Dimensión de Krull y propiedad de “going-between” en una extensión de anillos

José Mª Giral Silió

DIMENSION DE KRULL Y PROPIEDAD DE GOING-BETWEEN'

EN UNA EXTENSION DE ANILLOS

Memoria presentada por J M Giral

para aspirar al grado de Doctor

en Matemáticas

INDICE

NOTACIONES

La palabra anillo significa siempre *anillo conmutativo con unidad*

El símbolo $\subset$ se emplea para representar una inclusión *estricta*

Si B es un anillo y A un subanillo de B, se dice que $A \subseteq B$ forman una *extensión*, ó que B es una extensión de A La extensión se llama entera (finita etc) si B es una A-álgebra entera (finita, etc)

Para un anillo A Spec A designa el *espectro primo* de A dim A, la *dimension de Krull* de A A_{red} el *anillo reducido* de A cociente de A por su nilradical A_f el anillo de fracciones de A relativo al sistema multiplicativo formado por las potencias de un elemento $f \in A$

Si $P \in \operatorname{Spec} A$ h(P) designa la *altura* de P igual a dim A_P ch(P), la *coaltura* de P igual a dim A/P

INTRODUCCION

La noción de *ideal primo* (Dedekind 1871) ha ido adquiriendo cada vez mayor importancia hasta ocupar, con la Teoría de Esquemas de Grothendieck el centro mismo del Algebra Conmutativa El estudio de los anillos conmutativos se convierte así en el de los esquemas afines con base en espacios topológicos que son el espectro primo de un anillo conmutativo, correspondiéndose funtorialmente los homomorfismos de anillos A $\rightarrow$ B con morfismos de esquemas que inducen en los espacios base las aplicaciones continuas Spec B $\rightarrow$ Spec A

Un responsable fundamental en una parte de esta evolución es W Krull (1899-1971) Señalemos algunos aspectos de su contribución únicamente desde el punto de vista de nuestro trabajo A Krull se debe (en 1926) la definición de dimensión de un anillo como supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de A asociando por primera vez el objeto geométrico Spec A al objeto algebraico A Su famoso *Hauptidealsatz* ([2] 11 17) hace que, en palabras de Northcott un anillo noetheriano deje de ser un pálido reflejo de un anillo de polinomios y convierte al conjunto ordenado* Spec A en algo semejante al conjunto de subvariedades irreducibles de una variedad algebraica afín Spec A verifica la condición de cadena descendente en un sentido fuerte la altura de un ideal primo es finita entre dos ideales primos comparables no adyacentes existen infinitos ideales primos, etc Mas tarde Krull demuestra que si A es un anillo local regular

---

* Krull no maneja Spec A como un espacio topológico pero si A es un anillo noetheriano topología y orden son de hecho equivalentes en Spec A No así en general

$h(P)+ch(P)=\dim A$ para todo P Spec A

Asimismo, por lo que a morfismos se refiere, Krull demuestra que en un anillo noetheriano la dimensión aumenta en n si se añaden n indeterminadas Su memoria de 1937 ([19]) incluye todos los teoremas fundamentales sobre el comportamiento de los ideales primos en extensiones enteras En particular demuestra que si A,B son anillos íntegros tales que $A \subseteq B$ es una extensión entera, la aplicación

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$$

es epiyectiva conserva el caracter maximal, tiene fibras de dimensión 0 y verifica la propiedad llamada de going-up Si además A es un anillo íntegramente cerrado y el cuerpo de cocientes de B es una extensión normal del cuerpo de cocientes de A el correspondiente grupo de automorfismos opera transitivamente en la fibra de cada ideal primo de Spec A lo que trae como consecuencia la acotación del cardinal de cada fibra y la propiedad llamada de going-down para la aplicación asociada a la extensión $A \subseteq B$ y también para las subextensiones de A intermedias*

En la citada memoria Krull plantea la siguiente cuestión ([19] p 755) *si $A \subseteq B$ es una extensión entera, con A y B anillos integros y A íntegramente cerrado y si $Q_1 \subset Q_2$ son ideales primos adyacentes de Spec B, lo son tambien sus imagenes $Q_1 \cap A \subset Q_2 \cap A$?* Aunque estas hipótesis garantizan todos los teoremas antes mencionados no son suficientes En 1972 I Kaplansky responde negativamente a esta pregunta ([17]) pero su contraejemplo utiliza anillos no noetherianos Sin embargo hace notar que el problema tiene una fácil respuesta afirmativa si el anillo

---

* Los teoremas de going-up y going-down son llamados por algunos teoremas de Cohen-Seidenberg aunque estos autores sólo los generalizan muy ligeramente en 1946 ([4]) como reconocen en primera página All of the results of this paper have been proved by Krull

B es catenario ([21] 14 B) en virtud de la conservación de alturas en

$$\text{Spec } B \to \text{Spec } A$$

garantizada por el going-down El problema deriva entonces hacia la demostración de la llamada *conjetura de la cadena saturada el cierre entero de un anillo noetheriano es un anillo catenario* Esta cuestión objetivo de Nagata desde su famoso ejemplo de anillo noetheriano no catenario ([27] p 203-205) ha dado lugar a una agobiante cantidad de literatura sobre todo por parte de L J Ratliff y su escuela (véase [30] para una exposición didáctica) que sin embargo no parece haber llevado a avances decisivos en la resolución de la conjetura

Para situar el problema de Krull en sus justos términos hay que hacer notar que los anillos noetherianos habituales son catenarios, por lo que en estos casos dicho problema se responde afirmativamente Por estas razones hemos planteado la siguiente cuestión evidentemente mas fuerte *en qué condiciones una extensión de anillos* $A \subseteq B$ *es tal que la aplicación*

$$\mathit{Spec}\ B \to \mathit{Spec}\ A$$

verifica la propiedad de 'going-betwenn', consistente en que para cada terna $P_1 \subset P \subset P_2$ *de Spec A y cada par* $Q_1 \subset Q_2$ *de Spec B tales que* $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, *exista un* $Q \in \mathit{Spec}\ B$ *de forma que* $Q \cap A = P$ *y* $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ Este problema constituye el centro de nuestro trabajo Está claro que su interés no está en la resolución del problema de Krull (en el que no se exige que $Q \cap A = P$) sino en que su conocimiento situaría la aplicación

$$\text{Spec } B \to \text{Spec } A$$

completamente bajo control en cuanto al orden del espectro se refiere (y en el caso noetheriano a la topología) al menos en el caso mas interesante de las extensiones enteras Precisamente la condición se ha revelado lo suficientemente fuerte como para que su estudio revista interés sobre todo en el caso de los anillos noetherianos habituales

La terminología de going-between" que introducimos para designar la cuestión está evidentemente sugerida por las ya clásicas de going-up y going-down" Por desgracia hay que hacer notar que Ratliff en su reciente estudio axiomático del problema de Krull ([28]) emplea el mismo término para la propiedad que corresponde a dicho problema Justamente al definirla reconoce que el nombre se ajusta mas bien a la propiedad planteada por nosotros e incidentalmerte afirma que esta propiedad es muy fuerte y que existen anillos regulares completos que no la verifican (sin mas precisión) Esta es toda la referencia existente hasta el momento en la literatura de la propiedad de going-between en el sentido considerado por nosotros

Pasamos a describir el contenido de la memoria en términos generales Un complemento de esta descripción son las introducciones a los tres capítulos de que consta así como los comentarios intercalados en ellos Se ha preferido prescindir de capítulo 0 y de enunciados de definiciones y resultados conocidos, salvo en contadas ocasiones bien especificadas A cambio se citan con precisión todos los datos utilizados a riesgo de ser a veces un poco prolijos

El estudio de la propiedad de going-between ocupa los capítulos II y III de nuestra memoria El capítulo I es independiente de dicha propiedad y tiene como fin básico el cálculo de la dimensión de Krull en una extensión de anillos Parte de los resultados son utilizados luego en los dos capítulos posteriores pero creemos que primordialmente son de interés por sí mismos La motivación principal está en conseguir para una extensión $A \subseteq B$ de anillos íntegros fórmulas que relacionen dim B con dim A y $\mathrm{gr\,tr}_A B$ en las condiciones mas generales posibles Tales fórmulas existen en la literatura solo cuando B es un anillo de polinomios ó una extensión entera aparte del clásico caso de las álgebras afines sobre un cuerpo El objetivo se logra de hecho de forma óptima con la única restricción de que A sea un anillo noetheriano

Se comienza el capítulo I introduciendo lo que hemos llamado *radical dimensional de un anillo* y dando métodos de cálculo de dicho ideal y también de la intersección de ciertas familias de ideales primos de un anillo noetheriano relacionadas con la dimensión El radical dimensional aparece luego como la obstrucción a que la dimensión de Krull pueda expresarse para un anillo noetheriano cualquiera en términos del grado de trascendencia como ocurre con las álgebras afines sobre un cuerpo

Se pasa después a demostrar que si $A \subseteq B$ es una extensión de anillos íntegros y A es noetheriano se tiene la acotación

$$\dim B \leqslant \dim A + \mathrm{gr\ tr}\,_A B$$

A esto se llega generalizando un resultado 'local' conocido, la llamada fórmula de las dimensiones , del caso de A-álgebras finitogeneradas al caso completamente general La cota superior es la la mejor posible y se busca luego una cota inferior Si B es una A-álgebra finitogenerada (en el caso general tal cota no existe) se llega a tener

$$\dim B \geqslant \dim A + \mathrm{gr\ tr}\,_A B-1$$

y la anulación del radical dimensional caracteriza la obtención de la igualdad óptima

$$\dim B = \dim A + \mathrm{gr\ tr}\,_A B$$

para todo B En particular cuando el radical dimensional de A es nulo *la dimension de Krull coincide con la definida a traves del grado de trascendencia y las extensiones algebraicas se caracterizan por ser las que conservan la dimension* Los resultados obtenidos permiten a su vez el cálculo de radicales dimensionales y se comprueba agradablemente que la coincidencia antes indicada es la situación mas frecuente, con la ventaja obvia de poder computar la dimensión mediante el grado de trascendencia Como complemento se deducen una serie de resultados locales relativos a la altura y coaltura de la contracción de un ideal primo

Se aborda luego el estudio de una subálgebra cualquiera B de una A-álgebra finitogenerada siendo A un anillo noetheriano A pesar de que aparece toda una serie de anomalías en cuanto B deja de ser un anillo noetheriano (incluso cuando A es un cuerpo) se comprueba que genéricamente tales anomalías no ocurren y esto hace posible demostrar para A y B casi los mismos resultados del párrafo anterior acotación de dim B cálculo de dim B por medio de gr tr $_A$B cuando el radical dimensional de A es nulo fórmula de las dimensiones etc Se observa también que en la extensión se conserva la propiedad de ser ideal maximal de máxima altura

En el capítulo II se comienza el estudio de la propiedad de going-between Se define lo que llamamos *GB-extensión* $A \subseteq B$ es una GB-extensión si la aplicación

$$\mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ A$$

tiene la propiedad de going-between Tras el examen de las generalidades del caso se centra el interés en la relación entre GB-extensiones y las mas simples *GD-extensiones*, definidas relativamente a la propiedad de going-down Se observa el papel de puente que van a jugar en ello los anillos de valoración a causa de la simplicidad de su espectro

Kaplansky y su escuela (McAdam Dobbs etc) han llevado a cabo un estudio muy completo de la propiedad de going-down (véase [7] para un informe exhaustivo) A semejanza de su definición de GD-anillo (un anillo íntegro tal que todas sus extensiones íntegras son GD-extensiones) nosotros comenzamos por estudiar el alcance de la propiedad de going-between definiendo lo que llamamos *GB_0-anillo* (un anillo tal que todas sus extensiones son GB-extensiones) *GB_1-anillo* (un anillo íntegro tal que todas sus extensiones *integras* son GB-extensiones) y *GB_2-anillo* (un anillo tal que todas sus extensiones *enteras* son GB-extensiones) Desde luego nuestro interés primordial está en los GB_2-anillos

Hay que hacer notar que el artículo de Ratliff ya mencionado ([28]) define lo que llama GB-anillo (anillo tal que todas sus extensiones enteras verifican la propiedad del problema de Krull) definición completamente distinta de las anteriores De esta forma se evita la coincidencia de nuestra nomenclatura con la de Ratliff

El estudio y caracterización de los GB_o y GB_1-anillos tiene un aire fuertemente no noetheriano y forma de hecho un parágrafo lateral en el capítulo Se halla motivado en parte porque permite demostrar un resultado no simple la condición de GD-anillo pasa al cociente

Los GB_2-anillos aparecen luego como mucho mas interesantes y complejos Tras considerar problemas de levantamiento de extensiones enteras se estudian sus cocientes y localizaciones y se obtiene la caracterización interna clave *para que A sea un GB_2-anillo es necesario y suficiente que $A/P \subseteq (A/P)'$ sean GD-extensiones para todo $P \in$ Spec A,* siendo (A/P) el cierre entero de A/P Esto permite probar que en la definición de GB_2-anillo es posible limitarse a considerar sólo las extensiones enteras *monogenas* de A y que si A es íntegro puede añadirse además que dichas extensiones sean *íntegras* También resulta que *todo anillo local henseliano integro integramente cerrado de dimension $\leqslant$ 3 es un GB_2-anillo* Se obtiene luego un criterio de descenso de la condición de GB_2-anillo y se constata que k[X Y,Z] no es un GB_2-anillo primera indicación de la fuerza de dicha condición

Los GB_2-anillos *noetherianos* admiten una caracterización más precisa Si $A \subseteq B$ es una extensión y $P \in$ Spec A se dice que P es *unirramificado* en B si la fibra de P en Spec B consta de un único ideal primo Entonces resulta que un anillo noetheriano A es un GB_2-anillo si y solo si para todo $P \in$ Spec A todo ideal primo de A/P de altura $\geqslant$ 2 es unirramificado en (A/P) Se caracteriza asimismo cuándo se tiene una GB-extensión entre un anillo noetheriano íntegro y su cierre entero y lo mismo se hace luego en el caso de un anillo noetheriano cualquiera cuestión de interés cuando se pasa al completado Siempre en el caso noetheriano se demuestra que la condición de GB_2-anillo asciende al cierre entero en el anillo total de fracciones aunque no lo hace en general a través de extensiones finitas

El capítulo se termina demostrando una serie de resultados que prueban que la unirramificación de ciertas familias clave de ideales primos (G-ideales ideales maximales ideales de altura 1 ideales de coaltura 1 etc) es suficiente, en ciertas condiciones, para asegurar la unirramificación *de todo ideal primo* en una extensión entera Dichos resultados son básicos para abordar los problemas del siguiente capítulo

El capítulo III presenta los resultados de mayor interés (y sin duda los mas complejos) en torno a la propiedad de going-between Se trata en definitiva de averiguar qué anillos noetherianos son GB_2-anillos lamentablemente la condición se revela muy restrictiva por encima de la dimensión 3 Se abordan con diferentes métodos dos casos fundamentales anillos que son *álgebras finitogeneradas* y anillos de *series formales*

En el primer caso los dos enunciados fundamentales son

Sean $A \subset B$ anillos íntegros tales que B es un GB_2-anillo noetheriano y una A-algebra finitogenerada con gr tr $_A B \geqslant 1$ Entonces dim $B \leqslant 3$ y si el radical dimensional de B es nulo, dim $B \leqslant 2$

Sea A un anillo íntegro regular, Z una indeterminada, B un anillo íntegro tal que $A[Z] \subseteq B$ es una extension finita Si $P \in \operatorname{Spec} B$ es tal que B_P es un GB_2-anillo, entonces $h(P) \leqslant 3$

En particular resulta que toda k-álgebra esencialmente de tipo finito sobre un cuerpo k que sea un GB_2-anillo, tiene dimensión $\leqslant 3$

Tras interpretar geométricamente los resultados anteriores se pasa a considerar el caso de las series formales y más en general la relación entre going-between y completación La proposición clave para abordar el problema es la siguiente

Sea A un anillo local noetheriano íntegro cuyas fibras formales son geometricamente normales Sea $P \in \operatorname{Spec} A$ con $ch(P) \geqslant 2$ y tal que el ideal maximal de A/P es unirramificado en $(A/P)'$ Si $\hat{A}$ es un GB_2-anillo, entonces $A/P \subseteq (A/P)'$ es una GD-extension

Hay que hacer notar que $\hat{A}$ GB_2-anillo $\not\Rightarrow$ A GB_2-anillo por lo que el descenso ha de seguirse por la vía que muestra la anterior proposición cuyo enunciado refleja las complicaciones técnicas que acarrea la destrucción de la integridad en el paso al completado Tras una serie de construcciones explícitas con positivo interés en sí mismas se llega aplicando la proposición clave, a demostrar

Sea B_o un anillo noetheriano factorial cuyas fibras formales en los ideales maximales de B_o son geométricamente normales Si $B_o[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un GB_2-anillo, entonces $n \leqslant 3$ En particular *si k es un cuerpo,* $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ *es un* GB_2*-anillo si y solo si* $n \leqslant 3$

Resulta obligado explicar la disparidad de los métodos empleados en las dos partes del capítulo III La condición necesaria (III 1 1) es en principio de generalidad total, pero plantea a su vez un difícil problema *(conjetura de Kaplansky-Hochster) cuando se puede asegurar que dos ideales primos de altura 2 contienen simultaneamente algun ideal primo de altura 1?* Aunque en ciertos casos geométricos el problema aparece como 'naif , existen contraejemplos al caso general y de hecho solo recientemente se tienen datos positivos *en anillos de polinomios* (McAdam) Esto explica el largo y paciente peregrinaje que representan las demostraciones de las proposiciones (III 1 4) y (III 1 6) antes mencionadas y la forma de sus enunciados Asimismo pone de manifiesto que el método no es aplicable a los anillos de series

Finalmente digamos que los resultados obtenidos hacen pensar como improbable la existencia de GB_2-anillos noetherianos de dimensión superior a 3 e incluso en éste último caso, un GB_2-anillo aparece como algo muy semejante a un anillo henseliano

Para terminar debo hacer patente mi agradecimiento a quienes han hecho posible la redacción de esta memoria, empezando por quienes ya hace mucho tiempo me hicieron sugestivo el estudio del espectro primo y de muchas otras cosas Al director de este trabajo Dr Rafael Mallol por su confianza y paciencia tantas veces mostradas Al Dr Eduardo Casas a quien debo múltiples y fundamentales sugerencias También a las muchas personas que me han animado en la realización de mi trabajo en especial a mi buen amigo B Pascual Muntané, a quien quiero dedicar estas páginas

Barcelona junio de 1 979

CAPITULO I

DIMENSION DE KRULL Y EXTENSIONES DE ANILLOS

Nos proponemos en este capítulo hacer un estudio fundamentalmente global del comportamiento de la dimensión de Krull en una extensión de anillos La mayoría de los resultados se referirán a anillos noetherianos Sin embargo también se obtendrá información sobre anillos que no lo son en general como subálgebras de A-álgebras finitogeneradas, siendo A un anillo noetheriano

Los resultados básicos de que se dispone en este terreno son los siguientes

a) La desigualdad local ([21] 14 C)

Sean $A \subseteq B$ *anillos noetherianos integros tales que* B *es una* A-*algebra finitogenerada,* Q *un ideal primo de* B, $P=Q\cap A$ *Se verifica*

$$h(P)+\text{gr tr}_A B \geqslant h(Q)+\text{gr tr}_{k(P)} k(Q)$$

siendo $\text{gr tr}_A B$ el grado de trascendencia del cuerpo de cocientes de B sobre el de A y designando por k(P), k(Q) los cuerpos residuales de los anillos locales A_P B_Q respectivamente Además vale el signo = para todo Q si A es universalmente catenario o si B es un anillo de polinomios sobre A en un número finito de indeterminadas

En cuanto a fórmulas globales se tienen los dos clásicos resultados de Krull ([27] 10 10 y 9 10)

b) *Sea* A *un anillo noetheriano,* X_1 ,X_n *indeterminadas Se verifica*

$$\dim A[X_1 \quad X_n] = \dim A + n$$

c) *Sean* $A \subseteq B$ *anillos tales que* B *es entero sobre* A *Se verifica*

$$\dim A = \dim B$$

La principal motivación para extender estos resultados ha sido averiguar en qué condiciones el grado de trascendencia es apto para describir la dimensión de Krull como ocurre en el clásico caso de las variedades algebraicas En otros términos hasta qué punto (como en c)) la conservación de la dimensión caracteriza las extensiones algebraicas de anillos (Entendemos que si $A \subseteq B$ son anillos la extensión $A \subseteq B$ es algebraica cuando todo elemento de B es cero de un polinomio no nulo con coeficientes en A) Para ello introducimos lo que llamamos radical dimensional de un anillo A que como veremos medirá la desviación de las extensiones de A respecto al comportamiento apetecido antes indicado

§ 1 - *El radical dimensional de un anillo*

Sea A un anillo de dimensión finita n Se llamará *radical dimensional* de A a la intersección de los ideales maximales de A de altura n Se escribirá rd(A)

Si A[X] es un anillo de polinomios e I es un ideal de A I[X] designará el conjunto de los polinomios de A[X] que tienen todos sus coeficientes en I

(1 1) - *Proposicion* *Sea* A *un anillo noetheriano de dimensión finita,* X *una indeterminada* *Se verifica*

$$rd(A[X]) = (rd(A))[X]$$

Demostración Sea $n = \dim A$ Se tiene $\dim A[X] = n+1$ Si M es un ideal maximal de A[X] tal que $h(M)=n+1$ entonces $h(M \cap A)=n$ y si N es un ideal maximal de A tal que $h(N)=n$ y $M \supset N[X]$, entonces $h(M)=n+1$ como resulta de ([18] Th 149) Además la estructura de la fibra de N en Spec A[X] ([18], Th 36) pone de manifiesto que

$$\bigcap_{M \supset N[X]} M = N[X]$$

de donde resulta

$$rd(A[X]) = \bigcap_{h(M)=n+1} M = \bigcap_{h(N)=n} N[X] = (\bigcap_{h(N)=n} N)[X] = (rd(A))[X] \bullet$$

De (1 1) se deduce que en general el radical de Jacobson de un anillo está contenido estrictamente en el radical dimensional Por ejemplo si A es un anillo local noetheriano íntegro y M es su ideal maximal el radical de Jacobson de $A[X]$ es (0) ([2], ex 4 p 11) mientras que $rd(A[X]) = M[X]$

(1 2) - *Proposicion Sea* A *un anillo de dimensión finita,* $A \subseteq B$ *una extension entera Se verifica*

$$rd(B) = rd(A)$$

Demostracion Se tiene (resultado c)) dim A = dim B Sea M un ideal maximal de B tal que $h(M) = n = \dim B$ Por ser entera la extensión $h(M \cap A) \geq h(M)$ luego $h(M \cap A) = n$ Entonces si N designa un ideal maximal de A

$$\bigcap_{h(N)=n} N \subseteq M \cap A$$

de donde

$$rd(A) = \bigcap_{h(N)=n} N \subseteq (\bigcap_{h(M)=n} M) \cap A = (rd(B)) \cap A$$

Por otra parte dado un ideal maximal N de A con $h(N)=n$, aplicando el going-up ([2] 5 II) es posible construir un ideal maximal M de B tal que $M \cap A = N$ y $h(M) = n$ Luego

$$rd(B) \cap A \subseteq rd(A)$$

y se obtiene la igualdad $\bullet$

Mas tarde (§ 2) se completará la información sobre el cálculo de rd(A) una vez establecida su relación con la variación de dimensiones en una extensión de anillos La observación que sigue a (1 1) pone de manifiesto que rd(A) puede ser un ideal primo de altura n-1 aunque existan en A infinitos ideales maximales de altura $n = \dim A$

Se pasa a obtener un resultado que permitirá calcular la intersección de varias familias de ideales primos

(1 3) - *Proposicion Sea* A *un anillo noetheriano,*

$$P_o \subset P_1 \subset \quad \subset P_n$$

ideales primos de A $n \geqslant 2$ *Sean los subconjuntos de* Spec A

$C_o = \{P_o\}$

$C_1 = \{Q_1 \in \text{Spec } A \mid P_o \subset Q_1 \subset P_2\}$

$C_i = \{Q_i \in \text{Spec } A \mid Q_{i-1} \subset Q_i \subset P_{i+1} \text{ para algún } Q_{i-1} \in C_{i-1}\}$

para $i=1, \quad , n-1$ *Se verifica, para cada* $i=0,1, \quad ,n-1$

$$\bigcap_{Q_i \in C_i} Q_i = P_o$$

Demostración La cadena $P_o \subset P_1 \subset \quad \subset P_n$ asegura que los conjuntos $C_1, \quad , C_{n-1}$ son no vacíos Sea $Q_i^* \in C_i$ con $i=0\ 1 \quad n-2$ Dado que $Q_i^* \subset P_{i+1} \subset P_{i+2}$ considerando una cadena maximal de ideales primos entre Q_i^* y P_{i+2} es posible encontrar un ideal primo Q' tal que $Q_i^* \subset Q' \subseteq P_{i+2}$ con $h(Q' /Q_i^*)=2$ Según ([18]) Th 144) existen entonces infinitos ideales primos Q tales que $Q_i^* \subset Q \subset Q' \subseteq P_{i+2}$ para los cuales se tiene necesariamente $h(Q /Q_i^*)=1$ En un anillo noetheriano cada ideal admite sólo un número finito de ideales primos minimales luego la intersección de los Q ha de ser Q_i^* Dado que los Q son de C_{i+1}, se tiene *a fortiori*

$$Q_i^* = \bigcap \{Q_{i+1} \in C_{i+1} \mid Q_i^* \subset Q_{i+1}\}$$

Como cada $Q_{i+1} \in C_{i+1}$ contiene a su vez un cierto $Q_i^* \in C_i$ la igualdad anterior implica

$$\bigcap_{Q_i \in C_i} Q_i = \bigcap_{Q_{i+1} \in C_{i+1}} Q_{i+1}$$

y aplicando esto a $i=0\ 1, \quad ,n-2$ resulta

$$P_o = \bigcap_{Q_1 \in C_1} Q_1 = \quad = \bigcap_{Q_{n-1}\in C_{n-1}} Q_{n-1} \quad \bullet$$

(1 4) - *Corolario* *Sea* A *un anillo noetheriano íntegro,* P *un ideal primo de* A *y* n *tal que* $h(P) \geq n \geq 2$ *Se verifica*

$$\bigcap \{Q \in \operatorname{Spec} A \mid Q \subset P \quad h(Q)=n-1\} = (0)$$

Demostración Sea $m=h(P)$ Existe una cadena irrefinable de ideales primos de A

$$(0) = P_o \subset P_1 \subset \quad \subset P_m = P$$

lo cual implica que $h(P_i)=i$, $i=0\ 1, \quad m$ Considerando los conjuntos $C_o\ C_1 \quad C_{m-1}$ definidos en (1 3) veamos por recurrencia que $h(Q_{n-1})=n-1$ para todo $Q_{n-1}\in C_{n-1}$ En efecto $h(P_o)=0$ y si $i>0$ y $Q_i \in C_i$, existe un $Q_{i-1}\in C_{i-1}$ tal que $Q_{i-1}\subset Q_i \subset P_{i+1}$ y $h(P_{i+1})=i+1$ Entonces

$$\bigcap\{Q \mid Q \subset P \quad h(Q)=n-1\} \subseteq \bigcap\{Q_{n-1}\in C_{n-1}\} = P_o = (0)$$

en virtud de (1 3) $\bullet$

(1 5) - *Corolario* *Sea* A *un anillo noetheriano,* P *un ideal primo de* A *no maximal* *Si* $ch(P)=r$, *se verifica*

$$P = \bigcap\{Q \in \operatorname{Spec}A \mid P \subseteq Q, h(Q/P)=r-1\} = \bigcap\{Q' \in \operatorname{Spec}A \mid P \subseteq Q' \quad ch(Q\ )=1\}$$

Demostración Si $r=1$ las igualdades son triviales Si $r>1$, se tiene $\dim A/P = ch(P) \geq 2$ Aplicando (1 4) al anillo A/P resulta inmediatamente

$$P = \bigcap \{ Q \in \operatorname{Spec}A \mid P \subset Q,\ h(Q/P)=r-1\}$$

donde incluso es posible exigir que $Q \subset M$, siendo M un ideal maximal de A tal que $P \subset M$ y $h(M/P)=r$ En tal caso se tiene necesariamente $ch(Q)=1$ y esto implica

$$P \subseteq \cap\{Q' \mid P \subset Q \ , \ ch(Q')=1\} \subseteq \cap\{Q \mid P \subset Q, \ h(Q/P)=r-1\} = P$$

lo que demuestra (1 5) ●

(4 6) - *Observaciones* - a) La igualdad

$$P = \cap\{Q' \in \operatorname{Spec} A \mid P \subseteq Q \ , \ ch(Q')=1\}$$

para un anillo local noetheriano se encuentra en ([20], lemma 1) demostrada por otros métodos

b) Si A no es noetheriano desde luego fallan las anteriores proposiciones Basta considerar un anillo de valoración de dimensión $\geqslant 2$

§ 2 - *Calculo de la dimensión de una extension*

El primer resultado consiste en eliminar la hipótesis de generación finita en la desigualdad local' a) mencionada al principio del capítulo Una aplicación inmediata se encuentra en las subálgebras de álgebras finitogeneradas

(2 1) - *Proposicion Sea* A *un anillo noetheriano,* B *un anillo íntegro tal que* $A \subseteq B$ *Sea* Q *un ideal primo de* B, $P=Q\cap A$ *Se verifica*

$$h(P)+\operatorname{gr\,tr}_A B \geqslant h(Q)+\operatorname{gr\,tr}_{k(P)} k(Q)$$

Demostracion Sustituyendo A por A_P y B por B_Q se pueden suponer A y B locales, pues los términos de la desigualdad no se modifican Con ello el anillo A puede suponerse de dimensión finita, al ser local y noetheriano

Si $\operatorname{gr\,tr}_A B=\infty$, la desigualdad es trivial Supuesto que $\operatorname{gr\,tr}_A B=r<\infty$, existen elementos $x_1, \ \ ,x_r$ de B algebraicamente independientes sobre A tales que la extensión $A \subseteq B$ factoriza en la forma

$$A \subseteq A[x_1 \ \ ,x_r] \subseteq B$$

y $A[x_1, \ \ ,x_r] \subseteq B$ es una extensión algebraica Dado que la ex tensión $A \subseteq A[x_1, \ \ , x_r]$ verifica la fórmula que hay que demostrar (incluso con el signo =, por el resultado básico a)) y que el grado de trascendencia es aditivo respecto la composición de extensiones resulta que es suficiente probar (2 1) en el caso $gr\ tr\ _A B = 0$

Veamos en primer lugar que $gr\ tr\ _{k(P)} k(Q)$ es finito Sean $b_1, \ \ , b_n$ elementos de B tales que sus clases $\bar{b}_1, \ \ , \bar{b}_n$ en B/Q sean algebraicamente independientes sobre A/P Sea $Q^* = Q \cap A[b_1, \ \ , b_n]$ Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & A[b_1, \ \ , b_n] & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A/P & \to & A/P[\bar{b}_1, \ \ , \bar{b}_n] & \to & B/Q \end{array}$$

y $A/P[\bar{b}_1, \ \ , \bar{b}_n] \approx A[b_1, \ \ , b_n]/Q^*$, de donde

$$\dim A/P[\bar{b}_1, \ \ \bar{b}_n] \leqslant \dim A[b_1, \ \ , b_n]$$

Se tiene, por el resultado básico b) para anillos de polinomios

$$\dim A/P[\bar{b}_1, \ \ , \bar{b}_n] = \dim A/P + n$$

Por otra parte, del resultado básico a) aplicado a la extensión $A \subseteq A[b_1, \ \ , b_n]$ se deduce habida cuenta de que $b_1 \ \ b_n$ son algebraicos sobre A

$$\dim A[b_1 \ \ b_n] \leqslant \dim A$$

Las tres últimas fórmulas implican $n \leqslant \dim A$ Como la dimensión de A es finita, esto demuestra que $gr\ tr\ _{k(P)} k(Q)$ es finito

En consecuencia, pueden suponerse elegidos los $b_1, \ \ , b_n$ de forma que la extensión $A/P[\bar{b}_1, \ \ , \bar{b}_n] \subseteq Q$ sea algebraica Sea

$$Q = Q_m \supset Q_{m-1} \supset \ \ \supset Q_o$$

una cadena de ideales primos de B Sean $c_1 \ \ c_m$ elementos de B tales que $c_i \in Q_i$, $c_i \notin Q_{i-1}$ para $i=1 \ \ m$ Pongamos

$$A^* = A[b_1, \ \ , b_n \ \ c_1, \ \ c_m]$$

y $Q_i^* = Q_i \cap A^*$ La cadena

$$Q_m^* \supset Q_{m-1}^* \supset \ \ \supset Q_o^*$$

tiene longitud m por la elección hecha de $c_1, \quad c_m$ luego $h(Q_m^*) \geq m$

Nuevamente es posible aplicar el resultado básico a) a la extensión algebraica $A \subseteq A^*$ y deducir que

$$\dim A^* \leq \dim A$$

luego m está acotado por dim A, de donde h(Q) es finita (el anillo B no será en general noetheriano!) Se puede ahora suponer elegida la cadena

$$Q = Q_m \supset \quad \supset Q_o$$

de forma que m=h(Q) Entonces para el correspondiente A^* se tiene si $Q^* = Q_m^*$

$$h(Q) \leq h(Q^*)$$

Puesto que A^* es una A-álgebra finitogenerada y $Q^* \cap A = P$ el resultado básico a) da

$$h(P) + \text{gr tr}\ _A A^* \geq h(Q^*) + \text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q^*)$$

Pero gr tr $_A A^* = 0$ y por la elección hecha de $b_1, \quad , b_n$

$$\text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q^*) = \text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q)$$

y resulta finalmente

$$h(P) \geq h(Q^*) + \text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q) \geq h(Q) + \text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q) \quad \bullet$$

(2 2) - *Corolario* *Sea* A *un anillo noetheriano,* B *un anillo íntegro tal que* $A \subseteq B$ *Se verifica*

$$\dim B \leq \dim A + \text{gr tr}\ _A B$$

Demostración Sea Q un ideal primo de B, $P = Q \cap A$ Se tiene por (2 1)

$$h(Q) \leq h(P) + \text{gr tr}\ _A B$$

En consecuencia

$$\dim B = \sup_{Q\in \operatorname{Spec} B} h(Q) \leqslant \sup_{P=Q\cap A} h(P)+\operatorname{gr\,tr}_A B \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{P\in \operatorname{Spec}A} h(P)+\operatorname{gr\,tr}_A B = \dim A+\operatorname{gr\,tr}_A B \quad \bullet$$

Para obtener resultados más precisos, en particular para acotar inferiormente $\dim B$, habrá que suponer que B es una A-álgebra finitogenerada Basta considerar el caso $B = A_P$ para justificar esta necesidad

(2 3) - *Proposición Sean* $A\subseteq B$ *anillos íntegros tales que* A *es un anillo noetheriano y* B *una* A*-álgebra finitogenerada Entonces* A *es de dimensión finita si y solo si* B *es de dimensión finita, y se verifica en tal caso*

a) $\dim A + \operatorname{gr\,tr}_A B - 1 \leqslant \dim B \leqslant \dim A + \operatorname{gr\,tr}_A B$

b) $\operatorname{rd}(A) = 0 \Rightarrow \dim B = \dim A + \operatorname{gr\,tr}_A B$

y la implicación contraria es cierta si vale la igualdad para toda A*-álgebra monógena* B

Demostración Aplicando la generalización de Nagata del lema de normalización ([3], Ch V § 3 1 cor 1) es posible encontrar un elemento $f\in A$, $f \neq 0$ y elementos $x_1, \quad , x_n \in B$ algebraicamente independientes sobre A tales que la extensión

$$A_f[x_1, \quad x_n] \subseteq B_f$$

es entera Los resultados básicos b) y c) mencionados al principio del capítulo implican

$$\dim B_f = \dim A_f[x_1 \quad , x_n] = \dim A_f+\operatorname{gr\,tr}_A B$$

Sea m un número natural tal que $m<\dim A$ Como $f\neq 0$, el corolario (1 4) garantiza la existencia de un ideal primo P de A tal que $h(P) = m$ y $f\notin P$ Esto implica que $\dim A_f \geqslant m$, de donde

$$\dim B \geqslant \dim B_f \geqslant m + \operatorname{gr\,tr}_A B$$

Si A tiene dimensión infinita es posible tomar m arbitrariamente grande y la desigualdad prueba que $\dim B = \infty$ Si $\dim A<\infty$, puesto que ahora $\operatorname{gr\,tr}_A B<\infty$, se sigue de (2 2) que $\dim B<\infty$, lo que demuestra la primera afirmación de (2 3)

Supuesto ahora que dim A es finita, basta tomar m=dim A-1 La desigualdad anterior, junto con (2 2) demuestra la parte a)

Si rd(A) = 0, por ser $f \neq 0$ existe un ideal maximal M de A tal que $f \notin M$ y h(M)=dim A, de donde dim A_f = dim A Se tiene

$$\dim B \geqslant \dim B_f = \dim A + \operatorname{gr\,tr}_A B$$

que según (2 2) es una igualdad lo que demuestra la implicación de b) Finalmente, si $rd(A) \neq 0$, sea $f \in rd(A)$, $f \neq 0$ La A-álgebra monógena $B = A_f = A[\frac{1}{f}]$ verifica las hipótesis de (2 3) pero dim B<dim A al desaparecer en A_f todos los ideales maximales de altura igual a dim A ●

De (2 3) se deduce inmediatamente la siguiente caracterización de las extensiones algebraicas

(2 4) - *Corolario Sean* $A \subseteq B$ *anillos íntegros tales que* A *es un anillo noetheriano de dimensión finita y* rd(A)=0 *y* B *una* A-*algebra finitogenerada La extensión* $A \subseteq B$ *es algebraica si y solo si* dim A = dim B

Puesto que un anillo íntegro de dimensión cero es un cuerpo, un caso particular de (2 4) es la versión de Zariski del Nullstellensatz ([2] 5 24 ó ex 5 18)

Los siguientes corolarios permiten completar el estudio del radical dimensional

(2 5) - *Corolario Sea* A *un anillo noetheriano íntegro de dimension finita Si* $rd(A) \neq 0$ *y* $f \in rd(A), f \neq 0$, *entonces* $rd(A_f)=0$

Demostración Puesto que f está en todo ideal maximal de A con altura igual a dim A, se tiene dim A_f<dim A Supuesto $rd(A_f) \neq 0$, sea $g \in rd(A_f)$, $g \neq 0$ De nuevo se tiene dim $(A_f)_g$<dim A_f y en definitiva

$$\dim (A_f)_g < \dim A-1$$

lo cual contradice la parte a) de (2 3) teniendo en cuenta que $(A_f)_g$ es una A-álgebra finitogenerada ●

(2 6) - *Corolario* *Sean* $A \subseteq B$ *anillos íntegros, tales que* A *es un anillo noetheriano de dimensión finita y* B *una* A-*álgebra finitogenerada* *Entonces*

$$rd(A)=0 \Rightarrow rd(B)=0$$

Demostración Supuesto $rd(B) \neq 0$, sea $f \neq 0$, $f \in rd(B)$ Esto implica $\dim B_f < \dim B$ (de hecho, $\dim B_f = \dim B - 1$ por la parte a) de (2 3)) Pero según la parte b) de (2 3)

$$\dim B_f = \dim A + gr\ tr_A B_f = \dim A + gr\ tr_A B = \dim B$$

en contradicción con lo anterior ●

Nótese que no es válida la correspondiente propiedad de descenso es decir $rd(B)=0 \not\Rightarrow rd(A)=0$ como pone de manifiesto el corolario (2 5) si se toma $B = A_f$

Finalmente se obtiene información 'local" a través de la proposición global (2 3)

(2 7) - *Corolario* *Sean* $A \subseteq B$ *anillos integros, tales que* A *es un anillo noetheriano de dimensión finita y* B *una* A-*algebra finitogenerada* *Sea* Q *un ideal primo de* B, $P = Q \cap A$ *Se verifica*

a) $ch(Q) - gr\ tr_{k(P)} k(Q) \leq ch(P) \leq ch(Q) - gr\ tr_{k(P)} k(Q) + 1$

b) *Sea* $rd(A)=0$, Q *un ideal maximal tal que* $h(Q)=\dim B$ *Entonces* P *es un ideal maximal de* A *tal que* $h(P)=\dim A$ *y* $A/P \subseteq B/Q$ *es una extensión algebraica finita*

Demostración Teniendo en cuenta que la extensión $A/P \subseteq B/Q$ verifica las hipótesis de (2 3), resulta

$$\dim A/P + gr\ tr_{A/P} B/Q - 1 \leq \dim B/Q \leq \dim A/P + gr\ tr_{A/P} B/Q$$

es decir

$$ch(P) + gr\ tr_{k(P)} k(Q) - 1 \leq ch(Q) \leq ch(P) + gr\ tr_{k(P)} k(Q)$$

lo que demuestra la parte a)

Si $rd(A)=0$ y $h(Q)=\dim B$, aplicando (2 1) y la parte b) de (2 3) se tiene

$$\dim A + gr\ tr_A B \geq h(P) + gr\ tr_A B \geq h(Q) + gr\ tr_{k(P)} k(Q) =$$
$$= \dim B + gr\ tr_{k(P)} k(Q) = \dim A + gr\ tr_A B + gr\ tr_{k(P)} k(Q)$$

de donde se sigue que gr tr $_{k(P)}k(Q)=0$ y $h(P)=\dim A$, lo que demuestra la parte b) ●

En un anillo cualquiera A, si P es un ideal primo se tiene

$$h(P) + ch(P) \leqslant \dim A$$

Se dirá que P es *nivelado* si se verifica la igualdad

(2 8) - *Corolario* *Sean* $A \subseteq B$ *anillos integros, tales que* A *es un anillo noetheriano de dimensión finita y* B *una* A-*álgebra finitogenerada* *Sea* Q *un ideal primo de* B, $P=Q\cap A$ *Si* $rd(A)=0$ *y* Q *es nivelado, entonces* P *es nivelado*

Demostración Se tiene por (2 1) y la parte a) de (2 7)

$$h(P) + gr\ tr\ _A B \geqslant h(Q) + gr\ tr\ _{k(P)}k(Q)$$

$$ch(P) + gr\ tr\ _{k(P)}k(Q) \geqslant ch(Q)$$

de donde

$$h(P)+ch(P)+gr\ tr\ _A B \geqslant h(Q)+ch(Q)= \dim B = \dim A+gr\ tr\ _A B$$

teniendo en cuenta la parte b) de (2 3) Resulta entonces

$$h(P) + ch(P) = \dim A \quad \bullet$$

(2 9) - *Observaciones* a) Un caso particular de (2 2) es el siguiente teorema de Evyatar - Zaks ([10] Th I) Si R es un anillo íntegro que contiene un cuerpo k y gr tr $_k R \leqslant 1$, entonces $\dim R \leqslant 1$

b) Un caso particular de (2 1) es la desigualdad

$$gr\ tr\ _k R/P + h(P) \leqslant gr\ tr\ _k R$$

en la que k es un cuerpo y P un ideal primo de una k-álgebra íntegra R, empleada en ([34], p 299), donde se refiere a ([36] p 10), que sin embargo la formula en términos de plazas

c) La igualdad en (2 1) no es cierta en general, aun siendo A un anillo local noetheriano con $\dim A=2$ y B una A-álgebra finita ([13], (5 6 1))

d) La desigualdad de (2 2) no es cierta en general si A no es noetheriano Para ponerlo de manifiesto, considérese ([11], ex 13, p 371) donde, para cada $n \geqslant 1$ se tiene un anillo íntegro A y un elemento α del cuerpo de cocientes de A tales que $\dim A = n$ y $\dim A[\alpha] = 2n$

§ 3 *El caso de subálgebras de álgebras finitogeneradas*

En varios problemas fundamentales se hace necesario considerar subálgebras de álgebras finitogeneradas Se citan a continuación dos ejemplos de verdadera entidad

El primero es el anillo de invariantes B^G de una A-álgebra finitogenerada B respecto de un grupo G de A-automorfismos de B Como caso particular se tiene el problema XIV de Hilbert si k es un cuerpo, $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas y L un cuerpo tal que $k \subseteq L \subseteq k(X_1, \ldots, X_n)$, es $k[X_1, \ldots, X_n] \cap L$ una k-álgebra finitogenerada? Es bien conocida la respuesta negativa de Nagata al caso general del problema XIV No parece que existan datos sobre la dimensión de estos anillos y propiedades relacionadas*

El segundo ejemplo es el "problema de cancelación en anillos de polinomios sean A, B anillos, $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ indeterminadas y

$$A[X_1, \ldots, X_n] = B[Y_1, \ldots, Y_n]$$

¿se sigue que A=B? Es natural considerar aquí el anillo $A \cap B$ Si R es un anillo y A,B son R-álgebras finitogeneradas, con $A \cap B$ aparece el segundo ejemplo También el caso general del problema de cancelación ha sido contestado negativamente por Hochster, quedando gran número de problemas pendientes**

---

* Véase [16] para una información actualizada

** Véase [1], por ejemplo

A pesar de la importancia de estos ejemplos existe una gran carencia de datos relativos a subálgebras En cuanto al caracter noetheriano, la tesis de un discípulo de Kaplansky, A R Wadsworth ([33]) pone de manifiesto que si A es un anillo noetheriano íntegro y $A' \supseteq A$ una A-álgebra finitogenerada existen anillos intermedios B, $A \subseteq B \subseteq A'$ que no son noetherianos (ni en particular A-álgebras finitogeneradas) en cuanto gr tr $_A A'>1$ si A es un cuerpo, y en cuanto gr tr $_A A'>0$ en caso contrario

Se va a comenzar pues por obtener algunos resultados básicamente genéricos sobre subálgebras para luego estudiar cuestiones relativas a su dimensión

Se empleará por comodidad la siguiente definición ([21] p 86) Una extensión de anillos íntegros $A \subseteq B$ se dice que verifica la *fórmula de las dimensiones* si para todo ideal primo Q de B se cumple

$$h(P) + \text{gr tr}\,_A B = h(Q) + \text{gr tr}\,_{k(P)} k(Q)$$

siendo $P = Q \cap A$ Es decir cuando se cumple la igualdad en la fórmula del resultado básico a) de la introducción a este capítulo Este es el caso si A es noetheriano y B es un anillo de polinomios, o si A es universalmente catenario ([21] 14 C)

(3 1) - *Proposicion* *Sean* $A \subseteq B \subseteq A'$ *anillos integros tales que* A' *es una* A-*álgebra finitogenerada* *Existe un elemento* $f \in B$ *tal que* $f \neq 0$ *y se verifica*

a) *Si* A *es un anillo de Jacobson* ([3], Ch V § 3 4) B_f *es un anillo de Jacobson*

b) *Si* A *es un anillo noetheriano,* B_f *es una* A-*álgebra finitogenerada, y en particular un anillo noetheriano*

c) *Todo ideal primo* Q *perteneciente al abierto* D_f=Spec B-V(f) *es contracción de un ideal primo de* A' *y* B/Q *es subálgebra de una* A-*algebra finitogenerada*

d) *Si* A *es un anillo noetheriano y la extensión* $A \subseteq A'$ *verifica la fórmula de las dimensiones, entonces para todo ideal primo*

$Q \in D_f$ *se tiene*

$$h(P) + \text{gr tr}\ _A B = h(Q) + \text{gr tr}\ _{k(P)} k(Q)$$

siendo $P=Q \cap A$ *Si además* B *es un anillo noetheriano, la extensión* $B \subseteq A'$ *verifica la fórmula de las dimensiones*

Demostración A' es una B-álgebra finitogenerada Aplicando el lema de normalización generalizado ([3], Ch V § 3 1 cor 1) es posible encontrar $f \in B$, $f \neq 0$ y elementos $x_1, \quad , x_n \in A'$ algebraicamente independientes sobre B tales que la extensión

$$B_f[x_1 \quad x_n] \subseteq A'_f$$

es entera

Supuesto que A es un anillo de Jacobson, $A_f = A'[1/f]$ también lo es, al ser una A-álgebra finitogenerada ([3], Ch V §3 4 Th 3) Luego todo ideal primo Q' de A'_f es intersección de ideales maximales de A'_f Puesto que en una extensión entera la contracción de un ideal maximal es un ideal maximal, resulta que $Q' \cap B_f[x_1, \quad , x_n]$ es intersección de ideales maximales Como todo ideal primo de $B_f[x_1, \quad , x_n]$ es de la forma $Q' \cap B_f[x_1, \quad , x_n]$ al ser $B_f[x_1, \quad , x_n] \subseteq A'_f$ una extensión entera, se deduce que todo ideal primo de $B_f[x_1, \quad , x_n]$ es intersección de ideales maximales, es decir, $B_f[x_1, \quad , x_n]$ es un anillo de Jacobson Luego también lo es B_f al ser un cociente del anterior ([3], loc cit), lo que demuestra a)

Si A es un anillo noetheriano, considerando las extensiones

$$A \subseteq B_f[x_1, \quad , x_n] \subseteq A'_f$$

el lema de Artin-Tate ([2], 7 8) asegura que $B_f[x_1, \quad , x_n]$ es una A-álgebra finitogenerada luego también lo es su cociente B_f, lo cual demuestra b)

Dado un ideal primo Q de B tal que $f \notin Q$, el ideal primo $Q_f = QB_f$ es contracción de un ideal primo de A_f, al ser la aplicación

$$\text{Spec } A'_f \to \text{Spec } B_f[x_1, \quad , x_n] \to \text{Spec } B_f$$

composición de dos aplicaciones exhaustivas De aquí resulta que existe $Q' \in \mathrm{Spec}\ A$ tal que $Q=Q' \cap B$ Por otra parte $B/Q \subseteq A'/Q$, luego B/Q es subálgebra de una A-álgebra finitogenerada y está demostrado c)

Con las hipótesis de d), sea Q un ideal primo de B tal que $f \notin Q$ En virtud de c), $Q=Q' \cap B$ para cierto $Q \in \mathrm{Spec}\ A'$ La proposición (2 1) asegura que

$$(1) \qquad h(P) + \mathrm{gr\ tr}\ _A B \geqslant h(Q) + \mathrm{gr\ tr}\ _{k(P)} k(Q)$$

siendo $P=Q \cap A$ Por ser B_f noetheriano, es posible aplicar de nuevo (2 1) y obtener

$$(2) \qquad h(Q) + \mathrm{gr\ tr}\ _B A' \geqslant h(Q\ ) + \mathrm{gr\ tr}\ _{k(Q)} k(Q\ )$$

puesto que ninguno de los cuatro términos se modifica por localización en f Por hipótesis la extensión $A \subseteq A'$ verifica la fórmula de las dimensiones, luego

$$h(P) + \mathrm{gr\ tr}\ _A A' = h(Q') + \mathrm{gr\ tr}\ _{k(P)} k(Q')$$

y la aditividad del grado de trascendencia implica la igualdad en las dos desigualdades (1) y (2) Si B es un anillo noetheriano, dado un ideal primo Q' de A', sean $Q=Q' \cap B$, $P=Q \cap A$ Como es posible aplicar (2 1) a la extensión $B \subseteq A'$, el razonamiento anterior prueba que (2) es una igualdad lo que demuestra d) ●

(3 2) - *Observaciones* a) Aunque A sea un cuerpo, B no es en general un anillo de Jacobson como demuestran ejemplos de Wadsworth ([34], ex 1)

b) El contraejemplo de Nagata al problema XIV de Hilbert demuestra que B no es en general una A-álgebra finitogenerada, aunque A sea un cuerpo y B un anillo de invariantes De hecho Wadsworth ([34] Th A) ha caracterizado las extensiones $A \subseteq A'$ (A, A' íntegros, A noetheriano, A' una A-álgebra finitogenerada) tales que todo anillo intermedio B es una A-álgebra finitogenerada También, como ya se dijo, ha precisado en ([33]) condiciones para que todo B sea noetheriano

c) La aplicación

$$\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} B$$

no es epiyectiva en general Un contraejemplo trivial es el caso B = A anillo local $A' = A_f$, siendo f cualquier elemento $\neq 0$ del ideal maximal de A Pero incluso es posible dar ejemplos en los que A es un cuerpo y B tiene un ideal primo que no es contracción de un primo de ninguna A-álgebra finitogenerada que contenga a B ([34], ex 2)

Dar un contraejemplo a la segunda parte de (3 1 c) requiere mas trabajo Para construirlo, considerese el ejemplo de subálgebra B mencionado en la observación a), en el que A es un cuerpo Puesto que B no es un anillo de Jacobson, existe un ideal primo Q de B que no es intersección de maximales Supuesto que $B/Q \subseteq R$ siendo R una A-álgebra finitogenerada, se llega a un absurdo En efecto, R es un anillo de Jacobson luego si $\{M_i\}_{i\in I}$ es la familia de los ideales maximales de R, se tiene

$$(0) = \bigcap_{i\in I} M_i$$

y si $\bar{B} = B/Q$ y $\bar{N}_i = M_i \cap \bar{B}$, $i\in I$ resulta

$$(0) = \bigcap_{i\in I} \bar{N}_i$$

Como cada $\bar{N}_i = N_i/Q$ con $N_i \in \operatorname{Spec} B$ se sigue que

$$Q = \bigcap_{i\in I} N_i$$

Por otra parte, $A \subseteq \bar{B}/\bar{N}_i \subseteq R/M_i$, $i\in I$ Al ser $A \subseteq R/M_i$ una extensión algebraica finita de cuerpos (por (2 7), o simplemente por ([3], Ch V § 3 4 Th 3)) resulta que $\bar{B}/\bar{N}_i$ es un cuerpo Luego los N_i son ideales maximales y Q es intersección de ellos, en contra de la hipótesis hecha

d) Se sigue considerando el ejemplo anterior, para demostrar que lo afirmado en (3 1 d) no es válido en general para todo ideal primo Q de B En efecto para el Q antes citado se ha de tener

$$\text{gr tr}_A B > h(Q) + \text{gr tr}_A k(Q)$$

pues en caso de igualdad (según (2 1), única posibilidad diferente) B/Q es subálgebra de una A-álgebra finitogenerada por ([34] Th 2), en contra de lo demostrado en c) Esto demuestra en la terminología de [34] que no todo ideal primo de B es 'well-behaved , cosa que Wadsworth no hace Además (3 1 d) demuestra la existencia en condiciones muy generales de un abierto básico D_f formado por well-behaved primes

Se pasa a calcular la dimensión de una subálgebra

(3 3) - *Proposicion Sean* $A \subseteq B \subseteq A'$ *anillos íntegros tales que* A *es un anillo noetheriano y* A' *es una* A-*algebra finitogenerada Entonces* B *es de dimensión finita si y solo si* A *es de dimensión finita, y en tal caso se verifica*

a) $\dim A + \text{gr tr}_A B - 1 \leqslant \dim B \leqslant \dim A + \text{gr tr}_A B$

b) *Si* rd(A)=0, *entonces*

$$\dim B = \dim A + \text{gr tr}_A B,$$

para todo anillo íntegro $B' \supseteq B$ *que es una* B-*algebra finitogenerada se tiene*

$$\dim B' = \dim B + \text{gr tr}_B B'$$

y rd(B) = 0

Demostración Procediendo exactamente igual que al comienzo de la demostración de (3 1) se tiene una extensión entera

$$B_f[x_1, \quad ,x_n] \subseteq A'_f$$

y $n = \text{gr tr}_B A'$ Como A es un anillo noetheriano, el razonamiento de (3 1) prueba que B_f es un anillo noetheriano Esto permite, aplicando una vez más los resultados básicos, escribir

$$\dim A'_f = \dim B_f + \text{gr tr}_B A$$

A'_f es una A-álgebra finitogenerada, luego si $\dim A=\infty$ se tiene por (2 3) $\dim A'_f=\infty$, y en consecuencia $\dim B_f=\infty$ y $\dim B=\infty$ Si $\dim A<\infty$, también $\dim B<\infty$ pues (2 2) implica

$$\dim B \leqslant \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A B$$

luego B es de dimensión finita si y solo si lo es A

Aplicando (2 3) a A'_f se tiene

$\dim B \geqslant \dim B_f = \dim A_f - \mathrm{gr\,tr}\ _B A' \geqslant \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A A' - 1 - \mathrm{gr\,tr}\ _B A' =$

$= \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A B - 1$

lo cual junto a la desigualdad anterior, demuestra a)

Si rd(A)=0, también por (2 3) se tiene

$\dim B \geqslant \dim B_f = \dim A'_f - \mathrm{gr\,tr}\ _B A' = \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A A' - \mathrm{gr\,tr}\ _B A' =$

$= \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A B$

y la desigualdad de sentido contrario implica la igualdad

Dada la extensión $B \subseteq B'$, el lema (3 4) que se demostrará luego permite incluir a B' y A' en el anillo A'[B], que es una A'-álgebra finitogenerada (y por tanto una A-álgebra finitogen rada), obteniéndose el diagrama de inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & \to & A'[B'] \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \to & B & \to & A' \end{array}$$

Considerando $A \subseteq B' \subseteq A'[B']$ y aplicando a B lo ya demostrado, se tiene

$\dim B' = \dim A + \mathrm{gr\,tr}\ _A B' = \dim B - \mathrm{gr\,tr}\ _A B + \mathrm{gr\,tr}\ _A B' =$

$= \dim B + \mathrm{gr\,tr}\ _B B'$

Si fuese $rd(B) \neq 0$, considerando $g \in rd(B)$, $g \neq 0$ la anterior igualdad fallaría con $B' = B_g$ Se tiene así demostrada completamente la parte b) ●

El siguiente hecho elemental se incluye a falta de una referencia

(3 4) - *Lema* *Sean* B_1, B_2 *anillos íntegros que contienen a un anillo* R *Existe un anillo íntegro* $C \supseteq B_1$ *tal que* C *contiene un subanillo isomorfo a* B_2

Demostración Sean k, K_1, K_2 cuerpos cocientes de R B_1, B_2 respectivamente, tales que $k \subseteq K_1$, $k \subseteq K_2$ Factorizando $k \subseteq K_2$ en la forma $k \subseteq k(S) \subseteq K_2$, con S subfamilia de K_2 algebraicamente independiente maximal y considerando

$$k(S) \subseteq K_1(S) \subseteq \overline{K_1(S)}$$

con $\overline{K_1(S)}$ clausura algebraica del cuerpo $K_1(S)$, dado que la extensión $k(S) \subseteq K_2$ es algebraica existe una $k(S)$-inmersión de K_2 en $\overline{K_1(S)}$ Es suficiente tomar $C = \overline{K_1(S)}$ ●

Finalmente se generalizan algunos hechos considerados en los corolarios del § 2

(3 5) - *Corolario Sean* $A \subseteq B \subseteq A'$ *anillos íntegros tales que* A *es un anillo noetheriano de dimensión finita y* $rd(A)= 0$ *y* A' *es una* A*-álgebra finitogenerada Se verifica*

a) *La extensión* $A \subseteq B$ *es algebraica si y sólo si* $\dim A = \dim B$

b) *Si* N *es un ideal maximal de* B *tal que* $h(N)=\dim B$, *entonces* $M=N \cap A$ *es un ideal maximal de* A *tal que* $h(M)=\dim A$ *y* $A/M \subseteq B/N$ *es una extensión algebraica*

Demostración a) es consecuencia inmediata de (3 3 b)

Por otra parte, en virtud de (2 1) y (3 3 b) se tiene

$$\dim A + \mathrm{gr\,tr}\,_A B \geqslant h(M) + \mathrm{gr\,tr}\,_A B \geqslant h(N) + \mathrm{gr\,tr}\,_{k(M)} k(N) =$$

$$= \dim B + \mathrm{gr\,tr}\,_{k(M)} k(N) = \dim A + \mathrm{gr\,tr}\,_A B + \mathrm{gr\,tr}\,_{k(M)} k(N)$$

de donde $\mathrm{gr\,tr}\,_{k(M)} k(N) = 0$ y $h(M)= \dim A$ ●

(3 6) - *Observaciones* a) Eakin demuestra en ([9], Th 3) la parte b) de nuestra proposición (3 1) en el caso particular de ser A un cuerpo y A' un anillo de polinomios sobre A Su demostración utiliza el 'teorema de Eakin ([8] Th 2) de descenso del caracter noetheriano en una extensión finita bastante mas complicado que el lema de Artín-Tate usado en la demostración de (3 1)

Asimismo ([9], Th 2) que afirma que una subálgebra de un anillo de polinomios sobre un cuerpo de dimensión (de Krull) n, tiene grado de trascendencia n resulta como caso particular de (3 3 b)

b) Un caso aún más particular de (3 3 b) es ([35], 1 1), que afirma lo mismo que el teorema del párrafo precedente para el caso n = 1

CAPITULO II

LA PROPIEDAD DE "GOING-BETWEEN PARA UNA EXTENSION

Se estudia en este capítulo lo que se llama propiedad de going-between' para una extensión de anillos, axiomatizada a través de la definición de GB-extensión Tras considerar cuestiones generales sobre transferencia de dicha propiedad se pasa a medir su alcance examinando tres clases de anillos, llamados GB_o GB_1 y GB_2-anillos Dichos anillos se definen como aquellos para los cuales todas sus extensiones de un cierto tipo son GB-extensiones Una vez caracterizadas las tres clases de anillos, se centra la atención en los GB_2-anillos, definidos relativamente a las extensiones enteras, que son las de mayor interés por las buenas propiedades que inducen a nivel de espectros primos En particular se estudian los GB_2-anillos noetherianos y la extensión definida por el cierre entero Todo conduce finalmente a considerar cuestiones relativas a la unirramificación" de ideales primos en una extensión de anillos

§ 1 *Definición y propiedades de las GB-extensiones*

Se introduce la siguiente terminología, para una extensión de anillos $A \subseteq B$

$A \subseteq B$ se llama una *GU-extensión* si para todo par $P_1 \subset P_2$ de Spec A y todo Q_1 de Spec B tal que $Q_1 \cap A = P_1$ existe $Q_2 \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q_2$ y $Q_2 \cap A = P_2$

$A \subseteq B$ se llama una *GD-extensión* si para todo par $P_1 \subset P_2$ de Spec A y todo Q_2 de Spec B tal que $Q_2 \cap A = P_2$, existe $Q_1 \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q_2$ y $Q_1 \cap A = P_1$

$A \subseteq B$ se llama una *GB-extensión* si para toda terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y todo par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tal que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, existe $Q \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$

Las dos primeras definiciones se introducen solo a título auxiliar y se evitará su estudio sistemático, que parcialmente ya ha sido hecho por Kaplansky, McAdam, Dobbs, etc Por otra parte, no se consideran las correspondientes definiciones para un homomorfismo de anillos porque los problemas se reducen de hecho al caso de inyecciones

Las dos proposiciones siguientes reúnen las propiedades mas inmediatas de las GB-extensiones

(1 1) - *Proposición Sean* $A \subseteq B \subseteq C$ *anillos Se verifica*

a) *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$ *son GB-extensiones,* $A \subseteq C$ *es GB-extensión*

b) *Si* $A \subseteq C$ *es GB-extensión y* $B \subseteq C$ *es GU-extensión, entonces* $A \subseteq B$ *es GB-extensión*

Demostración Dada la terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y el par $R_1 \subset R_2$ de Spec C tales que $R_1 \cap A = P_1$, $R_2 \cap A = P_2$, sean $Q_1 = R_1 \cap B$, $Q_2 = R_2 \cap B$ Existe un $Q \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$ Existe un $R \in$ Spec C tal que $R_1 \subset R \subset R_2$ y $R \cap B = Q$ Evidentemente $R \cap A = P$, lo que demuestra a)

Dada la terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y el par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, al ser $B \subseteq C$ una GU-extensión, existe según ([18], Th 42) un $R_1 \in$ Spec C tal que $R_1 \cap B = Q_1$ Entonces existe $R_2 \in$ Spec C tal que $R_1 \subset R_2$ y $R_2 \cap B = Q_2$ Puesto que $R_1 \cap A = P_1$, $R_2 \cap A = P_2$ y $A \subseteq C$ es una GB-extensión, existe $R \in$ Spec C tal que $R_1 \subset R \subset R_2$ y $R \cap A = P$ Tomando $Q = R \cap B$ se tiene $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$, lo que demuestra b) ●

(1 2) - *Proposición Sea* $A \subseteq B$ *anillos Se verifica*

a) *Si* S *es un sistema multiplicativo de* A *y* $A \subseteq B$ *es una GB-extensión, entonces* $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ *es una GB-extension*

b) $A \subseteq B$ *es una GB-extensión si y solo si* $A_M \subseteq B_M$ *es una GB-extensión para todo ideal maximal* M *de* A

c) $A \subseteq B$ *es una GB-extensión si y sólo si* $A/I \subseteq B/J$ *es una GB-extensión para todo ideal* J *de* B *, siendo* $I=J \cap A$

d) *Si* A B *son anillos íntegros y* $A \subseteq B$ *es una GB-extensión, entonces* $A \subseteq B$ *es una GD-extensión*

e) $A \subseteq B$ *es una GB-extensión si y sólo si para todo* $Q \in \mathrm{Spec}\ B$, $A/P \subseteq B/Q$ *es una GD-extensión, siendo* $P=Q \cap A$

f) *Supuesto que ningun elemento de* A *es divisor de cero** *en* B $A \subseteq B$ *es una GB-extensión si y sólo si para todo* $Q \in \mathrm{Spec}\ B$, $A_P \subseteq B_Q$ *es una GU-extensión, siendo* $P=Q \cap A$

Demostración a) es consecuencia inmediata de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ B & \to & \mathrm{Spec}\ A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}\ S^{-1}B & \to & \mathrm{Spec}\ S^{-1}A \end{array}$$

La parte a) demuestra la mitad de b), con $S=A-M$ Supuesta la propiedad localmente sea la terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y el par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B con $Q_1 \cap A=P_1$, $Q_2 \cap A=P_2$ Existe un ideal maximal M de A que contiene a P_2 Si $S=A-M$, Q_2 no corta a S La hipótesis en $A_M \subseteq B_M$ y la conmutatividad del correspondiente diagrama aseguran la existencia de un $Q \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$, lo que demuestra b)

Si $A \subseteq B$ es una GB-extensión, también lo es $A/I \subseteq B/J$ a causa de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ B & \to & \mathrm{Spec}\ A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}\ B/J & \to & \mathrm{Spec}\ A/I \end{array}$$

---

* Esta condición se requiere para garantizar que $A_P \subseteq B_Q$ Podría evitarse si se hubiera definido GU-morfismo Como la condición f) solo se utilizará en un ejemplo, no parece justificada esta complicación

Recíprocamente, dada una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A=P_1$, $Q_2 \cap A=P_2$ basta considerar el diagrama anterior con $J=Q_1$ y se tiene demostrada c)

En la hipótesis de d), sea el par $P_1 \subset P_2$ de Spec A y sea $Q_2 \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_2 \cap A=P_2$ Si $P_1=(0)$ basta tomar $Q_1=(0)$ en Spec B Si $P_1 \neq (0)$, considerando la terna $(0) \subset P_1 \subset P_2$ y el par $(0) \subset Q_2$ existe $Q_1 \subset Q_2$ tal que $Q_1 \cap A=P_1$ Luego $A \subset B$ es una GD-extensión

Para demostrar e) si $A \subseteq B$ es una GB-extensión también lo es $A/P \subseteq B/Q$ según c), luego en virtud de d) es una GD-extensión Recíprocamente, dada una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A=P_1$, $Q_2 \cap A=P_2$ considerando el par $P/P_1 \subset P_2/P_1$ de Spec A/P_1 y $Q_2/Q_1 \in \mathrm{Spec}\ B/Q_1$ se tiene $Q_2/Q_1 \cap A/P_1 = P_2/P_1$ Por hipótesis existe $Q/Q_1 \in \mathrm{Spec}\ B/Q_1$ tal que $Q/Q_1 \cap A/P_1 = P/P_1$ y una vez mas la conmutatividad del correspondiente diagrama asegura que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$

Para demostrar f) supuesto que $A \subseteq B$ es una GB-extensión, se considera el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ B & \rightarrow & \mathrm{Spec}\ A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}\ B_Q & \rightarrow & \mathrm{Spec}\ A_P \end{array}$$

Dado un par $P_1^* \subset P_2^*$ de Spec A_P y $Q_1^* \in \mathrm{Spec}\ B_Q$ tales que $Q_1^* \cap A_P = P_1^*$, si $P_2^*=PA_P$ basta tomar $Q_2^* = QB_Q$ y se tiene $Q_1^* \subset Q_2^*$ y $Q_2^* \cap A_P = P_2^*$ Si $P_2^* \neq PA_P$, se tiene una terna $P_1 \subset P_2 \subset P$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A=P_1$ $Q \cap A = P$, $P_1^* = P_1A_P$, $P_2^* = P_2A_P$ $Q_1^*=Q_1B_Q$ Por hipótesis, existe $Q_2 \in \mathrm{Spec} B$ tal que $Q_1 \subset Q_2 \subset Q$ y $Q_2 \cap A=P_2$ Entonces si $Q_2^* = Q_2B_Q$, se tiene $Q_1^* \subset Q_2^*$ y $Q_2^* \cap A_P=P_2^*$

Recíprocamente, dada una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A=P_1$, $Q_2 \cap A=P_2$, sean $P_1^* = P_1A_{P_2}$ $P^*=PA_{P_2}$, $Q_1^* = Q_1B_{Q_2}$ En la extensión $A_{P_2} \subseteq B_{Q_2}$ se tiene $Q_1^* \cap A_{P_2} = P_1^*$ Por hipótesis existe $Q^* \in \mathrm{Spec}\ B_{Q_2}$ tal que $Q^* \cap A_{P_2} = P^*$ Si $Q=Q^* \cap B$, entonces $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$, lo cual demuestra f) ●

Ejemplo Sean $A \subseteq B \subseteq K$ anillos íntegros, tales que K es el cuerpo de cocientes de A y B es un A-módulo plano Entonces $A \subseteq B$ es una GB-extensión

En efecto, sea $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P = Q \cap A$ Se verifica $A_P = B_Q$ ([31], Th 2) y basta aplicar (1 2 f)

Una cuestión básica va a ser relacionar las GB y GD-extensiones Un caso simple es el siguiente, que será utilizado más tarde

(1 3) - *Proposición Sea* A *un anillo íntegro*, V *un anillo de valoracion del cuerpo de cocientes de* A *que contiene a* A $A \subseteq V$ *es una GB-extensión si y sólo si es una GD-extensión*

Demostración Si $A \subseteq V$ es una GB-extensión, basta aplicar (1 2 d)

Si $A \subseteq V$ es una GD-extensión, dada una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec V tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, existe $Q \in \operatorname{Spec} V$ tal que $Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$ Como Spec V es un conjunto totalmente ordenado ([27], 11 2) se tiene $Q_1 \subset Q$, pues $Q \subseteq Q_1$ implicaría $P = P_1$ Luego $A \subseteq V$ es una GB-extensión ●

§ 2 *Definición y caracterizaciones de los* GB_0 *y* GB_1*-anillos*

Con el fin de explorar el alcance de la condición de GB-extensión sin hipótesis restrictiva alguna, se introduce la definición de GB_0-anillo Por ser más cómodo el manejo de anillos íntegros se definen también los GB_1-anillos, aunque finalmente éstos resultan coincidir con los GD-anillos, ampliamente estudiados (véase [7])

A, B designan como siempre anillos

Se dirá que A es un GB_0*-anillo* si toda extensión $A \subseteq B$ es una GB-extensión

Se dirá que un anillo íntegro A es un GB_1*-anillo* si toda extensión $A \subseteq B$ con B íntegro es una GB-extensión

Se comienza por estudiar el comportamiento por paso al cociente y localización Se precisa un hecho simple previamente

(2 1) - *Lema* *Sea* A *un anillo,* I *un ideal de* A $\bar{A} = A/I$, $\bar{B}$ *un anillo tal que* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ *Existe un anillo* B *y un ideal* J *de* B *tal que* $A \subseteq B$, $\bar{B} \approx B/J$ *y* $J \cap A = I$ *Si* A *es íntegro, es posible encontrar un* B *que sea también íntegro*

Demostracion Sea $\{\bar{b}_\alpha\}$ una familia de generadores de $\bar{B}$ como $\bar{A}$-álgebra, es decir, $\bar{B}=\bar{A}[\{\bar{b}_\alpha\}]$ Sea $B=A[\{X_\alpha\}]$ con X_α indeterminadas Considerando los homomorfismos naturales

$$A[\{X_\alpha\}] \xrightarrow{\pi_1} \bar{A}[\{X_\alpha\}] \xrightarrow{\pi_2} \bar{A}[\{\bar{b}_\alpha\}]$$

sea $J = \mathrm{Ker}(\pi_2 \circ \pi_1)$ Puesto que π_1 y π_2 son epimorfismos se tiene

$$A[\{X_\alpha\}]/_J \approx \bar{A}[\{\bar{b}_\alpha\}] = \bar{B}$$

y $J \cap A = I$ pues $a \in J \cap A \Leftrightarrow (\pi_2 \ \pi_1)(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_1(a) = 0 \Leftrightarrow a \in I$ Además si A es íntegro está claro que $A[\{X\}]$ también ●

(2 2) - *Proposición* *Para un anillo* A *las condiciones siguientes son equivalentes*

a) A *es un* GB_o*-anillo*

b) A/I *es un* GB_o*-anillo para todo ideal* I *de* A

c) A/P *es un* GB_o*-anillo para todo ideal primo* P *de* A

d) A/p *es un* GB_o*-anillo para todo ideal primo minimal* p *de* A

e) A_{red} *es un* GB_o*-anillo*

Demostración a) ⇒ b) Sea $\bar{A} = A/I$ y sea $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ una extensión de $\bar{A}$ Por el lema (2 1), es posible encontrar un anillo $B \supseteq A$ y un ideal J de B tal que $\bar{B} = B/J$ y $J \cap A = I$ Como $A \subseteq B$ es una GB-extensión se sigue de (1 2 c) que $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ es una GB-extensión

b) ⇒ c) y c) ⇒ d) son triviales

d) $\Rightarrow$ e) Sea N el nilradical de A, $A_{red}=A/N$ Dada una terna $P_1^* \subset P^* \subset P_2^*$ de Spec (A_{red}) y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A_{red} = P_1^*$ $Q_2 \cap A_{red} = P_2^*$ sea $P_1 \in$ Spec A tal que $P_1^* = P_{1/N}$

Por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \rightarrow & \text{Spec } A_{red} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Spec } B/Q_1 & \rightarrow & \text{Spec } A_{red/P_1^*} \end{array}$$

basta ver que $A/P_1 = A_{red/P_1^*} \subseteq B/Q_1$ es una GB-extensión Sea p un ideal primo minimal de A tal que $p \subseteq P_1$ Teniendo en cuenta que $A/P_1 = A/p_{/P_{1/p}}$ basta aplicar el lema (2 1) para obtener una GB-extensión de A/p y concluir en virtud de (1 2 c) que $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ es una GB-extensión

e) $\Rightarrow$ a) Dada una extensión $A \subseteq B$ de A, sean N(A), N(B) los nilradicales de A, B respectivamente Puesto que $N(B) \cap A = N(A)$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/_{N(A)} & \rightarrow & B/_{N(B)} \end{array}$$

y puesto que las flechas verticales inducen isomorfismos en los espectros, $A \subseteq B$ es una GB-extensión por serlo $A_{red} \subseteq B_{red}$

(2 3) - *Proposición Para un anillo* A *las condiciones siguientes son equivalentes*

a) A *es un* GB_o*-anillo*

b) $S^{-1}A$ *es un* GB_o*-anillo para todo sistema multiplicativo* S *de* A

c) A_P *es un* GB_o*-anillo para todo* $P \in$ Spec A

d) A_M *es un* GB_o*-anillo para todo ideal maximal* M *de* A

Demostracion a) $\Rightarrow$ b) Dada una extensión $S^{-1}A \subseteq B$ de $S^{-1}A$, una terna $P_1^* \subset P^* \subset P_2^*$ de Spec $S^{-1}A$ y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap S^{-1}A = P_1^*$, $Q_2 \cap S^{-1}A = P_2^*$ sea I el núcleo del homomorfismo

$$A \to S^{-1}A$$

La extensión $A/I \subseteq S^{-1}A$ induce una inyección en los respectivos espectros luego la terna $P_1^* \subset P^* \subset P_2^*$ da por contracción una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A/I Por (2 2 b) A/I es un GB_o-anillo, luego existe $Q \in \mathrm{Spec}\, B$ tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A/I = P$ Se tiene por fuerza $Q \cap S^{-1}A = P^*$, luego $S^{-1}A \subseteq B$ es una GB-extensión

b) $\Rightarrow$ c) y c) $\Rightarrow$ d) son triviales

d) $\Rightarrow$ a) Resulta inmediatamente de (1 2 b) ●

La siguiente proposición determina la relación entre las dos clases de anillos que se han introducido

(2 4) - *Proposición* *Un anillo* A *es un* GB_o*-anillo si y sólo si* A/p *es un* GB_1*-anillo para todo ideal primo minimal* p *de* A *En particular, si* A *es integro,* A *es un* GB_o*-anillo si y sólo si* A *es un* GB_1*-anillo*

Demostración Si A es un GB_o-anillo, también lo es A/p por (2 2) A fortiori, A/p es un GB_1-anillo

Recíprocamente, dada una extensión $A \subseteq B$, una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, sea p un ideal primo minimal de A tal que $p \subseteq P_1$ Es suficiente ver que $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ es una GB-extensión Puesto que $A/P_1 = \dfrac{A/p}{P_1/p}$ por el lema (2 1) existe una extensión $A/p \subseteq B^*$ con B^* íntegro (al serlo A/p) y un ideal Q^* de B^* tales que $Q^* \cap A/p = P_1/p$ y $B^*/Q^* \approx B/Q_1$ Por hipótesis, $A/p \subseteq B^*$ es una GB-extensión Luego por (1 2 c) también lo es $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ ●

Se pasa a demostrar que las extensiones definidas por anillos de valoración son las que deciden el problema

(2 5) - *Proposición Sea* A *un anillo íntegro,* K *su cuerpo de cocientes* A *es un* GB_1*-anillo si y sólo si para todo anillo de valoración* V *de* K *que contiene a* A, $A \subseteq V$ *es una GB-extensión*

Demostracion Supuesta la condición sobre los anillos de valoración, hay que ver que toda extensión $A \subseteq B$ con B íntegro es una GB-extensión Sea $L \supseteq K$ el cuerpo de cocientes de B Dada una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$ $Q_2 \cap A = P_2$, en virtud de ([11] 19 7) existe un anillo de valoración W de L $W \supseteq B$ y un par $Q_1' \subset Q_2'$ de Spec W tales que $Q_1' \cap B = Q_1$ $Q_2' \cap B = Q_2$

Sea $V = W \cap K$ V es un anillo de valoración de K pues si $x \in K$, x ó x^{-1} son de V Sean $P_1' = Q_1' \cap V$ $P_2' = Q_2' \cap V$ La conmutatividad del diagrama de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & W \end{array}$$

implica

$$P_1' \cap A = (Q_1' \cap V) \cap A = Q_1' \cap A = (Q_1' \cap B) \cap A = Q_1 \cap A = P_1$$

y análogamente $P_2' \cap A = P_2$ Por hipótesis $A \subseteq V$ es una GB-extensión luego existe $P' \in \mathrm{Spec}\ V$ tal que $P_1' \subset P' \subset P_2'$ y $P' \cap A = P$ Según ([11], 19 16 b) existe $Q' \in \mathrm{Spec}\ W$ tal que $Q' \cap V = P'$ Por estar Spec W totalmente ordenado $Q_1' \subset Q' \subset Q_2'$ Sea $Q = Q' \cap B$ Se tiene $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y

$$Q \cap A = (Q' \cap B) \cap A = Q' \cap A = (Q' \cap V) \cap A = P' \cap A = P$$

luego $A \subseteq B$ es una GB-extensión ●

Un anillo íntegro A se llama un *GD-anillo* si toda extensión $A \subseteq B$ con B íntegro es una GD-extensión Una exhaustiva referencia de actualidad sobre esta clase de anillos es [7] Es inmediato (1 2 d) que un GB_1-anillo es un GD-anillo La proposición (2 5) permite demostrar el recíproco

(2 6) - *Corolario Sea* A *un anillo íntegro* A *es un GB_1-anillo si y sólo si es un GD-anillo*

Demostración Si A es un GD-anillo, para todo anillo de valoración V del cuerpo de cocientes de A que contenga a A, A $\subseteq$ V es una GD-extensión Por (1 3), A $\subseteq$ V es una GB-extensión Luego por (2 5) A es un GB_1-anillo

(2 7) - *Corolario Sea* A *un GD-anillo,* P *un ideal primo de* A *Entonces* A/P *es un GD-anillo*

Demostracion Según (2 6) A es un GB_1-anillo Por (2 4) y (2 2 c) A/P es un GB_1-anillo, y por tanto un GD-anillo

(2 8) - *Observaciones* a) Dobbs ha demostrado recientemente (2 7) en [6] por vías mas indirectas Naturalmente este resultado permite de hecho evitar la definición de GB_1-anillo y redemostrar (2 5) basándose en una serie de resultados sobre GD-anillos Como (2 7) no es un resultado sencillo, mantenemos la estructura de este § 2 entendiendo que supone una nueva vía, autocontenida de demostración de (2 7)

b) Todo anillo de Prufer (interesantes ejemplos se encuentran en [18], p 72) es un GB_1-anillo Es bien sabido que es un GD-anillo, pero en nuestros términos se deduce fácilmente de (2 5) y de un viejo resultado de Krull ([18], Th 65) que indica que los V de (2 5) son de la forma V = A_P con P$\in$Spec A, lo que hace obvio que A $\subseteq$ V es una GB-extensión

c) Un anillo noetheriano íntegro A tal que dim A>1 no puede ser un GB_1-anillo De hecho existe un elemento α del cuerpo de cocientes de A tal que A$\subset$A[α] no es una GB-extensión Esto se sigue, por ejemplo, de ([7], 4 3 y 4 1)

d) En la definición de GD-anillo no tiene interés considerar extensiones que no sean anillos íntegros En efecto, si A es un anillo con dim A$\geqslant$1, utilizando ([18], p 43 ex 25) se puede construir una extensión de A (entera, incluso) que no sea una GD-extensión Sin embargo esto no ocurre en nuestro caso (por (2 4)) y también existen GB_o-anillos que no son GB_1-anillos Por ejemplo $A_1 \times A_2$ es un GB_o-anillo si A_1, A_2 son GB_1-anillos en virtud de (2 4)

e) Es posible construir GB-extensiones que inducen una epiyección entre los espectros de anillos íntegros (y por ello también GD-extensiones), pero que no son GU-extensiones Por ejemplo $A \subset A[X]$, con A un anillo de Prufer que no sea un cuerpo y X una indeterminada, en virtud de b) y de ([18] p 41 ex 3)

§ 3 - *Definición y propiedades de los GB_2-anillos*

En el parágrafo anterior se ha puesto de manifiesto que las definiciones de GB_o y GB_1-anillos son demasiado rigurosas para la clase de los anillos noetherianos A partir de aquí la cuestión se limita a la consideración de extensiones *enteras*, que son las que interesan básicamente Esto se hace a través de la definición de GB_2-anillo Se estudian luego las propiedades que son independientes del caracter noetheriano El paralelismo con el § 2 es escaso y la situación es bastante mas compleja

Se dirá que un anillo A es un *GB_2-anillo* si toda extensión entera $A \subseteq B$ es una GB-extensión

Obviamente todo GB_o-anillo es un GB_2-anillo, pero se verá que la nueva condición es mucho menos restrictiva Nótese que si en la definición se cambia entera por algebraica se obtienen de nuevo los GB_o-anillos en virtud de (2 5)

Como en el § 2 para estudiar el paso al cociente de la condición de GB_2-anillo se precisa un lema de levantamiento de extensiones enteras La parte a) del siguiente lema se debe a Ratliff ([28], 3 2) Como este autor da sólo un esbozo de la demostración, incluimos una prueba completa

(3 1) - *Lema Sea* A *un anillo,* I *un ideal de* A, $\bar{A} = A/I$, $\bar{B}$ *un anillo tal que* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ *es una extensión entera Entonces se verifica*

a) *Existe un anillo* B *y un ideal* J *de* B *tal que* $A \subseteq B$ *es una extensión entera,* $J \cap A = I$ *y* $\bar{B} \approx B/J$

b) *Si* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ *es una extensión finita (resp monógena),* B *puede elegirse de forma que sea un* A*-módulo libre de rango finito (y una* A*-álgebra monogena, resp)*

c) *Si* $A \subseteq B$ *es una extensión finita (resp , monogena) y* A $\bar{A}$ $\bar{B}$ *son íntegros,* B *puede elegirse de forma que sea íntegro y que la extensión* $A \subseteq B$ *sea finita (y monógena, resp)*

d) *Si* A *es un anillo factorial,* $\bar{A}$ *es íntegro y* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ *es una extension monógena,* B *puede elegirse integro,* A*-módulo libre de rango finito y monogeno como* A*-álgebra*

Demostracion Sea $\{\beta_h\}_{h\in H}$ un sistema de generadores de $\bar{B}$ como $\bar{A}$-álgebra es decir, $\bar{B} = \bar{A}[\{\beta_h\}]$ Considerando indeterminadas $\{X_h\}_{h\in H}$ se tienen homomorfismos naturales

$$A[\{X_h\}] \xrightarrow{\pi_1} \bar{A}[\{X_h\}] \xrightarrow{\pi_2} \bar{A}[\{\beta_h\}] = \bar{B}$$

Sea $K = \text{Ker } (\pi_2 \circ \pi_1)$ Se tiene

$$A[\{X_h\}]_{/K} \approx B$$

y $K \cap A = I$, pues $a \in K \cap A \Leftrightarrow (\pi_2 \circ \pi_1)(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_1(a) = 0 \Leftrightarrow a \in I$

Al ser $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ una extensión entera, para cada $h \in H$ existe un polinomio mónico $\bar{f}_h(X_h) \in \bar{A}[X_h]$ tal que $\bar{f}_h(\beta_h) = 0$ Para cada $h \in H$ sea $f_h(X_h) \in A[X_h]$ un polinomio mónico que módulo I dé $\bar{f}_h(X_h)$ Sea K_1 el ideal de $A[\{X_h\}]$ engendrado por $\{f_h(X_h)\}_{h\in H}$ Se tiene $K_1 \subseteq K$

Sea $B = A[\{X_h\}]_{/K_1}$, $J = K_{/K_1}$ Entonces $B/J \approx A[\{X_h\}]_{/K} \approx \bar{B}$

Veamos que A se inyecta en B En efecto, si $a \in K_1 \cap A$, se tiene

$$a = g_1 f_{h_1}(X_{h_1}) + \quad + g_n f_{h_n}(X_{h_n})$$

para ciertos $g_1, \quad g_n \in A[\{X_h\}]$ Dado $f_{h_1}(X_{h_1}) \in A[X_{h_1}]$, existe un anillo $A_1 \supseteq A$ tal que en A_1 hay una raíz α_1 de f_{h_1} ([3], Ch V §1 3 1 2) Dado $f_{h_2}(X_{h_2}) \in A_1[X_{h_2}]$, existe un anillo $A_2 \supseteq A_1$ tal que en

A_2 hay una raíz α_2 de f_{h_2} Prosiguiendo de esta manera se llega a un anillo $A_n \supseteq A$ en el que hay raíces $\alpha_1, \quad ,\alpha_n$ de $f_{h_1}, \quad ,f_{h_n}$ respectivamente Dando estos valores a $X_{h_1}, \quad ,X_{h_n}$ resulta $a = 0$

Se ha obtenido así una extensión $A \subseteq B$ que es entera puesto que $\bar{X}_h = X_h + K_1$ satisface $f_h(\bar{X}_h) = 0$ Además $J \cap A = I$ al ser $K \cap A = I$ El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/I & \rightarrow & B/J \end{array}$$

termina la demostración de a)

Supuesto que $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ es una extensión finita sea $\bar{B}=\bar{A}[\beta_1 \quad \beta_r]$ Aplicando la demostración anterior a la extensión $\bar{A} \subseteq \bar{A}[\beta_1]$ se construye el anillo $B_1 = A[X_1]/(f_1(X_1))$ y el ideal J_1 de B_1 tales que $B_1/J_1 \approx \bar{A}[\beta_1]$ y $J_1 \cap A = I$ Por ser $f_1(X_1)$ mónico, B_1 es un A-módulo libre de base $1, \bar{x}_1, \quad ,\bar{x}_1^{m-1}$ si m es el grado de f_1 y $\bar{x}_1$ es la clase de X_1 módulo f_1 Repitiendo este proceso con $\bar{A}[\beta_1] \subseteq \bar{A}[\beta_1][\beta_2]$ etc se obtiene una cadena de anillos

$$B_o = A \subseteq B_1 \subseteq \qquad \subseteq B_r$$

en la que B_i es un B_{i-1}-módulo libre finitogenerado, $i=1, \quad ,r$ y una sucesión de ideales $J_1, \quad ,J_r$ tales que $J_i \cap B_{i-1} = J_{i-1}$ y $B_i/J_i \approx \bar{A}[\beta_1, \quad ,\beta_i]$ $i=1, \quad ,r$ Una demostración formalmente igual a la bien conocida en el caso de cuerpos prueba que $B=B_r$ es un A-módulo libre finitogenerado Como $J=J_r$ verifica $J \cap A=I$ y $B/J \approx \bar{B}$ esto demuestra b)

En las hipótesis de c), aplicando b) se ha encontrado un A-módulo libre B y un ideal J de B tal que $J \cap A=I$ y $B/J \approx \bar{B}$ En particular, B es una A-álgebra plana, lo que implica que $A \subseteq B$ es una GD-extensión ([21], 5 D) Entonces dados los ideales primos $(0) \subseteq I$ y J, existe un ideal primo $Q \subseteq J$ tal que $Q \cap A=(0)$ Se tiene así una extensión entera $A \subseteq B/Q$, $J/Q \cap A=I$ y $(B/Q)/(J/Q) \approx B/J \approx \bar{B}$ Luego tomando B/Q en lugar de B se ha demostrado c)

Para probar d), si $\bar{B} = \bar{A}[\beta]$ observamos que es posible elegir $\bar{f}(X)\in\bar{A}[X]$ de grado mínimo entre los polinomios mónicos que anulan β Esto implica que $\bar{f}(X)$ es irreducible, pues si descompone en producto de otros dos, éstos han de ser mónicos (salvo unidades) y uno de ellos anula β al ser $\bar{A}$ íntegro Un polinomio mónico $f(X)\in A[X]$ que dé $\bar{f}(X)$ módulo I también ha de ser irreducible, pues si descompone ha de ser en producto de polinomios mónicos y éstos conservan el grado módulo I Entonces el ideal $(f(X))$ es primo por ser A un anillo factorial, luego $B= A[X]/_{(f(X))}$ es un anillo íntegro Junto con lo demostrado en b), esto prueba la parte d) ●

Incidentalmente, nótese que (3 1c) ha demostrado lo siguiente

(3 2) - *Corolario* *Sean* $\bar{V},\bar{W} \subseteq W$ *variedades algebraicas afines irreducibles tales que* $\bar{W}$ *es una subvariedad de* W, $\bar{V} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{W}$ *un morfismo finito Existe una variedad algebraica afín irreducible* V *que contiene a* $\bar{V}$ *como subvariedad y un morfismo finito* $V \xrightarrow{\varphi} W$ *que extiende* $\bar{\varphi}$

Ahora se puede estudiar el paso al cociente de la condición de GB_2-anillo

(3 3) - *Proposicion* *Para un anillo* A *las siguientes condiciones son equivalentes*

a) A *es un* GB_2*-anillo*

b) A/I *es un* GB_2*-anillo para todo ideal* I *de* A

c) A/P *es un* GB_2*-anillo para todo ideal primo* P *de* A

d) A/p *es un* GB_2*-anillo para todo ideal primo minimal* p *de* A

e) A_{red} *es un* GB_2*-anillo*

Demostración Consiste en la repetición de la de (2 2) teniendo presente que el lema (2 1) se ha de sustituir por el lema (3 1) y que la condición de extensión entera pasa al cociente ●

El estudio de la localización no permite sin embargo la repetición de (2 3)

(3 4) - *Proposición* *Para un anillo* A *las siguientes condiciones son equivalentes*

a) A *es un* GB_2*-anillo*

b) $S^{-1}A$ *es un* GB_2*-anillo para todo sistema multiplicativo* S *de* A

c) A_P *es un* GB_2*-anillo para todo* $P \in \mathrm{Spec}\ A$

d) A_M *es un* GB_2*-anillo para todo ideal maximal* M *de* A

Demostración a) ⇒ b) Dada una extensión entera $S^{-1}A \subseteq B^*$, una terna $P'_1 \subset P' \subset P'_2$ de Spec $S^{-1}A$ y un par $Q^*_1 \subset Q^*_2$ tales que $Q^*_1 \cap S^{-1}A = P'_1$, $Q^*_2 \cap S^{-1}A = P'_2$ basta ver que $S^{-1}A/P'_1 \subseteq B^*/Q^*_1$ es una GB-extensión Como $P_1 = S^{-1}P_1$ para cierto $P_1 \in \mathrm{Spec}\ A$,

$$S^{-1}A/P'_1 \approx S^{-1}A/S^{-1}P_1 \approx \bar{S}^{-1}(A/P_1)$$

siendo $\bar{S}$ la imagen de S en A/P_1 Por (3 3), A/P_1 es un GB_2-anillo y se ha reducido el problema a demostrar que si A es un GB_2-anillo íntegro, S un sistema multiplicativo de A y $S^{-1}A \subseteq B^*$ una extensión entera en la que B^* es un anillo íntegro, entonces $S^{-1}A \subseteq B^*$ es una GB-extensión

Sea B el cierre entero de A en B^* Se tienen inclusiones

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}A & \rightarrow & B^* \end{array}$$

Dado $x \in B^*$, verifica una ecuación de la forma

$$x^n + \frac{a_1}{s_1}x^{n-1} + \qquad + \frac{a_n}{s_n} = 0 \qquad a_i \in A,\ s_i \in S,\ i=1, \quad ,n$$

Si $s = s_1 \quad s_n$, multiplicando por s^n se obtiene una ecuación del tipo

$$(sx)^n + a'_1\,(sx)^{n-1} + \qquad + a'_n = 0 \qquad a'_i \in A \quad i=1, \quad ,n$$

lo que implica $sx \in B$ Luego dentro del cuerpo de cocientes de B^*

se tienen inclusiones

$$S^{-1}A \subseteq B^* \subseteq S^{-1}B$$

Por hipótesis, la extensión entera $A \subseteq B$ es una GB-extensión Por (1 2 a) $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ es una GB-extensión y también es entera, luego $B^* \subseteq S^{-1}B$ es una extensión entera y en consecuencia una GU-extensión ([2], 5 11) Según (1 1 b) resulta que $S^{-1}A \subseteq B^*$ es un GB-extensión

b) $\Rightarrow$ c) y c) $\Rightarrow$ d) son triviales

d) $\Rightarrow$ a) Resulta inmediatamente de (1 2 b) teniendo en cuenta que si $A \subseteq B$ es una extensión entera también lo es la extensión $A_M \subseteq B_M$ ●

La siguiente proposición constituye la caracterización básica en el estudio de los GB_2-anillos

Si B es un anillo cualquiera, B' designará su cierre entero en el anillo total de fracciones de B

(3 5) - *Proposición Un anillo* A *es un* GB_2*-anillo si y sólo si* $A/P \subseteq (A/P)'$ *es una GD-extension para todo* $P \in \operatorname{Spec} A$ *tal que* $\operatorname{ch}(P) \geq 2$

Demostración La condición es necesaria ya que A/P es un GB-anillo para todo $P \in \operatorname{Spec} A$ en virtud de (3 2), lo cual implica que $A/P \subseteq (A/P)'$ es una GB-extensión y según (1 2 d) una GD-extensión

Para ver que la condición es suficiente, sea $A \subseteq B$ una extensión entera de A Dada la terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y el par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, basta comprobar que $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ es una GD-extensión Una sencilla observación de McAdam ([22], Th 1) indica que si $A/P_1 \subseteq (A/P_1)'$ es una GD-extensión, entonces también lo es toda extensión entera íntegra de A/P_1 por el teorema de going-down de Krull ([2],5 16) Luego $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ es una GD-extensión, ya que $\operatorname{ch}(P_1) \geq 2$ ●

(3 6) - *Corolario* *Para un anillo* A *las siguientes condiciones son equivalentes*

a) A *es un* GB_2*-anillo*

b) *Toda extensión finita de* A *es una GB-extensión*

c) *Toda extensión entera monógena de* A *es una GB-extensión*

Demostración Basta ver que c) $\Rightarrow$ a) Sea P un ideal primo de A La hipótesis de c) también la verifica el anillo A/P en efecto, si $A/P \subseteq \bar{B}$ es una extensión entera monógena, el lema (3 1) permite encontrar una extensión entera monógena $A \subseteq B$ de A y un ideal J de B tal que $J \cap A = P$ y $B/J \approx \bar{B}$ y la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/P & \rightarrow & \bar{B} \end{array}$$

implica que $A/P \subseteq \bar{B}$ es una GB-extensión al serlo $A \subseteq B$

En particular, para todo elemento $\alpha \in (A/P)'$, $A/P \subseteq (A/P)[\alpha]$ es una GB-extensión, y al tratarse de anillos íntegros, una GD-extensión por (1 2 d) Pero si toda subextensión monógena es GD-extensión, también $A/P \subseteq (A/P)'$ es una GD-extensión por ([24] prop 2) Entonces el criterio de (3 5) indica que A es un GB_2-anillo ●

Es interesante hacer notar que en el caso de un anillo íntegro es suficiente considerar extensiones que sean anillos íntegros

(3 7) - *Corolario* *Sea* A *un anillo íntegro* A *es un* GB_2*-anillo si y solo si toda extensión entera monógena íntegra de* A *es una GB-extensión*

Demostración Basta repetir la demostración de (3 6) utilizando (3 1 c) en lugar de (3 1 b)

El siguiente corolario proporciona ejemplos importantes de GB_2-anillos

(3 8) - *Corolario* *Sea* A *un anillo local henseliano íntegro íntegramente cerrado con* dim A $\leqslant 3$ *Entonces* A *es un* GB_2*-anillo*

Demostración Utilizando el criterio de (3 5), sea P un ideal primo de A tal que ch(P) $\geqslant 2$ Si P=(0), se tiene A=A' que obviamente es GD-extensión Sea P$\neq$(0) A/P es un anillo henseliano ([27], 43 4), luego (A/P)' es un anillo local ([27], 43 12) Se tiene dim A/P $\leqslant 2$ y entonces resulta inmediato que A/P $\subseteq$ (A/P)' es una GD-extensión, al ser ambos anillos íntegros y locales y ser epiyectiva la aplicación

$$\mathrm{Spec}\ (A/P)' \rightarrow \mathrm{Spec}\ A/P \quad \bullet$$

El siguiente es un criterio de 'descenso'

(3 9) - *Corolario* *Sea* A $\subseteq$ B *una extension entera* *Si* A $\subseteq$ B *es una GB-extensión y* B *es un* GB_2*-anillo, entonces* A *es un* GB_2*-anillo*

Demostración Sea P$\in$Spec A con ch(P)$\geqslant$ 2 Por ser A $\subseteq$ B una extensión entera, existe Q$\in$Spec B tal que Q $\cap$ A = P, lo cual da una extensión entera A/P $\subseteq$ B/Q Considerando los cierres enteros de ambos anillos se tiene un diagrama conmutativo de extensiones enteras

$$\begin{array}{ccc} A/P & \rightarrow & B/Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A/P)' & \rightarrow & (B/Q)' \end{array}$$

Puesto que A $\subseteq$ B es una GB-extensión, por (1 2 c,d) A/P $\subseteq$ B/Q es una GD-extensión Se tiene ([27]), 9 10)

$$\mathrm{ch}(Q) = \dim B/Q = \dim A/P = \mathrm{ch}(P) \geqslant 2$$

luego según (3 5) B/Q $\subseteq$ (B/Q)' es una GD-extensión Entonces es inmediato que la composición A/P $\subseteq$ (B/Q)' es a su vez una GD-extensión También es sencillo observar sobre el diagrama que esto, junto al hecho de que la aplicación

$$\mathrm{Spec}\ (B/Q)' \rightarrow \mathrm{Spec}\ (A/P)'$$

es epiyectiva, implica que $A/P \subseteq (A/P)'$ es una GD-extensión Finalmente el criterio (3 5) asegura que A es un GB_2-anillo ●

(3 10) - *Observaciones* a) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero El anillo de polinomios $A = K[X,Y,Z]$ no es un GB_2-anillo Para verlo basta considerar el ejemplo (debido en realidad a Zariski) de fallo del "going-down de ([4], 3(A)) Se construye allí un ideal primo P de A con ch(P)=2 y tal que $A/P \subseteq (A/P)'$ no es una GD-extensión, entonces según (3 5) A no es un GB_2-anillo Como $(A/P)'$ es una extensión monógena de A/P y A es un anillo factorial, es posible, siguiendo la demostración de (3 1), construir explícitamente una extensión entera B de A que no es una GB-extensión Geométricamente, se obtiene un morfismo finito φ de una hipersuperficie H de K^4 sobre K^3, una superficie S de K^3, una curva C de S y un punto P de C, una superficie $S^* \subset H$ y un punto $P^* \in S^*$ tales que $\varphi(S^*) = S$, $\varphi(P^*) = P$ y no existe ninguna curva $C^* \subset S^*$ que pase por P^* y tal que $\varphi(C^*)=C$

b) Sea K un cuerpo con una valoración multiplicativa v y sea $K \ll X,Y,Z \gg$ el anillo de series convergentes en tres variables respecto v Es un anillo local henseliano regular ([27],45,5), luego por (3 6) es un GB_2-anillo En particular, con la valoración trivial v(a)=1 para todo $a \neq 0$ de K, resulta que $K[[X,Y,Z]]$ es un GB_2-anillo

c) Todo anillo íntegro íntegramente cerrado de dimensión 2 es un GB_2-anillo según (3 5) En particular $K[X,Y]$ si K es un cuerpo Junto con la observación a), esto indica que la propiedad de ser GB_2-anillo no se conserva al adjuntar indeterminadas

Mas generalmente, todo anillo íntegro A de dimensión 2 tal que todo ideal maximal de A de altura 2 es contracción de un solo ideal maximal de A' es un GB_2-anillo, pues es fácil ver que en estas condiciones el teorema de "going-up ([2], 5 11) basta para asegurar que $A \subseteq A'$ es una GD-extensión y la conclusión sigue de (3 5)

También $K[X,Y]$ es un ejemplo de GB_2-anillo que no es GB_1-anillo por (2 8 c)

d) La propiedad de ser GB_2-anillo no se conserva por extensión finita En efecto, el anillo A/P de la observación a) no es un GB_2-anillo, pero por el lema de normalización de Noether es extensión finita de un anillo isomorfo a $K[X,Y]$

También el ejemplo de a) pone de manifiesto que es posible tener extensiones finitas $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ tales que $R_1 \subseteq R_2$ y $R_1 \subseteq R_3$ son GB-extensiones, sin que lo sea $R_2 \subseteq R_3$ Basta considerar $R_1 \approx K[X,Y]$, $R_2 = A/P$, $R_3 = (A/P)'$ y tener en cuenta que $K[X,Y]$ es un GB_2-anillo

La extensión $R_2 \subseteq R_3$ es asimismo un ejemplo de que en (3 9) es necesaria la hipótesis de que $A \subseteq B$ es una GB-extensión

e) Nótese que no es posible demostrar directamente (3 7), aún limitándose a considerar las extensiones enteras íntegras de A En efecto, si B no es un anillo íntegro sus primos minimales no contraen a (0) en general aunque A sea un anillo local regular ([29] 2 6)

§ 4 *El caso noetheriano*

Con hipótesis noetherianas la caracterización de los GB_2-anillos dada en (3 5) se vuelve bastante mas accesible Con vistas a ello se introduce la siguiente definición ([22]) Sea $A \subseteq B$ una extensión de anillos Se dice que $P \in \operatorname{Spec} A$ es *unirramificado en* B si existe un único $Q \in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q \cap A = P$ Si todo $P \in \operatorname{Spec} A$ es unirramificado en B se dirá que la extensión $A \subseteq B$ es *unirramificada* Nótese que si $A \subseteq B$ es una extensión entera, la definición hace referencia solo a la unicidad ya que automáticamente existe $Q \in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q \cap A = P$

El resultado fundamental de la tesis de McAdam aclara completamente cuándo se tiene going-down entre un anillo noetheriano íntegro y su cierre entero, con el siguiente teorema ([22],Th 2)

Sea A un anillo noetheriano íntegro, A' su cierre entero $A \subseteq A'$ es una GD-extensión si y solo si todo $P \in \operatorname{Spec} A$ tal que $h(P) > 1$ es unirramificado en A'

Nótese al respecto que el hecho de que la aplicación $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ sea incluso un homeomorfismo no es demasiado restrictivo Por ejemplo, una variedad algebraica afín irreducible puede tener singularidades de codimensión 1 y ser homeomorfa a su normalizada (caso de un cilindro de directriz una cúbica cuspidal)

Junto a (3 5), el teorema de McAdam da la siguiente caracterización de los GB_2-anillos noetherianos

(4 1) - *Corolario* *Sea* A *un anillo noetheriano* A *es un* GB_2*-anillo si y sólo si para todo* $P \in \operatorname{Spec} A$ *tal que* $\operatorname{ch}(P) \geq 2$*, todo ideal primo de* A/P *de altura mayor que uno es unirramificado en* $(A/P)'$

También es posible ahora dar un criterio para decidir cuándo el paso al cierre entero es una GB-extensión

(4 2) - *Proposición* *Sea* A *un anillo noetheriano integro,* A' *su cierre entero,* B *un anillo tal que* $A \subseteq B \subseteq A'$ *Entonces* $A \subseteq B$ *es una GB-extension si y solo si todo* $P \in \operatorname{Spec} A$ *con* $h(P) > 1$ *es unirramificado en* B

Demostración Si $A \subseteq B$ es una GB-extensión, también es una GD-extensión (1 2 d) Usando un refinamiento del teorema de McAdam ([23], Th 1) que extiende su resultado a los anillos intermedios entre A y A', se sigue que todo $P \in \operatorname{Spec} A$ con $h(P) > 1$ es unirramificado en B

Recíprocamente, sea una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y un par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$ Como $A \subseteq B$ es una extensión entera, el teorema de going-up ([2], 5 11) permite encontrar un ideal primo Q de B tal que $Q_1 \subset Q$ y $Q \cap A = P$ Una nueva aplicación del teorema proporciona un ideal primo Q_2^* de B tal que $Q \subset Q_2^*$ y $Q_2^* \cap A = P_2$ Pero como $h(P_2) > 1$, la hipótesis implica $Q_2^* = Q_2$ y está demostrado que $A \subseteq B$ es una GB-extensión ●

Se va a estudiar ahora el caso general de paso al cierre entero para un anillo no necesariamente íntegro Este aspecto se precisa al considerar el paso al completado en anillos semi locales Del lema siguiente se desconocen posibles referencias Si B es un anillo, N(B) designará el nilradical de B, $B_{red}=B/N(B)$ el reducido de B, F(B) el anillo total de fracciones de B y B el cierre entero de B en F(B)

(4 3) - *Lema* *Sea* A *un anillo noetheriano Existe un isomorfismo natural*

$$(A')_{red} \rightarrow (A_{red})'$$

Demostración Sea

$$(0) = Q_1 \cap \quad \cap Q_n$$

una descomposición primaria reducida y sean $P_1, \quad ,P_n$ los ideales primos asociados El conjunto D de los divisores de cero de A es $D = P_1 \cup \quad \cup P_n$ ([2] 4 7) Designando con barras las imágenes en A_{red}

$$(\bar{0}) = \bar{Q}_1 \cap \quad \cap \bar{Q}_n$$

es una descomposición primaria reducida y $\bar{D} = \bar{P}_1 \cup \quad \cup \bar{P}_n$ es el conjunto de los divisores de cero de A_{red} Sea $S = A - D$ Si $s \in S$, $a \in A$ son tales que $\bar{s}\,\bar{a} = \bar{0}$, para cierto m se tiene $(sa)^m = 0$, de donde $a^m = 0$ y $\bar{a} = \bar{0}$ Por lo tanto $\bar{S} = \bar{A} - \bar{D}$

Se tiene en general un isomorfismo natural

$$S^{-1}A/_{S^{-1}N(A)} \approx \bar{S}^{-1} A_{red}$$

que asigna a la clase $(\frac{\bar{a}}{s})$ la fracción $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ si $a \in A$, $s \in S$ Como $N(S^{-1}A) = S^{-1}N(A)$ ([2], 3 12) resulta en definitiva un isomorfismo

$$(F(A))_{red} \rightarrow F(A_{red})$$

que veremos induce un isomorfismo

$$(A')_{red} \to (A_{red})'$$

En efecto, $(A')_{red} = A'/N(A')$ se incluye en $F(A)/N(F(A)) = (F(A))_{red}$ al ser $N(F(A)) \cap A' = N(A')$ Una relación de la forma

$$(\frac{\bar{a}}{s})^m + \bar{b}_1 (\frac{\bar{a}}{s})^{m-1} + \quad + \bar{b}_m = \bar{0} \qquad b_i \in A \quad i = 1, \qquad m$$

se traduce en la relación

$$(\frac{\bar{a}}{\bar{s}})^m + \bar{b}_1 (\frac{\bar{a}}{\bar{s}})^{m-1} + \quad + \bar{b}_m = \bar{0}$$

y si recíprocamente se tiene esta última resulta

$$(\frac{a}{s})^m + b_1 (\frac{a}{s})^{m-1} + \quad + b_m = c \in N(F(A))$$

que elevada a una potencia conveniente implica $\frac{a}{s} \in A'$ ●

(4 4) - *Corolario* *Sea* A *un anillo noetheriano,* $A \subseteq A$ *es una GB-extension (resp , GD-extensión) si y sólo si* $A_{red} \subseteq (A_{red})'$ *es una GB-extensión (resp , GD-extensión)*

Demostracion Por el lema (4 3) se tiene un diagrama conmutativo con los morfismos naturales

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{red} & \to & (A_{red})' \approx (A\ )_{red} \end{array}$$

y basta tener en cuenta que las flechas verticales inducen homeomorfismos en los espectros primos ●

El corolario (4 4) permite limitarse a considerar un anillo reducido La proposición siguiente traslada el problema al caso íntegro, ya resuelto en (4 2)

(4 5) - *Proposición* *Sea* A *un anillo noetheriano reducido,* p_i $i = 1, \quad ,n$ *los ideales primos minimales de* A, $A_i = A/p_i$, K_i *el cuerpo de cocientes de* A_i *y* A'_i *el cierre entero de* A_i *en* K_i $A_i \subseteq A'_i$ *es una GB-extensión si y solo si* $A_i \subseteq A'_i$ *es una GB-extension para cada* $i = 1, \quad ,n$

Demostración Se tiene un isomorfismo canónico ([3], ch IV § 2 5 prop 10)

$$F(A) \approx K_1 \times \quad \times K_n$$

que induce un isomorfismo ([3] ch V § 1 2 cor 1)

$$A' \approx A'_1 \times \quad \times A'_n$$

teniendo en cuenta que A'_i es el cierre entero de A en la A-álgebra K_i, $i=1, \quad ,n$ Por ser A reducido $p_1 \cap \quad \cap p_n = 0$, luego con las identificaciones pertinentes la extensión $A \subseteq A'$ factoriza en la forma

$$A \subseteq A_1 \times \quad \times A_n \subseteq A'_1 \times \quad \times A'_n$$

Un ideal primo de $A_1 \times \quad \times A_n$ es de la forma

$$A_1 \times \quad \times P/p_i \times \quad \times A_n$$

siendo $P \in \operatorname{Spec} A$ $p_i \subseteq P$ su contracción a A es P Veamos que $A \subseteq A_1 \times \quad \times A_n$ es, en cualquier caso una GB-extensión Sea la terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de spec A y el par $\bar{P}_1 \subset \bar{P}_2$ de Spec $(A_1 \times \quad \times A_n)$ tales que $\bar{P}_1 \cap A = P_1$ $\bar{P}_2 \cap A = P_2$ Puesto que $\bar{P}_1 \subset \bar{P}_2$, existe un primo minimal p_i tal que

$$\bar{P}_2 = A_1 \times \quad \times P_2/p_i \times \quad \times A_n$$

$$\bar{P}_1 = A_1 \times \quad \times P_1/p_i \times \quad \times A_n$$

y basta tomar $\bar{P} = A_1 \times \quad \times P/p_i \times \quad \times A_n$ para tener $\bar{P}_1 \subset \bar{P} \subset \bar{P}_2$ y $\bar{P} \cap A = P$

Supuesto que $A_i \subseteq A'_i$ $i = 1, \quad ,n$ son GB-extensiones, también lo es (de hecho, es equivalente) la extensión

$$A_1 \times \quad \times A_n \subseteq A'_1 \times \quad \times A'_n$$

al identificarse el espectro de un producto finito con la reunión disjunta de los espectros de los factores Luego $A \subseteq A'$ es una GB-extensión, al ser composición de GB-extensiones (1 1 a)

Recíprocamente, si $A \subseteq A'$ es una GB-extensión, sea la terna $\bar{P}_1 \subset \bar{P} \subset \bar{P}_2$ de Spec $(A_1 \times \quad \times A_n)$ y el par $P'_1 \subset P'_2$ de Spec

$(A'_1 \times \ \ \times A'_n)$ tales que $P'_1 \cap (A_1 \times \ \ \times A_n) = \bar{P}_1, P'_2 \cap (A_1 \times \ \ \times A_n) = \bar{P}_2$ Existe un primo minimal p_i y una terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A tales que

$$\bar{P}_2 = A_1 \times \ \ \times P_2/p_i \times \ \ \times A_n$$

$$\bar{P} = A_1 \times \ \ \times P/p_i \times \ \ \times A_n$$

$$\bar{P}_1 = A_1 \times \ \ \times P_1/p_i \times \ \ \times A_n$$

Puesto que $P'_1 \cap A = P_1$ $P'_2 \cap A = P_2$, existe por hipótesis un $P' \in \mathrm{Spec}\ (A'_1 \times \ \ \times A'_n)$ tal que $P'_1 \subset P \subset P'_2$ y $P' \cap A = P$ Como $P' \cap (A_1 \times \ \ \times A_n)$ contrae a P y contiene a $\bar{P}_1$ necesariamente $P' \cap (A_1 \times \ \ \times A_n) = \bar{P}$, luego

$$A_1 \times \ \ \times A_n \subseteq A'_1 \times \ \ \times A'_n$$

es una GB-extensión lo que implica que $A_i \subseteq A'_i$ $i=1, \ \ ,n$ son GB-extensiones ●

(4 6) - *Observacion* A diferencia de (4 5), $A \subseteq A'$ es una GD-extensión si y sólo si $A_i \subseteq A'_i$ $i = 1 \ \ n$ son GD-extensiones y $A = A_1 \times \ \ \times A_n$ En efecto, el 'teorema chino indica que $A \neq A_1 \times \ \ \times A_n$ si y solo si existe un par $i \neq j$ tal que $p_i + p_j \neq A$ En este caso existe un ideal maximal M de A tal que $p_i + p_j \subseteq M$ Considerando el par $p_i \subset M$ de Spec A y el ideal primo

$$A_1 \times \ \ \times M/p_j \times \ \ \times A_n$$

de $A_1 \times \ \ \times A_n$, el 'going-down no se verifica al ser $p_j \not\subseteq p_i$ La demostración se completa de forma semejante a (4 5)

Finalmente las anteriores proposiciones permiten demostrar un resultado de ascenso' Nótese que una extensión finita de un GB_2-anillo noetheriano no es en general un GB_2-anillo (3 10 d)

(4 7) - *Proposición* *Sea* A *un anillo noetheriano,* A' *su cierre entero en el anillo total de fracciones de* A *Si* A *es un* GB_2-*anillo,* A' *es un* GB_2-*anillo*

Demostración Por (3 3) basta ver que $(A')_{red}$ es un GB_2-anillo, lo cual equivale a que lo sea $(A_{red})'$ según el lema (4 3) Por (3 3) A_{red} es un GB_2-anillo, luego puede suponerse que A es reducido Entonces con la notación de (4 5) se tiene un isomorfismo ([3], Ch V §1 2 cor 1)

$$A' \approx A'_1 \times \quad \times A'_n$$

y por (3 3 d) basta ver que $A'_1 \quad , A'_n$ son GB_2 anillos Como $A_i = A/p_i \quad i = 1, \quad , n$ es un GB_2-anillo por (3 3), queda reducido el problema al caso de un anillo íntegro

Supuesto que A es íntegro, sea $A' \subseteq B$ una extensión entera Sea $P'_1 \subset P' \subset P'_2$ una terna de Spec A' y $Q_1 \subset Q_2$ un par de Spec B tales que $Q_1 \cap A' = P'_1$, $Q_2 \cap A' = P'_2$ Contrayendo $P'_1 \subset P' \subset P_2$ a A se obtiene una terna $P_1 \subset P \subset P_2$

Si $P'_1 = (0)$, $A' \subseteq B/Q_1$ es una extensión entera de anillos íntegros con A' íntegramente cerrado El clásico teorema de going-down de Krull ([2], 5 16) demuestra que $A' \subseteq B/Q_1$ es una GD-extensión y esto implica que existe un $Q \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A' = P'$

Si $P'_1 \neq (0)$, también $P_1 \neq (0)$ por ser $A \subseteq A'$ una extensión entera $A \subseteq B$ es una GB-extensión, luego existe $Q \in$ Spec B tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$ Sea $P'' = Q \cap A'$ Se tiene $h(P) > h(P_1) \geqslant 1$ y como $A \subseteq A'$ es una GB-extensión (4 2) asegura que P es unirramificado en A' como $P'' \cap A = P' \cap A = P$, se sigue que $P = P'$ Entonces $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A' = P$ lo que demuestra que $A' \subseteq B$ es una GB-extensión ●

§ 5 - *Unirramificacion de ideales primos*

A la vista de (4 1) y (4 2), la cuestión de la unirramificación de un ideal primo en una extensión entera es fundamental en el estudio de las GB-extensiones También es de gran importancia en otros contextos baste como muestra el siguiente teorema de Nagata ([27], 43 12) Un anillo íntegro local A de ideal maxi mal M es henseliano si y solo si M es unirramificado en toda extensión entera íntegra de A

En lo que sigue de este parágrafo se trata básicamente de probar que la unirramificación de ciertos ideales primos implica la de otros Se utilizan algunos resultados del capítulo I y a su vez, los que se obtienen serán de importancia en el capítulo III

(5 1) - *Lema* *Sean* $A \subseteq B$ *anillos,* P *un ideal primo de* A *Se verifica*

a) *Si* P *es unirramificado en* C *para toda* A-*álgebra finitogenerada* C *tal que* $A \subseteq C \subseteq B$ *, entonces* P *es unirramificado en* B

b) *Si* $A \subseteq B$ *es una extensión entera y* P *es unirramificado en* B *, entonces* P *es unirramificado en todo anillo* C *tal que* $A \subseteq C \subseteq B$

Demostracion Sean Q_1, $Q_2 \in \text{Spec } B$ tales que $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = P$ Si $Q_1 \neq Q_2$ existen $x_1 \in Q_1 - Q_2$, $x_2 \in Q_2 - Q_1$ y entonces, si $C = A[x_1, x_2]$, se tiene $Q_1 \cap C \neq Q_2 \cap C$ Como ambos ideales contraen a P esto contradice la hipótesis de a) Luego ha de ser $Q_1 = Q_2$, lo que demuestra a)

La demostración de b) es consecuencia inmediata de que Spec B $\rightarrow$ Spec C es epiyectiva, al ser $C \subseteq B$ una extensión entera ●

Sea R un anillo íntegro K su cuerpo de cocientes Se dice que R es un *G-dominio* ([18] p 12) si K es una R-álgebra finitogenerada Un ideal primo P de un anillo A se llama un *G-ideal* ([18], p 16) si A/P es un G-dominio Todo ideal maximal es, desde luego, un G-ideal y los anillos de Jacobson (llamados también de Hilbert) son aquellos en los que recíprocamente, todo G-ideal es maximal De los G-ideales nos interesa el hecho general siguiente ([18], Th 26) En un anillo cualquiera, todo ideal primo es intersección de los G-ideales que le contienen

(5 2) - *Proposición Sean* A, B *anillos tales que* $A \subseteq B$ *es una extensión entera y sea* $P \in \mathrm{Spec}\, A$ *Si todo G-ideal de* A *que contiene a* P *es unirramificado en* B, *entonces* P *es unirramificado en* B

Demostración Por (5 1 a) basta ver que P es unirramificado en C para toda A-álgebra finitogenerada C tal que $A \subseteq C \subseteq B$ y por (5 1 b) todo G-ideal de A que contiene a P es unirramificado en C Luego en definitiva puede suponerse que la extensión $A \subseteq B$ es finita

Sean Q, $Q' \in \mathrm{Spec}\, B$ tales que $Q \cap A = Q' \cap A = P$ Sea Q_1 un G-ideal de B tal que $Q \subseteq Q_1$ (existe alguno pues al menos Q está contenido en un ideal maximal) y sea $P_1 = Q_1 \cap A$ Puesto que $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ es una extensión finita, se sigue de ([18], Th 22) que P_1 es un G-ideal de A Por otra parte el teorema de going-up ([2], 5 11) permite encontrar un $Q_1' \in \mathrm{Spec}\, B$ tal que $Q \subseteq Q_1'$ y $Q_1' \cap A = P_1$ Al ser P_1 un G-ideal que contiene a P la hipótesis implica que $Q_1 = Q_1'$ lo que viene a demostrar que todo G-ideal de B que contiene a Q contiene también a Q Por simetría resulta que los G-ideales que contienen a Q y a Q' son los mismos Como todo ideal primo es intersección de los G-ideales que le contienen, resulta que $Q = Q'$ luego P es unirramificado en B ●

Puesto que en un anillo de Jacobson los G-ideales son los ideales maximales, el siguiente corolario resulta inmediatamente de (5 2)

(5 3) - *Corolario Sea* A *un anillo de Jacobson,* $A \subseteq B$ *una extensión entera tal que todo ideal maximal de* A *es unirramificado en* B *Entonces la extensión* $A \subseteq B$ *es unirramificada*

La proposición (4 2) se puede completar con el uso de (5 2)

(5 4) - *Corolario Sea* A *un anillo noetheriano,* A' *el cierre entero de* A *en su anillo total de fracciones Si* $A \subseteq A$ *es una GD-extensión y* A *carece de G-ideales de altura 1, entonces* Spec A' $\to$ SpecA *es un homeomorfismo*

Demostración Razonando como en (4 4), se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ A' & \to & \mathrm{Spec}\ A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A_{red}) & \to & \mathrm{Spec}\ A_{red} \end{array}$$

que permite suponer A reducido, ya que por la misma definición los G-ideales de A_{red} están en correspondencia biyectiva con los de A inducida por el homeomorfismo Spec A $\to$ Spec A_{red} Con las notaciones de (4 5) se tiene en virtud de (4 6) que $A=A_1 \times \quad \times A_n$ y que $A_i \subseteq A_i'$ es una GD-extensión para cada $i=1 \quad n$ Los G-ideales de A_i están a su vez en biyección con los de A que contienen a p_i En definitiva, basta demostrar (5 4) en el caso en que A sea íntegro

Si A es íntegro, como se vió en (4 2), todo ideal primo de altura > 1 es unirramificado en A' Entonces todo G-ideal de A es unirramificado en A', luego por (5 2) Spec A' $\to$ Spec A es biyectiva Como es continua y cerrada ([3] Ch V §2 1 rem (2)) es un homeomorfismo ●

(5 5) - *Observaciones* a) En (5 2) e incluso en (5 4), no es suficiente suponer que todo ideal maximal es unirramificado En (III, 2 3) se construirán familias de anillos A tales que A es local, en los que hay ideales primos de A que no son unirramificados en A' Grothendieck señala de hecho esto al dar un ejemplo de anillo 'unibranche (anillo local con cierre entero local) que no es localmente unibranche' ([13], Ch IV 6 15 2 y [14], Ch 0 6 5 11) Sin embargo sus dos demostraciones (completamente distintas en [13] y [14]) son incorrectas (en [13], porqu t no es de grado 2 sino 3 sobre k[V,W] y en [14], porque el ideal *a* no es intersección completa)

b) (5 4) generaliza ([23] cor del Th 3) pero la demostración es distinta y mas corta sobre todo limitada al caso íntegro

c) En (5 2) si A es noetheriano es suficiente asegurar la unirramificación de los ideales primos $P_1 \supseteq P$ con $ch(P_1) \leqslant 1$ o incluso de los $P_1 \supseteq P$ contenidos en solo un número finito de ideales maximales de A en virtud de la estructura de los G-ideales de A ([18], Th 146)

Los resultados que siguen son, en cierto modo, duales de los anteriores En lugar de las propiedades de los G-ideales se utilizan el Hauptidealsatz de Krull y (I 1 5)

(5 6) - *Proposicion* *Sean* A, B *anillos íntegros tales que* A *es noetheriano y* $A \subseteq B$ *es una GD-extension entera* *Si todo ideal primo de altura 1 de* A *es unirramificado en* B, *entonces la extensión* $A \subseteq B$ *es unirramificada*

Demostración Las dos partes del lema (5 1) permiten suponer que la extensión $A \subseteq B$ es finita, lo que implica que B es un anillo noetheriano

El ideal primo (0) de A es unirramificado en B por ser $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos íntegros

Sea $P \in \operatorname{Spec} A$, $P \neq (0)$ y sean Q Q $\in$ Spec B tales que $Q \cap A = Q' \cap A = P$ Se tiene $h(Q) \geqslant 1$ Sea $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q_1 \subseteq Q$ y $h(Q_1) = 1$ Sea $P_1 = Q_1 \cap A$ Por ser $A \subseteq B$ una GD-extensión entera, se conservan las alturas de los ideales primos ([21] 13 C), luego $h(P_1) = h(Q_1) = 1$ Dado el par $P_1 \subseteq P$ de Spec A y el ideal $Q' \in \operatorname{Spec} B$ por ser $A \subseteq B$ una GD-extensión existe $Q_1' \in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q_1' \subseteq Q'$ y $Q_1 \cap A = P_1$ Puesto que $h(P_1)=1$ la hipótesis implica que $Q_1' = Q_1$ Se ha demostrado así que todo ideal primo de altura 1 de B contenido en Q está también contenido en Q' Por simetría resulta que Q y Q' contienen los mismos ideales primos de altura 1 de B

Para concluir que Q = Q basta razonar que en cualquier anillo noetheriano íntegro todo ideal primo $Q \neq (0)$ es reunión de los ideales primos de altura 1 contenidos en Q En efecto, sea $x\in Q$, $x \neq 0$ $(x) \subseteq Q$ implica que existe un ideal primo minimal Q^* de (x) tal que $(x) \subseteq Q^* \subseteq Q$ El Hauptidealsatz ([2] 11 17) asegura que $h(Q^*) = 1$ y lo afirmado ya es inmediato ●

(5 7) - *Proposición* *Sean* A, B *anillos íntegros tales que* A *es un anillo noetheriano y* $A \subseteq B$ *es una extensión entera* *Si todo* $P_1 \in \operatorname{Spec} A$ *con* $ch(P_1) = 1$ *es unirramificado en* B, *se verifica*

a) *Todo* $P\in \operatorname{Spec} A$ *con* $ch(P) \geqslant 1$ *es unirramificado en* B

b) $A \subseteq B$ *es una GD-extensión si y sólo si todo ideal maximal* M *de* A *con* $h(M) > 1$ *es unirramificado en* B

Demostración Una vez mas el lema (5 1) permite suponer en a) que la extensión $A \subseteq B$ es finita, con lo cual B es un anillo noetheriano Sea $P\in \operatorname{Spec} A$ con $ch(P) > 1$ y sean Q, $Q'\in \operatorname{Spec} B$ tales que $Q\cap A = Q'\cap A = P$ Sea $Q_1\in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q\subseteq Q_1$ y $ch(Q_1)=1$ (existe alguno porque las extensiones enteras conservan la coaltura ([18] Th 47)) Sea $P_1 = Q_1\cap A$ dado el par $P \subseteq P_1$ y el ideal Q', por el teorema de going-up existe $Q_1'\in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q' \subseteq Q_1'$ y $Q_1'\cap A = P_1$ Como $ch(P_1) = ch(Q_1) = 1$, P_1 es unirramificado en B, luego $Q_1' = Q_1$ Esto demuestra que los ideales primos de coaltura 1 de B que contienen a Q y a Q' son los mismos Entonces, por (I, 1 5) se tiene

$$Q=\bigcap\{Q_1\in \operatorname{Spec} B \mid Q \subseteq Q_1,\ ch(Q_1)=1\}=\bigcap\{Q_1'\in \operatorname{Spec} B \mid Q' \subseteq Q_1',\ ch(Q_1')=1\}= = Q'$$

lo que demuestra a)

Para demostrar b), supóngase que todo ideal maximal M de A con $h(M)> 1$ es unirramificado en B Por la conclusión obtenida en a) resulta que todo $P\in \operatorname{Spec} A$ es unirramificado en B, salvo posiblemente algún ideal maximal de A de altura 1 Veamos que $A \subseteq B$ es una GD-extensión Dados $P_1\subset P_2$ en Spec A y $Q_2\in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q_2\cap A=P_2$, si P_2 es maximal y $h(P_2) = 1$, ha de ser $P_1 = (0)$ y basta tomar $Q_1 = (0)$ para tener $Q_1\subset Q_2$ y $Q_1\cap A = (0)$ En caso contrario, P_2 es unirramificado en B Por ser $A \subseteq B$ una extensión entera existe $Q_1 \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_1 \cap A = P_1$ y por el teorema de going-up existe $Q_2 \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_1 \subset Q_2'$ y $Q_2 \cap A = P_2$ La unirramificación de P_2 implica que $Q_2 = Q_2$ luego $Q_1 \subset Q_2$ y $A \subseteq B$ es una GD-extensión

Recíprocamente supóngase que $A \subseteq B$ es una GD-extensión Si C es un anillo tal que $A \subseteq C \subseteq B$, resulta fácilmente de la epiyectividad de $\mathrm{Spec}\ B \to \mathrm{Spec}\ C$ que $A \subseteq C$ es una GD-extensión Entonces por (5 1 a) se puede suponer que la extensión $A \subseteq B$ es finita y que B es noetheriano Sea M un ideal maximal de A con $h(M) > 1$ y sean N_1 $N_2 \in \mathrm{Spec}\ B$ tales que $N_1 \cap A = N_2 \cap A = M$ Por ser $A \subseteq B$ una GD-extensión entera N_1 y N_2 son ideales maximales y $h(N_1) = h(N_2) = h(M) > 1$ ([21] 13 C) Sea $Q_1 \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_1 \subset N_1$ y $h(Q_1) = 1$ sea $P_1 = Q_1 \cap A$ Por ser $A \subseteq B$ una GD-extensión dados $P_1 \subset M$ y N_2 existe $Q_2 \in \mathrm{Spec}\ B$ tal que $Q_2 \subset N_2$ y $Q_2 \cap A = P_1$ Como P_1 no es maximal, la parte a) asegura que es unirramificado en B luego $Q_2 = Q_1$ y $Q_1 \subset N_2$ Esto demuestra, por simetría que N_1 y N_2 contienen los mismos ideales primos de altura 1 Somo se observó al final de la demostración de (5 6), en un anillo noetheriano íntegro todo ideal primo $\neq (0)$ es reunión de los ideales primos de altura 1 que contiene Luego $N_1 = N_2$ y está demostrado b) ●

CAPITULO III

LA CONDICION DE GB_2-ANILLO EN EL CASO NOETHERIANO

En este capítulo se estudia la existencia de GB_2-anillos noetherianos, examinando dos casos fundamentales que recubren la mayoría de los anillos noetherianos habituales las álgebras finitogeneradas sobre un anillo noetheriano y los anillos de series formales

Los resultados que se obtienen ponen de manifiesto que la condición noetheriana limita fuertemente la existencia de GB_2-anillos por encima de la dimensión 3 En particular se demuestra que si k es un cuerpo y B un GB_2-anillo que es un localizado de una k-álgebra finitogenerada, entonces $\dim B \leq 3$ y también que $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ es un GB_2-anillo si y sólo si $n \leq 3$

Un punto clave en el problema es la cuestión de la existencia de ideales primos no nulos contenidos en la intersección de dos ideales primos de un anillo íntegro concretamente la llamada conjetura de Kaplansky-Hochster ([15] p 67) Sea A un anillo noetheriano íntegro, P_1, $P_2 \in \operatorname{Spec} A$ tales que $h(P_1)=h(P_2)=2$ ¿existe algún ideal primo $\neq (0)$ contenido en $P_1 \cap P_2$? McAdam ([25]) ha dado recientemente una respuesta general negativa, pero acompañada de resultados positivos para anillos de polinomios, uno de los cuales utilizaremos Por otro lado su contraejemplo al caso general ([25], Th 7) está basado en propiedades de unirramificación de un anillo henseliano Ambas cosas parecen sugerir que la conjetura de Kaplansky-Hochster y la existencia de GB_2-anillos son problemas conexos

El caso de las series formales por lo antes indicado, requiere un tratamiento completamente diferente El paso de un anillo local a su completado destruye en general la integridad y esto hace imposible estudiar directamente el problema en las series por ascenso de lo ya obtenido en los polinomios Nuestro método se basa en aprovechar la interrelación existente para una amplia clase de anillos locales entre la unirramificación del ideal maximal en el cierre entero y la integridad del completado

§ 1 - *El caso de álgebras finitogeneradas*

Se van a obtener condiciones necesarias para que una álgebra finitogenerada sobre un anillo noetheriano sea un GB_2-anillo basándonos en la proposición siguiente

(1 1) - *Proposición Sea* A *un anillo noetheriano íntegro,* K *su cuerpo de cocientes,* $\alpha \in K$ *Supóngase que existen ideales primos distintos* Q_o Q_1 Q_2 $\in \operatorname{Spec} A[\alpha]$ *tales que* $Q_o \subset Q_1 \cap Q_2$ *y que* $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = P$ *y* $Q_o \cap B = P_o$ *verifican* $h(P/P_o)=1$ *y* P *no es un G-ideal de* A *Entonces* A *no es un* GB_2*-anillo*

Demostración En la situación indicada se tiene una extensión $A/P_o \subseteq A[\alpha]/Q_o$ Considerando el sistema multiplicativo $S=A/P_o - P/P_o$, sean

$$B = S^{-1}(A/P_o) \qquad C = S^{-1}(A[\alpha]/Q_o)$$

Se tiene una extensión $B \subseteq C$ de anillos noetherianos íntegros Designando con barras las clases módulo P_o ó Q_o

$$A[\alpha]/Q_o \approx A/P_o[\bar{\alpha}]$$

y si $\alpha = \frac{x}{y}$ con $x \; y \in A$ se sigue de $\alpha y = x$ que $\bar{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ luego A/P_o y $A[\alpha]/Q_o$ tienen un mismo cuerpo de cocientes L, que es a su vez el cuerpo de cocientes de B y C

Veamos que el cierre entero B' del anillo local B no es un anillo local Supuesto que B fuera local, B es un anillo de valoración discreta, pues es local noetheriano íntegramente cerrado y dim B'= dim B = $h(P/P_o)$ = 1 por hipótesis Por ser B un anillo local, B' es la intersección de los anillos de valora ción de L que dominan B ([3] Ch VI § 1 3 Th 3) Pero por ser B de valoración discreta no existen anillos intermedios entre B' y L ([3] Ch VI §4 5 prop 6), luego B' es el único anillo de valoración de L que domina B Sean $Q_1^*=S^{-1}(Q_1/Q_o)$, $Q_2^*=$ $=S^{-1}(Q_2/Q_o)$ El anillo local $C_{Q_1^*}\subset L$ domina B, pues $Q_1\cap A = P$ como está contenido en un anillo de valoración de L que domina $C_{Q_1^*}$ ([3], §1 2 cor del Th 2) y por tanto domina B, resulta que $C_{Q_1^*}\subseteq B$ Esto implica $B\subseteq C\subseteq B$, lo cual es absurdo al ser $B\subseteq B'$ una extensión entera, B y B anillos locales y C no local (ya que $Q_1^*\neq Q_2^*$) Luego B no es un anillo local

Veamos finalmente que A no puede ser un GB_2-anillo El ideal P no es un G-ideal luego en particular no es maximal y esto implica que $ch(P_o)\geqslant 2$ Supuesto que A fuera un GB_2-anillo como $ch(P_o)\geqslant 2$ se sigue de (II 4 1) que todo ideal primo de A/P_o de altura >1 es unirramificado en $(A/P_o)'$ Como $h(P/P_o)= 1$ y P/P_o no es un G-ideal (por no serlo P), resulta entonces que todo G-ideal de A/P_o que contenga a P/P_o es de altura >1 y por tanto unirramificado en (A/P_o) Al conmutar el cierre entero con la localización ([2] 5 12) se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A/P_o & \rightarrow & (A/P_o)' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B=S^{-1}(A/P_o) & \rightarrow & S^{-1}(A/P_o)'=B \end{array}$$

y la unirramificación de P/P_o implica que B' es un anillo local, en contradicción con lo antes demostrado Luego A no puede ser un GB_2-anillo ●

El lema siguiente debe ser bien conocido pero no se dispone de referencia alguna suya

(1 2) - *Lema Sea* A *un anillo noetheriano*, $P\in \operatorname{Spec}A$ *con* $h(P)\geqslant 2$ *Existen elementos* $x,y\in P$ *tales que todo ideal primo minimal del ideal* (x,y) *es de altura* 2

Demostración Existe una cadena $P_1 \subset P_2 \subset P$ en Spec A El anillo A tiene un número finito de ideales primos de altura 0, que junto con P_1 no pueden recubrir P_2 por ([2], 1 11) luego existe un elemento $x \in P_2$ tal que $x \notin P_1$ y todos los ideales primos minimales Q_1, , Q_n de (x) son de altura 1 (que son de altura ≤ 1 se sigue del Hauptidealsatz ([2] 11 17)) Entonces $P \not\subseteq Q_i$ i=1 n y otra vez por ([2], 1 11) $P \not\subseteq Q_1 \cup \quad \cup Q_n$, luego existe $y \in P$ y $\notin Q_1 \cup \quad \cup Q_n$ Sea P' un ideal primo minimal de (x y) Se tiene $h(P') \leq 2$ por ([2] 11 16) y $h(P') \neq 0$ pues $x \in P'$ Si fuese $h(P\ )=1$, necesariamente $P'=Q_i$ para algun i, lo que es imposible ya que $y \notin Q_i$ Luego $h(P') = 2$ ●

Se precisa aún otro lema, consecuencia de argumentos de E D Davis ([5]) Se demuestra por comodidad limitado a lo que se necesita luego

(1 3) - *Lema Sea* A *un anillo noetheriano integro,* x $y \in A$ *tales que todo ideal primo minimal de* (x,y) *es de altura 2 Sea* T *una indeterminada Si* N *es el nucleo del homomorfismo canonico*

$$A[T] \rightarrow A[\frac{y}{x}]$$

entonces N *es el unico ideal primo minimal del ideal* (xT-y)

Demostracion Desde luego $(xT-y) \subseteq N$ Sea $f \in N$

$$f = a_o + a_1\ T + \quad + a_nT^n \quad a_o, \quad ,a_n \in A$$

Escribiendo T = (xT-y)+y x^nf resulta ser una expresión polinómica en xT-y cuyo término constante es

$$a_ox^n + a_1x^{n-1}y + \quad + a_ny^n = 0$$

ya que $f(\frac{y}{x}) = 0$ Luego $x^nf \in (xT-y)$ Si el ideal N está generado por f_1 $f_r \in A[T]$ con grados n_1 n_r y m es el mayor de éstos, resulta

$$x^mN \subseteq (xT-y)$$

Sea P un ideal primo minimal de (xT-y) Por el Hauptidealsat h(P)=1 Veamos que $x \notin P$ Si $x \in P$, también $y=xT-(xT-y) \in P$, luego P sería un ideal primo minimal de $(x,y)A[T]$, que por ([27], 6 15 y 6 16) es de la forma $Q[T]$ con Q ideal primo minimal de $(x,y)A$ Como $h(Q[T]) = h(Q) = 2$ por ([18] Th 149) y la hipótesis, se llega a la contradicción $h(P) = 2$ Luego $x \notin P$

Entonces $x^m N \subseteq (xT-y) \subseteq P$ implica $N \subseteq P$, ya que $x \notin P$ y como $(xT-y) \subseteq N$, ha de ser $P=N$ por la minimalidad de P ●

Se pasa ahora a demostrar el primer resultado fundamental

(1 4) - *Proposicion* *Sean* $A \subset B$ *anillos íntegros tales que* B *es un* GB_2*-anillo noetheriano y una* A*-álgebra finitogenerada con* gr tr $_A B \geq 1$ *Entonces* $\dim B \leq 3$ *y si* $rd(B)=0$, $\dim B \leq 2$

Demostracion Aplicando el lema de normalización generalizado ([3] ch V §3 1 cor 1) es posible encontrar un elemento $f \in A$ $f \neq 0$ y elementos $b_1 \quad b_n \in B$ algebraicamente independientes sobre A tales que la extensión

$$A_f[b_1 \quad ,b_n] \subseteq B_f$$

es finita Supuesto que $\dim B \geq 4$ ó que $rd(B)=0$ y $\dim B \geq 3$, según (II 3 4) es suficiente demostrar que B_f no es un GB_2-anillo Por (I 2 3) se tiene

$$\dim B_f \geq \dim B - 1$$

(incluso si $\dim B = \infty$) y si $rd(B)=0$ $\dim B_f = \dim B$ luego en cualquiera de los dos casos contemplados en la hipótesis $\dim B_f \geq 3$ Dado que gr tr $_A B \geq 1$, ha de ser $n \geq 1$ si se agrupan $b_1, \quad ,b_{n-1}$ junto con A_f y se cambia la notación, es posible en definitiva suponer que se tiene una extensión finita

$$A[Z] \subseteq B$$

con A B anillos íntegros Z una indeterminada y B un anillo noetheriano con $\dim B \geq 3$, que hay que demostrar que no es un GB_2-anillo

El teorema de Eakin de descenso de la condición noetheriana en una extensión finita ([8], Th 2) implica que $A[Z]$, y en consecuencia A, son anillos noetherianos De aquí se sigue ([27] 9 10)

$$\dim A[Z] = \dim A + 1$$

y como $A[Z] \subseteq B$ es una extensión entera,

$$\dim A + 1 = \dim B \geqslant 3$$

luego $\dim A \geqslant 2$ Entonces el lema (1 2) permite encontrar elementos x $y \in A$ tales que todo ideal primo minimal de (x,y) tiene altura 2

Sea $\alpha = \frac{x}{y}$, $C = A[Z]$ Se tiene un diagrama conmutativo de inclusiones

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & C=A[Z] & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A[\alpha] & \rightarrow & C[\alpha]=A[\alpha][Z] & \rightarrow & B[\alpha] \end{array}$$

en el que todo son anillos noetherianos íntegros $A[\alpha][Z]$ es un anillo de polinomios al estar $A[\alpha]$ contenido en el cuerpo de cocientes de A $C \subseteq B$ es una extensión finita si $b_1 \quad ,b'_m$ generan B como C-módulo se tiene

$$B[\alpha] = C[\alpha][b_1 \qquad b_m]$$

lo que implica que $C[\alpha] \subseteq B[\alpha]$ es una extensión finita

Sea p un ideal primo minimal del ideal (x,y) de A $h(p)=2$ por la elección hecha de x y Sea T una indeterminada y sea N el núcleo del homomorfismo canónico

$$A[T] \rightarrow A[\alpha]$$

Puesto que $(x,y) \subseteq p$, $(xT-y) \subseteq p[T]$ luego el ideal primo $p[T]$ contiene un ideal primo minimal de $(xT-y)$, que por el lema (1 3) ha de ser N La fibra de p en Spec $A[T]$ consta ([18] Th 36) del ideal $p[T]$ y de una familia infinita de ideales primos no comparables entre sí que contienen (y son adyacentes) a $p[T]$ Como $N \subseteq p[T]$ resulta que la fibra de p en Spec $A[\alpha] \approx$ Spec $A[T]/N$ está formada por un ideal $q \approx p[T]/N$ y una familia infinita de ideales primos que contienen a q Luego para cualquier número natural r es posible considerar ideales primos $q_1, \quad q_r$ de $A[\alpha]$ distintos de q, diferentes entre sí y tales que

$$q \subset q_i,\ h(q_i/q)=1 \quad q \cap A = q_i \cap A = p \quad i=1, \quad r$$

Se pasa a calcular sus alturas

El ideal primo N verifica $N \cap A = (0)$ y $N \neq (0)$ Considerando las propiedades de la fibra de (0) en Spec A[T] (antes expuestas para el ideal p) se sigue que h(N)=1 Cada ideal q_i es de la forma $q_i \approx \tilde{q}_i/N$ con $\tilde{q}_i \in \mathrm{Spec}\, A[T]$, $p[T] \subset \tilde{q}_i$ y $\tilde{q}_i \cap A = p$

Se verifica ([18], Th 149)

$$h(p[T]) = h(p) = 2$$

$$h(\tilde{q}_i) = h(p) + 1 = 3 \qquad i = 1, \quad ,r$$

de donde

$$h(q) = h(p[T]/N)=1$$

y $h(q_i)=h(\tilde{q}_i/N)\geqslant 2$ Como en cualquier caso

$$h(N) + h(\tilde{q}_i/N)\leqslant h(\tilde{q}_i) = 3$$

resulta que $h(q_i) = 2 \quad i = 1 \qquad r$

Sean $P = q[Z]$, $P_i=q_i[Z] \quad i =1 \qquad r$ Son ideales primos distintos de $A[\alpha][Z]$ y verifican $P \subset P_i$ y

$$P \cap C=q[Z] \cap A[Z]=(q \cap A)[Z]= p[Z]$$

$$P_i \cap C=q_i[Z] \cap A[Z]=(q_i \cap A)[Z]= p[Z] \qquad i=1, \quad ,r$$

$P_1, \quad ,P_r$ son ideales primos de altura 2 de $A[\alpha][Z]$ y sus contracciones en $A[\alpha]$, $q_1, \quad ,q_r$ son distintos entre sí Entonces ([25], Th 3) asegura que existen infinitos ideales primos de $A[\alpha][Z]$ contenidos en $P_1 \cap \quad \cap P_r$ luego es posible encontrar uno $P' \subset P_1 \cap \quad \cap P_r$ tal que $P' \neq P$ y $P' \neq (0)$ Necesariamente $h(P')=1$ puesto que $h(P_1)= \quad =h(P_r)=2$ Veamos que $P' \cap C \neq p[Z]$ en efecto, $P' \cap C=p[Z]$ implica $P' \cap A=p$ y de la conmutatividad del diagrama (*) se sigue que $P' \cap A[\alpha] \supseteq q$, de donde $P' \supseteq q[Z]= P$, lo cual no es posible ya que $h(P)=h(P')=1$ y $P \neq P'$

Por ser $C[\alpha] \subseteq B[\alpha]$ una extensión entera, existe un ideal primo Q' en $B[\alpha]$ tal que $Q' \cap C[\alpha]=P'$ Por igual motivo es posible aplicar el "going-up a los pares $P' \subset P_i \quad i=1, \quad ,r$ y encon trar $Q_1, \ \ ,Q_r$ en Spec $B[\alpha]$ tales que $Q' \subset Q_i$ y $Q_i \cap C[\alpha] = P_i$, $i=1, \ \ ,r$

La finitud de la extensión $C \subseteq B$ asegura ([3], Ch V § 2 1 prop 3) que la fibra de $p[Z]$ en Spec B tiene un número finitos de elementos Como r fue tomado arbitrariamente puede suponerse $r > s$ La conmutatividad de (*) implica que los ideales $Q_i \cap B$ $i=1, \ \ ,r$ son de la fibra de $p[Z]$ puesto que $P_i \cap C = p[Z]$ Al ser $r > s$ no pueden ser todos distintos y por ejemplo se tiene $Q_1 \cap B = Q_2 \cap B = p^*$ para cierto p^* tal que $p^* \cap C = p[Z]$ Dado que $P' \cap C \neq p[Z]$ ha de ser $Q' \cap B \neq p^*$ y por tanto $Q' \cap B \subset p^*$

La fibra del ideal (0) de B en $B[\alpha]$ es (0) En efecto, un ideal $J \neq (0)$ de $B[\alpha]$ contiene un elemento $c \neq 0$ de la forma

$$c = b_o + b_1 \frac{y}{x} + \quad + b_k \left(\frac{y}{x}\right)^k \qquad b_o \quad , b_k \in B$$

y $cx^k \in J \cap B$ luego $J \cap B \neq (0)$ Entonces $Q' \neq (0) \Rightarrow p_o^* = Q' \cap B \neq (0)$ y se tiene la cadena

$$(0) \subset p_o^* \subset p^*$$

Por ser $C \subseteq B$ una extensión entera se verifica ([18] Th 45) $h(p^*) \leqslant h(p[Z]) = 2$ y resulta $h(p^*/p_o^*) = 1$

El ideal p^* no es un G-ideal En efecto, $p^* \cap C = p[Z]$ está contenido (como ya se indicó para $p[T]$) en infinitos ideales primos que forman la fibra de p en $C = A[Z]$ Aplicando el 'going-up en la extensión $C \subseteq B$ se obtienen infinitos ideales primos de B que contienen a p^* Como B es noetheriano, este hecho imposibilita que p^* sea un G-ideal ([18], Th 146)

Se ha llegado por fin a estar en las condiciones de la proposición (1 1) para la extensión $B \subset B[\alpha]$ se tienen ideales primos distintos Q', Q_1, Q_2 en $B[\alpha]$ tales que $Q' \subset Q_1 \cap Q_2$ y que $Q_1 \cap B = Q_2 \cap B = p^*$ y $Q' \cap B = p_o^*$ verifican $h(p^*/p_o^*) = 1$ y p^* no es un G-ideal Luego por (1 1) B no es un GB_2-anillo ●

En el siguiente corolario se excluyen los casos con dim $B \leqslant 1$, que siempre son GB_2-anillos de forma vacía

(1 5) - *Corolario* *Sea* k *un cuerpo,* B *una* k-*álgebra finito-generada íntegra con* dim B $\geqslant 2$, B *el cierre entero de* B *en su cuerpo de cocientes* B *es un* GB_2-*anillo si y solo si* dim B=2 *y* Spec B' $\rightarrow$ SpecB *es un homeomorfismo*

Demostración Si dim B $\geqslant$ 3, la proposición (1 4) indica que B no es un GB_2-anillo pues rd(B)=0 por (I 2 6) (ó simplemente por ser B un anillo de Jacobson equicodimensional) Si dim B=2 basta aplicar (II 4 1) y (II 5 3) ●

Se pasa el caso de un anillo local La idea general de la demostración es la misma que en (1 4), por lo que una serie de detalles se remiten a dicha proposición Sin embargo, al tener que trabajar ahora dentro de un ideal maximal prefijado las complicaciones que surgen son muy superiores y esto obliga a partir de hipótesis algo mas fuertes

Por anillo *regular* se entiende un anillo A tal que A_M es un anillo local regular para todo ideal maximal M de A Esto implica ([21] 18 6) que A_P es un anillo local regular para todo $P \in$ Spec A

(1 6) - *Proposición* *Sea* A *un anillo integro regular,* Z *una indeterminada,* B *un anillo íntegro tal que* $A[Z] \subseteq B$ *es una extensión finita* *Sea* $\tilde{p}$ *un ideal primo de* B *tal que* $B_{\tilde{p}}$ *es un* GB_2-*anillo* *Entonces* $h(\tilde{p}) \leqslant 3$

Demostración Supuesto que $h(\tilde{p}) \geqslant 4$, se demostrará que $B_{\tilde{p}}$ verifica las condiciones de (1 1) y en consecuencia no puede ser un GB_2-anillo

Consideremos $\tilde{p} \cap A$ Por ser $A[Z] \subseteq B$ una extensión entera se tiene ([18], Th 45)

$$h(\tilde{p} \cap A[Z]) \geqslant h(\tilde{p}) \geqslant 4$$

y entonces en virtud de ([18], Th 149)

$$h(\tilde{p} \cap A) \geqslant 3$$

Sea $p \in$ Spec A tal que $p \subset \tilde{p} \cap A$ y $h(p) = 2$ Por ser A_p un anillo local regular existen elementos $x, y \in p$ tales que

$$p A_p = (x,y)A_p$$

Veamos que es posible suponer que $p=(x,y)A$ Sea

$$(x\ y)A = I_1 \cap \quad \cap I_n$$

una descomposición primaria reducida $(x,y)A_p \cap A=p$, luego por ([2], 4 9) p es una de las componentes primarias por ejemplo $p=I_1$, y los radicales de $I_2, \quad ,I_n$ no están contenidos en p Si $n>1$ existe un elemento $f \in I_2 \cap \quad \cap I_n$ $f \notin p$ y de nuevo por ([2], 4 9)

$$(x\ y)A_f=pA_f$$

luego $(x\ y)A_f$ es un ideal primo de altura 2 de A_f A_f es un anillo regular, pues sus anillos locales lo son también de A La extensión $A_f[Z] \subseteq B_f$ es finita y $(B_f)_{\tilde{p}B_f}=B_{\tilde{p}}$, pues $f \notin p$ Luego en definitiva es posible abordar la demostración suponiendo que $p=(x\ y)A$

Sea $\alpha=\dfrac{x}{y}$ Los hechos que se enumeran en este párrafo se demuestran exactamente igual que en (1 4) se tiene un diagrama conmutativo de inclusiones

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & A[Z] & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A[\alpha] & \rightarrow & A[\alpha][Z] & \rightarrow & B[\alpha] \end{array}$$

en el que los anillos son noetherianos íntegros y $A[\alpha][Z] \subseteq B[\alpha]$ es una extensión finita el ideal p de A tiene como fibra en Spec $A[\alpha]$ un ideal primo q con $h(q)=1$ y una familia infinita $\{q_i\}$ de ideales primos tales que $q \subset q_i$ y $h(q_i)=2$ sus extensiones a $A[\alpha][Z]$, $P=q[Z]$, $P_i=q_i[Z]$ son tales que $h(P)=1$, $h(P_i) = 2$ dada cualquier subfamilia finita $P_1, \quad ,P_r$ de $\{P_i\}$ es posible encontrar un ideal primo $P' \subset P_1 \cap \quad \cap P_r$ tal que $P' \neq P$ $P' \neq (0)$ y $h(P\ )=1$

Se tiene el ideal primo $(x\ y)A[Z]=p[Z] \subset \tilde{p} \cap A[Z]$ Por ser A un anillo regular, $A[Z]$ es un anillo regular ([21], 17 J) en particular $A[Z]$ es íntegramente cerrado En consecuencia ([3], Ch V §2 4 cor) la fibra de $p[Z]$ en Spec B está formada por los ideales primos minimales de $(x,y)B$ por el mismo moti vo la extensión $A[Z] \subseteq B$ conserva las alturas de los ideales primos ([27], 10 14), luego todos ellos tendrán altura igual a $h(p[Z])=2$ Dado que $x, y \in \tilde{p}$, existe un ideal primo minimal p^* de $(x\ y)B$ tal que $p^* \subset \tilde{p}$ Razonando como en (1 4) con p^* (al igual que se hizo antes con p) resulta que la fibra de p^* en Spec $B[\alpha]$ está formada por un ideal primo Q con $h(Q)=1$ y una familia infinita de ideales primos de altura 2 que contienen a Q

Por ser A un anillo noetheriano íntegramente cerrado y $(x\ y)A$ un ideal primo el anillo $A[\alpha]$ también es íntegramente cerrado ([32], Th 2), de donde $A[\alpha][Z]$ es íntegramente cerrado Este hecho es clave en la demostración En primer lugar, es posible asegurar que la extensión $A[\alpha][Z] \subseteq B[\alpha]$ conserva alturas ([27] 10 14) en particular $h(Q\cap A[\alpha][Z])=1$ La conmutatividad del diagrama (*) implica que $Q\cap A[\alpha]$ pertenece a la fibra de p en Spec $A[\alpha]$, formada por q y la familia $\{q_1\}$ Como $q \subset q_1$ ha de ser $Q\cap A[\alpha][Z] \supseteq q[Z]= P$ y como $h(P)=1$ necesariamente $Q\cap A[\alpha][Z]=P$ Aplicando el going-up en la extensión $A[\alpha][Z]\subseteq B[\alpha]$ para cada par $P\subset P_1$ es posible encontrar $Q_1 \in$Spec $B[\alpha]$ tal que $Q\subset Q_1$ y $Q_1 \cap A[\alpha][Z]=P_1$ Por la conservación de alturas, $h(Q_1)=$ $=h(P_1)=2$

El ser $A[\alpha][Z]$ íntegramente cerrado y la extensión $A[\alpha][Z] \subseteq B[\alpha]$ finita permite acotar uniformemente el cardinal de las fibras del morfismos

$$\text{Spec } B[\alpha] \rightarrow \text{Spec } A[\alpha][Z]$$

por medio del grado de separabilidad s del cuerpo de cocientes de $B[\alpha]$ sobre el de $A[\alpha][Z]$, como resulta de ([3], Ch V §2 3 remarque 4) Supóngase entonces que antes se ha tomado $r>s$ y se ha encontrado (en la forma que se indicó) un ideal primo $P'\subset P_1\cap \quad \cap P_r$ tal que $P'\neq P$, $P'\neq (0)$ y $h(P')=1$ Por ser $A[\alpha][Z]$ íntegramente cerrado es posible aplicar el going-down ([2], 5 16) en $A[\alpha][Z] \subseteq B[\alpha]$ y encontrar, para cada par $P'\subset P_j$ $j=1, \quad ,r$ un ideal primo Q_j' de $B[\alpha]$ tal que $Q_j \subset Q_j$ y $Q_j'\cap A[\alpha][Z]=P$ Como la fibra de P' tiene a lo mas s elementos y $r>s$, dos de los Q_j'

han de coincidir sea por ejemplo $Q_1'=Q_2$ Entonces $Q_1' \subset Q_1 \cap Q_2$ Puesto que $Q_1' \neq (0)$ y $h(Q_1)=2$, se tiene $h(Q_1') = 1$

Se trata de ver que se ha logrado alcanzar la situación de la proposición (1 1) Veamos que $Q_1 \cap B = Q_2 \cap B = p^*$ Por una parte, $Q \subset Q_1$ implica $p^* \subseteq Q_1 \cap B$ Si $p^* \subset Q_1 \cap B$, contrayendo en la extensión entera $A[Z] \subseteq B$ sería $p[Z] \subset Q_1 \cap A[Z]$ pero esto no es posible ya que

$$Q_1 \cap A[Z] = q_1[Z] \cap A[Z] = (q_1 \cap A)[Z] = p[Z]$$

luego ha de ser $Q_1 \cap B = p^*$

Sea $p_o^* = Q_1' \cap B$ La estructura ya descrita, de la fibra de p^* en Spec $B[\alpha]$ indica que el único ideal primo de $B[\alpha]$ de altura 1 que contrae a p^* es Q Pero $Q_1' \neq Q$, al ser $P \neq P$ luego $p_o^* \subset p^*$ Por otra parte, la fibra del ideal (0) en $B[\alpha]$ es (0), repitiendo un argumento ya utilizado en (1 4) Luego se tiene

$$(0) \subset p_o^* \subset p^* \subset \tilde{p}$$

y como $h(p^*)=2$, se sigue que $h(p^*/p_o^*) = 1$

Sea $D = B_{\tilde{p}}$ Localizando en B y $B[\alpha]$ con el sistema multiplicativo $B - \tilde{p}$ se tiene una extensión

$$D \subset D[\alpha]$$

de ideales primos distintos $Q_1'D[\alpha]$ $Q_2D[\alpha]$, $Q_2D[\alpha]$ tales que

$$Q_1'D[\alpha] \subset Q_1D[\alpha] \cap Q_2D[\alpha]$$

$$Q_1D[\alpha] \cap D = Q_2D[\alpha] \cap D = p^*D$$

$$Q_1D[\alpha] \cap D = p_o^* D$$

$$h(p^*D/p_o^* D) = 1$$

Falta ver que p^*D no es un G-ideal de D A es un anillo regular luego es un anillo de Cohen-Macaulay ([21], 17 F y 16 D) y por tanto universalmente catenario ([21], 16 E) Entonces B es un anillo catenario, lo cual implica ([21] 14 B)

$$h(\tilde{p}/p^*) = h(\tilde{p}) - h(p^*) \geqslant 4-2=2$$

de donde resulta que $h(\tilde{p}D/p^*D) \geqslant 2$ Como D es un anillo noetheriano, esto hace imposible que p^*D sea un G-ideal de D ([18] Th 146

Se ha llegado así a estar en las condiciones de (1 1), luego $B_{\tilde{p}}=D$ no es un GB_2-anillo ●

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado Sobrentendiendo que las variedades algebraicas sobre k que se consideran son afines e irreducibles, la proposición anterior (ó mas propiamente, su demostración) se puede interpretar geométricamente como sigue

(1 7) - *Corolario Sea* X *una variedad algebraica,* X' *una subvariedad de* X *de codimension* $\geqslant 4$ *Existe una variedad algebraica* Y, *subvariedades* $V_2 \subset V \subset V_1$ *de* X *con* $X' \subseteq V_2$ $W_2 \subset W_1$ *de* Y *y un morfismo finito* $Y \xrightarrow{\varphi} X$ *tal que* $\varphi(W_2)=V_2, \varphi(W_1)=V_1$ *, de tal forma que ninguna subvariedad* W *tal que* $W_2 \subset W \subset W_1$ *verifica* $\varphi(W)=V$

Demostracion Sea B el anillo de coordenadas de X Por el lema de normalización B es extensión finita de un anillo de polinomios $k[Z_1, \quad ,Z_n]$ y tomando $A=k[Z_1 \quad Z_{n-1}]$ se tienen las hipótesis de (1 6), pues A es regular La demostración de (1 6) proporciona una cadena de ideales primos

$$(0) \subset p_o^* \subset p^* \subset \tilde{p}$$

que se traduce en la cadena de subvariedades

$$X' \subset V \subset V_1 \subset X$$

Aplicando (1 1) (sin pasar por $D=B_{\tilde{p}}$) se considera el morfismo de normalización de la variedad V_1 Utilizando (II, 3 2) este morfismo se extiende al morfismo $Y \xrightarrow{\varphi} X$ buscado ●

(1 8) - *Observaciones* a) En la proposición (1 6) se requiere que B sea una extensión finita de A[Z] Si se cambia esta hipótesis por la de que B sea una A-álgebra finitogenerada con $gr\ tr\ _A B \geqslant 1$, se obtiene un resultado genérico existe un elemento $f \in A$, $f \neq 0$ tal que si $\tilde{p}$ es un ideal primo de B, $B_{\tilde{p}}$ es un GB_2-anillo y $f \notin \tilde{p}$, entonces $h(\tilde{p}) \leqslant 3$ La demostración consis

te en aplicar el lema de normalización generalizado como en (1 4) y luego (1 6) Este resultado es desde luego bastante mas preciso que (1 4) a cambio de exigir que A sea regular El caso de aplicación mas evidente es el de Z-álgebras finitogeneradas

b) En el caso de k-álgebras finitogeneradas (es decir, en el caso geométrico) la demostración de (1 6) es mucho mas simple Es posible considerar directamente un ideal primo $p^* \subset \tilde{p}$ con $h(p^*)=2$ encontrar elementos $x,y \in p^*$ tales que todo ideal primo minimal de $(x\ y)B$ sea de altura 2 (mediante el elemental lema (1 2)) y considerar la fibra de p^* en Spec $B[\alpha]$ El punto más delicado consiste en probar que en $B[\alpha]$ es cierta la conjetura de Kaplansky-Hochster es decir que dos subvariedades distintas de codimensión 2 están contenidas en alguna subvariedad de codimensión 1 Esto puede hacerse de dos maneras Una, aplicando el lema de normalización de Noether a la k-álgebra $B[\alpha]$ y remitiendo el problema al anillo $k[Z_1, \ \ ,Z_n]$ si $n=\mathrm{gr\ tr}_k B[\alpha]$ Aquí el resultado de McAdam ([25]) ya utilizado resuelve la cuestión Como $k[Z_1 \ \ Z_n]$ es íntegramente cerrado y $k[Z_1, \ \ ,Z_n] \subseteq B[\alpha]$ es una extensión finita, se termina usando el going-down y la acotación del cardinal de las fibras, de forma semejante a (1 6) Otra posibilidad, mas directa consiste en proceder como en ([26], p 56) Pero aquí se usa el teorema de Bertini muy fuerte y específicamente geométrico

§ 2 - *El caso de anillos de series de potencias*

Los métodos del § 1 no son aplicables a los anillos de series que tienen grado de trascendencia infinito sobre el anillo de coeficientes

Se ha de notar en primer lugar que si A es un anillo local noetheriano y $\hat{A}$ su completado, en general $\hat{A}$ GB_2-anillo $\not\Rightarrow$ A GB_2-anillo En efecto el ejemplo de (II, 3 10a) pone de manifiesto que $K[X,Y\ Z]_{(X\ Y\ Z)}$ no es un GB_2-anillo, mientras sí lo es $K[[X\ Y,Z]]$ como se vió en (II 3 10 b) A pesar de esto el problema se abordará observando que si $\hat{A}$ es un GB_2-anillo esto implica que A cumple algunas propiedades de unirramificación

Dadas las características del problema es fundamental considerar la relación existente entre completación y cierre entero Sea A un anillo local noetheriano íntegro K su cuerpo de cocientes A' el cierre entero de A $\hat{A}$ el completado de A, $F(\hat{A})$ su anillo total de fracciones Si $A \subseteq A'$ es una extensión finita se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & & \hat{A} \arrow[d] \arrow[dl, "\hat{i}"'] \\
A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "j"'] & \hat{A}' \approx A \otimes_A \hat{A} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\hat{j}"] & (\hat{A}) \arrow[d] \\
K \arrow[r, "\delta"] & K \otimes_A \hat{A} \arrow[r, "\varepsilon"] & F(\hat{A})
\end{tikzcd}$$

en el que la situación es la siguiente α es fielmente plano (en particular una inyección) por ser A un anillo de Zariski ([3] Ch III § 3 3 y § 3 5 prop 9) A' es un anillo semilocal noetheriano en el cual la topología definida por su radical de Jacobson y por la extensión a A' del ideal maximal de A coinciden ([3] Ch IV § 2 5 cor 3 y Ch III § 3 3 ex 3) y son asimismo iguales a la topología de A' como A-módulo ([3], Ch III § 2 1 ex 3) Luego también β es fielmente plano, $\hat{A}'$ se identifica con $A' \otimes_A \hat{A}$ y $\hat{i}$ es una inyección ([3], Ch III § 3 4 Th 3) lo que implica que $\hat{A}$ es un $\hat{A}$-módulo finitogenerado $\hat{j}$ es una inyección al ser $\hat{A}$ un A-módulo plano δ es una inyección por serlo α y ser K un A-módulo plano Sea $S=A-\{0\}$, T el conjunto de no divisores de cero de $\hat{A}$ Por ser $\hat{A}$ un A-módulo plano, $S \subseteq T$ ([3], Ch IV §3 4 cor 2) vía la inclusión α Entonces

$$K \otimes_A \hat{A} = S^{-1}A \otimes_A \hat{A} \approx S^{-1}(A \otimes_A \hat{A}) = S^{-1}\hat{A} \subset T^{-1}\hat{A} = F(\hat{A})$$

da la inyección ε Como $\hat{A}'$ se incluye canónicamente en $F(\hat{A})$ a través de $\varepsilon\hat{j}$ y es un $\hat{A}$-módulo finitogenerado, existe la inclusión γ de $\hat{A}'$ en el cierre entero $(\hat{A})'$ de $\hat{A}$ en $F(\hat{A})$ En resumen todos los homomorfismos del diagrama son inyecciones

En general γ no es una igualdad en efecto existen anillos locales noetherianos íntegros íntegramente cerrados $A=A$ tales que en $\hat{A}$ el ideal (0) es producto de dos ideales primos distintos ([27], E 7 p 209) Si fuese $\hat{A} = (\hat{A})$ se tendría para los anillos reducidos

$$(\hat{A})_{red} = ((\hat{A})')_{red} \approx ((\hat{A})_{red})'$$

en virtud de (II, 4 3) Pero entonces $(\hat{A})_{red}$ es un anillo local noetheriano reducido íntegramente cerrado en su anillo total de fracciones, luego $(\hat{A})_{red}$ es íntegro según se deduce de ([3] Ch V § 1 2 cor 2) lo cual no es posible al tener $\hat{A}$ dos ideales primos minimales distintos

Esta anomalía, y de paso la necesidad de asegurar la finitud del cierre entero, hace precisa la utilización de teoremas delicados de irreducibilidad analítica Se considera la versión general de Grothendieck de estas cuestiones ([13], §7) Un resumen muy corto y accesible (sin demostraciones) se encuentra en ([12] §12) La teoría de Grothendieck generaliza resultados de Zariski ([36], Ch,VIII §13) y de Nagata ([27] Ch VI §37) Se exponen a continuación brevemente las definiciones de los términos a utilizar junto con algunos resultados

Si A es un anillo local, se llaman *fibras formales* de A a las fibras del morfismo

$$\operatorname{Spec} \hat{A} \rightarrow \operatorname{Spec} A$$

Si A es un anillo cualquiera y $P \in \operatorname{Spec} A$, se llaman *fibras formales de* A *en* P a las fibras formales de A_P Sea $Q \in \operatorname{Spec} A_P$, k el cuerpo residuo del anillo local en Q Se dice que la fibra formal correspondiente a Q es *geometricamente normal (reducida)* si para todo cuerpo k' extensión finita de k el anillo $(\hat{A}_P \otimes_{A_P} k) \otimes_k k'$ es normal (reducido)

Es inmediato que si A es un anillo local noetheriano completo (en particular, un cuerpo) sus fibras formales son geométricamente normales (y en particular reducidas pues todo anillo normal es reducido) Si A es un anillo de Dedekind de característica 0 también las fibras formales en todo ideal primo de A son geométricamente normales ([13] 7 3 19 (iv)) Mas generalmente todo anillo excelente tiene esta propiedad ([13], §7 8) La clave para extenderla a una gran familia de anillos es el siguiente teorema de Grothendieck ([13] 7 4 4) Si A es un anillo noetheriano tal que las fibras formales de A en sus ideales maximales son geométricamente normales (reducidas) entonces para todo anillo de fracciones B de una A-álgebra finitogenerada las fibras formales de B en todo ideal primo son geométricamente normales (reducidas) En particular, todos los anillos locales de álgebras finitogeneradas sobre un cuerpo ó sobre el anillo de los enteros son tales que todas sus fibras formales son geométricamente normales

Precisamos esta teoría para demostrar la proposición siguiente que es clave para abordar nuestro problema

(2 1) - *Proposición* *Sea* A *un anillo local noetheriano íntegro cuyas fibras formales son geometricamente normales* *Sea* $P \in \operatorname{Spec} A$ *con* $\operatorname{ch}(P) \geqslant 2$ *y tal que el ideal maximal de* A/P *es unirramificado en* $(A/P)'$ *Si* $\hat{A}$ *es un* GB_2*-anillo, entonces* $A/P \subseteq (A/P)$ *es una GD-extensión*

Demostración Sea $B=A/P$ Por ser B un anillo local noetheriano íntegro con fibras formales geométricamente normales, su cierre entero B' es un B-módulo finitogenerado y $\hat{B}' = (\hat{B})'$ ([13], 7 6 1) Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & \hat{B} \\ i \downarrow & & \downarrow \hat{i} \\ B' & \xrightarrow{\beta} & \hat{B}' = (\hat{B})' \end{array}$$

Por otra parte el ideal maximal de B es unirramificado en B (en la terminología de Grothendieck B es un anillo unibranche) luego por ([13] 7 6 3) el anillo $\hat{B}$ es íntegro Se tiene $\hat{B} = (A/P)^{\wedge} = \hat{A}/P\hat{A}$ ([27], 17 9) luego $Q=P\hat{A}$ es un ideal primo de $\hat{A}$ Se verifica

$$ch(Q) = \dim \hat{B} = \dim B = ch(P) \geqslant 2$$

y como $\hat{A}$ es un GB_2-anillo (II 3 5) implica que

$$\hat{B} = \hat{A}/Q \quad \xrightarrow{\hat{i}} \quad (\hat{A}/Q)' = \hat{B}'$$

es una GD-extensión La inclusión α es una GD-extensión por ser α un homomorfismo plano ([21], 5 D) luego la composición $\hat{i}\ \alpha$ es una GD-extensión Por ser β fielmente plano, la aplicación

$$\operatorname{Spec} \hat{B}' \rightarrow \operatorname{Spec} B'$$

es epiyectiva ([3], Ch II §2 5 cor 4) Al ser $\beta\ i = \hat{i}\ \alpha$ una GD-extensión, resulta fácilmente de dicha epiyectividad que $B \xrightarrow{i} B'$ es una GD-extensión ●

A la vista de la proposición (2 1), se trata ahora de considerar la existencia de ideales primos P que verifiquen las condiciones del enunciado Si además se puede garantizar que $A/P \subseteq (A/P)'$ no es una GD-extensión, se habrán obtenido condiciones necesarias para que el completado $\hat{A}$ sea un GB_2-anillo Puesto que los problemas de unirramificación son de evidente interés por sí mismos, se considerarán hipótesis mas sencillas y generales que en (2 1)

En primer lugar se precisa un resultado concreto de normalidad para ciertos anillos

(2 2) - *Lema Sea* B *un anillo íntegro integramente cerrado,* U,V *indeterminadas Para todo* n $\geqslant$ 1*, el anillo*

$$\tilde{B} = B[U, UV, UV^2, \ldots, UV^n]$$

es íntegramente cerrado

Demostracion Veamos en primer lugar que los polinomios $f \in \tilde{B}$ son exactamente los de la forma

$$f = \Sigma\, a_{ij}\, U^i\, V^j$$

con $a_{ij} = 0$ si $i < j/n$

Si $f \in \widetilde{B}$, cualquiera de los monomios de f se expresará

$$U^{\alpha_o} (UV)^{\alpha_1} \qquad (UV^n)^{\alpha_n} = U^i V^j$$

con

$$i = \alpha_o + \alpha_1 + \qquad + \alpha_n$$

$$j = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \qquad + n\alpha_n$$

de donde

$$i \geqslant \alpha_1 + \qquad + \alpha_n \geqslant \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \qquad + n\alpha_n}{n} = \frac{j}{n}$$

luego los a_{ij} con $i < j/n$ han de ser 0

Recíprocamente, dados i, j tales que $i \geqslant j/n$ dividiendo se tiene

$$j = nq + r \qquad\qquad 0 \leqslant r < n$$

Si $r = 0$, $U^i V^j = U^i V^{nq} = U^{i-q}(UV^n)^q$ lo cual es lícito ya que $i \geqslant q = j/n$

Si $r > 0$ $U^i V^j = U^{i-q-1}(U V^n)^q (U V^r)$, posible a su vez al ser $i \geqslant j/n > q$ Se tienen así caracterizados los polinomios de $B[U,V]$ que están en $\widetilde{B}$

Veamos ahora que $\widetilde{B}$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes, que por ser $n \geqslant 1$ es $K(U,V)$ siendo K el cuerpo de cocientes de B $B[U,V]$ es un anillo íntegramente cerrado ([3], Ch V §1 3 cor 2) con cuerpo de cocientes $K(U,V)$ y $\widetilde{B} \subset B[U,V]$ luego un elemento de $K(U\ V)$ entero sobre $\widetilde{B}$ ha de estar en $B[U\ V]$ Sea $g(U,V) \in B[U,V]$ entero sobre B Restando a $g(U,V)$ sus términos a_{ij} $U^i V^j$ con $i \geqslant j/n$ (que son de $\widetilde{B}$) se obtiene un polinomio entero sobre $\widetilde{B}$ sin términos no nulos con $i \geqslant j/n$, luego es posible suponer que todo monomio no nulo de $g(U\ V)$ verifica $i < j/n$ Si $g \neq 0$ sea

$$g^k + f_{k-1}\, g^{k-1} + \qquad + f_o = 0$$

una ecuación de dependencia entera con f_o, $\quad$ $, f_{k-1} \in \widetilde{B}$ Consideremos los monomios $a_{ij} U^i V^j$ no nulos de $g(U,V)$ tales que la diferencia $j-ni$ (que es >0) sea máxima y elijamos entre ellos el que tenga grado total $i+j$ mayor. Esto determina un único monomio $a_{i_o j_o} U^{i_o} V^{j_o}$ con $a_{i_o j_o} \neq 0$.

Veamos que en la ecuación de dependencia entera, el término $(a_{i_o j_o} U^{i_o} V^{j_o})^k$ no puede ser anulado por otros. En efecto al multiplicar dos monomios las diferencias $j-ni$ se suman, luego en g^s la diferencia máxima que aparece es $s(j_o-ni_o)$. Si $s<k$ esta diferencia no se incrementa al multiplicar por f_s (pues aquí $j-ni \leqslant 0$). Luego la diferencia máxima que aparece en los términos de la ecuación es $k(j_o-ni_o)$, y se obtiene al combinar en g^k los monomios de g con diferencia máxima igual a j_o-ni_o. Entre los monomios así formados, el único de grado total $k(i_o + j_o)$ es $a^k_{i_o j_o} U^{i_o k} V^{j_o k}$ que por lo tanto se presenta aislado en la ecuación.

Como $a^k_{i_o j_o} \neq 0$, esto lleva a una contradicción. Luego ha de ser $g = 0$ y $\widetilde{B}$ es íntegramente cerrado. ●

Se pasa a demostrar el resultado de unirramificación.

(2.3) - *Proposición.* *Sea* B *un anillo factorial,* X,Y,Z *indeterminadas,* q *un ideal primo de* B, $P_1=(q,X,Y)$, $P_2=(q,X,Y,Z)$. *Existe un ideal primo* Q *de* $B[X,Y,Z]$, $Q \subset P_1$ *tal que si* $C=B[X,Y,Z]/Q$ *y* C' *es su cierre entero,* P_2/Q *es unirramificado en* C' *y* P_1/Q *no es unirramificado en* C'.

Demostración. Sean U,V indeterminadas. Se consideran los elementos de $B[U,V]$

$$x = U\,V\,(1+V)$$

$$y = U\,V^2(1+V)$$

$$z = U$$

y el subanillo $C = B[x,y,z] \subseteq B[U,V]$. Sea

$$\alpha = \frac{yz}{x} = UV$$

Se tiene

$$\alpha^2 + \alpha z - xz = 0$$

luego $C \subset C[\alpha]$ es una extensión entera El cuerpo de cocientes de C y $C[\alpha]$ es K(U V), siendo K el cuerpo de cocientes de B

$$C[\alpha] = B[x,y\ z,\alpha] = B[U,UV\ UV^2\ UV^3]$$

luego $C[\alpha]$ es íntegramente cerrado según el lema (2 2) de donde $C[\alpha] = C'$, cierre entero de C

Sea Q el núcleo del homomorfismo

$$B[X,Y\ Z] \xrightarrow{\varphi} B[x\ y\ z]$$

definido por $\varphi(X) = x$ $\varphi(Y) = y$ $\varphi(Z) = z$ Para calcular Q veamos que $h(Q) \leqslant 1$ Se tiene

$$\operatorname{gr\,tr}_B B[x,y] = \operatorname{gr\,tr}_K K(U,V) = 2$$

pues el cuerpo de cocientes de B[x y] es K(U V) Esto implica que $Q \cap B[X,Y] = (0)$ luego Q es un ideal primo de B[X,Y][Z] perteneciente a la fibra del ideal (0) de B[X,Y] como los ideales primos de dicha fibra son de altura $\leqslant 1$ ([18] Th 36) se tiene $h(Q) \leqslant 1$

Por otra parte, el polinomio

$$f = YZ(X+Y) - X^3$$

es irreducible sobre cualquier anillo íntegro como se comprueba inmediatamente y pertenece a Q

$$\varphi(f) = yz(x+y) - x^3 = U^2V^2(1+V)UV(1+V)^2 - U^3V^3(1+V)^3 = 0$$

Por ser B[X,Y Z] un anillo factorial el ideal $(f) \subseteq Q$ es primo y como $h(Q) \leqslant 1$, resulta que $Q = (f)$ y $C \approx B[X,Y,Z]/(f)$

Sea $q \in \operatorname{Spec} B$ Se tienen isomorfismo

$$B[X,Y\ Z]/(q,X,Y\ Z) \approx B/q \qquad B[X\ Y\ Z]/(q,X\ Y) \approx (B/q)[Z]$$

luego la cadena

$$Q = (f) \subset P_1 = (q,X\ Y) \subset P_2 = (q,X,Y\ Z)$$

está formada por ideales primos Módulo Q resulta la cadena

$$(0) \subset p_1 = (q,x,y) \subset p_2 = (q\ x,y,z)$$

de ideales primos de C

Se trata ahora de probar que p_2 es unirramificado en $C' = C[\alpha]$ Sea $P \in \mathrm{Spec}\ C'$ tal que $P \cap C = p_2$ P contiene a $xz = \alpha(\alpha+z)$ y como $z \notin P$, esto implica que $\alpha \in P$ luego $(p_2,\alpha) \subseteq P$ Para ver que son iguales bastará comprobar que $(p_2\ \alpha)$ es un ideal primo, puesto que en toda extensión entera las fibras son de dimensión cero $C[\alpha]/(p_2\ \alpha) \approx C/p_2$, luego $(p_2,\alpha) = P$ Esto determina P y en consecuencia p_2 es unirramificado en C'

Finalmente hay que ver que p_1 no es unirramificado en C' Puesto que $(C')_{p_1} = C_{p_1}[\alpha]$, el problema equivale a demostrar que $C_{p_1}[\alpha]$ no es un anillo local para ello bastará comprobar que α y $\alpha+z$ no son inversibles en $C_{p_1}[\alpha]$, pues $(\alpha+z)-\alpha = z$ es inversible en $C_{p_1}[\alpha]$ ya que $z \notin p_1$ Como $xz \in p_1 C_{p_1}$ y $C_{p_1} \subseteq C_{p_1}[\alpha]$ es una extensión entera xz no es inversible en $C_{p_1}[\alpha]$ luego $\alpha(\alpha+z) = xz$ implica que α ó $\alpha+z$ no son inversibles en $C_{p_1}[\alpha]$

Consideremos el B-automorfismo

$$B[X\ Y,Z] \xrightarrow{\sigma} B[X,Y,Z]$$

definido por $\sigma(X)=X$, $\sigma(Y) = -X-Y$ $\sigma(Z)=Z$ Se tiene

$$\sigma(YZ(X+Y)-X^3) = Z(-X-Y)(X-X-Y)-X^3 = YZ(X+Y)-X^3$$

luego σ induce un B-automorfismo de $B[x,y,z] = C$ que se extiende de forma única al cuerpo de cocientes de C con $\sigma(c_1/c_2) = \sigma(c_1)/\sigma(c_2)$ si $c_1, c_2 \in C$, $c_2 \neq 0$ Como

$$\sigma(\alpha) = \sigma(\frac{yz}{x}) = \frac{-(x+y)z}{x} = -(\alpha+z)$$

σ induce a su vez un automorfismo de $C[\alpha]$ Asimismo

$$\sigma(p_1) = \sigma(q,x,y) = (q,x,x+y) = p_1$$

permite extenderlo a un automorfismo de $C_{p_1}[\alpha]$ Como $\sigma(\alpha)=-(\alpha+z)$ los dos elementos α y $\alpha+z$ han de ser no inversibles simultáneamente, lo cual termina la demostración ●

Se pueden obtener ya condiciones necesarias para que ciertos completados sean GB_2-anillos

(2 4) - *Proposición* *Sea* B *un anillo noetheriano factorial cuyas fibras formales en los ideales maximales de* B *son geometricamente normales* *Sea* $q \in \operatorname{Spec} B$ $A = B[X\ Y\ Z]_{(q,X,Y,Z)}$ *Si* $\hat{A}$ *es un* GB_2*-anillo, entonces* $q=(0)$

Demostración Sea $P_2=(q\ X,Y\ Z)$ Por ser B un anillo factorial es posible aplicar la proposición anterior Con la notación de (2 3), el ideal $p_2=P_2/Q$ es unirramificado en C' Puesto que el cierre entero conmuta con la localización el ideal maximal $p_2C_{p_2}$ de C_{p_2} es unirramificado en $(C_{p_2})'$ Por la misma razón, $p_1C_{p_2}$ no es unirramificado en $(C_{p_2})'$ Sea $P = QB[X\ Y,Z]_{P_2}$ Se tiene

$$C_{p_2} = (B[X,Y,Z]/Q)_{P_2/Q} \approx A/P$$

$A = B[X,Y\ Z]_{P_2}$ es un anillo local noetheriano íntegro y sus fibras formales son geométricamente normales por el teorema de Grothendieck mencional al principio de este § $ch(P)=h(P_2/Q)\geq 2$ luego es posible aplicar (2 1) y deducir que

$$A/P \subseteq (A/P)'$$

es una GD-extensión Entonces el teorema de McAdam ([22], Th 2) ya utilizado en (II, 4), implica que todo ideal primo de $C_{p_2}=A/P$ de altura >1 es unirramificado en (C_{p_2}) Como $p_1C_{p_2}$ no lo es, se sigue que $h(p_1C_{p_2})\leq 1$ Pero

$$h(p_1C_{p_2}) = h(p_1) = h(p_1/Q) = h((q\ X,Y)/Q)$$

luego $q=(0)$, pues de lo contrario se tiene una cadena en Spec $B[X,Y,Z]$

$$Q \subset (X,Y) \subset (q,X,Y)$$

y sería $h(p_1 C_{p_2}) \geqslant 2$ ●

(2 5) - *Corolario* *Sea* B_o *un anillo noetheriano factorial cuyas fibras formales en los ideales maximales de* B_o *son geometrica-- mente normales* *Si* $B_o[\![X_1, \quad ,X_n]\!]$ *es un* GB_2*-anillo, entonces* $n \leqslant 3$

Demostración Si $n \geqslant 4$, sea $B = B_o[X_4 \quad X_n]$ Con $q=(X_4, \quad ,X_n)$ se tiene

$$A = B[X_1,X_2,X_3]_{(q\ X_1\ X_2\ X_3)} = B_o[X_1 \quad X_n]_{(X_1 \quad X_n)}$$

luego $\hat{A} = B_o[\![X_1 \quad ,X_n]\!]$ De (2 4) se sigue que $q=(0)$, lo cual es absurdo ●

(2 6) - *Corolario* *Sea k un cuerpo* $k[\![X_1 \quad ,X_n]\!]$ *es un* GB_2*-anillo si y solo si* $n \leqslant 3$

Demostración Por (II 3 8), $k[\![X_1, \quad ,X_n]\!]$ es un GB_2-anillo si $n \leqslant 3$ Por el corolario precedente, la condición $n \leqslant 3$ es necesaria ●

(2 7) - *Observaciones* a) La construcción efectuada en (2 3) junto con (II, 4 1), permite demostrar de manera diferente algunos casos particulares de (1 4) En concreto si B es un anillo noetheriano factorial con dim $B \geqslant 1$, entonces $B[X,Y,Z]$ no es un GB_2-anillo Para probar esto bastaría una versión simplificada de (2 3), puesto que no haría falta que P_2/Q fuese unirramificado en C'

b) Una demostración de (2 6) dirigida exclusivamente a este caso permite ciertas simplificaciones, aunque limitadas de hecho a las definiciones y resultados utilizados en (2 1) En pocas palabras, es posible sustituir la teoría general de Grothendieck de las fibras formales por la teoría de Zariski de irreducibilidad analítica, que proporciona todos los resultados utilizados limitados a anillos locales de k-álgebras finitogeneradas sobre un cuerpo perfecto k ([36], Ch VIII 13 y particularmente Th 33)

Hay que notar que en esta referencia el resultado correspondiente a ([13], 7 6 3) se halla implícitamente (pero no explícitamente) demostrado

REFERENCIAS

[1] *S S Abhyankar, P Eakin, W Heinzer,* On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring, J Algebra 23 (1972), 310-342

[2] *M F Atiyah, I G Macdonald,* Introduction to Commutative Algebra, Adisson-Wesley, Reading Mass (1969)

[3] *N Bourbaki,* Commutative Algebra, Hermann Paris (1972)

[4] *I S Cohen, A Seidenberg,* Prime ideals and integral dependence, Bull Amer Math Soc 52 (1946), 252-261

[5] *E D Davis,* Ideals of the principal class, R-sequences and a certain monoidal transformation Pacific J Math 20 (1967), 197-205

[6] *D E Dobbs,* Divided rings and going-down, Pacific J Math 67 (1976), 353-364

[7] *D E Dobbs, I J Papick,* Going-down a survey Nieuw Arch Wisk 26 (1978), 255-291

[8] *P M Eakin,* The converse to a well known theorem on noetherian rings, Math Annalen 177 (1968) 278-282

[9] *P M Eakin,* A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, Proc Amer Math Soc 31 (1972), 75-80

[10] *A Evyatar, A Zaks,* Rings of polynomials, Proc Amer Math Soc 25 (1970), 559-562

[11] *R Gilmer,* Multiplicative ideal theory, Dekker, New York (1972)

[12] *S Greco, P Salmon,* Topics in m-adic topologies, Springer, Berlin (1971)

[13] *A Grothendieck, J Dieudonné,* Eléments de Géométrie Algébrique Ch IV 2e partie Inst Hautes Etudes Sci Publ Math 24, Paris (1965)

[14] *A Grothendieck, J Dieudonné,* Eléments de Géometrie Algébrique I, Springer Berlin (1971)

[15] *M Hochster,* Topics in the homological theory of modules over commutative rings, A M S Regional Conference Series 24, Providençe (1975)

[16] *J E Humphreys,* Hilbert's fourteenth problem Amer Math Monthly 85 (1978) 341-353

[17] *I Kaplansky,* Adjacent prime ideals J Algebra 20 (1972), 94-97

[18] *I Kaplansky,* Commutative Rings The University of Chicago Press, Chicago (1974)

[19] *W Krull,* Beitrage zur Arithmetik kommutativer Integritatsbereiche III Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math Z 42 (1937), 745-766

[20] *K Langmann,* Ein Funktionalanalytischer Beweis der Hilbert chen Nullstellensatzes Math Annalen 192 (1971), 47-50

[21] *H Matsumura,* Commutative Algebra Benjamin New York (1970

[22] *S McAdam,* Going down Duke Math J 39 (1972) 633-636

[23] *S McAdam,* 1-Going down, J London Math Soc II Ser 8 (1974), 674-680

[24] *S McAdam,* Going down and open extensions, Can J XXVII (1975) 111-114

[25] *S McAdam,* Intersections of heigth 2 primes, J Algebra 49 (1977), 315-321

[26] *D Mumford,* Abelian Varieties, Oxford Univ Press London (1974)

[27] *M Nagata,* Local rings, Interscience Tracts 13, New York (1962)

[28] *L J Ratliff Jr ,* Going between rings and contractions of saturated chains of prime ideals Rocky Mountain J Math 7 (1977), 777-787

[29] *L J Ratliff Jr* , Notes on a new chain condition for prime ideals J Pure Applied Algebra 12 (1978), 159-175

[30] *L J Ratliff Jr* , Chain Conjetures in Ring Theory, Lecture Notes 647, Springer Berlin (1978)

[31] *F Richman*, Generalized quotient rings, Proc Amer Math Soc 16 (1965), 794-799

[32] *J Sally*, A note on integral closure, Proc Amer Math Soc 36 (1972), 93-96

[33] *A R Wadsworth*, Pairs of domains where all intermediate domains are noetherian, Trans Amer Math Soc 195 (1974) 201-211

[34] *A R Wadsworth*, Hilbert subalgebras of finitely generated algebras, J Algebra 43 (1976) 298-304

[35] *A Zaks*, Dedekind subrings of $k[X_1 \quad ,X_n]$ are rings of polynomials, Israel J Math 9 (1971), 285-289

[36] *O Zariski, P Samuel*, Commutative Algebra Vol II, Van Nostrand New York (1960)