

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de
Doctorado de Matematica Aplicada*

**ESTUDIO SOBRE ALGUNAS
NUEVAS CLASES DE
CONECTIVIDAD CONDICIONAL
EN GRAFOS DIRIGIDOS**

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 3

Conectividad de digrafos y grafos bipartitos densos

3.1 Introducción

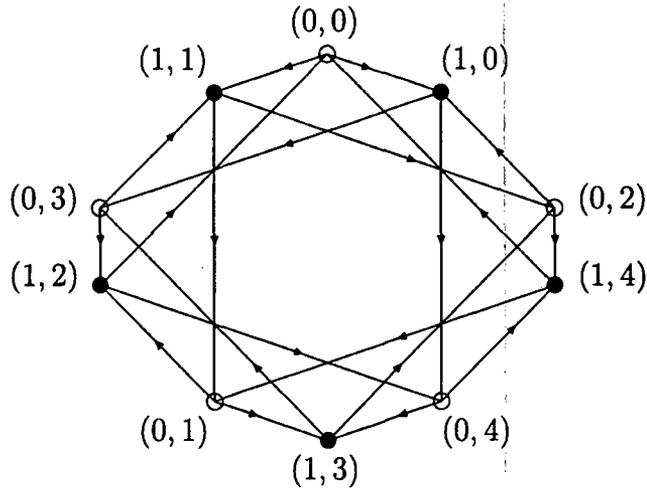
El problema abordado en este capítulo es el estudio de la conectividad de digrafos y grafos bipartitos densos. En todo este capítulo, $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, denotará un digrafo bipartito (simple y finito) con conjunto de partes de vértices U_0 , U_1 , y conjunto de arcos A , los cuales representan elementos diferentes de $U_0 \times U_1$ o $U_1 \times U_0$.

Recordemos que el número máximo de vértices de un digrafo bipartito con grado máximo $\Delta \neq 1$ y diámetro D (*cota de Moore*) es

$$|V| \leq \begin{cases} 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1}, & D \text{ impar} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta^2 - 1}, & D \text{ par.} \end{cases}$$

En [34] se probó que esta cota sólo puede ser alcanzada cuando $D \leq 4$. En este artículo se presentó además la construcción de una familia que da lugar a digrafos bipartitos densos. Concretamente, dados d, n , enteros positivos con $d \leq n$, el digrafo bipartito $BD(d, n)$ tiene como conjunto de vértices $V = Z_2 \times Z_n = \{(\alpha, i); \alpha \in Z_2, i \in Z_n\}$, y cada vértice (α, i) es adyacente a los vértices del conjunto

$$\Gamma^+(\alpha, i) = \{(\bar{\alpha}, (-1)^\alpha d(i + \alpha) + t); t = 0, 1, \dots, d - 1\}$$

Figura 3.1: Digrafo $BD(2,5)$

donde $\bar{0} = 1$ y $\bar{1} = 0$. La Figura 3.1 muestra el digrafo $BD(2,5)$.

Cuando $D = 3, 4$ y $n = d^{D-1} + d^{D-3}$, el digrafo $BD(d, n)$ tiene diámetro D y de aquí que su orden alcance la cota de Moore $|V| = 2n$. Para $D \geq 5$ se obtienen digrafos bipartitos densos, ya que el orden de los digrafos $BD(d, d^{D-1} + d^{D-3})$ es más grande que $(d^4 - 1)/d^4$ veces la cota de Moore. Además los cálculos llevados a cabo en [34] para evaluar D mostraron que $\lceil \log_d n \rceil \leq D \leq \lfloor \log_d n \rfloor + 1$, así como que el parámetro $\ell(BD(d, n)) \geq D - 2$, ya que de hecho los digrafos línea $LBD(d, n) = BD(d, dn)$, y en consecuencia $L^{D-3}BD(d, d^2 + 1) = BD(d, d^{D-1} + d^{D-3})$.

En todo el capítulo se supone que el digrafo bipartito G es conectado, y por tanto $\delta(G) \geq 1$. Como hemos dicho al principio, nuestro propósito es el estudio de la conectividad $\kappa = \kappa(G)$ y arco-conectividad $\lambda = \lambda(G)$ de digrafos bipartitos con grado máximo Δ y diámetro D con gran cantidad de vértices. En relación con este problema hay trabajos recientes en el marco general de digrafos densos que han mostrado que, cuanto más grande sea el orden más altas son las conectividades. Por ejemplo, Imase, Soneoka y Okada [45] probaron las siguientes implicaciones.

$$\kappa < \delta \text{ si } n \leq \kappa\{p(\Delta, D - 1) + \Delta\};$$

$$\lambda < \delta \text{ si } n \leq \lambda\{p(\Delta, D - 2) + \Delta + 1\},$$

donde $p(\Delta, D) = 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^D$. En virtud de estos resultados, podemos deducir las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo G sea maximal-

mente conectado:

$$\begin{aligned} \kappa &= \delta & \text{si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 1) + \Delta\}; \\ \lambda &= \delta & \text{si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, D - 2) + \Delta + 1\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

En relación con el parámetro ℓ , en [23] se dieron los resultados ya comentados en el Teorema 1.5.1 del Capítulo 1, que intuitivamente podemos interpretar en el sentido de que cuanto más pequeño sea el diámetro más altas son las conectividades. Posteriormente, Fiol en [27, 28] agrupó las ideas de los anteriores resultados para dar condiciones de tipo mixto (sobre el orden n y el parámetro ℓ) para alcanzar conectividades máximas. Por ejemplo, en el caso de digrafos d -regulares estas condiciones son las siguientes.

$$\begin{aligned} \kappa &= d & \text{si } n > d^{D-\ell+1} + 2d^\ell - 2d + 1; \\ \lambda &= d & \text{si } n > d^{D-\ell} + 2d^\ell - 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cuando $\ell = 1$ estos resultados suponen una mejora respecto a los dados por (3.1). De hecho se prueba también en estos artículos que son las mejores posibles al menos para diámetro impar en el caso de la vértice-conectividad, proponiendo como ejemplo los digrafos generalizados de Kautz, estudiados en profundidad por Homobono y Peyrat en [44]. Ejemplos particulares muestran lo mismo para la arco-conectividad.

En lo referente a digrafos bipartitos se ha hecho mucho menos trabajo hasta ahora. No obstante, en el caso de digrafos bipartitos d -regulares, Aïder [1] probó los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} \kappa &= d & \text{si } n > 2(d^{D-1} - 1); \\ \lambda &= d & \text{si } n > 2d^{D-2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

que pueden compararse con los de (3.2) para $\ell = 1$.

Como ya hemos comentado en el capítulo anterior, las condiciones suficientes sobre el diámetro para digrafos bipartitos son las siguientes:

$$\begin{aligned} \kappa &= \delta & \text{si } D \leq 2\ell; \\ \lambda &= \delta & \text{si } D \leq 2\ell + 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estos resultados se hallan en [31, 26] y también en [5]. Obsérvese que las cotas mejoran en una unidad respecto a las dadas en el Teorema 1.5.1 para el caso de digrafos en general. Esto es así precisamente porque en un digrafo bipartito entre dos vértices sólo hay caminos de la misma paridad. A modo de ejemplo

podemos aplicarlos a los digrafos anteriormente citados, $BD(d, n)$. Como estos digrafos cumplen que $\ell \geq D - 2$, es fácil verificar que si $D \geq 4$ son maximalmente conectados, y, si $D \geq 3$ son maximalmente arco-conectados.

En las secciones siguientes agruparemos las ideas expuestas sobre digrafos bipartitos para obtener condiciones de tipo mixto similares a las dadas en [27, 28]. Este trabajo se encuentra en [6].

Notaciones y resultados similares se aplican a grafos, y algunos de ellos serán revisados en la última sección.

3.2 Digrafos bipartitos densos

Esta sección está dedicada a derivar nuevas condiciones de tipo mixto suficientes para asegurar máxima conectividad en digrafos bipartitos densos. Estas condiciones unifican y mejoran los resultados conocidos de Aïder [1] y también los contenidos en [31]. En primer lugar, vamos a considerar el caso de la vértice conectividad.

Teorema 3.2.1 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y δ , respectivamente, y conectividad κ . Entonces, si $\kappa < \delta$,*

$$(i) \quad n \leq \kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2, \quad \text{si } \delta \geq 3;$$

$$(ii) \quad n \leq p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\}, \quad \text{si } \delta = 2.$$

Demostración: Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Para probar (i) sea F un conjunto desconectador mínimo de G , es decir, $|F| = \kappa$. Entonces, el conjunto $V \setminus F$ puede ser partido en dos fragmentos V^- , V^+ tales que $G - F$ no tiene arcos desde V^- a V^+ . Podemos considerar a su vez una partición de los fragmentos V^- y V^+ en subconjuntos V_i , $1 \leq i \leq \mu$, y V'_j , $1 \leq j \leq \mu'$, según su distancia hacia F y desde F , ésto es, $V_i = \{x \in V^- : d(x, F) = i\}$ y $V'_j = \{x \in V^+ : d(F, x) = j\}$, ($V_0 = V'_0 = F$). Nótese que $|V_i| \leq \Delta|V_{i-1}|$, $1 \leq i \leq \mu$, y $|V'_j| \leq \Delta|V'_{j-1}|$, $1 \leq j \leq \mu'$. Como cualquier camino desde V^- a V^+ atraviesa F , la distancia desde un vértice en V_μ a uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu + \mu'$ y por tanto $D \geq \mu + \mu'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mu \leq \mu'$ (si no, usamos el digrafo inverso de G).

Bajo las anteriores condiciones, se probó en [23] y también en [31] que si $\mu \leq \ell - 1$ entonces $|F| = \kappa \geq \delta$, contradiciendo nuestras hipótesis. La demostración es como sigue: Si $\mu \leq \ell - 1$, consideremos un vértice $x \in V_\mu$ y δ de sus vecinos de salida $x_1, x_2, \dots, x_\delta$. Sea $f_i \in F$ un vértice a mínima distancia desde x_i . Puesto que $|F| = \kappa < \delta$, debe ser $f_i = f_j$ para ciertos $i \neq j$. Entonces habría dos caminos de longitud μ o $\mu + 1$ contradiciendo la definición de ℓ , ya que $\mu \leq d(x, f_i) \leq 1 + d(x_i, f_i) \leq 1 + \mu \leq \ell$.

Luego podemos suponer que $\mu \geq \ell$, y, en consecuencia, $\mu \leq \mu' \leq D - \mu \leq D - \ell$.

(a) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$.

(a.1) Si $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, ésto es, si $\mu' \leq D - \ell - 2$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\mu'} |V'_j| - |F| \leq \kappa \{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, \mu') - 1\} \leq \\ &\kappa \{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \ell - 2) - 1\} = \kappa \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \\ &\kappa \left\{ \sum_{i=\ell+1}^{\mu} \Delta^i - \Delta^{D-\ell-1} + 1 \right\} \leq \kappa \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\}, \end{aligned}$$

puesto que $1 + \frac{\Delta^{\mu+1} - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \Delta^{D-\ell-1} \leq 1 - \frac{\Delta - 2}{\Delta - 1} \Delta^{D-\ell-1} - \frac{\Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} \leq 0$,
ya que $D - \ell - 1 > \ell + 1$.

(a.2) Si $V'_{D-\ell-1} \neq \emptyset$, podemos considerar un vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$. Como todos los caminos desde $x \in V_\mu$ a y atraviesan F debe ser $d(x, y) \geq d(x, F) + d(F, y) = \mu + D - \ell - 1 \geq \ell + 1 + D - \ell - 1 = D$. Por tanto, $\mu = \ell + 1$. Además, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$; en caso contrario, sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y atraviesan F , y por eso $d(x', y) = D$. Entonces, tendríamos dos caminos diferentes desde x a y , uno de longitud D y el otro, $xx' \rightarrow y$, de longitud $D + 1$, lo cual es imposible en un digrafo bipartito. Luego, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$, lo cual implica que $|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V_\ell|$. De un modo similar, probamos que para cualquier vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-2}$, y por consiguiente $|V'_{D-\ell-1}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V'_{D-\ell-2}|$. De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| - |F| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\ &\kappa \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2) - 1\} + \frac{\kappa}{\delta} \{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} = \\ &\kappa \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \frac{\kappa}{\delta} \{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} + \kappa \{1 - \Delta^{D-\ell-1}\} \leq \end{aligned}$$

$$\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\},$$

puesto que $\frac{1}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}\} + 1 - \Delta^{D-\ell-1} = \frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} - (\delta - 1)\frac{\Delta^{D-\ell-1}}{\delta} + 1 \leq \frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} - (\delta - 1)\frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} + 1 = (2 - \delta)\frac{\Delta^{\ell+1}}{\delta} + 1 \leq 0$, ya que $D \geq 2\ell + 2$ y $\delta \geq 3$.

(b) $\mu = \ell$. Entonces, $\mu' \leq D - \ell$, $D \geq 2\ell + 1$. Ahora, para todo $x \in V_\ell$, $\Gamma^+(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$; en caso contrario consideremos δ de sus vecinos de salida, $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, y sea $f_i \in F$ el vértice a mínima distancia de cada x_i . Entonces, como $|F| < \delta$ habría dos caminos diferentes de longitud ℓ , a saber, $xx_i \rightarrow f_i$ y $xx_j \rightarrow f_j$, donde $i \neq j$, $f_i = f_j$, lo cual contradice la definición del parámetro ℓ . Este hecho implica que $V'_{D-\ell} = \emptyset$, puesto que G es bipartito. Además, el máximo cardinal de $V_\ell \cup V'_{D-\ell-1}$ se puede reducir en al menos $\kappa - 2$. En efecto, dados $x \in V_\ell$ y δ de sus vecinos de salida, $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, algunos de ellos deben estar en V_ℓ , lo que significa que hay un $f_i \in F$ tal que $d(x, f_i) = \ell + 1$, y hay un $f_j \in F$ tal que $d(x, f_j) = \ell$. Por tanto, $F_0 = F \cap U_0 \neq \emptyset$ y $F_1 = F \cap U_1 \neq \emptyset$. Sea $F_0 = \{f_1, \dots, f_a\}$, $F_1 = \{f_{a+1}, \dots, f_\kappa\}$ y consideremos los dos casos siguientes.

(b.1) Si el diámetro D es impar, sabemos que los vértices de la misma parte están como mucho a distancia $D - 1$. De aquí que, los caminos cortos $f_t \rightarrow f_1$, $t = 2, \dots, a$, y $f_t \rightarrow f_\kappa$, $t = a + 1, \dots, \kappa - 1$ deben ser de longitud $\leq D - 1$. Estos caminos deben tener algún arco (α_t, β_t) con su vértice inicial α_t en algún V'_{j_t} , $0 \leq j_t \leq D - \ell - 1$, y su vértice terminal β_t en algún V_{i_t} , $0 \leq i_t \leq \ell$. De hecho, debe ser $0 \leq j_t \leq D - \ell - 2$, o bien, $0 \leq i_t \leq \ell - 1$; de lo contrario, si $\alpha_t \in V'_{D-\ell-1}$ y $\beta_t \in V_\ell$, tendríamos que $D - 1 \geq d(f_t, f) = d(f_t, \alpha_t) + 1 + d(\beta_t, f) \geq D$, donde $f = f_1$, o bien, $f = f_\kappa$, lo cual es una contradicción. Vamos a considerar los posibles casos siguientes:

- Si, para algún t , $\alpha_t \in V'_{j_t}$, $0 \leq j_t \leq D - \ell - 2$, entonces $|V'_{j_t+1}| \leq \kappa\Delta^{j_t+1} - 1$, así pues, $|V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa\Delta^{D-\ell-1} - 1$.
- Si, para algún t , $\alpha_t \in V'_{D-\ell-1}$, entonces $\beta_t \in V_{i_t}$, con $0 \leq i_t \leq \ell - 1$ y, como antes, $|V_\ell| \leq \kappa\Delta^\ell - 1$.
- Si, para ciertos t_1, \dots, t_b , $\alpha_{t_1} = \dots = \alpha_{t_b} = \alpha_t \in V'_{D-\ell-1}$, entonces $\alpha_t \in V_{i_t}$, $0 \leq i_t \leq \ell - 1$, y $|V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa\Delta^{D-\ell-1} - (b - 1)$, de aquí que $|V_\ell| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \kappa(\Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}) - b$.

Por tanto, de todo lo anterior concluimos que, para cada α_t , $2 \leq t \leq \kappa - 1$, el máximo cardinal del conjunto $V_\ell \cup V'_{D-\ell-1}$ se puede reducir en al menos uno. Así

pues,

$$\begin{aligned}
 n &= \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| - |F| + |V_\ell| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\
 &\kappa\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 2) - 1 + \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}\} - (\kappa - 2) = \\
 &\kappa\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2.
 \end{aligned}$$

(b.2) Si el diámetro D es par, los vértices de diferentes partes están a lo sumo a distancia $D - 1$. Por eso, ahora consideramos los caminos más cortos $f_t \rightarrow f_1$, $t = a + 1, \dots, \kappa - 1$, y $f_t \rightarrow f_\kappa$, $t = 2, \dots, a$. Entonces, razonando como antes, obtenemos el resultado deseado.

(ii) Cuando $\delta = 2$, sea $F = \{f\}$ un mínimo conjunto desconector. Entonces $\mu \geq \ell + 1$; de otro modo, si $\mu = \ell$ debe ser $\Gamma^+(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$ para todo $x \in V_\ell$, porque hay un único camino corto desde x a f de longitud ℓ . Pero en este caso sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_\ell$, entonces $d(x', f) = \ell$ y habría un camino desde x a f de longitud ℓ , y otro camino $xx' \rightarrow f$ de longitud $\ell + 1$, lo cual no es posible en un digrafo bipartito. Por tanto, $\ell + 1 \leq \mu \leq \mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$. Además, para todo $x \in V_\mu$, debe ser $\Gamma^+(x) \cap V_\mu = \emptyset$; de otro modo tendríamos un camino desde x a f de longitud μ y otro de longitud $\mu + 1$, lo cual es imposible en digrafos bipartitos. Entonces $|V_\mu| \leq \frac{\Delta^\mu}{2}$. Análogamente, para todo $y \in V'_{\mu'}$, $\Gamma^-(y) \cap V'_{\mu'} = \emptyset$, y de aquí que $|V'_{\mu'}| \leq \frac{\Delta^{\mu'}}{2}$. Así pues

$$\begin{aligned}
 n &= \sum_{i=0}^{\mu-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{\mu'-1} |V'_j| - |F| + |V_\mu| + |V'_{\mu'}| \leq \\
 &p(\Delta, \mu - 1) + p(\Delta, D - \mu - 1) - 1 + \frac{\Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}}{2} = \\
 &p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{\Delta^\mu - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \frac{\Delta^{D-\ell} - \Delta^{D-\mu}}{\Delta - 1} + \frac{\Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}}{2} \leq \\
 &p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\},
 \end{aligned}$$

puesto que la función $\phi(\mu) = \Delta^\mu + \Delta^{D-\mu}$ es decreciente en el intervalo $[\ell + 1, D - \ell - 1]$. \square

En el siguiente corolario se da una condición suficiente sobre el número de vértices para que un digrafo bipartito G alcance máxima conectividad.

Corolario 3.2.2 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y δ , respectivamente, y conectividad κ . Entonces, $\kappa = \delta$ si*

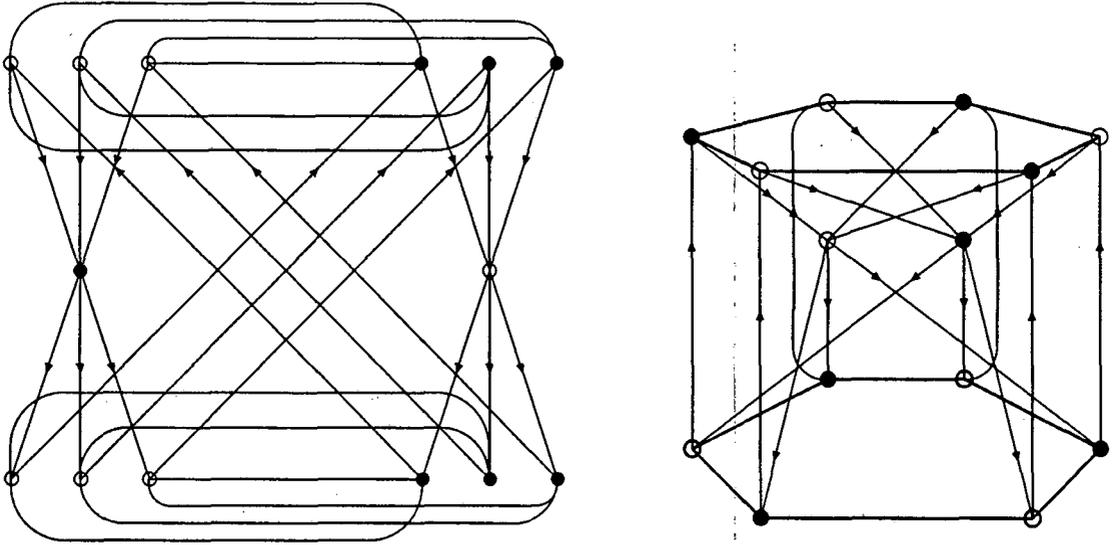


Figura 3.2: Dos representaciones de un digrafo bipartito 3-regular de 14 vértices con diámetro 3 y conectividad 2

- (i) $\delta \geq 3$ y $n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2$;
(ii) $\delta = 2$ y $n > p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\}$. \square

Además, si G es d -regular obtenemos la siguiente condición para que G sea maximalmente conectado.

Corolario 3.2.3 *Sea G un digrafo bipartito d -regular con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , y conectividad κ . Entonces,*

- (i) $\kappa = d$ si $d \geq 3$ y $n > d^{D-\ell} + d^{\ell+1} - 2d + 2$;
(ii) $\kappa = 2$ si $d = 2$ y $n > 3(2^\ell + 2^{D-\ell-2} - 1)$. \square

Nótese que cuando $\ell = 1$, el resultado anterior mejora la condición de Aïder (3.3). Disponemos de algunos ejemplos particulares que muestran que este resultado es el mejor posible. Por ejemplo, la Figura 3.2 muestra dos representaciones pictóricas de un digrafo bipartito 3-regular con diámetro $D = 3$, cuyo orden es $n = d^{D-1} + d^2 - 2d + 2 = 14$ y tiene conectividad $\kappa = 2$. Otros ejemplos de digrafos bipartitos 2-regulares se muestran en la Figura 3.3, también representados de dos formas diferentes.

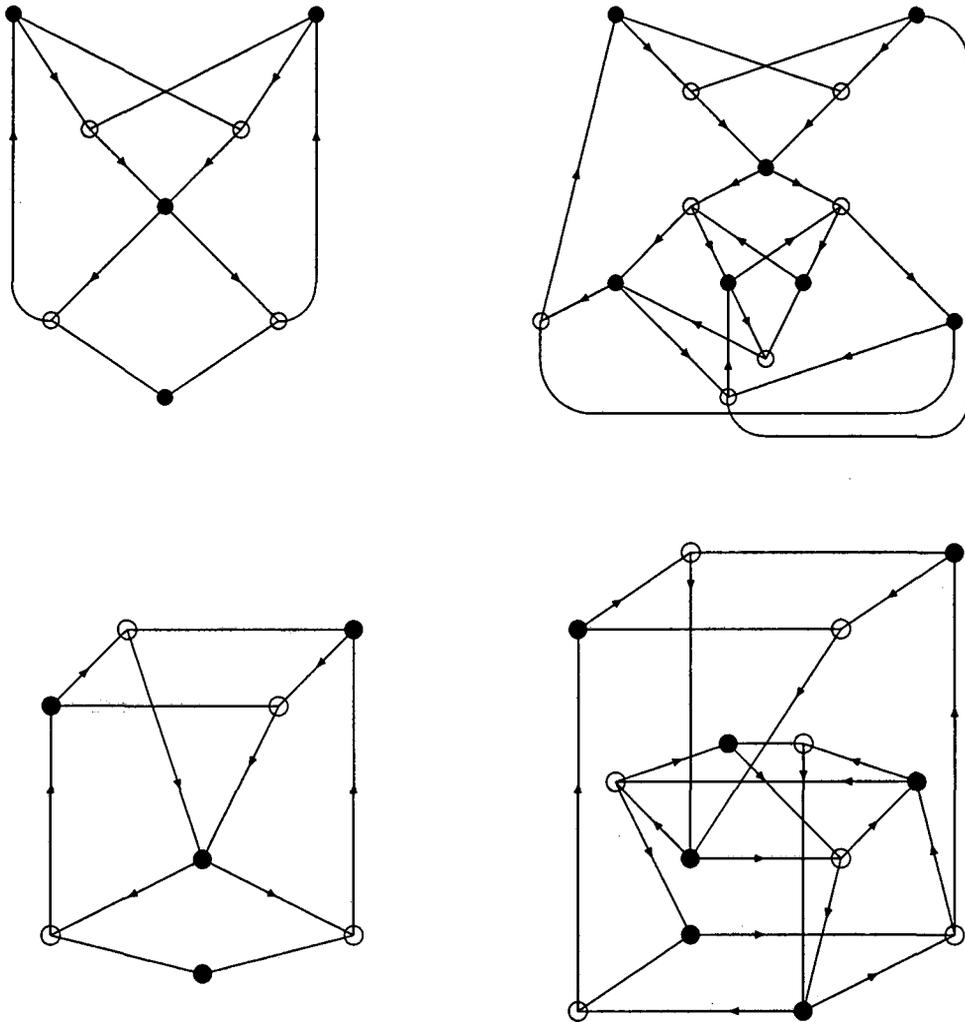


Figura 3.3: Dos representaciones de dos digrafos bipartitos 2-regulares de 8 y 14 vértices con conectividad igual a 1

Aplicando la técnica del digrafo línea al Teorema 3.2.1, podemos obtener también una condición suficiente sobre el número de arcos para que G tenga máxima arco-conectividad. Es decir, como se estableció en el Capítulo 1, el digrafo línea k -iterado $L^k G$ tiene diámetro $D + k$ y $\ell(L^k G) = \ell + k$. Por tanto, sustituyendo estos valores en el Teorema 3.2.1 y usando el hecho de que un digrafo es bipartito si y sólo si su digrafo línea lo es, estamos preparados para establecer las condiciones anteriormente mencionadas sobre el número de arcos de G .

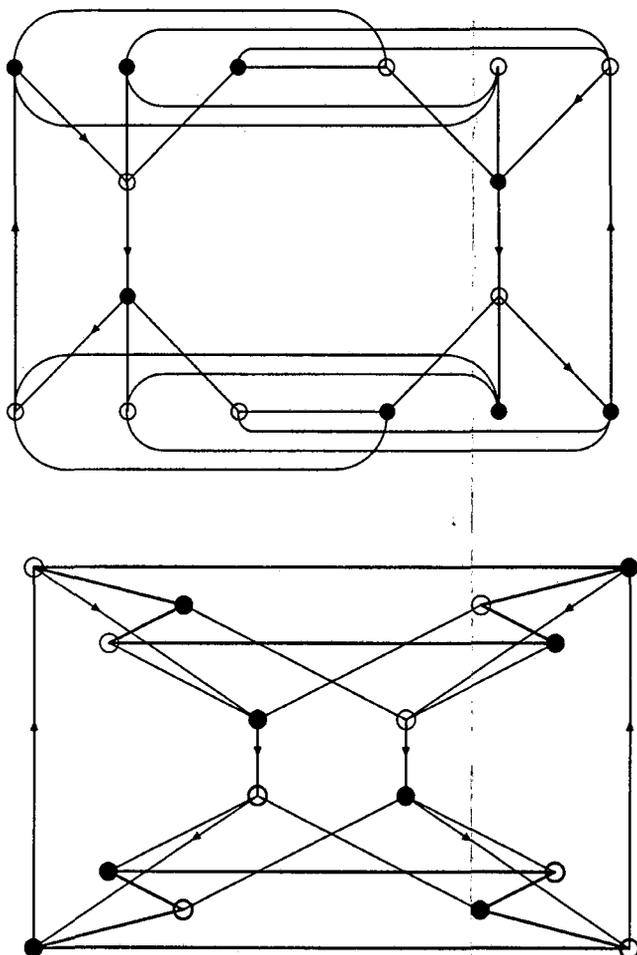


Figura 3.4: Dos representaciones de un digrafo bipartito 3-regular de 16 vértices con diámetro $D = 4$ y arco-conectividad $\lambda = 2$

Corolario 3.2.4 Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , número de arcos m , máximo y mínimo grados Δ y δ respectivamente, y arco-conectividad λ . Entonces, si $\lambda < \delta$,

$$(i) \quad m \leq \lambda\{p(\Delta, \ell + 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2, \text{ si } \delta \geq 3;$$

$$(ii) \quad m \leq p(\Delta, \ell + 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \frac{1}{2}\{\Delta^{\ell+2} - \Delta^{D-\ell-1}\} \text{ si } \delta = 2.$$

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existiría un digrafo bipartito $G = (V, A)$ con m arcos, parámetros δ, Δ, ℓ, D y arco-conectividad $\lambda < \delta$ tal que

$$m > \lambda\{p(\Delta, \ell + 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2.$$

Entonces su digrafo línea LG , tendría $n' = m$ vértices, grado mínimo δ , grado máximo Δ , diámetro $D' = D + 1$, parámetro $\ell' = \ell + 1$, y conectividad $\kappa' = \lambda < \delta$, satisfaciendo

$$n' > \kappa' \{p(\Delta, \ell') + p(\Delta, D' - \ell' - 1) - 2\} + 2,$$

lo que contradice el teorema anterior. El caso $\delta = 2$ se prueba análogamente. \square

Cuando el digrafo G es d -regular tiene $m = dn$ arcos, de donde podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5 *Sea G un digrafo bipartito d -regular con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , y arco-conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda = d \text{ si } n > d^{D-\ell-1} + d^{\ell+1} - 2. \quad \square$$

Cuando $\ell = 1$, el resultado anterior mejora la condición de Aïder (3.3). La Figura 3.4 muestra dos representaciones de un digrafo bipartito 3-regular con diámetro $D = 4$, orden $n = d^{D-2} + d^2 - 2 = 16$ y arco-conectividad $\lambda = 2$, lo que significa que la cota obtenida es óptima.

Sea G un digrafo bipartito d -regular ($d > 1$) de orden n , diámetro D y $\ell(G) = \ell$. Teniendo en cuenta que el orden del digrafo línea k -iterado es $d^k n$, de los resultados anteriores deducimos las siguientes condiciones suficientes para que el digrafo línea k -iterado sea maximalmente conectado.

Corolario 3.2.6 *Sea G un digrafo bipartito d -regular, $d > 1$, con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , vértice y arco-conectividad κ y λ respectivamente. Entonces,*

$$(i) \quad \kappa(L^k G) = d \text{ si } k > \log_d \frac{d^{D-\ell} - 2d + 2}{n - d^{\ell+1}};$$

$$(ii) \quad \lambda(L^k G) = d \text{ si } k > \log_d \frac{d^{D-\ell-1} - 2}{n - d^{\ell+1}}. \quad \square$$

A partir de este corolario deducimos los siguientes resultados que deben ser comparados con (3.4).

$$\kappa(L^k G) = d \text{ si } k \geq D - \ell - \log_d(n - d^{\ell+1});$$

$$\lambda(L^k G) = d \text{ si } k \geq D - \ell - 1 - \log_d(n - d^{\ell+1}).$$

Podemos obtener una cota superior sobre el número de vértices de cualquier digrafo bipartito G con arco-conectividad $\lambda < \delta$ usando un razonamiento directo

similar al empleado en la demostración del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.7 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y $\delta > 1$ respectivamente, y arco-conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda < \delta \Rightarrow n \leq \lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}.$$

Demostración: Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito y sea E un conjunto mínimo arco-desconector de G , es decir, $|E| = \lambda$. Consideremos los dos α -fragmentos que determina V^- , V^+ y los conjuntos disjuntos de vértices $F = \{f, (f, f') \in E\}$ y $W = \{f', (f, f') \in E\}$. A continuación definimos $V_i = \{x \in V^- : d(x, F) = i\}$, $0 \leq i \leq \nu$, y $V'_j = \{x \in V^+ : d(W, x) = j\}$, $0 \leq j \leq \nu'$, como en la demostración del Teorema 3.2.1 (Ahora $V_0 = F$ y $V'_0 = W$). Luego $\nu + \nu' + 1 \leq D$ y podemos suponer $\nu \leq \nu'$. Como en el Teorema 3.2.1, se puede probar (ver [31]) que si $\nu \leq \ell - 1$ entonces $|E| = \lambda \geq \delta$, contradiciendo nuestra hipótesis. Es decir, podemos suponer que $\nu \geq \ell$, y por tanto, $\nu \leq \nu' \leq D - \mu - 1 \leq D - \ell - 1$. Tenemos los siguientes casos:

(a) $\nu \geq \ell + 1$. Entonces $\nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 2$. Si $V'_{D-\ell-2} = \emptyset$, ésto es, si $\nu' \leq D - \ell - 3$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\nu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\nu'} |V'_j| \leq \lambda\{p(\Delta, \nu) + p(\Delta, \nu')\} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \nu) + p(\Delta, D - \ell - 3)\} = \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\} + \lambda\left\{\sum_{i=\ell+1}^{\nu} \Delta^i - \Delta^{D-\ell-2}\right\} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}, \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{\Delta^{\nu+1} - \Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} - \Delta^{D-\ell-2} \leq \frac{2 - \Delta}{\Delta - 1} \Delta^{D-\ell-2} - \frac{\Delta^{\ell+1}}{\Delta - 1} \leq 0.$$

Si $V'_{D-\ell-2} \neq \emptyset$, podemos considerar un vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$. Como todos los caminos desde $x \in V_\mu$ a y , deben atravesar E , debe ser $d(x, y) \geq d(x, F) + 1 + d(F', y) = \mu + 1 + D - \ell - 2 \geq D$. Por tanto, $\mu = \ell + 1$. Además, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$; en caso contrario, sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y deben atravesar E y también $d(x', y) = D$. Entonces, deberíamos tener dos caminos desde x a y , uno de longitud D y el otro, $xx' \rightarrow y$, de longitud $D + 1$, lo cual es imposible en un digrafo bipartito. Luego, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$, lo cual implica que $|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V_\ell|$. De un modo muy

parecido, probamos que para todo vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-3}$, y, por tanto $|V'_{D-\ell-2}| \leq \frac{\Delta}{\delta} |V'_{D-\ell-3}|$. De esta manera obtenemos que,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-3} |V'_j| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-2}| \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 3)\} + \frac{\lambda}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-2}\} = \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\} + \frac{\lambda}{\delta}\{\Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-2}\} - \lambda\Delta^{D-\ell-2} \leq \\ &\lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}, \end{aligned}$$

puesto que

$$\Delta^{\ell+1} - (\delta - 1)\Delta^{D-\ell-2} \leq (2 - \delta)\Delta^{\ell+1} \leq 0, \text{ ya que } D \geq 2\ell + 3.$$

(b) $\nu = \ell$. Entonces $\nu' \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$. Ahora, para todo $x \in V_{\ell}$, $\Gamma^+(x) \cap V_{\ell} \neq \emptyset$; de otro modo se contradice la definición del parámetro ℓ . Este hecho implica que $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, puesto que si existiese un vértice $y \in V'_{D-\ell-1}$, tendríamos que, para todo $x \in V_{\ell}$, $d(x, y) \geq d(x, F) + 1 + d(F', y) = D$. Considerando $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell}$, y puesto que todos los caminos desde x' a y deben atravesar E , obtendríamos que $d(x', y) = D$, lo cual contradice el hecho de que G es bipartito.

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| \leq \lambda\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}. \quad \square$$

Es interesante observar ya que $n \geq \frac{m}{\Delta}$, que el teorema anterior también implica los resultados del Corolario 3.2.4 y en consecuencia, también los del Corolario 3.2.5. El próximo corolario proporciona una condición suficiente sobre el número de vértices para asegurar máxima arco-conectividad en cualquier digrafo bipartito.

Corolario 3.2.8 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo Δ y $\delta > 1$ respectivamente, y arco-conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}. \quad \square$$

3.3 Grafos bipartitos densos

Sea G un grafo. Soneoka, Nakada, Imase y Peyrat [55] probaron las siguientes implicaciones.

$$\begin{aligned} \kappa < \delta & \text{ si } n \leq \kappa(\Delta - 1)^{D-1} + 2; \\ \lambda < \delta & \text{ si } n \leq \lambda\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\} + \Delta - 1. \end{aligned}$$

También demostraron que estas condiciones son las mejores posibles, al menos para $\lambda = \kappa = \delta$ y valores pequeños del diámetro. Los resultados concernientes al girth del grafo G fueron dados en [54] y [55].

$$\begin{aligned} \kappa = \delta & \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 2, & g \text{ impar.} \\ D \leq g - 3, & g \text{ par.} \end{cases} \\ \lambda = \delta & \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 1, & g \text{ impar.} \\ D \leq g - 2, & g \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Estas ideas fueron agrupadas para derivar algunas condiciones suficientes que asegurasen alta conectividad, lo cual mejoró en algunos casos los resultados anteriores. Ver [27, 28].

Ahora sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito con orden n , grado máximo Δ , grado mínimo $\delta > 1$, diámetro D , girth g , conectividad κ , y rama-conectividad λ . Recuérdese que, en este caso, la cota de Moore para el número de vértices es

$$|V| \leq \begin{cases} 2D, & \Delta = 2 \\ 2 \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2}, & \Delta \geq 3. \end{cases}$$

Aïder [1] probó los siguientes resultados para el caso d -regular.

$$\begin{aligned} \kappa = d & \text{ si } n > 2d(d - 1)^{D-2}, \text{ para } D \geq 3; \\ \lambda = d & \text{ si } n > 2((d - 1)^{D-2} + d^2 - d), \text{ para } D \geq 5. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como ya se sabe, el girth de un grafo bipartito debe ser par. Los resultados correspondientes para grafos bipartitos en relación con tal parámetro, se encuentran en [31] y fueron derivados directamente de (3.4).

$$\begin{aligned} \kappa = \delta & \text{ si } D \leq g - 2; \\ \lambda = \delta & \text{ si } D \leq g - 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, cualquier grafo bipartito con diámetro tres es maximalmente rama-conectado. Este resultado ya fue dado por Plesník y Znám en [51]. Ahora vamos a dar algunas nuevas condiciones suficientes de tipo mixto para obtener grafos bipartitos con altas conectividades, que, en general, mejoran los resultados anteriores.

Teorema 3.3.1 *Sea G un grafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y conectividad κ . Entonces,*

$$\kappa < \delta \Rightarrow n \leq \kappa\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}.$$

Demostración: Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un grafo bipartito y sean F, V^-, V^+, V_i y V'_j como en el Teorema 3.2.1. Ahora necesitamos la siguiente notación: Para cada $f_j \in F$, $1 \leq j \leq \kappa$, sea $1 \leq a(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap V^-| < \Delta$; $1 \leq a'(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap V^+| < \Delta$, donde $a(f_j) + a'(f_j) \leq \Delta$, ésto es, $a'(f_j) \leq \Delta - a(f_j)$. Para cada $f_j \in F$ se definen los siguientes conjuntos, $V_{i,j} = \{x \in V_i \mid d(x, f_j) = i\}$, $1 \leq j \leq \kappa$, $1 \leq i \leq \mu$. Entonces, tenemos $|V_i| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} |V_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1}$. Análogamente, para cada $1 \leq i \leq \mu'$, $|V'_i| \leq \sum_{j=1}^{\kappa} a'(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} \leq \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1}$.

Bajo las condiciones anteriores, se prueba en [23] y también en [31] que, si $\mu \leq \ell - 1$, entonces $|F| = \kappa \geq \delta$, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego podemos suponer $\mu \geq \ell$, y, por tanto, $\mu \leq \mu' \leq D - \mu \leq D - \ell$. Estudiamos los siguientes casos:

(a) $\mu \geq \ell + 1$, $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, ésto es, $\mu' \leq D - \ell - 2$. Entonces el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\mu} |V_i| + \sum_{i=1}^{\mu'} |V'_i| + |F| \leq \\ &\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\mu'} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \kappa = \\ &\sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)p(\Delta - 1, \mu - 1) + \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, \mu' - 1) + \kappa \leq \\ &\kappa + \kappa\Delta p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq \kappa\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}; \end{aligned}$$

puesto que $\mu \leq \mu' \leq D - \ell - 2$, y,

$\Delta p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq (\Delta - 1)^2 p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \leq p(\Delta - 1, D - \ell - 1)$,
porque $\Delta \geq 3$.

Si $V'_{D-\ell-1} \neq \emptyset$, del mismo modo que para digrafos, considerando $y \in V'_{D-\ell-1}$

obtenemos que $d(x, y) = D$ para todo $x \in V_\mu$ y en consecuencia $\mu = \ell + 1$. Es decir, $\Gamma(x) \subset V_\ell$, $\Gamma(y) \subset V'_{D-\ell-2}$. Este hecho implica que

$$|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta - 1}{\delta} |V_\ell|, \quad |V'_{D-\ell-1}| \leq \frac{\Delta - 1}{\delta} |V'_{D-\ell-2}|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\ell} |V_i| + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} |V'_i| + |F| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-1}| \leq \\ &\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \\ &\kappa + \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\kappa} \{a(f_j)(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{D-\ell-2}\}. \end{aligned}$$

El lado derecho de la relación anterior es máximo cuando $a(f_j) = 1$, debido a que $\ell \leq D - \ell - 2$. Luego tenemos que,

$$\begin{aligned} n &\leq \kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 2)\} + \frac{\kappa}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} \leq \\ &\kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}, \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \frac{1}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell + (\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} = \\ p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + \frac{1}{\delta} \{(\Delta - 1)^\ell - (\delta - 1)(\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} \leq p(\Delta - 1, D - \ell - 1). \end{aligned}$$

(b) Cuando $\mu = \ell$, igual que en digrafos, tenemos $\Gamma(x) \cap V_\ell \neq \emptyset$ y entonces $V'_{D-\ell} = \emptyset$. Por tanto,

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-1} \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \kappa \leq \\ &\sum_{j=1}^{\kappa} a(f_j)p(\Delta - 1, \ell - 1) + \sum_{j=1}^{\kappa} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \kappa. \end{aligned}$$

Esta expresión es máxima cuando $a(f_j) = 1$, puesto que ahora $\ell \leq D - \ell - 1$. Entonces,

$$n \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}. \quad \square$$

Como para grafos bipartitos $2\ell + 2 = g$, el teorema anterior puede ser reescrito en términos del girth como

$$\kappa < \delta \Rightarrow n \leq \kappa \{p(\Delta - 1, \frac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g}{2})\}.$$

Corolario 3.3.2 *Sea G un grafo bipartito con girth g , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y conectividad κ . Entonces,*

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, \frac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g}{2})\}. \quad \square$$

El próximo teorema da una cota superior sobre el número de vértices para cualquier grafo bipartito G con rama-conectividad $\lambda < \delta$, la demostración sigue los mismos pasos que el Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.3 *Sea G un grafo bipartito con parámetro ℓ , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y rama-conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda < \delta \Rightarrow n \leq \lambda\{p(\Delta - 1, \ell) + p(\Delta - 1, D - \ell - 2)\}; \quad \square$$

Este resultado puede ser también reescrito en términos del girth del siguiente modo.

Corolario 3.3.4 *Sea G un grafo bipartito con girth g , diámetro D , orden n , grados máximo y mínimo $\Delta \geq 3$ y δ respectivamente, y rama-conectividad λ . Entonces,*

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, \frac{g-2}{2}) + p(\Delta - 1, D - \frac{g+2}{2})\}. \quad \square$$