UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Matematica Aplicada III, dentro del programa de Doctorado de Matematica Aplicada

ESTUDIO SOBRE ALGUNAS NUEVAS CLASES DE CONECTIVIDAD CONDICIONAL EN GRAFOS DIRIGIDOS

Autor: Camino Balbuena Martinez
Directores: Josep Fabrega Canudas
Miguel Angel Fiol Mora

Barcelona, septiembre de 1995

Conclusiones

A continuación se expone un resumen de los resultados más significativos contenidos en esta tesis.

En el Capítulo 2 de esta memoria se ha realizado el estudio de la t-distancia conectividad introducida en [31]. Tras definir el t-grado $\delta(t)$ se han establecido desigualdades análogas a las clásicas $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, es decir, se ha visto que

$$\kappa(t) \leq \lambda(t) \leq \delta(t).$$

Se han encontrado cotas superiores para la t-distancia conectividad en función del orden y del diámetro que generalizan las dadas para la conectividad estándar en [58]. Estas cotas han servido para construir un digrafo G que tiene como t-distancia conectividades una secuencia dada de $D-1$ enteros positivos, así como para construir un digrafo G que muestra la independencia de los parámetros $\kappa(t)$, $\lambda(t)$, $\delta(t)$. También se han obtenido resultados similares en el caso no dirigido. Además, se han obtenido condiciones suficientes en términos del diámetro y del parámetro ℓ, para que un digrafo s-geodético sea maximalmente t-distancia conectado.

$$\begin{aligned} &\kappa(t) = \delta(t) \text{ para cualquier } t \leq 2s, &&\text{si } D \leq 2\ell - 1; \\ &\lambda(t) = \delta(t) \text{ para cualquier } t \leq 2s+1, &&\text{si } D \leq 2\ell. \end{aligned} \tag{1}$$

Como todo digrafo es al menos 1-geodético, estas condiciones cuando $t = 1$ son las ya formuladas en [23, 32, 31], por lo que constituyen una generalización de las mismas. El principal resultado del cual se derivan las condiciones suficientes referidas en (1) muestra que para un digrafo s-geodético con parámetro ℓ, la distancia conectividad $\kappa(2\ell)$ determina únivocamente las conectividades $\kappa(t)$ para cualquier $t \leq 2s$, y análogamente para $\lambda(t)$. También se han interpretado todos los resultados anteriores en el caso de grafos. Sin cambios significativos se ha llevado a cabo un estudio similar para digrafos y grafos bipartitos s-geodéticos, redescubriendo cuando $t = 1$ las mismas condiciones suficientes dadas en [31, 26] para asegurar que un digrafo bipartito con parámetro ℓ alcanza máxima conectividad.

En el Capítulo 3 se ha realizado un estudio de la conectividad κ y arco-conectividad λ de digrafos bipartitos con grado máximo Δ y diámetro D con gran cantidad de vértices. Como punto de partida se han utilizado los resultados (3.3) que Aïder probó en [1] para digrafos bipartitos d-regulares, junto con los resultados (3.4), que también han sido obtenidos en el capítulo anterior cuando $t = 1$. Los principales resultados de este capítulo unifican y mejoran a los mencionados y son las siguientes nuevas condiciones de tipo mixto, suficientes para asegurar máxima conectividad en digrafos bipartitos densos. Dado G un digrafo bipartito con parámetro ℓ, diámetro D, orden n, grados máximo y mínimo Δ y δ, respectivamente, y conectividades κ, λ, entonces,

$$\begin{aligned}
&\kappa = \delta \text{ si} \\
&\quad \text{(i)} \ \ \delta \geq 3 \text{ y } n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 2\} + 2; \\
&\quad \text{(ii)} \ \delta = 2 \text{ y } n > p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 1) - 1 + \tfrac{1}{2}\{\Delta^{\ell+1} - \Delta^{D-\ell-1}\}. \\
&\lambda = \delta \text{ si } \ n > (\delta - 1)\{p(\Delta, \ell) + p(\Delta, D - \ell - 2)\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Además se han encontrado algunos ejemplos particulares que muestran que estos resultados son los mejores posible. Se finaliza este estudio examinando resultados análogos, formulados en términos del girth, para el caso no dirigido.

En el Capítulo 4 se ha trabajado con digrafos superconectados. En primer lugar se ha calculado que la mínima profundidad de los fragmentos [α-fragmentos] determinados por un conjunto desconectador F [E] no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices [arcos] es $\ell - 1$. Este resultado es esencial en la obtención de condiciones suficientes sobre el diámetro en términos del parámetro ℓ para asegurar cotas inferiores sobre las medidas de superconectividad κ_1, λ_1, introducidas también en este capítulo. Concretamente,

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &\geq 2\delta - 2 \quad \text{si } D \leq 2\ell - 2; \\
\lambda_1 &\geq 2\delta - 2 \quad \text{si } D \leq 2\ell - 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Estos mismos resultados se hallan contenidos en [32], pero las demostraciones que se dan en este artículo son de tipo constructivo. A partir de estos resultados se mejora la cota dada en [30] sobre el orden del digrafo para obtener super-vértice-conectividad y además se ve que es la mejor posible. De este modo se responde negativamente a la conjetura planteada en [30], donde se afirmaba que la cota sobre el orden ya no era posible mejorarla. A continuación se definen los digrafos con superconectividad óptima como aquellos tales que $\kappa_1 \geq 2\delta - 2$, $\lambda_1 \geq 2\delta - 2$, y se encuentran las siguientes condiciones suficientes sobre el orden del digrafo que aseguran óptima superconectividad. Dado G un digrafo con diámetro D, $\ell \geq 2$, $\delta \geq 3$, entonces

$$\begin{aligned}
&\kappa_1 \geq 2\delta - 2 \text{ si} \\
&\quad n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell) - 2\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell+1}. \\
&\lambda_1 \geq 2\delta - 2 \text{ si} \\
&\quad n > (2\delta - 3)\{p(\Delta, \ell - 1) + p(\Delta, D - \ell - 1)\} + (\delta - 2)\Delta^{D-\ell}.
\end{aligned} \tag{4}$$

En la última sección de este capítulo se examinan todos los resultados anteriores para el caso de grafos. En una tabla se reflejan los órdenes de los grafos densos que se conocen hasta el momento junto con sus conectividades respectivas. Cabe señalar la mejora de las cotas conocidas hasta ahora cuando el girth es par, como por ejemplo la siguiente. Dado un grafo G, con grado mínimo $\delta \geq 3$ girth g y diámetro D, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\text{Si } D \leq g - 3 \quad \text{entonces el grafo es super-}\kappa \text{ y } \kappa_1 \geq 2\delta - 2. \\
&\text{Si } D \leq g - 2 \quad \text{entonces el grafo es super-}\lambda \text{ y } \lambda_1 \geq 2\delta - 2.
\end{aligned} \tag{5}$$

En particular, este resultado prueba que todos los grafos de diámetro dos con girth par son super-λ.

En el Capítulo 5 se trata con digrafos y grafos bipartitos superconectados. En primer lugar, establecemos en un teorema condiciones similares a las dadas en (3.4) que son suficientes para asegurar superconectividad en digrafos y grafos bipartitos con diámetro pequeño y grado mínimo $\delta \geq 3$.

$$\begin{aligned}
&G \text{ es super-}\kappa \quad \text{si } D \leq 2\ell - 1; \\
&G \text{ es super-}\lambda \quad \text{si } D \leq 2\ell.
\end{aligned} \tag{6}$$

En [26] se dio una demostración de tipo constructivo de este mismo teorema. La demostración contenida en esta memoria presenta la ventaja de ser útil para derivar otros resultados, ya que de ella se desprende que el parámetro ℓ es una cota inferior de la profundidad de los fragmentos [α-fragmentos] determinados por un conjunto desconectador F [E] no trivial de δ vértices [arcos]. Estos resultados junto con los de (2), obtenidos en el Capítulo 3, brindan la oportunidad de mejorar, en virtud de la estructura particular de los digrafos bipartitos, los resultados conocidos que dan condiciones suficientes sobre el orden del digrafo en relación a los parámetros ℓ, D, $\delta \geq 3$ y Δ. Por ejemplo, en el caso d-regular se obtiene que

$$\begin{array}{ll} \text{si } D = 3 \text{ y } \ell \geq 1 & G \text{ es super-}\lambda \text{ si } n > 4d; \\ \text{si } D = 4 \text{ y } \ell \geq 2 & G \text{ es super-}\kappa \text{ si } n > 4d^2. \end{array} \tag{7}$$

Además se construye una familia de digrafos bipartitos d-regulares con diámetro $D = 3$, $\ell = 1$ y orden $n = 4d$ que son maximalmente arco-conectados, pero no son super-λ. Sus digrafos línea son maximalmente conectados y tienen $D = 4$, $\ell = 2$ y $n = 4d^2$, pero no son super-κ. Por lo tanto sirven para mostrar que los resultados (7) son los mejores posible.

Tras probar que el parámetro ℓ es una cota inferior de la profundidad de los fragmentos [α-fragmentos] determinados por un conjunto desconectador F [E] no trivial de a lo sumo $2\delta - 3$ vértices [arcos], se establecen condiciones suficientes sobre el diámetro de un digrafo bipartito que proporcionan cotas inferiores sobre las medidas de superconectividad. Concretamente,

$$\begin{array}{ll} \kappa_1 \geq 2\delta - 2 & \text{si } D \leq 2\ell - 1; \\ \lambda_1 \geq 2\delta - 2 & \text{si } D \leq 2\ell. \end{array} \tag{8}$$

Si el diámetro del digrafo bipartito no pasara las condiciones expuestas en (8), en un teorema se dan condiciones suficientes sobre el orden del digrafo en relación a los parámetros ℓ, D, $\delta \geq 3$ y Δ, que aseguran también superconectividad óptima. Los resultados (6) y (8) aplicados al caso de grafos bipartitos indican como consecuencia inmediata que cualquier grafo bipartito con girth $g \geq 6$ y diámetro $D \leq 3$ (respectivamente $D \leq 4$) es super-κ (respectivamente super-λ) y sus superconectividades son óptimas. Finalmente se demuestra para el caso de grafos bipartitos resultados similares a (7) a partir de los resultados (5.3) y (5.4) para grafos obtenidos en el Capítulo 3.

En el último capítulo de esta memoria se desarrolla un estudio sólo para grafos de la extraconectividad, es decir, la $\mathcal{P}_\eta$-conectividad, donde $\mathcal{P}_\eta$ hace referencia a la propiedad que consiste en tener más de η vértices. Los valores $\eta = 0$, $\eta = 1$ corresponden a la conectividad estándar y superconectividad respectivamente, por lo que el trabajo llevado a cabo constituye una generalización de esta propiedad, pero sólo para el caso no dirigido. La extraconectividad de un grafo fue definida y estudiada en [24], y también en [25] donde se establecieron las condiciones suficientes (6.3), que relacionan el diámetro de G con su girth, para asegurar óptimos valores para estas conectividades condicionales, tras de lo cual se formuló la conjetura de que dichas condiciones se podían mejorar. El trabajado contenido en este último capítulo ha mejorado y generalizado estos resultados cuando el girth es $g \geq \eta + 5$, estableciendo en un teorema condiciones suficientes que relacionan el girth $g \geq 2\ell + 1$, el grado mínimo δ y el diámetro D.

Se introducen los conceptos de conjunto no η-trivial, de grafo con η-extraconectividad óptima, es decir, aquel con $\kappa_\eta \geq \tau(\eta)$, y de profundidad de una componente determinada por un conjunto F desconectador no η-trivial con orden estrictamente menor que $\tau(\eta)$. Se comprueba que, bajo estas hipótesis, la profundidad de cualquier componente de un grafo con girth $g \geq \eta + 5$ es al menos dos, de donde se deduce de manera inmediata que un grafo cuyo diámetro sea a lo sumo tres tiene η-extraconectividad óptima. Estos primeros resultados suponen ya una mejora con respecto al establecido en (3) y los contenidos en (6.3) para valores de $\eta = 1, 2, 3$. El Teorema 6.2.4 mejora sustancialmente para valores de η suficientemente grandes con respecto a δ, las condiciones suficientes dadas en (6.3) para que G esté extraconectado de manera óptima. Por ejemplo, se obtiene que

si $D \leq g - \eta + 2(\delta - 3)$ y $\eta \geq 2\delta + 4$, entonces $\kappa_\eta \geq \tau(\eta)$.

Nótese que el grado mínimo δ de G aparece explicítamente en las cotas superiores sobre D. La demostración de este teorema es el contenido principal de este capítulo y necesita de nuevos conceptos y notaciones tales como las de árbol extendido, camino extendido o vecindad extendida que son introducidos convenientemente. Como paso previo a la demostración se prueba que para valores de $\eta \geq \delta + 1$ y $\delta \geq 5$, la profundidad de una componente es al menos tres, por lo que un grafo cuyo diámetro sea a lo sumo cinco tiene η-extraconectividad óptima.

La demostración del Teorema 6.2.4 está organizada del siguiente modo. En primer lugar, se da la demostración para los primeros valores de η, a saber, $3 \leq \eta \leq 2\delta + 1$. En estos casos el árbol que se considera en una componente de $G - F$ se obtiene directamente de la estrella S_z. Para $\eta \geq 2\delta + 2$ se necesita un árbol T con una estructura no tan simple. Tras describir la estructura de los árboles T, los de tipo (a), tipo (b) y tipo (c) cuyas características se resumen en la Tabla 6.1, se estudia el diámetro de su extensión T^*. A continuación se prueba que en cualquier componente existe un árbol con más de η vértices tal que el diámetro de su extensión está acotado según el tipo de T, tal como se indica en la Tabla 6.2. Finalmente, se acaba la demostración del Teorema 6.2.4 para $\eta \geq 2\delta + 2$. En la última sección de este capítulo se aborda el problema desde el punto de vista de la rama-conectividad, obteniendo resultados preliminares similares a los anteriores. Estos permiten establecer la versión para ramas del Teorema 6.2.4, mejorando en una unidad las condiciones sobre el diámetro, suficientes para asegurar rama η-extraconectividad óptima.

Algunos problemas

Para acabar vamos a plantear algunas cuestiones que han surgido en nuestro estudio y que nos han parecido interesantes.

- Encontrar condiciones suficientes sobre el orden de un (di)grafo y de un (di)grafo bipartito para asegurar distancia conectividad máxima. Con el mismo fin averiguar si es posible establecer condiciones suficientes sobre la secuencia de grados.

- Definir con precisión la super distancia conectividad y encontrar condiciones suficientes sobre el diámetro y sobre el orden para asegurar valores óptimos para esta nueva medida de conectividad.

- Encontrar una familia de digrafos bipartitos que demuestre que las cotas dadas en (2) son las mejores posible.

- Encontrar el número mínimo de vértices que tiene un digrafo cuyo parámetro sea ℓ. Ello nos permitiría establecer condiciones suficientes sobre el orden del digrafo, pero formuladas como cotas superiores, lo que completaría la información de la que ya disponemos tanto para asegurar conectividad máxima como superconectividad óptima.

- Estudiar la relación existente entre los parámetros que miden la η-extraconectividad de un grafo, κ_η, λ_η y $\tau(\eta)$, así como su posible independencia.

- Generalizar la η-extraconectividad al caso dirigido, para lo que sería muy útil encontrar la relación, si es que existe alguna, entre el girth del digrafo y el parámetro ℓ.

- Estudiar una medida de conectividad que informe no tanto sobre las propiedades de las componentes conexas, sino sobre todo del número de ellas que se han determinado al desconectar el grafo.