

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

*Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de
Doctorado de Matematica Aplicada*

**ESTUDIO SOBRE ALGUNAS
NUEVAS CLASES DE
CONECTIVIDAD CONDICIONAL
EN GRAFOS DIRIGIDOS**

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Capítulo 6

Extraconectividad

6.1 Introducción

Sea \mathcal{P} una propiedad cualquiera de un (di)grafo G y sea $F \subset V(G)$. La \mathcal{P} -conectividad de G , denotada como $\kappa(G, \mathcal{P})$ es el mínimo $|F|$ tal que $G - F$ está desconectado de tal manera que cada componente conexa de $G - F$ tiene la propiedad \mathcal{P} . Según Harary [43], $\kappa(G, \mathcal{P})$ designa *la conectividad condicional de G con respecto a \mathcal{P}* . Análogamente se define *la rama-conectividad condicional de G con respecto a \mathcal{P}* , $\lambda(G, \mathcal{P})$, es decir, el mínimo cardinal de un conjunto de ramas cuya supresión desconecta el grafo en componentes de manera que todas ellas tienen la propiedad \mathcal{P} . La potencial importancia de los diferentes tipos de conectividad condicional está unida al concepto de supervivencia de las componentes cuando la red se interrumpe o falla totalmente, expresado al especificar las propiedades de las componentes resultantes.

Algunos valores de conectividad condicional han sido estudiados. Ver [43]. Aunque se puede elegir cualquier propiedad \mathcal{P} para la \mathcal{P} -conectividad, algunas elecciones serán más útiles que otras. Así por ejemplo, cuando \mathcal{P} es la propiedad de que cada componente C es no trivial, la conectividad condicional $\kappa(G, |C| > 1)$, $[\lambda(G, |C| > 1)]$ si existe, mide la superconectividad del (di)grafo. Es decir, bajo este aspecto la superconectividad se presenta como una clase de conectividad condicional. En la siguiente sección abordamos una generalización de esta propiedad en el caso de grafos, la propiedad \mathcal{P}_η , que consiste en que cada componente de G tenga más de η vértices.

En [24] y [25] fue estudiada la conectividad condicional $\kappa(G, \mathcal{P}_\eta)$ bajo el nom-

bre de *extraconectividad* denotada como κ_η , y también se estudió su versión para ramas λ_η . Por ejemplo, la conectividad usual y la superconectividad de G corresponden a κ_0 y κ_1 respectivamente. Recuérdese que una condición suficiente para que un grafo ℓ -geodético tenga máxima conectividad [rama-conectividad] puede ser formulada en términos de ℓ y D como sigue. (Ver [23], [54] y [55]).

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \delta & \text{si } D \leq 2\ell - 1; \\ \lambda_0 &= \delta & \text{si } D \leq 2\ell. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Como ya comentamos en el Capítulo 4 se tiene también que

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\geq 2\delta - 2 & \text{si } D \leq 2\ell - 2; \\ \lambda_1 &\geq 2\delta - 2 & \text{si } D \leq 2\ell - 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Todo lo expuesto en los capítulos anteriores sugiere la siguiente extensión de conjunto no η -trivial contenida en [25]. Si H es un subgrafo de G y $v \in V(H)$ denotamos por $N_H(v)$ el conjunto $\Gamma(v) \setminus V(H)$ y por $N(H)$ el conjunto $\bigcup_{v \in V(H)} N_H(v)$, que denominaremos vecindad de H . Dado un grafo $G = (V, A)$ y un entero $\eta \geq 0$, decimos que $F \subset V(G)$ es *no η -trivial* si F no contiene un conjunto $N(H)$ donde H es un subgrafo de G con k vértices, $0 \leq k \leq \eta$ (Para $\eta = 0$, cualquier $F \subset V$ es no η -trivial).

Definición 6.1.1 Llamamos *extraconectividad* de un grafo G y la denotamos como κ_η al mínimo cardinal de un conjunto desconector no η -trivial. Análogamente se define λ_η .

Si $\eta > 1$, decimos que $\kappa_\eta, [\lambda_\eta]$ miden la η -extraconectividad de G . Supongamos que un árbol (un grafo conexo sin ciclos) $T_{\eta+1}$, con $\eta + 1$ vértices cada uno con grado δ en G , es un subgrafo de G . Si $F = N(T_{\eta+1})$, entonces $T_{\eta+1}$ es una componente de $G - F$. Además si $G - F$ es no conexo y las demás componentes tienen al menos $\eta + 1$ vértices, entonces es claro que $\kappa_\eta \leq |F| \leq (\eta + 1)\delta - 2\eta$. Nuestro principal propósito es dar condiciones suficientes sobre el diámetro para que $\kappa_\eta, [\lambda_\eta]$ sea óptima, esto es, $\kappa_\eta \geq (\eta + 1)\delta - 2\eta, [\lambda_\eta \geq (\eta + 1)\delta - 2\eta]$.

Como ya hemos dicho antes, la extraconectividad fue definida y estudiada en [24], y también en [25] donde se establecieron condiciones suficientes, relacionando el diámetro de G con su girth, para asegurar óptimos valores para estas conectividades condicionales, tras de lo cual formularon la conjetura de que dichas condiciones se podían mejorar. Para los grafos en los cuales tal $\kappa_\eta, [\lambda_\eta]$ existe, se

encontraron condiciones suficientes sobre el diámetro para obtener óptima extraconectividad, más concretamente se demostraron los siguientes resultados. Sea $\eta \geq 2$ un entero y sea G un grafo ℓ -geodético, con grado mínimo $\delta \geq 3$ y diámetro D . Entonces

$$\begin{aligned} \kappa_\eta &\geq (\eta + 1)\delta - 2\eta \quad \text{si} \quad D \leq \begin{cases} 2\ell - \eta - 1, & \eta \text{ par} \\ 2\ell - \eta - 2, & \eta \text{ impar} \end{cases} \\ \lambda_\eta &\geq (\eta + 1)\delta - 2\eta \quad \text{si} \quad D \leq \begin{cases} 2\ell - \eta, & \eta \text{ par} \\ 2\ell - \eta - 1, & \eta \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

A partir de estos resultados y basándonos en los trabajos mencionados, hemos mejorado y generalizado estos resultados cuando el girth es $g \geq \eta + 5$. Concretamente, hemos establecido condiciones suficientes que relacionan el girth $g \geq 2\ell + 1$, el grado mínimo δ y el diámetro D . Este trabajo está contenido en [10].

6.2 Grafos con extraconectividad óptima

Diremos que un grafo G está η -extraconectado de forma óptima cuando el orden de los conjuntos desconectores no η -triviales sea como mínimo $(\eta + 1)\delta - 2\eta$. A modo de ejemplo la Figura 6.1 muestra que el grafo de Petersen está 1-extraconectado de manera óptima. Nos proponemos establecer condiciones suficientes sobre el diámetro que aseguren que el grafo está η -extraconectado de forma óptima. Con este fin supondremos de ahora en adelante que η es un entero positivo, $\tau(\eta) = (\eta + 1)\delta - 2\eta$, G es un grafo con girth $g \geq \eta + 5$, grado mínimo $\delta \geq 3$, y $F \subset V(G)$, $|F| = \kappa_\eta < \tau(\eta)$, es un conjunto de vértices desconector no η -trivial. Entonces, $G - F$ está desconectado de modo que en las componentes hay más de η vértices. Obsérvese que la función $\tau(\eta)$ da el máximo número de vértices de la vecindad de un árbol con $\eta + 1$ vértices, cada uno de grado δ en G , y en consecuencia es una medida del valor óptimo de la η -extraconectividad. En particular, $\tau(0)$ es el grado mínimo δ del grafo. Los dos lemas siguientes nos dan información sobre la estructura de cualquier componente de $G - F$.

Lema 6.2.1 *En cualquier componente de $G - F$ hay un camino de longitud al menos $\eta + 3$. Además, cualquier vértice v de $G - F$ está en un camino de longitud al menos $\lceil \frac{\eta + 3}{2} \rceil$.*

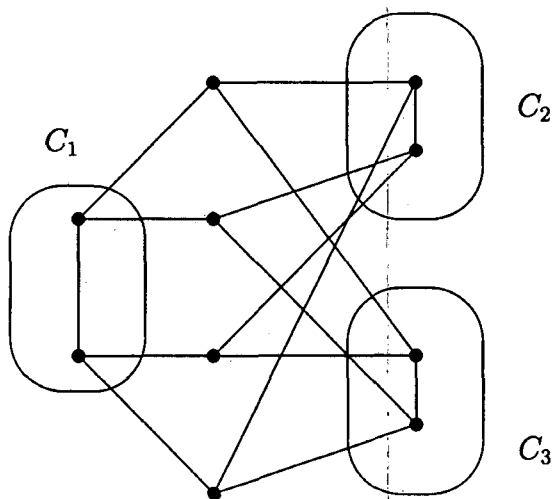


Figura 6.1: Extraconectividad del grafo de Petersen

Demostración: Denotemos por C la componente a la que el vértice v pertenece. Si C contiene un ciclo, su longitud sería al menos $\eta + 5$ puesto que $g \geq \eta + 5$, por lo que el resultado es claro en este caso. Supongamos que C es un árbol. La condición sobre el girth también implica que $N_C(u) \cap N_C(u') = \emptyset$ para cualquier par de vértices $u, u' \in V(C)$ tales que $d(u, u') \leq \eta + 2$, ya que si no se formaría un ciclo de longitud a lo sumo $\eta + 4$. De aquí que, como C tiene más de η vértices, C debe tener diámetro al menos $\eta + 3$, porque en caso contrario $|N(C)| = |F| \geq \tau(\eta)$. Por tanto, cualquier componente contiene un $u \leftrightarrow u'$ camino corto de longitud al menos $\eta + 3$. Consecuentemente, para cualquier v existe en $G - F$, o bien un camino $u \leftrightarrow v$, o bien un camino $v \leftrightarrow u'$ de longitud al menos $\lceil \frac{\eta+3}{2} \rceil$. \square

De hecho, la demostración anterior muestra que F es un conjunto desconectador no η' -trivial para $\eta' = \eta, \eta + 1, \eta + 2, \eta + 3$, por lo que se tiene que $\kappa_\eta \leq \kappa_{\eta+1} \leq \kappa_{\eta+2} \leq \kappa_{\eta+3} \leq |F|$. En particular, si F es de mínimo orden, entonces $\kappa_\eta = |F|$ y, por tanto, $\kappa_\eta = \kappa_{\eta+1} = \kappa_{\eta+2} = \kappa_{\eta+3}$.

Dada una componente C de $G - F$ la *profundidad* de C es

$$\mu(C) = \max_{v \in V(C)} d(v, F).$$

Consideremos un vértice $v \in V(C)$ tal que $d(v, F) < \mu(C)$ y δ de sus adyacentes, v_1, \dots, v_δ , designamos por f_1, \dots, f_δ los vértices de F a mínima distancia de cada

v_i . Bien pudiera ser que todos fuesen iguales tal como se ilustra en la Figura 6.2 sin que se cierre un sólo ciclo. (Por ejemplo, cuando haya $\delta - 1$ caminos cortos $v_i \leftrightarrow f_i$ que contengan al vértice v). Sin embargo, si $d(v, F) = \mu(C)$ los caminos

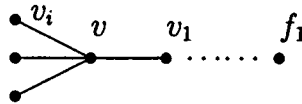


Figura 6.2: Necesidad de alejamiento máximo

cortos $v_i \leftrightarrow f_i$ miden $\mu(C)$ o $\mu(C) - 1$ y por tanto, no pueden contener al vértice v . En este caso, si hubiese dos vértices $f_i = f_j$ se habría cerrado un ciclo de longitud a lo sumo $2\mu(C) + 2$. Teniendo presente esta observación obtenemos el siguiente resultado.

Lema 6.2.2 *La profundidad de cualquier componente C de $G - F$ satisface $\mu(C) \geq 2$.*

Demostración: La demostración es por contradicción. Supongamos que C es una componente de $G - F$ tal que $\max_{v \in V(C)} d(v, F) = 1$. Consideremos un camino en C de longitud η , $P = u_0 u_1 \dots u_\eta$. Para cada vértice $v \in N_P(u_i)$, $0 \leq i \leq \eta$, sea $f_v \in F$ un vértice a mínima distancia de v y sea $F_i \subset F$ el conjunto de tales vértices f_v . Nótese que o bien $v = f_v$, o bien $d(v, f_v) = 1$. Como $g \geq \eta + 5$, se tiene que para cada $1 \leq i \leq \eta - 1$, $|F_i| \geq \delta - 2$, que $|F_0| \geq \delta - 1$ y $|F_\eta| \geq \delta - 1$, y que $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq \eta$. Por tanto, $|F| \geq \sum_{i=0}^{\eta} |F_i| \geq (\eta + 1)\delta - 2\eta$, lo cual es una contradicción. \square

Como consecuencia del lema anterior $D \geq 4$. Por tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.2.3 *Sea G un grafo con diámetro D , girth $g \geq \eta + 5$, y grado mínimo $\delta \geq 3$. Entonces*

$$\kappa_\eta \geq \tau(\eta) \text{ si } D \leq 3 \leq \begin{cases} 2\ell - \eta - 1, & g \text{ impar} \\ 2\ell - \eta, & g \text{ par} \end{cases}$$

\square

Puesto que $\ell \geq 2$ ya que $g \geq 5$, este resultado es equivalente para $\eta = 0$ al establecido en (6.1). Para $\eta = 1$ obtenemos $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$, es decir, G tiene

superconectividad óptima. En este caso se mejora el resultado establecido en (6.2). Además, para $\eta = 2$ y $\eta = 3$ las cotas dadas en (6.3) son también mejoradas.

Nuestro principal resultado es el siguiente.

Teorema 6.2.4 *Sea G un grafo ℓ -geodético, $\ell > \lfloor (\eta + 3)/2 \rfloor$, con grado mínimo $\delta \geq 3$, y diámetro D . Entonces*

$$\kappa_\eta \geq \tau(\eta) \text{ si } D \leq \begin{cases} 2\ell - 5 & (3 \leq \eta \leq \delta + 2) \\ 2\ell - 7 & (\delta + 3 \leq \eta \leq 2\delta + 1) \\ 2\ell - 9 & (2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3) \\ 2\ell - \eta + 2\delta - 5 & (\eta \geq 2\delta + 4) \\ 2\ell - \eta + 2\delta - 4 & (\eta \geq 2\delta + 5, \eta \text{ impar}) \end{cases}$$

Las anteriores cotas superiores sobre el diámetro podrían ser también escritas en términos del girth g en lugar del parámetro ℓ . Por ejemplo, puesto que $g \geq 2\ell + 1$, tenemos que si $D \leq g - \eta + 2(\delta - 3)$ y $\eta \geq 2\delta + 4$, entonces $\kappa_\eta \geq \tau(\eta)$. Nótese que el grado mínimo δ de G aparece explícitamente en las cotas superiores sobre D . De aquí que, para valores de η suficientemente grandes con respecto a δ , las condiciones suficientes conocidas dadas en (6.3) para que G esté extraconectado de manera óptima son mejoradas.

Para probar el Teorema 6.2.4 necesitamos los siguientes conceptos y notaciones. Sea T un árbol contenido en una componente de $G - F$. Para cada vértice v de T consideraremos un camino, que llamaremos camino extendido desde v , $T^*(v) = v_0v_1 \dots v_{s-1}v_s$, donde $s \geq 1$, $v_0 = v$, $v_1 \notin V(T)$, y tal que $d(v_i, F) > d(v_{i-1}, F)$, $1 \leq i \leq s$, y $d(h, F) \leq d(v_s, F)$ para cada $h \neq v_{s-1}$ adyacente a v_s (si tal camino no existe, sea $s = 0$ y consideramos el camino trivial $T^*(v) = v$). Además, definimos $N_T^*(v)$ como el conjunto de vértices adyacentes a v_s que son diferentes de v_{s-1} (si $s = 0$, entonces $N_T^*(v) = N_T(v)$) y sea $N^*(T) = \bigcup_{v \in V(T)} N_T^*(v)$, conjunto que denominaremos vecindad extendida del árbol T . Para cualquier $h \in N_T^*(v)$, f_h denotará un vértice en F tal que $d(h, f_h) = d(h, F)$. Dado un árbol T y un camino $P = u_0u_1 \dots u_m$, $u_0 \in V(T)$ y $u_i \notin V(T)$, $1 \leq i \leq m$, denotamos por $T \oplus P$ el nuevo árbol obtenido al unir a T el camino P . Además, sea T^* el árbol extendido obtenido al unir el camino $T^*(v)$ por cada $v \in V(T)$. Esto es, si $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, entonces $T^* = T \oplus T^*(v_1) \oplus \dots \oplus T^*(v_r)$. Nótese que, en cierto sentido, T^* está tan lejos como es posible del conjunto F . Dado un camino P en el grafo G , $|P|$ denotará

su longitud, y, dados $v, v' \in V(T)$, $p_T(v, v')$ denotará el camino $v \leftrightarrow v'$ en T . Además, D_T designará el diámetro del árbol T .

Las demostraciones de nuestros resultados discurren, en líneas generales, a través de la siguiente idea, ya usada para probar el Lema 6.2.2. Supongamos que el cardinal de un conjunto desconectador no η -trivial con mínimo orden es tal que $|F| < \tau(\eta)$. En cualquier componente C de $G - F$, encontraremos un árbol T tal que $|N^*(T)| > |F|$. De este modo tendremos que $f_h = f_{h'} = f$ para ciertos $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, $h \neq h'$, $u, v \in V(T)$. Además, las condiciones sobre las distancias a F que cada vértice de T satisfará implicarán que la longitud del camino cerrado $W = f \leftrightarrow h \overset{T^*(u)}{\oplus} p_T(u, v) \oplus T^*(v) \overset{h'}{\leftrightarrow} f = f \leftrightarrow h \overset{u_s \dots u_1 p_T(u, v) v_1 \dots v_s}{\leftrightarrow} h' \leftrightarrow f$, donde $f \leftrightarrow h$ y $h' \leftrightarrow f$ son caminos cortos, será menor que el girth g del grafo, llegando a una contradicción. La conclusión es que $|F| \geq \tau(\eta)$ y en consecuencia G tendrá η -extraconectividad óptima. Un punto importante del razonamiento es notar que W contiene un ciclo, es decir, que no es un camino acíclico, ya que $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, y así, el vértice adyacente con h en el camino corto $f \leftrightarrow h$ no es u_s , y análogamente el vértice adyacente con h' en el camino corto $h' \leftrightarrow f$ no es v_s .

La siguiente proposición, que debe ser comparada con el Lema 6.2.2, será utilizada en la demostración del Teorema 6.2.4.

Lema 6.2.5 *Para $\delta \geq 5$ y $\eta \geq \delta + 1$, la profundidad de cualquier componente C de $G - F$ satisface $\mu(C) \geq 3$.*

Demostración: Supongamos que existe una componente C tal que $\mu(C) = 2$. Sea $z \in V(C)$ un vértice tal que $d(z, F) = 2$ y denotemos por S_z el árbol formado por z y δ de sus vértices adyacentes. Claramente, S_z está contenido en C . Además, como $\eta \geq \delta + 1$, podemos considerar en C un árbol T' con η vértices que contenga a S_z , y tal que $D_{T'} \leq (\eta - \delta - 1) + 2$. Ver Figura 6.3. Su árbol extendido T'^* tiene diámetro a lo sumo $|T'^*(u) \oplus p_{T'}(u, v) \oplus T'^*(v)| \leq (\eta - \delta + 1) + 2$, siendo $u, v \in V(T')$ —nótese que $|T'^*(v)| \leq 1$ para cada $v \in V(T')$ porque $\mu(C) = 2$. Ahora, vamos a añadir un vértice a T' para conseguir otro árbol T con $\eta + 1$ vértices de tal manera que el diámetro de su árbol extendido T^* continúe acotado superiormente por $\eta - \delta + 3$. Para ello, si existe un vértice $s \in V(T')$ tal que $|T'^*(s)| = 1$, entonces consideraremos $T = T' \oplus T'^*(s)$ (ver Figura 6.3). En este caso tenemos que $D_{T^*} \leq D_{T'^*}$. De otro modo, si $|T'^*(s)| = 0$ para cada $s \in V(T')$, consideramos $T = T' \oplus se$, donde $e \in N(T') \cap V(C)$. Ahora tenemos

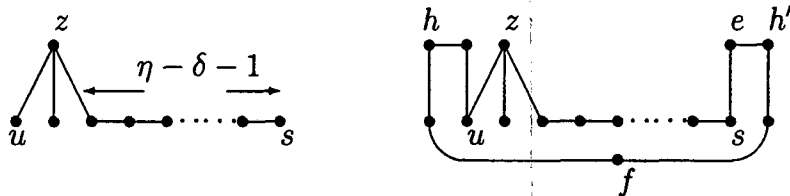


Figura 6.3: Árboles T' y $T = T' \oplus T^*(s)$

que $D_{T^*} \leq |p_T(u, e) \oplus T^*(e)|$, donde $u \in V(T)$. Así, $D_{T^*} \leq (D_{T'} + 1) + 1 \leq \eta - \delta + 3$. Además, para cualesquiera par de vértices diferentes $u, v \in V(T)$, se cumple $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$, ya que $g \geq n + 5$. Entonces, como $|N_T^*(v)| \geq |N_T(v)|$ para cada $v \in V(T)$, se tiene que $|N^*(T)| \geq |N(T)| \geq \tau(\eta)$. Por tanto, $f_h = f_{h'}$ para ciertos $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, $h \neq h'$, $u, v \in V(T)$. Luego, a partir de $f \leftrightarrow hT^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)h' \leftrightarrow f$ encontramos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $d(h, F) + 1 + D_{T^*} + 1 + d(h', F) \leq 3 + (\eta - \delta + 3) + 3$, ésto es, $\eta - \delta + 9 \geq g$, una contradicción, puesto que $\delta \geq 5$ y $g \geq \eta + 5$. \square

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del lema anterior y mejora, para $\eta \geq \delta + 1$ y $\delta \geq 5$, el resultado dado en la Proposición 6.2.3.

Proposición 6.2.6 *Sea G un grafo con diámetro D , girth $g \geq \eta + 5$, y grado mínimo $\delta \geq 5$. Sea $\eta \geq \delta + 1$. Entonces,*

$$\kappa_\eta \geq \tau(\eta) \text{ si } D \leq 5 \leq \begin{cases} 2\ell - \eta + 1, & g \text{ impar} \\ 2\ell - \eta + 2, & g \text{ par} \end{cases}$$

\square

La demostración del Teorema 6.2.4 está organizada del siguiente modo. En primer lugar, daremos la demostración para los primeros valores de η , a saber, $3 \leq \eta \leq 2\delta + 1$. En estos casos el árbol considerado en una componente de $G - F$ se obtiene directamente de la estrella S_z formada sencillamente por un vértice z situado a máxima distancia de F y δ de sus adyacentes. Para $\eta \geq 2\delta + 2$ se necesitará un árbol T con una estructura no tan simple. Tras describir la estructura de T , estudiaremos el diámetro de su extensión T^* . Entonces podremos asegurar que en cualquier componente existe un árbol con más de η vértices

tal que el diámetro de su extensión está adecuadamente acotado. Finalmente, acabaremos la demostración del Teorema 6.2.4 para $\eta \geq 2\delta + 2$.

Demostración del Teorema 6.2.4 ($3 \leq \eta \leq 2\delta + 1$.)

Para $\eta = 3, 4, 6$ aplicamos (6.3). Extenderemos este resultado hasta incluir cualquier valor de η menor o igual que $2\delta + 1$.

En primer lugar, supongamos que $3 \leq \eta \leq \delta + 2$ y que $D \leq 2\ell - 5$, lo cual implica que $\ell \geq 5$, ya que $\ell \leq D$, y por tanto el girth $g \geq 2\ell + 1 \geq 11$. La demostración es por contradicción. Sea F un conjunto desconectador no η -trivial de orden mínimo tal que $|F| = \kappa_\eta \leq \tau(\eta) - 1 = \eta(\delta - 2) + \delta - 1 \leq \delta^2 + \delta - 5$. Consideremos dos componentes diferentes C_z y C_y de $G - F$ y sean $z \in C_z$, $y \in C_y$ dos vértices a máxima distancia de F . Es evidente que $D \geq d(z, y) \geq d(z, F) + d(y, F) = \mu(C_z) + \mu(C_y)$. Entonces, si $\mu = \mu(C_z) \leq \mu(C_y)$, debe ser $\mu \leq \ell - 3$. Además, $g \geq \eta + 5$, ya que por hipótesis $\ell > \lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$, lo que significa que $\mu \geq 2$. Entonces S_z , el árbol formado por z y δ de sus vértices adyacentes, está contenido en C_z . Consideramos los siguientes casos:

(i) Existen al menos dos vértices $z_1, z_2 \in \Gamma(z)$ tales que $|S_z^*(z_1)| = |S_z^*(z_2)| = 1$. En este caso, el árbol $T = S_z \oplus S_z^*(z_1) \oplus S_z^*(z_2)$ está contenido en C_z . El orden de T es $\delta + 3$ y para todo $u, v \in V(T)$, $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$, puesto que $g \geq 2\ell + 1 \geq 11$. Entonces, como para cada $v \in V(T)$, $|N_T^*(v)| \geq |N_T(v)|$, se cumple que $|N^*(T)| \geq |N(T)| \geq \tau(\delta+2) = \delta^2 + \delta - 4 > |F|$. Por tanto, se tiene que $f_h = f_{h'}$ para ciertos $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, $h \neq h'$, $u, v \in V(T)$. El diámetro de T^* es a lo sumo $|T^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)| \leq 4$, ya que $T^*(v)$ tiene longitud a lo sumo uno para cada $v \in V(T)$. Ver Figura 6.4. En cualquier caso, encontramos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $d(h, F) + d(h', F) + 6 \leq 2\mu + 6 \leq 2\ell$, lo cual es una contradicción ya que $g \geq 2\ell + 1$. Por tanto, $|F| = \kappa_\eta \geq \tau(\eta)$.



Figura 6.4: Casos (i), (ii)

(ii) Existe un único vértice $z_1 \in V(S_z)$ tal que $|S_z^*(z_1)| = |z_1 t| = 1$. Como $d(t, F) = \mu$, se tiene que $\Gamma(t) \subset V(C_z)$. Consideremos el árbol S_t . Si hubiese un

vértice $w \in \Gamma(t)$, $w \neq z_1$, tal que $|S_t^*(w)| = 1$, entonces el árbol S_t satisface las condiciones supuestas en (i) y el teorema es cierto. Así pues supongamos que $|S_t^*(w)| = 0$ para cualquier $w \in \Gamma(t)$, $w \neq z_1$, y consideremos $T = S_z \oplus z_1tw$ (Ver Figura 6.4). Este árbol T tiene orden $\delta + 3$ y para todo $u, v \in V(T)$, $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$. Como en el caso (i), otra vez tenemos que $f_h = f_{h'}$ para ciertos $h, h' \in N^*(T)$, $h \neq h'$. Ahora, para cualquier $v \in V(T)$, $v \neq z_1$, $|T^*(v)| = 0$ y $|T^*(z_1)| \leq 1$. Luego, como antes se tiene un ciclo cuya longitud es a lo sumo $d(h, F) + d(h', F) + 6 \leq 2\mu + 6 \leq 2\ell$, una contradicción.

(iii) Para cualquier $u \in V(S_z)$, se cumple $|S_z^*(u)| = 0$. Si $\eta < \delta + 1$, entonces $T = S_z$ es un árbol que tiene orden mayor o igual que $\eta + 1$ y $|N^*(T)| = |N(T)| \geq \tau(\eta) > |F|$. Como en casos precedentes encontramos un ciclo de longitud a lo sumo $2\mu + 4$, lo cual es una contradicción. Si $\eta \geq \delta + 1$, entonces $|N(S_z) \cap V(C_z)| \geq 1$ porque la componente C_z tiene más de η vértices. Ahora tenemos los siguientes subcasos:

- Si $\{e\} = N(S_z) \cap V(C_z)$, entonces $\mu = 2$. Denotemos como z_e el vértice de S_z al cual e es adyacente, y sea e' un vértice en $V(C_z) \setminus V(S_z)$ adyacente a e (tal vértice existe porque por el Lema 6.2.1 en C_z hay un camino de longitud al menos $\eta + 3$). El árbol $T = S_z \oplus z_e e e'$ tiene orden $\delta + 3$, diámetro 4, y para todo $u, v \in V(T)$, $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$. Luego $|N^*(T)| > |F|$ y puesto que $N(T - \{e, e'\}) \subset F$, encontramos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $1 + |p_T(u, e')| + |T^*(e')| + 1 + 2 \leq 9$, donde $u \in V(T)$, $u \neq e, e'$. (Ver Figura 6.5) Una vez más una contradicción, puesto que $g \geq 11$.

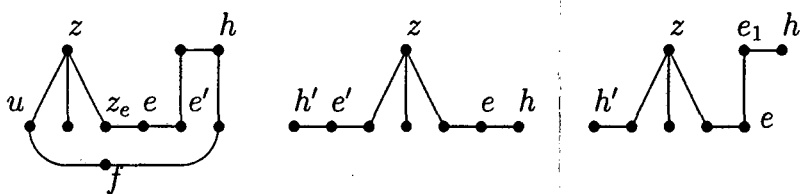


Figura 6.5: Caso (iii)

- Existen $e, e' \in N(S_z) \cap V(C_z)$, adyacentes respectivamente a $z_e, z_{e'} \in V(S_z)$, tales que $|T^*(e)| = |T^*(e')| = 0$, donde $T = S_z \oplus z_e e \oplus z_{e'} e'$. Ver Figura 6.5. Ahora, $|N^*(T)| = |N(T)| > |F|$ y por tanto, en G existe un ciclo cuya longitud es a lo sumo $2\mu + 6$, es decir, una contradicción.

- Existe $e \in N(S_z) \cap V(C_z)$, adyacente a $z_e \in V(S_z)$, tal que $|Q_e^*(e)| = |ee_1| = 1$ donde $Q_e = S_z \oplus z_e e$. Ahora, consideremos $T = S_z \oplus z_e e e_1$, y razonemos como

antes. Ver Figura 6.5.

• El caso que queda por considerar es cuando $|Q_e^*(e)| = |ee_1e_2| = 2$ para cualquier $e \in N(S_z)$, con a lo sumo una excepción e' , para el que $|Q_{e'}^*(e')| = 0$. Si tal vértice e' no existe consideremos el árbol $T = Q_e \oplus Q_e^*(e)$, donde e es cualquier vértice de $N(S_z)$. Razonando como en casos precedentes encontramos un ciclo con longitud a lo sumo $|f \leftrightarrow h'uzz_e ee_1e_2h \leftrightarrow f| \leq (\mu - 2) + 7 + \mu = 2\mu + 5$, ya que $h' \in N(S_z)$, de nuevo una contradicción. Por otra parte, si e' existe, entonces $d(z_{e'}, F) \leq \mu - 1$, porque si $d(z_{e'}, F) = \mu$ entonces para cualquier $s \in \Gamma(z_{e'}) \setminus \{e', z\}$ se tendría $d(s, F) \geq \mu - 1$ y entonces debería ser $|Q_s^*(s)| \leq 1$, pero $s \in N(S_z)$ y estamos suponiendo que $|Q_s^*(s)| = 2$. Consideremos ahora el árbol $T = S_z \oplus Q_{e'}^*(e')$, $e \neq e'$. Ver Figura 6.6. Razonando como en casos precedentes encontramos en G un ciclo con longitud a lo sumo $|f \leftrightarrow e'z_ezz_e ee_1e_2h \leftrightarrow f| \leq (\mu - 1) + 7 + \mu = 2\mu + 6$, de nuevo una contradicción.

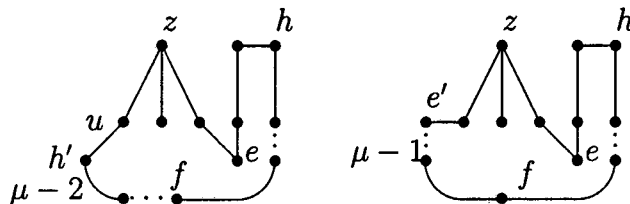


Figura 6.6: Caso (iii)

Ahora, supongamos que $D \leq 2\ell - 7$ y $\delta + 3 \leq \eta \leq 2\delta + 1$. En este caso $\ell \geq 7$ lo cual implica que $g \geq 15$. Entonces el orden del conjunto desconector es $|F| \leq \tau(\eta) - 1 \leq 2\delta^2 - 2\delta - 3$ y $\mu = \mu(C_z) \leq \ell - 4$.

Veamos que $\mu = 2$ es imposible. En virtud del Lema 6.2.5 debe ser $3 \leq \delta \leq 4$, y razonando como en la demostración de este lema consideramos en C un árbol T' de η vértices que contiene a S_z . El diámetro de T' es a lo sumo $\eta - \delta + 1$. A partir de T' obtenemos un árbol T con orden $\eta + 1$ tal que su extendido T^* tenga diámetro como mucho $\eta - \delta + 3$ del siguiente modo. Si existe un vértice $s \in V(T')$ tal que $|T'^*(s)| = 1$, entonces sea $T = T' \oplus T'^*(s)$. Si no, si $|T'^*(s)| = 0$ para cada vértice $s \in V(T')$, entonces sea $T = T' \oplus se$, donde $e \in N(T') \cap V(C)$. Es obvio que $D_{T^*} \leq \eta - \delta + 3$. Además, tenemos que $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$ para cualesquiera $u, v \in V(T)$ ya que $g \geq \eta + 5$. Entonces, como $|N_T^*(v)| \geq |N_T(v)|$ para todo $v \in V(T)$, se cumple que $|N^*(T)| \geq |N(T)| \geq \tau(\eta)$. Por tanto, se tiene que $f_h = f_{h'}$, $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, $h \neq h'$, $u, v \in V(T)$. Luego, a partir de $f \leftrightarrow hT^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)h' \leftrightarrow f$ encontramos un ciclo cuya longitud es a lo

sumo $d(h, F) + 1 + D_{T^*} + 1 + d(h', F) \leq 3 + (\eta - \delta + 3) + 3 \leq \delta + 10 \leq 14$, puesto que $\eta \leq 2\delta + 1$ y $\delta \leq 4$, una contradicción porque $g \geq 15$.

Ahora, supongamos que $\mu \geq 3$ y consideremos los siguientes subcasos:

(iv) Existen al menos dos vértices $z_1, z_2 \in \Gamma(z)$ tales que $|S_z^*(z_1)| = |S_z^*(z_2)| = 1$ y supongamos que $S_z^*(z_1) = z_1t$. En este caso, el árbol $T = S_z \oplus S_t \oplus S_z^*(z_2)$ está contenido en C_z , donde $S_z \oplus S_t$ es el árbol obtenido uniendo S_z y S_t como se muestra en la Figura 6.7. El orden de T es $2\delta + 2$, el diámetro $D_T = 5$ y para todo $u, v \in V(T)$, $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$, puesto que $g \geq 15$. Entonces, $|N^*(T)| \geq |N(T)| = \tau(2\delta + 1) = 2\delta^2 - 2\delta - 2 > |F|$. Por consiguiente, $f_h = f_{h'} = f$ para ciertos $h \in N_T^*(u)$, $h' \in N_T^*(v)$, $h \neq h'$, siendo $u, v \in V(T)$. El diámetro del árbol extendido T^* es a lo sumo $|T^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)| \leq 6$, puesto que para cualquier $v \in V(T)$, $T^*(v)$ tiene longitud a lo sumo uno. Ver Figura 6.7. Luego, en G podemos encontrar un ciclo $f \leftrightarrow h'T^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)h \leftrightarrow f$ cuya longitud es como mucho $d(h', F) + d(h, F) + 8 \leq 2\mu + 8 \leq 2\ell$, una contradicción, puesto que $g \geq 2\ell + 1$. Por tanto, $|F| = \kappa_\eta \geq \tau(\eta)$.

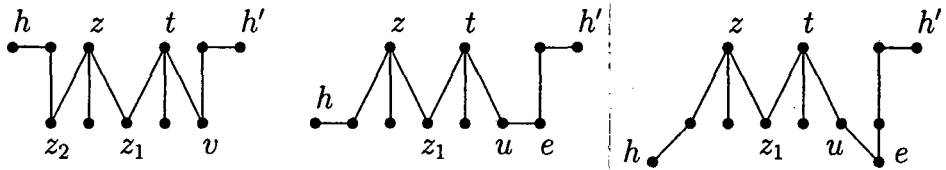


Figura 6.7: Casos (iv) y (v)

(v) Existe un único vértice $z_1 \in \Gamma(z)$ tal que $|S_z^*(z_1)| = |z_1t| = 1$. Consideremos el árbol S_t . Si existe un vértice $w \in \Gamma(t)$, $w \neq z_1$, tal que $|S_t^*(w)| = 1$, entonces el árbol S_t satisface las condiciones supuestas en (iv) y el teorema vale. Luego, supongamos que $|S_t^*(w)| = 0$ para cualquier $w \in \Gamma(t)$, $w \neq z_1$, y consideremos $T' = S_z \oplus S_t$. Si $\eta \leq 2\delta$, el árbol T' es el que se busca en la componente y podemos razonar como en casos precedentes. Si $\eta = 2\delta + 1$, consideremos un vértice $e \in N(T') \cap V(C_z)$ adyacente a $u \in V(T')$ y sea $T = T' \oplus ue$, el cual tiene orden $2\delta + 2$, diámetro $D_T = 5$ y para cualquier $v \in V(T)$, $v \neq z_1, e$, $|T^*(v)| = 0$. Si $|T^*(e)| \leq 1$ razonando como en casos anteriores encontramos el ciclo $f \leftrightarrow h \oplus p_T(v, e) \oplus T^*(e)h' \leftrightarrow f$ cuya longitud es como mucho $2\mu + 8 \leq 2\ell$, una contradicción. Si para cualquier $e \in N(T') \cap V(C_z)$, $|T^*(e)| = 2$, tenemos que en el ciclo anterior $d(h, F) \leq \mu - 2$, ya que $h \in N(T') \cap C_z$ (ver Figura 6.7) y por tanto, obtenemos una vez más una contradicción.

(vi) Para todo $u \in V(S_z)$, se cumple que $|S_z^*(u)| = 0$. Nótese que $|N(S_z) \cap V(C_z)| \geq \delta(\delta - 1)$ porque $\mu \geq 3$. Consideremos los siguientes subcasos:

- Existe algún $u \in V(S_z)$, $u \neq z$, tal que $d(u, F) = \mu$. Consideremos el árbol $T' = S_z \oplus S_u$ cuyo orden es 2δ . Si existe algún $w \in V(S_u)$ tal que $|T'^*(w)| = 1$, entonces S_u satisface las condiciones supuestas en o bien (iv) o bien (v) y el teorema vale. Luego, podemos suponer que $|T'^*(w)| = 0$ para cada $w \in V(T')$. Si $\eta \leq 2\delta - 1$, entonces consideremos T' y razonemos como antes. Si $\eta \geq 2\delta$, sea $e \in N(T') \cap V(C_z)$, adyacente a $w \in V(T')$, y consideremos el árbol $Q = T' \oplus we$ contenido en C_z . Si $1 \leq |Q^*(e)| \leq 2$, entonces $T = Q \oplus Q^*(e)$ nos lleva a contradicción. En caso contrario, si $|Q^*(e)| = 0$ para cualquier $e \in N(T') \cap V(C_z)$, entonces basta considerar $e_1, e_2 \in N(T') \cap V(C_z)$, adyacentes respectivamente a $w_1, w_2 \in V(T')$, y el árbol $T = T' \oplus w_1e_1 \oplus w_2e_2$ nos lleva de nuevo a contradicción; ver Figura 6.8.

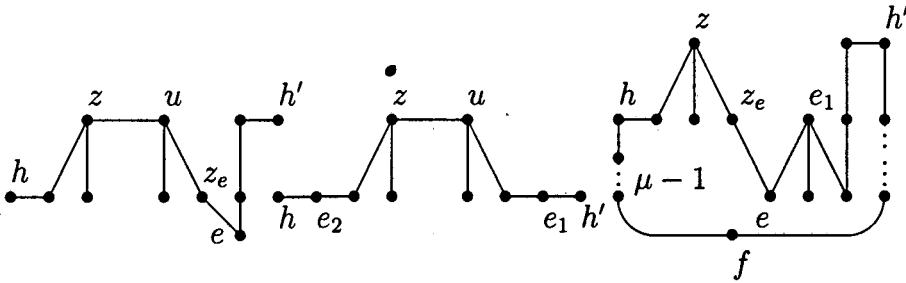


Figura 6.8: Caso (vi)

- Supongamos que $d(u, F) = \mu - 1$ para cualquier $u \in V(S_z)$. Entonces tenemos $d(h, F) \leq \mu - 1$ para cualquier $h \in N_{S_z}(u)$ ya que $|S_z^*(u)| = 0$. Supongamos, en primer lugar, que existe $e \in N(S_z) \cap V(C_z)$, adyacente a $z_e \in V(S_z)$, tal que $1 \leq |Q^*(e)| \leq 2$, donde $Q = S_z \oplus z_e e$. Si ee_1 es una rama de $Q^*(e)$, entonces consideremos $T = S_z \oplus z_e e \oplus S_{e_1}$. Ver Figura 6.8. Tiene orden $2\delta + 2$, $D_T = 5$, y como antes $|N^*(T)| > |F|$. Además, $|p_T(u, v)| = D_T$ si y sólo si $u \in \Gamma(z)$, $u \neq z_e$, y $v \in \Gamma(e_1)$; ver Figura 6.8. Por tanto, a partir de $f \leftrightarrow hp_T(u, v) \oplus T^*(v)h' \leftrightarrow f$ encontramos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $(\mu - 1) + 1 + D_T + 3 + \mu \leq 2\mu + 8 \leq 2\ell$, una contradicción, puesto que $g \geq 2\ell + 1$. Finalmente, supongamos que para cada $e \in N(S_z) \cap V(C_z)$, $|Q^*(e)| = 0$. Como $\mu \geq 3$, es claro que $|N(S_z) \cap V(C_z)| \geq \delta + 1$ y por tanto se obtiene el árbol T uniendo $\delta + 1$ de estos vértices a S_z . □

De la demostración del teorema anterior se desprende el siguiente corolario.

Corolario 6.2.7 *Sea G un grafo ℓ -geodético, $\ell > \lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$, con grado mínimo $\delta \geq 3$. Sea F un conjunto de corte no η -trivial tal que $|F| = \kappa_\eta \leq \tau(\eta) - 1$, entonces la profundidad de cualquier componente C de $G - F$ satisface,*

$$\begin{aligned} \mu(C) &\geq \ell - 2, \text{ si } 3 \leq \eta \leq \delta + 2, \\ \mu(C) &\geq \ell - 3, \text{ si } \delta + 3 \leq \eta \leq 2\delta + 1. \quad \square \end{aligned}$$

De ahora en adelante, supondremos que $\eta \geq 2\delta + 2$ y que $z \in V(C_z)$ es un vértice tal que $d(z, F) = \mu(C_z) = \mu$. Por el Lema 6.2.1 sabemos que z está en un camino P'_z cuya longitud es al menos $\lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$. Para completar nuestro teorema principal, necesitamos tener en cuenta un árbol T contenido en C_z que a su vez contenga al vértice z . La estructura de T es como sigue:

Tipo (a) Sea $\mu \geq 3$. Consideremos un subcamino P de P'_z que contiene a z como vértice interno cuya longitud p es

$$p = |P| = \begin{cases} 4, & \text{si } 2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3, \\ \lfloor \frac{\eta-2\delta+4}{2} \rfloor, & \text{si } \eta \geq 2\delta + 4. \end{cases}$$

Nótese que siempre $p \geq 4$. La estructura de T se muestra en Figura 6.9. Podemos suponer que la distancia en P desde z a los vértices finales de este camino es al menos dos. Añadimos en el vértice z todos los caminos de longitud 2 de la forma $zz_i z_{ij}$, $z_i \notin V(P)$, $1 \leq i \leq \delta - 2$, $1 \leq j \leq \delta - 1$. Además, suponemos que P es tal que en cada vértice interno v , $v \neq z$, se pueden añadir las $\delta - 2$ ramas vv_i , $1 \leq i \leq \delta - 2$. De este modo obtenemos un árbol T que tiene diámetro $D_T = p$, y, puesto que $g \geq \eta + 5 > p$, el orden de T es $n_T = p(\delta - 1) + (\delta - 2)^2 + 1$. Teniendo presente que $p(\delta - 1) = 2p + (\delta - 3)p$, cuando $\eta \geq 2\delta + 4$ tenemos que,

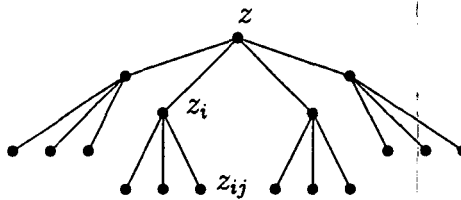


Figura 6.9: Árboles tipo (a) y (b)

$n_T = \eta - 1 + (\delta - 3)^2 + (\delta - 3)p$, si η es impar y $n_T = \eta + (\delta - 3)^2 + (\delta - 3)p$, si η es par. Por tanto, $n_T \geq \eta + 1$, salvo para $\delta = 3$ en cuyo caso $n_T = 2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor$.

Análogamente, si $2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3$, entonces $p = 4$ y de aquí que $n_T = \delta^2 + 1$. En consecuencia, como $2\delta + 4 \leq \delta^2 + 1$, tenemos que $n_T \geq \eta + 1$.

Como $\mu \geq 3$, un árbol tal como el descrito claramente existe si η y δ son tales que la longitud del camino P es $p \leq 4$. Por otra parte, si $p \geq 5$, ésto es, cuando $\eta \geq 2\delta + 6$, tal árbol podría no existir, ya que en este caso es posible que algún vértice v en el camino que contiene a z , verificase que $d(v, F) = 1$, y tal vez no se pudieran añadir las $\delta - 2$ ramas vv_i . En este caso consideramos un árbol de tipo (b) como el que describimos a continuación.

Tipo (b) Sea $\mu \geq 3$, y $\eta \geq 2\delta + 6$. Ahora la longitud de los caminos que contienen al vértice z es $p < \lfloor \frac{\eta - 2\delta + 4}{2} \rfloor$. Los vértices finales del camino P , t y t' , satisfacen $d(t, F) = d(t', F) = 1$ y para cada vértice interno w de P se cumple $d(w, F) > 1$. Hemos de tener en cuenta que P tiene longitud $p \geq 2(\mu - 1)$ (ya que en C_z debe haber al menos un camino de longitud $2\mu - 2$ que contenga a z , puesto que $g \geq \eta + 5$) lo que implica que $p \geq 4$. De nuevo, podemos suponer que la distancia en P desde z a los vértices finales t y t' es al menos dos. Consideremos un árbol T' tal como se ilustra en la Figura 6.9. Esto es, T' se obtiene, al igual que los del tipo (a), añadiendo $\delta - 2$ ramas a cada vértice interno de un camino que contiene a z , y uniendo además al vértice z todos los caminos de longitud 2 de la forma $zz_i z_{ij}$, $z_i \notin V(P)$, $1 \leq j \leq \delta - 1$, $1 \leq i \leq \delta - 2$. El orden de T' es $p(\delta - 1) + (\delta - 2)^2 + 1$. Ahora, si $\delta \geq 4$ y el orden de T' es menor que $\eta + 1$, entonces consideramos un árbol T de orden al menos $\eta + 1$ que contiene a T' . En caso contrario sea $T = T'$. Por otro lado, si $\delta = 3$ y el orden de T' es menor que $2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor$, entonces sea T un árbol de orden al menos $2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor$ que contenga a T' . En caso contrario sea $T = T'$. Como cualquier componente de $G - F$ tiene más de η vértices, la existencia de tal árbol T está, en cualquier caso, asegurada. Luego, si $\delta \geq 4$, el diámetro de T , D_T , es a lo sumo $p + (\eta - (\delta - 1)p - (\delta - 2)^2) = \eta - (\delta - 2)p - (\delta - 2)^2$, y si $\delta = 3$, $D_T \leq 2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor - (2p + 2) + p = 2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor - p - 2$.

Tipo (c) Sea $\mu = 2$, $3 \leq \delta \leq 4$ y $\eta \geq 2\delta + 2$. Consideremos un camino P de longitud p que contiene a z como vértice interno. Como en el caso precedente, los vértices finales t y t' de P satisfacen $d(t, F) = d(t', F) = 1$ y $d(w, F) = 2$ para cada vértice interno w de P . En primer lugar, se obtiene un árbol T' uniendo $\delta - 2$ ramas a cada vértice interno de P tal como se ilustra en la Figura 6.10. Si el orden del árbol T' , $(\delta - 1)p - (\delta - 3)$, es al menos $\eta - \delta$, entonces $T = T'$. En caso contrario, consideramos un árbol T de orden $\eta - \delta$ que contenga a T' . El diámetro de T , D_T , es a lo sumo $\eta - (\delta - 2)p - 3 \leq \eta - 2\delta + 1$, porque $p \geq 2(\mu - 1) = 2$.

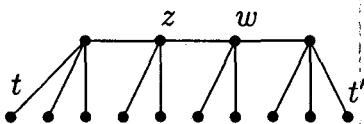


Figura 6.10: Árboles tipo (c)

Nótese que debido al Lema 6.2.5 este árbol sólo tiene sentido si $3 \leq \delta \leq 4$.

Resumimos las características de estos árboles para $\eta \geq 2\delta + 2$ en la Tabla 6.1. Ahora consideraremos el árbol extendido, T^* . Nótese que dado un vértice v de T , la longitud del camino $T^*(v) = vv_1 \dots v_s$ es a lo sumo $|p_T(v, z)|$ porque $d(v_i, F) > d(v_{i-1}, F)$, $1 \leq i \leq s$, $d(z, F) = \mu$ y μ es la mayor distancia posible a F desde un vértice en la componente. El siguiente resultado nos permite acotar el diámetro de T^* .

Lema 6.2.8 *El diámetro de T^* es a lo sumo:*

$$\text{Tipo (a): } 2D_T \leq \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{\eta - 2\delta + 4}{2} \right\rfloor, & \eta \geq 2\delta + 4 \\ 8, & 2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3 \end{cases}$$

$$\text{Tipo (b): } 2(\mu - 1) + D_T \leq \begin{cases} \eta - \delta^2 + 8, & \delta \geq 4 \\ 2 \left\lfloor \frac{\eta}{2} \right\rfloor - 2, & \delta = 3 \end{cases}$$

$$\text{Tipo (c): } D_T + 2 \leq \eta - 2\delta + 3$$

Además, para cualquier par de vértices diferentes u, v de T , $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$.

Demostración: Para cualquier par de vértices diferentes u, v de T , hemos de acotar la longitud del camino

$$T^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v) = u_s u_{s-1} \dots u_1 p_T(u, v) v_1 \dots v_{s'-1} v_{s'} \quad (6.4)$$

Según el tipo de T , consideremos los siguientes casos:

Tipo (a) En primer lugar, supongamos que $p_T(u, z)$ y $p_T(z, v)$ tienen un subcamino común de longitud $k > 0$, y supongamos $|p_T(u, z)| \geq |p_T(z, v)|$. Como ya se estableció antes, la longitud del camino $T^*(u)$, es a lo sumo $|p_T(u, z)|$. Análogamente, la longitud de $T^*(v)$ es a lo sumo $|p_T(v, z)|$. Por tanto, como $|p_T(z, v)| \leq k + 1$ debido a la estructura de T , la longitud de (6.4) está acotada superiormente por

$$2|p_T(u, z)| + 2|p_T(z, v)| - 2k \leq 2(|p_T(u, z)| + 1) \leq 2D_T.$$

	η	$n_T \geq$	$D_T \leq$
Tipo (a)	$\geq 2\delta + 4$	si $\delta \geq 4, \eta + 1$ si $\delta = 3, 2 \lfloor \eta/2 \rfloor$	$\lfloor (\eta - 2\delta + 4)/2 \rfloor$
	$2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3$	$\eta + 1$	4
Tipo (b)	$\eta \geq 2\delta + 6$	si $\delta \geq 4, \eta + 1$ si $\delta = 3, 2 \lfloor \eta/2 \rfloor$	$\eta - (\delta - 2)p - (\delta - 2)^2$ $2 \lfloor \eta/2 \rfloor - p - 2$
Tipo (c)	$\eta \geq 2\delta + 2$	$\eta - \delta$	$\eta - 2\delta + 1$

Tabla 6.1: Características de los árboles T

Por otra parte, si $p_T(u, z)$ y $p_T(z, v)$ son caminos rama-disjuntos, entonces $|p_T(u, z)| + |p_T(z, v)| = |p_T(u, v)| \leq D_T$, y, razonando igual que antes encontramos que la longitud de (6.4) está acotada por $2(|p_T(u, z)| + |p_T(z, v)|) \leq 2D_T$.

Tipo (b) Para acotar la longitud del camino dado en (6.4), hemos de tener en cuenta que en árboles de tipo (b), $|T^*(u)|$, y $|T^*(v)|$ miden como mucho $\mu - 1$, que $p \geq 2(\mu - 1)$, $\mu \geq 3$, y que $|p_T(u, v)| \leq D_T$. Así pues, la longitud del camino (6.4) está acotada por $2(\mu - 1) + D_T \leq \eta - p(\delta - 3) - (\delta - 2)^2 \leq \eta - \delta^2 + 8$, si $\delta \geq 4$ porque $p \geq 4$, o bien por $p + 2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor - p - 2 = 2 \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor - 2$, si $\delta = 3$.

Tipo (c) En este caso $\mu = 2$, lo que significa que $|T^*(u)|$, y $|T^*(v)|$ miden como mucho 1. Es decir, la longitud del camino (6.4) es a lo sumo $D_T + 2 \leq \eta - 2\delta + 3$, ya que $|p_T(u, v)| \leq D_T$.

Como, en cualquier caso, tenemos que el diámetro de T^* es a lo sumo η , estos resultados implican que todos los vértices del camino (6.4) deben ser diferentes y que $N_T^*(u) \cap N_T^*(v) = \emptyset$, porque en caso contrario $g \leq \eta + 2$, lo cual es una contradicción, ya que $\delta \geq 3$ y $g \geq \eta + 5$. \square

En orden a asegurar la existencia en cualquier componente de $G - F$ de un árbol T tal que $|N^*(T)| \geq \tau(\eta)$, necesitamos que el orden de T sea al menos $\eta + 1$. Como podemos ver en la Tabla 6.1 podría no ser así para árboles de tipo (c), o árboles de tipo (a) o tipo (b) cuando $\delta = 3$ y $n \geq 2\delta + 4$. De todos modos, disponemos del resultado establecido en el siguiente lema.

Lema 6.2.9 Consideremos en una componente de $G - F$ un árbol T de tipo (a), tipo (b) o tipo (c) con orden menor que $\eta + 1$. Es posible extender T a un árbol Q con orden $\eta + 1$ de tal modo que el diámetro de Q^* satisfaga

- Tipo (a): $D_{Q^*} \leq 2D_T$;
- Tipo (b): $D_{Q^*} \leq 2(\mu - 1) + D_T$;
- Tipo (c): $D_{Q^*} \leq D_T + 4 \leq \eta - 2\delta + 5$ ($3 \leq \delta \leq 4$).

Además, $N_{Q^*}^*(u) \cap N_{Q^*}^*(v) = \emptyset$, para cualquier par u, v de vértices diferentes de Q .

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que T es un árbol de tipo (a) o tipo (b), ésto es, $\delta = 3$ y $\eta \geq 2\delta + 4$. Hemos de tener presente que para cualquier vértice $s \in V(T)$, en árboles de tipo (a) se verifica que $|T^*(s)| \leq |p_T(s, z)| \leq D_T - 2$, y en árboles de tipo (b), $|T^*(s)| \leq \mu - 1$ donde $\mu \geq 3$. En primer lugar, supongamos que T tiene $\eta - 1$ vértices. En estas condiciones veremos que es posible obtener un árbol Q de orden $\eta + 1$ añadiendo dos vértices al árbol T tal que $D_{Q^*} \leq 2D_T$, si T es un árbol de tipo (a), o, $D_{Q^*} \leq D_T + 2(\mu - 1)$, si T es un árbol de tipo (b). Tenemos los siguientes casos:

(i) O bien existen dos vértices $s, s' \in V(T)$ tales que $|T^*(s)| = |T^*(s')| = 1$, en cuyo caso el árbol buscado es $Q = T \oplus T^*(s) \oplus T^*(s')$, o bien existe un vértice s tal que $|T^*(s)| \geq 2$ y en este caso el árbol es $Q = T \oplus T^*(s)$. De cualquier forma el árbol Q obtenido obviamente satisface que $D_{Q^*} \leq D_{T^*}$ y en virtud del Lema 6.2.8 $D_{T^*} \leq 2D_T$, si T es un árbol de tipo (a), o, $D_{T^*} \leq D_T + 2(\mu - 1)$, si T es un árbol de tipo (b).

(ii) Existe un único vértice $s \in V(T)$ tal que $|T^*(s)| = |ss_1| = 1$. Entonces $\Gamma(s_1) \subset C$, donde C designa la componente que contiene al árbol T . Sea $h \in \Gamma(s_1)$, $h \neq s$, y consideremos el árbol $Q = T \oplus ss_1h$. Para cualquier $s' \in V(Q)$

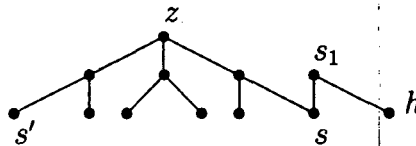


Figura 6.11: Caso (ii) para $\eta = 11$

tenemos que $D_{Q^*} \leq |Q^*(h)| + D_T + 2$. Por tanto, si T es de tipo (a), $|Q^*(h)| \leq |p_T(s, z)|$ y se cumple que $D_{Q^*} \leq 2D_T$, ya que $|p_T(s, z)| \leq D_T - 2$. Y si T es de tipo (b), $D_{Q^*} \leq (\mu - 1) + 2 + D_T \leq 2(\mu - 1) + D_T$, puesto que $\mu \geq 3$. (La Figura 6.11 ilustra este caso con el ejemplo particular $\eta = 11$).

(iii) Supongamos que para cualquier $s \in V(T)$, $|T^*(s)| = 0$. Luego debe ser $|N(T) \cap V(C)| \geq 1$. Consideremos los siguientes subcasos:

- Existe un vértice $e \in N(T) \cap V(C)$, adyacente a $s \in V(T)$, tal que $|T^*(e)| = |ee_1 \dots e_r| \geq 1$, donde $T' = T \oplus se$. Ahora, consideremos el árbol $Q = T \oplus see_1$. Esta situación se ilustra en la Figura 6.12 para el caso particular $\eta = 11$. Si T es de tipo (a) entonces $|Q^*(e)| \leq 1 + |Q^*(e_1)| \leq 1 + |p_T(s, z)| \leq D_T - 1$, porque en el peor caso $d(e_1, F) = d(s, F)$. En consecuencia $D_{Q^*} \leq 2D_T$. Si T es de tipo (b) tenemos que $|Q^*(e)| \leq \mu - 1$, y por tanto, $D_{Q^*} \leq D_T + 2(\mu - 1)$.

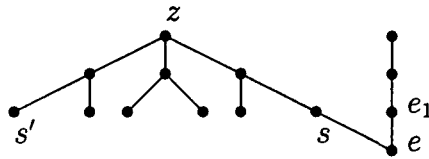


Figura 6.12: Caso (iii) para $\eta = 11$

- Existen $e_1, e_2 \in N(T) \cap V(C)$, adyacentes respectivamente a $s_1, s_2 \in V(T)$, tales que $|Q^*(e_1)| = |Q^*(e_2)| = 0$, donde $Q = T \oplus s_1e_1 \oplus s_2e_2$. Entonces $D_{Q^*} \leq D_T + 2$, y por tanto, lo que afirma el lema también se verifica.

- Si $\{e\} = N(T) \cap V(C)$, entonces por construcción de los árboles de tipo (a) y (b) debe ser $\mu = 3$. Luego si T es de tipo (a), corresponde al caso particular $\eta - 1 = 2\delta + 4 = 10$. Llamemos a esta estructura T_{10} . Y si T es de tipo (b) debe ser de la forma $T_{10} \oplus P$, donde, en el peor caso, P denota un camino de longitud a lo sumo $\eta - 11$, ya que T tiene $\eta - 1$ vértices. La Figura 6.13 ilustra un árbol de tipo (b) como el descrito cuando $\eta = 13$. Denotemos por s el vértice de T al cual

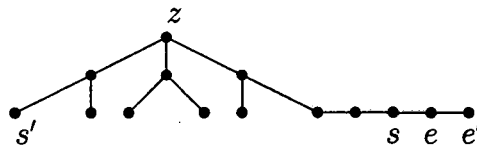


Figura 6.13: $\mu = 3$ y árbol tipo (b) para $\eta = 13$

e es adyacente. Como la componente C tiene más de η vértices, debe haber un vértice $e' \in V(C)$ adyacente a e . El árbol $Q = T \oplus see'$ tiene orden $\eta + 1$, y como $|Q^*(e')| \leq 2$ ya que $\mu = 3$, tenemos que $D_{Q^*} \leq |p_Q(s', e')| + |Q^*(e')| \leq D_T + 4$ para cualquier $s' \in V(Q)$. Por tanto si T es de tipo (a) $D_{Q^*} \leq 2D_T$, puesto que $D_T \geq 4$, y, si T es de tipo (b) $D_{Q^*} \leq D_T + 2(\mu - 1)$, puesto que $\mu = 3$.

Cuando el orden de T es η sólo es necesario añadir un vértice, tarea más fácil que la anterior. O bien existe un vértice $s \in V(T)$ tal que $|T^*(s)| = 1$, en cuyo caso el árbol es $Q = T \oplus T^*(s)$, o para cualquier $s \in V(T)$, $|T^*(s)| = 0$. Como debe haber un vértice $e \in N(T) \cap V(C)$ adyacente a $s \in V(T)$, el árbol que se busca es $Q = T \oplus se$.

Ahora supongamos que T es de tipo (c). En este caso $\mu = 2$, el orden de T es al menos $\eta - \delta$ y $3 \leq \delta \leq 4$. Supondremos el peor caso cuando T tiene precisamente $\eta - \delta$ vértices, y por consiguiente, es necesario añadir $\delta + 1$ vértices. Ahora $|N(T) \cap V(C)| \geq 1$, donde C designa la componente que contiene al árbol T . Consideremos los siguientes casos:

(iv) Existe al menos un vértice $s \in V(T)$, tal que $T^*(s) = ss_1$. El árbol $Q' = T \oplus S_{s_1}$ tiene orden η y $D_{Q'} \leq D_T + 2$. Si existe un vértice $u \in V(Q')$ tal que $|Q'^*(u)| = 1$, entonces el árbol $Q = Q' \oplus Q'^*(u)$ está contenido en C , tiene orden $\eta + 1$ y $D_{Q^*} \leq D_T + 4$. Si para cualquier $u \in V(Q')$, $|Q'^*(u)| = 0$, entonces el árbol $Q = Q' \oplus ue$ existe en C , siendo $e \in N(T) \cap V(C)$ un vértice adyacente al vértice u . Este árbol tiene orden $\eta + 1$ y $D_{Q^*} \leq D_T + 4$.

(v) Para cualquier vértice $s \in V(T)$, $|T^*(s)| = 0$. Supongamos que existe un vértice $e \in N(T) \cap V(C)$ adyacente a $s \in V(T)$ tal que $T_e^*(e) = ee_1$ siendo $T_e = T \oplus se$. Entonces el árbol $Q = T_e \oplus S_{e_1}$ está contenido en C , tiene orden $\eta + 1$ y $D_{Q^*} \leq D_T + 4$. Caso contrario, supongamos que $|T_e^*(e)| = 0$ para todo $e \in N(T) \cap C$. Sea $N(T) \cap V(C) = \{e_1, \dots, e_r\}$, $r \geq 1$, donde e_i es adyacente a $s_i \in V(T)$ y sea $T' = T \oplus s_1e_1 \oplus \dots \oplus s_re_r$. Si este árbol tiene orden $\eta + 1$ ($r \geq \delta + 1$) hemos terminado. Si $r = \delta$, entonces $Q = T' \oplus e_iv$, siendo v un adyacente a algún e_i . Supongamos que $1 \leq r \leq \delta - 1$.

Consideremos en la componente un árbol Q' con orden η que contiene a T' , ésto es, $Q' = T' \oplus P$, donde, en el peor caso, P es un camino de longitud $\delta - r$ unido a T' por cierto vértice e_i . El diámetro de Q' es como mucho $D_{T'} + \delta - r \leq D_T + \delta$ porque si $r = 1$ entonces $D_{T'} \leq D_T + 1$, y si $r \geq 2$ entonces $D_{T'} \leq D_T + 2$. En estas condiciones, su árbol extendido Q'^* tiene diámetro acotado superiormente por $|p_{Q'}(u, v) \oplus T^*(v)| \leq D_T + \delta + 1$, donde $u, v \in V(Q')$. Añadiendo a Q' un vértice obtenemos un árbol Q con orden $\eta + 1$ y tal que $D_{Q^*} \leq D_T + \delta + 1$. Así pues, si $\delta = 3$, entonces $D_{Q^*} \leq D_T + 4$. Si $\delta = 4$, se tiene que $D_{Q^*} \leq D_T + \delta \leq D_T + 4$. En efecto, si no fuese así, $D_{Q^*} \leq \eta - \delta + 2$ porque $D_T \leq \eta - 2\delta + 1$ para árboles de tipo (c). Para cualesquiera $u, v \in V(Q)$, se cumple que $N_Q^*(u) \cap N_Q^*(v) = \emptyset$ porque $g \geq \eta + 5$. Entonces, $|N^*(Q)| > |F|$ y portanto $f_h = f_{h'} = f$ con

$h, h' \in N^*(Q)$, $h \neq h'$. De aquí que encontremos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $d(h, F) + 1 + D_{Q^*} + 1 + d(h', F) \leq 3 + (\eta - \delta + 2) + 3 \leq \eta - \delta + 8 \leq \eta + 4$, lo cual es una contradicción ya que $g \geq \eta + 5$.

Finalmente, como en cualquier caso el diámetro de Q^* es a lo sumo η concluimos al igual que en el Lema 6.2.8 que $N_{Q^*}^*(u) \cap N_{Q^*}^*(v) = \emptyset$, para cualquier par u, v de vértices diferentes de Q . \square

Todos los resultados anteriores nos permiten concluir que en cualquier componente de $G - F$ existen árboles T de orden al menos $\eta + 1$ tales que sus árboles extendidos T^* tienen diámetro D_{T^*} acotado según el tipo de T , tal como indicamos en la Tabla 6.2.

Tipo (a)	$D_{T^*} \leq 2 \lfloor (\eta - 2\delta + 4)/2 \rfloor$	si $\eta \geq 2\delta + 4$
	$D_{T^*} \leq 8$	$2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3$
Tipo (b)	$D_{T^*} \leq \eta - \delta^2 + 8$	si $\delta \geq 4, \eta \geq 2\delta + 6$
	$D_{T^*} \leq 2 \lfloor \eta/2 \rfloor - 2$	si $\delta = 3, \eta \geq 2\delta + 6$
Tipo (c)	$D_{T^*} \leq \eta - 2\delta + 5$	$\eta \geq 2\delta + 2$

Tabla 6.2: Características de los árboles T^*

Ahora podemos finalizar la demostración del Teorema 6.2.4.

Demostración del Teorema 6.2.4 (continuación). ($\eta \geq 2\delta + 2$.)

Mostraremos el teorema por contradicción. Sea $F \subset V(G)$, un conjunto de vértices desconectador no η -trivial tal que $|F| = \kappa_\eta \leq \tau(\eta) - 1$. Entonces, $G - F$ está desconectado de modo que en las componentes hay más de η vértices. Sean C_z y C_y dos componentes diferentes de $G - F$ y sean $z \in C_z, y \in C_y$ dos vértices a máxima distancia de F . Es claro que $D \geq d(z, y) \geq d(z, F) + d(y, F) = \mu(C_z) + \mu(C_y)$. Supongamos que $\mu = \mu(C_z) \leq \mu(C_y)$.

Como $\ell > \lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$, podemos considerar en cada componente un árbol T de tipo (a), tipo (b), o tipo (c) de orden $\eta + 1$ dados en el Lema 6.2.9. Entonces, la cardinalidad del conjunto $N^*(T)$ satisface que, $|N^*(T)| \geq |N(T)| \geq \tau(\eta) > |F|$. Así pues, tenemos que $f_h = f_{h'} = f$ para ciertos $h, h' \in N^*(T)$, $h \neq h'$. Los vértices h e h' son adyacentes a u_s, u'_s , respectivamente, vértices finales de los

caminos $T^*(u)$, $T^*(v)$, para ciertos u y v en $V(T)$. En consecuencia, encontramos el siguiente ciclo:

$$f \leftrightarrow hT^*(u) \oplus p_T(u, v) \oplus T^*(v)h' \leftrightarrow f \quad (6.5)$$

donde $f \leftrightarrow h$ y $h' \leftrightarrow f$ son caminos cortos. La longitud del ciclo (6.5) es a lo sumo $2\mu + 2 + D_{T^*}$. Calculemos esta longitud para cada valor del diámetro según el tipo de árbol T .

(i) Si $D \leq 2\ell - \eta + 2\delta - 4$, $\eta \geq 2\delta + 5$ y η es impar, entonces $\mu \leq \ell + \delta - 2 - \frac{\eta+1}{2}$. Por tanto, debido al Lema 6.2.8 tenemos que

- Si el árbol T es de tipo (a), entonces $D_{T^*} \leq 2D_T \leq \eta - 2\delta + 3$. Entonces tendríamos que $|(6.5)| \leq 2\mu + 2 + D_{T^*} \leq (2\ell + 2\delta - 5 - \eta) + 2 + (\eta - 2\delta + 3) \leq 2\ell$.

- Si el árbol T es de tipo (b) y $\delta \geq 4$ entonces $D_{T^*} \leq \eta - \delta^2 + 8$, y de aquí que $|(6.5)| \leq 2\mu + 2 + D_{T^*} \leq (2\ell + 2\delta - 5 - \eta) + 2 + (\eta - \delta^2 + 8) \leq 2\ell$. Si $\delta = 3$, $D_{T^*} \leq \eta - 3$. Entonces, $|(6.5)| \leq (2\ell - \eta + 1) + 2 + (\eta - 3) \leq 2\ell$.

- Si el árbol T es de tipo (c), entonces en virtud del Lema 6.2.9 $D_{T^*} \leq \eta - 2\delta + 5$ y $\mu = 2$. Supongamos que $\mu < \ell + \delta - 2 - \frac{\eta+1}{2}$. Como en casos anteriores se prueba que $|(6.5)| \leq 2\mu + 2 + D_{T^*} \leq 2\ell$. Pero, si $\mu = 2 = \ell + \delta - 2 - \frac{\eta+1}{2}$, entonces $\ell = 3 - \delta + \frac{\eta+3}{2} \leq \frac{\eta+3}{2}$ lo cual es una contradicción con las hipótesis.

(ii) Si $D \leq \eta - 2\delta - 5$, $\eta \geq 2\delta + 4$ el razonamiento es similar al caso precedente.

(iii) Si $D \leq 2\ell - 9$ entonces $\mu \leq \ell - 5$, para $2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3$. Por tanto, en virtud del Lema 6.2.8 tenemos que si el árbol T es de tipo (a), entonces $D_{T^*} \leq 8$ y si el árbol T es de tipo (c), entonces $D_{T^*} \leq \eta - 2\delta + 5 \leq 8$. Luego, en ambos casos $|(6.5)| \leq (2\ell - 10) + 2 + (8) \leq 2\ell$.

En cualquier caso se cierra un ciclo de longitud estrictamente menor que $2\ell + 1$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $|F| = \kappa_\eta \geq \tau(\eta)$. \square

De este teorema podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 6.2.10 *Sea G un grafo ℓ -geodético, $\ell > \lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$, con grado mínimo $\delta \geq 3$. Sea F un conjunto de corte no η -trivial tal que $|F| = \kappa_\eta \leq \tau(\eta) - 1$, entonces la profundidad de cualquier componente C de $G - F$ satisface,*

$$\mu(C) \geq \ell + \delta - \frac{\eta + 3}{2}, \text{ si } \eta \geq 2\delta + 5, \eta \text{ impar.}$$

$$\mu(C) \geq \ell + \delta - \frac{\eta + 4}{2}, \text{ si } \eta \geq 2\delta + 4, \eta \text{ par.}$$

$$\mu(C) \geq \ell - 4, \text{ si } 2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3. \quad \square$$

6.3 Rama-extraconectividad

El objetivo de esta sección es estudiar los resultados de las secciones precedentes desde el punto de vista de la rama-conectividad. Si H es un subgrafo de $G = (V, A)$ denotamos por $w(H)$ al conjunto de ramas de G que tienen un vértice en H y otro en $G - H$. Dado un grafo $G = (V, A)$ y un entero $\eta \geq 0$, decimos que $E \subset A$ es *no η -trivial* si E no contiene un conjunto $w(H)$ donde H es un subgrafo de G con k vértices, $0 \leq k \leq \eta$ (Para $\eta = 0$, cualquier $E \subset A$ es no η -trivial).

Definición 6.3.1 Llamamos *rama-extraconectividad* de un grafo G y la denotamos como λ_η al mínimo cardinal de ramas de un conjunto desconectador no η -trivial.

Diremos que un grafo G está η -rama extraconectado de forma óptima cuando el orden de los conjuntos desconectores de ramas es al menos $\tau(\eta) = (\eta + 1)\delta - 2\eta$. Como antes sea $G = (V, A)$ un grafo ℓ -geodético con girth $g \geq \eta + 5$ y sea $E \subset A(G)$, $|E| = \lambda_\eta \leq \tau(\eta) - 1$ un conjunto de ramas desconectador no η -trivial de orden mínimo. A partir de esta minimalidad es obvio que $G - E = C_1 \cup C_2$, donde C_1 y C_2 son dos componentes conexas diferentes, y las únicas ramas entre ellas son las de E . Ahora consideremos $F = \{f \in V(C_1), ff' \in E\}$ y $W = \{f' \in V(C_2), ff' \in E\}$. Es evidente que en $G - E$ se verifica el mismo resultado que en el Lema 6.2.1. Denotemos por $\nu = \max_{v \in V(C_1)} d(v, F)$ y $\nu' = \max_{v \in V(C_2)} d(v, W)$ y supongamos que $\nu \leq \nu'$. Entonces obtenemos el siguiente lema que es similar a los Lemas 6.2.2 y 6.2.5.

Lema 6.3.1 Se cumple que $\nu \geq 1$ y si además, $\eta \geq \delta + 1$ y $\delta \geq 5$, entonces $\nu \geq 2$.

Demostración: La demostración es por contradicción. Supongamos que $\nu = 0$. Nótese que en este caso $V(C_1) = F$. Por la demostración del Lema 6.2.1 sabemos que hay un camino $P = x_0x_1x_2 \dots x_\eta$ en C de longitud η . Denotemos por $w_E(x)$ las ramas de E con vértice x y por $w_E(H) = \bigcup_{x \in V(H)} w_E(x)$. Tenemos que para cada $1 \leq i \leq \eta - 1$, $|w_E(x_i)| + |N_P(x_i) \cap V(C_1)| \geq \delta - 2$ y para $i = 0, \eta$, $|w_E(x_i)| + |N_P(x_i) \cap V(C)| \geq \delta - 1$. Puesto que para todo $f \in V(C_1)$, $|w_E(f)| \geq 1$ y el girth $g \geq \eta + 5$ se deduce que $|E| \geq \sum_{i=0}^{\eta} |w_E(x_i)| + |w_E(N_P(x_i) \cap V(C_1))| \geq |w_E(x_i)| + |N_P(x_i) \cap V(C_1)| \geq \tau(\eta)$, lo que es una contradicción y en consecuencia $\nu \geq 1$.

Ahora, supongamos que $\nu = 1$, $\eta \geq \delta + 1$, y $\delta \geq 5$. Sea $z \in V(C_1)$ un vértice tal que $d(z, F) = 1$. Como $\eta \geq \delta + 1$ podemos considerar en C_1 un árbol T de orden η que contiene a S_z . El diámetro de T^* es a lo sumo $D_T + 2 \leq \eta - \delta + 3$. Además, es posible extender T , mediante la adición de un vértice, a un árbol Q de orden $\eta + 1$ tal que $D_{Q^*} \leq \eta - \delta + 3$. De aquí que para cualesquiera par de vértices $u, v \in V(Q)$, $N_{Q^*}(u) \cap N_{Q^*}(v) = \emptyset$, ya que $g \geq \eta + 5$. Para cada $u \in V(Q)$, definimos $N^*(u)$ del mismo modo que en la sección precedente, salvo para un vértice $u \in F$ tal que $|Q^*(u)| = 0$. En este caso especial definimos $N^*(u) = \{u\}$. Entonces, $|N(Q^*)| \geq |N(Q)| > |F|$, y en consecuencia, para ciertos $h, h' \in N(Q^*)$, $h \neq h'$, tenemos que $f_h = f_{h'} = f \in F$. Luego, a partir de $f \leftrightarrow hQ^*(u) \oplus p_Q(u, v) \oplus Q^*(v)h' \leftrightarrow f$ encontramos un ciclo cuya longitud es a lo sumo $D_{Q^*} + 6 \leq \eta - \delta + 9$, lo cual es una contradicción porque $\delta \geq 5$ y $g \geq \eta + 5$. \square

Este último lema asegura que C_1 y C_2 tienen al menos $\delta + 1$ vértices. Con este resultado la versión para ramas del Teorema 6.2.4 puede ser establecida.

Teorema 6.3.2 *Sea $G = (V, A)$ un grafo ℓ -geodético, $\ell > \lfloor \frac{\eta+3}{2} \rfloor$, con grado mínimo $\delta \geq 3$, y diámetro D . Entonces,*

$$\lambda_\eta \geq \tau(\eta) \text{ si } \begin{cases} D \leq 2\ell - 4 & (3 \leq \eta \leq \delta + 2) \\ D \leq 2\ell - 6 & (\delta + 3 \leq \eta \leq 2\delta + 1) \\ D \leq 2\ell - 8 & (2\delta + 2 \leq \eta \leq 2\delta + 3) \\ D \leq 2\ell - \eta + 2\delta - 4 & (\eta \geq 2\delta + 4) \\ D \leq 2\ell - \eta + 2\delta - 3 & (\eta \geq 2\delta + 5, \eta \text{ impar}). \end{cases}$$

\square

Para $\eta \leq 2\delta + 1$ la demostración de este resultado está basada otra vez en la existencia en las componentes de un árbol con orden $\eta + 1$ obtenido a partir de S_z , y para $\eta \geq 2\delta + 2$ la demostración está basada en árboles de tipo (a), tipo (b), o tipo (c). La principal diferencia con respecto al caso de vértices ha sido ya mencionada en el Lema 6.3.1 y es la siguiente. Si existe $u \in V(T)$, $u \in F$, tal que $|T^*(u)| = 0$, entonces definimos $N^*(u) = \{u\}$.

Nótese que las condiciones suficientes conocidas dadas previamente en (6.3) para que G estuviese rama-extraconectado de forma óptima son mejoradas.