**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de Doctorado de Matematica Aplicada*

# ESTUDIO SOBRE ALGUNAS NUEVAS CLASES DE CONECTIVIDAD CONDICIONAL EN GRAFOS DIRIGIDOS

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

# Introducción

Una de las partes de la matemática discreta que en estos últimos años ha experimentado un desarrollo más notable es la *teoría de grafos.* Enmarcada dentro de la combinatoria, la teoría de grafos permite modelar sistemas físicos en los que exista una relación binaria entre ciertos objetos. Por tanto, una red de interconexión puede ser modelada mediante un grafo, por lo que constituye un vehículo para el estudio de sus propiedades estructurales. Por ejemplo, en una red de interconexión para un sistema multiprocesador, es deseable que las redes a utilizar estén diseñadas de forma que el retraso en la transmisión sea mínimo, que cada procesador esté conectado a un número limitado de otros procesadores y que puedan seguir funcionando ante el fallo de alguno de sus nodos (vértices del grafo) y/o enlaces (ramas). Por ello, la fiabilidad de la red es una de sus características más importantes. Uno de los parámetros más eficaces para medir dicha fiabilidad es la conectividad del grafo que modela la red. La conectividad mide el número máximo de nodos o enlaces que pueden fallar sin que la red se desconecte.

En los últimos años se ha obtenido una gran cantidad de resultados que relacionan la conectividad de un grafo, $\kappa$, $\lambda$, con otros parámetros importantes tales como el orden $n$ (número de nodos), grados mínimo y máximo, $\delta$, $\Delta$, (número mínimo y máximo de enlaces incidentes con los nodos), diámetro $D$, (máxima distancia entre pares de nodos), girth $g$, (longitud del ciclo mínimo del grafo), etc. Los tipos de condiciones que principalmente se han estudiado para alcanzar alta conectividad son los siguientes:

(i) Cotas inferiores sobre el número de vértices en términos del diámetro y el grado máximo [22, 27, 28, 45, 47, 54].

(ii) Cotas superiores sobre el diámetro en función del girth $g$ en el caso de grafos, o bien en función del parámetro $\ell$ en el caso de digrafos [23, 32, 46, 50, 52, 54, 55].

(iii) Condiciones mixtas del tipo (i) y (ii) [27, 28].

Por ejemplo, es interesante conocer cuándo el grafo que modela la red es maximalmente conectado o rama-conectado, lo que significa que la red continua conectada si el número de elementos que falla es menor que su grado mínimo. Entre los resultados que se deducen de los estudios ya realizados cabe destacar el que los digrafos línea iterados $L^kG$, son maximalmente conectados si la iteración es suficientemente grande. Podemos encontrar algunos estudios y propiedades del digrafo línea en [2, 33, 52].

La superconectividad fue definida en [15] y es una medida más fuerte que la conectividad cuyo estudio ha sido objeto de una gran atención en los últimos años. El estudio de digrafos o grafos super-$\lambda$ ha tenido también una importancia particular en el diseño de redes con alta fiabilidad, ver [14]. Esto se debe al hecho de que disponer de grafos o digrafos super-$\lambda$ implica minimizar el número de conjuntos arco-desconectadores con orden mínimo, tal como se mostró en [53]. Un digrafo se denomina super-$\kappa$ (resp. super-$\lambda$) si es maximalmente conectado (resp. maximalmente arco-conectado) y al menos una de las componentes que se determinan al suprimir un conjunto desconectador de $\delta$ vértices es un vértice aislado. Podemos encontrar algunos resultados sobre superconectividad en [40] o bien condiciones suficientes para que un (di)grafo sea super-$\kappa$ o super-$\lambda$ en [23, 32, 27, 29, 53, 30].

Otras medidas de conectividad se engloban en la llamada conectividad condicional, definida en [43] como el mínimo número de vértices que hay que eliminar del (di)grafo de forma que todas las componentes resultantes tengan una propiedad $\mathcal{P}$ prefijada de antemano. A esta clase de conectividad se le denomina también $\mathcal{P}$-conectividad. La importancia de los diferentes tipos de conectividad condicional está unida al concepto de supervivencia de las componentes que se determinan cuando la red se interrumpe, lo que se expresa especificando las propiedades de estas componentes. Obsérvese que tanto la conectividad estándar como la superconectividad son conectividades condicionales con respecto a la propiedad que consiste en tener más de cero vértices o un vértice respectivamente. Se han realizado trabajos sobre diferentes $\mathcal{P}$-conectividades en [24, 25].

En esta memoria presentamos esencialmente condiciones suficientes de tipo (ii) y (iii) para superconectividad así como para algunas nuevas clases de conectividad condicional tanto para digrafos como para grafos. Para realizar este estudio hemos necesitado encontrar condiciones tipo (iii) para la conectividad estándar en el caso de (di)grafos bipartitos.

En el Capítulo 1 se expone un breve y conciso repaso de los conceptos y notaciones que se usan constantemente en esta memoria.

En el Capítulo 2 estudiamos una nueva clase de conectividad que podría ser considerada como un tipo de conectividad condicional, ya que se impone una condición a la distancia entre vértices dados de $G$. Precisando más, requerimos que los conjuntos desconectadores separen vértices que estaban suficientemente alejados en el (di)grafo original. Esta clase de conectividad fue introducida en [31], y puede jugar un papel importante a la hora de medir la fiabilidad de la red como una función de la distancia entre los nodos que queremos comunicar. En las primeras secciones se introduce la definición del $t$-grado $\delta(t)$ y se muestra que los parámetros que miden la $t$-distancia conectividad $\kappa(t)$, la arco $t$-distancia conectividad $\lambda(t)$ y el $t$-grado $\delta(t)$ están relacionados por las desigualdades

$$\kappa(t) \leq \lambda(t) \leq \delta(t),$$

lo cual generaliza las desigualdades conocidas para las conectividades estándar, $\kappa \leq \lambda \leq \delta$. Además, se prueba que otra de las propiedades que estos nuevos parámetros mantienen es la independencia. En las últimas secciones se establecen condiciones suficientes de tipo (ii) que aseguran óptimos valores para estas nuevas conectividades tanto para (di)grafos $s$-geodéticos, como para (di)grafos $s$-geodéticos bipartitos.

En el Capítulo 3 se presentan nuevas condiciones de tipo (iii) para (di)grafos bipartitos con gran número de vértices. Estas condiciones se derivan a partir de las condiciones de tipo (ii) contenidas en [31] (y redescubiertas en el Capítulo 2 cuando $t = 1$) y de las condiciones de tipo (i) contenidas en [1]. Los resultados de este capítulo unifican y mejoran los mencionados anteriormente.

En el Capítulo 4 se realiza un estudio detallado de la superconectividad de (di)grafos, así como de la máxima distancia a los conjuntos desconectadores en digrafos superconectados. En la Sección 4.2 se aborda el problema de desconectar de manera no trivial un digrafo superconectado, centrándonos en averiguar la máxima distancia a la que se encuentra alejado un vértice de un conjunto desconectador no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices. Se introducen los parámetros $\kappa_1$, $\lambda_1$, que miden la superconectividad de un digrafo superconectado, y se estudian condiciones de tipo (ii) relativas a ellos, es decir, condiciones suficientes sobre el diámetro en términos del parámetro $\ell$, en orden a obtener cotas inferiores sobre estas medidas de superconectividad. En la Sección 4.3 se mejora la cota dada en [30] sobre el orden del digrafo para obtener super-vértice-conectividad y además se ve que es la mejor posible, respondiendo así a la conjetura planteada en [30]. El objetivo en la Sección 4.4 es encontrar condiciones suficientes de tipo (iii), es decir, sobre el orden del digrafo, que aseguren si los parámetros $\kappa_1$, $\lambda_1$ son óptimos. En la última sección se desarrolla un estudio en el caso de grafos, paralelo al realizado en las secciones anteriores para el caso dirigido. En esta sección se expone una tabla en cuyas entradas figuran los órdenes de los grafos con el mayor número de vértices que se conocen hasta el momento junto con sus conectividades respectivas.

En el Capítulo 5, en primer lugar, se establecen condiciones suficientes de tipo (ii) que aseguran que un digrafo bipartito es super-$\kappa$ o super-$\lambda$ si el diámetro es suficientemente pequeño. Estas condiciones permiten derivar el máximo alejamiento a los conjuntos desconectadores en digrafos bipartitos superconectados. A partir de estos resultados y de los obtenidos en el Capítulo 3 sobre conectividad estándar en digrafos y grafos bipartitos, se obtienen condiciones suficientes de tipo (iii) que aseguran que un digrafo bipartito es super-$\kappa$ o super-$\lambda$ si tiene un número suficientemente grande de vértices. En segundo lugar, se realiza un estudio paralelo al desarrollado en el capítulo anterior aprovechando la estructura particular de los (di)grafos bipartitos, para obtener condiciones de tipo (ii) y (iii) relativas a los parámetros $\kappa_1$, $\lambda_1$ en este caso.

El Capítulo 6 está dedicado al estudio de grafos que modelan redes conectadas de forma óptima con respecto a la siguiente propiedad de tolerancia a fallos: Cuando algunos nodos o uniones fallan, se exige que en las componentes que se determinan en la red haya un número mínimo de nodos conectados entre sí. Este problema corresponde al estudio de una clase de conectividad condicional introducida en [43]. Otro problema sería el estudio de la máxima distancia que pueden estar alejados dos subgrafos verificando una propiedad determinada de manera que el grafo permanezca conectado. Este problema fue estudiado en [9] donde se introdujo el llamado diámetro condicional. En el Capítulo 6 se desarrolla un estudio sólo para grafos, de la llamada *extraconectividad*, $\kappa_\eta$, $\lambda_\eta$, que es una conectividad condicional con respecto a la propiedad $\mathcal{P}_\eta$ que consiste en tener más de $\eta$ vértices. Desde este punto de vista, tanto la conectividad estándar como la superconectividad, constituyen medidas de conectividad condicional, ya que es claro que $\kappa_0 = \kappa$, $\lambda_0 = \lambda$, y $\kappa_1$, $\lambda_1$ son las superconectividades definidas y estudiadas en los capítulos anteriores. La extraconectividad fue estudiada en [24] y [25], donde se dieron condiciones suficientes sobre el diámetro en términos del girth para asegurar óptima $\mathcal{P}_\eta$-conectividad (condiciones de tipo (ii)). Asímismo, se conjeturó que la cota superior sobre el diámetro que se había encontrado era posible mejorarla. El trabajo llevado a cabo en el Capítulo 6 resuelve y responde afirmativamente la conjetura.

Por otra parte, para hacer más cómoda la lectura de esta memoria se incluye tanto un índice de símbolos como un índice alfabético de los diversos términos utilizados.