

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de
Doctorado de Matematica Aplicada*

**ESTUDIO SOBRE ALGUNAS
NUEVAS CLASES DE
CONECTIVIDAD CONDICIONAL
EN GRAFOS DIRIGIDOS**

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 4

Superconectividad

4.1 Introducción

Sea $G (\neq K_d^*)$ un (di)grafo y $x \in V(G)$ un vértice con grado de salida [grado de entrada] δ . Entonces el conjunto de vecinos de salida [vecinos de entrada] de x se llama conjunto *trivial*, y es claramente un conjunto vértice-desconector. El (di)grafo G se dice que es *super- κ* si es maximalmente conectado y cada conjunto vértice-desconector de orden mínimo es trivial. Un conjunto trivial de arcos se define análogamente, y un (di)grafo maximalmente arco-conectado se llama *super- λ* si cada conjunto arco-desconector de orden mínimo es trivial. Soneoka probó en [53] que para valores dados del grado máximo Δ y del diámetro D , si el orden n del digrafo es suficientemente grande no sólo se maximiza la arco-conectividad, sino que también se minimiza el número de conjuntos de arcos de corte con orden mínimo, ya que el digrafo es *super- λ* . Las condiciones suficientes que se dan para que un digrafo G sea *super- λ* son las siguientes.

$$\text{Un digrafo } G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta, D - 2) + 1\} + \Delta^{D-1}, \quad (4.1)$$

donde $p(\Delta, D) = 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^D$. Asimismo, señala que estas condiciones suficientes permiten probar que el digrafo de Kautz $K(d, D)$ es *super- λ* . Además también probó en [53] que estas cotas son las mejores posibles al menos para valores del diámetro $D = 2$ y 3 . En el caso dirigido construyó los digrafos G_1 y G_2 , d -regulares maximalmente arco-conectados, con orden $n = 3d$ y $2d^2 + 2d$ respectivamente, que tienen conjuntos arco-desconectores de orden mínimo no triviales. A continuación se describen estos digrafos y en la Figura 4.1 mostramos dos ejemplos de estos digrafos G_1 y G_2 para $d = 3$.

- Los vértices del digrafo G_1 con diámetro $D = 2$ están partidos en tres conjuntos disjuntos, $Y_0 = \{u_i | 1 \leq i \leq d\}$, $Y'_0 = \{v_i | 1 \leq i \leq d\}$, e $Y'_1 = \{w_i | 1 \leq i \leq d\}$. Los vértices en Y_0 constituyen un digrafo completo K_d . Hay dos emparejamientos completos desde Y_0 a Y'_0 , (u_i, v_i) , y desde Y'_1 a Y_0 , (w_i, u_i) . Un vértice v_i en Y'_0 es adyacente a todos los vértices w_j en Y'_1 , $j = 1, 2, \dots, d$, y v_i en Y'_0 es adyacente desde todos los vértices w_j , $j \neq i$ en Y'_1 . Es evidente que el emparejamiento desde Y_0 a Y'_0 es un conjunto mínimo de arcos de corte no trivial.
- De un modo análogo, los vértices del digrafo G_2 con diámetro $D = 3$ están partidos en cuatro conjuntos disjuntos, $Y_0 = \{u_i | 1 \leq i \leq d\}$, $Y'_0 = \{v_i | 1 \leq i \leq d\}$, $Y'_1 = \{w_{ij} | 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d\}$, e $Y'_2 = \{x_{ij} | 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d\}$. Los vértices en Y_0 constituyen un digrafo completo K_d . Hay un emparejamiento completo desde Y_0 a Y'_0 , (u_i, v_i) . Un vértice v_i en Y'_0 es adyacente a todos los vértices w_{ij} , $j = 1, 2, \dots, d$, en Y'_1 , un vértice w_{ij} en Y'_1 es adyacente a todos los vértices x_{jk} , $k = 1, 2, \dots, d$, en Y'_2 , y un vértice x_{ij} en Y'_2 es adyacente a u_i en Y_0 y a todo v_k , $k \neq i$, en Y'_0 si $j = 1$. En los demás casos x_{ij} es adyacente a todos los vértices w_{ik} , $k = 1, 2, \dots, d$. Es evidente que el emparejamiento completo desde Y_0 a Y'_0 es un conjunto mínimo de arcos de corte no trivial.

Con respecto a digrafos que son super-vértice-conectados, la técnica del digrafo línea proporciona digrafos de esta clase, ya que, claramente, de la propia definición de digrafo línea se desprende que

$$LG \text{ es super-}\kappa \Leftrightarrow G \text{ es super-}\lambda. \quad (4.2)$$

Al igual que en los capítulos anteriores, el parámetro ℓ juega un papel primordial a la hora de obtener condiciones suficientes para obtener digrafos superconectados. En [23, 32] encontramos las siguientes condiciones suficientes sobre el diámetro. Sea G un digrafo con grado mínimo $\delta \geq 3$, diámetro D y parámetro $\ell = \ell(G)$ entonces,

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } D \leq 2\ell - 2; \quad (4.3)$$

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } D \leq 2\ell - 1. \quad (4.4)$$

Estos resultados tienen corolarios interesantes tanto para grafos como para digrafos. Por ejemplo, los siguientes establecen que si el orden de iteración es

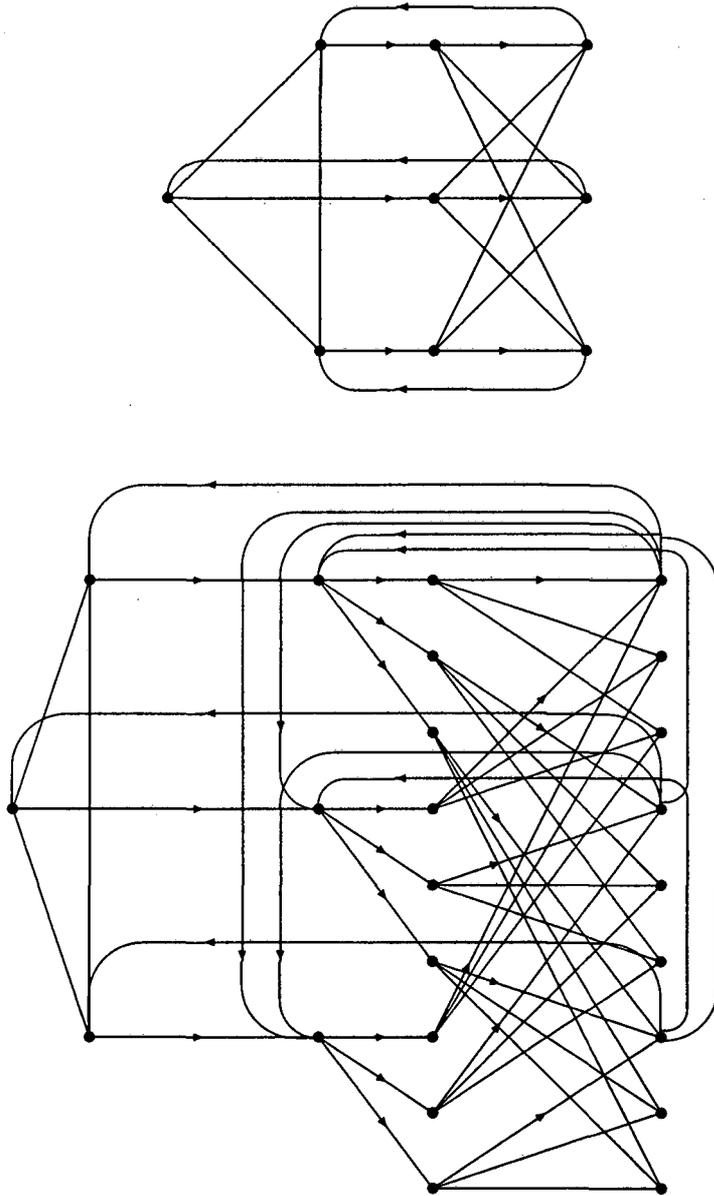


Figura 4.1: Digrafos de Soneoka con $D = 2$ y 3 cuando $d = 3$

suficientemente grande, entonces el digrafo línea k -iterado es superconectado.

$$L^k G \text{ es super-}\kappa \text{ si } k \geq D - 2\ell + 2; \quad (4.5)$$

$$L^k G \text{ es super-}\lambda \text{ si } k \geq D - 2\ell + 1. \quad (4.6)$$

Otro tipo de condiciones suficientes que se han estudiado en los últimos años para obtener digrafos superconectados, relacionan los parámetros D , δ , Δ , ℓ con el orden n . Así, podemos ver en [27], [30] nuevas condiciones suficientes para que un digrafo sea superconectado. Los resultados principales de [30] para un digrafo G con grado máximo Δ , grado mínimo δ , diámetro D y $\ell = \ell(G)$ son los siguientes.

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } \ell \geq 2, \delta \geq 3 \text{ y} \quad (4.7)$$

$$n > \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1} + 1.$$

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} + \Delta^{D-\ell}. \quad (4.8)$$

El resultado relativo a los arcos generaliza el de Soneoka (4.1), y cuando se toma $\ell = 2$ y se supone que el digrafo G es d -regular, $d \geq 3$, se obtiene que,

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } n > \begin{cases} 3d^2 + 1 & D = 3, \\ 2d^{D-1} + d^{D-2} + \dots + d^3 + 2d^2 + 1, & D \geq 4. \end{cases} \quad (4.9)$$

También en [30] se conjetura que éste es el mejor resultado posible, poniendo como ejemplo los digrafos línea de los de Soneoka antes descritos, ya que LG_1 , LG_2 tienen diámetro $D = 3$ y 4 , parámetro $\ell = 2$, y orden $3d^2$ y $2d^3 + 2d^2$, respectivamente, uno más que las cotas dadas en [30], y desde luego no son super- κ debido a (4.2). En las secciones siguientes veremos que la cota dada en este artículo se puede mejorar en una unidad por lo que la conjetura antedicha no es cierta, pero de todos modos los digrafos LG_1 , LG_2 servirán como ejemplos para mostrar que el resultado que veremos después es el mejor posible, al menos en el caso d -regular, parámetro $\ell = 2$ y para diámetros tres y cuatro respectivamente.

4.2 Conjuntos desconectores en digrafos superconectados

En esta sección abordamos el problema de desconectar de manera no trivial un digrafo superconectado. En este contexto, entenderemos que un conjunto de

vértices o arcos es *no trivial* cuando no contiene un conjunto trivial, es decir, no contiene ni a los vecinos (o arcos) de salida ni a los de entrada de ningún vértice x . En [32] encontramos planteado y resuelto parte de este problema. Allí se probó que el parámetro ℓ está relacionado con la máxima distancia que un vértice puede estar alejado de un conjunto no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices. La demostración que allí se da es de tipo constructivo, lo que permite formular algoritmos de encaminamiento para encontrar caminos entre vértices que evitan un conjunto dado de vértices o arcos. En lo que sigue, proporcionamos una demostración no constructiva de un resultado similar. Nos centraremos en averiguar la máxima distancia que un vértice puede estar alejado de un conjunto desconector no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices. Con este fin, consideramos un digrafo $G = (V, A)$ maximalmente conectado con grado mínimo $\delta \geq 3$, y un conjunto desconector de vértices F no trivial con $|F| \leq 2\delta - 3$. Sean $V^-, V^+, V_i, 1 \leq i \leq \mu$, y $V'_j, 1 \leq j \leq \mu'$, como en el Teorema 2.4.1(a) o en el Teorema 3.2.1. Obsérvese que $V_0 = V'_0 = F$. Dado un vértice z denotamos por $f^-(z)$ uno de los vértices de F tal que $d(z, F) = d(z, f^-(z))$. La siguiente propiedad será básica en los resultados que demostraremos a continuación: Supongamos $\mu \leq \ell - 1$; dado $x \in V_\mu$, sean $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, vecinos de salida de x . Si $f^-(x_i) = f^-(x_k)$ con $i \neq k$, habría dos caminos distintos, $xx_i \rightarrow f^-(x_i)$, $xx_k \rightarrow f^-(x_i)$, de longitud μ o $\mu + 1$, contradiciendo la definición de ℓ , ya que $\mu \leq d(x, f^-(x_i)) \leq \mu + 1 \leq \ell$. Por tanto, para todo $x \in V_\mu$ hay un único camino corto $P_i = xx_i \rightarrow f^-(x_i)$, de longitud μ o $\mu + 1$, según que $x_i \in V_{\mu-1}$ o $x_i \in V_\mu, 1 \leq i \leq \delta$. En lo sucesivo nos referiremos a esta propiedad como *Propiedad básica*. Suponiendo que $\ell \geq 2$ obtenemos los primeros lemas.

Lema 4.2.1 (a) Si $\mu \leq \ell - 1$ para cada vértice $x \in V_\mu$ existe un vértice $x_1 \in \Gamma^+(x)$ tal que $x_1 \in V_\mu$ y un conjunto $F' \subset F$ con $|F'| \leq \delta - 2$, tal que $d(x_1, F') \geq \ell - 1, d(x_1, F - F') \geq \ell$.

(b) Si $\mu \leq \ell - 2$ dados dos vértices $x, x_1 \in V_\mu$, tales que $x_1 \in \Gamma^+(x)$, entonces

$$|V_\mu \cap \Gamma^+(x_1)| \geq 2, \quad |V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(x)| \geq 2.$$

Demostración: (a) Supongamos que para cada $x \in V_\mu, \Gamma^+(x) \subset V_{\mu-1}$, es decir, como F es no trivial $\mu > 1$. Sean $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, vecinos de salida de x . Bajo las condiciones supuestas y en virtud de la propiedad básica los caminos cortos $P_i = xx_i \rightarrow f^-(x_i)$, son únicos y de longitud μ . Considérese también los vértices $y_1, y_2, \dots, y_\delta \in \Gamma^+(x_1)$. (Nótese que como $\ell \geq 2$ se verifica que $y_i \neq x_j$, pero

algún y_i podría ser el propio x si el digrafo tuviese dígonos). Supongamos que y_1 pertenece al camino corto $P_1 = xx_1 \rightarrow f^-(x_1)$, o sea, $f^-(x_1) = f^-(y_1)$. Para $2 \leq i \leq \delta$, se cumple que, $\mu - 1 \leq d(x_1, f^-(y_i)) \leq \mu + 1$. Dado que $|F| \leq 2\delta - 3$, deben existir al menos dos vértices $f^-(x_r) = f^-(y_r)$, $r = 2, 3$. El camino corto $P_r = xx_r \rightarrow f^-(x_r)$ es único y de longitud μ , lo que significa que $|xx_1y_r \rightarrow f^-(x_r)| \geq \mu + 2$, es decir, $|x_1y_r \rightarrow f^-(x_r)| = \mu + 1$. En consecuencia, $y_r \in V_\mu$, $r = 2, 3$. Bajo nuestras hipótesis podemos considerar $\{f'_i\}$ y $\{g'_i\}$, $1 \leq i \leq \delta$, vértices de F a distancia μ de y_2 e y_3 respectivamente. Entonces, como $|F| \leq 2\delta - 3$ debe haber al menos tres vértices $f'_t = g'_t$, $t = 1, 2, 3$; es decir, $x_1y_2 \rightarrow f'_t$, $x_1y_3 \rightarrow f'_t$, son caminos diferentes de longitud $\mu + 1$, lo cual contradice el parámetro ℓ , salvo que $d(x_1, f'_t) = \mu - 1$ y en consecuencia, $xx_1 \rightarrow f'_t$ son caminos cortos de longitud μ . Como ésto sucede para cada $x_j \in \Gamma^+(x)$ podemos contar 3δ vértices en F que necesariamente han de ser diferentes entre ellos, lo cual contradice el hecho de que $|F| \leq 2\delta - 3$. Así pues, si $\mu \leq \ell - 1$ hemos probado que para cada $x \in V_\mu$ existe un $x_1 \in \Gamma^+(x)$ tal que $x_1 \in V_\mu$. Además obsérvese que si $\mu \leq \ell - 1$, $d(x_1, f^-(x_j)) \geq \mu + 1$ para cada $2 \leq j \leq \delta$, lo cual demuestra la segunda parte de (a).

Para probar (b) obsérvese que si $x_1 \in V_\mu \cap \Gamma^+(x)$, tanto este vértice como x satisfacen la propiedad básica, es decir, los caminos cortos $xx_r \rightarrow f^-(x_r)$, $x_1y_r \rightarrow f^-(y_r)$ son ambos de longitud μ o $\mu + 1$. De nuevo deben existir al menos dos vértices en F tales que $f^-(x_r) = f^-(y_r)$, $r = 2, 3$, ya que $|F| \leq 2\delta - 3$. Por tanto, como $\mu \leq \ell - 2$ la única posibilidad es que $|x_1y_r \rightarrow f^-(x_r)| = \mu + 1$, $|xx_r \rightarrow f^-(x_r)| = \mu$, $r = 2, 3$, lo cual confirma (b) e impide que $x \in \Gamma^+(x_1)$. \square

Lema 4.2.2 *Sea G un digrafo maximalmente conectado, con $\ell \geq 2$, grado mínimo $\delta \geq 3$, F un conjunto no trivial desconectador tal que $|F| \leq 2\delta - 3$ y V^- , V^+ los fragmentos que determina. Entonces,*

(a) $\mu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell - 1$, y para cualquier $F' \subset F$, tal que $|F'| \leq \delta - 2$, existe un vértice $z \in V^-$ tal que $d(z, F') \geq \ell - 1$ y $d(z, F \setminus F') \geq \ell$.

(b) $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x) \geq \ell - 1$, y para cualquier $F' \subset F$, tal que $|F'| \leq \delta - 2$, existe un vértice $z \in V^+$ tal que $d(F', z) \geq \ell - 1$ y $d(F \setminus F', z) \geq \ell$.

Demostración: (a) Supongamos $\mu \leq \ell - 2$. El Lema 4.2.1 nos permite considerar dos vértices $x, y \in V_\mu$, $y \in \Gamma^+(x)$, tal que $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} = V_\mu \cap \Gamma^+(y)$,

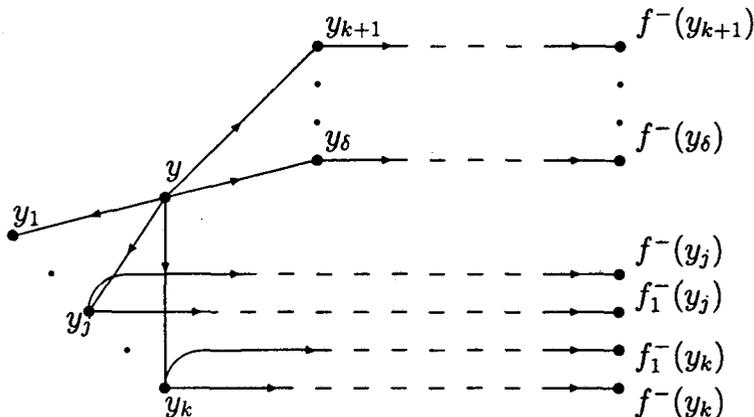


Figura 4.2: Demostración del Lema 4.2.2

con $k \geq 2$. Otra vez el Lema 4.2.1 nos indica que los vértices y_j , $1 \leq j \leq k$, satisfacen también (b) del mismo lema, es decir, que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 2$. Por tanto, para cada $1 \leq j \leq k$, existen $f^-(y_j), f_1^-(y_j) \in F$, tales que $d(y_j, f^-(y_j)) = d(y_j, f_1^-(y_j)) = \mu$. (Ver Figura 4.2). Ahora consideremos $\{y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_\delta\} \subset V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y)$, y los correspondientes vértices $f^-(y_j) \in F$ a mínima distancia. Debido a la propiedad básica todos estos vértices de F son diferentes entre ellos. En efecto, si para ciertos $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq \delta$, $f_1^-(y_j) = f^-(y_i)$, habría dos caminos diferentes desde y hasta $f^-(y_i)$ de longitud μ o $\mu + 1$, a saber, $|yy_j \rightarrow f_1^-(y_j)| = \mu + 1$, $\mu \leq |yy_i \rightarrow f^-(y_i)| \leq \mu + 1$, si $1 \leq i \leq \delta$. Análogamente se prueba que $f_1^-(y_j) \neq f_1^-(y_i)$, $j \neq i$. Por tanto, $2\delta - 3 \geq |F| \geq \delta + k$, es decir, $\delta \geq k + 3 \geq 5$. Luego si $\delta \leq 4$, el lema estaría probado. Además, si $k \geq \delta - 2$, $|F| \geq 2\delta - 2$. Por tanto $|V_\mu \cap \Gamma^+(y)| = k \leq \delta - 3$. Es decir, hemos probado que si $x, y \in V_\mu$, $y \in \Gamma^+(x)$, se cumple que

$$2 \leq |V_\mu \cap \Gamma^+(y)| \leq \delta - 3, \quad |V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y)| \geq 3.$$

Aplicando este resultado a los vértices $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} = V_\mu \cap \Gamma^+(y)$, resulta que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 3$, $1 \leq j \leq k$. Repitiendo el razonamiento anterior, podemos contar en F al menos $\delta + 2k$ vértices diferentes, o sea, $|F| \geq \delta + 2k$, es decir, $k \leq \delta - 4$, porque si $k = \delta - 3$, $|F| \geq 3\delta - 6$, lo que es imposible ya que $2\delta - 3 < 3\delta - 6$ cuando $\delta \geq 5$. Entonces $k = |V_\mu \cap \Gamma^+(y)| \leq \delta - 4$, y de aquí $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y)| \geq 4$. Reiterando este proceso se prueba que cada $y \in V_\mu \cap \Gamma^+(x)$,

con $x \in V_\mu$ verifica,

$$|V_\mu \cap \Gamma^+(y)| = 2, |V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y)| \geq \delta - 2.$$

Aplicando este resultado a los vértices $\{y_1, y_2\} = V_\mu \cap \Gamma^+(x)$, en F podemos contar al menos $3(\delta - 2)$ vértices diferentes, o sea, $|F| \geq 3\delta - 6$, lo cual es una contradicción porque $|F| \leq 2\delta - 3$. Por tanto, si $\mu \leq \ell - 2$ para todo $x \in V_\mu$, se verifica que $\Gamma^+(x) \subset V_{\mu-1}$, lo cual contradice el Lema 4.2.1. Así pues, $\mu \geq \ell - 1$.

Si $\mu \geq \ell$ la segunda afirmación del lema es evidente. Por tanto supongamos que $\mu = \ell - 1$. Por el Lema 4.2.1(a), deben existir $x, x_1 \in V_{\ell-1}$ tales que $x_1 \in \Gamma^+(x)$ y un conjunto $F'' \subset F$, tal que $|F''| \leq \delta - 2$ de manera que $d(x_1, F'') \geq \ell - 1$, y $d(x_1, F - F'') \geq \ell$. Para concluir queda por comprobar que el mismo resultado es válido para cualquier $F' \subset F$ tal que $|F'| = |F''|$. Con este fin, basta comprobar que podemos intercambiar el papel de dos vértices, $f'' \in F''$ y $f \in F - F''$, es decir, afirmamos que si $F' = (F'' - \{f''\}) \cup \{f\}$, existe un vértice $\omega \in V_{\ell-1}$ tal que $d(\omega, F') \geq \ell - 1$, y $d(\omega, F - F') \geq \ell$. En efecto, como $|F'' \cup \{f\}| \leq \delta - 1$ existe al menos un vértice $y \in \Gamma^+(x_1)$ que no está en los posibles caminos cortos de longitud $\leq \ell$ que unen x_1 con estos vértices de F . Entonces, $d(y, F'') \geq \ell$, $d(y, f) \geq \ell$, $d(y, F - (F'' \cup \{f\})) \geq \ell - 1$. Finalmente, cualquier $\omega \in \Gamma^+(y)$ que no esté en los posibles caminos cortos de longitud $\leq \ell$ que unen el vértice y con los vértices de $F - F'$ verifica las condiciones requeridas.

El caso (b) se razona de un modo análogo al (a). \square

Dado un digrafo G super- κ definimos su *superconectividad* $\kappa_1 = \kappa_1(G)$ como el mínimo cardinal de un conjunto no trivial de vértices cuya supresión desconecta G . La *super-arco-conectividad* $\lambda_1 = \lambda_1(G)$ se define análogamente. Por otra parte, como G es un digrafo superconectado cualquier desconector mínimo no trivial ha de tener $\kappa_1 = |F| > \delta$. En consecuencia, si $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$, entonces $\delta \geq 4$. Es decir, en un digrafo G superconectado con grado mínimo $\delta = 3$, siempre se verifica que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes sobre el diámetro para obtener cotas inferiores sobre estas medidas de superconectividad.

Teorema 4.2.3 *Sea G un digrafo con $\delta \geq 3$ y parámetro ℓ . Entonces $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $D \leq 2\ell - 2$.*

Demostración: Como $D \leq 2\ell - 2$ el digrafo G es super-vértice-conectado debido a (4.3). Supongamos que F es un desconector no trivial de G , tal que $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$. Como todos los caminos desde V^- a V^+ deben atravesar F se cumple que $\mu + \mu' \leq D$. Supongamos $\mu \leq \mu'$ (si no consideramos el digrafo inverso de G). Luego $\mu \leq \ell - 1$. Pero en virtud del Lema 4.2.2 debe ser $\mu \geq \ell - 1$. Es decir, $\mu = \mu' = \ell - 1$ y $D = 2\ell - 2$. De nuevo por el Lema 4.2.2 sabemos que dado un conjunto $F' \subset F$, $|F'| \leq \delta - 2$, existe un vértice $x \in V_{\ell-1}^-$ tal que $d(x, F') \geq \ell - 1$, $d(x, F - F') \geq \ell$. Sea ahora $F'' \subset F - F'$ tal que $|F''| \leq \delta - 2$. Por el mismo lema sabemos que existe un vértice $y \in V_{\ell-1}^+$ tal que $d(F'', y) \geq \ell - 1$, $d(F - F'', y) \geq \ell$. Por otra parte, como todos los caminos desde x a y pasan por F se cumple que $d(x, y) = d(x, f) + d(f, y)$, para un cierto $f \in F$. Pero si $f \in F'$, $d(f, y) \geq \ell$ y si $f \in F - F'$, entonces $d(x, f) \geq \ell$, en cualquier caso $d(x, y) \geq 2\ell - 1 > D$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $G - F$ está conectado. \square

Para estudiar el mismo problema respecto a arcos, consideramos un digrafo maximalmente conectado $G = (V, A)$ con grado mínimo $\delta \geq 3$ y un conjunto de arcos E desconector no trivial con $|E| \leq 2\delta - 3$. Consideremos los α -fragmentos que determina, V^- , V^+ , y los subconjuntos de vértices F , W , iniciales y finales de los arcos de E . El siguiente lema es una consecuencia directa del Lema 4.2.2.

Lema 4.2.4 *Sea G un digrafo, con grado mínimo $\delta \geq 3$, parámetro ℓ , $E \subset A$ un conjunto de arcos desconector no trivial tal que $|E| \leq 2\delta - 3$ y V^- , V^+ los α -fragmentos que determina. Se tiene que,*

- (a) *Si F es el conjunto de vértices iniciales de E entonces $\nu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell - 1$, y para cualquier $F' \subset F$, tal que $|F'| \leq \delta - 2$, existe $z \in V^-$ tal que $d(z, F') \geq \ell - 1$ y $d(z, F \setminus F') \geq \ell$.*
- (b) *Si W es el conjunto de vértices finales de E entonces $\nu' = \max_{x \in V^+} d(W, x) \geq \ell - 1$, y para cualquier $W' \subset W$, tal que $|W'| \leq \delta - 2$, existe $z \in V^+$ tal que $d(W', z) \geq \ell - 1$ y $d(W \setminus W', z) \geq \ell$.*

Demostración: Si $\ell = 1$ las afirmaciones contenidas en (a) y (b) son inmediatas. Supongamos $\ell \geq 2$. Para probar (a) se demuestra que los valores $1 \leq \nu \leq \ell - 2$ son imposibles razonando como en el Lema 4.2.2, ya que $|F| \leq |E| \leq 2\delta - 3$. Sólo hay que estudiar el caso $\nu = 0$. En este caso, $F = V^-$. Como E es no trivial, para cada $x \in F$ existe un $y \in \Gamma^+(x) \cap F$, $y \neq x$, ya que G no tiene lazos. Denotemos

por $w^+(x) = \{(x, f') \in E\}$ y por $w^+(H) = \cup_{x \in H} w^+(x)$, siendo H cualquier subconjunto de F . Como para cada $f \in F$ se tiene que $|w^+(f)| \geq 1$ deducimos que $|w^+(x)| + |w^+(\Gamma^+(x) \cap F - \{y\})| \geq \delta - 1$. Además, $\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$, ya que $\ell \geq 2$, lo que significa que,

$$|E| \geq |w^+(x)| + |w^+(\Gamma^+(x) \cap F - \{y\})| + |w^+(y)| + |w^+(\Gamma^+(y) \cap F - \{x\})| \geq 2\delta - 2,$$

lo cual es una contradicción. La segunda parte del lema se razona igual que en el Lema 4.2.2.

El caso (b) es análogo al (a). \square

Como en el caso de vértices siempre que $\delta = 3$ se cumple que $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. En el siguiente teorema se obtienen condiciones suficientes que aseguran que $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ y son una consecuencia directa del lema que acabamos de establecer así como del Teorema 4.2.3.

Teorema 4.2.5 *Sea G un digrafo con $\delta \geq 3$ y parámetro ℓ . Entonces $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si $D \leq 2\ell - 1$.*

Demostración: Como $D \leq 2\ell - 1$ el digrafo G debe ser super-arco conectado debido a (4.4). Sea $E \subset A(G)$ un conjunto de arcos de orden mínimo que desconecta G de manera no trivial, o sea, $\lambda_1 = |E| \leq 2\delta - 3$. Sean $x \in V_\nu$, $y \in V'_\nu$. Los caminos desde x a y deben atravesar E y de aquí que $\nu + \nu' + 1 \leq D$. Por tanto, si $D \leq 2\ell - 1$, $\nu \leq \ell - 1$. Pero por el Lema 4.2.4, $\nu \geq \ell - 1$. Es decir $\nu = \ell - 1$. Razonando como en el Teorema 4.2.3 se ve que $\nu = \ell - 1$ es imposible. Así pues, $G - E$ está conectado. \square

Sin más información sobre la estructura de G , ésto es todo lo que podemos deducir de las condiciones dadas. No obstante, si G contiene un dígono, es decir, si $(x, y), (y, x) \in A$ y $\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$, entonces $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^+(y) \setminus \{x, y\}$ podría ser un ejemplo de conjunto desconector no trivial con $2\delta - 2$ vértices, de donde podríamos afirmar que $\kappa_1, \lambda_1 \leq 2\delta - 2$.

4.3 Superconectividad de digrafos densos

En esta sección se mejora la cota dada en [30] sobre el orden del digrafo para obtener super-vértice-conectividad y además se ve que es la mejor posible. Para

ello usamos el siguiente lema, que es una consecuencia inmediata del Lema 4.2.2.

Lema 4.3.1 *Sea G un digrafo maximalmente conectado con grado mínimo $\delta \geq 3$, $\ell \geq 2$, F un conjunto de vértices desconectador no trivial tal que $|F| = \delta$ y V^- , V^+ los dos fragmentos que determina. Entonces se tiene que,*

$$(a) \mu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell - 1, \text{ y para cualquier } f \in F, \text{ existe un vértice } z \in V^-, d(z, F) = \mu, \text{ tal que } d(z, f) \geq \ell - 1 \text{ y } d(z, F \setminus \{f\}) \geq \ell.$$

$$(b) \mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x) \geq \ell - 1, \text{ y para cualquier } f \in F, \text{ existe un vértice } z \in V^+, d(F, z) = \mu', \text{ tal que } d(f, z) \geq \ell - 1 \text{ y } d(F \setminus \{f\}, z) \geq \ell. \quad \square$$

También utilizaremos las siguientes condiciones suficientes para que un digrafo con parámetros n , $\delta \geq 2$, Δ , ℓ y D sea maximalmente conectado, contenidas en [28]:

$$\begin{aligned} \kappa = \delta \text{ si } n &> (\delta - 1)\{p(\Delta, D - \ell) + p(\Delta, \ell - 1) - 2\} + \Delta^\ell + 1 \\ \lambda = \delta \text{ si } n &> (\delta - 1)\{p(\Delta, D - \ell - 1) + p(\Delta, \ell - 1)\} + \Delta^\ell \end{aligned} \quad (4.10)$$

Los apartados (i) y (ii) de la demostración del siguiente teorema son los mismos que los de la demostración del Teorema 2.1 contenido en [30]. Aquí se repiten por completitud.

Teorema 4.3.2 *Un digrafo G con diámetro D , $\ell \geq 2$ y $\delta \geq 3$ es super- κ si $n > \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1}$.*

Demostración: Podemos suponer que $D - \ell + 1 \geq \ell$, ya que en caso contrario debido a (4.3) G sería super- κ . Además, en virtud de (4.10) el digrafo G es maximalmente conectado. Sea F un conjunto desconectador no trivial, $|F| = \delta$. Sean V^-, V^+, V_i, V'_j como antes. Nótese que $|V_i| \leq \Delta|V_{i-1}|$, $1 \leq i \leq \mu$, $|V'_j| \leq \Delta|V'_{j-1}|$, $1 \leq j \leq \mu'$ y $V_0 = V'_0 = F$. Como cualquier camino desde V^- a V^+ debe atravesar F , la distancia desde un vértice en V_μ a uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu + \mu'$ y de aquí que $\mu + \mu' \leq D$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\mu \leq \mu'$ (Si no, consideramos el digrafo inverso de G). Entonces, por el Lema 4.3.1 es obvio que $\mu \geq \ell - 1$. Distinguiamos básicamente tres casos diferentes:

(i) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$, y por tanto el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$n \leq \sum_{i=0}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\mu} |V'_j| - |F| \leq \delta\{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \mu) - 1\}.$$

La función $\phi(\mu) = p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \mu)$ es decreciente, ya que $\mu \leq D - \mu$. Luego la relación anterior es máxima cuando μ sea mínimo. Así pues tenemos que,

$$\begin{aligned} n &\leq \delta\{p(\Delta, \ell + 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1\} \\ &\leq \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

puesto que $\delta(\Delta^\ell + \Delta^{\ell+1} + 1) \leq \Delta^{D-\ell+1}$, ya que $D - 2\ell + 1 \geq 3$. Una contradicción con las hipótesis.

(ii) $\mu = \ell$. Entonces $\mu' \leq D - \ell$, $D \geq 2\ell$. Ahora dado $x \in V_\ell$, denotemos como $c^+(x)$ el número de caminos de longitud ℓ desde x a los vértices de F . Nótese que por definición de ℓ , para cualquier $f \in F$ hay a lo sumo un tal $x \rightarrow f$ camino. Sea $c^+ = \min\{c^+(x); x \in V_\ell\}$. Es evidente que $c^+ \geq 1$. Además, puesto que el número de caminos de longitud ℓ desde V_ℓ a F es a lo sumo $\delta\Delta^\ell$, y puesto que todos los caminos desde $x \in V_\ell$, $c^+(x) = c^+$, a $V'_{\mu'}$ atraviesan F tenemos que

$$|V_\ell| \leq \frac{\delta\Delta^\ell}{c^+}, \quad |V'_{D-\ell}| \leq c^+\Delta^{D-\ell}.$$

Por tanto, como $1 \leq c^+ \leq \delta$, y, $D - \ell \geq \ell$,

$$|V_\ell| + |V'_{D-\ell}| \leq \Delta^\ell + \delta\Delta^{D-\ell}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-1} |V'_j| - |F| + |V_\ell| + |V'_{D-\ell}| \\ &\leq \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1\} + \Delta^\ell + \delta\Delta^{D-\ell} \\ &= \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 1\} + \Delta^\ell \\ &\leq \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

puesto que $D - \ell \geq \ell$, y de nuevo se contradicen las hipótesis.

(iii) $\mu = \ell - 1$. Entonces $\mu' \leq D - \ell + 1$, $D \geq 2\ell - 2$. Ahora por el Lema 4.3.1 sabemos que para cada $f \in F$ existe un vértice $x \in V_{\ell-1}$ tal que $d(x, f) \geq \ell - 1$, y $d(x, F - \{f\}) \geq \ell$. De aquí que $|V'_{D-\ell+1}| \leq \Delta^{D-\ell+1}$.

Además, la cota superior del cardinal de $V_{\ell-1} \cup V'_{D-\ell+1}$ se puede reducir en δ unidades al menos. Sea $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\delta\}$. Vamos a probar que por cada $f_t \in F$ con $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$, la cota superior del cardinal de $V_{\ell-1} \cup V'_{D-\ell+1}$ se puede reducir en uno por lo menos. En efecto, para todo $f \in F$, $f \neq f_t$, $d(f, f_t) =$

$d(f, z) + 1 \leq D$, para algún $z \in \Gamma^-(f_t)$. Entonces, $d(f, z) \leq D - 1$, lo que significa que hay un arco (α_t, β_t) en el camino corto $f \rightarrow z f_t$, con su vértice inicial α_t en algún V'_j , $0 \leq j \leq D - \ell + 1$, y su vértice terminal, β_t , en algún V_i , $1 \leq i \leq \ell - 1$. Luego si $\ell = 2$, $\beta_t = z$ y $\alpha_t \in V'_j$, con $j \leq D - \ell$, lo que implica que $|V'_{D-\ell+1}| \leq \Delta^{D-\ell+1} - 1$, y si $\ell \geq 3$ debe ser, o bien, $0 \leq j \leq D - \ell$, o bien, $1 \leq i \leq \ell - 2$; de lo contrario, si $\alpha_t \in V'_{D-\ell+1}$ y $\beta_t \in V_{\ell-1}$ tendríamos, $d(f, z) = d(f, \alpha_t) + 1 + d(\beta_t, z) \geq D$, lo cual es una contradicción. Es decir tenemos los siguientes casos:

- Si $\beta_t \in V_i$, $1 \leq i \leq \ell - 2$, entonces $|V_{i+1}| \leq \delta \Delta^{i+1} - 1$.
- Si $\beta_t \in V_{\ell-1}$, entonces $\alpha_t \in V'_j$, con $0 \leq j \leq D - \ell$ y, como antes, $|V'_{D-\ell+1}| \leq \Delta^{D-\ell+1} - 1$.

Supongamos ahora que para todo $f_t \in F$, $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$ y que existen $f_t, f_m \in F$ de modo que los caminos cortos $f \rightarrow f_t, f \rightarrow f_m$, ($f \neq f_t, f_m$) contienen los arcos $(\alpha_t, \beta_t), (\alpha_m, \beta_t)$. Si $\beta_t \in V_i$, $1 \leq i \leq \ell - 2$, significa que $|V_i| \leq \delta \Delta^{i+1} - 2$, por lo que $|V_{\ell-1}| \leq \delta \Delta^{\ell-1} - 2$. Si $\beta_t \in V_{\ell-1}$, entonces se tendría que $\alpha_t, \alpha_m \in V'_j$ con $0 \leq j \leq D - \ell$ y por tanto $|V'_{D-\ell+1}| \leq \Delta^{D-\ell+1} - 2$. En consecuencia, podemos concluir que $|V_{\ell-1}| + |V'_{D-\ell+1}| \leq \delta \Delta^{\ell-1} + \Delta^{D-\ell+1} - \delta$, si para todo $f_t \in F$, $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$. De otro modo, si para algún $f_t \in F$, existe un vértice $z \in \Gamma^-(f_t)$ tal que $z \notin V_1$, entonces $|V_1| \leq \delta \Delta - 1$, y de aquí que la anterior afirmación sea también verdad. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell} |V'_j| - |F| + |V'_{D-\ell+1}| \\ &\leq \delta \{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 1\} + \Delta^{D-\ell+1} - \delta \\ &= \delta \{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + \Delta^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

lo que contradice de nuevo las hipótesis. \square

Cuando se toma $\ell = 2$ y suponiendo que el digrafo G es d -regular obtenemos el siguiente corolario, que mejora el resultado (4.9) dado en [27, 30].

Corolario 4.3.3 *Sea G un digrafo d -regular, $d \geq 3$, de orden n , con diámetro $D \geq 3$ y $\ell \geq 2$. Entonces,*

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } n > \begin{cases} 3d^2 & D = 3, \\ 2d^{D-1} + d^{D-2} + \dots + d^3 + 2d^2, & D \geq 4. \end{cases} \quad \square$$

Los digrafos línea de los digrafos de Soneoka, LG_1, LG_2 que mencionamos en la introducción demuestran que este es el mejor resultado posible, ya que tienen diámetro $D = 3$ y 4 , parámetro $\ell = 2$ y órdenes $3d^2$ y $2d^3 + 2d^2$, respectivamente, son maximalmente vértice-conectados, pero no son super- κ . Otros corolarios y consecuencias de este resultado se pueden ver en [27, 30].

4.4 Digrafos con superconectividad óptima

Sea $G = (V, A)$ un digrafo superconectado de grado mínimo δ . Diremos que un digrafo G tiene *superconectividad óptima* cuando $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$. Asimismo diremos que tiene *arco-superconectividad óptima* cuando $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. En secciones anteriores ya hemos visto que cuando $\delta = 3$ un digrafo superconectado tiene superconectividad y arco-superconectividad óptima, respectivamente. Nuestro objetivo en esta sección es encontrar condiciones suficientes sobre el orden del digrafo que aseguren si tiene superconectividad o arco-superconectividad óptima cuando $\delta \geq 4$. Básicamente usaremos la misma técnica que en el Teorema 4.3.2.

Teorema 4.4.1 *Sea G un digrafo con diámetro D , $\ell \geq 2$, $\delta \geq 3$. Entonces $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si*

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}.$$

Demostración: Debido al Teorema 4.3.2 las hipótesis indican que el digrafo G es super- κ . Por tanto si $\delta = 3$ se cumple que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$. Asumiremos que $\delta \geq 4$, usaremos la misma notación que en el Teorema 4.3.2 y supondremos que $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$. Entonces, por el Lema 4.2.2 es obvio que $\mu \geq \ell - 1$. Además podemos suponer que $D - \ell + 1 \geq \ell$, ya que si no, debido al Teorema 4.2.3 tendríamos que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$. Al igual que en el teorema anterior distinguimos básicamente tres casos diferentes:

(i) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$, y por tanto el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$n \leq \sum_{i=0}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\mu} |V'_j| - |F| \leq \kappa_1 \{p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \mu) - 1\}.$$

La función $\phi(\mu) = p(\Delta, \mu) + p(\Delta, D - \mu)$ es decreciente en el intervalo $[\mu, D - \mu]$, luego la relación anterior es máxima cuando μ sea mínimo. Es decir,

$$n \leq \kappa_1 \{p(\Delta, \ell + 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1\}$$

$$\leq (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1},$$

puesto que $\kappa_1(\Delta^\ell + \Delta^{\ell+1} + 1) \leq (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}$, ya que $D - 2\ell + 1 \geq 3$ y $\delta \geq 4$. Una contradicción con las hipótesis.

(ii) $\mu = \ell$. Entonces $\mu' \leq D - \ell$, $D \geq 2\ell$. Ahora dado $x \in V_\ell$, denotemos como $c^+(x)$ el número de caminos de longitud ℓ desde x a los vértices de F . Nótese que por definición de ℓ , para cualquier $f \in F$ hay a lo sumo un tal $x \rightarrow f$ camino. Sea $c^+ = \min\{c^+(x); x \in V_\ell\}$. Es evidente que $c^+ \geq 1$. Además puesto que el número de caminos de longitud ℓ desde V_ℓ a F es a lo sumo $\kappa_1\Delta^\ell$, y puesto que todos los caminos desde $x \in V_\ell$, $c^+(x) = c^+$, a $V'_{\mu'}$ atraviesan F tenemos que

$$|V_\ell| \leq \frac{\kappa_1\Delta^\ell}{c^+}, \quad |V'_{D-\ell}| \leq c^+\Delta^{D-\ell}.$$

Por tanto, como $1 \leq c^+ \leq \kappa_1$, y, $D - \ell \geq \ell$, tenemos que

$$\begin{aligned} |V_\ell| + |V'_{D-\ell}| &\leq \frac{\kappa_1 - c^+}{c^+}\Delta^\ell + \Delta^\ell + c^+\Delta^{D-\ell} \\ &\leq (\kappa_1 - c^+)\Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell + c^+\Delta^{D-\ell} \leq \kappa_1\Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-1} |V'_j| - |F| + |V_\ell| + |V'_{D-\ell}| \\ &\leq \kappa_1\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1\} + \Delta^\ell + \kappa_1\Delta^{D-\ell} \\ &= \kappa_1\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 1\} + \Delta^\ell \\ &\leq (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

puesto que $\kappa_1 + \Delta^\ell \leq (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}$, ya que $D - \ell + 1 \geq \ell + 1$ y $\delta \geq 4$ y de nuevo se contradicen las hipótesis.

(iii) $\mu = \ell - 1$. Entonces $\mu' \leq D - \ell + 1$, $D \geq 2\ell - 1$. Ahora por el Lema 4.2.2 sabemos que para cada $F' \subset F$ tal que $|F'| \leq \delta - 2$ existe un vértice $x \in V_{\ell-1}$ tal que $d(x, F') \geq \ell - 1$, y, $d(x, F - F') \geq \ell$. De aquí que

$$|V'_{D-\ell+1}| \leq (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}.$$

Además, la cota superior del cardinal de $V_{\ell-1} \cup V'_{D-\ell+1}$ se puede reducir en al menos κ_1 unidades. Igual que en el Teorema 4.3.2 se prueba que por cada $f_t \in F$, $1 \leq t \leq \kappa_1$, con $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$, la cota superior para el cardinal de $V_{\ell-1} \cup V'_{D-\ell+1}$ se puede reducir en uno por lo menos, lo cual implica que si para todo $f_t \in F$, $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$, entonces $|V_{\ell-1}| + |V'_{D-\ell+1}| \leq \kappa_1\Delta^{\ell-1} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1} - \kappa_1$. De otro

modo, si para algún $f_t \in F$, existe un vértice $z \in \Gamma^-(f_t)$ tal que $z \notin V_1$, entonces $|V_1| \leq \kappa_1 \Delta - 1$, y de aquí que la anterior afirmación sea también cierta. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{\ell-2} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell} |V'_j| - |F| + |V_{\ell-1}| + |V'_{D-\ell+1}| \\ &\leq \kappa_1 \{p(\Delta, \ell - 2) + p(\Delta, D - \ell) - 1\} + \kappa_1 \Delta^{\ell-1} + (\delta - 2) \Delta^{D-\ell+1} - \kappa_1 \\ &\leq (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2) \Delta^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

lo que contradice de nuevo las hipótesis. \square

Corolario 4.4.2 *Sea G un digrafo con número de arcos m , parámetro ℓ , diámetro D , y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \geq 3$ respectivamente. Entonces $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si*

$$m > (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2) \Delta^{D-\ell+1}.$$

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existiría un digrafo G con m arcos, parámetros $\delta \geq 3$, Δ , ℓ y D , el cual tendría un conjunto desconectador $E \subset A$ no trivial cuyo orden sería $\lambda_1 = |E| \leq 2\delta - 3$ tal que

$$m > (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2) \Delta^{D-\ell+1}.$$

Entonces, su digrafo línea LG sería un digrafo con un desconectador $F \subset V(LG)$ no trivial de orden $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$ y con $n' = m$ vértices, grado mínimo δ , grado máximo Δ , diámetro $D' = D + 1$ y parámetro $\ell' = \ell + 1 \geq 2$ satisfaciendo

$$n' > (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell' - 1) + p(\Delta, D' - \ell') - 2\} + (\delta - 2) \Delta^{D'-\ell'+1},$$

lo cual contradice el teorema anterior. \square

Además, cuando el digrafo G es d -regular, tiene $\Delta = \delta = d$ y $m = dn$ arcos. Luego, sustituyendo estos valores en el Teorema 4.4.1 y en el corolario anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.3 *Sea G un digrafo d -regular, $d \geq 3$, de n vértices, con parámetro ℓ y diámetro D . Entonces,*

$$\begin{aligned} &(a) \ \kappa_1 \geq 2d - 2 \text{ si} \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \ell \geq 3 & \text{y } n > (2d - 3) \{p(d, \ell - 1) + p(d, D - \ell) - 2\} + (d - 2) d^{D-\ell+1}; \\ \ell = 2 & \text{y } n > (d - \frac{1}{d-1}) d^{D-1} + d(d - 2) \{1 + \frac{d-2}{d-1}\}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

(b) $\lambda_1 \geq 2d - 2$ si $\ell \geq 1$ y

$$n > (2d - 3)\{p(d, \ell - 1) + p(d, D - \ell - 1) - 2\} + (d - 2)d^{D-\ell}. \quad \square$$

Sea G un digrafo d -regular ($d \geq 3$) de orden n , diámetro D , y $\ell(G) = \ell$. Entonces, como se estableció en el Capítulo 1 el digrafo línea k -iterado $L^k G$ tiene orden $d^k n$, diámetro $D + k$ y $\ell(L^k G) = \ell + k$. Por tanto sustituyendo estos valores en el Teorema 4.4.1 obtenemos las siguientes condiciones suficientes para que un desconectador no trivial F de $L^k G$ tenga orden $|F| \geq 2d - 2$.

$$d^k n > (2d - 3)\{p(d, \ell - 1 + k) + p(d, D - \ell) - 2\} + (d - 2)d^{D-\ell+1}.$$

Despejando k y teniendo en cuenta que este valor debe ser un entero, podemos mostrar explícitamente cual es el mínimo orden de iteración k para que en $L^k G$ los anteriores resultados sean válidos.

Corolario 4.4.4 *Sea G un digrafo con diámetro D , orden n , $\ell \geq 2$, $d \geq 3$. Entonces $\kappa_1(L^k G) \geq 2d - 2$ si*

$$k > \log_d \frac{d^{D-\ell+1}(d^2 - d - 1) - 2d(2d - 3)}{n(d - 1) - d^\ell(2d - 3)}. \quad \square$$

A partir de este corolario obtenemos el siguiente resultado que debe ser comparado con el Teorema 4.2.3.

$$\kappa_1(L^k G) \geq 2d - 2 \text{ si } k \geq D - \ell + 2 - \log_d \frac{n - 2d^\ell}{d}$$

A través de un razonamiento directo, similar al que se usa en la demostración del Teorema 4.4.1, podemos obtener una cota superior sobre el número de vértices que indique cuando un digrafo G con $\delta \geq 3$, tiene arco-superconectividad óptima.

Teorema 4.4.5 *Sea G un digrafo con diámetro D , orden n , parámetro ℓ , $\delta \geq 3$. Entonces $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si*

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell}.$$

Demostración: Supongamos que las hipótesis son válidas y por tanto en virtud de (4.8) $G = (V, A)$ es super- λ . Luego si $\delta = 3$ ya sabemos que se cumple $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. Supongamos $\delta \geq 4$ y sea E un conjunto arco-desconectador mínimo no trivial, es decir, $\lambda_1 = |E| \leq 2\delta - 3$ y consideremos los subconjuntos de vértices $V^-, V^+, F, W, V_i, V'_j$ como en el Teorema 4.2.5. Ahora $\nu + \nu' + 1 \leq D$ y

se puede suponer $\nu \leq \nu'$. Aplicando el Lema 4.2.4 tenemos que $\nu \geq \ell - 1$ y $\nu \leq \nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell$. Además debido al Teorema 4.2.5 podemos suponer $D - \ell \geq \ell$. Por tanto, basta distinguir dos casos.

(i) $\nu \geq \ell$. Entonces $\nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 1$ y el orden n de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\nu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\nu'} |V_j| \leq \lambda_1 \{p(\Delta, \nu) + p(\Delta, D - \nu - 1)\} \\ &\leq \lambda_1 \{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} \\ &\leq (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell}, \end{aligned}$$

ya que $\lambda_1 \Delta^\ell \leq (\delta - 2)\Delta^{\ell+1} \leq (\delta - 2)\Delta^{D-\ell}$, al ser $D - \ell \geq \ell + 1$ y $\Delta \geq 4$. Una contradicción.

(ii) $\nu = \ell - 1$. Entonces $\nu' \leq D - \ell$, $D \geq 2\ell - 1$. Ahora por el Lema 4.2.4 sabemos que para cada $F' \subset F$ tal que $|F'| \leq \delta - 2$ existe un vértice $x \in V_{\ell-1}$ tal que $d(x, F') \geq \ell - 1$, y $d(x, F - F') \geq \ell$. De aquí que $|V'_{D-\ell}| \leq (\delta - 2)\Delta^{D-\ell}$, y el orden debe satisfacer,

$$n \leq \sum_{i=0}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell} |V_j| \leq (2\delta - 3) \{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell},$$

de nuevo una contradicción con las hipótesis. \square

Es interesante observar que el Teorema 4.4.5 implica también el resultado del Corolario 4.4.2 para $\ell \geq 2$. En cierto sentido el Corolario 4.4.2 muestra la relación entre los Teoremas 4.4.1 y 4.4.5.

Sea G un digrafo d -regular ($d \geq 3$) de orden n , diámetro D , y $\ell(G) = \ell$. Aplicando el Teorema 4.4.5 al digrafo línea k iterado $L^k G$ obtenemos que $L^k G$ tiene arco-superconectividad óptima si

$$d^k n > (2d - 3) \{p(d, \ell - 1 + k) + p(d, D - \ell - 1)\} + (d - 2)d^{D-\ell}.$$

Despejando k y teniendo en cuenta que este valor debe ser un entero, obtenemos un corolario similar al Corolario 4.4.4.

Corolario 4.4.6 *Sea G un digrafo con diámetro D , orden n , parámetro ℓ y $d \geq 3$. Entonces*

$$\lambda_1(L^k G) \geq 2d - 2 \text{ si } k > \log_d \frac{d^{D-\ell}(d^2 - d - 1) - 2(2d - 3)}{n(d - 1) - d^\ell(2d - 3)} \quad \square$$

Este corolario implica el siguiente resultado que debe ser comparado con el Teorema 4.2.5.

$$\lambda_1(L^k G) \geq 2d - 2 \text{ si } k \geq D - \ell + 1 - \log_d \frac{n - 2d^\ell}{d}$$

4.5 Grafos superconectados

En esta sección consideramos un grafo $G = (V, A)$ de orden n con grado máximo Δ , grado mínimo $\delta \geq 3$, diámetro D y girth g . Recuérdese que la cota de Moore en este caso está dada por $|V| \leq (\Delta(\Delta - 1)^D - 2)/(\Delta - 2)$. Como ya fue mencionado en la Sección 3.3 del Capítulo 3, en [55] se probó que

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\} + \Delta - 1. \quad (4.11)$$

Soneoka dio en [53] las siguientes condiciones suficientes para que un grafo G sea super- λ .

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \delta\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\} + (\Delta - 1)^{D-1}. \quad (4.12)$$

Además también probó en [53] que estas cotas son las mejores posibles para $D = 2, 3, 4$ y 6 . Asimismo, mostró que estas condiciones suficientes permiten probar que la mayor parte de los grafos densos conocidos son super- λ , como se muestra en la Tabla (4.1). En lo referente al girth, en [23] se probó por primera vez los siguientes resultados:

$$G \text{ es super-}\kappa \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 3, & g \text{ impar} \\ D \leq g - 4, & g \text{ par.} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } \begin{cases} D \leq g - 2, & g \text{ impar} \\ D \leq g - 3, & g \text{ par.} \end{cases} \quad (4.14)$$

También podemos encontrar condiciones suficientes sobre el diámetro y el girth para que un grafo G sea superconectado en [32, 53].

Condiciones de tipo mixto para obtener grafos superconectados, en función de ambos parámetros el orden y el girth (o parámetro ℓ), fueron en primer lugar dadas en [27] y después en [30], donde se recogen los siguientes resultados que generalizan los de (4.12). Sea G un grafo de orden n , grado máximo Δ , grado mínimo $\delta \geq 3$, diámetro D y girth g ($\ell = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$). Entonces,

| Δ | D | | | | | | |
|----------|-------------------|---------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|---------------------|-----------------------|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | *** 10 (10) | *** 20 (22) | *** 38 (46) | *** 70 (94) | *** 130 (190) | * 184 (382) | * 320 (766) |
| 4 | *** 15 (17) | *** 41 (53) | *** 95 (161) | *** 364 (485) | ** 740 (1457) | * 1155 (4373) | 3025 (13121) |
| 5 | *** 24 (26) | ** 70 (106) | * 186 (426) | * 532 (1706) | ** 2754 (6826) | 5334 (27306) | 15532 (109226) |
| 6 | *** 32 (37) | ** 105 (187) | ** 360 (937) | * 1260 (4687) | ** 7860 (23437) | 18775 (117187) | 69540 (58937) |
| 7 | *** 50 (50) | ** 144 (302) | ** 630 (1814) | * 2756 (10886) | * 10566 (65318) | 47304 (391910) | 214500 (2351462) |
| 8 | *** 57 (65) | ** 253 (457) | ** 1081 (3201) | * 4704 (22409) | ** 39396 (156865) | 111691 (1098057) | 654696 (7686401) |
| 9 | *** 74 (82) | *** 585 (658) | ** 1430 (5266) | * 7334 (42130) | ** 75198 (337042) | 264024 (2696338) | 1354896 (21570706) |

Tabla 4.1: Grafos densos conocidos. Un * simboliza los grafos rama-conectados; ** simboliza los grafos que son super- λ , y *** los que son super- κ . Los números entre paréntesis indican la cota de Moore

(a) un grafo G es super- κ si $D \geq 3$, $\ell \geq 2$ ($g \geq 5$) y

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell)\} + (\Delta - 1)^{D-\ell+1}; \quad (4.15)$$

o bien el grafo G es d -regular, $D \geq 2$ ($\ell \geq 1$) y

$$n > (d - 1)^D + 2p(d - 1, D - 2) + 2. \quad (4.16)$$

(b) Un grafo G es super- λ si $D \geq 2$ y

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + (\Delta - 1)^{D-\ell}; \quad (4.17)$$

En la Tabla (4.1) reflejamos para cada valor del grado y del diámetro el orden de los grafos densos Δ -regulares conocidos. Ver [11, 53]. Los grafos densos correspondientes al triple asterisco son super- κ de acuerdo a (4.16); los correspondientes al doble asterisco son super- λ según (4.12), mientras que el asterisco representa los que son maximalmente rama-conectados de acuerdo a (4.11). Los números entre paréntesis representan la cota de Moore.

Recuérdese que si G tiene girth g , entonces G es ℓ -geodético para $\ell = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. Recíprocamente, si G es ℓ -geodético, entonces su girth g es o bien $2\ell + 1$ o $2\ell + 2$. Teniendo presente este hecho todos los resultados obtenidos para digrafos en la Sección 4.2 son aplicables a grafos superconectados. De hecho cuando el girth es par, éstos se pueden mejorar, como se expone en el siguiente lema.

Lema 4.5.1 *Sea G un grafo maximalmente conectado, con grado mínimo $\delta \geq 3$ y girth $g = 2\ell + 2$.*

- (a) *Si F es un conjunto de vértices desconectador no trivial tal que $|F| \leq 2\delta - 3$, y V^- , V^+ son los dos fragmentos que determina, se tiene que $\mu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell$, y, $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x) \geq \ell$.*
- (b) *Si E es un conjunto de ramas desconectador no trivial tal que $|E| \leq 2\delta - 3$, y V^- , V^+ son los dos α -fragmentos que determina, se tiene que $\nu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell$, y, $\nu' = \max_{x \in V^+} d(W, x) \geq \ell$, donde $F \subset V^-$, $W \subset V^+$, son los vértices terminales de las ramas de E .*

Demostración: (a) Si $\mu \leq \ell - 1$ se razona del mismo modo que en digrafos que para cada vértice $x \in V_\mu$ existe un adyacente $y \in V_\mu$. Sean $x_1, x_2, \dots, x_{\delta-1}$, vértices adyacentes de x diferentes del vértice y ; consideramos a su vez $\delta - 1$ vértices adyacentes de y , $y_1, y_2, \dots, y_{\delta-1}$, diferentes de x (Nótese que como el girth es par se verifica que $x_i \neq y_j$). Dado que $|F| \leq 2\delta - 3$, debe existir al menos un vértice en F a mínima distancia de x_i e y_i , $f^-(x_i) = f^-(y_i)$, es decir, se cierra el siguiente ciclo:

$$f^-(x_i) \leftrightarrow x_i x y y_i \leftrightarrow f^-(x_i),$$

cuya longitud es a lo sumo $2(\mu + 1) + 1 \leq 2\ell + 1 < g$, lo cual es imposible. Luego $\mu \geq \ell$. Para probar el caso (b) basta examinar el caso $\nu = 0$, o sea, $F = V^-$. Sea $x \in F$, como E es no trivial podemos considerar un vértice y adyacente de x tal que $y \in F$. Además, cada vértice de F pertenece a una rama de E y como el girth

es par $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$. En consecuencia podemos concluir $2\delta - 3 \geq |E| \geq 2\delta - 2$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 4.5.2 *Sea G un grafo, con $\delta \geq 3$, girth g y diámetro D .*

(a) *Si $D \leq g - 3$ entonces el grafo es super- κ y $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$.*

(b) *Si $D \leq g - 2$ entonces el grafo es super- λ y $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$.*

Demostración: (a) Si $g = 2\ell + 1$ el resultado es inmediato debido a (4.3) y al Teorema 4.2.3. Por tanto supongamos que $g = 2\ell + 2$. Como $D \leq 2\ell - 1$ el grafo es maximalmente conectado. Si no fuese super- κ podríamos considerar un desconectador F no trivial con $|F| = \delta$ vértices. En virtud del Lema 4.5.1(a) se tendría que $D \geq \mu + \mu' \geq 2\ell$, lo cual es una contradicción. Por tanto es super- κ . Si existiese un desconectador F no trivial con $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$ aplicando de nuevo el Lema 4.5.1(a) obtendríamos otra vez una contradicción.

El caso (b) se prueba de un modo similar aplicando el Lema 4.5.1(b) y teniendo presente ahora que $D \geq \nu + 1 + \nu'$. \square

Ya sabíamos que todos los grafos de diámetro dos son maximalmente conectados. El corolario que acabamos de probar añade que si son de girth par son además super- λ .

Nos proponemos dar condiciones suficientes sobre el orden en los que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$, $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. De nuevo obsérvese que como G es superconectado $\kappa_1 > \delta$, $\lambda_1 > \delta$, de donde se deduce que un grafo superconectado con $\delta = 3$ está automáticamente superconectado de manera óptima.

Teorema 4.5.3 *Sea G un grafo con diámetro D , $g = 2\ell + 1 \geq 5$, $\delta \geq 3$.*

(a) $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell)\} + (\delta - 2)(\Delta - 1)^{D-\ell+1},$$

(b) $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + (\delta - 2)(\Delta - 1)^{D-\ell}.$$

Demostración: En virtud de (4.15) el grafo G es super- κ de donde $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $\delta = 3$. Asumamos $\delta \geq 4$. Sean F, V^-, V^+, V_i, V'_j como antes y supongamos que $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$. Obsérvese que ahora $|V_i| \leq (\Delta - 1)|V_{i-1}|, 2 \leq i \leq \mu, |V'_i| \leq (\Delta - 1)|V'_{i-1}|, 2 \leq i \leq \mu'$, y que $|V_1| + |V'_1| \leq \kappa_1\Delta$. Como en teoremas anteriores $\mu + \mu' \leq D$, y $\mu \leq \mu'$. Entonces, por el Lema 4.2.2 es obvio que $\mu \geq \ell - 1$. Además podemos suponer que $D - \ell + 1 \geq \ell$, ya que si no, debido al Teorema 4.2.3 tendríamos que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$. Distinguimos los siguientes casos:

(i) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1, D \geq 2\ell + 2$, y por tanto el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=1}^{\mu'} |V'_j| + |F| \\ &\leq |V_1| \sum_{i=1}^{\mu} (\Delta - 1)^{i-1} + |V'_1| \sum_{i=1}^{\mu'} (\Delta - 1)^{i-1} + \kappa_1 \\ &\leq (|V_1| + |V'_1|) \sum_{i=1}^{\mu'} (\Delta - 1)^{i-1} + \kappa_1 \leq \kappa_1 \Delta p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \kappa_1 \\ &\leq (2\delta - 3) \{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell)\}, \end{aligned}$$

puesto que $\Delta \leq (\Delta - 1)^2$, ya que $\Delta \geq 4$. Una contradicción con las hipótesis.

(ii) $\mu = \ell$. Entonces $\mu' \leq D - \ell, D \geq 2\ell$.

$$\begin{aligned} n &\leq |V_1| \sum_{i=1}^{\ell} (\Delta - 1)^{i-1} + |V'_1| \sum_{i=1}^{\mu'} (\Delta - 1)^{i-1} + \kappa_1 \\ &\leq |V_1| p(\Delta - 1, \ell - 1) + (\kappa_1 \Delta - |V_1|) p(\Delta - 1, D - \ell - 1) + \kappa_1. \end{aligned}$$

El coeficiente de $|V_1|$ es negativo ya que $\ell - 1 \leq D - \ell - 1$. Por tanto, esta relación es máxima cuando $|V_1|$ sea mínimo, es decir, $|V_1| = \kappa_1$ y sustituyendo este valor tenemos que

$$\begin{aligned} n &\leq \kappa_1 \{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell)\} \\ &\leq (2\delta - 3) \{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell)\} + (\delta - 2)(\Delta - 1)^{D-\ell+1}, \end{aligned}$$

puesto que $D - \ell \geq \ell$, y $\delta \geq 4$, contradiciendo de nuevo las hipótesis.

(iii) $\mu = \ell - 1$. Entonces $\mu' \leq D - \ell + 1, D \geq 2\ell - 1$. Ahora por el Lema 4.2.2 sabemos que para cada $F' \subset F$ tal que $|F'| \leq \delta - 2$ existe un vértice $x \in V_{\ell-1}$ tal que $d(x, F') \geq \ell - 1$, y $d(x, F - F') \geq \ell$. De aquí que $|V'_{D-\ell+1}| \leq (\delta - 2)(\Delta - 1)^{D-\ell+1}$. Luego tenemos que

$$n = \sum_{i=1}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{j=1}^{\mu'} |V'_j| + |F| + |V'_{D-\ell+1}|$$

$$\leq |V_1|p(\Delta-1, \ell-2) + (\kappa_1\Delta - |V_1|)p(\Delta-1, D-\ell-1) + \kappa_1 + (\delta-2)(\Delta-1)^{D-\ell+1}.$$

El coeficiente de $|V_1|$ es negativo ya que $\ell-2 \leq D-\ell-1$. Por tanto, esta relación es máxima cuando $|V_1|$ sea mínimo, es decir, $|V_1| = \kappa_1$ y sustituyendo este valor tenemos que

$$n \leq (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell)\} + (\delta - 2)(\Delta - 1)^{D-\ell+1},$$

lo que contradice de nuevo las hipótesis. La demostración de (b) es muy semejante a la demostración del Teorema 4.4.5. De hecho (b) es el mismo resultado de este teorema sustituyendo Δ por $\Delta - 1$. \square

Si el girth del grafo es par se pueden mejorar las cotas dadas por (4.12), (4.15), (4.16) y por (4.17), para valores del diámetro $D \geq 2\ell + 2$ como se refleja en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.4 *Sea G un grafo con diámetro D , $g = 2\ell + 2 \geq 4$, $\delta \geq 3$.*

- (a) G es super- κ si $n > \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell)\}$;
- (b) G es super- λ si $n > \delta\{p(\Delta - 1, \ell) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}$.
- (c) $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell)\}$,
- (d) $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si $n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \ell) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\}$.

La demostración es una consecuencia directa del Lema 4.5.1, y sigue las mismas líneas de razonamiento que el Teorema 4.5.3.