Sint minim 1 et 1 quos imaginaberis inaequales. Adde, fient 2. cui adde maiorem 1 fient 3. cui adde 2 fient 5. cui adde 3 fient 8. cui adde 5 fient 13. cui adde 8 fient 21.

J. KEPLER

ANEJO A2

FORMULACION PROPUESTA PARA DERIVACION DE INTEGRALES

A2.1 INTRODUCCIÓN

En este anejo abordamos el problema de derivación de las funciones reales.

$$P(\bar{x})=\iiint_{E_r(\bar{x})} \Pi(\bar{\zeta},\bar{x})\,dV \tag{a2.1}$$

$$Q(\bar{x})=\iint_{\Gamma_r(\bar{x})} \Theta(\bar{\zeta},\bar{x})\,d\Omega \tag{a2.2}$$

$$F(\bar{x})=\int_{C_r(\bar{x})} \Phi(\bar{\zeta},\bar{x})\,dl \tag{a2.3}$$

análogas respectivamente a las definidas en (a1.2), (a1.3) y (a1.4), y en las que las funciones subintegrales tienen una expresión explícita respecto a las coordenadas de referencia.

La motivación de este anejo radica en la obtención de expresiones equivalentes a las (a1.13), (a1.15) y (a1.16) pero en términos de operaciones realizadas integramente en el espacio de referencia.

Durante el desarrollo, utilizaremos la nomenclatura descrita en el anejo A1.

A2.2 PUNTOS PREVIOS

A2.2.1 Derivación del determinante jacobiano de la transformación

Siendo J el determinante de la matriz jacobiana (a1.5), su derivada direccional

$$D_s J = \frac{\partial J}{\partial J_{\alpha\beta}} D_s J_{\alpha\beta} = \mathrm{cof}(J_{\alpha\beta}) D_s J_{\alpha\beta} =$$

$$= J \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial r_\alpha} D_s J_{\alpha\beta} = J \ \mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{J}^{-1} D_s \underset{\sim}{J}) \qquad \text{(a2.4)}$$

La derivada direccional de la inversa de la matriz jacobiana puede escribirse en la forma

$$D_s \underset{\sim}{J}^{-1} = -\underset{\sim}{J}^{-1} (D_s \underset{\sim}{J}) \underset{\sim}{J}^{-1} \qquad \text{(a2.5)}$$

A2.2.2 Derivación del vector normal a una superficie

Siguiendo el desarrollo del párrafo A1.2.2 obtenemos

$$\overline{N} = J \underset{\sim}{J}^{-T} \overline{M} \qquad \text{(a2.6)}$$

donde

$$\overline{N} = \overline{r}'_u \wedge \overline{r}'_v$$

$$\overline{M} = \overline{\zeta}'_u \wedge \overline{\zeta}'_v$$

Derivando el vector $\overline{N}$ en la dirección $\overline{s}$

$$D_s \overline{N} = D_s (J \underset{\sim}{J}^{-T}) \overline{M} =$$

$$= (D_s J \ \underset{\sim}{J}^{-T} + J \ D_s \underset{\sim}{J}^{-T}) \overline{M} =$$

$$= \left(\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{J}^{-1} \ D_s \underset{\sim}{J}) \overline{N} - \underset{\sim}{J}^{-T} \ D_s \underset{\sim}{J}^{T} \ \overline{N} \right)$$

Derivando el módulo del vector $\overline{N}$

$$D_s|\overline{N}| = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|} \cdot D_s \overline{N} =$$

$$= \frac{1}{|\overline{N}|}\left(\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{J}^{-1}\ D_s \underset{\sim}{J})|\overline{N}|^2 - \overline{N}^T \underset{\sim}{J}^{-T}\ D_s \underset{\sim}{J}^T\ \overline{N}\right) =$$

$$= \left(\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{J}^{-1}\ D_s \underset{\sim}{J}) - \frac{\overline{N}^T(\underset{\sim}{J}^{-T}\ D_s \underset{\sim}{J}^T)\overline{N}}{\overline{N}^T\,\overline{N}}\right) |\overline{N}| = \qquad \text{(a2.7)}$$

A2.2.3 Derivación del vector tangente a una curva

Siendo la tangente a la curva $C_r(\bar{x})$ en un punto arbitrario τ,

$$\bar{t} = \frac{1}{|\bar{r}'_\tau|}\bar{r}'_\tau \qquad \text{(a2.8)}$$

con

$$\bar{r}'_\tau = \underset{\sim}{J}\,\bar{\zeta}'_\tau$$

la derivada en la dirección $\bar{s}$ del vector $\bar{r}'_\tau$ puede escribirse

$$D_s\,\bar{r}'_\tau = D_s \underset{\sim}{J}\ \ \bar{\zeta}'_\tau$$

La derivada de su módulo es

$$D_s|\bar{r}'_\tau| = \bar{t}\ .\ D_s\,\bar{r}'_\tau = \frac{1}{|\bar{r}'_\tau|}\bar{r}'_\tau .\ D_s\,\bar{r}'_\tau =$$

$$= \frac{1}{|\bar{r}'_\tau|}\ \ \bar{\zeta}'^{\,T}_\tau\ \underset{\sim}{J}^T\ D_s \underset{\sim}{J}\ \ \bar{\zeta}'_\tau =$$

$$= \frac{\bar{\zeta}'^{\,T}_\tau\ \underset{\sim}{J}^T\ D_s \underset{\sim}{J}\ \ \bar{\zeta}'_\tau}{\bar{\zeta}'^{\,T}_\tau\ \underset{\sim}{J}^T\ \underset{\sim}{J}\ \ \bar{\zeta}'_\tau}\,|\bar{r}'_\tau| \qquad \text{(a2.9)}$$

A2.3 DERIVACIÓN DE INTEGRALES DE VOLUMEN

Sea:

$$P(\bar{x}) = \iiint_{E_r(\bar{x})} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dV$$

realizando el cambio de variable $\bar{r} = \bar{\rho}(\bar{\zeta}, \bar{x})$ se obtiene

$$P(\bar{x}) = \iiint_{E_\zeta} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, J\, d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3$$

Derivando la expresión anterior, en la dirección $\bar{s}$ obtenemos

$$D_s P = \iiint_{E_\zeta} D_s\Big(\Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, J\Big)\, d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3$$

luego

$$\boxed{D_s P = \iiint_{E_\zeta} \Big[D_s \Pi\ J + \Pi\ D_s J\Big]\, d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3} \qquad \text{(a2.10)}$$

sustituyendo la derivada direccional del jacobiano obtenido en (a2.4) resulta la expresión alternativa

$$\boxed{D_s P = \iiint_{E_\zeta} \Big[D_s \Pi + \Pi\ \mathrm{tr}(\underset{\sim}{J}^{-1} D_s \underset{\sim}{J})\Big]\, J d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3} \qquad \text{(a2.11)}$$

A2.4 DERIVACIÓN DE INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sea:

$$Q(\bar{x}) = \iint_{\Gamma_r(\bar{x})} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})\, d\Omega$$

realizando los cambios de variable

$$\bar{r} = \bar{\rho}\,(\bar{\zeta}, \bar{x})$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}\,(u, v)$$

se obtiene

$$Q(\bar{x}) = \iint_{\Gamma_\zeta} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})\, |\bar{N}|\, du\, dv$$

Derivando la función $Q(\bar{x})$ en la dirección $\bar{s}$,

$$D_s Q = \iint_{\Gamma_\zeta} D_s\Big(\Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})\, |\bar{N}|\Big)\, du\, dv$$

$$\boxed{D_s Q = \iint_{\Gamma_\zeta} \Big[D_s \Theta\ |\bar{N}| + \Theta\ D_s |\bar{N}|\Big]\, du\, dv} \qquad \text{(a2.12)}$$

Sustituyendo la derivada direccional del módulo del vector $\bar{N}$ obtenido en (a2.7) resulta la expresión:

$$\boxed{D_s Q = \iint_{\Gamma_\zeta} \left[D_s \Theta + \Theta\left(\mathrm{tr}(\underset{\sim}{J}^{-1} D_s \underset{\sim}{J}) - \frac{\bar{M}^T \underset{\sim}{J}^{-1} \underset{\sim}{J}^{-T}\, D_s \underset{\sim}{J}^T\, \underset{\sim}{J}^{-T} \bar{M}}{\bar{M}^T \underset{\sim}{J}^{-1} \underset{\sim}{J}^{-T} \bar{M}}\right)\right] |J \underset{\sim}{J}^{-T} \bar{M}|\, du\, dv} \qquad \text{(a2.13)}$$

A2.5 DERIVACIÓN DE INTEGRALES DE LINEA

Sea:

$$F(\bar{x}) = \int_{C_r(\bar{x})} \phi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dl$$

realizando los cambios de variable

$$\bar{r} = \bar{\rho}\,(\bar{\zeta}, \bar{x})$$

$$\zeta = \bar{\zeta}\,(\tau)$$

se obtiene

$$F(\bar{x}) = \int_{C_\zeta} \phi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, |\bar{r}'_\tau|\, d\tau$$

Derivando la función $F(\bar{x})$ en la dirección $\bar{s}$,

$$D_s F = \int_{C_\zeta} D_s\Big(\phi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, |\bar{r}'_\tau|\Big)\, d\tau$$

$$D_s F = \int_{C_\zeta} \Big[D_s\phi\ |\bar{r}'_\tau| + \phi\ D_s|\bar{r}'_\tau|\Big]\, d\tau \qquad \text{(a2.14)}$$

y sustituyendo la derivada direccional calculada en (a2.9),

$$\boxed{D_s F = \int_{C_\zeta} \left[D_s\phi + \phi \frac{\bar{\zeta}'^{T}_\tau \underset{\sim}{J}^T D_s \underset{\sim}{J}\ \bar{\zeta}'_\tau}{\bar{\zeta}'^{T}_\tau \underset{\sim}{J}^T \underset{\sim}{J}\, \bar{\zeta}'_\tau}\right] |\underset{\sim}{J}\, \bar{\zeta}'_\tau|\, d\tau} \qquad \text{(a2.15)}$$

A2.6 DERIVACIÓN DE ORDEN SUPERIOR

Definiendo los operadores

$$\boxed{\mathcal{D}_s^E : \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s\Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \mathrm{tr}(\underset{\sim}{J}^{-1} D_s \underset{\sim}{J})\, \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})} \tag{a2.16}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_s^\Gamma : \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s\Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \frac{\overline{M}^T \underset{\sim}{J}^{-1} D_s \underset{\sim}{J}^{-T}\, \overline{M}}{\overline{M}^T \underset{\sim}{J}^{-1} \underset{\sim}{J}^{-T} \overline{M}}\, \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})} \tag{a2.17}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_s^C : \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \rightarrow D_s\Phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) + \frac{\bar{\zeta}_\tau^{\prime T} \underset{\sim}{J}^T D_s \underset{\sim}{J}\, \bar{\zeta}_\tau^{\prime}}{\bar{\zeta}_\tau^{\prime T} \underset{\sim}{J}^T \underset{\sim}{J}\, \bar{\zeta}_\tau^{\prime}}\, \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x})} \tag{a2.18}$$

Las ecuaciones (a2.11), (a2.13) y (a2.15) pueden escribirse en la forma:

$$D_s P = \int\int\int_{E_r(\bar{x})} \mathcal{D}_s^E \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dV \tag{a2.19}$$

$$D_s Q = \int\int_{\Gamma_r(\bar{x})} \mathcal{D}_s^\Gamma \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})\, d\Omega \tag{a2.20}$$

$$D_s F = \int_{C_r(\bar{x})} \mathcal{D}_s^C \Phi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dl \tag{a2.21}$$

expresiones cuyos segundos miembros tienen la misma estructura que los segundos miembros de las ecuaciones (a2.1), (a2.2) y (a2.3) respectivamente.

Por tanto la operación de derivación direccional puede ser expresada en forma recurrente, obteniendo para la derivada n-ésima de las funciones definidas por (a2.1), (a2.2) y (a2.3) las siguientes expresiones.

$$D^{(n}_{s_n \cdots s_1} \iiint_{E_r(\bar{x})} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dV =$$

$$= \iiint_{E_\zeta} D^{E}_{s_n} \ldots D^{E}_{s_1} \Pi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \;\; J\, d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3 \tag{a2.22}$$

$$D^{(n}_{s_n \cdots s_1} \iint_{\Gamma_r(\bar{x})} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x})\, d\Omega =$$

$$= \iint_{\Gamma_\zeta} D^{\Gamma}_{s_n} \ldots D^{\Gamma}_{s_1} \Theta(\bar{\zeta}, \bar{x}) \;\; |J\, \underset{\sim}{J}^{-T}\, \overline{M}\,|\, du\, dv \tag{a2.23}$$

$$D^{(n}_{s_n \cdots s_1} \int_{C_r(\bar{x})} \phi(\bar{\zeta}, \bar{x})\, dl =$$

$$= \int_{C_\zeta} D^{C}_{s_n} \ldots D^{C}_{s_1} \phi(\bar{\zeta}, \bar{x}) \;\; |\underset{\sim}{J}\, \bar{\zeta}^{\,\prime}_{\tau}|\, d\tau \tag{a2.24}$$