

Capítulo 2

Estado del arte

2.1 Los elementos estructurales flexibles en movimiento

En la actualidad hay numerosos sistemas que no pueden estudiarse correctamente sin tener en cuenta su elasticidad. Sistemas que normalmente son considerados rígidos, como puede ser un buque o la carrocería de un automóvil, son sometidos a ensayos modales para determinar sus frecuencias propias. Incluso las estructuras, paradigma de los sistemas estáticos, se han transformado, en algunos casos, en estructuras activas en las que se controlan sus vibraciones mediante actuadores (Preumont 1997).

Los elementos de las máquinas han seguido una evolución similar. Actualmente muchos de ellos no pueden estudiarse correctamente sin tener en cuenta su elasticidad. Como ejemplos notables tenemos los álabes de las turbinas, las hélices de los helicópteros, las antenas de los satélites artificiales y, especialmente interesantes para esta tesis, los brazos de los robots. Todos los ejemplos anteriores han sido escogidos de manera que exista un movimiento de rotación lo cual hace necesario estudiarlos como vigas flexibles en rotación. Los diferentes modelos teóricos de vigas flexibles giratorias se pueden clasificar teniendo en cuenta como se plantean las ecuaciones del movimiento y como se resuelven.

Los modelos basados en la viga de Euler-Bernoulli son los mas sencillos y son los que se utilizan normalmente. Los modelos basados en la viga de Timoshenko son mas complicados, al incluir el efecto del momento de inercia de la rebanada considerada y el efecto del esfuerzo cortante; su interés principal está en el estudio de vigas poco esbeltas y en el estudio de sus modos de vibración a frecuencias elevadas. Los modelos anteriores pueden considerar, o no, el efecto de las fuerzas centrífugas debidas a la rotación; su interés práctico aparece al aumentar la velocidad de rotación.

Históricamente Timoshenko es considerado el padre de la teoría moderna de las vibraciones. Del estudio de Timoshenko (1947) son de especial interés los capítulos 54, 55 y 60. En el capítulo 54 expone la teoría clásica del análisis modal de barras prismáticas. En el capítulo 55 mejora el modelo de la viga de Euler-Bernoulli, considerando los efectos del cortante y del momento de inercia. En el capítulo 60 estudia el efecto de las fuerzas axiales sobre las vigas con vibración transversal. Es especialmente interesante el cálculo del alargamiento debido a la flexión total cuando se desea considerar el efecto de las fuerzas centrífugas.

2.1.1 La viga de Euler-Bernoulli giratoria

Bellezza, Lanari y Ulivi (1990) estudiaron una viga flexible giratoria con una articulación (considerando su momento de inercia) en un extremo y una masa no puntual (con momento estático y con momento de inercia) en el otro extremo. La viga se considera bajo las hipótesis correspondientes a la viga de Euler-Bernoulli.

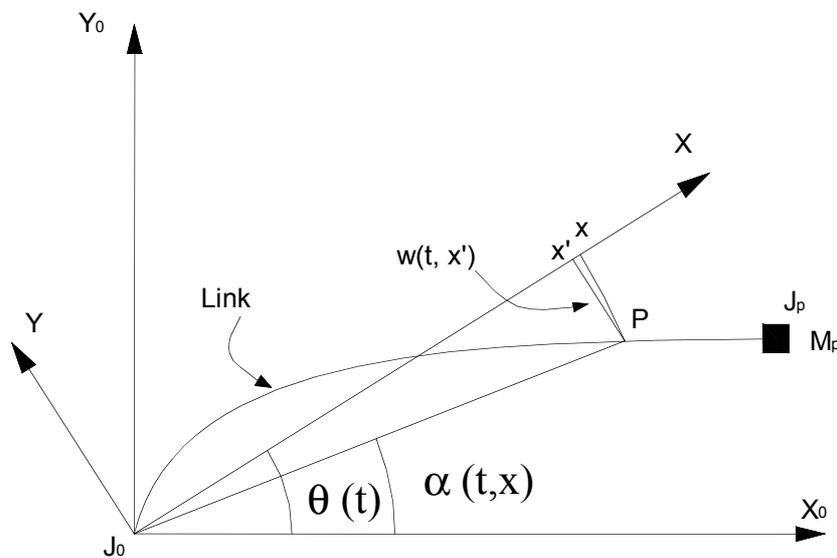


Figura 2.1 Esquema de la viga flexible estudiada por Bellezza

Para facilitar la comprensión del comportamiento de la viga proponen dos formulaciones equivalentes: pseudo empotrada (“pseudo clamped”) y pseudo articulada (“pseudo pinned”).

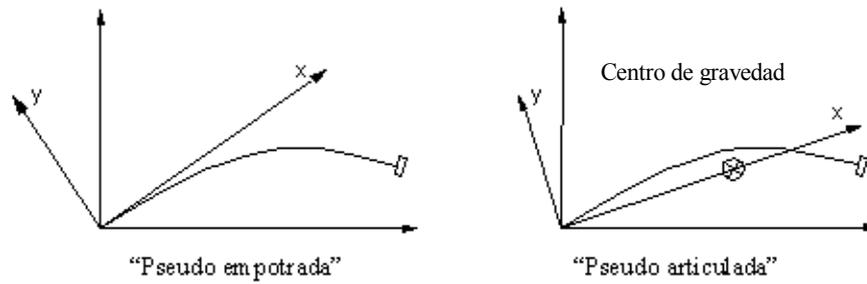


Figura 2.2 Formulación pseudo empotrada y pseudo articulada

Como ambas formulaciones conducen a sistemas de coordenadas generalizadas no observables, propone una transformación a un sistema de coordenadas observables. Mediante una valoración experimental “ad hoc” confirman que su formulación es aceptable.

Sus ecuaciones no incluyen los efectos de la fuerza centrífuga debido a que piensa aplicar los resultados obtenidos a robots con brazos flexibles, los cuales tienen velocidades angulares bajas.

Fung y Yau (1999) estudiaron el comportamiento de un brazo flexible de un manipulador que se considera articulado en un extremo y cuyo extremo “libre” lleva una masa y se ve obligado a seguir una curva.

Su modelo considera el brazo como una viga de Euler-Bernoulli; deriva las ecuaciones del movimiento mediante la aplicación del principio de Hamilton y utilizando el multiplicador de Lagrange para definir las condiciones de contorno del extremo libre; como esta condición no es homogénea la transforman definiendo una nueva variable.

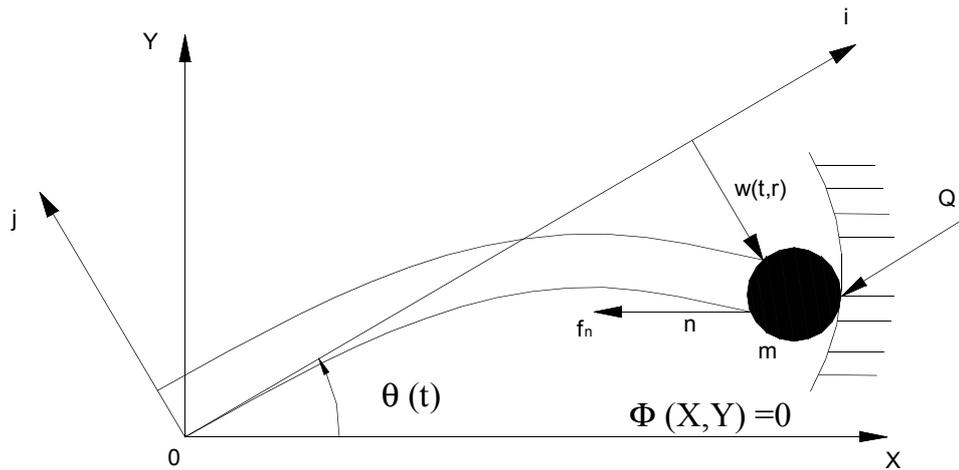


Figura 2.3 Esquema de la viga flexible estudiada por Fung y Yau

Integran las ecuaciones mediante series de potencias y obtienen las ecuaciones de las frecuencias. Ofrecen resultados numéricos (3 primeros modos de vibración) para diferentes condiciones de fuerza, masa en el extremo, velocidad angular y momento de inercia total.

Su modelo considera el acortamiento del brazo bajo la acción de la fuerza centrífuga, aunque podría ser mejorado considerando una viga de Timoshenko.

2.1.2 La viga de Timoshenko giratoria

White y Heppler (1995) plantearon las ecuaciones del movimiento de una viga de Timoshenko con sus extremos libres, pero unidos a sólidos rígidos. Es especialmente interesante la discusión de las condiciones de contorno en la viga de Timoshenko con sólidos rígidos en los extremos (tabla 2.1).

Libre	Fijo
$\left[k^2 G A \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{x=0} m_0 y_0 \quad C_0 = 0$	$y _{x=0} = 0$
$\left[k^2 G A \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{x=L} m_P y_L \quad C_P = 0$	$y _{x=L} = 0$
$\left[EI \frac{y}{x} \right]_{x=0} J_0 = 0 \quad C_0 y_0 = 0$	$y _{x=0} = 0$
$\left[EI \frac{y}{x} \right]_{x=L} J_P = 0 \quad C_P y_L = 0$	$y _{x=L} = 0$

Tabla 2.1 Condiciones de contorno según White y Hepler

Plantean la resolución previa transformación de la ecuación a su forma adimensional. Entonces exponen la ecuación general de las frecuencias y las formas de los modos de vibración, así como la contribución de los momentos estáticos de las masas de los extremos.

La principal limitación de este artículo es que está orientado al caso particular en el que ambos extremos están libres. Otra limitación es que no considera la rotación de la viga, aunque sirve de introducción a trabajos posteriores en los que sí será considerada.

Oguamanam y Hepler (1996) estudian el comportamiento de una viga de Timoshenko, con una masa en el extremo, que gira con velocidad constante.

Para plantear las ecuaciones del movimiento utiliza el principio de Hamilton extendido y obtiene una solución aproximada utilizando el método de Rayleigh-Ritz.

Sus resultados indican que al aumentar la velocidad angular suben las frecuencias propias y baja la amplitud.

Sus ecuaciones han sido obtenidas despreciando los momentos estáticos de la masa en el extremo, aunque ha tenido en cuenta el efecto de la fuerza centrífuga.

White y Heppler (1996) extienden el trabajo de Bellezza (1990) a la viga de Timoshenko. En su artículo consideran una viga flexible giratoria con una articulación (con momento de inercia) en un extremo y una masa no puntual en el otro.

Plantean la ecuación diferencial del movimiento utilizando el cálculo variacional, adimensionalizan la ecuación resultante y plantean la solución mediante dos formulaciones, “pseudo empotrada” y “pseudo articulada”, y encuentran la transformación para pasar de una a otra.

En este trabajo no han considerado las fuerzas centrífugas ni los momentos estáticos de la masa en el extremo.

Oguamanam, Heppler y Hansen (1998) desarrollaron una formulación (ver figura 2.4) de la viga de Timoshenko muy adecuada para estudiar eslabones de un mecanismo. La denomina pseudo articulada-articulada (“pseudo-pinned-pinned”). Así mismo también presenta las transformaciones que permiten pasar de esta formulación a las pseudo empotrada y pseudo articulada.

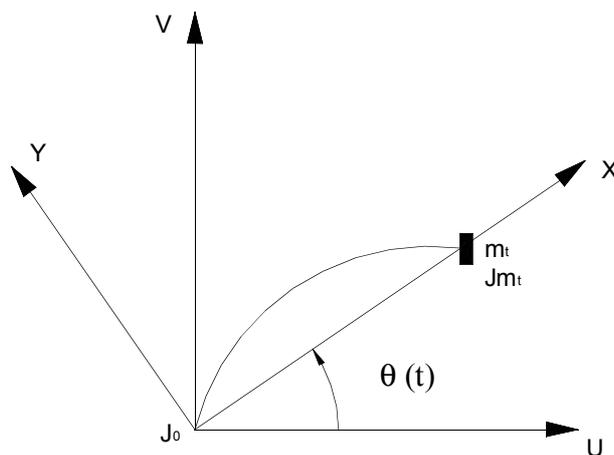


Figura 2.4 Formulación pseudo articulada articulada

Su estudio no considera los efectos debidos a las fuerzas centrífugas ni a las de Coriolis.

Park y Kim (1999) estudian la dinámica de una viga curva en rotación, considerando el efecto de las fuerzas centrífuga y de “Coriolis”, así como las no linealidades de origen geométrico. En primer lugar obtienen las ecuaciones del movimiento aplicando el principio de Hamilton. Debido a que algunas fuerzas elásticas tienen términos no lineales, no obtienen la expresión de las energías potenciales y en su lugar calculan el trabajo de las fuerzas elásticas.

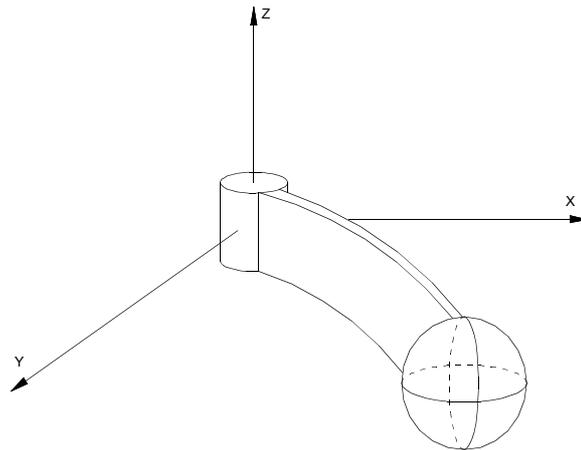
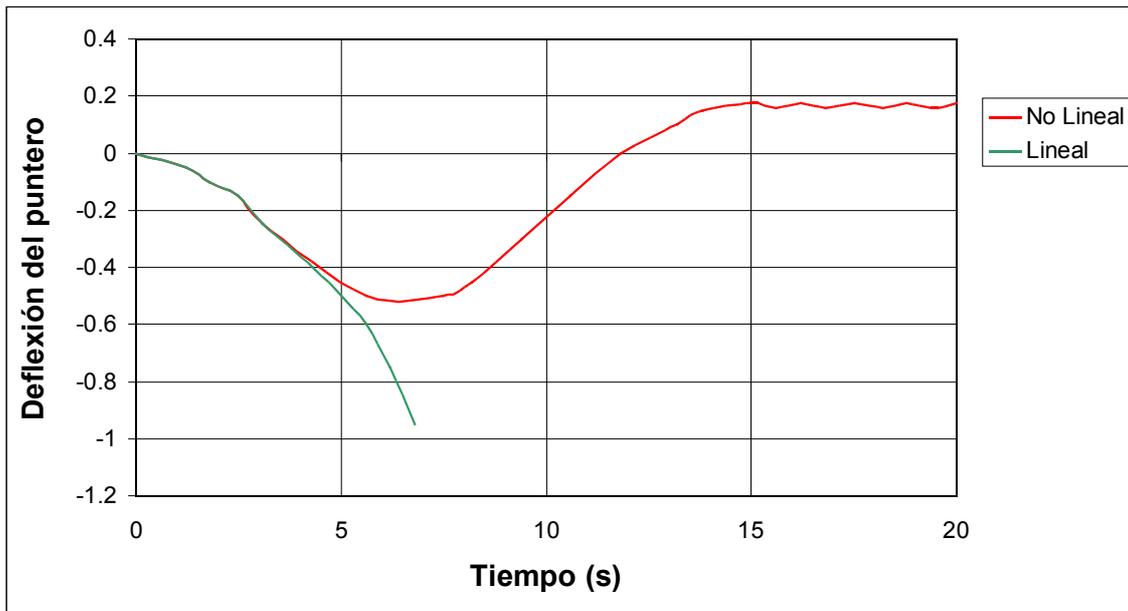


Figura 2.5 Esquema de la viga flexible estudiada por Park y Kim

Utilizan el método de Newmark para integrar las ecuaciones numéricamente y el método iterativo Newton-Raphson para resolver la ecuación no lineal en cada paso.

Presentan diferentes resultados numéricos, accionando la viga con un perfil de velocidades o de par. Su estudio muestra, según gráfica 2.1, que aparecen divergencias acusadas cuando se aplica la aproximación lineal. Esta aproximación predice inestabilidades inexistentes y frecuencias propias incorrectas. Este resultado es similar al encontrado por Kane (1987) en otras condiciones.

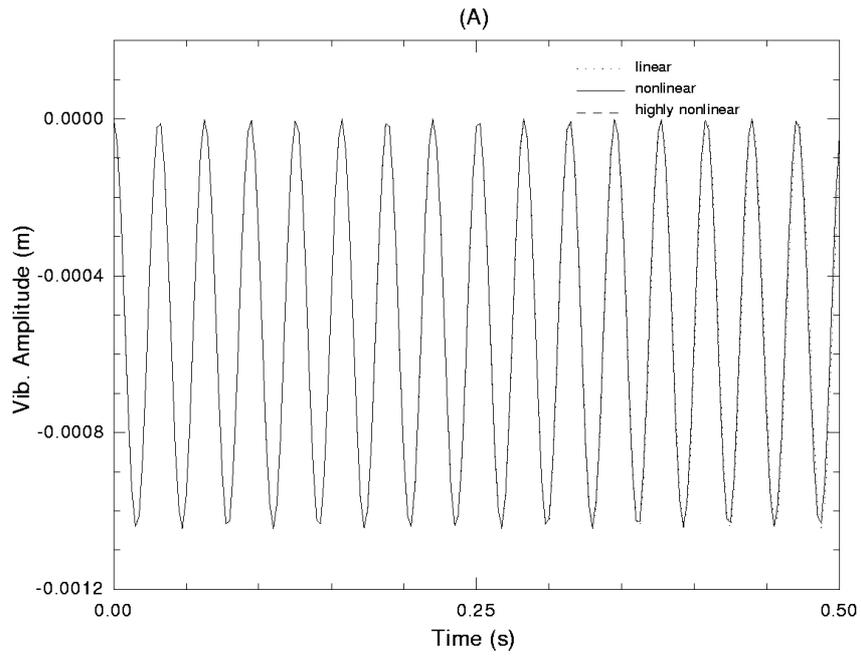
El método propuesto es innovador e interesante, pero por contra se considera que su planteamiento matricial dificulta la comprensión del significado mecánico de sus ecuaciones. Sin embargo en otros estudios si se puede ver fácilmente la consideración, o no, del momento de inercia de la articulación, de los momentos estáticos de la masa del extremo libre, etc.



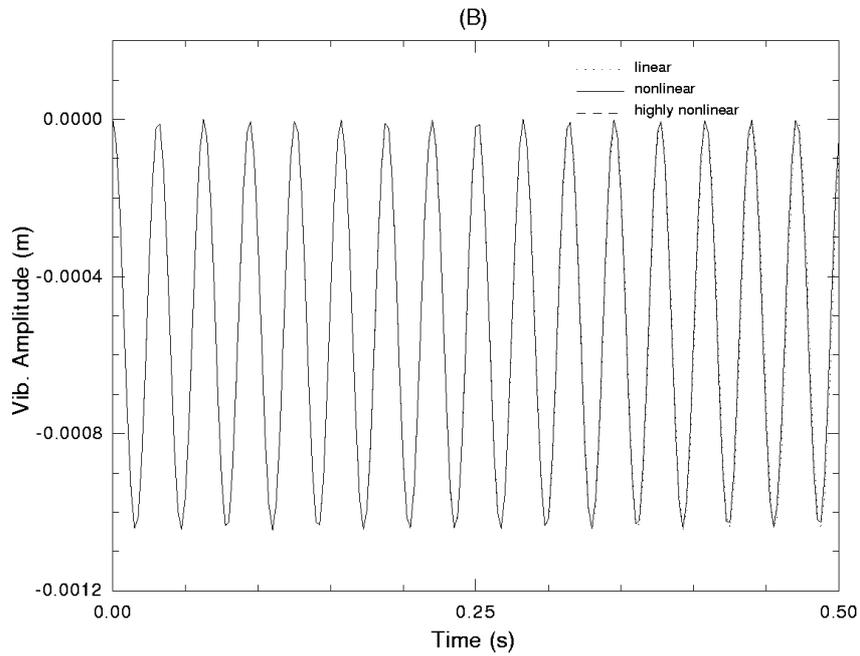
Gráfica 2.1 Divergencia entre los modelos lineales y no lineales estudiados por Park y Kim

Ouguamanam y Heppler (1998) derivaron, mediante el principio de Hamilton, las ecuaciones del movimiento de una viga de Timoshenko giratoria (prismática e isotrópica). En su modelo incluyeron los efectos debidos al momento de inercia de la articulación, los momentos de la masa del extremo y la flexión debida a las fuerzas centrífugas. Obtuvieron una solución aproximada por el método de Ritz. Como aplicación numérica presentaron la respuesta de la viga giratoria a un perfil de velocidades y un perfil de pares.

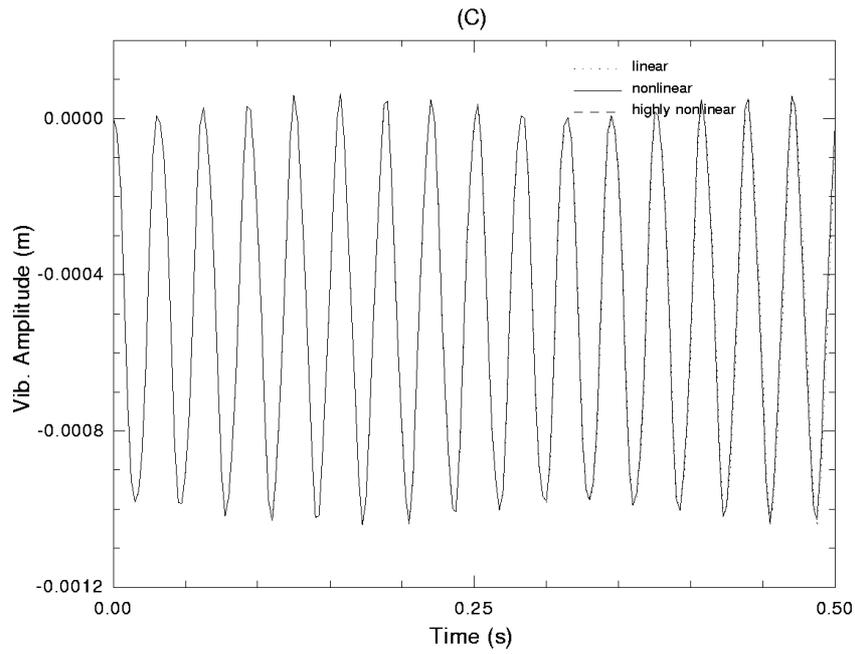
En las gráficas 2.2A-2.2F se muestran los resultados presentados por Ouguamanam y Heppler cuando la viga está sometida a un par de 4Nm durante 0.5s (perfil de par). En A y B se considera el primer modo, en C y D se consideran los dos primeros modos y en E y F se consideran los tres primeros modos. De estos resultados concluyen que la contribución de los modos superiores al segundo es muy pequeña. Observaron que a muy bajas velocidades (arranque) el efecto de la fuerza centrífuga es despreciable y que a velocidades angulares bajas la fuerza centrífuga aumenta la amplitud de las vibraciones. Así mismo observaron que en este ensayo no aparecen diferencias entre la viga de Euler-Bernoulli (gráficas B, D, F) y de Timoshenko (gráficas A, C, E).



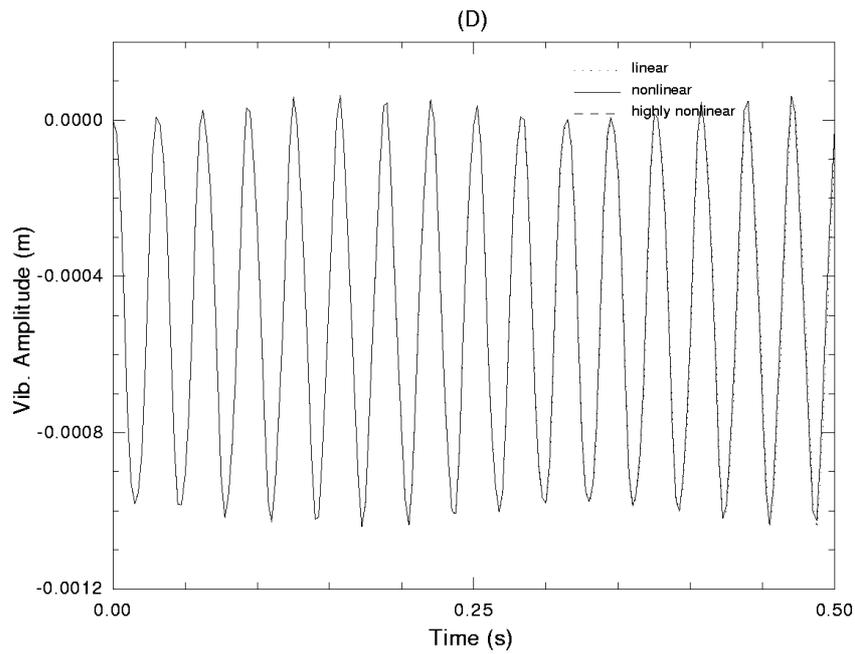
Gráfica 2.2A Respuesta de una viga de Timoshenko a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 1 modo.
(cortesía del Dr. Heppler)



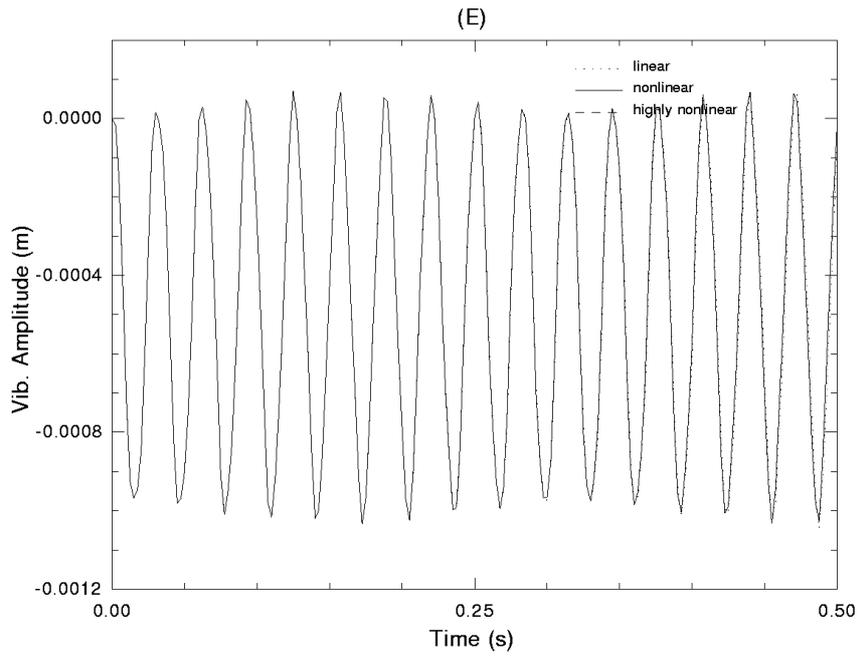
Gráfica 2.2B Respuesta de una viga de Euler-Bernoulli a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 1 modo.
(cortesía del Dr. Heppler)



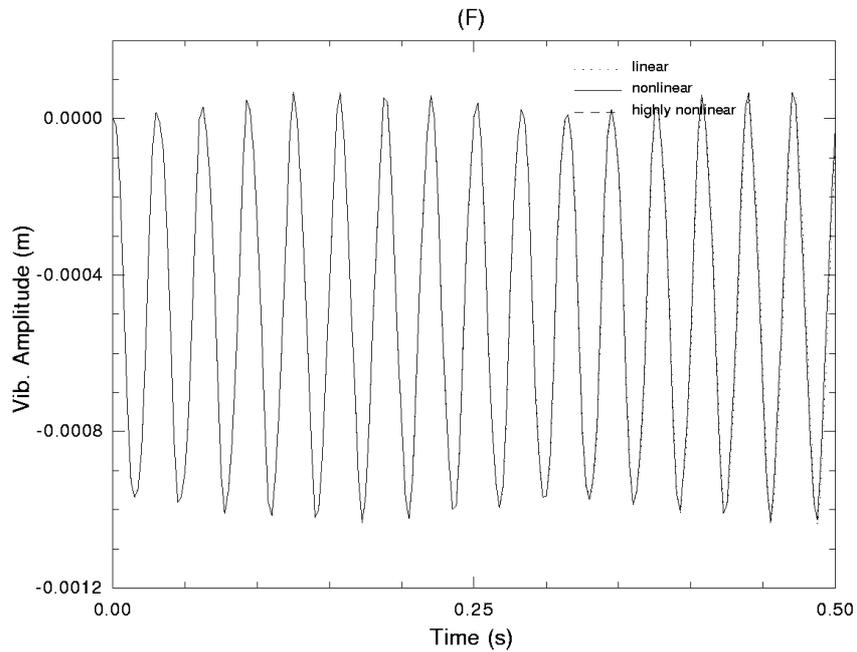
Gráfica 2.2C Respuesta de una viga de Timoshenko a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 2 modos.
(cortesía del Dr. Hepler)



Gráfica 2.2D Respuesta de una viga de Euler-Bernoulli a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 2 modos.
(cortesía del Dr. Hepler)



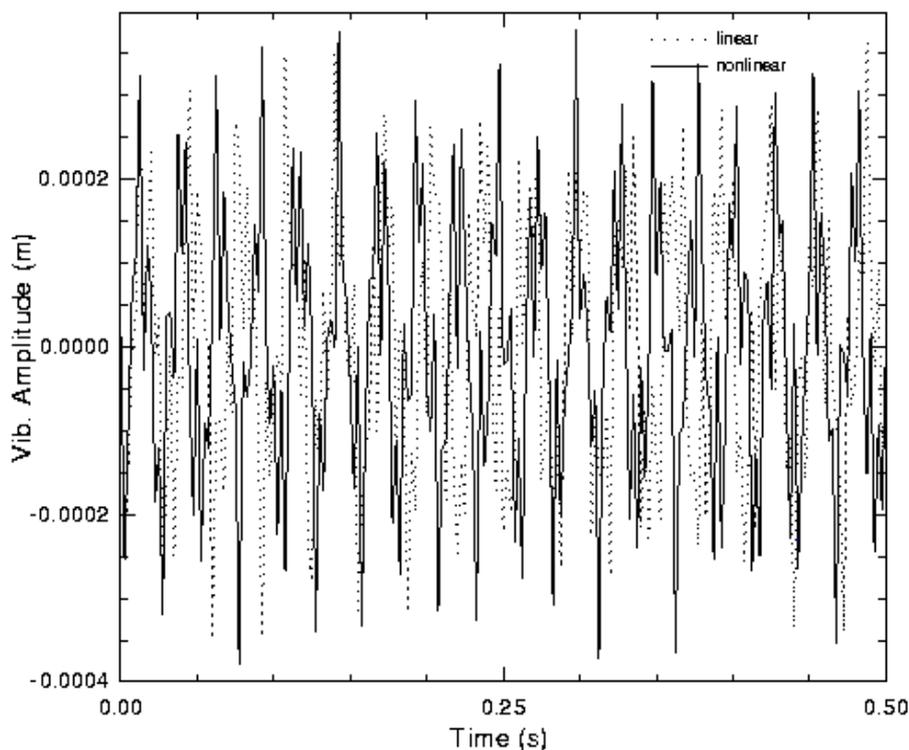
*Figura 2.2E Respuesta de una viga de Timoshenko a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 3 modos.
(cortesía del Dr. Hepler)*



*Gráfica 2.2F Respuesta de una viga de Euler-Bernoulli a un par de 4 Nm aplicado 0.5s considerando 3 modos.
(cortesía del Dr. Hepler)*

En la gráfica 2.3 se muestran los resultados presentados por Ouguamanam y Heppler cuando la articulación de la viga gira a 50 rad/s (perfil de par). De estos resultados concluyen que la contribución de los modos superiores al tercero es muy pequeña. Observaron que la fuerza centrífuga (gráfica no lineal) hace subir la frecuencia de los modos propios y aumenta un poco la amplitud. Así mismo observaron que en este ensayo la viga de Timoshenko vibra con una amplitud 2 veces mayor que la viga de Euler-Bernoulli.

Todos los artículos vistos en este apartado consideran, en el mejor de los casos, una viga con una articulación (con momento de inercia) en un extremo y una masa no puntual (con momentos estáticos y de inercia) en el otro extremo (normalmente libre). Ninguno de los casos estudiados en los artículos precedentes coincide con el caso que se estudia en esta tesis, en el que existe un accionamiento oleohidráulico en un punto intermedio de la viga.



*Gráfica 2.3 Vibración en una viga de Timoshenko a 50 rad/s
(cortesía del Dr. Heppler)*

El artículo de Ouguamanam y Heppler (1998) propone el estudio de una viga de Timoshenko giratoria con el máximo rigor posible (considerando fuerzas centrífugas y masa en el extremo). Es por eso que el estudio teórico de la viga flexible utilizado en esta tesis comenzará con estas hipótesis. En el desarrollo teórico se irán descartando las hipótesis cuya contribución al modelo sea secundaria.

2.1.3 Aplicación de los elementos finitos a los elementos estructurales flexibles

Actualmente uno de los métodos clásicos para estudiar la dinámica de sistemas multisólidos flexibles está basado en la aplicación de elementos finitos. Partiendo de la base de que la dinámica multisólido rígido es conocida, se procede a dividir cada sólido flexible en N elementos, a cada uno de los cuales se le puede asignar un desplazamiento y un giro como producto matricial entre las funciones modales y el vector coordenadas modales. A partir de este punto se puede formular la cinemática y la dinámica en forma matricial, muy adecuada para el cálculo con ordenador.

Xie (1994) escribió un tratado de dinámica multisólido flexible utilizando el método apuntado en el apartado anterior. En su parte teórica explica como formular las ecuaciones del movimiento, basándose en las ecuaciones de Kane, como considerar las no linealidades y como tratar las condiciones de contorno variables en el tiempo. En la parte de aplicaciones presenta varios casos : análisis de un tren de engranajes, minimización de vibraciones en vigas elásticas, respuesta en frecuencia de sistemas multisólido y minimización de vibraciones en modelos de seres humanos.

Langlois y Anderson (1999) presentan una formulación que permite generar y resolver las ecuaciones del movimiento de sistemas mecánicos planos sin necesidad de aplicar restricciones en los sólidos flexibles. Estos son representados por un grupo de elementos flexibles interconectados por pares cinemáticos fijos. Los elementos flexibles se plantean de manera que permitan deformaciones no lineales y amortiguación.

Utilizan la ecuación de Kane sin multiplicadores para generar el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento. Estas son integradas numéricamente en el dominio temporal. El método es validado comparándolo con soluciones analíticas en algunos casos, con métodos

alternativos en otros, y con resultados experimentales que se encuentran en la literatura. Su formulación se comporta bien en términos de precisión y eficiencia.

Berzeri y Shabana (2002) presentan una formulación en elementos finitos utilizando coordenadas nodales absolutas para investigar el efecto de la fuerza centrífuga en vigas bidimensionales giratorias. Demuestran que con su formulación aparece naturalmente la rigidización debida a la fuerza centrífuga, al utilizar una expresión de las fuerzas elásticas deducida mediante la mecánica de los medios continuos. Obtienen la ecuación que gobierna la vibración de la viga giratoria en términos de coordenadas generalizadas que describen los desplazamientos y giros de la viga. La ecuación anterior es linealizada para el caso de pequeñas deformaciones y se demuestra que no presenta inestabilidades. Los resultados obtenidos se comparan con resultados encontrados en la literatura.

Estas técnicas basadas en elementos finitos no serán utilizadas en el enfoque teórico de esta tesis. En principio se intentará obtener las ecuaciones mediante un procedimiento similar al presentado por Heppler (1998). Sin embargo las técnicas empleadas para simular la viga mediante Bond Graph están emparentadas con las presentadas en este apartado.

2.2 Accionamiento de los elementos estructurales flexibles

El estudio del comportamiento de los elementos estructurales flexibles es incompleto si no se tienen en cuenta los accionamientos pues el orden del sistema es diferente. No es extraño que algunos autores hayan investigado el comportamiento *conjunto* de una viga flexible y su accionamiento.

Panza, Sah, Mayne e Inman (1988) plantearon la posibilidad teórica de utilizar el actuador para amortiguar las vibraciones de la estructura accionada, sin embargo, no profundiza en el tema.

Panza (1989) estudia el comportamiento de un mecanismo formado por una viga flexible y un actuador lineal (ver figura 2.6). Comienza planteando la ecuación del movimiento de una viga flexible accionada en un punto intermedio, a continuación plantea la

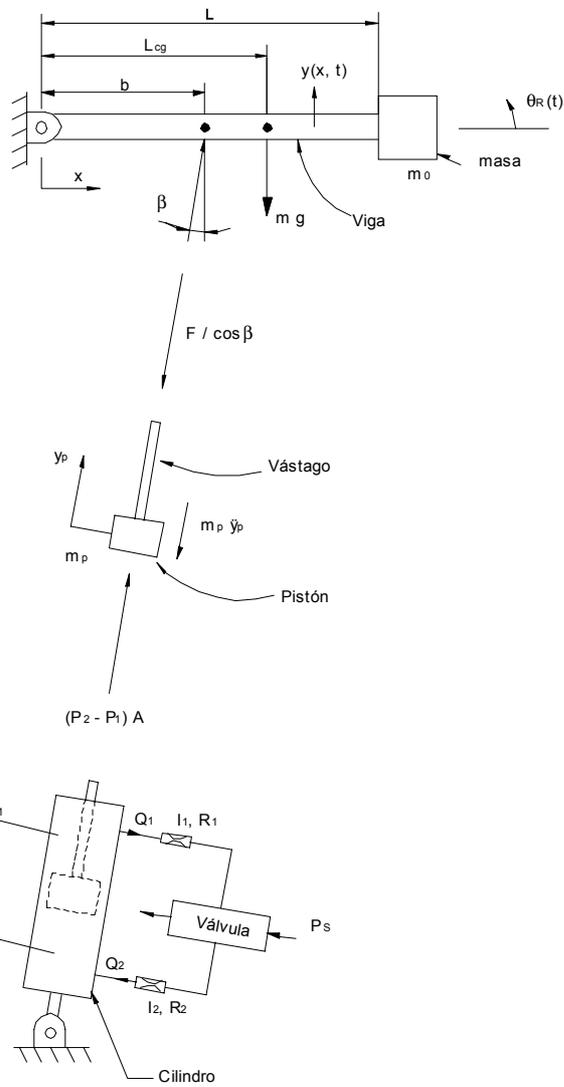


Figura 2.6 Esquema del sistema estudiado por Panza

ecuación del acoplamiento viga-actuador, y finalmente la ecuación del accionamiento oleohidráulico. A partir de las ecuaciones anteriores obtiene las ecuaciones de estado.

Escribe las ecuaciones anteriores en forma adimensional, compara el comportamiento de un accionamiento hidráulico con un accionamiento eléctrico y considera el comportamiento de una viga flexible con un único modo de vibración. Presenta varias simulaciones numéricas basadas en la integración numérica (Runge-Kutta) de las ecuaciones obtenidas.

Posteriormente utiliza la dinámica de Lagrange para derivar las ecuaciones del movimiento, aplica el análisis modal, deduce las ecuaciones de estado para los modos considerados y presenta otras simulaciones numéricas adicionales.

Finalmente presenta los resultados experimentales que ha obtenido, así como algunas consideraciones sobre el control.

Su modelo de viga flexible es el de Euler-Bernoulli en el que considera despreciable la fuerza centrífuga en primera aproximación. Reconoce explícitamente que su trabajo puede ser continuado estudiando los algoritmos de control de su sistema.

Panza y Mayne (1989) estudiaron el comportamiento de una viga de Euler-Bernoulli accionada mediante un actuador hidráulico o eléctrico.

Esencialmente es un resumen de Panza (1989) , aunque profundiza en la posibilidad de diseñar el sistema actuador-viga flexible de manera que tenga unas vibraciones bajas.

Panza y Mayne (1990) y (1994) profundizaron sus investigaciones sobre el comportamiento de una viga de Euler-Bernoulli accionada mediante un actuador hidráulico. En ambos artículos plantean la ecuación del sistema, considerando que son conocidas las formas modales de la viga flexible; a continuación la convierten a su forma adimensional para conocer que parámetros son significativos a la hora de definir la respuesta de su sistema. Exponen el comportamiento de un sistema simplificado en el que solo se considera el primer modo de vibración; simulan numéricamente un sistema con 4 modos de vibración y presentan

sus resultados experimentales. Concluyen que es posible reducir substancialmente las vibraciones de la viga si uno de los parámetros adimensionales está dentro de un determinado rango.

Este estudio es una continuación de los anteriores utilizando las mismas hipótesis limitativas. Manifiestan un notable esfuerzo a la hora de realizar simulaciones y validaciones experimentales, pero no dejan de ser la continuación del camino trazado en Panza (1989).

2.3 Control del accionamiento de los elementos estructurales flexibles

Tanaka y Kikushima (1999) plantearon una estrategia muy interesante para evitar las vibraciones de una viga. Su propuesta evita la excitación de todos los modos de vibración eliminando las ondas transmitidas o reflejadas en un punto concreto. En su artículo plantean las matrices de transferencia de la viga de Euler-Bernoulli y las estrategias de control que permiten eliminar las ondas transmitidas o reflejadas. Aunque conceptualmente es muy elegante, no es muy factible implementar estas leyes por lo que propone una aproximación utilizando una realimentación en velocidad. Finalmente estudia la estabilidad de esta opción.

Khulief (2001) propone un método de control basado en una aproximación mas convencional. En primer lugar plantea la dinámica por el método de los elementos finitos, obtiene a continuación las expresiones matriciales de las energías cinéticas y potenciales y deduce inmediatamente las ecuaciones del movimiento aplicando Lagrange. Como estas ecuaciones son muy complicadas, las convierte a su forma modal y separa los modos de vibración en significativos y no significativos. A partir de aquí obtiene los dos subsistemas frecuenciales: significativo y residual.

Finalmente deduce la ley de control que depende de una matriz de ganancias que determina mediante un algoritmo de posicionamiento de los polos.

Ofrece un ejemplo numérico con resultados muy brillantes (gráficas 2.4 a 2.6). Su método es especialmente interesante para estructuras complejas en las que no es posible evitar el método de los elementos finitos.

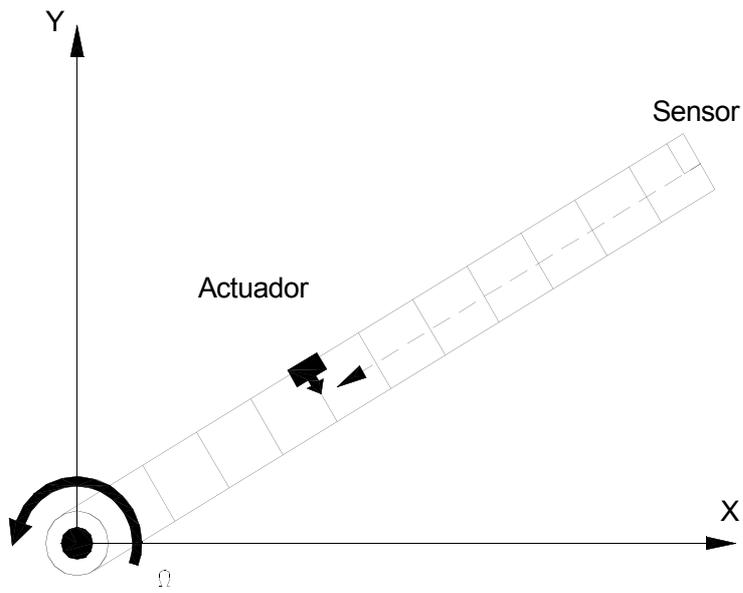


Figura 2.7 Esquema del sistema estudiado por Khulief

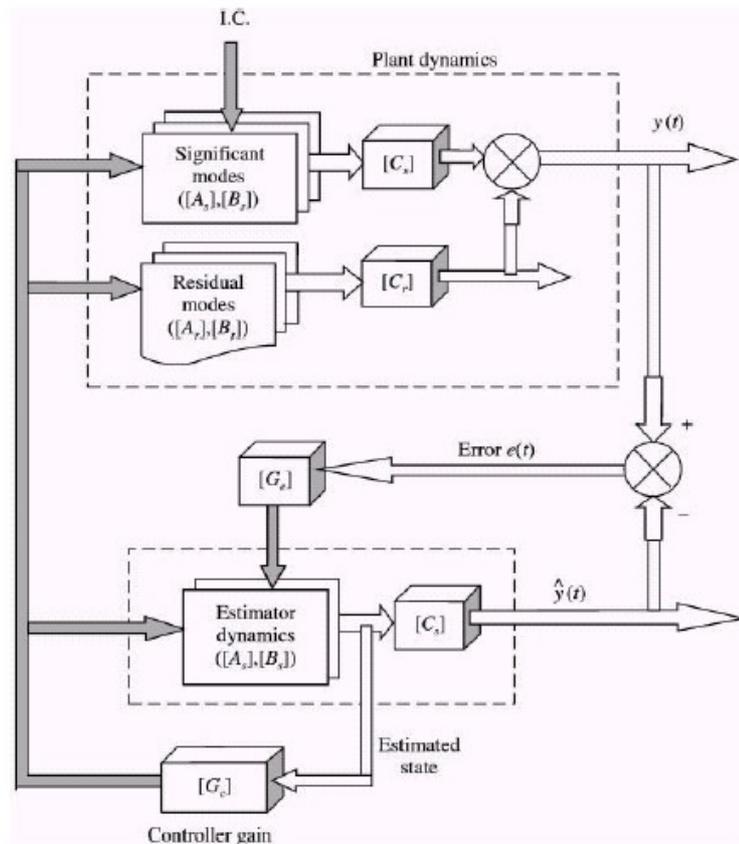
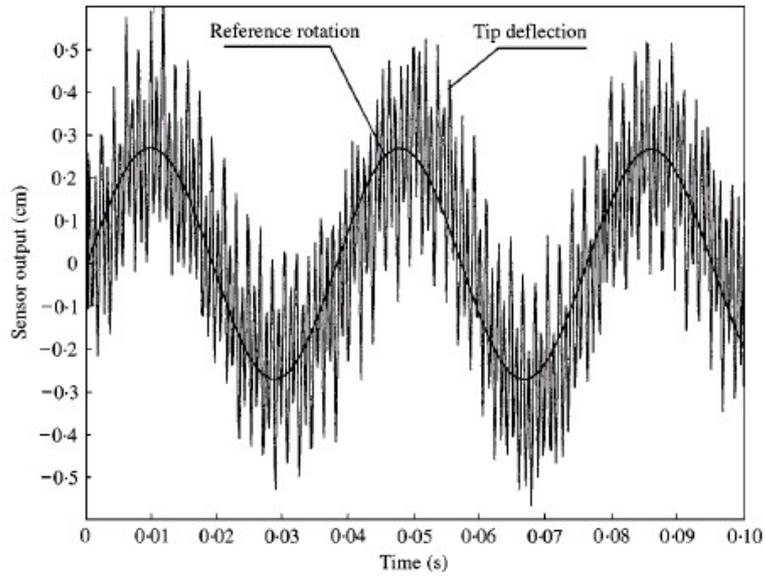
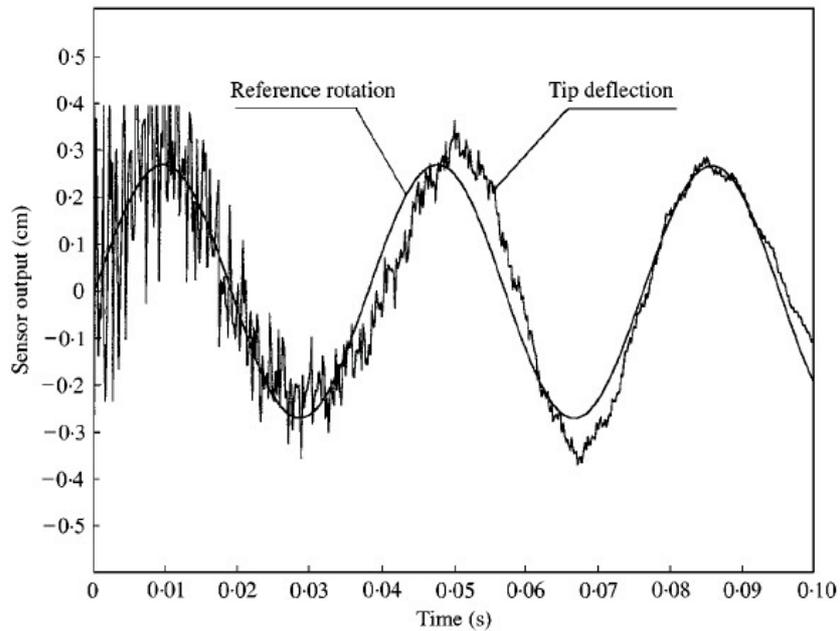


Diagrama 2.1 Esquema del sistema de control estudiado por Khulief

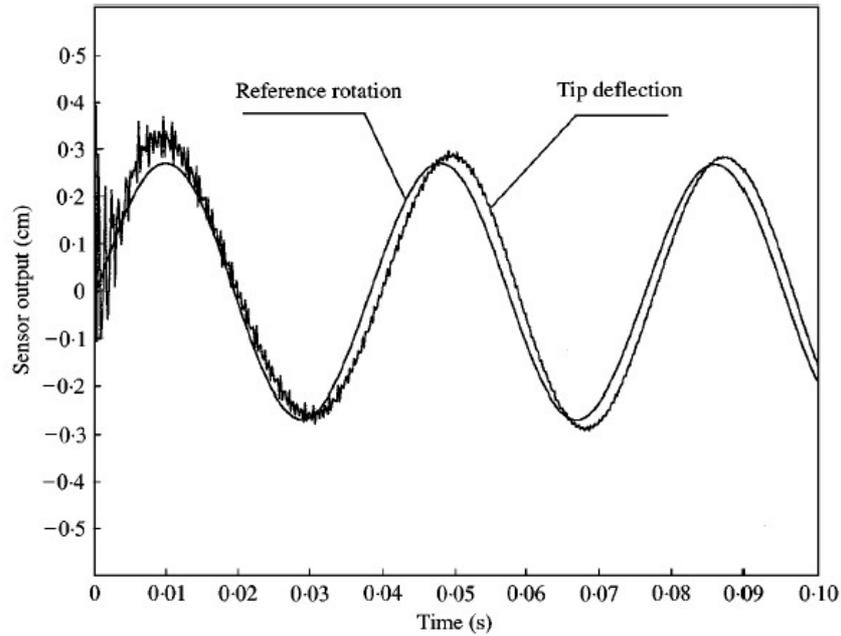


Gráfica 2:4 Respuesta del sistema estudiado por Khulief sin amortiguación



Gráfica 2:5 Respuesta del sistema estudiado por Khulief con amortiguación pasiva

El método planteado por Tanaka y Kikushima (1999) ofrece interesantes posibilidades de aplicación al caso estudiado en esta tesis. Ciertamente es que en esta tesis la realimentación es en aceleración, y habrá que adaptar el procedimiento.



Gráfica 2:6 Respuesta del sistema estudiado por Khulief con amortiguación activa

2.4 Los elementos no lineales

En los apartados anteriores los autores han considerado que la viga flexible tiene un comportamiento lineal, aunque aparezcan efectos no lineales debidos a la fuerza centrífuga (proporcionales al cuadrado de la velocidad). Es interesante hacer referencia a algunos estudios en los que no se considera la viga flexible lineal.

Kerschen y Golinval (2001) proponen utilizar el método de la superficie de la fuerza restauradora para identificar el comportamiento no lineal de una viga empotrada. En su artículo explican en que consiste el método de la superficie de la fuerza restauradora, y lo aplican a dos casos concretos, tanto en la simulación numérica como en el estudio experimental.

El método es interesante y sería una posibilidad a considerar si el sistema estudiado en esta tesis manifestase no linealidades notables.

2.5 Modelización: Bond Graph

El método de Bond Graph fue introducido por Karnopp y Rosenberg (1968). En principio este método solo permite modelar elementos con parámetros concentrados. Sin embargo, Karnopp, Margolis y Rosenberg (1990) en el capítulo 10 de su libro estudian los métodos que pueden ser utilizados para solucionar este problema.

El primer enfoque, que Codina y de las Heras (1997) denominan *nodal*, consiste en dividir el elemento estudiado en numerosos nódulos finitos, sin llegar al tamaño infinitesimal. A cada uno de estos nódulos se le asignan los parámetros concentrados que lo definen aproximadamente. Nótese que cuantos mas nódulos son usados mas mejora la precisión en bajas frecuencias, al precio de aumentar los errores en las altas frecuencias.

Karnopp utiliza este método para estudiar las vibraciones transversales en vigas en primer lugar. A continuación estudia las vibraciones transversales en vigas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko.

El segundo enfoque propuesto por Karnopp, que Codina y de las Heras (1997) denominan *modal*, exige primero obtener los modos propios del sistema continuo. Cada uno de ellos se caracteriza por un término másico y un término elástico. Escogiendo unos pocos modos se obtiene un modelo muy exacto del sistema.

Codina y de las Heras (1997) también tienen un capítulo dedicado al tema de parámetros distribuidos. En este capítulo solo estudian las vibraciones longitudinales en una barra por lo que su aplicación en la presente tesis ha de ser por analogía. En cambio el tratamiento de los sistemas oleohidráulicos con Bond Graph está muy bien conseguido.

El argumento de Karnopp a favor del enfoque modal es irreprochable si los otros componentes del sistema no afectan a los modos propios del elemento distribuido. En principio no es posible garantizarlo en este momento. Por eso, aunque Karnopp prefiera el enfoque modal, en esta tesis se utilizará el enfoque nodal.

2.6 Temas afines

Heppler (1992) también ha investigado la aplicación de los elementos finitos al estudio de la viga de Timoshenko. Para ello ha desarrollado una formulación que utiliza funciones trigonométricas como funciones base cuando lo habitual era utilizar funciones base polinómicas.

Comprueba que esta formulación tiene buena convergencia y precisión, tanto para vigas rectas como para vigas curvas. Así mismo comprueba que permiten obtener en ambos casos los modos propios correspondientes al sólido rígido. Finalmente presenta los modos propios de varias familias de vigas con los extremos libres.

Este artículo ayuda a conocer la nomenclatura del autor y presenta algunos conceptos que podrían ser útiles al estudiar los efectos de las fuerzas centrífugas.

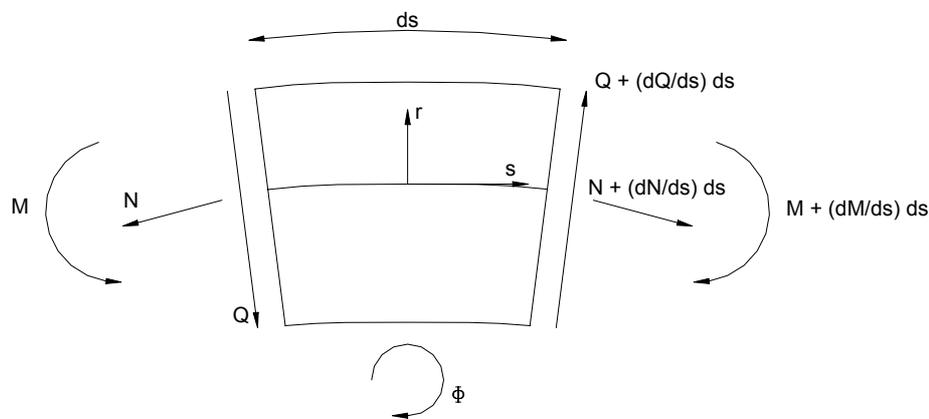


Figura 2.8 Convenio de signos utilizados por Walsh y White

Walsh y White (2000) estudiaron la transmisión de potencia (en forma de ondas de flexión, extensión y cortante) en vigas curvas con radio de curvatura constante. Como hipótesis de trabajo alternativas utilizan las ecuaciones de Love y Flügge, con las que

plantean las ecuaciones del movimiento, considerando también los efectos del momento de inercia y la deformación debida al cortante.

Son especialmente interesantes las tablas 2.2 a 2.4 en las que exponen las diferentes ecuaciones de los desplazamientos, tensiones, fuerzas, pares y movimientos, en función de las hipótesis escogidas.

<i>Magnitud física</i>	<i>Según ecuaciones de Love</i>	<i>Según ecuaciones de Flugge</i>	<i>Incluyendo momento de inercia</i>	<i>Incluyendo deformación a cortante</i>
Desplazamientos relativo a la línea central	$U = u \quad z$ $W = w$	$U = u \quad z$ $W = w$	$U = u \quad z$ $W = w$	$U = u \quad z$ $W = w$
Rotación de la normal a la línea central	$= \frac{u}{R} \quad \frac{w}{s}$	$= \frac{u}{R} \quad \frac{w}{s}$	$= \frac{u}{R} \quad \frac{w}{s}$	Independiente del cortante
Deformación axial	${}_s = \frac{w}{R} \quad \frac{u}{s}$	${}_s = \frac{w}{R} \quad \frac{u}{s}$	${}_s = \frac{w}{R} \quad \frac{u}{s}$	${}_s = \frac{w}{R} \quad \frac{u}{s}$
Deformación angular	${}_s = \frac{\quad}{s}$	${}_s = \frac{\quad}{s}$	${}_s = \frac{\quad}{s}$	${}_s = \frac{\quad}{s}$
Deformación total	$e_s = \frac{\quad}{s \quad z \quad s}$	$e_s = \frac{(\quad \quad z \quad s)}{(1 \quad (z/r))}$	$e_s = \frac{(\quad \quad z \quad s)}{(1 \quad (z/r))}$	$e_s = \frac{(\quad \quad z \quad s)}{(1 \quad (z/r))}$
Tensión axial	${}_s = E e_s$	${}_s = E e_s$	${}_s = E e_s$	${}_s = E e_s$
Deformación a cortante	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = \frac{\quad}{(1 \quad (z/r))}$
Tensión cortante	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = 0$	${}_{sr} = G \quad {}_{sr}$

Tabla 2.2 Expresiones utilizadas en vigas curvas 1 recopiladas por Walsh y White

En principio el enfoque utilizado en esta tesis considerará la hipótesis de pequeñas deformaciones. El interés de este artículo es que marca una posible línea de trabajo si la hipótesis anterior resultase inaplicable.

Newland (1999) presentó una exposición muy didáctica en la que explica que son los “wavelets”, como se representan en diagramas frecuencia-tiempo y que información se puede extraer de estos diagramas.

<i>Magnitud física</i>	<i>Según ecuaciones de Love</i>	<i>Según ecuaciones de Flügge</i>	<i>Incluyendo momento de inercia</i>	<i>Incluyendo deformación a cortante</i>
Es-fuerzo axial	$N = SE \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{s} \right)$	$N = SE \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{s} \right) + \frac{EI}{R} \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right)$	$N = SE \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{s} \right) + \frac{EI}{R} \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right)$	$N = SE \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{s} \right) + \frac{EI}{R} \left(\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{u}{s} - \frac{2w}{s^2} \right)$
Mo-momento flector	$M = EI \frac{1}{s} \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{s} \right)$	$M = EI \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right)$	$M = EI \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right)$	$M = EI \left(\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{u}{s} - \frac{2w}{s^2} \right)$
Cor-tante	$Q = EI \frac{2}{s^2} \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{s} \right)$	$Q = EI \times \frac{1}{s} \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right)$	$Q = EI \times \frac{1}{s} \left(\frac{w}{R^2} - \frac{2w}{s^2} \right) + 2 I \frac{1}{t^2} \left(\frac{u}{R} \right) + I \frac{1}{t^2} \left(\frac{w}{s} \right)$	$Q = kG \left(S \frac{I}{R^2} \right) \times \left[\left(\frac{u}{R} - \frac{w}{s} \right) \right]$

Tabla 2.3 Expresiones utilizadas en vigas curvas II recopiladas por Walsh y White

Esta técnica es especialmente interesante cuando hay grandes cambios en la frecuencia de vibración en un tiempo pequeño. No es el caso estudiado en esta tesis.

Lardies y Larbi (2001) presentaron un método para identificar los parámetros modales en el dominio temporal, sin necesidad de realizar FFTs.

Es una alternativa interesante al procedimiento clásico.

Preumont (1997) escribió un libro sobre el control de las vibraciones en las estructuras activas. Esencialmente es un tratado de regulación automática clásica orientado a las estructuras activas.

Algunas de las técnicas propuestas tienen cierta semejanza con las que serán usadas en esta tesis. Particularmente interesantes son sus estudios sobre amortiguación activa, en particular la utilización de un sensor de aceleración, aunque su bucle de control está diseñado para un actuador de fuerza, y en el caso de esta tesis se ha escogido un actuador de velocidad (de posición si se considera el servoamplificador). De

la lectura de su obra se deduce una idea: si se consigue hacer trabajar el actuador como amortiguador, las vibraciones de la viga se atenuarán rápidamente.

<i>Ecuaciones considerando el cortante</i>
$EK^2 \left(\frac{^3u}{s^3} \quad R \frac{^4w}{s^4} \right) E \left(\frac{w}{R} \quad \frac{u}{s} \right) = R \frac{^2w}{t^2}$
$\frac{EK^2}{R} \left(\frac{^2u}{s^2} \quad R \frac{^3w}{s^3} \right) E \left(\frac{w}{s} \quad R \frac{^2u}{s^2} \right) = R \frac{^2u}{t^2}$
<i>Ecuaciones según Flügge</i>
$R E \left(\frac{^2u}{s^2} \quad \frac{1}{R} \frac{w}{s} \right) = R \frac{^2u}{t^2}$
$EK^2 R \frac{^2}{s^2} \left(\frac{w}{R^2} \quad \frac{^2w}{s^2} \right) \left[E \left(\frac{u}{s} \quad \frac{w}{R} \right) \frac{EK^2}{R} \left(\frac{w}{R^2} \quad \frac{^2w}{s^2} \right) \right] = R \frac{^2u}{t^2}$
<i>Ecuaciones considerando el momento de inercia</i>
$R \left[\frac{^2u}{t^2} \left(1 \quad \frac{3K^2}{R^2} \right) \frac{2K^2}{R} \frac{^3w}{s^2} \frac{1}{t} \right] = E \left[R \frac{^2u}{s^2} \quad \frac{w}{s} \right]$
$R \left[\frac{^2w}{t^2} \quad K^2 \frac{^4w}{s^2} \frac{1}{t^2} \quad \frac{2K^2}{R} \frac{^3u}{t^2} \frac{1}{s} \right] = E \left[\frac{u}{s} \quad \frac{w}{R} \right] \quad EK^2 \left[R \frac{^4w}{s^4} \quad \frac{2}{R} \frac{^2w}{s^2} \quad \frac{w}{R^3} \right]$
$R \left(\frac{^2u}{t^2} \quad \frac{K^2}{R} \frac{^2}{t^2} \right) = E \left(R \frac{^2u}{s^2} \quad \frac{w}{s} \right) \dots$
$\frac{EK^2}{R} \left(\frac{^2u}{s^2} \quad \frac{1}{R} \frac{w}{s} \quad R \frac{^2}{s^2} \right) \quad kG \left(1 \quad \frac{K^2}{R^2} \right) \left(\frac{w}{s} \quad \frac{u}{R} \right)$
$K^2 \left(\frac{^2u}{t^2} \quad R \frac{^2}{t^2} \right) = \dots$
$EK^2 \left(\frac{^2u}{s^2} \quad \frac{1}{R} \frac{w}{s} \quad R \frac{^2}{s^2} \right) \quad kGR \left(1 \quad \frac{K^2}{R^2} \right) \left(\frac{w}{s} \quad \frac{u}{R} \right)$
$R \frac{^2w}{t^2} = kG \left(1 \quad \frac{K^2}{R^2} \right) \left(R \frac{^2w}{s^2} \quad \frac{u}{s} \quad R \frac{u}{s} \right) \quad E \left(\frac{u}{s} \quad \frac{w}{R} \right) \dots$
$EK^2 \left(\frac{1}{R^2} \frac{u}{s} \quad \frac{w}{R^3} \quad \frac{1}{R} \frac{u}{s} \right)$

Tabla 2.4 Ecuaciones del movimiento para vigas curvas presentadas por Walsh y White

