UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de Doctorado de Matematica Aplicada

ESTUDIO SOBRE ALGUNAS NUEVAS CLASES DE CONECTIVIDAD CONDICIONAL EN GRAFOS DIRIGIDOS

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 5

Superconectividad de digrafos bipartitos

5.1 Introducción

La superconectividad de digrafos bipartitos ha sido muy poco estudiada hasta el momento. Cabe señalar el trabajo desarrollado en los artículos [26, 29]. En este último encontramos condiciones suficientes para que un digrafo, así como un digrafo bipartito, sea super-arco-conectado. En concreto, dado G, un digrafo bipartito con orden n, grado mínimo $\delta = \{\delta^+, \delta^-\} > 2$, y diámetro D, entonces, G es super-λ si alguna de las siguientes condiciones es cierta.

(a) $D = 3$, y G es diferente de $\vec{K}_{s,\delta} \uplus \vec{K}_{\delta,t}$;

(b) G es diferente de $2K^*_{\delta-1,\delta}$, y, para todo par de vértices u, v tales que $d(u,v) \geq 3$, se verfica que $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq \lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1$;

(c) para todo par de vértices del digrafo u, v tales que $d(u,v) \geq 3$, se verifica que $\delta^+(u) + \delta^-(v) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

La familia de digrafos bipartitos a la que hacen referencia estas condiciones es la siguiente:

Por $\vec{K}_{n,m}$ se denota el digrafo bipartito completo unidireccional con conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$, y conjunto de arcos $E = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$. Sean $s, t \geq \delta - 1$, $\delta \geq 2$, $\vec{K}_{s,\delta} = (U_1 \cup U_2, E)$, y $\vec{K}_{\delta,t} = (V_1 \cup V_2, F)$. Un digrafo bipartito $\vec{K}_{s,\delta} \uplus \vec{K}_{\delta,t}$, con conjunto de partes de vértices $U_1 \cup V_1$ y

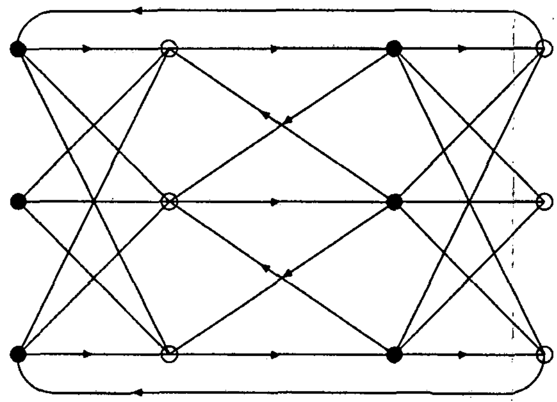

Figura 5.1: Un digrafo $\vec{K}_{3,3} \uplus \vec{K}_{3,3}$

$U_2 \cup V_2$, se obtiene añadiendo algunos arcos a los digrafos $\vec{K}_{s,\delta}$, $\vec{K}_{\delta,t}$ para unirlos de tal modo que

(i) el grado mínimo del digrafo resultante es δ;

(ii) $\delta^+(u) = \delta^-(v) = \delta$ para cualquier $u \in U_1$ y $v \in V_2$;

(iii) los únicos arcos que hay desde $U_1 \cup U_2$ a $V_1 \cup V_2$ son los de un emparejamiento completo (de δ arcos) desde U_2 a V_1.

Nótese que el digrafo inverso de $\vec{K}_{s,\delta} \uplus \vec{K}_{\delta,t}$ es un digrafo $\vec{K}_{t,\delta} \uplus \vec{K}_{\delta,s}$. A modo de ejemplo la Figura 5.1 muestra un digrafo $\vec{K}_{3,3} \uplus \vec{K}_{3,3}$.

Cuando $s = t = \delta - 1$, se puede obtener un digrafo $\vec{K}_{\delta-1,\delta} \uplus \vec{K}_{\delta,\delta-1}$ simplemente uniendo dos copias de un digrafo bipartito completo simétrico $K^*_{\delta-1,\delta}$, según las reglas anteriores (nótese que en este caso, sólo hemos de tener cuidado con (iii)). Entonces en $2K^*_{\delta-1,\delta}$ cada vértice u de una copia tiene grado de salida $\delta^+(u) = \delta$, y cada vértice v de la otra copia tiene grado de entrada $\delta^-(v) = \delta$. La Figura 5.2 muestra un digrafo $2K^*_{2,3}$.

El mismo resultado se satisface para el caso de grafos bipartitos. Se deduce de estos teoremas que si G es un digrafo o grafo bipartito con orden n y grado mínimo $\delta \geq \lfloor (n+2)/4 \rfloor + 1$, entonces G es super-λ. En este contexto, Volkmann [56] mostró que si $\delta \geq \lfloor n/4 \rfloor + 1$, entonces G es maximalmente arco-conectado,

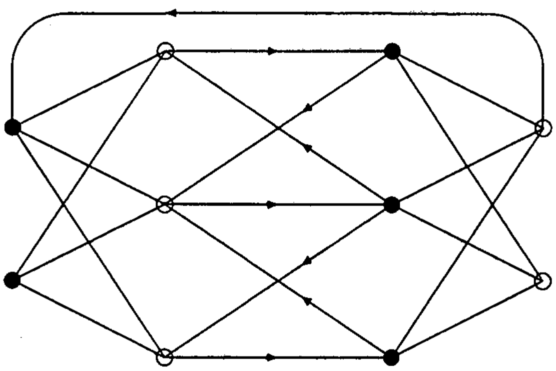

Figura 5.2: Un digrafo $2K^*_{2,3}$

Fábrega y Fiol en [26] llegaron a la misma conclusión para cada digrafo bipartito o grafo con diámetro $D = 3$. Independientemente Plesník y Znám [51] probaron el mismo resultado para grafos. En [7] se encontraron condiciones similares a las de Chartrand que son suficientes para asegurar que un digrafo s-geodético es super-κ.

Otros resultados interesantes expuestos en [29] son los siguientes.

(a) Sea G un digrafo bipartito de diámetro 3, con n vértices, grados mínimo y máximo δ y Δ respectivamente. Si $n > 2(\Delta + \delta)$, entonces G es super-λ.

(b) Sea G un grafo bipartito de diámetro 3, con n vértices, grados mínimo y máximo δ y Δ respectivamente. Si $n > 2(\Delta + \delta - 1)$, entonces G es super-λ.

La mayoría de los resultados de las próximas secciones están contenidos en [8].

5.2 Superconectividad de digrafos bipartitos con diámetro pequeño

Iniciamos esta sección estableciendo en un teorema condiciones similares a las dadas en (4.3) y (4.4), que son suficientes para asegurar superconectividad en digrafos bipartitos con diámetro pequeño. Para ello utilizamos una notación muy similar a la del capítulo anterior, es decir, consideramos, en primer lugar, un conjunto F desconectador no trivial con orden mínimo del digrafo bipartito G

que determina, como en capítulos anteriores, los fragmentos V^-, V^+, y los subconjuntos V_i, $1 \leq i \leq \mu$, y V'_j, $1 \leq j \leq \mu'$. En segundo lugar, para estudiar el problema respecto a arcos, consideramos un conjunto de arcos E desconectador no trivial de orden mínimo que determina los α-fragmentos V^-, V^+ y los subconjuntos $F \subset V^-$, $W \subset V^+$, V_i, $0 \leq i \leq \nu$, y V'_j, $0 \leq j \leq \nu'$ igual que en capítulos anteriores.

Dado un vértice z denotamos por $f^-(z)$ los vértices de F tales que $d(z, F) = d(z, f^-(z))$.

Teorema 5.2.1 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ, diámetro D, y grado mínimo $\delta \geq 3$. Entonces,*

(a) G es super-κ si $D \leq 2\ell - 1$;

(b) G es super-λ si $D \leq 2\ell$.

Demostración: (a) Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$ un digrafo bipartito y sea F un conjunto desconectador mínimo de G. Como cualquier camino desde V^- a V^+ debe atravesar F, la distancia desde un vértice en V_μ a uno en $V'_{\mu'}$ es al menos $\mu+\mu'$ y de aquí que $\mu+\mu' \leq D \leq 2\ell-1$. Por tanto, uno de los números, o bien μ o μ' es como mucho $\ell-1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\mu \leq \mu'$, es decir, $\mu \leq \ell - 1$ (si no, usamos el digrafo inverso de G). Además, G es maximalmente conectado, ya que $D \leq 2\ell - 1$, (recordar Teorema 1.5.1), y por tanto $|F| = \delta$. Sean $x \in V_\mu$, $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$, vecinos de salida de x. Si $f^-(x_i) = f^-(x_k)$ con $i \neq k$, habría dos caminos distintos, $xx_i \to f^-(x_i)$, $xx_k \to f^-(x_i)$, de longitud μ o $\mu+1$, contradiciendo la definición de ℓ, ya que $\mu \leq d(x, f^-(x_i)) \leq \mu+1 \leq \ell$. Por tanto, *para todo $x \in V_\mu$ hay un único camino corto $P_i = xx_i \to f^-(x_i)$, de longitud μ o $\mu+1$, según que $x_i \in V_{\mu-1}$ o $x_i \in V_\mu$, $1 \leq i \leq \delta$.* En lo sucesivo nos referiremos a esta propiedad como *Propiedad básica.*

Ahora probaremos que $\Gamma^+(x) \subset V_{\mu-1}$ para todo $x \in V_\mu$, y de aquí deduciremos que la longitud de los δ caminos P_i, debe ser μ. Supongamos que $x_i \in \Gamma^+(x) \cap V_\mu$; entonces x_i satisface la propiedad básica por lo que $d(x_i, F) = d(x_i, f^-(x_i)) = \mu$ y para cada $j \neq i$, $1 \leq j \leq \delta$, o bien $d(x_i, f^-(x_j)) = \mu$, o bien $d(x_i, f^-(x_j)) = \mu+1$. Entonces tenemos dos caminos diferentes desde x a $f^-(x_j)$, claramente, el camino más corto $P_j = xx_j \to f^-(x_j)$, y, $P'_j = xx_i \to f^-(x_j)$, cuyas longitudes deben ser de la misma paridad, puesto que G es bipartito. Por tanto, o bien P_j y P'_j tienen ambos longitud $\mu+1$, lo cual contradice la propiedad básica, o P_j tiene longitud μ y P'_j tiene longitud $\mu+2$, o sea, $d(x_i, f^-(x_j)) = \mu+1$. Luego, $|\Gamma^+(x_i) \cap V_{\mu-1}| = 1$. Pero en este caso, como $\delta \geq 3$, tendríamos al menos dos vecinos de salida de x_i, llamémosles x'_i, $x''_i \in V_\mu$. Si $d(x'_i, F) = d(x'_i, f^-(x'_i)) = \mu$, entonces los caminos $x_i x'_i \to f^-(x'_i)$, $x_i x''_i \to f^-(x'_i)$, serían distintos, y de longitud $\mu+1$ ya que G es bipartito; de nuevo una contradicción con la propiedad básica. Por tanto, *para todo* $x \in V_\mu$, $\Gamma^+(x) \subset V_{\mu-1}$ *y la longitud de los caminos* $P_i = xx_i \to f^-(x_i)$, $1 \leq i \leq \delta$, *es* μ.

Si $\mu = 1$ el resultado es trivial porque $F = \Gamma^+(x)$ para cualquier $x \in V_\mu$. Así pues, supongamos $\mu > 1$. Entonces, veamos que para todo $j \neq i$, $d(x_i, f^-(x_j)) \geq \mu+1$; en caso contrario, si para algún $j \neq i$, $\mu-1 \leq d(x_i, f^-(x_j)) \leq \mu$, tendríamos dos caminos cortos, a saber, $xx_i \to f^-(x_j)$, $P_j = xx_j \to f^-(x_j)$ (de longitud μ), lo cual es una contradiccion. Luego, $|\Gamma^+(x_i) \cap V_{\mu-2}| = 1$, y en consecuencia $|\Gamma^+(x_i) \cap V_\mu| \geq \delta - 1$, lo cual implica que al menos hay dos vecinos de salida de x_i en V_μ, x'_i, x''_i, ya que $\delta \geq 3$. Pero entonces habría dos caminos diferentes desde x_i a cualquier $f \in F$ de longitud $\mu+1$ porque $d(x'_i, f) = d(x''_i, f) = \mu$, contradiciendo la definición del parámetro ℓ. Es decir, debe ser $\mu = 1$ y $F = \Gamma^+(x)$ para cualquier $x \in V_\mu$, tal como afirmabamos.

(*b*) Sea E un conjunto desconectador de arcos con orden mínimo. Como $D \leq 2\ell$ resulta que G es maximalmente arco-conectado (por Teorema 1.5.1), es decir, $|E| = \delta$. Ahora $\nu + \nu' + 1 \leq 2\ell$, y suponiendo otra vez $\nu \leq \nu'$, tenemos $\nu \leq \ell - 1$. Entonces, razonando como en el caso (*a*), se prueba que los valores $1 \leq \nu \leq \ell - 1$ son imposibles. Si $\nu = 0$ entonces $F = V^-$ y $|F| \leq |E| = \delta$. En este caso, afirmamos que $W = \Gamma^+(x)$ para algún $x \in F$. En efecto, para cada $x \in F$ consideremos el conjunto $E(x) = \{(x, f'),\ f' \in W\}$; entonces $|E(x)| + |F| - 1 \geq \delta^+(x)$, es decir, $|E(x)| \geq \delta - (|F| - 1)$. Por tanto,

$$\delta = |E| = \sum_{x \in F} |E(x)| \geq |F|(\delta - (|F| - 1))$$

lo cual implica $|F|(|F| - 1) \geq (|F| - 1)\delta$. De aquí que $|F| = 1$ o $|F| = \delta$. Si $|F| = 1$ entonces $W = \Gamma^+(x)$. De otro modo, si $|F| = \delta$, cada $x \in F$ es adyacente exactamente a un vértice en W y a todos los demás vértices de F. Pero ésto es una contradicción puesto que $\delta \geq 3$ y los vértices de $\Gamma^+(x)$ son independientes cuando el digrafo es bipartito (es decir, la distancia entre ellos es al menos dos). $\square$

Nótese que, como consecuencia del teorema anterior, todos los digrafos bipartitos ($\delta \geq 3$) sin subdigrafos como el de la Figura 5.3 (esto es, $\ell \geq 2$) y con $D \leq 3$ son super-κ, y aquellos con $D \leq 4$ son super-λ. Como ya se comentó en el Capítulo 3, el parámetro ℓ de los digrafos $BD(d,n)$ satisface que $\ell \geq D-2$. En consecuencia, si $D \geq 5$ estos digrafos son super-κ y si $D \geq 4$ son super-λ.

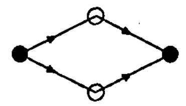

Figura 5.3: Subdigrafo de un digrafo bipartito con $\ell = 1$

Otros corolarios interesantes de este teorema se pueden encontrar en [26], donde se dió una demostración de tipo constructivo de este mismo resultado. Por ejemplo, a partir de la propiedad (1.1) y de la Proposición 1.4.1 podemos concluir que si el orden de iteración es bastante grande, el digrafo línea k-iterado es superconectado, condiciones que son similares a las dadas en (4.5) y (4.6).

Corolario 5.2.2 *Sea G un digrafo bipartito con parámetro ℓ, diámetro D, y grado mínimo $\delta \geq 3$. Entonces,*

(a) L^kG es super-κ si $k \geq D - 2\ell + 1$;

(b) L^kG es super-λ si $k \geq D - 2\ell$. □

La demostración del Teorema 5.2.1 tiene la ventaja de ser útil para derivar otros resultados tal como se hace en la próxima sección, ya que de ella se desprende el siguiente corolario.

Corolario 5.2.3 *Sea G un digrafo bipartito maximalmente conectado, con grado mínimo $\delta \geq 3$ y parámetro ℓ. Entonces*

(a) Si F es un conjunto desconectador no trivial tal que $|F| = \delta$ y V^-, V^+, son los dos fragmentos que determina, entonces se cumple que $\mu = \max_{x \in V^-} d(x,F) \geq \ell$, $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F,x) \geq \ell$.

(b) Si E es un conjunto de arcos desconectador no trivial tal que $|E| = \delta$ y V^-, V^+, son los dos α-fragmentos que determina, entonces se cumple que

$\nu = \max_{x \in V^-} d(x,F) \geq \ell$, $\nu' = \max_{x \in V^+} d(W,x) \geq \ell$, donde

$F = \{f : (f,f') \in E\} \subset V^-$ y $W = \{f' : (f,f') \in E\} \subset V^+$. □

5.3 Superconectividad de digrafos bipartitos densos

A partir de los resultados que nos brinda la demostración anterior, podemos mejorar para el caso particular de digrafos bipartitos los resultados conocidos que dan condiciones suficientes sobre el orden del digrafo en relación a los parámetros δ, Δ, ℓ y D. Utilizaremos también los resultados obtenidos en el Capítulo 3, donde se obtuvieron condiciones suficientes sobre el orden de un digrafo bipartito con $\delta \geq 3$ que aseguran conectividad máxima, las cuales se dieron en [6] y que recordamos a continuación.

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2; \tag{5.1}$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}. \tag{5.2}$$

En primer lugar, estudiamos la super-(vértice)-conectividad.

Teorema 5.3.1 *Sea G un digrafo bipartito con orden n, parámetro ℓ, diámetro D, y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \geq 3$ respectivamente. Entonces,*

(a) G es super-κ si $\ell \geq 2$ y

$$n > \delta\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^{\ell};$$

(b) G es super-κ si $\ell = 1$ y $n > 2\Delta + \delta\{p(\Delta, D - 2) - 1\} + 1$.

Demostración: (a) Sea $G = (V, A)$, $V = U_0 \cup U_1$, un digrafo bipartito. Usaremos la misma notación que en la demostración del Teorema 5.2.1(a). Debido precisamente a este teorema podemos suponer que $D - \ell \geq \ell$. Entonces en virtud de (5.1) y de las hipótesis, G es maximalmente conectado. Sea F un conjunto desconectador no trivial tal que $|F| = \delta$. Nótese que $|V_i| \leq \Delta |V_{i-1}|$, $1 \leq i \leq \mu$, $|V_j'| \leq \Delta |V_{j-1}'|$, $1 \leq j \leq \mu'$ y $V_0 = V_0' = F$. Ahora tenemos $\mu + \mu' \leq D$. Vamos a suponer $\mu \leq \mu'$. Entonces, por el Corolario 5.2.3(a), $\mu \geq \ell$. Distinguimos básicamente dos casos diferentes:

(i) $\mu \geq \ell + 1$. Entonces $\mu' \leq D - \mu \leq D - \ell - 1$, $D \geq 2\ell + 2$.

(i.1) Si $V_{D-\ell-1}' = \emptyset$, ésto es, si $\mu' \leq D - \ell - 2$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$n = \sum_{i=0}^{\mu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\mu'} |V_j'| - |F|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta\{p(\Delta,\mu)+p(\Delta,\mu')-1\}\\
&\leq \delta\{p(\Delta,\mu)+p(\Delta,D-\ell-2)-1\}\\
&= \delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\}+\delta\{\sum_{i=\ell}^{\mu}\Delta^i-\Delta^{D-\ell-1}+1\}\\
&\leq \delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\},
\end{aligned}$$

puesto que $1+\dfrac{\Delta^{\mu+1}-\Delta^\ell}{\Delta-1}-\Delta^{D-\ell-1}\leq 1-\dfrac{\Delta^{D-\ell-1}(\Delta-2)+\Delta^\ell}{\Delta-1}\leq 0$, porque $\mu+1\leq D-\ell-1$, y, $D\geq 2\ell+2$.

(i.2) Si $V'_{D-\ell-1}\neq\emptyset$, podemos considerar un vértice $y\in V'_{D-\ell-1}$. Como todos los caminos desde $x\in V_\mu$ a y atraviesan F, debe ser, $d(x,y)\geq d(x,F)+d(F,y)=\mu+D-\ell-1\geq \ell+1+D-\ell-1=D$. Por tanto, $\mu=\ell+1$. Además, para todo $x\in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x)\subset V_\ell$; en caso contrario podremos considerar un vértice $x'\in\Gamma^+(x)\cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y atraviesan F y también $d(x',y)=D$. Entonces, tendríamos dos caminos diferentes desde x a y, uno de longitud D y otro, $xx'\to y$, de longitud $D+1$, siendo imposible esta situación en un digrafo bipartito, de donde deducimos que, para todo $x\in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x)\subset V_\ell$, lo cual implica que $|V_{\ell+1}|\leq\frac{\Delta}{\delta}|V_\ell|\leq\Delta^{\ell+1}$. De igual modo, probamos que para todo vértice $y\in V'_{D-\ell-1}$, $\Gamma^-(y)\subset V'_{D-\ell-2}$, y por tanto, $|V'_{D-\ell-1}|\leq\frac{\Delta}{\delta}|V'_{D-\ell-2}|\leq\Delta^{D-\ell-1}$. De este modo obtenemos que

$$\begin{aligned}
n&=\sum_{i=0}^{\ell}|V_i|+\sum_{j=0}^{D-\ell-2}|V'_j|-|F|+|V_{\ell+1}|+|V'_{D-\ell-1}|\\
&\leq\delta\{p(\Delta,\ell)+p(\Delta,D-\ell-2)-1\}+\Delta^{\ell+1}+\Delta^{D-\ell-1}\\
&=\delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\}+\delta\{1+\Delta^\ell-\Delta^{D-\ell-1}\}+\Delta^{\ell+1}\\
&+\Delta^{D-\ell-1}\leq\delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\}+\delta,
\end{aligned}$$

puesto que $\Delta^{\ell+1}+\delta\Delta^\ell+\delta-(\delta-1)\Delta^{D-\ell-1}\leq 2\Delta^{\ell+1}+\delta-(\delta-1)\Delta^{D-\ell-1}\leq(3-\delta)\Delta^{D-\ell-1}+\delta\leq\delta$, porque $D\geq 2\ell+2$ y $\delta\geq 3$.

(ii) $\mu=\ell$. Entonces $\mu'\leq D-\ell$, $D\geq 2\ell$.

(ii.1) Si $V'_{D-\ell}=\emptyset$, ésto es, si $\mu'\leq D-\ell-1$, el orden $n=|V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned}
n&\leq\delta\{p(\Delta,\ell)+p(\Delta,D-\ell-1)-1\}\\
&=\delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\}+\delta(1+\Delta^\ell)\\
&\leq\delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-1)-2\}+\Delta^\ell+\Delta^{D-\ell},
\end{aligned}$$

ya que $\delta(1+\Delta^\ell)\leq\delta(1+\Delta^{D-\ell-1})\leq\Delta(1+\Delta^{D-\ell-1})\leq\Delta^\ell+\Delta^{D-\ell}$.

(ii.2) Si $V'_{D-\ell} \neq \emptyset$, es decir, $\mu' = D - \ell$, dados $x \in V_\ell$ e $y \in V'_{D-\ell}$, como antes $d(x,y) \geq d(x,F) + d(F,y) \geq D$, lo cual significa que $\Gamma^+(x) \subset V_{\ell-1}$, y, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-1}$. Nótese que este caso es imposible si $\ell = 1$, ya que estamos suponiendo que $F = V_0$ es un conjunto desconectador no trivial. Entonces por ahora supondremos que $\ell \geq 2$. Por tanto,

$$|V_\ell| \leq \tfrac{\Delta}{\delta}|V_{\ell-1}| \leq \Delta^\ell, \quad \text{y,} \quad |V'_{D-\ell}| \leq \tfrac{\Delta}{\delta}|V'_{D-\ell-1}| \leq \Delta^{D-\ell}.$$

Además, la cota superior del cardinal de $V_\ell \cup V'_{D-\ell}$ se puede reducir en al menos δ unidades. Sea $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\delta\}$. Vamos a probar que para cada $f_t \in F$ con $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$, la cota superior para el cardinal de $V_\ell \cup V'_{D-\ell}$ se puede reducir por lo menos en uno. En efecto, para todo $f \in F$, $f \neq f_t$, $d(f, f_t) = d(f,z) + 1 \leq D$, para algún $z \in \Gamma^-(f_t)$. Entonces, $d(f,z) \leq D-1$, lo que significa que hay un arco (α_t, β_t) en el camino corto $f \rightarrow zf_t$, con su vértice inicial α_t en algún V'_j, $0 \leq j \leq D - \ell$, y su vértice terminal β_t en algún V_i, $1 \leq i \leq \ell$. De hecho, debe ser $0 \leq j \leq D-\ell-1$, o $1 \leq i \leq \ell - 1$; de lo contrario, si $\alpha_t \in V'_{D-\ell}$ y $\beta_t \in V_\ell$ tendríamos, $d(f,z) = d(f,\alpha_t) + 1 + d(\beta_t, z) \geq D$, lo cual es una contradicción. Distinguiendo casos similares a los estudiados en la demostración del Teorema 4.3.2 del Capítulo 4 tenemos que si para todo $f_t \in F$, $\Gamma^-(f_t) \subset V_1$, entonces $|V_\ell| + |V'_{D-\ell}| \leq \Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell - \delta$. Si no, si para algún $f_t \in F$, existe un vértice $z \in \Gamma^-(f)$ tal que $z \notin V_1$, entonces $|V_1| \leq \delta\Delta - 1$, y de aquí que la anterior afirmación sea también verdad. Por tanto, tenemos que

$$n \leq \delta\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell.$$

Si $\mu = \ell = 1$, teniendo en cuenta los anteriores resultados tenemos que para todo $x \in V_1$, $\Gamma^+(x) \cap V_1 \neq \emptyset$, puesto que F es un conjunto desconectador no trivial, es decir, $F_0 = F \cap U_0 \neq \emptyset$ y $F_1 = F \cap U_1 \neq \emptyset$. Además, $V'_{D-1} = \emptyset$, y $n \leq \delta\{p(\Delta, D-2) + p(\Delta, 1) - 1\}$. Ahora, mostraremos que o bien $|V_1| \leq 2\Delta$ o $|V'_{D-2}| \leq (\delta - 1)\Delta^{D-2}$. Supongamos que $|V_1| > 2\Delta$. Entonces $|V_1 \cap U_1| > \Delta$, y $|F_0| > 1$ (o $|V_1 \cap U_0| > \Delta$ y $|F_1| > 1$). Luego, existe un vértice $x \in V_1 \cap U_1$ y un $f \in F_0$ tal que $x \notin \Gamma^-(f)$. Consideremos un vértice $y \in V'_{D-2}$ tal que $d(f,y) = D-2$. Si el diámetro D es impar, entonces $y \in U_1$ ya que $f \in F_0$; en caso contrario, $y \in U_0$. Como vértices de la misma [diferente] parte están a lo sumo a distancia $D-1$ cuando el diámetro es impar [par], resulta que $d(x,y) \leq D-1$, y por tanto, $|V'_{D-2}| \leq (\delta-1)\Delta^{D-2}$. Así podemos suponer que $|V_1| \leq 2\Delta$.

Además, la cota superior del cardinal de $V_1 \cup V'_{D-2}$ se puede reducir en al menos $\delta - 1$. Supongamos que el diámetro es impar y $|F_0| > 1$. Razonando como antes obtenemos que, o bien, todos los vértices de F_0 tienen sus vecinos de entrada en V_1 y entonces $|V'_{D-2}| \le \delta\Delta^{D-2} - |F_0|$, o bien, existe un vértice en F_0 con al menos un vecino de entrada que no está en V_1, y entonces $|V_1| + |V'_{D-2}| \le 2\Delta + \delta\Delta^{D-2} - |F_0|$. Además, si $|F_1| > 1$, podemos sustraer también este número de la cantidad anterior. Luego, en el peor caso, $|V_1| + |V'_{D-2}| \le 2\Delta + \delta\Delta^{D-2} - (\delta - 1)$. Si el diámetro es par el razonamiento es sobre vértices de partes diferentes. Por tanto,

$$n \le 2\Delta + \delta\{p(\Delta, D-2) - 1\} + 1. \quad \square$$

Corolario 5.3.2 *Sea G un digrafo bipartito con número de arcos m, parámetro ℓ, diámetro D, y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \ge 3$ respectivamente. Entonces,*

$$G \text{ es super-}\lambda \text{ si } m > \delta\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D-\ell-1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^{\ell+1}.$$

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existiría un digrafo bipartito G no super-λ con m arcos, y parámetros $\delta \ge 3$, Δ, ℓ y D tales que

$$m > \delta\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D-\ell-1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^{\ell+1}.$$

Entonces, su digrafo línea LG sería un digrafo bipartito no super-κ con $n' = m$ vértices, grado mínimo δ, grado máximo Δ, diámetro $D' = D + 1$ y parámetro $\ell' = \ell + 1 \ge 2$ satisfaciendo

$$n' > \delta\{p(\Delta, \ell'-1) + p(\Delta, D'-\ell'-1) - 2\} + \Delta^{D'-\ell'} + \Delta^{\ell'},$$

lo cual contradice el teorema anterior. $\square$

Además, cuando el digrafo G es d-regular, tiene $\Delta = \delta = d$ y $m = dn$ arcos. Luego, sustituyendo estos valores en el Teorema 5.3.1 y en el corolario anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.3 *Sea G un digrafo bipartito d-regular, $d \ge 3$, de n vértices, con parámetro ℓ y diámetro D. Entonces,*

$$\text{(a) } G \text{ es super-}\kappa \text{ si } \begin{cases} \ell \ge 2 \text{ y } n > \dfrac{d}{d-1}(d^\ell + d^{D-\ell} - 2d) + d^{D-\ell} + d^\ell \\ \ell = 1 \text{ y } n > d + \dfrac{d^D - 1}{d-1}; \end{cases}$$

$$\text{(b) } G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > \frac{d}{d-1}(d^\ell + d^{D-\ell-1} - 2) + d^{D-\ell-1} + d^\ell. \quad \square$$

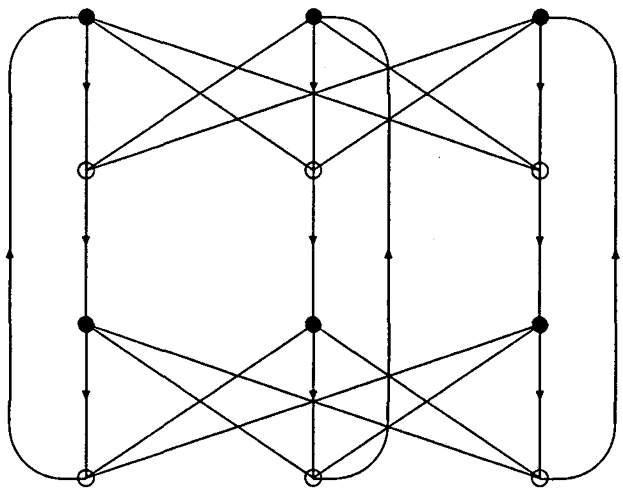

Figura 5.4: Un digrafo bipartito 3-regular con $\lambda = 3$ y no super-λ, con 12 vértices y diámetro 3

Por ejemplo, si $D = 3$ y $\ell \geq 1$ obtenemos que G es super-λ si $n > 4d$; y si $D = 4$ y $\ell \geq 2$, entonces G es super-κ si $n > 4d^2$. Para mostrar que estos resultados son los mejores posibles, vamos a considerar la siguiente familia de digrafos bipartitos que se construye como sigue. Sea $K^*_{d,d} = (V_1 \cup F, A)$ el digrafo bipartito completo simétrico, y denotemos por $\vec{K}_{2d}$ el digrafo que se obtiene de él al suprimir un emparejamiento completo de F a V_1. El digrafo bipartito $\vec{K}_{2d} \uplus \vec{K}'_{2d}$, donde $\vec{K}'_{2d} = (F' \cup V'_1, E')$ es una copia de $\vec{K}_{2d}$, se obtiene uniendo dos copias con dos emparejamientos completos: uno desde F a F' y el otro desde V'_1 a V_1. Entonces, las partes de $\vec{K}_{2d} \uplus \vec{K}'_{2d}$ son $V_1 \cup F'$ y $F \cup V'_1$. La Figura 5.4 muestra un ejemplo para $d = 3$. Esta construcción proporciona una familia de digrafos bipartitos d-regulares con diámetro $D = 3$, parámetro $\ell = 1$ y orden $n = 4d$, los cuales son maximalmente arco-conectados pero no son super-λ. Sus digrafos línea tienen $D = 4$, parámetro $\ell = 2$, orden $n = 4d^2$, y son maximalmente vértice-conectados, pero no son super-κ.

Sea G un digrafo bipartito d-regular ($d \geq 3$) de orden n, diámetro D, y $\ell(G) = \ell$. Entonces, como ya se estableció en el Capítulo 1, el digrafo línea k-iterado L^kG tiene orden d^kn, diámetro $D + k$ y $\ell(L^kG) = \ell + k$. Por tanto sustituyendo estos valores en el Corolario 5.3.3 obtenemos las siguientes condiciones suficientes para que L^kG sea superconectado.

L^kG es super-κ si $d^kn > d\{p(d, \ell + k - 1) + p(d, D - \ell - 1) - 2\} + d^{D-\ell} + d^{\ell+k}$;

$$L^kG \text{ es super-}\lambda \text{ si } d^kn > d\{p(d,\ell+k-1)+p(d,D-\ell-2)-2\}+d^{D-\ell-1}+d^{\ell+k}.$$

Despejando k y teniendo en cuenta que este valor debe ser un entero, podemos mostrar explícitamente que es el mínimo orden de iteración para el cual las siguientes desigualdades son válidas.

Corolario 5.3.4 *Sea G un digrafo bipartito d-regular, $d \geq 3$, con orden n, parámetro ℓ y diámetro D. Entonces,*

(a) L^kG es super-κ si $k > \log_d \dfrac{d^{D-\ell}(2d-1)-2d^2}{n(d-1)-d^\ell(2d-1)}$;

(b) L^kG es super-λ si $k > \log_d \dfrac{d^{D-\ell-1}(2d-1)-2d}{n(d-1)-d^\ell(2d-1)}$. □

Puesto que

$$\frac{2d^{D-\ell+1}}{2n-2d^{\ell+1}} > \frac{(2d-1)d^{D-\ell}-2d^2}{n(d-1)-d^\ell(2d-1)}, \text{ y, } \frac{2d^{D-\ell}}{2n-2d^{\ell+1}} > \frac{(2d-1)d^{D-\ell-1}-2d}{n(d-1)-d^\ell(2d-1)}$$

los resultados del Corolario 5.3.4 implican los siguientes resultados que deben ser comparados con los del Corolario 5.2.2.

$$L^kG \text{ es super-}\kappa \text{ si } k > D-\ell+1-\log_d(n-d^{\ell+1});$$

$$L^kG \text{ es super-}\lambda \text{ si } k > D-\ell-\log_d(n-d^{\ell+1}).$$

Obsérvese que es una iteración más que las necesarias para garantizar conectividad máxima, tal como obtuvimos en el Capítulo 3. Además la iteración $k=0$ proporciona cotas superiores sobre el diámetro que a partir de un cierto valor del orden suponen una mejora de las obtenidas en el Teorema 5.2.1

Se puede obtener una cota superior sobre el número de vértices que indique cuando un digrafo bipartito G es super-λ, usando un razonamiento directo similar al que se usa en la demostración del Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.5 *Sea G un digrafo bipartito con orden n, parámetro ℓ, diámetro D, y grados máximo Δ y mínimo $\delta \geq 3$, respectivamente. Entonces,*

$$G \textit{ es super-}\lambda \textit{ si } \; n > \delta\{p(\Delta,\ell-1)+p(\Delta,D-\ell-2)\}+\Delta^\ell+\Delta^{D-\ell-1}.$$

Demostración: Como en la demostración del Teorema 5.3.1 supongamos que las hipótesis son válidas, de donde G es maximalmente arco-conectado por (5.2). Por el Teorema 5.2.1(b) podemos suponer $D - \ell \geq \ell + 1$. Usamos la misma notación que en tales teoremas. Sea $|E| = \delta$, y supongamos que E es un conjunto arco-desconectador no trivial. Entonces por el Corolario 5.2.3 (b), $\nu \geq \ell$ y $\nu \leq \nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 1$.

(i) $\nu \geq \ell + 1$. Entonces $\nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 2$. Si $V'_{D-\ell-2} = \emptyset$, ésto es $\nu' \leq D - \ell - 3$, el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\nu} |V_i| + \sum_{j=0}^{\nu'} |V'_j| \leq \delta\{p(\Delta,\nu) + p(\Delta,\nu')\} \\ &\leq \delta\{p(\Delta,\nu) + p(\Delta, D-\ell-3)\} \\ &= \delta\{p(\Delta,\ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \delta\{\sum_{i=\ell}^{\nu} \Delta^i - \Delta^{D-\ell-2}\} \\ &\leq \delta\{p(\Delta,\ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\}, \end{aligned}$$

ya que $\dfrac{\Delta^{\nu+1} - \Delta^{\ell}}{\Delta - 1} - \Delta^{D-\ell-2} \leq \dfrac{(2-\Delta)\Delta^{D-\ell-2} - \Delta^{\ell}}{\Delta - 1} \leq 0.$

Si $V'_{D-\ell-2} \neq \emptyset$ podemos considerar un vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$. Como todos los caminos desde $x \in V_\nu$ a y deben atravesar E, debe ser $d(x,y) \geq d(x,F) + 1 + d(F',y) = \nu + 1 + D - \ell - 2 \geq D$. Por tanto, $\nu = \ell + 1$. Además, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$; de otro modo, sea $x' \in \Gamma^+(x) \cap V_{\ell+1}$. Como antes, todos los caminos desde x' a y atraviesan E y también $d(x',y) = D$. Entonces, tendríamos dos caminos diferentes de x a y, uno de longitud D y otro, $xx' \to y$, de longitud $D+1$, lo cual es imposible en un digrafo bipartito. Luego, para todo $x \in V_{\ell+1}$, $\Gamma^+(x) \subset V_\ell$, lo que implica que $|V_{\ell+1}| \leq \frac{\Delta}{\delta}|V_\ell| \leq \Delta^{\ell+1}$. De un modo similar, probamos que para todo vértice $y \in V'_{D-\ell-2}$, $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-3}$ y por tanto $|V'_{D-\ell-2}| \leq \frac{\Delta}{\delta}|V'_{D-\ell-3}| \leq \Delta^{D-\ell-2}$. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-3} |V'_j| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-2}| \\ &\leq \delta\{p(\Delta,\ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \delta\{\Delta^{\ell} - \Delta^{D-\ell-2}\} + \Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-2} \\ &\leq \delta\{p(\Delta,\ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \Delta^{\ell+1} + \Delta^{D-\ell-1}, \end{aligned}$$

ya que $\Delta^{\ell} - \Delta^{D-\ell-2} \leq 0$, porque $D \geq 2\ell + 2$.

(ii) $\nu = \ell$. Entonces $\nu' \leq D - \ell - 1$. Si $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, entonces $D \geq 2\ell + 2$ y el orden debe satisfacer

$$n \leq \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-2} |V'_j| \leq \delta\{p(\Delta,\ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \delta\Delta^{\ell}$$

$$\leq \delta\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1},$$

ya que $\delta\Delta^\ell \leq \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}$, debido a que $D \geq 2\ell + 2$.

Si $V'_{D-\ell-1} \neq \emptyset$, es decir, $\nu' \leq D - \nu - 1 \leq D - \ell - 1$. Sea $x \in V_\ell$, $y \in V'_{D-\ell-1}$; como antes $d(x, y) \geq d(x, F) + d(F, y) + 1 \geq D$, lo cual significa que $\Gamma^+(x) \subset V_{\ell-1}$ y $\Gamma^-(y) \subset V'_{D-\ell-2}$. Por tanto,

$|V_\ell| \leq \frac{\Delta}{\delta}|V_{\ell-1}| \leq \Delta^\ell$, y, $|V'_{D-\ell-1}| \leq \frac{\Delta}{\delta}|V'_{D-\ell-2}| \leq \Delta^{D-\ell-1}$. Luego,

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} |V_i| + \sum_{j=0}^{D-\ell-1} |V'_j| \leq \delta\{p(\Delta, \ell-1) + p(\Delta, D-\ell-2)\} + \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}.$$

□

En el caso particular $D = 3$ ($\ell \geq 1$) obtenemos que G es super-λ si $n > 2(\Delta + \delta)$, como fué probado en [29]. Es interesante notar que, puesto que $n \geq \frac{m}{\Delta}$, el teorema anterior también implica el resultado del Corolario 5.3.2 y por tanto también los resultados de los corolarios 5.3.3(b) y 5.3.4(b).

5.4 Conjuntos desconectadores en digrafos bipartitos superconectados

Consideramos un digrafo bipartito $G = (U_0 \cup U_1, A)$ maximalmente conectado, con grado mínimo $\delta \geq 3$. Al igual que en la Sección 4.2 del Capítulo 4, nos proponemos hallar la mínima profundidad que han de tener los fragmentos V^-, V^+ determinados por un conjunto F desconectador no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices. Sean V_i, V'_j, $1 \leq i \leq \mu$, $1 \leq j \leq \mu'$, como en secciones anteriores. Sean $x \in V_\mu$, $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$, δ de sus vecinos de salida y denotemos por $f^-(x_i)$, $1 \leq i \leq \delta$, los vértices de F a mínima distancia de x_i. La siguiente propiedad se prueba como en la demostración del Teorema 5.2.1 y nos referiremos a ella también como *Propiedad básica:* Si $\mu \leq \ell - 1$ entonces *para cada* $x \in V_\mu$ *hay un único camino corto* $P_i = xx_i \to f^-(x_i)$, $1 \leq i \leq \delta$, *de longitud* μ *o* $\mu + 1$, *dependiendo de si* $x_i \in V_{\mu-1}$, *o,* $x_i \in V_\mu$.

Además utilizaremos el resultado del Lema 4.2.1: Si $\mu \leq \ell - 1$ para todo $x \in V_\mu$ existe un vértice $x_1 \in V_\mu$, tal que $x_1 \in \Gamma^+(x)$.

Lema 5.4.1 *Sea G un digrafo bipartito maximalmente conectado, con $\delta \geq 3$, parámetro ℓ, F un conjunto desconectador no trivial tal que $|F| \leq 2\delta - 3$ y V^-, V^+ los dos fragmentos que determina. Entonces,*

$\mu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell$, *y*, $\mu' = \max_{x \in V^+} d(F, x) \geq \ell$.

Demostración: Supongamos que $\mu \leq \ell - 1$ y sean $x \in V_\mu$, $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$, δ de sus vecinos de salida. Supongamos que $x_\delta \in V_\mu$ y consideramos a su vez $y_1, y_2, \ldots, y_\delta$, vecinos de salida de x_δ. (Obsérvese que $x_j \neq y_i$, ya que el digrafo es bipartito). Es obvio que $f^-(x_\delta) = f^-(y_\delta)$, pero además, en virtud de la propiedad básica anterior y dado que $|F| \leq 2\delta - 3$, deben existir al menos otros dos vértices tales que $f^-(x_i) = f^-(y_i)$, $i = 1, 2$, lo que significa que desde x a cada $f^-(x_i)$, $i = 1, 2$, hay dos caminos diferentes, a saber, el corto $xx_i \to f^-(x_i)$, de longitud μ o $\mu + 1$ y el camino $xx_\delta y_i \to f^-(x_i)$ de longitud $\mu + 1$ o $\mu + 2$. De nuevo por la propiedad básica se tiene que $|x_\delta y_i \to f^-(x_i)| = \mu + 1$, y como el digrafo es bipartito se tiene además que $|xx_i \to f^-(x_i)| = \mu$, $i = 1, 2$. Es decir hemos probado que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(x)| \geq 2$, $|V_\mu \cap \Gamma^+(x_\delta)| \geq 2$. Sean $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} = V_\mu \cap \Gamma^+(x_\delta)$. Cada uno de estos vértices satisface que $|V_\mu \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 2$, ya que cumplen las mismas condiciones que x_δ, y en consecuencia también satisfacen $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 2$ ya que cumplen las mismas condiciones que x. Luego existen $f^-(y_j), f_1^-(y_j) \in F$, de manera que los caminos $x_\delta y_j \to f^-(y_j)$, $x_\delta y_j \to f_1^-(y_j)$, $1 \leq j \leq k$, son de longitud $\mu+1$ y por la propiedad básica necesariamente son únicos. Por otra parte, los caminos $x_\delta y_j \to f^-(y_j)$, $k + 1 \leq j \leq \delta$, son de longitud μ y también únicos. Por tanto, $2\delta - 3 \geq |F| \geq \delta + k$, es decir, $\delta \geq k + 3 \geq 5$. Luego si $\delta \leq 4$, el teorema estaría probado. Además, si $k \geq \delta - 2$, $|F| \geq 2\delta - 2$. Por tanto $k \leq \delta - 3$, lo que significa que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(x_\delta)| \geq 3$, y como los vértices $y_j \in V_\mu \cap \Gamma^+(x_\delta)$, son como x_δ resulta que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 3$, $1 \leq j \leq k$. Repitiendo el razonamiento anterior, en F podemos contar al menos $\delta + 2k$ vértices diferentes, o sea, $|F| \geq \delta + 2k$, es decir, $\delta \geq 2k + 3 \geq 7$. Además si $k = \delta - 3$, $|F| \geq 3\delta - 6$, pero ésto es imposible ya que $2\delta - 3 < 3\delta - 6$ cuando $\delta \geq 4$. Entonces $k \leq \delta - 4$, y de aquí que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq 4$. En un número finito de pasos se prueba que $k = 2$ y que $|V_{\mu-1} \cap \Gamma^+(y_j)| \geq \delta - 2$, $j = 1, 2$. Luego en F podemos contar al menos $3(\delta - 2)$ vértices diferentes, o sea, $|F| \geq 3\delta - 6$, lo cual es una contradicción porque $|F| \leq 2\delta - 3$. Por tanto, hemos probado que si $\mu \leq \ell - 1$ para todo $x \in V_\mu$, se verifica que $\Gamma^+(x) \subset V_{\mu-1}$, lo cual contradice el Lema 4.2.1.

Análogamente se demuestra que $\mu' \geq \ell$. □

En el siguiente teorema obtenemos una condición suficiente sobre el diámetro que proporciona una cota inferior sobre la *superconectividad* $\kappa_1 = \kappa_1(G)$ del digrafo bipartito superconectado. Además obsérvese que como $\delta < \kappa_1 = |F| \leq$

$2\delta - 3$, entonces $\delta \geq 4$. Es decir, en un digrafo G superconectado con grado mínimo $\delta = 3$, siempre se verifica que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$.

Teorema 5.4.2 *Sea G un digrafo bipartito con $\delta \geq 3$, parámetro $\ell \geq 2$. Entonces $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $D \leq 2\ell - 1$.*

Demostración: Como $D \leq 2\ell - 1$ el digrafo G es super-vértice-conectado debido al Teorema 4.3.2(a). Supongamos que F es un desconectador no trivial de G, tal que $\kappa_1 = |F| \leq 2\delta - 3$. Como todos los caminos desde V^- a V^+ deben atravesar F se cumple que $\mu + \mu' \leq D$. Supongamos $\mu \leq \mu'$ (si no consideramos el digrafo inverso de G.) Luego $\mu \leq \ell - 1$. Pero en virtud del Lema 5.4.1 debe ser $\mu \geq \ell$ lo cual es una contradicción. Por tanto, si F es un desconectador no trivial de G ha de ser $\kappa_1 = |F| \geq 2\delta - 2$. □

En el siguiente lema, que es una consecuencia directa del Lema 5.4.1, estudiemos el mismo problema respecto a arcos.

Lema 5.4.3 *Sea G un digrafo bipartito maximalmente arco-conectado, con grado mínimo $\delta \geq 3$, $E \subset A$ un conjunto de arcos desconectador no trivial tal que $|E| \leq 2\delta - 3$ y V^-, V^+ los dos α-fragmentos que determina. Entonces,*

$\nu = \max_{x \in V^-} d(x, F) \geq \ell$, $\nu' = \max_{x \in V^+} d(W, x) \geq \ell$, donde

F son los vértices iniciales y W son los vértices terminales de los arcos de E.

Demostración: Los valores $1 \leq \nu \leq \ell - 1$ se demuestra que son imposibles razonando como en el Lema 5.4.1, ya que $|F| \leq |E| \leq 2\delta - 3$. Sólo hay que estudiar el caso $\nu = 0$. En este caso, $F = V^-$. Como E es no trivial, para cada $x \in F$ existe un $y \in \Gamma^+(x) \cap F$, $y \neq x$, ya que G no tiene lazos. Denotemos por $w^+(x) = \{(x, f') \in E\}$ y por $w^+(H) = \bigcup_{x \in H} w^+(x)$, siendo H cualquier subconjunto de F. Como para cada $f \in F$ se tiene que $|w^+(f)| \geq 1$ deducimos que $|w^+(x)| + |w^+(\Gamma^+(x) \cap F - \{y\})| \geq \delta - 1$. Además, $\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$, ya que G es bipartito, lo que significa que,

$$|E| \geq |w^+(x)| + |w^+(\Gamma^+(x) \cap F - \{y\})| + |w^+(y)| + |w^+(\Gamma^+(y) \cap F - \{x\})| \geq 2\delta - 2,$$

lo cual es una contradicción. □

Como en el caso de vértices siempre que $\delta = 3$ se cumple que $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. El siguiente teorema es una consecuencia directa del lema que acabamos de establecer, así como del Teorema 4.2.3.

Teorema 5.4.4 *Sea G un digrafo bipartito con $\delta \geq 3$, parámetro ℓ. Entonces $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si $D \leq 2\ell$.*

Demostración: Como $D \leq 2\ell$ el digrafo G debe ser super-arco conectado debido al Teorema 4.3.2(b). Sea $E \subset A(G)$ el conjunto con mínimo número de arcos que desconecta G de manera no trivial, o sea, $\lambda_1 = |E| \leq 2\delta - 3$. Sea $x \in V_\nu$, $y \in V'_\nu$. Los caminos desde x a y deben atravesar E y de aquí que $\nu + \nu' + 1 \leq D$. Por tanto, si $D \leq 2\ell$, por ejemplo $\nu \leq \ell - 1$, pero por el Lema 5.4.1 debe ser $\nu \geq \ell$ lo cual es una contradicción. Por tanto, si E es un desconectador no trivial de G ha de ser $\lambda_1 = |E| \geq 2\delta - 2$. □

Sin más información sobre la estructura de G, ésto es todo lo que podemos deducir de las condiciones dadas. No obstante, si G contiene un dígono, es decir, si $(x,y),(y,x) \in A$, como $\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$, entonces $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^+(y) \setminus \{x,y\}$ podría ser un ejemplo de conjunto desconectador no trivial con $2\delta - 2$ vértices, de donde podríamos afirmar que $\kappa_1, \lambda_1 \leq 2\delta - 2$.

Si el diámetro del digrafo no pasara las condiciones suficientes expuestas en los lemas anteriores disponemos del siguiente teorema en donde se enuncian condiciones suficientes, pero sobre el orden, que aseguran también superconectividad óptima.

Teorema 5.4.5 *Sea G un digrafo bipartito con orden n, parámetro ℓ, diámetro D, y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \geq 3$ respectivamente. Entonces,*

(a) $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ *si* $\ell \geq 2$ *y*
$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + \Delta^{D-\ell} + \Delta^\ell;$$

(b) $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ *si* $\ell = 1$ *y* $n > 2\Delta + (2\delta - 3)\{p(\Delta, D - 2) - 1\} + 1$.

(c) $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ *si* $n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 2)\} + \Delta^\ell + \Delta^{D-\ell-1}$.
□

La demostración es como en los Teoremas 5.3.1, 5.3.5.

5.5 Superconectividad de grafos bipartitos densos

En esta sección presentamos resultados similares para el caso de grafos bipartitos. Ahora sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito de n vértices, con grado máximo Δ, grado mínimo $\delta \geq 3$, diámetro D y girth g. Nótese que, puesto que G tiene girth par, entonces $\ell = (g-2)/2$. Luego, los Teoremas 5.2.1, 5.4.2, 5.4.4 nos conducen al siguiente corolario.

Corolario 5.5.1 *Sea G un grafo bipartito con grado mínimo $\delta \geq 3$, girth g y diámetro D. Entonces,*

(a) Si $D \leq g-3$ entonces el grafo G es super-κ y $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$.

(b) Si $D \leq g-2$ entonces el grafo G es super-λ y $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$. □

Como consecuencia inmediata de este corolario tenemos que cualquier grafo bipartito con $g \geq 6$ y diámetro $D \leq 3$ (respectivamente $D \leq 4$) es super-κ (respectivamente super-λ). Por ejemplo los grafos bipartitos más grandes que se conocen dados por Bond y Delorme en [17] son super-κ y super-λ, y sus superconectividades son óptimas, ya que se puede mostrar que pasan esta condición.

En el Capítulo 3 se estudiaron condiciones suficientes sobre el orden de un grafo bipartito con $\delta \geq 3$ que aseguran conectividad máxima, las cuales se presentaron en [6].

$$\kappa = \delta \text{ si } n > (\delta-1)\{p(\Delta-1, \tfrac{g-4}{2}) + p(\Delta-1, D-\tfrac{g}{2})\}; \tag{5.3}$$

$$\lambda = \delta \text{ si } n > (\delta-1)\{p(\Delta-1, \tfrac{g-2}{2}) + p(\Delta-1, D-\tfrac{g+2}{2})\}. \tag{5.4}$$

Estos resultados nos permiten mejorar los resultados conocidos para el caso bipartito no dirigido. En el teorema siguiente se determina una condición suficiente sobre el número de vértices para que G sea super-κ.

Teorema 5.5.2 *Sea G un grafo bipartito con parámetro $\ell \geq 2$, diámetro D, orden n y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \geq 3$, respectivamente. Entonces, G es super-κ si*

$$n > \delta\{p(\Delta-1, \ell-2) + p(\Delta-1, D-\ell-1)\} + (\Delta-1)^{D-\ell} + (\Delta-1)^{\ell-1}.$$

Demostración: Por las hipótesis y debido a (5.3) el grafo G es maximalmente conectado. Sea F, V^-, V^+, V_i y V'_j como siempre. Ahora necesitamos la siguiente notación: Para cada $f_j \in F$, $1 \le j \le \delta$, sea $1 \le a(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap V^-| < \Delta$ y sea $1 \le a'(f_j) = |\Gamma(f_j) \cap V^+| < \Delta$, donde $a(f_j) + a'(f_j) \le \Delta$, ésto es, $a'(f_j) \le \Delta - a(f_j)$. Para cada $f_j \in F$ se definen los siguientes conjuntos, $V_{i,j} = \{x \in V_i \,|\, d(x, f_j) = i\}$, $1 \le j \le \delta$, $1 \le i \le \mu$. Entonces, tenemos $|V_i| \le \sum_{j=1}^{\delta} |V_{i,j}| \le \sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1}$. Análogamente, para cada $1 \le i \le \mu'$, $|V'_i| \le \sum\limits_{j=1}^{\delta} a'(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} \le \sum\limits_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1}$.

En virtud del Corolario 5.2.3 (a) podemos suponer $\mu \ge \ell$, y, por tanto, $\mu \le \mu' \le D - \mu \le D - \ell$. Estudiamos los siguientes casos:

(a) $\mu \ge \ell + 1$, $V'_{D-\ell-1} = \emptyset$, ésto es, $\mu' \le D - \ell - 2$. Entonces el orden $n = |V|$ de G debe satisfacer

$$
\begin{aligned}
&n = \sum_{i=1}^{\mu} |V_i| + \sum_{i=1}^{\mu'} |V'_i| + |F| \le \\
&\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\mu'} \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \delta = \\
&\sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)p(\Delta - 1, \mu - 1) + \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, \mu' - 1) + \delta \le \\
&\delta + \delta\Delta p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \le \delta\{1 + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\},
\end{aligned}
$$

puesto que $\mu \le \mu' \le D - \ell - 2$, y, $\delta \ge 3$ se tiene que

$$\Delta p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \le (\Delta - 1)^2 p(\Delta - 1, D - \ell - 3) \le p(\Delta - 1, D - \ell - 1).$$

Si $V'_{D-\ell-1} \ne \emptyset$, del mismo modo que para digrafos, considerando $y \in V'_{D-\ell-1}$, obtenemos que $d(x, y) = D$ para todo $x \in V_\mu$, de donde $\mu = \ell + 1$. Es decir, $\Gamma(x) \subset V_\ell$, $\Gamma(y) \subset V'_{D-\ell-2}$. Este hecho implica que

$$|V_{\ell+1}| \le \frac{\Delta - 1}{\delta} |V_\ell|, \quad |V'_{D-\ell-1}| \le \frac{\Delta - 1}{\delta} |V'_{D-\ell-2}|.$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
&n = \sum_{i=1}^{\ell} |V_i| + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} |V'_i| + |F| + |V_{\ell+1}| + |V'_{D-\ell-1}| \le \\
&\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-2} \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \delta + \\
&\tfrac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\delta} \{a(f_j)(\Delta - 1)^{\ell} + (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{D-\ell-2}\}.
\end{aligned}
$$

El lado derecho de la relación anterior es máximo cuando $a(f_j) = 1$, debido a que $\ell \leq D - \ell - 2$. En consecuencia,

$$n \leq \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 1) + p(\Delta - 1, D - \ell - 2)\} + (\Delta - 1)^{\ell} + (\Delta - 1)^{D-\ell-1} \leq$$
$$\delta\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + (\Delta - 1)^{\ell-1} + (\Delta - 1)^{D-\ell},$$

ya que

$$\delta\{(\Delta - 1)^{\ell-1} - (\Delta - 1)^{D-\ell-1}\} + (\Delta - 1)^{\ell} + (\Delta - 1)^{D-\ell-1} \leq$$
$$(\Delta - 1)^{\ell-1} + (\Delta - 1)^{D-\ell},$$

puesto que $-(\Delta - 1)^{D-\ell-1} \leq -(\Delta - 1)^{\ell+1}$, y, $\delta + (\Delta - 1) \leq \delta(\Delta - 1)^2$, ya que $\delta \geq 3$.

(b) $\mu = \ell$, $\mu' \leq D - \ell$. Si $V'_{D-\ell} = \emptyset$, entonces

$$n \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-1} \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \delta \leq$$
$$\sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)p(\Delta - 1, \ell - 1) + \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))p(\Delta - 1, D - \ell - 2) + \delta.$$

Esta expresión es máxima cuando $a(f_j) = 1$, puesto que ahora $\ell \leq D - \ell - 1$. Entonces,

$$n \leq \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + \delta(\Delta - 1)^{\ell-1} \leq$$
$$\delta\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + (\Delta - 1)^{\ell-1} + (\Delta - 1)^{D-\ell},$$

ya que $(\delta - 1)(\Delta - 1)^{\ell-1} \leq (\Delta - 1)^{\ell} \leq (\Delta - 1)^{D-\ell}$.

Si $V'_{D-\ell} \neq \emptyset$, del mismo modo que para digrafos, sucede que $\Gamma(x) \subset V_{\ell-1}$, para todo $x \in V_\ell$, y, $\Gamma(y) \subset V'_{D-\ell-1}$, para todo $y \in V'_{D-\ell}$. Este hecho implica que

$|V_\ell| \leq \frac{\Delta-1}{\delta}|V_{\ell-1}|$, $\quad |V'_{D-\ell}| \leq \frac{\Delta-1}{\delta}|V'_{D-\ell-1}|$. Por tanto,

$$n = \sum_{i=1}^{\ell-1} |V_i| + \sum_{i=1}^{D-\ell-1} |V'_i| + |F| + |V_\ell| + |V'_{D-\ell}| \leq$$
$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\delta} a(f_j)(\Delta - 1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{D-\ell-1} \sum_{j=1}^{\delta} (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{i-1} + \delta +$$
$$\frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\delta} \{a(f_j)(\Delta - 1)^{\ell-1} + (\Delta - a(f_j))(\Delta - 1)^{D-\ell-1}\}.$$

Como en casos anteriores esta relación es máxima cuando $a(f_j) = 1$, debido a que $\ell \leq D - \ell$. En consecuencia,

$$n \leq \delta\{p(\Delta - 1, \ell - 2) + p(\Delta - 1, D - \ell - 1)\} + (\Delta - 1)^{\ell-1} + (\Delta - 1)^{D-\ell}. \quad \square$$

De un modo similar razonaríamos en el caso de ramas. Por consiguiente, teniendo en cuenta que para grafos bipartitos $2\ell + 2 = g$, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3 *Sea G un grafo bipartito con girth g ($\ell = \frac{g-2}{2}$), diámetro D, orden n, y grados máximo y mínimo Δ y $\delta \geq 3$ respectivamente. Entonces,*

(a) G es super-κ si $g \geq 6$ y

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, \tfrac{g-6}{2}) + p(\Delta - 1, D - \tfrac{g}{2})\} + (\Delta - 1)^{D-\frac{g}{2}+1} + (\Delta - 1)^{\frac{g}{2}-2}.$$

G es super-κ si $g = 4$ y $n > \delta\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\}$.

(b) $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $g \geq 6$ y

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \tfrac{g-6}{2}) + p(\Delta - 1, D - \tfrac{g}{2})\} + (\Delta - 1)^{D-\frac{g}{2}+1} + (\Delta - 1)^{\frac{g}{2}-2}.$$

$\kappa_1 \geq 2\delta - 2$ si $g = 4$ y $n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, D - 2) + 1\}$.

(c) G es super-λ si

$$n > \delta\{p(\Delta - 1, \tfrac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \tfrac{g+2}{2})\} + (\Delta - 1)^{\frac{g}{2}-1} + (\Delta - 1)^{D-\frac{g}{2}}.$$

(d) $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$ si

$$n > (2\delta - 3)\{p(\Delta - 1, \tfrac{g-4}{2}) + p(\Delta - 1, D - \tfrac{g+2}{2})\} + (\Delta - 1)^{\frac{g}{2}-1} + (\Delta - 1)^{D-\frac{g}{2}}.$$

□