E}))_n = 0$ y por tanto isomorfismos $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_{n+1} \simeq H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$. Como $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n = 0$ para $n \gg 0$ tenemos $H^g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n = 0$ para todo $n \geq 0$. □

En particular, para $\mathbf{E} = \mathcal{I}$ tenemos:

Teorema 2.3.3 *Sea $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A y J un ideal homogéneo de $R_A(\mathcal{I})$ conteniendo $R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Entonces*

(i) $\operatorname{depth}_J G_A(\mathcal{I}) \leq \operatorname{depth}_J R_A(\mathcal{I})$.

(ii) $\operatorname{depth}_J G_A(\mathcal{I}) \leq \operatorname{depth}_{J\cap A} A$, *y*

si $\operatorname{depth}_J G_A(\mathcal{I}) < \operatorname{depth}_{J\cap A} A$ *entonces* $\operatorname{depth}_J R_A(\mathcal{I}) = \operatorname{depth}_J G_A(\mathcal{I}) + 1$.

Corolario 2.3.4 *Sean $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A. Entonces*

(i) $\operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) \leq \operatorname{depth} R_A(\mathcal{I})$.

(ii) $\operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) \leq \operatorname{depth} A$, *y*

si $\operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) < \operatorname{depth} A$ *entonces* $\operatorname{depth} R_A(\mathcal{I}) = \operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) + 1$.

(iii) Si $a_{\operatorname{depth} G_A(\mathcal{I})}(G_A(\mathcal{I})) < 0$, *entonces* $\operatorname{depth} R_A(\mathcal{I}) \geq \operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) + 1$.

Nota 2.3.5 Del Corolario 2.3.2 (ii) obtenemos que si E es Cohen-Macaulay y $G(\mathbf{E})$ no es Cohen-Macaulay entonces $\operatorname{depth} R(\mathbf{E}) = \operatorname{depth} G(\mathbf{E}) + 1$. Si además $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$ entonces $R(\mathbf{E})$ no es Cohen-Macaulay. Notemos también que si $G(\mathbf{E})$ es Cohen-Macaulay y $a(G(\mathbf{E})) < 0$ entonces $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$.

Como aplicación de Corolario 2.3.4 obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.3.6 *Sea A un anillo local regular de dimension d y $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A con* $\operatorname{ht} I_1 > 0$. *Entonces* $\operatorname{depth} R_A(\mathcal{I}) = \operatorname{depth} G_A(\mathcal{I}) + 1$.

Demostración: Notemos que $\dim R(\mathcal{I}) = d + 1$ ya que $\operatorname{ht} I_1 > 0$. Si $G(\mathcal{I})$ no es C.M. la afirmación es cierta por el Corolario 2.3.4 (ii). Además, $G(\mathcal{I})$ es C.M. si y solo si $R(\mathcal{I})$ es C.M. por el resultado probado por Lipman [Li3, Theorem 5] (ver también Goto [Go]). Por tanto la afirmación también es cierta en este caso. □

Ejemplo 2.3.7 Sea A un anillo local regular y $\mathfrak{p} \neq 0$ un ideal primo de A. Consideremos

$$R_s(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} t^n$$
$$G_s(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}/\mathfrak{p}^{(n+1)}$$

y supongamos $R_s(\mathfrak{p})$ es noetheriano. Entonces $\operatorname{depth} R_s(\mathfrak{p}) = \operatorname{depth} G_s(\mathfrak{p}) + 1$. Este caso particular fue estudiado por Goto, Nishida y Shimoda [GNS, Theorem 2.1] cuando $\dim A = 3$ y $\dim A/\mathfrak{p} = 1$.

Corolario 2.3.8 *Sea $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ un anillo graduado noetheriano con S_0 anillo local. Consideremos la filtración $\mathcal{I}'_n := \bigoplus_{m\geq n} S_m$. Si $a_{\operatorname{depth} S}(S) < 0$ entonces $\operatorname{depth} R(\mathcal{I}') \geq \operatorname{depth} S + 1$. En particular, si S es Cohen-Macaulay y $a(S) < 0$ entonces $R(\mathcal{I}')$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de S_0 y $\mathcal{M} = \mathfrak{m} \oplus S_+$, $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \oplus R(\mathcal{I}')_+$, $\mathcal{M}''$ respectivamente los ideales maximales homogéneos de S, $R_S(\mathcal{I}')$ y $R_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_\mathcal{M})$. Entonces $\operatorname{depth} S = \operatorname{depth} S_\mathcal{M}$, $\operatorname{depth} R_S(\mathcal{I}') = \operatorname{depth} R_S(\mathcal{I}')_{\mathcal{M}'} = \operatorname{depth}(R_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_\mathcal{M}))_{\mathcal{M}''} = \operatorname{depth} R_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_\mathcal{M})$, y $G_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_\mathcal{M}) = G_S(\mathcal{I}') \otimes_S S_\mathcal{M} = G(\mathcal{I}') \simeq S$ como anillos graduados.

Aplicando el Corolario 2.3.4 (iii) a la filtración noetheriana $\mathcal{I}'_\mathcal{M}$ de $S_\mathcal{M}$ obtenemos que $\operatorname{depth} R_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_M) \geq \operatorname{depth} G_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_\mathcal{M}) + 1$ ya que $a_{\operatorname{depth} G_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_M)}(G_{S_\mathcal{M}}(\mathcal{I}'_M)) = a_{\operatorname{depth} S}(S) < 0$, y por tanto $\operatorname{depth} R_S(\mathcal{I}') \geq \operatorname{depth} S + 1$. $\square$

Si S es el álgebra de Rees de una filtración noetheriana recuperamos un resultado de Goto y Nishida [GNi, Part II, Corollary 6.4]:

Ejemplo 2.3.9 Sea A un anillo local y $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de A con $\operatorname{ht} I_1 > 0$. Consideremos el algebra de Rees $R(\mathcal{I})$ y la filtración $\mathcal{I}'_n = \bigoplus_{m\geq n} R(\mathcal{I})_m = \bigoplus_{m\geq n} I_m$. Si $R(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay, entonces $a_{\operatorname{depth} R(\mathcal{I})}(R(\mathcal{I})) = a(R(\mathcal{I})) = -1 < 0$ (ver [GNi, Part II, Lemma 3.3]) y por tanto $R(\mathcal{I}')$ es también Cohen-Macaulay.

El siguiente resultado es una generalización al caso de filtraciones de módulos de un resultado de Viet [Vi] (ver la Proposición 1.6.4 de los preliminares) para filtraciones de ideales de A.

Proposición 2.3.10 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A, E un A-módulo y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado y que $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$. Entonces:*

$$R(\mathbf{E}) \textit{es Cohen-Macaulay} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [H^i_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E}))]_n = 0 \textit{ si } n \neq -1,\ i = 0, \ldots, \dim E - 1. \\ [H^{\dim E}_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E}))]_n = 0 \textit{ si } n \geq 0. \end{array} \right.$$

En este caso, $H^i_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E})) \simeq H^i_{\mathfrak{m}}(E)$ para $i = 0, \ldots, \dim E - 1$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Considerando las sucesiones exactas largas de cohomologia local (2.5) y (2.6) podemos proceder como en [Vi] para obtener el resultado.

($\Leftarrow$) Veamos que $H^i_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E})) = 0$ para todo $i \leq \dim E$. De (2.5) y (2.6) obtenemos isomorfismos $H^i_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_{n+1} \simeq H^i_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $n \neq -1$ y todo $i = 0, \ldots, \dim E - 1$, isomorfismos $H^{\dim E}_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_{n+1} \simeq H^{\dim E}_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$ para $n \geq 0$ y también inyecciones $H^{\dim E}_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_{n+1} \hookrightarrow H^{\dim E}_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))_n$ para todo $n \neq -1$. Por lo tanto es suficiente ver que $H^i_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))$ es finitamente graduado para todo $i \leq \dim E$. Por la Proposición 2.2.5 $g_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E})) = g_{\mathcal{M}}(G(\mathbf{E})) + 1 \geq \dim E + 1$. Así, $H^i_{\mathcal{M}}(R(\mathbf{E}))$ es finitamente graduado para todo $i \leq \dim E$. □

En el caso que E sea Cohen-Macaulay obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.11 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A, E un A-módulo Cohen-Macaulay y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado y que $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$. Entonces:*

$$R(\mathbf{E}) \textit{ es Cohen-Macaulay } \Leftrightarrow G(\mathbf{E}) \textit{ es Cohen-Macaulay y } a(G(\mathbf{E})) < 0.$$

Nota 2.3.12 Notemos que la implicación ($\Leftarrow$) se obtiene también por el Corolario 2.3.2 (iii).

2.4 El módulo canónico

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano de dimensión d, $\mathcal{I}$ una filtración de ideales de A y E un A-módulo.

Sea $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración del A-módulo E. Sea $l \in \mathbb{Z}$ un entero arbitrario. Denotaremos por ${}^l\mathbf{E}$ a la filtración del A-módulo E_l definida por ${}^l\mathbf{E}_n = E_{n+l}$, donde $E_{n+l} = E$ si $n+l < 0$. Si $\mathcal{I}$ es una filtración de ideales y $\mathbf{E}$ es $\mathcal{I}$-compatible, entonces ${}^l\mathbf{E}$ es $\mathcal{I}$-compatible. Notemos que ${}^0\mathbf{E} = \mathbf{E}$. Denotaremos también por $a(\mathbf{E})$ al invariante de $\mathbf{E}$ definido como $a(\mathbf{E}) = \max\{n \mid E_0 = E_1 = \cdots = E_n\}$. El siguiente resultado relaciona las profundidades de los módulos *blowup* asociados a ${}^l\mathbf{E}$ con las de los módulos *blowup* asociados a $\mathbf{E}$.

Corolario 2.4.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A, E un A-módulo y $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de E $\mathcal{I}$-compatible. Supongamos que $R(\mathbf{E})$ es un $R_A(\mathcal{I})$-módulo finito generado. Sea $r \in \mathbb{Z}$ un entero no negativo. Entonces:*

(i) $\text{depth} R({}^{-r}\mathbf{E}) \geq \text{depth} G(\mathbf{E})$.

(ii) $\text{depth} G(\mathbf{E}) < \text{depth} E \Rightarrow \text{depth} R({}^{-r}\mathbf{E}) = \text{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

(iii) $r < -a_{\text{depth} G(\mathbf{E})}(G(\mathbf{E})) \Rightarrow \text{depth} R({}^{-r}\mathbf{E}) \geq \text{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

En particular, si E es Cohen-Macaulay:

(iv) *$G(\mathbf{E})$ no Cohen-Macaulay* $\Rightarrow \text{depth} R({}^{-r}\mathbf{E}) = \text{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

(v) *Supongamos que* $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$. *Entonces,*

$R({}^{-r}\mathbf{E})$ es Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $G(\mathbf{E})$ es Cohen-Macaulay y $r < -a(G(\mathbf{E}))$.

Demostración: Notemos que $G({}^{-r}\mathbf{E}) = G(\mathbf{E})(-r)$. En particular tenemos las igualdades $\text{depth} G({}^{-r}\mathbf{E}) = \text{depth} G(\mathbf{E})$ y $a_i(G({}^{-r}\mathbf{E})) = a_i(G(\mathbf{E})) + r$. Por lo tanto (i), (ii) y (iii) se obtienen inmediatamente del Corolario 2.3.2. (iv) es un caso paticular de (ii). Para probar (v) podemos aplicar la Proposición 2.3.10. $\square$

Si en el corolario anterior tomamos $\mathbf{E} = \mathcal{I} = (I^n)_{n\geq 0}$ recuperamos los siguientes resultados de Morey, Noh, Vasconcelos en [MNV] y de Herzog, Simis y Vasconcelos en [HSV3]. Siguiendo las notaciones de [MNV] y [HSV3], si r es un entero denotaremos por $(1,t)^r := A \oplus At \oplus \cdots \oplus It^{r+1} \oplus I^2t^{r+2} \oplus \cdots = R({}^{-r}\mathcal{I})$.

Corolario 2.4.2 *[MNV, Proposition 1] Sean A un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal de altura positiva. Si $G_A(I)$ no es Cohen-Macaulay y* $\mathrm{grade}(G_A(I)_+) > 0$*, entonces:*

$$\mathrm{depth}(1,t)^r \geq \begin{cases} \mathrm{depth} G_A(I) + 1, & si\ r = 1, \\ \mathrm{depth} G_A(I) & si\ r > 1. \end{cases}$$

Demostración: Por el Corolario 2.4.1 (ii) tenemos que $\mathrm{depth}(1,t)^r = \mathrm{depth} G_A(I) + 1$ para todo $r \geq 0$. □

Corolario 2.4.3 *[HSV3, Theorem 2.6] Sean A un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal con* $\mathrm{grade}(I) \geq 2$*. Supongamos que $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay. Entonces $(1,t)^r$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $r \leq -a(G_A(I)) - 1$.*

Demostración: Por el Corolario 2.3.11 tenemos que $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay. Aplicando ahora el Corolario 2.4.1 (v) obtenemos el resultado. □

Supongamos que A tiene módulo canónico K_A. Sea $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de ideales de A con $\dim R(\mathcal{I}) = d+1$. Sean $K_{R_A(\mathcal{I})}$ y $K_{G_A(\mathcal{I})}$ respectivamente los módulos canónicos de $R_A(\mathcal{I})$ y $G_A(\mathcal{I})$. Trung, Viet y Zarzuela [TVZ] demuestran que si $R(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay entonces existe una filtración $\mathbf{K} = (K_n)_{n\geq 0}$ de K_A $\mathcal{I}$-compatible y noetheriana tal que $K_{R_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_n$ y $K_{G_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_{n-1}/K_n$. En este caso podemos utilizar los resultados anteriores para determinar la profundidad del módulo canónico de $G_A(\mathcal{I})$ en función de la del módulo canónico de A.

Proposición 2.4.4 *Sean $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de ideales de A con $\dim R_A(\mathcal{I}) = d+1$. Supongamos que $R_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay y que $a(G_A(\mathcal{I})) \leq -2$. Entonces:*

$$\mathrm{depth} K_{G_A(\mathcal{I})} = \mathrm{depth} K_A.$$

Demostración: Sea $\mathbf{K} = (K_n)_{n\geq 0}$ la filtración de K_A tal que $K_{R_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_n = R(^1\mathbf{K})(-1)$ y $K_{G_A(\mathcal{I})} \simeq \bigoplus_{n\geq 1} K_{n-1}/K_n = G(\mathbf{K})(-1)$. Como $a(G_A(\mathcal{I})) = -\min\{n \mid [K_{G_A(\mathcal{I})}]_n \neq 0\} \leq -2$ por hipótesis, tenemos que $a(\mathbf{K}) \geq 1$. Es decir, $K_A \simeq K_0 = K_1$. Por lo tanto $\mathrm{depth} K_{G_A(\mathcal{I})} = \mathrm{depth} G(^1\mathbf{K})$. Luego, en este caso, tenemos que $K_{R_A(\mathcal{I})}$ y $K_{G_A(\mathcal{I})}$ pueden tomarse respectivamente como el anillo de Rees y el anillo graduado asociado a una filtración del A-módulo K_A.

Como $R(\mathcal{I})$ es C.M., también lo es su módulo canónico. Luego, $R(^1\mathbf{K})$ es C.M. Por otra parte, por el Corolario 2.3.2 tenemos $\text{depth}K_{G_A(\mathcal{I})} = \text{depth}G(^1\mathbf{K}) \leq \text{depth}K_A$. Supongamos que $\text{depth}G(^1\mathbf{K}) < \text{depth}K_A$; entonces el Corolario 2.3.2 asegura que $\text{depth}R(^1\mathbf{K}) = \text{depth}G(^1\mathbf{K}) + 1 < \text{depth}K_A + 1 \leq d + 1$ contradiciendo las hipótesis. □

2.5 La propiedad de Serre

Vamos ahora a estudiar la condición de Serre los módulos *blowup* utilizando las técnicas y resultados del Teorema 2.3.1. El siguiente resultado está probado para el caso de filtraciones de ideales ádicas por Aberbach, Huneke y Trung [AHT, Theorem 6.8] mediante métodos distintos.

Proposición 2.5.1 *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local,* $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ *una filtración noetheriana de* A*,* E *un* A*-módulo y* $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ *una filtración de* E $\mathcal{I}$*-compatible con* $\dim R(\mathbf{E}) = \dim E + 1$*. Supongamos que* $R(\mathbf{E})$ *es un* $R(\mathcal{I})$*-módulo finito generado. Si* E *satisface* S_{k+1} *entonces:*

$$R(\mathbf{E})\ satisface\ S_{k+1} \Longleftrightarrow \begin{cases} G(\mathbf{E}) & satisface\ S_k \\ R(\mathbf{E}_\mathfrak{p}) & es\ \textit{Cohen-Macaulay}\, \forall\, \mathfrak{p} \supset I_1\ con\ \dim E_\mathfrak{p} \leq k. \end{cases}$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que $R(\mathbf{E})$ satisface S_{k+1} y sea Q un ideal primo de G. Probaremos que $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q \geq \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k\}$. Notemos que es suficiente considerar ideales primos homogéneos. Sea $P \in \text{Spec}R$ tal que $Q = P/\mathbf{I}$ y sea $\mathfrak{p} = P \cap A$. Localizando en $\mathfrak{p}$ podemos suponer que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ ya que $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}_{G(\mathcal{I}_\mathfrak{p})_Q} G(\mathbf{E}_\mathfrak{p})_Q$. Si $P \not\supseteq R_+$ por el Lema 2.2.4 $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}R(\mathbf{E})_P - 1 \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k + 1\} - 1 = \min\{\dim R(\mathbf{E})_P - 1, k\} = \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k\}$, ya que $R(\mathbf{E})$ satisface S_{k+1} y $G(\mathbf{E})_Q \simeq R(\mathbf{E})_P / xR(\mathbf{E})_P$ para cierto elemento x regular en $R(\mathbf{E})_P$ (ver la demostración del Lema 2.2.4).

Supongamos $P \supset R_+$. Entonces $P = \mathcal{M}$, el ideal maximal homogéneo de R. Por el Teorema 2.3.3 (ii), $\text{depth}G(\mathbf{E}) \leq \text{depth}E$ y si $\text{depth}G(\mathbf{E}) < \text{depth}E$ entonces $\text{depth}G(\mathbf{E}) = \text{depth}R(\mathbf{E}) - 1$; por tanto $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}_Q G(\mathbf{E}) = \text{depth}_P R(\mathbf{E}) - 1 = \text{depth}R(\mathbf{E})_P - 1 \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k + 1\} - 1 = \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k\}$ ya que $R(\mathbf{E})$

satisface S_{k+1} y $\dim R(\mathbf{E}) = \dim G(\mathbf{E}) + 1$. Supongamos $\text{depth}G(\mathbf{E}) = \text{depth}E$, entonces $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}E_{\mathfrak{p}} \geq \min\{\dim E_{\mathfrak{p}}, k+1\} = \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k+1\} \geq \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k\}$, ya que E satisface S_{k+1}.

Sea ahora $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \supset I_1$ y $\dim E_{\mathfrak{p}} \leq k$. Queremos ver que $R(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}})$ es C.M. Considerando $P = (\mathfrak{p}, R_+)$ en Spec$R$ es suficiente probar que $R(\mathbf{E})_P$ es C.M. ya que éste es la localización de $R(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}})$ en el único ideal maximal homogéneo de $R(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}})$. Como $R(\mathbf{E})$ satisface S_{k+1} obtenemos $\text{depth}R(\mathbf{E})_P \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$, y por tanto es suficiente ver que $\dim R(\mathbf{E})_P \leq k+1$. Pero $\dim R(\mathbf{E})_P \leq \dim E_{\mathfrak{p}} + 1 \leq \text{ht}\,\mathfrak{p} + 1 \leq k+1$.

($\Leftarrow$) Sea P un ideal primo de Spec$R$. Veamos que ahora que tenemos la desigualdad $\text{depth}R(\mathbf{E})_P \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$. Como antes es suficiente considerar ideal primos homogéneos. Sea $\mathfrak{p} = P \cap A$. Si $\mathfrak{p} \not\supseteq I_1$ entonces $R(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}) = A_{\mathfrak{p}}[t]$ y $R(\mathbf{E}_{\mathfrak{p}}) = E_{\mathfrak{p}}[t]$ ya que $A_{\mathfrak{p}} = (I_1^n)_{\mathfrak{p}} \subseteq (I_n)_{\mathfrak{p}}$ y $A_{\mathfrak{p}}(E_n)_{\mathfrak{p}} \subseteq (E_{n+1})_{\mathfrak{p}}$. Entonces $R(\mathbf{E}_{\mathfrak{p}})$ satisface S_{k+1} y $R(\mathbf{E})_P$ también satisface S_{k+1} por ser una localización de $R(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}})$. De hecho, $\text{depth}R(\mathbf{E})_P \geq \text{depth}R(E_{\mathfrak{p}}) = \text{depth}E_{\mathfrak{p}}[t] \geq \min\{\dim E_{\mathfrak{p}}[t], k+1\} = \min\{\dim E_{\mathfrak{p}}+1, k+1\} \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$.

Supongamos $\mathfrak{p} \supset I_1$. Localizando en $\mathfrak{p}$ podemos suponer $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Si $P \not\supseteq \mathbf{I}$ podemos considerar un elemento $x = at^n \notin P$, $a \in I_{n+1}$. Entonces $t = \frac{at^{n+1}}{x} \in R_x$ y $R_x = A[t]_x$. Luego, $R(\mathbf{E})_x = E[t]_x$ y $R(\mathbf{E})_P$ satisface S_{k+1} porque es una localización de $R(\mathbf{E})_x$. Supongamos $P \supset \mathbf{I}$. Sea $Q = P/\mathbf{I} \in \text{Spec}G$. Si $P \not\supseteq R_+$ podemos concluir como en la primera parte de la prueba de ($\Rightarrow$). Si $P \supset R_+$ entonces $P = \mathcal{M}$ y por el Teorema 2.3.3(ii) $\text{depth}G(\mathbf{E}) \leq \text{depth}E$. Si $\text{depth}G(\mathbf{E}) < \text{depth}E$ entonces $\text{depth}R(\mathbf{E})_P = \text{depth}G(\mathbf{E})_Q + 1 \geq \min\{\dim G(\mathbf{E})_Q, k\} + 1 = \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$. Supongamos ahora que $\text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}E_{\mathfrak{p}}$. Si $\dim E_{\mathfrak{p}} \leq k$ entonces $R(\mathbf{E}_{\mathfrak{p}})$ es C.M. por hipótesis y también lo será $R(\mathbf{E})$, de hecho $\text{depth}R(\mathbf{E})_P = \text{depth}R(\mathbf{E}_{\mathfrak{p}}) = \dim E_{\mathfrak{p}} + 1 \geq \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$. Si $\dim E_{\mathfrak{p}} \geq k+1$ por el Teorema 2.3.3(i) $\text{depth}R(\mathbf{E})_P \geq \text{depth}G(\mathbf{E})_Q = \text{depth}E_{\mathfrak{p}} \geq \min\{\dim E_{\mathfrak{p}}, k+1\} = \min\{\dim R(\mathbf{E})_P, k+1\}$ ya que E satisface S_{k+1} y $\dim R(\mathbf{E})_P = \dim E_{\mathfrak{p}} + 1 \geq k+1$. □

Nota 2.5.2 Notemos que para probar que la propiedad S_{k+1} de $R(\mathbf{E})$ implica la propiedad S_k para $G(\mathbf{E})$ es suficiente que E sea S_k.

En particular para filtraciones de ideales tenemos:

Proposición 2.5.3 *Sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A tal que* $\mathrm{ht}\,(I_1) > 0$ *y supongamos que A satisface S_{k+1}. Entonces:*

$$R_A(\mathcal{I}) \ satisface \ S_{k+1} \Longleftrightarrow \begin{cases} G_A(\mathcal{I}) & satisface \ S_k \\ R_{A_\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) & es \text{ Cohen-Macaulay } \forall \mathfrak{p} \supset I_1 \text{ con } \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq k. \end{cases}$$

Como consecuencia de la Proposición 2.5.3 obtenemos el siguiente resultado probado en el caso ádico por Noh y Vasconcelos.

Proposición 2.5.4 *[NV, Theorem 2.2] Supongamos que A satisface S_{k+1} y sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de A. Si* $\mathrm{ht}\,I_1 \geq k+1$, *entonces $R_A(\mathcal{I})$ satisface S_{k+1} si y solo si $G_A(\mathcal{I})$ satisface S_k.*

Sea I un ideal de A. Diremos que el módulo canónico $K_{R(\mathcal{I})}$ de $R_A(\mathcal{I})$ tiene la forma esperada si $K_{R(\mathcal{I})} = At \oplus \cdots \oplus At^r \oplus It^{r+1} \oplus \cdots$ para algún $r \geq 0$. Los resultados anteriores nos permiten obtener el siguiente resultado de Herrmann, Hyry y Korb [HHK].

Corolario 2.5.5 *[HHK, Lema 5.1] Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e I un ideal de A de altura positiva tal que el módulo canónico $K_{R_A(I)}$ tiene la forma esperada. Sea k un entero tal que A y $R_A(I)$satisfacen S_k. Entonces $K_{R_A(I)}$ también satisface S_k.*

Demostración: $K_{R(I)} = At \oplus \cdots \oplus At^r \oplus It^{r+1} \oplus \cdots$ para $r = -(a(G(I)) + 1)$. Es decir, considerando $\mathcal{I} = (I^n)_{n\geq 0}$, $K_{R(I)} \simeq R(^{-(r-1)}\mathcal{I})(1)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.5.1 es suficiente ver que $G(^{-(r-1)}\mathcal{I})$ satisface S_{k-1} y que $R(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p})$ es C.M. para todo $\mathfrak{p} \supseteq I$ con $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq k-1$.

Por otra parte, como A y $R(I)$ satisfacen S_k, por la Proposición 2.5.3 tenemos que $G(I)$ satisface S_{k-1} y $R(I_\mathfrak{p})$ es C.M. para todo $\mathfrak{p} \supseteq I$ con $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq k-1$. Como $G(I)(-(r-1)) = G(^{-(r-1)}\mathcal{I})$ es suficiente ver que $R(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p})$ es C.M. para todo $\mathfrak{p} \supseteq I$ con $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq k-1$. Sea $\mathfrak{p} \supseteq I$ con $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq k-1$. Entonces $A_\mathfrak{p}$ es C.M. ya que A satisface S_k. Ahora, aplicando el Corolario 2.3.11, es suficiente ver que $G(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p})$ es C.M. y $a(G(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p})) < 0$. Es inmediato que $\mathrm{depth} G(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathrm{depth} G(I_\mathfrak{p})$ y que $a(G(^{-(r-1)}\mathcal{I}_\mathfrak{p})) = a(G(I_\mathfrak{p})) + r - 1 = a(G(I_\mathfrak{p})) - a(G(I)) - 2$. Por otra parte $G(I_\mathfrak{p})$ es C.M. de nuevo por el Corolario 2.3.11. Luego habremos concluido si $a(G(I_\mathfrak{p})) - a(G(I)) \leq 0$. Ahora bien, $K_{R(I_\mathfrak{p})} \simeq (K_{R(I)})_\mathfrak{p}$ (ver [GNi, (2.10)]) y por tanto $a(G(I_\mathfrak{p})) \leq a(G(I))$. □

Capítulo 3

Fórmulas para la profundidad de los anillos graduados asociados a un ideal

3.1 Introducción

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay de dimensión d e I un ideal de A. El objetivo de este capítulo es calcular la profundidad de los anillos graduados asociados a I en función de las profundidades de los anillos A/I^n. La dificultad aumenta cuanto mayor es el número de reducción del ideal. Aquí obtenemos resultados para el caso en que el número de reducción es menor o igual que 2 y la desviación analítica es menor o igual que 1. Expondremos a continuación los resultados conocidos en este sentido.

Supongamos que I es un ideal equimúltiple, es decir $\mathrm{ad}(I) = 0$. Si $r(I) = 0$, equivalentemente si I esta generado por una sucesión regular, el anillo $G_A(I)$ es isomorfo al anillo de polinomios en $\mu(I)$ variables con coeficientes en A/I y por tanto es Cohen-Macaulay. Además, tenemos por Barshay [Ba] que el anillo de Rees $R_A(I)$ es siempre Cohen-Macaulay.

Si $r(I) = 1$ Ikeda y Trung en [TI] obtienen el siguiente resultado.

Proposición *Sea I un ideal equimúltiple con $r(I) = 1$ y supongamos* $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A/I *es un anillo Cohen-Macaulay.*

(ii) $G_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

(iii) $R_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

Si $r(I) = 2$ e $I = \mathfrak{m}$, Sally prueba en [Sa1] que $G(\mathfrak{m})$ es Cohen-Macaulay. En [TI] se obtiene la siguiente generalización.

Proposición *Sea I un ideal equimúltiple con $r(I) = 2$. Supongamos que* $\mathrm{ht}\,(I) \geq 3$ *y* $G_A(I)$ *es un A/I-módulo plano. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A/I *es un anillo Cohen-Macaulay.*

(ii) $G_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

(iii) $R_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

Supongamos ahora $\mathrm{ad}(I) = 1$. Si $r(I) \leq 1$ Huckaba y Huneke obtienen en [HH1] y [HH2] lo siguiente:

Proposición *Sea I un ideal de altura positiva con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y genericamente intersección completa. Si $r(I) \leq 1$ las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) $\mathrm{depth} A/I \geq \dim A/I - 1$.

(ii) $G_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

(iii) $R_A(I)$ *es un anillo Cohen-Macaulay.*

Zarzuela en [Zar] obtiene en este caso las siguientes fórmulas para las profundidades de $G_A(I)$ y $R_A(I)$, que extienden los resultados ya conocidos de Brodmann [Br] para ideales casi intersección completa ($\mathrm{ad}(I) = 1$ y r(I)=0).

Proposición *Sea I un ideal de A. Supongamos* $\mathrm{ht}\,(I) \geq 1$, $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y genericamente intersección completa. Si $r(I) \leq 1$ entonces:*

(i) $\mathrm{depth} G_A(I) = \min\{\dim A, \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I) + 1\}$.

(ii) $\mathrm{depth} R_A(I) = \min\{\dim A + 1, \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I) + 2\}$.

Para $r(I) \leq 2$ Goto y Nakamura en [GN1] obtienen el siguiente resultado.

Proposición *Sea I un ideal con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y genericamente intersección completa. Supongamos que A/I es un anillo Cohen-Macaulay. Si $r(I) \leq 2$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $\mathrm{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 1$.

(ii) $G_A(I)$ es un anillo Cohen-Macaulay.

Entonces $R_A(I)$ es Cohen-Macaulay si $\dim A \geq 3$ *y* $\dim A/I = 1$.

Notemos que $G_A(I)$ puede ser Cohen-Macaulay sin serlo A/I (ver los ejemplos de Huckaba y Huneke en [HH1, Section 4]).

Los resultados que obtendremos aquí proporcionan fórmulas para la profundidad de $G_A(I)$ en los casos siguientes. En el caso equimúltiple y número de reducción menor o igual que 1 veremos:

Teorema 3.1.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) \leq 1$. Entonces:*

$$\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I).$$

En particular, este resultado nos permitirá recuperar el de [TI].

Para $r(I) \leq 2$ obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 3.1.2 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple íntegramente cerrado de A. Supongamos que $r(I) \leq 2$. Entonces:*

$$\begin{gathered}\min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) - 1 \leq \\ \mathrm{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I).\end{gathered}$$

Además,

(i) *si* $\operatorname{depth} A/I^2 < \operatorname{depth} A/I$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I^2 + \operatorname{ht}(I)$, *y*

(ii) *si* $\operatorname{depth} A/I < \operatorname{depth} A/I^2$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{ht}(I) - 1$

Si I es un ideal con $\operatorname{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 2$ obtenemos:

Teorema 3.1.3 *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Cohen-Macaulay e* I *un ideal puro de* A *con* $\operatorname{ad}(I) = 1$ *y genericamente intersección completa. Supongamos* $r(I) \leq 2$. *Entonces:*

$$\begin{gathered}\min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) \leq \\ \operatorname{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) + 1.\end{gathered}$$

Además,

(i) *si* $\operatorname{depth} A/I^2 < \operatorname{depth} A/I$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I^2 + \operatorname{ht}(I) + 1$, *y*

(ii) *si* $\operatorname{depth} A/I < \operatorname{depth} A/I^2$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{ht}(I)$ *si* $\operatorname{ht}(I) > 0$ *y* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I$ *si* $\operatorname{ht}(I) = 0$ *y* $\operatorname{depth} A/I < d - 1$.

Recordemos que un ideal es puro si no tiene primos immersos. Notemos también que el Teorema 3.1.3 cubre el resultado de [GN1].

En las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 probamos respectivamente los Teoremas 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3. Aplicaremos estos resultados, en la Sección 3.5, para el estudio de la profundidad de los correspondientes anillos de Rees y, en la Sección 3.6, para el estudio de la profundidad de los anillos graduados asociados a las potencias de un ideal con número de reducción menor o igual que dos y desviación analítica menor o igual que uno.

Para las demostraciones de los Teoremas 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3 nos reduciremos al caso de ideales de altura cero. Concluiremos esta sección con los siguientes lemas que nos serán útiles a lo largo del resto del capítulo para reducirnos a este caso.

Lema 3.1.4 *[Hu, Proposition 2.2] Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local e* I *un ideal de* A. *Supongamos que* $a \in I$ *satisface* $(a) \cap I^{n+1} = aI^n$ *para todo* $n \geq 0$. *Sea* $A_1 = A/(a)$ *e* $I_1 = I/(a)$. *Si* a *forma parte de un sistema minimal de generadores de una reducción minimal de* I, *entonces* $s(I_1) = s(I) - 1$.

Lema 3.1.5 *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local e* I *un ideal de* A. *Sea* $a_1, \ldots, a_k$ *una sucesión de elementos de* $I \setminus I^2$ *y* $a_1^*, \ldots, a_k^*$ *la sucesión de sus formas iniciales en* $G_A(I)$. *Supongamos que* $a_1^*, \ldots, a_k^*$ *es una sucesión regular en* $G_A(I)$. *Consideremos el anillo* $A_k := A/(a_1, \ldots, a_k)$ *y el ideal* $I_k := I/(a_1, \ldots, a_k)$.

(1) *Si* $\text{depth}A/I^2 < \text{depth}A/I$, *entonces* $\text{depth}A_k/I_k^2 = \text{depth}A/I^2$.

(2) *Si* $\text{depth}A/I < \text{depth}A/I^2$, *entonces* $\text{depth}A_k/I_k^2 = \text{depth}A/I - 1$.

(3) *Si* $\text{depth}A/I = \text{depth}A/I^2$, *entonces* $\text{depth}A_k/I_k^2 \geq \text{depth}A/I - 1$.

Demostración: Recordemos que por el criterio de Valabrega-Valla tenemos que la sucesión $a_1, \ldots, a_k$ es regular en A y que $(a_1, \ldots, a_i) \cap I^2 = (a_1, \ldots, a_i)I$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Consideremos el morfismo $A/I^2 \longrightarrow A_1/I_1^2$ cuyo núcleo $(a_1)/(a_1) \cap I^2 = (a_1)/(a_1)I$ es, teniendo en cuenta la observación anterior, isomorfo a A/I. Aplicando el *depth-lemma* a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A/I \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow A_1/I_1^2 \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} &\text{depth}A/I \geq \text{depth}A/I^2 = \text{depth}A_1/I_1^2, \text{ o bien} \\ &\text{depth}A/I^2 \geq \text{depth}A/I = \text{depth}A_1/I_1^2 + 1, \text{ o bien} \\ &\text{depth}A_1/I_1^2 > \text{depth}A/I = \text{depth}A/I^2. \end{aligned}$$

Reiterando el anterior argumento tenemos para todo $i = 1, \ldots, k-1$ sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A_i/I_i \longrightarrow A_i/I_i^2 \longrightarrow A_{i+1}/I_{i+1}^2 \longrightarrow 0$$

de las que se obtiene, aplicando de nuevo el *depth-lemma*,

$$\begin{aligned} &\text{depth}A/I \geq \text{depth}A_i/I_i^2 = \text{depth}A_{i+1}/I_{i+1}^2, \text{ o bien} \\ &\text{depth}A_i/I_i^2 \geq \text{depth}A/I = \text{depth}A_{i+1}/I_{i+1}^2 + 1, \text{ o bien} \\ &\text{depth}A_{i+1}/I_{i+1}^2 > \text{depth}A/I = \text{depth}A_i/I_i^2, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $A_i/I_i \simeq A/I$.

Distingamos ahora los casos **(1)**, **(2)** y **(3)**.

(1) Si $\text{depth}A/I^2 < \text{depth}A/I$ es entonces immediato a partir de las desigualdades anteriores que $\text{depth}A_i/I_i^2 = \text{depth}A/I^2$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

(2) Si $\mathrm{depth}A/I < \mathrm{depth}A/I^2$, entonces $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$. En particular, $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 < \mathrm{depth}A/I$ y por **(1)** tenemos $\mathrm{depth}A_i/I_i^2 = \mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

(3) Supongamos ahora que $\mathrm{depth}A/I = \mathrm{depth}A/I^2$. En este caso puede ocurrir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{depth}A/I = \mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A_1/I_1^2, \text{o bien}\\
&\mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A/I = \mathrm{depth}A_1/I_1^2 + 1, \text{o bien}\\
&\mathrm{depth}A_1/I_1^2 > \mathrm{depth}A/I = \mathrm{depth}A/I^2.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$, por **(1)** tenemos que $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \cdots = \mathrm{depth}A_k/I_k = \mathrm{depth}A/I - 1$. Si $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 > \mathrm{depth}A/I$, deducimos de **(2)** que $\mathrm{depth}A_2/I_2^2 = \cdots = \mathrm{depth}A_k/I_k^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$. Si $\mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \mathrm{depth}A/I$, podemos proceder por inducción sobre i para concluir que $\mathrm{depth}A_i/I_i^2 \geq \mathrm{depth}A/I - 1$ para todo $i = 2, \ldots, k$. En cualquier caso se verfica que $\mathrm{depth}A_i/I_i^2 \geq \mathrm{depth}A/I - 1$ para todo $i = 1, \ldots k$. □

A partir de ahora en todo este capítulo mantendremos las siguientes hipótesis y notaciones. $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano Cohen-Macaulay de dimensión d e I es un ideal de A. Denotaremos $G := G_A(I)$, $R := R_A(I)$ y $\mathcal{M} := \mathfrak{m} \oplus R_+$. Si a es un elemento de A denotaremos por a^* a su forma inicial en G. A lo largo del capítulo nos referiremos también a los casos **(1)**, **(2)** y **(3)** del Lema 3.1.5.

3.2 Ideales I equimúltiples con $r(I) \leq 1$

El propósito de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) \leq 1$. Entonces:*

$$\mathrm{depth}G_A(I) = \mathrm{depth}A/I + \mathrm{ht}\,(I).$$

Demostración: Reduciremos la demostración al caso $\mathrm{ht}\,(I) = 0$.

Supongamos que $\mathrm{ht}\,(I) = 0$. Entonces $I^2 = 0$ y por tanto $G_A(I) = A/I \oplus I$. Luego, por la Nota 1.2.1 $\mathrm{depth}G_A(I) = \min\{\mathrm{depth}A/I, \mathrm{depth}I\} = \mathrm{depth}_A A/I$. (Para la última igualdad aplicamos el *depth-lemma* a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.)$$

Supongamos que $h := \mathrm{ht}(I) > 0$. Sea $J = (a_1, \ldots, a_h) \subseteq I$ una reducción minimal de I tal que $I^2 = JI$. Como $a_1, \ldots, a_h$ es una A-sucesión regular y se satisfacen trivialmente las igualdades $I^{n+1} \cap J = JI^n$ para todo $n \geq 0$, aplicando el criterio de Valabrega-Valla tenemos que la sucesión $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es $G_A(I)$-regular. Entonces por el Corolario 1.6.3 tenemos que $G_A(I)/(a_1^*, \ldots, a_h^*) \simeq G_{A_h}(I_h)$, donde $A_h = A/(a_1, \ldots, a_h)$ e $I_h = I/(a_1, \ldots, a_h)$. Luego, $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} G_{A_h}(I_h) + h$. Además, el ya citado criterio de Valabrega-Valla nos permite aplicar reiteradamente el Lema 3.1.4 a la sucesión $a_1, \ldots, a_h$ para demostrar que el ideal $\bar{I}$ es equimúltiple. Así, I_h es un ideal equimúltiple con $\mathrm{ht}(I_h) = 0$ y $r(I_h) \leq 1$. Aplicando el resultado para ideales de altura cero obtenemos $\mathrm{depth} G_{A_h}(I_h) = \mathrm{depth} A_h/I_h = \mathrm{depth} A/I$ y por lo tanto $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}(I)$. □

3.3 Ideales I equimúltiples con $r(I) \leq 2$

Esta sección está dedicada a la demostración del Teorema 3.1.2. Sea I un ideal equimúltiple de A tal que $r(I) \leq 2$. Sea $h := \mathrm{ht}(I)$. Sea J una reducción minimal de I con $I^3 = JI^2$ y $a_1, \ldots, a_h$ un sistema minimal de generadores de J. Los siguientes lemas nos permitirán reducir la demostración al caso $\mathrm{ht}(I) = 0$. Si K es un ideal de A denotaremos $\overline{K}$ a su clausura entera.

Lema 3.3.1 *[It1, Theorem 1] Si K es un ideal generado por una sucesión regular, entonces $K^n \cap \overline{K^{n+1}} = K^n \overline{K}$ para todo $n \geq 1$.*

Lema 3.3.2 *Supongamos que I es íntegramente cerrado. Entonces $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es una sucesión regular en G.*

Demostración: Como $I^3 = JI^2$, por el criterio de Valabrega-Valla es suficiente comprobar la igualdad $I^2 \cap J = IJ$. Aplicando el lema anterior al ideal J para $n = 1$ tenemos $\overline{J^2} \cap J = \overline{J} J$. Luego, $I^2 \cap J \subseteq \overline{I^2} \cap J = \overline{J^2} \cap J = \overline{J} J = \overline{I} J = IJ$ ya que I es íntegramente cerrado. □

En este caso tenemos el resultado siguiente.

Teorema 3.1.2 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple íntegramente cerrado de A. Supongamos que $r(I) \leq 2$. Entonces:*

$$\begin{gathered}\min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) - 1 \leq \\ \operatorname{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I).\end{gathered}$$

Además,

(i) si $\operatorname{ht}(I) = 0$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\}$,

(ii) si $\operatorname{depth} A/I^2 < \operatorname{depth} A/I$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I^2 + \operatorname{ht}(I)$,

(iii) si $\operatorname{depth} A/I < \operatorname{depth} A/I^2$ *entonces* $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{ht}(I) - 1$.

Demostración: Supongamos que $h = 0$. Entonces $I^3 = 0$ y por tanto el anillo de formas $G = A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2$. Luego $\operatorname{depth} G = \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} I/I^2, \operatorname{depth} I^2\}$. Aplicando el *depth-lemma* a las sucesiones exactas

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I^2 \longrightarrow A \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow A/I \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0\end{gathered}$$

se deduce fácilmente (i).

Sea $h > 0$ y $J = (a_1, \ldots, a_h)$ una reducción minimal de I con $I^3 = JI^2$. Consideremos el anillo $A_h = A/J$ y el ideal $I_h = I/J$. Como I es un ideal íntegramente cerrado con $r_J(I) \leq 2$, podemos aplicar el Lema 3.3.2 para deducir que $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es una sucesión regular en $G_A(I)$. Así, tenemos que $G_A(I)/(a_1^*, \ldots, a_h^*) \simeq G_{A_h}(I_h)$ y por tanto $\operatorname{depth} G_A(I) = \operatorname{depth} G_{A_h}(I_h) + h$. Por otra parte, A_h es un anillo Cohen-Macaulay y por el Lema 3.1.4 el ideal I_h es equimúltiple con $\operatorname{ht}(I) = 0$. Aplicando el resultado obtenido para ideales equimúltiples de altura cero tenemos ahora

$$\operatorname{depth} G_A(I) = \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A_h/I_h^2\} + h.$$

Finalmente por el Lema 3.1.5, que relaciona las profundidades de A/I, A/I^2 y A_h/I_h^2, podemos distinguir los siguientes casos:

(1) si depth$A/I^2 <$ depthA/I, entonces depth$A_h/I_h^2 =$ depthA/I^2 y por tanto depth$G_A(I) = \min\{\text{depth}A/I, \text{depth}A/I^2\} + h =$ depth$A/I^2 + h$. Obtenemos así (ii).

(2) Si depth$A/I <$ depthA/I^2, entonces depth$A_h/I_h^2 =$ depth$A/I - 1$. Por tanto depth$G_A(I) = \min\{\text{depth}A/I, \text{depth}A/I - 1\} + h =$ depth$A/I + h - 1$ y (iii) queda así demostrado.

(3) Si depth$A/I =$ depthA/I^2, entonces depth$A_h/I_h^2 \geq$ depth$A/I - 1$ y por tanto depth$A/I + h - 1 \leq$ depth$G_A(I) \leq$ depth$A/I + h$.

En culaquier caso se verifican las desigualdades del enunciado. □

Nota 3.3.3 Notemos que la misma demostración es válida para ideales I que contienen una reducción minimal tal que las formas iniciales de un sistema de generadores de la misma forman una sucesión regular en $G_A(I)$. El resultado de Itoh, Lemma 3.3.1, nos permite encontrar una tal sucesión en el caso en que I es íntegramente cerrado.

Observemos también que si $r(I) \leq 1$ entonces se deduce fácilmente, teniendo en cuenta que en este caso $I^2 = (a_1, \ldots, a_h)I$ para cierta sucesión regular contenida en I y utilizando la sucesión exacta $0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow A/I$, que depth$A/I =$ depthA/I^2.

3.4 Ideales I con $\text{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 2$

Sea I un ideal con $\text{ad}(I) = 1$. La demostración del resultado principal de esta sección, el Teorema 3.1.3, se reduce al caso de ideales de altura cero. En este caso, existe un elemento a de I tal que $a \notin Z(I)$ y $I^{r+1} = (a)I^r$ para cierto r. En primer lugar, vamos a estudiar estudiar el anillo graduado asociado a un ideal de este tipo.

Supongamos que existe $a \in I$, $a \notin Z_A(I)$ tal que $I^{r+1} = aI^r$, para cierto entero $r \geq 1$. Consideremos entonces los siguientes G-módulos:

$$\begin{aligned} U_r &:= \textstyle\bigoplus_{n \geq r} G_n = I^r/I^{r+1} \oplus \cdots \oplus I^n/I^{n+1} \cdots, \\ V_r &:= U_r/atU_r \simeq I^r/aI^r, \text{ y} \\ C_r &= A/I \oplus \cdots \oplus I^{r-1}/I^r. \end{aligned}$$

Lema 3.4.1 *at es un elemento regular en U_r.*

Demostración: Si $x \in I^n$, $n \geq r$ y $ax \in I^{n+2} = aI^{n+1}$ entonces existe $y \in I^{n+1}$ tal que $ax = ay$ y por tanto $a(x-y) = 0$. Luego $x - y \in (0 : a) \cap I = 0$. □

Aplicando el *depth-lemma* a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I^r \longrightarrow A \longrightarrow A/I^r \longrightarrow 0$$

tenemos

$$\mathrm{depth}_A I^r = \min\{d, \mathrm{depth} A/I^r + 1\}.$$

Por tanto

$$\mathrm{depth}_A I^r/aI^r = \min\{d-1, \mathrm{depth} A/I^r\},$$

ya que $a \notin Z_A(I^r)$, y

$$\mathrm{depth}_G U_r = \min\{d, \mathrm{depth} A/I^r + 1\}$$

por el Lema 3.4.1.

Por otra parte, como C_r es finitamente graduado, tenemos que

$$\mathrm{depth}_G C_r = \min\{\mathrm{depth}_A I^n/I^{n+1},\ 0 \leq n \leq r-1\}.$$

Además, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U_r \longrightarrow G \longrightarrow C_r \longrightarrow 0 \qquad (SE_r)$$

nos permite relacionar las profundidades de G, U_r y C_r.

Los siguientes lemas nos proporcionan cotas para los a-invariantes de U_r y G que nos serán útiles para comparar las profundidades de los anillos G y A/I^n para valores pequeños de r.

Lema 3.4.2 $a_i(U_r) \leq r-1$ $\forall i$. *Además, si* $H^i_{\mathcal{M}}(U_r) \neq 0$ *entonces* $H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_n \simeq H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_{r-1}$ $\forall n \leq r-1$.

Demostración: De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U_r(-1) \xrightarrow{at} U_r \longrightarrow V_r \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta larga de cohomología local

$$\cdots \to H^i_{\mathcal{M}}(V_r)_n \to H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_{n-1} \to H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_n \to H^{i+1}_{\mathcal{M}}(V_r)_n \to \cdots.$$

Como $H^i_{\mathcal{M}}(V_r)_n = 0$ para $n \neq r$, obtenemos isomorfismos $H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_{n-1} \simeq H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_n$ para todo $n \neq r$ y en particular $a_i(U_r) \leq r-1$. Observemos también que si $H^i_{\mathcal{M}}(U_r) \neq 0$ entonces $a_i(U_r) = r-1$ y $H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_n \simeq H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_{r-1}$ para $n \leq r-1$. □

Lema 3.4.3 *$a_i(G) \leq r-1$ $\forall i$. Además, si* $\operatorname{depth} G = g < d$ *entonces* $a_g(G) < r-1$.

Demostración: De la sucesión exacta (SE_r) obtenemos la sucesión exacta larga de cohomología local

$$\cdots \to H^i_{\mathcal{M}}(U_r)_n \to H^i_{\mathcal{M}}(G)_n \to H^i_{\mathfrak{m}}(C_r)_n \to \cdots$$

para todo n. Aplicando el Lema 3.4.2 y teniendo en cuenta que $H^i_{\mathcal{M}}(C_r)_n = H^i_{\mathcal{M}}([C_r]_n)$ para todo n tenemos la primera afirmación.

Supongamos $\operatorname{depth} G = g < d$. Entonces por el Corolario 2.3.4 $\operatorname{depth} R = g+1$. Consideremos las sucesiones exactas

$$0 \to R_+(1) \to R \to G \to 0 \tag{3.1}$$

$$0 \to R_+ \to R \to A \to 0 \tag{3.2}$$

De la sucesión exacta larga de cohomología local asociada a (3.1) obtenemos isomorfismos $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_{n+1} \simeq H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R)_n$ para todo $n \geq r$ ya que $a_i(G) \leq r-1$. Análogamente, de (3.2) tenemos isomorfismos $H^i_{\mathcal{M}}(R_+)_n \simeq H^i_{\mathcal{M}}(R)_n$ para todo $n \neq 0$.

Si $a_g(G) = r-1$, (3.1) nos proporciona inyecciones $H^g_{\mathcal{M}}(G)_{r-1} \hookrightarrow H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_r$ y por tanto $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_r \neq 0$. Entonces para todo $n \geq r$ tendríamos isomorfismos $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_n \simeq H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R)_n \simeq H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_{n+1}$. Así, $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_+)_n \neq 0$ para todo $n \geq r$ contradiciendo el hecho de que $a_{g+1}(R_+) < \infty$. □

Para el caso $r = 1$ obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4.4 *Si $a \notin Z_A(I)$ e $I^2 = aI$, entonces*

$$\operatorname{depth} G_A(I) = \min\{d, \operatorname{depth} A/I + 1\}.$$

Demostración: Consideremos ahora la sucesión exacta correspondiente a (SE_r) para $r = 1$:

$$0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow G \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0. \tag{SE_1}$$

Ahora $U_1 = G_+$ y $C_1 = A/I$. Además $\text{depth}U_1 = \min\{d, \text{depth}A/I + 1\}$. Aplicando el *depth-lemma* a (SE_1) obtenemos

$$\begin{aligned} &\text{depth}G \geq \text{depth}A/I \text{ si } \text{depth}A/I < d, \text{ y} \\ &\text{depth}G = d \text{ si } \text{depth}A/I = d. \end{aligned}$$

Sea $t := \text{depth}A/I < d$. Si $\text{depth}G = t$ entonces de la sucesión exacta larga de cohomología local asociada a (SE_1) tenemos inyecciones $H^t_{\mathcal{M}}(G) \hookrightarrow H^t_{\mathcal{M}}(A/I)$ por lo que $H^t_{\mathcal{M}}(G)_0 \neq 0$, contradiciendo el Lema 3.4.3. Por tanto, $\text{depth}G \geq t+1$. De la sucesión exacta larga de cohomología asociada a (SE_1) y tomando la componente de grado -1 obtenemos inyecciones $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_1)_{-1} \hookrightarrow H^{t+1}_{\mathcal{M}}(G)_{-1}$. Luego $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(G)_{-1} \neq 0$ ya que $\text{depth}U_1 = t+1$, y por el Lema 3.4.2 $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_1)_{-1} \neq 0$. Por lo tanto $\text{depth}G = t+1$. □

Para el caso $r = 2$ obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4.5 *Si $a \notin Z_A(I)$ e $I^3 = aI^2$, entonces*

$$\min\{\text{depth}A/I, \text{depth}A/I^2\} \leq \text{depth}G(I) \leq \min\{\text{depth}A/I, \text{depth}A/I^2\} + 1.$$

Además,

$$\begin{aligned} &\text{depth}A/I^2 < \text{depth}A/I \Rightarrow \text{depth}G(I) = \text{depth}A/I^2 + 1, \ y \\ &\text{depth}A/I < \text{depth}A/I^2 < d \Rightarrow \text{depth}G(I) = \text{depth}A/I. \end{aligned}$$

Demostración: La sucesión exacta correspondiente a (SE_r) es ahora

$$0 \longrightarrow U_2 \longrightarrow G \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0 \qquad (SE_2)$$

con

$$\begin{aligned} &\text{depth}_G U_2 = \min\{d, \text{depth}A/I^2 + 1\} \quad \text{y} \\ &\text{depth}_G C_2 = \min\{\text{depth}A/I, \text{depth}_A I/I^2\}. \end{aligned}$$

Consideremos también la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow A/I \longrightarrow 0. \qquad (3.3)$$

Distinguiremos ahora los casos **(1)**, **(2)** y **(3)** del Lema 3.1.5.

Aplicando el *depth-lemma* a (3.3), la profundidad de I/I^2 es respectivamente en cada caso

$$\text{depth}I/I^2 \begin{cases} = \text{depth}A/I^2 \text{ en el caso } \mathbf{(1)}, \\ = \text{depth}A/I + 1 \text{ en el caso } \mathbf{(2)}, \\ \geq \text{depth}A/I \text{ en el caso } \mathbf{(3)}. \end{cases}$$

De la sucesión exacta (SE_2) obtenemos para G que

$$\operatorname{depth}G \geq \min\{\operatorname{depth}A/I, \operatorname{depth}A/I^2\} = \begin{cases} \operatorname{depth}A/I^2 \text{ en el caso } (\mathbf{1}), \\ \operatorname{depth}A/I \text{ en el caso } (\mathbf{2}), \\ \operatorname{depth}A/I \text{ en el caso } (\mathbf{3}), \end{cases}$$

y en el caso $(\mathbf{2})$ tenemos igualdad si $\operatorname{depth}A/I^2 < d$.

Estudiemos ahora separadamente los tres casos.

Caso $(\mathbf{1})$:

supongamos $\operatorname{depth}A/I^2 = k < \operatorname{depth}A/I = t$. Sabemos que $\operatorname{depth}G \geq k$. Si $\operatorname{depth}G = k < d$ entonces de la sucesión exacta larga de cohomología local asociada a la sucesión exacta (SE_2) obtenemos inyecciones $H^k_{\mathcal{M}}(G)_n \hookrightarrow H^k_{\mathcal{M}}(C_2)_n$ para todo n. Así pués $H^k_{\mathcal{M}}(G)_n = 0$ para $n \neq 0, 1$ y $H^k_{\mathcal{M}}(G)_0 \hookrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}(A/I) = 0$. Por tanto $H^k_{\mathcal{M}}(G)_1 \neq 0$ contradiciendo el Lema 3.4.3 que nos dice que $a_k(G) < 1$. Luego $\operatorname{depth}G \geq k+1$. Veamos $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(G) \neq 0$. De la sucesión exacta larga de cohomología local asociada a (SE_2) tenemos

$$0 \longrightarrow H^k_{\mathcal{M}}(C_2)_n \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_n \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(G)_n$$

de donde obtenemos que $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(U_2) \neq 0$ ya que $H^k_{\mathcal{M}}(C_2) \neq 0$. Por el Lema 3.4.2 resulta en particular que $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_0 \neq 0$. Además $H^k_{\mathcal{M}}(C_2)_0 \simeq H^k_{\mathfrak{m}}(A/I) = 0$. Así, para $n = 0$ tenemos inyecciones $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_0 \hookrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(G)_0$ por lo que $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(G)_0 \neq 0$. Por lo tanto en este caso se obtiene que

$$\operatorname{depth}G = \operatorname{depth}A/I^2 + 1 = \min\{\operatorname{depth}A/I, \operatorname{depth}A/I^2\} + 1.$$

Caso $(\mathbf{2})$:

supongamos $\operatorname{depth}A/I = t < \operatorname{depth}A/I^2 = k$. Si $k < d$ entonces $\operatorname{depth}G = t$. Si $k = d$ y $t < d-1$, de la sucesión exacta (SE_2) y teniendo en cuenta que $\operatorname{depth}_G U_2 = d$ obtenemos en cohomología un isomorfismo $H^t_{\mathcal{M}}(G) \simeq H^t_{\mathcal{M}}(C_2)$. Como $\operatorname{depth}_G C_2 = t$ tenemos $\operatorname{depth}G = t$. Por último, si $k = d$ y $t = d-1$ entonces $\operatorname{depth}G \geq d-1$.

Caso $(\mathbf{3})$:

supongamos $\operatorname{depth}A/I = \operatorname{depth}A/I^2 = t$. Sabemos que $\operatorname{depth}G \geq t$. En particular si $t = d$ entonces G es Cohen-Macaulay.

Supongamos $t < d$. De la sucesión exacta (SE_2) obtenemos sucesiones exactas de cohomología

$$0 \longrightarrow H^t_{\mathcal{M}}(G)_0 \longrightarrow H^t_{\mathfrak{m}}(A/I) \longrightarrow H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_0,$$
$$0 \longrightarrow H^t_{\mathcal{M}}(G)_1 \longrightarrow H^t_{\mathfrak{m}}(I/I^2) \longrightarrow H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_1$$

y también que $H^t_{\mathcal{M}}(G)_n = 0$ para $n \neq 0, 1$. Luego, por el Lema 3.4.3 $\operatorname{depth} G = t$ si y solo si $H^t_{\mathcal{M}}(G)_0 \neq 0$.

Veamos que $\operatorname{depth} G \leq t+1$. Podemos suponer $t \leq d-2$. Supongamos que $H^t_{\mathcal{M}}(G) = 0$. Entonces es suficiente ver que $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(G) = 0$. Para todo $n < 0$ tenemos inyecciones $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_n \hookrightarrow H^{t+1}_{\mathcal{M}}(G)_n$ y por tanto $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(G)_n \neq 0$ para $n \leq 1$ ya que $\operatorname{depth}_G U_2 = k+1$ y $H^{t+1}_{\mathcal{M}}(U_2)_n \neq 0$ para todo $n \leq 1$ por el Lema 3.4.2. En este caso se tiene que

$$\min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} \leq \operatorname{depth} G \leq \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + 1.$$

En cualquiera de los tres casos tenemos que se verifican las desigualdades enunciadas. □

Sea I un ideal genericamente intersección completa con $\operatorname{ad}(I) = 1$ y J una reducción minimal de I. Los siguientes lemas nos permitirán reducir la demostración del Teorema 3.1.3 al caso $\operatorname{ht}(I) = 0$ si I es un ideal puro. El primero de ellos nos permite escoger un sistema de generadores de J con buenas propiedades. Sea $h := \operatorname{ht}(I)$.

Lema 3.4.6 *Sea I un ideal genericamente intersección completa con $\operatorname{ad}(I) = 1$ y J una reducción minimal de I. Entonces existe un sistema minimal de generadores $a_1, \ldots, a_h, a$ de J verificando:*

(i) $a_1, \ldots, a_h$ *es una sucesión A-regular.*

(ii) $I_{\mathfrak{p}} = (a_1, \ldots, a_h)_{\mathfrak{p}}$ *para todo* $\mathfrak{p} \in Min(A/I)$.

(iii) $((a_1, \ldots, a_h)^m : a^n) \cap I^m = (a_1, \ldots, a_h)^m$ *para todo* $n, m \geq 1$.

(iv) Si $h \geq 1$ *e* $I^2 = JI$, $(a_1, \ldots, a_h)^i \cap I^n = (a_1, \ldots, a_h)I^{n-i}$ *para todo* $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Demostración: Para la demostración ver [Zar, Lemma 2.2] y [HH1, Remark 2.1 (iii)]. □

A partir de ahora J denotará una reducción minimal de I con $I^3 = JI^2$ y $a_1, \ldots, a_h, a$ será un sistema minimal de generadores de J satisfaciendo las propiedades del Lema 3.4.6.

Lema 3.4.7 *Si $I^2 \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I$ entonces tenemos las igualdades $I^{n+1} \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I^n$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración: Si $n \geq 2$ entonces $I^{n+1} \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h, a)I^n \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I^n + aI^n \cap (a_1, \ldots, a_h)$. Veamos $aI^n \cap (a_1, \ldots, a_h) \subseteq (a_1, \ldots, a_h)I^n$. Tenemos $aI^n \cap (a_1, \ldots, a_h) = a(a_1, \ldots, a_h, a)^{n-2}I^2 \cap (a_1, \ldots, a_h) \subseteq (a_1, \ldots, a_h)I^n + a^{n-1}I^2 \cap (a_1, \ldots, a_h)$. Si $\alpha a^{n-1} \in (a_1, \ldots, a_h)$ con $\alpha \in I^2$ entonces $\alpha \in ((a_1, \ldots, a_h) : a^{n-1}) \cap I^2 \subseteq (a_1, \ldots, a_h)$ por el Lema 3.4.6. Por tanto $\alpha \in I^2 \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I$ y $\alpha a^{n-1} \in (a_1, \ldots, a_h)I^n$. □

Lema 3.4.8 *Supongamos que I es un ideal puro. Entonces $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es una sucesión regular en $G(I)$.*

Demostración: Por el criterio de Valabrega-Valla es suficiente verificar las igualdades $I^{n+1} \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I^n$ para $n \geq 0$, ya que $a_1, \ldots, a_h$ es una sucesión regular. Por el Lema 3.4.7 es suficiente comprobar la igualdad $I^2 \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)I$. Veamos que $I_\mathfrak{p}^2 \cap (a_1, \ldots, a_h)_\mathfrak{p} \subseteq I_\mathfrak{p}(a_1, \ldots, a_h)_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/I(a_1, \ldots, a_h))$. Tenemos $\operatorname{Ass}(A/I(a_1, \ldots, a_h)) \subseteq \operatorname{Ass}(A/I) \cup \operatorname{Ass}(A/(a_1, \ldots, a_h))$. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/I) = \operatorname{Min}(A/I)$ entonces $I_\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_h)_\mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/(a_1, \ldots, a_h))$; entonces $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = h$. Si $\mathfrak{p} \supseteq I$ tenemos $I_\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_h)_\mathfrak{p}$, en caso contrario $\mathfrak{p} \not\supseteq I$ y entonces $I_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$. En cualquiera de ambos casos obtenemos la inclusión. □

Demostraremos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.1.3 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal puro de A con $\operatorname{ad}(I) = 1$ y genericamente intersección completa. Supongamos $r(I) \leq 2$. Entonces:*

$$\begin{gathered} \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) \leq \\ \operatorname{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\operatorname{depth} A/I, \operatorname{depth} A/I^2\} + \operatorname{ht}(I) + 1. \end{gathered}$$

Además,

(i) si $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$ *entonces* $\mathrm{depth}G_A(I) = \mathrm{depth}A/I^2 + \mathrm{ht}\,(I) + 1$, *y*

(ii) si $\mathrm{depth}A/I < \mathrm{depth}A/I^2$ *entonces* $\mathrm{depth}G_A(I) = \mathrm{depth}A/I + \mathrm{ht}\,(I)$ *si* $\mathrm{ht}\,(I) > 0$ *y* $\mathrm{depth}G_A(I) = \mathrm{depth}A/I$ *si* $\mathrm{ht}\,(I) = 0$ *y* $\mathrm{depth}A/I < d-1$.

Demostración: Sea $h := \mathrm{ht}\,(I)$. Si $h = 0$ entonces por el Lema 3.4.6 $I^3 = aI^2$ para cierto $a \notin Z_A(I)$ y obtenemos el resultado por la Proposición 3.4.5.

Supongamos que I es un ideal puro con $h > 0$. Sea J una reducción minimal de I con $I^3 = JI^2$ y $a_1, \ldots, a_h, a$ un sistema minimal de generadores como en el Lema 3.4.6. Sean $A_h = A/(a_1, \ldots, a_h)$ e $I_h = I/(a_1, \ldots, a_h)$. Por el Lema 3.4.8 la sucesión $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es regular en G y por tanto $G/(a_1^*, \ldots, a_h^*) \simeq G_{A_h}(I_h))$. Luego, $\mathrm{depth}G = \mathrm{depth}G_{A_h}(I_h) + h$. Por otra parte, aplicando una vez más el criterio de Valabrega-Valla y el Lema 3.1.4 tenemos que A_h es un anillo C.M. e I_h es un ideal genericamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$, altura cero y $r(I_h) \leq 2$. Luego,

$$\min\{\mathrm{depth}A/I, \mathrm{depth}A_h/I_h^2\} \leq \mathrm{depth}G_{A_h}(I_h) \leq \min\{\mathrm{depth}A/I, \mathrm{depth}A_h/I_h^2\} + 1.$$

Distinguiremos ahora los casos (**1**), (**2**) y (**3**).

Caso (**1**):

supongamos $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$. En este caso, por el Lema 3.1.5 resulta $\mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A_h/I_h^2 < \mathrm{depth}A/I$. Aplicando la Proposición 3.4.5 tenemos $\mathrm{depth}G = \mathrm{depth}G(I_h) + h = \mathrm{depth}A_h/I_h^2 + 1 + h = \mathrm{depth}A/I^2 + h + 1$.

Caso (**2**):

supongamos $\mathrm{depth}A/I < \mathrm{depth}A/I^2$. Aplicando el Lema 3.1.5 y la Proposición 3.4.5 obtenemos que $\mathrm{depth}A_h/I_h^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$ y $\mathrm{depth}G = \mathrm{depth}G(I_h) + h = \mathrm{depth}A_h/I_h^2 + 1 + h = \mathrm{depth}A/I - 1 + 1 + h = \mathrm{depth}A/I + h$.

Caso (**3**):

supongamos $\mathrm{depth}A/I = \mathrm{depth}A/I^2$. Entonces por la Proposición 3.4.5

$$\min\{\mathrm{depth}A/I, \mathrm{depth}A_h/I_h^2\} \leq \mathrm{depth}G_{A_h}(I_h) \leq \min\{\mathrm{depth}A/I, \mathrm{depth}A_h/I_h^2\} + 1,$$

y por el Lema 3.1.5 tenemos que $\mathrm{depth}A_h/I_h^2 \geq \mathrm{depth}A/I - 1$. Si $\mathrm{depth}A_h/I_h^2 = \mathrm{depth}A/I - 1$ entonces $\mathrm{depth}G_{A_h}(I_h) = \mathrm{depth}A/I$ de nuevo por la Proposición 3.4.5 y $\mathrm{depth}G = \mathrm{depth}A/I + h$. Por el contrario, si $\mathrm{depth}A_h/I_h^2 \geq \mathrm{depth}A/I$ entonces

$$\mathrm{depth}A/I \leq \mathrm{depth}G_{A_h}(I_h) \leq \mathrm{depth}A/I + 1$$

y por tanto

$$\mathrm{depth}A/I + h \leq \mathrm{depth}G \leq \mathrm{depth}A/I + h + 1.$$

Observemos que en cualquier caso tenemos las desigualdades del enunciado.

Nota 3.4.9 Notemos que utilizando las mismas técnicas que en la demostración del Teorema 3.1.3 podemos demostrar las fórmulas de [Zar] para ideales con $r(I) \leq 1$. En este caso, el Lema 3.4.6 (iv) nos asegura la existencia de una sucesión regular de $G_A(I)$ de longitud $\mathrm{ht}\,(I)$. Podemos entonces reducirnos a ideales de altura cero y, para éstos utilizar la Proposición 3.4.4. Observemos por último que si $r(I) \leq 1$ tenemos $I^2 = (a_1, \ldots, a_h, a)I$ para ciertos elemntos $a_1, \ldots, a_h, a$ verificando las condiciones del Lema 3.4.6 y entonces se deduce fácilmente: $\mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A/I < \dim A/I$ o bien $\mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A/I - 1 = \dim A/I - 1$.

3.5 Anillos de Rees

Los resultados obtenidos para la profundidad del anillo de formas en las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 junto con los resultados del **Capítulo 2** que relacionan la profundidad de éstos con la del anillo de Rees nos permiten ahora obtener fórmulas para la profundidad del anillo de Rees asociado a un ideal I con $\mathrm{ad}(I) \leq 1$ y $r(I) \leq 2$.

Para ideales equimúltiples tenemos los siguientes resultados. Si el número de reducción del ideal es menor o igual que uno obtenemos las siguientes fórmulas para la profundidad del anillo de Rees.

Proposición 3.5.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) \leq 1$ y $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$. Entonces:*

$$\mathrm{depth}R_A(I) = \mathrm{depth}G_A(I) + 1 = \mathrm{depth}A/I + \mathrm{ht}\,(I) + 1.$$

Demostración: Si G no es C.M. entonces $\mathrm{depth}R = \mathrm{depth}G + 1$ por el Corolario 2.3.4 (ii). Supongamos que G es C.M.. Entonces, por el Corolario 1.6.9 $a(G) = r(I) - \mathrm{ht}\,(I) \leq 1 - h < 0$ y aplicando el Corolario 1.6.5 tenemos que R es C.M.. Luego, en ambos casos $\mathrm{depth}R = \mathrm{depth}G + 1 = \mathrm{depth}A/I + \mathrm{ht}\,(I) + 1$ por el Teorema 3.1.1. $\square$

En particular recuperamos así el resultado de [TI]

Corolario 3.5.2 *[TI, Proposition 7.4] Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) \leq 1$ y $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$. Entonces son equivalentes:*

(i) $R_A(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

(ii) $G_A(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

(iii) A/I *es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Immediato a partir del Teorema 3.1.1 y la Proposición 3.5.1. □

Si el ideal es de altura uno podemos ver que el resultado anterior no es cierto.

Proposición 3.5.3 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) = 1$ y $\mathrm{ht}\,(I) = 1$. Entonces $R_A(I)$ no es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Si G no es C.M. como $\mathrm{depth}R = \mathrm{depth}G + 1$ tenemos que R tampoco es C.M.. Supongamos que G es C.M.. Entonces $a(G) = r(I) - \mathrm{ht}\,(I) = 0$ y por tanto R no es C.M.. □

Finalmente, para ideales de altura cero tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.5.4 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A. Supongamos $r(I) = 1$ y $\mathrm{ht}\,(I) = 0$. Entonces son equivalentes:*

(i) $R_A(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

(ii) $\mathrm{depth}G_A(I) \geq d - 1$.

(iii) $\mathrm{depth}A/I \geq d - 1$.

Demostración: La equivalencia entre (ii) y (iii) es inmediata del Teorema 3.1.1. Como en este caso $R = A \oplus I$ tenemos que $\mathrm{depth}R = \mathrm{depth}_A I$. Aplicando el *depth-lemma* a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

obtenemos que $\mathrm{depth}_A I = \mathrm{depth}A/I = d$ ó $\mathrm{depth}_A I = \mathrm{depth}A/I + 1$. Por lo tanto, R es Cohen-Macaulay si y solamente si $\mathrm{depth}A/I \geq d - 1$. □

Para ideales con número de reducción dos obtenemos:

Proposición 3.5.5 *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Cohen-Macaulay e* I *un ideal equimúltiple íntegramente cerrado de* A*. Supongamos* $\mathrm{ht}\,(I) \geq 3$ *y* $r(I) \leq 2$*. Entonces:*

$$\begin{gathered}\min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) \leq \\ \mathrm{depth} R_A(I) \leq \\ \min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) + 1.\end{gathered}$$

Además,

(i) si $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$ *entonces* $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} A/I^2 + \mathrm{ht}\,(I) + 1$*, y*

(ii) si $\mathrm{depth} A/I < \mathrm{depth} A/I^2$ *entonces* $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I)$*.*

Demostración: Aplicando el Corolario 2.3.4 (ii), el Corolario 1.6.5 y el Corolario 1.6.9 tenemos que $\mathrm{depth} R = \mathrm{depth} G + 1$. El resultado se obtiene entonces directamente del Teorema 3.1.2. □

Para ideales con desviación analítica uno obtenemos los siguientes resultados a partir del Teorema 3.1.3.

Corolario 3.5.6 *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Cohen-Macaulay e* I *un ideal puro genéricamente intersección completa de* A *con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y* $r(I) \leq 2$*. Si* $G_A(I)$ *es Cohen-Macaulay, entonces:*

$$\mathrm{depth} A/I \geq \mathrm{depth} A/I^2 \geq \dim A/I - 1.$$

Inversamente,

(i) si $\mathrm{depth} A/I = \mathrm{depth} A/I^2 = \dim A/I$*, entonces* $G_A(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

(ii) Si $\mathrm{depth} A/I = \dim A/I$ *y* $\mathrm{depth} A/I^2 = \dim A/I - 1$*, entonces* $G_A(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

Demostración: El resultado es inmediato a partir de Teorema 3.1.3. □

Proposición 3.5.7 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal puro de A genericamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$, *y* $r(I) \leq 2$. *Supongamos* $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$. *Entonces:*

$$\begin{gathered}\min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) + 1 \leq \\ \mathrm{depth} R_A(I) \leq \\ \min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) + 2.\end{gathered}$$

Además,

(i) si $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$ *entonces* $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} A/I^2 + \mathrm{ht}\,(I) + 1$, *y*

(ii) si $\mathrm{depth} A/I < \mathrm{depth} A/I^2$ *entonces* $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I)$ *si* $\mathrm{ht}\,(I) > 0$ *y* $\mathrm{depth} R_A(I) = \mathrm{depth} A/I$ *si* $\mathrm{ht}\,(I) = 0$ *y* $\mathrm{depth} A/I < d - 1$.

Demostración: Como en la Proposición 3.5.1, se trata de ver que bajo las hipótesis del enunciado tenemos $\mathrm{depth} R = \mathrm{depth} G + 1$, teniendo ahora en cuenta que si G es C.M. entonces $a(G) = \max\{-h(I), r(I) - \mathrm{ht}\,(I) - 1\}$ por el Corolario 1.3.2. □

3.6 Anillos graduados asociados a las potencias de un ideal

Sea I un ideal y n un entero positivo. Ribbe en [Ri] demuestra que si I es un ideal casi intersección completa entonces, las profundidades de los anillos graduados asociados al ideal I^n no dependen de n. Posteriormente, Zarzuela en [Zar] extiende este resultado a ideales genéricamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 1$. Aquí obtenemos resultados análogos para la clase de ideales que hemos tratado en este capítulo. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado de [Ri]. Ofreceremos con detalle las demostraciones de los resultados que se obtienen para ideales equimúltiples. En cambio, para ideales con desviación analítica uno no explicitaremos las demostraciones ya que éstas se obtienen fácilmente siguiendo la misma línea de demostración del caso equimúltiple.

Lema 3.6.1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $g := \mathrm{depth} G_A(I)$.*

(i) Si $H^g_{\mathcal{M}}(G_A(I))_j \neq 0$, $\forall j \ll 0$, entonces $\mathrm{depth} G_A(I^n) = \mathrm{depth} G_A(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 1$ y $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R_A(I))_j \neq 0$, $\forall j \ll 0$, entonces $\mathrm{depth} R_A(I^n) = \mathrm{depth} R_A(I)$.

Demostración: (ii) es immediato ya que $R(I^n) = R(I)^{(n)}$ para todo n. Para (i) ver [Ri, Lemma 5.3.1]. □

Para ideales equimúltiples con número de reducción menor o igual que uno tenemos:

Lema 3.6.2 *Sea I un ideal equimúltiple con $r(I) \leq 1$. Sea $g := \mathrm{depth} G(I)$.*

(i) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 1$, entonces $H^g_{\mathcal{M}}(G_A(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}\,(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$, entonces $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}\,(I) + 1$.

Demostración: Demostraremos (i) por inducción sobre $\mathrm{ht}\,(I)$. Sea $h := \mathrm{ht}\,(I)$. Supongamos $h = 1$. Entonces por el Teorema 3.1.1 $g = \mathrm{depth} A/I + 1$. Por otra parte, $I^2 = aI$ para cierto $a \notin Z_A(A)$, y por tanto podemos utilizar las notaciones y resultados de la Sección 3.4.

Considerando la sucesión exacta larga de cohomologia local asociada a (SE_1) obtenemos para todo j

$$\cdots \to H^{g-1}_{\mathcal{M}}(A/I)_j \to H^g_{\mathcal{M}}(U_1)_j \to H^g_{\mathcal{M}}(G)_j \to \cdots .$$

En particular, para $j \leq -1$ tenemos monomorfismos $H^g_{\mathcal{M}}(U_1)_j \hookrightarrow H^g_{\mathcal{M}}(G)_j$. Además, tenemos que $\mathrm{depth} U_1 = g$ y entonces por el Lema 3.4.2 $H^g_{\mathcal{M}}(U_1)_j \neq 0$ para todo $j \leq 0$. Por lo tanto $H^g_{\mathcal{M}}(G)_j \neq 0$ para todo $j \leq -1 = -h$.

Supongamos $h > 1$. Sea $J = (a_1, \ldots, a_h)$ una reducción minimal de I con $I^2 = JI$. Sea $\bar{A} = A/(a_1)$ e $\bar{I} = I/(a_1)$. El ideal $\bar{I}$ es equimúltiple con $r(\bar{I}) \leq 1$ y $\mathrm{ht}\,(\bar{I}) = h - 1$. Además, como a_1^* es un elemento regular en G tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G(-1) \xrightarrow{a_1^*} G \longrightarrow G(\bar{I}) \longrightarrow 0$$

que nos proporciona en cohomología inyecciones

$$0 \to H^{g-1}_{\mathcal{M}}(G(\bar{I}))_j \to H^g_{\mathcal{M}}(G)_{j-1}.$$

Por hipótesis de inducción $H_{M}^{g-1}(G(\bar{I}))_j \neq 0$ para todo $j \leq -\mathrm{ht}(\bar{I}) = 1-h$. Luego, $H_{\mathcal{M}}^{g}(G)_n \neq 0$ para todo $n \leq -h$ y (i) queda demostrado.

Veamos ahora (ii). Como $\mathrm{ht}(I) \geq 2$ entonces $\mathrm{depth} R = g+1$ por la Proposición 3.5.1. Las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow R_+ \longrightarrow R \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow R_+(1) \longrightarrow R \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

nos proporcionan en cohomología isomorfismos $H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R_+)_j \simeq H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R)_j$ para todo $j \neq 0$ y monomorfismos $H_{\mathcal{M}}^{g}(G)_j \hookrightarrow H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R_+)_{j+1}$. Por (i) tenemos que $H_{\mathcal{M}}^{g}(G)_j \neq 0$ para $j \leq -h$ y por tanto $H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R_+)_j \neq 0$ para $j \leq -h+1$. Podemos así concluir que $H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R)_j \neq 0$ para todo $j \leq -h+1$. □

Proposición 3.6.3 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay, I un ideal equimúltiple con $r(I) \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo.*

(i) Si $\mathrm{ht}(I) \geq 1$, *entonces* $\mathrm{depth} G_A(I^n) = \mathrm{depth} G_A(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}(I) \geq 2$, *entonces* $\mathrm{depth} R_A(I^n) = \mathrm{depth} R_A(I)$.

Demostración: El resultado es immediato aplicando los Lemas 3.6.1 y 3.6.2. □

Para ideales equimúltiples con número de reducción menor o igual que 2 tenemos los siguentes resultados.

Lema 3.6.4 *Sea I un ideal equimúltiple, íntegramente cerrado con $r(I) \leq 2$. Supongamos que* $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$ *y sea* $g := \mathrm{depth} G(I)$.

(i) Si $\mathrm{ht}(I) \geq 1$, *entonces* $H_{\mathcal{M}}^{g}(G_A(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}(I) \geq 3$, *entonces* $H_{\mathcal{M}}^{g+1}(R(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}(I)+1$.

Demostración: Demostraremos (i) reduciéndonos al caso de altura uno. Sea $h := \mathrm{ht}(I)$. Sea I un ideal equimúltiple con $r(I) \leq 2$, $h = 1$ y tal que $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$. Entonces $I^3 = (a)I^2$ para cierto $a \notin Z_A(A)$ y por la Proposición 3.4.5 tenemos que $g = \mathrm{depth} A/I^2 + 1$. Utilizaremos a lo largo de la demostración las notaciones y resultados pertinentes de las secciones anteriores.

Considerando la sucesión exacta larga de cohomología local asociada a (SE_2) obtenemos para todo j

$$\cdots \to H^{g-1}_{\mathcal{M}}(C_2)_j \to H^g_{\mathcal{M}}(U_2)_j \to H^g_{\mathcal{M}}(G)_j \to \cdots.$$

En particular, para todo $j \leq -1$ tenemos monomorfismos $H^g_{\mathcal{M}}(U_2)_j \hookrightarrow H^g_{\mathcal{M}}(G)_j$. Además, tenemos que $\mathrm{depth}U_2 = g$ y entonces por el Lema 3.4.2 $H^g_{\mathcal{M}}(U_2)_j \neq 0$ para todo $j \leq 1$. Por lo tanto $H^g_{\mathcal{M}}(G) \neq 0$ para todo $j \leq -1$.

Sea ahora I un ideal equimúltiple íntegramente cerrado con $h > 1$, $r(I) \leq 2$ y tal que $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$. Sea $J = (a_1, \ldots, a_h)$ una reducción minimal de I con $I^3 = JI^2$. Entonces por el Lema 3.3.2 la sucesión $a_1^*, \ldots, a_h^*$ es regular en G. Consideremos ahora los ideales I_i de A_i introducidos anteriormente para $i = 1, \ldots, h-1$. En la demostración del Teorema 3.1.2 vimos que si $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$, entonces $\mathrm{depth}A/I^2 = \mathrm{depth}A_1/I_1^2 = \cdots = A_{h-1}/I_{h-1}^2$. Luego, I_{h-1} es un ideal equimúltiple con $r(I_{h-1}) \leq 2$, $\mathrm{ht}\,(I_{h-1}) = 1$ y $\mathrm{depth}A_{h-1}/I_{h-1}^2 < \mathrm{depth}A_{h-1}/I_{h-1}$. Por tanto $H^{g-h+1}_{\mathcal{M}}(G(I_{h-1})_j \neq 0$ para todo $j \leq -1$.

Considerando para todo $i = 1, \ldots, h-1$ (donde $I_0 := I$) las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow G(I_{i-1})(-1) \xrightarrow{a_i^*} G(I_{i-1}) \longrightarrow G(I_i) \longrightarrow 0$$

obtenemos en cohomología inyecciones

$$0 \longrightarrow H^{g-i}_{\mathcal{M}}(G(I_i))_j \longrightarrow H^{g-i+1}_{\mathcal{M}}(G(I_{i-1}))_{j-1}.$$

Procediendo por recurrencia descendente sobre i obtenemos que $H^g_{\mathcal{M}}(G)_j \neq 0$ para todo $j \leq -h$ y (i) queda demostrado.

Para ver (ii) podemos utilizar los mismos argumentos que en el Lema 3.6.2 teniendo ahora en cuenta que $\mathrm{depth}R = \mathrm{depth}G + 1$ si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 3$ por la Proposición 3.5.5. $\square$

Proposición 3.6.5 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple, íntegramente cerrado con $r(I) \leq 2$. Supongamos que* $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$. *Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ entero positivo:*

(i) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 1$, *entonces* $\mathrm{depth}G_A(I^n) = \mathrm{depth}G_A(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 3$, *entonces* $\mathrm{depth}R_A(I^n) = \mathrm{depth}R_A(I)$.

Demostración: El resultado es immediato aplicando los Lemas 3.6.1 y 3.6.4. □

Para ideales con desviación analítica uno obtenemos resultados análogos a los anteriores.

Lema 3.6.6 *Sea I un ideal puro, genéricamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y* $r(I) \leq 2$. *Supongamos que* $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$ *y sea* $g := \mathrm{depth}G(I)$.

(i) $H^g_{\mathcal{M}}(G_A(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}\,(I) - 1$.

(ii) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$, *entonces* $H^{g+1}_{\mathcal{M}}(R(I))_j \neq 0 \quad \forall j \leq -\mathrm{ht}\,(I)$.

Proposición 3.6.7 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal puro, genéricamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *y* $r(I) \leq 2$. *Supongamos que* $\mathrm{depth}A/I^2 < \mathrm{depth}A/I$. *Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ entero positivo:*

(i) $\mathrm{depth}G_A(I^n) = \mathrm{depth}G_A(I)$.

(ii) Si $\mathrm{ht}\,(I) \geq 2$, *entonces* $\mathrm{depth}R_A(I^n) = \mathrm{depth}R_A(I)$.

Los ejemplos de ideales equimúltiples con número de reducción 1 son diversos. En este sentido, los trabajos de Corso, Polini y Vasconcelos [CPV], Corso y Polini [CP1], [CP2] y, Polini y Ulrich [PU] muestran como obtener ideales de este tipo via linkage.

El siguiente es un ejemplo de ideal equimúltiple con número de reducción 2, al cual aplicaremos los resultados obtenidos para el cálculo de la profundidad de sus anillos graduados asociados.

Ejemplo 3.6.8 Sea $A = K[[X, Y, T_1, \ldots, T_n]]/(X^3Y) = K[[x, y, t_1, \ldots, t_n]]$, donde K es un cuerpo y $n \geq 3$. A es un anillo Cohen-Macaulay $n+1$-dimensional. Sea $I = (xy, t_1, \ldots, t_n)$. I es un ideal equimúltiple, íntegramente cerrado (notemos que A/I es un anillo reducido), con $\mathrm{ht}\,(I) = n$ y $r(I) = 2$. Además es fácil ver que $\mathrm{depth}A/I = 1$ y $\mathrm{depth}A/I^2 = 0$. Luego, aplicando el Teorema 3.1.2, la Proposiciones 3.5.5 y 3.6.5 tenemos que para todo m entero positivo $\mathrm{depth}G_A(I^m) = n$ y $\mathrm{depth}R_A(I^m) = n + 1$.

En los trabajos de Vasconcelos [Vas], Aberbach y Huneke [AHun] y Aberbach, Huckaba y Huneke [AHH] se ofrecen ejemplos de ideales con desviación analítica 1, genéricamente intersección completa y con número de reducción 2.

Capítulo 4

Sucesiones regulares en el cono de la fibra

4.1 Introducción

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I}$ una filtración de ideales de A. Si a es un elemento de I_1 denotaremos por a^*, a^0, y a' a sus imagenes en $I_1/I_2 \hookrightarrow G_A(\mathcal{I})$, $I_1/\mathfrak{m}I_1 \hookrightarrow F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$, y $I_1/I_1^2 \hookrightarrow G_A(I_1)$, respectivamente. (Recordemos que con anterioridad habíamos denotado por a^* a la forma inicial de a en $G_A(I)$. Sin embargo, como será el caso en este capítulo, bajo ciertas condiciones ambas definiciones coinciden. Por comodidad, cometeremos aquí este abuso de notación.)

Sea $a_1, \ldots, a_k$ una sucesión de elementos de I_1. En este capítulo se ofrece un criterio que determina si la sucesión $a_1^0, \ldots, a_k^0$ es $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$-regular. El resultado principal es el Teorema 4.3.5 en el que se demuestra lo siguiente: supongamos que $a_1^*, \ldots, a_k^*$ es una sucesión $G_A(\mathcal{I})$-regular. Entonces son equivalentes

(i) $a_1^0, \ldots, a_k^0$ es una sucesión $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$-regular,

(ii) $(a_1, \ldots, a_k) \cap \mathfrak{m}I_n = (a_1, \ldots, a_k)\mathfrak{m}I_{n-1}$ para todo $n \geq 1$,

(iii) $(a_1', \ldots, a_k')$ es una sucesión $G(\mathcal{I}^{\mathfrak{m}})$-regular,

donde $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ es una filtración de submódulos de A I_1-compatible.

En la sección 4.2 obtenemos un criterio análogo al de de Valabrega-Valla para filtraciones $\mathbf{E}$ de módulos via ciertos complejos de Koszul modificados asociados a $\mathbf{E}$. En la sección 4.3 veremos como la relación existente entre los complejos de Koszul modificados asociados a $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ y el complejo de Koszul de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ nos permite demostrar el Teorema 4.3.5.

4.2 Complejos de Koszul modificados

Sean A un anillo noetheriano (no necesariamente local), I un ideal de A y E un A-modulo. Sea $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ una filtración de submódulos de E. Supongamos que $\mathbf{E}$ es una I-filtración; es decir, $IE_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall n$. Siguiendo las notaciones de Kirby y Mehran [KM], dada una familia $a_1, \ldots, a_k$ de elementos de I el A-módulo $\overline{\mathbf{E}} = \bigoplus_{n\geq 0} E_n$ tiene estructura de módulo graduado sobre el anillo de polinomios $A[T_1, \ldots, T_k]$ mediante la multiplicación

$$f(T_1, \ldots, T_k)\, m_i = f(a_1, \ldots, a_k)\, m_i, \quad m_i \in E_i\,.$$

Luego podemos considerar $K(T_1, \ldots, T_k; \overline{\mathbf{E}})$ el complejo de Koszul graduado de los elementos $T_1, \ldots, T_k$ con coeficientes en $\overline{\mathbf{E}}$. (Ver [HIO], [Pl].) Su componente de grado n tiene la forma

$$K_n(T_1, \ldots, T_k; \overline{\mathbf{E}}): \ 0 \to E_{n-k} \to (E_{n-k+1})^k \to \cdots \to (E_{n-2})^{\binom{k}{2}} \to (E_{n-1})^k \to E_n \to 0$$

y es un subcomplejo del complejo de Koszul $K(a_1, \ldots, a_k; E)$ de $a_1, \ldots, a_k$ a coeficientes en E. Tenemos así una sucesión exacta de complejos:

$$0 \to K_n(T_1, \ldots, T_k; \overline{\mathbf{E}}) \to K(a_1, \ldots, a_k; E) \to C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n) \to 0 \qquad (4.1)$$

donde $C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n) = K(a_1, \ldots, a_k; E)/K_n(T_1, \ldots, T_k; \overline{\mathbf{E}})$.

Definición 4.2.1 *El complejo $C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)$ es el n-ésimo complejo de Koszul modificado de $a_1, \ldots, a_k$ con coeficientes en $\mathbf{E}$.*

$C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)$ es un complejo de la forma

$$0 \to E/E_{n-k} \to (E/E_{n-k+1})^{\binom{k}{k-1}} \to \cdots \to (E/E_{n-2})^{\binom{k}{2}} \to (E/E_{n-1})^{\binom{k}{1}} \to E/E_n \to 0.$$

Kirby y Mehran [KM], así como también Marley [Ma], Guerrieri [Gue], Huckaba y Marley [HM2], utilizan estos complejos para el estudio de la función de Hilbert y la profundidad de los anillos graduados $G_A(I)$ asociados a un ideal I.

Si $C.$ es un complejo, denotaremos por $C[-1].$ al complejo definido por $C_i = C_{i-1}$ y la misma diferencial que $C.$. Entonces, de las sucesiones exactas naturales (ver por ejemplo [No, Proposition 2])

$$0 \to K(T_1, \dots, T_{k-1}; \overline{\mathbf{E}}) \to K(T_1, \dots, T_k; \overline{\mathbf{E}}) \to K(T_1, \dots, T_{k-1}; \overline{\mathbf{E}})[-1] \to 0,$$

$$0 \to K(a_1, \dots, a_{k-1}; E) \to K(a_1, \dots, a_k; E) \to K(a_1, \dots, a_{k-1}; E)[-1] \to 0$$

y tomando la componente de grado n obtenemos la sucesión exacta de complejos de Koszul modificados

$$0 \to C(a_1, \dots, a_{k-1}; \mathbf{E}; n) \to C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n) \to C(a_1, \dots, a_{k-1}; \mathbf{E}; n-1)[-1] \to 0,$$

así como la correspondiente sucesión exacta larga de homología

$$\begin{gathered} \cdots \longrightarrow H_i(C(a_1, \dots, a_{k-1}; \mathbf{E}; n)) \longrightarrow H_i(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) \longrightarrow \\ H_{i-1}(C(a_1, \dots, a_{k-1}; \mathbf{E}; n-1)) \xrightarrow{\cdot \pm a_k} H_{i-1}(C(a_1, \dots, a_{k-1}; \mathbf{E}; n)) \longrightarrow \cdots \end{gathered} \tag{4.2}$$

Podemos calcular los siguientes módulos de homología de $C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)$.

Lema 4.2.2 *(i)* $H_0(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) = E/(E_n + (a_1, \dots, a_k)E)$.

(ii) $H_k(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) = (E_{n-k+1} :_E (a_1, \dots, a_k))/E_{n-k}$.

(iii) Si $a_1, \dots, a_k$ es una sucesión regular en E entonces

$$H_1(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) = ((a_1, \dots, a_k)E \cap E_n)/(a_1, \dots, a_k)E_{n-1}.$$

Demostración: (i) De la sucesión exacta (4.1) obtenemos en homología la sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_0(K_n(T_1, \dots, T_k; \overline{\mathbf{E}})) \to H_0(K(a_1, \dots, a_k; E)) \to H_0(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) \to 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} H_0(C(a_1, \dots, a_k; \mathbf{E}; n)) &= E/(a_1, \dots, a_k)E \Big/ E_n/(a_1, \dots, a_k)E_{n-1} \\ &= E/E_n + (a_1, \dots, a_k)E. \end{aligned}$$

(ii) Procederemos por inducción sobre k. Para $k=1$, el complejo $C(a_1;\mathbf{E};n)$ es

$$0 \longrightarrow E/E_{n-1} \xrightarrow{\cdot a_1} E/E_n \longrightarrow 0,$$

y $H_1(C(a_1;\mathbf{E};n) = E_n : a_1/E_{n-1}$. Si $k>1$ la sucesión exacta (4.2) nos proporciona

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow H_k(C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n)) \longrightarrow H_{k-1}(C(a_1,\dots,a_{k-1};\mathbf{E};n-1)) \\ &\xrightarrow{\cdot a_k} H_{k-1}(C(a_1,\dots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} &H_k(C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n)) = \\ &Ker(E_{n-k+1} :_E (a_1,\dots,a_{k-1})/E_{n-k} \xrightarrow{\cdot a_k} E_{n-k+2} :_E (a_1,\dots,a_{k-1})/E_{n-k-1}) = \\ &E_{n-k+1} :_E (a_1,\dots,a_k)/E_{n-k}. \end{aligned}$$

(iii) De (4.1) obtenemos en homología teniendo en cuenta que $a_1,\dots,a_k$ es una sucesión regular en E la sucesión exacta

$$0 \to H_1(C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n)) \to H_0(K_n(T_1,\dots,T_k;\overline{\mathbf{E}})) \to H_0(K(a_1,\dots,a_k;E)).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &H_1(C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n)) = \\ &Ker(E_n/(a_1,\dots,a_k)E_{n-1} \to E/(a_1,\dots,a_k)E) = \\ &E_n \cap (a_1,\dots,a_k)E/(a_1,\dots,a_k)E_{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos ahora una filtración $\mathcal{I}=(I_n)_{n\geq 0}$ de ideales de$A$. Supongamos que $\mathbf{E}$ es una filtración $\mathcal{I}$-compatible. (En particular I_1-compatible.)

En el siguiente resultado veremos algunas de las propiedades que satisfacen los complejos de Koszul modificados $C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n)$: la relación existente entre éstos y el grado del ideal $(a_1^*,\dots,a_k^*)$ en $G(\mathbf{E})$, un aspecto de rigidez satisfecho por dichos complejos, y por último recuperaremos un criterio del tipo Valabrega-Valla para el caso general de filtración de módulos $\mathbf{E}$.

Proposición 4.2.3 *Supongamos que $\mathcal{I}$ es una filtración noetheriana de A y que $G(\mathbf{E})$ es finitamente generado como $G_A(\mathcal{I})$-módulo. Sea $a_1, \ldots, a_k$ una familia de elementos en I_1. Entonces*

(i) $\operatorname{depth}_{(a_1^*,\ldots,a_k^*)} G(\mathbf{E}) = \min\{j \mid H_{k-j}(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) \neq 0$ *para cierto* $n\}$.

(ii) Si $H_j(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0$ *para todo* n*, entonces* $H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0$ *para todo* $i \geq j$ *y* n.

(iii) Supongamos que A es un anillo local. Entonces $a_1^*, \ldots, a_k^*$ es una sucesión regular en $G(\mathbf{E})$ si y solamente si $a_1, \ldots, a_k$ es una sucesión sucesión regular en E y $(a_1, \ldots, a_k)E \cap E_n = (a_1, \ldots, a_k)E_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Demostración: (i) Consideremos $K(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E}))$ el complejo de Koszul de la sucesión $a_1^*, \ldots, a_k^*$ a coeficientes en $G(\mathbf{E})$. Entonces

$$\operatorname{depth}_{(a_1^*,\ldots,a_k^*)} G(\mathbf{E}) = \min\{j \mid H_{k-j}(K(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) \neq 0\}.$$

Si $K(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) = \bigoplus_{n \geq 0} K_n(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E}))$, tenemos la sucesión exacta natural

$$0 \to K_n(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) \to C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n) \to C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n-1) \to 0 \quad (4.3)$$

Queremos ver:

$$H_i(K(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) = 0 \ \forall i \geq j \Leftrightarrow H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0 \quad \forall i \geq j \text{ y } \forall n.$$

Si $H_i(K(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) = 0$ para todo $i \geq j$ y todo n entonces considerando la sucesión exacta larga de homología asociada a (4.3) obtenemos para todo n isomorfismos

$$H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) \backsimeq H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n-1)).$$

Por otra parte, $H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0$ para todo $n \leq 0$. Por tanto los isomorfismos anteriores nos permiten deducir que $H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0$ para todo n e $i \geq j$.

Reciprocamente, de la sucesión exacta (4.3) tenemos la sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots H_{i+1}(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n-1) \to H_i(K_n(a_1^*, \ldots, a_k^*; G(\mathbf{E})) \to H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) \cdots$$

Por tanto, si $H_i(C(a_1,\ldots,a_k;\mathbf{E};n) = 0$ para todo n e $i \geq j$ tenemos entonces que $H_i(K(a_1^*,\ldots,a_k^*;G(\mathbf{E})) = 0$ para todo $i \geq j$.

(ii) Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ el resultado es immediato. Si $k > 1$, de (4.2) obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow H_{i+1}(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) \longrightarrow H_{i+1}(C(a_1,\ldots,a_k;\mathbf{E};n)) \longrightarrow \\
&H_i(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n-1)) \longrightarrow H_i(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) \longrightarrow \\
&\cdots \longrightarrow H_{j+1}(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) \longrightarrow H_{j+1}(C(a_1,\ldots,a_k;\mathbf{E};n)) \longrightarrow \\
&H_j(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n-1)) \longrightarrow H_j(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

De ésta se obtiene que $H_j(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) = 0$ para todo n ya que trivialmente $H_j(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) = 0$ para todo $n \leq 0$. Luego, por hipótesis de inducción $H_i(C(a_1,\ldots,a_{k-1};\mathbf{E};n)) = 0$ para todo n e $i \geq j$ y entonces obtenemos de la sucesión exacta que $H_i(C(a_1,\ldots,a_k;\mathbf{E};n)) = 0$ para todo n e $i \geq j$.

(iii) Por los apartados (i) y (ii) tenemos que $a_1^*,\ldots,a_k^*$ es regular en $G(\mathbf{E})$ si y solamente si $H_1(C(a_1^*,\ldots,a_k^*;\mathbf{E};n)) = 0 \quad \forall n$. Entonces por el Lema 4.2.2 (iii) obtenemos el resultado. □

4.3 El cono de la fibra

Sean A un anillo, $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración noetheriana de ideales de A y H un ideal de A conteniendo I_1.

Definición 4.3.1 *El anillo graduado $F_H(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/HI_n$ es el cono de la fibra de $\mathcal{I}$ respecto H.*

Si $(A,\mathfrak{m})$ es un anillo local, al anillo $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ lo llamaremos el cono de la fibra de $\mathcal{I}$.

Si $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ es una filtración $\mathcal{I}$-compatible podemos considerar el $F_H(\mathcal{I})$-módulo graduado definido por $F_H(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n/HE_n$. Por otra parte la siguiente filtración de E:

$$\mathbf{E}^H = (E_n^H)_{n\geq 0}, \text{ donde } E_n^H = HE_{n-1} \text{ si } n \geq 1,\ E_0^H = E$$

es una I_1-filtración, y en consecuencia $G(\mathbf{E}^H)$ es un $G(I_1)$-módulo graduado.

Puede verse entonces, de las propias definiciones, que tenemos la siguiente relación entre los complejos de Koszul a coeficientes en el cono de la fibra y los complejos de Koszul modificados a coeficientes en $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}^H$.

Proposición 4.3.2 *Sean $a_1, \ldots, a_k$ elementos en I_1. Existe una sucesión exacta de complejos*

$$0 \to K_n(a_1^0, \ldots, a_k^0; F_H(\mathbf{E})) \to C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}^H; n+1) \to C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n) \to 0$$

donde $K_n(a_1^0, \ldots, a_k^0; F_H(\mathbf{E}))$ es la n-ésima componente del complejo de Koszul graduado de $a_1^0, \ldots, a_k^0$ con coeficientes en $F_H(\mathbf{E})$.

La sucesión exacta anterior nos permite entonces formular el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3 *Supongamos que $\mathcal{I}$ es noetheriana y $G(\mathbf{E})$ finitamente generado como $G_A(\mathcal{I})$-módulo. Sean $a_1, \ldots, a_k$ elementos en I_1. Si* $\operatorname{depth}_{(a_1^*, \ldots, a_k^*)} G(\mathbf{E}) \geq r$ *entonces*

$$H_j(K(a_1^0, \ldots, a_k^0; F_H(\mathbf{E})))_n \simeq H_j(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}^H; n+1))$$

para todo $j > k - r$ y todo n.

Demostración: De la sucesión exacta de la Proposición 4.3.2 obtenemos la sucesión exacta larga de homología

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{i+1}(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) \longrightarrow H_i(K(a_1^0, \ldots, a_k^0; F_H(\mathbf{E})))_n \longrightarrow \\ H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}^H; n+1)) \longrightarrow H_i(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

Si $\operatorname{depth}_{(a_1^*, \ldots, a_k^*)} G(\mathbf{E}) \geq r$ entonces $H_j(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}; n)) = 0$ para todo $j > k - r$ y todo n por la Proposición 4.2.3 (i), y por tanto

$$H_j(K(a_1^0, \ldots, a_k^0; F_H(\mathbf{E})))_n \simeq H_j(C(a_1, \ldots, a_k; \mathbf{E}^H; n+1))$$

para todo $j > k - r$ y todo n. □

En particular, suponiendo $\operatorname{depth}_{(a_1^*, \ldots, a_k^*)} G(\mathbf{E})$ máxima obtenemos:

Proposición 4.3.4 *Supongamos que se verifican las hipótesis de la Proposición 4.3.3. Si* $\operatorname{depth}_{(a_1^*, \ldots, a_k^*)} G(\mathbf{E}) = k$ *entonces* $\operatorname{depth}_{(a_1^0, \ldots, a_k^0)} F_H(\mathbf{E}) = \operatorname{depth}_{(a_1', \ldots, a_k')} G(\mathbf{E}^H)$.

Demostración: Por la Proposición 4.3.3 tenemos isomorfismos

$$H_j(K(a_1^0,\dots,a_k^0;F_H(\mathbf{E})))_n \simeq H_j(C(a_1,\dots,a_k;\mathbf{E};n+1))$$

para todo $j>0$ y todo n. El resultado es entonces immediato a partir de la Proposición 4.2.3 (i). □

Finalmente, interpretando la proposición anterior en términos de condiciones del tipo Valabrega-Valla, obtenemos el criterio objetivo central de este capítulo:

Teorema 4.3.5 *Sea $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathcal{I}$ una filtración noetheriana de ideales de A, y $\mathbf{E}$ una filtración de submódulos de un A-módulo E. Supongamos que $\mathbf{E}$ es $\mathcal{I}$-compatible y $G(\mathbf{E})$ es finitamente generado como $G_A(\mathcal{I})$-módulo, y sea $a_1,\dots,a_k$ una familia de elementos en I_1. Supongamos que*

(i) $a_1,\dots,a_k$ es una sucesión regular en E.

(ii) $(a_1,\dots,a_k)E\cap E_n=(a_1,\dots,a_k)E_{n-1}$ para todo $n\geq 1$.

Entonces:

$$\mathrm{depth}_{(a_1^0,\dots,a_k^0)}F_H(\mathbf{E})=k \Leftrightarrow (a_1,\dots,a_k)E\cap HE_n=(a_1,\dots,a_k)HE_{n-1} \text{ para todo } n\geq 1.$$

Demostración: Aplicando las Proposiciones 4.3.4 y 4.2.3 (iii). □

Capítulo 5

Propiedad Cohen-Macaulay del cono de la fibra

5.1 Introducción

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano e $\mathcal{I}$ una filtración buena de ideales de A. Consideremos $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = R_A(\mathcal{I})/\mathfrak{m}R_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/\mathfrak{m}I_n$ el cono de la fibra de $\mathcal{I}$. El principal objetivo de este capítulo es el estudio de la propiedad Cohen-Macaulay de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$.

Si $\mathcal{I}$ es la filtración I-ádica e I esta generado por una familia de elementos analíticamente independiente, entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es isomorfo al anillo de polinomios a coeficientes en $A/\mathfrak{m}$ y $\mu(I)$ variables, y por tanto es Cohen-Macaulay. Por otra parte, Huneke y Sally en [HS] demuestran que si A es Cohen-Macaulay e I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario con número de reducción uno, entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. Shah [Sh] trata este tema de forma más general obteniendo los siguientes resultados.

Proposición *[Sh, Theorem 1] Sea I un ideal de A y J una reducción minimal de I generada por una sucesión regular tal que $I^2 = JI$. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay.*

Proposición *[Sh, Theorem 2] Sea I un ideal de A y J una reducción minimal de I generada por una sucesión regular tal que $I^3 = JI^2$. Supongamos que $I^2 \cap J = JI$ y $\mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay.*

El método utilizado por Shah es el siguiente: como J está generado por una família de elementos anlíticamente independiente tenemos que $F_{\mathfrak{m}}(J)$ es un anillo de polinomios sobre el cuerpo residual $A/\mathfrak{m}$. Por otra parte, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es una extensión finita de $F_{\mathfrak{m}}(J)$. Por tanto, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay si y sólo si es un $F_{\mathfrak{m}}(J)$-módulo libre. Las condiciones de Shah garantizan la existencia de una base de $F_{\mathfrak{m}}(I)$ como $F_{\mathfrak{m}}(J)$-módulo.

Uno de los objetivos de este capítulo es extender los resultados anteriores a número de reducción arbitrario. En este sentido probamos lo siguiente:

Teorema *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano e I un ideal de A. Sea J una reducción minimal de I. Supongamos que J esta generado por una sucesión regular y $J \cap I^n = JI^{n-1}$ para todo $1 \leq n \leq r_J(I)$. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $J \cap \mathfrak{m}I^n = J\mathfrak{m}I^n$ para todo $1 \leq n \leq r_J(I)$.*

Este resultado recubre los de Shah pero nuestra aproximación al problema es completamente distinta. Un sistema minimal de generadores de J proporciona un sistema de parámetros de $F_{\mathfrak{m}}(I)$ formado por elementos homogéneos de grado 1. Entonces, el criterio obtenido en el capítulo anterior, ver el Teorema 4.3.5, determina cuando esta família de elementos es una sucesión regular en $F_{\mathfrak{m}}(I)$.

En la Seccion 5.2 veremos como nuestro método permite extender el resultado anterior a filtraciones de ideales buenas, ver el Teorema 5.2.2. Aplicaremos este resultado en el estudio del cono de la fibra de filtraciones buenas equimúltiples. En particular, podremos determinar, en el Teorema 5.2.8 (resp. en el Teorema 5.2.11), cuando el cono de la fibra (resp. el cono de la fibra normalizado) de un ideal $\mathfrak{m}$-primario con segundo coeficiente de Hilbert (resp. con segundo coeficiente de Hilbert normalizado) igual a uno es Cohen-Macaulay. Esto nos permitirá, en el Teorema 5.2.12, caracterizar las singularidades 2-dimensionales racionales o elípticas cuyo cono de la fibra normalizado es Cohen-Macaulay.

En la Sección 5.3 probaremos que si A es Cohen-Macaulay e I es un ideal genéricamente intersección completa con desviación analítica uno y número de reducción uno, su cono de la fibra es siempre Cohen-Macaulay. En la Sección 5.4 obtenemos el mismo resultado para los ideales 1-GNN introducidos por Goto, Nakamura y Nishida [GNN].

En [Sh, Theorem 6], Shah demuestra que si $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay entonces su función de Hilbert tiene un comportamiento especial. En la Sección 5.5 generalizamos este resultado para filtraciones buenas de ideales $\mathcal{I}$ con $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ Cohen-Macaulay. En particular, obtenemos expresiones sencillas para el mínimo número de generadores de las clausuras enteras de las potencias de un ideal.

5.2 Filtraciones buenas equimúltiples

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local con cuerpo residual infinito e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración buena de A. (i.e. $I_{n+1} = I_1 I_n \quad \forall n \gg 0$). Si $a \in I_1$ denotaremos respectivamente a^*, a^0 a sus imagenes en $I_1/I_2 \hookrightarrow G_A(\mathcal{I})$, $I_1/\mathfrak{m}I_1 \hookrightarrow F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$.

Recordemos que se define la dispersión analítica de $\mathcal{I}$ como la dimensión del anillo $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$. En general, para una filtración arbitraria $\mathcal{I}$ de ideales de A las dimensiones de los anillos $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ y $G_A(\mathcal{I})/\mathfrak{m}GA(\mathcal{I})$ no coinciden. En [HZ, Lemma 2.8] Hoa y Zarzuela demuestran que si $\mathcal{I}$ es una filtración buena entonces ambas dimensiones son iguales. Además, como observamos a continuación, si la profundidad de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es positiva tenemos igualdad entre los anillos $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ y $G(\mathcal{I})/\mathfrak{m}G(\mathcal{I})$.

Lema 5.2.1 *Sea $\mathcal{I}$ una filtración buena de ideales de A. Si* $\operatorname{depth} F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) > 0$ *entonces $I_{n+1} \subseteq \mathfrak{m}I_n$ para todo $n \geq 0$ y $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = G(\mathcal{I})/\mathfrak{m}G(\mathcal{I})$. En particular, si $I_1 = \mathfrak{m}$ entonces $\mathcal{I} = (\mathfrak{m}^n)_{n\geq 0}$.*

Demostración: Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{m}I_n + I_{n+1})/\mathfrak{m}I_n \to F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) \to G(\mathcal{I})/\mathfrak{m}G(\mathcal{I}) \to 0\,.$$

Como $\mathcal{I}$ es buena tenemos que $I_{n+1} \subseteq \mathfrak{m}I_n$ para $n \gg 0$, por tanto $\dim(\bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{m}I_n + I_{n+1})/\mathfrak{m}I_n) = 0$. Si $\operatorname{depth} F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) > 0$ esto implica que $\bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{m}I_n + I_{n+1})/\mathfrak{m}I_n = 0$, y por tanto $I_{n+1} \subseteq \mathfrak{m}I_n$ para todo $n \geq 0$. En particular, si $I_1 = \mathfrak{m}$ tenemos $I_1 I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \mathfrak{m}I_n = I_1 I_n$ para todo $n \geq 0$, esto es, $I_{n+1} = I_1 I_n$ para todo $n \geq 0$ y, en consecuencia $\mathcal{I} = (\mathfrak{m}^n)_{n\geq 0}$. $\square$

El siguiente resultado al cual nos referiamos en la introducción nos ofrece un criterio para probar la propiedad Cohen-Macaulay del cono de la fibra.

Teorema 5.2.2 *Sean $\mathcal{I}$ una filtración buena de ideales de A y J una reducción minimal de $\mathcal{I}$. Supongamos*

(i) J esta generada por una sucesión regular, y

(ii) $J \cap I_n = JI_{n-1}$ para todo $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$.

Entonces $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $J \cap \mathfrak{m}I_n = J\mathfrak{m}I_{n-1}$ para todo $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$.

Demostración: Sea $J = (a_1, \ldots, a_s)$ con $s = s(\mathcal{I})$. Entonces, por la Proposición 1.5.3 tenemos que $a_1^0, \ldots, a_s^0$ es un sistema de parámetros de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$. Por otra parte, las igualdades $J \cap I_n = JI_{n-1}$ se satisfacen para todo $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$ por hipótesis, y también para $n > r_J(\mathcal{I})$ ya que en este caso $I_n = JI_{n-1}$. Luego, por el Teorema 4.3.5 $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay si y solo si $J \cap \mathfrak{m}I_n = J\mathfrak{m}I_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. El resultado es entonces inmediato teniendo en cuenta que trivialmente se tiene que $J \cap \mathfrak{m}I_n = J\mathfrak{m}I_{n-1}$ para $n > r_J(\mathcal{I})$. □

El Teorema 5.2.2 nos permite obtener los siguientes resultados.

Corolario 5.2.3 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple. Supongamos $r(I) \leq 1$. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es un anillo Cohen-Macaulay.*

Demostración: Como A es Cohen-Macaulay e I es equimúltiple, cualquier reducción minimal de I esta generada por una sucesión regular. Sea J una reducción minimal de I con $r_J(I) = r(I)$. Entonces, la condición (ii) del Teorema 5.2.2 se satisface trivialmente. Por otra parte, todo sistema minimal de generadores de J es una família analíticamente independiente en I y por tanto $J \cap \mathfrak{m}I = J\mathfrak{m}$. Luego, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay por el Teorema 5.2.2. □

En el siguiente ejemplo ofrecemos un ideal tal que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay y en cambio $G_A(I)$ no es Cohen-Macaulay.

Ejemplo 5.2.4 Sea $A = K[[X, Y, Z, T]]/(T^2, ZT, XZ - YT) = K[[x, y, z, t]]$ donde K es un cuerpo con $|K| = \infty$. A es un anillo local Cohen-Macaulay 2-dimensional y $x + z$, y forman un sistema de parámetros de A (ver [HIO, Remark (22.21)]). Sea

$I = ((x+z)^2, yt(x+z))$ y $J = ((x+z)^2)$. Entonces J es una reducción minimal de I con $r_J(I) = 1$ e I es un ideal equimúltiple con $\mathrm{ht}(I) = 1$ y $r(I) = 1$. Por el Corolario 5.2.3 $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. Por el contrario, A/I no es Cohen-Macaulay y por el Teorema 3.1.1 podemos concluir que $G_A(I)$ tampoco es Cohen-Macaulay.

Corolario 5.2.5 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple íntegramente cerrado. Supongamos $r(I) \leq 2$. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es un anillo Cohen-Macaulay si y solamente si $J \cap \mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$.*

Demostración: Sea J una reducción minimal de I con $r_J(I) = r(I) \leq 2$. Entonces, la condición (i) del Teorema 5.2.2 es inmediata por ser A C.M. e I equimúltiple. Además, la condición (ii) del Teorema 5.2.2 se reduce a comprobar la igualdad $J \cap I^2 = JI$. Esta igualdad se satisface por el Lema 3.3.1 por ser I íntegramente cerrado. Luego, por el Teorema 5.2.2 tenemos que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente $J \cap \mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$ ya que las igualdades $J \cap \mathfrak{m}I^n = J\mathfrak{m}I^{n-1}$ se satisfacen trivialmente para $n \neq 2$. □

En el caso que I_1 es un ideal $\mathfrak{m}$-primario obtenemos el siguiente resultado. (Tales filtraciones se denominan usualmente de Hilbert, ver [HM2].)

Proposición 5.2.6 *Sea $\mathcal{I} = (I_n)_{n \geq 0}$ una filtración buena con I_1 $\mathfrak{m}$-primario. Supongamos que $G_A(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay y sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay.

(ii) $J \cap \mathfrak{m}I_n = J\mathfrak{m}I_{n-1}$ for all $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$.

Demostración: Sea $J = (a_1, \ldots, a_d)$. Entonces $a_1^*, \ldots, a_d^*$ es un sistema de parámetros de $G(\mathcal{I})$. Como $G(\mathcal{I})$ es C.M. tenemos que $a_1^*, \ldots, a_d^*$ es una $G(\mathcal{I})$-sucesión regular, condición equivalente a las condiciones (i) y (ii) del Teorema 5.2.2 por la Proposición 1.6.2. Aplicando ahora el Teorema 5.2.2 tenemos el resultado. □

Supongamos que I es $\mathfrak{m}$-primario. Sean $H_I(n) = \mathrm{length}(A/I^n)$ y $P_I(X)$ la función y el polinomio de Hilbert de I respectivamente. Es bien conocido (ver [BH, Chapter 4]) que $H_I(n) = P_I(n)$ para $n \gg 0$ y que $P_I(n)$ puede escribirse de la forma

$$P_I(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(I) \binom{n+d-i-1}{d-i}.$$

Supongamos además que A es Cohen-Macaulay. Northcott [No] demuestra en este caso que $e_1(I) \geq e_0(I) - \text{length}(A/I) \geq 0$ y que $e_1(I) = 0$ si y solo si I esta generado por un sistema de parámetros de A. También ha sido probado por Huneke [Hun2, Theorem 2.1] y Ooishi [Oo2, Theorem 3.3], independientemente, que $e_1(I) = e_0(I) - \text{length}(A/I)$ si y solo si $r_J(I) \leq 1$ para cualquier reducción minimal J de I. Más recientemente, Sally [Sa2] prueba que si $d \geq 2$ y $e_2(I) \neq 0$, entonces $e_1(I) = e_0(I) - \text{length}(A/I) + 1$ si y solo si para alguna (toda) reducción minimal J de I, $r_J(I) = 2$ y $\text{length}(I^2/JI) = 1$, y que si se satisfacen tales condiciones entonces $e_2(I) = 1$, ver también [HM2]. Además, Sally también nota que la igualdad $e_0(I) - \text{length}(A/I) + 1 = e_1(I)$ no implica $e_2(I) \neq 0$. Finalmente, Itoh [It3] demuestra que esta última implicación es cierta si I es íntegramente cerrado; en este caso, resumimos estos resultados en el siguiente lema.

Lema 5.2.7 *[It3, Corollary 14] Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay, I un ideal íntegramente cerrado y J una reducción minimal de I. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $e_1(I) - e_0(I) + \text{length}(A/I) = 1$.

(ii) $I^3 = JI^2$ *y* $\text{length}(I^2/JI) = 1$.

(iii) $e_2(I) = 1$.

En tal caso $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay.

Para esta clase de ideales equimúltiples con número de reducción 2 podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 5.2.8 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay y I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Supongamos que I es íntegramente cerrado y $e_2(I) = 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $F_\mathfrak{m}(I)$ es Cohen-Macaulay.

(ii) $\mu(JI) < \mu(I^2)$ para cualquier reducción minimal J de I.

(iii) $\mu(JI) = \mu(I^2) - 1$ para cualquier reducción minimal J de I.

Demostración: Sea J una reducción minimal de I. Por el Lema 5.2.7 $r_J(I) = 2$, $\text{length}(I^2/JI) = 1$ y $G(I)$ es Cohen-Macaulay. Por tanto aplicando el Corolario 5.2.5, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $J \cap \mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$. Además, $\mathfrak{m}I^2 \subseteq JI$ ya que $1 = \text{length}(I^2/JI) = \text{length}(I^2/\mathfrak{m}I^2) + \text{length}(\mathfrak{m}I^2/JI \cap \mathfrak{m}I^2)$. Luego, $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $\mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow JI \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^2/JI \longrightarrow 0.$$

Tensorializando por $A/\mathfrak{m}$ obtenemos la sucesión exacta

$$JI/\mathfrak{m}JI \xrightarrow{\phi} I^2/\mathfrak{m}I^2 \longrightarrow I^2/JI + \mathfrak{m}I^2 \longrightarrow 0\,.$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que $\mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$. Entonces ϕ es inyectivo y teniendo en cuenta que $I^2/JI + \mathfrak{m}I^2 = I^2/JI \simeq A/\mathfrak{m}$ tenemos que $\text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(I^2/\mathfrak{m}I^2) = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(JI/\mathfrak{m}JI) + 1$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Recíprocamente, de la sucesión exacta

$$0 \to \text{Ker}\phi \to JI/\mathfrak{m}JI \xrightarrow{\phi} I^2/\mathfrak{m}I^2 \xrightarrow{\psi} I^2/JI \to 0$$

tenemos que $\text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(JI/\mathfrak{m}JI) = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Ker}\phi) + \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Im}\phi)$. Por otra parte, por hipótesis $\text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(JI/\mathfrak{m}JI) = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(I^2/\mathfrak{m}I^2) - 1 = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Ker}\psi) + 1 - 1 = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Im}\phi)$. Así, $\text{Ker}\phi = 0$ y por tanto $\mathfrak{m}I^2 = J\mathfrak{m}I$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ es trivial. Veamos $(ii) \Rightarrow (i)$. Si $\text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(JI/\mathfrak{m}JI) < \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(I^2/\mathfrak{m}I^2) = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Im}\phi) + 1 = \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(JI/\mathfrak{m}JI) - \text{rk}_{A/\mathfrak{m}}(\text{Ker}\phi) + 1$. Esta desigualdad implica que $\text{Ker}\phi = 0$ o equivalentemente que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es C.M. $\square$

Sea ahora $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local analíticamente no ramificado e I un ideal de A. Consideremos la filtración $(\overline{I^n})_{n\geq 0}$ definida por las clausuras enteras de las potencias de I. Supongamos además que I es $\mathfrak{m}$-primario y sean $\overline{H}_I(n) = \text{length}_A(A/\overline{I^n})$ la función de Hilbert normalizada de I, y $\overline{P}_I(X)$ su polinomio de Hilbert. Entonces $\overline{H}_I(n) = \overline{P}_I(n)$ para n suficientemente grande y $\overline{P}_I(n)$ puede escribirse como

$$\overline{P}_I(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \,\overline{e}_i(I) \binom{n+d-i-1}{d-i}.$$

(ver por ejemplo [Oo1, Theorem 1.3(2)]). Supongamos además que A es Cohen-Macaulay de dimensión $d \geq 2$ e I es un ideal de parámetros. Resumimos en el siguiente lema algunos de los resultados obtenidos por Itoh en [It2].

Lema 5.2.9 *[It2] Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay analíticamente no ramificado de dimensión $d \geq 2$. Sea I un ideal de parámetros. Entonces*

(i) $\overline{e}_1(I) - \text{length}(\overline{I}/I) = 0 \Leftrightarrow \overline{r}_I(I) \leq 1$.

(ii) $\overline{e}_1(I) - \text{length}(\overline{I}/I) \geq \text{length}(\overline{I^2}/I\overline{I})$, *y tenemos igualdad si y sólo si* $\overline{r}_I(I) \leq 2$.

(iii) $\overline{e}_2(I) \geq \overline{e}_1(I) - \text{length}(\overline{I}/I)$, *y tenemos igualdad si y sólo si* $\overline{r}_I(I) \leq 2$.

El siguiente lema puede obtenerse fácilmente a partir del anterior.

Lema 5.2.10 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay analíticamente no ramificado de dimensión $d \geq 2$. Sean I un ideal $\mathfrak{m}$-primario y J una reducción minimal de I. Entonces:*

(i) Si $\overline{e}_2(I) = 0$, $\overline{r}_J(I) \leq 1$ *(e $\overline{I}$ es normal).*

(ii) Si $\overline{e}_2(I) = 1$, $\overline{r}_J(I) = 2$ *y* $\text{length}(\overline{I^2}/J\overline{I}) = 1$.

Además, si I es íntegramente cerrado y $\overline{e}_2(I) \leq 1$ entonces $r_J(I) \leq \overline{r}_J(I)$, $e_2(I) \leq \overline{e}_2(I)$, y se satisfacen las igualdades si y sólo si I es normal.

Demostración: Notemos que $\overline{I^n} = \overline{J^n}$ para todo n y J es un ideal de páremetros por ser J reducción de I.

Si $\overline{e}_2(I) = 0$ por el Lema 5.2.9 tenemos las igualdades $0 = \overline{e}_1(I) - \text{length}(\overline{I}/J) = \text{length}(\overline{I^2}/J\overline{I}) = 0$ y $\overline{r}_J(I) \leq 2$. Como además $\overline{I^2} = J\overline{I}$ podemos concluir que $\overline{r}_J(I) \leq 1$. En particular, si I es íntegramente cerrado, tenemos $I^2 \subseteq \overline{I^2} = JI$ y por tanto $r_J(I) \leq 1$. Entonces, $I^{n+1} \subseteq \overline{I^{n+1}} = JI^n = J^n I$ para todo $n \geq 1$ y por lo tanto I es normal.

Si $\overline{e}_2(I) = 1$ por el Lema 5.2.9 obtenemos ahora las desigualdades $1 = \overline{e}_2(I) \geq \overline{e}_1(I) - \text{length}(\overline{I}/J) \geq \text{length}(\overline{I^2}/J\overline{I}) \geq 0$. Si $\text{length}(\overline{I^2}/J\overline{I}) = 0$ una de las desigualdades será estricta y la otra será una igualdad, contradiciendo el Lema 5.2.9. Ahora, si I es íntegramente cerrado tenemos que $I^2 = JI$ o bien $I^2 = \overline{I^2}$. Si $I^2 = JI$ entonces $r_J(I) \leq 1 < \overline{r}_J(I)$ e I no es normal. Si $I^2 = \overline{I^2}$ entonces I es normal. □

Sea $\mathcal{I} = (\overline{I^n})_{n\geq 0}$ y denotemos por $\overline{F}_{\mathfrak{m}}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n}/\mathfrak{m}\overline{I^n}$ el cono de la fibra normalizado de I (en el caso particular en que $I = \mathfrak{m}$ denotaremos $\overline{F}_{\mathfrak{m}}(I)$ por $\overline{F}(A)$). Obtenemos de forma análoga al Teorema 5.2.8 el siguiente resultado.

Teorema 5.2.11 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay con dimension $d \geq 2$ analíticamente no ramificado e I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Si $\overline{e}_2(I) = 1$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\overline{F}_{\mathfrak{m}}(I)$ *es Cohen-Macaulay.*

(ii) $\mu(J\overline{I}) < \mu(\overline{I^2})$ *para cualquier reducción J de I.*

(iii) $\mu(J\overline{I}) = \mu(\overline{I^2}) - 1$ *para cualquier reducción minimal J de I.*

Además, si $I = \mathfrak{m}$, $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay si y solamente si $\mathfrak{m}$ es normal.

Demostración: En primer lugar notemos que $G(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay por el Lema 3.3.1 y la Proposición 1.6.2 (ver también [It1, Proposition 3]). Podemos entonces proceder como en la prueba del Teorema 5.2.8. Finalmente supongamos $I = \mathfrak{m}$. Si $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay entonces $\mathfrak{m}$ es normal por el Lema 5.2.1. Recíprocamente, si $\mathfrak{m}$ es normal entonces $\overline{F}(A) = G(\mathcal{I}) = G(\mathfrak{m})$ que es Cohen-Macaulay como ya hemos notado. □

Recordemos que si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local analíticamente no ramificado de dimensión d e I es $\mathfrak{m}$-primario, se define el género normal de I como $\overline{g}(I) = \overline{e}_d(I)$, y el género aritmético de A como $p_g(A)$ =sup $\{\overline{g}(I) | I \text{ is } \mathfrak{m}\text{−primario}\}$, ver [Oo1]. Supongamos además que A es 2-dimensional y Cohen-Macaulay. Puede verse entonces que para todo ideal I $\mathfrak{m}$-primario, el género normal $\overline{g}(I)$ es igual a length$(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ donde $X = Proj(R(I))$, [Oo1, Theorem 3.1]. Si además A es analíticamente normal entonces Lipman demuestra en [Li2] que existe una desingularización $Y \to Spec(A)$, y que el entero length$(H^1(Y, \mathcal{O}_Y))$ no depende de Y y es igual a $H(A) = \sup \{\text{length}(H^1(Z, \mathcal{O}_Z)) \mid Z \to Spec(A)$ es una aplicación birracional con Z normal$\}$. Además, si A es normal tal desingularización puede obtenerse por explosión de un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Luego, si A es analíticamente normal tenemos que $p_g(A) = H(A)$. El anillo A se dice que es una singularidad racional si $H(A) = 0$, y elíptica si $H(A) = 1$.

Teorema 5.2.12 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay 2-dimensional y analíticamente normal. Si A es una singularidad racional, entonces $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay. Si A es una singularidad elíptica, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\overline{F}(A)$ *es Cohen-Macaulay.*

(ii) $\mathfrak{m}$ *es normal.*

(iii) $\mathfrak{m}$ *es normal y* $r(\mathfrak{m}) = 1$*, o* $r(\mathfrak{m}) = 2$.

Demostración: Si A es una singularidad racional, entonces $\overline{e}_2(\mathfrak{m}) = 0$ y por el Lema 5.2.10 $r(\mathfrak{m}) = \overline{r}(\mathfrak{m}) \leq 1$ y $\mathfrak{m}$ es normal.

Supongamos que A es una singularidad elíptica, entonces $\overline{e}_2(\mathfrak{m}) \leq 1$. Si $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay entonces $\mathfrak{m}$ es normal por el Lemma 5.2.1. Supongamos ahora que $\mathfrak{m}$ es normal. Entonces $r(\mathfrak{m}) = \overline{r}(\mathfrak{m})$ y por el Lemma 5.2.10 tenemos que $r(\mathfrak{m}) \leq 2$ ya que $\overline{e}_2(\mathfrak{m}) \leq 1$.

Para *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)* es suficiente ver que si $r(\mathfrak{m}) = 2$ entonces $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay. Pero, por el Lema 5.2.10 tenemos que $\mathfrak{m}$ es normal con $\overline{e}_2(\mathfrak{m}) = 1$, y aplicando ahora el Teorema 5.2.11 $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay. □

Ejemplo 5.2.13 (Utilizamos la notación de [Di, Chapter 4]).

(i) Sea $A = \mathbb{C}[[x, y, z]]/(x^4 + y^4 + z^2)$ (el anillo local de una singularidad de una superficie elíptica compleja de tipo $\widetilde{E}_7$). Es fácil ver que en este caso $r(\mathfrak{m}) = 1$ y $\mathfrak{m}$ no es normal, por tanto $\overline{F}(A)$ no es Cohen-Macaulay. (Notemos que $r(\mathfrak{m}) \neq \overline{r}(\mathfrak{m})$.)

(ii) Sea $A = \mathbb{C}[[x, y, z]]/(x^3 + y^3 + z^3)$ (tipo $\widetilde{E}_6$). Entonces $r(\mathfrak{m}) = 2$ y $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay por el Teorema 5.2.12.

(iii) Sea $A = \mathbb{C}[[x, y, z]]/(x^6 + y^3 + z^2)$ (tipo $\widetilde{E}_8$). Ahora $r(\mathfrak{m}) = 1$, y puede verse que $\mathfrak{m}$ es normal. Por lo tanto, $\overline{F}(A)$ es Cohen-Macaulay.

5.3 Ideales con desviación analítica uno

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo Cohen-Macaulay e I un ideal de A genéricamente intersección completa con $ad(I) = 1$.

Nota 5.3.1 Recordemos (ver el Lema 3.4.6) que si J es una reducción minimal de I entonces existe un sistema minimal de generadores $a_1, \ldots, a_{h+1}$ de J verificando las siguientes condiciones:

(i) $a_1, \ldots, a_h$ es una sucesión regular en A.

(ii) $I_\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_h)_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A/I)$.

(iii) $((a_1, \ldots, a_h)^m : a_{h+1}^n) \cap I^m = (a_1, \ldots, a_h)^m$ para todo n, m enteros positivos.

(iv) Si $h \geq 1$ e $I^2 = JI$, $(a_1, \ldots, a_h)^i \cap I^n = (a_1, \ldots, a_h)I^{n-i}$ para todo $n \geq 1$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Veamos que si $r(I) \leq 1$ entonces el cono de la fibra de I es Cohen-Macaulay.

Teorema 5.3.2 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal de A. Supongamos que I es genericamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 1$. Entonces, $F_\mathfrak{m}(I)$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Reduciremos la demostración al caso $\mathrm{ht}\,(I) = 0$. Sea $h := \mathrm{ht}\,(I)$. Supongamos $h = 0$ y sea $J = (a_1)$ una reducción minimal de I con $I^2 = JI$ y a_1 verificando las condiciones de la Nota 5.3.1. Como $\dim F_\mathfrak{m}(I) = 1$ es suficiente ver que $a_1^0 \in I/\mathfrak{m}I \hookrightarrow F_\mathfrak{m}(I)$ no es divisor de cero. Ésto equivale a demostrar que $(\mathfrak{m}I^{n+1} : a_1) \cap I^n = \mathfrak{m}I^n$ para $n \geq 0$, lo cual es claro si $n = 0$ ya que a_1 forma parte de un sistema minimal de generadores de I. Supongamos $n > 0$ y sea $x \in (\mathfrak{m}I^{n+1} : a_1) \cap I^n$. Entonces $xa_1 \in \mathfrak{m}I^{n+1} = \mathfrak{m}(a_1)I^n$ ya que $r(I) \leq 1$. Por tanto existe $y \in \mathfrak{m}I^n$ tal que $a_1(x-y) = 0$. Luego $x - y \in (0 : a_1) \cap I = 0$ por la Nota 5.3.1 (iii) y $(\mathfrak{m}I^{n+1} : a_1) \cap I^n = \mathfrak{m}I^n$ como queríamos ver.

Supongamos ahora que $h \geq 1$ y sea $J = (a_1, \ldots, a_{h+1})$ una reducción minimal de I como en la Nota 5.3.1. Veamos que $a_1^0, \ldots, a_h^0$ es una sucesión regular en $F_\mathfrak{m}(I)$. Por el Teorema 4.3.5 es suficiente ver que se satisfacen las condiciones (i): $(a_1, \ldots, a_h) \cap I^{n+1} =$

$(a_1, \ldots, a_h)I^n$, y (ii): $(a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}I^{n+1} = (a_1, \ldots, a_h)\mathfrak{m}I^n$, para todo $n \geq 0$. (i) es consecuencia directa de la Nota 5.3.1 (iv). Probemos (ii). Si $n = 0$ entonces $(a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}I = (a_1, \ldots, a_h)\mathfrak{m}$ porque $a_1, \ldots, a_h$ forma parte de un sistema minimal de parámetros de I. Supongamos $n > 0$. Como $r(I) \leq 1$ entonces $(a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}I^{n+1} = (a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}JI^n = (a_1, \ldots, a_h) \cap (\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_h)I^n + \mathfrak{m}a_{h+1}I^n) = \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_h)I^n + ((a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}a_{h+1}I^n)$. Así, es suficiente ver que $(a_1, \ldots, a_h) \cap \mathfrak{m}a_{h+1}I^n \subseteq \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_h)I^n$. Sea $xa_{h+1} \in (a_1, \ldots, a_h)$ con $x \in \mathfrak{m}I^n$. Entonces $x \in (I \cap (a_1, \ldots, a_h) : a_{h+1})$ y por la Nota 5.3.1 (iii) tenemos que $x \in (a_1, \ldots, a_h)$. Por tanto $x \in \mathfrak{m}I^n \cap (a_1, \ldots, a_h) = (a_1, \ldots, a_h)\mathfrak{m}I^{n-1}$ por hipótesis de inducción. Luego, $xa_{h+1} \in \mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_h)I^n$ como queríamos ver.

Sea ahora $B = A/(a_1, \ldots, a_h)$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(a_1, \ldots, a_h)$, $\overline{I} = I/(a_1, \ldots, a_h)$ y $\overline{J} = J/(a_1, \ldots, a_h)$. Entonces B es un anillo Cohen-Macaulay e $\overline{I}$ es un ideal de B genéricamente intersección completa con $\operatorname{ad}(\overline{I}) = 1$ (por el Lema 3.1.4), $\operatorname{ht}(\overline{I}) = 0$ y $r_{\overline{J}}(\overline{I}) \leq 1$. Además, $F_{\mathfrak{m}}(I)/(a_1^0, \ldots, a_h^0) \simeq F_{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{I})$ ya que $(a_1, \ldots, a_h) \cap I^n = (a_1, \ldots, a_h)I^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Luego, $\operatorname{depth} F_{\mathfrak{m}}(I) = \operatorname{depth} F_{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{I}) + h$. Como ya hemos visto que $F_{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{I})$ es Cohen-Macaulay tenemos que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ también lo es. □

Nota 5.3.3 Notemos que podemos encontrar ideales de desviación analítica uno con $r(I) = 1$ tales que el anillo graduado $G_A(I)$ no es Cohen-Macaulay, ver [Zar, Example].

Nota 5.3.4 Sea $K = [X_1, \ldots, X_n, Y, Z]$, donde K es un cuerpo. Sea I el ideal de definición de una variedad monomial proyectiva de codimensión 2. Una tal variedad admite una parametrización del tipo

$$x_1 = u_1^{a_1},\ x_2 = u_2^{a_2}, \ldots, x_n = u_n^{a_n},\ y = u_1^{c_1} \cdots u_n^{c_n},\ z = u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n}$$

con $1 \leq i \leq n$ y a_i, b_i, c_i enteros no negativos tales que $a_i \neq 0$, $(b_i, c_i) \neq (0, 0)$, $(b_1, \ldots, b_n) \neq (0, \ldots, 0)$ y $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Morales y Simis demuestran en [MS, Proposition (3.1.2)] que si I es el ideal de definición de una curva monomial sobre una cuádrica, entonces I es un ideal con $\operatorname{ad}(I) = 1$ y $r(I) \leq 1$. Luego, podemos aplicar el Teorema 5.3.2 para concluir que el cono de la fibra de tales ideales es Cohen-Macaulay. En [MS] se demuestra también este hecho pero utilizando métodos distintos.

Posteriormente, Gimenez [Gi] (ver también [GMS]) demuestra en el caso general que la dispersión analítica de I es igual a 2 si I es intersección completa y que es igual a 3 en el resto de los casos. Además, prueba que si el ideal de presentación de $R_A(I)$ está generado por formas de grado a lo sumo 2 (es decir, si el tipo de relación de I es menor o igual que 2), entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay y $r(I) = 1$.

Recientemente, Barile y Morales [BM] han probado que el número de reducción de I es igual a uno. Luego, aplicando los resultados obtenidos en este capítulo se tiene que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay (independientemente del tipo de relación de I).

5.4 1-GNN ideales

Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay d-dimensional e I un ideal de A. Sean $h = \mathrm{ht}\,(I)$, $s = s(I)$ y J una reducción minimal de I. Goto, Nakamura y Nishida demuestran en [GNN] que existe un sistema minimal de generadores $a_1, \ldots, a_s$ de J verificando las condiciones $(*)$ y $(**)$ siguientes:

$(*)$ $\quad (a_1, \ldots, a_i)A_{\mathfrak{p}}$ es reducción de $I_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ con $i = \mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) \leq s$

donde $V(I)$ denota el conjunto de ideales primos que contienen I.

Sea $J_i = (a_1, \ldots, a_i)$ para $0 \leq i \leq s$ y denotemos por

$$r_i = \max\{r_{J_{i_{\mathfrak{p}}}}(I_{\mathfrak{p}})\,;\, \mathfrak{p} \in V(I) \text{ y } \mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) = i\}$$

para $h \leq i \leq s$.

$(**)$ $\quad a_i \notin \mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/J_{i-1} \setminus V(I)$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Además, para tal sistema de generadores la sucesión $a_1, \ldots, a_h$ es regular.

Sean J una reducción minimal de I y $r \in \mathbb{Z}$ un entero no negativo, y consideremos las siguientes condiciones:

(a) $\mathrm{depth} A/I^n \geq d - s + r - n$ para todo $1 \leq n \leq r$,
(b) $r_i \leq \max\{0, i - s + r\}$ para todo $h \leq i < s$,
(c) $A/(J_i : I)$ es Cohen-Macaulay para todo $h \leq i \leq s - r - 1$, y
(d) $r_J(I) \leq r$.

Para simplificar los enunciados, ofrecemos la siguiente definición.

Definición 5.4.1 *Diremos que I es un r-GNN ideal si existe una reducción minimal J de I con un sistema minimal de generadores que satisfacen las condiciones $(*)$, $(**)$ y (a), (b), (c), (d) anteriores.*

Para este tipo de ideales en [GNN] se demuetra lo siguiente:

Proposición 5.4.2 *[GNN, Theorem 1.1] Sea I un r-GNN ideal de A. Entonces $G_A(I)$ es Cohen-Macaulay.*

La propiedad Cohen-Macaulay de $G_A(I)$, aunque no es necesaria para la propiedad Cohen-Macaulay de $F_{\mathfrak{m}}(I)$, nos permite aplicar el Teorema 4.3.5 a sucesiones de elementos de $F_{\mathfrak{m}}(I)$ y determinar si éstas son regulares.

El siguiente resultado nos proporciona ejemplos de 1-GNN ideales.

Proposición 5.4.3 *Supongamos que A es Gorenstein y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de altura positiva y desviación analítica 2. Supongamos que $A/\mathfrak{p}$ es Cohen-Macaulay y se satisfacen una de las siguientes condiciones:*

(i) $\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}}$ *es intersección completa para todo ideal primo* $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ *con* $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \leq 2$.

(ii) $\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}}$ *es intersección completa para todo ideal primo* $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ *con* $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \leq 1$ *y* $r(I) \leq 1$.

Entonces, $\mathfrak{p}$ *es un* 1*-GNN ideal.*

Demostración: La condición (a) se cumple trivialmente. Si se verifica (i) entonces $r_J(\mathfrak{p}) \leq 1$ para toda reducción minimal J de I por [HH1, Corollary 3.3]. En el caso de verificarse (ii) existe una tal reducción por hipótesis. Sea J una reducción minimal de I con $r_J(I) \leq 1$, es decir, verificando (d). Sea $a_1, \ldots, a_s$ un sistema minimal de generadores de J cumpliendo $(*)$ y $(**)$. La condición (b) se verifica ya que la única reducción de un ideal intersección completa es el propio ideal. Por último, (a) se verifica por [PS, Lemma 1.3]. $\square$

Ejemplo 5.4.4 Sean $R = k[X_{1j}, X_{2j} \mid j = 1,2,3,4]$ el anillo de polinomios en ocho variables sobre un cuerpo infinito k, y P el ideal primo generado por los menores maximales de la matriz

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \end{pmatrix}.$$

Sea $M = (X_{1j}, X_{2j} \mid j = 1,2,3,4)$, $A = R_M$, y $\mathfrak{p} = PA$. Entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo Cohen-Macaulay de altura 3, con $\mathrm{ad}(\mathfrak{p}) = 2$ y tal que $\mathfrak{p}_\mathfrak{q}$ es intersección completa para todo ideal primo $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ con $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \leq 1$. Además, existe una reducción minimal J de $\mathfrak{p}$ tal que $r_J(\mathfrak{p}) = 1$, ver [GN2, Example 4.7]. Entonces $\mathfrak{p}$ es un 1-GNN ideal.

Supongamos que I es un 1-GNN ideal. Nuestro principal objetivo es demostrar que $F_\mathfrak{m}(I)$ es un anillo Cohen-Macaulay viendo que $a_1, \ldots, a_s$ es una $F_\mathfrak{m}(I)$-sucesión regular. Para ello necesitaremos las siguientes propiedades de intersección satisfechas por esta clase de ideales:

Lema 5.4.5 *Sea I un 1-GNN ideal.*

(i) Si $0 \leq i \leq s$ entonces, $J_i \cap I^{n+1} = J_i I^n$ para todo $n \geq 0$.

(ii) Si $0 \leq i \leq s-1$ entonces, $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n+1} = J_i I^n$ para todo $n \geq 0$.

Demostración: Las demostraciones pueden encontrarse en [GNN], Lemma 3.1 y Corollary 3.3. □

Lema 5.4.6 *Sea $h \leq i \leq s$. Entonces, $J_i \cap \mathfrak{m} I^{n+1} = J_i \mathfrak{m} I^n$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración: Procederemos por inducción descendente sobre i. Supongamos primero que $i = s$. Para $n = 0$ la igualdad $J_s \cap \mathfrak{m} I = J_s \mathfrak{m}$ se satisface ya que $J_s = J$ y $a_1, \ldots, a_s$ es parte de un sistema minimal de generadores de I. Por otra parte, como $r_J(I) \leq 1$, $I^{n+1} = JI^n$ para todo $n \geq 1$ y por tanto $J_s \cap \mathfrak{m} I^{n+1} = J_s \mathfrak{m} I^n$.

Sea ahora $i = s-1$. Para $n = 0$ la igualdad $J_{s-1} \cap \mathfrak{m} I = J_{s-1}\mathfrak{m}$ se verifica como antes. Sea $n > 0$. Entonces $J_{s-1} \cap \mathfrak{m} I^{n+1} = J_{s-1} \cap \mathfrak{m} I^n J = \mathfrak{m} I^n J_{s-1} + a_s \mathfrak{m} I^n \cap J_{s-1}$. Luego es suficiente ver que $a_s \mathfrak{m} I^n \cap J_{s-1} \subseteq \mathfrak{m} I^n J_{s-1}$. Si $x a_s \in J_{s-1}$ con $x \in \mathfrak{m} I^n$ entonces $x \in (J_{s-1} : a_s) \cap I = J_{s-1}$ por el Lema 5.4.5 y $x \in J_{s-1} \cap \mathfrak{m} I^n = J_{s-1} \mathfrak{m} I^{n-1}$ por inducción sobre n. Así, $x a_s \in J_{s-1} \mathfrak{m} I^n$.

Sea $h \leq i < s-1$ y supongamos que $J_k \cap \mathfrak{m}I^{n+1} = J_k\mathfrak{m}I^n$ para todo $n \geq 0$ e $i < k \leq s$. Si $n = 0$ entonces $J_i \cap \mathfrak{m}I = J_i\mathfrak{m}$. Sea $n > 0$. Entonces $J_i \cap \mathfrak{m}I^{n+1} = J_i \cap \mathfrak{m}I^n J = J_i\mathfrak{m}I^n + (a_{i+1}, \ldots, a_s)\mathfrak{m}I^n \cap J_i$. Sea $x_{i+1}a_{i+1} + \cdots + x_s a_s \in J_i$ con $x_{i+1}, \ldots, x_s \in \mathfrak{m}I^n$. Entonces $x_s \in (J_{s-1} : a_s) \cap I = J_{s-1}$ por el Lema 5.4.5 y $x_s \in J_{s-1} \cap \mathfrak{m}I^n = J_{s-1}\mathfrak{m}I^{n-1}$. Luego, $x_s a_s \in J_{s-1}\mathfrak{m}I^n$ y $(a_{i+1}, \ldots, a_s)\mathfrak{m}I^n \cap J_i \subseteq J_{s-1}\mathfrak{m}I^n \cap J_i \subseteq J_i\mathfrak{m}I^n + (a_{i+1}, \ldots, a_{s-1})\mathfrak{m}I^n \cap J_i$. Repitiendo este argumento sucesivamente obtenemos que $(a_{i+1}, \ldots, a_s)\mathfrak{m}I^n \cap J_i \subseteq J_i\mathfrak{m}I^n + (a_{i+1})\mathfrak{m}I^n \cap J_i$. Pero si $x \in \mathfrak{m}I^n$ es tal que $a_{i+1}x \in J_i$ entonces $x \in (J_i : a_{i+1}) \cap I = J_i$ por el Lema 5.4.5. Así, $x \in J_i \cap \mathfrak{m}I^n = J_i\mathfrak{m}I^{n-1}$ por inducción sobre n y $a_{i+1}x \in J_i\mathfrak{m}I^n$. □

Probaremos ahora el principal resultado de esta sección.

Teorema 5.4.7 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay local e I un 1-GNN ideal. Entonces $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Veamos primero que podemos suponer $\operatorname{ht}(I) = 0$.

Sea $J = (a_1, \ldots, a_s)$ una reducción minimal de I verificando $(*)$, $(**)$ y (a), (b), (c), (d). Como ya hemos observado, entonces $a_1, \ldots, a_h$ es una sucesión regular y $J_h \cap I^{n+1} = J_h I^n$ para todo $n \geq 0$ por el Lema 5.4.5. Luego, por el Teorema 4.3.5 la sucesión $a_1^0, \ldots, a_h^0$ es regular en $F_{\mathfrak{m}}(I)$ si y solamente si $J_h \cap \mathfrak{m}I^{n+1} = J_h\mathfrak{m}I^n$ para todo $n \geq 0$, y esto sigue directamente del Lema 5.4.6. Luego, $a_1^0, \ldots, a_h^0$ es una sucesión regular en $F_{\mathfrak{m}}(I)$. Consideremos ahora el anillo Cohen-Macaulay $A/(a_1, \ldots, a_h)$. Entonces, el ideal $I/(a_1, \ldots, a_h)$ es 1-GNN y $J/(a_1, \ldots, a_h) = (\bar{a}_{h+1}, \ldots, \bar{a}_s)$ es una reducción minimal de $I/(a_1, \ldots, a_h)$ verificando las condiciones $(*)$, $(**)$ y (a), (b), (c), (d) (ver [GNN, Lemma 3.4]). Por otro lado, como $J_h \cap I^n = J_h I^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, puede verse fácilmente que $F_{\mathfrak{m}}(I)/(a_1^0, \ldots, a_h^0) \simeq F_{\mathfrak{m}}(I/(a_1, \ldots, a_h))$. Luego, podemos suponer $\operatorname{ht}(I) = 0$.

Supongamos $\operatorname{ht}(I) = 0$. Queremos ver que $a_1^0, \ldots, a_s^0$ es una $F_{\mathfrak{m}}(I)$-sucesión regular. Ésto equivale a demostrar las igualdades

$$(\mathfrak{m}I^{n+1} + J_i I^n : a_{i+1}) \cap I^n = \mathfrak{m}I^n + J_i I^{n-1} \text{ para } 0 \leq i \leq s-1 \text{ y } n \geq 0.$$

Sea $n = 0$ y veamos que $(\mathfrak{m}I + J_i : a_{i+1}) = \mathfrak{m} + J_i$. Sea x un elemento de A tal que $xa_{i+1} \in \mathfrak{m}I + J_i$. Entonces existen $z \in \mathfrak{m}I$ e $y_1, \ldots, y_i \in A$ tales que $xa_{i+1} = z + y_1 a_1 + \ldots y_i a_i$, por tanto $z \in \mathfrak{m}I \cap J_{i+1} = \mathfrak{m}J_{i+1} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} + J_i$.

Sea ahora $n > 0$. Entonces $(\mathfrak{m}I^{n+1} + J_iI^n : a_{i+1}) \cap I^n = (\mathfrak{m}I^nJ + J_iI^n : a_{i+1}) \cap I^n$. Si $x \in I^n$ y $xa_{i+1} \in \mathfrak{m}I^nJ + J_iI^n = J_iI^n + (a_{i+1}, \ldots, a_l)\mathfrak{m}I^n$ entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in I^n$ y $\beta_{i+1}, \ldots, \beta_l \in \mathfrak{m}I^n$ tales que $xa_{i+1} = \alpha_1a_1 + \ldots + \alpha_ia_i + \beta_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \beta_la_s$. Luego, $\beta_s \in (J_{s-1} : a_s) \cap \mathfrak{m}I^n \subseteq (J_{s-1} : a_s) \cap I^n = J_{s-1}I^{n-1}$ por el Lema 5.4.5 y $\beta_s \in \mathfrak{m}I^n \cap J_{s-1} = J_{s-1}\mathfrak{m}I^{n-1}$ por el Lema 5.4.6. Entonces, existen $y_1, \ldots, y_{s-1} \in \mathfrak{m}I^{n-1}$ tales que $xa_{i+1} = (\alpha_1 + y_1a_s)a_1 + \ldots + (\alpha_i + y_ia_s)a_i + (\beta_{i+1} + y_{i+1}a_s)a_{i+1} + \ldots + (\beta_{s-1} + y_{s-1}a_s)a_{s-1}$ con $\alpha_j + y_ja_s \in I^n$, para $j = 1, \ldots, i$ y $\beta_k + y_ka_s \in \mathfrak{m}I^n$, para $k = i+1, \ldots, s-1$. Repitiendo este argumento obtenemos que $xa_{i+1} = \alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_ia_i + \beta_{i+1}a_{i+1}$ con $\alpha_j \in I^n$ y $\beta_{i+1} \in \mathfrak{m}I^n$. Entonces $x - \beta_{i+1} \in (J_i : a_{i+1}) \cap I^n = J_iI^{n-1}$ por el Lema 5.4.5, y por tanto $x \in \mathfrak{m}I^n + J_iI^{n-1}$. □

Observemos que para la demostración del teorema 5.4.7 es suficiente que I verifique las propiedades de intersección del Lema 5.4.5. Éstas son satisfechas por una clase de ideales más amplia que los ideales 1-GNN. Por ejemplo:

Proposición 5.4.8 *Sea I un ideal y J una reducción minimal de I con $I^2 = JI$. Supongamos que I es equimúltiple o genéricamente intersección completa con* $\mathrm{ad}(I) = 1$. *Entonces, existe un sistema minimal de generadores $a_1, \ldots, a_s$ de J tal que:*

(i) $J_i \cap I^{n+1} = J_iI^n$ para todo $0 \leq i \leq s$ y todo $n \geq 0$.

(ii) $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n+1} = J_iI^n$ para todo $0 \leq i \leq s-1$ y todo $n \geq 0$.

Demostración: Supongamos primero que I es equimúltiple. Entonces $s = h$ y $a_1, \ldots, a_s$ es una A-sucesión regular. Trivialmente, $J \cap I^{n+1} = JI^n$ para todo $n \geq 0$ ya que $I^2 = JI$. Así, por el criterio de Valabrega-Valla, $a_1^*, \ldots, a_l^*$ es una sucesión regular en $G(I)$ y por tanto también lo es $a_1^*, \ldots, a_i^*$ para todo $0 \leq i \leq l$. Utilizando de nuevo el criterio de Valabrega-Valla tenemos que $J_i \cap I^{n+1} = J_iI^n$ para todo $n \geq 0$. Para la condición (ii) notemos que $(J_i : a_{i+1}) = J_i$ para todo $i < s$ y por tanto $(J_i : a_{i+1}) \cap I^{n+1} = J_i \cap I^{n+1} = J_iI^n$ por (i).

Supongamos ahora que I es genericamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$. Sea J una reducción minimal de I con $I^2 = JI$. Entonces $J_s \cap I^{n+1} = J_sI^n$ trivialmente. Ahora $s = h + 1$. Consideremos un sistema minimal de generadores $a_1, \ldots, a_s$ de J verificando las condiciones de la Nota 5.3.1. Por tanto, podemos suponer que $a_1, \ldots, a_h$ es una sucesión regular, $J_h \cap I^{n+1} = J_hI^n$ para todo $n \geq 0$ y $(J_h : a_{h+1}) \cap I = J_h$.

Utilizando una vez más el criterio de Valabrega-Valla tenemos que $J_i \cap I^{n+1} = J_i I^n$ para todo $n \geq 0$ e $0 \leq i \leq h$. Para ver (ii), notemos que si $i = s-1 = h$ tenemos para $n \geq 0$ que $(J_h : a_{h+1}) \cap I^{n+1} \subseteq (J_h : a_{h+1}) \cap I = J_h$. Luego, $(J_h : a_{h+1}) \cap I^{n+1} \subseteq J_h \cap I^{n+1} = J_h I^n$ por (i) y tenemos la igualdad. Finalmente, si $i < h$ es suficiente tener en cuenta que $(J_i : a_{i+1}) = J_i$. □

Es decir, de la demostración del Teorema 5.4.7 podemos recuperar el Corolario 5.2.3 y el Teorema 5.3.2 en los que obteníamos la propiedad Cohen-Macaulay respectivamente para ideales equimúltiples e ideales genéricamente intersección completa con $\mathrm{ad}(I) = 1$, en ambos casos bajo la hipótesis $r(I) \leq 1$.

Notemos también que, en general, los ideales que verifican las popiedades de intersección de la Proposición 5.4.8 no son 1-GNN ideales ya que para ideales equimúltiples la condición (a) implica que A/I es Cohen-Macaulay, y para ideales con desviación analítica uno implica $\mathrm{depth} A/I \geq \dim A/I - 1$. (Observemos también que las condiciones (b),(c) y (d) son satisfechas trivialmente por esta clase de ideales.)

5.5 La función de Hilbert del cono de la fibra

En esta sección queremos describir el comportamiento de la función de Hilbert del cono de la fibra. Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n \geq 0}$ una filtración buena de ideales de A, entonces la función de Hilbert de $F_{\mathfrak{m}}(I)$, $f(n) = \mathrm{length}(I_n/\mathfrak{m}I_n)$, nos da el mínimo número de generadores de I_n. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$. Existe entonces un morfismo finito de anillos graduados definido por

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathfrak{m}}(J) & \xrightarrow{\Phi} & F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) \\ \overline{a} \in J^n/\mathfrak{m}J^n & \mapsto & \varphi(\overline{a}) = a^0 \in I_n/\mathfrak{m}I_n \end{array}$$

(notemos que Φ es inyectivo en grado uno ya que $J \cap \mathfrak{m}I_1 = \mathfrak{m}J$). Además, como J está generado por una familia de elementos analíticamente independientes tenemos que $F_{\mathfrak{m}}(J)$ es isomorfo al anillo de polinomios a coeficientes en $A/\mathfrak{m}$ y $\mu(J) = s(\mathcal{I})$ variables. Así, tenemos que $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es un anillo Cohen-Macaulay si y sólo si $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es un $F_{\mathfrak{m}}(J)$-módulo libre. En particular, la multiplicidad $e(F_{\mathfrak{m}}(I))$ es igual a su rango, y como $JF_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n \geq 1}(JI_{n-1} + \mathfrak{m}I_n)/\mathfrak{m}I_n$ está generado por un sistema de parámetros de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ obtenemos que $e(F_{\mathfrak{m}}(I)) = \mathrm{length}(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})/JF_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}))$.

Resumimos las consideraciones anteriores en el siguiente lema.

Lema 5.5.1 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I}$ una filtración buena de ideales de A. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$. Entonces:*

(i) $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es un $F_{\mathfrak{m}}(J)$-módulo libre.

(ii) Si $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay entonces

$$\operatorname{rk}_{F_{\mathfrak{m}}(J)}(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})) = e(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})) = \operatorname{length}(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})/JF_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})).$$

Nota 5.5.2 Observemos que si $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay entonces el morfismo Φ es inyectivo y por tanto $J^n \cap \mathfrak{m}I_n = \mathfrak{m}J^n$ for all $n \geq 0$.

En el siguiente resultado describimos el comportamiento de la función de Hilbert del cono de la fibra cuando éste es Cohen-Macaulay. Este resultado generaliza el de Shah [Sh, Theorem 6] a filtraciones buenas.

Teorema 5.5.3 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración buena de ideales de A. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$, $r = r_J(\mathcal{I})$ y $s = s(\mathcal{I})$. Si $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay entonces*

$$\begin{aligned}\mu(I_n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{r}(\mu(I_i) - \operatorname{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1} \cap \mathfrak{m}I_i))\binom{n+s-i-1}{s-1} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(I_i) - \operatorname{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1} \cap \mathfrak{m}I_i))\binom{n+s-i-1}{s-1}.\end{aligned}$$

Demostración: Consideremos la familia de elementos en $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ dada por el conjunto $\left\{1, \{a^0_{i_1}, \ldots, a^0_{i_{r_i}}\}\right\}_{i=1,\ldots,r}$, donde $1 \in A/\mathfrak{m}$ y $\{\overline{a^0_{i_1}}, \ldots, \overline{a^0_{i_{r_i}}}\}$ es una base del $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $I_i/\mathfrak{m}I_i + JI_{i-1}$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Entonces $\left\{1, \{a^0_{i_1}, \ldots, a^0_{i_{r_i}}\}\right\}_{i=1,\ldots,r}$ es un sistema de generadores de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ como $F_{\mathfrak{m}}(J)$-módulo y por tanto es una base ya que su cardinal es igual a $\operatorname{length}(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})/JF_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})) = \operatorname{rk}_{F_{\mathfrak{m}}(J)}(F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}))$. Denotaremos por b^i_j a $a^0_{i_j}$, para todo $i = 1, \ldots, r$ y $j = 1, \ldots, r_i$. Entonces, $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = \bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{j=1}^{r_i} b^i_j F_{\mathfrak{m}}(J)\right)$ y tomando la componente de grado n tenemos $I_n/\mathfrak{m}I_n = \bigoplus_{i=0}^{r}(b^i_1, \ldots, b^i_{r_i})F_{\mathfrak{m}}(J)_{n-i}$ para todo $n \geq 0$. Como $\operatorname{length}(F_{\mathfrak{m}}(J)_{n-i}) = \binom{n+s-i-1}{s-1}$ tenemos que $\mu(I_n) = \operatorname{length}(I_n/\mathfrak{m}I_n)$ $= \sum_{i=0}^{r} r_i\binom{n+s-i-1}{s-1}$.

Por otra parte, $r_i = \operatorname{length}(I_i/\mathfrak{m}I_i + JI_{i-1}) = \operatorname{length}((I_i/\mathfrak{m}I_i)/(\mathfrak{m}I_i + JI_{i-1}/\mathfrak{m}I_i)) =$ $\operatorname{length}(I_i/\mathfrak{m}I_i) - \operatorname{length}(\mathfrak{m}I_i + JI_{i-1}/\mathfrak{m}I_i) = \mu(I_i) - \operatorname{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1} \cap \mathfrak{m}I_i)$. La suma puede extenderse a ∞ ya que $I_i = JI_{i-1}$ para $i > r$. $\square$

Nota 5.5.4 Del anterior resultado se deduce que si $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay entonces $r_J(\mathcal{I})$ y $\text{length}(JI_{i-1}/JI_{i-1}\cap \mathfrak{m}I_i)$ no dependen de J para todo $i \geq 0$

Nota 5.5.5 D'Cruz, Raghavan y Verma pueban en [CRV] que para filtraciones ádicas el recíproco del Teorema 5.5.3 es cierto. La misma idea puede aplicarse para el caso de filtraciones buenas: suponiendo que la función de Hilbert tiene la forma del Teorema 5.5.3 puede verse que la multiplicidad de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ coincide con la longitud de $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})/JF_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ para concluir que $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ es Cohen-Macaulay (ver por ejemplo [BH]).

En el caso de filtraciones buenas $\mathfrak{m}$-primarias con anillo graduado Cohen-Macaulay podemos expresar la función de Hilbert del cono de la fibra del modo siguiente. Podemos además responder afirmativamente a la conjetura que planteada por Shah [Sh] (en el caso de filtraciones I-ádicas): $\mu(I^n) - \mu(JI^{n-1}) \geq 0$ para todo n.

Corolario 5.5.6 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ una filtración buena tal que I_1 es $\mathfrak{m}$-primario. Sea J una reducción minimal de $\mathcal{I}$ y $r = r_J(\mathcal{I})$. Si $G_A(\mathcal{I})$ y $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ son Cohen-Macaulay entonces:*

$$\mu(I_n) = \sum_{i=0}^{r}(\mu(I_i) - \mu(JI_{i-1}))\binom{n+d-i-1}{d-1} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Además, $\mu(I_i) - \mu(JI_{i-1}) \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, r$.

Demostración: Por la Proposición 5.2.6 $JI_{i-1}\cap \mathfrak{m}I_i \subseteq J\cap \mathfrak{m}I_i = J\mathfrak{m}I_{i-1} \subseteq JI_{i-1}\cap \mathfrak{m}I_i$ para todo $0 \leq i \leq r$. Luego, $JI_{i-1}\cap \mathfrak{m}I_i = J\mathfrak{m}I_{i-1}$ para todo $0 \leq i \leq r$. Aplicando ahora el Teorema 5.5.3 y teniendo en cuenta que $\mu(I_i) - \mu(JI_{i-1}) = \text{length}(I_i/\mathfrak{m}I_i + JI_{i-1}) \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, r$ tenemos el resultado. □

Para ideales con número de reducción igual a uno obtenemos expresiones muy sencillas.

Corolario 5.5.7 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local e I un ideal de A con $r(I) = 1$. Sea $s = s(I)$ y supongamos que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. Entonces*

$$\mu(I^n) = \binom{n+s-1}{s-1} + (\mu(I) - s)\binom{n+s-2}{s-1} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración: Basta aplicar el Teorema 5.5.3 teniendo en cuenta que si J es una reducción minimal de I entonces $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$. $\square$

Obtenemos así del Corolario 5.5.7 los siguientes resultados.

Corolario 5.5.8 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal equimúltiple de A con $r(I) = 1$. Entonces*

$$\mu(I^n) = \binom{n+h-1}{h-1} + (\mu(I) - h)\binom{n+h-2}{h-1} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración: $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay por el Corolario 5.2.3. $\square$

Corolario 5.5.9 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un ideal de A. Supongamos I genericamente intersección completa intersection, $ad(I) = 1$, y $r(I) = 1$. Sea $h = \operatorname{ht}(I)$. Entonces*

$$\mu(I^n) = \binom{n+h}{h} + (\mu(I) - h - 1)\binom{n+h-1}{h} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración: $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay por el Teorema 5.3.2. $\square$

Para ideales $\mathfrak{m}$-primarios con segundo coeficiente de Hilbert uno obtenemos la siguiente fórmula si $d = 2$.

Corolario 5.5.10 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay 2-dimensional e I un ideal $\mathfrak{m}$-primario íntegramente cerrado. Supongamos que $e_2(I) = 1$ y que $F_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. Entonces*

$$\mu(I^n) = n\mu(I) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración: Sea J una reducción minimal de I. Por el Lema 5.2.7 $r_J(I) = 2$ y $G(I)$ es Cohen-Macaulay. Además, por el Teorema 5.2.8 $\mu(JI) = \mu(I^2) - 1$. Luego, por el Corolario 5.5.6 obtenemos $\mu(I^n) = \binom{n+1}{1} + (\mu(I) - 2)\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} = n\mu(I)$ para todo $n \geq 0$. $\square$

De forma similar, si el segundo coeficiente normalizado de Hilbert es uno obtenemos:

Corolario 5.5.11 *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay 2-dimensional, analíticamente no ramificado e I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Supongamos $\overline{e}_2(I) = 1$ y que $\overline{F}_{\mathfrak{m}}(I)$ es Cohen-Macaulay. Entonces*

$$\mu(\overline{I^n}) = n\mu(\overline{I}) \text{ para todo } n \geq 0.$$

También podemos recuperar el siguiente resultado de Ooishi [Oo3] sobre el mínimo número de generadores de las potencias del ideal maximal de una singularidad de superficie elíptica. Recordemos que si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, se define la *dimensión de inmersión* de A como $\mathrm{emb}(A) = \mu(\mathfrak{m})$.

Corolario 5.5.12 *[Oo3, Corollary 3.6] Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local y supongamos que A es una singularidad de superficie elíptica. Entonces, o bien $\mu(\mathfrak{m}^n) = e(A)n + 1 = (\mathrm{emb}(A) - 1)n$ para todo $n \geq 0$, o bien $\mu(\mathfrak{m}^n) = e(A)n = \mathrm{emb}(A)n$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración: Como A es elíptica $\overline{g}(\mathfrak{m}) \leq 1$ y por el Lema 5.2.9, $r(\mathfrak{m}) \leq 2$. Si $r(\mathfrak{m}) = 1$ entonces $G(\mathfrak{m})$ es Cohen-Macaulay por el Corolario 5.2.3. Luego, por el Corolario 5.5.7 $\mu(\mathfrak{m}^n) = (\mathrm{emb}(A) - 1)n + 1 = e(A)n + 1$ para todo $n \geq 0$. Si $r(\mathfrak{m}) = 2$ entonces $\mathfrak{m}$ es normal por el Lema 5.2.10, y $\overline{F}(A) = G(\mathfrak{m})$ es Cohen-Macaulay por el Teorema 5.2.11. Aplicando ahora el Corolario 5.5.11 tenemos $\mu(\mathfrak{m}^n) = e(A)n = \mathrm{emb}(A)n$ para todo $n \geq 0$. □

Finalmente, tenemos el siguiente resultado para ideales 1-GNN.

Corolario 5.5.13 *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Cohen-Macaulay e I un 1-GNN ideal de A no generado por una família de elementos analíticamente independientes. Entonces,*

(i) $\mu(I^n) = \binom{n+s(I)-1}{s(I)-1} + (\mu(I) - s(I))\binom{n+s(I)-2}{s(I)-1}$ *para todo* $n \geq 0$.

(ii) Para toda reducción minimal J de I, $r_J(I) = 1$.

Demostración: (i) es immediato a partir del Teorema 5.4.7 y el Corolario 5.5.7. (ii) se deduce de la Nota 5.5.4. □

Summary

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a noetherian local ring. For a filtration of ideals $\mathcal{I} = (I_n)_{n\geq 0}$ of A (that is, a decreasing sequence of ideals $A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n \ldots$ verifying $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ for all $n, m \geq 0$) we consider the following *blowup* graded rings associated to $\mathcal{I}$:

$R_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n t^n \subseteq A[t]$, the Rees ring of A with respect to $\mathcal{I}$,
$G_A(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$, the associated graded ring of A with respect to $\mathcal{I}$,
$F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n/\mathfrak{m}I_n$, the fiber cone of A with respect to $\mathcal{I}$.

We will say that $\mathcal{I}$ is a noetherian filtration if the Rees ring $R_A(\mathcal{I})$ is noetherian.

Let E be an A-module and $\mathbf{E} = (E_n)_{n\geq 0}$ (with $E = E_0$) a filtration of submodules $\mathcal{I}$-compatible (that is, such that $I_n E_m \subseteq E_{n+m}$ for all $n, m \geq 0$). Then we can consider the following graded modules respectively over the rings $R_A(\mathcal{I})$, $G_A(\mathcal{I})$ and $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$

$$R(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n t^n,$$
$$G(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n/E_{n+1},$$
$$F_{\mathfrak{m}}(\mathbf{E}) = \bigoplus_{n\geq 0} E_n/\mathfrak{m}E_n,$$

which we refer as *blowup* modules associated to $\mathbf{E}$ with respect to $\mathcal{I}$. From now on all rings and modules will be assumed noetherian.

In this thesis we obtain results in three different aspects:

- Relations between the depths of the *blowup* rings and modules associated to a filtration.

- The computation of the depths of the *blowup* rings associated to an ideal I with small analytic deviation.

- The study of the Cohen-Macaulay property of the fiber cone.

In **Chapter 1** we introduce the definitions and notations that we will need for the development of the thesis.

The first goal in **Chapter 2** is to study the relationship between the depths of E, $R(\mathbf{E})$ and $G(\mathbf{E})$ with respect to any homogeneous ideal of $R(\mathcal{I})$ containig $R(\mathcal{I})_+(1)$. In this sense we obtain the following result.

Teorema 2.3.1 *Let J be an homogeneous ideal of $R_A(\mathcal{I})$ containing $R_A(\mathcal{I})_+(1)$. Then*

(i) $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \mathrm{depth}_J R(\mathbf{E})$.

(ii) $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) \leq \mathrm{depth}_{J\cap A} E$, *and*

if $\mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) < \mathrm{depth}_{J\cap A} E$ *entonces* $\mathrm{depth}_J R(\mathbf{E}) = \mathrm{depth}_J G(\mathbf{E}) + 1$.

Moreover, for $J = \mathcal{M}$ the homogeneous maximal ideal of $R_A(\mathcal{I})$ we have

(iii) if $a_{\mathrm{depth} G(\mathbf{E})}(G(\mathbf{E})) < 0$ *then* $\mathrm{depth} R(\mathbf{E}) \geq \mathrm{depth} G(\mathbf{E}) + 1$.

This result and its proof are inspired by the papers [TI], [HM1] and [Ma] and generalizes the corresponding result by Marley for adic filtrations. Although most of the arguments of [Ma] can be adapted in the general case, there are some critical points which have to be treated specifically.

Sections 2.2 and 2.3 are devoted to the proof of Theorem 2.3.1, which relies on the relationship between the local cohomology modules of E, $R(\mathbf{E})$ and $G(\mathbf{E})$ provided by the connection morphisms

$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+ \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow R(\mathbf{E})_+(1) \longrightarrow R(\mathbf{E}) \longrightarrow G(\mathbf{E}) \longrightarrow 0$$

A key step in its proof is to determine the integers i for which $H^i_J(R(\mathbf{E}))$ and $H^i_J(G(\mathbf{E}))$ are finitely graded.

As an application of Theorem 2.3.1, in Sections 2.4 and 2.5 we obtain results on the Serre's condition for blowup modules, and the depths of the canonical modules of some blowup rings.

The main aim in **Chapter 3** is to determine the depths of the graded rings associated to an ideal I of a Cohen-Macaulay ring A in terms of the depths of the rings A/I^n. Some results are known in this sense, as the ones in [Ba], [TI], [Br], [GNi] and [Zar] for equimultiple and analytic deviation one ideals with small reduction number. Here we obtain the following results for equimultiple ideals.

Theorem 3.1.1 *Let $(A, \mathfrak{m})$ a Cohen-Macaulay local ring and I an equimultiple ideal of A. Assume $r(I) \leq 1$. Then:*

$$\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I).$$

Theorem 3.1.2 *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Cohen-Macaulay local ring and I an equimultiple ideal integrally closed of A. Assume $r(I) \leq 2$. Then:*

$$\begin{gathered}\min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) - 1 \leq \\ \mathrm{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I).\end{gathered}$$

Moreover,

(i) if $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$ *then* $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I^2 + \mathrm{ht}\,(I)$, *and*

(ii) if $\mathrm{depth} A/I < \mathrm{depth} A/I^2$ *then* $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I) - 1$.

For analytic deviation one ideals we obtain the following:

Theorem 3.1.3 *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Cohen-Macaulay local ring and I an unmixed ideal of A with* $\mathrm{ad}(I) = 1$ *and generically complete intersection. Assume $r(I) \leq 2$. Then:*

$$\begin{gathered}\min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) \leq \\ \mathrm{depth} G_A(I) \leq \\ \min\{\mathrm{depth} A/I, \mathrm{depth} A/I^2\} + \mathrm{ht}\,(I) + 1.\end{gathered}$$

Moreover,

(i) if $\mathrm{depth} A/I^2 < \mathrm{depth} A/I$ *then* $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I^2 + \mathrm{ht}\,(I) + 1$, *and*

(ii) if $\mathrm{depth} A/I < \mathrm{depth} A/I^2$ *then* $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I + \mathrm{ht}\,(I)$ *if* $\mathrm{ht}\,(I) > 0$ *and* $\mathrm{depth} G_A(I) = \mathrm{depth} A/I$ *if* $\mathrm{ht}\,(I) = 0$ *and* $\mathrm{depth} A/I < d - 1$.

In Sections 3.2, 3.3 and 3.4 we prove respectively Theorems 3.1.1, 3.1.2 and 3.1.3. In Section 3.5 we apply the results obtained in **Chapter 2** to obtain formulas for the depths of the corresponding Rees rings. Finally, in Section 3.6 we show that under particular conditions the depths of the Rees ring and the form ring associated to I^n don't depend of n.

In **Chapter 4** we show a criterion which characterizes when a sequence of elements of I_1 provides a regular sequence in $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$. More precisely, we obtain the following:

Theorem 4.3.5 *Let $(A, \mathfrak{m})$ be a local ring, $\mathcal{I}$ a noetherian filtration of ideals of A and $a_1, \ldots, a_k$ a sequence of elements in I_1. Assume $a_1^*, \ldots, a_k^*$ is a regular sequence in $G_A(\mathcal{I})$. Then the following conditions are equivalent.*

(i) $a_1^0, \ldots, a_k^0$ is a regular sequence in $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$.

(ii) $(a_1, \ldots, a_k) \cap \mathfrak{m}I_n = (a_1, \ldots, a_k)\mathfrak{m}I_{n-1}$ for all $n \geq 1$.

This criterion can be seen as a some kind of "mixed" Valabrega-Valla condition. In order to prove it, we introduce a filtration $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ of submodules of A whose associated graded ring can be thought as an intermediate of the associated graded ring and the fiber cone associated to $\mathcal{I}$, while to controle depths we use certain modified graded Koszul complexes. In Section 4.3 we show that the connection between the modified graded Koszul complexes of $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ and the Koszul complex of $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ allows us to prove Theorem 4.3.5.

The first purpose in **Chapter 5** is to use the results obtained in **Chapter 4** to prove the following:

Theorem 5.2.2 *Let $\mathcal{I}$ be a noetherian filtration of ideals of A and J a minimal reduction of $\mathcal{I}$. Assume*

(i) J is generated by a regular sequence, and

(ii) $J \cap I_n = JI_{n-1}$ for all $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$.

Then $F_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I})$ is Cohen-Macaulay if and only if $J \cap \mathfrak{m}I_n = J\mathfrak{m}I_{n-1}$ for all $1 \leq n \leq r_J(\mathcal{I})$.

This result recovers a result by Shah [Sh] for adic filtrations with reduction number at most 2.

Section 5.2 is devoted to study fiber cones of equimultiple good filtrations. In particular, we give a criterion for an integrally closed $\mathfrak{m}$-primary ideal whose second Hilbert coefficient (resp. normalized Hilbert coefficient) is equal to one having Cohen-Macaulay fiber cone (resp. normalized fiber cone). This allow us to characterize for which 2-dimensional rational or elliptic singularities the fiber cone is always Cohen-Macaulay. In Section 5.3 we prove that if A is Cohen-Macaulay and I is an analytic deviation one ideal with reduction number one the fiber cone of I is Cohen-Macaulay. In Section 5.4 we obtain the same result for certain kind of ideals introduced in [GNN]. Finally, in Section 5.5 we apply all the above results to determine in each case the minimal number of generators of the powers or the integral closure powers of the ideal.

Some of the results obtained in this thesis are contained in the following publications:

- T. Cortadellas, *Depth Formulas for the Rees Algebras of Filtrations*, Comm. Algebra, **24**(2) (1996), 705–716.

- T. Cortadellas, S. Zarzuela, *On the Depth of the Fiber Cone of Filtrations*, to appear in J. Algebra.

- T. Cortadellas, S. Zarzuela, *On the Cohen-Macaulay property of the fiber cone of ideals with reduction number at most one*, to appear in the Proceedings of the International Conference of Hanoi about Algebra, Geometry and Computer Algebra.

Bibliografía

[Ab] I. M. Aberbach, *Local reduction number and Cohen-Macaulayness of associated graded rings*, J. Algebra **178**(3) (1995), 833–842.

[AH] I. M. Aberbach, S. Huckaba, *Reduction number bounds on analytic deviation two ideals and Cohen-Macaulayness of associated graded rings*, Comm. Algebra **23**(6) (1995), 2003–2026.

[AHH] I. M. Aberbach, S. Huckaba, C. Huneke *Reduction numbers, Rees algebras and Plaffian ideals*, J. Pure and Appl. Alg. **102** (1995), 1–15.

[AHun] I. M. Aberbach, C. Huneke, *An improved Briançon-Skoda Theorem with applications to the Cohen-Macaulayness of Rees algebras*, Math. Ann. **297** (1993), 343–369.

[AHT] I. M. Aberbach, C. Huneke, N. V. Trung, *Reduction numbers, Briançon-Skoda theorems and the depth of Rees rings*, Compositio Math. **97**(3) (1995), 403–434.

[BM] M. Barile, M. Morales, *On certain algebras of reduction number one*, preprint 1997.

[Ba] J. Barshay, *Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences*, J. Algebra **25** (1973), 90–99.

[BPRR] W. Bishop, J. W. Petro, L. J. Ratliff, Jr, D. E. Rush, *Note on noetherian filtrations*, Comm. Algebra **17**(2) (1989), 471–485.

[Bl] C. Blancafort, *On Hilbert Functions and Cohomology*, J. Algebra **192** (1997), 439–459.

[Bo] N. Bourbaki, *Commutative algebra*, Addison Wesley, Reading, MA 1972.

[Br] M. Brodmann, *Rees rings and form rings of amost complete intersections*, Nagoya Math. J. **88** (1982), 1–16.

[BH] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **39**, Cambridge University Press 1993.

[CPV] A. Corso, C. Polini, W.V. Vasconcelos, *Links of prime ideals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994), 431–436.

[CP1] A. Corso, C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras*, J. Algebra **178** (1995), 224–238.

[CP2] A. Corso, C. Polini, *Reduction numbers of links of irreducible varieties*, to appear in J. Pure and Applied Alg.

[Co] T. Cortadellas, *Depth Formulas for the Rees Algebras of Filtrations*, Comm. Algebra **24**(2) (1996), 705–715.

[CRV] C. D'Cruz, K. N. Raghavan, J. K. Verma, *Cohen-Macaulay fiber cones*, preprint 1997.

[Di] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Universitex, Springer-Verlag, 1992.

[Fa] G. Faltings, *Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen*, Arch. Math. **30** (1978), 473–476.

[Gi] P. Gimenez, *"Étude de la fibre spéciale de l'éclatament d'une variété monomiale de codimension deux"*. Dissertation, University of Grenoble, 1993.

[GMS] P. Gimenez, M. Morales, A. Simis, *L'analytic spread de l'ideal de définition d'une variété monomiale de codimension deux est toujours ou égal à trois*, C. R. Acad. Sci. Paris **319**(1) (1994), 703–706.

[Go] S. Goto, comunicación personal.

[GH] S. Goto, S. Huckaba, *On graded rings associated to analytic deviation one ideals*, Amer. J. Math. **116** (1994), 905–919.

[GN1] S. Goto, Y. Nakamura, *On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one*, Contemporary Math. **159** (1994), 51–72.

[GN2] S. Goto, Y. Nakamura, *Cohen-Macaulay Rees algebras of ideals having analytic deviation two*, Tôhoku Math. J. **46** (1994), 573–586.

[GNN] S. Goto, Y. Nakamura, K. Nishida, *Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals*, Amer. J. Math. **118** (1996), 1197–1213.

[GNi] S. Goto, K. Nishida, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees Algebras Associated to Filtrations*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **526** (1994).

[GNS] S. Goto, K. Nishida, Y. Shimoda, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan. **43**(3) (1991), 465–481.

[GNW] S. Goto, K. Nishida, K. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383–392.

[GS] S. Goto, Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **68**, Marcel Dekker, New York (1979), 201–231.

[GHO] U. Grothe, M. Herrmann, U. Orbanz, *Graded rings associated to equimultiple ideals*, Math. Z. **186** (1984), 531–556.

[Gue] A. Guerrieri, *On the Depth of certain graded rings associated to an ideal.* Thesis, Purdue University, 1993.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Textes in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[HHK] M. Herrmann, E. Hyry, T. Korb, *On Rees Algebras with a Gorenstein Veronese subring*, preprint 1997.

[HHRT] M. Herrmann, E. Hyry, J. Ribbe, *On multi-Rees algebras, With an Appendix by Ngô Viêt Trung*, Math. Ann. **301** (1995), 249–279.

[HIO] M. Herrmann, S. Ikeda, U. Orbanz, *Equimultiplicity and Blowing Up*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1988.

[HRZ] M. Herrmann, J. Ribbe, S. Zarzuela, *On the Gorenstein property of Rees and form ring of powers of ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **342**(2) (1984), 631–643.

[HSV1] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, *Aproximation Complexes of Blowing-Up Rings*, J. Algebra. **74** (1982), 466–493.

[HSV2] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, *Aproximation Complexes of Blowing-Up Rings, II*, J. Algebra. **82** (1983), 53–83.

[HSV3] J. Herzog, A. Simis, W. V. Vasconcelos, *On the Canonical Module of the Rees Algebra and the Associated Graded Ring of an Ideal*, J. Algebra. **105** (1987), 285–302.

[Ho] L. T. Hoa, *Postulation Number of Good Filtrations*, Comm. Algebra **25**(6) (1997), 1961–1974.

[HZ] L. T. Hoa, S. Zarzuela, *Reduction number and a-invariant of good filtrations*, Comm. Algebra. **22**(14) (1994), 5635–5657.

[Hu] S. Huckaba, *Analytic spread modulo an element and symbolic Rees algebras*, J. Algebra **128** (1990), 306–320.

[HH1] S. Huckaba, C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math. **114** (1992), 367–403.

[HH2] S. Huckaba, C. Huneke, *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 373–402.

[HM1] S. Huckaba, T. Marley, *Depth formulas for certain graded rings associated to an ideal*, Nagoya. Math. J. **133** (1994), 57–69.

[HM2] S. Huckaba, T. Marley, *Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings*, to appear in J. London Math. Soc.

[Hun1] C. Huneke, *On the symmetric and Rees algebras of an ideal generated by a d-sequence*, J. Algebra **62** (1980),268–275.

[Hun2] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.

[HS] C. Huneke, J. D. Sally, *Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals*, J. Algebra **115** (1988), 481–500.

[Ik] S. Ikeda, *The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings*, Nagoya Math. J. **89** (1983), 47–63.

[It1] S. Itoh, *Integral closures of ideals generated by regular sequences*, J. Algebra **117** (1988), 390–401.

[It2] S. Itoh, *Coefficients of Normal Hilbert Polynomials* , J. Algebra **150** (1992), 101–117.

[It3] S. Itoh, *Hilbert Coefficients of Integrally Closed Ideals* , J. Algebra **176** (1995), 638–652.

[JK] B. Johnston, D. Katz, *Castelnuovo regularities and graded rings associated to an ideal*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(3) (1995), 727–734.

[JU] M. Johnson, B. Ulrich, *Artin-Nagata properties and Cohen-Macaulay associated graded rings*, Compositio Math. **103**(1) (1996), 7–29.

[KM] D. Kirby, H. E. Mehran, *Hilbert functions and the Koszul complex*, J. London Math. Soc. (2), **24** (1981), 459–466.

[Ko] T. Korb, *On a-invariants, filter regularity and the Cohen-Macaulayness of graded algebras*, Dissertation, Universität zu Köln, 1995.

[Li1] J. Lipman, *Rational Singularities with aplicatios to algebraic surfaces and unique factorization*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 195–280.

[Li2] J. Lipman, *Desingularization of two dimensional schemes*, Annals of Math. **107** (1978), 151–207.

[Li3] J. Lipman, *Cohen-Macaulayness in graded Algebras*, Mathematical Research Letters **1** (1994), 149–157.

[Ma] T. Marley, *Finitely graded local cohomology and the depths of graded algebras*, Proc. Amer. Math. Soc, **123** (1995), 3601–3607.

[MNV] S. Morey, S. Noh, W. V. Vasconcelos, *Symbolic Powers, Serre Conditions and Cohen-Macaulay Rees Algebras*, manuscripta math. **36** (1995),113–124.

[MS] M. Morales, A. Simis, *Symbolic powers of monomials curves in* $\mathbb{P}^3$ *lying on a quadric surface*, Comm. Alg. **20**(4) (1992), 1109–1121.

[Na1] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, New York, 1962.

[Na2] M. Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert*, Tata Institute, Bombay, 1964.

[NV] S. Noh, W. Vasconcelos, *The* S_2 *Closure of a Rees Algebra*, Results in Math. **23** (1993), 149–162.

[No] D. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function*, J. London Math. Soc. **35** (1960), 209–214.

[NR] D. G. Northcott, D. Rees, *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. **50** (195, 145–158.

[OR] J.S. Okon, L.J. Ratliff, *Reductions of filtrations*, Pacific J. Math. **144** (1990), 137–154.

[Oo1] A. Ooishi, *Genera and arithmetic genera of commutative rings*, Hiroshima Math. J. **17**(1) (1987), 47–66.

[Oo2] A. Ooishi, Δ*-genera and sectional genera of commutative rings*, Hiroshima Math. J. **17** (1987), 361–372.

[Oo3] A. Ooishi, *Tangent cones at curve and surface singularities*, J. Pure and Appl. Alg. **95** (1994), 189–201.

[PS] C. Peskine, L. Szpiro, *Liaison des varietés algèbriques*, Inventiones math. **26** (1974), 271–302.

[Pl] F. Planas, *Ideals de tipus lineal i homologia d'André-Quillen.* Tesi, Universitat de Barcelona, 1994.

[PU] C. Polini, B. Ulrich, *Linkage and reduction numbers*, to appear in Math. Annalen.

[RR] L. J. Ratliff, D.E. Rush, *Two notes on reductions of ideals*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978) 929–934.

[Re1] D. Rees, *On a problem of Zariski*, Illinois J. Math. **2** (1958), 145–159.

[Re2] D. Rees, *Lectures on the asymptotic theory of ideal*, London Math. Soc. Lecture Notes Series. **113**, Cambridge Univ. Press 1988.

[Ri] J. Ribbe, *Zur Gorenstein-Eigenschaft von Aufblasungsringen unter besonderer Berücksichtigung der Aufblasungringe von Idealpotenzen*, Dissertation, Universität zu Köln, 1991.

[Ro] P. Roberts, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 589–592.

[Sa1] J. D. Sally, *Tangent cones at Gorenstein singularity*, Compositio Math. **40** (1980), 167–175.

[Sa2] J. D. Sally, *Hilbert Coefficients and Reduction Number 2*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), 325–333.

[Sa3] J. D. Sally, *Ideals whose Hilbert function and Hilbert polynomial agrees at n=1*, J. Algebra. **157** (1993), 534–547.

[Sh] K. Shah, *On the Cohen-Macaulayness of the Fiber Cone of an Ideal*, J. Algebra **143** (1991), 156–172.

[ST] A. Simis, N. V. Trung, *The divisor class group of ordinary and symbolic blow-ups*, Math. Z. **198**, (1988), 479–491.

[SUV] A. Simis, B. Ulrich, W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulay Rees algebras and degrees of polynomial relations*, Math. Ann. **301**(3) (1995), 421–444.

[Ta] Z. Tang, *Rees rings and associated graded rings of ideals having higher analytic deviation*, Comm. Algebra **22**(12) (1994), 4855–4898.

[TW] M. Tomari, K. Watanabe, *Filtered Rings, Filtered Blowing-Ups and Normal Two-Dimensional Singularities with "Star-Shaped" Resolution*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **25** (1989), 681–740.

[Tr1] N. V. Trung, *Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 229–234.

[Tr2] N. V. Trung, *Reduction exponent, a-invariant and Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Commutative algebra (Triestre, 1992), 2445–262 World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.

[TI] N. V. Trung, S. Ikeda, *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?*, Comm. Algebra. **17** (12) (1989), 2893–2922.

[TVZ] N. V. Trung, D. Q. Viet, S. Zarzuela, *When is the Rees algebra Gorenstein?*, J. Algebra **175**(1) (1995), 137–156.

[Ul1] B. Ulrich, *Cohen-Macaulayness of associated graded rings and reduction number of ideals*, Preliminary lecture note; Workshop Commutative Algebra; ICTP Trieste 1994.

[Ul2] B. Ulrich, *Artin-Nagata properties and reductions ideals*, Contemp. Math., **159** (1994), 373–400.

[Ul3] B. Ulrich, *Ideals having expected reduction number*, Amer. J. Math. **118** (1996)(1), 17–38.

[VV] P. Valabrega, G. Valla, *Form rings and regular sequences*, Nagoya Math. J. **72** (1978), 93–101.

[Va] G. Valla, *Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay*, J. Algebra **42** (1976), 537–548.

[Vas] W. V. Vasconcelos, *On the equatios of Rees algebras*, J. reine angew. Math. **418** (1991), 189–218.

[Vi] D. Q. Viet, *A note on the Cohen Macaulayness of Rees algebras of filtrations*, Comm. Algebra **21** (1) (1993), 221–229.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, Van Nostrand, Princenton, 1960.

[Za] O. Zariski, *Interprétations algébrico-geométrique de quatorzième problème de Hilbert*, Bull. Sci. Math., **78** (1954), 155–168.

[Zar] S. Zarzuela, *On the depth of blow up algebras of ideals with analytic deviation one*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(2) (1995), 3639–3647.