

# Capítulo 6

## Caracterización experimental de una viga flexible accionada mediante un servoactuador oleohidráulico

### 6.1 Métodos experimentales de análisis de la respuesta de un sistema

Existen numerosos métodos experimentales que pueden ser utilizados para identificar los parámetros de un sistema. En la Figura 6.1 se ha hecho un resumen de los métodos posibles.

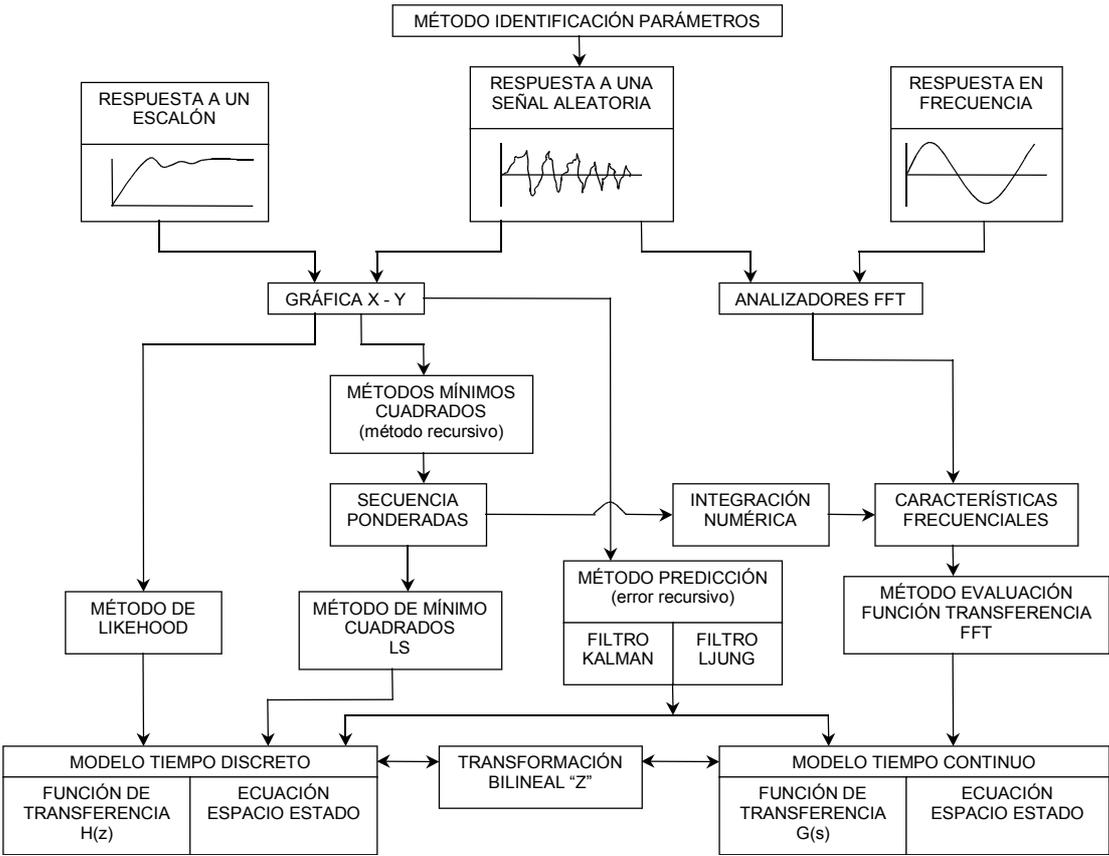


Figura 6.1 Métodos de identificación experimental de parámetros

De entre todos estos métodos se ha escogido el estudio de la respuesta en frecuencia. En principio se intentó utilizar un método similar a los empleados en análisis modal, aplicando un pulso de Dirac. La experiencia permitió observar que el pulso aporta la energía en un instante y que ésta es disipada rápidamente en el sistema. Esto es un problema si se desean efectuar medidas largas (60 segundos) para aumentar la resolución en frecuencia. Para evitar este problema se decidió aplicar chirps.

## **6.2 Obtención experimental de la respuesta frecuencial del sistema**

En este apartado se presentan los resultados obtenidos al estudiar la respuesta frecuencial del sistema. El esquema del proceso que se ha seguido para obtener una estimación experimental de la función de transferencia, se puede ver en la Figura 6.2.

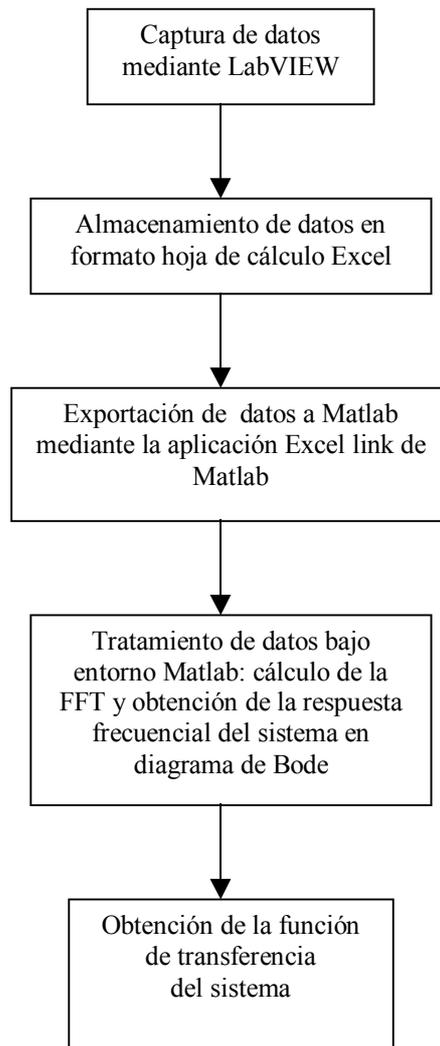
### **6.2.1 Captura de datos**

Para encontrar la respuesta frecuencial de un sistema experimentalmente, es necesario medir la respuesta del sistema al aplicar una señal de entrada. Existen diferentes alternativas al escoger la señal de entrada.

Una primera posibilidad, según se ha comentado, es aplicar un pulso de Dirac en la entrada. Aunque es muy utilizada en análisis modal se descartó porque no permite efectuar medidas de larga duración, y además, el cilindro hidráulico trabaja como un filtro pasabajos.

Otra posibilidad es introducir una señal aleatoria (o pseudoaleatoria) en la entrada del sistema. Esta posibilidad fue descartada en las primeras pruebas, con una tarjeta sin salidas analógicas, debido a la carencia de un generador de señales aleatorias. Después de realizadas las medidas que se expondrán a continuación, resulta bastante claro que este método no permitiría resolver correctamente la respuesta en baja frecuencia, pues el acelerómetro que permite llegar hasta 50g no tiene la precisión necesaria.

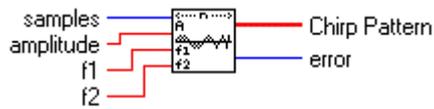
La alternativa escogida fue enviar chirps a la entrada del servoactuador oleohidráulico. Si el sistema es lineal, para cada una de las señales senoidales introducidas, la respuesta resultante será otra señal senoidal de diferente amplitud y fase.



*Figura 6.2 Proceso seguido para obtener una estimación experimental de la función de transferencia*

El barrido de frecuencias se realizó, en primer lugar, utilizando un chirp de **0.01 a 60 Hz**, siendo éste el rango de trabajo en el que se obtendrá una respuesta frecuencial válida.

La captura de datos se realizó mediante el programa descrito en el anexo 6.1. LabVIEW facilita un subVI, incluido en la librería Generación de señales, que permite sintetizar chirps. Este VI es muy útil para desarrollar el programa completo en muy poco tiempo. Este subVI es **Chirp Pattern.vi**, y se encuentra representado en la Figura 6.3.



**Chirp Pattern.vi**

*Figura 6.3 Generador de chirps*

Este VI genera un vector que contiene muestras de una función senoidal de frecuencia variable entre dos valores (inicial y final) que fija el usuario. La señal generada será una señal senoidal cuya frecuencia inicial será igual al valor inicial y su frecuencia final será igual al valor final. Esa señal estará definida por una función senoidal cuya frecuencia se actualiza, punto a punto, entre los valores inicial y final. El vector generado responde a la fórmula:

$$y_i = amp \times \sin((a/2i + b)i) \quad (6.1)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , siendo **amp** el valor de la amplitud de la señal, y

$$a = 2\pi(f2-f1)/n, \quad b = 2\pi f1, \quad (6.2)$$

**f1** es la frecuencia inicial en unidades normalizadas ( $f/fs$  o ciclos/muestra), **f2** la frecuencia final también en unidades normalizadas ( $f/fs$  o ciclos/muestra) y **n** el número de muestras (“samples”).

En las pruebas realizadas inicialmente, este VI se configuró con los siguientes datos:

- **amp = 0.5 (V)**
- **n = 30000 (muestras)**
- **f1=0.01 (Hz)**
- **f2=60 (Hz)**

Los otros parámetros para realizar la captura de datos hacen referencia a aspectos generales tales como frecuencia de muestreo, tamaño de los buffers que almacenan los datos captados. Estos han sido los parámetros de configuración:

- Frecuencia de muestreo (sampling rate): **500 (Hz)**.
- Frecuencia de escritura (update rate): **500 (Hz)**.
- Tamaño de los buffer de entrada y salida: **30000 (muestras)**.
- Nivel de offset de la señal chirp: **-1.8 (V)**

Conviene que los valores de las frecuencias de muestreo y de escritura sean iguales.

El nivel de offset introducido es necesario para colocar la barra flexible en posición totalmente horizontal.

Para esta prueba, el acelerómetro utilizado es el modelo 8303A50, capaz de medir hasta 50 g (gravedades). En el caso de utilizar el modelo 8303A20, la salida de éste quedaría saturada ya que en esta prueba se obtienen aceleraciones superiores a 25 g.

Por último queda por definir la frecuencia de corte de los filtros utilizados. Como se explicó anteriormente, los tres filtros utilizados tienen una frecuencia de corte  $f_{\text{corte}} = 100$  Hz.

Con la configuración establecida, la prueba consistirá en introducir una señal senoidal cuya frecuencia varía progresivamente del valor 0.01 Hz hasta 60 Hz. La duración de la prueba es de 60 segundos, ya que esta duración viene definida por el tamaño de los buffer y la frecuencia de muestreo:

$$\text{duración (segundos)} = \frac{\text{tamaño del buffer (muestras)}}{\text{frecuencia de muestreo (muestras/segundo)}} \quad (6.3)$$

Una vez fijados estos parámetros, se procedió a la ejecución de los ensayos en el banco de pruebas.

### 6.2.2 Almacenamiento de datos

Tal y como se comentó anteriormente, los datos se almacenan en formato hoja de cálculo Excel. El programa de captura de datos, almacena tanto los datos generados como los obtenidos. Los cálculos posteriores se realizan con los datos capturados a partir de los canales de entrada. En la Figura 6.4 se representa un extracto del formato en el que se tienen los datos en la hoja de cálculo.

Como puede verse en la columna A se almacena la salida del acelerómetro, mientras que en la columna B se guarda la señal chirp filtrada, que es muestreada antes de aplicarse al módulo servoamplificador.

	A	B	C	D
1	2.52	-1.736		
2	2.517	-1.733		
3	2.522	-1.736		
4	2.52	-1.736		
5	2.522	-1.736		
6	2.52	-1.733		
7	2.522	-1.733		
8	2.524	-1.733		
9	2.524	-1.733		
10	2.524	-1.736		

Figura 6.4 Formato de los datos obtenidos

### 6.2.3 Exportación de datos a Matlab

Matlab incorpora una librería que permite recuperar datos que se encuentran en formato hoja de cálculo. Esta librería permite crear una variable que irá a parar al espacio de trabajo de Matlab. Dicha variable será una matriz que contendrá aquellos datos que han sido seleccionados de la hoja de cálculo.

### 6.2.4 Tratamiento de datos bajo entorno Matlab

El tratamiento de datos se ha realizado bajo entorno Matlab. Este entorno permite la creación de programas con extensión .m que ejecutarán el tratamiento de datos. En las siguientes páginas se describirán los programas Matlab que han sido utilizados para obtener la representación temporal de los resultados de las pruebas realizadas, así como la representación en diagrama de Bode de la respuesta frecuencial experimental del sistema.

En primer lugar, se presenta la respuesta temporal del sistema al chirp cuya frecuencia varía entre 0.01Hz y 60Hz. El programa Matlab utilizado se encuentra en la Figura 6.5.

En la Figura 6.6 se encuentra la representación temporal obtenida con la ejecución del programa mencionado anteriormente.

```

% Respuesta temporal.m

% Antes de nada debemos seleccionar de la variable que se ha exportado a Matlab la señal
% del acelerómetro (salida del sistema) y la señal chirp que introducimos a la servoválvula
% (entrada del sistema)

% La variable exportada a Matlab es salida. Se trata de una matriz de dos columnas que
% incluye la entrada y la salida del sistema.

u=salida(:,2);      % Seleccionamos la columna 2 de la variable matriz salida que incluye
                    % la señal chirp.
y=salida(:,1);      % Seleccionamos la columna 1 de la variable matriz salida que incluye
                    % la señal del acelerómetro.
clear salida;      % Borraremos la variable salida (para liberar espacio de trabajo).

% Realizamos la transpuesta de las variables creadas. El objetivo es pasar de una columna
% con 30000 filas a una fila de 30000 columnas.

u=transpose(u);    % Realizamos la traspuesta de la variable que incluye la entrada del
                    % sistema
y=transpose(y);    % Realizamos la traspuesta de la variable que incluye la salida del
                    % sistema

t=0.002:0.002:60; % Creamos el vector tiempo que incluye los datos referentes al tiempo
                    % muestreo de datos. La frecuencia de muestreo es de 500 Hz, por
                    % tanto el periodo de muestreo es de Ts=0.002 seg.

plot(t,u,t,y)      % Se crea una figura en la que se representan las señales de entrada
                    % y salida del sistema en función del tiempo

xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('Entrada a servoválvula(V)          Salida acelerómetro(V)')

% Se etiquetan los ejes de coordenadas de la figura.

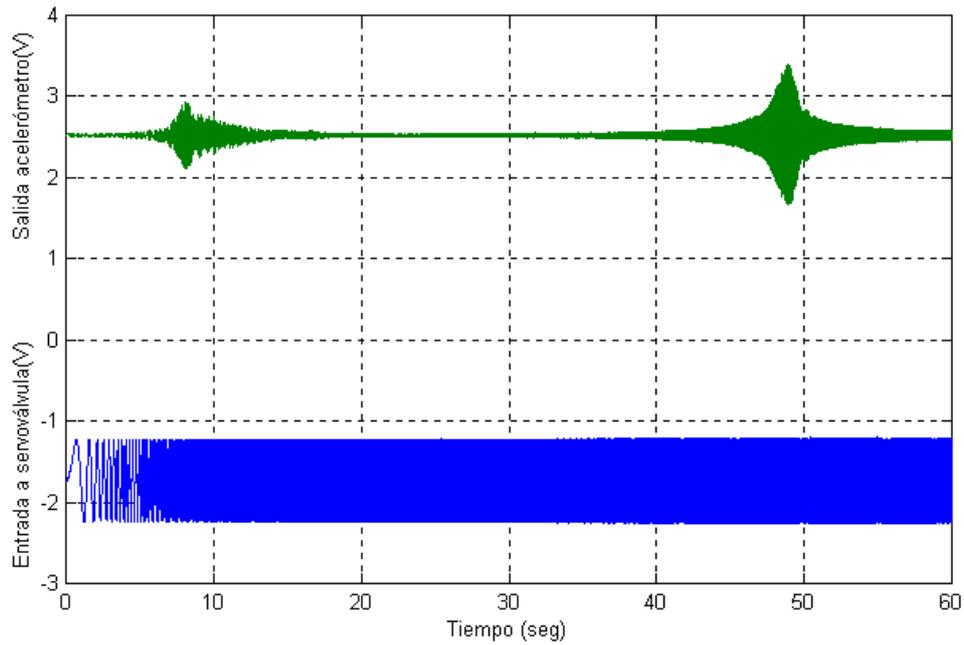
axis([0 60 -3 4])  % Se escoge el rango de los ejes de coordenadas para obtener una
                    % visualización de la representación más clara.

```

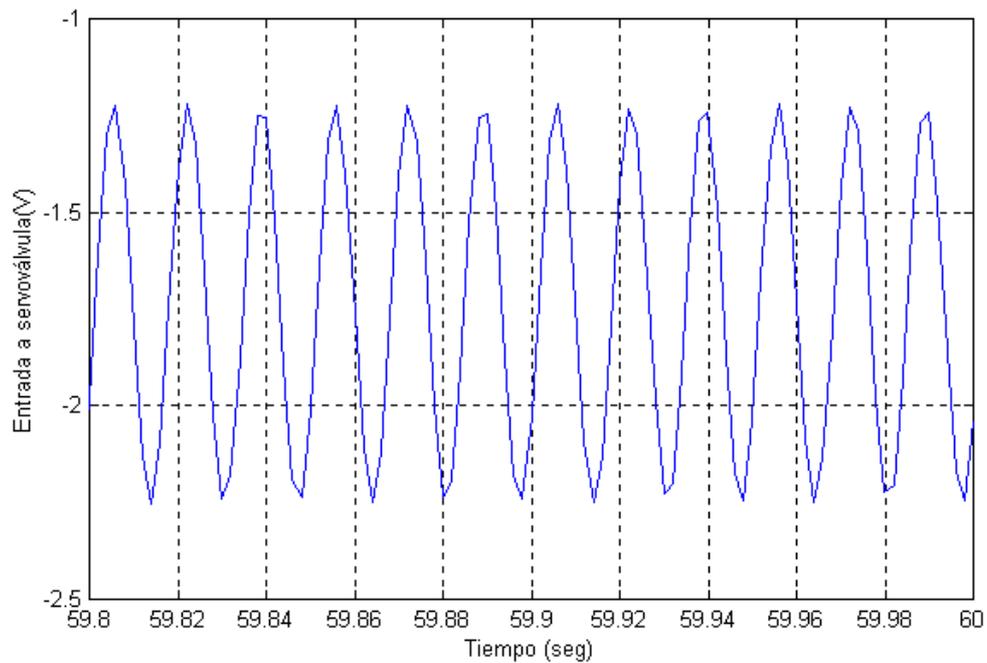
*Figura 6.5 Programa Matlab para presentar los resultados en el dominio temporal*

Como puede verse, existen dos niveles de “offset”. El valor de éste para la señal del acelerómetro es de 2.5 (V) aproximadamente. Para el caso de la señal de salida hacia la servoválvula, éste es de -1.8 (V). Esta tensión es la necesaria para situar la barra flexible en posición horizontal.

Las escalas de las señales se han escogido de manera que se puedan apreciar razonablemente en la gráfica. Para facilitar la observación del chirp se ha incluido la Figura 6.7 con una ampliación del instante final.



*Figura 6.6 Respuesta temporal*



*Figura 6.7 Ampliación del chirp en el instante final*

Una vez realizada la representación temporal de los datos obtenidos, el siguiente paso es desarrollar el programa de cálculo que permita obtener la respuesta frecuencial del sistema. Este es el listado del programa.m utilizado para obtener la representación frecuencial:

## **% Respuesta frecuencial.m**

% Lo primero que haremos es de la variable que se ha exportado a Matlab la señal del acelerómetro % y la señal chirp que introducimos a la servoválvula de la misma forma que se hizo anteriormente

```
u=salida(:,2);      % Seleccionamos la columna 2 de la variable matriz salida que incluye  
                  % la señal chirp.  
y=salida(:,1);    % Seleccionamos la columna 1 de la variable matriz salida que incluye  
                  % la señal del acelerómetro.  
clear salida;    % Borramos la variable salida (para liberar espacio de trabajo).
```

% Realizamos la transpuesta de las variables creadas.

```
u=transpose(u);   % Realizamos la transpuesta de la variable que incluye la entrada del  
                  % sistema  
y=transpose(y);  % Realizamos la transpuesta de la variable que incluye la salida del  
                  % sistema
```

% Definimos algunas variables necesarias para la definición del eje de frecuencias que se utilizará  
% para la obtención del diagrama de Bode.

```
N=30000;         % Defino el número de muestras que fueron tomadas.  
fs=500;         % Defino el valor de la frecuencia de muestreo (Hz).  
ws=2*pi*fs;    % Defino el valor de la frecuencia de muestreo en pulsaciones (rad/s).  
points=N-1;    % Defino una variable que utilizaré para definir el vector de frecuencias.  
f=fs/N*(0:points); % Defino el vector de frecuencias (Hz).  
w=2*pi*f;      % Defino el vector de frecuencias (rad/s).
```

% Con los vectores anteriores fijamos cada componente de la respuesta frecuencial del sistema  
% calculada a partir de la fft a la frecuencia que se produce.

```
uf=fft(u);       % Calculo la Transformada Rápida de Fourier del vector que almacena la  
                  % señal de entrada a la servoválvula, obteniendo U(jw)  
yf=fft(y);       % Calculo la Transformada Rápida de Fourier del vector que almacena la  
                  % señal de salida del acelerómetro, obteniendo Y(jw)
```

```
for i=1:N;       % Calculo la respuesta frecuencial del sistema según la fórmula:  
    gf(i)=yf(i)/uf(i); %  $G(jw) = Y(jw) / U(jw)$   
end;
```

```
modulogf=abs(gf); % Obtengo el módulo de la respuesta frecuencial del sistema.
```

```

fasegrad=angle(gf);      % Obtengo la fase de la respuesta frecuencial del sistema en radianes.

modulogfdB=20*log10(modulogf);  % Obtengo el módulo de la respuesta frecuencial del
                                % sistema en dB.
fasegdegrees=(fasegrad*180)/pi;  % Obtengo la fase de la respuesta frecuencial del sistema % en grados.

% Ahora ya tenemos los datos necesarios para obtener el diagrama de Bode del sistema. Sólo falta % ya
representar la respuesta frecuencial del sistema.

% Podemos representar la respuesta frecuencial en escala lineal de frecuencias (Hz)
subplot(2,1,1)                % Creamos una figura de dos gráficos. Colocamos
plot(f,modulogfdB)            % en el gráfico superior el Módulo de la respuesta
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Gain dB')  % Etiquetamos los ejes de ese gráfico
axis([0.01 100 -100 100])      % Se escoge el rango de los ejes de coordenadas
grid on;                      % Se activa la rejilla
subplot(2,1,2)                % Colocamos en el gráfico inferior la Fase de la
plot(f,fasegdegrees)          % respuesta frecuencial
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Phase deg')  % Etiquetamos los ejes de ese gráfico
axis([0.01 100 -200 200])      % Se escoge el rango de los ejes de coordenadas
grid on;                      % Se activa la rejilla

% Podemos representar la respuesta frecuencial en escala semilogarítmica de frecuencias (Hz)
subplot(2,1,1)
semilogx(f,modulogfdB)        % El eje de abcisas tendrá escala logarítmica
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Gain dB')
axis([0.01 100 -100 100])
grid on;
subplot(2,1,2)
semilogx(f,fasegdegrees)      % El eje de abcisas tendrá escala logarítmica
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Phase deg')
axis([0.01 100 -200 200])
grid on;
(continuación)

% Podemos representar la respuesta frecuencial en escala lineal de pulsaciones (rad/s)
subplot(2,1,1)
plot(w,modulogfdB)
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Gain dB')
axis([0.01 100 -100 100])
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(w,fasegdegrees)

```

```

xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Phase deg')
axis([0.01 100 -200 200])
grid on;

% Podemos representar la respuesta frecuencial en escala semilogarítmica de pulsaciones (rad/s)
subplot(2,1,1)
semilogx(w,modulogfdB)
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Gain dB')
axis([0.01 1000 -180 180])
grid on;
subplot(2,1,2)
semilogx(w,fasegfddegrees)
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Phase deg')
axis([0.01 1000 -180 180])
grid on;

```

En la Figura 6.8 se encuentra la respuesta frecuencial del sistema obtenida con la ejecución del fichero anterior. Se ha escogido una escala logarítmica de frecuencias (Hz) como corresponde a un diagrama de Bode.

Observando el diagrama de Bode experimental de la Figura 6.8 se pueden observar varias características notables:

- a) Existen dos frecuencias en las que hay un pico de amplitud y un cambio de fase de  $180^\circ$ . Estas serán las frecuencias propias observadas.
- b) Por encima de 60Hz no hay información de la fase. No es extraño. El sistema ha sido “iluminado” con una señal que iba de 0.01Hz a 60 Hz. No es posible ver como responde el sistema por encima de 60 Hz.
- c) La respuesta del sistema en la región de baja frecuencia no está bien definida. Los cambios de fase bruscos sin cambios en la amplitud invitan a estudiar la respuesta del sistema en bajas frecuencias con mas precisión.

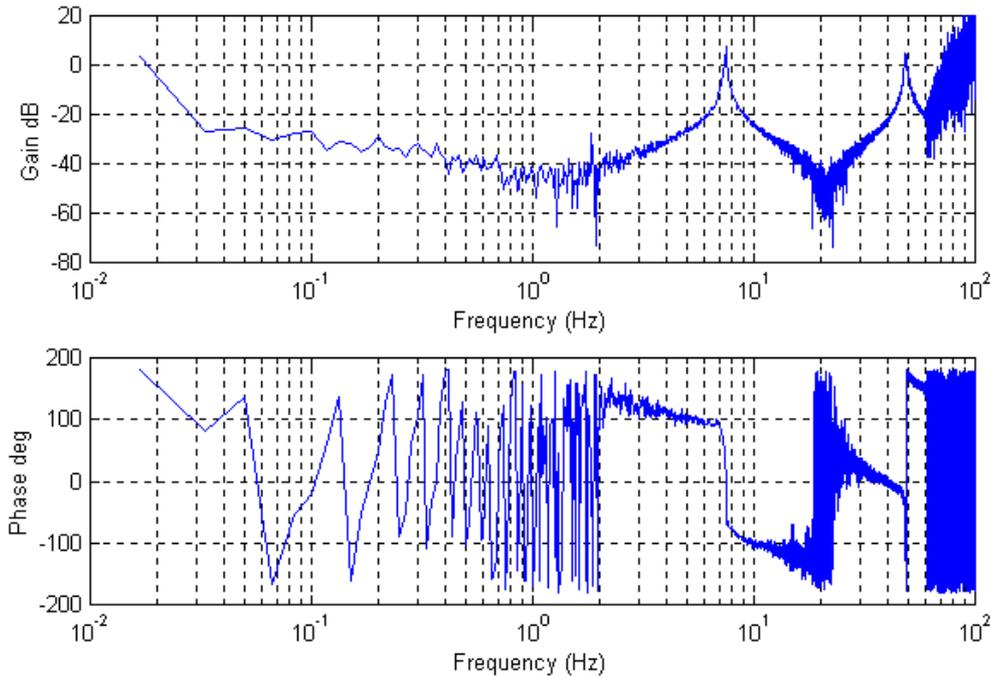
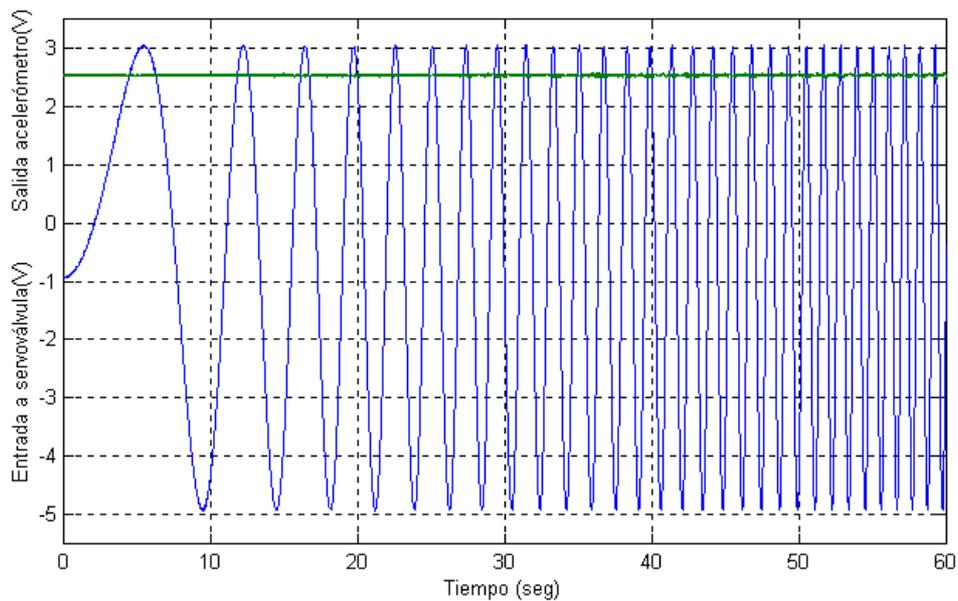


Figura 6.8 Respuesta frecuencial

Con el objetivo de encontrar una respuesta frecuencial mucho más ‘limpia’ a bajas frecuencias se decidió realizar una segunda prueba. En esta segunda prueba sólo se estudiaría el sistema en las frecuencias conflictivas: de **0.01 a 1 Hz**. Se sustituyó, además, el sensor de aceleración 8303A50 por el modelo **8303A20**, que es más sensible. Y por último, con el objetivo potenciar la aceleración de la barra flexible, se aumentó el valor de la amplitud de la señal chirp hasta el valor máximo que permite la tarjeta de adquisición de datos. Estas fueron las condiciones en las que se realizaron las pruebas:

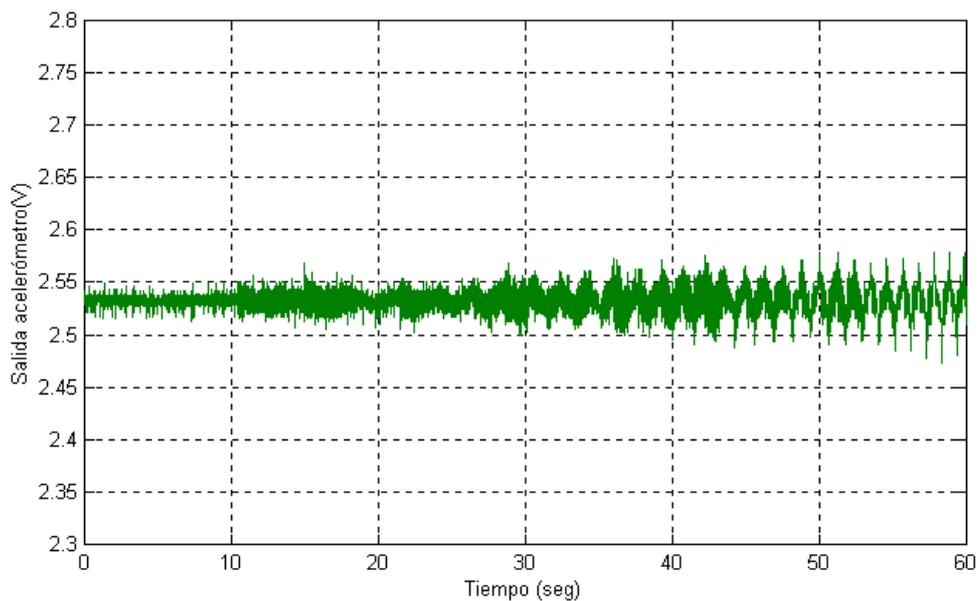
- Amplitud señal chirp: ***amp = 4 (V)***.
- Número de muestras: ***n = 30000 (muestras)***.
- Frecuencia inicial: ***f1 = 0.01 (Hz)***.
- Frecuencia final: ***f2 = 1 (Hz)***.
- Frecuencia de muestreo y escritura: ***500 (Hz)***.
- Tamaño de los buffer de entrada y salida: ***30000 (muestras)***.
- Nivel de offset de la señal chirp: ***-1.8 (V)***.
- Acelerómetro modelo 8303A20.
- Frecuencia de corte de los filtros:  $f_{\text{corte}} = 100 \text{ Hz}$ .

En la Figura 6.9 se encuentra la representación temporal obtenida con la ejecución del fichero explicado anteriormente: Respuesta Temporal.m. Se han cambiado algunos valores de éste, acorde a los valores de esta prueba, pero la estructura se mantiene.



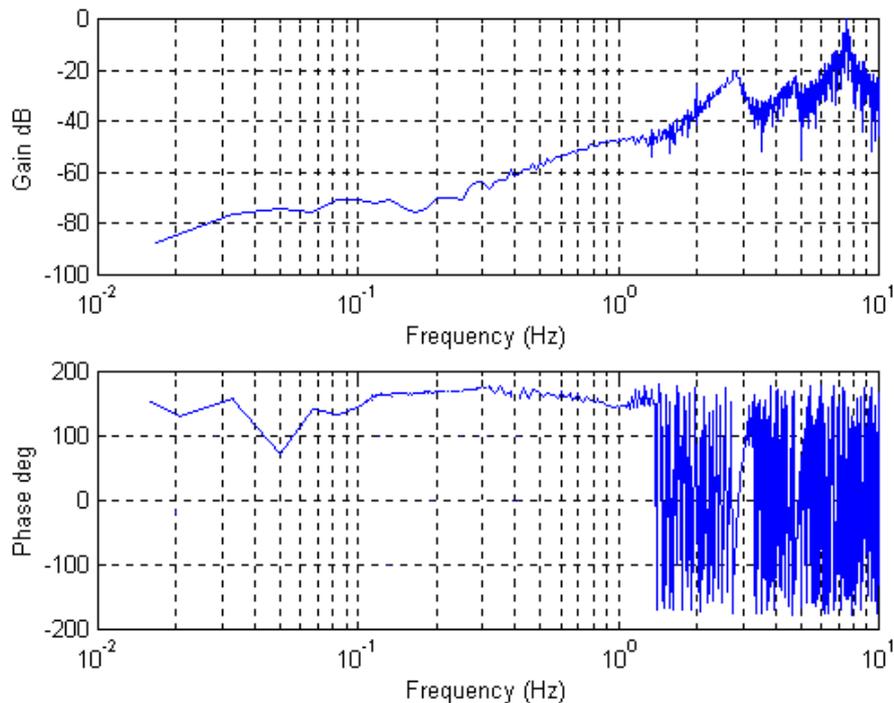
*Figura 6.9 Respuesta temporal a bajas frecuencias*

Como podemos ver, la aceleración de la barra apenas se ve alterada a bajas frecuencias, pese a que se aumentó la amplitud de la señal aplicada hasta 4 V. Se ha realizado una ampliación de la Figura 6.9 anterior para ver dicha señal con más detalle:



*Figura 6.10 Ampliación de la aceleración en bajas frecuencias*

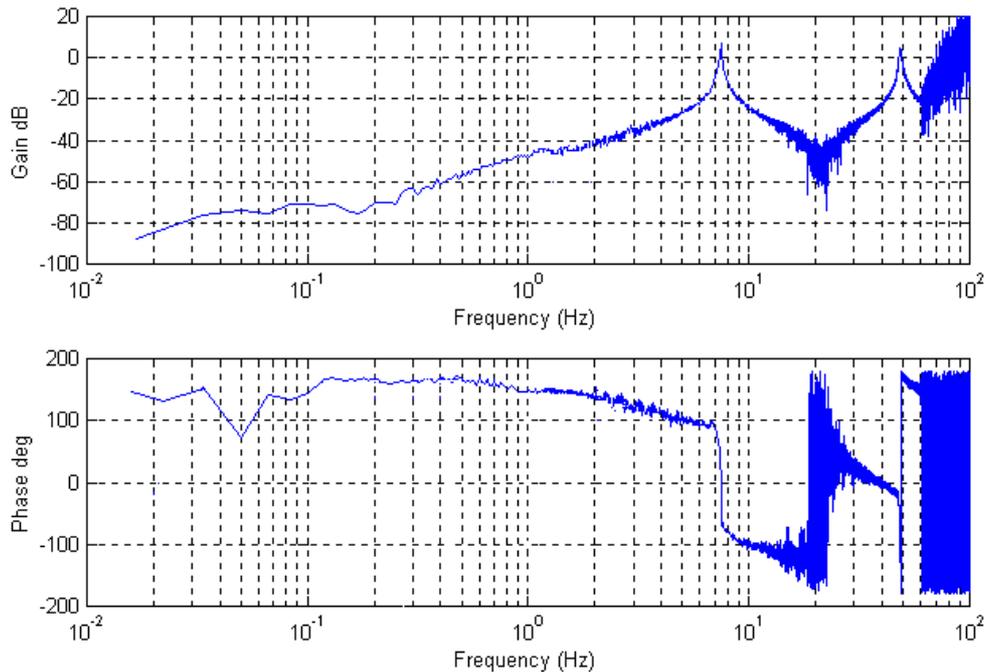
En la Figura 6.10 se ve que la vibración en la barra es mayor a medida que va aumentando la frecuencia de la señal de entrada. En la Figura 6.11 se encuentra la respuesta frecuencial del sistema obtenida con la ejecución del fichero Respuesta Frecuencial.m. Se ha escogido una escala logarítmica de frecuencias (Hz).



*Figura 6.11 Respuesta frecuencial en bajas frecuencias*

Cabe destacar que esta prueba se repitió tres veces con el objetivo de poder eliminar factores aleatorios en los resultados obtenidos. En todas las ocasiones, el resultado fue el mismo al presentado anteriormente. La interpretación del resultado obtenido es que no existen ni ceros ni polos en la región estudiada. Además se puede aceptar que a 0 Hz existiría un desfase de  $180^\circ$  lo cual es muy razonable si introducimos una consigna de posición y medimos aceleraciones.

A modo de conclusión de este apartado, se presenta (Figura 6.12) la respuesta frecuencial del sistema en lazo abierto que se ha obtenido combinando los resultados de las dos pruebas anteriores. Incluye tanto el comportamiento desde muy bajas frecuencias hasta 60 Hz.



*Figura 6.12 Respuesta frecuencial*

El siguiente objetivo será encontrar una función de transferencia que tenga el mismo diagrama de Bode que el representado en la Figura 6.12.

### 6.3 Estimación de la función de transferencia del sistema

La función de transferencia se obtendrá analizando el diagrama de Bode. Aunque es posible utilizar programas que nos den la función de transferencia directamente se ha preferido hacer el siguiente análisis manualmente para comprender mejor el sistema estudiado.

Lo primero que se debe hacer es intentar identificar los términos independientes que incluye la función de transferencia en lazo abierto del sistema. Tras una primera observación de la respuesta frecuencial, se ve que el comportamiento del sistema está gobernado por dos modos de vibración: el primero de ellos aparece alrededor de los 7 Hz y el segundo alrededor de los 50 Hz aproximadamente. También se observa que el sistema posee un retardo de transporte.

En cuanto al comportamiento a bajas frecuencias, se observa en la Figura 6.13 que el módulo de la función de transferencia observada del sistema tiene una forma creciente con pendiente + 20 dB/dec. Esto significa que la función de transferencia del sistema tiene un término del tipo:  $G(s) = s$ .

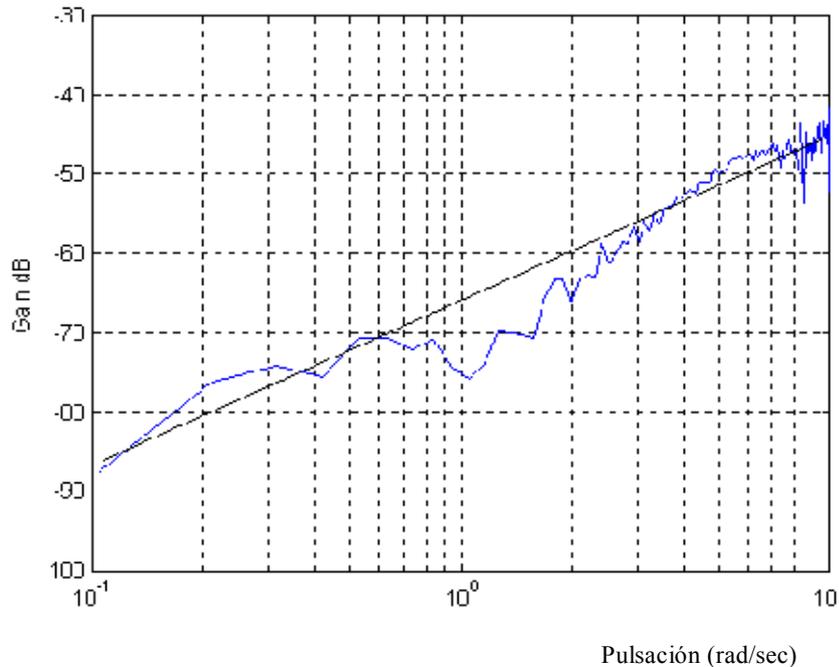


Figura 6.13 Modulo de la respuesta frecuencial en baja frecuencia

A partir de la gráfica anterior, también se puede determinar la ganancia estática del sistema ( $K$ ) a partir del valor del módulo de la respuesta frecuencial en la frecuencia  $\omega = 1$  rad/s. Como puede verse:

$$20 \log |G(s)|_{\omega=1} = 20 \log |K| \cong -65 \text{ dB}$$

Esto implica que el valor de la ganancia estática es:

$$K = -5.6234 \times 10^{-4}$$

El valor de  $K$  debe ser negativo ya que la fase del sistema a bajas frecuencias tiene un valor de  $180^\circ$ .

A medida que la frecuencia aumenta, se observa que el comportamiento del sistema sufre una variación debida al primer modo de vibración. Este se caracteriza por la existencia

de un pico en el módulo de la respuesta y por un desfase de 180° que aparece en la fase de la respuesta del sistema. Este modo de vibración es un término de segundo orden de la forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.4)$$

siendo  $\zeta$  el factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural no amortiguada.

A continuación se determinan sus parámetros característicos. Para ello se aplican las propiedades que tienen estos términos de segundo orden. La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  se obtiene de la relación que tiene ésta con la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , siendo ésta la frecuencia en la que el módulo de  $G(s)$  tiene el valor pico. La frecuencia de resonancia es fácilmente identificable a partir del diagrama de Bode obtenido. En cuanto al factor de amortiguamiento,  $\zeta$ , el método de ajuste más sencillo es el de amplitud de pico (peak-picking).

El diagrama de Bode correspondiente al primer modo de vibración se encuentra a continuación, representado en pulsaciones (rad/s):

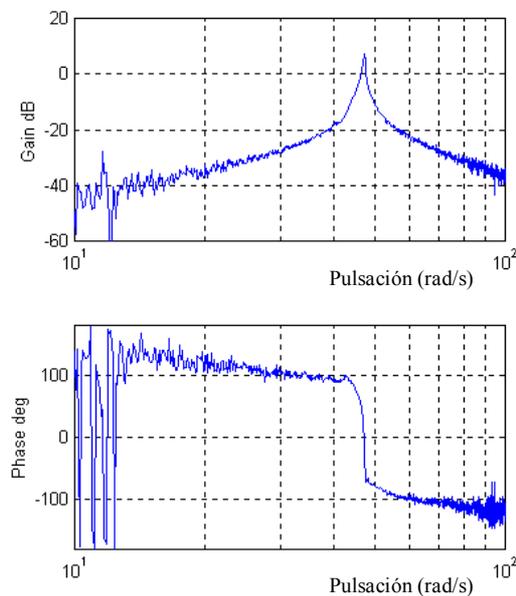


Figura 6.14 Primer modo

Para obtener los valores precisos se consulta la hoja Excel en la que Matlab ha escrito los resultados del análisis frecuencial y se obtienen los resultados siguientes.

La frecuencia de resonancia del primer modo es:  $\omega_r = 47.1239$  (rad/s). Expresada en Hz tenemos que  $f_r = 7.5$  (Hz).

A partir del método de ajuste de amplitud de pico (peak-picking) tenemos que:

$$\omega_1 = 46.7127 \text{ (rad/s)}$$

$$\omega_2 = 47.3927 \text{ (rad/s)}$$

Por tanto, el valor del factor de amortiguamiento es:

$$r = \frac{2}{\omega_r} = 7.215 \cdot 10^{-3} \quad (6.5)$$

Entonces, la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  la obtenemos de la relación:

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (6.6)$$

Su valor es de:  $\omega_n = 47.1263$  (rad/s).

Por tanto, el primer modo de vibración queda definido por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{2221}{s^2 + 0.68s + 2221} \quad (6.7)$$

A medida que se observan frecuencias mayores, se ve que el sistema sufre otra variación en su comportamiento debido a otro término de segundo orden. Pese al elevado nivel de ruido existente alrededor de los 20 Hz, se observa muy claramente la existencia de una bajada en el módulo de la respuesta y un desfase de  $180^\circ$  en la fase del sistema.

El nivel de ruido es debido a dos factores. En primer lugar, en el rango de frecuencias de 15 a 30 Hz, la barra flexible está sometida a pequeñas aceleraciones. Como el sensor de aceleración utilizado en este rango de frecuencias es el 8303A50 su sensibilidad no es tan buena para bajas aceleraciones. En segundo lugar la tarjeta de adquisición de datos “solo” tiene una resolución de 16 bits y no puede adquirirse simultáneamente valores muy grandes y muy pequeños.

Este término de segundo orden tiene la forma:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (6.8)$$

En este caso, la obtención del parámetro  $\xi$  ha sido por aproximaciones numéricas, de forma que se ha supuesto un valor inicial y se ha observado el efecto que tenía sobre la respuesta simulada del sistema. Se ha ido variando su valor hasta llegar al valor aproximado que concuerda mejor con los resultados experimentales, que ha sido:  $\xi = 0.01$ . En cuanto a  $\omega_n$ , gráficamente se ha observado que el valor de la frecuencia de resonancia es de  $\omega_r = 130.89$  (rad/s), que expresada en Hz es  $f_r = 20.833$  (Hz). De esta forma tenemos que  $\omega_n = 130.91$  (rad/s).

Por tanto, este término de segundo orden queda definido por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2.618s + 1.714 \cdot 10^4}{1.714 \cdot 10^4} \quad (6.9)$$

Si se sigue estudiado estudiando el sistema a frecuencias mas altas, se ve que el sistema sufre otra variación de su comportamiento debido ya al segundo modo de vibración. Esto se observa en el pico de resonancia que aparece en el módulo de la respuesta y en el desfase de  $180^\circ$  que aparece en la fase del sistema. Este modo de vibración vuelve a ser un término de segundo orden de la forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.4)$$

La obtención de los parámetros de este segundo modo de vibración se encuentra a continuación. La representación frecuencial de este modo aparece en la Figura 6.15.

La frecuencia de resonancia tiene un valor de  $\omega_r = 304.83$  (rad/s). Expresada en Hz tenemos que  $f_r = 48.516$  (Hz).

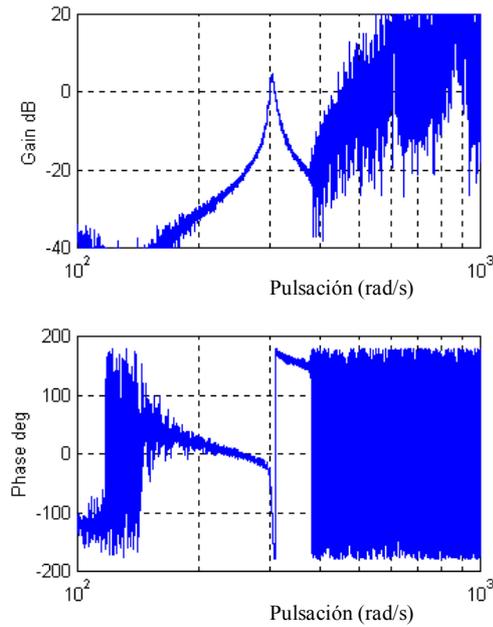


Figura 6.15 Segundo modo

A partir del método de ajuste de amplitud de pico (peak-picking) tenemos que:

$$\omega_1 = 300.33 \text{ (rad/s)}$$

$$\omega_2 = 307.6 \text{ (rad/s)}$$

Por tanto, el valor del factor de amortiguamiento es:

$$= \frac{2}{2} \frac{1}{r} = 0.0119 \quad (6.10)$$

Entonces, la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  tiene un valor de:  $\omega_n = 304.87$  (rad/s).

Por tanto, el segundo modo de vibración queda definido por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{9.295 \cdot 10^4}{s^2 \cdot 1.124 s \cdot 9.295 \cdot 10^4} \quad (6.11)$$

Una vez determinados los términos independientes que caracterizan el comportamiento frecuencial del sistema, falta por determinar el valor del retardo de transporte (T) y el efecto residual de algún término que exista en frecuencias superiores a 60 Hz (prácticamente la frecuencia máxima a la que puede llegar el cilindro hidráulico).

Para determinar el valor del retardo de transporte  $T$  ( $e^{-j\omega T}$ ) únicamente lo podemos deducir del comportamiento de fase del sistema, ya que el logaritmo de su magnitud es igual a 0 dB. En cambio, el ángulo de fase varía linealmente con la pulsación  $\omega$  según la siguiente relación:

$$\text{fase}(H(j\omega)) = -57.3 \omega T \quad (6.12)$$

Se observa que la relación representa la ecuación de una recta con pendiente  $-57.3T$ . Entonces, para determinar su valor se representará la fase de la respuesta del sistema en escala lineal. La fase del sistema en escala lineal es la siguiente:

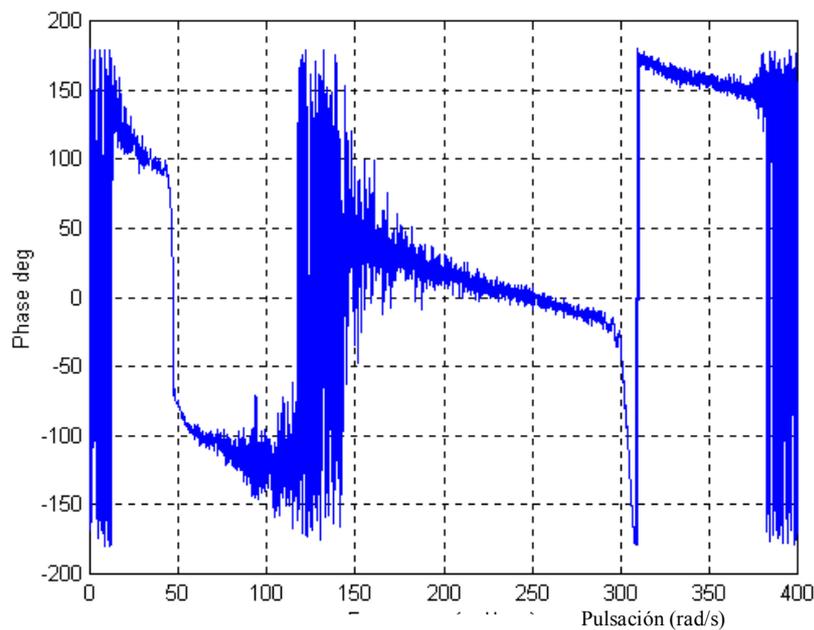


Figura 6.16 Fase del sistema (escala lineal)

Sin duda, el rango de frecuencia en el que se puede determinar con más facilidad el valor de  $T$  es cualquiera de los dos siguientes:

- $200 \text{ (rad/s)} < \omega < 300 \text{ (rad/s)}$
- $310 \text{ (rad/s)} < \omega < 375 \text{ (rad/s)}$

El valor de la pendiente de esas rectas es aproximadamente  $m = -0.4064 \omega$ . De forma que para hallar el valor de  $T$ :

$$-0.4064 \omega = -57.3 \omega T$$

El retardo de transporte tiene, pues, un valor de:

$$T = 7.093 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Nótese que por encima de 60Hz el ruido es debido a que no hemos introducido señal. Básicamente el resultado obtenido es debido al ruido que acompaña a la señal de salida.

Llegados a este punto conviene realizar una simulación para obtener la respuesta en frecuencia de la función de transferencia obtenida hasta ahora. El objetivo es hallar un posible término independiente característico en frecuencias superiores a 60 Hz, y que por lo tanto no sea observable directamente en el rango de frecuencias de interés.

La función de transferencia que tenemos hasta este momento es la siguiente:

$$G(s) = -5.6234 \cdot 10^{-4} s \frac{2221}{s^2 + 0.68 s + 2221} \frac{s^2 + 2.618 s + 1.714e004}{1.714e004} \frac{9.295e004}{s^2 + 1.124 s + 9.295e004} e^{-7.093 \cdot 10^{-3} s} \quad (6.13)$$

y desarrollándola:

$$G(s) = \frac{-1.161e005 s^3 - 3.039e00 s^2 - 1.989e009 s}{1.714e00 s^4 + 3.091e004 s^3 + 1.631e009 s^2 + 1.126e009 s + 3.538e012} e^{-7.093 \cdot 10^{-3} s} \quad (6.14)$$

La simulación se ha realizado mediante la Toolbox Simulink de Matlab. Consiste en simular la misma prueba que se realizó para obtener la respuesta frecuencial. Es decir, se introduce una señal chirp (señal senoidal de frecuencia variable entre una frecuencia máxima y mínima) y se obtiene el diagrama Bode del sistema. El esquema utilizado ha sido el siguiente:

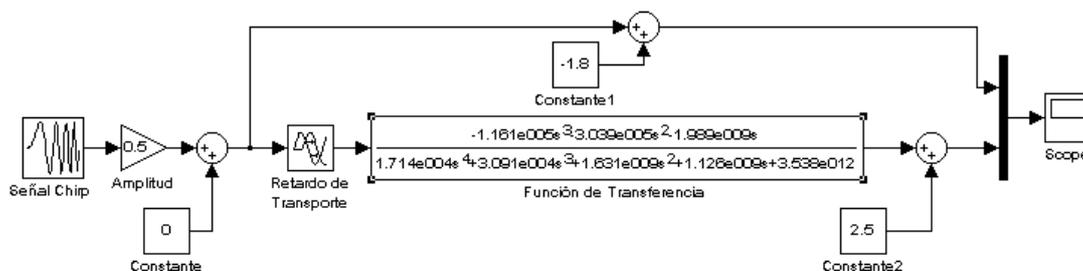


Figura 6.13 Simulación de la respuesta de la función de transferencia propuesta 1

La respuesta frecuencial obtenida se puede ver en la Figura 6.17.

En ella puede verse que el desfase del sistema a bajas frecuencias es de  $0^\circ$ . Este hecho induce a pensar que el sistema en el rango de frecuencias de interés está influenciado por un término con una pulsación característica fuera del margen de frecuencias de estudio. Este término afecta al desfase del sistema a bajas frecuencias pero no a su módulo. Concretamente, este término debe introducir un desfase de  $+180^\circ$  y un módulo de 0 dB. El término independiente que se comporta bajo estas características es de la forma:

$$G(s) = \frac{s}{n} \quad (6.15)$$

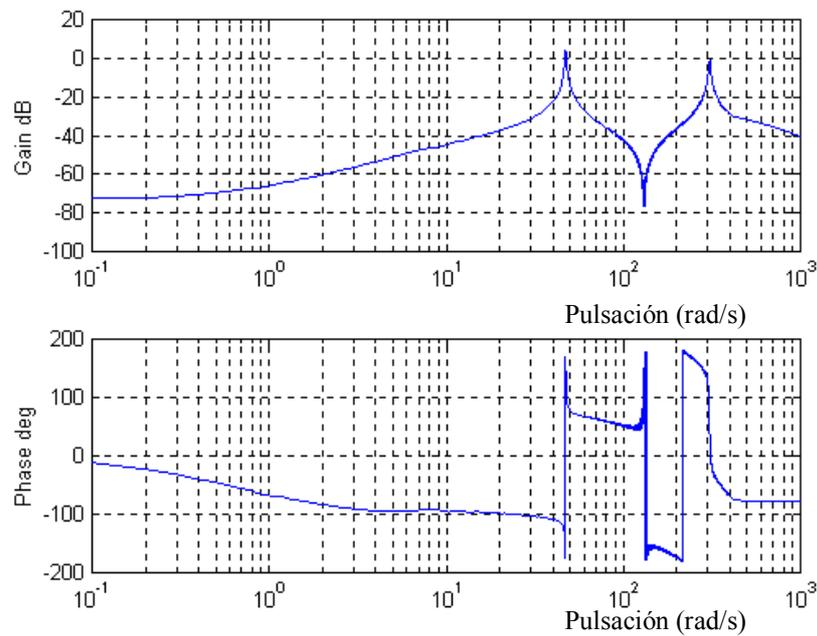


Figura 6.17 Respuesta en frecuencia de la función de transferencia 1

Este término refleja dos hechos:

- 1) La aceleración tiene la fase opuesta a la posición.
- 2) El acelerómetro solo mide correctamente en bajas frecuencias. El rango depende del acelerómetro y de la calidad de la fijación. Por supuesto su frecuencia propia se encuentra dentro de la zona de alta frecuencia que no ha sido observada.

Se ha escogido un valor de pulsación característica de  $\omega_n=1000$  rad/s. Entonces, este término independiente queda de la forma:

$$G(s) = \frac{s - 1000}{1000} \quad (6.16)$$

De esta manera, la función de transferencia en lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = -5.6234 \cdot 10^{-4} s \frac{2221}{s^2 + 0.68s + 2221} \frac{s^2 + 2.618s + 1.714e004}{1.714e004} \frac{9.295e004}{s^2 + 1.124s + 9.295e004} \frac{s - 1000}{1000} e^{-7.093 \cdot 10^{-3} s} \quad (6.17)$$

y desarrollándola:

$$G(s) = \frac{-1.161e005 s^4 + 1.158e008 s^3 - 1.685e009 s^2 + 1.989e012 s}{1.714e007 s^4 + 3.091e007 s^3 + 1.631e012 s^2 + 1.126e012 s + 3.538e015} e^{-7.093 \cdot 10^{-3} s} \quad (6.18)$$

La respuesta frecuencial de esta función de transferencia aparece representada en la Figura 6.19.

Para obtener la respuesta frecuencial de la Figura 6.19 se ha realizado la siguiente simulación realizada (Figura 6.18).

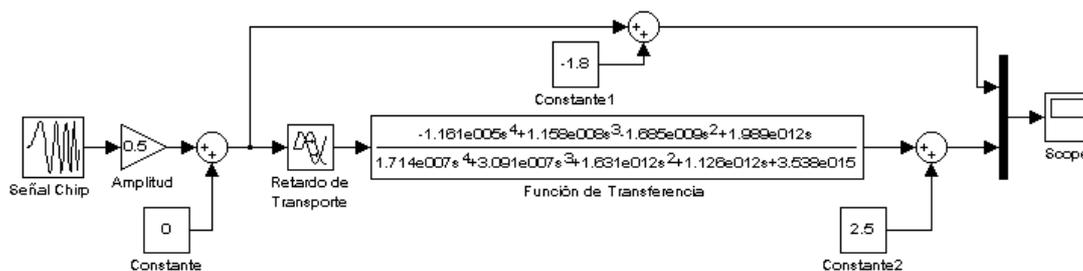


Figura 6.18 Simulación de la respuesta de la función de transferencia propuesta 2

Téngase en cuenta que la función de transferencia obtenida solo es válida entre 0 y 60 Hz

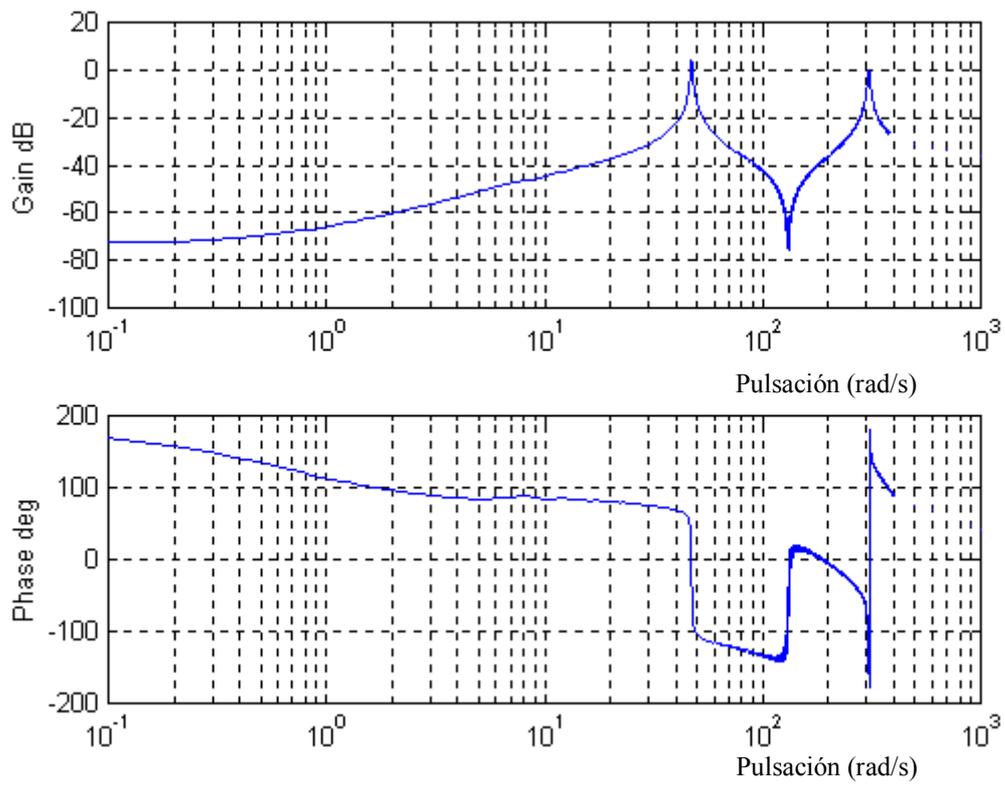


Figura 6.19

*Respuesta en frecuencia de la función de transferencia 2*

