

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de
Doctorado de Matematica Aplicada*

**ESTUDIO SOBRE ALGUNAS
NUEVAS CLASES DE
CONECTIVIDAD CONDICIONAL
EN GRAFOS DIRIGIDOS**

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 1

Definiciones y notaciones

1.1 Definiciones generales

Esta sección está dedicada a recordar los conceptos y resultados básicos que usaremos en adelante. Las definiciones que no se encuentren aquí pueden ser consultadas en los libros de Chartrand y Lesniak [21], Harary [42] y de Harary, Norman y Cartwright [41]. Un *grafo* G consiste en un conjunto finito V , cuyos elementos reciben el nombre de *vértices*, y un conjunto A de 2-subconjuntos de V , cuyos elementos se conocen como *ramas*. Habitualmente escribimos $G = (V, A)$ y decimos que $V = V(G)$ es el *conjunto de vértices* y $A = A(G)$ el *conjunto de ramas*. Un *grafo dirigido* o *digrafo*, se diferencia de un grafo en que el conjunto A es un subconjunto de $V \times V$, a cuyos elementos denominamos *arcos*. Tanto los vértices de un grafo como los de un digrafo se representan normalmente con puntos y los arcos o las ramas con líneas que unen los vértices que los forman. Si el grafo es dirigido, se indica con una flecha la dirección de los arcos.

Las definiciones que daremos a continuación serán para digrafos, ya que para grafos son similares. El *orden* n de un digrafo $G = (V, A)$ es el número de vértices que tiene, es decir el cardinal del conjunto V . Si x e y son dos vértices de un digrafo G , tales que (x, y) es un arco, diremos que x es *adyacente hacia* y y que y es *adyacente desde* x . Si ambos arcos (x, y) e (y, x) están presentes en un digrafo diremos simplemente que x e y son *adyacentes*. Representaremos pictóricamente dos vértices adyacentes con una línea sin dirección. Un *autolazo* es un arco (x, x) de un vértice a sí mismo. Un digrafo con arcos múltiples (arcos paralelos) y autolazos se llama *multidigrafo*. En esta memoria sólo consideraremos digrafos simples, es decir, digrafos sin autolazos y arcos múltiples.

El conjunto de los vértices adyacentes desde un vértice x (denominados también *vecinos de salida* de x) se representa por $\Gamma^+(x)$ y su cardinal es el *grado de salida* del vértice x , $\delta^+(x)$. El *grado de entrada* del vértice x , $\delta^-(x)$, es el cardinal del conjunto $\Gamma^-(x)$, formado por los vértices que son adyacentes hacia x (o *vecinos de entrada* de x). El *grado máximo de salida*, Δ^+ , de un digrafo G , es el máximo de los grados de salida de los vértices de G . Se definen análogamente *grado máximo de entrada* Δ^- , *grado mínimo de salida*, δ^+ , y *grado mínimo de entrada*, δ^- . El *grado máximo* de un digrafo G es $\Delta = \max\{\Delta^+, \Delta^-\}$ y el *grado mínimo* de G es $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\}$. Un digrafo G es d -regular si y sólo si $\Delta = \delta = d$.

Dados cualquier par de vértices $x, y \in V$, un *recorrido* desde x a y es una sucesión de vértices $xx_1x_2 \dots x_{k-1}y$ comenzando en x y terminando en y , tal que (x, x_1) , (x_i, x_{i+1}) , $(1 \leq i \leq k-1)$, (x_{k-1}, y) son arcos. La longitud de este recorrido, que se denota como $|x \rightarrow y|$, es el número de arcos k . Si todos los vértices del recorrido son distintos se llama un $x \rightarrow y$ *camino*. Un $x \rightarrow y$ *camino* de longitud mínima se llamará *camino corto*. Un $x \rightarrow x$ camino se llama *ciclo* y la longitud del ciclo mínimo de G recibe el nombre de *girth* que se denota por $g(G) = g$. Dados dos $x \rightarrow y$ caminos, diremos que son *internamente disjuntos* si los únicos vértices que tienen en común son precisamente los vértices x e y . De forma similar, diremos que son *arco-disjuntos* si no tienen arcos en común.

Si entre cada par de vértices x, y de G existe un $x \rightarrow y$ camino, se dice que el digrafo está *conectado* o que es *conexo* y en este caso, la distancia desde x a y , que será denotada por $d_G(x, y)$ o sólo $d(x, y)$ si no hay confusión, es la longitud de un $x \rightarrow y$ camino corto. Si G es un grafo conexo la distancia es una métrica, mientras que si G es un digrafo conexo la propiedad simétrica no tiene por qué cumplirse, es decir, en general en el caso dirigido se tiene que $d(x, y) \neq d(y, x)$. El diámetro de un grafo o digrafo conexo, $D(G) = D$, es la mayor de las distancias entre cualquier par de vértices, o sea, $D = D(G) = \max_{x, y \in V} \{d(x, y)\}$. Sea $F \subset V$. La *distancia desde x a F* , denotada por $d(x, F)$, es la mínima de todas las distancias $d(x, f)$, $f \in F$. La *distancia desde F a x* , $d(F, x)$, se define análogamente.

Un digrafo G es *bipartito* con partes V_0 y V_1 si $V(G) = V_0 \cup V_1$, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, y los arcos del digrafo G unen sólo vértices que están en partes diferentes, es decir, $A(G)$ es un subconjunto de $(V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$. Nótese que las longitudes de los caminos que unen cualquier par de vértices de un digrafo bipartito deben tener la misma paridad. Un *emparejamiento* en un digrafo bipartito es un subconjunto M de $A(G)$ con la propiedad de que dos arcos de M nunca tienen un vértice en

común. Diremos que M es un *emparejamiento completo* desde V_0 a V_1 cuando todos los vértices de V_0 son vértices iniciales de arcos de M y todos los vértices de V_1 son los finales.

Un digrafo G es *simétrico* si dados $x, y \in V(G)$ se tiene que $(x, y) \in A(G)$ si y sólo si $(y, x) \in A(G)$. De esta manera, un grafo G se puede representar a través de su *digrafo simétrico asociado* G^* obtenido al reemplazar cada rama del grafo por dos arcos, formando lo que se llama un *dígono*, K_2^* .

Algunos digrafos destacados son el *digrafo simétrico completo*, K_n^* , (asociado al grafo completo K_n) que tiene orden n y sus arcos son todos los pares de vértices (x, y) , $x \neq y$. El digrafo K_n^* es d -regular con $d = n - 1$ y tiene diámetro 1. El conjunto de vértices del *ciclo dirigido* con n vértices, C_n , es Z_n . Los arcos de C_n son los pares de la forma $(x, x + 1)$, donde la suma se realiza módulo n . El digrafo C_n es 1-regular y su diámetro es igual a $n - 1$. Las partes del *digrafo simétrico bipartito completo* $K_{p,q}^*$ (asociado al grafo bipartito completo $K_{p,q}$) son un conjunto V_0 con p elementos y un conjunto V_1 con q elementos. Dos vértices de este digrafo son adyacentes si y sólo si están en partes diferentes. El diámetro del digrafo $K_{p,q}^*$ es igual a 2 si $p > 1$ o $q > 1$.

1.2 Grafos y digrafos de Moore

El problema (Δ, D) consiste en determinar grafos y digrafos de grado máximo Δ y diámetro D que tengan el mayor número posible de vértices. Una cota teórica para este número es la cota dada por Moore que exponemos a continuación.

- Sea $G = (V, A)$ un grafo de grado máximo Δ y diámetro D , y sea x un vértice cualquiera de G . El número de vértices a distancia i de x es a lo sumo $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$. Por tanto,

$$|V| \leq 1 + \Delta \sum_{i=1}^D (\Delta - 1)^{i-1} = \begin{cases} 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2; \\ \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

Los grafos satisfaciendo la igualdad se llaman grafos de Moore. Si $D = 1$ los grafos de Moore son los grafos completos. Si $\Delta = 2$ son los ciclos impares de longitud $2D + 1$. Para valores del diámetro y del grado diferentes de los anteriores, se ha demostrado que pueden existir grafos de Moore sólo

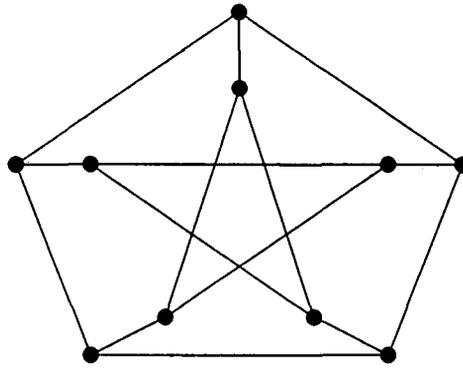
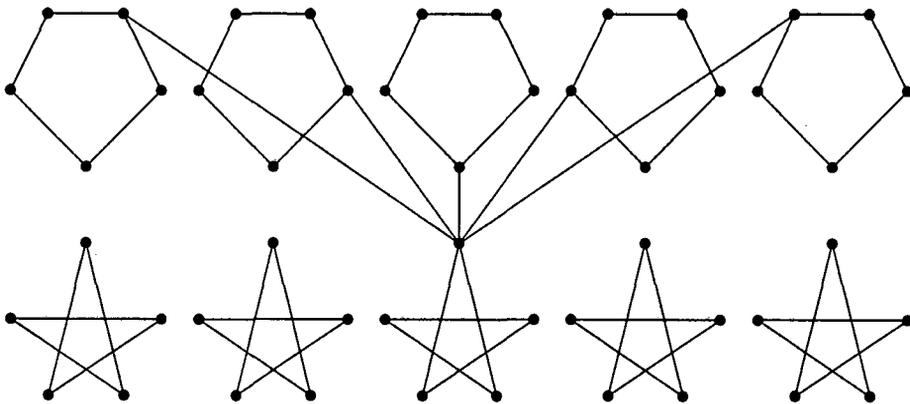


Figura 1.1: Grafo de Petersen



Cada estrella se relaciona con todos los pentágonos igual que la estrella central y las demás ramas son aquellas que permiten formar un grafo de Petersen entre no importa que pentágono y no importa que estrella

Figura 1.2: Grafo de Hoffmann-Singleton

en los tres casos siguientes: $D = 2$ y $\Delta = 3, 7$ o 57 (se puede consultar la demostración de este resultado en el libro de Biggs [13]). El grafo de Petersen, de 10 vértices, es la respuesta para $D = 2$ y $\Delta = 3$ (Ver Figura 1.1). Para $D = 2$ y $\Delta = 7$ existe el grafo de Hoffman-Singleton con 50 vértices (Ver Figura 1.2). Para $D = 2$ y $\Delta = 57$, podría existir un grafo de Moore con 3250 vértices, pero nadie ha sido capaz de construirlo o probar su no existencia. Si $D > 2$ y $\Delta > 2$, no existe ningún grafo de Moore. Diremos que un grafo es *denso* cuando tiene un número de vértices cercano a la cota de Moore. En el Capítulo 4 se facilita una tabla en cuyas entradas figuran los órdenes de los grafos densos que se conocen hasta el momento.

- En el caso de digrafos, una cota teórica de Moore se obtiene de la manera siguiente: Sea $G = (V, A)$ un digrafo de grado máximo Δ y diámetro D , y sea x un vértice cualquiera de G . El número de vértices a distancia i de x es a lo sumo Δ^i . Por tanto,

$$|V| \leq \sum_{i=0}^D \Delta^i = \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1; \\ \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta - 1} & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

Bridges y Toueg probaron en [19] que los únicos digrafos que alcanzan esta cota son los digrafos completos y los ciclos. Diremos que un digrafo es *denso* cuando tiene un número de vértices cercano a la cota de Moore.

1.2.1 Grafos y digrafos bipartitos de Moore

- Sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito de grado máximo Δ y diámetro D , y sea x un vértice cualquiera de G . El número de vértices a distancia i de x es a lo sumo $\Delta(\Delta - 1)^{i-1}$ si $i \leq D - 1$, y $(\Delta - 1)^{D-1}$ si $i = D$, ya que G es bipartito. Por tanto,

$$|V| \leq 1 + \Delta \sum_{i=1}^{D-1} (\Delta - 1)^{i-1} + (\Delta - 1)^{D-1} = \begin{cases} 2D & \text{si } \Delta = 2; \\ \frac{2(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3. \end{cases}$$

Los grafos bipartitos que satisfacen la igualdad se llaman grafos bipartitos de Moore. Existen en los casos siguientes:

- Para $\Delta = 2$, los ciclos de longitud $2D$.
- Para $D = 2$, los grafos bipartitos completos cuyos conjuntos de partes tienen igual cardinal.
- Para $D = 3, 4$ o 6 , los grafos bipartitos de Moore existen si $\Delta - 1$ es una potencia de un número primo.
- Ahora, sea $G = (V_0 \cup V_1, A)$ un digrafo bipartito de grado máximo Δ y diámetro D , y supongamos que $|V_0| \geq |V_1|$.

Si $D = 2t + 1$ consideramos un vértice $x \in V_0$; como el número de vértices a distancia $i \leq D - 1$ de x es a lo sumo Δ^i tenemos que:

$$|V_0| \leq \sum_{i=0}^t \Delta^{2i} = \begin{cases} t+1 & \text{si } \Delta = 1; \\ \frac{\Delta^{2(t+1)} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

Si $D = 2t$ consideramos un vértice $x \in V_1$; entonces tenemos que:

$$|V_0| \leq \sum_{i=0}^{t-1} \Delta^{2i+1} = \Delta \sum_{i=0}^{t-1} \Delta^{2i} = \begin{cases} t & \text{si } \Delta = 1; \\ \Delta \frac{\Delta^{2t} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

Por tanto la cota de Moore para digrafos bipartitos es:

$$|V| \leq \begin{cases} D+1 & \text{si } \Delta = 1 \text{ y } D \text{ es impar;} \\ D & \text{si } \Delta = 1 \text{ y } D \text{ es par;} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ y } D \text{ es impar;} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ y } D \text{ es par.} \end{cases}$$

Fiol y Yebra probaron en [34] que esta cota sólo puede ser alcanzada cuando $D \leq 4$. En este artículo se presentó además la construcción de una familia que da lugar a digrafos bipartitos densos, los digrafos $BD(d, n)$ (Ver Capítulo 3).

1.3 La técnica del digrafo línea

La técnica del digrafo línea, introducida por Aigner en [2], es un método bien conocido para construir digrafos densos. Este uso del digrafo línea fue introducido por Fiol, Yebra y Alegre en [33]. En el digrafo línea LG de un digrafo G , cada vértice representa un arco de G . Es decir, $V(LG) = \{uv : (u, v) \in A(G)\}$; y un vértice uv es adyacente a un vértice wz si y sólo si $v = w$, ésto es, cuando el arco (u, v) es adyacente al arco (w, z) en G . De la definición se desprende que el orden de LG es igual al número de arcos de G , $|V(LG)| = |A(G)|$. Además, observamos que los grados de entrada y de salida de un vértice de LG son $\delta^+(uv) = \delta^+(v)$ y $\delta^-(uv) = \delta^-(u)$. Por tanto, los grados máximo y mínimo de entrada y de salida de LG coinciden con los de G , $\delta(LG) = \delta(G) = \delta$. Así pues, si G es d -regular

($\delta^-(x) = \delta^+(x) = d$, para cualquier $x \in V$) y tiene orden n , entonces LG es d -regular y tiene orden dn .

La siguiente proposición, que encontramos en [33] y que también fue probada por Reddy, Kuhl, Hosseini y Lee en [52] para digrafos d -regulares con $d > 1$, describe el comportamiento del diámetro respecto del digrafo línea. De hecho, este mismo resultado lo encontramos en [2], pero allí se probó para digrafos conectados diferentes de un ciclo dirigido.

Proposición 1.3.1 *Sea G un digrafo conectado diferente de un ciclo dirigido. Entonces, el diámetro del digrafo línea de G , LG , es una unidad mayor que el diámetro de G . Es decir, $D(LG) = D(G) + 1$.*

Demostración: Sean uv y wz dos vértices diferentes de LG . Consideremos un camino de v a w en G , $vv_1 \dots v_{k-1}w$, con longitud mínima $k = d(v, w) \leq D(G)$. A partir de este camino encontramos un camino de uv a wz en LG , el camino $uv, vv_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}w, wz$, que tiene longitud mínima $k + 1 \leq D(G) + 1$. Como todos los caminos de uv a wz han de ser de esta forma, tenemos que $d(uv, wz) = d(v, w) + 1$, si $uv \neq wz$. Así pues, $D(LG) \leq D(G) + 1$. Para probar que $D(LG) = D(G) + 1$, sólo queda encontrar dos arcos diferentes de G , (u, v) , (w, z) , tales que $d(v, w) = D(G)$. Podemos asegurar su existencia siempre que G no sea un ciclo dirigido. \square

Si G es un digrafo bipartito con partes V_0 y V_1 , entonces LG también es bipartito y sus partes están formadas, respectivamente por los arcos de V_0 a V_1 y por los arcos de V_1 a V_0 .

Para cualquier $k > 1$ el *digrafo línea k -iterado*, L^kG , se define recursivamente como $L^kG = LL^{k-1}G$. Entonces L^kG es también d -regular y tiene $d^k n$ vértices y diámetro

$$D(L^kG) = D(G) + k. \quad (1.1)$$

Consideremos el digrafo simétrico completo d -regular K_{d+1}^* . El digrafo línea iterado $L^{D-1}K_{d+1}^*$ es el denominado digrafo de Kautz $K(d, D)$, introducido bajo este aspecto en [33]. La Figura 1.3 muestra los tres primeros miembros de la familia correspondientes a $d = 2$ (en ella una rama sin dirección representa un dígono). El digrafo $K(d, D)$ es d -regular, tiene orden $d^D + d^{D-1}$ y diámetro D . Los digrafos de Kautz constituyen los digrafos d -regulares con mayor número de

vértices que se conocen para $d > 2$, siendo su orden $(d^2 - 1)/d^2$ veces la cota de Moore.

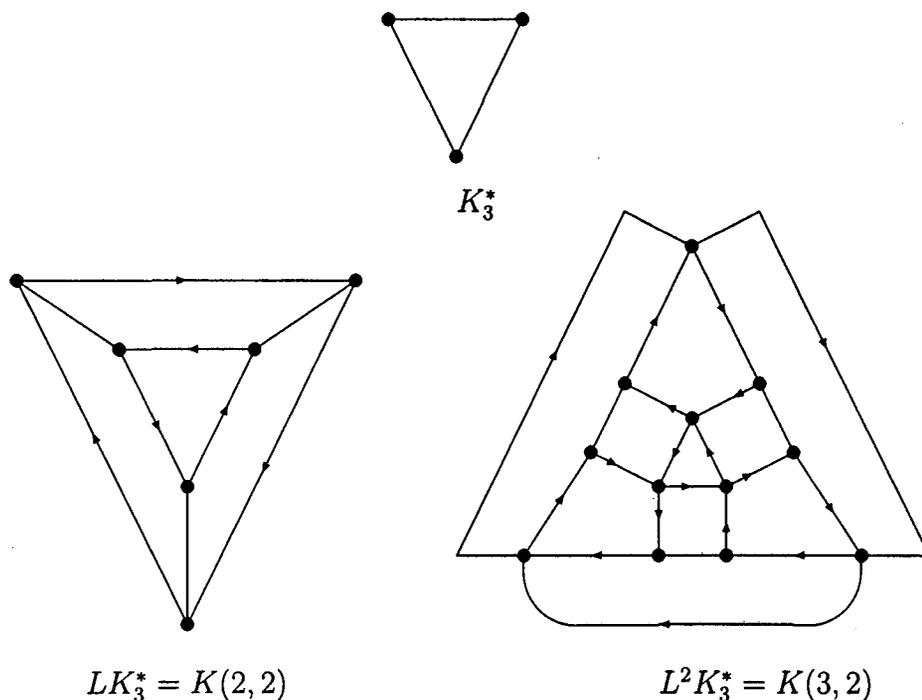


Figura 1.3: Digrafos de Kautz

Denotemos por K_d^{**} el digrafo que resulta al añadir un autolazo al completo K_d^* . El digrafo $L^{D-1}K_d^{**}$ es el digrafo de de Bruijn, $B(d, D)$, que también es d -regular, tiene orden $n = d^D$ y diámetro D . Obsérvese que entre dos vértices cualesquiera de un digrafo $B(d, D)$ existe un único camino de longitud D , mientras que en un $K(d, D)$ existe un único camino de longitud $D - 1$ o D .

1.4 El parámetro ℓ y digrafos s -geodéticos

Para estudiar la conectividad de digrafos Fàbrega, Fiol y Escudero introdujeron en [23, 32] un nuevo parámetro relacionado con el número de caminos cortos, que recibe el nombre de parámetro ℓ_π y que definimos a continuación:

Definición 1.4.1 Sea $G = (V, A)$ un digrafo con diámetro D , grado mínimo $\delta \geq 2$, y sea π un entero, $0 \leq \pi \leq \delta - 2$ ($\pi \geq 1$ si G tiene autolazos). Entonces definimos $\ell_\pi = \ell_\pi(G)$, $1 \leq \ell_\pi \leq D$, como el mayor entero tal que, para cualquier $x, y \in V$,

1. si $d(x, y) < \ell_\pi$, sólo hay un único $x \rightarrow y$ camino corto y hay a lo sumo π $x \rightarrow y$ caminos diferentes de longitud $d(x, y) + 1$;
2. si $d(x, y) = \ell_\pi$, hay un único $x \rightarrow y$ camino corto.

Obsérvese que este parámetro está bien definido para digrafos sin autolazos si $\pi = 0$ y para cualquier digrafo si $\pi \geq 1$. Siempre escribiremos $\ell(G)$ en lugar de $\ell_0(G)$. El parámetro ℓ es una de las herramientas principales en la resolución de los problemas sobre conectividad así como de superconectividad de digrafos planteados en esta memoria.

En [23] se probó que en cualquier digrafo G diferente de un ciclo el parámetro ℓ_π también satisface una igualdad como (1.1). Concretamente,

Proposición 1.4.1 Sea G un digrafo diferente de un ciclo dirigido. Si G no tiene autolazos cuando $\pi = 0$, entonces $\ell_\pi(L^k G) = \ell_\pi(G) + k$.

Demostración: Como $L^k(G) = LL^{k-1}G$, basta considerar el caso $k = 1$. Sean $x = x_0x_1$, $y = y_0y_1$ dos vértices cualesquiera de LG . Si $d(x, y) \leq \ell_\pi(G) + 1$, entonces $d(x_1, y_0) = d(x, y) - 1 \leq \ell_\pi(G)$. Así pues, el camino corto de x_1 a y_0 es único, y por tanto, también es único el camino corto de x a y . Si $d(x, y) < \ell_\pi(G) + 1$, entonces $d(x_1, y_0) = d(x, y) - 1 < \ell_\pi(G)$. Por tanto, existen en G a lo sumo π caminos diferentes de longitud $d(x_1, y_0) + 1$ de x_1 a y_0 . Luego tenemos a lo sumo π caminos diferentes de longitud $d(x, y) + 1$ de x a y en $L^k(G)$. Si $\ell_\pi(G) = D(G)$, entonces $D(LG) = D(G) + 1$, ya que G no es un ciclo dirigido, y por tanto es imposible que $\ell_\pi(LG) > D(LG)$. \square

Cuando el digrafo considerado es bipartito hemos de tener presente que entre dos vértices cualesquiera sólo hay caminos de igual paridad, y por tanto la definición del parámetro ℓ puede ser simplificada como sigue:

Definición 1.4.2 Dado un digrafo bipartito G , sea $\ell = \ell(G)$, $1 \leq \ell \leq D$, el mayor entero tal que para cualesquiera $x, y \in V$ a distancia $d(x, y) \leq \ell$, sólo hay un único $x \rightarrow y$ camino corto.

Un parámetro más restrictivo que el que acabamos de definir es el que mide la geodeticidad máxima de un digrafo.

Definición 1.4.3 *Se dice que un digrafo G es s -geodético para algún entero $1 \leq s \leq D$, si entre dos vértices cualesquiera, a lo sumo hay un camino de longitud menor o igual a s .*

Entenderemos que s es el mayor entero para el cual G es s -geodético. Si $s = D$, el digrafo se llama *fuertemente geodético*. Ver los trabajos de Bosák, Kotzig y Znám [18], y de Plesník y Znám [50].

Nótese que $s \leq \min\{\ell, g - 1\}$, donde g designa el girth del digrafo G . Además, si G es s -geodético entonces $L^k G$ es s' -geodético con parámetro

$$s' = \min\{s + k, g - 1\}.$$

Ambos parámetros constituyen una generalización para digrafos del concepto de girth de un grafo. De hecho, un grafo es siempre $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ -geodético, es decir, $s = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Por otra parte, cuando G es un grafo, considerando su digrafo simétrico asociado, G^* , se tiene que $\ell(G^*) = s = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$.

1.5 Conectividad

Como ya comentamos en la primera sección, se dice que un grafo o digrafo G está conectado o es conexo cuando entre cada par de vértices $x, y \in V(G)$ existe un $x \rightarrow y$ camino. En otro caso diremos que G está desconectado. Para digrafos se pueden considerar varias clases de conectividad. Un digrafo G se dice que está *fuertemente conectado* si está conectado. Se dice que la conectividad es *unilateral* si para todo $x, y \in V(G)$, o bien existe un $x \rightarrow y$ camino, o bien un $y \rightarrow x$ camino y se dice que es *débil* si el grafo subyacente (el que se obtiene prescindiendo de las direcciones) es conexo. En esta memoria se estudia exclusivamente la conectividad fuerte en digrafos simples y sin lazos, y por tanto, entenderemos que un digrafo está conectado en el sentido fuerte del término.

Para profundizar en el estudio de la conectividad son necesarias unas definiciones preliminares que daremos para digrafos ya que para grafos son similares. Un digrafo G' es un *subdigrafo* de un digrafo G si $V(G') \subset V(G)$ y $A(G') \subset A(G)$.

Dado $F \subset V(G)$, $G - F$ designa el subdigrafo de G obtenido al suprimir todos los vértices del conjunto F y todos los arcos incidentes con estos vértices. En cambio, la supresión de arcos no implica la eliminación de vértices. Es decir, dado $E \subset A(G)$ el subdigrafo $G - E$ es simplemente $(V, A \setminus E)$. Un subdigrafo H de G se llama *inducido* por un subconjunto U de vértices no vacío y se denota por $H = \langle U \rangle$, si $V(H) = U$ y $A(H)$ consiste de todos los arcos de G que unen vértices de U . De manera similar se define un subdigrafo H de G *arco-inducido* por $F \subset A(G)$ no vacío y se simboliza como $H = \langle F \rangle$. Un subdigrafo H que posee una cierta propiedad \mathcal{P} se dice *maximal* respecto a esta propiedad si cualquier subdigrafo con más vértices o arcos que contenga a H no tiene la propiedad \mathcal{P} .

La relación "estar conectado a" es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices, con lo que $V(G)$ queda dividido en clases de equivalencia disjuntas. Cada uno de los subdgrafos inducidos por estas clases de equivalencia se llaman *componentes conexas* o sencillamente *componentes* de G . Equivalentemente, una componente de G es un subdigrafo que es maximal con respecto a la propiedad de estar conectado. Es claro que un grafo o digrafo G es conexo cuando tiene una única componente.

El grado de conectividad de un (di)grafo G está descrito en términos de dos parámetros. La (vértice-)conectividad, $\kappa = \kappa(G)$, es el mínimo número de vértices cuya supresión, o bien desconecta el (di)grafo G , o bien, lo reduce al (di)grafo trivial constituido por un único vértice. La arco-conectividad, (rama-conectividad en el caso de grafos) $\lambda = \lambda(G)$, es el mínimo número de arcos cuya supresión desconecta el (di)grafo G . El grado mínimo δ acota superiormente a estos parámetros que están relacionados por las desigualdades (ver Geller y Harary [36])

$$\kappa \leq \lambda \leq \delta.$$

Sea $G = (V, A)$ un grafo o digrafo. Diremos que $F \subset V$ es un *conjunto de corte* o *conjunto desconectador* de orden mínimo si $G - F$ está desconectado y $|F| = \kappa$. Cada conjunto desconectador determina una partición del conjunto $V \setminus F$ en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V^- , V^+ tales que $G - F$ no tiene arcos desde V^- hasta V^+ . Diremos que V^- , V^+ son los *fragmentos* determinados por F . Análogamente, diremos que $E \subset A$ es un *conjunto arco-desconectador* de orden mínimo si $G - E$ está desconectado y $|E| = \lambda$. Entonces el conjunto $V = V(G - E)$ puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V^- , V^+ sin arcos desde V^- hasta V^+ . Diremos que V^- , V^+ son los α -*fragmentos*

determinados por E . Llamaremos *profundidad* de los fragmentos determinados por F a $\mu = \max_{x \in V^-} d(x, F)$, $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x)$. Análogamente, Llamaremos *profundidad* de los α -fragmentos determinados por E a $\nu = \max_{x \in V^-} d(x, F)$, $\nu' = \max_{x \in V^+} d(W, x)$, donde F son los vértices iniciales de los arcos de E y W son los finales. Utilizaremos con frecuencia estas definiciones en los teoremas contenidos en esta memoria. Para mayor detalle ver los conceptos introducidos en [7] inspirados en la notación de Hamidoune [38, 39].

Dos resultados clásicos sobre conectividad fueron probados por Menger en 1927 para grafos. Estos teoremas aseguran que dados dos vértices cualesquiera x, y del grafo G , el número máximo de caminos internamente disjuntos entre x e y es al menos κ . Análogamente, el número máximo de caminos internamente rama-disjuntos desde x a y es al menos λ . Posteriormente, se probaron teoremas análogos para digrafos estrechamente relacionados con el teorema del flujo máximo-mínimo corte. Ver [21].

Diremos que un grafo o digrafo es *maximalmente conectado* o que tiene *máxima conectividad* cuando $\kappa = \lambda = \delta$, y *maximalmente arco-conectado* si $\lambda = \delta$. Una propiedad que usaremos frecuentemente es la siguiente: Si G es un digrafo de arco-conectividad λ , la vértice-conectividad del digrafo línea LG es la arco-conectividad de G , es decir, $\kappa(LG) = \lambda(G)$. Es una propiedad muy útil, que nos permite, por ejemplo, afirmar que el digrafo de Kautz es maximalmente conectado. En efecto, como ya hemos comentado anteriormente este digrafo satisface por definición que, $K(d, D) = L^{D-1}K_{d+1}^* = LK(d, D-1)$, entonces por la propiedad anterior podemos afirmar que $\kappa(K(d, D)) = d$.

El estudio de las propiedades de conectividad en grafos y digrafos tiene aplicaciones interesantes en el diseño de redes de comunicación o interconexión con alta fiabilidad. En particular, es importante disponer de condiciones suficientes que aseguren máxima conectividad en un (di)grafo. Este problema ha sido objeto de un gran interés en los últimos años. Ver, por ejemplo, el trabajo que recoge información sobre el tema de Bermond, Homobono y Peyrat [12]. La mayor parte de estas condiciones son establecidas en función del grado de los vértices, del diámetro y el orden del digrafo. El primer resultado de este tipo que conocíamos fue dado por Chartrand en [20]:

Si G es un grafo con n vértices y mínimo grado $\delta \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces G presenta rama-conectividad máxima, es decir, $\lambda = \delta$.

Desde entonces, diversos autores han propuesto diferentes generalizaciones.

(Ver, por ejemplo, Lesniak [47], Goldsmith and White [37], Goldsmith and Entringer [35], Volkman [57]). Otras generalizaciones son de diferente naturaleza y usan otros parámetros. Así, Jolivet en [46] mostró que *cualquier digrafo con diámetro dos es maximalmente arco-conectado*. Hamidoune da en [38] una demostración sencilla de este hecho. Plesnik en [49] probó independientemente el correspondiente corolario para grafos. Fàbrega, Fiol y Escudero probaron en [23, 32] una generalización del teorema de Jolivet, tanto para grafos como para digrafos, a través del parámetro ℓ . Concretamente en [23] se probó el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1 *Sea G un digrafo sin lazos, grado mínimo $\delta > 1$, parámetro ℓ , diámetro D , y conectividades κ, λ . Entonces,*

$$(a) \lambda = \delta, \text{ si } D \leq 2\ell.$$

$$(b) \kappa = \delta, \text{ si } D \leq 2\ell - 1.$$

Este teorema junto con su demostración es el principal punto de partida del trabajo desarrollado en esta memoria.

Para interpretar este teorema en grafos se considera su digrafo simétrico G^* . La razón básica es que $\kappa(G^*) = \kappa(G)$ y, puesto que un conjunto arco-desconector de orden mínimo no puede contener dígonos, también $\lambda(G^*) = \lambda(G)$. El teorema anterior se escribe en este caso en términos del girth del grafo, ya que $\ell(G^*) = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$.

Aparte de la conectividad estándar, también se han considerado otros tipos de medidas de conectividad. Así, Harary definió en [43] *la conectividad condicional con respecto a una propiedad \mathcal{P}* , o \mathcal{P} -conectividad, como el mínimo número de vértices cuya supresión desconecta el digrafo en componentes conexas de manera que todas gozan de la propiedad previamente fijada \mathcal{P} .

La superconectividad fue definida por Boesch y Tindell en [15] y constituye una medida de conectividad más fuerte cuyo estudio ha recibido una atención especial en los últimos años. Algunos resultados sobre superconectividad han sido obtenidos por Hamidoune, Llado y Serra en [40] y otros se pueden encontrar en [23, 32]. Se dice que un (di)grafo es *superconectado*, ó, abreviadamente *super- κ* , (respectivamente *super- λ*) si es maximalmente conectado (arco-conectado) y los únicos desconectores o conjuntos de corte de δ vértices [arcos] son los triviales, es decir, aquellos conjuntos formados por los vértices [arcos] de salida o de entrada

de un vértice. Es evidente que entre las componentes conexas que determina un conjunto de corte trivial, debe haber al menos una que sea un vértice aislado. Este hecho sugiere definir la superconectividad de un digrafo super- κ , denotada por $\kappa_1 [\lambda_1]$ (ver Capítulo 4), como el mínimo número de vértices [arcos] que hay que suprimir para desconectarlo de manera no trivial, es decir, de manera que todas las componentes conexas que se determinan tengan más de un vértice. Desde este punto de vista, la superconectividad es una conectividad condicional con respecto a la propiedad \mathcal{P}_1 que consiste en tener más de un vértice.